

SV 55
00548-567

НЕЛОКАЛЬНЫЕ
НЕЛИНЕЙНЫЕ И
НЕРЕНОРМИРУЕМЫЕ
ТЕОРИИ
ПОЛЯ



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

**Нелокальные,
нелинейные
и ненормируемые
теории поля**

D2 - 9788

Материалы IV Международного совещания
по нелокальным теориям поля
20-28 апреля 1976 года, Алушта, СССР

**NONLOCAL,
NONLINEAR
AND
NONRENORMALIZABLE
FIELD THEORIES**

Proceedings of the IVth International Symposium
on Nonlocal Field Theories
April 20-28 1976, Alushta, USSR

Состав Оргкомитета

БЛОХИНЦЕВ Дмитрий Иванович	- председатель
ВОЛКОВ Михаил Константинович	- заместитель председателя
ЕФИМОВ Гарий Владимирович	- член Оргкомитета
ЕФРЕМОВ Анатолий Васильевич	- член Оргкомитета
ФИЛИПОВ Александр Тихонович	- член Оргкомитета
ЗАРУБИНА Инна Сергеевна	- член Оргкомитета
ПЕРВУШИН Виктор Николаевич	- ученый секретарь
ПАНКОВА Елена Николаевна	- секретарь

С 20 по 28 апреля 1976 г. в Алуште проходило IV Международное совещание по нелокальной квантовой теории поля.

Это совещание, подобно предыдущим (Дубна 1967 г., Азау 1970 г., и Алушта 1973 г.), рассмотрело весьма широкий круг вопросов, касающихся структуры классической и квантовой теории поля, описывающей элементарные частицы. На совещании были заслушаны обсуждены доклады по следующим проблемам:

- Конструктивная и нелокальная теория поля.
- Киральная теория и гравитация.
- Калибровочные теории и суперсимметрии.
- Солитоны.
- Дуально-резонансные модели.
- Кварковые модели протяженных частиц.

В работе совещания приняло участие 105 ученых из 11 стран мира. Было заслушано и обсуждено 48 докладов, 15 из которых имели обзорный характер. Ввиду большого количества материалов, представленных на совещание, Оргкомитет имеет возможность издать в Трудах совещания лишь обзорные доклады и часть приглашенных сообщений. Список докладов и сообщений, не вошедших в сборник, приводится в конце книги.

Оргкомитет

СОДЕРЖАНИЕ - CONTENTS

I. Д.И.Блохинцев	
Вступительное слово	
D.I.Blokhintsev	
An Introductory Talk	1

I. КОНСТРУКТИВНАЯ И НЕЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРИИ ПОЛЯ CONSTRUCTIVE AND NONLOCAL QUANTUM FIELD THEORIES

Г.В.Ефимов	
Нелокальная квантовая теория поля	
G.V.Efimov	
Nonlocal Quantum Field Theory	(11) AII
А.Д.Донков, В.Г.Кадышевский, М.Д.Матеев, Р.М.Мир-Касимов	
Взаимодействие частиц на малых расстояниях и фундаментальная длина	
A.D.Donkov, V.G.Kadyshevski, M.D.Mateev, R.M.Mir-Kasimov	
Particle Dynamics at Short Distances and Fundamental Length	(36) AII
М.А.Соловьев, В.Я.Файнберг	
Современное состояние аксиоматической квантовой теории поля	
неполиномиального роста	
M.A.Soloviev, V.Ya.Fainberg	
Present Status of Axiomatic Quantum Field Theory of	
Non-Polynomial Increase	(57) AII
С.Н.Соколов	
Челюкальная релятивистская гамильтонова квантовая теория поля	
S.N.Sokolov	
Nonlocal Relativistic Hamiltonian Quantum Field Theory	(77) AII

II. КИРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ И ГРАВИТАЦИЯ CHIRAL THEORY AND GRAVITATION

М.К.Волков, В.Н.Первушин	
Низкоэнергетическая физика мезонов (киральная теория)	
M.K.Volkov, V.N.Pervushin	
Low-Energy Physics of Mesons (Chiral Theory)	(87) AIIARI
Дж.Джин-Жюстен	
Перенормировка нелинейной σ -модели в пространстве размерности $2+$	
J.Zinn-Justin	
Renormalization of the Nonlinear σ -Model in $2+$ Dimension	(100) AII
Н.А.Черников	
Тензор и ковектор кручения в единой теории поля	
N.A.Chernikov	
Tensor and Covector of Torsion in the Unified Field Theory	(120) AII

Г.А.Вилковский, Е.С.Фрадкин

Квантование релятивистских систем со связями. Эквивалентность канонического и ковариантного формализмов в квантовой теории гравитационного поля

G.A.Vilkovisky, E.S.Fradkin

Quantization of Relativistic System with Connections. Equivalence Canonical and Covariant Formalism in Quantum Theory of Gravitation (141) AII

III. КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ И СУПЕРСИММЕТРИИ GAUGE THEORIES AND SUPERSYMMETRIES

А.А.Славнов

Суперсимметричные калибровочные теории поля

A.A.Slavnov

Supersymmetric Gauge Theories (155) AII

В.И.Огиевский, Е.С.Сокачев

Уравнения движения для суперполей

V.I.Ogievetsky, E.A.Sokachev

Equations of Motion for Superfields (183) AII

IV. СОЛИТОНЫ SOLITONS

Л.Д.Фаддеев

В поисках многомерных солитонов

L.D.Faddeev

In Search for Multidimensioned Solitons (201) AII

А.С.Шварц

Топологически нетривиальные решения классических уравнений и их роль в квантовой теории поля

A.S.Shvartz

Topologically Nontrivial Solutions of Classical Equations and Their Role in Quantum Field Theory (229) AII

V. ДУАЛЬНО-РЕЗОНАНСНЫЕ МОДЕЛИ DUAL-RESONANCE MODELS

Б.М.Барбашов, В.В.Нестеренко

Динамика релятивистской струны и ее связь с физикой адронов

B.M.Barbashov, V.V.Nesterenko

Dynamics of Relativistic String and Its Connection with Hadron Physics (243) AII

Д.В.Волков, А.А.Желтухин, А.И.Пашнев

Спонтанные вакуумные переходы в дуальной модели Невью-Шварца

D.V.Volkov, A.A.Jeltuchin, A.I.Pashnev

Spontaneous Vacuum Transition in Dual Neveu-Schwarz Model (273) AII

Дж.Шерк

Дуальные модели - кандидаты на роль ренормируемой теории гравитации

J.Scherk

Dual Models: Candidates for a Renormalizable Theory of Gravity

286 A11

И.Т.Тодоров

О гипотезе дуальности в квантовой теории поля

I.T.Todorov

On the Duality Property in Quantum Field Theory

283 A11

VI. КВАРКОВЫЕ МОДЕЛИ ПРОТЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

QUARK MODELS OF EXTENDED PARTICLES

А.Т.Филиппов

Динамика составных моделей адронов

A.T.Filipov

Dynamics of Composite Models

319 A21

И.Согами

Нелокальная теория поля кварковой модели

I.Sogami

Nonlocal Field Theory of the Quark Model

352 A11

С.М.Биленький, Б.М.Понтекерво

Кварк-лептонная аналогия и осцилляции нейтрино

S.M.Bilenky, B.M.Pontekorvo

Quark-Lepton Analogy and Neutrino Oscillations

A21

363 A21

Р.Марнелиус

Мультилокальный теоретико-полевой переход к рассеянию мешков

R.Marnelius

Multilocal Quantum Field Theory Approach to $B_{\pi}g$ Scattering

369 A11

Список участников

List of the Participants 378

Список докладов, не вошедших в сборник

List of the Reports not Included in the Proceedings 380

Рукопись поступила в издательский отдел
14 мая 1976 года.

Received by Publishing Department
on May 14, 1976.

ВСТУПИТЕЛЬНОЕ СЛОВО

Д.И. Блохинцев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Со времени последнего совещания по "Нелокальной квантовой теории поля" прошло три года. Рискуя быть, в некоторой мере, непонятыми, мы сохранили это традиционное название "Совещание", которое является уже четвертым по счету.

Как вы знаете, уже на прошлых совещаниях круг рассматриваемых вопросов был значительно шире, нежели это указано в названии.

На самом деле мы рассматривали ранее и хотели бы рассмотреть теперь самые острые и злободневные вопросы современной теории квантовых полей.

Я повторяюсь, и тем не менее подчеркну, что традиционное название нашего совещания призвано отметить нашу готовность серьезно обсудить и те направления в теории поля, которые выходят за рамки общепринятых.

Более конкретно я мог бы сказать, что мы готовы добровольно выслушать и тех теоретиков, которые выражают сомнение в том, что основное соотношение локальной квантовой теории поля

$$[\varphi(x), \varphi(y)]_- = 0, \quad (x-y)^2 < 0 \quad (1)$$

должно почитаться священным.

Мы готовы выслушать и тех, кто предлагает пересмотреть самую основу основ современной теории — геометрию микромира. Геометрию, которая в ее теперешней форме повторяет геометрию макромира.

Особое внимание на этот раз будет уделено тем направлениям в разработке методов квантовой теории поля, которые выходят за рамки теории возмущений, — будем называть такого рода методы в теории поля существенно нелинейными.

В основе толерантного подхода, характеризующего самый дух нашего совещания, лежит глубокое убеждение в том, что в конечных системах, каковыми являются элементарные частицы, не должно бы появляться расходящихся, бесконечных величин. Однако они появляются, и притом самым настойчивым образом.

Насколько я могу судить, в этом вопросе существует некоторое расхождение взглядов между физиками самого старшего и современного поколений.

Так, П.А.М. Дирак исключил из своей монографии метод бесконечных перенормировок полей, считая этот метод временным, переходящим приемом вычислений. Р. Фейнман подчеркивал, что перенормировка — "не что иное, как способ замести мусор под ковер"...

Однако действительное положение сейчас таково, что без перенормировки не сделаешь и шагу. По этой причине активно работающие молодые теоретики не столь беспокоятся о расходимостях, как это свойственно старшим, и отлично оперируют методами перенормировок.

Не говоря уже о том, что многие важные успехи теории были достигнуты на совсем ином пути, — на пути применения феноменологических методов. Среди достижений этого направления следует отметить такой важный подход, как "счет кварков", приведший к доказательству сложной структуры элементарных частиц — адронов.

Возвращаясь к теории поля и настаивая на том, что "Карфаген расходимостей" должен быть уничтожен, я думаю, что мы находимся перед дилеммой, которая ждет своего прояснения: расходимости могут быть ликвидированы на пути глубокого изучения вакуума как среды, не отделимой от элементарных частиц, на пути построения методов обращения с существенно нелинейными теориями, выходящими за рамки теории возмущений.

Работы, проведенные у нас еще в 50-х годах и посвященные сильно взаимодействующим и существенно нелинейным полям, основаны на представлении поля в виде

$$\hat{\phi}(x) = \phi(x) + \hat{\psi}(x),$$

где сильное поле $\phi(x)$ может рассматриваться как среднее по вакууму или по одночастичному состоянию, а поле $\hat{\psi}(x)$ описывает малые квантовые флуктуации поля и указывает на существование эффектов, не допустимых компетенции теории возмущений. Например,

волна поля с массой, равной нулю, может обращаться вокруг заряда, квантовое поле может проникать через барьеры в функциональном пространстве и многие другие нелинейные эффекты.

В последнее время получили развитие существенно нелинейные модели частиц, известные ныне под названием солитонов — уединенных частицеподобных образований из поля.

Если взять теорию квантовой теории поля, то такие образования, видимо, могли бы обуславливаться сильной поляризацией вакуума. Обсуждению этих важных и крайне интересных работ, посвященных методам расчета таких моделей, будет уделено большое внимание на нашем совещании.

Другое направление — это построение нелокальной теории поля, т.е. такой теории, в которой соотношение (I) обобщается тем или иным способом.

В этой связи можно отметить два подхода к проблеме:

а) формальный, основанный на введении нелокальных формфакторов (Г.В. Ефимов) и б) более глубокий и радикальный, основанный на идее изменения геометрии в микромире, на переходе к стохастической геометрии, в которой координаты точечного события $S(x)$ рассматриваются как некоммутирующие операторы \hat{x}_μ :

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu]_{\pm} \neq 0.$$

Знак \pm указывает на две возможности, из которых первая ведет к „ Γ ”-геометрии, вторая, значительно более изученная (В.Г. Кадешевский), исходит из идеи кривого импульсного пространства.

На нашем совещании мы услышим об успехах, сделанных и в том и в другом направлениях.

Большая часть программы настоящего совещания будет посвящена выяснению той важной роли, которую играет учет динамических симметрий при построении квантовой теории поля. Изучение такого рода симметрий позволило в последние 10–15 лет достигнуть больших успехов в самых различных областях квантовой теории поля. Здесь прежде всего следует отметить известные достижения в построении единых калибровочных теорий сильного, слабого и электромагнитного взаимодействий элементарных частиц, изучение суперсимметричных моделей и успешное описание низкоэнергетической адронной физики с использованием алгебры токов, G -моделей и

квантовой киральной теории поля. Тесно связаны с изучением и учетом динамических симметрий и вопросы, касающиеся построения лагранжианов, приводящих к устойчивым изолированным решениям — солитонам; построения ряда дуально-резонансных моделей (например, модель Извиц-Шварца); и, наконец, плодотворное совместное использование идеи киральной симметрии и модели кварков для описания различного рода распадов адронных резонансов.

Наше совещание, в существенном, — совещание теоретиков.

Это обязывает нас особенно основательно учитывать тот огромный прогресс, который произошел за последние три года в области экспериментальной физики.

Идея о сложной структуре элементарных частиц имеет уже большую историю, начинающуюся со времени классических работ Э. Ферми и, особенно, С. Сакаги. Однако только теперь эта идея стала убеждением всех физиков.

Открытие глубоко неупругих процессов принесло доказательство существования внутри элементарных частиц точечных объектов — кварков. Каковы бы ни были сейчас взгляды теоретиков на эти новые структурные элементы — в частности, считать ли их субэлементарными частицами или возбуждениями адронов, не существующими вне адронной материи, — эти объекты являются теперь неотъемлемой частью физической реальности.

Среди физиков, пожалуй, именно С. Сакага особенно настойчиво настаивал на том, что в учении о строении материи прогресс всегда был связан с открытием новых структурных элементов.

Эта идея в ее наиболее примитивной форме наводит на мысль об уподоблении частиц известной русской игрушке "матрешке" или вырезным китайским шарикам один внутри другого.

Отсюда один шаг до представления о том, что мы и в дальнейшем будем встречаться с новыми точечными объектами.

Ясно, что при этом расхождении, свойственные локальной теории, перемещались бы на все более глубокие и глубокие слои материи, переходя в область все меньших и меньших пространственно-временных масштабов. И так без конца.

С чисто методологической точки зрения такая концепция не дает оснований для требования немедленного устранения бесконечностей. Так, никто не нервничает по поводу того, что мы не знаем, что творится на границах Вселенной.

Однако история развития физики учит, что переход на другой уровень строения материи обычно сопровождался и изменением законов движения.

М.А. Марков обратил внимание на то, что в области крайне малых масштабов, порядка

$$\lambda_g = \sqrt{\frac{8\pi\hbar}{c^3}} \approx 10^{-33} \text{ см},$$

гравитационное взаимодействие должно ограничить возможный рост масс субчастиц массой гравитационного "максимона"

$$M_g = \frac{\hbar}{\lambda_g c} \approx 10^{-5} \text{ г}.$$

Работы, посвященные квантовой теории гравитации и учету ее возможной роли в мире элементарных частиц, составляют одну главу программы нашего совещания.

Представляется весьма интересным то, что удалось применить методы киральной теории поля, первоначально развитые для пионной низкоэнергетической физики, к квантованию гравитационных полей.

Имеются определенные успехи и в квантовании полей в искривленных пространствах.

Можно ожидать, что ограничения на массу субчастиц наступят ранее, нежели это оценивается из гравитации. Именно ограничение на массу субчастиц и возможное изменение геометрии в малом можно связать с предположением о существовании "слабого максимона" с массой M_F , определяемой характерной для слабого взаимодействия длиной λ_F :

$$\lambda_F = \left(\frac{G_F}{m_p^2} \right)^{1/2} \approx 10^{-16} \text{ см}, \quad M_F = \frac{\hbar}{\lambda_F c} \approx 10^{-22} \text{ г}.$$

Вытекающие из такой идеи геометрической концепция и возможные ее следствия будут предметом обсуждения на этом совещании.

Если ранее можно было лишь теоретически предполагать, что слабое взаимодействие может стать сильным (сравниться с электромагнитным), то теперь рост сечений слабого взаимодействия экспериментально доказан. Доказано также существование нейтральных токов, что существенно дополняет картину слабых взаимодействий. Есть указание на существование тяжелого лептона ℓ (масса 1,8 ГэВ), распадающегося по каналу $\ell \rightarrow \ell + \gamma$.

Однако по-прежнему проблема различия масс электрона и мюона остается вызовом теоретикам.

В теоретическом аспекте эта проблема получила обещающее развитие в концепции калибровочной теории с учетом спонтанного расщепления вакуума (работы Вейнберга, Салама и др.).

В направлении объединения полей в единое поле развивается концепция суперсимметрии, объединяющая в едином суперполе спинорные и бозонные поля.

Мы будем обсуждать здесь развитие этих направлений.

Несмотря на все остроумие и привлекательность этих идей, было бы, видимо, преждевременным утверждать, что они бесспорно решают существенные задачи: проблему объединения полей в единой концепции и „ $M-e$ ” - проблеме.

M - мезон есть частица нестабильная. Не является ли это намёком на то, что она должна быть частицей сложной, на то, что внутри нее должно иметь место некоторое дѣйствие, дающее повод для ее распада?

Другая сторона дела заключается в том, что мир адронов и мир лептонов продолжают оставаться не соединенными между собой, причем наличие субэлементарных объектов - кварков, как будто не помогает избежать этой обособленности.

В настоящее время интересы теоретиков, кажется, более сосредоточиваются на проблемах структуры адронов, нежели лептонов. Этот интерес был особенно стимулирован открытием семейства ψ -частиц. Специальное обсуждение этих новых членов семейства мезонов не входит в программу нашего совещания.

Два дня отводится для обсуждения дуально-резонансных моде-

лей адронов, тесно связанных с теорией любопытного объекта — релятивистской струны, и кварковых моделей протяженных частиц. И то и другое получило своё начало в ранних работах дубненских теоретиков: теория релятивистской струны восходит к ранним работам Н.А. Черникова и Б.М. Барбашова, простейшая кварковая модель нуклона — к работе Н.Н. Боголюбова.

В этом же разделе совещания будет также обсуждаться проблема "мешка" для кварков. Как известно, такое название получили модели элементарных частиц, претендующие на объяснение невозможности существования свободных кварков. Эта проблема будет рассмотрена как с точки зрения моделей, так и на основе теории поля.

Я заканчиваю свой вводный доклад в надежде, что он поможет ориентироваться участникам совещания в большой программе, подлежащей обсуждению в эти немногие дни совместных дискуссий.

I.

Конструктивная и нелокальная теории поля
CONSTRUCTIVE AND NONLOCAL
QUANTUM FIELD THEORIES

НЕЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Г.В. Ефимов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

За время, прошедшее с III Международного совещания в Алуште в 1973 году, в теории, описывающей нелокальные взаимодействия квантованных полей, получены следующие результаты:

(1) оказалось, что S -матрица, описывающая нелокальные взаимодействия, удовлетворяет условию микропричинности^{/1/};

(2) в рамках теории возмущений завершено построение нелокальной спинорной электродинамики^{/2-5/};

(3) доказано, что для определенного класса лагранжианов взаимодействия ряды теории возмущений сходятся в евклидовой области^{/6,7/};

(4) оказалось, что методы, развитые в нелокальной теории, могут быть использованы для полевого описания кварков^{/8/}.

Таким образом, к настоящему времени полностью завершено построение в рамках теории возмущений S -матрицы, описывающей фактически произвольные нелокальные взаимодействия скалярных полей, спинорную электродинамику, а также предложен метод, позволяющий изучать электромагнитные взаимодействия с высшими спинами.

Прежде всего кратко остановимся на основных идеях построения теории нелокальных взаимодействий скалярного однокомпонентного поля $\varphi(x)$ ^{/9/}. Предполагается, что скалярные частицы описываются лагранжианом некоторого общего вида:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_I(x), \quad (1)$$

где

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi(x) \partial_\mu \varphi(x) - m^2 \varphi^2(x)), \quad (2)$$

$$\mathcal{L}_I(x) = g U(\varphi(x)). \quad (3)$$

Лагранжиан $\mathcal{L}_0(x)$, описывающий невзаимодействующее поле, является обычным, так что невзаимодействующие частицы описываются стандартными методами фокковского пространства.

В лагранжиане взаимодействия функция $U(u)$ аналитична в точке $u=0$, а в остальном — достаточно произвольная, например: $U(u) = u^3, u^4, u^3 e^{-u^2}, \frac{u^4}{(1+u^4)}, \frac{u^3}{\sqrt{1+u^2}}$ и т.д.

Идея введения нелокального взаимодействия состоит в том, чтобы в лагранжиан взаимодействия (3) вместо поля $\varphi(x)$ ввести "размазанное" с помощью некоторого фактора $K(x-x')$ поле $\Phi(x)$:

$$\varphi(x) \Rightarrow \Phi(x) = \int dx' K(x-x') \varphi(x'), \quad (4)$$

так что

$$g U(\varphi(x)) \Rightarrow g U'(\Phi(x)). \quad (4')$$

Однако, если в качестве факторов выбирать функции вида

$$K(x-x') = \exp \left\{ - \left[\frac{(x-x')^2}{\ell^2} \right]^2 \right\} \quad \text{и т.д.,}$$

то в теории с таким фактором оказывается ряд серьезных трудностей (см., например, ¹⁰⁾), практически закрывающих такой способ ее модификации.

Наш метод построения теории нелокальных взаимодействий опирается на два основных пункта:

1) факторы $K(x-x')$ должны быть выбраны из класса аналитических функционалов;

2) фактор должен быть проквантован.

Мы выбираем фактор $K(x-x')$ из класса, для которого справедливо представление

$$K(x-x') = K(\ell^2 \square) \delta^{(4)}(x-x'), \quad (5)$$

где $K(z)$:

1) целая аналитическая функция в комплексной z -плоскости некоторого порядка роста (конечного или бесконечного);

$$2) K(k^2) = O\left(\frac{1}{|k^2|^a}\right), \quad k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 \rightarrow -\infty;$$

$$3) [K(z)]^* = K(z^*);$$

$$4) K(m^2 \rho^2) = 1 \quad \text{— условие нормировки.}$$

Такой выбор фактора соответствует следующей интуитивной физической картине. Рассмотрим потенциал взаимодействия двух точечных покоящихся частиц, расстояние между которыми равно z . Если этот потенциал обусловлен обменом какими-либо физическими частицами (фотонами, π -мезонами и т.д.), то такой потенциал убывает при $z \rightarrow \infty$ не быстрее, чем линейная экспонента, а фурье-образ его имеет особенность в импульсном пространстве. Так, например,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &\Rightarrow \frac{1}{k^2} \Rightarrow \frac{1}{-k_0^2 + \vec{k}^2}, \\ \frac{1}{z} e^{-mz} &\Rightarrow \frac{1}{m^2 + k^2} \Rightarrow \frac{1}{m^2 - k_0^2 + \vec{k}^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Наш выбор класса факторов соответствует тому, что мы вводим потенциалы, убывающие быстрее любой линейной экспоненты. Таким образом, они не могут быть обусловлены обменом каких-либо физических частиц. Математическим выражением этого утверждения является то, что фурье-образ потенциала является целой функцией в импульсном пространстве. Например,

$$e^{-\left(\frac{z}{l}\right)^2} \Rightarrow e^{-l^2 k^2} \xrightarrow[\text{релятивистский случай}]{} e^{l^2(k_0^2 - \vec{k}^2)} \quad (6')$$

Для функционала $K(x)$, удовлетворяющего перечисленным выше условиям, справедливо представление

$$(K, f) = \int d^4x K(x) f(x) = K(l^2 \square) f(x) \Big|_{x=0} = \int d^3p a(p^2) f(i p_4, \vec{p}), \quad (7)$$

где интегрирование в последнем интеграле проводится по евклидову пространству $p^2 = p_4^2 + \vec{p}^2$. Наиболее существенным обстоятельством является то, что определение функционала требует выхода в комплексную плоскость по времени $x_0 \rightarrow x_0 + i x_4$.

Под квантованием формфактора $K(x-x')$ понимается следующее ^{II}. Вместо "размазанного" поля $\Phi(x)$ в (4) мы вводим систему полей

$$\Phi(x) \Rightarrow \Phi^\delta(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_j(\delta) \varphi_j^\delta(x), \quad (8)$$

где δ — некоторый параметр регуляризации. Поле фиктивных квантов $\varphi_j^\delta(x)$ ($j=1, 2, 3, \dots$) является скалярным полем с массой

$$m_j^2(\delta) = m^2 \left(1 + \frac{j^\sigma}{\delta} \right) \quad (j=1, 2, 3, \dots), \quad (9)$$

где σ — некоторое число, зависящее от порядка роста формфактора и удовлетворяющее перестановочным соотношениям с индефинитной метрикой:

$$[\varphi_j(\vec{x}, t), \dot{\varphi}_{j'}(\vec{x}', t)]_- = i (-1)^j \delta_{jj'} \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (10)$$

При $\delta \rightarrow 0$ $m_j^2(\delta) \rightarrow \infty$. Это означает, что если мы всегда рассматриваем состояния с фиксированным значением энергии E , то для любого фиксированного E всегда найдется такое малое $\delta > 0$, что данное состояние не будет содержать ни одного фиктивного кванта.

Коэффициенты $A_j(\delta)$ подобраны таким образом, что

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T(\Phi^\delta(x) \Phi^\delta(y)) | 0 \rangle &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_j^2(\delta) \Delta_j^{(c)}(x-y) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j A_j^2(\delta)}{m_j^2(\delta) - k^2 - i\varepsilon} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{[K(k^2 \ell^2)]^2}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}; \\
\langle 0 | \Phi^\delta(x) \Phi^\delta(y) | 0 \rangle &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_j^2(\delta) \Delta_j^{(c)}(x-y) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \Delta^{(c)}(x-y).
\end{aligned} \tag{II}$$

Введение таких фиктивных полей позволяет в интегралах, определяющих любые матричные элементы S^δ -матрицы, перейти к евклидовой метрике по всем внутренним интегрированиям, так что в пределе $\delta \rightarrow 0$ сходимость интегралов будет обеспечена, поскольку формфактор убывает в евклидовом направлении.

Изложенный подход позволяет построить S -матрицу, конечную и унитарную в каждом порядке теории возмущений, как предел

$$S = \lim_{\delta \rightarrow 0} S^\delta. \tag{I2}$$

Об этом говорилось на предыдущем совещании^{/9/}, и мы не будем на этом более останавливаться.

Микропричинность

Остановимся подробнее на условии причинности. Это условие призвано обеспечить такую ситуацию, при которой всякое событие, происшедшее в системе, могло бы оказывать влияние на ход развития системы лишь в будущем, но ни в коем случае не влиять на прошлое. Следует заметить, что если бы в квантовой теории поля уравнение Шредингера в представлении взаимодействия или уравнения Томонага-Швингера

$$i \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} S[\sigma, x] = g \mathcal{H}_I(x) S[\sigma, x] \tag{I3}$$

имело математический смысл, то условие причинности было бы автоматически выполнено как непосредственное свойство этих уравнений.

Однако в силу известных трудностей теории (теорема Хаага и существование представления взаимодействия, ультрафиолетовые расходимости), мы не можем быть уверены, что после регуляризаций различного рода сингулярных выражений в матричных элементах S -матрицы полученная S -матрица будет автоматически удовлетворять всем необходимым условиям.

Математически условие причинности наиболее четко было сформулировано Боголюбовым (см., например, ^{12/}) и записывается

$$S[g_1 + g_2] = S[g_1]S[g_2], \quad (I4)$$

если $\text{supp } g_1 \cong \text{supp } g_2$.

Здесь предполагается, что константа связи g в (I3) заменяется функцией $g(x)$, которая может быть выбрана отличной от нуля в любой четырехмерной области пространства-времени \mathbb{R}^4 .

Условие (I4) можно записать в дифференциальной форме

$$R(x, y) = \frac{\delta}{\delta g(x)} \left[\frac{\delta S}{\delta g(y)} S^+ \right] = 0 \quad \text{при } x \approx y. \quad (I5)$$

Для проверки условий причинности (I4) или (I5) необходимо знать, каков характер обобщенных функций

$$\langle \alpha | R(x, y) | \beta \rangle, \quad (I6)$$

где $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$ - некоторые произвольные физические состояния.

В случае используемых нами формфакторов (5) обобщенные функции (I6) определены только на пространствах целых аналитических функций, как видно из простейшего представления (7). Функция включения взаимодействия $g(x)$ в (I4) также должна принадлежать пространству основных функций, является целой и не может быть отличной от нуля только на некотором ограниченном в \mathbb{R}^4 носителе. Поэтому условия (I4) или (I5) в нашем случае непосредственно проверить нельзя.

Наше определение условия причинности основано на следующей идее. В случае локальной теории, построенной в рамках обобщенных функций умеренного роста, каждый матричный элемент (I6) имеет своим носителем конус будущего ($y=0$):

$$\overline{V}^+ = [x: x_0 \geq 0, x^2 \geq 0]. \quad (I7)$$

В случае формфакторов, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, оказывается, что аналитические функционалы

$$\int d^4x f(x) \langle \alpha | R(x, 0) | \beta \rangle, \quad (I8)$$

заданные на пространствах целых аналитических функций $f(z)$, могут быть расширены на пространства функций, аналитических на множестве

$$\overline{V}^+ + i\mathbb{R}^4 \subset \mathbb{C}^4. \quad (I9)$$

Другими словами, область интегрирования в (I8) в комплексном пространстве \mathbb{C}^4 может быть расположена таким образом, что ее проекцией на вещественное пространство \mathbb{R}^4 является конус будущего \overline{V}^+ .

Поэтому S -матрицу, матричные элементы которой удовлетворяют этому условию, также можно считать микропричинной.

В работе ^{1/} показано, что это условие может быть сформулировано на языке так называемых проектирующих последовательностей, основные свойства которых следующие. Последовательность целых функций $\{f_{G,\lambda}(z)\}$ называется проектирующей, если

1) $f_{G,\lambda}(z)$ — целая в \mathbb{C}^4 при $\lambda > 0$,

$$2) \lim_{\lambda \rightarrow 0} f_{G,\lambda}(x+iy) = \begin{cases} 0, & x \notin G \subset \mathbb{R}^4, \\ \psi(x+iy), & x \in G \subset \mathbb{R}^4, \end{cases}$$

где $\psi(z)$ — некоторая достаточно произвольная функция, аналитическая в $G + i\mathbb{R}^4$.

Тогда условие микропричинности S -матрицы, матричные элементы которой являются аналитическими функционалами, называется микропричинной, если

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int d^4x f_{\epsilon, \lambda}(x) \langle \alpha | R(x, 0) | \beta \rangle = 0 \quad (20)$$

для любых проектирующих последовательностей, для которых

$$G \cap \overline{V^+} = 0.$$

В работе [1] показано, что S -матрица, построенная обсуждаемым методом, удовлетворяет сформулированному условию микропричинности. Следует, однако, подчеркнуть, что сформулированное условие в какой-то мере является формальным. Вопрос о причинности может быть недвусмысленно решен лишь в теории, где математический аппарат допускает корректную постановку задачи Коши. В нашем случае мы, возможно, имеем обобщение уравнения Шредингера в форме

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = g \int_{-l}^l d\tau H_I(t + i\tau) \psi(t + i\tau), \quad (21)$$

которое допускает причинное развитие волновой функции $\psi(t)$ во времени. Однако реальной операторной реализации уравнения (21) пока найти не удалось.

Во всяком случае, полученная нами S -матрица удовлетворяет всем условиям макропричинности, известным вплоть до настоящего времени.

Спинорная электродинамика

Обычно лагранжиан спинорного поля $\psi(x)$, взаимодействующего с электромагнитным $A_\mu(x)$, выбирается из требования градиентной инвариантности, согласно которому он должен быть инвариантен относительно группы градиентных преобразований

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\Rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x), \\ \psi(x) &\Rightarrow \psi(x) e^{-ie f(x)} \end{aligned} \quad (22)$$

где e обозначает заряд поля $\psi(x)$. В этом смысле заряд e является единственной электромагнитной характеристикой спинорного поля, которая не может быть вычислена в теории.

Наше нелокальное обобщение теории электромагнитных взаимодействий состоит в следующем. Мы вводим вместо (22) группу:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\Rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x), \\ \psi(x) &\Rightarrow \psi(x) e^{-ie \int d^4x' K(x-x') f(x')}. \end{aligned} \quad (23)$$

где фактор $K(x-x')$ удовлетворяет условиям (5) при $m=0$. Таким образом, в (23), кроме заряда e , поле электронов характеризует функция $K(x-x')$, которая непосредственно связана с некоторым заданным извне распределением заряда электрона. Действительно, если считать, что $f(x)$ не зависит от x_0 , то тогда

$$\begin{aligned} \int d^4x' K(x-x') f(x') &= K(\ell^2 \square) f(\vec{x}) = K(\ell^2 \Delta) f(\vec{x}) = \\ &= \int d\vec{x}' \beta(\vec{x}-\vec{x}') f(\vec{x}'), \end{aligned} \quad (24)$$

где $K(\ell^2 \vec{p}^2) = \int d\vec{x} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \beta(\vec{x}^2)$

и $\beta(\vec{x}^2)$ имеет смысл функции распределения заряда.

Параметр ℓ в $K(\ell^2 \square)$ не является "элементарной длиной", под которой обычно понимается некоторая новая фундаментальная постоянная размерности длины, одинаковая для всех полей и процессов. В нашем подходе каждое поле заряженных частиц может характеризоваться своими параметрами e , ℓ и $K(x-x')$, поскольку, вообще говоря, каждая частица может иметь свой собст-

венный заряд и его пространственное распределение, отличающиеся от других частиц.

В случае спинорной электродинамики полный лагранжиан спинорного и электромагнитного полей, инвариантный относительно группы (23), имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) &= \mathcal{L}_{A,0}(x) + \mathcal{L}_{e,0}(x) + \mathcal{L}_I(x), \\ \mathcal{L}_{A,0}(x) &= -\frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu(x) \partial_\nu A_\mu(x), \\ \mathcal{L}_{e,0}(x) &= -\bar{\psi}(x)(i\hat{\partial} + m)\psi(x), \\ \mathcal{L}_I(x) &= e \bar{\psi}(x) \not{A}_\mu \psi(x) \mathcal{A}_\mu(\ell, x),\end{aligned}\tag{25}$$

где

$$\mathcal{A}_\mu(\ell, x) = \int d^4x' K(x-x') A_\mu(x').$$

Используя методы, развитые в теории скалярного поля, т.е. должным образом квантуя поле $\mathcal{A}_\mu(\ell, x) \Rightarrow \mathcal{A}_\mu^0(\ell, x)$, получаем

$$S^\delta = T \exp \left\{ i e \int d^4x \mathcal{L}_I^\delta(x) \right\}.\tag{26}$$

При изложенной модификации электродинамики в ряду теории возмущений меняется лишь пропагатор фотона

$$\frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \Rightarrow \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \left[k(k^2 \ell^2) \right]^2 = \frac{g_{\mu\nu} V(-k^2 \ell^2)}{k^2 + i\varepsilon}.\tag{27}$$

Поэтому будут сходиться интегралы, соответствующие всем тем диаграммам Фейнмана, где в каждый цикл интегрирования будет входить, по крайней мере, один пропагатор фотона. Единственной расходящейся диаграммой будет лишь поляризация вакуума, показанная на рис. I.



Рис. I.

Для ее регуляризации можно воспользоваться различными методами. Нам кажется наиболее предпочтительной регуляризация Паули-Вилларса по циклу с дополнительными условиями. В принципе, можно ввести фиктивные заряженные поля, при помощи которых можно математически реализовать эту регуляризационную процедуру на языке операторов.

Таким образом, в рамках сформулированных правил сходятся все интегралы, соответствующие любым диаграммам Фейнмана в спинорной электродинамике.

В рамках построенной нелокальной электродинамики мы обсудим следующие вопросы:

- 1) собственная энергия электрона и принцип соответствия (классический предел при $\hbar \rightarrow 0$);
- 2) формфактор, его выбор и однозначность;
- 3) величина элементарной длины ℓ :
 - а) теоретические оценки,
 - б) экспериментальные оценки.

Вплоть до настоящего времени в литературе (см. например, /13/) утверждалось, что собственная энергия электрона в классической и квантовой теории поля имеет различную природу. Обычно к такому выводу приходят при сравнении выражения для собственной массы электрона во втором порядке квантовой электродинамики:

$$\delta m_{кв} = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \cdot \frac{3}{4\pi} \cdot m \ln \frac{\hbar^2}{m^2 c^2 r_0^2} \quad (28)$$

с классической собственной энергией электрона

$$\delta m_{кл} = \frac{e^2}{2c^2 r_0} v, \quad (29)$$

где Z_0 - радиус обрезания, а \mathcal{V} - безразмерный параметр, учитывающий распределение заряда электрона.

Из сравнения (28) и (29) видно, что переход $\hbar \rightarrow 0$ в выражении (28), соответствующий переходу к классическому пределу, приводит к явно бессмысленному результату, поэтому говорить о принципе соответствия в данном случае не имеет смысла.

Основной трудностей в этой проблеме является то обстоятельство, что современная как классическая, так и квантовая электродинамика имеет дело лишь с локальными взаимодействиями, где параметр Z_0 принципиально отсутствует. Поэтому собственная энергия электрона бесконечна как в классическом, так и в квантовом случаях и, следовательно, сама постановка вопроса о выполнении принципа соответствия является бессмысленной. Перенормированная квантовая электродинамика этот вопрос фактически обходит, так как имеет дело лишь с наблюдаемыми массой и зарядом электрона. Поэтому справедливость принципа соответствия в проблеме собственной массы электрона может быть установлена лишь в нелокальной теории, где параметр Z_0 может быть введен непротиворечивым образом. Или же мы должны выйти за рамки чистой электродинамики, вводя в рассмотрение новые поля типа гравитационного и т.д. Ниже мы будем обсуждать только первую возможность.

В связи с этими выводами возникает вопрос: откуда появилась формула (28) и какие предположения лежат в ее основе?

Обычно формула (28) получается в рамках регуляризации Паули-Вилларса, которая состоит в том, что свободный пропагатор фотона заменяется выражением

$$\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \cdot \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - k^2 - i\varepsilon}. \quad (30)$$

Здесь Λ - импульс обрезания, связанный с радиусом обрезания Z_0 соотношением

$$Z_0 = \frac{\hbar}{\Lambda c}. \quad (31)$$

Замена (30) означает, что теория становится нелокальной. Однако, если мы хотим рассматривать теорию при конечных Λ , то при энергиях, превышающих Λ , унитарность S -матрицы нарушается,

В заключение отметим важность трансформационных свойств /19/, /20/, полученных нами для двухвременных функций Грина. Нетрудно видеть, что аналогичными свойствами обладают квазипотенциалы, амплитуды рассеяния вне массовой поверхности, а также волновые функции связанных состояний. Используя их, можно значительно упростить задачу определения ядер трехчастичных уравнений в приближении парных взаимодействий. В частности, с этой целью рассмотрение §4 достаточно проводить в системе, где полный поперечный импульс двух частиц равен нулю, несмотря на то, что в трехчастичных уравнениях он произволен.

Авторы выражают глубокую благодарность Н.Н. Боголюбову, А.А. Логунову, а также В.Г. Кадышевскому, Р.М. Мир-Касимову, А.Н. Сисакяну, Л.А. Слепенко за плодотворные обсуждения.

Литература

1. A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze. *Nuovo Cim.*, 29, 380 (1963).
2. V.A. Matveev, R.N. Muradyan, A.N. Tavkhelidze. *JINR preprints*, E2-3498, Dubna, 1967; P2-3900, Dubna, 1968;
V.G. Kadyshevsky. *Nucl. Phys.*, B6, 125 (1968);
C. Fronsdal, L. E. Lundberg. *Phys. Rev.*, D1, 3247 (1970).
А.А. Логунов и др. *ТМФ*, 6, 157 /1971/.
I. Todorov. *Phys. Rev.*, D3, 2351 (1971).
R.N. Faustov. *Ann. Phys.*, 78, 176 (1973).
В.Р. Гарсеванишвили и др. *ТМФ*, 23, 3 /1975/;
* А.А. Хелашвили. Препринт ОИЯИ, P2-8750, Дубна, 1975.
3. D. Stoyanov, A.N. Tavkhelidze. *Phys. Lett.*, 13, 76 (1964).
V. Shelest, D. Stoyanov. *Phys. Lett.*, 13, 253 (1964).
А.Н. Квинихидзе, Д.Цв. Стоянов. *ТМФ*, 3, №3, 332 /1970/; *ТМФ*, 11, №1, 23 /1972/.
В.М. Виноградов. *ТМФ*, 8, 343 /1971/.
А.А. Архипов, В.И. Саврин. Препринт ИТЭФ, СТФ СТФ 72-19 /1972/.
4. S. Weinberg. *Phys. Rev.*, 150, 1313 (1966).
S.P. Kuleshov, A.N. Kvinikhidze, V.A. Matveev, A.N. Sisakian, L.A. Slepchenko. *JINR preprint*, E2-8128, Dubna, 1974.

Поправка к массе во втором порядке теории возмущений, соответствующая диаграмме Фейнмана, показанной на рис. 2, определяется интегралом, где уже проведен переход к евклидовой метрике и выпол-

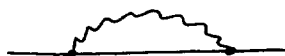


Рис. 2.

нены интегрирования по евклидовым углам

$$\delta m_2 = \frac{m}{(2\pi)^2} \cdot \frac{e^2}{\hbar c} \int_0^\infty du V\left(4\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 u\right) M(u), \quad (34)$$

$$M(u) = 2u + (1-2u)\sqrt{1+\frac{1}{u}}.$$

Если воспользоваться представлениями (27) и (24), то интеграл в (34) можно представить в форме

$$\begin{aligned} \delta m_2 &= \frac{m}{(2\pi)^3} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{k^2}} V(k^2 \ell^2) M\left(\frac{k^2 \ell^2}{4}\right) = \\ &= \frac{e^2}{2c^2} \int d\vec{z}_1 \int d\vec{z}_2 b(\vec{z}_1^2) W(|\vec{z}_1 - \vec{z}_2|) b(\vec{z}_2^2), \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{\lambda}{2(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{k^2}} e^{i\vec{k}\vec{z}} M\left(\frac{k^2 \lambda^2}{4}\right) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi\lambda} \frac{3}{2\pi} \ln \frac{\lambda}{z} & , \quad z \ll \lambda \\ \frac{1}{4\pi z} & , \quad z \gg \lambda. \end{cases} \end{aligned} \quad (36)$$

Отсюда немедленно следует, что

$$\delta m_2 = \begin{cases} m \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \cdot \ln\left(\frac{\hbar}{mcl}\right)^2, & \ell \ll \lambda; \\ \frac{e^2}{8\pi c^2} \iint \frac{d\vec{r}_1 d\vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \frac{\delta(\vec{r}_1^2) \delta(\vec{r}_2^2)}{2(2\pi)^4 c^2 \ell} = \frac{e^2}{2(2\pi)^4 c^2 \ell} \int_0^\infty \frac{du V(u)}{\sqrt{u}}, & \ell \gg \lambda. \end{cases} \quad (37)$$

Таким образом, формула (34) (или (35)) имеет пределы (28) и (29) соответственно в квантовом ($\ell \ll \lambda$) и классическом ($\ell \gg \lambda$) пределах.

В высших порядках теории возмущений в (33) оказалось, что

$$M_n\left(\frac{\hbar}{mcl}\right) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} O\left(\left(\frac{\hbar}{mcl}\right)^{n+1}\right)$$

для всех $n \geq 2$, так что

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \delta m = \lim_{\hbar \rightarrow 0} m \frac{e^2}{\hbar c} M_1\left(\frac{\hbar}{mcl}\right) = \text{const} \frac{e^2}{c^2 \ell}. \quad (38)$$

Итак, принцип соответствия выполнен в рассматриваемой нами квантовой электродинамике с нелокальным взаимодействием.

Обсудим теперь вопрос о том, существуют ли какие-либо принципы физического или математического характера, которые позволили бы выбрать формфактор $V(-\kappa^2 \ell^2) = [K(\kappa^2 \ell^2)]^2$ однозначно. Оказывается, что такие принципы существуют. Выше мы видели, что в классическом пределе полная поправка к массе (37) определяется линейным функционалом от формфактора $V(u)$:

$$\delta m = \mu[K] = \frac{e^2}{2(2\pi)^2 c^2 \ell} \int_0^\infty \frac{du [K(-u)]^2}{\sqrt{u}}. \quad (39)$$

Физически естественно поставить задачу: найти такие формфакторы $V(-\kappa^2 \ell^2)$, для которых поправка к массе (39) принимает наименьшее возможное значение при заданном ℓ .

Математически следующая задача имеет решение: среди целых функций $V(z)$ порядка роста $\rho = \frac{1}{2}$ и типа σ , удовлетворяющих условиям:

$$(a) \quad V(0) = 1,$$

$$(b) \quad V(x) = [K(-x)]^2 \quad \text{на вещественной полуоси } 0 \leq x < \infty,$$

$$(v) \quad \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{u}} V(u) < \infty,$$

найти функцию, минимизирующую функционал (39).

Решение этой задачи дается функцией

$$V(-k^2 \ell^2) = \left[\frac{\sin \frac{\sigma \ell}{2} \sqrt{-k^2}}{\frac{\sigma \ell}{2} \sqrt{-k^2}} \right]^2 \quad (40)$$

или при $\sigma = 2$ и $k_0 = 0$

$$K(-k^2 \ell^2) = \frac{\sin \sqrt{k^2} \ell^2}{\sqrt{k^2} \ell^2}. \quad (41)$$

Этот формфактор описывает равномерно заряженную сферу радиуса $\frac{\sigma}{2} \ell$.

Таким образом, сформулированный принцип позволяет выбрать формфактор однозначно.

Остановимся теперь на проблеме: какова величина параметра ℓ — размера распределения электрического заряда электрона. Сначала обсудим, какие теоретические соображения могут быть использованы для определения этого параметра теории. Поскольку мы рассматриваем только спинорную электродинамику, то естественно считать, что как математическая модель спинорная электродинамика должна быть внутренне математически замкнута, т.е. ее следует рассматривать изолированно от существования других полей и частиц. Тогда параметры, определяющие электромагнитные взаимодействия e , m и ℓ должны быть как-то связаны между собой. В этом подходе естественно предположить, что масса электрона имеет чисто электромагнитное происхождение, т.е.

$$\delta m = m. \quad (42)$$

Воспользуемся формулами (33) и (37) и предположим, что по порядку величины

$$m \simeq \delta m_2 = m \frac{3}{4\pi} \propto \ln \frac{1}{m\ell}. \quad (43)$$

Математически это предположение не вполне корректно, поскольку мы выходим за границу применимости теории возмущений, однако ничего другого в настоящее время предположить не можем. Все известные способы суммирования расходящегося ряда приводят к соотношению типа (43). Поэтому можно считать, что

$$\ell \simeq \frac{1}{m} e^{-\frac{a}{2}} \simeq \frac{1}{m} (10^{-100} \div 10^{-300}), \quad (44)$$

где a — некоторая постоянная, не очень отличающаяся от единицы. Полученное число столь мало, что даже возникает чисто философская проблема: а могут ли вообще существовать такие числа? Поэтому к полученному значению величины ℓ можно относиться по-разному. Во-первых, можно ожидать, что спинорная электродинамика как замкнутая теория является локальной теорией. Во-вторых, полученное значение ℓ (44) явно указывает на то, что спинорная электродинамика не может быть физически замкнутой теорией, т.е. масса электрона должна иметь неэлектromagnetное происхождение.

Остановимся теперь на оценках величины параметра ℓ , которые следуют из эксперимента. К настоящему времени еще не обнаружено ни одного экспериментального эффекта, который не описывался бы локальной квантовой электродинамикой. Поэтому в настоящее время можно установить лишь верхнюю границу на величину ℓ , предполагая, что возможная добавка, происходящая за счет нелокальности взаимодействия, не превышает экспериментальных ошибок.

При проверке локальности квантовой электродинамики в экспериментах атомной физики для обнаружения каких-либо отклонений на субядерных расстояниях необходима очень высокая точность измерений. Такая точность достигается при измерении аномальных магнитных моментов электрона и μ -мезона, а также при определении лэмбовского сдвига уровней водородоподобных атомов.

Вклад в аномальный магнитный момент за счет нелокального взаимодействия дается формулой

$$\Delta \mu = \frac{\alpha}{2\pi} \left(1 - \frac{2}{9} m^2 \ell^2\right). \quad (45)$$

Экспериментальные значения аномального магнитного момента для электрона и μ -мезона даются выражениями

$$\Delta \mu_{\text{эксп.}}^{(e)} = \frac{\alpha}{2\pi} - 0,32846 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + (0,54 \pm 0,58) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3, \quad (46)$$

$$\Delta \mu_{\text{эксп.}}^{(\mu)} = \frac{\alpha}{2\pi} + 0,76578 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + (49 \pm 25) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3$$

и полностью объясняются локальной квантовой электродинамикой^{/16/}. Сравнивая формулу (45) с экспериментальной ошибкой в (46), получим:

$$m_e \ell_e \approx 2,3 \frac{\alpha}{\pi}, \quad \ell_e \approx 2 \cdot 10^{-13} \text{ см}; \quad (47)$$

$$m_\mu \ell_\mu \approx 15 \frac{\alpha}{\pi}, \quad \ell_\mu \approx 6,4 \cdot 10^{-15} \text{ см}.$$

Рассмотрим теперь поправку к лэмбовскому сдвигу водородоподобных атомов за счет нелокальности электрона. Расчет для разности энергий уровней $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ для водорода дает

$$\Delta E(2s_{1/2} - 2p_{1/2}) = -\frac{\alpha^3}{6\pi} Ry \cdot \frac{m^2 \ell^2}{3} \left(2 + \ln \frac{1}{m^2 \ell^2}\right), \quad (48)$$

где $Ry = \frac{m\alpha^2}{2}$ — постоянная Ридберга. Экспериментальное значение лэмбовского сдвига, согласно данным, приведенным в^{/16/}, равно

$$\Delta E(2s_{1/2} - 2p_{1/2}) = (1057,912 \pm 0,011) \text{ МГц/с} \quad (49)$$

и полностью объясняется локальной теорией. Отсюда легко получить, используя (48) и экспериментальную ошибку в (49), что

$$\ell_e \approx 2,3 \cdot 10^{-13} \text{ см}. \quad (50)$$

Полученные оценки (47) - (50) говорят о том, что прецизионные измерения в атомной физике еще недостаточны, чтобы почувствовать размер электрона порядка $10^{-15} + 10^{-16}$ см.

Более жесткие ограничения на величину размера электрона могут быть получены из экспериментов по рассеянию электронов при больших энергиях. Поскольку электромагнитные процессы типа $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$, $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ даже при высоких энергиях, достижимых в настоящее время, описываются низшими порядками теории возмущений, то отношение сечений, подсчитанных в локальной и нелокальной теории, будет даваться формулой

$$\frac{\sigma_{\text{нелокал}}}{\sigma_{\text{лок}}} = \left[V(-W^2\ell^2) \right]^2 \approx 1 + \frac{2}{3} W^2\ell^2, \quad (51)$$

где $W = 2E$ - полная энергия в системе центра масс. Наиболее жесткая оценка получается из экспериментов по рассеянию $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ при $W = 4000 \text{ МэВ}^{1/6}$, откуда следует

$$\ell_e \approx 1 \cdot 10^{-15} \text{ см.} \quad (52)$$

В заключение можно сказать, что спинорная электродинамика с нелокальным взаимодействием не содержит ультрафиолетовых расходимостей и удовлетворяет всем требованиям квантовой теории поля и в этом смысле математически более последовательна, чем ее локальный вариант.

Сходимость рядов теории возмущений

Рассмотрим модели, описывающие нелокальное самодействие скалярного поля, для которых в лагранжиане взаимодействия (3) функция $U(u)$ определена при всех $-\infty < u < \infty$ и убывает при $u \rightarrow \pm\infty$ так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} du |U(u)| < \infty. \quad (53)$$

Пусть нелокальность вводится во взаимодействие, как описано выше (см. формулы (4) и (4')), а формфактор в (II) выбран таким образом, что в евклидовом пространстве

$$D_c(0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k_E [K(-k_E^2 \rho^2)]^2}{m^2 + k_E^2} < \infty. \quad (54)$$

Тогда оказывается, что в евклидовой области сумма всех связанных диаграмм Фейнмана, соответствующих любому матричному элементу S -матрицы, сходится в некотором круге сходимости $g < g_{\text{критич}}$, где $g_{\text{критич}}$ зависит от фактора $K(-k_E^2 \rho^2)$ и вида функции взаимодействия $V(u)$.

Доказательство этого утверждения впервые проведено в работе [6], где были применены методы статистической физики.

Другое доказательство было дано в работе [7] на основе полученного неравенства на сумму всевозможных связанных диаграмм в n -ом порядке теории возмущений.

Дальнейшая задача состоит в том, чтобы посмотреть, что происходит с амплитудами физических процессов при продолжении в физическую область. Два факта — ряд теории возмущений, во-первых, сходится в евклидовой области и, во-вторых, в физической области S -матрица унитарна в каждом порядке теории возмущений — вселяют надежду, что, возможно, на этом пути удастся получить первую нетривиальную модель релятивистски инвариантной квантовой теории поля, удовлетворяющую всем необходимым аксиомам квантовой теории поля.

Кварки

В рамках изложенных выше методов квантовой теории с нелокальным взаимодействием можно довольно естественно решить основную проблему теории кварков: как в рамках квантовой теории поля запретить рождение кварков в процессах сильных взаимодействий. Действительно, пусть поле свободного кварка $q(x)$ описывается уравнением Дирака

$$(\hat{p} - M) q_a(x) = 0, \quad (55)$$

где M — масса кварка, знак a пробегает значение 1, 2, 3, если

мы предположим, например, симметрию $SU(3)$ сильных взаимодействий. Взаимодействие мезонного октета $M_{ab}(x)$ с полем кварков $q_a(x)$ может быть записано, например, в форме

$$f M_{ab}(x) (\bar{q}_a(x) \gamma_5 q_b(x)). \quad (56)$$

Такое взаимодействие, естественно, приведет к рождению кварков во взаимодействиях мезонов.

Предположим теперь, что в (56) поля кварков взаимодействуют с полем мезонов $M_{ab}(x)$ нелокальным образом, т.е.

$$q_a(x) \Rightarrow Q_a(x) = K(\ell^2 \square) q_a(x), \quad (57)$$

где фактор $K(z)$ удовлетворяет всем условиям (5), кроме условия нормировки, а в точке $k^2 = M^2$ он обращается в нуль как

$$K(k^2 \ell^2) \sim (k^2 - M^2) \ell^2 \text{ при } k^2 \rightarrow M^2. \quad (58)$$

Взаимодействие тогда примет вид

$$f M_{ab}(x) (\bar{Q}_a(x) \gamma_5 Q_b(x)). \quad (59)$$

Это взаимодействие (59) не может привести к рождению кварков, поскольку на массовой поверхности

$$Q_a(x) = K(\ell^2 \square) q_a(x) = K(\ell^2 M^2) q_a(x) = 0. \quad (60)$$

Пропагатор кварков будет иметь вид типа

$$\overline{q_a(x) q_b(x')} \Rightarrow \delta_{ab} \frac{[K(k^2 \ell^2)]^2}{M - \hat{k}} = \delta_{ab} (M + \hat{k}) V(k^2 \ell^2)_{GI}$$

где $V(z)$ - целая функция.

Взаимодействие мезонов и барионов при энергиях, превышающих массу кварка M , будет как-то определяться внутренней нелокальной структурой, связанной с наличием пропагаторов кварков в промежуточных состояниях.

В работе^{/8/} рассмотрена с изложенной точки зрения модель, описывающая частицы (условно называемые кварками), в которой, во-первых, удовлетворены все аксиомы квантовой теории поля, во-вторых, кварки не рождаются, и, в третьих, скейлинговое поведение амплитуд инклюзивных процессов проявляется уже в низших порядках теории возмущений. Лагранжиан взаимодействия, описывающий модель, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I(x) = & g \pi(x) Q^\dagger(x) Q(x) + e A(x) Q^\dagger(x) Q(x) + \\ & + e A(x) e^\dagger(x) e(x). \end{aligned} \quad (62)$$

Здесь $\pi(x)$, $A(x)$ и $e(x)$ — скалярные поля, которые являются аналогами полей сильновзаимодействующих частиц (мезонов и барионов), электромагнитного поля и поля электронов в реальном инклюзивном (ep)-рассеянии.

Если определить пропагатор поля кварков $Q(x)$ как (61), то это приведет к тому, что матричные элементы инклюзивного процесса в скейлинговом пределе будут расти в каждом порядке теории возмущений, и поэтому необходимо выйти за рамки теории возмущений, чтобы найти истинное поведение сечения при больших энергиях. Чтобы получить убывание в низшем порядке теории возмущений, необходимо считать, что поле кварков $Q(x)$ состоит из двух типов кварков

$$Q^\dagger(x) Q(x) = Q_{ск}^\dagger(x) Q_{ск}(x) + Q_{ф}^\dagger(x) Q_{ф}(x), \quad (63)$$

причем поле $Q_{ск}(x)$ является бозонным, а $Q_{ф}(x)$ — фермионным полем. Предположим, что пропагаторы полей $Q_{ск}$ и $Q_{ф}$ задаются

$$\overline{Q_{ск} Q_{ск}^+} = V(k^2 \ell^2),$$

$$\overline{Q_{\varphi} Q_{\varphi}^+} = V^*(k^2 \ell^2), \quad (64)$$

и выберем

$$V(k^2 \ell^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{z} e^{-\bar{z}^2}}{(\bar{z} - k^2 \ell^2 - i\varepsilon)^a}, \quad (65)$$

где a - параметр теории.

В рамках этой модели рассмотрим сечение процесса, соответствующего диаграмме Фейнмана, показанной на рис. 3(б).

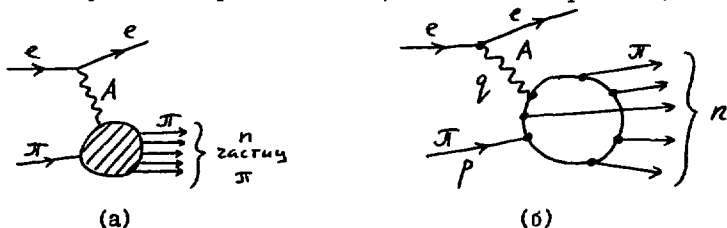


Рис. 3.

Введем обычные скейлинговые переменные

$$pq = mv, \quad q^2 = -Q^2 < 0, \quad w = \frac{2mv}{Q^2} > 1. \quad (66)$$

Тогда сечение процесса определяется формулами:

$$\frac{d\sigma}{dq^2 dv} \sim \frac{1}{(Q^2)^2} \sigma_{tot}(Q^2, w), \quad (67)$$

$$\sigma_{tot}(Q^2, w) = \frac{1}{Q^2} \sum_n F_n(Q^2, w).$$

В пределе $Q^2 \rightarrow \infty$ и w , близких к 1, получено для $F_n(Q^2, w)$ следующее асимптотическое поведение

$$\bar{F}_n(Q^2, \omega) = \frac{\text{const.} (\omega-1)^{\frac{3n-5}{2}}}{(Q^2)^{2a}} \quad (68)$$

Скейлинговый предел определяется параметром ℓ , поскольку формула (68) получена при $Q^2 \ell^2 \gg 1$, т.е. Q^2 должно быть много больше "массы" кварка. Динамика инклюзивного процесса определяется параметром a в (64), т.е. степенью убывания пропагатора кварка в физической области. В этом пределе поведение амплитуд слабо зависит от формы функции V в (64). Зависимость $\bar{F}_n(Q^2, \omega)$ от ω при $\omega \rightarrow 1$ совпадает с поведением фазового объема n нерелятивистских частиц массы m , когда их полная энергия E_n удовлетворяет условию $E_n - nm \ll m n$. В этой интерпретации $\omega = \frac{E_n}{nm}$.

Построенная модель кварков, конечно, является первым шагом к использованию методов нелокальной теории в динамике сильных взаимодействий. Однако мы считаем, что эти идеи заслуживают дальнейшего изучения.

В заключение можно сказать, что в рамках квантовой теории поля с нелокальным взаимодействием можно строить S -матрицы для достаточно широкого круга лагранжианов взаимодействия, для которых методы локальной теории бессильны.

Л и т е р а т у р а

1. V.A. Alebastrov, G.V. Efimov, Commun. Math. Phys. 38, 11, 1974.
2. Г.В. Ефимов. Проблемы физики, ЭЧАЯ, том 5, вып. I, 1974.
3. Х. Намсрай. "Некоторые экспериментальные следствия нелокальной квантовой теории поля". Автореферат диссертации ОИЯИ 2-7478, Дубна, 1973.
4. О.А. Могилевский "Некоторые вопросы нелокальной квантовой электродинамики частиц произвольного спина". Автореферат диссертации ОИЯИ 2-8804, Дубна, 1975.
5. Г.В. Ефимов, М.А. Иванов, О.А. Могилевский. ОИЯИ, P2-9637, Дубна, 1976.
6. Д.Я. Петрина, В.И. Скрипкин, ТМФ, 8, 369, 1971.
7. А.Г. Басуев, ТМФ, 16, 281, 1973.
8. А.З. Дубничкова, Г.В. Ефимов, ОИЯИ, P2-9611, 1976.

9. Г.В.Ефимов. Материалы III Международного совещания по нелокальной квантовой теории поля. ОИЯИ, Д2-7161, Дубна, 1973.
10. М.А.Марков. Гипероны и K -мезоны. Физматгиз, Москва, 1958.
11. G.V.Efimov, Int.J. of Theor.Phys. 10, 19, 1974.
12. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей. "Наука", Москва, 1973.
13. С.Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИЛ, 1963.
14. А.В.Виленкин, П.И.Фомин, ЖЭТФ, 67, 12, 1974.
15. И.И.Ибрагимов. Экстремальные свойства целых функций конечной степени. Изд. АН АзССР, Баку, 1962.
16. С.Бродский, С.Дрелл, УФН, 107, вып. I, 58, 1972.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧАСТИЦ НА МАЛЫХ РАССТОЯНИЯХ И ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ДЛИНА

А.Д.Донков^{ж)}, В.Г.Кадышевский, М.Д.Матеев, Р.М.Мир-Касимов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

§ I. ВВЕДЕНИЕ

Нелокальная квантовая теория поля уже много десятилетий сопутствует локальной теории, развиваясь и углубляясь вместе с ней^{1,2/}. Нередко отдельные исследования по нелокальной теории казались столь многообещающими, что попадали в фокус внимания многих физиков. Бывало и так, что шансы на успех нелокального подхода оценивались очень невысоко, и интерес к нему почти угасал.

Однако в последние годы появилось большое количество исследований, в которых была сформулирована новая точка зрения на проблемы нелокальной теории поля. Выяснилось, что ряд трудностей, казавшихся непреодолимыми, носит иллюзорный характер, и их можно обойти, уточняя математическую формулировку теории.

Вообще говоря, различают два класса нелокальных теорий поля. К первому классу^{3-6/} относятся такие схемы, которые преследуют лишь одну цель: избавить квантовую теорию поля от ультрафиолетовых расходимостей, являющихся бичом локальной квантовой теории поля на протяжении вот уже полувека. В данном подходе предполагается, то частицы взаимодействуют не локально, а в некоторой области, имеющей конечную пространственно-временную протяженность. Линейные размеры этой области определяются новой постоянной ℓ_0 , называемой фундаментальной длиной. Обычной теорией формально соответствует предельный переход $\ell_0 \rightarrow 0$.

^{ж)} Софийский университет им. Климента Охридского.

Несмотря на то, что в рассматриваемом подходе взаимодействие носит нелокальный характер, геометрические свойства пространства-времени в любых масштабах, в том числе на расстояниях $\lesssim \ell_0$, здесь остаются обычными, псевдоевклидовыми. Соответственно, все физические принципы, лежащие в основе локальной теории, переносятся в новую схему без каких-либо изменений. Поэтому нелокальные теории первого класса в определенном смысле являются феноменологическими, ибо конкретный вид нелокального взаимодействия должен определяться только из опытных данных.

Нелокальные теории второго класса более претенциозны. Сторонники этого направления считают, что характер взаимодействия элементарных частиц на малых пространственно-временных расстояниях (порядка "фундаментальной длины" ℓ_0) меняется потому, что на этих расстояниях модифицируется сама геометрия пространства-времени^{5,7-9}. Следовательно, роль, которую предстоит играть постоянной ℓ_0 в теории, можно сравнить лишь с ролью универсальных констант с или \hbar .

Пространственно-временные области с размерами $\sim \ell_0$ доступны только частицам с де Бройлевской длиной волны $\sim \ell_0$. Таким образом, нелокальные теории второго класса связаны со стремлением выработать новый взгляд на природу физических процессов в области сверхвысоких энергий $\gtrsim \frac{1}{\ell_0}$.

В настоящем обзоре будут резюмированы некоторые результаты исследований, представляющих собой попытку построить теорию с фундаментальной длиной в духе второго, радикального подхода. Речь идет о квантовой теории поля с импульсным пространством постоянной кривизны¹⁰⁻¹⁴.

Изложим кратко исходную идею. Согласно существующей квантовой теории поля, переносчиком взаимодействия между элементарными частицами являются виртуальные кванты, т.е. частицы, лежащие вне массовой поверхности (м.п.):

$$p^2 - m^2 = 0. \quad (1)$$

В диаграммной технике виртуальным частицам сопоставляется пропагатор

$$D^c(p) = \frac{1}{m^2 - p^2 - i\epsilon}. \quad (2)$$

Нам хотелось бы особо подчеркнуть, что величина (2) играет фундаментально важную роль в аппарате современной квантовой теории поля.

Пропагатор является релятивистским обобщением классического потенциала взаимодействия. В конфигурационном представлении данная величина имеет сингулярность на световом конусе

$$x^2 = 0. \quad (3)$$

В тех матричных элементах теории, где возникают многократные произведения пропагаторов, из-за этих сингулярностей появляются ультрафиолетовые расходимости.

Пропагатор часто называют причинной функцией Грина. Это тесно связано с тем, что величина D^c может быть выражена через вакуумное ожидание от хронологического произведения свободных полевых операторов:

$$D^c(x_1 - x_2) = i \langle T \varphi(x_1) \varphi(x_2) \rangle_0. \quad (4)$$

Возможность использования T -произведения в локальной квантовой теории поля связана с тем известным обстоятельством, что знак времени

$$\text{sign } \xi_0 = \frac{\xi_0}{|\xi_0|} \quad (5)$$

$(\xi_\mu = (x_1 - x_2)_\mu)$ является релятивистским инвариантом во времениподобной области $\xi^2 > 0$.

Обычно, однако, упускают из виду тот факт, что величина $\xi_0/|\xi_0|$ есть дополнительный знаковый инвариант группы движений четырехмерного импульсного пространства в тех унитарных представлениях, где оператор Казимира этой группы ξ^2 положителен. Следовательно, к хронологическому произведению, пропагатору и т.п. можно прийти, изучая группу движения импульсного пространства (группу Пуанкаре):

$$p^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} p^{\nu} + k^{\mu'}. \quad (6)$$

Или, по-другому: локальная квантовая теория поля основана на использовании пропагатора (4), структура которого обусловлена группой движений (6) четырехмерного псевдоевклидового импульсного пространства.

Возникает вопрос: является ли выбор псевдоевклидовой геометрии в импульсном пространстве прямым следствием экспериментальных данных, или мы здесь имеем дело с удобной гипотезой математического характера, безусловно, оправданной в области не слишком высоких энергий, но не адекватной физике при продвижении в сторону больших энергий? Проанализировав этот вопрос¹⁰⁻¹³, мы пришли к заключению, что псевдоевклидовость импульсного пространства при построении квантовой теории поля вовсе не является dogмой. В качестве альтернативы была предложена формулировка теории поля с импульсным пространством де Ситтера, имеющим радиус кривизны, равный \hbar/l_0 .^{ж)} Геометрия этого пространства лишь в области малых 4-импульсов

$$|p| < \frac{\hbar}{l_0} \quad (7)$$

совпадает с плоской псевдоевклидовой геометрией.

Конкретно мы рассматривали импульсное пространство де Ситтера с положительной кривизной, реализующееся на поверхности

$$p^2 - \vec{p}^2 + \left(\frac{\hbar}{l_0}\right)^2 p_4^2 = \frac{\hbar^2}{l_0^2} \quad (8)$$

ж) Пространство де Ситтера является примером т.н. пространств постоянной кривизны.

в вещественном пятимерном пространстве (p_0, \vec{p}, p_4) *).

Группой движений нового пространства служит десятипараметрическая группа пятимерных "вращений" $SO(2,3)$:

$$p^{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\nu} p^{\nu}, \quad L, M = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (9)$$

Введем в рассмотрение оператор Казимира этой группы

$$C_1 = \frac{1}{2} M_{\kappa L} M^{\kappa L}, \quad \kappa, L = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (10)$$

($M_{\kappa L}$ — генераторы $SO(2,3)$), который в плоском пределе переходит в оператор квадрата интервала

$$\xi^2 = \left(i \frac{\partial}{\partial p_\mu} \right)^2. \quad (11)$$

Напомним, что спектр ξ^2 , отвечающий унитарным представлениям группы Пуанкаре (6), имеет вид:

$$\begin{aligned} \xi^2 > 0 & \quad - \text{времениподобная область} \\ \xi^2 = 0 & \quad - \text{световой конус} \\ \xi^2 < 0 & \quad - \text{пространственно-подобная область} \end{aligned} \quad (12)$$

В аналогичных унитарных представлениях группы $SO(2,3)$ спектр оператора C_1 выглядит следующим образом:

$$C_1 = \begin{cases} L(L+3), L = 1, 0, 1, \dots & - \text{"времениподобная"} \\ & \text{область} \\ -\frac{9}{4} - \Lambda^2, \Lambda \in (0, \infty) & - \text{"пространственно-подобная"} \\ & \text{область} \end{cases} \quad (13)$$

*) Далее будет использоваться система единиц, в которой $\hbar = c = l_0 = 1$

Заметим, что аналога конуса в спектре (I3) нет.

Введем на поверхности (8) ортогональные координаты (ω, \vec{p}) :

$$\begin{cases} p_4 = \sqrt{1 + \vec{p}^2} \cos \omega \\ p_0 = \sqrt{1 + \vec{p}^2} \sin \omega \\ \vec{p} = \vec{p} \end{cases}, |\omega| \leq \pi. \quad (I4)$$

В этих координатах инвариантный элемент объема p -пространства де Ситтера принимает вид

$$d\Omega_p = 2\delta(p^2 - 1) d^5 p = d\omega d\vec{p}. \quad (I5)$$

Поворотам в плоскости (p_0, p_4) , очевидно, отвечает генератор

$$M_{04} = -i \frac{\partial}{\partial \omega}. \quad (I6)$$

В любой лоренцевской системе отсчета спектр оператора (I6) дискретен:

$$M_{04} e^{in\omega} = n e^{in\omega}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (I7)$$

В новой схеме величина n играет роль времени (в плоском пределе, как легко видеть, $M_{04} \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial p_0}$).

Принципиально важно, что во времениподобной L -области (см. (I3)), величина

$$\text{sign } n = \frac{n}{|n|} \quad (I8)$$

является дополнительным инвариантом группы движений $SO(2,3)$ (ср. с (5)). Поэтому в развиваемом подходе сохраняется возможность построения хронологического произведения с упорядочением по дискретному времени n . Если теперь, следуя стандартной процедуре,

построить T_n - произведение свободных полей и взять от него вакуумное ожидание, то мы придем к следующему результату:

$$\langle T_n \psi(\xi_1) \psi(\xi_2) \rangle_0 = \frac{1}{i(2\pi)^4} \int \langle \xi_1 | p \rangle \langle p | \xi_2 \rangle \frac{d\Omega_p}{2(p_4 - \sqrt{1-m^2} - i\varepsilon)} \quad (19)$$

где $\xi_{1,2}$ - полный набор из четырех переменных (включая дискретное время n), задающий новое конфигурационное представление;

$\langle \xi | p \rangle$ - собственные функции оператора Казимира C_1 , аналогии плоских волн в нашем подходе.

Следовательно, мы должны осмыслить функцию

$$D^c(p) = \frac{1}{2(p_4 - m_4 - i\varepsilon)} \quad , \quad m_4 = \sqrt{1-m^2} \quad (20)$$

как пропагатор свободной частицы. Таким образом, распространение виртуальных квантов в новом подходе описывается функцией (20).

В плоском пределе $p^2 \ll 1$, $m^2 \ll 1$ имеем, очевидно:

$$D^c(p) \rightarrow \frac{1}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} \quad .$$

При больших виртуальных импульсах выражения (20) и (2) существенно отличаются друг от друга. Следовательно, механизм взаимодействия элементарных частиц в области больших импульсов (малых расстояний) оказывается совершенно новым.

Положим для простоты $m = 0$ и подсчитаем интеграл

$$D_0^c(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int D^c(p) \langle \xi | p \rangle d\Omega_p$$

в пространственно-подобной Λ -области (см. (13)). В результате будем иметь:

$$D_0^c(\xi) = \frac{1}{\Lambda^2 + \frac{1}{4}} \quad (21)$$

Это выражение не является сингулярным в допустимой области значений Λ .

Заметим, что аналогичный вид для фотонного пропагатора использовался в варианте нелокальной теории, развивавшейся М.А.Марковым в работах [7].

Реальным частицам отвечает полюс пропагатора, задаваемый равенством

$$p_4 - m_4 = 0. \quad (22)$$

Вместе с основным уравнением (8) оно эквивалентно массовой поверхности (I).

Заметим, однако, что \mathcal{P} -пространство де Ситтера (8) инвариантно относительно преобразования инверсии (в дальнейшем \mathcal{S} -преобразование)

$$p_4 \rightarrow -p_4. \quad (23)$$

Ясно, что \mathcal{S} -преобразование не имеет плоского аналога. Если потребовать, чтобы квантовая теория поля была \mathcal{S} -инвариантна, то наряду с пропагатором (20) мы должны рассматривать пропагатор

$$\Delta^c(p) = - \frac{1}{2(m_4 + p_4 + i\epsilon)}. \quad (24)$$

Функция (24) имеет полюс на поверхности $p_4 = -m_4$, которая в силу (8) снова эквивалентна массовой поверхности (I). Таким образом, если имеет место симметрия относительно \mathcal{S} -преобразования (23), то у каждой частицы должен существовать двойник, представляющий собой частицу той же массы и отвечающий отрицательным значениям p_4 (\mathcal{S} -частицы).

Рассмотрим взаимодействие, вызванное обменом \mathcal{S} -частицей. Что соответствует этому взаимодействию в плоском пределе? Ясно, что при $p^2 \ll 1$, $m^2 \ll 1$

$$\Delta^c(p) \sim - \frac{1}{4} \quad (25)$$

(в обычных единицах $-\ell_c^2/4$). Следовательно, в области малых импульсов обмен S -частицей эквивалентен контактному взаимодействию с интенсивностью, пропорциональной квадрату фундаментальной длины.

Здесь мы не будем обсуждать вопросов, касающихся реального существования S -частиц и условий, в которых они могут наблюдаться. Весьма заманчиво, однако, предположить, что слабое четырехфермионное взаимодействие является статическим пределом взаимодействия, связанного с обменом S -частицей. Тогда фермиевская константа $g_F = \sqrt{\frac{G_F}{\hbar c}}$ должна выражаться через фундаментальную длину.

В заключение этого параграфа укажем, что пропагаторы (20) и (24) являются функциями Грина уравнений движения свободных полей

$$2(p_4 - m_4)\psi = 0, \quad (26a)$$

$$2(p_4 + m_4)\phi = 0. \quad (26b)$$

§ 2. ПРОБЛЕМА ЦЕЛОЧИСЛЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА

Общность развиваемого подхода позволяет надеяться, что в новой схеме будут разрешены хотя бы некоторые из тех проблем, которые стоят перед обычной локальной квантовой теорией поля. Одной из этих проблем является проблема теоретического объяснения целочисленности электрического заряда:

$$Q = Ne, \quad (27)$$

где Q — электрический заряд любой из известных элементарных частиц, а e — заряд электрона.

Было замечено, что целочисленность заряда Q возникает в тех теориях, в которых группа калибровочных преобразований компактна. Примером такой схемы служит, в частности, теория поля в решетчатом пространстве-времени^{15/}.

Покажем, что аналогичное квантование электрического заряда имеет место и в развиваемой теории^{/16/}.

Пусть уравнение (26a) описывает свободную бесспиновую частицу с электрическим зарядом Q . В координатах (14) оно имеет вид:

$$(2 \cos \omega \sqrt{1 + \vec{p}^2} - 2m_v) \Psi(\omega, \vec{p}) = 0. \quad (28)$$

Переходя с помощью собственных функций $e^{i n \omega}$ (см. (17)) к смешанному (n, \vec{p}) -представлению, будем иметь вместо (28):

$$[\sqrt{1 + \vec{p}^2} (e^{\frac{\partial}{\partial n}} + e^{-\frac{\partial}{\partial n}}) - 2m_v] \Psi(n, \vec{p}) = 0. \quad (29)$$

Далее подвергнем функцию $\Psi(n, \vec{p})$ преобразованию

$$\Psi(n, \vec{p}) \rightarrow e^{i Q \lambda(n)} \Psi(n, \vec{p}). \quad (30)$$

Уравнение движения для $\Psi(n, \vec{p})$ можно сделать инвариантным относительно (30), если ввести "компенсирующее" поле $\varphi(n)$ со следующим законом преобразования:

$$\varphi(n) \rightarrow \varphi(n) + \Delta \lambda(n), \quad (31)$$

где $\Delta \lambda(n) = \lambda(n+1) - \lambda(n)$ — конечно-разностная "производная" калибровочной функции $\lambda(n)$. Само уравнение при этом выглядит так:

$$\sqrt{1 + \vec{p}^2} (e^{-i Q \varphi} e^{\frac{\partial}{\partial n}} + e^{-\frac{\partial}{\partial n}} e^{i Q \varphi}) \Psi(n, \vec{p}) = 2m_v \Psi(n, \vec{p}). \quad (32)$$

В плоском пределе оно превращается в знакомое дифференциальное уравнение:

$$\left[\left(i \frac{\partial}{\partial t} - Q\psi \right)^2 - \vec{p}^2 \right] \psi(t, \vec{p}) = m^2 \psi(t, \vec{p}).$$

Отсюда ясно, что функция $\psi(n)$ в (32) играет роль скалярного потенциала электромагнитного поля.

Легко видеть, что уравнение (32) остается неизменным при преобразовании

$$Q\psi \rightarrow Q\psi + 2\pi k; \quad k - \text{целое}. \quad (33)$$

Следовательно, величина $Q\psi$ имеет угловой характер, подобно переменной ω .

Если мы положим

$$|Q\psi| \leq \pi, \quad (34)$$

то область определения потенциала ψ окажется неуниверсальной, т.к. будет зависеть от величины заряда ψ -поля. Единственный выход из этого затруднения — предположить, что все электрические заряды Q есть целые кратные одного и того же минимального заряда e . Это приводит нас к формуле (27). Теперь вместо (34) будем иметь:

$$|e\psi| \leq \pi \quad (35)$$

в полной аналогии с определением параметра ω в (14). Продолжая эту аналогию, положим:

$$\begin{aligned} e A_0 &= \sqrt{1 + e^2 \vec{A}^2} \sin e\psi \\ A_4 &= \sqrt{1 + e^2 \vec{A}^2} \cos e\psi, \end{aligned} \quad (36)$$

где (A_0, \vec{A}) — четырехмерный вектор-потенциал электромагнитного поля. Таким образом, данная величина, подобно 4-импульсу, принадлежит пространству де Ситтера (ср. (8)):

$$e^2 A_0^2 - e^2 \vec{A}^2 + A_4^2 = 1. \quad (37)$$

Обычная теория, в которой фундаментальная длина и вместе с ней кривизна пространства де Ситтера равны нулю, имеет дело с малыми полями:

$$\varphi, |\vec{A}| \ll 1$$

$$A_0 \approx \varphi, A_4 \approx 1. \quad (38)$$

Если же поле велико, то взаимодействие с ним существенно нелинейно (см. уравнение (32)) и содержит как параметр фундаментальную длину.

§ 3. ПРОБЛЕМА ДВУХ ТЕЛ

Новые геометрические свойства \mathcal{H} -пространства в полной мере проявляются в задаче о взаимодействии двух релятивистских частиц, к рассмотрению которой мы переходим.

Пусть дана волновая функция системы двух свободных скалярных частиц с одинаковыми массами m : $\chi(p_1, p_2)$. По каждому из аргументов она удовлетворяет уравнению типа (28):

$$2(\sqrt{1+\vec{p}_1^2} \cos \omega_1 - m) \chi(p_1, p_2) = 0$$

$$2(\sqrt{1+\vec{p}_2^2} \cos \omega_2 - m) \chi(p_1, p_2) = 0. \quad (39)$$

Перейдем теперь в систему центра масс, полагая одновременно:

$$\omega_1 = \omega + \Omega$$

$$\omega_2 = -\omega + \Omega, \quad (40)$$

где угол Ω связан с вспомогательным вектором U , принадлежащим пространству де Ситтера (8):

$$U = (\sin \Omega, \vec{0}, \cos \Omega) =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{s}{s+4m^2}}, \vec{0}, \frac{2m}{\sqrt{s+4m^2}} \right), \quad \sqrt{s} = 2\sqrt{m^2 + \vec{q}^2}. \quad (41)$$

Подставляя (40) в систему (39) и беря сумму и разность получающихся уравнений, приходим к эквивалентной системе:

$$4 \sin \omega \sin \Omega \sqrt{1 + \vec{p}^2} \chi(p, U) = 0 \quad (42a)$$

$$2(\cos \omega \cos \Omega \sqrt{1 + \vec{p}^2} - m_y) \chi(p, U) = 0. \quad (42b)$$

В силу (42a) решение данной системы может быть записано в виде:

$$\chi \sim \delta(\omega) \phi_q(\vec{p}), \quad (43)$$

где $\phi_q(\vec{p})$ — волновая функция свободного относительного движения, удовлетворяющая уравнению:

$$(2 \cos \Omega \sqrt{1 + \vec{p}^2} - 2m_y) \phi_q(\vec{p}) = 0. \quad (44)$$

На основании (41) это уравнение равносильно следующему:

$$2(\sqrt{1 + \vec{p}^2} - \sqrt{1 + \vec{q}^2}) \phi_q(\vec{p}) = 0. \quad (45)$$

Заметим, что относительный 3-импульс \vec{p} является трехмерной частью 5-вектора

$$p = (0, \vec{p}, p_4) = (0, \vec{p}, \sqrt{1 + \vec{p}^2}), \quad (46)$$

который с исходными 5-векторами (p_1, p_4) и (p_2, p_4) связан де ситтеровскими вращениями (40).

В силу (46) мы вправе рассматривать величину \vec{p} как вектор, принадлежащий 3-мерному пространству Лобачевского

$$p_4^2 - \vec{p}^2 = 1, \quad p_4 > 0. \quad (47)$$

Группу движений гиперболоида (47) образуют "лоренцевские" преобразования $SO(3,1)$, входящие как подгруппа в группу де Ситтера $SO(3,2)$. Сопоставляя полученный результат с обычной локальной теорией, можно заметить, что там аналогичные рассуждения^{/17/} приводят к евклидову 3-пространству относительных импульсов.

Таким образом, наш способ введения фундаментальной длины l_0 в квантовую теорию поля в задаче о взаимодействии двух частиц эквивалентен переходу от плоского 3-пространства относительных импульсов к 3-пространству Лобачевского с радиусом кривизны $1/l_0$.

Построению квантово-механической (квазипотенциальной) теории взаимодействия двух частиц в \vec{p} -пространстве Лобачевского был посвящен целый ряд работ^{/18-20/}. Следуя^{/19/}, перейдем к сопряженному конфигурационному \vec{r} -пространству при помощи интегрального преобразования Шалиро^{/21/}

$$\psi_q(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle \vec{r} | \vec{p} \rangle \phi_q(\vec{p}) d\Omega_p, \quad (48)$$

с ядром

$$\langle \vec{r} | \vec{p} \rangle = (\sqrt{1+\vec{p}^2} - \vec{p} \cdot \vec{n})^{-1-i\tau}, \quad (49)$$

$$0 < r < \infty, \quad \vec{n}^2 = 1, \quad \vec{r} = r\vec{n}, \quad d\Omega_p = \frac{d^3\vec{p}}{p_4}.$$

Совершая преобразование (48) над уравнением (45), приходим к свободному уравнению типа Шредингера в конфигурационном представлении

$$(H_0 - 2\sqrt{1+\vec{q}^2}) \psi_q(\vec{r}) = 0, \quad (50)$$

где

$$H_0 = 2\chi i \frac{d}{dr} + 2i \frac{1}{r} \text{shi} \frac{d}{dr} - \Delta_{0,4} \frac{1}{r^2} e^i \frac{d}{dr}, \quad (51)$$

$$\Delta_{\theta, \kappa} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (52)$$

Пользуясь аналогией уравнения (50) с уравнением Шредингера, предположим, что взаимодействие описывается локальным квазипотенциалом $V_q(\vec{r})$ и постулируем следующее уравнение для относительного движения двух взаимодействующих частиц:

$$[H_0 + m V_q(\vec{r})] \psi_q(\vec{r}) = 2\sqrt{1+\vec{q}^2} \psi_q(\vec{r}). \quad (53)$$

Квазипотенциал $V_q(\vec{r})$ является комплексной величиной, зависящей от полной энергии двух частиц (ср. /22/).

В импульсном представлении уравнение (53) принимает вид:

$$(\sqrt{1+\vec{q}^2} - \sqrt{1+\vec{p}^2}) \phi_q(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{m}{2} \int V_q(\vec{p}, \vec{k}) \phi_q(\vec{k}) d\Omega_k. \quad (54)$$

Амплитуда рассеяния $A(\vec{p}, \vec{q})$, связанная с $\phi_q(\vec{p})$ соотношением:

$$\phi_q(\vec{p}) = (2\pi)^3 \sqrt{1+\vec{p}^2} \delta(\vec{p} - \vec{q}) - 2\pi \frac{A(\vec{p}, \vec{q})}{\sqrt{1+\vec{q}^2} - \sqrt{1+\vec{p}^2} + i\varepsilon}, \quad (55)$$

удовлетворяет уравнению типа Липпмана-Швингера:

$$A(\vec{p}, \vec{q}) = -\frac{m}{4\pi} V_q(\vec{p}, \vec{q}) + \frac{m}{2(2\pi)^3} \int \frac{V_q(\vec{p}, \vec{k}) A(\vec{k}, \vec{q})}{\sqrt{1+\vec{q}^2} - \sqrt{1+\vec{k}^2} + i\varepsilon} d\Omega_k. \quad (56)$$

§ 4. БОРНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

При высоких энергиях борновский член является достаточно хорошим приближенным выражением для амплитуды рассеяния. В силу (56):

$$A^{\text{BORN}}(\vec{p}, \vec{q}) = - \frac{m}{4\pi} V_q(\vec{p}, \vec{q}) = \\ = - \frac{m}{4\pi} \int \langle \vec{p} | \vec{r} \rangle V_q(\vec{r}) \langle \vec{r} | \vec{q} \rangle d\vec{r}. \quad (57)$$

Если $V_q(\vec{r})$ — сферически-симметричная функция, то [19]:

$$A^{\text{BORN}}(\vec{p}, \vec{q}) = - \frac{m}{8\pi \chi_{pq}} \int_0^\infty r V_q(r) \sin(r \chi_{pq}) dr, \quad (58)$$

где

$$\text{ch } \chi_{pq} = \text{ch } \chi_p \text{ch } \chi_q - \text{sh } \chi_p \text{sh } \chi_q \cos \theta_{pq} \quad (59)$$

расстояние между точками \vec{p} и \vec{q} пространства Лобачевского (47).

Пусть R — эффективный радиус действия потенциала $V_q(r)$. При больших энергиях A^{BORN} будет заметно отличаться от нуля лишь при:

$$\chi_{pq} \sim \frac{1}{R}. \quad (60)$$

Отсюда для ширины дифракционного пика получаем оценку (в единицах $\hbar = c = 1$)

$$\Delta \theta \approx \frac{2}{q \ell_0} \text{sh } \frac{\ell_0}{2R}. \quad (61)$$

Если $R \gg \ell_0$, то (61) совпадает с обычным квантово-механическим выражением:

$$(\Delta \theta)_{\text{QM}} = \frac{1}{qR}. \quad (62)$$

В том случае, когда между частицами действуют силы с малым эффективным радиусом ($R \ll \ell_0$),

$$\Delta\theta = (\Delta\theta)_{QM} \frac{2Re^{\frac{l_0}{2R}}}{l_0} \gg (\Delta\theta)_{QM}. \quad (63)$$

Полученное аномальное увеличение ширины дифракционного пика (62) является одним из предсказаний новой схемы.

§ 5. РАССЕЯНИЕ НА БОЛЬШИЕ УГЛЫ В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В настоящее время особое внимание в физике высоких энергий уделяется процессам с большими передачами импульса, поскольку они дают информацию о структуре элементарных частиц в малых масштабах. При этом подразумевается, что характерный переданный импульс (k) и характерное расстояние (r) связаны в духе соотношений неопределенностей следующим образом:

$$r \sim \frac{1}{k}. \quad (64)$$

Принципиально важным моментом в развиваемой теории является изменение геометрического смысла таких понятий, как относительный импульс и относительная координата. В результате характерный переданный импульс (k) и характерное относительное расстояние (r) теперь связаны соотношением:

$$r \sim \frac{1}{\chi_k}, \quad (65)$$

где $1 + \frac{k^2}{2} = i\hbar\chi_k$. Если $\chi_k \ll 1$, то $k \approx \chi_k$ и мы приходим к равенству (64). При этом, заметим, $r \gg 1$. Если же $\chi_k \gg 1$, то $\chi_k \approx 2\ln k$ и, соответственно,

$$r \sim \frac{1}{2\ln k} = \frac{l_0}{2\ln(l_0 k)}. \quad (66)$$

Из последнего равенства следует, что фундаментальная длина l_0 практически является пределом расстояния, до которого можно "прощупать" структуру элементарных частиц даже при сверхбольших передачах импульса.

Соотношение (66) можно осмыслить также как следующее мнемоническое правило: в области больших передач импульса для получения "правильных" формул из формул обычной теории нужно заменить передачу импульса на ее логарифм. Тогда, например, вместо экспоненциального падения дифференциального сечения с ростом передачи мы должны иметь степенное убывание^{*}).

Последовательные выкладки подтверждают справедливость этих эвристических соображений. Вычислили, например, выражение для дифференциального сечения упругого рассеяния в области больших передач в квазиклассическом приближении, отбрасывая от уравнений (53).

Производя в этом уравнении разложение по степеням \hbar , можно показать, что квазиклассическая радиальная волновая функция представляется в виде:

$$R_l^{wbk}(r) = \frac{\lambda}{\sqrt{sh^2 \zeta(r) - \frac{L^2}{r^2}}} e^{i \int_0^r \ln(ch \zeta(r) \pm \sqrt{sh^2 \zeta(r) - \frac{L^2}{r^2}}) dr}, \quad (67)$$

где

$$ch \zeta(r) = \sqrt{1 + \vec{q}^2} - \frac{m}{2} V(r), \quad (68)$$

$$L = l + \frac{1}{2},$$

а V_0 - точка поворота, определяемая равенством:

$$sh \zeta(r_0) = \frac{L}{r_0}. \quad (69)$$

С помощью (67) нетрудно найти выражение для амплитуды рассеяния в рассматриваемом квазиклассическом приближении:

^{*}) Соотношения типа (65) играют важную роль в модели высокоэнергетического рассеяния, разработанной Мавродиным /23/.

$$A^{wbk}(\theta, q) = \frac{1}{2iq} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) P_{\ell}^{wbk}(\cos \theta) e^{2i\delta_{\ell}^{wbk}}, \quad (70)$$

где

$$\delta_{\ell}^{wbk} = \int_{r_0}^{\infty} \left[\ln \left(\chi \zeta(r) + \sqrt{\sinh^2 \zeta(r) - \frac{1}{r^2}} \right) - \chi \right] dr - \chi r_0 + \frac{\pi \ell}{2} + \frac{1}{2} r_0 \ln \left(1 + \frac{1}{r_0^2} \right) - L \operatorname{arctg} \frac{L}{r_0}. \quad (71)$$

Далее стандартным образом получается уравнение траектории классического движения, которое мы здесь выписывать не будем. Вслед за авторами работы^{/24/} рассмотрим рассеяние на большие углы как движение в области "классически запрещенных углов". Тогда для дифференциального сечения упругого рассеяния получаем

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{s^{2\nu+1}} \left(\sqrt{-\frac{t}{s}} + \sqrt{-\frac{t}{s} + \frac{4M^2}{s}} \right)^{-2\nu}, \quad (72)$$

где $\nu = 2M\operatorname{Im} r_0$, $M = 1/l_0$. Если фундаментальная масса M бесконечно велика, то полученная степенная формула превращается в экспоненциальную формулу из работы^{/24/}.

§ 6. Заключение

В 1940 году Н. А. Марков^{/2/} выдвинул идею о том, что в последовательной квантовой теории поля должны быть приняты во внимание дополнительные ограничения на измеримость поля, возникающие из-за неточности пробных тел. В той же работе был развит математический аппарат, реализующий эту идею. В основу его был положен постулат о существовании новых перестановочных соотношений между компонентами поля Ψ и 4-координатой пробной частицы:

$$[x_{\mu}, \Psi] = i r_{\mu} \Psi, \quad (73)$$

где \vec{r}_κ - 4-вектор, имеющий размерность длины и характеризующий пространственно-временную протяженность частицы.

Построенная на основе (73) теория была свободна от трудностей с бесконечной собственной энергией и являлась, по существу, нелокальной схемой, хотя сам термин "нелокальность" в то время, по-видимому, еще не употреблялся.

Мы хотели бы отметить, что между нашим подходом и теорией Маркова существует интересная параллель. Чтобы увидеть это, рассмотрим соотношение (73) с теоретико-групповой точки зрения.

Величины χ_κ ($\kappa = 0, 1, 2, 3$), как известно, являются генераторами сдвигов в псевдоевклидовом импульсном пространстве. Следовательно, коммутационное соотношение типа (73) можно интерпретировать как инфинитезимальную форму закона преобразования поля Ψ при этих сдвигах. Поскольку в локальной теории, очевидно, $[\chi_\kappa, \Psi(x)] = 0$, то мы вправе утверждать, что в ^{2/} используются поля, обладающие новыми трансформационными свойствами относительно сдвигов p -пространства.

В нашей схеме модифицируются сами сдвиги импульсного пространства. Роль таких преобразований теперь выполняют повороты в $(\kappa 4)$ -плоскостях. Соответствующими генераторами (аналогами χ_κ) служат операторы $M_{\kappa 4}$, не коммутирующие между собой. В результате коммутатор $[M_{\kappa 4}, \Psi]$ оказывается не равным нулю, как и в ^{2/}.

ЛИТЕРАТУРА

1. G.V. Watagin, *Zs.f. Phys.* **88**, 92 (1934).
2. М.А. Марков, *ЖЭТФ*, **10**, 1311 (1940).
3. Д.А. Киржниц, *УФН*, **90**, 129 (1966).
4. Г.В. Ефимов, *ЭЧАЯ*, **1**, вып. I, 256 (1970); **5**, вып. I, 223 (1974); В.А. Алебастров, Г.В. Ефимов. *Comm. of Math. Phys.* **31**, 1 (1973), **38**, 11 (1974).
5. Д.И. Блохинцев. *Пространство и время в микромире*. Наука, Москва, 1970.
6. В.Я. Файнберг. Статья в сб. "Проблемы теоретической физики", посвященной памяти И.Е. Тамма. Москва, Наука, 1972.
7. М.А. Markov, *Nucl. Phys.* **10**, 140 (1958); А.А. Комар, М.А. Markov, *Nucl. Phys.* **12**, 190 (1959).
8. М.А. Марков, *Гипероны и К-мезоны*. ГИФМЛ, Москва, 1958.
9. C.N. Yang, *Phys. Rev.*, **72**, 874 (1947).

10. В.Г.Кадышевский, ОИЯИ, P2-5717, Дубна, 1971.
11. В.Г.Кадышевский, Квантовая теория поля и импульсное пространство постоянной кривизны, Статья в сборнике "Проблемы теоретической физики", посвященном памяти И.Е.Талма, Москва, Наука, 1972.
12. А.Д.Донков, В.Г.Кадышевский, М.Д.Матеев, Р.М.Мир-Касимов, Болг.физ.журнал 1, 58, 150, 233 (1974); *ibid* 2, 3 (1975), см. также Труды Математического института им. В.А.Стеклова т. СXXXVI, стр. 85-129, Наука, Москва, 1975.
13. A.D.Donkov, V.G.Kadyshevsky, M.D.Mateev, R.M.Mir-Kasimov, Proceedings of the XVII International Conference on High Energy Physics, p.1267 and JINR E2-7936, Dubna, 1974.
14. Р.М.Мир-Касимов, Аксиоматическая квантовая теория поля и импульсное пространство де Ситтера, в сб. "Международная школа молодых ученых по физике высоких энергий", ОИЯИ, P1,2-7642, стр. 281, Дубна, 1973.
15. K.G.Wilson, Phys.Rev. D10, 2445, 1975.
16. V.G.Kadyshevsky, M.D.Mateev, R.M.Mir-Kasimov, JINR, E2-8892, Dubna, 1975.
17. В.А.Матвеев, Р.М.Мурадян, А.Н.Тавхелидзе. ОИЯИ E2-3498, Дубна, 1967.
18. V.G.Kadyshevsky, Nuclear Phys. B6, 125 (1968).
V.G.Kadyshevsky, M.D.Mateev, Nuovo Cimento 55A, 275 (1967).
19. V.G.Kadyshevsky, R.M.Mir-Kasimov, N.B.Skachkov, Nuovo Cimento, 55A, 233 (1968).
20. В.Г.Кадышевский, Р.М.Мир-Касимов, Н.Б.Скачков, ЭЧАЯ, т.2, вып. 3, Москва, Атомиздат, 1973.
21. И.С.Шапиро, ЖЭТФ, 43, 1727 (1962).
22. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze, Nuovo Cimento 29, 380 (1963).
23. С.Щ.Мавродиев. Communication of JINR E2-7910 (1974); ОИЯИ, P2-8897 (1975).
24. S.P.Alliluyev, S.S.Gerstein, A.A.Logunov, Physics Letters 18, 195 (1965).

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ АКСИМАТИЧЕСКОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ НЕПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА

Н. А. Соловьев, В. Я. Файнберг

Физический институт им. П. Н. Лебедева АН СССР, Москва

В данной статье будут рассматриваться поля, обладающие неполиномиальным ростом в импульсном представлении, или, что то же самое, порядок сингулярности которых в координатном представлении бесконечен. Интерес к таким полям обусловлен двумя причинами. Во-первых, они естественным образом возникают в различных моделях неперенормируемых взаимодействий. Во-вторых, переход к высокосингулярным полям является наиболее последовательным способом введения нелокальности в теорию. Обзор работ в этом направлении по 1970 г. можно найти в докладе К. Хелпа [1]. Ключевыми являются работы Меймана [2] и Джаффе [3], где впервые был поставлен и исследован вопрос о предельной степени сингулярности поля, соответствующей микропричинности. Отметим также работы Фримова и Градкина по существенно-нелинейным взаимодействиям [4]. В работах Йофа и Файнберга [5-9] были изучены нелокализуемые поля с экспоненциальным ростом в импульсном представлении. Очень эффективно высокосингулярные обобщенные функции были использованы Фримовым [10, 11] при развитии лагранжева подхода к нелокализуемым взаимодействиям. Поля неполиномиального роста посвящены также работы Константинеску [12], Тейлора [13, 14], Ломсадзе [15].

Однако до сих пор локальные свойства высокосингулярных полей изучены далеко не достаточно даже с чисто математической точки зрения, что препятствует более плодотворному использованию их при построении конкретных моделей взаимодействия. Поэтому в последние годы появился целый ряд статей [16-21], в которых предложены различные обобщения понятия носителя и различные способы описания пространственно-временных свойств нелокализуемых полей. К сожалению, в работах [19-21] не исследовалось в достаточной мере, какие локальные свойства обычных распределений Шварца сохраняются при предлагаемом обобщении. В работе [18] такой анализ проведен с помощью теории структур.

В первом разделе настоящей статьи предлагается способ описания локальных свойств полей произвольной сингулярности, обобщающий результаты работ [16-21]. Особое внимание мы обращаем на то, в какой степени на нелокализуемые пробные функции переносится разложение единицы. Напомним, что в случае обычных распределений Шварца метод разложения единицы является основным при изучении локальных свойств. Показано, как ослабляются локальные свойства по мере уве-

личения сингулярности. В частности, если пробные функции квазианалитичны, то любой функционал представим в виде предела последовательности функционалов, сосредоточенных в начале координат.

Во втором разделе статьи полученные результаты применяются к вайтмановским функциям. Показано, что величина области голоморфности вайтмановских функций и само ее существование непосредственно зависят от локальных свойств теории. Исследуется связь с подходом, развитым в работах [5-9]. Результаты первого раздела позволяют получить простое и наглядное доказательство теоремы о пространственно-подобной асимптотике вакуумных средних, справедливое как для локализуемых, так и для нелокализуемых теорий.

В третьем разделе теорема о пространственно-подобной асимптотике применяется для доказательства полиномиальной ограниченности по энергии амплитуды упругого рассеяния и ее аналитичности по передаваемому импульсу в эллипсе типа Лемана.

1. Локальные свойства высокосингулярных полей.

В традиционной теории поля [22, 23] микропричинность формулируется как условие перестановочности полевых операторов $A(\varphi_1)$, $A(\varphi_2)$ всякий раз, когда пробные функции φ_1, φ_2 обращаются в нуль вне пространственно-подобно отделенных областей

$$[A(\varphi_1), A(\varphi_2)] = 0 \text{ если } \varphi_1(x) = 0, x \notin M_1; \varphi_2(x) = 0, x \notin M_2, (I)$$

где M_1, M_2 пространственно-подобно отделены.

Поля, допускающие такую формулировку, Джайфе назвал строго локализуемыми и описал соответствующие пространства пробных функций [3]. Локальные свойства таких полей тождественны локальным свойствам распределений Шварца. Однако, если сингулярность поля достаточно высока, то определение (I) становится бессмысленным. Например, если имеются сингулярности вида $\sum \frac{1}{n!} \delta^{(n)}(x)$, то соответствующие пробные функции аналитичны и не могут обращаться в нуль в открытом множестве. Не только аналитические функции обладают этим свойством, но они представляют собой важнейший пример. Поэтому пространство называют квазианалитическим, если в нем не существует функций, обращающихся в нуль в открытом множестве. Задачей обобщения условия (I) на поля, определенные на квазианалитических пространствах пробных функций, мы и будем сейчас заниматься. Из физических соображений ясно, что достаточно требовать близость к нулю коммутатора полей для любых φ_1, φ_2 близких к нулю вне пространственно-подобно отделенных областей

$$[A(\varphi_1), A(\varphi_2)] \sim 0 \quad \text{если } \varphi_1 \sim 0 \text{ вне } M_1, \varphi_2 \sim 0 \text{ вне } M_2, \quad (2)$$

где M_1, M_2 пространственно-подобно отделены.

Математически строгая формулировка этого обобщения подразумевает сопоставление каждой области $\mathcal{O} \subset R^4$ топологии $\tau(\mathcal{O})$, в смысле которой и нужно понимать "близость к нулю на \mathcal{O} ". Примеры семейств топологий $\tau(\mathcal{O})$ для конкретных пространств пробных функций можно найти в работах [16-21]. Все эти работы имеют в своей основе простое соображение (2) и предложенные в них определения отличаются лишь формально. Так, в [16] исходным было условие непрерывности коммутатора по соответствующей топологии, в [20] вместо непрерывности использовалось условие ограниченности, а в [18] требовалось существование расширения коммутатора на пополнение исходного пространства. В силу общей теории топологических векторных пространств [24] все эти требования равносильны.

Однако переход к топологическому языку — это только первый шаг. Очень важно понять, насколько сохраняются при этом обобщении обычные локальные свойства. С этой целью мы попытаемся перенести на квазианалитические пробные функции метод разложения единицы, который является основным при изучении локальных свойств в строго локализуемом случае.

Пусть Φ — строго локализуемое пространство пробных функций. Обозначим через $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ подпространство Φ , состоящее из функций, локализованных в области \mathcal{O} , и запишем разложение единицы в самой простой форме

$$\mathcal{L}(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) = \mathcal{L}(\mathcal{O}_1) + \mathcal{L}(\mathcal{O}_2). \quad (3)$$

Здесь $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ — любые два открытых множества в R^4 . Конечно, нетривиальной частью этого равенства составляет включение

$$\mathcal{L}(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \subset \mathcal{L}(\mathcal{O}_1) + \mathcal{L}(\mathcal{O}_2),$$

означающее, что любую функцию, сосредоточенную в $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$, можно разложить на функции, сосредоточенные в \mathcal{O}_1 и \mathcal{O}_2 . Это можно выразить и на двойственном языке, сказав, что для любой пары M_1, M_2 замкнутых множеств в R^4 функция, равная нулю на $M_1 \cap M_2$, представима в виде суммы двух функций, равных нулю на M_1 и M_2 соответственно. Для того чтобы получить обобщение условия (3) на квазианалитические пространства, мы сначала перепишем его в терминах функционалов.

Обозначим множество функционалов, сосредоточенных на замкнутом множестве $M \subset R^4$, через $\mathcal{L}'(M)$. Это множество образуют функционалы, обращающиеся в нуль на функциях, равных нулю в окрестности M , т.е. на функциях, локализованных вне M . Поэтому формула (3) приводит к следующей формуле для функционалов

$$\mathcal{L}'(M_1 \cap M_2) = \mathcal{L}'(M_1) \cap \mathcal{L}'(M_2), \quad (4)$$

где M_1, M_2 — любые два замкнутых множества в R^4 .

Перейдем к квазианалитическим пространствам пробных функций. Следуя прежним эвристическим рассуждениям, образуем множество $\mathcal{L}'(M)$ из функционалов, близких к нулю на функциях, "близких к нулю в окрестности M ". Иными словами, $\mathcal{L}'(M)$ образуют функционалы, непрерывные по каждой топологии $\tau(\mathcal{O})$, где \mathcal{O} — окрестность M . При этом топологии $\tau(\mathcal{O})$ мы будем считать локально выпуклыми. Напомним [24], что непрерывность функционала по семейству τ_j локально выпуклых топологий может быть выражена как непрерывность по одной топологии — так называемой точной нижней грани этого семейства, которую мы будем обозначать $\bigwedge \tau_j$. Таким образом, $\mathcal{L}'(M)$ состоит из функционалов, непрерывных по топологии

$$\tau(M) = \bigwedge_{\mathcal{O} \ni M} \tau(\mathcal{O}). \quad (5)$$

Множество в правой части (4) — это функционалы, непрерывные по $\tau(M_1)$ и по $\tau(M_2)$. Поэтому соотношение (4) будет обеспечено, если

$$\tau(M_1 \cap M_2) = \tau(M_1) \wedge \tau(M_2). \quad (6)$$

Полученная формула есть искомое обобщение равенства (3). Чтобы увидеть это яснее, запишем нетривиальную часть равенства (6)

$$\tau(M_1 \cap M_2) \supset \tau(M_1) \wedge \tau(M_2) \quad (7)$$

через базисы участвующих топологий. Согласно общей теории [24], базис окрестностей нуля топологии $\tau(M_1) \wedge \tau(M_2)$ образуют множества вида $U_1 + U_2$, где U_1 пробегает базис окрестностей $\tau(M_1)$ а U_2 — базис окрестностей $\tau(M_2)$. Поэтому (7) означает, что по любым U_1, U_2 найдется такая окрестность U_{12} топологии $\tau(M_1 \cap M_2)$, что

$$U_{12} \subset U_1 + U_2. \quad (8)$$

Это можно еще выразить, сказав, что функция, достаточно близкая к

нулю на $M_1 \cap M_2$, представима в виде суммы двух функций, сколь угодно близких к нулю на M_1 и M_2 соответственно.

Отметим, что условия (4) и (6) означают, что отображения $M \rightarrow \mathcal{L}'(M)$ и $M \rightarrow \tau(M)$ являются морфизмами в категории структур (см. [18]).

Введем теперь несколько определений. Пусть $\Phi(R^n)$ — пространство пробных функций на R^n и Φ' — его сопряженное. Пусть, далее, каждому открытому множеству $U \subset R^n$ сопоставлена топология $\tau(U)$ в Φ .

Определение 1. Будем называть функционал $f \in \Phi'$ ассоциированным (посредством семейства $\tau(U)$) с замкнутым множеством $M \subset R^n$, если он непрерывен по каждой топологии $\tau(U)$, где $U \supset M$. Это равносильно непрерывности по топологии $\tau(M)$, определяемой формулой (5).

Определение 2. Условие (6) на семейство топологий $\tau(M)$ будем называть условием локальности.

Отметим одно важное отличие от обычных локальных свойств. Хорошо известно, что в строго локализуемом случае множество $\mathcal{L}'(M)$ функционалов, сосредоточенных на фиксированном множестве M , замкнуто (см. например [25], стр. 146). В работах [16, 21] показано, что для квазианалитических пространств пробных функций это уже не так. Более того, если M имеет непустую внутренность $\overset{\circ}{M}$, то множество $\mathcal{L}'(M)$ в данном случае оказывается всюду плотным в Φ' . В самом деле, множество $\mathcal{L}'(M)$ во всяком случае содержит все функционалы $\delta(x - x')$, $x' \in M$. Поэтому любая пробная функция $\varphi \in \Phi$, зануляющая $\mathcal{L}'(M)$, тождественно равна нулю на открытом множестве $\overset{\circ}{M}$, а значит (квазианалитичность!), тождественно равна нулю и на всем R^n . Отсюда в силу теорем Хана-Банаха [24] немедленно вытекает, что

$$\overline{\mathcal{L}'(M)} = \Phi', \quad (9)$$

где черта означает замыкание в слабой топологии пространства Φ' .

Проиллюстрируем теперь зависимость локальных свойств от сингулярности и роль условия (6) на примере пространств типа S . Эти пространства пробных функций введены Шилловым [26], а в теории поля впервые были использованы в работах [16, 27] и [12]. Напомним определение [25], гл. IV.

Пространство S^α ($\alpha \geq 0$) состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, $x \in R^n$, удовлетворяющих неравенствам

$$|x^\kappa D^q \varphi(x)| \leq C_\kappa \lambda^{|\kappa|} q^{\alpha q} \quad \text{при всех } \kappa, q, \quad (10)$$

где постоянные C_k и λ зависят от функции φ . Топология на S^α вводится следующим образом. Обозначим через $S^{\alpha, \lambda}$ подпространство функций, удовлетворяющих неравенствам

$$|x^k D^q \varphi(x)| \leq C_k \bar{\lambda}^{|q|} q^{\alpha q} \quad (II)$$

где в качестве $\bar{\lambda}$ можно взять любую постоянную, большую заданного числа λ , и зададим на этом подпространстве систему норм

$$\|\varphi\|_{\kappa, \varepsilon} = \sup_{\substack{x \in R^n \\ q \geq 0}} \frac{|x^k D^q \varphi(x)|}{(\lambda + \varepsilon)^{|q|} q^{\alpha q}} \quad (\kappa > 0, \varepsilon = (\frac{1}{2}, \dots)). \quad (I2)$$

Топология S^α определяется как топология индуктивного предела относительно семейства подпространств $S^{\alpha, \lambda}$ ($\lambda = 1, 2, \dots$).

Аналогично введем топологии $\tau(\nu)$. Образует пространство $S^{\alpha, \lambda}(\nu)$, составив его из функций, заданных на открытом множестве $\nu \subset R^n$, для которых конечны нормы

$$\|\varphi\|_{\kappa, \varepsilon}^\nu = \sup_{\substack{x \in \nu \\ q \geq 0}} \frac{|x^k D^q \varphi(x)|}{(\lambda + \varepsilon)^{|q|} q^{\alpha q}}, \quad (I3)$$

и снабдим подпространство $S^{\alpha, \lambda}(\nu) \cap S^\alpha$ топологией, индуцированной из $S^{\alpha, \lambda}(\nu)$. Топологию $\tau(\nu)$ определим как индуктивный предел относительно семейства подпространств $S^{\alpha, \lambda}(\nu) \cap S^\alpha$ ($\lambda = 1, 2, \dots$). Проще говоря, последовательность $\varphi_j \in S^\alpha$ считается сходящейся к нулю по топологии $\tau(\nu)$, если существует такое λ , что все $\varphi_j \in S^{\alpha, \lambda}(\nu)$ и $\varphi_j \rightarrow 0$ по каждой из норм (I3).

Из определения (I0) видно, что чем меньше индекс α , тем из более гладких функций состоит пространство S^α . Соответственно тем выше сингулярность определенных на нем функционалов. Например, обобщенная функция $\sum q^{-\beta q} \delta^{(q)}(x)$ определена на любом пространстве S^α с $\alpha < \beta$. Изменение локальных свойств по мере уменьшения α характеризует следующая цепочка теорем.

Теорема 1. При $\alpha > 1$ пространство S^α содержит финитные функции. Более того, его подпространства $\mathcal{L}(\nu)$ для любых ограниченных открытых множеств $\nu_1, \nu_2 \subset R^n$ удовлетворяют условию (3).

Поля, определенные на пространствах S^α ($\alpha > 1$), относятся к строго локализуемым полям Джаффе [3].

Теорема 2. Пространство $S^1(R^n)$ состоит из аналитических функций. Соответствующие топологии $\tau(M)$ для любых ограниченных замкнутых множеств $M_1, M_2 \subset R^n$ удовлетворяют условию (6).

Теоремы 1, 2 выясняют соотношение между двумя основными подходами к вопросу о локализуемости поля — Меймана [2] и Джаффе [3]. Пространство, указанное Мейманом как соответствующее микропричинности, отличается от $S^1(R^1)$ лишь поведением функций на бесконечности. Обобщения его подхода на многомерный случай рассматривались в работах [16, 27] и [12]. Поля, определенные на $S^1(R^n)$, мы будем называть локализуемыми.

Теорема 3. В пространстве $S^{1,\lambda} \subset S^1$ соотношения (6), (7) уже не соблюдаются, однако если мы обозначим через M^ε ε -окрестность M , то при $\varepsilon > l = 1/\lambda$ для ограниченных множеств выполняется неравенство

$$\tau(M_1^\varepsilon \cap M_2^\varepsilon) > \tau(M_1) \wedge \tau(M_2). \quad (14)$$

Неравенство (14) означает, что разложение единицы в $S^{1,\lambda}$ соблюдается приблизительно, в масштабах пространства-времени, больших по сравнению с l . Это дает основания считать l "элементарной длиной" и надеяться, что условие (2), сформулированное с помощью такого семейства топологий, имеет смысл макропричинности. Зейтмановская теория полей, определенных на пространстве $S^{1,\lambda}$ построена в работах [5-9]. В дальнейшем мы будем их называть квазилокализуемыми.

Теорема 4. При $\alpha < 1$ пространство S^α состоит из целых функций. Топологии $\tau(U)$, соответствующие ограниченным множествам, в этом случае все совпадают друг с другом.

Однако топологии, соответствующие разным замкнутым конусам, всегда различаются между собой, причем справедлива следующая

Теорема 5. Пусть функционал f определен на пространстве S^α и ассоциирован с замкнутым конусом $K \subset R^n$ посредством семейства топологий (13). Тогда свертка $f * \varphi = (f(x), \varphi(x-x))$ его с пробной функцией $\varphi \in S^\alpha$ принадлежит любому пространству $S^\alpha(C)$, где C — открытый конус, компактный в $R^n \setminus K$. При этом отображение $S^\alpha \rightarrow S^\alpha(C)$, сопоставляющее элементу $\varphi \in S^\alpha$ функцию $f * \varphi$, является непрерывным.

Мы видим, что при $\alpha < 1$ семейство топологий (13) различает не точки, а лишь направления в R^n . Ассоциированность функционала посредством такого семейства с множеством имеет смысл не сосредоточенности, а быстрого убывания при достаточном удалении от этого множества. Причем в силу теоремы 4 мы принципиально не можем ска-

зат, при каких расстояниях убывание начинается. Это дает основания думать, что при $\alpha < 1$ условие (2), сформулированное с помощью семейства норм (13), утрачивает смысл причинности. Однако его можно рассматривать как простое необходимое условие причинности и изучать вытекающие из него следствия. Поля, определенные на пространствах S^α , $\alpha < 1$, рассматривались Константиnescу и Тейлором [19], Биммерстедом и Локке [20, 21]. И те и другие авторы при обобщении локальной коммутативности исходили из семейства норм (13). Как основную трудность, связанную с таким обобщением, Биммерстед и Локке отмечали [21] неустойчивость относительно операции предельного перехода. Однако мы видели, что эта неустойчивость имеет место уже в случае пространства S^1 (см. формулу (9)), а тем не менее определенные на нем поля обладают достаточно хорошими локальными свойствами. С физической точки зрения более серьезной является трудность, выраженная теоремой 4.

Доказательства теорем I-5 мы изложим в другом месте [30]. Отметим только, что теорема I легко получается обычными приемами теории обобщенных функций умеренного роста. Теорема 4 в чуть более слабой форме доказана в работе [16]. Теорема 5 является довольно очевидным обобщением известного утверждения о том, что финитный функционал является свертывателем на случай функционалов, носитель которых конусоподобен. Для обобщенных функций умеренного роста такое обобщение хорошо известно [31]. На теореме 2, которая играет главную роль в излагаемой теории, остановимся подробнее.

Аналитичность функций из S^1 немедленно вытекает из разложения Тейлора и формулы Стирлинга $q! = q^{q+1/2} e^{-q} \sqrt{2\pi} E_q$ ($E_q \rightarrow 1$). Причем, если $\varphi \in S^{1,\lambda}$, то ее область аналитичности в \mathbb{C}^n определяется неравенствами $|\operatorname{Im} z_j| < \ell$, $j = 1, \dots, n$, где $\ell = 1/\lambda e$. Таким образом, пространство $S^{1,\lambda}$ тождественно пространству \mathcal{A}_ℓ функций, аналитических в указанном бруске и убывающих при $|\operatorname{Re} z| \rightarrow \infty$ быстрее, чем степенным образом. Используя формулу Коши, нетрудно убедиться, что эти пространства тождественны также топологически, если в \mathcal{A}_ℓ ввести систему норм

$$\|\varphi\|'_{r,\delta} = \sup_{|\operatorname{Im} z| \leq \ell - \delta} |z^x \varphi(z)| \quad (15)$$

Пространство S^1 , в свою очередь, тождественно индуктивному пределу $\mathcal{A} = \varinjlim_0 \mathcal{A}_\ell$. Аналогичным образом, топология $\tau(M)$ совпадает с топологией, индуцированной в S^1 из $\mathcal{A}(M)$, где $\mathcal{A}(M)$ в интересующем нас случае ограниченных M представляет собой простран-

во функций, аналитических в окрестности M , с его обычной топологией. Теперь можно использовать результаты теории аналитических функций, подобно тому, как это сделано в [28]. Именно, вещественные компакты обладают следующим свойством Кузена: любую функцию, аналитическую в окрестности $M_1 \cap M_2$, можно представить в виде суммы двух функций, аналитических в окрестностях M_1, M_2 соответственно. Это свойство можно выразить следующей формулой

$$A(M_1) + A(M_2) = A(M_1 \cap M_2). \quad (I6)$$

Учитывая это равенство, снабдим $A(M_1 \cap M_2)$ топологией индуктивного предела относительно подпространств $A(M_i)$, $i = 1, 2$. Базисом ее окрестностей служат множества вида $V_1 + V_2$, где V_i пробегает базис окрестностей $A(M_i)$. Очевидно, эта топология мажорирует исходную топологию $A(M_1 \cap M_2)$, поскольку отображения $A(M_i) \rightarrow A(M_1 \cap M_2)$ непрерывны. Однако сравнимость этих топологий влечет их совпадение, поскольку рассматриваемые пространства относятся к тому классу, на который Гротендик распространил [29] теорему Банаха об открытом отображении. Переходя к следам рассматриваемых топологий на S^1 , мы получим в точности формулу (6).

В случае пространства S^1 (теорема 3) топология $\tau(M)$ совпадает с индуцированной из $A_2(M)$. Попросту говоря, если в случае S^1 сходимость пробных функций по $\tau(M)$ означает сходимость их аналитических продолжений в комплексной окрестности M , сколь угодно близкой к M , то в случае $S^{1, \lambda}$ сходимость по $\tau(M)$ означает сходимость в фиксированной окрестности, получаемой покрытием M полукругами радиуса ℓ . Поэтому формула (6) заменяется неравенством (I4).

Необходимо отметить, что в пространствах S^α , $\alpha < 1$ и даже $S^{1, \lambda}$ топологии $\tau(M)$ можно ввести иначе, чем это было сделано выше. Наш способ был заимствован из строго локализуемого случая, где он определяется однозначно требованием согласованности с обычным определением сосредоточенности. Комплексификация при этом играла вспомогательную роль. В ряде работ [17, 33, 34] нелокализуемые функционалы сразу рассматриваются как аналитические и принимается, что функционал сосредоточен в R^4 на проекции своего комплексного носителя. Нетрудно понять, что это соответствует другому выбору топологии $\tau(M)$. Именно, сходимость по $\tau(M)$ в S^1 в этом случае означает сходимость в комплексной окрестности вида $\sigma_z = \{z \in C^n : \operatorname{Re} z \in U, |\operatorname{Im} z_j| < \ell, j=1, \dots, n\}$, где U — веществен-

ная окрестность M , сколь угодно близкая к M . Роль топологий $\tau(M)$ в построении Ефимова [17] играют введенные им проектирующие последовательности. Отметим, что они представляют собой первую попытку построить разложение единицы для аналитических пробных функций. Однако в определение проектирующих последовательностей входит излишне жесткое требование сходимости к нулю не в \tilde{O}_2 , а в $\tilde{O}_\infty = \{z \in C^4 : \operatorname{Re} z \in O\}$. Это обстоятельство приводит к тому, что проектирующие последовательности не чувствуют особенности в пространственно-подобной области и к ошибочному, на наш взгляд, заключению, что соответствующая теория микропричинна. Подробно этот вопрос рассмотрен в работе [35].

§ 2. Вайтмановские функции.

Функционал Вайтмана, порожденный вакуумным средним $(\Omega, A(\varphi_1) \dots A(\varphi_n) \Omega)$, мы обозначим через \tilde{W}_{n+1} . Эту же величину, выраженную через относительные координаты $\xi_j = x_j - x_{j-1}$, — через \tilde{W}_n . Найдем область голоморфности вайтмановских функций в случае пространства $S^{1,k}$, т.е. область значений $Z \in C^{4n}$, при которых определена функция

$$W_n(Z) = (\tilde{W}_n, e^{iZq}), \quad (17)$$

где \tilde{W} — функционал Вайтмана в импульсном представлении, заданный на пространстве $S^{1,k}$. Пространство $\tilde{S}^{1,k}(R^n)$ состоит из функций, удовлетворяющих при любом $\varepsilon > 0$ неравенствам

$$|D^k \tilde{\varphi}(q)| \leq C_{\varepsilon,k} e^{-(\ell - \varepsilon)|q|}, \quad (18)$$

где $\ell = 1/\lambda_\varepsilon$ и $|q| = \sum_{j=1}^n |q_{0j}| + \dots + |q_{3j}|$. Функционал \tilde{W}_n в силу спектральности сосредоточен на множестве $\tilde{V}_+^n = \{q \in R^{4n} : q_j \in \tilde{V}_+, j=1, \dots, n\}$, где \tilde{V}_+ — замкнутый верхний световой конус. Поэтому он определен на всех функциях, удовлетворяющих неравенствам (18) в окрестности \tilde{V}_+^n . Экспонента e^{iZq} окажется среди таких функций в том случае, если каждая компонента вектора $\mathcal{I}_m Z$ содержится в множестве $H_\ell = \{q \in R^4 : q_0 > \ell |q|\}$ при всех $q \in \tilde{V}_+$.

Итак, функция (17) определена и голоморфна в трубчатой области

$$T_\ell = \{Z \in C^{4n} : \mathcal{I}_m Z_j \in H_\ell, j=1, \dots, n\} \quad (19)$$

Определяющее H_ℓ условие равносильно совокупности восьми неравенств $q(\eta - \ell u) > 0$, где $u = (1, G_1, G_2, G_3)$ и $G_i = \pm 1$. Отсюда видно, что H_ℓ представляет собой пересечение сдвинутых конусов $\ell u + V_+$.

Отметим, что в этом пересечении целиком содержится множество $\eta_0 > \|\eta\| + \ell(1 + \sqrt{3})$. Поэтому при $\ell \rightarrow 0$ область (18) превращается в трубу будущего T .

Таким образом, область голоморфности $W(\zeta)$ в случае пространства $S' = \varprojlim S'^{\lambda}$ совпадает с обычной. Это означает, что свойства аналитичности, локализуемой (по Мейману) и строго локализуемой (по Джаффе) теории по существу одинаковы. Отличие заключается в поведении функции $W(\zeta)$ при $J_m \zeta = \eta \rightarrow 0$. Напомним, что для обычной теории [22, 23] характерен полиномиальный рост $\sim \|\eta\|^{-m}$ с некоторым m . Увеличению порядка сингулярности функционалов W соответствует увеличение скорости роста функций $W(\zeta)$ при $\eta \rightarrow 0$. В работе [32] показано, что пространству S^{α} , $\alpha > 1$ соответствует рост $\sim \exp\{\varepsilon \|\eta\|^{-\alpha-1}\}$. При $\alpha = 1$ рост может быть произвольным (см. [12]). В квазилокализуемом случае $\Phi = S'^{\lambda}$ область голоморфности $W(\zeta)$ меньше обычной, и тем меньше, чем больше ℓ , т.е. чем больше область аналитичности пробных функций. Наконец, при $\ell \rightarrow \infty$, когда мы переходим к нелокализуемой теории, область голоморфности исчезает совсем.

Поскольку область T_{ℓ} не граничит с вещественным пространством, функционал W в квазилокализуемом случае не может рассматриваться как предельное значение голоморфной функции (17). Однако если пробная функция φ аналитична в бруске R^{n+iB} , пересекающемся с T_{ℓ} , то справедливо представление

$$(W, \varphi) = \int W(\zeta_1 + i\eta_1, \dots, \zeta_n + i\eta_n) \varphi(\zeta_1 + i\eta_1, \dots, \zeta_n + i\eta_n) d\zeta. \quad (20)$$

где ζ — любой вектор из пересечения $B \cap H_{\ell}^n$.

Свойства функций Вайтмана, определенных на пространстве S'^{λ} подробно рассмотрены в работах [5, 6, 9]. В работе [5], в частности, показано, что к областям вида (18) применима теорема Баргмана-Холла-Вайтмана. Поэтому функция $W(\zeta)$ определена и голоморфна в объединении множеств, получаемых из (18) применением всех собственных комплексных преобразований Лоренца. Эта область меньше расширенной трубы локализуемой теории, однако по-прежнему содержит [5, 9] вещественные точки — точки Йоста.

Выразим теперь на языке функций Вайтмана условие (2). Если спектральность надо рассматривать в терминах функционалов W , то локальность формулируется в терминах W . Соответствующие им голоморфные функции мы обозначаем $W(z)$, их область голоморфности — через G_{ℓ} . С функциями (17) они связаны формулой

$w_{n+1}(z_0, z_1, \dots, z_n) = w(z_1 - z_0, \dots, z_n - z_{n-1})$. Микропричинность (I) означает, что функционал $w - w_{\mathcal{T}}$ сосредоточен на множестве

$$K_{\mathcal{T}} = \bigcup_{jj'} K_{jj'}, \quad \text{где} \quad K_{jj'} = \{x : (x_j - x_{j'})^2 \geq 0\}$$

и объединение берется по всем индексам j, j' , которые меняются местами при перестановке \mathcal{T} . Соответственно, обобщение (2) будет означать, что $w - w_{\mathcal{T}}$ ассоциирован с множеством $K_{\mathcal{T}}$, т.е. непрерывен по топологии $\tau(K_{\mathcal{T}})$. Покажем, что это условие, как и в строго локализуемом случае, приводит к симметрии голоморфных функций $w(z)$ относительно перестановок аргументов. Из явного вида точек Йоста, приведенного в [5, 9], видно, что в множестве $G_\ell \cap \mathcal{T} G_\ell$ имеются точки Йоста, входящие в него вместе с комплексными окрестностями сколь угодно большого радиуса R . Фиксируем такую точку z , для которой $R \gg \ell$, и рассмотрим δ -образную последовательность пробных функций

$$\varphi_\nu(x) = \left(\frac{\nu}{\sqrt{\pi}}\right)^{4(n+1)} e^{-\nu^2 \|x-z\|^2}, \quad \text{где} \quad \|x\|^2 = \sum_{j=0}^n (x_{0j}^2 + \dots + x_{3j}^2).$$

Последовательность $\varphi_\nu(z)$ равномерно сходится к нулю в комплексной ℓ -окрестности $K_{\mathcal{T}}$ вместе со всеми выражениями вида $z^k \varphi_\nu(z)$. Дело в том, что точки Йоста вполне пространственно-подобны [22], поэтому z удалена от $K_{\mathcal{T}}$ больше чем на R , а по нашему условию $R \gg \ell$. Вспоминая переопределение (I5) топологии $\tau(M)$, мы заключаем, что $\varphi_\nu \rightarrow 0$ по $\tau(K_{\mathcal{T}})$, а значит, ассоциированность $w - w_{\mathcal{T}}$ с $K_{\mathcal{T}}$ ведет к равенству

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (w - w_{\mathcal{T}}, \varphi_\nu) = 0. \quad (21)$$

С другой стороны, используя представление (I9) в терминах w

$$(w, \varphi_\nu) = \int w(x+iy) \varphi_\nu(x+iy) dx, \quad y_j = i\eta, \quad \eta \in H_\ell, \quad (22)$$

нетрудно убедиться, что

$$(w, \varphi_\nu) \rightarrow w(z), \quad (w_{\mathcal{T}}, \varphi_\nu) \rightarrow w_{\mathcal{T}}(z). \quad (23)$$

В силу полиномиальной ограниченности $w(x+iy)$ по x для вклада в интеграл (22) от области $\|x-z\| > \delta$ справедлива оценка

$$\left| \int_{\|x-z\| > \delta} w_{n+1}(x+iy) \varphi_\nu(x+iy) dx \right| \leq C_{\eta \delta} \nu^{4(n+1)} \exp \left\{ -\nu^2 (\delta^2 - \|\eta\|^2 \sum j^2) \right\}. \quad (24)$$

Таким образом, при $\delta^2 > \|\eta\|^2 \sum j^2$ этот вклад стремится к нулю. Снова напомним условие $R \gg l$ и представим оставшуюся часть интеграла с помощью теоремы Коши-Пуанкаре в виде

$$\int_G \omega(z) \varphi_\nu(z) dz + \int_{\|x-z\| \leq \delta} \omega(x) \varphi_\nu(x) dx \quad (34)$$

где

$$G = \{z = x + iy : \|x - z\| = \delta, y_j = t_j \eta, j = 1, \dots, n, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Поверхность G компактна в G_ℓ , поэтому для первого слагаемого справедлива оценка типа (24); второе же очевидно тем же образом сходится при $\nu \rightarrow \infty$ к $\omega(z)$. Из формул (21), (23) в силу принципа голоморфного продолжения следует голоморфность $\omega(z)$ в области $\bigcup_{\ell} \pi G_\ell$ и ее симметрия по переменным z_0, \dots, z_n .

В работе [5] показано, что симметрия функций Вайтмана приводит к правильной связи спина со статистикой в теории поля, построенной на $S^{1,n}$. В этой же работе для квазилокализуемых полей доказана TCP-теорема. Теорема Рюэля о пространственно-подобной асимптотике для $S^{1,n}$ доказана в работе [6] и для нелокализуемой теории на S^α , $\alpha < 1$ в работе [20]. Мы сейчас изложим еще один способ оценки этой асимптотики, основанный на использовании теоремы 5. Напомним, что теорема Рюэля формулируется в терминах так называемых усеченных вайтмановских функций ω^Γ (см. [22], стр. 98). Покажем, что какова бы ни была $\varphi \in S^\alpha(R^{4(n+1)})$, функция

$$\psi(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n) = \left(\omega_{n+1}^\Gamma(x), \varphi(x_0, x_1 - z_1, \dots, x_n - z_n) \right), \text{ где } z_j = (0, \vec{z}_j) \quad (25)$$

принадлежит пространству $S^\alpha(R^{3n})$.

Прежде всего отметим, что функция ψ есть не что иное как свертка, рассматриваемая на $3n$ -мерном подпространстве $\Delta = \{z \in R^{4(n+1)} : z_0 = 0, z_{0j} = 0, j = 1, \dots, n\}$. Следуя Рюэлю [36], рассмотрим перестановки специального вида, связанные с разбиением множества индексов $(0, 1, \dots, n)$ на две совокупности $J = (j_0, \dots, j_n)$ $J' = (j'_0, \dots, j'_n)$, в каждой из которых индексы расположены в порядке возрастания

$$\pi(0, 1, \dots, n) = (J, J'), \quad \pi'(0, 1, \dots, n) = (J', J).$$

При этом в силу спектральности и благодаря усечению носителя $\tilde{\omega}_{\pi'}^\Gamma$ и $\tilde{\omega}_{\pi'}^\Gamma$ оказываются разделенными конечным интервалом. В пространстве \tilde{S}^α существует мультипликатор, равный 1 на $\text{supp } \tilde{\omega}_x^\Gamma$ и нулю на $\text{supp } \tilde{\omega}_{x'}^\Gamma$, используя который, мы получаем представление

$$\tilde{w}^T = (\tilde{w}^T - \tilde{w}_{\mathcal{J}}^T) + (\tilde{w}_{\mathcal{J}}^T - \tilde{w}_{\mathcal{J}'}^T) \cdot \tilde{h}. \quad (26)$$

Поскольку при преобразовании Фурье операция умножения переходит в операцию свертки, откуда вытекает

$$w^T * \varphi = (w^T - w_{\mathcal{J}}^T) * \varphi + (w_{\mathcal{J}}^T - w_{\mathcal{J}'}^T) * (h * \varphi). \quad (27)$$

Функционал $w_{\mathcal{J}}^T - w_{\mathcal{J}'}^T$ ассоциирован с конусом

$$K_{\mathcal{J}} = \bigcup_{j \in \mathcal{J}, j' \in \mathcal{J}'} K_{jj'}, \quad \text{где } K_{jj'} = \{x : (x_j - x_{j'})^2 > 0\}.$$

Функционал $w^T - w_{\mathcal{J}}^T$ также ассоциирован с этим конусом, и даже с его частью, поскольку в \mathcal{J} и \mathcal{J}' все индексы расположены в порядке возрастания. Привлекая теперь теорему 5, можно утверждать, что функция $w^T * \varphi$ принадлежит пространству $S^\alpha(C_{\mathcal{J}})$, где $C_{\mathcal{J}}$ — любой открытый конус, компактный в $R^{k(n)} \setminus K_{\mathcal{J}}$. Поскольку это справедливо для любого разбиения $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$, мы заключаем, что

$$w^T * \varphi \in S^\alpha(C), \quad (28)$$

где C — любой открытый конус, компактный в дополнении к пересечению всех $K_{\mathcal{J}}$. Осталось убедиться, что подпространство \angle можно погрузить в подходящий конус C . Достаточно показать, что \angle пересекается с $\bigcap K_{\mathcal{J}}$ лишь в нуле. Для этого вычислим расстояние от точки $\tau \in \angle$ до $K_{jj'}$. Переходя к переменным $\frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_j - \tau_{j'})$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_j + \tau_{j'})$, получим, что оно равно $\frac{1}{2} \|\tilde{\tau}_j - \tilde{\tau}_{j'}\|$. Следовательно, расстояние от τ до $K_{\mathcal{J}}$ равно половине величины

$$\rho_{\mathcal{J}} = \min_{j \in \mathcal{J}, j' \in \mathcal{J}'} \|\tilde{\tau}_j - \tilde{\tau}_{j'}\|, \quad (29)$$

которую можно интерпретировать как расстояние между двумя частями системы точек $\{\tilde{\tau}_0, \dots, \tilde{\tau}_n\}$ в трехмерном евклидовом пространстве. Поскольку одна из этих точек, $\tilde{\tau}_0$, расположена в начале координат, то равенство $\rho_{\mathcal{J}}$ нулю для любого разбиения возможно лишь в том случае, если и все остальные точки локализованы в начале.

Доказанную теорему можно уточнить, если учесть, что теорема 5 применима также к подпространствам S_{β}^{α} пространства S^{α} , состоящим из функций, удовлетворяющих неравенствам:

$$|D^q \varphi(x)| \leq C \lambda^{1/q} q^{\alpha q} \exp(-|\frac{x}{\lambda}|^{1/p}).$$

Преобразование Фурье переводит S_β^α в S_α^β [25]. При $\beta > 1$ последнее пространство строго локализуемо и в нем по-прежнему существует мультипликатор \tilde{h} . Ассоциированность наследуется при переходе к более узкому пространству (относительно топологии в S_β^α см. [25]). Поэтому, если $\varphi \in S_\beta^\alpha(R^{4n})$, то $w^T * \varphi \in S_\beta^\alpha(c)$. В частности, при $\beta = 1/1-\varepsilon$ получаем оценку

$$|\varphi(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n)| \leq C_{\varepsilon, \lambda, \mu} \|\varphi\|_{\lambda, \mu} \prod_{j=1}^n e^{-\|\frac{\vec{z}_j}{x^\mu}\|^{1-\varepsilon}}. \quad (30)$$

Здесь x — геометрический фактор, не зависящий от φ , и $\|\varphi\|_{\lambda, \mu}$ — норма φ в S_β^α , наличие этого множителя выражает непрерывность отображения $S_\beta^\alpha \rightarrow S_\beta^\alpha(c)$. При $\beta = 1$ мультипликатор \tilde{h} не существует, однако сказанное в § I относительно локальных свойств в этом пространстве можно рассматривать как качественное соотношение в пользу того, что на самом деле имеет место экспоненциальное убывание $\sim \exp(-m|\vec{z}|)$. В данном случае роль ℓ играет величина массовой щели m .

Опираясь на доказанную теорему, можно обычным способом [22] доказать существование асимптотических состояний и полей. Подчеркнем, что существование асимптотических пределов можно доказать в любой нелокализуемой теории [20]. Однако лишь в квазилокализуемом случае существует нетривиальная область голоморфности вайтмановских функций, которая позволяет вывести из локальности такие решающие для физической интерпретации свойства, как правильную связь спина со статистикой для асимптотических полей, TCP-инвариантность и унитарность S -матрицы. Для существенно нелокализуемых теорий для доказательства существования унитарной S -матрицы необходимо дополнительно предположить, что пространства in и out асимптотических состояний совпадают $\mathcal{H}_{in} = \mathcal{H}_{out}$. Это предположение заменяет более детальное предположение о мультипликативной структуре вайтмановских функций в p -представлении в [7].

§ 3. Ограничения на рост упругой амплитуды.

В теории поля умеренного роста существуют два способа вывода ограничений на рост амплитуды. Первый основан на использовании аналитических свойств запаздывающих функций и дисперсионных соотношений. Сюда относятся работы [37–40]. Этим методом получена

граница Фруассара $F(s, t) < C s \ln^2 s$ и доказана аналитичность упругой амплитуды по t в эллипсе Мартена. Обобщению на нелокализуемые теории легче поддается метод, предложенный Омнесом [41], который приводит, правда, к несколько более слабым результатам. Основная идея этого метода состоит в следующем. При рассеянии двух волновых пакетов с большим параметром удара a и относительным импульсом k наиболее вероятное значение орбитального момента есть $l \approx ak$. Если силы между частицами короткодействующие, то вероятность рассеяния быстро падает с ростом a , а значит, и частичная амплитуда быстро уменьшается с ростом l при фиксированной энергии. В теории поля короткодействие проявляется в наличии массовой щели и в асимптотических свойствах вайтмановских функций. Поэтому теорема Рюэля должна приводить к соответствующей оценке на частичные амплитуды. Для теории умеренного роста такие оценки получены в работе [43], а для квазилокализуемых и нелокализуемых - в [7-9]. Сейчас мы кратко поясним общий метод вывода этих ограничений, положив в основу формулу (30) и считая для простоты массы частиц равными.

Двухчастичные in и out состояния в теории Хаага-Рюэля [22] есть пределы

$$|out\rangle = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} B_{f_1}(t) B_{f_2}(t) |\Omega\rangle, \text{ где } B_{f_i} = i \int_{x_0=t} \vec{\partial}_0 f_i^*(x) d\vec{x}.$$

B - вспомогательное поле, связанное с исходным формулой $\tilde{B}_i(p) = \tilde{A}(p) h(p^2) g_i(p)$, где $h(p^2)$ вырезает одночастичный гиперболоид: $h(m^2) = 1$, $\text{supp } h \subset (m^2 - \delta, m^2 + \delta)$. Пробная функция $g_i(p)$ ($i = 1, 2$) в нашей задаче должна быть локализована около точки $k_i = (k_{i0}, \vec{k}_i)$, $k_0 = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$. Волновые пакеты $f_i(x)$ есть нормированные решения уравнения Клейна-Гордона, которые в импульсном представлении полагаются равными

$$\tilde{f}_i(\vec{p}) = \exp \left\{ b(p - k_i)^2 + i \vec{p} \vec{a}_i \right\}, \text{ где } p^2 = m^2.$$

Такой выбор f_i и g_i при $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$, $\vec{a}_1 = -\vec{a}_2$, $\vec{k}_1 \perp \vec{a}_1$ описывает столкновение в системе центра масс с относительным импульсом $k = |\vec{k}_1|$ и параметром удара $a = |\vec{a}_1|$. Фактор b характеризует ширину пакетов. Из формул $S^+ |in\rangle = |out\rangle$, $S = 1 + iT$ имеем

$$-iT^+ |in\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} B_{f_1} B_{f_2} |\Omega\rangle dt,$$

откуда следует основное неравенство метода Омнеса [43]

$$\langle in | T T^+ | in \rangle = 2 J_m \langle in | T | in \rangle \leq \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left| \langle \Omega | B_{f_2}^+(t) \dot{B}_{f_1}^+(t) \dot{B}_{f_1}(t) B_{f_2}(t) | \Omega \rangle^T \right|^{1/2} \right\}^2 \quad (31)$$

Выражение под знаком модуля в правой части приводится к виду

$$J(t) = \int \Psi(\tau_1, \dots, \tau_4) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\tau_1} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\tau_2} f_2(\tau_1) f_1(\tau_2) f_1^*(\tau_3) f_2^*(\tau_4) d\tau_1 \dots d\tau_4, \quad (32)$$

где после дифференцирования надо положить $\tau_{i,0} = t$ и где

$$\Psi(\tau_1, \dots, \tau_4) = (\square_2 + m^2)(\square_3 + m^2) \int W^T(x_1, \dots, x_4) \varphi(x_1 - \tau_1, \dots, x_4 - \tau_4) dx \quad (33)$$

$$\tilde{\varphi}(\rho) = g_2(-\rho_1) g_1(-\rho_2) g_1(\rho_3) g_2(\rho_4) \prod_{i=1}^4 h(\rho_i^2). \quad (34)$$

Теперь можно использовать оценку (30) (и аналогичную оценку для производных). Важным обстоятельством, не позволяющим получить оценку Фруассаровского типа, является тот факт, что дифференциальные свойства функции $h(\rho^2)$, а значит, и $\tilde{\varphi}$, ухудшаются при $\rho \rightarrow \infty$. Проще всего суть дела видна, если считать, что $g_i(\rho)$ получается из некоторой исходной функции $g_0 \in S_{0, 1/1-\varepsilon}$, сосредоточенной в окрестности точки $(\rho_0 = m, \vec{\rho} = 0)$ двумя операциями — сдвигом на 4-вектор k_i и сжатием в K/m раз так, чтобы носитель g_i все время лежал в области, где $h = 1$. Тогда $g_i h = g_i$. При таком выборе g_i функция (34) удовлетворяет неравенствам:

$$|\rho^2 D^q \tilde{\varphi}(\rho)| \leq C (k+m)^{|q|} \left(\rho_0 \frac{K}{m}\right)^{|q|} q^{\frac{1}{1-\varepsilon} q}. \quad (35)$$

Фактор $(k+m)$ показывает, что сдвинутая функция локализована в области $|\rho| < k+m$, ρ_0 характеризует рост производных исходной функции, а множитель K/m обусловлен сжатием. Благодаря непрерывности оператора Фурье норму в оценке (30) можно заменить на норму в пространстве $\tilde{S}_{1/1-\varepsilon}^\alpha = S_{\alpha}^{1/1-\varepsilon}$, для которой в силу (35) мы имеем

$$\|\tilde{\varphi}\|_{\lambda, \mu} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\rho, q} e^{|\rho|^{1/\lambda}} \frac{|D^q \tilde{\varphi}(\rho)|}{\mu^{|q|} q^{\frac{1}{1-\varepsilon} q}} \leq C e^{|\frac{k+m}{\lambda}|^{1/\lambda}} \cdot \sup_q \left(\frac{\rho_0}{\mu} \cdot \frac{K}{m}\right)^{|q|}. \quad (36)$$

Таким образом, эта норма конечна только если $\mu \geq \rho_0 \cdot \frac{K}{m}$, и для функции (34) мы получаем оценку

$$|\Psi(\tau)| \leq C' G(k) \exp(-\sigma (\frac{d}{k})^{1-\varepsilon}), \quad (37)$$

где $d = \max_{ij} |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ и через $G(k)$ обозначена функция $\exp(1/\frac{k}{\lambda})^{\frac{1}{k}}$, характеризующая рост функционалов в импульсном представлении. Отметим, что фактор σ не является характерным параметром задачи, в соответствии с тем, что асимптотика (30) не является точной. Кроме того, из-за ухудшения дифференциальных свойств при $k \rightarrow \infty$ полученная оценка не однородна по d , а зависит от комбинации d/k . Подставляя теперь (37) в (32) и используя свойства гладких решений уравнения Клейна-Гордона, можно доказать [43, 7-9]

$$|J(t)| \leq C'' (1+t^3)^{-1} G(k) \exp(-\sigma (\frac{\alpha}{k})^{1-\varepsilon}). \quad (38)$$

Левая часть формулы (31) может быть преобразована к виду

$$\langle \ln |J_m T| \ln \rangle = \sum_{\ell} (2\ell+1) \int_{4m^2}^{\infty} a_{\ell}(s) F_{\ell}(s) ds, \quad (39)$$

где $a_{\ell}(s) = J_m T_{\ell}(s)$, а $F_{\ell}(s)$ - кинематический фактор, зависящий только от пакетов. Этот фактор оценен в [43, 7-9]. Он имеет резкий максимум при $\ell \approx \alpha k$, $s \approx 4\omega^2$. Воспользовавшись положительностью $a_{\ell}(s)$ и $F_{\ell}(s)$, можно записать

$$\sum_{4m^2}^{\infty} (2\ell+1) \int a_{\ell}(s) F_{\ell}(s) ds \geq \bar{a}_{\ell}(\omega^2) \cdot \Delta \min_{\substack{4\omega^2 \leq s \leq 4\omega^2 + \Delta \\ \ell \approx \alpha k}} (2\ell+1) F_{\ell}(s).$$

Здесь $\bar{a}_{\ell}(\omega^2) = \frac{1}{\Delta} \int_{4\omega^2}^{4\omega^2 + \Delta} a_{\ell}(s) ds$, а стоящий при этой величине множитель ведет себя как полином по ℓ и k . В результате искомая оценка для парциальной амплитуды выглядит следующим образом:

$$\bar{a}_{\ell}(k) \leq C G(k) \exp(-\sigma (\frac{\ell}{k^2})^{1-\varepsilon}). \quad (40)$$

Для упругой амплитуды $F(s, t)$ это дает [7, 9] оценку типа Гринберга-Лоу

$$|F(s, t)| \leq C s^2 [\ln G(\sqrt{s})]^{2+\varepsilon} \quad (41)$$

Стандартной процедурой [37, 38] можно также показать, что $F(s, t)$ голоморфна в эллипсе типа Лемана.

В заключение отметим, что не исключено, что обсуждавшиеся выше недостатки оценки (37) на самом деле можно устранить. Для

этого прежде всего надо усилить теорему 5. Можно ожидать, что непрерывность отображения $S^\alpha \rightarrow S^\alpha(C)$, о которой говорится в этой теореме, сохраняется при замене топологии S^α на более слабую топологию $\tilde{S}^\alpha(V)$, где V — окрестность носителя функционала \tilde{f} . Такого усиления, по-видимому, достаточно для доказательства ограничений фруассаровского типа.

ЛИТЕРАТУРА

- I. Труды XV международной конференции по физике высоких энергий "Наукова думка", 1972, стр.594.
2. Н.Н.Мейман. ЖЭТФ, 47, 1966, 1964;
препринт ИТЭФ № 252, 1964.
3. A.M.Jaffe. Phys. Rev. Lett., 17, 661, 1966;
Phys. Rev., 158, 1454, 1967.
4. E.S.Fradkin. Nucl. Phys., 49, 264, 1963;
Г.В.Ефимов. ЖЭТФ, 44, 2105, 1963.
5. М.З.Иофа, В.Я.Файнберг. ЖЭТФ, 56, 1644, 1969.
6. М.З.Иофа, В.Я.Файнберг. ТМФ, I, 187, 1969.
7. M.L.Iofa, V.Ja.Fainberg. Nuovo Cim., 5A, 273, 1971.
8. М.З.Иофа. ТМФ, 3, 197, 1970.
9. В.Я.Файнберг, в сб. "Проблемы теоретической физики," "Наука", 1972, стр.120.
10. Г.В.Ефимов. Commun. Math. Phys. 5, 42, 1967; 7, 138, 1968;
препринт ИТФ-68-52, 54, 55, Киев, 1968;
ТМФ 2, 302, 1970.
- II. G.V.Efimov. CERN preprint TH-1086, 1969;
High Energy Physics. Proceedings of the XV-th International Conference, "Naukova Dumka", Kiev, 1972, p.609.
12. F.Constantinescu. J. Math. Phys. 12, 293, 1971.
F.Constantinescu. Preprint University of Munich, 1969.
13. I.G.Taylor. Ann. Phys. (N.Y.), 68, 484, 1971.
14. F.Constantinescu and Taylor "Equivalence between Nonlocalizable and Local Fields" King's College preprint (april 1972).
15. Ю.М.Ломсадзе. Препринт ИТФ-75-126Р, Киев, 1975;
Yu.M.Lomadze, E.P.Sabad. Preprint ITP-73-17E, Kiev, 1973.
16. М.А.Соловьев. ТМФ, 7, 183, 1971.
17. Г.В.Ефимов. Препринт P2-6756, Дубна, 1972.

18. М.А.Соловьев. ТМФ, 20, 299, 1974.
19. P.Constantinescu and J.G.Taylor. J.Math.Phys., 15, 824, 1974.
20. J.Bümmersiede and W.Lücke, Comm. Math.Phys., 37, 121, 1974.
21. J.Bümmersiede and W.Lücke. J.Math.Phys., 16, 1203, 1974.
22. Р.Иост. Общая теория квантованных полей, "Мир", 1967.
23. Р.Стритер, А.Вайтман. РСТ, спин, статистика и все такое, "Наука", 1966.
24. Н.Бурбаки. Топологические векторные пространства, ИЛ, 1959.
25. И.М.Гельфанд, Г.Е.Шиллов. Обобщенные функции, т.2, Физматгиз, 1958.
26. Г.Е.Шиллов. ДАН СССР, 102, 893, 1955.
27. М.А.Соловьев. Препринт ФИАН № 38, 1969.
28. П.Мапиро. Теория гиперфункций. "Мир", 1972.
29. A.Grothendieck.Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer.Math. Soc., 16, 1955.
30. М.А.Соловьев, В.Я.Файнберг. Препринт ФИАН (на англ.), II7, 1976
31. К.Непп. Commun. Math. Phys. 1, 95, 1965.
32. М.А.Соловьев. ТМФ, 15, 3, 1973.
33. С.С.Хоружий. Препринт Р2-3085, Р2-3086, Дубна, 1966.
34. В.А.Алебастров, Г.В.Ефимов. Труды Матем.ин-та им.В.А.Стеклова, 135, 5, 1975.
35. М.А.Соловьев, В.Я.Файнберг. Краткие сообщения по физике, ФИАН, М., 1976.
36. D.Ruelle.Helv.Phys.Acta, 35, 147, 1962.
37. M.Proissart. Phys. Rev., 123,1053, 1961.
38. O.Greenberg, F.Low.Phys.Rev., 124, 2047, 1961.
39. A.Martin.Nuovo Cim., 42, 930, 1966.
40. H.Epstein, V.Glasser, A.Martin. Comm. Math. Phys., 11, 257, 1969.
41. R.Omnes, Phys. Rev., 146,1123, 1966.
42. M.Kugler, R.Roskies, Phys. Rev., 155,1685, 1967.
43. S.W.Mac Dowell, R.Roskies, B.Schroer. Phys. Rev., 166, 1691, 1968.
44. S.W.Mac Dowell, R.Roskies, Phys. Rev., 166, 1703, 1968.

НЕЛОКАЛЬНАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ГАМИЛЬТОНОВА КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

С.Н. СОКОЛОВ

Институт физики высоких энергий, Серпухов

Под релятивистской гамильтоновой квантовой (РГК) теорией поля понимается совокупность из 10 таких эрмитовых операторов

$$\mathcal{F} = \{H, \vec{P}, \vec{K}, \vec{J}\}$$

на пространстве Фока

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^n,$$

где $\mathcal{H}^n = (\mathcal{H}^1)^{\otimes n}$ — n -частичное подпространство, которые

- 1) удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли группы Пуанкаре и могут быть интерпретированы, соответственно, как гамильтониан, импульс, генератор лоренц- и обычных поворотов;
- 2) коммутируют с проектором P_2 , выделяющим в \mathcal{H} подпространство нужной симметрии, и, следовательно, выражаются через операторы рождения-уничтожения α^*, α ;
- 3) удовлетворяют условию разделимости взаимодействия;
- 4) определяют пуанкаре-инвариантную матрицу рассеяния через операторы Меллера типа

$$S_{\pm}^{\mathcal{K}} = \lim_{t \rightarrow \pm \infty} e^{itH} e^{-itH_{\mathcal{K}}},$$

где $H_{\alpha\alpha}$ - гамильтониан, соответствующий каналу реакции $\alpha\alpha$.

Что касается разделимости взаимодействия (т.е. убывания взаимодействий с расстоянием), то в p -представлении это свойство проявляется в том, что ядра w_{nm} операторов взаимодействия

$$V_{nm}^{\Lambda} = \int d\Omega_n d\Omega'_m \alpha^*(\vec{p}_1) \dots \alpha^*(\vec{p}_n) w_{nm}(p, p') \alpha(\vec{p}'_1) \dots \alpha(\vec{p}'_m) \quad (I)$$

не должны зависеть параметрически от оператора числа частиц \hat{N} , и их части, остающиеся после отделения сингулярности, связанной с трансляционной инвариантностью, должны быть несингулярными и гладкими функциями импульсов $p = \{\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\}$ и $p' = \{\vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_m\}$.

Выполнение всех этих требований при нетривиальных взаимодействиях возможно только в рамках нелокальной теории, для которой условие локальности заменяется более слабым условием типа асимптотической абелевости алгебры гейзенберговских операторов при их больших относительных трансляциях^{1/}. Условие асимптотической абелевости по своему физическому содержанию совпадает с условием хорошей (экспоненциальной) разделимости взаимодействия и является одной из его возможных формулировок.

Двумерная модель РГК-теории поля, удовлетворяющая условиям 1)-4), была построена недавно на основе фронтовой формы динамики^{2,3/}. В настоящей работе строится общая 4-мерная РГК-теория бозонного поля на основе точечной формы динамики, в которой операторы \vec{K}, \vec{J} имеют свободный вид

$$\vec{K} = \int d\Omega_1 \alpha^*(\vec{p}) i p_0 \vec{v}_p \alpha(\vec{p}), \quad \vec{J} = \int d\Omega_1 \alpha^*(\vec{p}) i \vec{p} \times \vec{v}_p \alpha(\vec{p}).$$

Здесь и далее операторы α^*, α и состояния $\psi \in \mathcal{H}^1$ нормированы следующим образом:

$$[\alpha(\vec{p}), \alpha^*(\vec{q})] = p_0 \delta(\vec{p} - \vec{q}), \quad p_0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2},$$

$$(\psi, \psi_1) = \int d\Omega_1 \psi^*(\vec{p}) \psi_1(\vec{p}), \quad d\Omega_1 = \frac{d\vec{p}}{p_0}.$$

Оператор 4-импульса $P = \{N, \vec{P}\}$ содержит взаимодействие во всех 4 компонентах и имеет вид

$$P = \hat{p} + \sum_{n,m=2}^{\infty} V(n,m), \quad \hat{p} = \int d\Omega_1 a^* p a, \quad (2)$$

где каждая компонента 4-векторного оператора взаимодействия $V(n,m)$ имеет структуру, подобную (1).

Задача, решаемая в данной работе, состоит в нахождении ядер операторов $V(n,m)$ по заданному набору первичных (присутствующих в первом порядке теории возмущений) взаимодействий (1), где $\omega_{nm} = G_0(p) \delta(\vec{G}(p) - \vec{G}(p')) v_{nm}(p, p')$, $G(p) = \sum p_i / |\sum p_i|$ — 4-скорость и v_{nm} — произвольная гладкая лоренц-инвариантная эрмитово-симметричная функция от p, p' .

Технической основой решения задачи является релятивистская теория прямого взаимодействия, развитая в [4,5] и дающая частное решение этой задачи для случая, когда присутствуют только взаимодействия, сохраняющие число частиц. Это решение имеет вид

$$P_{diag} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} P_{nn}, \quad P_{00} = 0, \quad P_{11} = p = \{p_0, \vec{p}\},$$

где оператор P_{nn} действует из \mathcal{H}^n в \mathcal{H}^n и вычисляется через заданные операторы V_{nn} вида

$$V_{nn} \psi(p) = \int d\Omega'_n G_0 \delta(\vec{G} - \vec{G}') v_{nn}(p, p') \psi(p')$$

с помощью рекуррентных соотношений, связывающих P_{nn} с V_{nn} и операторами для меньшего числа частиц, в частности, с оператором $P_{22} = p_1 + p_2 + G(p_1, p_2) V_{22}$. Рекуррентные соотношения являются нелинейными, содержат унитарные пакующие операторы и имеют довольно сложный вид (см. [5]). Для понимания дальнейшего конкретный вид рекуррентных соотношений является несущественным и мы их выписывать не будем.

Оператор P_{diag} может быть переписан в форме (2) и удовлетворяет условиям 1)-4), указанным вначале.

Идея дальнейшего построения состоит в том, что соотношения, выражающие P_{dag} через V_{nm} , могут быть использованы для вычисления оператора P через операторы V_{nm} и в случае, когда присутствуют взаимодействия, изменяющие число частиц, если воспользоваться методом частиц-дублетов.

Введем формально частицы-дублеты, имеющие одну наблюдаемую и одну вакуумную компоненту. Однодублетное пространство \mathcal{H}_d^1 , состояния и скалярное произведение в нем имеют вид

$$\mathcal{H}_d^1 = \mathcal{H}^0 \oplus \mathcal{H}^1, \quad \Psi = \{\psi_0, \psi_1(\vec{p})\},$$

$$(\Psi, \Phi) = \psi_0^* \varphi_0 + \int d\Omega \psi_1^* \varphi_1.$$

Генераторы группы Пуанкаре имеют вид

$$F^d = \int d\Omega_1 \alpha^*(\vec{p}) F^1 \alpha(\vec{p}),$$

где $F^1 = \{p, i\vec{p} \cdot \vec{\nabla}_p, i\vec{p} \times \vec{\nabla}_p\}$, а операторы поднятия (из вакуума) α^* и опускания (в вакуум) α определены соотношениями

$$\alpha(\vec{q})\Psi = \{\psi_1(\vec{q}), 0\}, \quad \alpha^*(\vec{q})\Psi = \{0, \psi_0 q_0 \delta(\vec{p}-\vec{q})\}.$$

Пространство состояний \mathcal{N} частиц-дублетов определяется как

$$\mathcal{H}_d^{\mathcal{N}} = (\mathcal{H}_d^1)^{\otimes \mathcal{N}}.$$

В системе \mathcal{N} частиц-дублетов операторы взаимодействия в подсистеме $\Gamma_n = \{i_1, \dots, i_n\}$ будем считать заданными в форме $V_{\mathcal{N}}^d(\Gamma_n, \Gamma_m) = V_{nm}^d + V_{nm}^{d*}$, где $n \geq m$, $\Gamma_n \supseteq \Gamma_m$ и

$$V_{nm}^d = N^{-\frac{n-m}{2}} \frac{(n-m)!}{n!} \int d\Omega_n d\Omega'_m \prod_{i \in \Gamma_n} \alpha_{\Gamma_n}^*(\vec{p}_i) G_0 \delta(\vec{G} - \vec{G}').$$

$$V_{nm} = \prod_{j \in \Gamma_m} \alpha_{\Gamma_m}(\vec{p}_j'), \quad \alpha_{\Gamma_n}(\vec{p}) = \sum_{i \in \Gamma_n} \alpha_i(\vec{p})$$

и где функция $V_{nm}(p, p')$ симметрична к перестановкам внутри групп переменных p и p' . При $n \neq m$ операторы $V_{nm}^d(r_n, r_m)$ описывают взаимодействия, сохраняющие число дублетов, но изменяющие число частиц в наблюдаемом, т.е. не-вакуумном, состоянии.

Пусть $n, m \geq 2$ (что соответствует отсутствию поляризации вакуума и перенормировки массы). Тогда рекуррентные соотношения для операторов P_{NN} переносятся без изменений на случай частиц-дублетов и дают оператор 4-импульса P_{NN}^d для системы N дублетов со взаимодействиями, способными изменять число частиц в наблюдаемом состоянии. На оператор P_{NN}^d следует смотреть как на вспомогательную промежуточную величину, т.к. этот оператор заведомо не удовлетворяет требованию разделимости взаимодействия (из-за ограниченности вакуумного "резерва" в системе N дублетов взаимодействие частиц не полностью исчезает на больших расстояниях). Однако из операторов P_{NN}^d уже нетрудно построить оператор P с нужными свойствами.

В случае тождественных частиц-дублетов симметричная часть \mathcal{H}_N^N пространства \mathcal{H}_N^N может быть естественно отображена с помощью некоторого унитарного оператора U_N на подпространство

$$\mathcal{H}_N = P_+ \bigoplus_{n=0}^N \mathcal{H}^n \equiv P_+ P_N \mathcal{H}$$

пространства Фока \mathcal{H} . Это позволяет через операторы P_{NN}^d определить операторы

$$P_N = U_N P_{NN}^d U_N^{-1},$$

дающие РТК-описание системы частиц (синглетов) на \mathcal{H}_N , а также выразить P_N через отображенные на \mathcal{H}_N суммарные операторы поднятия-опускания a_N^*, a_N вида

$$a_N(\vec{p}) = U_N N^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^N \alpha_i(\vec{p}) U_N^{-1}.$$

При $N \rightarrow \infty$ операторы a_N^*, a_N (доопределенные на \mathcal{H} как нули вне \mathcal{H}_N) переходят в операторы рождения-уничтожения a^*, a :

Теорема I.

Операторы a_N^*, a_N , размазанные с функцией $f(\vec{p}) \in \mathcal{L}^2$,

при $N \rightarrow \infty$ сильно сходятся к соответствующим разма-
занным операторам рождения-уничтожения:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int d\Omega, f a_N = \int d\Omega, f a.$$

Доказательство этой теоремы несложно и основано на явном
виде операторов a_N . Мы его приводить не будем.

Качественное рассмотрение показывает, что если ядра v_{nm}
достаточно гладки (например, дважды дифференцируемы), достаточ-
но быстро убывают с p при фиксированных p' и равны нулю
при $n, m \leq 1$; $n, m > n_{\max}$ и если эффективная массовая щель

$$\mu_N = \inf_{\psi \in \mathcal{H}_N} (\psi, |P_N| \psi) (\psi, \hat{N} \psi)^{-1}$$

при всех $N > 0$ превышает некоторое $\mu > 0$, то операторы $P_N P_N$
при $N \rightarrow \infty$ сильно сходятся к некоторым операторам P , со-
держащим взаимодействие, изменяющее число частиц, и удовлетво-
ряющим (совместно с \vec{K}, \vec{J}) условиям 1)-4).

Для выполнения условия асимптотической абелевости на ядра
 v_{nm} как функции от $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$ необходимо (и, по-видимо-
му, достаточно) наложить более жесткое условие бесконечной диф-
ференцируемости и экспоненциального убывания всех производных.

Следует отметить, что описанный метод построения гамильто-
ниана H и других операторов не связан с теорией возмущений
и не ограничен ее рамками.

Полученный класс гамильтоновых нелокальных релятивистских
теорий поля является довольно широким и даже, по всей вероятно-
сти, "плотным" в классе всевозможных регулярных РК-теорий (бо-
зонного) поля, в которых не возникает перенормировки массы (т.е.
оператор массы покоя системы $M = (H^2 - \vec{P}^2)^{\frac{1}{2}}$ содержит в
своем дискретном спектре физическую, равную голой, массу части-
цы) и существуют операторы Меллера S_{\pm}^{α} .

Автор благодарен А.С. Шварцу, Ю.М. Широкову и Б.В. Медве-
деву за ценные обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. А.С. Шварц. Математические основы квантовой теории поля. Москва, "Атомиздат", 1975.
2. С.Н. Соколов. Препринт ИФВЭ 75-93, Серпухов 1975.
3. С.Н. Соколов. ДАН, 221, 809 (1975).
4. С.Н. Соколов. ТМФ, 23, 355 (1975); 24, 236 (1975).
5. С.Н. Соколов. Препринты ИФВЭ 74-134, 74-135, Серпухов, 1974 и 75-94, Серпухов, 1975.

II.

Киральная теория и гравитация
CHIRAL THEORY AND GRAVITATION

НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА МЕЗОНОВ (КИРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ)

М.К.Волков, В.Н.Первушин

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

I. Введение

Настоящий обзор посвящен изложению квантовой киральной теории, которая позволяет получать низкоэнергетические разложения различных адронных процессов без введения в теорию произвольных параметров (кроме масс адронов и констант взаимодействий).

Первые попытки применить аппарат теории квантованных полей для описания сильных взаимодействий были предприняты в начале 50-х годов, сразу же после построения квантовой электродинамики. Эти попытки, однако, не привели к каким-либо существенным успехам не только из-за большой величины константы связи, но и вследствие того, что простейшие из предложенных в то время лагранжианов не отражали никакой динамической симметрии сильных взаимодействий. Дело в том, что требования релятивистской инвариантности и прочих т.н. алгебраических симметрий, которые используются для классификации частиц, оставляют большой произвол в выборе лагранжиана. Поэтому для фиксирования вида взаимодействия необходимо постулировать более широкую — динамическую группу преобразований. Напомним, что в квантовой электродинамике такой динамической симметрией является градиентная инвариантность.

Известные в настоящее время динамические симметрии, которые используются в гравитации, в единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий и в сильных взаимодействиях, не только определяют форму лагранжиана, но и обуславливают универсальность вза-

имедействий в том смысле, что первые порядки разложения по константе связи начинают совпадать с первыми порядками разложения по степеням энергии. Это позволяет, независимо от величины константы связи, использовать соответствующую теорию поля для получения разумных результатов в области низких энергий.

В настоящем обзоре мы попытаемся дать описание физики низко-энергетических мезонных процессов по следующей схеме: 1) гипотеза о динамической симметрии сильных взаимодействий; 2) вывод лагранжиана взаимодействия, удовлетворяющего такой симметрии; 3) получение физических следствий в рамках изучаемой квантовой теории поля, с использованием однопетлевого приближения.

Исходным пунктом является весьма плодотворная идея о киральной симметрии сильных взаимодействий, согласно которой сильные взаимодействия приближенно инвариантны относительно некоторой группы преобразований, включающей в себя, наряду с изотопическими преобразованиями, преобразования, перемешивающие состояния с различной четностью.

Идея этой симметрии была намечена еще в знаменитой работе Фейнмана и Гелл-Манна ^{/1/} о $V-A$ форме слабых взаимодействий, в которой используется следующий путь рассуждений. Как известно, универсальность некоторых взаимодействий различных частиц (например, одна и та же величина электрического заряда для лептонов и адронов), свидетельствует о существовании сохраняющихся величин (электромагнитного тока) и, следовательно, о наличии определенной группы симметрии (в данном примере - калибровочной инвариантности). Точно так же, исходя из универсальности слабого взаимодействия аксиальных токов лептонов и адронов в μ -распаде и β -распаде нейтрона ^{*}, в работе ^{/1/} было предложено включить в группу всех преобразований для адронов преобразования, перепутывающие состояния с различной четностью. Эта идея затем была развита в работах Гелл-Манна ^{/2/}, где наряду с векторными адронными токами, генерирующими унитарную симметрию SU_3 , были введены аксиальные токи. Коммутационные соотношения для всех этих адронных токов в работе ^{/2/} стали называть киральной алгеброй токов, а соответствующую симметрию - киральной симметрией.

Существуют две возможные реализации киральной симметрии - алгебраическая и динамическая.

^{*} Во время написания работы ^{/1/} в 1958 г. было известно, что отношение аксиальной константы g_A β -распада к векторной имеет величину $g_A \approx 1,3$.

Примером алгебраической реализации является классификация невзаимодействующих безмассовых частиц (типа нейтрино) по новым квантовым числам — спиральностям. Реализация киральной симметрии на безмассовых частицах получила широкое применение при описании лептон-адронных процессов с большими переданными импульсами и большими энергиями. Такая симметрия согласуется с представлениями об адронах как о пучках безмассовых, невзаимодействующих партонов (или кварков), сосредоточенных в пространственной области размером $1 \text{ ГэВ}^{-1} / 3$.

Другой, динамический ^{14/} путь реализации алгебры токов оказался весьма плодотворным в области низких энергий, $\ll 1 \text{ ГэВ}$, где адроны приближенно можно представить как точечные, массивные частицы. Для понимания сути динамической реализации полезно рассмотреть простой пример аксиальных токов, с помощью которых описывается β -распад нуклона.

$$J_M^i = \bar{N}(p_2) \gamma^i \gamma_5 \chi_M N(p_1) g_A, \quad p_1^0 = p_2^0 = q^0,$$
 где N — волновые функции свободных нуклонов, χ_M — матрицы Дирака, γ^i — матрицы Паули, g_A — константа связи. Как следует из уравнений Дирака: $(\hat{p}_2 - M)N(p_2) = 0; \bar{N}(p_1)(\hat{p}_1 - M) = 0$ ток J_M^i не сохраняется, если $M \neq 0$.

$$q^\mu J_M^i = -2M \bar{N} \gamma^i \gamma_5 N g_A \neq 0.$$

Добавим к этому току полюсный член, описывающий излучение нуклоном безмассовой псевдоскалярной частицы с константой слабого распада F_π и константой аксиального взаимодействия с нуклоном g_A :

$$J_M^i = \bar{N}(p_2) \gamma^i \gamma_5 (\chi_M g_A - g \frac{F_\pi}{M} \frac{q^\mu q_\mu}{q^2}) N(p_1). \quad (I.1)$$

Нетрудно видеть, что теперь можно добиться сохранения аксиального тока

$$q^\mu J_M^i = 0 \quad (I.2)$$

и, следовательно, существования соответствующей симметрии, если положить

$$g_A = g \frac{F_\pi}{M}. \quad (I.3)$$

Киральная симметрия в данном случае диктует динамику взаимодействия нуклонов с псевдоскалярной частицей, которую обычно называют голдстоуновской частицей. Если отождествить эту частицу с пионом, то равенство (I.3), полученное впервые Голдбергером и

Трейнманом^{/5/} с помощью дисперсионных соотношений, выполняется с точностью до 7%. Псион имеет не нулевую массу m_π , поэтому дивергенция аксиального тока (I.2) равна π :

$$q^\mu J_\mu = m_\pi^2 f_\pi \pi, \quad (I.4)$$

где π — пионное поле. Вследствие того, что величины, входящие в соотношение (I.3), как функции переданного импульса q слабо изменяются на расстояниях порядка массы пиона (гипотеза гладкости), правую часть равенства (I.4) можно рассматривать как слабое возмущение, т.е. "почти ноль". Равенство (I.4), которое называют гипотезой частичного сохранения аксиального тока (ЧСАТ), определяет механизм нарушения киральной симметрии. ЧСАТ и коммутационные соотношения алгебры токов дают возможность получения правил сумм для матричных элементов слабых и электромагнитных адронных токов, хорошо согласующихся с экспериментом^{/6/}, и целого ряда низкоэнергетических соотношений между адронными амплитудами без испускания и с испусканием мезона с нулевым нефизическим импульсом. Полученная информация нуждается в дополнительной экстраполяции на физические значения импульсов и с ростом энергии теряет смысл, т.к. не удовлетворяет условию унитарности.

Методом, в котором можно обойти указанные трудности, является метод феноменологических лагранжианов, позволяющий просто воспроизводить результаты алгебры токов на уровне приближения деревьев. При этом киральная симметрия обеспечивает самосогласованность сильных взаимодействий в том смысле, что эффективные низкоэнергетические константы связи слабых, электромагнитных и самих сильных взаимодействий не перенормируются за счет высших порядков по сильному взаимодействию^{/7/}, т.е. киральная симметрия приводит к тому, что разложение по сильной константе связи в низших порядках совпадает с низкоэнергетическим разложением по степеням энергии. Напомним, что аналогичная ситуация существует и в квантовой электродинамике^{/8/}, первые порядки теории возмущения в которой содержали бы основную информацию при низких энергиях даже при большой константе связи.

В 1969–1971 гг. ряд авторов указал^{/9–10/}, что метод феноменологических лагранжианов может не только воспроизводить результаты алгебры токов, но и позволяет продвинуться дальше по

* Равенство (I.4) написано для тока (I.1), где сделана замена $\frac{1}{2}q^2 \rightarrow \frac{1}{2}(q^2 - m_\pi^2)$. Оно следует из уравнения движения для π -поля: $(q^2 - m_\pi^2)\pi = -N\pi\gamma_5\bar{q}N\pi$.

энергиям, если использовать аппарат квантовой теории поля. За последние 6 лет появилось множество работ, посвященных квантованию такого рода киральных лагранжианов и описанию в рамках квантовой киральной теории большой совокупности экспериментальных данных по низкоэнергетическим процессам /9-24/.

Существует несколько подходов к квантованию киральных лагранжианов. В работах /9,13/ рассматривают лагранжианы, перенормируемые за счет введения гипотетических сигма-частиц. Широко изучаются нелинейные лагранжианы /10-12,14-24/ без гипотетических частиц. Эти теории неперенормируемы и, как известно, отличаются от перенормируемых наличием бесконечного числа неопределенных параметров, которые нельзя фиксировать перенормировкой физических величин. В работе /14/ число неопределенных параметров уменьшают до одного, используя то обстоятельство, что нелинейные теории являются пределом линейных при устремлении массы сигма-частиц к бесконечности.

Наконец, в серии работ /15-24/ используется метод регуляризации квантовой теории поля с неполиномиальным лагранжианом, позволяющий фиксировать все неопределенные параметры. Этот метод был предложен одним из авторов /25/ и получил дальнейшее развитие в работах Лемана /26/ и Салама с сотрудниками /27/. В литературе он получил название суперпропагаторного (с.п.) метода. Согласно с.п. методу, при устранении расходимостей нужно рассматривать выражение, соответствующее совокупности диаграмм с фиксированным числом вершин и произвольным числом внутренних линий, как единую аналитическую функцию.

Настоящий обзор посвящен описанию низкоэнергетических мезонных процессов в рамках однопетлевого приближения квантовой киральной теории. Мы ограничимся здесь рассмотрением с.п. подхода, в котором низкоэнергетические процессы исследованы наиболее полно, а результаты совпадают с результатами подхода Б-модели в пределе $m_\sigma \rightarrow \infty$ /14/.

Перечислим основные гипотезы и предположения.

I. Лагранжиан является реализацией киральной динамической симметрии. При этом, в силу гипотезы гладкости, выбирается минимальный по числу производных лагранжиан. Нарушение киральной симметрии при введении массы мезонов производится согласно схеме Гелл-Манна-Оакса-Ренера /28/.

II. Применяется с.п. метод вычисления петлевых мезонных диаграмм, который фиксирует все неопределенные параметры.

III. Для вычисления барионных однопетлевых диаграмм достаточно использовать стандартную теорию перенормировок, удовлетворяющую киральной симметрии. Тем самым изучаются лишь конечные интегралы, соответствующие барионным петлевым диаграммам. Средние значения виртуальных барионных импульсов оказываются конечными и небольшими. Поэтому при низких энергиях мезонов сильные вершины в барионных петлях находятся в том же режиме, что в соотношении Голдбергера-Треймана (I.3). Отсюда следует ожидать, что совпадение низкоэнергетического разложения и разложения по константе сильной связи имеет место и для однопетлевых барионных диаграмм.

Проверка этого предположения, проведенная в работах /29, I4/, показала, что поправки за счет следующих порядков теории возмущения по сильной константе связи составляют 20-30%.

2. Феноменологические лагранжианы

В этом разделе опишем общий метод получения феноменологических лагранжианов, являющихся нелинейной реализацией киральной симметрии /30, 31/. Для примера рассмотрим симметрию $SU_2 \times SU_2$.

Пусть имеется лагранжиан для свободных не взаимодействующих нуклонов

$$\mathcal{L}_0(\psi) = i\bar{\psi} \partial \psi - M\bar{\psi}\psi, \quad \hat{\partial} = \gamma_\mu \partial_\mu. \quad (2.1)$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно изотопических преобразований с параметрами $\vec{\omega}$

$$\psi' = \exp\left\{i\frac{\vec{\tau}\vec{\omega}}{2}\right\}\psi, \quad (2.2)$$

что отражается в классификации нуклонов по представлению (I/2) группы SU_2 . Рассмотрим также преобразования, перепутывающие состояния с различной четностью, с параметрами \vec{a} :

$$\psi' = \exp\left\{i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}\vec{a}}{2}\right\}\psi. \quad (2.3)$$

Лагранжиан (2.1) после преобразования (2.3) принимает вид:

$$\mathcal{L}_0(\psi') = \mathcal{L}_0(\psi) + M\bar{\psi}(1 - \exp\{i\gamma_5 \vec{\tau}\vec{a}\})\psi. \quad (2.4)$$

Лагранжиан (2.1) будет инвариантен, если положить массу нуклона равной нулю. Такая киральная инвариантность относительно (2.3) позволяет ввести дополнительную классификацию нуклонов по спи-

ральностям, т.е. по правому и левому изотопическому спину, по представлениям $(\frac{1}{2}, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$ группы $SU_2 \times SU_2$. Другой способ сделать лагранжиан (2.1) кирально-инвариантным, не полагая $M=0$, заключается во введении взаимодействия нуклонов с "компенсирующими" полями, которые при преобразованиях (2.3) скомпенсировали бы возникающий неинвариантный множитель в лагранжиане (2.4). Поскольку речь идет о преобразованиях, меняющих четность, необходимо ввести взаимодействия с псевдоскалярными безмассовыми "пионами" с помощью замены:

$$M\bar{\psi}\psi \rightarrow M\bar{\psi}\exp\left\{-\gamma_5 \frac{\bar{\psi}\psi}{F_\pi}\right\}\psi, \quad (2.5)$$

где F_π - размерная константа. Причем поля π^i должны преобразовываться по нелинейному закону:

$$\exp\left\{-\gamma_5 \frac{\bar{\psi}\psi'}{F_\pi}\right\} = \exp\left\{-\gamma_5 \frac{\bar{\psi}\bar{\alpha}}{2}\right\} \exp\left\{\gamma_5 \frac{\bar{\psi}\bar{\pi}}{F_\pi}\right\} \exp\left\{\gamma_5 \frac{\bar{\psi}\bar{\alpha}}{2}\right\} \quad (2.6)$$

так, чтобы выражение (2.5) было инвариантно относительно совместных преобразований полей ψ и π (2.3), (2.6). Инвариантный лагранжиан для самого пионного поля нетрудно построить из матриц $\exp\left\{\gamma_5 \frac{\bar{\psi}\bar{\pi}}{F_\pi}\right\}$:

$$\mathcal{L}(\pi) = \frac{F_\pi^2}{4} \text{Tr} \left\{ \partial_\mu \exp\left\{\gamma_5 \frac{\bar{\psi}\bar{\pi}}{F_\pi}\right\} \partial_\mu \exp\left\{\gamma_5 \frac{\bar{\psi}\bar{\pi}}{F_\pi}\right\} \right\}. \quad (2.7)$$

Таким образом, полный инвариантный лагранжиан будет иметь вид

$$\mathcal{L}(\psi, \pi) = i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - M\bar{\psi}\exp\left\{-\gamma_5 \frac{\bar{\psi}\bar{\pi}}{F_\pi}\right\}\psi + \mathcal{L}(\pi). \quad (2.8)$$

Если отождествить введенное голдстоуновское поле с реальным пионом, а аксиальный ток $J_\mu^5 = F_\pi \partial_\mu \pi + o(\pi^2)$ - с током, участвующим в слабых взаимодействиях, то константа F_π в первом борновском приближении совпадает с константой слабого распада пиона, откуда $F_\pi \approx 92$ МэВ.

3. Сильные взаимодействия ($\pi\pi$ - рассеяние)

В дальнейшем изложении мы постараемся возможно меньше останавливаться на деталях вычислений, отсылая интересующихся этими вопросами к оригинальным работам /15-23/, а, в основном, займемся обсуждением полученных результатов. Прежде всего, рассмотрим процесс упругого $\pi\pi$ - рассеяния.

Амплитуда рассеяния имеет вид

$$(2\pi)^6 \sqrt{\rho_1^0 \rho_2^0 \rho_3^0 \rho_4^0} \langle i_1 i_2 | S | i_3 i_4 \rangle = I + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\rho_1 + \rho_2 - \rho_3 - \rho_4) \times \\ \times [\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} A(s, t, u) + \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} A(t, s, u) + \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} A(u, t, s)], \quad (3.1)$$

где I - единичная матрица, i_a - изотопические индексы пиона, δ_{ij} - символы Кронекера, $s = (\rho_1 + \rho_2)^2$, $t = (\rho_1 - \rho_3)^2$, $u = (\rho_1 - \rho_4)^2$. На рис. 1 изображены диаграммы, соответствующие однопетлевому приближению (порядок не выше $1/F_\pi^4$). Диаграмма 1а соответствует древесному

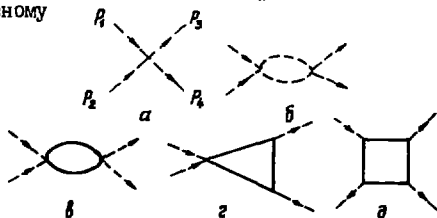


Рис. 1

приближению. Вклад в амплитуду от диаграммы 1б вычисляется с использованием с.п. метода [25]. Вклады остальных диаграмм вычисляются обычными методами ренормируемых теорий поля и здесь удерживаются лишь квадратичные члены по переменным s, t, u , т.к. члены более высоких степеней будут малы, типа $\frac{s^2}{(4\pi F_\pi)^2} \cdot \frac{t^2}{F_\pi^2}$ и т.д. Учет вкладов от всех членов барионного октета производится с помощью SU_3 теории. В результате в $1/F_\pi^4$ приближении получается следующее выражение для $A(s, t, u)$ [17, 22]

$$(4\pi)^2 A(s, t, u) = \alpha_0 (3\bar{s} - 1) + \alpha_0^2 / 7 (\bar{s}, \bar{t}, \bar{u}), \quad (3.2)$$

$$17(\bar{s}, \bar{t}, \bar{u}) = -1.5 + 3\bar{s} + 0.6\bar{s}^2 + 20(\bar{t}^2 + \bar{u}^2) - (3\bar{s} - 1)^2 \mathcal{J}(\bar{s}) -$$

$$- [3(\bar{u} - 1)(\bar{u} - \bar{t}) + 3\bar{u} - 1] \mathcal{J}(\bar{u}) - [3(\bar{t} - 1)(\bar{t} - \bar{u}) + 3\bar{t} - 1] \mathcal{J}(\bar{t}),$$

где $\bar{f} = f/4m_\pi^2$ ($f = s, t, u$), $\alpha_0 = \frac{4}{3} \left(\frac{m_\pi}{2\pi F_\pi} \right)^2 \approx 0.02$,

$$\mathcal{J}(\bar{f}) = 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (4\bar{f})^n \frac{n!(n-1)!}{(2n+1)!} = \left(\frac{1}{\bar{f}} - 1 \right)^{1/2} \arctg \left(\frac{1}{\bar{f}} - 1 \right)^{1/2} \quad (0 < \bar{f} < 1). \quad (3.3)$$

* Вклады от диаграмм 1в, г, д в константный и линейный по s, t, u члены содержат неопределенные параметры, которые можно зафиксировать, используя низкоэнергетические теоремы, требующие, чтобы амплитуда при низких энергиях имела вид: $A(s, t, u) \approx s/F_\pi^2$.

В области энергий, существенно меньших $4\pi F_H$, формула (3.2) является хорошим разложением амплитуды $\mathcal{H}\mathcal{H}$ -рассеяния по малому параметру α_o . Следуя работе [32], введем обозначения

$$\alpha_e^{I(n)} = \lim_{\bar{s} \rightarrow 1} 4^{-n} \frac{\partial^n}{\partial \bar{s}^n} A_e^I(\bar{s}),$$

$$\alpha_e^{I(0)} = \alpha_e^I, \quad \alpha_e^{I(1)} = \beta_e^I, \quad \alpha_e^{I(2)} = c_e^I$$

$$A_e^I(\bar{s}) = \frac{1}{2(\bar{s}-1)} e^{\int_{-1}^{\bar{s}} dx P_e(x)} A^I(\bar{s}, x), \quad \left(\bar{t} = \frac{1}{2}(1+\bar{s})(1-x); \bar{u} = \frac{1}{2}(1-\bar{s})(1-x) \right).$$

Здесь α_e^I - длины рассеяния, β_e^I и c_e^I - параметры эффективной области, $P_e(x)$ - полином Лежандра. Тогда для длин рассеяния и параметров эффективной области $\mathcal{H}\mathcal{H}$ -системы получаются значения, приведенные в таблице.

$\alpha_e^{I(n)}$	Эксперимент [33]	Значения из [22]	Значения из [32]
α_o^0	0,10; 0,60	0,15	$0,05 \pm 0,02$
α_o^2	-0,10; -0,03	-0,042	$-0,065 \pm 0,025$
α_1^1	0,032; 0,040	0,031	$0,0341 \pm 0,0036$
β_1^1		$1,14 \cdot 10^{-3}$	$(1,07 \pm 0,27) \cdot 10^{-3}$
α_2^0	$1,4 \cdot 10^{-3}$; $1,8 \cdot 10^{-3}$	$1,85 \cdot 10^{-3}$	$(1,48 \pm 0,08) \cdot 10^{-3}$
α_2^2	$-2,10^{-4}$; $3 \cdot 10^{-4}$	$2,6 \cdot 10^{-4}$	$(-3 \pm 8) \cdot 10^{-5}$
β_2^0		$-1,02 \cdot 10^{-4}$	$(-3,8 \pm 1,1) \cdot 10^{-5}$
β_2^2		$-5,1 \cdot 10^{-5}$	$(-4,4 \pm 1,1) \cdot 10^{-5}$
c_2^0		$2 \cdot 10^{-5}$	$(1,13 \pm 0,36) \cdot 10^{-5}$
c_2^2		$1,06 \cdot 10^{-5}$	$(1,27 \pm 0,36) \cdot 10^{-5}$
α_3^1		$1,33 \cdot 10^{-5}$	$(3,8 \pm 0,5) \cdot 10^{-5}$
α_4^0		$5 \cdot 10^{-6}$	$(4,8 \pm 0,8) \cdot 10^{-6}$
α_4^2		$2 \cdot 10^{-6}$	$(1,7 \pm 0,8) \cdot 10^{-6}$

При $\ell \approx 3$ из приведенных выше формул можно получить следующие простые выражения для длин рассеяния

$$\alpha_\ell^s = (2\ell+1)(4\ell+7)Z_\ell, \quad \alpha_\ell^2 = (4\ell^2+3\ell+8)Z_\ell, \\ \alpha_\ell^t = \frac{1}{3}(4\ell^2-2\ell-1)Z_\ell, \quad Z_\ell = 3\pi\alpha_0^2 \frac{(\ell!)^3(\ell-3)!}{[(2\ell+1)!]^2}.$$

Результаты, приведенные в таблице, хорошо согласуются с известными экспериментальными данными [33], а также с результатами феноменологического подхода Налоу и Индураина [32], где используется представление Фруассара-Грибова.

Заметим, что, если значения длин рассеяния в S -и P -волнах в основном определяются борновским членом (рис. 1а), то, начиная с D -волны, вклад борновского члена в длины рассеяния высших парциальных волн полностью отсутствует и их величины определяются вкладом пионной петлевой диаграммы 1б.

Разлагая амплитуду A^I по парциальным волнам и используя формулу $(ctg \delta_\ell^I - i)^{-1} = (1 - \frac{1}{S})^{1/2} A_\ell^I$, можно получить информацию о поведении фаз $\pi\pi$ -системы. На рис. 2 приведены соответствующие графики. Пунктирной линией показано поведение фаз в пределе $m_\pi = 0$ (случай, рассмотренный в работах [15, 16]). В P -волне хорошо заметен ρ -мезонный резонанс при энергии ~ 800 МэВ с шириной ~ 150 МэВ. Точки \square - из [33а], \circ - из [33б] и \triangle - из [33в] (об остальных см. [16]).

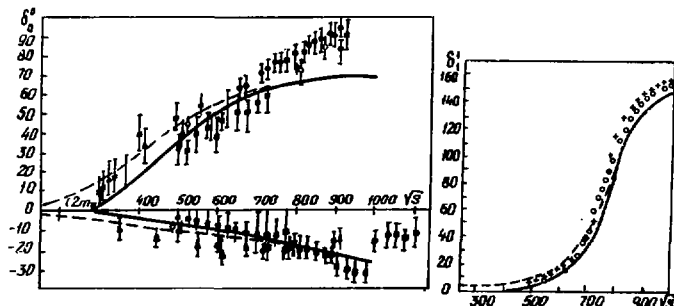


Рис. 2

4. Электромагнитные взаимодействия

Взаимодействие с электромагнитным полем A_μ вводится в лагранжиан обычным градиентно-инвариантным способом

$$\partial_\mu \chi^\pm \rightarrow (\partial_\mu \mp ie A_\mu) \chi^\pm$$

$$\chi^\pm = (\pi^\pm, K^\pm, \rho, \Sigma^\pm, \Xi^\pm).$$
(4.1)

а). **Формфактор.** Матричный элемент для пиона, находящегося во внешнем электромагнитном поле A_μ , равен

$$\langle \pi^+ | S(A) | \pi^+ \rangle = ie \frac{\rho^\mu A_\mu(q)}{(2\pi)^3 2\sqrt{p_1^0 p_2^0}} \Phi(q),$$

где p_1 и p_2 — импульсы пиона, $p = p_1 = p_2$, $q = p_1 = p_2$.

$$\Phi(q) = 1 + \Phi^{(\pi)}(q) + \Phi^{(B)}(q) + \dots$$
(4.2)

формфактор пиона. $\Phi^{(\pi)}(q)$ — вклад в формфактор от пионной диаграммы 3б и $\Phi^{(B)}(q)$ — вклад от барионных диаграмм 3в, г, д в e/ϵ^2 приближении.

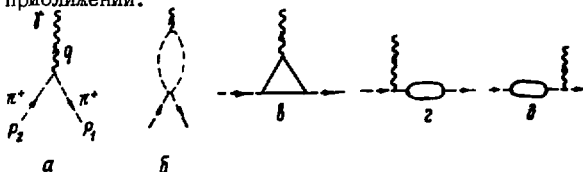


Рис. 3

При вычислении функции $\Phi^{(\pi)}(q)$ используется с.п. метод. В результате получаем

$$\Phi^{(\pi)}(q) = \alpha_0 \left[\bar{q}^2 \left[\frac{13}{24} - \frac{3}{2}C + \ln \frac{2\pi f_\pi^2}{m_\pi^2} \right] - 1 + \frac{4}{3} \bar{q}^2 + (1 - \bar{q}^2) I(\bar{q}^2) \right],$$
(4.3)

где $C = 0.577...$, $\bar{q}^2 = q^2/4m_\pi^2$, α_0 и $I(\bar{q}^2)$ те же, что и в формуле (3.2). Из (4.3) видно, что вклад от пионной петли в радиус пиона равен

$$\langle r^2 \rangle^{(\pi)} = \frac{3}{2} \frac{\alpha_0}{m_\pi^2} \left[\frac{13}{24} - \frac{3}{2}C + \ln \frac{2\pi f_\pi^2}{m_\pi^2} \right] \approx 0.065 (\Phi_M)^2$$
(4.4)

Вклад от барионных диаграмм опять вычисляется с точностью до q^2 — членов, ввиду малости остальных. Все расходимости в диаграммах 3в, г, д взаимно компенсируются и для $\Phi^{(B)}(q)$ получается выражение *

*/ Множитель 1,7 появляется после учета всех членов барионного октета (см./18). πK — взаимодействия дают очень малый вклад в формфактор пиона.

$$\bar{\Phi}^{(5)}(q) \approx 1,7 \frac{q^2}{6(\hbar m_N)^2} q^2 \quad (4.5)$$

Отсюда для квадратичного радиуса пиона получается вклад

$$\langle r^2 \rangle^{(F)} \approx 0,36 (\hbar m)^{-2}.$$

Радиус пиона

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\langle r^2 \rangle^{(H)} + \langle r^2 \rangle^{(F)}} \approx 0,65 (\hbar m) \quad (4.6)$$

находится в удовлетворительном согласии с последними экспериментальными данными /34/.

Подставляя функции (4.3) и (4.5) в (4.2), приходим к следующему выражению для формфактора пиона:

$$\Phi(q) = 1 + \alpha_c \{-1 + 8,6 \bar{q}^2 + (1 - \bar{q}^2) J(\bar{q}^2)\}.$$

Эта формула описывает поведение формфактора пиона при энергиях $\sqrt{19^2} < 1$ ГэВ в хорошем согласии с экспериментальными данными, недавно полученными в Дубне и Серпухове /34/ (см. графики на рис. 4а, б. Точки $\bar{\Phi}$ — из /34а/, $\bar{\Phi}$ — из /34б/.

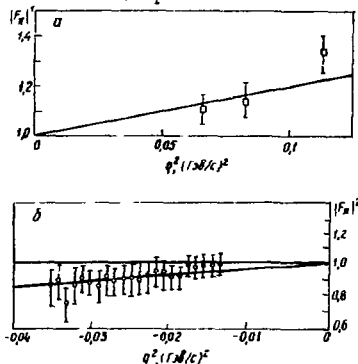


Рис. 4

Интересно отметить, что радиус пиона почти целиком определяется вкладом барионных петлевых диаграмм. Значение радиуса (4.6) близко к предсказаниям, сделанным на основе модели ρ -доминантности $^* \sqrt{\langle r^2 \rangle} \sim \sqrt{6/m_\rho^2} \sim 0,64 \hbar m$.

* Аналогичные вычисления, проведенные для каонов, дают следующие результаты/20/: $\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{K^+} = 0,61 \hbar m$; $\sqrt{\langle r^2 \rangle}_{K^0} = 0,28 \hbar m$, что также хорошо согласуется с предсказаниями модели векторной доминантности/35/.

б). Комптон-эффект. Выпишем теперь матричный элемент, соответствующий комптон-эффекту на пионе

$$\langle \pi^{\alpha}(\rho_1) | \pi^{\beta}(\rho_2) | \gamma_{\lambda_1}(q_1) \gamma_{\lambda_2}(q_2) \rangle = i \frac{\delta_{\lambda_1 \lambda_2}^{(4)}}{(2\pi)^2 4 \sqrt{\rho_1^2 \rho_2^2} q_1^0 q_2^0} T_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(\rho_1 \rho_2 | q_1 q_2),$$

где q_1, q_2 - импульсы фотонов; $\varepsilon_{\lambda_1}^{\mu}, \varepsilon_{\lambda_2}^{\nu}$ - поляризуемости; ρ_1, ρ_2 - импульсы пионов, α, β - изотопические индексы.

Сразу же заметим, что для этого процесса в однопетлевом приближении компенсации расходимостей происходят не только в барионных петлевых диаграммах, но и в пионных. Поэтому с.п. метод нет необходимости использовать. Не приводя общего вида ковариантной амплитуды $T_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$, запишем здесь ту форму, которая получается в первых порядках теории возмущений (e^2/ϵ^2):

$$T_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = 2e^2 (\delta_{\alpha\beta} - \delta_{3\alpha} \delta_{3\beta}) \left\{ g^{\mu\nu} - \frac{\rho_1^{\mu} \rho_2^{\nu}}{\rho_1^2 q_1^2} - \frac{\rho_2^{\mu} \rho_1^{\nu}}{\rho_2^2 q_2^2} + \right. \quad (4.7)$$

$$\left. + (g^{\mu\nu} q_1 q_2 - q_1^{\mu} q_2^{\nu}) [\beta^{(\pi)}(q_1 q_2) + \beta^{(B)}(q_1 q_2)] \right\} + 4e^2 \delta_{3\alpha} \delta_{3\beta} (g^{\mu\nu} q_1 q_2 - q_1^{\mu} q_2^{\nu}) \beta^{(\pi)}(q_1 q_2)$$

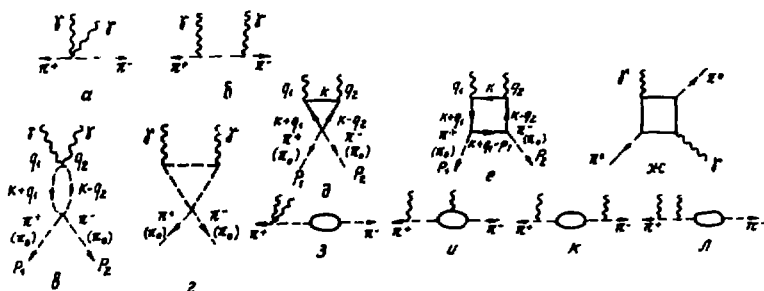


Рис. 5

Первые три члена в фигурных скобках являются борновскими членами (диаграммы 5а и 5б), $\beta^{(\pi)}(q_1 q_2)$ - вклад от пионных петель (5в и 5г), $\beta^{(B)}(q_1 q_2)$ - вклад от барионных петель (5 д-л). В $\beta^{(B)}$ удержаны лишь константные члены, ввиду малости остальных членов разложения по степеням $(q_1 q_2)$. Кроме того, при выводе (4.7) использованы равенства $(q_1 \varepsilon_1) = (q_2 \varepsilon_2) = 0$, $q_1^2 = q_2^2 = 0$, $\rho_1^2 = \rho_2^2 = m_{\pi}^2$.

При совместном вычислении вклада в амплитуду от диаграмм 5б и 5г получается конечное выражение, равное

$$\beta^{(\pi)}(q_1, q_2) = (4\pi F_\pi^2)^{-2} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{m_\pi^2}{q_1 q_2} \right) \left\{ \frac{2m_\pi^2}{q_1 q_2} \left[\arctg \left(\frac{2m_\pi^2}{q_1 q_2} - 1 \right) \right]^2 - 1 \right\}.$$

При рассмотрении комптон-эффекта на нейтральном пионе вклады от диаграмм 5д, е, ж полностью взаимно сокращаются. Для заряженных пионов вклады от нуклонных диаграмм 5д, е, з-л равны

$$\beta^{(\pi')} = \frac{2}{3} \left(\frac{g_A}{4\pi F_\pi} \right)^2. \quad (4.8)$$

Учет вкладов от остальных членов барионного октета приводит опять к появлению множителя 1,7в (4.8).

Определяя поляризуемость пиона как коэффициент эффективного взаимодействия пиона с внешним электромагнитным полем A_μ */

$$V_{q_2} = \frac{\alpha_\pi}{2} (\vec{H}^2 - \vec{E}^2),$$

получаем

$$\alpha_{\pi^\pm} = \alpha_{\pi^\pm}(q_1, q_2) \Big|_{q_1 q_2 = 0} = \frac{e^2}{m_\pi^2} (\beta^{(\pi)}(0) + \beta^{(\pi')}) = 0,33 \frac{\alpha}{m_\pi^2} = 7 \cdot 10^{-3} (\mu_N)^2, \quad (4.9)$$

$$\alpha_{\pi^0} = \alpha_{\pi^0}(q_1, q_2) \Big|_{q_1 q_2 = 0} = 2 \frac{e^2}{m_\pi^2} \beta^{(\pi)}(0) = -0,04 \frac{\alpha}{m_\pi^2} = -8 \cdot 10^{-4} (\mu_N)^2.$$

Интересно отметить, что функция $\beta^{(\pi)}(q_1, q_2)$ быстро меняется в пороговой области. В результате на пороге рождения двух пионов получаем

$$\alpha_{\pi^\pm}(2m_\pi^2) = 0,53 \frac{\alpha}{m_\pi^2}; \quad \alpha_{\pi^0}(2m_\pi^2) = 0,35 \frac{\alpha}{m_\pi^2}.$$

Полученные значения α_{π^\pm} в два раза больше тех значений, которые получались на основе использования алгебры Гюке /36/. Кроме того, в работе /36/ получено $\alpha_{\pi^0} = 0$ */.

*/ Энергетический множитель $(g^{\mu\nu} q_1 q_2 - q_1^\mu q_2^\nu)$ всегда присутствующий в однопетлевом приближении в амплитуде $T_{\pi\pi}^{\mu\nu}$ (см. (4.7)), на квантовомеханическом языке соответствует комбинации $(\vec{H}^2 - \vec{E}^2)$. Отсюда следует, что электрическая и магнитная поляризуемости пиона в этом приближении равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

5. Слабые взаимодействия

1). Распады заряженных пионов /21/

Рассмотрим теперь основные распады заряженных мезонов и вычислим структурные константы этих распадов. Для этого нам необходимо будет дополнить киральный лагранжиан той частью, которая ответственна за слабые взаимодействия. Выпишем ее

$$\mathcal{L}_{B3}^{(a)} = \mathcal{L}_{B3}^{(a)'} - i(\bar{\psi}_L \gamma_5 \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma_5 \psi_R) + i e G_F \bar{\psi}_L \gamma_5 \psi_L + \frac{1}{2} \bar{\psi}_L \gamma_5 (1 - \gamma_5) \psi_L \} \sqrt{2},$$

где $\mathcal{L}_{B3}^{(a)'} = \frac{G}{\sqrt{2}} \sin \theta \bar{\psi}_L (1 - \gamma_5) \psi_L$; G - слабая константа связи, θ - угол Кашибо, μ , e и ν - поля μ -мезона, электрона и нейтрино.

Для амплитуд процессов - T будем использовать обычное определение, которое, например, для процесса $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu$ имеет вид

$$\langle \mu \nu(p), \gamma_\lambda(q) | S | \pi(p) \rangle = i \pi \frac{\delta^{(4)}(p - q - p)}{\sqrt{p^0 q^0}} \varepsilon_\lambda^\mu T_\mu,$$

где ε_λ^μ - поляризация фотона, а p, q и ℓ - импульсы пиона, фотона и лептонной пары, соответственно. Поскольку, как легко убедиться на примере предыдущих расчетов, вклады барионных петель значительно превышают вклады от пионных петель, мы здесь будем учитывать лишь барионные вклады.

а). Начнем с рассмотрения основного распада пиона $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu$. С помощью этого процесса фиксируется единственный параметр киральной теории - F_π . Сказывается, что следующий за борновским порядок теории возмущений дает лишь малую поправку к F_π , и в петлевых диаграммах 6а и 6б опять происходит полная компенсация расходимостей.

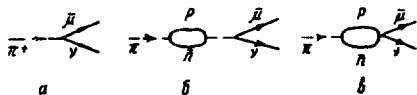


Рис. 6

*/ Приведем опять аналогичные результаты, полученные нами для каонов /20/: $\alpha_{K^+} = 1.6 \cdot 10^{-3} (F_K)^2$; $\alpha_{K^0} = 0$.

В результате в однопетлевом приближении получаем

$$T_{\pi \rightarrow \mu \nu}^{(*)} = i\sqrt{2} F_{\pi}^2 \left[1 - \frac{1}{6} \left(\frac{g_A m_{\pi}}{\sqrt{2} F_{\pi}} \right)^2 \right] \rho_{\mu} \rho_{\nu}^{(*)}, \quad (5.1)$$

где ρ_{μ} — импульс пиона, $\rho_{\mu}^{(*)} = \frac{G}{\sqrt{2}} \cos \theta u_{(\mu)} \gamma_{\mu} (1 - i\gamma_5) u_{(\nu)}$ — лептонный ток. Второй член, стоящий в скобках, существенно меньше единицы. Сравненная (5.1) с экспериментом, имеем $F_{\pi}^2 \approx 93$ МэВ.

6). Рассмотрим теперь процесс $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu \gamma$. Подробное обсуждение этого процесса можно найти в работах [36, 37].

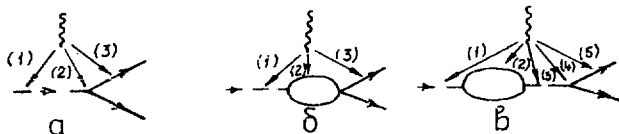


Рис. 4

В однопетлевом приближении определяется диаграммами 7а

$$T_{\pi \rightarrow \mu \nu}^{(*)} = i\sqrt{2} F_{\pi}^2 \left\{ \sqrt{2} \left(\frac{g_A m_{\pi}}{F_{\pi}} \right) \rho_{\mu}^{(*)} - G \cos \theta \bar{u}_{(\mu)} \gamma_{\mu} (\hat{k} + \hat{q}) m_{\mu} \hat{\rho} (1 - \gamma_5) u_{(\nu)} \right\}.$$

Однопетлевое приближение в основном исчерпывается диаграммами, приведенными на рис. 7б и 7в. Вклады от этих диаграмм имеют вид

$$T_{\pi \rightarrow \mu \nu}^{(*)} = -\frac{1}{6} \left(\frac{g_A m_{\pi}}{\sqrt{2} F_{\pi}} \right)^2 T_{\pi \rightarrow \mu \nu}^{(*)} - i\sqrt{2} \left[h_V \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_{\alpha} q_{\beta} + h_A (q_{\mu} p_{\nu} - p_{\mu} q_{\nu}) \right] \rho_{\nu}^{(*)},$$

где

$$h_V = \frac{g_A}{8\pi^2 F_{\pi}}, \quad h_A = \frac{g_A}{6(2\pi)^2 F_{\pi}}, \quad (5.2)$$

$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ — полностью антисимметричный тензор. Таким образом, учет нуклонных петель сводится: 1) к перенормировке константы F_{π}^2 (см. (5.1)); 2) к появлению членов, описывающих структурное излучение.

Для отношения $h_A/h_V = \gamma$ получаем

$$\gamma = g_A/3 \approx 0.4, \quad (5.3)$$

тогда как эксперимент дает два возможных значения $\gamma = \{0.4; -2\}$ [38].

(Заметим, что в нашем подходе автоматически выполняются следующие из алгебры токов [36] соотношения между константами h_V

и константой f распада $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, а также константой h_H и поляризуемостью пиона $\beta(0)$.

Амплитуда процесса $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ впервые была вычислена в работе Стейнбергера [39] в однопетлевом приближении (см. рис. 8):

$$T_{\mu\nu} = f \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q_1^\alpha q_2^\beta; \quad f = -\frac{e^2 g_H}{(2\pi)^2 F_\pi^2} = 0,54 \frac{\alpha}{\pi^2 F_\pi}, \quad (5.4)$$

q_1, q_2 — импульсы фотонов. Экспериментальные значения f следующие:

$$|f| = \{ 0,45^{+0,01}_{-0,01}; 0,57^{+0,01}_{-0,01} \} \frac{\alpha}{\pi^2 F_\pi}.$$

Соотношение, следующее из алгебры токов, имеет вид

$$h_V = -f/2e^2. \quad (5.5)$$

Сравнивая (5.4) с (5.2), легко убедиться в выполнении этого равенства.

Значение поляризуемости пиона при энергиях $q_1 q_2 = 0$ в основном определяется барионными вкладами (см. формулу (4.8)). Сравнивая (4.8) с (5.2), получаем

$$h_H = F_\pi \beta(\pi^0). \quad (5.6)$$

Это именно то соотношение, которое следует из алгебры токов [36]. Учет вкладов от остальных членов барионного октета приводит к появлению множителей 1,7 в коэффициентах с g_H^2 и 1,2 в коэффициентах с g_H . Тем самым равенства (5.5) и (5.6) не нарушаются.

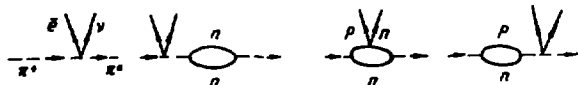


Рис. 8 и 9

в) Наконец, рассмотрим последний процесс $\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$ (рис.9). Вычисление амплитуды этого процесса очень похоже на вычисление формфактора пиона и дает следующий результат:

$$T_{(\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu)} = T^6 \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{q_2}{2\pi f_\pi} \right)^2 q^2 \right] + \frac{\sqrt{2}}{6} \left(\frac{q_2}{2\pi f_\pi} \right)^2 (m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2) q^\nu \rho_\nu^{(+)},$$

где

$$T^6 = -\sqrt{2} (\rho_{\pi^+} + \rho_{\pi^0}) \rho_\nu^{(+)}, \quad q = p_{\pi^+} - p_{\pi^0}.$$

На этом мы закончим рассмотрение пионных взаимодействий^{*/}.

6. Заключение

Подводя итоги приведенным здесь примерам использования квантовой киральной теории для описания низкоэнергетических процессов взаимодействия мезонов, можно отметить, что полученные результаты, как минимум, воспроизводят реальную качественную картину различных физических процессов, приводя в большинстве случаев и к хорошему количественному согласию с опытом.

Эти результаты показывают, что универсальность сильного, слабого и электромагнитного взаимодействий адронов может являться причиной успешного применения теории возмущений не только в первом, но и в следующем порядке по сильной константе связи, что подтверждается прямыми оценками двухпетлевого приближения /14,29/. Напомним, что квантовая киральная теория в той форме, в которой она здесь сформулирована, может успешно использоваться лишь при низких энергиях, существенно меньших $4\pi f_\pi \approx 1,2$ ГэВ, того энергетического масштаба, который естественно возникает в этой теории. При дальнейшем продвижении по энергии приближение точечных адронов может оказаться неприемлемым в силу наличия структуры адронов.

Уверенность в наличии такой структуры непрерывно возрастает, чему способствуют успехи кварковой модели алгебры токов на световом конусе и собственно кварковых моделей в объяснении процессов электророждения и нейтринных реакций при высоких энергиях и в описании огромного числа распадов резонансов и данных по спектрокопии адронов.

^{*}/ Укажем еще, что вычисление K_{e3}^+ распада дает следующие значения для формфакторов: $\lambda_+ = 0,025$, $\lambda_0 = -0,03$ и $\xi = f_+^{(0)}/f_-^{(0)} \approx -0,7$.

В то же время эти успехи определенно указывают, что киральная симметрия является приближенной симметрией сильных взаимодействий для всех доступных в настоящее время энергий. Однако реализуется эта симметрия для разных энергий по-разному. В связи с этим, одним из наиболее интересных вопросов, по нашему мнению, является исследование смены режимов реализаций киральной симметрии от динамической к алгебраической в области средних энергий.

Некоторые возможности в изучении этого вопроса дают дуально-резонансные модели, описывающие взаимодействие протяженных объектов (струн). Эти модели, с одной стороны, воспроизводят и приводят к амплитудам Венециано, с другой стороны, в пределе низких энергий, переходят в полевые модели точечных частиц. В частности, наиболее реалистическая дуально-резонансная модель Нерью-Шварца /42/ имеет своим точечным пределом рассмотренную в настоящем обзоре киральную теорию с нелинейным феноменологическим лагранжианом.

Литература

1. R.Feynman and M.Gell-Mann. Phys.Rev. 109, 193 (1958).
2. M.Gell-Mann. Phys.Rev. 125, 1067 (1962); Physics 1, 63 (1964).
3. Р.Фейнман. "Взаимодействие фотонов с адронами", "Мир", М., 1975.
Дж.Бьёркен, Б.Л.Иоффе. УФН 106, 315 (1975).
4. Y.Nambu. Phys.Rev.Lett. 4, 380 (1960).
F.Gursey. Nuovo Cimento 16, 230 (1960).
M.Gell-Mann and M.Levy. Nuovo Cimento 16, 705 (1960).
5. M.Goldberger and S.Treiman. Phys.Rev. 110, 1478 (1958).
6. А.И.Вайнштейн, В.И.Захаров. УФН 100, 225 (1970).
С.Адлер, Р.Дашен. "Алгебры токов", "Мир", М., 1970.
H.Pagels. Phys.Reports. 16, 219 (1975).
7. S.Adler. Phys.Rev. 139B, 1638 (1965).
8. F.Low. Phys.Rev. 96, 1428 (1954).
M.Gell-Mann, M.L.Goldberger, Phys.Rev., 96, 1433 (1954).
9. B.W.Lee. Nucl.Phys. B9, 649 (1969).
J.L.Gervais, B.W.Lee. Nucl.Phys. B12, 627 (1968).
H.W.Grater. Phys.Rev. D.1,3313 (1970).
А.А.Хелашвили, В.Ю.Хмаладзе. ТМФ, 15, 78 (1973).
10. А.А.Славнов, Л.Д.Фаддеев. ТМФ 8, 297 (1971).
А.А.Slavnov, Nucl.Phys. B31, 301 (1971).
S.Gerstein, R.Jackiw, B.W.Lee, S.Weinberg. Phys.Rev.,D3, 2486 (1971).
11. J.Honerkamp, Nucl.Phys. B36, 130 (1972).
G.Ecker and J.Honerkamp, ibid, B52, 211 (1973).
V.N.Pervushin. JINR E2-7540, Dubna (1973).
12. В.Н.Первушин. ТМФ, 22, 291 (1975).
13. L-H.Chan and R.W.Haymaker. Phys.Rev. D10, 4170 (1974).
14. K.S.Jhung, R.S.Willey. Phys.Rev. D9, 3132 (1974).
15. H.Lehmann and H.Trute. Nucl.Phys. B52, 280 (1973).
16. G.Ecker and J.Honerkamp. Nucl.Phys. B62, 509 (1973).
17. М.К.Волков, В.Н.Первушин. ЯФ, 20, 762 (1974);
18. М.К.Волков, В.Н.Первушин. ЯФ, 19, 652 (1974).
Phys.Lett. 51B, 356 (1974).
19. М.К.Волков, В.Н.Первушин. ЯФ, 21, 214 (1975).
Phys.Lett. 51B, 399 (1974).
20. V.N.Pervushin, M.K.Volkov. Phys.Lett. 58B, 177 (1975).

21. М.К.Волков, В.Н.Первушин. ЯФ, 22, 366 (1975).
22. M.K.Volkov, V.N.Pervushin. Nuovo Cim. 27A, 277 (1975).
23. V.N.Pervushin, M.K.Volkov. Phys.Lett, 55B, 405 (1975).
ЯФ, 22, 346 (1975).
24. В.И.Лендцел, М.И.Гайсак. Препринт ИТЭ-74-87Е, Киев, 1974.
25. М.К.Волков. ЯФ, 6, II00 (1967); 7, 445 (1968). Ann.Phys. 49, 202 (1968), ТМФ 2, 197 (1970); 6,2I (1971).
26. H.Lehmann, K.Pohlmeyer. Commun.Math.Phys. 20, 101 (1971).
27. A.Salam and I.Strathdee. Phys.Rev. D1, 3296 (1970);
D3, 1805 (1971).
28. M.Gell-Mann, R.J.Oakes and B.Renner. Phys.Rev. 175, 2195 (1968).
29. М.К.Волков, Д.И.Казakov, В.Н.Первушин. СИЛЭ Е2-9170 (1975).
30. Д.В.Волков, ЭЧАЯ 4, 3 (1973); Препринт ИТЭ 63-75, Киев 1969.
31. S.Goleman, G.Wess, B.Zumino. Phys.Rev., 177, 2239 (1969).
32. F.P.Palou and F.J.Yndurain. Nuovo Cim. 19A, 245 (1974).
- 33 a) J.P.Baton et al. Phys.Lett. 33B, 525 and 528 (1970).
б) S.D.Protopopescu et al. L.A.L preprint 787 (1972).
в) P.Baillon et al. Phys.Lett. 38B, 555 (1972).
Y.Batusov, S.Buniatov et al. JINR-P1-7969, Dubna (1974).
ЯФ, 21, 308 (1975).
34. а) С.Р.Бережнев и др. ЯФ 18, 102 (1973).
б) G.Adylov et al. Phys.Lett. 51Q, 402 (1974).
35. N.M.Kroll, T.D.Lee and B.Zumino. Phys.Rev. 157 1376 (1967).
36. М.В.Терентьев. ЛФ 16, 162 (1972).
37. Д.Ю.Бардин и С.М.Биленький. ЯФ 16, 557 (1972).
38. D.Derommier et al. Phys.Lett. 7, 885 (1963).
39. I.Steinberger. Phys.Rev. 76, 1180 (1949).
40. A.Rittenberg et al. Rev.Mod.Phys., 42, 2 (1971).
41. G.Belletin, C.Vemporad, P.Braccini. Nuovo Cim. A66, 242 (1970).
42. A.Neveu, J.H.Schwarz. Nucl.Phys. B31, 86 (1971).
K.Kawazabayashi and S.Kitakado. Nuovo Cimento 14A, 190 (1973).

RENORMALIZATION OF THE NONLINEAR σ -MODEL IN $2 + \epsilon$ DIMENSION

J. Zinn-Justin

DPHT CEN Saclay BP No 2, 91190 GIF-SUR-YVETTE (France)

This talk will present a brief account of a work done in collaboration with E. Brezin^{/1/} on the renormalization of the non linear σ model with $O(n)$ symmetry and its application, in Statistical Mechanics, to the phase transition of the classical Heisenberg ferromagnet.

I. The non linear σ model^{/2/}

We will concentrate only on the σ model with $O(n)$ symmetry, although most of the results can be extended with minor modifications to the general case.

The generating functional of Green's functions, in euclidean space, is given by:

$$Z(\vec{J}, H) = \int [d\vec{\pi} (1 - \vec{\pi}^2)^{-1/2}] \exp - \frac{1}{T} \int d^d x \left[\mathcal{L}(\vec{\pi}) - H \sqrt{1 - \vec{\pi}^2} - \vec{J} \cdot \vec{\pi} \right] \quad (1)$$

where $\mathcal{L}(\vec{\pi})$ is

$$\mathcal{L}(\vec{\pi}) = \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu \vec{\pi})^2 + (\partial_\mu \sqrt{1 - \vec{\pi}^2})^2 \right] \quad (2)$$

and $\vec{\pi}$ is a $(n-1)$ component vector field.

This model is invariant under transformations of the symmetry group, acting on the vector $(\vec{\pi}, \sqrt{1 - \vec{\pi}^2})$.

Notice that we have, for convenience, normalized the $\vec{\pi}$ field so that the coupling constant T appears only in front of the lagrangian.

Simple power counting shows that this model is, in perturbation theory, not renormalizable for a dimension $d > 2$. Indeed the $\vec{\pi}$ field has canonical dimension $\frac{d-3}{2}$, and the interaction contains arbitrary powers of $\vec{\pi}$.

We shall show in what follows that the true large momentum behavior of this model, is related to the existence of a phase transition in the Heisenberg ferromagnet and this will yield the physical solution of the problem.

II. The classical Heisenberg ferromagnet

The Heisenberg model describes the interaction of a spin system of n -component unit vectors \hat{S}_i on a d dimensional cubic lattice. We shall consider a system with a two spin interaction, whose Hamiltonian reads:

$$\mathcal{H} = - \sum_{i,j} V_{ij} \hat{S}_i \cdot \hat{S}_j, \quad (3)$$

where i and j are lattice sites, and V_{ij} is a positive short range, and translationally invariant potential. The thermodynamical properties of the system, are obtained from the partition function

$$Z = \int \prod_i d\vec{S}_i \delta(\vec{S}_i^2 - 1) \exp - \frac{1}{T} \mathcal{H}. \quad (4)$$

It is known that this system undergoes a continuous (second order) phase transition for any dimension $d \geq 3$. In 1 dimension no phase transition is possible with short range forces. The structure of this phase transition has been completely explained with the use of mean field theory, Wilson's renormalization group arguments^{/3/}, and the famous Wilson-Fisher^{/4/} ϵ -expansion ($\epsilon = 4 - d$) above 4 dimension and in the neighborhood of 4 dimension. It is characterized by critical exponents, scaling properties and universal scaling functions. The experimentally known phase transition is 3 dimension agrees more than qualitatively with the results of the ϵ -expansion^{/5/} extrapolated at $\epsilon = 1$.

In two dimension the problem had not been solved until recently at the exception of the abelian $O(2)$ case for which Berezinski^{/6/} argued for the existence of a phase transition with long range correlations, temperature dependent critical exponents but without ordering. Indeed it has been rigorously established^{/7/}

that in two dimension, in models with continuous symmetry:

$$\langle \hat{S}_i \rangle = 0 \quad \forall T.$$

The problem of what happens in two dimension, and in the neighborhood of two dimension is directly related to the renormalization of the non linear σ model.

III. Qualitative arguments about phase transition in low dimensions

A.M.Polyakov^{/8/} and A.A.Migdal^{/9/} where the first to solve this problem with qualitative arguments.

Polyakov applied approximate renormalization group arguments to the Heisenberg model and obtained the first order effect.

Migdal used approximate recursion formulae on the lattice to study the Ising model, the Heisenberg ferromagnet and gauge theories. The main results are the following:

In the Ising model a phase transition appears for any dimension larger than one, and in the neighborhood of one dimension the critical temperature T_c is of order $(d-1)$.

In the Heisenberg model, phase transitions appear only at two dimensions for the abelian $O(2)$ group, and above two dimensions for the non-abelian case. In the latter case T_c is of order $(d-2)$.

Migdal has furthermore shown that in the framework of his approximation, the free energy $\ln Z$ of the Heisenberg model in d dimension is identical to the free energy of gauge theories in $2d$ dimension.

Therefore, in 4 dimension, the abelian gauge theory has a phase transition at a finite temperature and Q.E.D. corresponds to the low temperature phase; the non-abelian gauge theory has no phase transition and generates a new, presumably confined, theory.

Let us now give some simplified arguments explaining the role of dimension 1 and 2 respectively for the Ising and Heisenberg model. These arguments are based on the idea that the ground state of the transfer matrix is degenerated at very low temperature if a transition has to place. Because, in the large volume limit, the transfer matrix becomes a projector onto the ground

state, it is not necessary to calculate all matrix elements of this matrix, but it is sufficient to take a set of states, obtained from one of them by acting on it with the symmetry group. Those who are not familiar with the language of the transfer matrix, will feel intuitively, I think, that a phase transition is only possible if a global change on the boundary conditions of the system produces an infinite loss of energy.

Consider now the Ising model, in a box of linear dimension L . We first calculate the minimum energy of the system with the condition that all spins are equal on the boundary (Figure 1). Now we calculate the change in the minimal energy if the boundary conditions are that the spin are opposite on both sides (Figure 2). Obviously

$$\Delta E = - \text{cst } L^{d-1}.$$

On some surface we have to flip all the spins. So a transition is possible for $d > 1$. In the case of the Heisenberg model, we shall impose the condition that the angle between the spins on one side and the other side is θ .

Now the minimum energy is obtained by rotating continuously the spin from one side to the other by an angle $\frac{\theta}{L}$ (Figure 3). The energy is then:

$$E = L^d \cos \frac{\theta}{L} \sim \text{cst} - \frac{\theta^2}{2} L^{d-2}$$

A change in the boundary condition leads to an infinite energy only for $d > 2$.

IV. Heisenberg model in $2+\epsilon$ dimension

a) Low temperature expansion

We shall calculate the free energy of the Heisenberg model through a systematic low temperature expansion. At low temperature, the spontaneous magnetization $\langle \hat{S}_i \rangle$ is very close to one, and the spins fluctuate very little around their mean position \hat{n} . It is therefore natural to parametrize \hat{S}_i as:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_i \cdot \hat{S}_i &= \sigma \\ \hat{S}_i &= \vec{\pi}_i \quad \text{with} \quad \sigma = \sqrt{1 - \vec{\pi}_i^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

The partition function is then given by:

$$Z = \int \prod_i d\vec{\pi}_i [1 - \vec{\pi}_i^2]^{\frac{1}{2}} \exp \frac{1}{T} \sum_{ij} V_{ij} [\vec{\pi}_i \cdot \vec{\pi}_j + \sqrt{1 - \vec{\pi}_i^2} \sqrt{1 - \vec{\pi}_j^2}] \quad (6)$$

Low temperature expansion corresponds just to what is called in field theoretic language loop expansion. If we expand the interaction in terms of the $\vec{\pi}$ -variable we obtain:

$$V_{ij} \hat{S}_i \cdot \hat{S}_j = -\frac{1}{2} (\vec{\pi}_i - \vec{\pi}_j)^2 + O(\pi^4)$$

The propagator in momentum space is then

$$G_{\alpha\beta}(q) = \delta_{\alpha\beta} \frac{T}{\tilde{V}(0) - \tilde{V}(q)} \sim \frac{T}{q^2} \quad \text{for } q \text{ small.}$$

The properties of the phase transition are obtained by examining the long distance, i.e. the small momenta behaviour of the theory. It is easy to see that in this limit the interaction can be replaced by the interaction of the non-linear σ model.

b) Role of dimension two

Dimension two appears now clearly because the non-linear σ -model is then just renormalizable. It is also renormalizable in d dimension if we perform a double series expansion in T and $(d-2)$.

It can be regularized in a rotationally invariant way, for example by returning on the lattice, or simpler through the use of dimensional regularization, provided we add first a magnetic field to give a mass to the $\vec{\pi}$.

Only two renormalization constants are needed:

$$T \rightarrow Z_1(T) T,$$

$$\pi \rightarrow Z^{\frac{1}{2}} \pi.$$

This is easy to prove if we use the W.I. identities which express that the Lagrangian is invariant under the transformation:

$$\delta \vec{\pi} = \vec{\omega} \sqrt{1 - \vec{\pi}^2}.$$

The generating functional (1) therefore satisfies

$$\int d^d x \left[H(x) \frac{\delta Z}{\delta \vec{J}(x)} - \vec{J}(x) \frac{\delta Z}{\delta H(x)} \right] = 0. \quad (7)$$

The connected functional $W = kZ$ satisfies the same equation. Its Legendre transform Γ :

$$\Gamma(\vec{\pi}, H) + W(\vec{\pi}, H) = \int d^d x \vec{J}(x) \vec{\pi}(x). \quad (8)$$

Satisfies then:

$$\int d^d x \left(H(x) \vec{\pi}(x) + \frac{\delta \Gamma}{\delta H(x)} \frac{\delta \Gamma}{\delta \vec{\pi}(x)} \right) = 0. \quad (9)$$

It can be easily shown^{/10/} that this equation is stable under renormalization.

The renormalized Lagrangian satisfies the same equation. The solution of this equation leads to the result

$$\mathcal{L}_R = \frac{1}{2} \mu^{d-2} (Z, t)^{-1} \left\{ \int d^d x \left[Z (\partial_\mu \vec{\pi})^2 + (\partial_\mu \sqrt{(1 - Z \vec{\pi}^2)})^2 \right] \right\}, \quad (10)$$

where μ is a scale parameter and t is dimensionless.

$$Z(\vec{J}, H) = \int [d\vec{\pi} (1 - Z \vec{\pi}^2)^{-\frac{1}{2}}] \exp \left\{ -\frac{1}{t} \left[\mathcal{L}_R - H \sqrt{\frac{1}{2} - \vec{\pi}^2} - \vec{J} \vec{\pi} \right] \right\}. \quad (11)$$

c) Renormalization group equations

Renormalization group equations are as follows:

For the IPI correlation functions they take the form:

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + w(t) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{N}{2} \zeta(t) + \left(\frac{1}{2} \zeta(t) + \frac{w(t)}{t} - (d-2) H \frac{\partial}{\partial H} \right) \right] \Gamma^{(N)}(p_i, t, H, \mu) = 0 \quad (12)$$

in which we set the magnetic field H to a constant. Connected correlation functions of the π and the σ satisfy similar equations ($(-\frac{N}{2} \zeta(t))$ is changed in $\frac{N}{2} \zeta(t)$).

These equations can be integrated. Defining the correlation length as:

$$\xi(t) = \mu^{-1} t^{\frac{1}{d-2}} \exp \int_0^t dt' \left[\frac{1}{w(t')} - \frac{1}{(d-2)t'} \right] \quad (13)$$

and the spontaneous magnetization as

$$\sigma(t) = \langle \sigma \rangle = \exp p - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\zeta(t')}{w(t')} dt' \quad (14)$$

we obtain a scaling form:

$$\Gamma^{(N)}(p_i, t, H) = \zeta(t)^{-d} \sigma^{-N}(t) \Phi^{(N)}(p_i \zeta(t), H \frac{\sigma(t) \zeta(t)^d}{t}) \quad (15)$$

which is similar to the scaling form obtained from the $(4-d)$ expansion, but contains additional information about Goldstone singularities.

d) Calculation of the renormalization group functions

It is easy to calculate Z_1 and Z at two loop order. The functions $w(t)$ and $\zeta(t)$ are as follows:

$$\begin{aligned} w(t) &= (d-2)t - (n-2)(t^2 + t^3) + O(t^4), \\ \zeta(t) &= (n-1)t + O(t^3). \end{aligned} \quad (16)$$

A factor $\frac{1}{(2\pi)^d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ has been incorporated in the definition of t_c .

The important feature is the coefficient of t^2 in $w(t)$ which is negative for $n > 2$. The non-linear ϕ^4 -model with non-abelian group symmetry, is asymptotically free in 2 dimension (as gauge theories in 4 dimension). Therefore it has an U.V. stable fixed point t_c in $2+\epsilon$ dimension. The true asymptotic behaviour of this model above 2 dimension has nothing to do with perturbation theory. It is governed by this fixed point:

$$\Gamma^{(n)}(\lambda p_i) \sim \lambda^{d - \frac{n}{2}(d-2+\eta)}$$

$$\lambda \rightarrow +\infty$$

with the anomalous dimension given by:

$$\eta = d-2 + \zeta(t_c). \quad (17)$$

Expressions (16) yield:

$$\eta = \frac{(d-2)}{(n-2)} - \frac{(n-1)}{(n-2)^2} (d-2)^2 + O(d-2)^3.$$

The non-linear ϕ^4 -model behaves in the neighborhood of two dimension like a renormalizable theory.

Arguments using the scaling form (15), and the low temperature expansion with a cut-off, suggest that the poles, in the dimension parameter d , which, in the dimensionally regularized theory, accumulate at $d=2$ from above, are in fact canceled by non analytic terms in the temperature like $t^{\frac{1}{d-2}}$ which appear in a correct resummation of the $(d-2)$ expansion. Now from the point of view of the Heisenberg ferromagnetic, this is also very interesting. Indeed a critical temperature is an I.R. unstable fixed point. The temperature t_c is therefore the critical temperature of the model. The anomalous dimension is one of the critical exponent. The correlation length exponent ν is given by:

$$\frac{1}{\nu} = -w'(t_c) = (d-2) + \frac{(d-2)^2}{n-2} + O((d-2)^3).$$

The expressions of χ and η agree with the first order calculation of Polyakov^{/8/}. The other exponents are function of χ and η . For instance the spontaneous magnetization behaves at t_c as:

$$\chi(t) = \langle \sigma \rangle \sim (t_c - t)^{\beta}$$

with

$$\beta = -\frac{1}{2} \frac{\chi(t_c)}{w'(t_c)}.$$

Other results, in the framework of a $(d-2)$ expansion, can be obtained for critical phenomena.

V. The large n expansion^{/11/}

We have seen that we can obtain the critical properties of the Heisenberg ferromagnet from the non-linear σ -model. But through mean field theory, these properties are also given by the large distance behaviour of the linear σ -model. Furthermore the non-linear σ model has directly a scaling form. This suggests strongly that the nonlinear σ model is identical to the linear σ model with a coupling constant fixed at its I.R. fixed point value, and the mass taken as a suitable function of the temperature.

This can be explicitly verified through the use of the $\frac{1}{n}$ expansion.

For the linear σ model this expansion can be obtained by the following procedure. One introduces a new dynamical variable $\alpha(x)$, and replaces the quartic interaction by:

$$-\frac{\alpha}{2} (\vec{\pi}^2 + \sigma^2)^2 \longrightarrow \frac{\alpha}{2} \alpha^2 + \alpha (\vec{\pi}^2 + \sigma^2).$$

One then integrates over the $\vec{\pi}$ field, and makes a saddle point expansion.

In the case of the non-linear σ model one writes the constraint $\vec{\pi}^2 + \sigma^2 = 1$ with the use of a lagrange multiplier $\alpha(x)$:

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + \alpha (\vec{\pi}^2 + \sigma^2 - 1)$$

and integrates in the same way on the $\vec{\pi}$ field. It is easy to see

that the difference between the two expansions comes from the α^2 term of the linear σ model. But this term disappears in the infrared limit. Therefore in the framework of the expansion the statement about the equivalences of these two models is true. Now in four dimension, the I.R. fixed point of the linear model is at the origin and the limiting Lagrangian is free. It seems therefore that the non-linear model in four dimension becomes a free field theory.

Another consequence of this equivalence is that the solution to the infrared slavery in the non-linear σ model is the appearance of a bound state σ , and the restoration of symmetry between π and σ which become both massive.

VII. The O(2) case

The abelian case is completely different from the non-abelian case. The reason for this is that a circle is not different, in the metric sense, from a straight line, but the equivalent is not true for a higher dimensional sphere.

The effect of this property can be seen by making the change of variable

$$\pi = \lambda m \theta$$

which transforms the model in a free field theory if H is zero, and in the Sine-Gordon model if H is not zero.

The quantum Sine Gordon model has been extensively studied and I shall just give a reference^{/12/}. Moreover the $O(2)$ model on a lattice (XY model) has also been solved directly^{/13/}.

VIII. The problem of crossing the critical temperature

Low temperature expansion, gives an expansion which has a singularity at the critical temperature. It does not therefore allow us to calculate in the high temperature phase. In particular in two dimension, the low temperature expansion gives us the R.G. functions but is otherwise useless. In order to continue the theory above t_c , it is necessary to add to the invariant interaction a magnetic field, i.e. a term which is coupled to the order parameter and which, in the linear represen-

tation gives a mass to all the states. The essential feature of such an interaction is that it allows us to cross t_c , and that the correlation functions are expandable above t_c in terms of the source of this interaction (here the magnetic field). Such a procedure has been applied to the Heisenberg model in two dimensions^{/1/}. It would be very useful to find a similar procedure for non-abelian gauge theory.

References

1. H. Brezin and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. Lett.* and "Spontaneous Breakdown of Continuous Symmetries Near Two Dimensions" Saclay preprint DMPT/76/27.
2. M. Gell-Mann and M. Levy, *Nuovo Cimento* **16**, 705 (1960).
3. K.G. Wilson and J.B. Kogut, *Phys. Rep.* **12C**, 75 (1974).
4. K.G. Wilson and M.E. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 240 (1972).
5. For a review see also: H. Brezin, J.C. Le Guillou and J. Zinn-Justin in "Phase Transitions and Critical Phenomena" vol VI ed. by C. Domb and M.S. Green (Academic Press, to be published).
6. V. Berezinski, *Zh.ETF* **52**, 907 (1970); **61**, 1144 (1971).
7. N.D. Mermin and H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 1133 (1960).
P.C. Hohenberg, *Phys. Rev.* **158**, 383 (1967).
In field theory this result has been derived by S. Coleman, *Commun. Math. Phys.* **31**, 259 (1973).
8. A.M. Polyakov, *Phys. Lett.*, **59B**, 79 (1975).
9. A.A. Migdal, *Zh. E.T.F.* **62**, 1457 (1975).
10. The proof is similar to the one given for gauge theories in: J. Zinn-Justin, "Renormalization of gauge theories" Lectures given at the International Institute for Theoretical Physics, Bonn, 1974. (Springer verlag).
11. S.K. Ma, *Rev. Mod. Phys.* **45**, 589 (1973); K.G. Wilson, *Phys. Rev.* **D7**, 2911 (1973). See also Ref. (5).
12. S. Coleman, *Phys. Rev.* **D11**, 2088 (1975).
13. A. Luther and D. Scalapino (to be published).

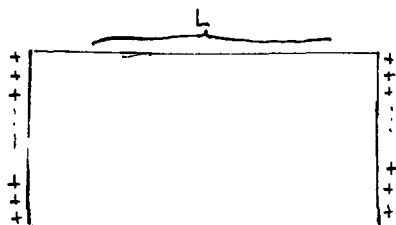


Figure 1

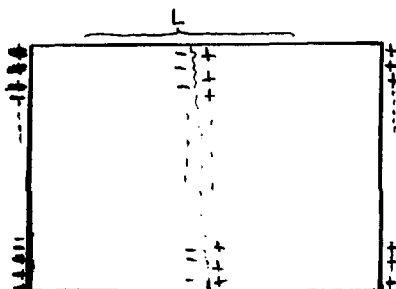


Figure 2

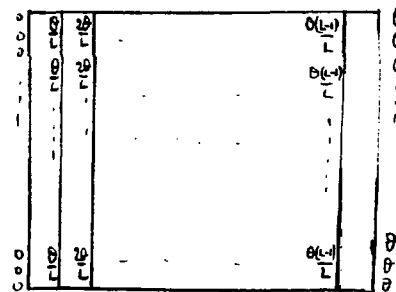


Figure 3

ТЕНЗОР И КОВЕКТОР КРУЧЕНИЯ В ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Н.А.Черников

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

I. Уравнение Эйнштейна для аффинной связности

В единой теории поля Эйнштейна^{/1/} аффинная связность задается тензорным уравнением

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - g_{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^\epsilon - g_{\alpha\epsilon} \Gamma_{\gamma\beta}^\epsilon = 0. \quad (I)$$

В новых работах^{/2/} по единой теории поля также принимается это уравнение.

На тензор $g_{\alpha\beta}$, а следовательно, и на связность $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ никаких условий симметрии не накладывается. Требуется только, чтобы уравнение (I) определяло связность однозначно. Это накладывает на тензор $g_{\alpha\beta}$ ограничения, которые здесь будут выяснены в процессе решения уравнения (I).

С аффинной связностью и другими геометрическими понятиями, которые здесь встретятся, рекомендуем познакомиться по книге^{/3/}. Будем обозначать

$$h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha}), \quad \varphi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} - g_{\beta\alpha}), \quad (2)$$

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} (\Gamma_{\alpha\beta}^\mu + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu), \quad S_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} (\Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \Gamma_{\beta\alpha}^\mu), \quad (3)$$

так что

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \varphi_{\alpha\beta}, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu + S_{\alpha\beta}^\mu. \quad (4)$$

$\dot{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu}$ называется средней связностью, $S_{\alpha\beta}^{\mu}$ - тензором кручения. Ковариантное дифференцирование со средней связностью будем обозначать символом $\dot{\nabla}$. Так как

$$\dot{\nabla}_{\gamma} g_{\alpha\beta} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - g_{\epsilon\beta} \dot{\Gamma}_{\gamma\alpha}^{\epsilon} - g_{\alpha\epsilon} \dot{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\epsilon},$$

то уравнение (I) можно записать в виде

$$\dot{\nabla}_{\gamma} g_{\alpha\beta} = g_{\epsilon\beta} S_{\alpha\gamma}^{\epsilon} + g_{\alpha\epsilon} S_{\gamma\beta}^{\epsilon}. \quad (5)$$

2. Средняя связность

Обозначим g определитель матрицы $(g_{\alpha\beta})$ и $a^{\alpha\beta}$ - алгебраическое дополнение элемента $g_{\alpha\beta}$ в этой матрице. Как хорошо известно,

$$g_{\epsilon\alpha} a^{\epsilon\beta} = g \delta_{\alpha}^{\beta} = g_{\alpha\epsilon} a^{\epsilon\beta},$$

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\gamma}} = a^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}.$$

Умножим уравнение (I) на $a^{\alpha\beta}$ и свернем произведение по индексам α и β . В результате получим

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\gamma}} = g \delta_{\epsilon}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\epsilon} + g \delta_{\epsilon}^{\beta} \Gamma_{\gamma\beta}^{\epsilon} = g (\Gamma_{\epsilon\gamma}^{\epsilon} + \Gamma_{\gamma\epsilon}^{\epsilon}).$$

Следовательно, для существования однозначного решения уравнения (I) требуется условие $g \neq 0$. В этом случае

$$\dot{\Gamma}_{\alpha}^{\alpha} = \dot{\Gamma}_{\alpha\mu}^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \ln \sqrt{|g|}. \quad (6)$$

Таким образом, средняя связность эквивалентна.

Принимая условие $g \neq 0$, мы можем ввести тензор $\tilde{g}^{\alpha\beta} = \frac{a^{\alpha\beta}}{g}$, взаимный тензору $g_{\alpha\beta}$, так что

$$g_{\epsilon\alpha} \tilde{g}^{\epsilon\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} = g_{\alpha\epsilon} \tilde{g}^{\epsilon\epsilon}. \quad (7)$$

3. Ковектор кручения

Умножим уравнение (1) на $\tilde{g}^{\mu\beta} \tilde{g}^{\alpha\nu}$ и свернем произведение по индексам α и β . В результате получим

$$\frac{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial x^\gamma} + \tilde{g}^{\alpha\nu} \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu + \tilde{g}^{\mu\alpha} \Gamma_{\gamma\alpha}^\nu = 0. \quad (8)$$

Так как

$$\overset{\circ}{\nabla}_\gamma \tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial x^\gamma} + \tilde{g}^{\alpha\nu} \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\mu + \tilde{g}^{\mu\alpha} \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\nu,$$

то уравнение (8) можно записать в виде

$$\overset{\circ}{\nabla}_\gamma \tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{g}^{\alpha\nu} S_{\gamma\alpha}^\mu + \tilde{g}^{\mu\alpha} S_{\alpha\gamma}^\nu. \quad (9)$$

Аналогично (2) обозначим

$$\tilde{h}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\tilde{g}^{\alpha\beta} + \tilde{g}^{\beta\alpha}), \quad \tilde{\varphi}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\tilde{g}^{\alpha\beta} - \tilde{g}^{\beta\alpha}). \quad (10)$$

Из уравнения (9) получаем

$$\overset{\circ}{\nabla}_\gamma \tilde{\varphi}^{\mu\nu} = \tilde{h}^{\mu\alpha} S_{\alpha\gamma}^\nu - \tilde{h}^{\nu\alpha} S_{\alpha\gamma}^\mu.$$

Следовательно,

$$\overset{\circ}{\nabla}_\gamma \tilde{\varphi}^{\mu\gamma} = \tilde{h}^{\mu\alpha} S_\alpha,$$

где

$$S_\alpha = S_{\alpha\mu}^\mu \quad (11)$$

есть ковектор кручения. Но

$$\overset{\circ}{\nabla}_\gamma \tilde{\varphi}^{\mu\gamma} = \frac{\partial \tilde{\varphi}^{\mu\gamma}}{\partial x^\gamma} + \tilde{\varphi}^{\mu\alpha} \overset{\circ}{\Gamma}_\alpha^\gamma = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} (\tilde{\varphi}^{\mu\gamma} \sqrt{|g|}).$$

Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} (\tilde{\varphi}^{\mu\gamma} \sqrt{|g|}) = \tilde{h}^{\mu\alpha} S_\alpha. \quad (I2)$$

Следовательно, для существования однозначного решения уравнения (I) требуется условие $\tilde{h} \neq 0$, где \tilde{h} — определитель матрицы $(\tilde{h}^{\alpha\beta})$.

Так как

$$h_{\alpha\epsilon} \tilde{g}^{\epsilon\beta} = \frac{1}{2} (\delta_\alpha^\beta + g_{\alpha\epsilon} \tilde{g}^{\epsilon\beta}), \quad g_{\alpha\epsilon} \tilde{h}^{\epsilon\beta} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\epsilon} \tilde{g}^{\epsilon\beta} + \delta_\alpha^\beta),$$

то

$$h_{\alpha\epsilon} \tilde{g}^{\epsilon\beta} = g_{\alpha\epsilon} \tilde{h}^{\epsilon\beta} = \tilde{g}_\alpha^\beta. \quad (I3)$$

Обозначая h определитель матрицы $(h_{\alpha\beta})$, отсюда находим

$$h = \tilde{h} g^2. \quad (I4)$$

Значит, условие $\tilde{h} \neq 0$ эквивалентно условию $h \neq 0$.

Принимая условие $h \neq 0$, мы можем ввести тензор $h^{\alpha\beta}$, взаимный тензору $h_{\alpha\beta}$, так что

$$h_{\alpha\epsilon} h^{\epsilon\beta} = \delta_\alpha^\beta. \quad (I5)$$

Докажем, что тензор

$$g_{\mu\alpha} h^{\mu\nu} g_{\beta\nu} = h_{\alpha\beta} - \varphi_{\alpha\mu} h^{\mu\nu} \varphi_{\nu\beta} = g_{\mu\alpha} h^{\mu\nu} g_{\nu\beta} \quad (I6)$$

является взаимным тензору $\tilde{h}^{\alpha\beta}$. Действительно, согласно (I3) имеем

$$g_{\mu\alpha} h^{\mu\nu} g_{\nu\epsilon} \tilde{h}^{\epsilon\beta} = g_{\mu\alpha} h^{\mu\nu} h_{\nu\epsilon} \tilde{g}^{\epsilon\beta} = g_{\epsilon\alpha} \tilde{g}^{\epsilon\beta} = \delta_\alpha^\beta.$$

Располагая этим результатом, найдем из (I2) ковектор кручения в виде

$$S_{\alpha} = g_{\alpha\mu} h^{\mu\nu} g_{\beta\nu} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} (\tilde{\varphi}^{\beta\gamma} \sqrt{|g|}) . \quad (17)$$

В число дифференциальных уравнений единой теории поля входят уравнения $S_{\alpha} = 0$. Из (12) и (17) следует, что уравнения $S_{\alpha} = 0$ эквивалентны уравнениям

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} (\tilde{\varphi}^{\mu\gamma} \sqrt{|g|}) = 0 . \quad (18)$$

4. Введение римановой геометрии

Рассмотрим риманов мир N измерений с метрической формой

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = h_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} . \quad (19)$$

Как обычно в римановой геометрии, с помощью тензоров $h_{\alpha\beta}$ и $h^{\alpha\beta}$ будем опускать и поднимать индексы. Например,

$$h_{\alpha\epsilon} \varphi^{\epsilon\beta} = \varphi_{\alpha}^{\beta} = \varphi_{\alpha\epsilon} h^{\epsilon\beta} ,$$

$$T_{\alpha\beta\gamma} = T_{\alpha\beta}^{\epsilon} h_{\epsilon\gamma} , \quad T_{\alpha\beta}^{\mu} = T_{\alpha\beta\epsilon} h^{\epsilon\mu} . \quad (20)$$

Как положено в римановой геометрии, введем связность, обозначаемую скобкой Кристоффеля для метрического тензора $h_{\alpha\beta}$:

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} h^{\mu\epsilon} \left(\frac{\partial h_{\epsilon\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial h_{\epsilon\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\epsilon}} \right) . \quad (21)$$

Ковариантное дифференцирование с такой связностью будем обозначать буквой \mathcal{D} . Например,

$$\mathcal{D}_{\gamma} \varphi_{\alpha\beta} = \frac{\partial \varphi_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \left\{ \begin{matrix} \epsilon \\ \gamma\alpha \end{matrix} \right\} \varphi_{\epsilon\beta} - \left\{ \begin{matrix} \epsilon \\ \gamma\beta \end{matrix} \right\} \varphi_{\alpha\epsilon} . \quad (22)$$

Так как

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\epsilon} (\delta_{\beta}^{\epsilon} - \varphi_{\beta}^{\epsilon}), \quad (23)$$

то $g = hJ$, где

$$J = \det (\delta_{\beta}^{\epsilon} - \varphi_{\beta}^{\epsilon}). \quad (24)$$

Согласно (16) и (17), ковектор кручения запишем в виде

$$S_{\alpha} = (\delta_{\alpha}^{\mu} - \varphi_{\alpha}^{\beta} \varphi_{\beta}^{\mu}) \frac{1}{\sqrt{|J|}} \mathcal{D}_{\gamma} (\tilde{\varphi}_{\mu}^{\gamma} \sqrt{|J|}). \quad (25)$$

Уравнения (18) очевидно эквивалентны уравнениям

$$\mathcal{D}_{\gamma} (\tilde{\varphi}_{\alpha}^{\gamma} \sqrt{|J|}) = 0. \quad (26)$$

Смешанный двухвалентный тензор называется аффинором. Аффинор с компонентами A_{α}^{β} обозначаем A . Если компоненты вектора ξ^{β} располагаем в строку, а ковектора ξ_{α} - в столбец, то из компонент A_{α}^{β} составляем матрицу (A) так, чтобы элемент A_{α}^{β} оказался на пересечении строки с номером α и столбца с номером β . Произведение AB двух аффиноров имеет компоненты $A_{\alpha}^{\epsilon} B_{\epsilon}^{\beta}$. Складываются аффиноры покомпонентно. Символ A^n означает степень n аффинора A . Единичный аффинор (компоненты которого представляются символом Кронекера δ_{α}^{β}), как и число 1, будем обозначать символом I . Так, $A^0 = 1$. Если F - число, то скалярный аффинор $F \cdot I$ (он имеет компоненты $F \delta_{\alpha}^{\beta}$) будем обозначать просто F . Символом \bar{A}_{α}^{β} обозначаем алгебраическое дополнение элемента A_{α}^{β} в матрице (A) . Величины \bar{A}_{α}^{β} составляют аффинор - адьюнкт \bar{A} аффинора A . По правилу Крамера имеем $A \bar{A} = |A|$, где $|A|$ - определитель матрицы (A) . Если $|A| \neq 0$, то существует обратный аффинор $A^{-1} = 1/A = \bar{A}/|A|$.

Нетрудно сообразить, что аффинор \tilde{g} , равный (13), зависит от аффинора (19) следующим образом:

$$\tilde{g} = \frac{1}{1-\varphi} = \frac{1+\varphi}{1-\varphi^2} . \quad (27)$$

Так как $\tilde{g} = \tilde{h} + \tilde{\varphi}$, то

$$\tilde{h} = \frac{1}{1-\varphi^2} , \quad \tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{1-\varphi^2} . \quad (28)$$

Ввиду того, что тензор $\varphi_{\alpha\beta}$ антисимметричен, характеристическое уравнение^{/4/} для аффинора φ имеет вид $\Pi(\varphi^2) = 0$ при четной размерности $N = 2K$ и $\varphi \Pi(\varphi^2) = 0$ при нечетной размерности $N = 2K+1$. Здесь $\Pi(x)$ — многочлен от x степени K , причем коэффициент при старшем члене x^K равняется I и $\Pi(1) = J$ равняется (24). Учитывая это, найдем аффиноры (28). По теореме Безу разность $\Pi(1) - \Pi(x) = (1-x)Q(x)$ делится на $(1-x)$ без остатка. Следовательно,

$$\varphi [\Pi(1) - \Pi(\varphi^2)] = \varphi (1 - \varphi^2) Q(\varphi^2) = J\varphi ,$$

а значит,

$$\tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{J} Q(\varphi^2) . \quad (29)$$

Теперь находим $\tilde{h} = 1 + \varphi \tilde{\varphi}$. Если $N = 2K$, то можно пользоваться более простой формулой для \tilde{h} , а именно:

$$\tilde{h} = \frac{1}{J} Q(\varphi^2) . \quad (30)$$

Формулу (25) для ковектора кручения мы можем написать в следующем виде

$$S_{\alpha} = \frac{(1-\varphi^2)_{\alpha}^{\mu}}{\sqrt{|J|}} \mathcal{D}_{\gamma} \left(\frac{\varphi}{\sqrt{|J|}} Q(\varphi^2) \right)_{\mu}^{\gamma} . \quad (31)$$

5. Уравнения Борна-Инфельда

В физически важном случае $N = 4$ будем считать, что

метрическая форма (19) имеет сигнатуру (1, -1, -1, -1). Нумерацию координат будем вести от 0 до 3. Полностью антисимметричный тензор объема $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ имеет существенную компоненту $\varepsilon_{0123} = \sqrt{-h}$. Его контравариантные компоненты тоже антисимметричны и $\varepsilon^{0123} \sqrt{-h} = -1$. Наряду с тензором $\varphi_{\alpha\beta}$ рассмотрим дуальный тензор $\varphi^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}$, так что

$$\begin{aligned}\varphi^{*10} &= \frac{\varphi_{23}}{\sqrt{-h}}, & \varphi^{*20} &= \frac{\varphi_{31}}{\sqrt{-h}}, & \varphi^{*30} &= \frac{\varphi_{12}}{\sqrt{-h}}, \\ \varphi^{*23} &= \frac{\varphi_{10}}{\sqrt{-h}}, & \varphi^{*31} &= \frac{\varphi_{20}}{\sqrt{-h}}, & \varphi^{*12} &= \frac{\varphi_{30}}{\sqrt{-h}}.\end{aligned}$$

Определитель (24) равняется

$$J = 1 + F - G^2, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned}F &= \frac{1}{2} (\varphi_{\alpha}^{\alpha} \varphi_{\beta}^{\beta} - \varphi_{\alpha}^{\beta} \varphi_{\beta}^{\alpha}) = \frac{1}{2} \varphi^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta}, \\ G &= \frac{1}{4} \varphi^{*\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta} = \frac{1}{8} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \varphi_{\alpha\beta} \varphi_{\mu\nu}.\end{aligned} \quad (33)$$

Вот еще одно выражение для G :

$$G = \frac{1}{\sqrt{-h}} (\varphi_{10} \varphi_{23} + \varphi_{20} \varphi_{31} + \varphi_{30} \varphi_{12}).$$

В данном случае $\Pi(x) = x^2 + Fx - G^2$, так что $Q(x) = 1 + F + x$. Следовательно,

$$\tilde{h} = \frac{1 + F + \varphi^2}{1 + F - G^2}, \quad \tilde{\varphi} = \frac{\varphi + F\varphi + \varphi^3}{1 + F - G^2}. \quad (34)$$

Однако, в данном случае можно поступить иначе. Дело в том, что аффиноры φ и φ^* связаны друг с другом двумя равенствами

$$\varphi \varphi^* = -G, \quad \varphi^2 + F = \varphi^{*2}. \quad (35)$$

Умножая второе из этих равенств на φ , получаем

$$\varphi^3 + F\varphi = -G\varphi^*. \quad (36)$$

Попутно заметим, что $G\varphi^*$ есть адъюнкт $\bar{\varphi}$ аффинора φ . Умножая (36) на φ , приходим к характеристическому уравнению

$$\varphi^4 + F\varphi^2 = G^2. \quad (37)$$

Так вот, на основании (35) заключаем

$$(1 - \varphi^2)(1 + \varphi^{*2}) = 1 + F - G^2. \quad (38)$$

Следовательно,

$$\tilde{h} = \frac{1}{1 - \varphi^2} = \frac{1 + \varphi^{*2}}{1 + F - G^2}, \quad \tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{1 - \varphi^2} = \frac{\varphi - G\varphi^*}{1 + F - G^2}. \quad (39)$$

Согласно (25), имеем

$$S_\alpha = \frac{\delta_\alpha^\mu - \varphi_\alpha^\beta \varphi_\beta^\mu}{\sqrt{|1 + F - G^2|}} \mathcal{D}_\gamma \frac{\varphi_\mu^\gamma - G\varphi_\mu^{*\gamma}}{\sqrt{|1 + F - G^2|}}, \quad (40)$$

$$\mathcal{D}_\gamma \frac{\varphi_\alpha^\gamma - G\varphi_\alpha^{*\gamma}}{\sqrt{|1 + F - G^2|}} = \frac{\delta_\alpha^\mu + \varphi_\alpha^{*\beta} \varphi_\beta^{*\mu}}{\sqrt{|1 + F - G^2|}} S_\mu. \quad (41)$$

Таким образом, уравнения Эйнштейна $S_\alpha = 0$ эквивалентны уравнениям нелинейной электродинамики Борна-Инфельда /5/

$$\mathcal{D}_\gamma \frac{\varphi_\alpha^\gamma - G\varphi_\alpha^{*\gamma}}{\sqrt{|1 + F - G^2|}} = 0. \quad (42)$$

6. Преобразование уравнения (I)

Будем искать решение уравнения (I) в виде суммы

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} + T_{\alpha\beta}^{\mu}, \quad (43)$$

в которой первое слагаемое является заданной связностью (2I), а второе - искомым тензором. Подставляя (43) в (I), получаем уравнение для тензора T

$$\mathcal{D}_{\gamma} \varphi_{\alpha\beta} - T_{\alpha\gamma\beta} - T_{\gamma\beta\alpha} - \varphi_{\alpha}^{\epsilon} T_{\gamma\beta\epsilon} + \varphi_{\beta}^{\epsilon} T_{\alpha\gamma\epsilon} = 0$$

или, поменяв местами α и β , уравнение

$$T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta} + \varphi_{\beta}^{\epsilon} T_{\gamma\alpha\epsilon} - \varphi_{\alpha}^{\epsilon} T_{\beta\gamma\epsilon} + \varphi_{\alpha\beta\gamma} = 0, \quad (44)$$

где

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma} = \mathcal{D}_{\gamma} \varphi_{\alpha\beta} \quad (45)$$

есть ковариантная производная (22). Здесь мы воспользовались также обозначениями (20).

Над всеми слагаемыми, входящими в равенство (44), выполним операцию, превращающую тензор вида $T_{\alpha\beta\gamma}$ в тензор $T_{(\alpha\beta\gamma)}$, равный

$$T_{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{1}{3} (T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\gamma\alpha\beta} + T_{\beta\gamma\alpha}). \quad (46)$$

Такая операция над тензором $\varphi_{\beta}^{\epsilon} T_{\gamma\alpha\epsilon} - \varphi_{\alpha}^{\epsilon} T_{\beta\gamma\epsilon}$ дает нуль. Поэтому из (44) получаем следствие

$$2 T_{(\alpha\beta\gamma)} + \varphi_{(\alpha\beta\gamma)} = 0, \quad (47)$$

так что

$$T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta} = -T_{\alpha\beta\gamma} - \frac{3}{2} \varphi_{(\alpha\beta\gamma)}.$$

Подставляя это в (44), приходим к уравнению

$$T_{\alpha\beta\gamma} = \varphi_{\beta}^{\epsilon} T_{\gamma\alpha\epsilon} - \varphi_{\alpha}^{\epsilon} T_{\beta\gamma\epsilon} + \varphi_{\alpha\beta\gamma} - \frac{3}{2} \varphi_{(\alpha\beta\gamma)}, \quad (48)$$

эквивалентному уравнению (I).

7. Случай $\varphi_{\alpha\beta} = 0$, $h \neq 0$.

Рассмотрим случай $\varphi_{\alpha\beta} = 0$, $h \neq 0$. Из уравнения (48) следует, что в этом случае $T_{\alpha\beta\gamma} = 0$. Значит, если $g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}$ и $g \neq 0$, то уравнение (I) задает связность (2I) однозначно.

Обозначим символом ∇ ковариантное дифференцирование с искомой связностью Γ . Так как

$$\nabla_{\gamma} g_{\alpha\beta} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - g_{\epsilon\beta} \Gamma_{\gamma\alpha}^{\epsilon} - g_{\alpha\epsilon} \Gamma_{\gamma\beta}^{\epsilon},$$

то уравнение (I) можно записать в виде

$$\nabla_{\gamma} g_{\alpha\beta} + 2 S_{\gamma\alpha}^{\epsilon} g_{\epsilon\beta} = 0 \quad (49)$$

независимо от того, симметричен или нет тензор $g_{\alpha\beta}$.

Мы видим, что в симметричном случае уравнение Эйнштейна (49) определяет связность (2I) однозначно. Обычно же эту связность задают двумя условиями: $\nabla_{\gamma} g_{\alpha\beta} = 0$, $S_{\alpha\beta}^{\epsilon} = 0$. Одно условие $\nabla_{\gamma} g_{\alpha\beta} = 0$ в случае $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ и $g \neq 0$ задает связность неоднозначно, а именно, в виде суммы (43), где $T_{\gamma\alpha\beta} + T_{\gamma\beta\alpha} = 0$.

8. Сведение уравнения (I) к системе двух уравнений

Разобьем теперь тензор $T_{\alpha\beta\gamma}$ на части

$$P_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} (T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\alpha\gamma}), \quad S_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} (T_{\alpha\beta\gamma} - T_{\beta\alpha\gamma}). \quad (50)$$

Сразу же заметим, что тензор $S_{\alpha\beta\epsilon} h^{\epsilon\mu} = S_{\alpha\beta}^{\mu}$ есть тензор кручения (3), поскольку $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu} = T_{\alpha\beta}^{\mu} - T_{\beta\alpha}^{\mu}$. Что касается тензора $P_{\alpha\beta}^{\mu} = P_{\alpha\beta\epsilon} h^{\epsilon\mu}$, то он равняется разности

$$P_{\alpha\beta}^{\mu} = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} - \{\alpha\beta\}^{\mu} \quad (51)$$

средней связности (3) и связности (21).

Из (48) без труда получаем систему двух уравнений

$$P_{\alpha\beta\gamma} = \varphi_{\beta}^{\epsilon} S_{\gamma\alpha\epsilon} - \varphi_{\alpha}^{\epsilon} S_{\beta\gamma\epsilon}, \quad (52)$$

$$S_{\alpha\beta\gamma} = \varphi_{\beta}^{\epsilon} P_{\gamma\alpha\epsilon} - \varphi_{\alpha}^{\epsilon} P_{\beta\gamma\epsilon} + \varphi_{\alpha\beta\gamma} - \frac{3}{2} \varphi_{(\alpha\beta\gamma)}, \quad (53)$$

эквивалентную одному уравнению (1). Из (47), равно как из (52) и (53), следует, что

$$P_{(\alpha\beta\gamma)} = 0, \quad (54)$$

$$2S_{(\alpha\beta\gamma)} + \varphi_{(\alpha\beta\gamma)} = 0. \quad (55)$$

По определению ковариантной производной имеем

$$\hat{\nabla}_{\gamma} \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\beta\gamma} + \varphi_{\beta}^{\epsilon} P_{\gamma\alpha\epsilon} - \varphi_{\alpha}^{\epsilon} P_{\gamma\beta\epsilon},$$

$$\hat{\nabla}_{\gamma} h_{\alpha\beta} = P_{\beta\gamma\alpha} + P_{\gamma\alpha\beta},$$

а из уравнения (5) получаем

$$\dot{\nabla}_\gamma h_{\alpha\beta} = \varphi_\beta{}^\epsilon S_{\gamma\alpha\epsilon} - \varphi_\alpha{}^\epsilon S_{\gamma\beta\epsilon},$$

$$\dot{\nabla}_\gamma \varphi_{\alpha\beta} = -S_{\beta\gamma\alpha} - S_{\gamma\alpha\beta}.$$

В полном согласии с (52) - (55) заключаем, что

$$\begin{aligned}\dot{\nabla}_\gamma h_{\alpha\beta} &= P_{\alpha\beta\gamma}, \\ \dot{\nabla}_\gamma \varphi_{\alpha\beta} &= S_{\alpha\beta\gamma} + \frac{3}{2} \varphi_{(\alpha\beta\gamma)},\end{aligned}\tag{56}$$

а значит,

$$\begin{aligned}S_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{2} (\dot{\nabla}_\gamma \varphi_{\alpha\beta} - \dot{\nabla}_\alpha \varphi_{\beta\gamma} - \dot{\nabla}_\beta \varphi_{\gamma\alpha}), \\ P_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{2} (\dot{\nabla}_\gamma h_{\alpha\beta} - \dot{\nabla}_\alpha h_{\beta\gamma} - \dot{\nabla}_\beta h_{\gamma\alpha}), \\ T_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{2} (\dot{\nabla}_\gamma g_{\alpha\beta} - \dot{\nabla}_\alpha g_{\beta\gamma} - \dot{\nabla}_\beta g_{\gamma\alpha}).\end{aligned}\tag{57}$$

В силу равенства (54) уравнения геодезических

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = p^\mu, \quad \frac{dp^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu p^\alpha p^\beta = 0,$$

где $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ - искомая связность, имеют первый интеграл

$$(p, p) = g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = h_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta,$$

равный квадрату массы частицы.

9. Уравнение для тензора кручения

Подставим теперь (52) в (53) и получим следующее уравнение для тензора кручения:

$$S_{\alpha\beta\gamma} + \varphi_{\alpha}^{\mu} \varphi_{\gamma}^{\epsilon} S_{\mu\beta\epsilon} + \varphi_{\beta}^{\nu} \varphi_{\gamma}^{\epsilon} S_{\alpha\nu\epsilon} = \\ = \varphi_{\alpha}^{\mu} \varphi_{\beta}^{\nu} (S_{\nu\gamma\mu} + S_{\gamma\mu\nu}) + \varphi_{\alpha\beta\gamma} - \frac{3}{2} \varphi_{(\alpha\beta\gamma)}. \quad (58)$$

Согласно (55),

$$S_{\nu\gamma\mu} + S_{\gamma\mu\nu} = -S_{\mu\nu\gamma} - \frac{3}{2} \varphi_{(\mu\nu\gamma)}.$$

Подставляя это в (58), получаем

$$S_{\alpha\beta\gamma} + \varphi_{\alpha}^{\mu} \varphi_{\beta}^{\nu} S_{\mu\nu\gamma} + \varphi_{\alpha}^{\mu} \varphi_{\gamma}^{\epsilon} S_{\mu\beta\epsilon} + \varphi_{\beta}^{\nu} \varphi_{\gamma}^{\epsilon} S_{\alpha\nu\epsilon} = \psi_{\alpha\beta\gamma}, \quad (59)$$

где

$$\psi_{\alpha\beta\gamma} = \varphi_{\alpha\beta\gamma} - \frac{3}{2} \varphi_{(\alpha\beta\gamma)} - \frac{3}{2} \varphi_{\alpha}^{\mu} \varphi_{\beta}^{\nu} \varphi_{(\mu\nu\gamma)}. \quad (60)$$

Вместо того, чтобы решать систему уравнений (I) с N^3 неизвестными $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$, можно решать систему уравнений (59) с $\frac{N^2(N-1)}{2}$ неизвестными $S_{\alpha\beta\gamma}$. Действительно, если известен тензор S , то из (52) находим тензор P , а вместе с тем и связность

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \{\alpha\beta\}^{\mu} + P_{\alpha\beta}^{\mu} + S_{\alpha\beta}^{\mu}, \quad (61)$$

удовлетворяющую системе уравнений (I).

10. Введение операторов

Для решения уравнения (59) прибегаем к алгебре линейных операторов, действующих в пространстве трехвалентных тензоров T вида $T_{\alpha\beta\gamma}$. Любой такой оператор χ является тензором с компонентами $\chi_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\epsilon}$, так что χT есть тензор с компо-

нентами $\chi_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\epsilon} T_{\mu\nu\epsilon}$. Далее вся тяжесть вычислений ложится на операторы. Поэтому (за исключением двух случаев) употребляем для их обозначения строчные буквы, удобные в написании.

Обозначим α, β, γ операторы с компонентами

$$\alpha_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\epsilon} = \varphi_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} \delta_{\gamma}^{\epsilon}, \quad \beta_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\epsilon} = \delta_{\alpha}^{\mu} \varphi_{\beta}^{\nu} \delta_{\gamma}^{\epsilon}, \quad \gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\epsilon} = \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} \varphi_{\gamma}^{\epsilon}.$$

Заметим, что они попарно коммутируют. Как и в случае аффиноров, символом I будем обозначать единичный оператор (с компонентами $\delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} \delta_{\gamma}^{\epsilon}$). Это не приводит к какой-либо путанице, а между тем сокращает письмо. В этих обозначениях уравнение (59) записывается в виде

$$(1 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)S = \psi. \quad (62)$$

Рассмотрим дальше оператор q с компонентами $q_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\epsilon} = \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} \delta_{\gamma}^{\epsilon}$. Так как $q^3 = I$, то оператор $Q = \frac{1}{3}(I + q + q^2)$ идемпотентен, т.е. $Q^2 = Q$. Имеем также $qa = cq$, $qb = aq$, $qc = bq$, и поэтому любой полином от α, β, γ , симметричный по всем трем аргументам, как, например, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$, коммутирует с q , а значит и с Q . Уравнение (48) записывается в виде

$$T = (\beta q - a q^2)T + (1 - \frac{3}{2}Q)D\varphi,$$

где $D\varphi$ — тензор с компонентами (45), или

$$T = q(1 - q)cT + (1 - \frac{3}{2}Q)D\varphi. \quad (63)$$

Аналогично записываются уравнения (52) и (53):

$$P = q(1 - q)cS, \quad (64)$$

$$S = q(1 - q)cP + (1 - \frac{3}{2}Q)D\varphi. \quad (65)$$

Тензор (60) равняется

$$\Psi = \mathcal{D}\varphi - \frac{3}{2}(1+ab)Q\mathcal{D}\varphi. \quad (66)$$

Если решить уравнение

$$(1+ab+ac+bc)S_0 = \mathcal{D}\varphi, \quad (67)$$

то решением уравнения (62) будет

$$S = S_0 - \frac{3}{2}(1+ab)QS_0. \quad (68)$$

Наконец, рассмотрим оператор \mathcal{Z} с компонентами $\mathcal{Z}_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\zeta} = \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} \delta_{\gamma}^{\zeta}$. Так как $\mathcal{Z}^2 = 1$, то оператор $R = \frac{1}{2}(1-\mathcal{Z})$ идемпотентен, т.е. $R^2 = R$. Имеем также $\mathcal{Z}c = c\mathcal{Z}$, и $\mathcal{Z}a = b\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}b = a\mathcal{Z}$ и потому любой полином от a, b, c , симметричный по первым двум аргументам, коммутирует с \mathcal{Z} , а значит, и с R . Так как $\mathcal{Z}q = q^2\mathcal{Z}$, то $RQ = QR$ и $(RQ)^2 = RQ$. Имеем

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\zeta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \delta_{\alpha}^{\mu} & \delta_{\beta}^{\mu} \\ \delta_{\alpha}^{\nu} & \delta_{\beta}^{\nu} \end{vmatrix} \delta_{\gamma}^{\zeta}, \quad (RQ)_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\zeta} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \delta_{\alpha}^{\mu} & \delta_{\beta}^{\mu} & \delta_{\gamma}^{\mu} \\ \delta_{\alpha}^{\nu} & \delta_{\beta}^{\nu} & \delta_{\gamma}^{\nu} \\ \delta_{\alpha}^{\zeta} & \delta_{\beta}^{\zeta} & \delta_{\gamma}^{\zeta} \end{vmatrix}.$$

Если некоторый тензор $T_{\alpha\beta\gamma}$ антисимметричен по первым двум знакам, то $RT = T$, а если он антисимметричен по всем трем знакам, то $RQT = QT = T$.

II. Двумерный случай

В случае $N = 2$ будем считать, что метрическая форма (19) имеет сигнатуру (1,1). Нумерацию координат будем вести от 1 до 2. Антисимметричный тензор объема $\varepsilon_{\alpha\beta}$ имеет существенную компоненту $\varepsilon_{12} = \sqrt{h}$. Всякий антисимметричный тензор $\varphi_{\alpha\beta}$ пропорционален $\varepsilon_{\alpha\beta}$, то есть $\varphi_{\alpha\beta} = \theta \varepsilon_{\alpha\beta}$. Так как $\partial_{\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta} = 0$, то $\varphi_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta} \theta_{\gamma}$, где $\theta_{\gamma} = \frac{\partial \theta}{\partial x^{\gamma}}$. Так как $\varepsilon^2 = -1$, то $\varphi^2 = -\theta^2$. В двумерном случае

$$RQ=0, \quad (a+b)R = \varphi_\alpha^\alpha R.$$

Поэтому $(ab+ac+bc)R = -a^2R = \theta^2R$. Уравнение (62) дает

$$S_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\varepsilon_{\alpha\beta} \theta_\gamma}{1+\theta^2}.$$

В двумерном случае всякий (симметричный по первым двум значкам) тензор $P_{\alpha\beta\gamma}$, удовлетворяющий условию (54), представляется в виде

$$P_{\alpha\beta\gamma} = P_\alpha h_{\beta\gamma} + P_\beta h_{\alpha\gamma} - 2P_\gamma h_{\alpha\beta},$$

где $P_\alpha = P_{\alpha\mu}^\mu$. Согласно уравнению (52),

$$P_\alpha = \varphi_\gamma^\beta S_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{\theta\theta_\alpha}{1+\theta^2}.$$

Условие $S_\alpha = 0$ эквивалентно тому, что $\theta_\alpha = 0$. Если $S_\alpha = 0$, то и $S_{\alpha\beta\gamma} = 0$, $P_{\alpha\beta\gamma} = 0$.

12. Тензор кручения

Далее ограничимся физически важным случаем $N=4$. Вместо чисел (33) введем такие числа u, v , что

$$u+v = -F, \quad uv = -G^2. \quad (69)$$

Характеристическое уравнение (37) запишется в виде $(\varphi^2-u)(\varphi^2-v)=0$. Поэтому и

$$(a^2-u)(a^2-v)=0, \quad (b^2-u)(b^2-v)=0, \quad (c^2-u)(c^2-v)=0. \quad (70)$$

Будем искать минимальный полином для операторов x, xR и xRQ , где

$$x = -ab - ac - bc. \quad (71)$$

Основываясь на одних только равенствах (70), можно доказать, что

$$(x-u)(x-v)[(x+u)^2-4uv][(x+v)^2-4uv](x+3u)(x+3v)=0.$$

(72)

Однако это длинный и утомительный путь. Поступим иначе. Обозначим $\Lambda = \{\sqrt{u}, -\sqrt{u}, -\sqrt{v}, \sqrt{v}\}$ множество корней характеристического уравнения для аффинора φ и рассмотрим комбинацию $\xi = -\alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma$ чисел α, β, γ , принимающих значения из Λ . Множество значений ξ и есть множество корней минимального полинома для оператора X . Отсюда получаем (72). Подмножество значений ξ при условии, что $\alpha \neq \beta$ есть множество корней минимального полинома для оператора $X R$, а подмножество значений ξ при более сильном условии $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$, $\beta \neq \gamma$ есть множество корней минимального полинома для оператора $X R Q$. Отсюда получаем

$$(x-u)(x-v)[(x+u)^2-4uv][(x+v)^2-4uv]R=0, \quad (73)$$

$$(x-u)(x-v) R Q = 0. \quad (74)$$

Впрочем, в равенствах (73-74) так же, как и в равенстве (72), можно убедиться непосредственно. Предыдущие же соображения можно рассматривать как наводящие.

Основываясь на (73), нетрудно решить уравнение (62). Воспользовавшись тождеством

$$(1-u)(1-v) - (x-u)(x-v) = (1-x)(1-u-v+x),$$

получим

$$S = \frac{1-u-v+x}{(1-u)(1-v)} \psi + \frac{(x-u)(x-v)}{(1-u)(1-v)} S. \quad (75)$$

Теперь найдем $(x-u)(x-v)S$. Для этого напомним тождество

$$[(1+u)^2 - 4uv][(1+v)^2 - 4uv] - [(x+u)^2 - 4uv][(x+v)^2 - 4uv] = \\ = (1-x)(1+u+v+x)[1+u+v-6uv+(u+v)x+x^2].$$

В силу (73) откуда находим

$$[(1+u)^2 - 4uv][(1+v)^2 - 4uv](x-u)(x-v)R = \\ = (1-x)(1+u+v+x)[1+u+v-6uv+(u+v)x+x^2] \cdot \\ \cdot (x-u)(x-v)R,$$

а значит,

$$[(1+u)^2 - 4uv][(1+v)^2 - 4uv](x-u)(x-v)S = \\ = (1+u+v+x)[1+u+v-6uv+(u+v)x+x^2](x-u)(x-v)\Psi.$$

Как видно, мы должны потребовать, чтобы

$$[(1+u)^2 - 4uv][(1+v)^2 - 4uv] \neq 0. \quad (76)$$

Заметим также, что в силу (66) и (74)

$$(x-u)(x-v)\Psi = (x-u)(x-v)\mathcal{D}\varphi.$$

Следовательно,

$$(x-u)(x-v)S = m(x-u)(x-v)\mathcal{D}\varphi,$$

где

$$m = \frac{(1+u+v+x)[1+u+v-6uv+(u+v)x+x^2]}{[(1+u)^2 - 4uv][(1+v)^2 - 4uv]}. \quad (77)$$

Подставляя этот результат в (75), получаем тензор кручения в виде

$$S = \frac{1-u-v+x}{(1-u)(1-v)}\Psi + m \frac{(x-u)(x-v)}{(1-u)(1-v)}\mathcal{D}\varphi. \quad (78)$$

Тензор кручения определяется однозначно, если наряду с условием $h \neq 0$ выполняется условие

$$(1-u)(1-v)[(1+u)^2-4uv][(1+v)^2-4uv] \neq 0. \quad (79)$$

Если при этих условиях $\mathcal{D}_x \varphi_{\alpha\beta} = 0$, то тензор кручения равняется нулю, а значит, $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \{\alpha_{\beta}^{\mu}\}$. Наоборот, если $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \{\alpha_{\beta}^{\mu}\}$, то $S_{\alpha\beta}^{\mu} = 0$. Из (62) следует, что при этом и $\psi = 0$. Но если $\psi = 0$ и (наряду с условием $h \neq 0$) выполняется условие $(1-u)(1-v) \neq 0$, то и $\mathcal{D}_x \varphi_{\alpha\beta} = 0$. Это нетрудно доказать, основываясь на выражении (66) для ψ . Действительно, так как $Q^2 = Q$, $3Q\alpha\beta Q = -xQ$, то $(1-x)Q\mathcal{D}\psi = -2Q\psi$, а значит,

$$Q\mathcal{D}\psi = -2 \frac{1-u-v+x}{(1-u)(1-v)} Q\psi.$$

Отсюда и из (66) следует доказываемое утверждение.

Помимо условий $g \neq 0$, $h \neq 0$, нам потребовалось еще условие (76). Докажем, что оно не выполняется в единственном случае $F=1$, $G=0$. Действительно, в силу тождеств

$$\begin{aligned} & [(x+u)^2-4uv][(x+v)^2-4uv] = \\ & = (x-u)(x-v)(x+3u)(x+3v) + 4(u-v)^2(x^2-uv) = \\ & = [x^2+x(u+v)-3uv]^2 - 4uv(u-v)^2 \end{aligned}$$

и равенств (69) имеем

$$[(1+u)^2-4uv][(1+v)^2-4uv] = [1-F+3G^2]^2 + 4G^2(F^2+4G^2),$$

а это выражение обращается в нуль в единственном случае $F=1$, $G=0$.

В заключение заметим, что в нашей работе^{/7/} получено выражение для ковектора кручения в виде

$$S_{\alpha} = \frac{(1-u-v) \psi_{\alpha\beta}^{\nu} + \varphi_{\alpha}^{\epsilon} \varphi_{\beta}^{\delta} \psi_{\alpha\beta}^{\nu}}{(1-u)(1-v)}. \quad (80)$$

Как видно, второе слагаемое в тензоре кручения (78) своего вклада в ковектор кручения не дает. Выражение (80) в работе ⁷⁷ преобразовано к виду (40). Там же получена формула (41) и указано, что уравнения Эйнштейна $S_\alpha = 0$ эквивалентны уравнениям (42) нелинейной электродинамики Борна-Инфельда.

Л и т е р а т у р а

1. А. Эйнштейн. Собрание научных трудов, т. II, "Наука", М., 1966.
Статьи 79, 127, 130, 134, 138, 141, 143-146.
2. В. Kuvşinoğlu. Phys. Rev. D, v. 9, No 10, 2723-2745, 1974.
3. А. П. Норден. Пространства аффинной связности. Гостехиздат, М. Л. 1950.
4. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. Гостехиздат, М., 1953.
5. M. Born and L. Infeld. Proc. Roy. Soc. A 144, 425 (1934).
6. Н. С. Шабохина. Сб. "Гравитация и теория относительности", вып. 7, стр. 135-138, Изд. Казанского ун-та, 1970.
7. Н. А. Черников. Препринт ОИЯИ, P2-9651, Дубна, 1976.

КВАНТОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ КАНОНИЧЕСКОГО И КОВАРИАНТНОГО ФОРМАЛИЗМОВ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ.

Г.А.Вилковский, Е.С.Фрадкин

физический институт им. П.Н.Лебедева АН СССР, Москва

Содержание: §§ 1-2 носят вводный характер. В § 3 получено общее решение для \hat{S} -матрицы в произвольной вырожденной гамильтоновой системе со связями. В § 4 рассмотрено приложение к теории гравитации, где полученный результат позволил разрешить проблему общих преобразований координат в квантовой области. Ковариантная \hat{S} -матрица выведена непосредственно из канонических перестановочных соотношений, чем доказана ее унитарность и обоснованы применявшиеся ранее ковариантные методы.

1. Классическая динамика систем со связями.

Общая динамическая система со связями задается в фазовом пространстве канонических переменных $q^i, p_i, i=1, \dots, n$, видом гамильтониана $H_0(q^i, p_i)$ и уравнений связей:

$$T_\alpha(q^i, p_i) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Мы рассмотрим специальные (вырожденные) системы, когда введенные величины удовлетворяют следующим соотношениям в терминах скобок Пуассона:

$$\{T_\alpha, T_\beta\} = T_\gamma \mathcal{U}_{\alpha\beta}^\gamma, \quad (2)$$

$$\{H_0, T_\alpha\} = T_\beta V_\alpha^\beta, \quad (3)$$

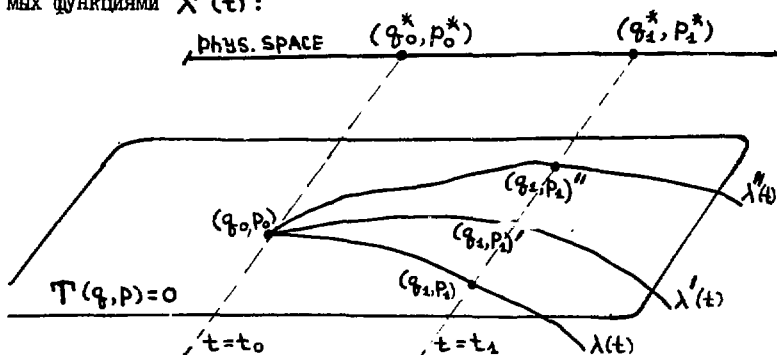
где $\mathcal{U} = \mathcal{U}(q, p)$ и $V = V(q, p)$ - некоторые функции канонических переменных. В частном случае, когда $\mathcal{U}_{\alpha\beta}^\gamma = \text{const}$, связи (2) образуют группу, в общем же случае соотношения (2) не являются групповыми. Задачей классической теории является нахождение основного экстремума действия с гамильтонианом H_0 при ограничении на поверхность связей:

$$\mathcal{S} = \int dt (p_i \dot{q}^i - H_0) \Big|_{T=0}. \quad (4)$$

Специфика вырожденных систем со связями состоит в том, что через каждую точку поверхности связей проходит множество экстремалей действия (4). Действительно, они (4) могут быть получены независимым варьированием эквивалентного действия с лагранжевыми множителями:

$$\delta \int [q, p, \lambda] = \int dt (p_i \dot{q}^i - H_0 - \lambda^\alpha T_\alpha). \quad (5)$$

При выполнении условий (2)-(3) оказывается, что уравнения движения, следующие из (5), совместны при любом выборе экстремальных значений лагранжевых множителей λ . Поэтому одним и тем же начальным данным (q_0, p_0) на поверхности связей соответствует целый пучок классических траекторий, лежащих на этой поверхности и перечисляемых функциями $\lambda^\alpha(t)$:



Ввиду этой специфики, уравнения движения вырожденной системы со связями можно интерпретировать как скрытую динамику некоторой стандартной гамильтоновой системы с $(n-m)$ независимыми степенями свободы. Последняя может быть охарактеризована фазовым пространством независимых канонических переменных (физическим пространством): $q^*, p^*, * = 1, \dots, (n-m)$, и гамильтонианом $H_{\text{phys}}(q^*, p^*)$, который неявно задается исходными величинами H_0 и T_α . Способ задания этой системы и ее единственность могут быть объяснены следующим образом.

Рассмотрим в исходном фазовом пространстве семейство инфинитезимальных преобразований с параметрами F^α , генерируемое связями:

$$\delta^F q^i = \{q^i, T_\alpha\} F^\alpha, \quad \delta^F p_i = \{p_i, T_\alpha\} F^\alpha. \quad (6)$$

Заметим, что в силу (2) преобразование (6) не сходит с поверхности связей, поэтому мы можем подвергнуть действие \mathcal{G} (4) преобразованию (6). При этом убедимся, что в силу (3): $\delta^F \mathcal{G} = 0$, т.е. действие, ограниченное на поверхности связей, вырождено. Инвариантность действия (4) объясняет многозначность решения задачи Коши для экстремалей этого действия. Нетрудно проверить, что траектории на поверхности связей, отвечающие одним и тем же начальным данным, но разным выборам $\lambda(t)$, $\lambda'(t)$, $\lambda''(t)$, ... (см. рис.), при малых $(t_1 - t_0)$ отображаются друг на друга именно преобразованиями (6). Отметим, что действие с лагранжевыми множителями (5) также инвариантно относительно преобразований (6): $\delta^F \int [q, p, \lambda] = 0$, если одновременно преобразуются и лагранжевы множители по закону:

$$\delta^F \lambda^a = \dot{F}^a - u_{\beta\gamma}^a \lambda^\beta F^\gamma - V_{\beta}^a F^\beta. \quad (7)$$

При этом параметры F^a могут быть произвольными функциями всех переменных:

$$F^a = F^a(q, p, \lambda; t). \quad (8)$$

При постоянных F^a преобразования (6) являются каноническими и отображают друг на друга точки (q_1, p_1) , $(q_1, p_1)'$, $(q_1, p_1)''$, ... поверхности связей (см. рис.). Эти точки получены в момент $t = t_1$ в результате развития из одного и того же начального состояния. Объявим такие точки физически-эквивалентными. Тогда поверхность связей разобьется на классы физически-эквивалентных точек, связанных преобразованиями (6). Мы определим физическое пространство как пространство этих классов. Все точки (q_1, p_1) , $(q_1, p_1)'$, $(q_1, p_1)''$, ... внутри одного класса характеризуются одним и тем же значением гамильтониана H_0 ($\delta^F(H_0|_{\tau=0}) = 0$) и соответствует одному и тому же физическому состоянию (q_1^*, p_1^*) (см. рис.). Возникающий произвол в решении задачи Коши для уравнений движения исходной системы связан с наличием преобразований (6) внутри классов, причем динамическое содержание теории касается классов эквивалентности в целом. Переход к физическому пространству имеет целью отделить в обобщенных уравнениях Гамильтона (экстремалах (5)) инвариантный произвол от динамики.

Параметризовать физическое пространство (пространство классов) можно, выбрав по одному представителю из каждого класса. Для этого достаточно наложить дополнительные условия, нарушающие инвариант-

ность относительно (6):

$$\phi^{\alpha}(q^i, p_i) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m. \quad (9)$$

$$\delta^F \phi^{\alpha} = \{\phi^{\alpha}, T_p\} F^{\beta} \neq 0. \quad (10)$$

Из (10) следует единственное ограничение на выбор дополнительных условий:

$$\det \{\phi^{\alpha}, T_p\} \neq 0, \quad (11)$$

однако удобно, кроме того, считать, что:

$$\{\phi^{\alpha}, \phi^{\beta}\} = 0. \quad (12)$$

Таким образом, физическая динамика описывается действием (5) с учетом дополнительных связей (9):

$$\dot{S}[q, p, \lambda, \pi] = \int dt (p_i \dot{q}^i - H_0 - \lambda^{\alpha} T_{\alpha} - \pi_{\mu} \phi^{\mu}), \quad (13)$$

где введены дополнительные лагранжеры множители π_{μ} . Размерность физического пространства определяется общим количеством связей в (13): $2n - m - m = 2(n - m)$. Любопытно, что действие (4) вырождается именно в результате ограничения на поверхность связей, т.е. связи, подчиненные соотношениям (2)–(3), всегда требуют наложения новых связей (9), и количество их в задаче удваивается.

Уравнения физической динамики следуют из (13):

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \{q^i, H_0\} + \lambda^{\alpha} \{q^i, T_{\alpha}\} + \pi_{\mu} \{q^i, \phi^{\mu}\}, \\ \dot{p}_i = \{p_i, H_0\} + \lambda^{\alpha} \{p_i, T_{\alpha}\} + \pi_{\mu} \{p_i, \phi^{\mu}\}, \end{cases} \quad (14)$$

$$T_{\alpha}(q^i, p_i) = 0, \quad \phi^{\alpha}(q^i, p_i) = 0, \quad (15)$$

$$\pi_{\mu} = 0, \quad -\lambda^{\alpha} = \{\phi^{\alpha}, T_{\mu}\}^{-1} \{\phi^{\alpha}, H_0\}, \quad (16)$$

причем экстремальные значения (16) лагранжеров множителей λ и π определяются совместностью уравнений (14) с $2m$ связями (15). Таким образом, при ограничении на физическое пространство (15) задача Коши получает единственное решение: траектория в физическом пространстве полностью определяется уравнениями (14)–(16) по на-

чальным данным. Для нахождения явного вида этой траектории введем координаты физического пространства. Для этого разрешим $2m$ уравнений (15) относительно $2m$ переменных, выразив их через оставшиеся $(2n-2m)$ переменных

$$q^i = q^i(q^*, p^*), p_i = p_i(q^*, p^*), \quad * = 1, \dots, (n-m), \quad (17)$$

таким образом, чтобы координаты q^*, p^* физического фазового пространства были каноническими:

$$\left. \int p_i \dot{q}^i dt \right|_{T=\Phi=0} = \int p^* \dot{q}^* dt. \quad (18)$$

При подстановке функций (17) в уравнения (14)–(16), последние принимают вид стандартных уравнений Гамильтона:

$$\dot{q}^* = \frac{\partial H_{phys}(q^*, p^*)}{\partial p^*}, \quad \dot{p}^* = - \frac{\partial H_{phys}(q^*, p^*)}{\partial q^*} \quad (19)$$

с гамильтонианом:

$$H_{phys}(q^*, p^*) = H_0(q^i, p_i) \Big|_{T=\Phi=0}. \quad (20)$$

Доказательство этого основного факта мы опускаем. Начальные данные к уравнениям (14)–(16) исчерпываются заданием $2(n-m)$ независимых величин:

$$q_0^* = q^*(t) \Big|_{t=0}, \quad p_0^* = p^*(t) \Big|_{t=0}. \quad (21)$$

Уравнения (19) получаются вариационным принципом из действия:

$$\begin{aligned} \int dt (p^* \dot{q}^* - H_{phys}(q^*, p^*)) = \\ = \int dt (p_i \dot{q}^i - H_0(q^i, p_i)) \Big|_{T=\Phi=0}. \end{aligned} \quad (22)$$

Последнее равенство объединяет условие каноничности независимых переменных q^* и p^* (18) с выражением (20) для физического гамильтониана. Таким образом, формула (22) может служить определением физической динамики.

Единственность физической динамики вытекает из того факта, что замена в уравнении (22) одних дополнительных условий Φ другими эквивалентна каноническому преобразованию переменных q^*, p^* . Тем самым класс эквивалентных точек на поверхности $T=0$ целиком

проектируется в одну точку физического пространства (см. рис.), а произвол выбора представителя класса ($\phi=0$) сводится к стандартным каноническим преобразованиям в этом пространстве.

Классическая теория вырожденных систем была развита в работах Дирака, Бергмана, Андерсона, Комара, Де Витта, Швингера, Ариовитта, Дезера, Мизнера и других авторов. Для настоящего изложения принципиальными явились статьи [1-4].

II. Проблема квантования. Частное решение для \mathcal{S} -матрицы.

Наша цель — получить квантовую динамику физической системы с $(n-m)$ независимыми степенями свободы, которая неявным образом содержится в исходной системе со связями. Для этого нужно наложить канонические перестановочные соотношения на независимые начальные данные (21):

$$\begin{aligned} [q_0^{*'}, p_0^{*''}] &= i\delta^{*''}, \\ [q_0^{*'}, q_0^{*''}] &= [p_0^{*'}, p_0^{*''}] = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

и решить уравнения Гамильтона (19) для гейзенберговских операторов $q^*(t)$ и $p^*(t)$. Искомыми величинами являются вакуумные средние T -произведений этих операторов:

$$\langle 0 | T q^*(t) \dots q^*(t') p^*(t'') \dots p^*(t''') | 0 \rangle. \quad (24)$$

Повторяя рассуждения работы [5], мы можем решить уравнения (19) и (23) для функций (24). При этом мы приходим к следующему континуальному интегралу:

$$Z^{\text{phys}} = \int dq^* dp^* \exp[i \int dt (p^* \dot{q}^* - H_{\text{phys}}(q^*, p^*))], \quad (25)$$

который определяет унитарную в физическом пространстве \mathcal{S} -матрицу.

Проблема квантования систем со связями сводится к тому, чтобы преобразовать интеграл (25) к фазовому пространству (q^*, p_i) исходной системы и выразить его через заданные величины: гамильто-

* Имеется в виду, конечно, гильбертово пространство физических состояний.

ниан H_0 , связи T_λ и произвольные дополнительные условия ϕ^A .

Решение этой проблемы в классе дополнительных условий (9) может быть получено следующим образом. Перепишем тождественно континуальный интеграл (25), введя в него дополнительные интегрирования с δ -функциями:

$$1 = \int \prod dT_\lambda d\phi^A \delta(T_\lambda) \delta(\phi^A).$$

Наличие этих δ -функций дает возможность реализовать неявное определение (22) величин физического пространства. Мы получим:

$$\begin{aligned} Z^{\text{phys}} &= \int dq^* dp^* dT d\phi \delta(T) \delta(\phi) \cdot \\ &\cdot \exp[i \int dt (p^* \dot{q}^* - H_{\text{phys}}(q^*, p^*))] = \\ &= \int dq^* dp^* dT d\phi \delta(T) \delta(\phi) \cdot \\ &\cdot \exp[i \int dt (p_i \dot{q}^i - H_0(q^i, p_i))], \end{aligned} \quad (26)$$

где только мера интегрирования:

$$dq^* dp^* dT d\phi = d\mu(q^i, p_i)$$

остается невыраженной через элемент объема исходного фазового пространства. Задача нахождения меры была решена в работе [4]. Решение имеет вид:

$$d\mu(q^i, p_i) = \left(\prod_i dq^i dp_i \right) \cdot \det \{ \phi^A, T_A \}.$$

Представляя δ -функции в (26) с помощью интегрирования по вспомогательным переменным (лагранжевым множителям) χ^λ и π_μ , получаем окончательно:

$$\begin{aligned} Z^{\text{phys}} &= \int \left(\prod_i dq^i dp_i \right) \left(\prod_\lambda d\chi^\lambda d\pi_\mu \right) \cdot \det \{ \phi^A, T_A \} \cdot \\ &\cdot \exp[i \int dt (p_i \dot{q}^i - H_0 - \chi^\lambda T_\lambda - \pi_\mu \phi^\mu)]. \end{aligned} \quad (27)$$

В последнем выражении фигурируют только известные величины, и интегрирование ведется по траекториям в исходном фазовом пространстве, причем в показателе экспоненты возникает действие (13). Таким образом, континуальный интеграл (27) решает сформулированную проблему: он является явным выражением для \hat{S} -матрицы, унитарной в физическом пространстве. Независимость этой \hat{S} -матрицы от выбора дополнительных условий ϕ в классе (9) может быть продемонстрирована с помощью канонических преобразований под знаком континуального интеграла [4].

Тем не менее выражение (27) не является общим решением для \mathcal{S} -матрицы, так как оно справедливо в узком классе дополнительных условий (9). Как отмечалось в § I, вырожденность исходной системы может быть сформулирована как инвариантность действия с лагранжевыми множителями (5) относительно преобразований (6)–(7). Поэтому дополнительные условия ϕ , снимающие вырождение этого действия, могут зависеть и от лагранжевых множителей λ при единственном ограничении: $\delta^F \phi \neq 0$. Необходимость расширения класса дополнительных условий обусловлена приложением к релятивистским теориям калибровочных полей. По своей функциональной зависимости дополнительные условия (калибровки), допустимые в решении (27), в принципе нерелятивистские. Например, в электродинамике калибровки вида (9) не зависят от четвертой компоненты электромагнитного поля, являющейся лагранжевым множителем. Поэтому электродинамика в лоренцевской калибровке уже не содержится в решении (27).

Таким образом, для приложения к релятивистским теориям поля необходимо найти общее решение для \mathcal{S} -матрицы с дополнительными условиями, зависящими не только от q, p , но и от λ и от $\dot{\lambda}$. Более того, для получения лагранжианов типа лагранжиана Ферми в электродинамике, нужно, чтобы дополнительные условия зависели и от собственных лагранжевых множителей π . В результате искомое обобщение формулы (27) должно содержать классическое действие (13) с дополнительными условиями, произвольно зависящими от всех аргументов:

$$\mathcal{S}[q, p, \lambda, \pi] = \int dt [p_i \dot{q}^i - H_0(q^i, p_i) - \lambda^\mu T_\mu(q^i, p_i) - \pi_\mu \phi^\mu(q^i, p_i, \lambda^\mu, \dot{\lambda}^\mu, \pi_\mu)]. \quad (28)$$

Общее решение для \mathcal{S} -матрицы получено в работе [6].

III. Общее решение для \mathcal{S} -матрицы.

Без уменьшения общности будем считать, что уравнения дополнительных условий в (28) разрешены относительно $\dot{\lambda}$:

$$\phi^\mu = -\dot{\lambda}^\mu + \chi^\mu(q, p, \lambda, \pi), \quad (29)$$

где χ^μ — произвольные функции остальных переменных. С учетом (29) классическое действие (28) принимает вид:

$$\oint [q, p, \lambda, \Pi] = \int dt (p_i \dot{q}^i + \Pi_\mu \dot{\chi}^\mu - H_0 - \chi^\mu T_\mu - \Pi_\mu \chi^\mu). \quad (30)$$

Заметим, что это действие существенно отличается от действия (13) с калибровкой (9): оно уже не генерирует связей, более того, лагранжиан множители χ^μ и Π_μ образуют дополнительно m пар независимых канонических переменных. Таким образом, действие (30) в релятивистской калибровке описывает динамическую систему с $(n+m)$ независимыми степенями свободы:

$$q^A = (q^i, \lambda_\mu), \quad p_A = \begin{pmatrix} p_i \\ \Pi_\mu \end{pmatrix}, \quad A=1, \dots, (n+m). \quad (31)$$

$$\oint [q^i, p_i, \lambda, \Pi] = \oint [q^A, p_A] = \int dt (p_A \dot{q}^A - H_{n+m}). \quad (32)$$

Объединим связи T_μ с импульсами Π_μ в столбец:

$$G_a = \begin{pmatrix} T_\mu \\ \Pi_\mu \end{pmatrix}, \quad a=1, \dots, 2m, \quad (33)$$

а часть χ^μ дополнительного условия (29) объединим с координатами χ^a в строку:

$$\chi^a = -(\lambda^\mu, \chi^\mu), \quad a=1, \dots, 2m. \quad (34)$$

Тогда гамильтониан $H_{n+m} = (H_0 + \lambda T + \Pi \chi)$ принимает вид:

$$H_{n+m}(q^A, p_A) = H_0 - G_a \chi^a. \quad (35)$$

Квантование полученной динамической системы (32) не составляет проблемы. Достаточно наложить канонические перестановочные соотношения на независимые переменные q^A, p_A , чтобы получить \oint - матрицу, (псевдо-)унитарную* в гильбертовом пространстве всех $(n+m)$ степеней свободы:

$$Z^{n+m} = \int dq^A dp_A \exp[i \int dt (p_A \dot{q}^A - H_{n+m})],$$

но не унитарную в физическом пространстве и не совпадающую с (25):

$$Z^{n+m} \neq Z^{\text{phys}} = Z^{n-m}.$$

Система (32) не эквивалентна исходной системе со связями (22). В этом и состоит трудность совмещения требований релятивистской ковариантности и унитарности в физическом пространстве. Тем не менее псевдоунитарность: $\oint \hat{S}^\dagger = 1$, $\hat{S}^\dagger = \hat{S} \hat{S}^\dagger$, \hat{S} - оператор indefinite метрики гильбертова пространства.

менее, общее решение для физической \hat{S} -матрицы может быть построено. Идея построения заключается в том, чтобы ещё расширить фазовое пространство системы (32), дополнив его фермионными ^{*}степенями свободы в количестве $2m$:

$$(\eta^a, \bar{\eta}_a), \quad a = 1, \dots, 2m.$$

Целью такого расширения является эффективное "вычитание" степеней свободы: $(n+m) - (2m) = n-m$ и восстановление эквивалентности с физической динамикой. Фактически это вычитание осуществится в условии унитарности (см. ниже). Таким образом, мы приходим к гамильтонову формализму в полном пространстве независимых канонических переменных $(q^A, \eta^a; p_A, \bar{\eta}_a)$, сформулированному в работе [7]. Будем искать общее решение для физической \hat{S} -матрицы в виде континуального интеграла по траекториям в полном пространстве:

$$Z^{\text{phys}} = \int dq^A dp_A d\eta^a d\bar{\eta}_a \cdot \exp[i \int dt (p_A \dot{q}^A + \bar{\eta}_a \dot{\eta}^a - H_{\text{complete}})], \quad (36)$$

где неизвестной является фермионная часть полного гамильтониана:

$$H_{\text{complete}} = H_{n+m} + ? \quad (37)$$

Она должна быть определена из условия равенства континуального интеграла (36) интегралу (25) по независимым каноническим переменным физического пространства. Эта центральная проблема решена в работе [6].

Существование решения в форме (36)–(37) в значительной мере обусловлено тем, что величины G_a , входящие в гамильтониан H_{n+m} (35), удовлетворяют следующим соотношениям в терминах скобок Пуассона по переменным q^A, p_A :

$$\{G_a, G_b\} = G_c U_{ab}^c, \quad (38)$$

$$\{H_0, G_a\} = G_b V_a^b. \quad (39)$$

Последние проверяются на основе исходных равенств (2)–(3).

Часть U и V , возникших в (38)–(39), является структурными коэффициентами соотношений (2)–(3), остальная их часть триви-

^{*}) Напомним, что фермионные переменные в C -числовом формализме трактуются как элементы алгебры Грассмана:

$$[\eta^a, \eta^{a'}]_+ = [\eta^a, \bar{\eta}_{a'}]_+ = [\bar{\eta}_a, \bar{\eta}_{a'}]_+ = 0.$$

альна. В случае, когда связи (2) не образуют группы, соотношения (38) также не являются групповыми. Тождества Якоби для структурных постоянных группы заменяются тогда более общими соотношениями:

$$u_{be}^a u_{cd}^e + u_{de}^a u_{ec}^e + u_{ce}^a u_{eb}^e = \\ = \{u_{cd}^a, G_e\} + \{u_{ec}^a, G_d\} + \{u_{de}^a, G_c\}, \quad (40)$$

следующими из (38). Из рассмотрения в §§I-2 видно, что классическая теория вырожденных систем и квантовая теория в специальных калибровках (9) нечувствительны к факту наличия или отсутствия группы в соотношениях (2). Однако для теории в общей калибровке (29) это обстоятельство становится существенным. Мы получили решение для \hat{S} -матрицы в случае, когда на $u_{ae}^a \neq \text{const}$ наложены следующие ограничения:

$$\{u_{ae}^a, u_{eg}^e\} + \text{antisymmetrization} = 0, \quad (41)$$

$$\{V_b^a, u_{eg}^e\} + \text{antisymmetrization} = 0. \quad (42)$$

Теории, в которых структурные коэффициенты не коммутируют даже между собой, до сих пор не встречались. В частности, в теории гравитационного поля связи не образуют групп, но соотношения (41)-(42) выполняются.

Критерием для нахождения решения явилась независимость континуального интеграла (36) от функций χ^a , входящих в гамильтониан (35). Часть этих функций (χ^m) фиксирует дополнительное условие (29), т.е. критерием послужила независимость \hat{S} -матрицы (36) от выбора дополнительных условий в классе (29). Ответ для полного гамильтониана (37) имеет вид [6]:

$$H_{\text{complete}} = H_0 - G_a \chi^a + \hat{G}_a \eta^b (V_b^a + u_{bc}^a \chi^c - \\ - \{ \chi^a, G_c \}) - \frac{1}{2} \hat{G}_a \eta^b \hat{G}_n \eta^m \{ \chi^a, u_{bm}^n \}. \quad (43)$$

Доказательство представляет собой серию канонических преобразований бозонных и фермионных переменных под знаком континуального интеграла (36), и выглядит чрезвычайно громоздко. Поразительной чертой ответа является присутствие четырёхфермионного взаимодействия с вершиной $\{\chi, u\}$, возникающей, если связи не образуют групп. Мы обнаружили, что если при этом и соотношения (41)-(42)

не выполняются, то в гамильтониане появляется ещё шестифермионное взаимодействие с вершиной $\{u, u\}$, однако этим дело не ограничивается, и, по-видимому, в этом случае решение вообще не представимо в виде локальной теории (36)–(37). При выполнении соотношений (41)–(42) ответ (43) является точным.

Континуальный интеграл (36) с гамильтонианом (43) полностью решает поставленную проблему. Определённым каноническим преобразованием [6] он может быть тождественно приведён к виду (27) для интеграла в нерелятивистской калибровке, а последний, как показано в § 2, тождественно равен интегралу (25) в физическом пространстве (q^*, p^*) . Таким образом, (36) является искомым выражением для физической \hat{S} -матрицы в общей калибровке (29). Однако класс дополнительных условий можно ещё расширить. Для этого введём обобщённую бозон-фермионную скобку Пуассона в полном пространстве:

$$\{A, B\} = \frac{\delta A}{\delta q}|_z \frac{\delta B}{\delta \pi}|_z - (-1)^{n_A n_B} \frac{\delta B}{\delta q}|_z \frac{\delta A}{\delta \pi}|_z, \quad (44)$$

где n_A обозначает число фермионов в A , а $'l'$ и $'z'$ – левую и правую производные. В терминах скобки (44) гамильтониан (43) принимает вид:

$$H_{\text{complete}} = H_0 + \int d^3x V_6 \eta^6 - \left\{ \int d^3x \chi^a, G_6 \eta^6 - \frac{1}{2} u_{cd}^6 \int d^3x \eta^c \eta^d \right\}. \quad (45)$$

В этой форме ответ обобщается на калибровки χ^a , зависящие от вспомогательных фермионов η и ψ . Формулы (36) и (45) определяют наиболее общий вид \hat{S} -матрицы вырожденной системы со связями.

В калибровках, при которых гамильтониан (45) – эрмитов, \hat{S} -матрица (36) псевдоунитарна в полном гильбертовом пространстве $(n+m)$ бозонных и $(2m)$ фермионных степеней свободы:

$$\sum_i \langle f | \hat{S} | i \rangle \langle i | \hat{S}^\dagger | f' \rangle = \delta_{ff'}. \quad (46)$$

Одновременно матрица \hat{S} , ограниченная на физическое пространство, унитарна и в гильбертовом пространстве $(n-m)$ физических степеней свободы. Механизм этого явления состоит в том, что когда $\langle f |$ и $| f' \rangle$ – физические состояния, вклады нефизических промежуточных состояний в условие унитарности (46) в точности компенсируют друг друга в сумме по i . Компенсация идёт среди $(2m)$ нефизических

бозонных и $(2m)$ фермионных степеней свободы, и становится возможной благодаря тому, что часть нефизических степеней свободы обязательно квантуется с индефинитной метрикой ^{x/}. Подчеркнём, что матричные элементы $\langle \psi | \psi \rangle$ всех переходов, вообще говоря, отличны от нуля, компенсация же происходит в квадратичном по матричным элементам выражении (46). В этом — принципиальное отличие релятивистских калибровок от калибровок класса (9), в которых переходы имеются только между физическими состояниями.

IV. Приложение к квантовой теории гравитационного поля.

Квантовая теория гравитации была первоначально сформулирована в работах [8-II] как теория неабелева калибровочного поля. В дальнейшем, однако, выявились существенные отличия гравитационного поля от обычных калибровочных полей Янга-Миллса, обусловившие серьёзные трудности в квантовой гравитинамике [7]. В отличие от обычных калибровочных преобразований, координатные преобразования в теории гравитации затрагивают не только форму функций поля, но и пространственно-временной аргумент. Поэтому в квантовой области координатное преобразование не сводится к унитарному преобразованию операторов поля, оно ещё влечёт за собой изменение Γ — упорядочения в \hat{S} — матрице [7]. Эффект этого изменения не учитывался в работах [8-II]. Формально проблема сводится к тому, что в инфинитезимальной форме общие координатные преобразования содержат так называемый транспортный член:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &\rightarrow g_{\mu\nu}(x) + \delta^f g_{\mu\nu}(x), \\ \delta^f g_{\mu\nu}(x) &= -\xi^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} + \dots \end{aligned} \quad (47)$$

с производной по времени от функций поля. Из-за этого члена преобразования (47), рассматриваемые как замена переменных в функциональном интеграле, — сингулярны [12, 7] и не имеют определённого якобиана. Эту трудность можно было бы обойти, проводя координатную замену переменных в другой форме:

$$x \rightarrow \bar{x}(x) = x + f, \quad g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}),$$

^{x/} В частности, у вспомогательных фермионов $\psi, \bar{\psi}$ всегда нарушена связь спина и статистики.

но тогда возникает проблема якобиана [II, 7] :

$$\prod_x dq_{\mu\nu}(\bar{x}) = \Delta \cdot \prod_x dq_{\mu\nu}(\bar{x}(x)). \quad (48)$$

Появление этого якобиана как раз и отражает упомянутый эффект изменения Т-упорядочения в \mathcal{S} -матрице. Преобразование (48) формально выглядит как тождественная перестановка дифференциалов, между тем в работе [7] была найдена локальная ^{*} часть якобиана Δ и показано, что $\Delta \neq 1$. Проблема точного вычисления якобиана Δ не поддавалась решению стандартными методами, в то время как такое вычисление необходимо для проверки калибровочной независимости и унитарности релятивистской \mathcal{S} -матрицы. Поэтому выражение для \mathcal{S} -матрицы, полученное в работах [8-11] и [7], в случае гравитационного поля оставалось без обоснования. Помимо отсутствия корректного доказательства унитарности, имелось также видимое противоречие между ковариантным и унитарным выражениями для \mathcal{S} -матрицы в целом классе калибровок (в том числе в Дираковской калибровке [13]).

Разрешение указанных проблем, возникших в лагранжевой формулировке теории гравитации, становится возможным на основе канонического формализма, развитого в §3. На языке канонического формализма экзотические особенности координатных преобразований приобретают естественное и простое звучание: связи в эйнштейновской теории квадратичны по импульсам и не образуют групп. Эти особенности не явились, однако, препятствием для построения квантовой теории. В §3 получено явно-унитарное выражение (36) для \mathcal{S} -матрицы в релятивистской калибровке, выведенное непосредственно из канонических перестановочных соотношений. Его калибровочная независимость и унитарность доказаны на основе канонических преобразований, без использования сингулярных преобразований (47), т.е. выражение (36) даёт заведомо правильный ответ для релятивистской \mathcal{S} -матрицы. Остаётся только преобразовать этот ответ к конфигурационному пространству лагранжевой теории и сравнить его с выра-

^{*}) Под локальностью здесь понимается пропорциональность $\delta^{(4)}(0)$.

жением, полученным в работах [8-II]. Эта задача решена в работе [14]. Оказалось, что правильное выражение для \hat{S} -матрицы отличается от результата [8-II] только присутствием нетривиальной локальной меры, (найденной раньше в нашей работе [7] из других соображений). Якобиан Δ также удалось точно вычислить, имитируя координатные преобразования каноническими преобразованиями в фазовом пространстве. Оказалось, что этот якобиан не имеет нелокальной части, т.е. выражение, найденное для него в работе [7], является точным. В итоге изменение Т-упорядочения при координатных преобразованиях не ведёт к нелокальным изменениям в \hat{S} -матрице. Это — основной результат проведённого в [14] исследования. Он показывает, что вся специфика координатной группы сводится к наличию локальной меры в континуальном интеграле. Что же касается парадокса Дираковской калибровки, то разницу между ковариантным и унитарным выражениями оказалось возможным оттрансформировать специальным преобразованием, выписанным в [14]. Таким образом, с учётом меры удалось обосновать результаты работ [8-II] и [7] и доказать эквивалентность канонического и ковариантного формализмов квантования гравитационного поля. Основные этапы доказательства мы приведём в этом параграфе.

Рассмотрим сначала в общем виде случай, когда системой со связями является калибровочное поле. Выражение для канонической \hat{S} -матрицы имеет вид (36) с гамильтонианом (43). Разбивая вспомогательные фермионы η^a и $\bar{\eta}_a$ на компоненты

$$\eta^a = \begin{pmatrix} \eta^a_+ \\ \eta^a_- \end{pmatrix}, \quad \bar{\eta}_a = (\bar{\eta}_a^+, \bar{\eta}_a^-)$$

и интегрируя по $\bar{\eta}_+, \bar{\eta}_-$, мы приведём это выражение в произвольной калибровке $\Phi^A(q, p, \lambda, \dot{\lambda})$ к виду:

$$\begin{aligned} Z^{\text{phys}} = & \int dq dp d\lambda d\dot{\lambda} d\bar{c} dc \exp [i \int dt (p_i \dot{q}^i - H_0 - \\ & - \lambda^\mu \pi_\mu + \pi_\mu \phi^\mu + \bar{c}_\alpha \delta^c \phi^\alpha + \\ & + \frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta} \bar{c}_\beta \bar{c}_\alpha \{ \phi^\mu, u^\mu_{\alpha\beta} \} c^\alpha c^\beta)], \end{aligned} \quad (49)$$

где $\delta^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi^\mu}{\partial \lambda^\alpha} \frac{\partial \phi^\nu}{\partial \lambda^\beta}$ — вариационная производная, учитывающая обе зависимости ϕ : от λ и $\dot{\lambda}$, скобка Пуассона $\{ \phi, u \}$ касается зависимости ϕ от q^i, p_i , и член, содержащий пару фермионов $\bar{c}c$, записан в виде преобразования δ^c , введённого формулами (6)–(7), в которых нужно вместо параметров F^μ подставить C^μ . Кроме того, имеется четырехфермионный член.

Если рассматриваемой системой со связями является калибровочное поле, то это поле образуется совокупностью канонических координат q^i и лагранжевых множителей λ^a . Соответствующая теория поля описывается действием и дополнительными условиями в конфигурационном пространстве:

$$\begin{aligned} (q, \lambda) &= q, \quad \delta [q, p, \lambda] \big|_{p=p^0} = \delta [q], \\ \phi(q, p, \lambda, \dot{\lambda}) \big|_{p=p^0} &= \phi(q), \end{aligned} \quad (50)$$

где $\delta [q, p, \lambda]$ — действие (5), а $p = p^0(q, \dot{q}, \lambda)$ — решение классического уравнения Гамильтона:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad H = H_0 + \lambda^a T_a. \quad (51)$$

Как отмечалось в § I, действие (5) инвариантно относительно преобразований (6)–(7) с параметрами (8). В случае калибровочных полей параметры (8) можно выбрать как функции некоторых других независимых бесконечно малых параметров $f^a(x)$: $F^a = F^a(q, p, \lambda; f(x))$ таким образом, что преобразования:

$$\Delta^f q = (\Delta^f q, \Delta^f \lambda) \equiv (\delta^{F(f)} q, \delta^{F(f)} \lambda) \big|_{p=p^0} \quad (52)$$

образуют калибровочную группу:

$$\begin{aligned} \Delta^f \delta [q] &= 0, \\ \delta^{f_1} \delta^{f_2} q - \delta^{f_2} \delta^{f_1} q &= \delta^{f_3} q \\ f_3^a &= E_{\mu\nu}^a f_1^\mu f_2^\nu. \end{aligned} \quad (53)$$

Здесь $E_{\mu\nu}^a$ — структурные постоянные калибровочной группы в отличие от $u_{\mu\nu}^a$, которые, вообще говоря, зависят от канонических переменных. Существование преобразований (52) – (53) ещё не означает, что калибровочные преобразования (52) представимы в виде канонических преобразований (6) в фазовом пространстве. Послед-

нее требует выполнения дополнительного условия (согласованности), касающегося импульсных переменных [14]:
 $(\delta^F \langle S \rangle p) |_{p=p_0} = \Delta^F p^0(q, \dot{q}, \lambda)$. Непосредственное вычисление показывает, что условие согласованности не выполняется [14]:

$$\begin{aligned} & (\delta^F p_i^0(q, \dot{q}, \lambda) - \delta^F p_i) |_{p=p_0} = \\ & = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k} \right)^{-1} \left[\frac{\partial^2 T_\alpha}{\partial p_k \partial p_m} (\dot{p}_m + \frac{\partial H}{\partial q^m}) - \right. \\ & \left. - T_\alpha \frac{\partial}{\partial p_k} (V_\alpha^\beta + U_{\alpha\lambda}^\beta \lambda^\lambda) \right] F^\alpha |_{p=p_0}. \end{aligned} \quad (54)$$

Во всех известных теориях коэффициенты U и V не зависят от импульсов p_i (в теории гравитации U и V зависят только от q^i), поэтому второй член в выражении (54) выпадает. Остается первый член в (54), из которого видно, что 1) условие согласованности всегда выполняется для классических траекторий в силу уравнений движения, и 2) оно выполняется в теориях, где связи линейны по импульсам. Таково общее соответствие гамильтоновой и лагранжевой формулировок теории калибровочных полей.

Для такой теории в работах [8-11] различными косвенными (ковариантными) методами была построена \mathcal{S} -матрица, определяемая следующим континуальным интегралом в конфигурационном пространстве:

$$\begin{aligned} Z^{\text{covar}} &= \int d\mu(q) d\pi d\bar{c} dc \exp[i\mathcal{S}[g] + \\ &+ i \int dt (\pi_\mu \dot{\phi}^\mu(q) + \bar{c}_\alpha \cdot \Delta^C \phi^\alpha(q))], \end{aligned} \quad (55)$$

где фигурируют величины, введенные формулами (50) и (52). Выражение для меры $d\mu(q)$ было получено в работе [7] также косвенным методом (см. ниже). Наша задача состоит в том, чтобы преобразовать каноническую

δ - матрицу (49) к конфигурационному пространству (проинтегрировать по P_i) и результат сравнить с ответом (55).

(Интегрирование по P ведет к подстановке $P = P^0$ как в (50)). Нетривиальность сравнения (49) с (55) видна из того, что 1) возникающий в (49) двухфермионный член $\bar{c}_\lambda (\delta^c \phi^a)|_{P=P^0}$ вообще говоря, отличается от аналогичного члена $\bar{c}_\lambda \Delta^c(\phi^a)|_{P=P^0}$ в (55), и 2) в (49) имеется четырехфермионный член, отсутствующий в (55). Таким образом, сравнение (49) с (55) требует дополнительного исследования.

В случае поля Янга-Миллса мы имеем:

$$F^A(q, p, \lambda; f(x)) = f^A(x), \quad \mathcal{U}_{\mu\nu}^x = E_{\mu\nu}^x = \text{const}, \quad (56)$$

и T_λ линейны по P . Поэтому правая часть уравнения (54) исчезает, и условие согласованности выполняется. В совокупности с первым уравнением из (56) это приводит к равенству двухфермионных членов:

$$(\delta^c \phi^a)|_{P=P^0} = \Delta^c(\phi^a)|_{P=P^0}.$$

Четырехфермионный член в (49) тождественно равен нулю, так как связи образуют группу (56). В результате мы получаем:

$$\mathbb{Z}^{\text{phys}} = \mathbb{Z}^{\text{covar}}.$$

Таким образом, эквивалентность канонического и ковариантного формализмов доказана, причём мера $-d\mu(g) = \prod dg d\lambda = dg$ - тривиальна.

В случае гравитационного поля особенности группы Эйнштейна проявятся в том, что, во-первых, мы должны положить:

$$F^i(\lambda; f(x)) = f^i - \lambda^i f^0, \quad F^0(\lambda; f(x)) = -(1 + \lambda^0) f^0. \quad (57)$$

Во-вторых, из-за транспортного члена в калибровочных преобразованиях (47) связь T_0 получается квадратичной по импульсам. Поэтому условие согласованности не выполняется (уравнение (54)), т.е. общие координатные преобразо-

вания непредставимы в виде канонических преобразований (вопреки утверждению работы [2]). В-третьих, структурные константы координатной группы содержат производные во времени, поэтому при переходе к каноническому формализму группа не может быть сохранена: $E_{\mu\nu}^x \neq U_{\mu\nu}^x$, $U = U(q)$. В силу первых двух причин двухфермионные члены канонического и ковариантного ответов отличны друг от друга:

$$(\delta^c \phi^a)|_{p=p^0} \neq \Delta^c(\phi^a|_{p=p^0}), \quad (58)$$

- "парадокс дираковской калибровки". В силу третьей причины четырехфермионный член в (49) выживает и приобретает вид:

$$\bar{c}_\mu \bar{c}_\nu \frac{\delta \phi^\beta}{\delta \lambda^k(x)} \frac{\delta \phi^\mu}{\delta p_{k\mu}(x)} c^0(x) \partial_n c^0(x). \quad (59)$$

Ещё одна трудность состоит в том, что при интегрировании по p в (49), мы приходим к модифицированным калибровочным условиям, отличающимся от (50) дополнительными членами, содержащими $\bar{c}c$ - поля. Поэтому, чтобы прийти в лагранжевом ответе к стандартной калибровке (50), мы должны начать в гамильтоновом выражении (49) с модифицированных дополнительных условий, зависящих от вспомогательных фермионов \bar{c}, c . Существенно, что такое обобщение было получено в § 3 (гамильтониан (45)).

И все же, несмотря ни на что, каноническое и ковариантное выражения для гравитационной δ -матрицы совпадают. Замена переменных в интеграле (49): $c^a \rightarrow F^a(\lambda; c(x))$ по формуле (57) превращает δ^c в Δ^c и обуславливает появление нетривиальной локальной меры. Вторая замена в (49):

$$\begin{cases} q^{ik}(x) = q^{ik'}(x) + \bar{c}_\alpha \frac{\delta \phi^{\alpha'}}{\delta p_{ik}(x)} c^0(x), \\ p_{ik}(x) = p'_{ik}(x) - \bar{c}_\alpha \frac{\delta \phi^{\alpha'}}{\delta q^{ik'}(x)} c^0(x), \end{cases} \quad (60)$$

ликвидирует "парадокс Дираковской калибровки" (58), но приводит к появлению лишних членов, содержащих четыре фермиона. Эти члены как раз имеют вид (59) с обратным знаком, и они в точности компенсируются затравочным четырехфермионным членом в (49). В результате:

$$Z^{\text{phys}} = Z^{\text{covar}} !$$

Окончательный ответ имеет вид [14]:

$$Z^{\text{phys}} = Z^{\text{covar}} = \int d\mu(g) d\pi d\bar{c} dc \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\sqrt{g} R + \right. \right. \\ \left. \left. + \pi_\alpha \phi^\alpha(g) + \pi_\alpha (\chi^\alpha_\gamma(g) - \chi^\alpha_\gamma(g)) \bar{c}_\beta c^\gamma + \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{c}_\alpha \Delta^c \phi^\alpha + \bar{c}_\alpha (\Delta^c \chi^\alpha_\gamma) \bar{c}_\beta c^\gamma + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \chi^\alpha_\gamma \bar{c}_\alpha \bar{c}_\beta E^\gamma_{\mu\nu} c^\mu c^\nu \right] \right\},$$

где достигнуто неизвестное ранее обобщение на калибровки, зависящие от $\bar{c}c$ (члены с χ^α_γ). Для меры получается выражение:

$$d\mu(g) = \prod_x \left\| \frac{\partial F^\alpha(x; c)}{\partial c^\beta} \right\|^{-1} \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial p} \right\|^{-1/2} dq^{\mu\nu} dx^\mu = \\ = \prod_x (-g)^{-3/2} g^{00} dq^{\mu\nu}, \quad (6I)$$

совпадающее с [7].

Мера (6I) содержит нековариантный фактор g^{00} , отражающий выбор времени при каноническом квантовании. Однако якобиан калибровочного (координатного) преобразования также нековариантен, потому что он описывает изменение Γ - упорядочения. Этот якобиан отличен от единицы: координатное преобразование не является каноническим, и равен [7, 14]:

$$\Delta = \exp \left\{ \delta^{(4)}(0) \left[- \int d^4x (\partial_\mu f^\mu) \ln (g^{-3/2} g^{00}) + \right. \right.$$

$$+ 2 \int d^4x \frac{g^{0\mu}}{g^{00}} (\partial_\mu \xi^0)] \}.$$

В результате:

$$d\mu(g) = inv.$$

Компенсация нековариантных членов происходит и на уровне регуляризованных выражений при счёте по теории возмущений или по методу стационарной фазы. На этом уровне специфика гравитационного взаимодействия проявляется в необычной сингулярности возникающих обобщенных функций [15]. Последнее приводит к тому, что обычные методы регуляризации либо неадекватны (размерная регуляризация), либо некорректны (метод собственного времени). После устранения ошибок в методе собственного времени, четвертичная расходимость в амплитуде, пропорциональная космологическому члену, исчезает, а возникающее вместо неё нековариантное выражение в точности компенсируется мерой [15]. Корректно регуляризованная амплитуда явно ковариантна.

ЛИТЕРАТУРА

1. P.A.M.Dirac, Can. J.Math., 2, 129, (1950).
 2. J.Anderson, P.Bergmann, Phys. Rev., 83, 1081, (1951).
 3. P.Bergmann, Rev. Mod. Phys., 33, 510, (1961).
 4. Л.Д.Фаддеев, ТМФ, I, 3, (1969).
 5. Е.С.Фрадкин, в сб. "Проблемы теоретической физики", стр.146, М., изд-во "Наука", (1972).
 6. E.S.Fradkin, G.A.Vilkovisky, Phys. Lett., 55B, 224, (1975).
 7. E.S.Fradkin, G.A.Vilkovisky, Phys. Rev., D8, 4241, (1973).
 8. B.S.DeWitt, Phys. Rev., 162, 1195, (1967).
 9. L.D.Faddeev, V.N.Popov, Phys. Lett., 25B, 30, (1967).
 10. S.Mandelstam, Phys. Rev., 175, 1604, (1968).
 11. E.S.Fradkin, I.V.Tyutin, Phys. Rev., D2, 2841, (1970).
 12. H.Leutwyler, Phys. Rev., 134, B 1155, (1964).
 13. И.И.Коноплева, В.Н.Попов. "Калибровочные поля", М., "Атомиздат", 1972.
 14. E.S.Fradkin, G.A.Vilkovisky, Nuovo Cimento Lett., 13, 187, (1975).
 15. E.S.Fradkin, G.A.Vilkovisky, P.N.Lebedev Physical Institute, Report (in press).
- Расширенное содержание писем [6] и [14] будет опубликовано в Phys. Rev. D.

III.

Калибровочные теории и суперсимметрии

**GAUGE THEORIES
AND SUPERSYMMETRIES**

СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ

А.А.Славнов

Математический институт им.В.А.Стеклова АН СССР, Москва

За последние два года в квантовой теории поля развилось новое направление — теория суперсимметрии. Впервые идеи о возможности существования симметрии, связывающей ферми и бозе-поля, были высказаны в работах^{/1,2/}, однако важность этой концепции для квантовой теории поля была осознана лишь после того, как Весс и Зумино^{/3/} построили пример релятивистской суперсимметричной квантовой теории поля и обнаружили у подобных теорий ряд интересных черт, делающих их весьма привлекательными с точки зрения применения к физике элементарных частиц. За прошедшие с тех пор два года было построено большое число моделей, из которых наибольший интерес представляют, по-видимому, суперсимметричные калибровочные теории. Была разработана суперсимметричная диаграммная техника, развита процедура перенормировки, исследована проблема нарушения суперсимметрии. В настоящее время мы вплотную подошли к вопросу о построении реалистических суперсимметричных моделей взаимодействий элементарных частиц.

В моем докладе я постараюсь ответить на следующие вопросы: зачем нужны суперсимметричные калибровочные теории? Как с ними работать? Каковы возможности их применения в физике элементарных частиц?

I. Для чего нужны суперсимметричные калибровочные теории?

В настоящее время общепринятой является точка зрения, согласно которой слабые, электромагнитные и сильные взаимодействия переносятся калибровочными полями. Основанные на этой гипотезе модели обладают рядом привлекательных черт, в первую очередь к ним относятся универсальность взаимодействия и перенормируемость.

Наибольшую трудность для теории калибровочных полей представляет вопрос о спектре масс. Необходимо объяснить факт отсутствия наблюдаемых безмассовых заряженных векторных мезонов и кварков. Сейчас наиболее популярна гипотеза о "конфайнменте", предполагаю-

дая существование в неабелевых калибровочных теориях потенциала притяжения, быстро растущего с расстоянием и не позволяющего кваркам и сильно взаимодействующим векторным мезонам разойтись на макроскопические расстояния.

Маловероятно, однако, чтобы тот же самый механизм мог объяснить физику лептонов. Лептоны сами по себе являются наблюдаемыми элементарными частицами и не нуждаются в "конфайнменте". Естественно предположить, что возникновение массы у промежуточных W - мезонов, а также расщепление лептонов по массе обусловлено спонтанным нарушением симметрии, например, эффектом Хиггса. Основанные на этом механизме объединенные модели слабых и электромагнитных взаимодействий типа Салама-Вайнберга /4,5/ неплохо согласуются с экспериментом, но с эстетической точки зрения вызывают ряд возражений. Участвующие в них хиггсовские мезоны никак не связаны с исходными принципами калибровочных теорий. Единственная цель введения скалярных частиц - обеспечить наблюдаемый спектр масс. При этом, поскольку параметры, характеризующие массы и взаимодействия хиггсовских частиц, никак не ограничены калибровочной инвариантностью, предсказательная сила подобных моделей довольно мала.

Возникает желание построить такую схему, в которой существование хиггсовских частиц с необходимостью следовало бы из основных принципов и которая естественным образом связывала бы параметры скалярных мезонов с параметрами остальных полей. Естественным кандидатом на эту роль является теория, в которой существует симметрия между ферми- и бозе-полями, т.е. суперсимметричная калибровочная теория.

Алгебра суперсимметрии, постулированная в работах /1-3/ и используемая сейчас в большинстве работ, является минимальной алгеброй, включающей антикоммутирующие элементы и содержащей в качестве подалгебры алгебру группы Пуанкаре. Она имеет вид

$$[P_\mu, P_\nu]_- = 0, \quad [P_\mu, S_\alpha]_- = 0, \quad [S_\alpha, S_\beta]_+ = -(\gamma_\mu C)_{\alpha\beta} P_\mu. \quad (1)$$

где P_μ - генераторы четырехмерных трансляций, S_α - генераторы преобразований суперсимметрии, являющиеся майорановскими спинорами, C - матрица зарядового сопряжения.

Представления алгебры (I) удобно искать /6/ в пространстве функций от 8 переменных (x_μ, θ_α) , где x_μ - коммутирующие вещественные параметры, а θ_α - антикоммутирующие майорановские спиноры. Алгебру (I) можно реализовать как алгебру преобразований пространства параметров (x_μ, θ_α)

$$x'_\mu = x_\mu + \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \theta, \quad \theta'_\alpha = \theta_\alpha + \epsilon_\alpha, \quad (2)$$

где ϵ_α , в свою очередь, являются антикоммутирующими майорановскими спинорами.

Скалярным суперполем называется функция от переменных x_μ, θ , преобразующаяся по закону

$$\Psi'(x', \theta') = \Psi(x, \theta). \quad (3)$$

Из-за антикоммутативности параметров θ любая функция от них является конечным полиномом

$$\begin{aligned} \Psi(x, \theta) = & C(x) + \bar{\theta} \gamma^\mu \chi(x) + \frac{1}{4} \{ \bar{\theta} \theta M(x) + \bar{\theta} \gamma^\mu \theta N(x) + \\ & + \bar{\theta} i \gamma_5 \theta A_\nu(x) + (\bar{\theta} \theta)(\bar{\theta} \gamma_\mu \lambda(x)) \} + \frac{1}{32} (\bar{\theta} \theta)^2 D(x) \end{aligned} \quad (4)$$

(здесь выписана формула для разложения псевдоскалярного суперполя). Скалярное суперполе $\Psi(x, \theta)$ эквивалентно мультиплету обычных полей, зависящих только от x . Этот супермультиплет содержит (псевдо) скаляры C, M, N, D , два майорановских спинора χ, λ и векторное поле A_ν . При преобразованиях (3) компоненты $C, \chi, M, N, A_\mu, \lambda, D$ преобразуются друг через друга.

Скалярное суперполе $\Psi(x, \theta)$ допускает инвариантное разложение на сумму трех скалярных суперполей с меньшим числом компонент

$$\Psi(x, \theta) = \Psi_+(x, \theta) + \Psi_-(x, \theta) + \Psi_\gamma(x, \theta), \quad (5)$$

где "киральные" компоненты Ψ_\pm выделены ковариантными условиями

$$\left\{ \frac{1}{2} (1 \pm i \gamma_5) D_\alpha \right\} \Psi_\mp = 0, \quad (6)$$

D_α - ковариантная производная

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - \frac{i}{2} (\gamma_\mu \theta)_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \quad (7)$$

Киральные суперполя $\varphi_{\pm}(x, \theta)$ эквивалентны мультиплетам обычных полей, состоящим из двух (псевдо) скаляров и двухкомпонентного спинора $\Psi_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm i\gamma_5)\Psi$

$$\varphi_{\pm}(x, \theta) = \exp\left\{\frac{1}{4}\bar{\theta}\hat{\partial}\gamma_5\theta\right\}\left[A_{\pm}(x) + \bar{\theta}\Psi_{\pm}(x) + \bar{\theta}\frac{1 \pm i\gamma_5}{4}\theta F_{\pm}(x)\right] \quad (8)$$

II. Как работать с суперсимметричными теориями?

Для построения инвариантного действия достаточно проинтегрировать суперскаляр, например, произведение нескольких суперполей, по мере, инвариантной относительно преобразований (2) /7/. Такая мера есть $\int d^4x d^4\theta$, где интеграл по алгебре Грассмана определяется формулами /8/

$$\int d\theta_{\alpha} = 0, \quad \int d\theta_{\alpha} \theta_{\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (8)$$

Кратный интеграл понимается как повторный.

Простейшее инвариантное действие имеет вид

$$S = \frac{1}{4} \int \varphi_+(x, \theta) \varphi_-(x, \theta) d^4x d^4\theta = \int \left[\partial_{\mu} A_+ \partial_{\mu} A_- + i \bar{\Psi} \hat{\partial} \Psi + F_+ F_- \right] d^4x \quad (9)$$

$$\varphi_+(x, \theta) = \varphi_-^*(x, \theta)$$

и описывает невзаимодействующие (псевдо)скалярные поля A_{\pm} и F_{\pm} и майорановский спинор Ψ .

Из определения (8) следует, что

$$\int \Psi(x, \theta) d^4\theta = \frac{1}{2} \mathcal{D}(x),$$

т.е. инвариантом является интеграл по d^4x от \mathcal{D} - компоненты скалярного суперполя. (Для киральных суперполей инвариантом является также $\int d^4x F_{\pm}(x)$).

Простейшая модель с нетривиальным взаимодействием описывается лагранжианом /9/

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left\{ \varphi_+(x) \varphi_-(x) \right\}_{\theta} + \left\{ M(\varphi_+ \varphi_+ + \varphi_- \varphi_-) + g(\varphi_+^3 + \varphi_-^3) \right\}_{\theta} = \\ & (10) \\ = & \partial_{\mu} A_+ \partial_{\mu} A_- + i \bar{\Psi} \hat{\partial} \Psi + F_+ F_- - M \bar{\Psi} \Psi + F_+ (M A_+ + g A_+ A_+) - g \bar{\Psi} \Psi A_+ + (+ \leftrightarrow -). \end{aligned}$$

Поскольку лагранжиан (10) не содержит производных от поля F_{\pm} , оно не является истинной динамической переменной. Исключение F приводит к появлению массового члена и контактного взаимодействия скалярных полей A_{\pm}

$$-(MA_{+} + gA_{+}A_{+})(MA_{-} + gA_{-}A_{-}). \quad (11)$$

Система взаимодействующих скалярных и спинорных полей (10) описывается всего двумя параметрами g и M . Это свойство сохраняется и в перенормированной теории, причем в суперсимметричных теориях не возникает независимого контрчлена перенормировки массы^[3,9]

Для приложений представляют интерес суперсимметричные теории, инвариантные относительно калибровочных преобразований. Калибровочные векторные поля A_{μ} включаются в суперполе общего вида Ψ , а для описания полей материи можно воспользоваться киральными суперполями.

Калибровочные преобразования не коммутируют с преобразованиями суперсимметрии, поэтому теория, инвариантная относительно калибровочных преобразований и преобразований суперсимметрии, одновременно с необходимостью должна быть инвариантна относительно более широкой группы преобразований^[10]

$$\varphi_{\pm}(x, \theta) \rightarrow \Omega_{\pm} \varphi_{\pm}(x, \theta); \quad e^{\partial\Psi} \rightarrow \Omega_{-} e^{\partial\Psi} \Omega_{+}^{-1}, \quad (12)$$

где Ω_{\pm} — произвольное киральное суперполе-матрица с компонентами $(u_{\pm}, V_{\pm}, W_{\pm})$, играющими роль параметров калибровочного преобразования. Матрицы Ω_{\pm} удовлетворяют условию $\Omega_{-}^{-1} = \Omega_{+}^{-1}$, а в случае группы SU_N — еще условию $\det \Omega_{\pm} = 1$.

Инвариантный кинетический член для поля материи имеет вид^[10, 11, 12]

$$\frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \{ \varphi_{+}^{\dagger} e^{\partial\Psi} \varphi_{+} + \varphi_{-}^{\dagger} e^{-\partial\Psi} \varphi_{-} \}. \quad (13)$$

Инвариантное действие для калибровочного суперполя в случае

группы $U(1)$ имеет вид

$$S_0 = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \Psi_i(x, \theta) \square \Psi_i(x, \theta), \quad (14)$$

а в неабелевом случае

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{32} \text{Tr} \{ V_\mu V_\mu + V_\mu^+ V_\mu^+ \} \\ V_\mu &= -\frac{1}{g} \left\{ c^{-1} \gamma_\mu \frac{1+i\gamma_5}{2} \right\}^{ab} D_a \left\{ e^{-g\Psi} D_b e^{g\Psi} \right\}; \quad \Psi = \Psi^a \tau^a \end{aligned} \quad (15)$$

Лагранжиан (13) существенно нелинеен и поэтому могут возникнуть сомнения в перенормируемости подобной теории. Однако из-за инвариантности относительно калибровочных преобразований (12) действие вырождено, и при квантовании необходимо наложить дополнительное условие. Зумино и Весс предложили воспользоваться калибровочным произволом, чтобы обратить в ноль компоненты C, X, M, N поля Ψ . Эта калибровка обладает замечательным свойством: ряд (13) становится конечным полиномом. В случае Абелевой группы действие принимает вид

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2} \bar{\lambda} \hat{\partial} \lambda + \frac{1}{2} D^2 + F_+^* F_+ + i \bar{\Psi} \gamma_\mu (\partial_\mu - \frac{ig}{2} A_\mu) \Psi + \right. \\ &+ [\partial_\mu A_+^* + \frac{ig}{2} A_+^* A_\mu] [\partial_\mu A_- - \frac{ig}{2} A_\mu A_-] + \frac{ig}{\sqrt{2}} A_+^* \bar{\lambda} \Psi_+ + \\ &+ \frac{g}{2} [A_+^* A_+ - A_-^* A_-] D + M [A_-^* F_+ - \bar{\Psi} \Psi] + (+ \leftrightarrow -) + \text{з.с.} \end{aligned} \quad (16)$$

и описывает электромагнитное взаимодействие спинорных и скалярных полей плюс дополнительное взаимодействие спиноров и скаляров, характеризуемое той же константой g . Исключение компонент F и D дает массовый член и контактное взаимодействие скалярных полей

$$-M^2 (A_+^* A_+ + A_-^* A_-) - \frac{g^2}{2} [A_+^* A_+ - A_-^* A_-]^2 \quad (17)$$

В калибровке Весса-Зумино перенормируемость теории очевидна. Однако условие

$$C = \chi = M = N = 0 \quad (18)$$

не инвариантно относительно преобразований суперсимметрии, поэтому в калибровке (18) утрачена явная суперсимметрия, что сильно затрудняет анализ перенормированной теории. В частности, отнюдь не очевидно, что можно провести перенормировку, сохранив равенство констант различных взаимодействий, участвующих в (16).

Эта проблема была решена в работах /13,14/, где была построена явным образом суперсимметричная теория возмущений для калибровочных теорий. Вместо неинвариантного условия (18) используется суперсимметричное дополнительное условие типа

$$\Psi_+ = 0. \quad (19)$$

В калибровке (19) в отличие от калибровки Весса-Зумино действие остается существенно нелинейным, и ряд теории возмущений содержит бесконечное число типов примитивно расходящихся диаграмм. Однако, как было показано, индекс расходимости не превышает 2, а благодаря существованию бесконечной системы обобщенных тождеств Уорда соответствующие константы перенормировки выражаются друг через друга. Для устранения всех ультрафиолетовых расходимостей достаточно ввести два инвариантных контрчлена

$$\frac{(z_2 - 1)}{4} \int d^4x d^4\theta \{ \varphi_+^* e^{g\psi} \varphi_+ + \varphi_-^* e^{-g\psi} \varphi_- \} + \frac{z_3}{4} \int d^4x d^4\theta \Psi_+(x, \theta) \square \Psi_+(x, \theta). \quad (20)$$

(В случае неабелевой суперсимметричной теории, так же как в обычной теории Янга-Миллса, возникает еще дополнительная перенормировка заряда). Как и в простой модели (10), независимая перенормировка массы полей материи отсутствует /15,16/.

Поскольку в природе, по-видимому, отсутствует вырождение по массам скалярных и спинорных полей, суперсимметрия должна быть нарушена. Естественно ожидать, что такое нарушение обусловлено появлением ненулевых вакуумных средних скалярных компонент суперполей. Легко видеть, однако, что потенциал (17) достигает абсолютного минимума при $A_{\pm} = F_{\pm} = D = 0$. Аналогичным свойством обла-

дает и потенциал модели (10). Устойчивый экстремум симметричен. Выход из этого положения был предложен Иллиопулосом и Файе /17/, которые заметили, что в случае абелевой калибровочной группы к действию (16) можно, не нарушая суперсимметрии и калибровочной инвариантности, добавить член

$$\int g^{-1} d^4x d^4\theta \Psi(x, \theta) = \int g^{-1} \mathcal{D}(x) d^4x. \quad (21)$$

При преобразованиях (12)

$$\delta \left(\int d^4x d^4\theta \Psi(x, \theta) \right) = \int d^4x d^4\theta \{ \ln \Omega_- - \ln \Omega_+ \} = \text{const},$$

т.е. действие меняется на несущественную константу.

Добавление члена (21) приводит к появлению ненулевого вакуумного среднего поля \mathcal{D} . В приближении деревьев $\langle \mathcal{D} \rangle_0 = \int g^{-1}$. Каноническое преобразование $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} - \int g^{-1}$ обращает $\langle \mathcal{D} \rangle_0$ в нуль и порождает дополнительный массовый член

$$\{ [A_+^* A_+ - A_-^* A_-] \}. \quad (22)$$

Супермультиплет расщепился по массе, т.е. суперсимметрия спонтанно нарушена. При этом, если $f > M^2$, то потенциал является тахионным, что свидетельствует о спонтанном нарушении внутренней симметрии. Дополнительный сдвиг полей A_{\pm} делает теорию устойчивой и порождает массовый член для векторного поля A_{μ} .

Спонтанное нарушение суперсимметрии сопровождается появлением голдстоуновского безмассового фермиона. При $f \leq M^2$ им является λ , а при $f > M^2$ — суперпозиция полей λ и Ψ_{\pm} .

Механизм Файе-Иллиопулоса применим лишь в абелевом случае, т.к. добавление члена $\int \mathcal{D}^2$ в неабелевом случае, очевидно, нарушает калибровочную инвариантность. Другой механизм, применимый в отсутствие абелевых калибровочных полей, был предложен в работах /18, 19/. В этом случае используются лагранжианы типа (10). К такому лагранжиану можно, не нарушая суперсимметрии, добавить член $\lambda (F_+ + F_-)$, порождающий ненулевое вакуумное среднее поля F_{\pm} . Однако новый устойчивый вакуум также оказывается суперсимметричным, а добавление $\lambda (F_+ + F_-)$ приводит просто к изменению массы супермультиплета.

Нетривиальный эффект возникает в системе n взаимодействующих суперполей, описываемых лагранжианом типа (10). Файе и О'Райфerti показали, что при $n \geq 3$ в таких моделях может возникать спонтанное нарушение суперсимметрии.

Описанные механизмы спонтанного нарушения применимы лишь к весьма ограниченному классу теорий и до сих пор на их основе не удалось сконструировать ни одной реалистической модели. Кроме того, они приводят к серьезным трудностям при попытке физической интерпретации голдстоуновского фермиона. Бардин /20/ и Де Витт и Фридман /21/ вывели для процессов с участием голдстоуновских фермионов низкоэнергетические теоремы, аналогичные теореме Адлера для голдстоуновских бозонов. Эти теоремы исключают возможность отождествления голдстоуновского фермиона с электронным нейтрино.

В спонтанно нарушенной суперсимметричной теории можно построить сохраняющийся ток

$$S^M(x) = -i c \gamma^M \psi(x) + \dots, \quad (23)$$

где $\psi(x)$ - голдстоуновский фермион. Пользуясь сохранением тока $S_\mu(x)$, получаем

$$0 = d^4x e^{iqx} \partial_\mu \langle B | S^M(x) | A \rangle = (2\pi)^4 \delta(q + p_B - p_A) [c M_\nu(q) + q^\mu R_\mu], \quad (24)$$

где M_ν - нейтринный полюсный член, а R_μ обозначает вклад остальных членов в (23). Из (24) следует, что $M_\nu(q) \rightarrow 0$ при $q \rightarrow 0$. В частности, должна стремиться к нулю амплитуда B -распада при $q \rightarrow 0$ (или, что эквивалентно, при большой энергии заряженного лептона). Экспериментальные данные противоречат такому поведению. Разумеется, остается возможность отождествить голдстоуновский фермион с мюонным или каким-нибудь новым, еще не наблюдавшимся "нейтрино". Такая возможность обсуждалась недавно в работе /22/.

Я хочу обсудить еще один механизм нарушения суперсимметрии, позволяющий существенно расширить допустимый класс теорий и свободный от трудности с голдстоуновским нейтрино.

Еще в работе /19/ было замечено, что в скалярной модели (10) суперсимметрию можно нарушить явно, но так "мягко", что симметричная процедура перенормировки остается неизменной, а соотношения между параметрами модели меняются лишь на конечные члены, вычис-

ляемые по теории возмущений. Для этого достаточно к лагранжиану (10) добавить массовый член для скалярного поля вида

$$\Delta \mathcal{L} = c (A_+ A_+ + A_- A_-).$$

Мы покажем, что добавление к суперсимметричному лагранжиану любых массовых членов для скалярных полей оставляет теорию "квази-симметричной", т.е. к ней применима симметричная процедура перенормировки, и единственными новыми параметрами являются лишь сами массы скалярных частиц. Все остальные параметры отличаются от симметричных лишь конечными членами, вычисляемыми по теории возмущений. Более того, такую теорию можно реализовать как суперсимметричную теорию со спонтанно нарушенной симметрией, если ввести дополнительные вспомогательные поля помимо \mathcal{D} и \tilde{F} .

Поясним сказанное на примере простой модели, описываемой лагранжианом

$$S = \frac{1}{4} \{ (\varphi_+^\dagger e^{g\tilde{\tau}} \tilde{\psi} \varphi_+) d^4x d^4\theta + \int \mathcal{L}_{\text{а.м.}} d^4x d^4\theta \}. \quad (25)$$

Здесь φ_+ - киральный изодублет, $\tilde{\psi}$ - суперсимметричное поле Янга-Миллса, $\mathcal{L}_{\text{а.м.}}$ обозначает лагранжиан поля Янга-Миллса (15).

Действие (25) инвариантно относительно неабелевой калибровочной группы

$$\varphi_+ \rightarrow \Omega_+ \varphi_+, \quad e^{g\tilde{\tau}} \rightarrow (\Omega_+^\dagger)^{-1} e^{g\tilde{\tau}} \Omega_+^{-1}, \quad \det \Omega_+ = 1, \quad \psi = \tilde{\tau} \tilde{\tau}. \quad (26)$$

Введем вспомогательные абелевы калибровочные поля ψ° и $\tilde{\psi}^\circ$, взаимодействующие с φ_+ и ψ следующим образом:

$$S' = \frac{1}{4} \{ \{ (\varphi_+^\dagger e^{g\psi^\circ + \psi^\circ} \varphi_+ + \psi_+^\circ \square \tilde{\psi}_+^\circ + \{ \tilde{\psi}^\circ \} d^4x d^4\theta \}. \quad (27)$$

Лагранжиан (27) помимо преобразований (26) инвариантен относительно абелевой калибровочной группы

$$\varphi_+ \rightarrow \tilde{\Omega}_+ \varphi_+, \quad e^{\psi^\circ} \rightarrow (\tilde{\Omega}_+^\dagger)^{-1} e^{\psi^\circ} \tilde{\Omega}_+^{-1}, \quad e^{\tilde{\psi}^\circ} \rightarrow (\tilde{\Omega}_+^\dagger)^{-1} e^{\tilde{\psi}^\circ} \tilde{\Omega}_+^{-1}. \quad (28)$$

Из-за наличия линейного члена $\{ \tilde{\psi}^\circ \}$ вакуумное среднее $\langle \mathcal{D}^\circ \rangle \neq 0$ и суперсимметрия спонтанно нарушена. Переходя к новым полям

$$\mathcal{D}^0 \rightarrow \mathcal{D}^0 - f,$$

получаем массовый член

$$\Delta S = \frac{f}{4} \int \varphi_+^\dagger e^{i\tilde{\Psi}^\dagger} \varphi_+ (\bar{\theta}\theta)^2 d^4\theta d^4x = \frac{f}{2} \int (A_+^\dagger A_+) d^4x. \quad (29)$$

Вариация (27) по $\tilde{\Psi}$ дает свободные уравнения для Ψ^0 , т.е. поле Ψ^0 в действительности не взаимодействует с "физическими" полями Ψ и φ_+ , и весь эффект полей Ψ^0 и $\tilde{\Psi}^0$ сводится к появлению в лагранжиане (25) массового члена (29), снимающего вырождение по массам. С другой стороны, теория, описываемая действием (25) + (29), эквивалентна явно суперсимметричной теории (27) и поэтому к ней применим весь аппарат, развитый для симметричных теорий. В частности, сохраняются соотношения между константами перенормировки. Подробный анализ соответствующей процедуры можно найти в работе /23/.

Модель (25) представляет собой пример асимптотически свободной теории без инфракрасных расходимостей. При $f > 0$ лагранжиан (25) + (29) порождает спонтанное нарушение изотопической инвариантности. Переходя к устойчивому вакууму $A_+ \rightarrow A_+ + \alpha$, получаем следующий спектр масс: все три компоненты векторного поля, два комплексных фермиона и один эрмитов скаляр приобретают массу f . Безмассовыми остаются три голдстоуновских скаляра, устраняемые калибровочным преобразованием, и двухкомпонентный фермион. В модели отсутствуют инфракрасные расходимости. Вместе с тем, будучи теорией Янга-Миллса с одной безразмерной константой, модель асимптотически свободна.

Описанный механизм позволяет получить массовые члены вида

$$a A_+^\dagger A_+ + b A_-^\dagger A_- \quad (30)$$

Аналогичным образом можно получить также массовые члены вида

$$c (A_-^\dagger A_+ + A_+^\dagger A_-). \quad (31)$$

Для этого нужно ввести вспомогательные киральные поля $\varphi_\pm^0, \tilde{\varphi}_\pm^0$, взаимодействующие с φ_\pm по типу (10):

$$\{\varphi_+^\dagger \varphi_- \varphi_-^\dagger + \varphi_-^\dagger \varphi_+ \varphi_+^\dagger\}_F + \frac{1}{2} \{\varphi_+^\dagger \tilde{\varphi}_-^\dagger + \tilde{\varphi}_+^\dagger \varphi_-^\dagger\}_D + c (\tilde{F}_+^\dagger + \tilde{F}_-^\dagger). \quad (32)$$

$\langle F_0 \rangle_0 \neq 0$ и сдвиг $F_0 \rightarrow c + F_0$ порождает массовый член (31). Поле φ_+^\dagger свободное и не влияет на физические следствия. В то же время явная суперсимметрия выражения (33) позволяет применить к нему все выводы, сделанные для симметричной теории. Трудностей с голдстоуновскими "нейтрино" вообще не возникает, т.к. голдстоуновский фермион входит во вспомогательные супермультиплеты (ψ° или φ_\pm°), не взаимодействующие с физическими полями.

Следует отметить, что факт независимости логарифмических контрчленов, ответственных за перенормировку зарядов и волновых функций, от масс является общим ^{/24,25/} и не связан с симметрией теории. Предлагаемый метод приводит к более сильным следствиям — он сохраняет тождества Уорда и гарантирует отсутствие независимой перенормировки масс фермионов.

III. Возможные применения суперсимметричных калибровочных теорий.

Наиболее естественная область применения суперсимметричных калибровочных теорий — это объединенные модели слабых и электромагнитных взаимодействий. Однако до сих пор не удавалось построить ни одной реалистической модели. Предложенная Файе ^{/26/} модель для электронного сектора не допускает обобщения на мюонный сектор, и, кроме того, отождествление голдстоуновского фермиона с электронным нейтрино противоречит эксперименту.

Ниже мы покажем, что описанный в предыдущем разделе механизм спонтанного нарушения симметрии позволяет конструировать приемлемые с точки зрения эксперимента модели слабых и электромагнитных взаимодействий.

В качестве калибровочной группы выберем $SU(2) \times U(1)$. Поля материи будем описывать комплексными киральными дублетами $\varphi_\pm^i = \{\varphi_\pm^{i+}, \varphi_\pm^{i-}\}$. Поскольку нас будет интересовать главным образом спектр масс и явный вид взаимодействия, в дальнейшем будем работать в калибровке Весса-Зумино. Калибровочно инвариантный лагран-

жизни имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \left[\partial_\mu A_+^{i+} + \frac{i}{2} A_+^{i+} (g_1 A_\mu + g_2 A_\mu^a \tau^a) \right] \left[\partial_\mu A_+^{i-} - \frac{i}{2} (g_1 A_\mu + g_2 A_\mu^a \tau^a) A_+^{i-} \right] + \mathcal{F}_+^{i+} \mathcal{F}_+^{i+} \\
 & + i \bar{\Psi}^i \gamma^\mu \left[\partial_\mu - \frac{i}{2} (g_1 A_\mu + g_2 A_\mu^a \tau^a) \right] \Psi^i + M_{ij} (A_-^{i+} \mathcal{F}_+^j - \bar{\Psi}_i \Psi_j) + \\
 & + \frac{i}{2} \left[A_+^{i+} (g_1 \mathcal{D} + g_2 \mathcal{D}^a \tau^a) A_+^{i-} - A_-^{i+} (g_1 \mathcal{D} + g_2 \mathcal{D}^a \tau^a) A_-^{i-} \right] + \quad (33) \\
 & + \frac{i}{2} A_+^{i+} (g_1 \bar{\lambda} + g_2 \bar{\lambda}^a \tau^a) \Psi_+^i + (+ \leftrightarrow -) + \text{з.с.} + \mathcal{F}_+^{ij} A_+^{i+} A_+^j + \mathcal{F}_-^{ij} A_-^{i+} A_-^j + \\
 & + \eta_{ij} (A_+^{i+} A_-^j + A_-^{i+} A_+^j) + \frac{1}{2} \mathcal{D}^2 + \frac{1}{2} \bar{\lambda} \hat{\partial} \lambda - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \\
 & - \frac{1}{4} \left[\partial_\mu A_\nu^K - \partial_\nu A_\mu^K + g \varepsilon^{Klm} A_\mu^L A_\nu^m \right]^2 + \frac{1}{2} \bar{\lambda}^\kappa \gamma_\mu \left[\partial_\mu \lambda^K + g \varepsilon^{Klm} A_\mu^L \lambda^m \right] + \frac{1}{2} (\mathcal{D}^2)^2
 \end{aligned}$$

Под i, j подразумевается суммирование от 1 до n .

Нахождение минимума эффективного потенциала представляет собой в общем случае весьма громоздкую задачу. Поэтому мы начнем с конца - постулируем, что минимум достигается при некоторых значениях $\langle A_+^{i+} \rangle = \alpha_+^i$, а затем постараемся соответственно подобрать параметры η, ξ, M .

Переход к устойчивому вакууму $A_+^{i+} \rightarrow A_+^{i+} + \alpha_+^i$ порождает массовые члены для векторных мезонов. Заряженные компоненты

$$W_\pm = \frac{A_\mu^1 + i A_\mu^2}{\sqrt{2}}, \quad M_w^2 = \frac{g^2}{2} \sum_{i,j} \alpha_\pm^2 i.$$

Нейтральные компоненты

$$Z_\mu = (g^2 + g_1^2)^{-1/2} (g_1 A_\mu - g_2 A_\mu^3), \quad M_z^2 = \frac{1}{2} (g^2 + g_1^2) \sum_{i,j} \alpha_\pm^2 i$$

$$a_\mu = (g^2 + g_1^2)^{-1/2} (g A_\mu + g_1 A_\mu^3), \quad M_a = 0.$$

Сдвиг полей A_{\pm} порождает также дополнительный массовый член для фермионов

$$i g (2)^{-1/2} \{ \alpha_{+i} (\bar{\lambda}_1 + i \bar{\lambda}_2) \Psi_{+i}^{\dagger} + \alpha_{-i} (\bar{\lambda}_1 + i \bar{\lambda}_2) \Psi_{-i}^{\dagger} \} + \quad (34)$$

$$+ i (2)^{-1/2} \{ \alpha_{+i} (g, \bar{\lambda} - g \bar{\lambda}_3) \Psi_{+i}^{\dagger} + \alpha_{-i} (g, \bar{\lambda} - g \bar{\lambda}_3) \Psi_{-i}^{\dagger} \} + \text{э. с.}$$

Компонента

$$i (g^2 + g_1^2)^{-1/2} (g \bar{\lambda} + g_1 \bar{\lambda}_3) = \bar{\nu}$$

остается безмассовой и может быть отождествлена с одним из нейтрино. Из формулы (33) видно, что благодаря наличию янг-миллсовского члена

$$g \varepsilon^{\kappa \epsilon m} \bar{\lambda}^{\kappa} A_{\mu}^{\epsilon} \lambda^m$$

взаимодействие обязательно включает векторно-подобные токи, благодаря чему суперсимметричные схемы наиболее естественны для популярных сейчас векторно-подобных моделей^{/27,28/}.

Несмотря на то, что калибровочная группа не полупростая, взаимодействие фотона и нейтрино, в отличие от стандартной модели Вайнберга, характеризуется одной и той же константой $g g_1 (g^2 + g_1^2)^{-1/2}$, благодаря чему масса заряженного векторного мезона строго фиксирована и определяется отношением электромагнитной и слабой констант. Поскольку нейтрино ν входит в янг-миллсовское взаимодействие с обеими поляризациями, право-поляризованная компонента заряженного фермиона $(\lambda_1 + i \lambda_2)_{+}$ не может принадлежать ни электрону, ни μ -мезону. Таким образом, минимальное число заряженных лептонов, так же как и в моделях^{/27,28/}, равно трем. Это соответствует в формуле (32) двум киральным мультиплетам.

При $n=2$ мы с необходимостью приходим к следующему отожд-

пествлению заряженных лептонов (с точностью до замены $e \leftrightarrow \mu$):

$$E_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_2 - i\lambda_1)_+ - \varepsilon(\cos\beta_+ \Psi_{1+}^\dagger - \sin\beta_+ \Psi_{2+}^\dagger), \quad E_- = \cos\beta_- \Psi_{2-}^\dagger + \sin\beta_- \Psi_{1-}^\dagger$$

$$M_+ = \cos\beta_+ \Psi_{2+}^\dagger + \sin\beta_+ \Psi_{1+}^\dagger, \quad M_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_2 - i\lambda_1)_- \quad (35)$$

$$e_+ = -\sin\beta_+ \Psi_{2+}^\dagger + \cos\beta_+ \Psi_{1+}^\dagger + \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_2 - i\lambda_1)_+, \quad e_- = -\sin\beta_- \Psi_{2-}^\dagger + \cos\beta_- \Psi_{1-}^\dagger.$$

Малый параметр ε характеризует отклонение взаимодействия электрона от $V-A$ варианта. Если взаимодействие точно имеет форму $V-A$, то $\varepsilon = 0$. Мы рассматриваем, однако, более общий случай, когда $1 \gg \varepsilon \neq 0$. Задание масс e, μ, E и параметра ε однозначно определяет параметры $\alpha_{\pm i}$ и M_{ij} (при исследовании спектра масс можно без ограничения общности положить $\beta_{\pm} = 0$). Углы β_{\pm} существенны лишь для взаимодействия фермионов со скалярными частицами).

$$\mathcal{M} = -ME\bar{e}e - m_\mu\bar{\mu}\mu = -m_e\bar{\Psi}_1^\dagger\Psi_1^\dagger - \frac{iM}{\sqrt{2}}(\bar{\lambda}_1 + i\bar{\lambda}_2)\Psi_{2-}^\dagger + \varepsilon M\bar{\Psi}_{1+}^\dagger\Psi_{2-}^\dagger -$$

$$- \frac{im_\mu}{\sqrt{2}}(\bar{\lambda}_1 + i\bar{\lambda}_2)_- \Psi_{2+}^\dagger - \frac{im_e\varepsilon}{\sqrt{2}}(\bar{\lambda}_{1+} + i\bar{\lambda}_{2+})\Psi_{1-}^\dagger. \quad (36)$$

Сравнивая (34) с (36), находим, что

$$\alpha_{+1} = 0, \quad g\alpha_{+2} = m_\mu, \quad g\alpha_{-2} = M, \quad g\alpha_{-1} = \varepsilon m_e. \quad (37)$$

Отсюда следует правило сумм

$$M_w^2 = M^2 + m_\mu^2 + \varepsilon^2 m_e^2. \quad (38)$$

Формулы (34), (37) однозначно определяют спектр нейтральных лептонов. Этот спектр содержит второе "нейтрино" и массивные лептоны, которые, однако, не удается отождествить, не вводя в противоречие с экспериментом.

Следовательно, необходимо либо увеличить число мультиплетов, т.е. взять $n \geq 3$, либо, оставив неизменным число заряженных

лептонов, ввести дополнительные нейтральные лептоны, взаимодействующие с $\varphi_{\pm}^{1,2}$. Первая возможность более последовательна, т.к. она позволяет ограничиться лишь минимальным калибровочно инвариантным взаимодействием, не вводя новых безразмерных констант. К сожалению, соответствующие выкладки весьма громоздки, и к настоящему времени еще не закончены. Поэтому мы обсудим здесь вторую, минимальную с точки зрения числа тяжелых лептонов, возможность.

Введем дополнительный киральный синглет $\varphi_{s+} = \varphi_s^+$, взаимодействующий с $\varphi_{\pm 1,2}$

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{1}{4} \{ \varphi_{s+} \varphi_{-s} \}_2 - \varphi_{s+} a_{ij} \varphi_i^+ \varphi_{j+} + \text{з.с.} \quad (39)$$

Дополнительный член содержит значительный произвол, для фиксации которого следует привлечь какие-либо физические соображения.

Мы потребуем, чтобы строго выполнялся закон сохранения лептонного заряда. Сохранение лептонного заряда связано с инвариантностью относительно преобразований:

$$\begin{pmatrix} A_{1+} \\ \Psi_{1+} \\ \bar{F}_{1+} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_{1+} e^{2i\alpha} \\ \Psi_{1+} e^{i\alpha} \\ \bar{F}_{1+} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} A_{1,2-} \\ \Psi_{1,2-} \\ \bar{F}_{1,2-} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_{1,2-} \\ \Psi_{1,2-} e^{i\alpha} \\ \bar{F}_{1,2-} e^{2i\alpha} \end{pmatrix} \quad (40)$$

$$\begin{pmatrix} A_{2+} \\ \Psi_{2+} \\ \bar{F}_{2+} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_{2+} \\ \Psi_{2+} e^{-i\alpha} \\ \bar{F}_{2+} e^{-2i\alpha} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} A_{s-} \\ \Psi_{s-} \\ \bar{F}_{s-} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_{s-} e^{2i\alpha} \\ \Psi_{s-} e^{-i\alpha} \\ \bar{F}_{s-} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} A_{\mu} \\ \lambda_{+} \\ \mathcal{D} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_{\mu} \\ \lambda_{+} e^{i\alpha} \\ \mathcal{D} \end{pmatrix}$$

Лептонные заряды выбраны так, что при спонтанном нарушении симметрии лептонный заряд по-прежнему сохраняется. Требование сохранения лептонного заряда приводит к условиям: $\alpha_{11} = \alpha_{21} = \eta_{11} = \eta_{22} = 0$. Оставшийся произвол в выборе параметров η, ξ позволяет подобрать их таким образом, чтобы устойчивый экстремум достигался при значениях α_{12} , определяемых формулой (36). При этом массы всех скалярных мезонов, кроме трех голдстоуновских частиц, устраняемых калибровочным преобразованием, могут быть сделаны большими.

Спектр масс нейтральных лептонов определяется квадратичной формой

$$\begin{aligned}
 & -m_e \bar{\psi}_1' \psi_1' + \varepsilon M \bar{\psi}_1' \psi_{2-} + (g^2 + g_1^2)^{1/2} g^{-1} \bar{N} (M \psi_{2-}' + m_\mu \psi_{2+}' + m_e \psi_1') - \\
 & - g^{-1} \{ a_{12} m_\mu \bar{\psi}_5 \psi_{1-} + (a_{22} M + a_{12} \varepsilon m_e) \bar{\psi}_5 \psi_{2+} + a_{22} m_\mu \bar{\psi}_5 \psi_{2-} \},
 \end{aligned} \quad (41)$$

где N — комбинация λ и λ_3 , ортогональная ν .

Если наложить на параметры a_{12} и a_{22} условие

$$m_e M (1 - \varepsilon^2) (a_{22} M + a_{12} \varepsilon m_\mu) + m_\mu^2 M \varepsilon a_{12} - m_\mu^2 m_e a_{22} = 0,$$

то диагонализация приводит к следующему спектру:

два двухкомпонентных нейтрино с нулевыми массами и два дираковских фермиона с массами

$$M_1 \approx (g^2 + g_1^2)^{1/2} g^{-1} M, \quad M_2 \approx a_{12} g^{-1} \varepsilon m_\mu^2 m_e^{-1}.$$

Если параметры ε и a_{12} удовлетворяют условиям

$$m_e m_\mu^{-1} \ll \varepsilon \ll 1, \quad a_{12} \gtrsim g,$$

то массы дираковских фермионов велики $M_i \gg m_\mu$. При том же условии $\nu_1 \approx \psi_{1-} + \psi_{1-}'$ и может быть отождествлено с электронным нейтрино, а $\nu_2 \approx N$. Условие $g \ll g_1$, обеспечивающее универсальность взаимодействия электрона и μ -мезона, гарантирует в то же время, что новое "нейтрино" N участвует лишь в сверхслабом взаимодействии.

Универсальность слабого взаимодействия e, μ достигается при $g \ll g_1$. Однако взаимодействие e, μ со скалярными частицами не может быть сделано универсальным никаким выбором параметров и может в принципе быть ответственным за разность масс $\mu - e$.

Мы не будем здесь более подробно обсуждать физические следствия модели. На этом примере мы хотели продемонстрировать те возможности, которые открывают суперсимметричные калибровочные теории для описания слабых и электромагнитных взаимодействий и в особенности подчеркнуть, что они являются естественным аппаратом для векторно-подобных моделей.

Литература

1. В.А.Гольфанд, В.П.Лихтман. Письма в ЖЭТФ, 13, 452, 1971.
2. В.П.Акулов, Д.В.Волков. Phys.Let. 46B, 109, 1973.
3. J.Wess, B.Zumino.Nucl.Phys. B70, 39, 1974.
4. A.Salam.Proc.of the 8 Nobel Symposium, 1968.
5. S.Weinberg.Phys.Rev.Let. 19, 264, 1967.
6. A.Salam, J.Strathdee, Phys.Rev., II, 1521, 1975.
7. L.Meizincescu, V.Ogievetskyi. Preprint J.I.N.K. E2-8277, 1974.
8. Ф.А.Березин. Метод вторичного квантования. Наука, 1965.
9. J.Illiopoulos, B.Zumino.Nucl.Phys., B76, 310, 1974.
10. J.Wess, B.Zumino, Nucl.Phys., B78, 1, 1974.
11. A.Salam, J.Strathdee, Phys.Let. 51B, 353, 1975.
12. S.Ferrara, B.Zumino, Nucl.Phys. B79, 413, 1974.
13. А.А.Славнов. ТМФ, 23, 3, 1975.
14. А.А.Славнов. Nucl.Phys. B97, 155, 1975.
15. S.Ferrara, P.Figuet. Nucl.Phys. B96, 134, 1976.
16. В.К.Кривошеков, А.А.Славнов, Б.А.Файзуллаев. ТМФ, 26, 147, 1976.
17. P.Fayet, J.Illiopoulos. Phys.Let. 51B, 461, 1974.
18. P.Fayet. Preprint de l'Ecole Normale Supérieure PTENS 75/1
19. S.Brown, L.C.Rafoeartaigh, T.Sherry. Preprint DIAS-TF-75-16
20. W.Bardeen, Cal.Tech. Preprint, 1975.
21. B.de Wit, D.Freedman. Stony Brook reprint
22. D.Capper, A.Salam, J.Strathdee, Preprint IC/76/16.
23. А.А.Славнов. reprint JIWR k2-9389, 1975
24. S.Weinberg, Phys.Rev. 8, 3497, 1973.
25. Б.Воронов, И.Тютин. Письма в ЖЭТФ. 21, 396, 1975.
26. P.Fayet. Nucl.Phys. B90, 164, 1975.
27. H.Fritzsch, M.Gell-Mann, P.Minkowski, Phys.Let. 59B, 256, 1975.
28. A De Rujula, H.Georgi, S.Glashow. Harvard Preprint 1975

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ СУПЕРПОЛЕЙ

В.И.Огиевецкий, Э.Сокачев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

1. Введение

Симметрии между бозонами и фермионами появились сравнительно недавно. Они были предложены Гольфендом и Лихтманом в 1971–72 годах, получили значительное дальнейшее развитие в работах Волкова и Акулова 72–73 г.г., а потом были переоткрыты Вессом и Зумино в 1974 году. Новые симметрии приобрели большую популярность и получили название суперсимметрий. Было создано и исследовано несколько суперсимметричных моделей, в частности, калибровочные теории (Весс, Зумино, Феррара, Салам, Стратди, Фэйе, Славнов, Огиевецкий, Сокачев и др.). Появились обзоры^{1-6/}, содержащие ссылки на литературу.

Однако реалистических суперсимметричных моделей пока нет. Основная трудность состоит в отсутствии адекватного способа нарушения суперсимметрии. Сейчас можно сказать, что младенчество суперсимметрии на исходе. Оно переходит в отрочество, выясняется, что ребенок хоть и красивый, но трудный, что он не совсем вундеркинд, но все-таки, возможно, способен на многое. Требуется дальнейшее изучение существующих проблем, а также систематические поиски новых путей.

В частности, заметим, что пока детально рассматривались преимущественно скалярные суперполя – киральные в модели Весса и Зумино и общие в распространенной суперсимметричной версии теории Янга–Миллса^{4,7/}. Такими суперполями можно описывать только частицы со спинами 0, 1/2 и 1. Однако представляют интерес и высшие суперполя, в особенности спинорное и векторное, которые включают и поля со спинами 3/2 и 2. В работе^{8/} предложена новая общая суперсимметричная версия теории Янга–Миллса (пока не

полностью разработанная). В ней спинорное суперполе играет роль калибровочного суперполя. Векторное суперполе интересно в связи с возможным обобщением теории тяготения. Гравитационное поле можно рассматривать как поле, источником которого служит тензор энергии-импульса. Существует векторное суперполе (супертон)^{9/}, которое объединяет в себе тензор энергии-импульса и спинвекторный ток суперсимметрии. Поэтому теория векторного суперполя с супертонком в качестве источника кажется наиболее экономным суперсимметричным обобщением теории гравитации.

Изучение новых суперполей естественно начинать со свободных уравнений движения для них. До сих пор даже в простейших случаях скалярных суперполей эти уравнения находились путем удачной догадки и объединения большого числа уравнений для компонентных полей. Мы предлагаем общий метод для вывода таких уравнений, основанный на свойствах проекционных операторов и их корней. Этот способ применим и в обычной теории поля.

План этого доклада следующий. После краткого напоминания понятия суперполя излагается метод вывода свободных уравнений движения. Он иллюстрируется на примерах обычных полей со спином $3/2$ и 2 , а потом применяется к спинорному и векторному суперполям. Обсуждаются теория со спинорным калибровочным суперполем и возможное обобщение теории тяготения.

II. Суперполя

Алгебра суперсимметрии состоит из генераторов группы Пуанкаре и спинорных генераторов суперсдвигов S_α *):

$$[S_\alpha, J_{\mu\nu}] = \frac{1}{2} (\gamma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta S_\beta, \quad [S_\alpha, P_\mu] = 0, \quad \{S_\alpha, S_\beta\} = (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} P^\mu. \quad (1)$$

Для реализации этой алгебры вводятся вспомогательные антикоммутирующие спинорные координаты (грассмановы числа) θ_α :

$$\theta_\alpha \theta_\beta + \theta_\beta \theta_\alpha = 0. \quad (2)$$

*) В докладе используются обозначения: $\frac{1}{2} \{J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}\} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+---)$, $J_5 = J_{0123}$, $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}]$, $\varepsilon^{0123} = 1$, $\bar{S}^\alpha = (C^{-1})^{\alpha\beta} S_\beta$, где $C = i \gamma^0 \gamma^2$ — матрица зарядового сопряжения; $p_\mu = i \partial_\mu$, $\square = \partial_\mu^2$.

Далее рассматриваются суперполя - функции координат x и грассмановых переменных θ :

$$\begin{aligned} \varphi_i(x, \theta) = & A_i(x) + \bar{\theta}^\alpha \psi_{\alpha i}(x) + \frac{1}{4} \bar{\theta} \theta F_i(x) + \frac{1}{4} \bar{\theta} \gamma_5 \theta G_i(x) + \\ & + \frac{1}{4} \bar{\theta} \gamma_\mu \gamma_5 \theta A_\mu^i(x) + \frac{1}{4} \bar{\theta} \theta \cdot \bar{\theta}^\alpha \chi_{\alpha i}(x) + \frac{1}{32} (\bar{\theta} \theta)^2 D_i(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Внешний значок i обозначает совокупность лоренцевых индексов (скалярное суперполе $\varphi(x, \theta)$, спинорное - $\varphi_\alpha(x, \theta)$, векторное - $\varphi_\mu(x, \theta)$ и т.д.). Мы будем говорить, что данное суперполе имеет внешний спин J , если оно подчиняется дополнительным условиям, выделяющим представление группы Пуанкаре со спином J по внешним индексам. Например, векторное суперполе с внешним спином 1 удовлетворяет условию $\partial^\mu \varphi_\mu(x, \theta) = 0$ и т.д.

Генераторы S_α реализуются как операторы на суперполях:

$$S_\alpha = i \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha} + \frac{1}{2} (\not{p} \theta)_\alpha \right), \quad (4)$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha}$ обозначает дифференцирование (левое) по грассмановым переменным.

Среди всех операторов, действующих на суперполя, фундаментальную роль играет так называемая спинорная производная

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha} - \frac{1}{2} (\not{p} \theta)_\alpha. \quad (5)$$

Она подчиняется алгебре, изоморфной (I):

$$[D_\alpha, \not{p}_{\mu\nu}] = \frac{1}{2} (\not{p}_{\mu\nu} D)_\alpha, \quad [D_\alpha, p_\mu] = 0, \quad \{D_\alpha, D_\beta\} = p_{\alpha\beta}. \quad (6)$$

Важнейшим свойством D_α является их антикоммутиративность с генераторами S_α

$$\{S_\alpha, D_\beta\} = 0. \quad (7)$$

В силу этого любой оператор, построенный из D_α , перестановочен с суперсдвигами $\delta \varphi_i(x, \theta) = i \bar{\varepsilon}^\alpha S_\alpha \varphi_i(x, \theta)$

(ε_α - антикоммутирующие спинорные параметры). Обратно, можно показать, что любой инвариантный относительно суперсдвигов оператор состоит только из D_α (в частности, обычная производная

∂_μ представима как $\partial_\mu = -\frac{1}{2} \bar{\partial} \not{p}_\mu D$). Поэтому все уравнения движения для суперполей содержат только спинорные производные.

Для построения свободных уравнений движения необходимо знать, какие неприводимые представления суперсимметрии описываются суперполем с заданным внешним спином.

Напомним аналогичную ситуацию с обычными полями. Скалярное и спинорное поля описывают по одному представлению — спин 0 и 1/2, соответственно, а векторное поле $a_\mu(x)$ и поля с большим числом лоренцевых индексов являются уже приводимыми представлениями группы Пуанкаре. Например, поле $a_\mu(x)$ описывает спин 1, выделяемый дополнительным условием $\partial^\mu a_\mu(x) = 0$ и спин 0 при условии $\partial_\mu a_\nu(x) = \partial_\nu a_\mu(x)$. Спинное содержание поля при заданном квадрате импульса (первом операторе Казимира группы Пуанкаре) определяется спектром оператора квадрата спина J^2 , т.е. второго оператора Казимира.

В случае суперсимметрии неприводимые представления задаются оператором квадрата суперспина, связанным с обобщением вектора Паули-Любанского. Представление с суперспином Y (при ненулевом P^2) включает в себя обычные (по группе Пуанкаре) спины (см. напр., ^{14,5/}*)

$$j = Y + \frac{1}{2}, Y, Y, Y - \frac{1}{2}. \quad (8)$$

С другой стороны, суперполе с заданным внешним спином J всегда описывает приводимое представление с суперспинами ^{10/}

$$Y = J + \frac{1}{2}, J, J, J - \frac{1}{2}. \quad (9)$$

Например, скалярное суперполе $\varphi(x, \theta)$ содержит суперспины 0, 0 и 1/2, спинорное $\varphi_\alpha(x, \theta)$ — 0, 1/2, 1/2 и 1, векторное $\varphi_\mu(x, \theta)$ (при $\partial^\mu \varphi_\mu = 0$) — 1/2, 1, 1 и 3/2 и т.д. Выделение того или иного неприводимого представления осуществляется проекционными операторами, построенными на основе оператора квадрата суперспина ^{10/}. Приведем некоторые из них, необходимые для дальнейшего:

скалярное суперполе, суперспин 1/2

$$\Pi_{1/2} = 1 - \frac{1}{4\rho^2} (\bar{\partial} \partial)^2; \quad (10)$$

спинорное суперполе, суперспин 1

*) При $m = 0$ суперспин заменяется суперспиральностью Λ и представление с данным Λ содержит спиральности $\lambda = \Lambda + \frac{1}{2}, \Lambda$.

$$(\Pi_1)_\alpha{}^\beta = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{4\rho^2} (\bar{\partial}\partial)^2\right) 1_\alpha{}^\beta - \frac{1}{8\rho^2} \beta_\mu \bar{\partial}_1 \gamma_{\nu\mu} \partial (\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta; \quad (II)$$

векторное суперполе, суперспины 3/2 и 0

$$(\Pi_{3/2})_{\mu\nu} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{4\rho^2} (\bar{\partial}\partial)^2\right) \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\beta_\mu \beta_\nu}{\rho^2}\right) + \frac{i}{6\rho^2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta} \rho^2 \bar{\partial}_1 \gamma^\lambda \mu_5 \partial; \quad (I2)$$

$$(\Pi_0)_{\mu\nu} = \frac{\beta_\mu \beta_\nu}{\rho^2} \frac{(\bar{\partial}\partial)^2}{4\rho^2}. \quad (I3)$$

Тот факт, что данное суперполе описывает определенное неприводимое представление, может быть записан и в виде дифференциальных дополнительных условий $\sqrt{10}$. Мы приведем здесь только условия, соответствующие проекционным операторам (I0) и (II) и (I2):

$$\Pi_{1/2} \varphi = \varphi \Leftrightarrow \bar{\partial}\partial \varphi = 0 \quad (I0')$$

$$(\Pi_{1/2})_\alpha{}^\beta \psi_\beta = \psi_\alpha \Leftrightarrow \bar{\partial}\partial \psi_\alpha = 0, \quad \bar{\partial}^* \psi_\alpha = 0 \quad (II')$$

$$(\Pi_{3/2})_{\mu\nu}{}^\rho \varphi_\rho = \varphi_\mu \Leftrightarrow (\gamma^\mu \partial)_\alpha \varphi_\mu = 0. \quad (I2')$$

III. Уравнения движения

Сначала мы перечислим некоторые характерные особенности известных уравнений движения для обычных полей, а потом перенесем их на суперполевой случай.

В теории поля принято описывать частицы с помощью полей — функций координат $\varphi_i(x)$, которые преобразуются по некоторым представлениям группы Лоренца (i обозначает совокупность лоренцевых индексов). Если к генераторам группы Лоренца добавить еще и P_μ , реализованный как $i\partial_\mu$, получатся представления группы Пуанкаре, которые обязательно приводимы (хотя бы потому, что значение P^2 не фиксировано). С другой стороны, однако, естественно связывать такие характеристики частиц, как массу и спин, с неприводимыми представлениями группы Пуанкаре. Поэтому необходимо наложить ряд условий на функции

$\varphi_i(x)$, которые выделяют неприводимые представления. В первую очередь, — это условие, чтобы импульс частицы находился на массовой поверхности

$$p^2 \varphi_i = m^2 \varphi_i. \quad (14)$$

Далее, в зависимости от лоренцева индекса i , поле может включать один или несколько спинов. Обычно принято описывать одним полем только один спин (как правило, высший, содержащийся в нем). В связи с этим налагаются дополнительные условия

$$R_{ij} \varphi_j = 0, \quad (15)$$

где R_{ij} — набор дифференциальных операторов.

Весьма желательно, чтобы условия (14) и (15) могли бы записываться в виде единого дифференциального уравнения

$$\pi_{ij} \varphi_j = 0, \quad (16)$$

откуда они бы следовали. Например, если описывать спин I векторным полем $a_\mu(x)$, то (14) и (15) выглядят так:

$$\square a_\mu(x) + m^2 a_\mu(x) = 0, \quad \partial^\mu a_\mu(x) = 0.$$

Эта пара уравнений эквивалентна уравнению Прока:

$$\square a_\mu(x) - \partial_\mu \partial^\nu a_\nu(x) + m^2 a_\mu(x) = 0. \quad (17)$$

Если такая единая запись (14) и (15) не обеспечена, то при включении взаимодействий возникают большие затруднения, иногда и противоречия.

Наконец, порядок оператора π_{ij} в (16) должен быть не-высоким. Принято, чтобы уравнения для бозонов были второго порядка, а для фермионов — первого.

Как находить уравнения типа (16), удовлетворяющие всем перечисленным требованиям? Вернемся к уравнению Прока (17), которое запишем в виде

$$-\square (\Pi_1)_{\mu}^{\nu} a_{\nu} = m^2 a_{\mu}, \quad (18)$$

где

$$(\Pi_1)_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} -$$

проекционный оператор, выделяющий спин I. Тогда ясно, что поле

$a_\mu(x) = -\frac{\square}{m^2} (\Pi_1)_\mu^\nu a_\nu(x)$ удовлетворяет дополнительному условию (типа (I5)) $\partial^\mu a_\mu(x) = 0$, а если так, то $(\Pi_1)_\mu^\nu a_\nu = a_\mu$ и (I8) сводится к (I4).

Отсюда следует общая идея. Если Π_{ij} — проекционный оператор, выделяющий из поля $\varphi_i(x)$ интересующее нас представление, то мы умножаем его на $-\square$ в необходимой степени q , чтобы погасить его нелокальность, и пишем уравнение

$$(-\square)^q \Pi_{ij} \varphi_j = (m^2)^q \varphi_i. \quad (I9)$$

Тем самым достигнуто выделение данного неприводимого представления. Однако уравнение (I9) может оказаться слишком высокого порядка. Тогда, если, например $q = 2$, а нам необходимо уравнение второго порядка, мы можем найти (вообще говоря, неоднозначно) оператор $\pi = \sqrt{(-\square)^2 \Pi}$ со свойством

$$\pi_{ij} \pi_{jk} = (-\square)^2 \Pi_{ik} \quad (20)$$

и написать уравнение нужного порядка

$$\pi_{ij} \varphi_j - m^2 \varphi_i = 0. \quad (2I)$$

Оно также выделяет неприводимое представление, поскольку из него следует (I9):

$$(-\square)^2 \Pi_{ij} \varphi_j = \pi_{ik} \pi_{kj} \varphi_j = \pi_{ik} (m^2 \varphi_k) = m^4 \varphi_i.$$

В более сложных случаях придется извлекать корень более высокой степени, чтобы понизить достаточно порядок уравнения.

Простейшей иллюстрацией этого приема является уравнение Дирака. Поскольку биспинорное поле $\psi_\alpha(x)$ описывает только спин 1/2, то проекционный оператор равен просто $\mathbb{1}$, т.е. (I9) записывается как (I4):

$$-\square \psi_\alpha(x) = m^2 \psi_\alpha(x).$$

Так как нам необходимо уравнение первого порядка, мы находим π_α^β

$$\pi = \sqrt{-\square} = i \not{\partial}$$

и получаем знакомое всем уравнение Дирака

$$i \not{\partial} \psi - m \psi = 0.$$

Нетривиальным примером применения предлагаемого "корневого метода" является вывод других известных свободных уравнений движения. Так, спин 3/2 обычно описывают спин-векторным полем $\Psi_{\alpha\mu}(\chi)$. Наряду со спином 3/2 это поле включает два спина 1/2. Дополнительные условия, исключающие спины 1/2, записываются

$$\partial_\mu \Psi_\alpha^\mu = 0, \quad (g_\mu \Psi^\mu)_\alpha = 0.$$

Чтобы найти уравнения движения, содержащие в себе эти дополнительные условия, рассмотрим проекционный оператор, выделяющий представление группы Пуанкаре со спином 3/2 у поля $\Psi_{\alpha\mu}$. Он имеет вид

$$P_{\mu\nu, \alpha\beta} = g_{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta} - \frac{2}{3} \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} (g_\mu g_\nu)_{\alpha\beta} + \left[\frac{2}{3} (g_\nu \partial_\mu - g_\mu \partial_\nu) \right]_{\alpha\beta}. \quad (22)$$

Следуя нашей процедуре, определим локальный оператор $(-\square)P_{\mu\nu, \alpha\beta}$. Он содержит вторые производные. Поэтому для получения уравнения первого порядка ($\Psi_{\alpha\mu}$ — фермионное поле) надо извлечь квадратный корень из $(-\square)P_{\mu\nu, \alpha\beta}$. Существует однопараметрическое семейство таких корней, допускающее добавок замены $\Psi_\mu \rightarrow \Psi_\mu + \beta g_\mu g^\nu \Psi_\nu$, где β — параметр. Требуя, чтобы искомое уравнение соответствовало вариационному принципу с эрмитовой плотностью лагранжиана, мы находим семейство уравнений Рарита-Швингера

$$(\partial - m)\Psi_\mu - \alpha(\partial_\mu g^\nu \Psi_\nu + g_\mu \partial^\nu \Psi_\nu) + \frac{3\alpha^2 - 2\alpha + 1}{2} g_\mu \partial^\nu \partial^\lambda \Psi_\nu + (3\alpha^2 - 3\alpha + 1)m g_\mu g^\nu \Psi_\nu = 0, \quad (23)$$

где α — произвольный вещественный параметр.

Аналогично, при описании спина 2 симметричным тензорным полем $h_{\mu\nu}$ следует исключить содержащиеся в нем "лишние" спины 0 и 1. Соответствующие дополнительные условия

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0, \quad h^\mu{}_\mu = 0$$

должны следовать из уравнений движения. Выделяющий спин 2 проекционный оператор имеет вид $(\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square})$

$$P_{\mu\nu, \lambda\rho} = \frac{1}{2} \bar{h}_{\mu\lambda} \bar{h}_{\nu\rho} + \frac{1}{2} \bar{h}_{\mu\rho} \bar{h}_{\nu\lambda} - \frac{1}{3} \bar{h}_{\mu\nu} \bar{h}_{\lambda\rho} \quad (24)$$

и имеет члены $\sim \square^{-2}$. Локализуем его, введя $(-\square)^2 P$. Чтобы

получить уравнения второго порядка, извлечем квадратный корень из $(-\square)^2 \Pi$. Из полученного семейства уравнений, привлекая еще замены $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \beta \eta_{\mu\nu} h^\lambda{}_\lambda$, выделим те уравнения, которые могут быть получены из эрмитового лагранжиана. В результате мы приходим к известному семейству уравнений Фирца-Паули для симметричного тензорного поля.

$$\square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\lambda h_{\lambda\nu} - \partial_\nu \partial^\lambda h_{\lambda\mu} + \frac{1+\alpha}{1+2\alpha} (\eta_{\mu\nu} \partial^\lambda \partial^\rho h_{\lambda\rho} + \partial_\mu \partial_\nu h^\lambda{}_\lambda) - \frac{2+4\alpha+3\alpha^2}{2(1+2\alpha)^2} \eta_{\mu\nu} \square h^\lambda{}_\lambda - \frac{1+\alpha+\alpha^2}{(1+2\alpha)^2} m^2 \eta_{\mu\nu} h^\lambda{}_\lambda + m^2 h_{\mu\nu} = 0. \quad (25)$$

Итак, все известные свободные уравнения поля получаются обсуждаемой процедурой.

Наконец, несколько слов о безмассовом случае. Обычно уравнения для этого случая получают, полагая $m = 0$ в массивных уравнениях. Что происходит при этом с условиями неприводимости? Во-первых, нужно отметить, что из безмассовых уравнений больше не следуют условия типа (I4) и (I5). Во-вторых, сам характер представлений при $m = 0$ сильно меняется и старые условия (I5) теряют смысл. Взамен им возникает одна или несколько калибровочных инвариантностей уравнения, которые делают лишние степени свободы полностью произвольными, тем самым исключая их из теории. Например, уравнение Прока (I7) приобретает при $m = 0$ инвариантность относительно калибровочного преобразования

$$a_\mu(x) \rightarrow a_\mu(x) + \partial_\mu \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция. Уравнения Рарита-Швингера (23) инвариантны при $m = 0$ относительно замены

$$\psi_\mu(x) \rightarrow \psi_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x) + \frac{\alpha-1}{2\alpha} \partial_\mu \lambda(x)$$

с произвольной спинорной функцией $\lambda(x)$ и т.д.

Теперь мы можем перенести все эти соображения и идеи на суперполевой случай. Отметим только одну особенность. Любое суперполе включает в себя как бозоны, так и фермионы, поэтому нельзя однозначно указать нужный порядок суперполевых уравнений. Здесь помогают следующие соображения. Наши уравнения должны вытекать из вариационного принципа ^{/II,5/} с функционалом действия

$$S = \int d^4x d^4\theta \mathcal{L}(x, \theta). \quad (26)$$

Напомним, что интегрирование в (26) грассманоно^{12/}, т.е.

$\int d\theta_\alpha d\theta^\beta = \delta_\alpha^\beta$, а это означает, что размерность $[d\theta] = -1/2$ (в см), тогда как $[\theta] = +1/2$. Отсюда следует, что $[\mathcal{L}] = -2$, поскольку $[S] = 0$. (в единицах $\hbar = c = 1$). Запишем кинетический член лагранжиана в виде

$$\mathcal{L}_K = \varphi_i \pi_{ij} \varphi_j,$$

где π_{ij} - оператор свободного уравнения. Тогда

$$[\pi] = -2 - 2[\varphi]. \quad (27)$$

Наконец, размерность суперполя мы связываем с размерностью поля с ведущим спином в нем. Понясим это на примере общего скалярного суперполя $\varphi(x, \theta)$. Пусть мы интересуемся высшим суперспином $Y = 1/2$, включающим в себя ведущий спин 1. Этот спин содержится в поле $A_\mu(x)$ (см. разложение (3)) и мы полагаем, что оно должно иметь правильную каноническую размерность см^{-1} . Отсюда размерность суперполя равна 0 и, согласно (27), $[\pi] = -2$. Такую размерность имеет оператор

$$\pi = (-\square) \Pi_{12} \quad (\text{см. (10)}),$$

и мы получаем уравнение^{2,5/}

$$(\square + \frac{1}{4}(\bar{\partial}\partial)^2)\varphi + m^2\varphi = 0. \quad (28)$$

Как и следовало ожидать, из (28) при $m \neq 0$ следует условие неприводимости (10'), а при $m = 0$ возникает калибровочная инвариантность

$$\varphi \rightarrow \varphi + \bar{\partial}\partial A,$$

где $A(x, \theta)$ - произвольная скалярная суперфункция. Расписанное по компонентам, (28) сводится к набору обычных уравнений для вектора, скаляра и двух спиноров (при $m = 0$ - для вектора и спинора).

Перейдем теперь к приложениям.

IV. Спинорное суперполе

Спинорное суперполе $\psi_\alpha(x, \theta)$ содержит высший суперспин I и ведущий спин 3/2, включенный в спинвекторное поле $\psi_{\alpha\mu}(x)$ (коэффициент при $\bar{\theta}_{\mu} \gamma_5 \theta$ в разложении (3)). Принимая размерность этого поля канонической, $\text{см}^{-3/2}$, заключаем, что размерность суперполя есть $\text{см}^{-1/2}$ и, согласно (27), оператор уравнения должен иметь размерность см^{-1} . У локализованного проекционного оператора (II) размерность см^{-2} , поэтому из него нужно извлекать корень. Существует целое семейство таких корней. Все они связаны между собой преобразованиями

$$\psi(x, \theta) \rightarrow e^{a\gamma_5} \psi(x, e^b \theta), \quad a, b - \text{параметры,}$$

поэтому мы выбираем один из них и составляем уравнение

$$\pi \psi \equiv \frac{1}{8} (6 \cdot \not{\partial} + \not{\partial} \not{\partial} + 3 \gamma_5 \not{\partial} \gamma_5 \not{\partial} - i \gamma_\mu \gamma_5 \not{\partial} i \gamma_\mu \gamma_5 \not{\partial}) \psi = m \psi. \quad (29)$$

Тот факт, что в уравнение (29) входит оператор $\pi = \sqrt{-\square} \not{\partial}$, позволяет легко найти обратный оператор

$$\frac{1}{\pi - m} = (\pi + m) \frac{1 + \frac{\square}{m^2} (1 - \pi)}{\square + m^2},$$

необходимый для вычислений по теории возмущений.

Уравнению (29) соответствует функционал действия

$$S = \int d^4x d^4\theta \mathcal{L}(x, \theta) = \frac{1}{2} \int d^4x d^4\theta \bar{\psi} (\pi - m) \psi. \quad (30)$$

Пользуясь алгебраическими свойствами производных $\mathcal{D}_\alpha^{1/4}$ и интегрируя по частям, можно представить лагранжиан в более удобной форме

$$\mathcal{L} = \frac{1}{32} [\bar{\psi} \not{\partial} \psi - \frac{1}{2} (\bar{\partial}_\mu \psi)^2 + \frac{1}{12} (\bar{\partial}_{\mu\nu} \psi)^2] - \frac{1}{2} m \bar{\psi} \psi. \quad (31)$$

Далее следует расписать уравнение (29) по компонентам и сделать подходящие замены переменных, после чего получаются правильные уравнения для всех нужных полей. Эта процедура длинная и утомительная, и мы не будем излагать ее здесь. Отметим только,

что при $m = 0$, после надлежащих замен переменных остаются уравнение Рарита-Швингера для результирующего спинвекторного поля и уравнение Прока для результирующего векторного поля. Все остальные степени свободы либо обращаются в ноль, либо выпадают из уравнений в силу калибровочной инвариантности. Уравнение (29) при $m = 0$ допускает два типа калибровочных преобразований:

$$\psi_\alpha(x, \theta) \rightarrow \psi_\alpha(x, \theta) + \mathcal{D}_\alpha \Lambda(x, \theta) \quad (32)$$

$$\psi_\alpha(x, \theta) \rightarrow \psi_\alpha(x, \theta) + (i \not{\partial} \gamma_5 \mathcal{D})_\alpha \Sigma(x, \theta), \quad (33)$$

где $\Lambda(x, \theta)$ и $\Sigma(x, \theta)$ — произвольные скалярные суперполя. Первое из них — (32) — является прямым аналогом калибровочного преобразования векторного поля $a_\mu(x) \rightarrow a_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x)$ и будет использовано нами в теории калибровочного спинорного суперполя. Преобразование (33) связано с калибровочной свободой уравнения Рарита-Швингера.

У. Калибровочная теория со спинорным суперполем

В теории поля возможен только один тип калибровочных теорий — теории Янга-Миллса, в которых параметры преобразований внутренних симметрий заменяются скалярными функциями. В теории суперполя оказываются возможными два типа калибровочных теорий в соответствии с тем, что можно рассматривать два вида скалярных суперфункций: киральные (суперспин 0) и общие (суперспин 1/2 и 0).

Первый случай широко рассматривается в литературе^{/7/}, на этой конференции о нем рассказывает А.А.Славнов. В теориях первого типа параметры преобразований внутренних симметрий λ_i заменяются на произвольные киральные скалярные суперфункции $\lambda_i(x, \theta)$. В качестве калибровочного суперполя выступает общее скалярное суперполе $V(x, \theta)$. Оно преобразуется нелинейно

$$(\exp V(x, \theta))' = \exp(-i \not{\Lambda}^* \gamma_5 \theta) \exp V(x, \theta) \exp i \not{\Lambda} \gamma_5 \theta \quad (34)$$

и нелинейно же входит в лагранжиан. Это калибровочное суперполе содержит векторное поле Янга-Миллса и калибровочное спинорное поле. Заметим, что такая теория напоминает квази-янг-милловский

случай в теории поля^{/13/}, где также можно определить "векторное" поле

$$V_\mu = -\frac{i}{g} \exp(-ig\varphi(x)) \partial_\mu \exp(ig\varphi(x)), \quad (35)$$

которое преобразуется по янг-миллсовскому закону, если калибровочное скалярное поле $\varphi(x)$ преобразуется нелинейно:

$$(\exp(ig\varphi))' = \exp(ig\varphi) \cdot \exp(i\lambda). \quad (36)$$

Однако преобразование (36) делает поле $\varphi(x)$ совершенно произвольным и теория с полем V_μ (35) становится бессодержательной. С другой стороны, преобразование (34) затрагивает не все калибровочное суперполе $V(x, \theta)$, а только его киральную часть, и такая теория имеет смысл.

Мы будем обсуждать второй случай. Ему отвечает более общая калибровочная суперсимметричная теория^{/8/}, в которой внутренняя симметрия реализуется локально в суперпространстве (x, θ) наиболее общим способом. При этом параметры преобразований являются скалярными суперфункциями общего вида, а не только киральными. Роль калибровочного суперполя играет спинорное майорановское суперполе, включающее векторное поле янга-Миллса и поле со спином 3/2. Лагранжиан и уравнения движения содержат калибровочное суперполе полиномиально.

Рассмотрим набор суперполей $V_m(x, \theta)$, преобразующихся по некоторому представлению группы внутренних симметрий с генераторами $(T_i)_{mn}$

$$V_m'(x, \theta) = [\exp(i\lambda_i T_i)]_{mn} V_n(x, \theta). \quad (37)$$

Инвариантный лагранжиан для этих свободных суперполей включает сами поля и дифференциальные операторы, составленные из спинорных производных.

В полной аналогии с янг-миллсовским подходом заменим константные параметры λ_i в (37) на произвольные скалярные суперфункции $\Lambda_i(x, \theta)$

$$V_m'(x, \theta) = [\exp(i\Lambda_i(x, \theta) T_i)]_{mn} V_n(x, \theta). \quad (38)$$

Эти преобразования образуют группу, так как произведение скаляр-

ных суперфункций есть снова скалярная суперфункция. Тем самым достигнута наиболее общая локализация в суперпространстве группы внутренних симметрий.

Как и в теории Янга-Миллса, можно определить удлиненную ковариантную производную

$$\Delta_\alpha V_m(x, \theta) = (\mathcal{D}_\alpha + ig \Psi_{\alpha i}(x, \theta) T_i)_{mn} V_n(x, \theta). \quad (39)$$

Здесь введено спинорное "компенсирующее" суперполе

$$\Psi_\alpha(x, \theta) = \Psi_{\alpha i}(x, \theta) t_i,$$

где t_i - генераторы присоединенного представления группы. Нетрудно проверить, что $\Delta_\alpha V_m$ преобразуется по тому же закону (38), что и само суперполе V_m , если $\Psi_\alpha(x, \theta)$ преобразуется по закону

$$\begin{aligned} \Psi'_\alpha(x, \theta) = & e^{ig\Lambda(x, \theta)} \Psi_\alpha(x, \theta) e^{-ig\Lambda(x, \theta)} - \\ & - \frac{i}{g} e^{ig\Lambda(x, \theta)} \mathcal{D}_\alpha e^{-ig\Lambda(x, \theta)}. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь $\Lambda(x, \theta) = \Lambda_i(x, \theta) t_i$. Групповое свойство преобразований (40) очевидно.

Теперь легко построить лагранжиан для суперполей V_m , инвариантный относительно калибровочных преобразований (38). Для этого достаточно удлинить все спинорные производные \mathcal{D}_α в исходном лагранжиане по правилу (39). Тем самым мы включаем инвариантное взаимодействие с калибровочным суперполем. Осталось написать инвариантный относительно (40) лагранжиан самодействия для самого калибровочного суперполя Ψ_α . Отправляясь от свободного лагранжиана (31), можно доказать, что он существует и фиксируется в виде

$$\mathcal{L}_c = \frac{1}{32} T_c \left\{ \bar{\Psi}_i \gamma^\mu \Psi - \frac{1}{2} [(\bar{\mathcal{D}} + ig \bar{\Psi}) \not{D}_\mu \Psi]^2 + \frac{1}{12} [(\bar{\mathcal{D}} + ig \bar{\Psi}) \not{D}_{\mu\nu} \Psi]^2 \right\}, \quad (41)$$

где T_c означает след по индексам внутренней симметрии.

Последний член в (41) инвариантен сам по себе, $(\bar{\psi} + i g \bar{\psi}) \sigma_{\mu\nu} \psi$ есть $\sigma_{\mu\nu}$ — компонента в разложении антикоммутатора спинорных ковариантных производных (39). Коэффициент $1/12$ выбран по тем соображениям, чтобы уравнение для свободного суперполя сводилось к уравнению Прока для безмассового векторного поля и уравнению Рарита-Швингера для безмассового спинвекторного поля.

Следует сказать, что в обсуждаемой теории могут возникнуть затруднения. В свободном случае, когда $g = 0$, действие инвариантно не только относительно преобразования $\psi'_\alpha = \psi_\alpha + \partial_\alpha \Lambda$, вытекающего из (40), но и относительно преобразований (33). Нам неизвестно, можно ли обобщить эту вторую инвариантность на случай взаимодействия. Здесь есть над чем подумать. Именно вторая инвариантность связана с отсутствием массы у спин-векторного поля.

VI. Векторное суперполе

Наш интерес к векторному супер полю $\hat{h}_\mu(x, \theta)$ продиктован надеждой построить простейшую суперсимметричную версию теории тяготения. Ясно, что если мы верим в суперсимметрию, то в них следует включить как-то и гравитационное поле^{/14/}. В литературе часто обсуждается подход^{/15/}, связанный с переносом на суперпространство (x, θ) идей Римановой геометрии, на нашем совещании об этом рассказывает Д.В. Волков. Обозначим через $Z^M = (x^\mu, \theta^\alpha)$ "точку" в суперпространстве; после введения "метрического тензора" $g_{MN}(Z)$ можно формально развить суперпространственный аналог Римановой геометрии. Отметим, что $g_{MN}(Z)$ состоит фактически из высших суперполей: тензорного $g_{\mu\nu}(x, \theta)$, спинвекторного $g_{\mu\alpha}(x, \theta)$ и спин-спинового $g_{\alpha\beta}(x, \theta)$. Эти суперполя могут описывать высшие спины (например, $g_{\mu\nu}(x, \theta)$ может содержать спин 3 и спин 5/2 и так далее), и необходимо внимательно анализировать уравнения движения для полей. Они не должны содержать все спины 3, 5/2 и лишние спины 2.

Существует и более "экономный" подход. Уравнения Эйнштейна представимы в виде и могут быть выведены^{/16/} как уравнения для тензорного поля $\hat{h}_{\mu\nu}(x)$, источником которого служит тензор

энергии-импульса $\Theta_{\mu\nu}(x)$ всех полей, включая гравитационное ($\partial^\mu \Theta_{\mu\nu} = 0$)

$$\square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\lambda h_{\lambda\nu} - \partial_\nu \partial^\lambda h_{\lambda\mu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\lambda \partial^\sigma h_{\lambda\sigma} + \partial_\mu \partial_\nu h^\lambda{}_\lambda - \eta_{\mu\nu} \square h^\lambda{}_\lambda = \alpha \Theta_{\mu\nu}. \quad (42)$$

При действии на это уравнение оператором ∂^μ левая часть обращается в нуль тождественно, а правая — в силу уравнений движения. Константа связи α имеет размерность см (в единицах $\hbar = c = 1$) и равна корню из константы Эйнштейна κ , $\alpha^2 = \kappa$. Тензор $\Theta_{\mu\nu}$ существенно нелинейно зависит от гравитационного поля $h_{\mu\nu}$: отбрасывая от свободных уравнений для $h_{\mu\nu}$, строим для них тензор энергии-импульса, вводим его в уравнение, оно перестает быть свободным, исправляем $\Theta_{\mu\nu}$ членами первого порядка, и продолжая итерации, приходим к уравнениям Эйнштейна в форме (42).

Такая полевая трактовка обобщается на случай суперсимметрий следующим образом. Тензор энергии-импульса входит вместе со спин-векторным током суперсимметрии в единое вещественное векторное суперполе — суперток $V_\mu(x, \theta)$. Этот замечательный факт установили Феррара и Зумино^[9]. В непосредственной аналогии с только что сказанным об уравнениях Эйнштейна можно предположить, что суперсимметричная версия теории тяготения есть теория вещественного векторного суперполя $h_\mu(x, \theta)$, источником в уравнениях для которого служит суперток.

Иными словами, мы предполагаем, что уравнение для гравитационного суперполя имеет вид

$$\pi_\mu{}^\nu h_\nu(x, \theta) = \alpha V_\mu(x, \theta), \quad (43)$$

где квадрат константы связи α равен константе Эйнштейна κ , $\alpha^2 = \kappa$, $\pi_{\mu\nu}$ — оператор свободного уравнения, определением которого мы сейчас займемся.

Векторное суперполе $h_\mu(x, \theta)$ содержит в себе симметричное тензорное поле $h_{\mu\nu}(x)$, а суперток $V_\mu(x, \theta)$ — тензор энергии-импульса $\Theta_{\mu\nu}(x)$ (в обоих случаях они входят в коэффициенты при $\bar{\theta} \gamma_{\mu\nu} \theta$, поэтому $h_\mu(x, \theta)$ безразмерно, а $V_\mu(x, \theta)$ имеет размерность см⁻³). Таким образом, уравнение (43) содержит в себе уравнение для тензорного поля, генерируемого тензором энергии-импульса, т.е. оно содержит в себе уравнение Эйнштейна.

Суперток в общем случае подчиняется условию сохранения (в оригинальной работе^[9] использовался спинорный формализм Ван-дер-Вардена) третьего порядка по спинорным производным

$$\partial_\alpha \bar{\partial} \partial V_\mu - 2i \partial_\mu (\gamma^\nu \partial)_\alpha V_\nu = 0, \quad (44)$$

которое содержит в себе условия сохранения тензора энергии-импульса и спинвекторного тока суперсимметрии:

$$\partial^\mu \theta_{\mu\nu}(x) = 0, \quad \partial^\mu J_\mu(x) = 0. \quad (45)$$

Может быть сформулировано и некоторое эквивалентное условие сохранения первого порядка по спинорным производным. Оно записывается в виде

$$(\gamma^\mu \partial)_\alpha V_\mu(x, \theta) = \partial_\alpha S(x, \theta), \quad (46)$$

где $S(x, \theta)$ — некоторое скалярное суперполе с суперспином 0, вид которого зависит от избранной модели. Так, в модели вещественного скалярного суперполя (28)

$$\begin{aligned} V_\mu(x, \theta) = & \bar{\partial} \partial \cdot \partial^\alpha \varphi \cdot \bar{\partial} \partial (\gamma_\mu \gamma_5 \partial)_\alpha \varphi - \\ & - \frac{4}{3} m^2 [\partial^\alpha \varphi (\gamma_\mu \gamma_5 \partial)_\alpha \varphi - 2 \varphi \bar{\partial} \gamma_\mu \gamma_5 \partial \varphi] \end{aligned} \quad (47)$$

и

$$(\gamma^\mu \partial)_\alpha V_\mu = -\frac{4}{3} m^2 \partial_\alpha \bar{\partial} i \gamma_5 \partial (\varphi^2). \quad (48)$$

Если бы в уравнении (46) правая часть обращалась в нуль, то это означало бы, что $V_\mu(x, \theta)$ имело бы чистый суперспин $3/2$ (см. (12')). Наличие правой части в (46) с суперспином 0 означает, что в $V_\mu(x, \theta)$ к суперспину $3/2$ примешивается суперспин 0. Это важное заключение.

Из уравнения (43) будет следовать условие сохранения (44) тогда и только тогда, когда оператор уравнения $\pi_{\mu\nu}$ автоматически удовлетворяет тому же условию

$$\partial_\alpha \bar{\partial} \partial \pi_{\mu\nu} - 2i \partial_\mu (\gamma^\lambda \partial)_\alpha \pi_{\lambda\nu} \equiv 0. \quad (49)$$

При поиске соответствующего $\pi_{\mu\nu}$, основываясь на том, что мы

имеем дело со смесью суперспинов $3/2$ и 0 и что $\pi_{\mu\nu}$ должен иметь размерность см^{-2} , можно снова приобщить к корневому методу. И действительно, полагая, что

$$\pi_{\mu}^{\lambda} \pi_{\lambda\nu} = (-\square) \left(\Pi_{3/2} + \frac{4}{9} \Pi_0 \right)_{\mu\nu}, \quad (50)$$

где $(\Pi_{3/2})_{\mu\nu}$ и $(\Pi_0)_{\mu\nu}$ — проекционные операторы на суперспины $3/2$ и 0 , соответственно (см. (12) и (13)), находим

$$\pi_{\mu\nu} = \frac{1}{6} \left[4(\eta_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) + \eta_{\mu\nu} (\bar{\psi}\psi)^2 + i \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \partial^\lambda \bar{\psi} \gamma^\sigma \psi \right]. \quad (51)$$

далее, уравнение (43) при таком $\pi_{\mu\nu}$ инвариантно с точностью до низшей степени константы связи α относительно калибровочных преобразований (аналогия — $\delta_\epsilon h_{\mu\nu} = \partial_\mu \lambda_\nu + \partial_\nu \lambda_\mu$ в теории тензорного поля)

$$\delta h_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi, \quad (52)$$

где

$$\psi_\alpha = (\gamma^\nu \partial)_\alpha \bar{\psi} \psi_\nu - 2i \partial^\nu \psi_{\nu\alpha}$$

и $\psi_{\nu\alpha}(\alpha, \theta)$ — произвольная калибровочная спинвекторная функция.

Наиболее прямой путь нахождения суперсимметричного аналога уравнения Эйнштейна состоял бы в том, чтобы построить суперток для левой части уравнения (43), подставить его в правую часть (вместе с супертоком для материальных суперполей), вычислить суперток для полученной системы и продолжать эти итерации далее. Такой путь кажется слишком прямолинейным и трудным. Однако основная трудность еще и в том, что не найден алгоритм для вывода супертока. Авторы этого доклада потратили много сил для его нахождения, но пока безуспешно. В работе Феррара и Зумино суперток был угадан для простейших моделей кирального и общего скалярных суперполей.

Вместе с тем, возможен и другой путь осуществления намеченной программы. Этот путь состоит в поиске группы преобразований над суперполями (аналог общековариантной группы), и первые шаги по этому пути сделаны. Рассмотрим вещественное скалярное суперполе и в соответствии с уравнением (43) будем считать, что в низшем порядке его взаимодействие с векторным

суперполем дается в лагранжиане как $a V_{\mu} h^{\mu}$, где V_{μ} - суперток для свободного суперполя (47), т.е. лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\partial}^{\alpha} \bar{\partial}^{\beta} \varphi \partial_{\alpha} \partial_{\beta} \varphi - m^2 \varphi^2 + a V_{\mu} h^{\mu} + \mathcal{L}(h). \quad (53)$$

Чтобы (53) было инвариантно (с точностью до дивергенций обычных и спинорных) относительно (52), необходимо сопроводить его некоторым преобразованием самого скалярного суперполя. В нижнем порядке по константе связи a это преобразование однозначно определяется в виде

$$\delta \varphi(x, \theta) = -a \left[4 \lambda_{\mu}(x, \theta) \partial^{\mu} \varphi(x, \theta) - \bar{\partial}^{\alpha} \lambda_{\mu}(x, \theta) (\bar{\psi}^{\mu} \bar{\partial})_{\alpha} \varphi(x, \theta) - 2 \bar{z}_{\mu}(x, \theta) \bar{\partial}^{\mu} \psi^{\mu} \varphi(x, \theta) - \bar{\partial}^{\alpha} \bar{z}_{\mu}(x, \theta) (\bar{\psi}^{\mu} \bar{\partial})_{\alpha} \varphi(x, \theta) \right], \quad (54)$$

где

$$\lambda_{\mu} = \bar{\partial}^{\mu} \psi_{\mu} \psi, \quad \bar{z}_{\mu} = \bar{\partial}^{\mu} \psi_{\mu} \psi. \quad (55)$$

Знаменательно, что при $\bar{z}_{\mu} = 0$, т.е. когда $\lambda_{\mu}(x, \theta)$ не получает аддитивной добавки, и для не зависящей от x калибровочной суперфункции $\psi_{\mu}(x, \theta) = \psi_{\mu}(\theta)$, $\bar{\partial}^{\alpha} \psi_{\alpha}(\theta) = 0$

согласно (52), преобразование (54) сводится к сдвигам и суперсдвигам! Это находится в точной аналогии с тем, что общековариантное преобразование скалярного поля $\psi(x)$, $\delta \psi(x) = a \lambda_{\mu}(x) \partial^{\mu} \psi(x)$ при $\lambda_{\mu} = \text{const}$ сводится к сдвигам, а аддитивная часть в $\delta h_{\mu\nu}$, равная $\partial_{\mu} \lambda_{\nu} + \partial_{\nu} \lambda_{\mu}$, исчезает.

Отметим, что в модели кирального скалярного суперполя получается таким же образом в точности такой же закон преобразования, что и (54) с единственным отличием в виде дополнительного члена без производных суперполя, связанного с различием размерностей кирального и общего скалярных суперполей.

Важно отметить, что наличие в (54) члена с двумя спинорными производными $\bar{\partial}^{\mu} \psi_{\mu} \bar{\partial}$ от суперполя свидетельствует, что рассматриваемое суперсимметричное обобщение общековариантной группы не сводится к некоторой группе в суперпространстве (x, θ) , а является существенным образом группой преобразований над суперполями. Это нам кажется естественным, так как, скажем, уже в линейной подгруппе $SL(4, R)$ общековариантной группы нельзя определить, согласно Кэртану, спиноров, а в пару (x, θ) входит спинор. По этой причине в теории тяготения для описания спино-

ров приходится вводить тетрадные степени свободы или использовать нелинейные реализации^{/16/}.

Истинное преобразование суперполей будет содержать, кроме (54), члены с высшими степенями гравитационной константы α , нелинейные по гравитационному суперполю. Они пока еще не найдены. Не найдено еще даже мультипликативное преобразование гравитационного суперполя $\lambda_\mu(x, \theta)$. Может оказаться, что истинное нелинейное уравнение, соответствующее (43), несет в себе спонтанное нарушение суперсимметрий.

Возникает много вопросов, ответы на которые предстоит выяснить. Мы не располагаем пока сколько-нибудь полной картиной. В этой части доклада мы описали первые неуверенные шаги, ведущие к соблазнительной, по мнению авторов, цели.

Литература

1. B.Zumino, Proc. XVII Intern. Conf. on High Energy Physics. London, 1974.
2. J.Ne'ess, Fermi-Bose-Supersymmetry, Karlsruhe preprint (1974).
3. L.Corwin, Y.Ne'eman, S.Sternberg, Rev. Mod. Phys. 47, 375 (1975)
4. A.Salam, J.Strathdee, Phys. Rev. D11, 1521 (1975).
5. В.И.Огиевецкий, Л.Мезинческу, УФН, 117, 637 (1975).
6. L.O'Raifeartaigh, Lecture Notes on Supersymmetry, Dublin preprint (1975).
7. J.Ne'ess, B.Zumino, Nucl. Phys. B78, 1 (1974).
S.Ferrara, B.Zumino, Nucl. Phys. B79, 413 (1974).
P.Fayet, J.Lliopoulos, Phys. Lett. B51, 461 (1974).
P.Fayet, Nucl. Phys. B 90, 104 (1975).
А.А.Славнов, ТМФ 23, 3(1975); prepr. JINR E2-8449 (1974), E2-9389 (1975); S.Ferrara, O.Piguet, Nucl. Phys. B93, 261 (1975)
8. В.И.Огиевецкий, Э.Сокачев, Письма в ЖЭТФ 23, 66 (1976).
9. S.Ferrara, B.Zumino, Nucl. Phys. B87, 207 (1975).
10. E.Sokatchev, Nucl. Phys. B99, 96 (1975).
11. L.Mezincescu, V.Ogievetsky, prepr. JINR E2-8277 (1974).
K.Fujikawa, K.Lang, Nucl. Phys. B88, 61 (1975).
S.Ferrara, O.Piguet, Nucl. Phys. B93, 261 (1975).
12. Ф.А.Березин, Метод вторичного квантования, Наука, М., 1965.
13. В.И.Огиевецкий, И.В.Полубаринов, Nuovo Cimento 23, 173 (1962).
14. Д.В.Волков, В.А.Сорока. Письма в ЖЭТФ, 18, 529 (1973).

15. P.Nath, R.Arnowitt, Phys. Letters 56B, 177 (1975),
R.Arnowitt, P.Nath, B.Zumino, Phys. Letters, 56B, 81 (1975).
В.П.Акулов, Д.В.Волков, В.А.Сорока. Письма в ЖЭТФ, 22, 396
(1975).
B.Zumino, prepr. TH.2120 CERN (1975).
16. В.М.Огиевецкий, И.В.Полубаринов. Ann. Phys.(N.Y.) 35, 167(1965)
ЖЭТФ 48, 1625 (1965).

IV.

СОЛИТОНЫ
SOLITONS

В ПОИСКАХ МНОГОМЕРНЫХ СОЛИТОНОВ

Л.Д.Фаддеев

Ленинградское отделение Математического института им.В.А.Стеклова

В последние два года большие усилия многих ученых были направлены на разработку нового теоретического механизма появления спектра масс элементарных частиц. Было показано, что локализованным решениям классических уравнений поля соответствуют частицы в квантовой теории поля. Эти частицы представляют собой когерентные возбуждения фундаментального поля, содержащие бесконечное число частиц, соответствующих ему при квантовании по теории возмущений.

Новые частицы, названные солитонами^{*)}, и их связанные состояния дают богатый спектр масс, который нельзя получить по обычной теории возмущений. Связь локализованных решений и элементарных частиц обсуждалась в литературе уже достаточно давно $/2/ - /4/$. Прогресс в последние два года привел к следующим достижениям:

1. Разработана последовательная схема квантования, основанная на модифицированной теории возмущений, в существенном совпадающей с квазиклассическим методом, распространенным на квантовую теорию поля.

2. Найдены приближенные выражения для масс солитонов, их связанных состояний и их амплитуд рассеяния. При этом выяснилось, что в теории слабо взаимодействующих фундаментальных полей солитоны имеют большие массы и сильно взаимодействуют.

Этим вопросам посвящена значительная и быстро растущая литература. Мы ограничимся ссылками на несколько оригинальных работ $/5/ - /7/$ и обзоры $/8/ - /10/$.

К сожалению, указанные успехи, в основном, достигнуты только на примерах моделей теории поля в двумерном пространстве-времени.

*) Термин "солитон" возник в теории плазмы, используется там для обозначения локализованного решения уравнений движения, происходит от термина "solitary wave" - уединенная волна - и был введен в $/1/$ по причине "очевидной аналогии с элементарными частицами".

Для переноса их на реальный четырехмерный случай необходимо, в первую очередь, иметь достаточно богатый набор примеров локализованных решений классических уравнений теории поля. В четырехмерном случае существует ряд специфических препятствий для существования таких решений. В связи с этим солитонный механизм описания спектра масс элементарных частиц для четырехмерных моделей теории поля пока находится в зачаточном состоянии.

В настоящей лекции я расскажу о ряде приемов, которые уже оказались и могут оказаться еще полезными при поисках многомерных солитонов. Эти приемы разбросаны по многим математическим и физическим работам, зачастую в связи с другими задачами. Мой вклад состоит разве лишь в их систематизации и концентрации вокруг солитонной тематики. На содержание лекции оказали влияние беседы с А.Поляковым и С.Коулменом.

§ 1. Масштабное преобразование и как с ним бороться.

Здесь мы приведем простой довод — почему существование стационарных локализованных решений нелинейных уравнений является скорее правилом для одномерного пространства и исключением для трехмерного пространства. Мы будем при этом рассматривать бозонные поля и считать, что уравнения движения имеют второй порядок.

Рассмотрим систему скалярных и векторных полей, обладающих внутренними степенями свободы. Весь набор этих полей обозначим через $\varphi_a(x)$, так что индекс a относится как к спиновым, так и к внутренним степеням свободы. Стационарные решения реализуют минимум гамильтониана, который мы возьмем в обычной форме: квадратичная форма первых производных + локальная функция полей

$$H(\varphi) = \int \left(\frac{1}{2} \sum \partial_\mu \varphi_a \partial_\mu \varphi_a + V(\varphi) \right) dx = H_1(\varphi) + H_2(\varphi).$$

Различие пространств разной размерности сказывается в разном поведении $H_1(\varphi)$ и $H_2(\varphi)$ по отношению к масштабному преобразованию

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(\lambda x) = \varphi_\lambda(x). \quad (I)$$

Именно,

$$H(\varphi_\lambda) = \lambda^{2-d} H_1(\varphi) + \lambda^{-d} H_2(\varphi),$$

где d — размерность пространства. При $d=1$ первое слагаемое

убывает, а второе растет при росте $1/\lambda$. Тем самым, если φ реализует минимум, то условие стационарности

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} H(\varphi_\lambda) = 0$$

дает обычное вириальное соотношение

$$H_1(\varphi) = H_2(\varphi).$$

При $\beta = 3$ оба слагаемых монотонно растут при росте $1/\lambda$, что показывает, что функционал $H(\varphi)$ не может иметь минимума на функциях φ , для которых $H_1(\varphi)$ и $H_2(\varphi)$ в отдельности конечны. Вот первое препятствие для существования солитонов при $\beta = 3$. Ниже мы обсудим пути его преодоления.

При $\beta = 2$ первое слагаемое не меняется при масштабных преобразованиях. Поэтому, если второе слагаемое отсутствует, то препятствие для существования минимума исчезает. Если такой минимум существует, то вместе с ним есть по крайней мере целая линия φ_λ . Пример такой ситуации мы встретим в следующем параграфе.

Вернемся к случаю $\beta = 3$ и подумаем, как можно поправить дело с тем, чтобы иметь солитоны. Две возможности наиболее очевидны.

1. Включить в гамильтониан члены, содержащие старшие степени производных. Так, гамильтониан $H_2(\varphi)$, содержащий четвертые степени производных, при масштабном преобразовании преобразуется так:

$$H_2(\varphi) \rightarrow \lambda^{4-\beta} H_2(\varphi)$$

и при $\beta = 3$ убывает при росте $1/\lambda$. Ниже мы убедимся, что можно придумать лагранжиан, приводящий к гамильтониану такого типа.

2. Использовать медленно убывающие поля, для которых $H_1(\varphi)$ и $H_2(\varphi)$ в отдельности не конечны. Пример такой ситуации дает лагранжиан, включающий поле материи ψ и поле Янга-Миллса A_μ , имеющие нетривиальную асимптотику при $r \rightarrow \infty$. Если ψ и A_μ убывают медленно, так что $\int |\psi|^2 dx$ расходится, но

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + A_\mu \psi$$

убывает достаточно быстро, так что $\int |\nabla \psi|^2 dx$ сходится, то масштабное преобразование (1) недопустимо. Конечность последнего интеграла будет сохраняться при более корректном масштабном преобразовании

$$\psi(x) \rightarrow \psi(\lambda x); \quad A_r(x) \rightarrow \lambda A_r(\lambda x). \quad (2)$$

При этом преобразовании гамильтонианы поля материи и поля Янга - Миллса меняются следующим образом

$$H(\psi) \rightarrow \lambda^{-1} H(\psi); \quad H(A) \rightarrow \lambda H(A),$$

так что препятствие для существования солитонов исчезает. Именно эта возможность используется при построении монополя т-Хоффа-Полякова.

Другой пример, в котором требуется масштабное преобразование вида

$$A_r(x) \rightarrow \lambda A_r(\lambda x)$$

для поля Янга-Миллса, дает граничное условие типа

$$\oint A_r dx^r = \text{const}, \quad (3)$$

где интеграл берется по контуру, уходящему на бесконечность, от одной из компонент поля Янга-Миллса. Возможность появления такого граничного условия будет обсуждаться в § 3.

Роль масштабных преобразований при обсуждении проблемы существования солитонов, по-видимому, была впервые отмечена Дерриком в [II].

§ 2. Подстановки и как их искать.

С технической точки зрения, основу поисков солитонов составляет удачно найденная подстановка для искомого решения в уравнение движения. Как правило, такая подстановка использует разделение переменных на радиальные и угловые. После подстановки уравнения движения превращаются в систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений по радиальным переменным. Вследствие нелинейности уравнений движения такое разделение переменных основано на искусственных приемах. Следующая теорема помогает подвести под эти приемы научную базу. Мы сформулируем теорему, используя конечномерные обозначения, и не будем делать всех необходимых оговорок.

Пусть дано многообразие X , группа G , действующая на X , и инвариантная функция

$$f(xg) = f(x).$$

Обозначим через X_0 множество всех неподвижных точек группы G в X , т.е. множество точек x_0 таких, что $x_0 g = x_0$ для всех $g \in G$. Теорема. Экстремум f на X_0 является экстремумом f на X .

При приложениях к теории поля роль X играет множество всех полей при фиксированном t , роль f — гамильтониан; в качестве X_0 следует брать множество полей специального вида, используемого при подстановке, а G должно быть подгруппой полной группы инвариантности гамильтониана, по отношению к которой инвариантны поля из X_0 . Теорема позволяет не проверять тот факт, что решение уравнений движения можно искать в виде поля из X_0 . Такая проверка обычно требует громоздких и скучных вычислений.

На роль теоремы при проверке допустимости подстановок в нелинейные уравнения обратил внимание С.Коулмен.

Разберем несколько характерных примеров приложения теоремы. Заодно познакомимся со списком систем полей, которые используют при поисках многомерных солитонов.

1. Нелинейное киральное поле.

Под этим названием в литературе используют поля $q(x)$ со значениями в компактной группе G (ниже — главные киральные поля) или однородном пространстве G/H . Характерным примером во втором случае являются поле $\chi(x)$ со значениями на единичной сфере S^N в пространстве размерности $N+1$, т.е.

$$\chi = (\chi_1, \dots, \chi_{N+1}) \quad , \quad \sum \chi_i^2 = 1.$$

Киральные поля неоднократно возникали в различных областях теории поля (модель мягких пионов Вейнберга, токовая модель Сугавара и т.д.), но, по-видимому, впервые они появились именно в связи с многомерными солитонами в работах Скирма [3] (см. также [2], [13]).

Разберем две подстановки для поля χ .

а) $\mathcal{G} = 2$, $N = 2$. Я люблю обозначение $n(x)$ для этого поля по очевидной ассоциации с направлением в трехмерном пространстве. Будем считать, что гамильтониан для стационарного решения инвариантен относительно изотопических вращений $n \rightarrow Rn$, $R \in O(3)$. Определим группу

$$h(x) \rightarrow R_\alpha(z) h(z^{-1}(z)x).$$

Здесь $x = (x_1, x_2) = (p, \varphi)$; $z(z)x = (p, \varphi + \alpha)$; R_α — вращение вокруг третьей оси во внутреннем пространстве на угол α . Очевидно, что множество инвариантных h -полей дается формулой

$$h = \begin{pmatrix} \sin \theta(p) \cos \varphi \\ \sin \theta(p) \sin \varphi \\ \cos \theta(p) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $\theta(p)$ — произвольная функция такая, что $\theta(0) = n\pi$. Подстановка вида (4) многократно использовалась в литературе, в частности, гамильтониан

$$H = \frac{1}{2\lambda} \int \partial h \cdot \partial h \, d^2x,$$

допустимый в двумерном случае, на h -полях вида (4) принимает вид

$$H = \frac{\pi}{\lambda} \int_0^\infty \left(\theta'^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \rho \, d\rho$$

и допускает семейство солитонов вида

$$\theta(\rho) = 2 \arctan \rho / \rho_0,$$

где ρ_0 — произвольный размерный параметр.

б) $d=3$, $N=3$. Обозначим $\chi = (\vec{\chi}, \chi_0)$. Будем считать, что гамильтониан инвариантен относительно группы $O(4) = O(3) \times O(1)$. Рассмотрим подгруппу G вида

$$\vec{\chi} \rightarrow R\vec{\chi}(R^{-1}x); \quad \chi_0 \rightarrow \chi_0(R^{-1}x), \quad R \in O(3).$$

Множество инвариантных полей дается формулой, аналогичной (4)

$$\vec{\chi} = \sin \theta(z) \frac{\vec{x}}{z}; \quad \chi_0 = \cos \theta(z). \quad (5)$$

Из теоремы Деррика следует, что гамильтониан

$$H = \frac{1}{2\lambda^2} \int \partial \chi \cdot \partial \chi \, d^3x$$

не допускает решений типа солитонов. Они, однако, существуют для гамильтониана Скирма

$$H = \frac{1}{2\lambda^2} \int \gamma \dot{\gamma} d^3x + \frac{\varepsilon^2}{2} \int [(\gamma; \gamma \gamma; \gamma)^2 - (\gamma; \gamma \gamma; \gamma)^2] d^3x.$$

Подстановка (4) приводит H к виду

$$H = 2\pi \int \left[\frac{1}{\lambda^2} (\dot{\theta}^2 + 2 \frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon^2}) + \varepsilon^2 \left(4 \dot{\theta}^2 \frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon^2} + 2 \frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon^2} \right) \right] z^2 dz$$

и соответствующее уравнение движения имеет решение, убывающее на бесконечности.

2. Поле Янга-Миллса.

Рассмотрим стационарное поле Янга-Миллса $A_\mu^a(x)$, ассоциированное с группой $O(3)$, в калибровке $A_0 = 0$. Это поле задается матрицей 3×3 , один из индексов которой — пространственный, а второй — изотопический. Сферически симметричная подстановка определяется действием группы $G = O(3)$,

$$A \rightarrow R A (R^{-1}x) R^{-1}.$$

Общий вид инвариантных полей дается формулой

$$A_\mu^a(x) = X_i X_a f_1(x) + \delta_{ia} f_2(x) + \varepsilon_{iaj} X_j f_3(x).$$

Первые два слагаемых четны, а последнее — нечетно и потому его можно использовать в отдельности в качестве допустимой подстановки. Впервые такая подстановка была использована Янгом и Ву /14/. Теорема Деррика не допускает солитонов такого вида.

3. Монополь т-Хоофта-Полякова /15/, /16/.

Рассмотрим $O(3)$ -поле Янга-Миллса, взаимодействующее с изовекторным полем $\psi(x)$. Из сказанного выше ясно, что подстановка

$$A_0^a(x) = 0; \quad A_i^a(x) = \varepsilon_{iak} X_k f(x); \quad \psi_a(x) = \frac{X_a}{\varepsilon} g(x)$$

не противоречит уравнениям движения, следующим из гамильтониана Хиггса

$$H = \frac{1}{2} \int (\dot{\psi} - A \psi)^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int F_{ik}^2 dx + \frac{\lambda^2}{4} \int (\psi^2 - \varepsilon^2)^2 dx.$$

Гамильтониан H конечен, если ψ и A удовлетворяют граничным

условиям при $z \rightarrow \infty$

$$g(z) \rightarrow a; \quad f(z) \rightarrow z^2/\kappa^2.$$

Масштабное преобразование допустимо только в виде (2) и теорема Деррика не противоречит существованию солитонов.

4. Модель с n -полем.

Рассмотрим модель $O(3)$ поля Янга-Миллса, взаимодействующего с n -полем. Возьмем стационарный гамильтониан в виде

$$H = \frac{1}{2\lambda^2} \int (\partial_\mu n + A_\mu \times n)^2 dx + \frac{1}{4e^2} \int F_{ik}^2 dx.$$

Первое слагаемое дает массу векторным полям, ортогональным полю n , и они быстро убывают при $z \rightarrow \infty$ для любого стационарного решения, если таковые существуют. В то же время компонента (A_μ, n) , параллельная n , остается безмассовой и может медленно убывать. В частности, на нее можно наложить граничное условие типа (3), устранив тем самым препятствие теореме Деррика. К сожалению, удачной подстановки для этой модели пока не найдено.

В заключение отметим, что во всех успешных примерах группа G отождествляла спин и изоспин рассматриваемых полей. Возможность появления полуцелого спина в теории, содержащей поля с полнотелым изоспином, недавно обсуждалась в^{17/}.

§ 3. Топологические заряды и как их определять.

При обсуждении проблемы существования многомерных солитонов все большее значение приобретает факт существования токов, которые сохраняются независимо от уравнений движения. Эти токи не связаны с инвариантностью лагранжиана. Скорее можно сказать, что они связаны со спецификой структуры полей, входящих в лагранжиан. В этом параграфе мы проиллюстрируем эти токи на примерах и объясним, почему их естественно называть топологическими. В следующем параграфе выяснится их роль для солитонов.

I. Скалярное изовекторное поле $\psi = (\psi^1, \psi^2, \psi^3)$.

Рассмотрим выражение

$$J_\mu = \epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} \epsilon^{abc} \partial_\nu \psi^a \partial_\sigma \psi^b \partial_\tau \psi^c.$$

Очевидно, что

$$\partial_\mu J_\mu = 0.$$

Плотность заряда - нулевая компонента J_0 тока J_μ - представляет собой полную дивергенцию

$$J_0 = \partial_i P_i; \quad P_i = \epsilon_{ijk} \epsilon^{abc} \partial_a \psi^b \partial_j \psi^c$$

так что заряд

$$Q = \int J_0 d^3x$$

отличен от нуля, только если поле ψ не исчезает на бесконечно - сти. В частности, для поля ψ из модели т-Хоофта-Полякова

$$Q = 4\pi a^3.$$

2. Модель Хиггса.

Рассмотрим поле Янга-Миллса A_μ^a , связанное с произвольной компактной группой, и скалярное поле ψ^a со значениями в присоединенном представлении. Ток

$$J_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}^a \partial_\mu \psi^a; \quad \partial_\mu \psi^a = \partial_\mu \psi^a + f^{abc} A_\mu^b \psi^c \quad (6)$$

сохраняется. Здесь f^{abc} - полностью антисимметричные структурные константы. Действительно,

$$\partial_\mu J_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho} (\partial_\mu F_{\nu\rho}^a \partial_\mu \psi^a + F_{\nu\rho}^a \partial_\mu \partial_\mu \psi^a).$$

Первое слагаемое справа исчезает в силу тождества Бьянки. Далее, во втором слагаемом $\partial_\mu \partial_\mu \psi^a$ антисимметризуется

$$(\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) \psi^a = f^{abc} F_{\mu\nu}^b \psi^c$$

и в результате оно тоже исчезает.

Плотность заряда J_0 опять является полной пространственной дивергенцией

$$J_0 = \partial_i P_i; \quad P_i = \epsilon_{ijk} F_{kj}^a \psi^a$$

(при проверке опять следует использовать тождество Бьянки). Заряд Q отличен от нуля, только если F и ψ не слишком быстро убывают на бесконечности. Например, $Q \neq 0$, если группа - $O(2)$ и

$$\psi_a = \frac{x_a}{r} g(r), \quad A_\mu^a = \epsilon_{a\mu k} x_k f(r),$$

как это получается у монополя т-Хоффа-Полякова. Заметим, что в этом случае заряды пунктов 1 и 2 эквивалентны.

3. Главное киральное поле.

Пусть $g(x)$ — поле со значениями в группе G . Определим левый ток

$$L_\mu = \partial_\mu g \cdot g^{-1}, \quad (7)$$

задающий матрицу в присоединенном представлении группы G . Ток

$$J_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\sigma} t_2 [L_\nu, L_\sigma] L_\sigma \quad (8)$$

сохраняется. Здесь t_2 — след в присоединенном представлении. Для проверки заметим, что из (7) следует, что

$$\partial_\nu L_\mu - \partial_\mu L_\nu + [L_\nu, L_\mu] = 0$$

и сохранение J_μ следует из тождества Якоби для коммутаторов. Заряд $Q = \int J_0 dx$ принимает (после подходящей нормировки) целые значения для полей $g(x)$, регулярных на бесконечности, т.е. таких, что

$$g(x) \rightarrow g_0,$$

где g_0 — постоянная матрица, и асимптотическое значение принимается достаточно быстро. Мы не будем доказывать этого в общем виде, а рассмотрим только случай группы $SU(2)$.

В этом случае поле $g(x)$ можно параметризовать киральным полем $\chi = (\vec{\chi}, \chi_0)$, $\chi^2 = 1$. Ток (8) эквивалентен току

$$J_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\sigma} \varepsilon^{abcd} \partial_\nu \chi^a \partial_\sigma \chi^b \partial_\sigma \chi^c \chi^d, \quad a, b, c, d = 0, \dots, 3, \quad (9)$$

который сохраняется, так как векторы $\partial_\mu \chi^a$, $a = 0, \dots, 3$ линейно зависимы. Плотность заряда J_0 не может быть выражена как дивергенция несингулярного векторного поля. Если поле χ регулярно, т.е.

$$\chi \rightarrow \chi^0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \chi^{(0)} = (0, 1)$$

и предельное значение достигается достаточно быстро, то оно осуществляет регулярное отображение пространства R^3 на сферу S^3 , при котором окрестность бесконечности в R^3 переходит в фиксированную точку χ^0 на сфере S^3 . Нетрудно убедиться, что $J_0 dx$, в переменных χ переходит в элемент объема на сфере, так

что целое число

$$N = \frac{1}{2\pi^2} \int J_0 d^3x$$

показывает, сколько раз χ пробегает сферу S^2 , когда x меняется в R^3 . Здесь $2\pi^2$ — объем единичной сферы S^3 .

4. Поле направлений $n(x)$.

Для n -поля ток, аналогичный рассмотренному в предыдущем пункте, можно ввести лишь в трехмерном пространстве-времени. Однако целое число можно связать с n -полем и в четырехмерном случае, т.е. для трехмерного пространства. Рассмотрим вектор

$$H_i = \epsilon_{ijk} \epsilon^{abc} \partial_a n^b \partial_j n^c \quad (10)$$

(аналог тока (9)) с нулевой дивергенцией. Существует такой вектор A_i , что

$$H = \text{rot } A.$$

Для регулярного n -поля интеграл

$$\frac{1}{4\pi} \int A \text{rot } A d^3x$$

сходится и принимает целые значения. Эта характеристика n -поля в топологии называется инвариантом Хопфа. Его можно описать и через интегралы от H : по двумерным поверхностям, т.е. инвариант Хопфа, так же как и заряды предыдущих пунктов, имеет локальную плотность.

На этом мы заканчиваем описание примеров топологических зарядов. Эти примеры ясно показывают, как существенно размерность пространства входит в само определение этого понятия. Естественным языком для общего определения является терминология гомотопических групп (см. элементарное изложение в [18]). Отметим важное различие между топологическими зарядами пунктов 1, 2 и пунктов 3, 4. Первые отличны от нуля только для полей, имеющих нетривиальную асимптотику на бесконечности — (монополи, вихри и т.д.). Вторые для самого своего существования требуют, чтобы поля отличались от фиксированного асимптотического значения в основном лишь в локализованной области.

§ 4. Топологические заряды и как их использовать.

Важнейшая роль топологических зарядов для солитонов состоит в том, что солитоны, как правило, обладают ненулевым значением для них. Более того, в хороших случаях топологический заряд дает оценку снизу для энергии стационарных решений с ненулевым его значением. Это свойство можно использовать как для самого доказательства существования солитонов, так и для оценки их массы.

Оценки для нелинейных функционалов, заданных на пространствах функций, допускающих топологические заряды, давно известны в математической литературе (см., например, /19/). Возможность приложения таких оценок к проблеме солитонов упоминалась Скимом /3/ и вновь была возрождена рядом авторов /20/, /21/. В частности, в /20/ показано, что такие оценки позволяют упростить сами уравнения движения для солитонных решений, понижая их порядок.

Проиллюстрируем все эти положения на примерах.

I. n - поле в двумерном пространстве.

Ток (Ю) квадратичен в n -поле и поэтому оценивается через сумму их квадратов - т.е. плотность гамильтониана. Точная оценка получается на основании следующего замечания /20/. Введем векторное изовекторное поле

$$m_i^a(x) = \varepsilon_{ik} \varepsilon^{abc} \partial_k n^b \partial_c n^a.$$

В силу условия $n^2 = 1$ имеем

$$m_i^2 = m_i^a m_i^a = \partial_i n^a \partial_i n^a = \partial n^a \partial n^a.$$

С другой стороны,

$$m_i^a \partial_i n^a = J_i,$$

для тока n -поля. Тривиальное неравенство

$$(\partial_i n^a - m_i^a)^2 \geq 0$$

приводит к оценке

$$J_i \leq \partial n^a \partial n^a,$$

которая становится точной при

$$\partial_i n^a = m_i^a$$

или, более кратко,

$$\partial_i n = \varepsilon_{ik} \partial_k n \times n.$$

Последнее уравнение - первого порядка и в подходящей параметризации сводится к условию Коши-Римана из теории аналитических функций (см., также /19/). В частности, решение, упомянутое в § 2, тривиально ему удовлетворяет.

2. Модель Хиггса.

Рассмотрим гамильтониан для статических решений модели Хиггса в пределе, когда самодействие скалярного поля исчезает:

$$H = \frac{1}{2} \int (\nabla_i \psi)^2 dx + \frac{1}{4e^2} \int F_{ik}^2 dx.$$

Очевидно, что заряд, ассоциированный с током (6), оценивает снизу этот гамильтониан

$$\frac{1}{2e} \int \varepsilon_{ik} F_{ik} \nabla_j \psi dx \leq H \quad (II)$$

и неравенство становится точным, если

$$\varepsilon_{ik} F_{ik} = e \nabla_j \psi.$$

Это уравнение заменяет уравнения движения. Подстановка Хоофта-Полякова приводит его к системе уравнений первого порядка для ψ и g . Решение

$$f(u) = \frac{1 - K(u)}{u^2}; \quad g(u) = \frac{H(u)}{u^2}; \quad K = \frac{cu}{sh cu}; \quad H = 1 - cu \tanh cu$$

было впервые получено в /22/ и дает явный вид коэффициентных функций монополя т-Хоофта-Полякова в пределе при $\lambda \rightarrow 0$.

Если $\lambda \neq 0$, то указанное сведение к уравнениям первого порядка теряется, но неточная оценка типа (II), конечно, остается справедливой.

К сожалению, указанный трюк, приводящий к понижению порядка уравнений движения, работает не всегда. Так, гамильтониан для стационарных решений модели Скирма для главного кирального поля $g(x)$ допускает оценку через топологический заряд тока (8)

$$\frac{E}{\lambda} \int t_2 \varepsilon_{ik} [L_i, L_k] L_j dx \leq \frac{1}{2\lambda^2} \int t_2 L_j^2 + \frac{E}{2} \int t_2 ([L_i, L_j])^2 dx \quad (I2)$$

которая становится точной при

$$L_i = \varepsilon_{ik} [L_k, L_i].$$

Однако последнее уравнение не имеет локализованных решений. В то же время уравнения второго порядка

$$\nabla_i (L_i + L_k^2 L_i - L_k L_i L_k) = 0,$$

вытекающие из гамильтониана Скимра, имеют локализуемое решение, во всяком случае для группы $SU(2)$. Для этого решения топологический заряд единичен и оценка типа (II) выполняется с запасом.

Похоже, что последнее уравнение отличается от уравнений первого порядка из предыдущих примеров тем, что левая и правая части в нем имеют разный порядок по неизвестным функциям.

В заключение этого параграфа обсудим роль топологических зарядов второго типа (по терминологии предыдущего параграфа) в моделях с калибровочными полями. Естественный вопрос о калибровочной инвариантности топологического заряда сразу же наталкивается на контрольный вопрос о том, как понимать калибровочную инвариантность. Поясним это подробнее, ограничиваясь случаем стационарных решений.

В этом случае калибровочная группа составлена функциями $\Omega(A)$, заданными на пространстве \mathcal{R}^1 и имеющими значение в группе G . Формально элементы калибровочной группы совпадают с главными кривыми полями. В частности, именно в рассматриваемом случае трехмерного пространства полная группа матриц несвязана. Элементы, принадлежащие разным компонентам, отличаются разными значениями топологического заряда. Компонента связности единичного элемента состоит из элементов с нулевым зарядом и сама является группой, которую мы будем называть "малой". Вопрос состоит в том, что считать калибровочными преобразованиями: малую группу или полную группу?

Напомним, что в гамильтоновом подходе калибровочные преобразования порождаются связями, которые являются элементами алгебры Ли группы калибровочных преобразований. Условие выполнения связей соответствует факторизации по малой группе. Таким образом, если мы считаем, что калибровочной группой является полная группа, то этим мы распространяем принцип относительности дальше, чем этого требует динамика.

Интересно отметить, что поле Янга-Миллса позволяет постро-

ить величину, которая инвариантна относительно малой группы, но меняется при преобразованиях с нетривиальным топологическим зарядом. Эта величина определяется следующим образом

$$\mathcal{B}[A] = \int dt \varepsilon_{ik} ([A_i, A_k] A_j - 3 F_{ik} A_j) dx$$

и обладает следующим свойством: пусть A^Ω означает образ действия элемента Ω на поле A

$$A^\Omega = \Omega A \Omega^{-1} + \gamma \Omega \cdot \Omega^{-1}.$$

Тогда

$$\mathcal{B}[A^\Omega] = \mathcal{B}[A] + Q(\Omega), \quad (13)$$

где

$$Q(\Omega) = \int dt \varepsilon_{ik} [L_i, L_k] L_j dx, \quad L_i = \gamma \Omega \cdot \Omega^{-1}.$$

Величина $\mathcal{B}[A]$ известна математикам (см., например, /23/) и использовалась недавно в физической литературе (см., например, /24/). К сожалению, она не является интегралом движения. Если калибровочной группой является полная группа, то (13) показывает, что $\mathcal{B}[A]$ имеет физический смысл только с точностью до целочисленной добавки. В этом случае можно говорить, что конфигурационное пространство полей Янга-Миллса имеет топологию цилиндра.

Топологический заряд главного кирального поля и инвариант Хопфа n -поля (в случае группы $O(3)$) инвариантны только по отношению к малой группе. Более точно, имеют место соотношения

$$Q(\Omega_g) = Q(g) + Q(\Omega)$$

$$Q(\Omega_n) = Q(n) + Q(\Omega). \quad (\text{если } \Omega \in O(3)).$$

Это показывает, что если калибровочной группой является полная группа, то топологический заряд нелинейных полей не имеет физического смысла.

Независимо от ответа на вопрос о калибровочной группе, из сказанного ясно, что топологический заряд киральных полей не может оценивать снизу калибровочно-инвариантный гамильтониан. Это дополнительное препятствие для существования солитонов характер-

но для калибровочных теорий в реальном четырехмерном пространстве-времени.

Возможный путь для преодоления этого препятствия состоит в использовании двух киральных полей. Например, в случае группы $SU(2)$ или $O(3)$ можно использовать совместно главное киральное поле и η -поле. Модель электромагнитных и слабых взаимодействий лептонов, обобщающая модель /25/ в этом направлении, будет обсуждена отдельно.

Я постарался изложить здесь все общие соображения, появившиеся в литературе в связи с поисками многомерных солитонов. Итог этих поисков пока не очень утешителен. Пока наиболее успешный солитон - это монополь т-Хоффа-Полякова, не являющийся по настоящему локализованным. Более привлекательный солитон для калибровочно инвариантной теории киральных полей пока не построен. Я надеюсь, тем не менее, что это будет скоро сделано.

Литература

1. M. Kruskal, N. Zabusky, J. Math. Phys. 5, 231 (1964)
2. R. Finkelstein., R. LeLevier, M. Ruderman, Phys. Rev. 83, 326 (1951)
3. T. H. R. Skyrme, Proc. Roy. Soc. A247, 260 (1958), A260, 127 (1961), A262, 237 (1961).
4. D. Finkelstein, C. W. Misner, Ann. Phys. 6, 230 (1959)
5. Л. Д. Фаддеев, Л. А. Тахтаджян, УМН 29, 249 (1974), ТМФ 21, 160 (1974)
6. R. F. Dashen, B. Hasslacher, A. Neveu, Phys. Rev. D. 10, 4114 (1974) 10, 4130 (1974), 11, 3724 (1975)
7. J. Goldstone, R. Jackiw, Phys. Rev. D 11, 1486 (1975)
8. L. D. Faddeev, IAS preprint, (1975)
9. R. Rajaraman, Phys. Reports, (1975)
10. S. Coleman, Lecture Notes, Erice Summer School, 1975
11. G. H. Derrick, J. Math. Phys. 5, 1252 (1964)
12. U. E. Enz, Phys. Rev. 131, 1392 (1963)
13. D. Finkelstein, J. M. Jauch., S. Schiminovich, D. Speiser, J. Math. Phys. 4, 788 (1963)
14. C. N. Yang, T. T. Wu in "Unusual properties of matter", 1971
15. t. Hooft, Nucl. Phys. B79, 276 (1974)
16. А. М. Поляков. Письма в ЖЭТФ, 20, (1974).
17. R. Jackiw, G. Rebbi, MIT preprint, (1976); P. Hasefratz, D. A. Ross,

Utrecht preprint, (1976)

18. D. Finkelstein, J. Math. Phys., 7, 1216 (1966)

19. J. Eells, J. H. Sampson, Amer. J. Math. 86, 109 (1964)

20. A. Belavin, A. Polyakov, Phys. Lett., 598 (1975)

21. J. Honerkamp, A. Patani, M. Schlinwein, Q. Shafi, Univ. Freiburg preprint (1975)

22. M. K. Prasad, C. M. Sommerfield, Phys. Rev. Lett., 35, 760 (1975)

23. S. S. Chern, J. Simons, Proc. Nat. Acad. Sci. 68, 791 (1971)

24. A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwartz, Yu. Tyupkin, Phys. Lett. 598, 85 (1975)

25. Л. Д. Фаддеев, ДАН, 210, 807 (1973).

П р и л о ж е н и е

1. А. М. Поляков обратил мое внимание на то, что понижение порядка в уравнениях для монополя при $\lambda = 0$ было получено Е. Б. Богомольным, препринт ИТФ, Черноголовка, 1975 г.

2. Отметим еще один путь для преодоления отмеченной в конце доклада трудности с неинвариантностью топологического заряда при калибровочных преобразованиях. Следует использовать главное киральное поле $g(x)$ и ввести калибровочное преобразование в виде

$$g(x) \rightarrow \Omega(x) g(x) \Omega^{-1}(x).$$

Простейший инвариантный лагранжиан выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\lambda^2} \text{tr} (\nabla_\mu g \cdot g^{-1})^2 + \frac{1}{4e^2} \text{tr} F_{\mu\nu}^2,$$

где

$$\nabla_\mu g \cdot g^{-1} = \partial_\mu g \cdot g^{-1} + g A_\mu g^{-1} - A_\mu.$$

TOPOLOGICALLY NONTRIVIAL SOLUTIONS OF CLASSICAL EQUATIONS AND THEIR ROLE IN QUANTUM FIELD THEORY

A.S.Schwarz

Moscow Physical Engineering Institute

The topological considerations can be used in quantum field theory. We discuss here some applications of topology, especially for treatment of solitons. A brief review of the papers /1/ - /3/ and the more detailed account of some unpublished results will be given.

At first we consider the extremals of euclidean action for Yang-Mills field (these extremals can be important in the problem of confinement of quarks). Further we discuss the existence of the magnetic monopoles in the gauge theories. In conclusion some two-dimensional models will be studied.

1. Extremals of euclidean action.

Let us consider the euclidean action for the Yang-Mills field

$$S(B_\mu) = \frac{1}{4g^2} \int \langle G_{\mu\nu}, G_{\mu\nu} \rangle d^4x$$

where Yang-Mills field B_μ takes values in the Lie algebra \mathfrak{g} of a non-abelian simple compact Lie group G ,

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu - i[B_\mu, B_\nu]$$

and $\langle \ , \ \rangle$ denotes invariant scalar product in \mathfrak{g} . The space of fields having finite euclidean action breaks up into pieces - connectivity components. To prove this assertion it is useful to note that the number

$$q(B_\mu) = \frac{1}{8\pi^2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \int \langle G_{\alpha\beta}, G_{\gamma\delta} \rangle d^4x = \quad (1)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int \langle G_{\alpha\beta}, \tilde{G}_{\alpha\beta} \rangle d^4x.$$

where $\tilde{G}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} G_{\gamma\delta}$, is an integer (this number is known in topology as "Pontryagin's number"). The field $B_\mu^{(1)}$ can be obtained from field $B_\mu^{(0)}$ by means of continuous deformation if and only if $q(B_\mu^{(0)}) = q(B_\mu^{(1)})$. It follows from the identity

$$8g^2 S(B_\mu) \pm 16\pi^2 q(B_\mu) = \int \langle G_{\alpha\beta} \pm \tilde{G}_{\alpha\beta}, G_{\alpha\beta} \pm \tilde{G}_{\alpha\beta} \rangle d^4x \geq 0 \quad (2)$$

that $S(B_\mu) \geq \frac{2\pi^2}{g^2} |q(B_\mu)|$ and $S(B_\mu) =$

$= \frac{2\pi^2}{g^2} |q(B_\mu)|$ if and only if $G_{\mu\nu} = \tilde{G}_{\mu\nu}$

in the case $q(B_\mu) \geq 0$, $G_{\mu\nu} = -\tilde{G}_{\mu\nu}$ in the case $q(B_\mu) < 0$. We see that the fields satisfying

$G_{\mu\nu} = \tilde{G}_{\mu\nu}$, $q(B_\mu) > 0$ are extremals of euclidean action. One can find fields satisfying $G_{\mu\nu} = \pm \tilde{G}_{\mu\nu}$,

$q(B_\mu) = \pm 1$. The explicit construction of such fields and proofs of the assertions above are given by Belavin, Polyakov, Tyupkin, Schwarz in [1]. The existence of fields B_μ satisfying $G_{\mu\nu} = \pm \tilde{G}_{\mu\nu}$, $q(B_\mu) = \pm q$ is not yet proved in the case $q \geq 2$, but it is very probable as follows from the assertions mentioned below.

We consider the system of non-linear equations

$$G_{\mu\nu} = \tilde{G}_{\mu\nu}, \quad \partial_\mu B_\nu = 0 \quad (3)$$

Let us suppose for simplicity that $G = SU(2)$. In the case when there exists one solution $B_\mu^{(0)}$ of (3) satisfying $q(B_\mu^{(0)}) = q$ we prove that in linear approximation one can find a family of solutions depending on $2q - 3$ parameters. (Exactly if we choose the solution of (1) in the form

$$B_\mu = B_\mu^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_\mu^{(i)} \varepsilon^i$$

we obtain a system of linear equations for $\alpha_\mu^{(i)}$. We assert that this linear system has at least $2q - 3$ independent solutions). It follows from our results that in the case $q(B_\mu) = q > 2$ the number of equations in the system (3) is less than the number of unknowns. (The system under consideration is infinite-dimensional; to make clear the statement above one can say that every reasonable finite-dimensional approximation for this system contains more unknowns than equations).

One can prove also more general results. Namely, we consider a smooth Yang-Mills field B_μ on a four-dimensional compact riemannian manifold M . (In geometrical language the Yang-Mills field B_μ can be considered as a connection in principal fibre bundle with the base M and the group G . We fix here one of such bundles. The Pontryagin number can be defined as

$$\frac{1}{8\pi^2} \int \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \langle G_{\alpha\beta}, G_{\gamma\delta} \rangle d^4x.$$

It is well known that two connections in one bundle have coinciding Pontryagin numbers).

In the case under consideration the tensor $\tilde{G}_{\alpha\beta}$ can be defined by means of formula $\tilde{G}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sqrt{g} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} G^{\gamma\delta}$

where $G_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} G^{\alpha\beta}$, $g = \det(g_{\mu\nu})$ and $g_{\alpha\beta}$ is the metric tensor in M . The fields satisfying $G_{\mu\nu} = \tilde{G}_{\mu\nu}$ are extremals of the functional

$$S_g(B_\mu) = \int \langle G_{\mu\nu}, G^{\mu\nu} \rangle \sqrt{g} d^4x, \quad (4)$$

these extremals are useful for calculation of euclidean Green functions.

The assumption of compactness excludes the case when M is an euclidean space. However one can apply the assertions proved for equation $G_{\mu\nu} = \tilde{G}_{\mu\nu}$ in the case when M is a sphere with usual metrics to the case when M is an euclidean space, because this equation is conformally invariant.

Let us define a non-linear operator R by the formula

$$R(B_\mu) = \langle G_{\mu\nu} - \tilde{G}_{\mu\nu}, \nabla_\lambda^{(0)} B_\lambda \rangle,$$

where $\nabla_\mu^{(0)} B_\mu = \partial_\mu B_\mu - i[B_\mu^{(0)}, B_\mu]$ and

$B_\mu^{(0)}$ is a fixed Yang-Mills field. The operator R maps the space of Yang-Mills fields into the space of pairs $(f_{\mu\nu}, \alpha)$ where $f_{\mu\nu}$ is tensor function satisfying $f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu} = -\tilde{f}_{\mu\nu}$ (the functions $f_{\mu\nu}$ and α take values in the Lie algebra \mathfrak{g}). We consider a linear operator S_B satisfying

$$R(B_\mu + \varepsilon b_\mu) = R(B_\mu) + \varepsilon S_B(b_\mu) + o(\varepsilon)$$

(one can say that S_B is a differential of R). It is easy to see that $S_B(b_\mu) = \langle \nabla_\mu^B b_\nu - \nabla_\nu^B b_\mu - \widetilde{\nabla_\mu^B b_\nu} + \widetilde{\nabla_\nu^B b_\mu}, \nabla_\lambda^{(0)} B_\lambda \rangle,$

where

$$\nabla_{\mu}^B b_{\nu} = \partial_{\mu} b_{\nu} - i[B_{\mu}, b_{\nu}].$$

Using topological methods developed in /10/, /11/ one can calculate the index^{x)} of the operator S_B . Namely, one can prove that in the case when M is a topological sphere

$$\text{index } S_B = 2\alpha_6 q - d \quad (5)$$

and in the case when M is a topological torus

$$\text{index } S_B = 2\alpha_6 q. \quad (5')$$

Here q is Pontryagin number, d is dimension of the group G and α_6 is an integer which can be easily calculated for every group G (for example, $\alpha_6 = 1$ in the case $G = SU(2)$ and $\alpha_6 = 2$ in the case $G = SU(4)$). (Arbitrary manifold M can be studied but only the cases of topological sphere and topological torus are of interest for physics).

It is evident that B_{μ} satisfies $R(B_{\mu}) = 0$ if and only if $G_{\mu\nu} = \tilde{G}_{\mu\nu}$, $\nabla_{\mu}^{(0)} B_{\nu} = 0$ if $R(B_{\mu}) = 0$,

x) The index of linear operator T is defined as

$\ell(T) - \ell(T^+)$, where $\ell(T)$ is the number of independent solutions of equation $Tb = 0$. It is evident that

$\ell(T) \geq \text{index } T$. If the linear operator T acts from m -dimensional space into n -dimensional space $m < \infty$, $n < \infty$ the index of T is equal to $m - n$.

then in linear approximation one can find a family of solutions of equation $R(B_\mu) = 0$ depending on $\ell(S_B)$ parameters. Using (5), (5') and inequality $\ell(S_B) \geq \text{index } S_B$ we can estimate $\ell(S_B)$. In some cases it is easy to find solutions of (3) with $q > 1$. For example in the case $G = SU(4)$ the Yang-Mills field

$$B'_\mu = \begin{pmatrix} B_\mu & 0 \\ 0 & B_\mu \end{pmatrix}$$

is a solution of (3) with $q(B'_\mu) = 2$, if B_μ is a solution of (3) for $G = SU(2)$ with $q(B_\mu) = 1$. One can prove that $\ell(S_B) = 10$, $\ell(S_{B'}) = 40$, $\text{index } S_B = 1$, $\text{index } S_{B'} = -7$.

2. Magnetic monopoles

G. 't Hooft ^{/13/} proved that there exists magnetic monopoles in the Georgi and Glashow model. Precisely, he found a regular time-independent solution of the classical Lagrange equations having a magnetic charge; the energy of this solution is finite. This solution is chosen in the independent paper by A.M. Polyakov ^{/14/} too. The connection between such solutions of classical equations and quantum particles in the case of the weak coupling is analysed in ^{/2/,/3/,/14/,/18/}. In ^{/5/} it was obtained by means of topological considerations that the magnetic monopoles exist in a wide class of the gauge theories. We detail here some assertions announced in ^{/4/}.

Let us consider scalar fields ϕ and vector Yang-Mills fields B_μ described by the following Lagrangian:

$$L = -\frac{1}{2} \langle \nabla_\mu \Phi, \nabla^\mu \Phi \rangle - \frac{1}{4e^2} \langle G_{\mu\nu}, G^{\mu\nu} \rangle - V(\Phi). \quad (6)$$

Here $B_\mu = (B_{1\mu}, \dots, B_{n_\mu\mu})$ belongs to the Lie algebra of a compact simply connected group G , $G_{\mu\nu} = (G_{1\mu\nu}, \dots, G_{n_\mu\mu\nu}) = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu - i[B_\mu, B_\nu]$, $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$ belongs to the space of k -dimensional unitary representation of this group (this representation we denote by T and corresponding representation of the Lie algebra by t), ∇_μ is a covariant derivative:

$$\nabla_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi - i t(B_\mu) \Phi$$

$V(\Phi)$ is a G -invariant function.

We use the name "classical vacuum" for the point of k -dimensional space at which the function $V(\Phi)$ has a minimum (this minimum is assumed to be equal to zero); the set of the classical vacuums will be denoted by R . We assume that any classical vacuum can be obtained from any other one by the transformation of the group G , i.e., the group G acts on R transitively (this means that the degeneracy of the vacuum is entirely due to the action of the group). The stable subgroup (i.e., the subgroup containing the transformation that leave a fixed classical vacuum m_0 in place) will be denoted by H . The group H contains the symmetries which are not spontaneously broken, the dimension of this group is equal to the number of the Yang-Mills fields which does not acquire mass by means of the Higgs mechanism. Let us consider at first the most interesting case when only one vector field does not acquire mass (i.e. $H = U(1)$). We prove that in this case there exist magnetic monopoles.

First of all we shall give a gauge invariant expression for tensor of electromagnetic field $F_{\alpha\beta}$. We shall demonstrate that this expression can be written in the form

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{e} \left[\langle G_{\alpha\beta}, h(\phi) \rangle + \omega_{a\theta}(\phi) (\nabla_\alpha \phi)^a (\nabla_\beta \phi)^\theta \right]. \quad (7)$$

To explain the notations used in (7) we should introduce some auxiliary notions. Let us consider the mapping ρ of a neighbourhood W of the manifold R of classical vacuums on R satisfying $\rho(T_g \phi) = T_g \rho(\phi)$ (In the case of Gergi-Glashow model the set R is a sphere $|\phi| = F$ and the mapping ρ can be defined by the formula $\rho(\phi) = |\phi|^{-1} F \phi$).

The existence of mapping ρ in the general case is well known in the group theory). The action of G on Lie algebra (adjoint representation of G) will be denoted by τ (i.e. $\tau(A) = g^{-1} A g$). The function $h(\phi)$ can be defined as a function satisfying $h(\rho(\phi)) = h(\phi)$, $h(T_g \phi) = \tau_g h(\phi)$, $h(m_0) = h_0$ where h_0 is the generator of H , $|h_0| = 1$.

The 2-form $\omega = \omega_\phi(\xi, \eta) = \omega_{a\theta}(\phi) \xi^a \wedge \eta^\theta$ must satisfy the following requirements

1. $\omega_{a\theta}(\phi) = \omega_{cd}(\rho(\phi)) \frac{\partial \rho^c}{\partial \phi^a} \frac{\partial \rho^d}{\partial \phi^b}$
2. $\omega_{T_g \phi}(T_g \xi, T_g \eta) = \omega_\phi(\xi, \eta)$
3. $\omega_{m_0}(t_A m_0, t_B m_0) = i \langle [A, B], h_0 \rangle$

where $g \in G$, $A, B \in \mathfrak{g}$. (The conditions 1,2 can be written also in the form 1. $\rho^* \omega = \omega$, 2. $T_g^* \omega = \omega$. Here as usual the form $\tilde{\omega} = \rho^* \omega$ is defined by the formula

$$\tilde{\omega}_{\phi}(\xi, \eta) = \omega_{\rho(\phi)}(\rho_{*}\xi, \rho_{*}\eta),$$

where ρ_{*} is the differential of the mapping ρ , i.e.,

$$(\rho_{*}\xi)^a = \frac{\partial \rho^a}{\partial \phi^b} \xi^b.$$

One can verify that there exists one and only one 2-form satisfying the requirements listed above. (In the case of Georgi-Glashow model

$$h(\phi) = |\phi|^{-1}\phi, \quad \omega = -|\phi|^{-3} \epsilon_{abc} \phi^a \xi^b \wedge \eta^c$$

and the expression (7) coincides with the corresponding expression in [12].) To justify the expression (7) for $F_{\alpha\beta}$ one can use the gauge $\rho(\phi) = m_0$.

In this gauge

$$F_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha} A_{\beta} - \partial_{\beta} A_{\alpha},$$

where $A_{\alpha} = \frac{1}{e} \langle B_{\alpha}, h_0 \rangle$. It is easy to check that A_{α} can be considered as electromagnetic field in the gauge $\rho(\phi) = m_0$. We see that the expression (7) is correct in the gauge $\rho(\phi) = m_0$; but this expression is gauge-invariant and therefore gives a right answer in arbitrary gauge. Using the expression (7) one can verify that there exist magnetic monopoles in the theory. (The magnetic charge is defined as a total flux $\frac{1}{4\pi} \oint \vec{H} d\vec{S}$, where $\vec{H} = (F_{23}, F_{31}, F_{12})$

is a magnetic field). Let $Y(\vec{n})$ be a smooth function which is defined on the unit sphere S^2 and takes values in the

vacuum manifold R . We shall consider a field $(\phi(\vec{x}), B_\alpha(\vec{x}))$ which is smooth for $|\vec{x}| \leq 1$ and satisfies

$$\phi(\vec{x}) = \gamma\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right), B_\alpha(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|} b_\alpha\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right), \nabla_\alpha \phi = 0 \quad (8)$$

for $|\vec{x}| > 1$. (By means of simple topological considerations one can prove the existence of such a smooth function $b_\mu(\vec{r})$ that the condition $\nabla_\alpha \phi = 0$ is fulfilled).

It is easy to verify that the fields under consideration have finite energy. One can prove that the magnetic charge $\mu(\phi, B_\alpha)$ is equal to $\frac{1}{2\pi e} \xi(\phi, B_\alpha)$, where $e \neq 0$ and $\xi(\phi, B_\alpha)$ is an integer which can be defined for example by means of the integration of the 2-form $\gamma^* \omega$ over the sphere S^2 :

$$\xi(\phi, B_\alpha) = \frac{c}{2\pi} \oint \gamma^* \omega = \frac{c}{2\pi} \int \omega_{ab}(\gamma(\vec{r})) \frac{\mathcal{D}(\gamma^a, \gamma^b)}{\mathcal{D}(\theta, \varphi)} d\theta d\varphi \quad (9)$$

(The proof of (9) is sketched in preprint^{7/}; it is based on some topological theorems).

For every integer \mathbb{Z} one can construct a field (ϕ, B_α) satisfying $\xi(\phi, B_\alpha) = \mathbb{Z}$, therefore there exist the fields having finite energy and non-zero magnetic charge.

Let us discuss briefly the case of arbitrary group H . We choose compact one-parameter subgroups U_i belonging to the center of H (i.e., commuting with all elements of H). Let h_i be the generators of these subgroups; we suppose that h_1, \dots, h_r generate the center of the Lie algebra of H . It is easy to see that there exist r independent "magnetic charges". Really, replacing h_0 by h_i in the definitions of $h(\phi)$ and ω we get

functions $h_i(\phi)$ and 2-forms ω_i . (To prove that the definition of ω_i is correct one must use that h_i belongs to the center). By means of h_i and ω_i one can define 2 tensors $F_{\alpha\beta}^{(i)}$ and corresponding magnetic charges $\mu^{(i)}(\phi, B_\alpha)$.

For fields satisfying (8) one can prove

$$\mu^{(i)}(\phi, B_\alpha) = \frac{1}{2e_i e} \xi^{(i)}(\phi, B_\alpha) = \frac{1}{4\pi e} \int \gamma^* \omega_i. \quad (10)$$

The proof is quite similar to that of (9).

It is proved in [5] (see [7],[8] for details) that in the case when the group H is not simply connected, the phase space (the space of fields with finite energy) breaks up into pieces - connectivity components. One can construct the one-one correspondence between connectivity components and the elements of the group $\pi_2(R)$, i.e., one can define for every field (ϕ, B_α) with finite energy an element $\zeta(\phi, B_\alpha) \in \pi_2(R)$ in such a way that a field $(\phi^{(0)}, B_\alpha^{(0)})$ can be continuously deformed into $(\phi^{(1)}, B_\alpha^{(1)})$ if and only if $\zeta(\phi^{(0)}, B_\alpha^{(0)}) = \zeta(\phi^{(1)}, B_\alpha^{(1)})$. It is easy to see that $\pi_2(R) = \pi_1(H)$ so that we can consider $\zeta(\phi, B_\alpha)$ as an element of $\pi_1(H)$. Using $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$ one can consider $\zeta(\phi, B_\alpha)$ as an integer in the case $H = U(1)$. It is evident that for the fields satisfying (8) $\zeta(\phi, B_\alpha) = \zeta(\phi, B_\alpha)$

so that for these fields

$$\mu(\phi, B_\alpha) = \frac{1}{2ce} \zeta(\phi, B_\alpha). \quad (11)$$

Both sides of (11) does not change by continuous deformation of field. In arbitrary component one can find a field satisfying (8); using this fact we see that (11) is correct for an arbitrary field having finite energy.

In the general case it is easy to prove that for every $\zeta \in \pi_1(H)$ one can find such an integer m that

$$m\zeta = \sum_{i=1}^2 n_i \zeta_i,$$

where ζ_i denotes the element of $\pi_1(H)$ defined by the subgroup U_i . Using the formula (10) one can prove that for every field with finite energy satisfying $\zeta(\phi, B_A) = \zeta$ the magnetic charge $f^{(1)}(\phi, B_A)$ is equal to $\frac{1}{em} \sum_j c_{ij} n_j$, where $\det(c_{ij}) \neq 0$

Let us consider as an example the case when $G = SU(3)$, ϕ is a traceless Hermitian matrix, $V(\phi)$ is a polynomial of degree ≤ 4 satisfying $V(0) > \min V(\phi)$. It was noted in /5/ that in this case one can find a time independent solution of Lagrange equations in the form

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\alpha(z)}{z} [\vec{\lambda} \cdot \vec{x}] \quad (12)$$

$$B_0(\vec{x}) = 0$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{\beta(z)}{z} (\vec{\lambda} \cdot \vec{x}) + \gamma(z) \lambda_8,$$

where $\lambda_1, \dots, \lambda_8$ are the usual generators of $SU(3)$ $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. One can easily derive a system of equations for α, β, γ , the rigorous proof of existence of the solution of these equations is given in /9/ (this proof can be applied also to

the equations for α, β obtained by t'Hooft in Georgi-Glashow model). If $V(\phi) \neq a(S\rho\phi^2 - b)^2$ the group $SU(3)$ acts on R transitively. One can prove that two eigenvalues of the matrix $m_0 \in R$ must coincide. Therefore one can choose $m_0 \in R$ in the form

$$m_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

and consequently $H = U(2)$. (See /5/, /8/, /9/). The center of H is isomorphic to $U(1)$, hence there exists only one magnetic charge; one can calculate this charge using the tensor (7). The field (12) has a non-zero magnetic charge.

One can prove on physical level of accuracy that if $H = U(1)$ there exists a time-dependent solution of Lagrange equations having finite energy and non-zero magnetic charge; in the general case the number of such solutions is not less than the dimension of the center of H (see /5/, /7/).

Let us consider now the extremals of euclidean action $S(\phi, B_\mu)$ for Lagrangian (6), assuming for simplicity that G is a simple compact non-abelian Lie group, $H = U(1)$. One can define for arbitrary field satisfying $S(\phi, B_\mu) < \infty$ the Pontryagin number $n(B_\mu)$ which characterizes the behaviour of Yang-Mills field at infinity and the integer $m(\phi)$ which characterizes the behaviour of scalar field at infinity (the asymptotics of ϕ at infinity determines an element of the group $\pi_3(R)$; it is easy to check that $\pi_3(R)$ is isomorphic to the group of integer). However one can prove that the euclidean action can be finite only in case when $n(B_\mu) = m(\phi)$ (this was proved by Romanov). The space \mathcal{E} of fields having finite

euclidean action breaks up into components \mathcal{E}_n , where $(\phi, B_\mu) \in \mathcal{E}_n$ if and only if $n(B_\mu) = m(\phi) = n$. It follows immediately from (2) that

$$S(\phi, B_\mu) > \frac{2\pi^2}{e^2} |n(B_\mu)|$$

for arbitrary $(\phi, B_\mu) \in \mathcal{E}_n$. Using the scale transformation

$$(\phi(x), B_\mu(x)) \Rightarrow (\phi(\lambda x), \lambda B_\mu(\lambda x))$$

one can verify that $S(\phi, B_\mu)$ with $(\phi, B_\mu) \in \mathcal{E}_n$ may be arbitrarily found near to $\frac{2\pi^2}{e^2} |n|$ (i.e., the greatest low bound of $S(\phi, B_\mu)$ on \mathcal{E}_n is equal to $\frac{2\pi^2}{e^2} |n|$).

We see that $S(\phi, B_\mu)$ does not reach its minimal value on \mathcal{E}_n .

3. Two-dimensional models

In the papers /2/, /4/, /7/ the connection between solitons and quantum particles was analysed. The general results were verified for two-dimensional non-linear Schrödinger equation

$$i \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} - \mu \psi(x,t) + \alpha \psi(x,t) |\psi(x,t)|^2 \quad (13)$$

and corresponding quantum problem (these problems have been solved exactly earlier in /21/-/24/). x)

x) Many papers devoted to the connection between solitons and quantum particles were recently published /15/-/20/.

Various two dimensional models were used for illustration of general results. The approach used in /2/, /3/, /7/ differs from the other ones.

More general non-linear Schroedinger equation

$$i \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + \psi(x,t) \int W(x-y) |\psi(y,t)|^2 dy - \mu \psi(x,t) \quad (14)$$

was considered in [4]. In the case when $w(x)$ is finite function satisfying $\int w(x) dx < 0, \mu = 0$; it is proved in [4] that for every $n > 0$ there exists a solution of (14) having the form $S(x) e^{i\lambda t}$ and satisfying $\int |S(x)|^2 dx = n$. In the case when $0 < \alpha < \int w(x) e^{ikx} dx < \beta$ it is proved the existence of time-independent solution $S(x)$ of (14) satisfying $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} S(x) = \pm \mu^{\frac{1}{2}} \cdot \left| \int w(x) dx \right|^{-\frac{1}{2}}$.

The existence of particle-like solutions is not necessary for existence of topologically non-trivial particles in corresponding quantum problem. It is demonstrated in [6, 7] for two-dimensional models:

a) scalar field with $H_{int} = \lambda : R(\phi) :$ where $R(\phi)$

is an even polynom and λ is sufficiently large;

b) massless fermions interacting with scalar field ϕ .

(we say that the state ψ is topologically non-trivial if it has the finite energy and satisfies the condition

$$\lim_{a \rightarrow \pm\infty} \langle \hat{A} e^{i\hat{p}_a} \psi, e^{i\hat{p}_a} \psi \rangle = \langle \hat{A} \theta_+, \theta_+ \rangle.$$

Here θ_+ and θ_- are physical vacuums connected with each other by a symmetry transformation:

$\phi \rightarrow -\phi$ in case a) and $\phi \rightarrow -\phi, \psi \rightarrow \gamma_5 \psi$ in case b)

\hat{A} is any local or quasi-local operator and the energy of the

physical vacuum is supposed to be equal to 0. From the existence of topologically non-trivial states one can obtain the existence of topologically non-trivial particles).

References:

1. A.A.Belavin, A.M.Polyakov, A.S.Schwarz and Yu.S.Tyupkin. Phys. Lett., 59B, 86 (1975)
2. Yu.S.Tyupkin, V.A.Fateev, A.S.Schwarz. Dokl. AN SSSR, 221, 70, (1975)
3. Yu.S.Tyupkin, V.A.Fateev, A.S.Schwarz. Jad. Fiz., 22, 622, (1975)
4. A.S.Schwarz. Teor. Mat. Fiz., 24, 333, (1975)
5. Yu.S.Tyupkin, V.A.Fateev, A.S. Schwarz. ZhETP Pis. Red., 21, 91, (1975)
6. Yu.S.Tyupkin, V.A.Fateev, A.S.Schwarz. ZhETP Pis. Red., 22, 192, (1975)
7. Fateev V.A., A.S.Schwarz, Yu.S.Tyupkin. Lebedev Phys. Inst. Preprint No. 152, (1975)
8. Yu.S.Tyupkin, V.A.Fateev, A.S.Schwarz. Lecture at ITEP School of Physics, Elementary particles, 1 (Atomizdat, Moscow, 1975, p. 65
9. Yu.S.Tyupkin, V.A.Fateev, A.S.Schwarz. Teor. Mat. Fiz., 26, 397, (1975)
10. M.F.Atiyah, I.M. Singer. Ann. Math., 87, 422, 484, 546, (1968) 92, 119, 139, (1971)
11. R. Palais. Seminar on the Atiyah-Singer index theorem.

- Princeton, 1965 (Russian translation: Moscow, "Mir" Publishing House, 1970).
12. M.I.Monastyrskii, A.M.Perelomov. ZhETF Pis. Red., 21, 94, (1975)
 13. t'Hooft. Nucl. Phys., B79, 276, (1974)
 14. M.A.Polyakov. ZhETF Pis. Red., 20, 430, (1974)
 15. L. Takhtajan, L.D.Faddeev. Teor. Mat. Fiz., 21, 160, (1974)
 16. J. Goldstone, R. Jackiw. Phys. Rev., D11, 1486, (1975)
 17. R.Dashen, B. Hasslacher, A. Neveu. Phys. Rev., D10, 4130, (1975)
 18. V.E.Karepin, L.D. Faddeev. Teor. Mat. Fiz., 25, 147, (1975)
 19. J-L. Gervais, A. Jervick, B. Sakita, Phys. Rev., D12, 1038, (1975)
 20. N.H.Christ, T.D.Lee. Phys. Rev., D12, 1606 (1975)
 21. F.A.Berezin, G.P.Pokhil, V.M. Finkelberg. Vest. MGU, ser. 1, 21, (1964)
 22. E.H.Lieb. Phys. Rev., 130, 1616, (1963)
 23. V.E.Zakharov, A.B.Shabat. ZhETF, 61, 118, (1971)
 24. P.P.Kulish, S.V.Manakov, L.D.Faddeev. Preprint ITF, 17, (1975)

v.

Дуально-резонансные модели
DUAL-RESONANCE MODELS

ДИНАМИКА РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ И ЕЕ СВЯЗЬ С ФИЗИКОЙ АДРОНОВ

Б.М.Барбашов, В.В.Нестеренко

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

С о д е р ж а н и е

1. Введение
2. Физические предпосылки для рассмотрения струнных моделей:
 - а) партонная модель;
 - б) дуально-резонансные модели.
3. Функция действия релятивистской струны, проблема Плато и нелинейная теория поля Борна-Инфельда.
4. Классическая и квантовая динамика релятивистской струны.
5. Струна во внешнем электромагнитном поле.

1. В в е д е н и е

В последнее время в адронной физике при изучении резонансной области и области асимптотически высоких энергий появился ряд указаний на то, что динамика сильно взаимодействующих частиц в какой-то степени аналогична динамике одномерно-протяженного релятивистского объекта (струны). Факты, подтверждающие эту аналогию, получены в рамках различных подходов к сильным взаимодействиям (партонная модель, дуально-резонансные модели). Здесь кратко обсуждаются физические предпосылки использования в качестве модели адрона релятивистской струны. Излагается классическая и квантовая динамика струны, являющейся первым примером релятивистского протяженного объекта, указана связь струны с дуально-резонансными моделями и полевой моделью Борна-

Инфельда. При исследовании поведения струны в постоянном электромагнитном поле оказалось, что уже в классике появляются состояния с отрицательным квадратом массы струны – тахионы. Для иллюстрации приведен ряд примеров классического движения свободной струны и струны во внешнем электромагнитном поле из заданного начального состояния.

2. Физические предпосылки для рассмотрения струнных моделей

а) Партоновая модель

Как известно, в этой модели постулируется, что адроны построены из точечных составляющих – партонов^{1/}. При описании внутреннего движения партонов в адронах используется специальная фейнмановская переменная x . Эта переменная указывает, какую долю от всего продольного импульса адрона несет партон с данным x ($0 \leq x \leq 1$). Оказывается, что этой одномерной переменной достаточно для описания динамики партонов.

Теперь допустим, что мы хотим проследить за движением партона с данным x . Для этого потребуется ввести 4-вектор $\Gamma_\mu(x)$, описывающий координаты выделенного партона. Если партоны распределены по шкале x достаточно плотно (в пределе непрерывно), то совокупность партонов в адроне будет представлять собой одномерный протяженный объект в 4-мерном пространстве-времени, описываемый $\Gamma_\mu(x)$, т.е. струну.

Предположив, что соседние партоны взаимодействуют между собой гармонически, можно получить гамильтониан партонов в следующем виде:

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\phi \left[\left(\frac{\partial \Gamma_\mu(\phi, \tau)}{\partial \phi} \right)^2 + G \left(\frac{\partial \Gamma_\mu(\phi, \tau)}{\partial \tau} \right)^2 \right], \quad (I)$$

где $\sin \phi = x$, τ – параметр, описывающий временную эволюцию партонов, G – некоторая константа, зависящая от массы партонов. Такой гамильтониан можно рассматривать как гамильтониан струны, движущейся в 4-мерном пространстве-времени^{2/}.

б) Дуальные резонансные модели

Впервые модель струны была введена в рассмотрение при

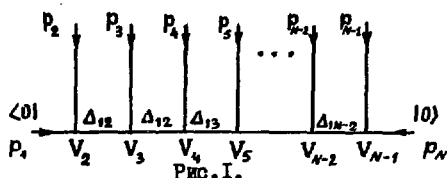
попытке разобраться в том, какая динамическая система лежит в основе дуальных резонансных моделей. Для построения дуальных амплитуд был разработан специальный математический аппарат — операторный формализм и диаграммная техника^{/3/}. Именно в этом подходе наиболее просто проследить связь между дуальными моделями и релятивистской струной.

Вводится бесконечный набор операторов рождения α_n^{v+} и уничтожения α_n^{μ} , удовлетворяющих следующим правилам коммутации:

$$[\alpha_m^{\mu}, \alpha_n^{v+}] = -g^{\mu\nu} \delta_{mn}, \quad (2)$$

где $g^{00} = 1 = -g^{11} = -g^{22} = \dots = -g^{D-1, D-1}$, D — размерность псевдоевклидова пространства, в котором действуют операторы α_m^{μ} .

N — точечной амплитуде Венециано B_N сопоставляется пресевная диаграмма, представленная на рис. I. Амплитуду B_N можно



построить, пользуясь правилами соответствия. Согласно этим правилам, внешним частицам с импульсами p_1 и p_N сопоставляются вакуумные состояния $\langle 0|$ и $|0\rangle$, соответственно. Как обычно, состояние вакуума определяется требованием

$$\alpha_m^{\mu} |0\rangle = \langle 0| \alpha_m^{\mu+} = 0.$$

Каждой вершине соответствует вершинный оператор $V(p_i)$ ($i = 2, 3, \dots, N-1$):

$$V(p_i) = \exp(i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p_i \cdot \alpha_n^+)}{\sqrt{n}}) \exp(i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p_i \cdot \alpha_n)}{\sqrt{n}}),$$

где α' — наклон траектории Редже.

Внутренним линиям на диаграмме сопоставляется пропагатор

$$\Delta_{ij} [s_{ij} + \alpha' M^2 + \alpha(0)]^{-1},$$

где $s_{ij} = (p_i + p_{i+1} + \dots + p_j)^2$, $\alpha(0)$ - интерсепт реджевской траектории $\alpha(s_{ij}) = \alpha(0) + \alpha' s_{ij}$, $\alpha' M^2 = \sum_{n=1} n \alpha_n^+ \alpha_n$ - массовый оператор.

Согласно этим правилам, для амплитуды B_N получаем следующее выражение:

$$B_N = \langle 0 | V(p_2) \Delta_{12} V(p_3) \Delta_{13} V(p_4) \dots V(p_{N-1}) | 0 \rangle.$$

Вычисляя вакуумное среднее в этой формуле, можно преобразовать B_N к обычному интегральному представлению для N - точечной амплитуды Венециано^{3/}

$$B_N = \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{i=1}^{N-3} dx_i x_i^{-\alpha(s_{ij})-1} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (1-x_{ij})^{-p_i p_j},$$

где $x_{ij} = x_{i-1} x_i \dots x_{j-2}$.

Векторы состояний в рассматриваемом формализме строятся как обычно - действием оператора рождения α_n^+ на вакуум. Однако из-за метрического тензора $g^{\mu\nu}$ в коммутаторе (2) появляются векторы с отрицательной нормой. Физические векторы состояний (с положительной нормой) определяются условиями Вигнера

$$[L_0 + \alpha(0)] |\psi\rangle = 0, \quad (3)$$

$$L_n |\psi\rangle = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\text{где } L_n = i \sqrt{2\alpha' n} p \alpha_n + \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{l(n+l)} \alpha_n^+ \alpha_{n+l} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-1} \sqrt{l(n-l)} \alpha_l \alpha_{n-l}. \quad (4)$$

Для исключения духовых состояний необходимо потребовать, чтобы $\alpha(0) = 1$ и размерность пространства D , в котором действуют операторы α'' , равнялась бы 26.

Очевидно, что операторы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям (2), можно получить, рассматривая конечную одномерную систему, движущуюся в псевдоевклидовом пространстве с размерностью D . Действительно, операторы α'' нумеруются одним целым числом n и имеет лоренцевский индекс ν .

Простейшим одномерным объектом является струна с квадратичным гамильтонианом (1). Однако в такой системе нельзя получить нелинейные дополнительные условия (3) на векторы состояний.

Намбу^{4/} предложил взять действие релятивистской струны пропорциональным площади мировой поверхности, покрываемой струной в процессе ее движения

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \int_0^{\pi} d\sigma \mathcal{L} = - \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2} \quad (5)$$

где $x_\mu = x_\mu(\sigma, \tau)$ - лоренцевский вектор, зависящий от двух параметров σ и τ : σ нумерует точки струны, а τ описывает временную эволюцию. Квантование этой системы приводит к математическому аппарату, полностью эквивалентному операторному формализму в дуально-резонансных моделях.

3. Функция действия релятивистской струны, проблема Плато и нелинейная теория поля Борна-Инфельда

Функция действия релятивистской струны (5) строится по аналогии с функцией действия релятивистской точки S_m , которая, как известно, пропорциональна длине l мировой траектории точки в пространстве Минковского $x = (t, \vec{x})$. Траектория задается параметрически $x_\mu = x_\mu(\tau)$

$$\text{где } l = \int_{\tau_i}^{\tau_f} S_m = -m \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{\dot{x}^2} d\tau, \quad \dot{x}_\mu = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right).$$

Выбор параметра τ произволен. Если взять за τ время t , то $S_m = -m\sqrt{1 - (\frac{d\vec{x}}{dt})^2}$, если же τ — собственное время, то это фиксируется условием $\dot{x}^2 = 1$. Принцип наименьшего действия означает, что свободная частица движется между двумя точками по геодезической.

Для релятивистского одномерного объекта (струны) действие выбирается пропорциональным площади поверхности Σ , которая "заматывается" струной при движении в пространстве-времени $x = (t, \vec{x})$:

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{\phi_i(\tau)}^{\phi_f(\tau)} d\phi \sqrt{(\dot{x}^1 \dot{x}^2)^2 - \dot{x}^2 \dot{x}^2} \quad (6)$$

Поверхность Σ задана параметрически $x_\mu = x_\mu(\phi, \tau)$, $\dot{x} = \frac{dx}{d\tau}$, $\dot{x} = \frac{dx}{d\phi}$. Стоящее под интегралом выражение представляет собой элемент площади поверхности $d\Sigma$. Действительно, в пространстве Евклида имеем (см. рис.2)

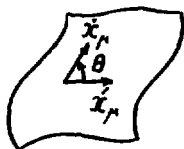


Рис.2.

$$\begin{aligned} d\Sigma &= |\dot{x}^1| |\dot{x}^2| \sin \theta d\tau d\phi = \\ &= \sqrt{\dot{x}^1 \dot{x}^2 (1 - \cos^2 \theta)} d\tau d\phi = \\ &= \sqrt{\dot{x}^2 \dot{x}^2 - (\dot{x}^1 \dot{x}^1)^2} d\tau d\phi. \end{aligned}$$

Константа α' имеет размерность квадрата длины и таким образом в теорию вводится фундаментальная длина $\sqrt{\alpha'}$, так же как в релятивистской теории точки есть размерный параметр — масса покоя m .

Принцип наименьшего действия для струны $\delta S = 0$ означает с геометрической точки зрения решение задачи Плато^{5/}, т.е. нахождение экстремальной поверхности в пространстве-времени (t, \vec{x}) с фиксированным начальным и конечным положением струны $x_\mu(\phi, \tau_i)$ и $x_\mu(\phi, \tau_f)$. Задача Плато в пространстве Минковского сводится к уравнениям гиперболического типа, а не эллиптического, как в евклидовом пространстве.

Впервые действие (6) и связанная с ним проблема экстре-

мальных поверхностей в псевдоевклидовом пространстве были рассмотрены Барбашоным и Черниковым^{6/} при изучении нелинейных полей Борна-Инфельда^{7/}. Действительно, нелинейное уравнение скалярного поля Борна φ в двумерном пространстве-времени

$$(1 - \varphi_t^2) \varphi_{xx} + 2 \varphi_x \varphi_t \varphi_{xt} - (1 + \varphi_x^2) \varphi_{tt} = 0$$

с лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\sqrt{x^2 + \varphi_x^2 - \varphi_t^2}, \quad \varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \varphi_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

может быть истолковано как уравнение экстремальной поверхности в трехмерном пространстве $(t, x, x^{-1}\varphi)$. Запишем функцию действия для этого поля

$$S = -x^2 \iint dt dx \sqrt{1 + x^2 (\varphi_x^2 - \varphi_t^2)}$$

и введем новые переменные σ и τ : $x = x(\sigma, \tau)$, $t = t(\sigma, \tau)$, тогда

$$\varphi = \varphi(x(\sigma, \tau), t(\sigma, \tau)) = x y(\sigma, \tau).$$

Замечая, что

$$\varphi_x = \frac{\begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{t} \\ y & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{t} \\ x & t \end{vmatrix}}, \quad \varphi_t = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{t} \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix}},$$

а также

$$dx dt = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{t} \\ \dot{x} & \dot{t} \end{vmatrix} d\sigma d\tau,$$

получим точно выражение для действия бесконечной релятивистской струны в трехмерном пространстве-времени $\sigma_r = (t, x, y)$:

$$S = -x^2 \iint d\sigma d\tau \sqrt{(\dot{x}\dot{x})^2 - \dot{x}^2 \dot{x}^2}.$$

(?)

К такому же выражению сводится и лагранжиан электродинамики Борна-Инфельда:

$$\mathcal{L} = -\alpha^2 \sqrt{1 + \alpha^{-2} F - \alpha^{-4} G},$$

где

$$F = \frac{1}{2} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}, \quad G = \frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} f_{\mu\nu} f_{\lambda\sigma},$$

$$f_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}.$$

Если рассмотреть двумерное пространство (t, x) , то

$$\mathcal{L} = -\alpha^2 \sqrt{(1 + \alpha^{-2} \sum_{i=2}^3 A_{ix}^2)(1 - \alpha^{-2} \sum_{i=2}^3 A_{it}^2) + (\alpha^{-2} \sum_{i=2}^3 A_{ix} A_{it})^2}.$$

Переход от переменных (t, x) к (ϕ, τ) опять приводит к действию для релятивистской струны (7) в четырехмерном пространстве $(t, x, \alpha^{-1} A_2, \alpha^{-1} A_3)$. Самый общий вид лагранжиана и полей типа Борна-Инфельда в двумерном пространстве (t, x) , сводящийся к лагранжиану струны в пространстве $n+2$ измерений путем введения переменных ϕ и τ , дается следующим выражением

$$\mathcal{L} = -\alpha^2 \sqrt{(1 + \alpha^{-2} \sum_{i=1}^n \varphi_{ix}^2)(1 - \alpha^{-2} \sum_{i=1}^n \varphi_{it}^2) + (\alpha^{-2} \sum_{i=1}^n \varphi_{ix} \varphi_{it})^2}.$$

Выбор переменных ϕ и τ не однозначен, т.к. функция действия инвариантна относительно произвольных замен $\tilde{\phi} = \phi_1(\phi, \tau)$ и $\tilde{\tau} = \phi_2(\phi, \tau)$ в полной аналогии с механикой релятивистской точки, где τ - также произвольный параметр, который фиксируется, например, условием $\dot{x}^2 = 1$ (τ - собственное время).

Перейдем теперь непосредственно к изложению теории релятивистской струны.

4. Классическая и квантовая динамика релятивистской струны^{/8/}

Варьирование действия (5) приводит к следующим уравнениям движения

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\mu} \right) = 0. \quad (8)$$

В случае конечной струны эти уравнения необходимо дополнить граничными условиями

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\mu} \right|_{\phi=0, \pi} = 0. \quad (9)$$

Уравнения (8) удовлетворяют двум тождествам: их проекции на векторы \dot{x}_μ и \dot{x}_μ равны нулю. Поэтому функции $x_\mu(\phi, \tau)$ этими уравнениями полностью не определяются. На искомые решения можно наложить два дополнительных условия, в качестве которых удобно взять следующие:

$$\dot{x} \dot{x} = 0, \quad \dot{x}^2 + \dot{x}'^2 = 0. \quad (10)$$

Эти условия являются уравнениями характеристик для системы (8). Одновременно они могут рассматриваться как условия на выбор параметров ϕ и τ . Однако эти уравнения полностью не фиксируют ϕ и τ ; остается еще возможность подстановок

$\tilde{\phi} = f_1(\phi + \tau) + f_2(\phi - \tau)$, $\tilde{\tau} = f_2(\phi + \tau) - f_1(\phi - \tau)$,
не меняющих уравнений движения (8) и дополнительных условий (10).
Окончательная фиксация ϕ и τ (калибровка) может быть выбрана применительно к каждой конкретной задаче (см. далее).

С учетом (10) уравнения движения (8) и граничные условия (9) линеаризуются:

$$\ddot{x}_\mu - x''_\mu = 0, \quad (11)$$

$$\left. \dot{x}'_\mu \right|_{\phi=0, \pi} = 0. \quad (12)$$

В работе^{/6/} была решена общая задача Коши для поля Борна-Инфельда в пространстве (t, x) , а следовательно, и для бесконечной релятивистской струны. По начальному положению струны $x_\mu(\phi, \tau=0) = p_\mu(\phi)$ и начальным скоростям в каждой точке $v_\mu(\phi)$ было найдено положение струны в любой другой момент времени.

Это решение имеет вид

$$x_{\mu}(\sigma, \tau) = \frac{1}{2} [\rho(\sigma + \tau) + \rho(\sigma - \tau)] - \frac{1}{2} \int_{\sigma - \tau}^{\sigma + \tau} \pi_{\mu}(\lambda) d\lambda, \quad (I3)$$

где π_{μ} — плотность канонического импульса струны в начальный момент времени:

$$\pi_{\mu} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^{\mu}} = - \frac{\rho'^2 v_{\mu} - (\rho' v) \rho'_{\mu}}{\sqrt{(\rho' v)^2 - \rho'^2 v^2}}.$$

Найденное решение справедливо для бесконечной струны. Если струна конечна ($0 \leq \sigma \leq \pi$), то необходимо еще удовлетворить граничным условиям $x(\sigma, \tau)|_{\sigma=0, \pi} = 0$, что приводит к требованию четного продолжения начальных данных $\rho(\lambda)$ и $\pi(\lambda)$ за пределы интервала $0 \leq \sigma \leq \pi$, где они заданы. В качестве иллюстрации приведем несколько примеров движения струны из заданного начального положения [9].

Рассмотрим струну, свернутую в начальный момент времени в окружность радиуса R и покоящуюся в плоскости x, y

$$x_0(\lambda) = R \cos \frac{\lambda}{R}, \quad y_0(\lambda) = R \sin \frac{\lambda}{R}, \\ \vec{v}(\lambda) = 0, \quad v_t = 1. \quad (I4)$$

Согласно (I3), решение имеет вид:

$$t = \tau, \\ x(\sigma, \tau) = \frac{1}{2} [x_0(\sigma - t) + x_0(\sigma + t)] = R \cos \frac{t}{R} \cos \frac{\sigma}{R}, \\ y(\sigma, \tau) = \frac{1}{2} [y_0(\sigma - t) + y_0(\sigma + t)] = R \cos \frac{t}{R} \sin \frac{\sigma}{R}.$$

Таким образом, начальная окружность (I4) с течением времени меняет свой радиус по закону $R \cos(t/R)$, оставаясь в плоскости x, y , то есть пульсирует с периодом πR .

Если взять струну, имевшую в начальный момент времени опять форму круга, но разрезанного в одной точке, причем концы

струны остаются свободными, то движение струны принимает теперь совершенно иной характер. На рис.3 приведены профили струны в различные моменты времени.

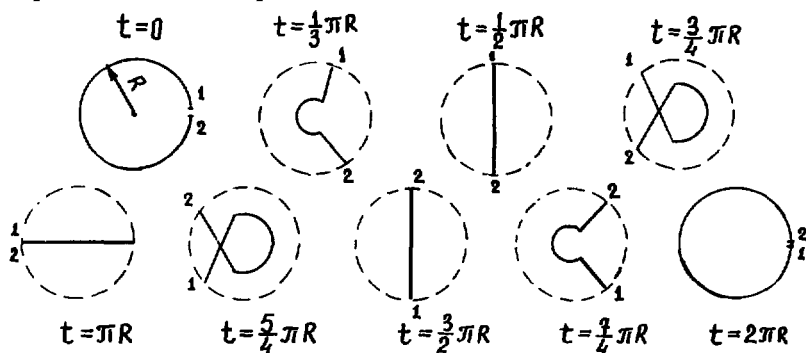


Рис.3.

За время $t = 4\pi R$ струна возвращается в исходное положение.

Движение той же струны, но с закрепленными концами, показано на рис.4.

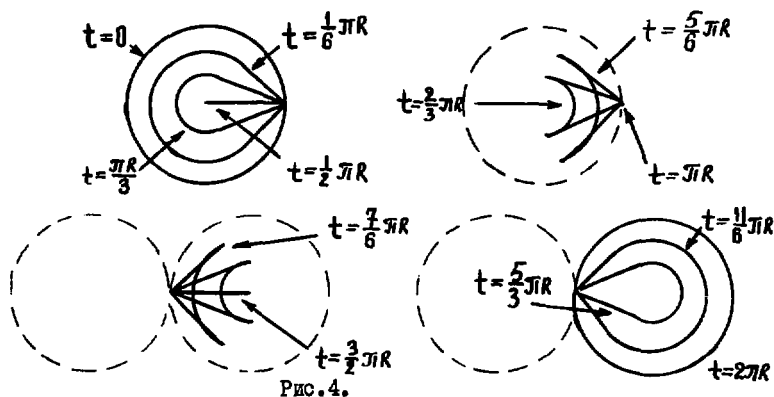


Рис.4.

Струна, имевшая в начальный момент времени форму прямолинейного отрезка длиной ℓ , изменяет периодически во времени свою длину с периодом 2ℓ , причем концы струны меняются местами (см. рис.5).

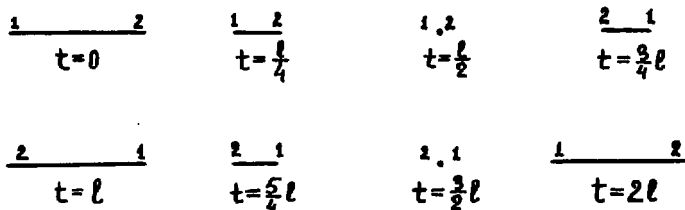


Рис. 5.

Для построения гамильтонова формализма введем канонические импульсы $\pi^M = -\partial \mathcal{L} / \partial \dot{x}_M$. Фазовое пространство рассматриваемой системы ограничено связями

$$\varphi_1(\phi, \tau) = \pi \dot{x} = 0, \quad \varphi_2(\phi, \tau) = N^{-1} \dot{x}^2 + N \pi^2 = 0, \quad (15)$$

$$N = 2\pi \alpha',$$

что является следствием сингулярности лагранжиана струны (5).

Гамильтониан системы тождественно равен нулю:

$$\mathcal{H} = -\pi \dot{x} - \mathcal{L} \equiv 0.$$

Для систем со связями гамильтонов формализм и переход к квантовой теории были разработаны Дираком^{10/}. Следуя этому методу, в качестве гамильтониана релятивистской струны следует взять линейную комбинацию связей (15)

$$H = \int_0^{\pi} [\ell_1(\phi, \tau) \varphi_1(\phi, \tau) + \ell_2(\phi, \tau) \varphi_2(\phi, \tau)] d\phi,$$

где ℓ_1 и ℓ_2 - произвольные функции. Этим произволом можно воспользоваться так, чтобы уравнения движения были наиболее простыми. Обычно полагают $\ell_1 = 0, \ell_2 = \frac{1}{2}$:

$$H = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [N \pi^2 + N^{-1} \dot{x}^2] d\phi.$$

Уравнения движения и граничные условия в гамильтоновом формализме получим из вариационного принципа

$$\delta S = -\delta \int_{\tau_i}^{\tau_f} \int_{\phi_i(\tau)}^{\phi_f(\tau)} d\tau d\phi (\pi \dot{x} + \mathcal{H}),$$

который приводит к уравнениям Гамильтона

$$\begin{aligned}\dot{x}_\mu &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\mu} = N \pi_\mu, \\ \dot{\pi}_\mu &= \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{x}_\mu} \right) = N^{-1} \ddot{x}_\mu, \quad N = 2\pi\alpha'\end{aligned}$$

и граничным условиям

$$\left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{x}_\mu} = \dot{x}_\mu \right|_{\phi=0, \pi} = 0.$$

Очевидно, что эти уравнения полностью совпадают с соответствующими уравнениями (II), (I2) в лагранжевом формализме. Их решение можно представить в виде рядов Фурье

$$x^\mu(\phi, \tau) = q_0^\mu + 2\pi\alpha' P_0^\mu \tau + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{\mu+} e^{in\tau} + a_n^{\mu-} e^{-in\tau}}{\sqrt{n}} \cos(n\phi) \quad (I6)$$

$$\pi^\mu(\phi, \tau) = P_0^\mu + \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha'}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} (a_n^{\mu+} e^{in\tau} - a_n^{\mu-} e^{-in\tau}) \cos(n\phi).$$

Переход к квантовой теории осуществляется постулированием следующих коммутационных соотношений:

$$[a_m^\mu, a_n^{\nu+}] = -g^{\mu\nu} \delta_{mn}, \quad [q_0^\mu, P_0^\nu] = -i g^{\mu\nu}.$$

Остальные коммутаторы равны нулю. В рассматриваемой схеме квантования связи (I5) должны быть наложены как дополнительные условия на физические векторы состояний

$$\mathcal{L}_i |\psi\rangle = 0, \quad i = 1, 2.$$

Переходя к разложениям Фурье (I6), получим условия Виразора (3) в дуально-резонансных моделях

$$(L_0 + 1) |\psi\rangle = 0, \quad L_n |\psi\rangle = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$L_n = i\sqrt{2\alpha'n} P \alpha_n + \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{l(n+l)} \alpha_n^+ \alpha_{n+l} - \\ - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-1} \sqrt{l(n-l)} \alpha_l \alpha_{n-l}.$$

Рассмотренная схема квантования лагранжиана (7) для бесконечной струны была предложена Барбашовым и Черниковым^{/6/} при исследовании полей Борна-Инфельда. Ими же была найдена алгебра операторов L_n (алгебра Виразоро).

Таким образом, математический аппарат, описывающий квантовую динамику релятивистской струны, полностью совпадает с операторным формализмом в модели Венециано. Более того, было показано, что N -точечная амплитуда Венециано может быть получена как квантовомеханическая амплитуда перехода для релятивистских струн, взаимодействующих с внешними, подобранными соответствующим образом, токами^{/11/}.

Эти результаты позволяют заключить, что в основе дуальных резонансных моделей лежит динамика одномерных релятивистских протяженных объектов.

Квантовая механика релятивистской струны, о которой говорилось выше, соответствует древесным дуальным диаграммам. Более сложные дуальные диаграммы, содержащие замкнутые петли, требуют вторичного квантования струны, то есть построения квантовой теории поля струны. Для этого необходимо ввести в рассмотрение полевые операторы, зависящие уже от координат не одной пространственно-временной точки, как это имеет место в стандартной квантовой теории поля, а от функций $X_\mu(s)$, описывающих струну. Таким образом, полевые операторы в этом случае являются функционалами

$$\Phi = \Phi\{X_\mu(s)\}.$$

В этом направлении сделаны пока лишь самые первые шаги (см. работы Рамонда^{/12/}). Другой подход к описанию взаимного превращения струн в рамках метода функционального интегрирования был предложен Мандельштамом^{/13/}.

5. Струна во внешнем электромагнитном поле

При построении дуальных амплитуд, как уже отмечалось выше,

в модель релятивистской струны необходимо вводить взаимодействие. В этой связи представляет интерес рассмотреть точно решаемые модели взаимодействующей струны. Найти точные решения удастся для струны в постоянном однородном электромагнитном поле и в поле плоской электромагнитной волны.

Действие струны в электромагнитном поле определим следующим образом:

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int d\phi (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}), \quad (17)$$

где $\mathcal{L}_0 = -[\dot{x}^2 \dot{x}'^2]^{1/2}$, $\mathcal{L}_{int} = g \dot{x}'_\mu \dot{x}^\nu F^{\mu\nu}(x)$.

Функции $\phi_i(\tau)$, $i=1,2$ описывают движение концов струны. Их явный вид будет найден в дальнейшем.

Вариация действия (17) приводит к уравнениям движения на переменные $x_\mu(\phi, \tau)$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{x}'_\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{x}'_\mu} \right) = 0 \quad (18)$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{x}'^\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{x}'^\nu} \dot{\phi} + g F_{\nu\mu} (\dot{x}^\mu + \dot{x}'^\mu \dot{\phi}) = 0, \quad (19)$$

$$\phi = \phi_i(\tau), \quad i=1,2.$$

Варьирование функций $\phi_i(\tau)$, $i=1,2$ в (17) приводит к требованиям

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} \Big|_{\phi=\phi_i(\tau)} = 0, \quad i=1,2. \quad (20)$$

Таким образом, взаимодействие с электромагнитным полем не изменяет уравнений движения струны, изменяются лишь граничные условия. Это является следствием того факта, что \mathcal{L}_{int} в (17) описывает взаимодействие с электромагнитным полем двух точечных зарядов, расположенных на концах струны. Заряды эти равны по величине, но противоположны по знаку. Действительно,

$$\begin{aligned}
& g \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\epsilon \int_{\epsilon_1(\tau)}^{\epsilon_2(\tau)} F_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \\
& = g \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \frac{dx^\nu}{d\tau} A_\nu(x) \Big|_{\epsilon=\epsilon_2(\tau)} - g \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \frac{dx^\nu}{d\tau} A_\nu(x) \Big|_{\epsilon=\epsilon_1(\tau)}
\end{aligned}$$

Как и в свободном случае, уравнения (18) не являются независимыми, а удовлетворяют двум тождествам: проекция этих уравнений на \dot{x}_μ и \dot{x}_μ равна нулю. Поэтому уравнения (18) не определяют полностью все переменные $x_\mu(\epsilon, \tau)$, и на искомые решения можно наложить два дополнительных условия:

$$\dot{x} \dot{x} = 0, \quad \dot{x}^2 + \dot{x}^2 = 0. \quad (21)$$

Легко показать, что из (21) и (19) следует (20). Поэтому в дальнейшем условие (20) не будем рассматривать как независимое. С учетом (21) уравнения движения (18) и граничные условия (19) принимают вид

$$\ddot{x}_\mu(\epsilon, \tau) - \ddot{x}_\mu(\epsilon, \tau) = 0, \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
& \dot{x}_\nu + g F_{\nu\mu} \dot{x}^\mu + (\dot{x}_\nu + g F_{\nu\mu} \dot{x}^\mu) \epsilon = 0, \\
& \epsilon = \epsilon_i(\tau), \quad i=1, 2.
\end{aligned} \quad (23)$$

Уравнения движения (22), граничные условия (23) и дополнительные условия (21) еще не полностью фиксируют выбор переменных ϵ и τ . Действительно, эти уравнения не меняют свой вид при переходе к новым переменным $\tilde{\epsilon}$ и $\tilde{\tau}$ таким, что

$$\tilde{\epsilon} - \tilde{\tau} = \tilde{\alpha}(\epsilon - \tau) = \tilde{\alpha}(\alpha), \quad \tilde{\epsilon} + \tilde{\tau} = \tilde{\beta}(\epsilon + \tau) = \tilde{\beta}(\beta) \quad (24)$$

с произвольными функциями $\tilde{\alpha}(\alpha)$ и $\tilde{\beta}(\beta)$. Это позволяет наложить еще одно условие (условие калибровки) на искомые функции $x_\mu(\epsilon, \tau)$ и параметры ϵ, τ . Попробуем найти такую калибровку, в

которой движение концов струны описывается уравнениями^{*)}

$$\ddot{\zeta}_i(\tau) = 0, \quad i=1, 2. \quad (25)$$

Спроектируем граничные условия (23) на постоянный вектор

n :

$$n^\nu \dot{x}_\nu + g n^\nu F_{\nu\mu} \dot{x}^\mu + (n^\nu \ddot{x}_\nu + g n^\nu F_{\nu\mu} \ddot{x}^\mu) \zeta = 0, \quad (26)$$

$$\zeta = \zeta_i(\tau), \quad i=1, 2.$$

Теперь зафиксируем калибровку требованием

$$n^\nu \dot{x}_\nu + g n^\nu F_{\nu\mu} \dot{x}^\mu = 0, \quad (27)$$

$$n^\nu \ddot{x}_\nu + g n^\nu F_{\nu\mu} \ddot{x}^\mu = \mathcal{P}, \quad (28)$$

где \mathcal{P} - произвольная константа, не равная нулю. Как будет показано далее, такая калибровка означает, что проекция плотности канонического импульса струны в каждой ее точке на вектор n есть постоянная величина \mathcal{P} .

Из (26) следует, что

$$\ddot{\zeta}_i(\tau) = 0, \quad i=1, 2,$$

то есть $\zeta_1(\tau)$ и $\zeta_2(\tau)$ есть просто константы, в качестве которых удобно взять 0 и ℓ :

$$\zeta_1(\tau) = 0, \quad \zeta_2(\tau) = \ell.$$

Можно показать, что выбор калибровки (27), (28) в случае постоянного электромагнитного поля соответствует переходу к новым

^{*)} Когда рассматривается свободная струна, то обычно считается, что уравнения (25) имеют место^{/8/}. Однако в общем случае функции $\zeta_i(\tau)$, ($i=1, 2$), описывающие движение концов струны, должны быть определены из вариации действия (6) и только в калибровках, выбранных определенным образом, движение концов струны описывается уравнением (25).

параметрам ζ и τ по формулам (24) с функциями $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ определенного вида.

Таким образом, в лагранжевом формализме задача о движении релятивистской струны в постоянном электромагнитном поле формулируется следующим образом. Требуется найти вектор $X_\mu(\zeta, \tau)$, который удовлетворяет уравнению Даламбера

$$\ddot{X}_\mu(\zeta, \tau) - \ddot{X}_\mu(\zeta, \tau) = 0, \quad (22)$$

дополнительным условиям

$$\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu = 0, \quad \dot{X}^2 + \dot{X}'^2 = 0, \quad (21)$$

условиям калибровки

$$n^\nu \dot{X}_\nu + g n^\nu F_{\nu\mu} \dot{X}^\mu = 0, \quad (27)$$

$$n^\nu \dot{X}_\nu + g n^\nu F_{\nu\mu} \dot{X}'^\mu = \mathcal{P} \quad (28)$$

и граничным условиям

$$\dot{X}_\nu + g F_{\nu\mu} \dot{X}'^\mu = 0 \quad \text{при } \zeta = 0, l. \quad (29)$$

Далее мы будем работать в нековариантном формализме, выражая с помощью дополнительных условий (21) и условий калибровки (27) и (28) зависимые компоненты вектора X_μ через независимые.

Теперь сформулируем гамильтонов формализм для описания движения струны в постоянном электромагнитном поле. Введем канонические импульсы $\pi^\mu = -\partial \mathcal{L} / \partial \dot{X}_\mu$. С учетом дополнительных условий (21) легко получить следующее выражение для π^μ :

$$\pi^\mu = \dot{X}^\mu + F^{\mu\nu} \dot{X}_\nu. \quad (30)$$

Канонический импульс π^μ является аналогом обобщенного импульса заряженной частицы, движущейся в электромагнитном поле. Определим канонический импульс струны как целого:

$$\Pi^{\mu} = \int_0^l d\sigma \pi^{\mu}(\sigma, \tau).$$

Используя (30), уравнения движения (22) и граничные условия (29), покажем, что импульс Π_{μ} сохраняется:

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi^{\mu}}{d\tau} &= \int_0^l (\ddot{x}^{\mu} + F^{\mu\lambda} \dot{x}_{,\lambda}) d\sigma = \int_0^l (\ddot{x}^{\mu} + F^{\mu\lambda} \dot{x}_{,\lambda}) d\sigma = \\ &= (\dot{x}^{\mu} + F^{\mu\lambda} \dot{x}_{,\lambda}) \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=l} = 0, \quad F^{\mu\nu} = \text{const}. \end{aligned}$$

Учитывая это, массу покоя струны как целого естественно определить следующим образом:

$$M^2 = \Pi_{\mu} \Pi^{\mu} = \Pi^2. \quad (31)$$

Как и в случае свободной струны, фазовое пространство рассматриваемой системы ограничено связями^{10/} между каноническими переменными $x_{\mu}(\sigma, \tau)$ и $\pi_{\mu}(\sigma, \tau)$:

$$\pi \dot{x} = 0, \quad (\pi^{\mu} - g F^{\mu\nu} \dot{x}_{,\nu})^2 + \dot{x}^2 = 0. \quad (32)$$

Это является следствием сингулярности лагранжиана (5) $\det \left\| \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{\mu} \partial \dot{x}_{\nu}} \right\| = 0$.

Гамильтониан системы, как и в свободном случае, оказывается тождественно равным нулю

$$\mathcal{H} = -\pi \dot{x} - \mathcal{L} = 0.$$

Помимо первичных связей (32), на канонические переменные можно наложить еще условия калибровки^{14/}. По аналогии с лагранжевым формализмом, эти условия удобно взять в следующем виде:

$$n \dot{x}^{\mu} + g n^{\nu} F_{\nu\gamma} (\pi^{\mu} - g F^{\mu\sigma} \dot{x}_{,\sigma}) = 0, \quad (33)$$

$$n \pi = \mathcal{P}. \quad (34)$$

Первичные связи (32) и условия калибровки (33), (34) в со-

Вокупности образуют связи второго рода, так как их скобки Пуассона не равны нулю.

И в гамильтоновом формализме будем выделять независимые ("поперечные") канонические переменные $X_1(\xi, \tau)$ и $\Pi_1(\xi, \tau)$ и зависимые t, x и Π_t, Π_x . Это приведет, конечно, к потере явной релятивистской ковариантности, однако этот путь дает возможность найти точные решения граничной задачи и уравнений движения для независимых компонент.

Как известно^{/15/}, любое электромагнитное поле, постоянное в пространстве и времени, соответствующим преобразованием Лоренца может быть сведено к следующим 4 случаям:

1. $\vec{E} \neq 0, \vec{H} = 0, (E^2 - H^2 > 0, \vec{E}\vec{H} = 0);$
2. $\vec{E} = 0, \vec{H} \neq 0, (E^2 - H^2 < 0, \vec{E}\vec{H} = 0);$
3. \vec{E} и \vec{H} отличны от нуля и параллельны (инвариант $E^2 - H^2$ принимает произвольные значения, $\vec{E}\vec{H} \neq 0$);
4. Электрическое и магнитное поля во всех системах отсчета равны по величине и перпендикулярны друг другу ($E^2 - H^2 = 0, \vec{E}\vec{H} = 0$).

Во всех четырех случаях удастся найти решение уравнений движения и граничных условий в виде рядов Фурье и определить оператор квадрата массы струны. При этом оказывается, что электрическое поле приводит к уменьшению расстояния между эквидистантными уровнями этого оператора и сдвигает квадрат массы основного состояния в отрицательную область. Магнитное поле дает лишь отрицательный вклад в квадрат массы основного состояния. Существенно, что уже на классическом уровне появляются состояния с мнимой массой (тахионы). Таким образом, для струны в постоянном электромагнитном поле ситуация с тахионом усугубляется. Кроме того, из решений видно, что существуют предельные значения поля, при которых решения изменяют свой характер. Например, критическое значение электрического поля равно

$$E_{кр} = \frac{1}{2\pi\hbar c \alpha' g}.$$

Если положить, что заряды на концах струны по абсолютной величине равны заряду электрона, а $\alpha' \approx 0,9 \text{ ГэВ}^{-2}$, то $E_{кр} \sim 10^{22}$ вольт/см.

Для сравнения отметим, что эта величина превышает в 10^{+12} раз напряженность электрического поля, действующего в атоме водорода на электрон. При значении внешних полей $E_{\text{вн}} \ll E_{\text{кр}}$ все решения для струны в электромагнитном поле переходят в свободные.

В качестве примера рассмотрим случай, когда отличны от нуля электрическое поле E и магнитное поле H и они параллельны. Решение задачи в остальных случаях проводится аналогично.

Направим поля E и H по оси x :

$$g F_{01} = -g F_{10} = E, \quad g F_{32} = -g F_{23} = H.$$

Постоянный вектор n , входящий в условия калибровки (33), (34), удобно взять в следующем виде:

$$n^\mu = (1, 1, 0, 0). \quad (35)$$

Подставляя (35) в (27) и (28), получим

$$\begin{aligned} t' - \dot{x} - E(t - \dot{x}) &= 0, \\ \dot{t} - \dot{x} - E(t' - \dot{x}) &= \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (36)$$

Граничные условия (29) в покомпонентной записи имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} t' + E \dot{x} &= 0, \\ \dot{x} + E \dot{t} &= 0, \\ \dot{y} + H \dot{z} &= 0, \\ \dot{z} - H \dot{y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \phi = 0, l.$$

Независимыми переменными будем считать y и z . Граничным условиям и уравнениям движения удовлетворяют следующие разложения y и z в ряды Фурье:

$$\begin{aligned} y(\phi, \tau) &= \left[\frac{y_0}{l} + P_y \tau - H P_z \left(\phi - \frac{l}{2} \right) \right] \frac{1}{\sqrt{1+H^2}} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{1+H^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} (a_n^+ e^{i \frac{n\pi}{l} \tau} + a_n^- e^{-i \frac{n\pi}{l} \tau}) \cos\left(\frac{n\pi}{l} \phi\right) - \\ &- i \frac{H}{\sqrt{1+H^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} (b_n^+ e^{i \frac{n\pi}{l} \tau} - b_n^- e^{-i \frac{n\pi}{l} \tau}) \sin\left(\frac{n\pi}{l} \phi\right), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
x(\theta, \tau) = & \left[\frac{z_0}{\ell} + P_z \tau + H \cdot P_y \left(\theta - \frac{\ell}{2} \right) \right] \frac{1}{\sqrt{1+H^2}} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{1+H^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(b_n^+ e^{i \frac{n\pi}{\ell} \tau} + b_n^- e^{-i \frac{n\pi}{\ell} \tau} \right) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} \theta\right) + \\
& + i \frac{H}{\sqrt{1+H^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(a_n^+ e^{i \frac{n\pi}{\ell} \tau} - a_n^- e^{-i \frac{n\pi}{\ell} \tau} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} \theta\right).
\end{aligned} \quad (38)$$

Зависимые компоненты \dot{t} и \dot{x} будут определяться из дополнительных условий (2I), которые можно разрешить с помощью уравнений калибровки (36):

$$\dot{t}' = -\frac{E}{2\mathcal{P}} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_1'^2) + \frac{1}{\mathcal{P}} \dot{x}_1 \dot{x}_1' + \frac{E\mathcal{P}}{2(1-E^2)},$$

$$\dot{t} = \frac{1}{2\mathcal{P}} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_1'^2) - \frac{E}{\mathcal{P}} \dot{x}_1 \dot{x}_1' + \frac{\mathcal{P}}{2(1-E^2)},$$

$$\dot{x}' = -\frac{E}{2\mathcal{P}} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_1'^2) + \frac{1}{\mathcal{P}} \dot{x}_1 \dot{x}_1' - \frac{E\mathcal{P}}{2(1-E^2)},$$

$$\dot{x} = \frac{1}{2\mathcal{P}} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_1'^2) - \frac{E}{\mathcal{P}} \dot{x}_1 \dot{x}_1' - \frac{\mathcal{P}}{2(1-E^2)},$$

где $x_1 = (0, 0, y, z)$.

Вектор π_μ имеет компоненты:

$$\pi_t = \dot{t} + E \dot{x}',$$

$$\pi_x = \dot{x} + E \dot{t},$$

$$\pi_y = \dot{y} + H \dot{z}',$$

$$\pi_z = \dot{z} - H \dot{y}.$$

Для независимых компонент π_y и π_z получаем из формул (37) и (38) разложения Фурье:

$$\pi_y = \sqrt{1+H^2} P_y + i\sqrt{1+H^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n\pi}}{\ell} (a_n^+ e^{i \frac{n\pi}{\ell} \tau} - a_n^- e^{-i \frac{n\pi}{\ell} \tau}) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} \theta\right),$$

$$\pi_z = \sqrt{1+H^2} P_z + i\sqrt{1+H^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n\pi}}{\ell} (b_n^+ e^{i\frac{n\pi}{\ell}\tau} - b_n e^{-i\frac{n\pi}{\ell}\tau}) \cos(\frac{n\pi}{\ell}\phi).$$

В качестве гамильтониана можно взять следующую величину:

$$H = \frac{\mathcal{P}}{1-E^2} \Pi_t = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} d\phi [(\pi_y - H\dot{x})^2 + (\pi_z + H\dot{y})^2] + \frac{\mathcal{P}^2 \ell}{1-E^2}.$$

Для квадрата массы струны имеем выражение

$$M^2 = \Pi^2 = -\ell^2 P_1^2 (E^2 + H^2) + (1-E^2) \sum_{n=1}^{\infty} n\pi (\alpha_n^+ \alpha_n + \alpha_n \alpha_n^+ + b_n^+ b_n + b_n b_n^+).$$

Приведем значения M^2 для других конфигураций электромагнитного поля. Если отлично от нуля только электрическое поле \vec{E} , то

$$M^2 = -E^2 \ell^2 P_1^2 + (1-E^2) \sum_{n=1}^{\infty} n\pi (\alpha_{n1}^+ \alpha_{n1} + \alpha_{n1} \alpha_{n1}^+),$$

где $\alpha_{n1} = (\alpha_{ny}, \alpha_{nz})$.

В постоянном однородном магнитном поле \vec{H}

$$M^2 = -H^2 \ell^2 P_1^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n\pi (\alpha_n^+ \alpha_n + \alpha_n \alpha_n^+ + b_n^+ b_n + b_n b_n^+).$$

Если $\vec{E} \perp \vec{H}$ и $|\vec{E}| = |\vec{H}|$, то

$$M^2 = -E^2 \mathcal{P}^2 \ell^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n\pi (\alpha_{n1}^+ \alpha_{n1} + \alpha_{n1} \alpha_{n1}^+).$$

Переход к квантовому описанию можно осуществить, постулируя коммутационные соотношения:

$$[y_0, p_y] = [z_0, p_z] = i,$$

$$[\alpha_n, \alpha_m^+] = [b_n, b_m^+] = \delta_{nm}.$$

Остальные коммутаторы равны нулю.

Проверка релятивистской инвариантности в данной задаче сталкивается с трудностями. Для того чтобы построить сохраняющиеся операторы лоренцевских поворотов, необходимо включить в рассмотрение электромагнитное поле и проквантовать его. Это, конечно, чрезвычайно усложняет задачу.

Приведем несколько примеров классического движения струны в постоянном электромагнитном поле.

а) Струна в постоянном электрическом поле \vec{E} (рис.6). Поле направлено по оси x . Струна совершает колебательные движения и изменяет свою длину, но ее проекция на направление электрического поля \vec{E} (т.е. электрический дипольный момент струны \vec{d})

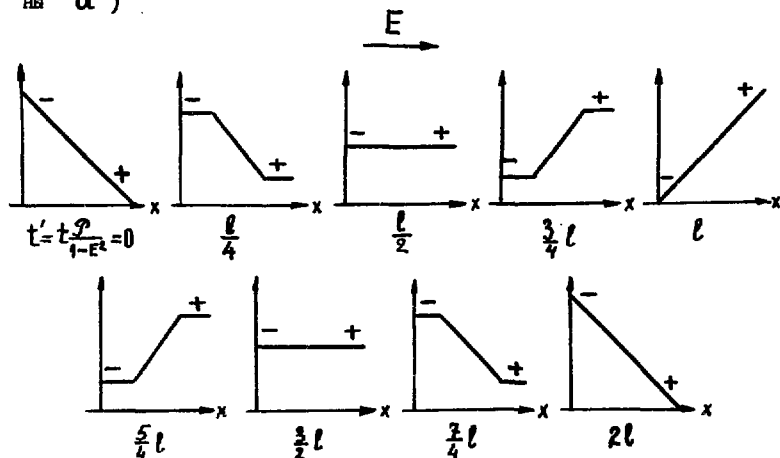


Рис.6.

$$\vec{d} = g E \mathcal{P} (1 - E^2)^{-1/2}$$

остается постоянной и равной

Струну с двумя противоположными зарядами на концах можно рассматривать как модель нейтрального π -мезона, построенного из двух кварков, удерживаемых струной. Зная поведение такой системы в электрическом поле, можно найти поляризуемость α - мезона. В рассматриваемом случае эта величина оказывается равной

$$\alpha \approx 1 \cdot 10^{-3} \text{ fm}^3,$$

где α - коэффициент, связывающий дипольный момент струны с вектором \vec{E} :

$$\vec{d} = \alpha \vec{E}.$$

Произведение $\mathcal{P}l$, входящее в $\vec{\alpha}$, определяется из приравнивания массы струны массе π^0 -мезона, безразмерную величину gE нужно заменить, как обычно, на $2\pi\hbar c \alpha' gE$, где $\alpha' \approx 0,9 \text{ ГэВ}^{-2}$ — наклон реджевской траектории.

б) Движение струны в постоянном магнитном поле (рис.7). В начальный момент струна имела форму прямолинейного отрезка, расположенного на оси y . В процессе движения она перемещается поступательно в направлении, перпендикулярном к полю \vec{H} .

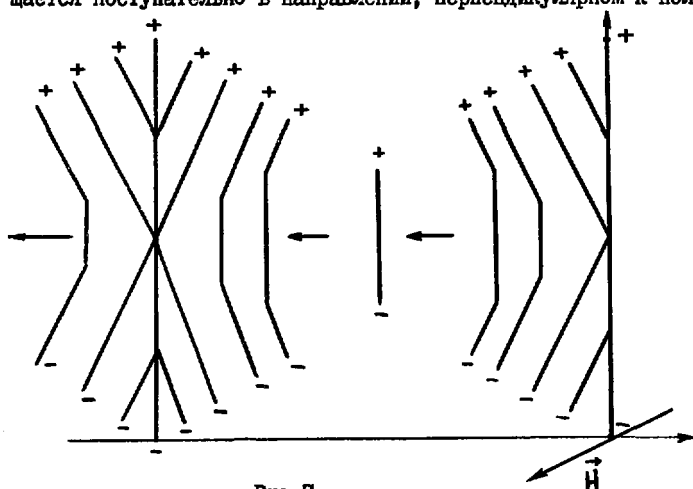


Рис.7.

в) Струна в скрещенных электрическом и магнитном полях $\vec{E} \perp \vec{H}$, $E=H$ (рис.8).

Как и в случае одного магнитного поля, струна выталкивается в направлении, перпендикулярном \vec{H} , и совершает колебательные движения вдоль поля \vec{E} .

Как и в свободном случае, при движении релятивистской струны во внешнем электромагнитном поле появятся изломы в ее профиле. Это является отражением того факта, что рассматриваемая модель струны не учитывает важные с физической точки зрения обстоятельства: во-первых, заряды, расположенные на концах струны, должны иметь массу, что существенно меняет характер граничных условий; во-вторых, эти заряды должны взаимо-

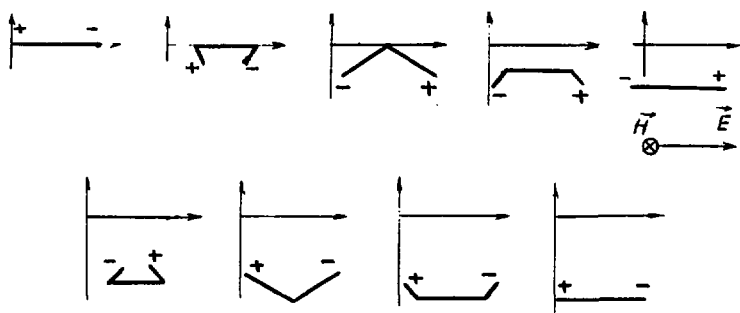


Рис. 8.

действовать между собой через электромагнитное поле. Пренебрегать электромагнитным взаимодействием зарядов струны можно только в том случае, если расстояние между ее концами в процессе движения не оказывается значительно меньшим характерной длины струны $\sim \sqrt{\alpha'} \approx 2 \cdot 10^{-14}$ см ($\alpha' \approx 0,9$ ГэВ $^{-2}$). Если это так, то электрическое поле $E \sim \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, создаваемое зарядом струны на ее противоположном конце, значительно меньше $E_{кр} = (2\pi\hbar c \alpha' g)^{-1}$. Действительно,

$$\frac{E}{E_{кр}} \sim \frac{q^2}{\hbar c} = \frac{1}{137},$$

если считать, что заряды струны равны по абсолютной величине заряду электрона.

В заключение рассмотрим способ решения уравнений движения струны в поле плоской электромагнитной волны $A_\mu(x) = \epsilon_\mu e^{ikx}$, $k^2 = 0$, $(\epsilon, k) = 0$. Решение этой задачи было найдено в работе [16] для циркулярно поляризованной волны, когда $\epsilon_\mu^2 = 0$. Мы приведем здесь решение в общем случае, когда $\epsilon_\mu^2 \neq 0$. Граничные условия (23), как и раньше, диктуют выбор калибровки (27), (28), при которой $\phi_i(\tau) = 0$ и граничные значения ϕ есть $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \ell$. Подставим в граничные условия (29) решение для x_μ в виде $x_\mu = [\psi_{1\mu}(\phi + \tau) + \psi_{2\mu}(\phi - \tau)]/2$ и $F_{\mu\nu} = i(k_\mu \epsilon_\nu - \epsilon_\mu k_\nu) \cdot \exp\{\frac{i}{2} k(\psi_1 + \psi_2)\}$. Не теряя общности, можно выбрать вектор поляризации ϵ_μ пространственно-подобным $\epsilon_\mu^2 = -1$.

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \psi'_{1\mu}(\beta_i) - ig(k_\mu \varepsilon_\nu - \varepsilon_\mu k_\nu) \psi'_{1\nu}(\beta_i) e^{\frac{i}{2} k [\psi_1(\beta_i) + \psi_2(\alpha_i)]} \\ = \\ = -\psi'_{2\mu}(\alpha_i) - ig(k_\mu \varepsilon_\nu - \varepsilon_\mu k_\nu) \psi'_{2\nu}(\alpha_i) e^{\frac{i}{2} k [\psi_1(\beta_i) + \psi_2(\alpha_i)]}, \quad i=1,2, \end{aligned}$$

где $\alpha = \phi - \tau$, $\beta = \phi + \tau$.

Будем искать решения $\psi_{1\mu}(\beta)$ и $\psi_{2\mu}(\alpha)$ как суперпозицию решений для свободной струны $\tilde{x}_\mu(\alpha, \beta) = [\alpha_\mu(\beta) + \beta_\mu(\alpha)]/2$ следующего вида

$$\begin{aligned} \psi'_{1\mu} &= \alpha'_\mu + ig(k_\mu \varepsilon_\nu - \varepsilon_\mu k_\nu) \alpha'_\nu R_1 e^{ika} - g^2 k_\mu (k a)_\nu \frac{R_1^2}{2} e^{2ika} \\ \psi'_{2\mu} &= \beta'_\mu + ig(k_\mu \varepsilon_\nu - \varepsilon_\mu k_\nu) \beta'_\nu R_2 e^{ikb} - g^2 k_\mu (k b)_\nu \frac{R_2^2}{2} e^{2ikb}, \end{aligned} \quad (39)$$

где R_1 и R_2 - константы, не зависящие от ϕ и τ , а свободные решения удовлетворяют свободным граничным условиям: $\alpha'_\mu(\beta_i) = -\beta'_\mu(\alpha_i)$, $i=1,2$. Вообще можно показать, что (39) являются общим решением (29), если R_1 и R_2 положить равными

$$R_1 = \frac{1 - e^{-i(Pk)\ell}}{i \sin[(Pk)\ell]} = 1 - i \operatorname{tg}\left[\frac{(Pk)\ell}{2}\right],$$

$$R_2 = \frac{1 - e^{i(Pk)\ell}}{i \sin[(Pk)\ell]} = -1 - i \operatorname{tg}\left[\frac{(Pk)\ell}{2}\right],$$

где $P_\mu = \int_0^\ell d\sigma \pi_\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{2} \int_0^\ell d\sigma [\alpha'_\mu(\sigma + \tau) - \beta'_\mu(\sigma - \tau)]$ - четырех-импульс струны в отсутствие поля. Множители R_1 и R_2 имеют резонансный вид, резонансы возникают при $(Pk)\ell = (2n+1)\pi$.

Решения (39) для ψ'_1 и ψ'_2 , выраженные через α' и β' , имеют важное свойство, состоящее в том, что α'_μ и β'_μ могут быть также выражены через $\psi'_{1\mu}$ и $\psi'_{2\mu}$. Легко проверить, что

$$\alpha'_\mu(\beta) = \psi'_{1\mu}(\beta) - ig(k_\mu \varepsilon_\nu - k_\nu \varepsilon_\mu) \psi'_{1\nu} e^{ik\psi_1} R_1 - k_\mu (k\psi_1)_\nu \frac{R_1^2}{2} e^{2ik\psi_1},$$

$$\beta'_\mu(\alpha) = \psi'_{2\mu}(\alpha) - ig(k_\mu \varepsilon_\nu - k_\nu \varepsilon_\mu) \psi'_{2\nu} e^{ik\psi_2} R_2 - k_\mu (k\psi_2)_\nu \frac{R_2^2}{2} e^{2ik\psi_2}.$$

Это дает возможность по начальным значениям $\psi_{1\mu}$ и $\psi_{2\mu}$ найти начальные значения α_μ и β_μ и затем, продолжая их, как для свободной струны, найти с помощью (39) продолженные значения $\psi_{1\mu}$ и $\psi_{2\mu}$. Удобно выбрать в условиях калибровки (27), (28) в качестве вектора n вектор, пропорциональный k , тогда $n_\mu F_{\mu\nu} = 0$, и (27), (28) принимают следующий вид

$$n \dot{x} = \frac{1}{2} n (\psi_1' + \psi_2') = \frac{1}{2} n (\alpha' + \beta') = 0,$$

$$n \dot{x} = \frac{1}{2} n (\psi_1' - \psi_2') = \frac{1}{2} n (\alpha' - \beta') = \mathcal{P}.$$

Отсюда следует, что

$$k \alpha' = \mathcal{P} F \quad \text{или} \quad k \alpha = \mathcal{P} F \beta,$$

$$k \beta' = -\mathcal{P} F \quad \text{или} \quad k \beta = -\mathcal{P} F \alpha.$$

Выбирая изотропный вектор k_μ в виде $k_\mu = (F, 0, 0, F)$ (волна распространяется вдоль оси z), получаем условие поперечной калибровки $k \dot{x} = k \ddot{x} = 0$ и $k \dot{x} = k \ddot{x} = \mathcal{P}$.

При выбранной калибровке легко найти плотность четырех-импульса струны $\pi^\mu = \dot{x}^\mu + g F^{\mu\nu} \dot{x}_\nu = \dot{x}^\mu + i g k^\mu (\varepsilon \dot{x})$,

однако полный импульс $P_\mu = \int d\sigma \pi_\mu$ здесь не сохраняется.

Л и т е р а т у р а

1. Р.Фейнман. Взаимодействие фотонов с адронами. "Мир", М., 1975.
В.П.Шелест, Г.М.Зиновьев, В.А.Миранский. Модели сильновзаимодействующих элементарных частиц, т.1, Атомиздат, М., 1975.
2. J.Kogut, L.Susskind. Physics Reports, 80, No 2 (1973).
J.F.Willemsen. The Beginner's String. Preprint SLAC-PUB-1460 (1974).
3. G.Veneziano. Physics Reports, 92, n.4 (1974).
J.H.Schwarz. Physics Reports, 80, n.4 (1973).
В.П.Шелест, Г.М.Зиновьев, В.А.Миранский. Модели сильновзаимодействующих частиц, т.2, Атомиздат, М., 1976.
4. Y.Nambu. Lectures at the Copenhagen Symposium (1970).
5. Ф.Курант, Д.Гильберт. "Методы математической физики", т.2, Гостехиздат (1951).
В.Вляшке. "Введение в дифференциальную геометрию", ИИТЛ, Москва (1957).

6. Б.М.Барбашов, Н.А.Черников. ЖЭТФ, т.50, 1296 (1966).
7. М.Born. Proc.Roy.Soc. A143, 410 (1934).
 М.Born, L. Infeld. Proc. Roy. Soc. A144, 425 (1934).
 W.Heisenberg. Zs. f. Phys. 133, 65 (1972).
8. C.Rebbi. Physics Reports, 120, N 1 (1974).
 J.Scherk. Rev. of Modern Phys., 47, N 1, 123 (1975).
9. Б.М.Барбашов, Н.А.Черников. Классическая динамика релятивистской струны. Препринт ОИЯИ Р2-7852, Дубна (1974).
10. П.А.М.Дирак. Лекции по квантовой механике. "Мир", М., 1968.
11. J.L.Gervais, B.Sakita. Phys.Rev.Letters. 30, 716 (1973).
12. C.Marshall, P.Ramond. Nuclear Physics, B85, 375 (1975).
13. S.Mandelstam. Physics Reports, 130, N 6 (1974).
14. Л.Д.Фаддеев. ТМФ, I, 3 (1969).
 A.J.Hanson, T.Regge. Annals of Physics, 87, No 2, 498 (1974).
15. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля, "Наука", 1967.
16. M.Ademollo et al. Nuovo Cimento, v.21, n. 1, 77 (1974).

СПОНТАННЫЕ ВАКУУМНЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ДУАЛЬНОЙ МОДЕЛИ НЕВЬЮ-ШВАРЦА

Д.В.Волков, А.А.Желтухин, А.И.Пашнев

Харьковский физико-технический институт АН УССР

Проблема спонтанных вакуумных переходов в дуальных моделях, сформированная в /1,2/, недавно была решена для случаев дуальной модели Венециано (ДМВ) с интерсептом $\alpha_0 = -1$ /3/, ДМВ с произвольным интерсептом /4,5/ и частного случая дуальной М-модели /6/.

Метод, используемый в работах /1-6/, состоит в суммировании по индуцированным вакуумным переходам (ИВП) или шпурмонам и в последующем аналитическом продолжении по константе ИВП переопределенной S -матрицы на другие листы римановой поверхности.

Процедура аналитического продолжения по константе ИВП обычно используется для изучения спонтанных вакуумных переходов (СВП) в лагранжевом формализме теории поля. Однако в случае дуальных моделей процедура аналитического продолжения приводит к новым существенным моментам. Наиболее важный из них состоит в появлении дополнительного вырождения резонансных состояний, которое не может быть обнаружено обычным факторизационным методом. Как показано в работах /4,5/, это дополнительное вырождение в спектре резонансных состояний проявляется в расщеплении всех дочерних траекторий на "истинные дочери" и на так называемые "примешки", причем при неравной нулю константе ИВП эти последние отстоят на нецелочисленном расстоянии от исходной материнской траектории.

S -матрица, перестроенная с учетом этого расщепления резонансных состояний, обладает определенной внутренней структурой, соответствующей наличию бесконечного числа сохраняющихся гиперзарядов. Такая структура может быть интерпретирована в терминах скалярных кварков с различными массами, размещенных на внешних концах дуальных струн.

Аналитическое продолжение S -матрицы по константе ИВП смещает, перегруппировывает непрерывным образом расщепление траектории, так что на других римановых листах интерсепта при -

нимают другие значения. В терминах кварков перестройка S -матрицы, вследствие ее аналитического продолжения на другие римановы листы, может быть сформулирована в форме простого правила, предписывающего изменение знака квадратов масс некоторых кварков ($m_i^2 \rightarrow -m_i^2$ правило). Как следствие этого правила, для произвольного начального значения λ_0 существует такой путь аналитического продолжения, который приводит к результирующей S -матрице, свободной от тахионов.

В важном частном случае, когда $\lambda_0 = 1$, ведущие траектории будут вырожденными после спонтанного нарушения и симметрия модели становится $SU(2) \times U(1) \times U(1) \times \dots$ - группой симметрии.

В случае произвольного интерсента траектории λ_0 в ДМВ присутствуют духовые состояния, которые остаются и после учета СВН. Как известно, при частном значении $\lambda_0 = 1$ в ДМВ духи отсутствуют. СВН изменяют значение интерсентов траекторий, в результате чего в индивидуальных дуальных амплитудах духовые состояния появляются и в этом важном частном случае. Сохранятся ли духовые состояния после симметризации дуальных амплитуд по перестановкам внешних частиц, этот вопрос в настоящее время остается открытым.

В настоящей работе проводится аналогичное рассмотрение СВН в дуальной модели Невью-Кварда (ДМНН).

Как показано в работах ^{1,2}, суммирование по ИВН приводит к следующему переопределению n -точечных B -функций

$$B_n^R(\beta; p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{N_i=0}^{\infty} \beta^{N_1+N_2+\dots+N_n} B_{n, N_1, \dots, N_n}(p_1, \overbrace{0, \dots, 0}^{N_1}, p_2, \overbrace{0, \dots, 0}^{N_2}, \dots, p_n, \dots), \quad (I)$$

($i=1, \dots, n$)

где β - константа индуцированного перехода шпурнона в вакуум.

Суммирование в выражении (I) удобно выполнять в n последовательных этапов. На первом этапе проведем суммирование по всем шпурнонам между i -ой и $i+1$ -ой частицами. На следующих этапах аналогичное суммирование выполняем последовательно между всеми соседними частицами.

Циркулярная сумма, соответствующая первому этапу, имеет следующий вид (см. также рис. I):

$$B_n^{R_i}(\beta; p_1, \dots, p_n) = \sum_{N=0}^{\infty} \beta^N B_{n+N}(p_1, \dots, p_i, \overbrace{0, \dots, 0}^N, p_{i+1}, \dots, p_n). \quad (2)$$

Если исходная n -точечная B -функция имеет вид

$$B_n(p_1, \dots, p_n) = \frac{1}{\Omega} \int d\hat{Z}^{(n)} \prod_{j < k} \hat{Z}_{jk}^{-\alpha_{jk}-1}, \quad (3)$$

в котором каждой частице с импульсом p_i соответствует интегрирование по переменной \hat{Z}_i , и подынтегральное выражение инвариантно относительно некоторой группы преобразований переменных \hat{Z}_i , то суммирование по N в (2) приводит к возникновению в подынтегральном выражении в формуле (3) дополнительной функции $R(\hat{Z}_{i-1}, \hat{Z}_i, \hat{Z}_{i+1}, \hat{Z}_{i+2}; \alpha_i, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}; \beta)$, зависящей инвариантным образом от четырех соседних переменных \hat{Z}_{i-1} , \hat{Z}_i , \hat{Z}_{i+1} , \hat{Z}_{i+2} и от величин $\alpha_i = \alpha_0 + \alpha' p_i^2$. Тот факт, что функция R не зависит от числа внешних частиц n , позволяет написать для этой функции интегральное уравнение. Для получения интегрального уравнения можно использовать соотношение, связывающее перестроенные амплитуды с отличающимися числом внешних частиц

$$B_n^{R_i}(p_1, \dots, p_n) = B_n(p_1, \dots, p_n) + \beta B_{n+1}^{R_i}(p_1, \dots, p_i, 0, p_{i+1}, \dots, p_n). \quad (4)$$

Это соотношение непосредственно вытекает из соотношения (2).

Все сказанное выше относится в равной степени ко всем дуальным моделям. Остановимся подробнее на дуальной модели Невью-Шварца (ДМНШ). Роль переменных \hat{Z}_i играют в этом случае пары (z_i, φ_i) ^{/8/}, где φ_i - антикоммутирующие переменные с правилом интегрирования

$$\int \varphi_i d\varphi_i = 1, \quad \int d\varphi_i = 0. \quad (5)$$

Как было показано Фарли, амплитуда в ДМНШ инварианта относительно группы проективных преобразований

$$z'_i = \frac{az_i + b}{cz_i + d}, \quad \varphi'_i = \frac{\varphi_i}{cz_i + d}, \quad (ad - bc = 1). \quad (6)$$

Здесь мы хотим отметить, что в действительности амплитуда ДНН обладает более широкой группой симметрии, включающей наряду с преобразованиями (6) собственно суперпроективные преобразования

$$Z'_i = Z_i + \varphi_i(\xi + \eta Z_i); \quad \varphi'_i = \varphi_i + \xi + \eta Z_i + \frac{1}{2} \varphi_i \xi \eta, \quad (7)$$

где ξ и η — два независимых антикоммутирующих параметра преобразований. Инвариантами этой группы преобразований являются обобщенные ангармонические отношения

$$\hat{Z}_{jk} = \frac{(Z_k - Z_j - \varphi_k \varphi_j)(Z_{k+1} - Z_{j-1} - \varphi_{k+1} \varphi_{j-1})}{(Z_{k+1} - Z_j - \varphi_{k+1} \varphi_j)(Z_k - Z_{j-1} - \varphi_k \varphi_{j-1})} \quad (8)$$

и специфические трехточечные инварианты

$$\begin{aligned} \Phi_i = & \varphi_{i-1} \sqrt{\frac{Z_{i+1} - Z_i}{(Z_{i+1} - Z_{i-1})(Z_i - Z_{i-1})}} - \varphi_i \sqrt{\frac{Z_{i+1} - Z_{i-1}}{(Z_{i+1} - Z_i)(Z_i - Z_{i-1})}} + \\ & + \varphi_{i+1} \sqrt{\frac{(Z_i - Z_{i-1})}{(Z_{i+1} - Z_i)(Z_{i+1} - Z_{i-1})}} + \frac{1}{2} \frac{\varphi_{i-1} \varphi_i \varphi_{i+1}}{\sqrt{(Z_{i+1} - Z_i)(Z_{i+1} - Z_{i-1})(Z_i - Z_{i-1})}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, в общем случае функция R зависит от Φ_i , Φ_{i+1} и

$$\tilde{Z}_{i+1} = \frac{(Z_{i+2} - Z_{i+1} - \varphi_{i+2} \varphi_{i+1})(Z_{i+1} - Z_i - \varphi_{i+1} \varphi_i)}{(Z_{i+2} - Z_i - \varphi_{i+2} \varphi_i)(Z_{i+1} - Z_{i-1} - \varphi_{i+1} \varphi_{i-1})} = \prod_{\ell=2}^{n-2} \hat{Z}_{i+1, i+\ell} \quad (10)$$

и может быть представлена следующим разложением

$$\begin{aligned} R(\tilde{Z}_{i+1}, \Phi_i, \Phi_{i+1}; d_i, d_{i+1}, d_0; \beta) = & f_0(\tilde{Z}_{i+1}, d_i, d_{i+1}, d_0; \beta) + \\ & + \Phi_i f_1(\tilde{Z}_{i+1}, d_i, d_{i+1}, d_0; \beta) + \Phi_{i+1} f_2(\tilde{Z}_{i+1}, d_i, d_{i+1}, d_0; \beta) + \\ & + \Phi_i \Phi_{i+1} f_3(\tilde{Z}_{i+1}, d_i, d_{i+1}, d_0; \beta). \end{aligned} \quad (11)$$

Решая интегральное уравнение для функции R , можно найти следующий вид для функций f_0, f_1, f_2, f_3 :

$$\begin{aligned} f_0(Z, d_i, d_{i+1}, d_0; \beta) = & \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\Gamma(-d_i - \frac{1}{2})\Gamma(-d_{i+1} - \frac{1}{2})} \int_{\gamma} ds K(s, d_0, \beta) \times \\ & \times \left\{ f_0(s, Z; d_i, d_{i+1}, d_0) - f_0(s + \frac{1}{2}, Z; d_i, d_{i+1}, d_0; \beta) \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
f_1(Z; \alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_0; \beta) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\beta}{\Gamma(-\alpha_i - \frac{1}{2}) \Gamma(-\alpha_{i+1} - \frac{1}{2}) \Gamma^2(-\alpha_0 - \frac{1}{2})} \int_{\gamma} dS K(S, \alpha_0, \beta) \times \\
&\times \{ f_1(S, Z; \alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_0; \beta) - f_1(S + \frac{1}{2}, Z; \alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_0) \} \\
f_2(Z; \alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_0; \beta) &= -f_1(Z; \alpha_{i+1}, \alpha_i; \alpha_0; \beta) \\
f_3(Z; \alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_0; \beta) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\beta^2}{\Gamma(-\alpha_i - \frac{1}{2}) \Gamma(-\alpha_{i+1} - \frac{1}{2}) \Gamma^2(-\alpha_0 - \frac{1}{2})} \int_{\gamma} dS K(S, \alpha_0, \beta) \times \\
&\times \{ f_3(S; Z; \alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_0) - f_3(S + \frac{1}{2}, Z; \alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_0) \},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
K(S, \alpha_0, \beta) &= \frac{\Gamma(-S) \Gamma(\frac{1}{2} - S) \Gamma(S - \alpha_0) \Gamma(S - \alpha_0 - \frac{1}{2})}{1 - \beta^2 \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - S) \Gamma(-S) \Gamma(S - \alpha_0) \Gamma(S - \alpha_0 - \frac{1}{2})}{\Gamma^2(-\alpha_0 - \frac{1}{2})}} = \\
&= \frac{2^{2\alpha_0+3} \Gamma(-2S) \Gamma(2S - 2\alpha_0 - 1)}{1 - 2^{2\alpha_0+3} \pi \beta^2 \frac{\Gamma(-2S) \Gamma(2S - 2\alpha_0 - 1)}{\Gamma^2(-\alpha_0 - \frac{1}{2})}} \quad (13)
\end{aligned}$$

и функции $f_n(S, Z; \alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_0)$ определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
f_0(S, Z; \alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_0) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2} - S) \Gamma(S - \alpha_0 - \frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(S - \alpha_i - \frac{1}{2} + n) \Gamma(S - \alpha_{i+1} - \frac{1}{2} + n)}{\Gamma(2S - \alpha_0 + n) n!} Z^{S+n} \\
f_1(S, Z; \alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(S - \alpha_i + n) \Gamma(S - \alpha_{i+1} - \frac{1}{2} + n)}{\Gamma(2S - \alpha_0 + n) n!} Z^{S+n} \quad (14) \\
f_3(S, Z; \alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_0) &= \Gamma(\frac{1}{2} - S) \Gamma(S - \alpha_0 - \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(S - \alpha_i + n) \Gamma(S - \alpha_{i+1} + n)}{\Gamma(2S - \alpha_0 + n) n!} Z^{S+n}
\end{aligned}$$

Контур интегрирования γ по переменной S обходит все корни уравнения

$$1 - 2^{2\alpha_0+3} \pi \beta^2 \frac{\Gamma(-2S) \Gamma(2S - 2\alpha_0 - 1)}{\Gamma^2(-\alpha_0 - \frac{1}{2})} = 0, \quad (15)$$

которые при непрерывном изменении β вдоль контура, начинающегося в точке $\beta=0$, совпадают при $\beta=0$ с корнями

$$S_n(0) = n, \quad (n = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots). \quad (\text{рис.2})$$

Используя явный вид функции R (II), мы можем выполнить последующие суммирования по ИВН между $(i+1)$ -м и $(i+2)$ -м частицами, $(i+2)$ -м и $(i+3)$ и т.д. Это позволяет найти окончательное выражение для перестроенной в результате ИВН дуальной амплитуды Невь-Шварца.

Перестроенная n -точечная амплитуда Невь-Шварца представляется в виде n -кратного контурного интеграла или, эквивалентно, в виде n -кратной суммы бесконечного числа слагаемых, определяемых вычетами подинтегрального выражения в корнях уравнения (I5) и имеет вид:

$$B_n^R(\beta; p_1, \dots, p_n) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\prod d\bar{z}_j d\varphi_j}{\prod_{j=1}^n (\bar{z}_{j+2} - \bar{z}_j - \varphi_{j+2} \varphi_j)^{\frac{1}{2}}} \prod_{j < k} \hat{z}_{jk}^{-d_{jk}-1} R(\hat{z}_i; d_i; d_0; \beta),$$

$$\stackrel{\text{ГДЭ}}{R}(\hat{z}_i; d_i; d_0; \beta) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int ds_1 ds_2 \dots ds_n \prod_{i=1}^n K(s_i; d_0; \beta) \times$$

$$\times \sum_{n_1, n_2, \dots, n_n=0}^{\infty} \left\{ A_1(s_n, s_1) B_1(s_1) \dots A_n(s_{n-1}, s_n) B_n(s_n) - (s_1 \rightarrow s_1 + \frac{1}{2}) - (s_2 \rightarrow s_2 + \frac{1}{2}) - \dots - (-1)^n (s_1 \rightarrow s_1 + \frac{1}{2}, s_2 \rightarrow s_2 + \frac{1}{2}, \dots, s_n \rightarrow s_n + \frac{1}{2}) \right\}, \quad (\text{I6})$$

$$A_i(s_{i-1}, s_i) = \frac{1}{\Gamma(-d_i - \frac{1}{2})} \left\{ \left(1 - \beta^2 \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - s_i) \Gamma(s_i - d_0 - \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} - s_i) \Gamma(s_i; d_0 - \frac{1}{2})}{\Gamma^2(-d_0 - \frac{1}{2})}\right) \Gamma(d_i + s_{i-1} + s_i + n_{i-1} + \frac{1}{2}) + \right.$$

$$\left. + (-1)^{n-i+1} \beta \phi_i \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2} - s_{i-1}) \Gamma(s_{i-1} - d_0 - \frac{1}{2})}{\Gamma(-d_0 - \frac{1}{2})} + \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - s_i) \Gamma(s_i - d_0 - \frac{1}{2})}{\Gamma(-d_0 - \frac{1}{2})} \right) \Gamma(-d_i + s_{i-1} + s_i + n_{i-1} + n_i) \right\},$$

$$B_i(s_i) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2} - s_i) \Gamma(s_i - d_0 - \frac{1}{2}) \Gamma(n_i + 2s_i - d_0) n_i!} \left[\frac{(\bar{z}_i - \bar{z}_{i-1} - \varphi_i \varphi_{i-1})(\bar{z}_{i+2} - \bar{z}_{i+1} - \varphi_{i+2} \varphi_{i+1})}{(\bar{z}_{i+1} - \bar{z}_{i-1} - \varphi_{i+1} \varphi_{i-1})(\bar{z}_{i+2} - \bar{z}_i - \varphi_{i+2} \varphi_i)} \right]^{s_i + n_i}.$$

Анализ этого выражения приводит к кварковой интерпретации структуры перестроенной амплитуды ДМН. При этом катодный корень $S_n(\beta^2)$ уравнения (I5) связывается с сохраняющимся зарядом кварка i -ого сорта. Спектр масс резонансных состояний в перестроенной ДМН полностью определяется указанной кварковой структурой и имеет вид

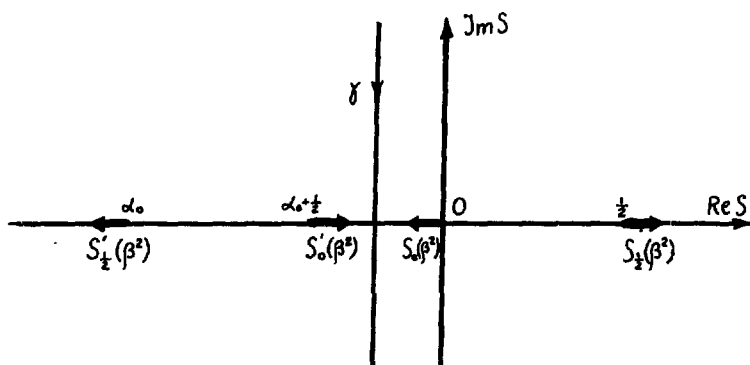


Рис.1. Движение корней уравнения (15) в плоскости S и контур интегрирования γ .

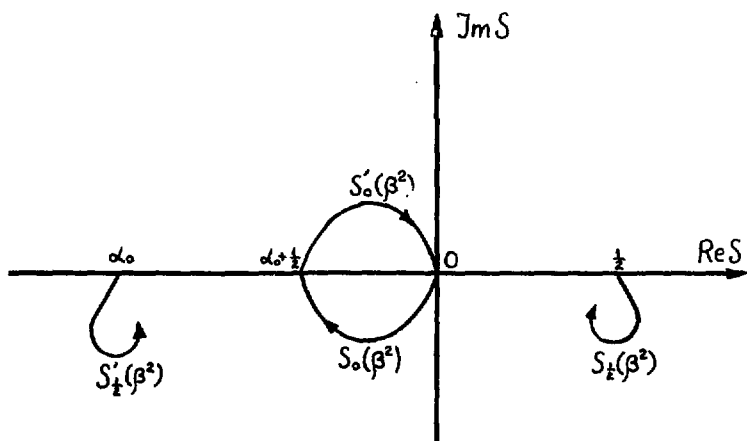


Рис.2. Движение корней уравнения (15) при обходе ближайшей точки ветвления.

$$\text{или} \quad M^2 = M_m^2 + M_n^2, \quad (17)$$

$$M^2 = -\frac{1}{2} + M_m^2 + M_n^2,$$

где $M^2(m, n)$ - квадрат массы резонанса, составленного из m -ого кварка и n -ого антикварка, расположенного на \mathbb{P} или φ - мезонных траекториях или на дочерних траекториях, а

$$M_m^2 = -\frac{\alpha_0 + \frac{1}{2}}{2} + S_m(\beta^2) \approx -\frac{\alpha_0 + \frac{1}{2}}{2} + m + (-1)^m \frac{\Gamma(2m - 2\alpha_0 - 1)}{2(2m)! \Gamma^2(-\alpha_0 - \frac{1}{2})} \beta^2 \dots (18)$$

равно квадрату массы m -ого кварка.

Зависимость $M^2(m, n)$ от m и n приводит, как это вытекает из формул (17, 18), к сдвигу \mathbb{P} - и φ -мезонных траекторий на величину $2S_0(\beta^2)$ и к расщеплению и сдвигу их дочерних траекторий. Это позволяет сделать вывод о том, что спектр резонансных состояний в ДМНШ обладает дополнительным вырождением, связанным с наличием бесконечного числа кварков с возрастающей массой, которое не может быть обнаружено обычным факторизационным методом. ИВП играет роль возмущения, снимающего это вырождение, а константа β^2 характеризует его интенсивность. В этом смысле роль ИВП в ДМ аналогична роли магнитного поля H в квантовой механике, где последнее позволяет вскрыть дополнительные степени свободы, связанные со спиновой структурой. Учет вскрытой кварковой структуры приводит к установлению $U(1) \times U(1) \times \dots$ группы симметрии дуальных амплитуд в ДМНШ. Для рассмотрения спонтанных вакуумных переходов в ДМНШ мы должны рассмотреть аналитическое продолжение перестроенной амплитуды Π -Ш по произвольному контуру в плоскости β^2 , начинаемому в точке $\beta=0$. Процедура такого продолжения уже определена представлением (16) и для ДМВ рассмотрена в работах [5/

В представлении (16) полюса подынтегрального выражения являются функцией параметра β^2 , определяемой из уравнения (15), и при $\beta=0$ совпадает либо с корнями

$$S_m(0) = m, \quad (m = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots), \quad (19)$$

либо

$$S'_m(0) = -\alpha_0 + \frac{1}{2} - m, \quad (m = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots), \quad (20)$$

которые на S -плоскости разделены контуром интегрирования γ . При изменении параметра β^2 корни $S_m(\beta^2)$ и $S'_m(\beta^2)$ движутся непрерывным образом в плоскости S . В общем случае обходу по произвольному замкнутому контуру в плоскости β^2 соответствует некоторая перестановка корней, определяемых выражениями (19, 20).

Для рассмотрения СВП существенны такие движения корней $S_m(\beta^2)$ и $S'_m(\beta^2)$, в результате которых некоторые из корней $S_m(0)$ переставляются с некоторыми из корней $S'_m(0)$. При непрерывном изменении параметра β^2 такие корни сталкиваются с контуром интегрирования γ , в результате чего после обхода контура C контур γ деформируется, а интегралы, входящие в (16), получают некоторую добавку по сравнению с их исходными значениями.

Если такие обходы существуют, то амплитуда (16) является многозначной функцией параметра β^2 , а ее значения при $\beta=0$, не совпадающие с исходными значениями, соответствуют различным спонтанным переходам.

Рассмотрим обход по замкнутому контуру в плоскости β^2 , при котором какие-то из значений $S_m(0) = m$ переходят в симметричные относительно точки $S = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \frac{1}{2})$ значения, т.е.

$m \rightarrow \alpha_0 + \frac{1}{2} - m$, в результате чего квадраты эффективных масс кварков, соответствующие данным m , меняют свой знак, т.е.

$\mu_m^2 \rightarrow -\mu_m^2$. Аналогичный эффект имеет место и в $\lambda\varphi^3$ теории, где в результате спонтанных переходов квадрат массы скалярной частицы меняет знак на обратный.

Устранение тахионов

Пусть $2n - \frac{1}{2} < \alpha_0 \leq 2n + \frac{1}{2}$, ($n = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$), тогда $\mu_m^2 < 0$ при $m \leq n$, ($m = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots, n$) и в исходной модели Нельз-Шварца имеются тахионы. Выбирая контур обхода в плоскости β^2 так, чтобы в результате обхода $2n+1$ первых кварков изменили знак квадрата массы на противоположный, $\mu_m^2 \rightarrow -\mu_m^2 = \frac{\alpha_0 + \frac{1}{2} - m}{2} > 0$ ($m \leq n$), получим следующие значения для интерсептов главных Π и φ траекторий и их траекторий приемшей:

$$\begin{aligned}
 \alpha_0^{\mathcal{X}}(k, \ell) &= \alpha_0 + \frac{1}{2} - k - \ell & (k, \ell > n) \\
 \alpha_0^{\mathcal{X}}(k, \ell) &= -k + \ell & (k > n, \ell \leq n) \\
 \alpha_0^{\mathcal{X}}(k, \ell) &= k - \ell & (k \leq n, \ell > n) \\
 \alpha_0^{\mathcal{X}}(k, \ell) &= -\alpha_0 - \frac{1}{2} + k + \ell & (k, \ell \leq n)
 \end{aligned} \tag{21}$$

■

$$\begin{aligned}
 \alpha_0^{\mathcal{Y}}(k, \ell) &= \alpha_0 + 1 - k - \ell & (k, \ell > n) \\
 \alpha_0^{\mathcal{Y}}(k, \ell) &= \frac{1}{2} - k + \ell & (k > n, \ell \leq n) \\
 \alpha_0^{\mathcal{Y}}(k, \ell) &= \frac{1}{2} + k - \ell & (k \leq n, \ell > n) \\
 \alpha_0^{\mathcal{Y}}(k, \ell) &= -\alpha_0 + k + \ell & (k, \ell \leq n),
 \end{aligned} \tag{22}$$

т.е. во всех случаях $\alpha_0^{\mathcal{X}}(k, \ell) \leq 0$, $\alpha_0^{\mathcal{Y}}(k, \ell) \leq \frac{1}{2}$, что гарантирует отсутствие тахионов в результирующих дуальных амплитудах, если учесть, что состояние с нулевым спином на φ -мезонной траектории всегда отщепляется.

$$\alpha_0 = 0. \quad SU(2) \times SU(2) \times U(1) \times U(1) \times \dots \quad \text{симметрия.}$$

Оригинальной модели Невью-Шварца соответствует значение $\alpha_0 = 0$. При $\alpha_0 = 0$ для траекторий, определяемых соотношениями (21) и (22), при $k, \ell = 0, \frac{1}{2}$ получаем:

$$\alpha_0^{\mathcal{X}}(0, 0) = \alpha_0^{\mathcal{X}}(0, \frac{1}{2}) = \alpha_0^{\mathcal{X}}(\frac{1}{2}, 0) = \alpha_0^{\mathcal{X}}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} \tag{23}$$

$$\alpha_0^{\mathcal{Y}}(0, 0) = \alpha_0^{\mathcal{Y}}(0, \frac{1}{2}) = \alpha_0^{\mathcal{Y}}(\frac{1}{2}, 0) = \alpha_0^{\mathcal{Y}}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0, \tag{24}$$

т.е. траектории $\alpha_0^{\mathcal{X}}(k, \ell), \alpha_0^{\mathcal{Y}}(k, \ell)$, занимавшие до спонтанного перехода различные положения, после спонтанного перехода принимают одинаковое положение при $k, \ell = 0, \frac{1}{2}$ и являются вырожденными (см. рис. 3). При этом интерсепт φ -мезонной траектории принимает значение, равное нулю, так что квадрат массы φ -мезона становится равным 1 ГэВ^2 . Появление массы у φ -мезона, происходящее вследствие спонтанных вакуумных переходов, свидетельствует о наличии механизма Хиггса в ДМНН. Возможность существования механизма Хиггса в ДН предсказывалась многими авторами, однако непосредственно реализовать его не удавалось из-за возникших трудностей математического характера /8/.

Вырождение траекторий (23) и (24) обусловлено тем, что квадраты масс кварков с $m=0$ и $m=\frac{1}{2}$ после спонтанного пе -

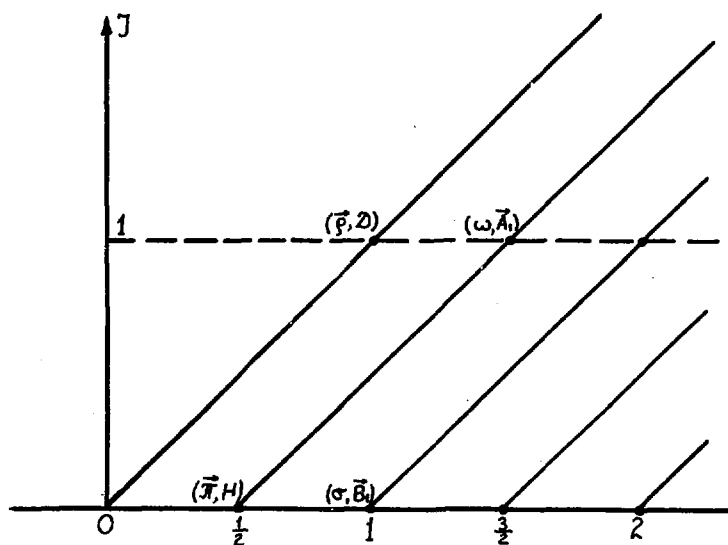


Рис.3. Положение вырожденных траекторий частиц, приведенных в таблице I.

рехода приобретают одинаковые значения. Последнее обстоятельство связано с поведением корней $S_0(\beta^3)$ и $S_{\frac{1}{2}}(\beta^2)$ в плоскости S . Как непосредственно видно из рис. I, при $\alpha_0 = 0$ конечные положения корней $S_0(\beta^3)$ и $S_{\frac{1}{2}}(\beta^2)$ совпадают. Совпадение положений корней $S_0(\beta^1)$ и $S_{\frac{1}{2}}(\beta^1)$ приводит, в свою очередь, к совпадению всех свойств кварковых состояний, соответствующих этим корням, и к повышению симметрии дуальных амплитуд, до симметрии $SU(2) \times U(1) \times U(1) \times \dots$ - группы.

При этом 0 -й и $\frac{1}{2}$ -й кварки относятся к дублетному представлению $SU(2)$ - группы, а частицы, принадлежащие траекториям (23) или (24), соответствуют $SU(2)$ - синглетным и триплетным состояниям. Причем заряженные частицы расположены на траекториях с интерсептами, равными $\alpha_0^{x,q}(0, \frac{1}{2})$ и $\alpha_0^{x,q}(\frac{1}{2}, 0)$, а частицы с нулевыми гиперзарядами расположены на траекториях с интерсептами $\alpha_0^{x,q}(0, 0)$ или $\alpha_0^{x,q}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. В случае, когда внешние частицы в дуальных амплитудах принадлежат траекториям (23) или (24), зависимость дуальных амплитуд от внутренних квантовых чисел факторизуется в виде шпура от изоспинных матриц T_i ($i = 0, 1, 2, 3$) и соответствует обычному введению в дуальные амплитуды изоспинных состояний по методу Чана-Патона. Отметим, что на возможную связь между дуальностью с одной стороны и внутренними симметриями и кварками с другой указывалось в ряде работ [8/ж]. Установив наличие $SU(2)$ - симметрии для состояний, принадлежащих траекториям (23), (24) и их дочерним траекториям, рассмотрим, какие частицы соответствуют этим состояниям. Для этого заметим, что все состояния, расположенные на траекториях с интерсептами, равными $\alpha_0^q(m, m)$, имеют положительную G - четность, а все состояния на траекториях с интерсептами $\alpha_0^x(m, m)$ имеют отрицательную G - четность. Это непосредственно следует из рассмотрения структуры отдельных слагаемых, присутствующих в выражении для амплитуды $B_q^R(p_1, p_2, p_3, p_4, \beta)$. Аналогичным образом

*) Приведем в качестве примера следующее высказывание Детлефсена и Нилсена:

"We believe that there is some deep truth in the statement that dualitylike principles imply symmetry - including $SU(2)$ -symmetry".

можно показать, что состояния, принадлежащие траекториям $\alpha_0^T(m, n)$ ($\alpha_0^P(m, n)$), имеют G - четность, противоположную G -четности состояний, принадлежащих траекториям с интерсептами $\alpha_0^S(m, n)$ ($\alpha_0^T(m, n)$). Установив этим способом абсолютную G - четность состояний, расположенных на траекториях с интерсептами, равными $\alpha_0^T(m, n)$, $\alpha_0^P(m, n)$ с $m \neq n$, не удается. Замечая, однако, что траектории с интерсептами, равными $\alpha_0^P(0, 0)$, $\alpha_0^S(0, \frac{1}{2})$ и $\alpha_0^S(\frac{1}{2}, 0)$, содержат изотриплет мезонов, мы припишем состояниям, расположенным на этих траекториях, положительную G - четность. Тогда G - четности остальных состояний оказываются полностью определенными. Зная G - четность и изотопический спин состояний, принадлежащих вращенным траекториям (23), (24) и их первым дочерним траекториям, мы можем идентифицировать эти состояния со следующими, низлежащими скалярными, псевдоскалярными, векторными и аксиально-векторными мезонами (см. таблицу I).

Из таблицы следует известные соотношения между массами мезонов, обычно получаемые из рассмотрения правил сумм при высоких энергиях или при алгебраической реализации киральной

$$SU(2) \times SU(2) \quad \text{симметрия} \quad /9/$$

$$m_\rho = m_\omega$$

$$m_\pi^2 + m_\sigma^2 = m_\pi^2 + m_\Delta^2$$

$$m_\Delta^2 = 3m_\pi^2 - m_\omega^2 - m_\pi^2$$

Изучая влеты в полисах 4-точечных B_4^K функций и 5-точечных функций B_5^K , соответствующих различным внутренним и внешним состояниям, приведенным в таблице I, мы можем получить аналогичные соотношения между константами связей этих состояний. Это позволяет нам заключить, что окончательная симметрия, возникающая в ДМН при рассмотрении спонтанных вакуумных переходов, является $SU(2) \times SU(2) \times U(1) \times U(1) \times \dots$ симметрией.

Литература

1. Д.В.Волков, А.А.Хелтухин, А.И.Пашнев. ЯФ, 18, 902, 1973.
2. K.Bardakci, Nucl.Phys., B68, 331, 1974; B70, 397, 1974.
3. Д.В.Волков, А.А.Хелтухин, А.И.Пашнев. ЯФ, 21, 611, 1975.

4. Д.В.Волков, А.А.Желтухин, А.И.Пашнев. ЯФ, 22, 1225, 1975
5. Д.В.Волков, А.А.Желтухин, А.И.Пашнев. Препринт ХФТИ 75-5, 1975.
Д.В.Волков. Препринт ОИЯИ Р2-8765, Дубна, 1975.
6. Bardakci K., Halpern M. Dual M-models, Preprint, Berkeley, 1973.
7. Fairlie D.V., Martin D. Nuovo Cim. 18A, 373, 1973.
8. E. Gremmer, G. Scherk. Nucl. Phys., B72, 117, 1974.
9. Weinberg S. Phys. Rev., 177, 177, 1969.
Gilman F.I., Harary H. Phys. Rev. 165, 1803, 1968.

Таблица I

Интерсепты траекторий, соответствующих кваркам	Частицы	M^2 Гэв ²	I^G	J
$\alpha_0^0(0,0), \alpha_0^0(0,\frac{1}{2}),$ $\alpha_0^0(\frac{1}{2},0), \alpha_0^0(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	ρ^0, ρ^+, ρ^- ρ	1	1^+ 0^+	1
$\alpha_0^{\pi}(0,0), \alpha_0^{\pi}(0,\frac{1}{2}),$ $\alpha_0^{\pi}(\frac{1}{2},0), \alpha_0^{\pi}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	π^0, π^+, π^- π	$\frac{1}{2}$	1^- 0^-	0
$\alpha_0^{\omega}(0,0), \alpha_0^{\omega}(0,\frac{1}{2}),$ $\alpha_0^{\omega}(\frac{1}{2},0), \alpha_0^{\omega}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	A_1^0, A_1^+, A_1^- ω	$\frac{3}{2}$	1^- 0^-	1
$\alpha_0^0(0,0)-1, \alpha_0^0(0,\frac{1}{2})-1,$ $\alpha_0^0(\frac{1}{2},0)-1, \alpha_0^0(\frac{1}{2},\frac{1}{2})-1$	B_1^0, B_1^+, B_1^- σ	1	1^+ 0^+	0
.

DUAL MODELS : CANDIDATES FOR A RENORMALIZABLE THEORY OF GRAVITY

J. Scherk

Laboratoire de Physique Théorique de l'Ecole Normale Supérieure
Paris, France

Invited talk at the International Conference on Nonlocal Quantum Field Theory, organized by the Joint Institute for Nuclear Research, USSR, Alushta 20-28 April 1976.

Abstract : Dual models are shown to be possible candidates for constructing a renormalizable theory of gravitation. Modifications of the Einstein theory occur at short distance. The problem of extra dimensions present in the known models is shown to be solvable.

I. Introduction : Our understanding of covariant quantization of gravitation ^{/1/} has been progressing tremendously during the past few years. Quantization in the so-called light-cone gauge ^{/2/} has also improved. So far, it seems that all systems of matter fields in interaction with gravity are unrenormalizable ^{/1/}. It is expected that extending supersymmetry to a local invariance ^{/3/} will improve the situation. Other possibilities, mentioned in ^{/1/} are still open, namely conformal invariant versions of gravity, or the twistor calculus. Should all these fail, however, the situation would not be quite desperate, as we wish to show that dual models could be used to construct a renormalizable theory of gravity, and further that in such a theory, Yang-Mills fields and gravitational fields would become unified.

It is shown in section II that dual models provide non-local, non-polynomial field theories which in a low-energy approximation reproduce the standard theory of gravity in interaction with gauge fields, spinors and scalar fields. In section III

we show, how extra dimensions can be interpreted as providing internal symmetry degrees of freedom, which could be identified with flavor. In section IV we discuss a simple 4-dimensional dual model. In section V we examine a simple field theoretical model (namely an Einstein-Yang-Mills-Higgs model) where spontaneous compactification of extra dimensions occur, together with removal of tachyons. In this simple model, a connection between the flavour and colour gauge group is found, and it is also understood why extra dimensions are confined to a size of the order of Planck's length.

II. Dual Models as non-local, non-polynomial field theories:

It is well known that dual models are theories of extended objects, namely of strings ^{/4//5//6/}. It is less known that they can equally be viewed as non-local, non-polynomial field theories, where only a finite number of fields appear in the action. Let us consider, for instance, the Veneziano model of open strings, with internal symmetry group $U(N)$, coupling constant g and slope α' . It contains N^2 massless vector mesons, plus an infinite number of massive particles of mass of the order $\alpha'^{-\frac{1}{2}}$. Now, let us consider the on mass-shell tree amplitudes (as given by the model) for the scattering of these massless vector mesons. These tree amplitudes can be expanded in a power series in α' . (More precisely, they are expanded in power series of $\alpha' S_{ij}$ where S_{ij} are the Mandelstam variables in each channel). At each finite order in α' the poles due to the massive particles are absent since their propagators are expanded away, while poles due to the massless vector mesons remain present :

$$\frac{1}{p^2 + \frac{M}{\alpha'}} = \begin{cases} \frac{1}{p^2} & \text{if } M = 0 \\ \frac{\alpha'}{M} \left[1 - p^2 \frac{\alpha'}{M} + \left(\frac{p^2 \alpha'}{M} \right)^2 + \dots \right] & \text{if } M \neq 0 \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Because of this, of the crossing and of the factorization properties of a dual model, at each order in the α' expansion, we can derive a Lagrangian series :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^0 + \alpha' \mathcal{L}^1 + \alpha'^2 \mathcal{L}^2 + \dots \quad (\text{II.2})$$

which reproduces the tree amplitudes of the dual model.

\mathcal{L} is obviously defined solely in term of N^2 vector fields $W_\mu^i(x)$, and is unique up to canonical changes of variables. For dimensional reasons, one sees that each term in the expansion will contain more powers in the field variables or more derivatives than the previous, and therefore, we have a non-polynomial, non-local field theory.

Only a first few terms in this series are known. The first one, \mathcal{L}^0 is the Yang-Mills Lagrangian ^{/7/} :

$$\mathcal{L}^0 = -\frac{1}{8} \text{Tr} [G_{\mu\nu} G_{\mu\nu}] , \quad (\text{II.3})$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + \frac{e}{2i} [W_\mu, W_\nu] , \quad (\text{II.4})$$

$$W_\mu = \sum_{i=1}^{N^2-1} W_\mu^i \lambda_i . \quad (\text{II.5})$$

Higher order terms, therefore represent modifications of the Yang-Mills action at short distance (derivative terms) or for strong fields (non polynomiality).

For instance, $\alpha' \mathcal{L}^1 = ie \alpha' \text{Tr} [G_{\mu\nu} G_{\nu\rho} G_{\rho\mu}]$ ^{(II.6)^{/8/}} is comparable to \mathcal{L}^0 only if $G_{\mu\nu} \sim \frac{1}{e\alpha'}$, ^{(II.7).}

\mathcal{L}^2 is known only for a $U(1)$ group, a case in which \mathcal{L}^1 vanishes. J.H. Schwarz and myself ^{/9/} have found that it is given by :

$$\alpha'^2 \mathcal{L}^2 = \alpha'^2 e^2 [(G_{\mu\nu} G_{\mu\nu})^2 - 4 G_{\mu\nu} G_{\nu\rho} G_{\rho\sigma} G_{\sigma\mu}] \quad (\text{II.8})$$

Now this is a funny result, because this factor of -4 can be also obtained by expanding to order Λ^2 the Born-Infeld Lagrangian :

$$\mathcal{L}_{\text{B.I.}} = \Lambda^{-2} (\det^{1/4} [\eta_{\mu\nu} + \Lambda G_{\mu\nu}] - 1) \quad (\text{II.9})$$

and by identifying (up to a numerical constant) Λ with $e\alpha'$.

$\mathcal{L}_{\text{B.I.}}$ cannot be the whole of \mathcal{L} yet, since \mathcal{L} must also contain derivatives of $G_{\mu\nu}$, but it could well be that it represents the whole part of it which contains no such derivatives. This conjecture is as yet unproven, but it could well be true, especially since (as remarked by Tze ^{/10/}) the Born-Infeld Lagrangian yields for large values of Λ the Nielsen-Olesen ^{/11/} theory of dual strings.

An interesting result of the dual unitarization scheme is that open strings cannot be considered alone : closed strings appear as intermediate states generated by singularities in the non-planar loop diagrams ^{/4//5//6/}. Since the spectrum of closed strings contains some massless states, in the enlarged unified model of closed and open strings there are more fields to play with and to construct the Lagrangian.

These additional fields are the following :

A massless symmetric tensor field $h_{\mu\nu}$ (graviton field)

A massless antisymmetric tensor field $A_{\mu\nu}$ (torsion field)

A massless scalar field ϕ (dilaton field).

All these are singlets with respect to the internal symmetry group $U(N)$, as is the case for all closed string states.

The $A_{\mu\nu}$ field has a rather peculiar role : in the model of closed strings alone, it describes a torsion of space-time ^{/12/}. On the other hand, when the closed string model is incorporated into the unified model, one finds that $A_{\mu\nu}$ has a direct coupling with the singlet W_{μ}^0 field. Once the mass matrix is diagonalized, one finds ^{/13//14/} that $A_{\mu\nu}$ "eats up" the W_{μ}^0 field to become a massive antisymmetric tensor or mass $\sim g\alpha'^{-\frac{1}{2}}$. So, in what follows, we shall disregard both $A_{\mu\nu}$ and W_{μ}^0 .

The $h_{\mu\nu}$ field behaves exactly as a graviton field, namely one finds ^{/8//15/} that it enters always through the combination $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + (32\pi G)^{\frac{1}{2}} h_{\mu\nu}$ where $\eta_{\mu\nu}$ is the flat space metric, and that the action has general covariance. This general covariance again follows from the gauge invariance of the model. G is determined in term of e and α' by the relation :

$$8\pi G \sim e^4 (\alpha')^{\frac{1}{2}(6-D)} \quad , \quad (II.10)$$

where D is the dimension of space-time.

This relation follows simply from the fact that gravitons are one-loop bound states of open strings (factor e^4 rather than e^2) and from dimensionality.

Because of general covariance, we can write an action which sums up non linear terms in $h_{\mu\nu}$, namely all terms having at most two derivatives in $h_{\mu\nu}$ ^{/8/}:

$$\mathcal{L}^0 = \sqrt{g} \left[-\frac{1}{16\pi G} R - \frac{1}{8} \text{Tr} [G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}] f(\phi) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right] \quad (\text{II.11})$$

In $G_{\mu\nu}$, only the W_μ^i ($i \neq 0$) fields are kept. R is the usual Ricci tensor, $g = -\det g_{\mu\nu}$, and $f(\phi) = 1 + O((8\pi G)^{\frac{1}{2}} \phi)$.

The additional terms $\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2$, etc... also should be modified to be made generally covariant, and also higher orders terms in R , of the type R^2 , $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ and so on should appear in the full action. So far none of these has been computed.

In the Neveu-Schwarz-Ramond model of open and closed strings, fermionic open strings also appear. Among their spectrum there is a massless set of fermions, which can be chosen to belong to the spinor, N dimensional representation of the $SU(N)$ group. Not surprisingly, one finds that to lowest order in α' and G , the fermion Lagrangian is given by:

$$\mathcal{L}_F^0 = \sqrt{g} i \bar{\Psi}^\mu \Gamma^\mu (\partial_\alpha)_{\kappa\epsilon} \Psi^\epsilon, \quad (\text{II.12})$$

where Γ^μ are the Dirac matrices and ∂_α is the general covariant and Yang-Mills covariant derivative.

Defining the Vierbein fields by:

$$V_\alpha{}^\mu V_\beta{}^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}$$

one has:

$$(\partial_\alpha)_{\kappa\epsilon} = V_\alpha{}^\mu \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} \sigma^{\rho\tau} V_\alpha{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} V_{\rho\nu} \right) \delta_{\kappa\epsilon} - i \frac{1}{2} \lambda_{\kappa\epsilon}^j W_{\mu,j} \right]. \quad (\text{II.13})$$

To sum up these results, we may say that, as far as long-range effects are concerned, and for sufficiently weak fields dual models reproduce the conventional theories involving gravitons, gauge vector bosons, fermions and scalars. This should come as no surprise, since these theories are in fact unique^{/16/} once the requirements of Lorentz invariance, absence of ghosts and minimality of the couplings are imposed.

At short distance, or high energy, dual models on the other hand depart radically from these local field theories.

Even though we cannot compute the higher terms in the action, the tree amplitudes of the dual model are exactly known. For instance, we can compare graviton-graviton scattering in the center of mass for fixed angle as given by Einstein's theory and as given by a dual model. Both amplitudes coincide in the tree approximation at low energy. At high energy, the amplitude in Einstein's theory grows like $E^{2/17}$, where E is the center of mass-energy, while the dual amplitude falls down exponentially. Therefore, dual models satisfy tree-unitarity (the N -point tree amplitudes grow less rapidly than E^{4-N} at fixed angles), while quantized gravity does not. Similarly, in the Regge limit, dual models have Regge behaviour, even in the tree approximation, while the Einstein's theory has fixed pole behaviour. So we may conclude that dual models which coincide at low-energy with the well-known local field theories we discussed before, have a softer behaviour than these local theories at high energies. This softer behaviour is due to the presence of the slope parameter $(\alpha')^{1/2}$ which plays the role of a fundamental length in the theory.

This softer behaviour of dual models is also reflected in the renormalizability of its one-loop diagrams ^{/18/}, while the Einstein-Yang-Mills-Dirac action fails the test of renormalizability at this one-loop level ^{/1/}. There is also good evidence for renormalizability of the dual model at the N loop level.

Because of these good features of dual models, J.H. Schwarz and myself ^{/19/} proposed the hypothesis that one of them may really be the correct theory unifying gravity with the other fundamental fields. Before one can take this hypothesis seriously, one has to be sure that all local theories including gravity are unrenormalizable. So far, this is true of all those which have been studied, but there is still the hope that a supersymmetric theory of gravity ^{/3/} may be renormalizable or some other version of the theory. Should this fail, however, we would have to take a dual model of gravity as a serious alternative.

In such a model, the unification of gravity with vector gauge field, and renormalizability are achieved at a high cost. One does not need a few vector bosons and Higgs scalars, as for

unifying electromagnetism and weak interactions, but an infinite tower of particles having masses of the order of $\alpha'^{-\frac{1}{2}}$. We can actually read the value of this mass scale from eq. (II.10). Setting $D=4$ in it, and the physical value for Newton's constant, we get : $(\alpha')^{\frac{1}{2}} \sim e^{-2} 1.6 \cdot 10^{-33} \text{ cm}$. (II.14).

So unless e is ridiculously small, deviations from the local field theory occur at the order of Planck's length (give or take a few orders of magnitude).

The price is then mostly a conceptual one since testing any theory at such a short distance is presently unthinkable. There are also some indications that one would have to pay this price anyhow. A useful criterion to construct renormalizable theories seems to be tree unitarity ^{/20/}. Applied to a system of particles of spin $0, \frac{1}{2}, 1$, this selects the spontaneously broken gauge theories as the unique solution. When spin 2 particles are included, one cannot implement tree unitarity without adding an infinite number of particles of growing spin or more and more derivative couplings ^{/20/}. Both solutions, as we have seen, are realized in a dual model.

Finally, even this conceptual price need not be paid if we find a local gauge theory, which in some limit (probably strong coupling), yields the dual model. The existence of vortex-like solutions ^{/21/} and of monopoles ^{/22/} in gauge theories makes this hypothesis rather credible ^{/23/}. So, we may have the following conceptual scheme :

Fundamental local field theory	→	Strings as classical solutions	→	Dual model contain- ing gravitons, gauge bosons, etc.	→	Today's physics as a low energy approximation
--------------------------------------	---	--------------------------------------	---	---	---	--

One of the attractive features of this scheme is that all fields postulated today (gravitons, gauge bosons of weak electromagnetic and strong interactions, quarks, leptons, Higgs scalars) and whose number is steadily increasing would be bound state fields rather than fundamental fields. Even though many aspects of the model would be untestable at present energy, the model may be constrained enough to make a certain number of low

energy predictions as we shall see. Whether or not such a model will be sufficiently credible to be accepted, will depend on the progress in building local renormalizable models of gravity and also, on whether or not the "flavour explosion" will continue.

III. Extra space-time dimensions : the arguments of the previous section are quite general and would apply to any dual model having massless fermions, vector mesons and a graviton present in its spectrum. If one now asks whether one of the existing models is the correct one, only a very limited choice is possible. The Veneziano model ($D=26$) can be excluded as it contains no fermions. The supersymmetric model of strings ^{/24/} has $D=2$ and therefore is also excluded. Nahm ^{/25/} has given some convincing arguments that dual models with $D=8, 6, 4$ and $5, 3$ may exist, but one has only started to investigate their properties. This leaves us with only one model in working order, namely the Neveu-Schwarz-Ramond model with $D=10$. This model is a good candidate for a unified theory as it contains a spin two massless particle which can be identified with the graviton, massless vector mesons which could be gluons and intermediate vector bosons prior to symmetry breaking, while the massless fermions could be identified with quarks and leptons ^{/26/}. The $SU(N)$ gauge group would be the colour group ^{/26/}. $N=4$ would give a kind of Pati-Salam model ^{/27/}, with the leptons as fourth colour.

This raises the question of how we can make sense of the 6 extra dimensions of this model. Before we answer the question, let us notice ^{/26/} that there is a certain advantage in having extra-dimensions present, namely the natural presence of a symmetry looking much like flavour : in 10 dimensions spinors have 32 components, so that they can be considered as 8. 4-components Dirac spinors. The symmetry group of the model P_{10} (Poincaré group in 10 dimensions) contains as a subgroup P_4 the Poincaré group in 4 dimensions which mixes only the Lorentz indices, and the $O(6)$ group, which does not mix the Lorentz indices, but mixes the 8 spinors into each other. In fact $O(6)$ is homomorphic to $SU(4)$ and a careful study reveals that the 8 ground state spinors transform as a 4 and $\bar{4}$ representation of $SU(4)$ ^{/26/}. So if we can manage to break the unwanted P_{10} invariance, but to keep this $P_4 \otimes O(6)$ invariance in a better version of the model,

we have a natural way of introducing the $SU(4)$ group as well as the existence of mirror fermions.

The most economic way of making sensible the existence of extra-dimensions is by compactifying them^{/26/}.

Let $x^\mu = (x^\mu, x^i)$ where $\mu = 0, 1, 2, 3$ are the coordinates in the usual Minkowski space-time, x_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) the coordinates in the internal space. Let us assume that the metric in the full space-time is given by :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & g_{i\nu}=0 \\ g_{\mu i}=0 & g_{ij}(x^i) \end{pmatrix} \quad (\text{III.1})$$

Such a metric describes a direct product of the Minkowski space-time by an internal space, which we assume to be space-like. The internal space may be left invariant under a certain group G . Then the symmetry of the whole space time is $P_4 \otimes G$ and G can be interpreted as an internal symmetry group.

If the internal space is space-like and compact, the existence of extra dimensions is seen only by the presence of a tower of particles associated with each 4 dimensional field. To see this, let us consider the case of a scalar field in such a space-time :

$$S = - \int d^4x \int d^6x \sqrt{g} \left[g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi + m^2 \Phi^* \Phi \right] \quad (\text{III.2})$$

$$S = - \int d^4x \int d^6x \sqrt{g} \left[\partial_\mu \Phi^* \partial_\mu \Phi + \Phi^* \left(m^2 - \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j) \right) \Phi \right] \quad (\text{III.3})$$

If the internal space is space-like and compact, the Laplace-Beltrami operator $-\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j)$ has only positive real eigenvalues. The eigenvectors $\Phi_{i,j}(x^i)$ carry increasing representations of the group G and can be properly orthonormalized. We expand Φ in a series of eigenvectors with coefficients $\Phi_{i,j}(x^\mu)$ being ordinary, four-dimensional fields :

$$\Phi = \sum_{i,j} \Phi_{i,j}(x^\mu) \Phi_{i,j}(x^i). \quad (\text{III.4})$$

We may then integrate over the internal coordinates to obtain a purely 4-dimensional action :

$$S = - \sum_{\{i,j\}} \int d^4x \left[\partial_\mu \Phi_{\{i,j\}}^*(x') \partial_\mu \Phi_{\{i,j\}}(x') + (m^2 + M_{\{i,j\}}^2) \Phi_{\{i,j\}}^*(x') \Phi_{\{i,j\}}(x') \right] \quad (\text{III.5})$$

where $M_{\{i,j\}}^2$ is the eigenvalue of the Laplace-Beltrami operator associated with the eigenfunction $\Phi_{\{i,j\}}(x')$

Let us give two simple examples :

1. The N extra coordinates span a flat hypertorus : we shall call this compactification without curvature.

- . Metric : $g_{ij} = \delta_{ij}$ (no curvature)
- . Boundary conditions : x^i and $x^i + R_i$ are identified, the fields being periodic in $x^i \rightarrow x^i + R_i$, the R_i being N parameters having the dimension of a length. The integration interval is $0 \leq x_i \leq R_i$
- . Invariance group : $x^i \rightarrow x^i + \alpha^i$, α^i arbitrary,
 $G = T^N \sim U(1)^N$, T being a translation.
- . Eigenvectors : $\{L\} = \{n_1, \dots, n_N\}$. n_i are integers

$$\Phi_{\{i,j\}}(x') = (R_1 \dots R_N)^{-\frac{1}{2}} \exp \sum_i 2\pi i \frac{n_i x_i}{R_i} . \quad (\text{III.6})$$

One expands in a Fourier series.

- . Mass formula : $M_{\{i,j\}}^2 = 4\pi^2 \sum_i \frac{n_i^2}{R_i^2}$ (III.7)
- . Conservation laws : the n_i are N conserved, additive, commuting quantum numbers, looking much like charges.

2. The N extra coordinates are angular variables $\theta_1, \dots, \theta_{N-1}, \phi$ on an S_N hypersphere of radius R_0 . We shall call this : compactification with constant curvature.

- . Metric : $g_{11} = R_0^2$, $g_{22} = R_0^2 \sin^2 \theta_1, \dots$
 $g_{NN} = R_0^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{N-1}$
- . Boundary conditions : the fields are well defined on S_N
- . Invariance group : the group of rotations in $N+1$ dimensions : $SO(N+1)$

- . Eigenvectors : $R_0^{-N/2} Y_{\{L\}}(\theta_1, \dots, \theta_{N-1}, \phi)$. The $Y_{\{L\}}$ being the so-called surface harmonics. The number of harmonics having the same eigenvalue L for the Laplace-Beltrami operator being

$$h(L, N) = (2L + N - 1) \frac{(L + N - 2)!}{(N-1)! L!} \quad (\text{III.8})$$

The expansion is called a Laplace series.

- . Mass formula : $M_{\{L\}}^2 = \frac{1}{R_0^2} L(L + N - 1)$ (III.9)

- . Conservation laws :

for $N = 2$ $SO(3) \sim SU(2)$: isospin group. One additive conserved quantum number which could be identified with the electric charge.

for $N = 5$ $SO(6) \sim SU(4)$. There are 3 additive conserved commuting charges which could be identified with charge strangeness and charm.

In both these examples, we see that the ground state is always singlet under G . This would change of course if we were looking at spinors in the full-space-time. Then one would find that the ground states would be Dirac spinors and belong to the spinor representations of the group G . If we identify the spinors with quarks/leptons, G with flavour, we then have a natural way of understanding why the "observed" ones belong to the spinor representation of G rather than to a higher one. Here, by spinor representation we also include the conjugate one since for $G = SU(4)$ both 4 and $\bar{4}$ appear as ground states. This approach is very close to the Kaluza-Klein theory and to the work of Cho and Freund^{/29/}, who also considered theories in a $4 + N$ dimensional space-time. Yet dual models are in a better position for renormalizability than field theories since they are renormalizable for more than 4 dimensions.

IV. Compactification of dual models without curvature :

It is not a priori obvious that compactification can be achieved in a dual model without destroying its properties of self-consistency. Cremmer and myself^{/30/} have investigated the simplest type of compactification, namely compactification without curvature in both the Veneziano and the Neveu-Schwarz-Ramond model. We have found that both models can be compactified along these lines without loss of any of the good properties (unitarity,

Regge behaviour, absence of ghosts). We find that the modifications can be summed up as follows :

- each extra momentum becomes quantized (it can be thought of as an additive conserved charge) : $p^{3+4} = 2\pi \frac{m^i}{R_i}$

where m^i is an integer.

- topological quantum numbers appear for closed strings, namely a wiring number n^i for each compactified direction. The number describes how many times a closed string wraps around the hypertorus in the i^{th} direction of the internal space before closing upon itself. These quantum numbers are additively conserved in the interactions of closed strings among themselves, but not in the open/closed string interactions.

- for a state of quantum numbers m^i, n^i , the mass formula is given by :

$$\alpha' M^2 = P + \sum_{i=1}^N \left[4\pi^2 \left(\frac{m^i}{R_i} \right)^2 + \frac{1}{4\pi^2 \alpha'} (R_i n^i)^2 \right], \quad (IV.1)$$

where P is an integer or half integer coming from the oscillators, the second term is the contribution of the extra charges, the last term the contribution of the wiring number ($n^i = 0$ for open strings). N is the number of compactified dimensions (22 in the Veneziano model, 6 in the Neveu-Schwarz-Ramond model).

- The theory one obtains this way is still unsatisfactory as a theory of gravity because if α' and R_i are small enough, it means that at low energy, we can disregard the dependence of all fields in the internal variables. So all fields at low energy depend only upon the 4 space-time variables x^μ . Yet, the indices of the fields are still 26 or 10 dimensional. For instance, for $D = 10$, the metric $g_{\mu\nu}$ describes one graviton $g_{\mu\nu}(x)$, six vectors $g_{\mu i}(x)$, twenty-one scalar fields $g_{ij}(x)$, all massless. A vector field W_μ describes a Lorentz vector field $W_\mu(x)$, and six scalar fields $W_i(x)$. So we get too many unwanted massless fields. Further having 6 arbitrary parameters, R_i , is somewhat ugly. Finally, the group G is too trivial : $U(1)^6$ and the tachyon problem (though it can be improved) still remains.

These unwanted features would disappear if we could have compactification with curvature because G would be a rota-

tion group in the internal space, rather than a product of translation groups. So G acting on a field $W_i(x^\mu, x^5)$ would both act on the internal coordinates x^i and the index i of the field, and the mass degeneracy between vector fields W_μ and scalar fields W_5 (to take a specific example) would be removed. The number of arbitrary parameters R_i would also be greatly reduced. Although we have not yet investigated compactification with curvature in a dual model, we present in the next section a simple field theoretical example where it is seen to occur spontaneously.

V. Spontaneous compactification with constant curvature in a simple model : Cremmer and myself ^{/31/} have investigated a simple classical field theory where spontaneous compactification with constant curvature occurs. It has the following features which mimic quite well a dual model :

- we start with a 6 dimensional world and we want to show that two dimensions can become compactified.
- there is a graviton introduced by the usual Einstein action and the usual generally covariant couplings.
- there is a gauge group with Yang-Mills vector bosons, chosen to be $O(3)$
- there are tachyons prior to spontaneous symmetry breaking, namely a triplet of Higgs scalars.

The action is just the conventional Einstein-Yang-Mills-Higgs action, the only peculiarity being the space-time dimension , but all directions being treated symmetrically in the action :

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^6x \sqrt{g} R - \int d^6x \sqrt{g} \left[\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} D_\mu Q^a D^\mu Q^a + \frac{1}{2} V(Q^2) \right], \quad (V.1)$$

where as usual :

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + e \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (V.2)$$

$$D_\mu Q^a = \partial_\mu Q^a + e \epsilon^{abc} W_\mu^b Q^c \quad (V.3)$$

$$V(Q^2) = \frac{1}{4} \lambda (Q^a Q^a - F^2) + V_0 \quad (V.4)$$

V_0 is an adjustable constant.

We now look if the equations of motion derived from admit a solution where :

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + R_0^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (V.5)$$

so that the symmetry between different space directions is broken, the internal space being an S_2 sphere and its group of invariance G being $O(3)$.

We find that this is the case, provided that the following corresponding ansatzes are made for the Yang-mills and Higgs fields :

$$\vec{W}_\mu = 0, \quad (V.6)$$

$$\vec{W}_0 = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) (-e^{-1} + v), \quad (V.7)$$

$$\vec{W}_\phi = (-\cos \phi \cos \theta, -\sin \phi \cos \theta, \sin \theta) \sin \theta (-e^{-1} + v), \quad (V.8)$$

$$\vec{Q} = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) p. \quad (V.9)$$

These ansatzes are almost identical to those of 't Hooft and Polyakov ^{/21/} for magnetic monopole solutions. The only difference is that v and p are constants rather than functions of a radial variable. This is because the metric describes a direct product of two spaces.

The constants R_0 , v , p and also V_0 are then determined so that the equations of motion are satisfied. One finds that there are two such solutions :

$$a) \quad v = 0, \quad p = F, \quad R_0^2 = \frac{8\pi G}{e^2}, \quad V_0 = \frac{e^2}{(8\pi G)^2} \quad (V.10)$$

$$b) \quad p^2 = (8\pi G)^{-1}; \quad R_0^2 = \frac{e^2}{8\pi G} + \frac{1}{4} \lambda [F^2 - (8\pi G)^{-1}]$$

$$(1 - e^2 v^2)^{-1} = 1 + 2\pi G \lambda [F^2 - (8\pi G)^{-1}]$$

$$V_0 + \frac{1}{4} \lambda [(8\pi G)^{-1} - F^2]^2 = \frac{e^2}{(8\pi G)^2}. \quad (V.11)$$

This second solution exists only if $F^2 \geq (8\pi G)^{-1}$.

These solutions have a global $O(3)$ symmetry if we do simultaneous rotations in θ, φ space and in the "isospin" space. We see also that, in both cases, R_0 comes out of the order of Planck's length : $R_0 \leq (8\pi G)^{\frac{1}{2}} e^{-1}$ so that it

explains why extra dimensions (if they exist at all) are confined at such a small distance. Finally, we see also a relation emerging between the gauge group and the number of space-time dimensions which can be confined. A generalization shows that a gauge group $O(N+1)$ can confine N dimensions. So in the Neveu-Schwarz model, this would suggest to use for instance the gauge group $SU_4 \sim O(6)$ to confine 5 dimensions, while the 6th one could be compactified without curvature, introducing just one arbitrary dimensional parameter in the theory. The reason for this choice is somewhat technical : if the dual model was 9 dimensional, we could already have $G = O(6) \sim SU(4)$. The ground state fermions would transform as a 4 representation of $SU(4)$. Because it is 10 dimensional, the number of ground state fermions is doubled, and they transform as $4, \bar{4}$ under $SU(4)$. So, one may prefer to break P_{10} down to $P_4 \otimes SU(4) \otimes U(1)$ rather than to $P_4 \otimes O(7)$. Further, one can play with the quantization conditions on momenta in the additional cyclic dimension, as was done in ref. /30/ in simpler examples, to break $SU(4)$ by giving different masses to states having different values of the quantum numbers S, Y associated with $SU(4)$. If one calls p^{10} the momentum in the 10th direction, a quantization rule which respects the conservation of momentum, and of the additive quantum numbers of $SU(4)$ at each vertex, is simply :

$$p^{10} = \frac{2\pi}{R} (n + \alpha S + \beta Y) . \quad (V.12)$$

This quantization rule would break even the mass degeneracy of the low-lying fermions.

So we see that once it is understood that extra dimensions can spontaneously confine themselves to a compact domain of the order of Planck's length, their presence can be welcomed and used to introduce internal symmetries. The ultimate success of this line of approach to construct a satisfactory theory of gravity will also, certainly, depend on whether or not alternative local theories of gravity will turn out to be renormalizable.

References :

1. For reviews on covariant quantization of gravitation, see :

- "Quantum Gravity", C.J. Isham, R. Penrose, D.W. Sciama eds
Oxford University Press (1975)
- B.S. de Witt, Phys. Reports, 19, N°6 (1975)
- P. Van Nieuwenhuizen, ITP-SB-75-46 preprint (to be published)
- S. Deser, Invited paper G.T.M.F. Conference (September 1975)
2. C. Aragone, J. Chela Flores, Nuovo Cim.B.25,225 (1975)
M. Kaku, Nucl. Phys. B91, 99 (1975)
J. Scherk and J.H. Schwarz, CALT 68-479 preprint to be published in General Relativity and Gravitation
 3. P. Nath and R. Arnowitt, Phys. Lett. 56 B, 171 (1975)
S. Ferrara and B. Zumino, Nucl. Phys. B87, 207 (1975)
B Zumino, CERN TH 2120 Preprint (1975) (to be published)
D.Z. Freedman, P. Van Nieuwenhuizen and S. Ferrara, ITP-SB 76-23 preprint, (to be published)
 4. "Dual Theory" edited by M. Jacob, North Holland Pub.Co(1974)
 5. P.H. Frampton, Dual Resonance Models, Benjamin, (1974)
 6. J. Scherk, Rev. of Modern Physics 47, 123 (1975)
 7. A. Neveu and J. Scherk, Nucl. Phys. B36, 155 (1972)
 8. J. Scherk and J.H. Schwarz, Nucl. Phys. B81, 118 (1974)
 9. J. Scherk and J.H. Schwarz (unpublished)
 10. H.C. Tze, Nuovo Cimento Lett. 7, 401 (1973) ; Nuovo Cimento 22A, 507 (1974)
 11. H.B. Nielsen and P. Olesen, Nucl. Phys. B57, 367 (1973)
 12. J. Scherk and J.H. Schwarz, Phys. Letters 52B, 347 (1974)
 13. E. Cremmer and J. Scherk, Nucl. Phys. B72, 117 (1974)
 14. M. Kalb, P. Ramond, Phys. Rev. D9, 2273 (1974)
 15. T. Yoneya, Nuovo Cimento Lett. 8, 951 (1973)
 16. R.P. Feynman, Lectures on gravitation, Caltech Lecture Notes 1962-1963
S. Weinberg, Phys. Rev. B1049, 135 (1964), B988, 138 (1965)
V.I. Ogievetsky and I.V. Polubarinov, Ann. of Phys. 25, 358 (1963)
W. Wyss, Helv. Physica Acta, 38, 469 (1965)
M.T. Grisaru, P. Van Nieuwenhuizen, and C.C. Wu, Phys. Rev.D vol. 12, N° 2 (1975)
D.J. Boulware and S. Deser, Ann. Phys. 89, 193 (1975)
 17. F.A. Berends and R. Gatsmans, Nucl. Phys. B88, 99 (1975)

18. J.A. Shapiro, Phys. Rev. D, Vol.11, N°10 (1975)
M. Ademollo, A. D'Adda, R. D'Auria, F. Gliozzi, E. Napolitano
S. Sciuto and P.D. Vecchia, Nucl. Phys. B94, 221 (1975)
19. J. Scherk and J.H. Schwarz, CALT 68-488 submitted to the
1975 Essay competition of the Gravity Research Foundation
20. J.M. Cornwall, D.N. Levin and G. Tiktopoulos, Phys. Rev.
Lett. 30, 1268 (1973) ; 31, 572 (1973) ; Phys. Rev. D10,
1145 (1974)
21. H.B. Nielsen and P. Olesen, Nucl. Phys. B61, 45 (1973)
22. G. 't Hooft, Nucl. Phys. B79, 276 (1974)
A.M. Polyakov, JETP Lett. 20, 190 (1974)
23. J.L. Gervais and B. Sakita, Nucl. Phys. B91, 301 (1975)
24. M. Ademollo, L. Brink, A. d'Adda, R. d'Auria, E. Napolitano.
S. Sciuto, E. Del Giudice , P.Di Vecchia, S. Ferrara,
F. Gliozzi, R. Musto and R. Pettorino, CERN preprint TH 2097
(1975) (to be published)
25. W. Nahm, CERN preprint (1976) (to be published)
26. J. Scherk and J.H. Schwarz, Phys. Lett. 57B, 463 (1975)
27. J.C. Pati and A. Salam, Phys. Rev. D10, 275 (1974) ; D11,
703 (1975) : D11, 1137 (1975)
28. T.H. Kaluza, Sitzungber Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Math
Phys. K1, 966 (1921)
O. Klein, Z. Phys. 37, 895 (1926) ; Helv. Phys. Acta, Suppl.
IV, 58 (1956)
29. Y.M. Cho and P.G.O. Freund, Phys. Rev. D Vol. 12, N° 6, 1711
(1975)
30. E. Cremmer, J. Scherk, Nucl. Phys. B103, 399 (1976)
31. E. Cremmer, J. Scherk, PTENS 76/3 preprint, (to be published)

О ГИПОТЕЗЕ ДУАЛЬНОСТИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

И.Т.Тодоров

Институт ядерных исследований и ядерной энергетики Болгарской
академии наук, София

А Н Н О Т А Ц И Я

Обсуждается
Обсуждается один из предварительных итогов работы по конформно-инвариантным операторным разложениям. В рамках аксиоматической локальной квантовой теории поля вводится предположение о существовании полной системы локальных операторных полей $O_\alpha(x)$. Постулируется, что векторы вида $\langle 0 | O_{\alpha_1}(x_1) O_{\alpha_2}(x_2) \dots$ раскладываются в ряд по векторам $\langle 0 | Q_\mu(x) \dots$. Из условия локальной коммутативности выводится некоторое свойство дуальности для 4-точечной (а отсюда и для n -точечной) функции. Идеи такого типа неоднократно высказывались за последние несколько лет (в основном в рамках конформной теории), но их последовательный вывод все еще находится в стадии доработки. В процессе этой работы, с одной стороны, была выявлена большая (чем первоначально предполагалось) общность идеи дуальности операторных разложений, а с другой стороны, несколько сузился произвол формальных спекуляций. В частности, было выяснено, что конформная ковариантность ядер Клебша-Гордона проявляется лишь для вакуумного разложения; была понята роль сходимости возникающих разложений функций Вайтмана для обеспечения условия положительности.

1. Вводные замечания

Понятие дуальности в физике элементарных частиц было впервые сформулировано при изучении связи резонансного и высокоэнергетического поведения амплитуды двухчастичного рассеяния в контексте моделей с полюсами Редже. Модель Венециано (см., например, ^{1,2/}),

строго говоря, не укладывается в рамки локальной квантовой теории поля. Формально аналогичная идея возникла при изучении операторных разложений в конформной квантовой теории поля^{/3-5/}. Дуальность в этом случае является следствием локальной коммутативности и связывает между собой вакуумные операторные разложения в разных каналах. Непосредственной связи между этими двумя понятиями нет, так как в дуальных резонансных моделях речь идет об амплитудах на массовой поверхности, в то время как в конформной теории асимптотические условия (обеспечивающие интерпретацию теории в терминах частиц) не выполняются, и S' -матрица на массовой поверхности вообще не существует. С другой стороны, как было замечено^{/6,7/}, свободное поле с массой тоже имеет дуальное (вакуумное) операторное разложение, хотя оно не является конформно инвариантным (и удовлетворяет асимптотическому условию). Это дало основание Маку^{/8/} выдвинуть некоторый новый принцип дуальности в аксиоматическом подходе к локальной квантовой теории поля. Цель моего сообщения — рассказать об этом принципе и о его обосновании в рамках работы по конформной теории (см.^{/9/}).

2. Полная система локальных операторных полей

Рассмотрим в качестве примера теорию нейтрального бесспириного поля $\psi(x)$. Согласно постулату цикличности (см., например,^{/10/}), векторы вида

$$P(\psi, f) |0\rangle \equiv \left\{ f_0 + \sum_{k=1}^n \int f(x_1, \dots, x_k) \psi(x_1) \dots \psi(x_k) dx_1 \dots dx_k \right\} |0\rangle, \quad (I)$$

где f_0 пробегает поле комплексных чисел, а $f(x_1, \dots, x_k)$ — всевозможные пробные функции, образующие плотное множество в гильбертовом пространстве \mathcal{H} векторов состояний. Полиномы $P(\psi, f)$, определенные равенством (I), представляют собой пример полного набора (сглаженных) полилокальных операторов.

Мы сформулируем более жесткое требование существования полной системы локальных тензорных операторов, которое будет далее мотивировано примером теории свободного поля и идеей разложения операторных произведений^{/11-13/}. Введем для этой цели систему операторных полей:

$$1, \quad O_{\alpha_n}(x) \equiv O_{\mu_1 \dots \mu_n}^{i_n}(x) \quad / \alpha_n = (i_n; \mu_1, \dots, \mu_n), \text{ из } \mathcal{H} \quad (2a)$$

где $O_{\mu_1 \dots \mu_n}^{i_n}(x)$ - симметрический тензор ранга n (который обычно предполагается бесспиновым); он может быть заменен еще однородным полиномом степени n от псевдоевклидова вектора ξ

$$O_n^{i_n}(x; \xi) = O_{\mu_1 \dots \mu_n}^{i_n}(x) \xi^{\mu_1} \dots \xi^{\mu_n}. \quad (2b)$$

Потребуем, чтобы операторы (2) обладали следующими свойствами:

A). Поля $O_{\alpha}(x)$ удовлетворяют всем аксиомам Вайтмана /10/ в частности,

A1) пуанкаре-инвариантность: существует унитарное представление $U(a, \Lambda)$ группы Пуанкаре, действующее в \mathcal{H} , которое оставляет вектор вакуума на месте и преобразует ковариантно поле O^i :

$$U(a, \Lambda) |0\rangle = |0\rangle, \quad U(a, \Lambda) O^i(x; \xi) U(a, \Lambda)^{-1} = O^i(\Lambda x, \xi); \quad (3)$$

A2) локальная коммутативность: $[O_{\alpha}(x), O_{\beta}(y)] = 0$ при пространственно-подобном $x-y$ (т.е. при $(x-y)^2 < 0$);

A3) спектральное условие, из которого вытекает, что

$$w_{\alpha_1 \dots \alpha_n \beta}^{+}(x_1, \dots, x_n; p) = \int e^{-ipx} \langle O_{\alpha_1}(x_1) \dots O_{\alpha_n}(x_n) O_{\beta}(x) \rangle_0 dx = 0 \quad (4)$$

при $p^0 < |p|$;

A4) положительная определенность матрицы двухчастичных функций:

$$w_{\alpha\beta}^{+}(p) = \int e^{ipx} \langle O_{\alpha}(x) O_{\beta}(0) \rangle_0 dx. \quad (5)$$

Из совместного применения условий A1), A3) и A4) и из естественных требований на возникающем классе обобщенных функций вытекает, что при любом выборе конечного набора комплексных чи-

сел z_i эрмитова форма $\sum_i \bar{z}_i \omega^{-i}(p, \xi, \xi) z_j$ является плотностью положительной лоренц-инвариантной меры не более, чем степенного роста (по p) с носителем в (замкнутом) конусе $\bar{V}^* = \{p | p^0 > |\gamma|\}$.

Б). Операторы (2) образуют полную систему в том смысле, что конечные суммы вида

$$\left\{ f_0 + \sum_{k=1}^n \sum_{i_k} \int f_{i_k}^{j_1 \dots j_k}(x) O_{j_1 \dots j_k}(x) dx \right\} |0\rangle, \quad (6)$$

где $f_0 \in \mathbb{C}$, а $f_{i_k}(x)$ — тензорные пробные функции (определенного класса), задают плотное множество в \mathcal{H} .

Среди наборов, удовлетворяющих условиям А) и Б), можно без ограничения общности выделить класс эрмитовых полей, которые не могут быть представлены в виде линейной комбинации от дифференциальных операторов, действующих на другие поля набора. Мы будем называть это свойство операторной независимостью. В частности, если $\varphi(x)$ входит в набор (2), то $\nabla_\mu \varphi(x)$ не входит в этот набор. Его и нет надобности включать в систему основных полей, так как, если $f^{\mu}(x)$ — вектор основных функций, то:

$$\int f^{\mu}(x) \nabla_\mu \varphi(x) dx = \int f(x) \varphi(x) dx,$$

где $f(x) = -\nabla_\mu f^{\mu}(x)$ — тоже основная функция и если условие полноты Б) выполняется для системы полей, включающей φ и $\nabla_\mu \varphi$, оно будет также выполняться для системы без поля $\nabla_\mu \varphi$.

3. Пример: Структура системы основных полей в теории свободного бесспинового поля

В случае теории свободного поля $\varphi(x)$ можно построить набор (2) из нормальных произведений производных φ . В этом случае операторы $O_{i_k, \xi}$ порождают алгебру \mathcal{A} (над полем вещественных чисел) относительно (обычного сложения и) нормального произведения. В этой алгебре можно ввести двойную градуировку: пространство \mathcal{A}_k^l содержит все однородные полиномы степени l по ξ , и степени k по полю φ , и его производным. В случае системы полей можно задать градуировку по каждому типу поля.

Рассмотрим в качестве примера свободное заряженное поле $\varphi(x)$ массы ноль в $2h$ -мерном пространстве-времени:

$$\square \varphi(x) = 0, \quad x = (x_0, \underline{x}) = (x_0, x_1, \dots, x_{2h-1}), \quad \square = \nabla_0^2 - \nabla^2. \quad (7)$$

В этом случае алгебра \mathcal{O} может быть представлена в виде прямой суммы подпространств $\mathcal{O}_{k_1 k_2}$, где k_1 - степень однородности по полю φ (и его производным), а k_2 - степень однородности по φ^* . Выпишем явный вид полной системы основных полей в секторе

$$\mathcal{O}_{11} = \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{O}_{11}^{\ell}.$$

В этом случае (из-за безмассовости поля) можно наложить наряду с требованием операторной независимости еще и условие бесшпуровости, которое на языке полиномов $\mathcal{O}(x; \xi)$ записывается в виде

$$\square_{\xi} \mathcal{O}(x; \xi) = 0. \quad (8)$$

Каждый однородный полином, удовлетворяющий этому условию гармоничности, определяется однозначно по своим значениям на световом конусе

$$C_{1,2h-1} = \{ \bar{z} \mid \bar{z}^2 = \bar{z}_0^2 - \bar{z}^2 = 0 \} \quad (9)$$

(см., например, доказательство результата для комплексного случая, приведенного в [14] - Предложение 2.5).

Рассмотрим, следуя [5], систему биллокальных полей

$$O_{\ell}(x_1, x_2; \bar{z}) = x_{\ell} i^{\ell} D_{\ell}^{h-1}(\bar{z} \nabla_1, \bar{z} \nabla_2) \varphi_{(x_1)}^* \varphi_{(x_2)}, \quad (10)$$

где D_{ℓ}^{h-1} - однородный полином, который выражается через полином Гегенбауера,

$$D_\ell^{h-1}(\alpha, \beta) = \ell! (\alpha + \beta)^\ell P_\ell^{(h-2, h-2)}\left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right) = \ell! \frac{(h-1)_\ell}{(2h-3)_\ell} (a+\beta)^\ell C_\ell^{h-\frac{1}{2}}\left(\frac{a-\beta}{a+\beta}\right) \quad (II)$$

а κ_ℓ — (вещественная) нормировочная постоянная. Тогда операторы

$$O_\ell(x; \bar{z}) = : O_\ell(x, x; \bar{z}) : \quad (I2)$$

являются сохраняющимися тензорными токами. Чтобы записать это свойство в терминах однородных полиномов на конусе (9), введем векторный оператор $d = (d_\mu)$ внутреннего дифференцирования на конусе, который действует на однородные полиномы степени ℓ по формуле

$$d_\mu O_\ell(x; \bar{z}) = \left[\partial_\mu - \frac{1}{2(h-2+\ell)} \bar{z}_\mu \square_{\bar{z}} \right] O_\ell(x; \bar{z}), \quad (I3)$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu};$$

свойство "внутренности" обеспечивается тождеством

$$d_\mu [\bar{z}^2 O_\ell(x; \bar{z})] = \bar{z}^2 \left[\partial_\mu - \frac{1}{2(h-2+\ell)} \bar{z}_\mu \square_{\bar{z}} \right] O_\ell(x; \bar{z}) = 0 \quad \text{для } \bar{z}^2 = 0.$$

В терминах этого оператора закон сохранения записывается в форме

$$(\nabla d) O_\ell(x; \bar{z}) = \frac{\partial}{\partial x_\mu} d_\mu O_\ell(x; \bar{z}) = 0. \quad (I4)$$

В частности, полагая $\ell = 1$, $\kappa_1 = \frac{1}{h-1}$, из (I0)–(I2) получаем оператор электромагнитного тока:

$$O_1(x; \bar{z}) = \bar{z}^\mu j_\mu(x), \quad j_\mu(x) = i \cdot \psi^*(x) \overleftrightarrow{\nabla}_\mu \psi(x) := i [\psi^*(x) \nabla_\mu \psi(x) - \psi(x) \nabla_\mu \psi^*(x)] \quad (I5)$$

при $\ell = 2$, $\kappa_2 = \frac{1}{h(2h-1)}$ находим оператор энергии-импульса

$$O_2(x; \xi) = \xi^\mu \xi^\nu \Theta_{\mu\nu}(x)$$

$$\Theta_{\mu\nu}(x) = \{ \nabla_\mu \varphi^*(x) \nabla_\nu \varphi(x) + \nabla_\nu \varphi^*(x) \nabla_\mu \varphi(x) - g_{\mu\nu} \nabla \varphi^*(x) \nabla \varphi(x) + (16) \\ + \frac{h-1}{2h-1} (\square g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu) \varphi^*(x) \varphi(x) \} :$$

Заметим еще, что все поля полученного таким образом базиса конформно ковариантны; поле O_ℓ обладает размерностью $2h + \ell - 2$. Отсюда следует свойство ортогональности полей O_ℓ при разных ℓ (см. /13/):

$$\langle O_{\ell_1}(x_1; \xi_1) O_{\ell_2}(x_2; \xi_2) \rangle_0 = \delta_{\ell_1 \ell_2} w_{\ell_1}^{\ell_2}(x_1 - x_2; \xi_1, \xi_2). \quad (17)$$

Замечание о базисе в пространстве \mathcal{O}_m в случае массивного заряженного поля. Как отмечается Фелкелом /7/, базис (12) вполне приемлем и в случае свободного поля массы $m > 0$ (т.е., удовлетворяющее $(m^2 + \square) \varphi(x) = 0$, вместо (7)). Это показывает, что условие бесщупровости (8) может быть наложено как общее требование для тензорных полей полного набора (2). Отметим, что при $m > 0$ поля (12) не удовлетворяют закону сохранения (14). Для построения полной системы локальных операторов J_ℓ , удовлетворяющих (14), приходится в случае массивного свободного поля отказаться от требования бесщупровости (8), оставляя в силе закон сохранения типа (14):

$$\nabla \frac{\partial}{\partial \xi} J_\ell(x; \xi) = 0. \quad (14')$$

"Токи" J_0 и J_1 можно при этом выбрать как в (12):

$$J_0(x) = O_0(x) = : \varphi^*(x) \varphi(x) :, \quad J_1(x; \xi) = O_1(x; \xi) = j_\mu(x) \xi^\mu,$$

где $j_\mu(x)$ дается равенством (15), а операторы J_ℓ при $\ell \geq 2$ можно нормировать условием

$$\square_\xi J_\ell(x; \xi) = 4 m^2 T_{\ell-2}(x; \xi), \quad \ell = 2, 3, \dots \quad (18)$$

Это условие (вместе с (14')) приводит, в частности, к "улучшенному" тензору энергии-импульса

$$J_2(x; \xi) = O_2(x; \xi) + \frac{1}{h} m^2 \xi^2 O_0(x) = \Theta_{\mu\nu}(x) \xi^\mu \xi^\nu,$$

$$\Theta_{\mu\nu}(x) = \{ \nabla_\mu \varphi^*(x) \nabla_\nu \varphi(x) + \nabla_\nu \varphi^*(x) \nabla_\mu \varphi(x) -$$

$$- g_{\mu\nu} [\nabla \varphi^*(x) \nabla \varphi(x) - m^2 \varphi^*(x) \varphi(x)] +$$

$$+ \frac{h-1}{2h-1} (\square g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu) \varphi^*(x) \varphi(x) \}.$$
 (19)

Отметим, что хотя токи J_ℓ тоже образуют полный набор, они не являются операторно независимыми.

4. Вакуумное разложение произведения двух операторных полей. Конформное частичное разложение 4-точечной функции

В силу постулата полноты системы векторов (5) любой вектор состояния, в том числе и вектор $\langle 0 | O_{\ell_1}^{i_1}(x_1, \xi_1) O_{\ell_2}^{i_2}(x_2, \xi_2) | 0 \rangle$, может быть разложен по системе векторов $\langle \ell, i | O_{\ell}^{i_1}(x, \xi) | 0 \rangle$:

$$\langle 0 | O_{\ell_1}^{i_1}(x_1, \xi_1) O_{\ell_2}^{i_2}(x_2, \xi_2) | 0 \rangle = w_{\ell_1, \ell_2}^{i_1, i_2}(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) \langle 0 | +$$

$$+ \sum_{\ell, i} \frac{1}{\ell!} \int d^4x B_{\ell_1, \ell_2, \ell}^{i_1, i_2, i}(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2, x, \frac{\partial}{\partial x}) \langle 0 | O_{\ell}^i(x, \xi) | 0 \rangle.$$
 (20)

Умножая скалярно обе части этого равенства на $O_{\ell_3}^{i_3}(x_3, \xi_3) | 0 \rangle$ и переходя к фурье-образу по x_3 , получаем следующую систему уравнений для функций В:

$$w_{\ell_1, \ell_2, \ell_3}^{i_1, i_2, i_3}(x_1, \xi_1; x_2, \xi_2, p, \xi_3) =$$

$$= \sum_{\ell, i} \frac{1}{\ell!} B_{\ell_1, \ell_2, \ell}^{i_1, i_2, i}(x_1, \xi_1; x_2, \xi_2; p, \frac{\partial}{\partial \xi}) w_{\ell, \ell_3}^{i, i_3}(p; \xi, \xi_3).$$
 (21)

В частности, если выполнено условие ортогональности (17), сумма по ℓ сводится к одному слагаемому и "ампутированная функция"

В определяется из (21) на носителе двухточечной функции Вайтмана.

В конформной теории, при заданных (динамических) размерностях $h + c_l$ полей O_l (h — половина размерности пространства-времени), двухточечные и трехточечные функции, в том числе и ядра В определяются с точностью до постоянных множителей. Напишем, в качестве примера, разложение вакуумного произведения двух элементарных конформно-инвариантных скалярных полей φ и φ^* (размерностью $h + c$). Базисные поля O и ампутированные 3-точечные функции В, входящие в это разложение, будем нумеровать парами

$$\chi (= \chi_l) = [l, c_l], \quad \tilde{\chi} = [l, -c_l], \quad (22)$$

характеризующими сопряженные друг другу симметрические тензорные представления (универсальной накрывающей) конформной группы G^* ; здесь $l = 0, 1, 2, \dots$ — число тензорных индексов (или иначе — степень однородности полинома $O_\chi(x; \xi)$ по изотропному вектору ξ). Из условия А4) положительной определенности двухточечной функции следует, что $c_l \geq h + l - 2$ (так что размерность $h + c_l$ была не меньше канонической размерности $2h + l - 2$ сохраняющихся тензоров (10)–(12) свободной теории). Мы предполагаем, для упрощения записи, что при данном χ лишь одно поле O_χ дает вклад в разложение вектора $\langle 0 | \varphi(x_1) \varphi^*(x_2) | 0 \rangle$. В этих терминах искомое разложение имеет вид

$$\langle 0 | \varphi(x_1) \varphi^*(x_2) | 0 \rangle = w(x_1 - x_2) \langle 0 | + \sum_{l=0}^{\infty} \int (dp) B^{\tilde{\chi}}(x_{12}, p) \langle 0 | O_\chi(p). \quad (23)$$

$$(dp) = \frac{d^{2h}p}{(2\pi)^{2h}}.$$

где тензорные индексы величин B и O , по которым производится суммирование, опущены. Вершинная функция $B^{\tilde{\chi}}$ может быть определена как целая аналитическая функция p , которая при пространственно-подобных $x_{12} = x_1 - x_2$ и времениподобном p имеет вид

$$B^{\tilde{\chi}}(x_{12}, p; \xi) = A(\tilde{\chi}, c) \left(\frac{2}{x_{12}^2} \right)^{h - \delta_{\tilde{\chi}} + c} D_{\tilde{\chi}}^{\xi}(\xi \not{p}_1, \xi \not{p}_2) \left(\frac{-x_{12}^2}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}(\ell + c_l)} \quad (24)$$

$$\cdot \int_0^1 du [u(1-u)]^{\frac{1}{2}h-1} e^{i p(u x_{12} + x_2)} J_{\ell + \frac{c}{2}}(\sqrt{u(1-u)x_{12}^2 p^2}).$$

$$\delta_{\tilde{\chi}} = \frac{1}{2}(h - c - \ell),$$

где D_2^{ξ} дается формулой (II), а $A(\tilde{x}, c)$ — некоторая постоянная.

Двухточечная конформно-инвариантная функция Вайтмана в импульсном пространстве $w_{\tilde{x}}(p)$, соответствующая представлению χ , удовлетворяет условию

$$w_{\tilde{x}}(p) w_{\tilde{x}}(p) = C \theta_+(p) \equiv C \theta(p^0) \theta(p^+), \quad (25)$$

$$w_{\tilde{x}}(p) w_{\tilde{x}}(p) w_{\tilde{x}}(p) = C w_{\tilde{x}}(p), \quad C > 0.$$

Нормировку поля $O_{\tilde{x}}$ можно ограничить таким образом, чтобы C равнялось 1. (Это свойство сохраняется, если умножить $O_{\tilde{x}}$ на α^{ϵ} ($\alpha > 0$)).

Из разложения (23) комплексным сопряжением и заменой $x_1 \leftrightarrow x_4, x_2 \leftrightarrow x_3$ получаем

$$\varphi(x_1) \varphi^*(x_4) |0\rangle = w(x_3 - x_4) |0\rangle + \sum_{\ell=0}^{\infty} \int (dp) \tilde{B}(x_4, x_3; p) O_{\tilde{x}}(-p) |0\rangle \quad (26)$$

(черта означает комплексное сопряжение и мы воспользовались условием эрмитовости для полей $O_{\tilde{x}}(x)$). Умножая скалярно почленно равенства (23) и (26) и принимая во внимание, что

$$\langle O_{\tilde{x}}(p) O_{\tilde{x}}(q) \rangle_0 = (2\pi)^{2h} \delta(p+q) w_{\tilde{x}}(p), \quad (27)$$

находим

$$\langle \varphi(x_1) \varphi^*(x_2) \varphi(x_3) \varphi^*(x_4) \rangle_0 = w(x_1 - x_2) w(x_3 - x_4) + \sum_{\ell=0}^{\infty} \int (dp) \tilde{B}(x_1, x_2; p) w_{\tilde{x}}(p) \tilde{B}(x_4, x_3; p). \quad (28)$$

Разложение типа (28) выводится в рамках конформной квантовой теории поля ($\sqrt{3}/\sqrt{5}/\sqrt{9}$). Важно отметить, что оно сходится (если вообще имеет место хотя бы как асимптотическое разложение на малых расстояниях), так как оно совпадает с разложением по парциальным волнам по отношению к (универсальной накрывающей) конформной группе G^* в пространстве Минковского (другими

словами, оно сводится к разложению унитарного представления на неприводимые составляющие (см. /15, 16/). Выдвигается предположение /8/, что такое свойство сходимости останется справедливым и в общем случае как следствие условий спектральности и положительной определенности 4-точечной функции, т.е. условием

$$\int \dots \int dx_1 \dots dx_4 \bar{f}(x_2, x_1) \langle \psi(x_1) \psi^*(x_2) \psi(x_3) \psi^*(x_4) \rangle f(x_3, x_4) \geq 0 \quad (29)$$

при любом выборе пробной функции f .

Заметим, что мы не случайно написали разложение (20) ((23), (26)) не в операторной форме, а лишь после применения к вектору вакуума. Это требовалось не только для справедливости нашего вывода. Как было показано в /6/, конформная инвариантность коэффициентов B имеет место лишь для вакуумного разложения (дана в простейшем случае разложения произведения свободных полей).

5. Свойств дуальности как следствие локальной коммутативности

Рассмотрим четырехточечную функцию (28) в области, где все разности аргументов $x_{ij} = x_i - x_j$ пространственно-подобны. Тогда из условия локальной коммутативности вытекает, что можно поменять местами аргументы x_2 и x_4 в представлении (28) и прийти к соотношению дуального типа:

$$\begin{aligned} & \mathcal{W}(x_1 - x_2) \mathcal{W}(x_3 - x_4) + \sum_{\ell=0}^{\infty} \int (d\rho) \bar{B}^{\tilde{\ell}}(x_1, x_2; \rho) \mathcal{W}_{\tilde{\ell}}(\rho) \bar{B}^{\tilde{\ell}}(x_4, x_3; \rho) = \\ & = \mathcal{W}(x_1 - x_4) \mathcal{W}(x_3 - x_2) + \sum_{\ell=0}^{\infty} \int (d\rho) \bar{B}^{\tilde{\ell}}(x_1, x_4; \rho) \mathcal{W}_{\tilde{\ell}}(\rho) \bar{B}^{\tilde{\ell}}(x_2, x_3; \rho) \end{aligned} \quad (30)$$

для $x_{23}^2 < 0$, $x_{34}^2 < 0$, $x_{24}^2 < 0$.

Свойство такого типа имеет место в любой теории с полным набором локальных операторов. Оно обобщается очевидным образом и на n -точечную функцию. При этом интересно, что для обеспечения локальности n -точечной функции достаточно иметь свойство типа (30) для четырехточечной функции от произвольных тензорных полей (из полного набора).

Рассмотрим для простоты теорию нейтрального скалярного

поля и предположим, что справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \langle O_{\alpha_1}(x_1) O_{\alpha_2}(x_2) O_{\alpha_3}(x_3) O_{\alpha_4}(x_4) \rangle_0 &= w_{\alpha_1 \alpha_2}(x_1 - x_2) w_{\alpha_3 \alpha_4}(x_3 - x_4) + \\ &+ \int (dp) \sum_{j,k} B^j(x_1, \alpha_1; x_2, \alpha_2; p) w^{jk}(p) \bar{B}^k(x_3, \alpha_3; x_4, \alpha_4; p) = \\ &= w_{\alpha_1 \alpha_3}(x_1 - x_3) w_{\alpha_2 \alpha_4}(x_2 - x_4) + \int (dp) \sum_{j,k} B^j(x_1, \alpha_1; x_3, \alpha_3; p) w^{jk}(p) \bar{B}^k(x_2, \alpha_2; x_4, \alpha_4; p) \end{aligned} \quad (31)$$

при $x_{23}^2 < 0$.

Здесь $\alpha_k = (i_k; \mu_k, \dots, \nu_k)$ — краткое обозначение набора всех индексов поля O ; тензорные индексы, соответствующие третьему аргументу функций B и функций w^{jk} , по которым производится суммирование, опущены. Запишем n -точечную функцию ($n > 4$) произвольных полей O в виде

$$\begin{aligned} \langle O_{\alpha_1}(x_1) \dots O_{\alpha_n}(x_n) \rangle_0 &= \langle O_{\alpha_1}(x_1) \dots O_{\alpha_m}(x_m) \rangle_0 \langle O_{\alpha_{m+1}}(x_{m+1}) \dots O_{\alpha_n}(x_n) \rangle_0 + \\ &+ \sum_{j,k} \int (dp) B^j(x_1, \alpha_1; \dots; x_m, \alpha_m; p) w^{jk}(p) \bar{B}^k(x_{m+1}, \alpha_{m+1}; \dots; x_n, \alpha_n; p). \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} B^j(x_1, \alpha_1; x_2, \alpha_2; \dots; x_m, \alpha_m; p) &= \sum_{j_2, \dots, j_{m-1}} \int \dots \int \prod_{r=2}^{m-1} [d p_r] d y_r e^{i p_r y_r} \\ &B^{j_1}(x_1, \alpha_1; x_2, \alpha_2; p_2) B^{j_2}(y_2, \beta_2; x_3, \alpha_3; p_3) \dots B^{j_{m-1}}(y_{m-1}, \beta_{m-1}; x_m, \alpha_m; p). \end{aligned} \quad (33)$$

Пользуясь условием эрмитовости $w(x_1, \alpha_1; x_2, \alpha_2; x_3, \alpha_3) = \bar{w}(x_3, \alpha_3; x_2, \alpha_2; x_1, \alpha_1)$ и локальности, можно показать, что правая часть (32) не зависит от выбора m . Более того, из (31–33) и из гипотез А) и Б) относительно полного набора следуют все аксиомы Вайтмана, в том числе положительная определенность и локальная коммутативность для n -точечной функции (см. [8]).

Конформная теория характеризуется тем, что в ней известны все двухточечные и трехточечные функции, с точностью до множителей, зависящих лишь от размерностей полей. Возникает заманчивая задача — определить эти размерности и постоянные множители таким

образом, чтобы удовлетворялось условие дуальности (3I). Это означало бы построение (может быть нетривиального!) примера локальной квантовой теории поля. Когда решение задачи дает так много, неудивительно, что его пока не удается найти. Поэтому нам представляется интересным изучение (хоть бы тривиальных) точно решаемых моделей с этой точки зрения.

Л и т е р а т у р а

- I. G.Veneziano, Elementary Processes at High Energy (Academic Press, New York, 1971).
2. P.H.Frampton, Dual Resonance Models (Benjamin, Reading, Mass, 1974).
3. G.Mack, J.de Physique 34, Colloque C1, 99 (1973); also in Renormalization and Invariance in Quantum Field Theory (Plenum Press, New York, 1974)
4. A.M.Поляков. ЖЭТФ 66, 23 (1974).
A.A.Migdal, 4-dimensional Soluble Models of Conformal Field Theory, Landau Institute preprint, Chernogolovka (1972).
5. V.K.Dobrev, V.B.Petkova, S.G.Petrova, I.T.Todorov, Dynamical Derivation of Vacuum Operator Product Expansions in Euclidean Conformal Quantum Field Theory, IAS preprint, Princeton (July, 1975) and Phys.Rev. D13 (1976) (to appear).
6. B.Schroer, J.A.Swieca, A.H.Völkel, Phys.Rev. D11, 1509 (1975).
7. A.H.Völkel, Global Operator Product Expansions for Free Fields of Arbitrary Mass $m \gg 0$. Freie Univ.preprint, Berlin (1976).
8. G.Mack, Duality in Quantum Field Theory, DESY 75/44 preprint, Hamburg (1975).
9. V.Dobrev, G.Mack, V.Petkova, S.Petrova, I.Todorov, Harmonic Analysis on the n -Dimensional Lorentz Group and its Application to Conformal Quantum Field Theory. (In preparation to be submitted to Springer Lecture Notes in Physics).
10. Н.Н.Боголюбов, А.А.Логунов, И.Т.Тодоров. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, Москва, Наука, 1969.
11. K.G.Wilson, Phys.Rev. 179, 1499 (1969); see also K.G.Wilson, On Products of Quantum Field Operators at Short Distances, Cornell Report (1964).
12. W.Zimmermann, in Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory, 1970 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics, ed. S.Deser, M.Grisaru and H.Pendleton (MIT Press, Cambridge, Mass, 1970) vol.1, pp.395 - 589.

13. S.Ferrara, R.Gatto, A.Grillo, Ann.Phys. (N.Y.) 76, 161 (1973).
 Springer Tracts in Modern Physics 62, 1 (1973);
 Bonora et al., S.Ferrara et al. in: Scale and Conformal Symmetry in Hadron Physics (Wiley, New York, 1973).
14. V.Bargmann, I.T.Todorov, Spaces of Analytic Functions on a Complex Cone as Carriers for the Symmetric Tensor representations of SO_0 , Princeton University preprint, Princeton (1975).
15. G.Mack, in: Lecture Notes in Physics, 37, Ed. H.Rollnik and K.Dietz (Springer, Berlin, 1975) p.66.
16. M.Lüscher, Thesis, Hamburg (1975); W.Rühl, B.C.Yunn, Operator Product Expansions in Conformally Covariant QFT, Kaiserslautern preprint (1975).

VI.

Кварковые модели протяженных частиц
QUARK MODELS
OF EXTENDED PARTICLES

ДИНАМИКА СОСТАВНЫХ МОДЕЛЕЙ АДРОНОВ

А. Т. Филиппов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Развитие динамики составных моделей адронов начинается с известной работы Ферми и Янга, опубликованной в 1949 г. и воспринятой современниками весьма прохладно. Позднее, под впечатлением увеличения числа элементарных частиц модели, в которых все адроны строятся из протона, нейтрона и Λ -гиперона (С.Саката, М.А.Марков и др.), стали казаться более привлекательными.

Современные адроны "состоят" из кварков. Существенно новым элементом модели кварков по сравнению с первыми составными моделями адронов является то, что барионы строятся из трех кварков.

"Три кварка" изобретены Дж.Джойсом в 1939 г. Понадобилось 25 лет, чтобы "понять" роль кварков в физике элементарных частиц. Это сделали в 1964 г. Цвейг и Гелл-Манн. К сожалению, Цвейг назвал кварки "тузами", и, вероятно, по этой причине его очень интересная работа, не потерявшая значения до сих пор, осталась неопубликованной и не получила известности, которой она по праву заслуживает. К счастью, впоследствии выяснилось (Глэшоу с сотр.), что для построения непротиворечивой теории слабого взаимодействия желательно ввести четвертый кварк. Таким образом, кварки по справедливости следовало бы называть тузами. Большинство предпочло, однако, сохранить слово "кварк", и поэтому четвертый пришлось назвать "очарованным" (на наш взгляд, удобно было бы в этом случае употреблять слово "квартки" или "квартирки"). Еще раньше число кварков было утроено, когда Н.Н.Боголюбов с сотрудниками, а также Намбу и Хан для преодоления противоречий со статистикой кварков ввели новую степень свободы, которую теперь принято называть "цветом". Оказалось, что введение цвета позво-

ляет успешно разрешить другие парадоксы модели кварков. Поэтому использование цвета кварков и квартков представляется сегодня почти неизбежным. "Когда же ... я установил со всей ясностью это трехцикловое, двенадцатичленное истинное знание об этих четыре благородных истинах, тогда ... возникло у меня зрение и знание; непоколебимо просветление моего сознания" (см. ^{1/1}, где можно найти дальнейшие подробности о четырех благородных истинах, в частности, о благом восьмеричном пути).

Последние экспериментальные данные о новых частицах ("джипсионах" или джипси-частицах), о двумюнных и электрономюнных событиях вызывают подозрения, что кварков может оказаться еще больше, может быть, бесконечно много. Все это открывает новые горизонты и вызывает вполне естественное воодушевление. Однако попытки анализа новых явлений на языке привычной кварковой модели, которой уже более десяти лет от роду, вскрыли несколько недодуманных и недоделанных черт этой модели. Все эти недодумки и недоделки относятся к проблемам динамики кварков. Здесь мы не будем сколько-нибудь подробно обсуждать эти проблемы в связи с новыми частицами, ограничившись обычными адронами. Основные вопросы, ответы на которые необходимы для понимания джипсионов как связанных состояний очарованных и цветных кварков, можно сформулировать, оставаясь на более надежной почве обычных адронов.

Так как кварки пока не открыты и остаются "вещью в себе", их можно наделять, не рискуя впасть в противоречие с опытом, многочисленными свойствами, которые позволяют объяснять наблюдаемые явления и выражаются некоторыми прилагательными к слову "кварк". В просторечии тонкости обычно не учитываются, и кварк называет просто кварком ($q = u, d, s, c, \dots$). При этом подразумевается "обычные" кварки с дробным зарядом, обладающие спином $1/2$, но не подчиняющиеся статистике Ферми. Кварки имеют очень малые собственные размеры ($\sim 0.1 \text{ ГэВ}^{-1}$) и движутся внутри адрона, размер которого $\sim 5 \text{ ГэВ}^{-1}$. Поэтому можно считать их почти свободными и слабо взаимодействующими друг с другом. Можно, с другой стороны, представлять себе, что кварки связаны упругими пружинками ("глюонами"), которые не позволяют им удалиться на большие расстояния друг от друга. При этом пружинки связывают лишь состояния q и \bar{q} или qqq . Пружинки примерно одинаковы для всех кварков, а массы кварков отличаются. При достаточно простых и естественных

предположениях о взаимодействиях кварков с электромагнитными и слабыми токами и об их взаимодействии друг с другом, эти наивные представления позволили качественно, а во многих случаях и количественно понять удивительно много фактов физики адронов.

Особенно удачной оказалась модель квазинезависимых кварков (Дубненский "мешок" с кварками), предложенная Н.Н.Боголюбовым с сотрудниками^{/2/}. Согласно этой модели, кварки, обладающие очень большой массой, движутся почти свободно в очень сильном самосогласованном поле, которое почти начисто "съедает" их массу. В окончательные ответы входит поэтому всегда только эффективная масса кварков, которая оказывается малой, а кварки в свободном состоянии не появляются. На основе таких представлений были рассчитаны электромагнитные и слабые распады и форм-факторы адронов. Результаты оказались в гораздо лучшем согласии с экспериментальными данными, чем расчеты, основанные на использовании статической $SU(6)$ -симметрии. Это связано с тем, что в модели квазинезависимых кварков были аккуратно учтены релятивистские эффекты, которые изменяют некоторые предсказания статической $SU(6)$ -симметрии. Модель квазинезависимых кварков была существенно развита в работах П.Н.Боголюбова^{/3/}. Ему, в частности, удалось получить хорошо согласующиеся с экспериментом значения масс возбужденных состояний барионов, магнитных моментов барионов μ_p, μ_n ; G_A/G_V , $\langle \tau^2 \rangle_{p,n}$.

Недавно были предприняты попытки развить в различных направлениях идеи модели Дубненского "мешка". В модели Массачусетского "мешка" в ограниченной области пространства вводится постоянная объемная плотность энергии B (внешнее давление), позволяющая удерживать кварки и глюоны внутри "мешка". Наличие этой энергии не позволяет "мешку" быть ни слишком большим, ни слишком малым (средний размер "мешка" $\sim (B)^{-1/4}$). Если зафиксировать размер адрона, то модель Массачусетского мешка по существу сводится к Дубненской модели и при использовании ряда предположений, позволяющих провести вычисления, приводит к тем же количественным результатам для масс, $\mu_p, \mu_n, G_A/G_V$ и $\langle \tau^2 \rangle_{p,n}$. (Это более подробно обсуждается в докладе П.Н.Боголюбова на данной конференции, см. также его обзор^{/3/}). Проблема учета движений поверхности мешка пока не решена и представляет серьезные

трудности. Для их преодоления предлагается ввести еще поверхностное натяжение "мешка" (эластичная "шкура" адрона). При этом получается Будапештский "мешок", обсуждаемый на этой конференции в докладе Ю.Кути. Серьезная нерешенная проблема этой модели — возможность сильного взаимодействия "шкура" с кварками, что может привести к рождению большого числа пар кварков и антикварков внутри мешка.

Интересным новым моментом Массачузетской модели является возможность рассмотрения сильно возбужденных состояний адронов. Оказывается^{4/}, что плотность распределения уровней энергии адронов доляна экспоненциально расти с ростом массы, а среднее значение спина адронов растет при этом почти линейно. Такое поведение характерно для статистических и дуальных моделей адронов и порождает надежду на возможность объяснения происхождения сил, удерживающих кварки внутри адрона в самосогласованной модели: кварки

связываются силами, порождаемыми обменом резонансных состояний, которые, в свою очередь, состоят из кварков, которые...

Надежда эта основана на том обстоятельстве, что обмен резонансными состояниями с экспоненциально растущим спектром масс порождает потенциал взаимодействия "мешочного" типа, и слабо возбужденные состояния адронов можно описывать в рамках Дубненской модели (см. предпоследний раздел данного доклада).

Массачузетский мешок, очевидно, является нелокальным объектом и не может быть непосредственно описан в терминах локальных квантовых теорий поля. Тем не менее нечто подобное "мешкам" можно получить и в локальных теориях поля, если использовать "солитонные" решения классических нелинейных уравнений теории поля^{5/}. Другая возможность использования локальной теории поля реализуется в модели так называемого Стэнфордского мешка^{5/}. В этой модели, подобно Дубненской, кварки имеют очень большую затравочную массу, которая почти нацело "съедается" сильным притяжением между кварками (глубокая скалярная потенциальная яма). Глубина ямы и затравочная масса кварка приблизительно равны, т.к. имеют общую природу — они возникают за счет спонтанного нарушения симметрии вакуума. Для волновых функций кварков, однако, получается несколько неожиданный результат: вместо того,

чтобы свободно двигаться внутри мешка, кварки скапливаются у его стенок. По этой причине некоторые предсказания Стэнфордской модели оказываются совершенно неудовлетворительными (например, отношение G_A/G_V примерно в два раза меньше экспериментального значения).

Одна из наиболее трудных проблем всех описанных моделей мешков — вычисление вероятностей чисто адронных процессов (распады $A \rightarrow B + C$, рассеяние $A + B \rightarrow C + D$ и т.п.). В случае переходов $A \rightarrow B + \gamma$ или $A \rightarrow B + (\ell \bar{\nu}_\ell)$, определяющихся матричными элементами $\langle B | J_{EM} | A \rangle$, $\langle B | J_W | A \rangle$, были разработаны достаточно простые и эффективные методы (см. ^{12, 17}), позволяющие вычислять динамические моменты локальных токов J_{EM} , J_W между состояниями адронов, составленных из кварков. При этом кварковые волновые функции могут описываться с помощью квазипотенциальных уравнений Логанова-Тавхелидзе или других релятивистских уравнений для связанных состояний. Пользуясь этими методами и соотношениями PCAC, можно попытаться вычислить процессы $A \rightarrow B + \pi$, выражая их через матричные элементы $\langle B | J_W | A \rangle$. На таком пути удалось получить некоторые интересные результаты, однако последовательной схемы расчета даже простейших адронных процессов и процессов $A \rightarrow B \gamma$, $A \rightarrow B (\ell \bar{\nu}_\ell)$ с q_γ^2 или $q_{\ell\nu}^2$, существенно отличными от нуля, построить пока не удалось. Подробное обсуждение успехов и трудностей описываемого подхода можно найти в работах ^{7, 8}.

На наш взгляд, наиболее существенная трудность связана как раз с наиболее сильной стороной таких методов. Все они основаны на $SU(6)$ -симметрии, хорошо воспроизводя ее удачные предсказания и исправляя неудачные. Однако при этом отодвигается на второй план приближенная киральная $SU(3)_R \times SU(3)_L$ (или $SU(2)_R \times SU(2)_L$) симметрия взаимодействий адронов и, в частности, PCAC. Как становится сейчас все более ясным, именно понимание реализации этих симметрий может привести к выяснению природы происхождения масс кварков и загадочных аномалий в спектре масс и распадов псевдоскалярных мезонов (один из возможных подходов к этим проблемам обсуждается ниже).

Особенно ясно характер проблем, о которых идет речь, проявляется в паллиативном полуженуменологическом подходе к расчету процессов $A \rightarrow B \gamma$, $A \rightarrow B \pi$, основанном на так называемом "преобразовании Меллоша" (см., например, ^{9, 10}). Основная идея

этого подхода состоит в том, что при использовании $SU(6)$ -симметрии (точнее, $SU(6)_W$ или киральных симметрий поля кварков, входящих в токи, ("токовые" кварки) нельзя отождествлять с полями кварков, образующих наблюдаемые адроны ("структурные" кварки). В случае свободных кварков удается построить унитарное преобразование V , связывающее структурные и токовые кварки и, соответственно, $SU(6)_W$ -генераторы W_α , действующие на токовые кварки, связаны с генераторами W_α преобразования структурных кварков соотношением: $W_\alpha = V F_\alpha V^{-1}$. Для вычисления переходов нам надо знать $\langle B_{стр} | J_W | A_{стр} \rangle$, где $|A_{стр}\rangle$ и $|B_{стр}\rangle$ преобразуются по неприводимым представлениям $SU(6)_{W,стр}$ с генераторами W_α . Если известно выражение для V , то этот матричный элемент можно записать в виде $\langle B_{ток} | V^{-1} J_W V | A_{ток} \rangle$, где теперь $|A_{ток}\rangle$ и $|B_{ток}\rangle$ преобразуются генераторами F_α группы $SU(6)_{W,ток}$ по тем же представлениям, что $|A_{стр}\rangle$, $|B_{стр}\rangle$. В случае свободных кварков можно найти V в явном виде (это и есть "преобразование Меллоша", фактически эквивалентное давно известному преобразованию Прайса-Тани-Фолди-Вуттисена или ПТФВ (см. /10/). В случае взаимодействующих кварков явный вид этого преобразования неизвестен, и вообще не ясно, можно ли его построить. Однако для целей феноменологического анализа предполагается, что $V^{-1} J_W V$ преобразуется под действием $SU(6)_{W,ток}$ так же, как и в свободном случае. Эта гипотеза удивительно хорошо "сработала", позволив выразить через небольшое число параметров большое количество экспериментальных данных по распадам $A \rightarrow B \pi$ /9/. (Матричные элементы $\langle B_{ток} | V^{-1} J_W V | A_{ток} \rangle$ выражаются через коэффициенты Клебша-Гордона и небольшое число параметров, что позволяет связать реакции с A и B , принадлежащим определенным мультиплетам $SU(6)_W$).

Несмотря на успехи этого подхода, нетрудно понять, что с теоретической точки зрения он ведет в тупик. Сама необходимость различать структурные и токовые кварки связана с тем, что мы исключили взаимодействие кварков, а хотим учесть возможность изменения, скажем, полного орбитального момента кварков в процессе $A \rightarrow B + \pi$. Обращаясь к результатам П.Н. Боголюбова, полученным в модели квазинезависимых кварков /3/, мы видим, что такое изменение состояний кварков происходит автоматически, и это обусловило улучшение предсказаний $SU(6)$ для $\mu_p, \mu_n, G_A/G_V$ и т.п.

Примерно также обстоит дело и в релятивистских моделях кварков, связанных осцилляторным "потенциалом"^{7,8/}. Таким образом, в более реалистических моделях взаимодействия кварков различать структурные и токовые кварки не нужно, но зато необходимо научиться вычислять волновые функции кварков, т.е. детально задавать динамику их взаимодействия. В случае достаточно простых уравнений и потенциалов это, вероятно, возможно, хотя и не просто. С другой стороны, в феноменологическом подходе вообще нет места для киральных симметрий и PCAC, тогда как в реалистическую модель эти симметрии, как мы покажем ниже, вполне можно "вписать" (подобные идеи высказывались ранее ^{II/}, но не были достаточно полно разработаны). Наконец, при феноменологическом подходе наиболее удачные предсказания модели квазинезависимых кварков^{3/} ($\mu_p, \mu_n, G_A / G_V$) воспроизвести не удается^{9,10/}. Все это заставляет смотреть на феноменологическую модель как на временный мост между динамикой кварков и эмпирической реальностью, построенный на довольно ненадежных опорах. Дальнейший прогресс может исходить лишь из более полного развития динамики, основы которой заложены давно и достаточно прочно.

В этом кратком обзоре успехов и проблем динамики кварков мы не имели возможности остановиться на других современных идеях, которые либо связаны с существенно новым формализмом описания связанных состояний кварков ("дуальные струны"), либо с увеличением их числа.

В последнее время к четырем кваркам пытаются добавить пятый ("квинтики") и шестой ("секстики"), вводя "ароматы" кварков. Многие из этих идей обсуждаются в других докладах на этой конференции. Мы оставляем все эти увлекательные возможности в стороне и, употребляя слово "кварк", будем подразумевать три триплета кварков, отличающихся цветом и связанных силами, которые мы сначала не будем пытаться описывать более детально. Величина заряда кварков для дальнейшего не очень существенна, так как мы почти не касаемся электромагнитных взаимодействий адронов. С учетом цветной степени свободы наши кварки подчиняются статистике Ферми.

Прежде чем переходить к основному содержанию этой работы, сформулируем некоторые "детские" вопросы - "как" и "почему" кварковых моделей. Окончательные ответы на эти вопросы пока не известны, и наша цель -- лишь показать, что на эти вопросы

могут существовать разумные ответы, и они не относятся к категории вопросов, о которых говорят: "На идиотский вопрос ответ может быть только идиотским".

Вот некоторые из этих вопросов. I. Почему есть $Q\bar{Q}$ и QQQ и нет экзотических конфигураций, таких как $QQQ(Q\bar{Q})$? 2. Почему нет экзотических квантовых чисел J^{PC} у системы $Q\bar{Q}$? 3. Какими уравнениями описывать связанные состояния кварков? 4. Почему кварки кажутся нам свободными внутри адрона и появляются в свободном состоянии лишь в конфигурациях $Q\bar{Q}$, QQQ ? 5. Какие силы связывают кварки внутри адрона? Как узнать что-либо о природе этих сил из опыта? 6. Почему траектории Редже адронов растут? Почему их наклон универсален? 7. Какова масса кварков? 8. Почему есть $SU(3)$ -симметрия? Почему она нарушена? 9. Почему есть киральная симметрия? Почему есть частичное сохранение аксиального тока? Почему и как эти симметрии нарушены? 10. Почему псевдоскалярные мезоны резко отличаются от векторных и тензорных мезонов? Как получать соотношения между массами адронов? Как описывать смешивание состояний адронов с одинаковыми квантовыми числами? Почему оно возникает? II. Почему адроны можно классифицировать по представлениям статической группы $U_6(6) \times U_{\bar{6}}(6) \times O(3)_L$ или $SU(6) \times O(3)_L$? Почему есть $(56, L \text{ четн.})$ и $(70, L \text{ нечетн.})$, нет 20 и др. 12. Почему в некоторых случаях $SU(6)_w$ дает успешные предсказания для двухчастичных распадов? Почему удастся исправить неудачные предсказания $SU(6)_w$ с помощью "преобразований Меллоша"? Каков его смысл?

Возможность ответа на вопрос № I обычно связывается с понятием цвета кварков. Используя цветные глюоны, можно устроить такой мир, в котором существует ответ не только на этот вопрос, но и ответы на вопросы 4, 5. Однако это мало помогает пониманию остальных вопросов. Поэтому мы в дальнейшем забудем о первом вопросе и будем проявлять почти полную цветовую слепоту. Практически во всем, что обсуждается ниже, цвет кварков учесть легко.

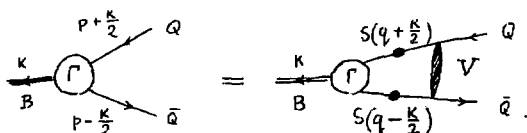
Ответ на второй вопрос, на первый взгляд, тривиален — в нерелятивистской кварковой модели экзотические значения J^{PC} просто не появляются. Но вправе ли мы пользоваться нерелятивистской моделью для описания мезонных состояний? Очевидно, нет (см. ^{12, 3/} и предыдущую дискуссию). Если все же попытаться описы-

вать псевдоскалярные и векторные мезоны нерелятивистскими волновыми функциями, мы получим совершенно несообразные результаты для процессов, в которых кварки аннигилируют: $P \rightarrow \mu\nu$, $P \rightarrow \gamma\gamma$, $V \rightarrow \gamma \rightarrow e^+e^-$ (парадокс Матвеева, Струминского, Тавхелидзе, Ван-Ройена и Вайскопфа^{/13/}). Итак, связанные состояния Q и \bar{Q} необходимо описывать релятивистской волновой функцией. Но в этом случае мы должны знать ответ на вопрос № 3. Если использовать уравнения Бете-Солпитера, то ответ на вопрос № 2 становится проблематичным, т.к. это уравнение допускает состояния с аномальными значениями J^P . Правда, обычно такие состояния имеют отрицательную норму, и их нельзя сопоставить частицам. Очевидно, однако, что появление состояний с отрицательной нормой лишь "увеличивает скорбь", и нужно искать какой-то другой выход. Он состоит в том, что релятивистские волновые функции, соответствующие пространственно-подобным относительным координатам частиц, имеют хорошую физическую интерпретацию: нет состояний с отрицательной нормой и классификация частиц такая же, как в нерелятивистском случае. Уравнения, которым подчиняются такие волновые функции, называются квазипотенциальными и их систематическое использование началось после того, как в работе А.А. Логунова и А.Н. Тавхелидзе^{/13/} был сформулирован квазипотенциальный подход к квантовой теории поля. (Обзор развития и применения этого подхода см. в^{/14-16/}). Следует различать два типа квазипотенциальных уравнений. В одном случае такие уравнения непосредственно выводятся из основных уравнений квантовой теории поля, и соответствующий квазипотенциал, определяющий динамику двухчастичных реакций, можно выразить через функции Грина. В уравнениях второго типа квазипотенциал подбирается таким образом, чтобы с наибольшей возможной точностью воспроизвести двухчастичную амплитуду рассеяния на массовой оболочке. Уравнения первого типа строятся однозначно, но оказываются весьма сложными. (Они в основном использовались для расчетов электродинамических поправок к связанным состояниям^{/15/}). Уравнения второго типа с "локальным" квазипотенциалом имеют гораздо более широкую область приложений и, в частности, широко применялись для расчета релятивистских связанных состояний, траекторий Редже и т.д. (см.^{/15,17/}, обзор применений квазипотенциальных уравнений к задаче о взаимодействии двух нуклонов см. в^{/18/}). Локальный квазипотенциал и соот-

ветствующее уравнение очевидно, не определяются однозначно, и поэтому существуют различные модификации оригинального уравнения Логанова-Тавхелидзе (уравнения В.Г.Калышевского, И.Т.Тодорова и др.). Недавно в работах А.А.Логанова, О.А.Хрусталева и др. (см. /19/) было предложено очень интересное обобщение уравнений "локального" типа, позволяющее учитывать в квазипотенциальных уравнениях вклад многочастичных состояний. Эти уравнения, безусловно, найдут широкое применение при изучении сильно возбужденных состояний адронов, когда многочастичными эффектами пренебрегать нельзя.

В заключение этого краткого обсуждения проблемы выбора уравнения для описания связанных состояний кварков отметим, что наиболее удачной формулировкой представляется сегодня квазипотенциальное уравнение в системе бесконечного полного импульса частицы /20/, или, что то же самое, в переменных светового фронта (такое уравнение используется, в частности, М.В.Терентьевым, доклад на этой конференции). Хотя в принципе вопрос о выборе уравнения решается в пользу квазипотенциальных уравнений, мы в дальнейшем изложении займем несколько "опportunистическую", или, если угодно, прагматическую позицию, используя для описания релятивистских связанных состояний $Q\bar{Q}$ уравнения Бете-Солпитера, но забывая об экзотических состояниях и состояниях с неположительной нормой. При этом, конечно, нельзя претендовать на последовательное описание связанных состояний кварков и необходимо помнить об области применимости такого подхода. Причина этого заключается в том, что нам понадобится одновременно рассматривать уравнения для связанного состояния $Q\bar{Q}$ и уравнения для пропагаторов кварков. В подходе, основанном на уравнениях Швингера-Дайсона, имеется хорошо известная и изученная связь между этими уравнениями (см. ниже). Соотношение между квазипотенциалом и одночастичным пропагатором неизвестно. Поэтому мы будем переходить к квазипотенциальным волновым функциям лишь на последнем этапе, при физической интерпретации Б.-С. волновых функций. Отметим, что указанная связь нужна нам лишь при исследовании псевдоскалярных сильно связанных состояний $Q\bar{Q}$. Для описания других состояний мезонов (векторных, аксиальных, тензорных и т.д.) и барионов лучше пользоваться квазипотенциальными уравнениями.

Уравнение Бете-Солпитера для $Q\bar{Q}$ в диаграммном виде выглядит так (см., например, /21/):



Здесь B — связанное состояние кварка Q и антикварка \bar{Q} , а V — ядро уравнения, которое мы называем "потенциалом". Вершинная функция Γ связана с волновой функцией Б.-С. χ соотношением

$$\chi_\kappa(p) = S(p - \frac{k}{2}) \Gamma(p, k) S(p + \frac{k}{2}),$$

где S — точный пропагатор кварков

$$(S(p))_{\alpha\beta} = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{ipx} \langle T \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(-x) \rangle.$$

Напомним, что

$$(\chi_\kappa(p))_{\alpha\beta} = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \langle T \psi_\alpha(x_q) \bar{\psi}_\beta(x_{\bar{q}}) | B, \bar{k} \rangle \exp\left\{i \frac{x_q + x_{\bar{q}}}{2} + i p(x_q - x_{\bar{q}})\right\}.$$

Уравнения для Γ и χ однородны и определяют эти функции с точностью до произвольного нормировочного множителя, который можно зафиксировать некоторым билинейным условием нормировки. Проще всего получить это условие из уравнения для двухчастичной функции Грина кварка и антикварка

$$G = G_0 + G_0 V G = G_0 + G V G_0.$$

(Здесь G — точная двухчастичная функция Грина, а G_0 — свободная функция Грина, равная $S(p + \frac{k}{2}) S(p - \frac{k}{2})$). Отсюда следует,

$$(1 - G_0 V) G = G_0 = G (1 - V G_0),$$

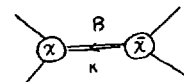
т.е. $R \equiv G_0^{-1} - V,$

$$R G = (G_0^{-1} - V) G = 1 = G (G_0^{-1} - V) \equiv G R.$$

Таким образом,

$$G = G R G \equiv G (G_c^{-1} - V) G.$$

Это — искомое билинейное уравнение для G . Выделим в G полюс, соответствующий связанному состоянию

$$G = \frac{\chi \otimes \bar{\chi}}{(2\pi)^4 i (\kappa^2 - M_B^2)} + \dots = \text{diagram} + \dots$$


и полюс, относящийся к состоянию с положительной энергией $E_B = \sqrt{\kappa^2 + M_B^2}$.

$$(\kappa^2 - M_B^2) = \frac{1}{2\kappa_0} \left[(\kappa_0 - E_B)^{-1} + (\kappa_0 + E_B)^{-1} \right].$$

Разложив R по степеням $(\kappa_0 - E_B)$

$$R = R \Big|_{\kappa_0 = E_B} + (\kappa_0 - E_B) \frac{\partial R}{\partial \kappa_0} \Big|_{\kappa_0 = E_B}$$

из тождества $G = G R G$ получим

$$R \Big|_{\kappa_0 = E_B} = 0; \quad \frac{1}{(2\pi)^4 i} \bar{\chi}_\kappa \frac{\partial R}{\partial \kappa_0} \chi_\kappa = 2\kappa_0, \quad \frac{1}{(2\pi)^4 i} \bar{\chi}_\kappa \frac{\partial R}{\partial \kappa_\mu} \chi_\mu = 2\kappa_\mu.$$

В более подробной записи это условие нормировки выглядит так:

$$\text{Sp} \left\{ \left\{ \frac{d^4 q}{(2\pi)^4 i} \bar{\chi}_\kappa(q) \frac{\partial}{\partial \kappa_\mu} \left\{ S^{-1}(q + \frac{\kappa}{2}) S^{-1}(q - \frac{\kappa}{2}) - V(p, q, \kappa) \right\} \chi_\mu(q) \right\} \right\} = 2\kappa_\mu.$$

Здесь $V(p, q, \kappa)$ — ядро уравнения Б.-С., так что

$$\Gamma(p, \kappa) = \left\{ d^4 q V(p, q, \kappa) S(q - \frac{\kappa}{2}) \Gamma(q, \kappa) S(q + \frac{\kappa}{2}) \right\}. \quad (I)$$

Уравнение для χ легко получить из этого уравнения и условия связи χ и Γ . Заметим, что таким же способом можно получить условие нормировки для квазипотенциальной волновой функции^{15/}. Выпишем также общий вид Б.-С. волновой функции для псевдоскалярных мезонов:

$$\chi_k(p) = \gamma_5 \left[\chi_1 + (kp) \hat{p} \chi_2 + \hat{k} \chi_3 + [\hat{k}, \hat{p}] \chi_4 \right]; \chi_i = \chi_i(p_i, (pk)),$$

где используется стандартное представление для γ -матриц

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Инвариантность относительно преобразований \mathcal{P} и \mathcal{C} дает соотношения

$$\chi_k(p) = \mathcal{P}_B \gamma_0 \chi_k(\tilde{p}) \gamma_0, \quad \chi_k(p) = \mathcal{C}_B \left[\mathcal{C} \chi_k^T(-p) \mathcal{C}^{-1} \right],$$

где $\tilde{p} = (p_0, -\vec{p})$, $\mathcal{C} \gamma_\mu^T \mathcal{C}^{-1} = -\gamma_\mu$

Если $\mathcal{C}_B = +1$, то χ - четная функция переменной (kp) .

Если $\mathcal{C}_B = -1$, то χ - нечетная функция этой переменной.

Состояния с $\mathcal{C}_B = -1$ экзотические, и в общем случае их появление неизбежно. Если, однако, для волновой функции выполнено условие Маркова-Джаки $(kp) = 0$, то очевидно, что экзотическое состояние не возникает. В релятивистском пределе это условие выполнено, что и объясняет исчезновение экзотики. Это же условие обычно содержится в уравнениях квазипотенциального подхода (см. ^{7,16/}), и оно автоматически "истребляет" экзотические и "призрачные" состояния. Механизм исчезновения аномальных состояний в уравнениях "светового фронта" внешне выглядит несколько иным, но суть дела та же: избавляясь от лишней переменной (относительное время кварка и антикварка), мы одновременно избавляемся и от всех патологий релятивистского уравнения для связанных состояний.

На этом мы оставим пока обсуждение вопросов 1-3, забудем на время о вопросах 4-6, связанных с выбором потенциала V , и обратимся к вопросам 7-10. Для ответа на них необходимо рассмотреть уравнения для пропагаторов кварков.

Чтобы получить такие уравнения, предположим, что потенциал V локален, т.е. что $V(p, q, k) = V(ip - q^2, k^2)$. Тогда этот потенциал можно считать неким обобщенным пропагатором (суперпропагатором), и простейшее уравнение для пропагаторов кварков в диаграммном виде можно представить так:

$$S = S_0 + \text{diagram}$$

The diagram shows a horizontal line with a dot labeled 'S'. This is equal to a horizontal line with a dot labeled 'S_0' and 'P' below it, plus a diagram of a horizontal line with two dots labeled 'S'. Between these dots is a loop with a wavy line inside, labeled $V((p-q)^2)$. To the right of the loop is a dot labeled 'P' and 'S_0' below it.

Ясно, что это уравнение — приближенное. В следующем приближении можно было бы попытаться учесть поправки к вершине QQV и к пропагатору



Первое приближение соответствует часто применяемому в квантовой статистике приближению самосогласованного поля. Уравнение для связанных состояний кварков и антикварков тесно связано с уравнением для пропагаторов кварков. Действительно, если считать массовый оператор кварков \hat{m} функционалом пропагатора S , то ядро уравнения Б.-С. равно

$$V = \delta \hat{m} / \delta S,$$

в чем можно убедиться совершенно непосредственно. Именно ради сохранения этой связи мы и пошли по "опportunистическому" пути использования уравнения Б.-С. Можно надеяться, что при достаточно удачном выборе потенциала учет поправок к вершине $Q\bar{Q}V$ и к глюонному пропагатору V не приведет к принципиальному изменению теории, что и позволит в дальнейшем оправдать использование приближения самосогласованного поля. Напомним, что именно такая удача случилась в теории сверхпроводимости, где при достаточно простом выборе потенциала уравнения самосогласованного поля позволили не только качественно, но и количественно описать широкий круг явлений^{/22/}. Наш подход к происхождению масс кварков и к объяснению нарушений симметрий основан на аналогии с теорией сверхпроводимости, и мы надеемся, что удача может также повториться. Идея о такой аналогии впервые высказана в работах^{/23/}. Используемые нами уравнения для пропагатора кварка чрезвычайно похожи на уравнения для фермионного пропагатора в теории сверхпроводимости в форме Намбу и Элиашберга и ранее использовались в электродинамике электронов с $m_0 = 0$ ^{/24/}. Более глубокий подход основывается на каноническом преобразовании и уравнениях

Н.Н.Боголюбова. Этот подход будет нами использован при обсуждении соотношения между "структурными" и "токовыми" кварками.

В аналитическом виде наше уравнение для пропагаторов кварков можно записать так:

$$S(p) = S_0(p) + \int d^4q S(p) V((p-q)^2) S(q) S_0(p).$$

Здесь $S(p)$ - матрица не только по спиновым, но и по унитарным индексам, так что пропагатор S описывает сразу три кварка. Мы предполагаем, что затравочная масса всех кварков строго равна нулю и что взаимодействие $U(3)$ -инвариантно:

$$\frac{1}{i} - g\lambda_0 + g'\lambda_i, \quad \lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_i - \text{матрицы Гелл-Манна.}$$

Мы будем искать решения этих уравнений, соответствующих ненулевым и, вообще говоря, не равным массам кварков. Удобно поэтому ввести проекционные операторы на состояния u, d кварков и s кварка

$$\varphi_1 = \frac{2}{3}\lambda_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8, \quad \varphi_2 = \frac{1}{3}\lambda_0 - \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8, \quad \varphi_1\varphi_2 = 0, \quad \varphi_i^2 = \varphi_i, \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 1$$

и, соответственно, пропагаторы u, d кварков и s кварка: S_1 и S_2 . Тогда $S = \varphi_1 S_1 + \varphi_2 S_2$, $S^{-1} = \varphi_1 S_1^{-1} + \varphi_2 S_2^{-1}$. Нетрудно проверить, что

$$\sum_{i=1}^8 \lambda_i \varphi_1 \lambda_i = \frac{10}{3} \varphi_1 + 2 \varphi_2, \quad \sum_{i=1}^8 \lambda_i \varphi_2 \lambda_i = 4 \varphi_1 + \frac{4}{3} \varphi_2.$$

Уравнение для пропагаторов кварков, как и уравнения для связанных состояний кварков удобно изучать в евклидовском пространстве-времени. Если потенциал несингулярен, то такой переход обычно можно достаточно строго обосновать ("Виковское вращение"). В случае сингулярных потенциалов функции Грина и волновые функции обычно имеют существенную особенность при бесконечно большом значении импульса, в силу чего уравнения в евклидовском пространстве и в псевдоевклидовском пространстве оказываются не эквивалентными. В частности, псевдоевклидовы уравнения обычно не имеют решения, так как мнимые части пропагаторов быстро растут при неограниченном росте импульса во времениподобном направлении. Тем не менее, евклидовские уравнения могут иметь хорошо определенное и единственное решение. Их смысл можно понять следующим образом.

Рассмотрим для определенности пропагатор. Его мнимая часть однозначно определена в очень широком классе неперенормируемых и нелокальных теорий поля. Дисперсионный метод позволяет восстановить вещественную часть. В ренормируемых теориях вещественная часть определяется с точностью до конечного числа произвольных постоянных, в неренормируемых теориях число постоянных произвольно велико. Аналитическое продолжение решений евклидовских уравнений в псевдоевклидову область однозначно определяет эти константы так, что функция Грина оказывается в определенном смысле наименее сингулярной при больших значениях импульсов. В частности, требование существования решения евклидовского уравнения означает, что пропагатор должен достаточно быстро убывать по пространственно-подобным значениям импульса. Можно сформулировать такие требования минимальной сингулярности, которые обеспечивают единственность определения пропагаторов в достаточно обширном классе теорий. Гораздо труднее найти достаточные условия существования пропагаторов, удовлетворяющих таким требованиям единственности. Исследование уравнений в евклидовской метрике является удобным эвристическим приемом эффективного построения таких пропагаторов. Более общий метод состоит в том, что уравнения Швингера-Дайсона и им подобные интегральные уравнения сводятся к дифференциальным уравнениям с определенными граничными условиями. Эти уравнения пригодны в любой метрике. Случай сингулярной задачи отличается тем, что некоторым граничным условиям удовлетворить нельзя. Наш способ построения решений состоит в том, что эти граничные условия отбрасываются и заменяются некоторыми условиями минимальной сингулярности. Во всех исследованных до сих пор задачах тот же самый результат можно было бы получить, решая соответствующее евклидовское интегральное уравнение. Это обстоятельство не случайно, но мы не имеем возможности обсуждать его здесь более подробно (см./25/).

Итак, займемся евклидовским уравнением для пропагаторов кварков. Потенциал $V((p-q)^2)$ можно разложить по четырехмерным сферическим функциям — полиномам Гегенбауэра

$$V((p-q)^2) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(p^2, q^2) C_n^1(\cos \varphi_{pq}), \quad \cos \varphi_{pq} = \frac{(pq)}{|p||q|}, \quad p^2 = \bar{p}^2 + q^2.$$

Тогда уравнения для пропагаторов, или, что то же самое, для массовых операторов $\bar{G} = S^{-1} + \hat{P}$ можно представить в форме ($\bar{G}_i = 0 \bar{G}_i$,

$[a] = [m^{-1}]$, α — некоторый параметр):

$$\begin{aligned}
G_1 &= (G + g'^2) K\{G_1\} + 2g'^2 K\{G_2\}, \\
G_2 &= 4g'^2 K\{G_1\} + (G - g'^2) K\{G_2\}, \\
G &\equiv g^2 + \frac{7}{3} g'^2,
\end{aligned}
\tag{2}$$

где $K\{G\} \equiv \int_0^\infty dy \frac{y^3 G(y)}{y^2 + G^2(y)} K(x, y), \quad x \equiv a|p|, y \equiv a|q|$

$$K(x, y) = \frac{v_0(p^2, q^2)}{8\pi^2 a^2} = \frac{v_0(x^2, y^2)}{8\pi^2}, \quad g^2 = g_v^2 - g_A^2, \quad g'^2 = g_v'^2 - g_A'^2.$$

Мы забыли отметить выше, что, поскольку наша теория должна быть $U(3)_R \times U(3)_L$ инвариантной, мы выбираем $Q\bar{Q}V$ -вершину в виде комбинации вектора и аксиала, т.е.

$$g = \gamma_\mu (g_v + \gamma_5 g_A), \quad g' = \gamma_\mu (g_v' + \gamma_5 g_A').$$

При этом предполагается, что пропагатор глюонов можно выбрать в поперечной калибровке (калибровка Ландау). В рамках развиваемого полуженуменологического подхода мы позволим себе принять эту гипотезу без дальнейшего обсуждения. Легко видеть, что при этом пропагатор каждого кварка определяется одной функцией — массовым оператором кварка.

Рассмотрим сначала симметричное решение, когда $G_1 \equiv G_2 \equiv G_0$. Тогда уравнения (2) сводятся к одному уравнению

$$G_0 = (G + 3g'^2) K\{G_0\} = (g^2 + \frac{16}{3} g'^2) K\{G_0\}.$$

Допустим, что это уравнение имеет нетривиальное решение. Это решение определяет ненулевую массу кварков, если имеет решение уравнение

$$G(p) \big|_{p^2=m^2} = m, \quad p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2.$$

Разумеется, чтобы такое решение могло существовать, в теории должна существовать размерная константа a , через которую можно выразить массу. В частности, в электродинамике электронов таким способом получить массу электрона нельзя. Масса электрона может быть выражена либо через некоторое дополнительное взаимодействие, либо через параметр обрезания, который по существу также опреде-

ляет некоторое дополнительное, не электродинамическое взаимодействие электронов. Чтобы мы могли получить массу кварков, потенциал их взаимодействия должен существенно зависеть от некоторого размерного параметра, т.е. быть в каком-то смысле нелокальным. Может показаться, что достаточно взять любое неренормируемое взаимодействие, однако в обычных неренормируемых теориях потенциал сингулярен на малых расстояниях и позволяет уйти кваркам из адронов^{/25/}. Мы ниже покажем, что существует специальный класс теорий поля, в которых потенциал регулярен на малых расстояниях и сингулярен на относительно больших расстояниях между кварками. В таких теориях можно построить потенциал, для которого уравнение для пропагатора кварков в евклидовском пространстве имеет хорошо определенное решение, и масса кварков оказывается конечной. Пока массы всех кварков равны, никакого нарушения симметрии нет, хотя иногда называют решения с ненулевой массой, полученные при нулевой затравочной массе, решениями со спонтанным нарушением симметрии типа U_1 -инвариантности или киральной симметрии. Правильнее называть такую реализацию киральной симметрии динамической реализацией, или реализацией Боголюбова-Намбу-Голдстоуна (БНГ). Впервые такая реализация симметрий была получена в классической работе Н.Н.Боголюбова по теории сверхтекучести (1946 г.), а общий метод снятия вырождения ("метод квазисредних") и теорема о появлении возбуждений с нулевой массой ("теорема о $1/q^2$ ") в системах многих тел сформулированы в работах^{/26/}. Динамическая реализация симметрий, в частности, киральных, в квантовой теории поля изучена в работах^{/27/}. (Обзор современного состояния проблемы динамической реализации киральных симметрий см. в^{/28/}).

В нашем случае возможность БНГ-реализации киральной симметрии и проблема появления частиц с нулевой массой должны устанавливаться на основе решения основных уравнений. Как известно, в случае динамической реализации киральной симметрии могут появиться псевдоскалярные частицы с нулевой массой^{/27,28/}. Однако в динамической теории обсуждаемого здесь типа появление таких частиц, так же как и сама возможность БНГ-реализации, вовсе не очевидны. Для того чтобы полностью исследовать эту проблему, необходимо (по меньшей мере!) показать, что существуют нетривиальные БНГ-решения уравнений для пропагатора кварков, однородных БС-уравнений для псевдоскалярных мезонов и неоднородных

уравнений для функций Грина двух кварков, имеющие соответствующие мезонные полюсы. Такая программа ни в одной реалистической релятивистской теории пока не осуществлена (см. подробную дискуссию в недавних работах^{/29/}). Здесь мы не будем пытаться обсуждать эту труднейшую проблему во всем объеме, а лишь обратим внимание на некоторые новые обстоятельства, существенные для моделей кварков и еще не рассматривавшиеся в литературе.

Напишем уравнение для псевдоскалярных частиц с нулевой массой, которое следует из уравнения (I): $\Gamma(p, 0) = \gamma_5 \lambda_c \{f^c\}$, $\{f^c\} = \{f\}$

$$f(x) = (g^2 + \frac{10}{3} g'^2) K_c \{f\}, \quad K_c \{f\} = \int_0^\infty dy \frac{y^3 f(y)}{y^2 + b^2(y)} K(x, y)$$

Легко видеть, что если уравнение для пропагатора кварков при $g' = 0$ имеет симметричное решение, то и это уравнение для девяти псевдоскалярных мезонов также имеет решение, которое имеет вид:

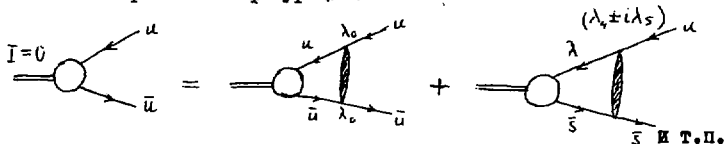
$$f(x) = c \phi(x).$$

Отсюда следует, что вакуумное и однокварковое состояния отличаются на нетривиальное каноническое преобразование (преобразование Боголюбова) от соответствующего свободного вакуума и свободного кварка. Физический вакуум и физический кварк содержат бесконечно много возбужденных безмассовых псевдоскалярных частиц. Естественно отождествить затравочные безмассовые кварки с "токовыми кварками", а массивные физические кварки со структурными. Тогда преобразование перехода от "физических" кварков к "токовым" по существу совпадает с преобразованием Боголюбова, и можно использовать технику, развитую в теории сверхтекучести и сверхпроводимости.

Чтобы показать, что БНГ-реализация $U(3)_R \times U(3)_L$ -симметрии действительно осуществляется, необходимо задать явный вид взаимодействия, т.е. $K(x, y)$. Реально осуществить всю программу пока удастся лишь для упрощенной модели, когда $K(x, y) = k(x) k(y)$. Результаты оказываются несколько неожиданными. В случае $g' = 0$ помимо тривиального решения $c = 0$ действительно существует (при должном выборе g, k) нетривиальное решение $c \neq 0$ и 9 безмассовых мезонов. Если $g' \neq 0$, то безмассовым остается лишь девятый мезон η' , а остальные могут приобрести массу. Нетривиальное решение возникает лишь при достаточно большом значении константы $g^2 + \frac{16}{3} g'^2$. Если $g' \neq 0$, то существует решение с $c_1 \neq c_2$, т.е. в принципе возможно спонтанное нарушение $U(3)$ -симметрии. Однако в этом случае пока не ясно, что происходит с псевдоска-

лярными мезонами (эта проблема в настоящее время изучается). В любом случае необходимо еще исследовать, какое из решений стабильно. Удобный критерий стабильности был предложен Б.А.Арбузовым, А.Н.Тавхелидзе и Р.Н.Фаустовым в 1961 г.: если ввести в затравочный лагранжиан малую массу фермиона λ , то для стабильности нетривиального решения необходимо, чтобы $\partial m(\lambda)/\partial \lambda|_{\lambda=0} > 0$. Таким образом, задачу можно поставить так: найти такое взаимодействие кварков $K(x, y)$, чтобы существовало нетривиальное несимметричное БНГ-решение наших уравнений, удовлетворяющее условиям стабильности. При $g'=0$ такое решение не существует, но мы надеемся, что при $g' \neq 0$ эту задачу можно решить.

Описанный подход позволяет надеяться найти разумные ответы на большую часть вопросов 7-10. В затравочной теории есть $U(3)$ -симметрия и киральная симметрия. Эти симметрии нарушаются потому, что кварки приобретают массы, которые спонтанно расщепляются. Псевдоскалярные мезоны имеют аномально малые массы из-за того, что в первом приближении по нарушению симметрии они имеют нулевые массы. Чтобы реализовать механизм спонтанного нарушения симметрии, мы были вынуждены ввести два типа $U(3)$ -инвариантных взаимодействий - "прямые" и "обменные" (или $U(3)$ -синглетное и $U(3)$ -октетное). Нетрудно понять, что обменное взаимодействие вызывает смешивание кварковых конфигураций:



Необходимо, однако, понять, почему это смешивание очень мало для векторных и тензорных мезонов и не так мало для псевдоскалярных мезонов. Этот вопрос мы попытаемся обсудить в конце этой работы, где мы также вернемся к вопросу о массовых формулах. Вопрос о симметрии $SU(6)$ мы обсуждать здесь не будем. Эта симметрия - приближенная динамическая симметрия, которая реализуется на некоторой части адронных состояний и не имеет фундаментального смысла. $SU(6)$ -симметрия получается, если массы кварков достаточно велики, а спинные взаимодействия малы. Мы просто предположим, что эти условия выполнены.

Обсудим теперь более детально переход от безмассовых кварков к массивным. Этот переход наиболее адекватно описывается с помощью канонического преобразования Боголюбова. Введем операторы полей кварков, удовлетворяющие каноническим перестановочным соотношениям при равных временах

$$\{\psi_a^\dagger(\bar{x}), \psi_b(\bar{x}')\} = \delta_{ab} \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}'), \quad t = t'; \quad \{\psi_a(\bar{x}), \psi_b(\bar{x}')\} = 0.$$

Разложим операторы ψ по операторам уничтожения и рождения. Для этого нужно сначала выбрать определенный спинорный базис. Возьмем для матриц Дирака следующее представление

$$\beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \beta \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Sigma} = \vec{\alpha} \gamma_5 = \gamma_5 \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

и выберем базисные спинорные функции так: $\psi(x) = \sum_{p,i} u_{p,i} a_p e^{-i p x}$,

$$(\vec{\alpha} \vec{p} + \beta m) u_{p,i} = p^0 u_{p,i}, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad \begin{cases} u_{1,3} : p^0 = |\vec{p}| > 0, \\ u_{2,4} : p^0 = -|\vec{p}| < 0, \end{cases}$$

$$(\vec{\Sigma} \vec{p}) u_{p(1,2)} = p^0 u_{p(1,2)},$$

$$(\vec{\Sigma} \vec{p}) u_{p(3,4)} = -p^0 u_{p(3,4)}, \quad \gamma_5 u_{p(1,2)} = u_{p(1,2)}, \quad \gamma_5 u_{p(3,4)} = -u_{p(3,4)}.$$

Как видно, мы классифицируем состояния по собственным значениям операторов γ_5 и $(\vec{\Sigma} \vec{p})$; эта классификация не зависит от выбора представления для матриц Дирака, однако при построении канонических преобразований мы будем использовать соотношения, которые верны лишь в данном представлении. Введем двухкомпонентные базисные спинорные функции $\varphi_1 = (1, 0)$, $\varphi_2 = (0, 1)$ и оператор преобразования $U(\vec{p})$, превращающий их в собственные функции двухкомпонентного оператора спиральности

$$U^{-1}(\vec{p})(\vec{\Sigma} \vec{p})/|\vec{p}| U(\vec{p}) = \sigma_3,$$

$$\varphi_{p1} = U(\vec{p}) \varphi_1, \quad \varphi_{p2} = U(\vec{p}) \varphi_2, \quad \varphi_{p3} = \varphi_{p2}, \quad \varphi_{p4} = \varphi_{p1}.$$

В нашем представлении выполнены соотношения:

$$u_{p(1,2)} = (\varphi_{p(1,2)}, 0), \quad u_{p(3,4)} = (0, \varphi_{p(3,4)}), \quad \beta \frac{\vec{\alpha} \vec{p}}{|\vec{p}|} u_{p1} = u_{p4}, \quad u_{p1} \rightarrow u_{p4}$$

$$u_{p2} \rightarrow -u_{p3}, \quad u_{p3} \rightarrow u_{p2}, \quad u_{p4} \rightarrow -u_{p1};$$

$\beta U_{P1} = U_{P4}$, т.е. $U_{P1} \rightarrow U_{P4}$, $U_{P2} \rightarrow U_{P3}$, $U_{P3} \rightarrow -U_{P2}$, $U_{P4} \rightarrow U_{P1}$.

Рассмотрим простейшее каноническое преобразование полевых операторов

$$\psi(x) \rightarrow V \psi(x) V^{-1} = \psi'(x), \quad V = e^{i \int d^3y \bar{\psi}(y) S \psi(y)} \equiv e^{i \hat{S}}, \quad S^+ = S,$$

где $S_{\alpha\beta}$ — некоторая четырехрядная матрица, которая может зависеть и от оператора импульса \vec{p} . Воспользуемся формулой Бейкера-Хаусдорфа

$$e^{i \hat{S}} \psi e^{-i \hat{S}} = \psi + i [\hat{S}, \psi] + \frac{i^2}{2!} [\hat{S} [\hat{S}, \psi]] + \dots$$

и каноническими перестановочными соотношениями

$$\{\bar{\psi}_\alpha(\bar{x}), S_{\beta\gamma} \psi_\beta(\bar{x}')\} = S_{\gamma\alpha} \delta(\bar{x} - \bar{x}'), \quad \{\psi_\alpha(\bar{x}), S_{\beta\gamma} \psi_\beta(\bar{x}')\} = 0,$$

$$[\hat{S}, \psi_\alpha(\bar{x})] = -(S \psi(\bar{x}))_\alpha; \quad [\hat{S} [\hat{S}, \psi_\alpha(\bar{x})]] = (S^2 \psi(\bar{x}))_\alpha; \dots$$

В результате получим

$$e^{i \hat{S}} \psi(\bar{x}) e^{-i \hat{S}} = e^{i \int d^3y \bar{\psi}(y) S \psi(y)} \psi(\bar{x}) e^{-i \int d^3y \bar{\psi}(y) S \psi(y)} = e^{-i \hat{S}} \psi(x)$$

Рассмотрим преобразование, определяемое матрицей $S = -i\beta \frac{\vec{\alpha} \vec{p}}{2|\vec{p}|} w(p)$. Нетрудно проверить, что при этом гамильтониан свободных кварков преобразуется так:

$$\mathcal{H} = \int d^3x \bar{\psi}(\bar{x}) H \psi(\bar{x}), \quad H = \vec{\alpha} \vec{p} + \beta m$$

$$\mathcal{H}' = e^{i \hat{S}} \mathcal{H} e^{-i \hat{S}}, \quad H' = e^{i \hat{S}} H e^{-i \hat{S}}$$

$$\mathcal{H}' = \int d^3x \bar{\psi}(\bar{x}) H' \psi(\bar{x})$$

$$\text{или } \mathcal{H}' = \int d^3x \bar{\psi}(\bar{x}) H \psi'(\bar{x}).$$

Хорошо известны два частных случая этого преобразования

$$1) \quad \tan w = |\vec{p}|/m$$

$$2) \quad \tan w = -m/|\vec{p}|$$

$$\cos w = \frac{m}{\sqrt{m^2 + p^2}}, \quad \sin w = \frac{|\vec{p}|}{\sqrt{m^2 + p^2}}, \quad \cos w = \frac{|\vec{p}|}{\sqrt{m^2 + p^2}}, \quad \sin w = -\frac{m}{\sqrt{m^2 + p^2}}.$$

Первый — это известное преобразование Прайса-Тани-Фолди-Вутуйсе-на, второй — преобразование Чини-Тулека-Бозе-Гамба-Сударшана.

Свободный гамильтониан принимает соответственно вид

$$1) H' = \beta \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \quad 2) H' = \frac{\vec{\alpha} \vec{p}}{|\vec{p}|} \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$$

$$H' = e^{iS} H e^{-iS}$$

Первое представление удобно для перехода к нерелятивистскому пределу, а второе — к ультрарелятивистскому. На эти преобразования обычно смотрят как на преобразования спинорного базиса, т.е.

$$\psi' = e^{iS} \psi = \sum_{p,i} a_{pi} u'_{pi} e^{-ipx}, \quad u'_{pi} = \cos \frac{w}{2} u_{pi} + \sin \frac{w}{2} u_{p4}, \dots$$

Возможна, однако, другая точка зрения — можно преобразовывать вместо этого операторы уничтожения и рождения (+, - значения спинальности)

$$\psi' = e^{i\hat{S}} \psi e^{-i\hat{S}} = \sum_{p,i} a'_{pi} u_{pi} e^{-ipx}; \quad a'_{p1} = a_{p+}, \quad a'_{p2} = b_{-p,-}^+,$$

$$a'_{p3} = a_{p-}, \quad a'_{p4} = b_{-p,+}^+.$$

Тогда получаем соотношения между старыми и новыми операторами

$$a'_{p1} = \cos \frac{w}{2} a_{p1} - \sin \frac{w}{2} a_{p4}; \quad a'_{p2} = \cos \frac{w}{2} a_{p2} + \sin \frac{w}{2} a_{p3};$$

$$a'_{p4} = \sin \frac{w}{2} a_{p4} + \cos \frac{w}{2} a_{p1}; \quad a'_{p3} = \sin \frac{w}{2} a_{p3} - \cos \frac{w}{2} a_{p2},$$

которые, как легко видеть, являются частным случаем преобразования Боголюбова. Унитарный оператор преобразования через операторы рождения и уничтожения записывается следующим образом:

$$-i\hat{S} = \sum_{p,s} \frac{w(p)}{2} (a_{\vec{p}s}^+ b_{-\vec{p}s}^+ - b_{-\vec{p}s} a_{\vec{p}s}), \quad \left\{ \begin{array}{l} s = (+), (-) \\ (+) \equiv \uparrow, (-) \equiv \downarrow \end{array} \right.$$

Рассмотрим теперь гамильтониан свободных кварков, взаимодействующих друг с другом через некоторый "потенциал". Можно представлять себе просто четырехфермионное взаимодействие с некоторым фактором. Если это взаимодействие устроено так, что кварки приобретают массу, то по аналогии с теорией сверхпроводимости можно предположить, что наиболее существенная часть взаимодействия, описывающая этот "фазовый переход", может быть представлена в виде билинейного оператора $H \cong H_0 + \Delta H$

$$H_0 = \sum_{\vec{p}s} |\vec{p}| (a_{\vec{p}s}^+ a_{\vec{p}s} + b_{\vec{p}s}^+ b_{\vec{p}s})$$

$$\Delta H = \sum_{\vec{p}s} \epsilon(\vec{p}) (a_{\vec{p}s}^+ b_{-\vec{p}s}^+ + b_{-\vec{p}s} a_{\vec{p}s}),$$

описывающего рождение из вакуума пары кварка и антикварка с квантовыми числами псевдоскалярных мезонов. Каноническое преобразование Боголюбова диагонализует билинейную часть гамильтониана

$$\mathcal{H}' = e^{i\hat{S}} \mathcal{H} e^{-i\hat{S}} = \sum_{\vec{p}, s} \sqrt{6^2 \vec{p}^2 + p^2} (\hat{a}'_{\vec{p}s} \hat{a}'_{\vec{p}s} + \hat{b}'_{\vec{p}s} \hat{b}'_{\vec{p}s}).$$

Разумеется, необходимо было бы показать, что оставшаяся часть взаимодействия не приводит к принципиальному изменению свойств найденного решения. Однако эту задачу можно было бы попытаться решить лишь после того, как достаточно хорошо изучены силы, действующие между кварками. В данной работе мы даже не пытаемся подойти к решению этой проблемы. Хотя ниже и предлагается некоторое определенное взаимодействие кварков, которое выглядит не слишком сложным и достаточно реалистичным, всякая попытка оценить отбрасываемые члены настолько осложнена техническими трудностями, что кажется пока почти безнадежной. Более реальный путь к решению такой задачи, на наш взгляд, мог бы состоять в построении более простой точно решаемой модели, после чего можно было бы попытаться постепенно обобщить ее до более реалистической. Прагматический подход сводится к тому, что мы ограничимся построением простейшего канонического преобразования, выписанного выше, и будем использовать его так, как используется "преобразование Мелоса". Иными словами, не следует пытаться придавать значение конкретной форме преобразования, а извлекать из него следствия, которые могут не зависеть от этой конкретной формы: трансформационные свойства операторов тока при $SU(6)$ -преобразованиях волновых функций адронов и т.п. В нашей интерпретации токовые кварки соответствуют безмассовым полям, а структурные — полям, которые приобрели массу за счет механизма Б.-Н.-Г. Через поля токовых кварков определяются операторы токов, а поля структурных кварков входят в уравнение Бете-Солпитера. Переход к переменным светового фронта, необходимый для феноменологических приложений, мы не обсуждаем, отсылая читателя к работам^{10,11/}.

Перейдем к обсуждению вопросов 4–6. На эти вопросы, связанные с проблемой природы сил, действующих между кварками, обычно приводят три возможных ответа: I. Кварки связаны безмассовыми цветными глюонами, на малых расстояниях они свободны, на большие

расстояния им не позволяет уйти инфракрасная особенность потенциала ("ультрафиолетовая свобода = инфракрасному рабству");

2. Кварки "сидят" на концах струны, для описания которой используются релятивистские квантовые уравнения. 3. Кварки заключены в мешок. Существуют попытки найти связь между этими подходами, суть которых сводится к тому, чтобы найти "струноподобные" или "мешочные" решения в калибровочных теориях. Новый вариант третьего подхода недавно развит нами в работах³⁰. Он наиболее близок к Дубненскому мешку, но обладает некоторыми чертами других подходов и существенно связан с основной гипотезой дуальных моделей: плотность уровней резонансных состояний экспоненциально растет с ростом массы резонансов: $\rho(m^2) \sim m^6 \exp(ma)$, $m \rightarrow \infty$. В дуальных моделях также предполагается, что резонансными уровнями вообще исчерпывается спектр адронных состояний, по крайней мере в первом приближении. На самом деле, конечно, при достаточно больших массах перекрывание уровней резонансов будет столь большим, что квазидискретный спектр, получающийся при пренебрежении конечной шириной резонансов, неизбежно перейдет в непрерывный спектр. Для наших рассуждений это несущественно, нам важно правильно угадать асимптотическое поведение спектральной функции всех состояний — дискретных, квазидискретных и континуума. Предположим, что эта спектральная функция экспоненциально растет с ростом массы: $\rho = \frac{C}{2m} [I_1(ma) + \frac{4m}{a} \delta(m)]$. Для большей определенности допустим, что ее можно задать в этом виде при всех значениях m . Это выражение можно сравнить со стглаженным эмпирическим спектром наблюдаемых резонансных состояний. Сравнение позволяет определить параметр a и грубо оценить параметр C : $a \approx 4 \text{ ГэВ}^{-1}$, $C \sim 18 \text{ ГэВ}^{-1}$. Используем теперь идеи "бутстрапа", сформулированную в первой части этой работы. Пренебрегая спиновой и изоспиновой зависимостью сил, мы можем тогда написать потенциал, входящий в евклидовское уравнение Б-С в виде $(\tau = (x_q - x_{\bar{q}})^2)$

$$V(\tau) = \int_0^\infty dm^2 \rho(m^2) \Delta_F(m^2, \tau) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik\tau} V(k^2), \quad (3)$$

$$\Delta_F = m K_1(m\tau) / 4\pi^2 \tau.$$

Здесь в случае обмена одной частицей спектральная функция равна

$$\rho_R(m^2) = g_R^2 \delta(m^2 - m_R^2) N_R,$$

где $N_R \sim (2J_R + 1)$. При некоторых дополнительных предположениях о распределении спинов резонансов можно показать, что в обмене бесконечным набором резонансов со спектральной плотностью $\rho(m^2)$ главную часть потенциала определяет именно эта спектральная плотность, и мы получаем

$$V(r) = f^2 \Phi.V. \{ 1 / (r^2 - a^2) \}, \quad f^2 \sim g^2$$

Появление символа главного значения нуждается в некотором пояснении. Если просто пользоваться формулой (3), мы сумеем найти потенциал лишь при $r^2 > a^2$. Определить его при любых значениях r^2 и найти его выражение в импульсном пространстве можно, если воспользоваться методами неполиномиальной квантовой теории поля. Тогда на потенциал можно смотреть как на суперпропагатор в почти локализуемой теории поля. Примером такой теории является

$$\mathcal{L}_{int} = G: \bar{\psi} \phi \psi \exp [4\pi a^2 \phi^+ \phi]:$$

Если вычислить $\langle T \mathcal{L}_{int}(x) \mathcal{L}_{int}(0) \rangle$, то мы получим выражение, $V \sim \Phi.V. G^2 (r^4 - a^4)^{-1}$. Как показано в работах ^{25,30}, это выражение и его преобразование Фурье к импульсному пространству определены однозначно, если использовать принцип минимальной сингулярности суперпропагатора. Таким образом:

$$V((p-q)^2) = c f^2 a \frac{Y_1(a|p-q|)}{|p-q|}, \quad |p-q| = p^2 + q^2 - 2pq \cos \varphi_{pq}$$

(C - числ. конст.).

Это выражение для потенциала теперь подставляем в уравнение Б-С для псевдоскалярных мезонов и в уравнение для пропагаторов кварков. Чтобы были выполнены предположения, введенные нами ранее, допустим, что потенциал есть смесь вектора и аксиала и содержит "прямые" и "обменные" по $V(3)$ силы. Мы не будем излагать здесь все полученные на этом пути результаты ввиду того, что это потребовало бы очень много места, а исследование нелинейных уравнений для пропагаторов пока не закончено.

Упомянем только о детальных результатах, полученных для упрощенного уравнения Б-С для π -мезонов. Заменяя точный пропагатор кварков свободным, с отличной от нуля массой и считая, что масса кварков достаточно велика $m_\pi^2 \ll 4m_q^2$, после некоторых преобразований, которые можно найти в работах ³⁰, уравнение записывается в виде ($x = ap$)

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left[1 - \frac{f^2}{x^2 + \mu^2} - \frac{3/4}{x^2} \right] u = 0, \quad u(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{x} Y_1(x)$$

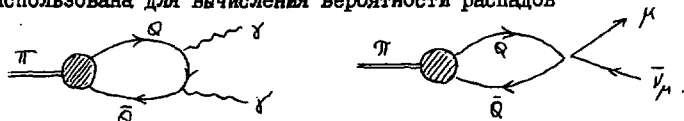
$$u(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$$

а условие нормировки приближенно имеет вид

$$\int_0^\infty dx u^2(x) (x^2 + \mu^2)^{-2} = 8\pi^2; \quad F_\pi(p^2) \equiv F(x) \equiv x^{-3/2} u(x);$$

$$\mu^2 = (m_\sigma^2 - \frac{m_\pi^2}{4}) a^2.$$

Это уравнение было подробно исследовано и решено численно различными методами. Найденная волновая функция u мезона была затем использована для вычисления вероятности распадов



В результате получены оценки всех неизвестных параметров, входящих в уравнение для π -мезона: $a \approx 5.5$, $f^2 \approx 10$, $m_\sigma \approx 0.4$ (ГМЦ-к.)

$a \approx 4 \text{ Гев}^{-1}$, $f^2 \approx 8$, $m_\sigma \approx 0.9 \text{ Гев}$ (БХН-кварки). Подчеркнем, что при этом не использовалась априорная оценка параметра a , полученная из резонансной интерпретации потенциала. Тем не менее оба значения a находятся в замечательном согласии друг с другом. Мы оценили также наклон траектории Редже для π мезона: $\alpha'_\pi = 0.8 \div 0.9$. Результат не противоречит последним экспериментальным оценкам этой величины.

Отметим, что наиболее характерная особенность потенциала, обсуждаемого здесь и отличающая его от всех других, доступна прямой экспериментальной проверке. Действительно, наличие особенности потенциала при конечном значении γ проявляется в том, что форм-факторы, дифференциальные сечения упругого рассеяния и т.п. содержат осциллирующие члены вида $\sim q^{-\lambda} \cos(qa/2)$. Такого рода осцилляции были недавно обнаружены в дифференциальном сечении упругого рассеяния протонов^{31/}. Период этих осцилляций хорошо согласуется с предсказанием нашей модели $\Delta q \sim \frac{4\pi}{a} \sim 3 \text{ ГэВ}$.

В заключение кратко остановимся на получении массовых формул и проблеме смешивания. Предположим, что уравнения для векторных и тензорных мезонов также имеют вид

$$\frac{d^2 u_{\nu, \tau}}{dx^2} + \left[1 - \frac{f_{\nu, \tau}^2}{x^2 + \mu_i^2} - \frac{(\ell_{\nu, \tau} + 1)^2 - 1/4}{x^2} \right] u_{\nu, \tau} = 0 \quad \ell_{\nu} = 0, \ell_{\tau} = 1$$

$$u(x) \sim \sqrt{x} Y_{\ell+1}(x) \quad x \rightarrow \infty$$

Для векторных мезонов это очень хорошее приближение, для тензорных мезонов при получаемых нами массах кварков это приближение выполняется значительно хуже, но все же с разумной точностью. Запишем это уравнение в абстрактной форме, обобщенной на случай неравных масс кварков (такого типа уравнения получены в квазипотенциальной теории П.Н. Боголюбовым)

$$\left[L_5 - \kappa^2(m_1, m_2, m_B) \right] u_B = 0, \quad \kappa^2(m_1, m_2, m_B) = \frac{m_B^2}{4} - \frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2} + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{4m_B^2}$$

Здесь L_5 -оператор, инвариантный относительно $U(3)$ -группы, все нарушение симметрии содержится в массах кварков. В случае смешивания двух состояний, например, $s\bar{s}$ и $u\bar{u}$, получим

$$(L_5 - \kappa_1^2) u_1 = \varepsilon^2 u_2, \quad (L_5 - \kappa_2^2) u_2 = \varepsilon^2 u_1.$$

Если пренебречь смешиванием, то нетрудно получить соотношения

$$\begin{aligned} \frac{m_\rho^2}{4} - m_u^2 &= \kappa_v^2 & m_\omega &= m_\rho, \quad m_\eta = m_{A_2} \\ \frac{m_\eta^2}{4} - m_s^2 &= \kappa_v^2 & m_{K^*} &= (m_\rho + m_\eta)/2 \\ & & m_{K^{**}} &= (m_{A_2} + m_\eta)/2 \end{aligned} \quad (v \rightarrow T)$$

$$m_{K^*}^2 - 2(m_u^2 + m_s^2) m_{K^{**}}^2 + (m_s^2 - m_u^2)^2 = 4m_{K^*}^2 \kappa_v^2$$

где $\kappa_{v, \tau}^2$ собственное значение оператора L_5 . При наличии смешивания выполним следующие очевидные преобразования

$$(L_5 - \kappa_i^2)(L_5 - \kappa_j^2) u_i = \varepsilon^4 u_i, \quad [L_5^2 - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)L_5 + (\kappa_1^2 \kappa_2^2 - \varepsilon^4)] u_i = 0$$

$$(L_5 - x)(L_5 - y) u_i = 0, \quad x + y = \kappa_1^2 + \kappa_2^2, \quad xy = \kappa_1^2 \kappa_2^2 - \varepsilon^4$$

Отсюда следует $xy = -(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)/2 \pm [((\kappa_1^2 - \kappa_2^2)/2)^2 + \varepsilon^4]^{1/2}$

$$m_{K^*}^2 + (m_{K^*} - m_\rho)^2 = (m_\rho^2 + m_\omega^2)/2$$

$$m_\eta^2 + m_{A_2}^2 = m_{\eta'}^2 + m_{\rho'}^2, \quad u, m, \delta$$

Формулы для псевдоскалярных мезонов даже при учете смешивания работают плохо, что, видимо, связано с особой природой этих частиц (в первом приближении их масса просто равна нулю). В качестве курьеза отметим, что для псевдоскалярного октета с неплохой точностью выполнены следующие массовые формулы:

$$m_{\eta} = \frac{m_{\eta'} + m_{\pi}}{2}, \quad m_K = \frac{m_{\eta} + m_{\eta'}}{3}.$$

Объяснения этих эмпирических соотношений пока не найдены. Не исключено, что они не имеют никакого более глубокого смысла.

Подчеркнем, что практически те же самые результаты можно получить, используя квазипотенциальные уравнения различных типов (см., например, ^{13/}). Менее понятна ситуация с барионами. Если для описания бариона как системы из трех кварков применять нерелятивистские уравнения (например, уравнения Фаддеева), что кажется вполне разумным при больших массах кварков, то серьезную трудность вызывает необходимость объяснения отсутствия в нижней части спектра масс $SU(6)$ -мультиплетов 20, 56, L -нечетн.; 70, L = четн. Этот факт можно было бы объяснить, если бы пары кварков проявляли тенденцию к спариванию. Действительно, предположим, что двухчастичные силы таковы, что может образовываться дикварк (QQ) , так что $B = \sum (Qq)_i Q_k$ (напомним, что дикварк может существовать лишь внутри адрона, т.е. является квазичастицей). Т.к. мы хотим получить 56, то дикварк должен принадлежать мультиплету 21, который симметричен по унитарным индексам (антисимметрия волновой функции достигается за счет цветовых степеней свободы). Относительный момент кварков в дикварке тогда должен быть четным. Мультиплеты, в которые входят барионы и барионные резонансы, получаются следующим образом:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad (21 \times 6 = 56 + 70)$$

21 6 56 70

Мультиплет 20, таким образом, отсутствует (точнее, имеет гораздо большую массу). Так как 56 симметричен по $SU(6)$ индексам, то момент Q относительно (QQ) может быть только четным, а в случае 70 — только нечетным. Вопрос состоит теперь в том, существуют ли такие силы и такие уравнения движения, для которых эти предположения выполнены. В этом нет ничего невозможного, если силы связаны с обменом цветом. Введя такой обмен, можно устроить мир так, что кварк и антикварк притягиваются, а два кварка притягиваются лишь в состоянии 21. Задачу о барионах можно теперь свести к двухчастичным задачам. Для описания дикварка воспользуемся результатами, полученными для мезонных со-

стояний, а для описания связанного состояния кварка и дикуарка попробуем принять нерелятивистское приближение. Тогда для дикуарков получаем массовую формулу ($m_u = m_d$)

$$m_{1/2} \equiv m_{us} = (m_{uu} + m_{ss})/2 \equiv (m_0 + m_1)/2, \quad (I = 0, 1/2, 1)$$

Октет барионов описывается следующими волновыми функциями

$$|p\rangle = \sqrt{1/3} u \chi_1^0 + \sqrt{2/3} d \chi_1^+, \quad |\Sigma^+\rangle = \sqrt{1/3} u \chi_{1/2}^+ - \sqrt{2/3} s \chi_1^+,$$

$$|\Lambda\rangle = \sqrt{1/2} (u \chi_{1/2}^- - d \chi_{1/2}^+) , \quad |\Xi^0\rangle = \sqrt{2/3} u \chi_{1/2}^- - \sqrt{1/3} s \chi_{1/2}^+,$$

где $\chi_1, \chi_{1/2}, \chi_0$ — волновые функции дикуарков с изоспинами 1, 1/2, и 0. В нерелятивистском приближении массовые формулы Гелл-Манна-Окубо следуют из соотношений

$$\begin{aligned} m_p - c_8 &= m_u + m_1; \quad m_\Sigma - c_8 = \frac{1}{3}(m_u + m_{1/2}) + \frac{2}{3}(m_s + m_1) = \\ &= \frac{1}{3}m_u + \frac{2}{3}m_s + \frac{1}{6}m_0 + \frac{5}{6}m_1; \quad m_\Lambda - c_8 = m_u + \frac{1}{2}m_0 + \frac{1}{2}m_1 \quad (4) \\ m_\Xi - c_8 &= \frac{2}{3}m_u + \frac{1}{3}m_s + \frac{5}{6}m_0 + \frac{1}{6}m_1; \quad \boxed{m_p + m_\Xi = \frac{m_\Sigma + 3m_\Lambda}{2}} \end{aligned}$$

после исключения всех неизвестных параметров. Для декаплета барионов получим

$$\begin{aligned} m_\Delta - c_{10} &= m_u + m_1; \quad m_{\Sigma^*} - c_{10} = \frac{2}{3}m_u + \frac{1}{3}m_s + \frac{1}{3}m_0 + \frac{2}{3}m_1 \\ m_{\Xi^*} - c_{10} &= \frac{1}{3}m_u + \frac{2}{3}m_s + \frac{2}{3}m_0 + \frac{1}{3}m_1; \quad (5) \\ m_\Omega - c_{10} &= m_s + m_0, \end{aligned}$$

откуда следует правило равных интервалов. Эти соотношения можно несколько подправить, добившись лучшего согласия между выражениями масс барионов через массы кварков и дикуарков для декаплета и октета. Выписанные выше формулы приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} c_{10} - c_8 &= m_\Delta - m_p; \quad \sum_{i \neq 10} m_i \equiv 4 m_{10} \\ c_{10} - c_8 &= \frac{m_\Delta + m_{\Xi^*} + m_{\Omega} + m_\Omega}{4} - \frac{m_\Sigma + m_\Xi}{2}, \\ &\quad \text{и т.п.,} \end{aligned}$$

которые выполнены не очень хорошо, гораздо хуже, чем сами массовые формулы. Введем в соотношения (4) и (5) дополнительные члены

$$c_8 \rightarrow c_8 + c'_8 m_i, \quad c_{10} \rightarrow c_{10} + c'_{10} m_i,$$

которые не изменяют массовые формулы, но вводят нарушение симметрии, не сводящееся к расщеплению масс кварков. Между параметрами c'_8 и c'_{10} имеется одно соотношение

$$(1 - c'_{10}) / (1 - c'_8) = \left[\frac{m_1 + m_2}{2} - m_p \right] / (m_{10} - m_\Delta).$$

Если предположить, что $c'_{10} = -\delta$, $c'_8 = \delta$, где параметр δ описывает нарушение симметрии в потенциале, то нетрудно найти

$$(1 + \delta) / (1 - \delta) \approx 1,38, \quad \delta \approx 0,16.$$

Эта величина нарушения симметрии вполне разумна.

Вопрос о смешивании барийных состояний вызывает некоторые затруднения, так как обменные силы могут присутствовать как в дикварковом, так и кварк-дикварковом каналах. Успех массовых формул без смешивания говорит о том, что как и в случае векторных и тензорных мезонов, роль обменных сил невелика. Этот факт также нуждается в каком-то объяснении. Одна из возможностей состоит в том, что силы зависят от полной энергии кварков (точнее, от их инвариантной массы ξ). По аналогии с поведением амплитуд в теории Редже, можно предположить, что необменные силы не убывают с ростом ξ , а обменные убывают. Это предположение кажется совершенно естественным в нашей интерпретации потенциала взаимодействия кварков.

На этом мы прекратим обсуждение динамики составных моделей адронов, в надежде, что нам удалось хоть отчасти достигнуть поставленной цели — показать, что сформулированные вначале вопросы разумны. Остается еще один вопрос, который особенно волнует скептиков и пессимистов — почему нам до сих пор не удается наблюдать кварки непосредственно, в свободном виде. Иначе — **СУЩЕСТВУЮТ** ли кварки? Вопрос о существовании кварков — не только физический, но и философский вопрос. Что значит "существовать"? После Канта мы различаем всякий предмет как истинно сущий, как умопостигаемый и как действующий. Кварки, несомненно, умопостигаемы, со значительной долей уверенности мы можем сказать, что они действуют, во всяком случае мы имеем ряд косвенных указаний на феноменальное существование кварков. Являются ли они истинно сущими? Современная физика склонна дать утвердительный ответ на этот вопрос. Парадоксальным

в этом ответе кажется то, что кварки существуют, но навечно заключены в адронной тюрьме. Как сказал один древний философ, "верю в это, потому что это абсурдно". Мы присоединимся к этому умозаключению. Кажется, что современная кварковая модель адронов уже достаточно абсурдна (или мягче: парадоксальна), чтобы содержать элемент Абсолютной Истины.

Л и т е р а т у р а

1. Антология мировой философии, т. I, ч. I, стр. II7-II9, "Мысль", Москва, 1969 г.
2. Н.Н.Боголюбов и др. "Вопросы физики элементарных частиц", Ереван, 1965 г.
. A.N.Tavkhelidze. Сб. "High-Energy Physics and Elementary Particles" Vienna, 1965.
3. П.Н.Боголюбов. ЭЧАЯ, 3 (1972) 144;
P.N.Bogolubov. Ann.Inst.Henri Poincare, 8 (1968) 163.
4. A.Chodos e.a. Phys.Rev. D9 (1974) 3471;
T.De Grand e.a. Phys.Rev. D12 (1975) 2060.
5. M.Greutz. Phys.Rev. D10 (1974) 1749.
6. P.Vinciarelli. Nuovo Cim.Lett. 4 (1972) 905;
W.Bardeen e.a. Phys.Rev. D11 (1975) 1094.
7. Н.Н.Боголюбов и др. "Вопросы теории элементарных частиц", Р2-4050, Дубна, 1968.
В.П.Шелест, там же.
8. Р.Фейнман. Взаимодействия фотонов с адронами, "Мир", М., 1975.
9. J.Rosner. Proc. 17 intern. Conf. on HEP, London, 1974.
10. J.Bell. Preprint CERN, TH-1851, Geneva, 1974.
11. R.Carlitz e.a. Preprint MFI, 74/32, Chicago, 1974.
R.Carlitz, J.Weyers. Preprint CERN, TH-1957, Geneva, 1974.
12. В.А.Матвеев и др. Препринт ОИЯИ, Р-2524, Дубна, 1965.
R.Van Royen, V.Weisskopf. Nuovo Cim. 50A (1967) 617.
13. А.А.Логунов, А.Н.Тавхелидзе. Nuovo Cim. 29 (1963) 380.
14. В.Г.Кадышевский, А.Н.Тавхелидзе. Сб. "Проблемы теоретической физики", "Наука", М., 1969.
15. Р.Н.Фаустов. ЭЧАЯ, 3 (1972) 238.
16. В.А.Ризов, И.Т.Тодоров. ЭЧАЯ, 6 (1975) 669.

17. В.Ш.Гогохия, А.Т.Филиппов. ТМФ, 21 (1974) 37.
В.Ш.Гогохия, Д.П.Мавло, А.Т.Филиппов, Препринт ОИЯИ,
Р-8812, Дубна, 1975.
18. K.Erkelenz. Phys.Rep. 13C (1974) 193.
19. А.А.Могунов и др. ТМФ, 6 (1971) 157;
В.И.Саврин, Н.Е.Тюрин, О.А.Хрусталева. ЭЧАЯ, 7 (1976) 21.
20. В.Р.Гарсеванишвили и др. ТМФ, 23 (1975) 310; 25 (1975) 37;
A.Atanascov. Preprint JINR, E2-6202, E2-7050, Dubna, 1973.
S.Brodsky. Preprint SLAC-PUB-1328 (t), Stanford, 1973.
21. N.Nakanishi. Progr. Theor.Phys., Suppl., No 43, 1969.
22. Н.Н.Боголюбов. УФН, 67 (1959) 549;
Де Лен. "Сверхпроводимость металлов и сплавов", "Мир",
Москва, 1968.
23. Б.А.Арбузов и др. ДАН СССР, 139 (1961) 345.
Y.Nambu, G.Jona Lasinio. Phys.Rev. 122 (1961) 345.
24. R.Naag, T.Maris. Phys.Rev. 132 (1963) 2325.
K.Johnson e.a. Phys.Rev. 136 (1964) B1111.
25. А.Т.Филиппов, препринт ОИЯИ Д2-7161, Дубна, 1973.
26. N.N.Bogolubov. Physics, Suppl. to Vol.26 (1960) 1.
Н.Н.Боголюбов. Препринт ОИЯИ Д-781, Дубна, 1961.
27. Y.Nambu. Phys.Rev.Lett. 4 (1960) 380;
J.Goldstone. Nuovo Cim. 19 (1961) 154;
28. H.Pagels. Phys.Reps. 16 (1975) 221.
29. K.Lane. Phys.Rev. D10 (1974) 2605;
P.Narayanaswamy. Phys.Rev. D12 (1975) 3296.
30. А.Т.Филиппов. Препринт ОИЯИ Е2-7929, Дубна, 1974;
Е2-6936, Дубна, 1973; Е2-7563, Дубна, 1973.
31. F.Schrempp, B.Schrempp. Preprint CERN TH-2054, Geneva, 1975.

NONLOCAL FIELD THEORY OF THE QUARK MODEL

Ikuro Sogami

Department of Physics, Kyoto Sangyo University, Kyoto, Japan

Until now the success of the composite picture such as the quark model has been limited mainly to investigations of the one-body problem of composite system. The purpose of my talk is to show a possibility to construct such a (global) field theory as being suitable to treat scattering processes between composite systems. In this theory^{1,2/}, not only hadrons are identified with definite stationary states of quark-antiquark systems and three quark systems, but also strong interactions between hadrons are assumed to result from virtual exchanges of $q - \bar{q}$ systems between them.

Let us introduce a bilocal field $\Phi(x, r)$ to describe the $q - \bar{q}$ system with a scalar quark at $x + \frac{1}{2}r$ and a scalar antiquark at $x - \frac{1}{2}r$. The basic equation for the free bilocal field is postulated to be

$$(\square^2 - M_{(2)}^2) \Phi(x, r) = 0, \quad P_r = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \quad (1)$$

with the boundary conditions that the field is not singular at $r_\mu = 0$ and decreases more rapidly than any inverse power of r^2 when the absolute value of an arbitrary component of r_μ tends to infinity. As the square-mass operator $M_{(2)}^2$, we choose the following form, proposed by Yukawa^{3/} and Markov^{4/}, as

$$M_{(2)}^2 = m^2 + \frac{1}{2} m^2 \left[-4 + \gamma^{\mu\nu} \left(\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial r^\mu \partial r^\nu} - \gamma^2 r_\mu r_\nu \right) \right], \quad (2)$$

where

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - 2 r_\mu r_\nu / r^2 \quad (3)$$

and β is a parameter of the extent of the system. This square mass operator represents the 4-dimensional relative harmonic oscillation between constituents when the $q-\bar{q}$ system is at rest as a whole. The use of the internal metric operator $\gamma_{\mu\nu}$ depending on the external momentum p is inevitable to obtain the positive-definite square-mass spectrum.

We can expand the general solution of eq. (1) as

$$\Phi(x, r) = \sum_{(n)} v_{\mu_1 \dots \mu_L}^{(n)}(r; \beta) \varphi_{\mu_1 \dots \mu_L}^{(n)}(x) \quad (4)$$

in the complete orthonormal system of the eigenfunction $v_{\mu_1 \dots \mu_L}^{(n)}(r; \beta)$ of the square-mass operator belonging to the eigenvalue

$\mu_{(n)}^2 = m^2 + m^2 \langle n \rangle$, where the abbreviations $\langle n \rangle = (NKL)$
 $\langle n \rangle = N + 2K + L$ and $\sum_{(n)} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{L=0}^{\infty}$ are used with non-negative integers N, K and L . The eigenfunctions of $\mathcal{M}_{(2)}$ are given^{/2/} explicitly by

$$v_{\mu_1 \dots \mu_L}^{(n)}(r; k) \propto e^{-\frac{1}{2} p^2 (kr)^2 / k^2} H_N(p^1 kr / \sqrt{k^2}) \times e^{\frac{1}{2} p^2 \gamma_{\mu_1 \nu} r_{\nu}} L_K^{(L+1/2)}(-p^2 \gamma_{\mu_1 \nu} r_{\nu}) \Theta_{\mu_1 \dots \mu_L}^{\nu_1 \dots \nu_L} r_{\nu_1} \dots r_{\nu_L} \quad (5)$$

where

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - p_{\mu} p_{\nu} / p^2 \quad (6)$$

and H, L and Θ are Hermite's polynomial, Laguerre's polynomial and Gupta's operator^{/2,5/}, respectively. The component local fields $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_L}^{(n)}(x)$ in the expansion (4) should be interpreted as describing the external motion of the meson with spin L , parity $(-1)^L$ and mass $\mu_{(n)}$, because they are proved to satisfy the Pauli-Fierz equation.

Now let us consider the test-function space

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k^2 > 0} \mathcal{S}_k,$$

where

$$\chi_k = \{ \psi_{\mu_1 \dots \mu_n}^{(n)}(r; k) : k^2 = p_{(0)}^2, \psi_{(0)} \}$$

All elements of χ are infinitely differentiable with respect to r and decrease more rapidly than any inverse power of r^2 as

$r \rightarrow \infty$. Elements of the dual space

$$\chi^* = \bigcup_{k^2 > 0} \chi_k^*$$

of the test-function space χ are just the tempered distributions. We can interpret the element of χ as describing the internal structure of real meson, while certain elements of χ^* are necessary to construct the Green functions which represent the virtual meson states.

The bilinear generating function defined by the series as

$$g = \sum_{(n)} \psi_{\mu_1 \dots \mu_n}^{(n)}(r; k) \psi_{\mu'_1 \dots \mu'_n}^{(n)}(r'; k) \xi^{(n)}, \quad |\xi| < 1 \quad (7)$$

is proved to have the compact form

$$g = \frac{1}{\pi^2 p^2 (1 - \xi^2)^2} \exp \left[\xi^2 \mathcal{L}^{r'} f_{\mu\nu}(\xi) \right], \quad (8)$$

where

$$f_{\mu\nu}(\xi) = \frac{1}{4} \left[(r-r') \chi(r-r')_{\mu\nu} \frac{1+\xi}{1-\xi} + (r+r')_{\mu} (r+r')_{\nu} \frac{1-\xi}{1+\xi} \right]. \quad (9)$$

Let us regard this function (8) first as an analytic function in the complex ξ -plane with variables r , r' and k ranging all over the real values. Next we put the restriction on the variable ξ of this function to be $|\xi|=1$ and define the new function as follows:

$$G(k; r, r'; e^{i\chi}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+0} g(k; r, r'; e^{-\epsilon + i\chi}) \quad (10)$$

for $\chi \neq n\pi$, and

$$\mathcal{G}(k; r, r'; 1) = \lim_{\chi \rightarrow 2n\pi \pm 0} \mathcal{G}(k; r, r'; e^{i\chi}) \quad (11)$$

for $\chi = 2n\pi$ and

$$\mathcal{G}(k; r, r'; -1) = \lim_{\chi \rightarrow (2n+1)\pi \pm 0} \mathcal{G}(k; r, r'; e^{i\chi}) \quad (12)$$

for $\chi = (2n+1)\pi$, n being an arbitrary integer. Definitions (11) and (12) are consistent since the boundary values of \mathcal{G} at $\chi = n\pi$ from both sides exist and coincide with each other in the \mathcal{S}^* -space. The \mathcal{G} -function is proved to belong to the \mathcal{S}^* -space. Especially the boundary value (11)

$$\begin{aligned} \delta(r-r'; k) &\equiv \mathcal{G}(k; r, r'; 1) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (i\pi\epsilon)^{-2} e^{i\epsilon^{-1}\eta^{\mu\nu}(r-r')_{\mu}(r-r')_{\nu}} \end{aligned} \quad (13)$$

plays the role of δ -function in the internal space.

The \mathcal{G} -function obeys the differential relation

$$(k^2 - m^2) \mathcal{G}(k; r, r'; e^{i\chi}) = \alpha_1^{-1} \left(\alpha - \frac{d}{d\alpha} \right) \mathcal{G}(k; r, r'; e^{i\chi}), \quad (14)$$

where α is the linear trajectory

$$\alpha(k^2) = \alpha_0 + \alpha_1 k^2 \quad (15)$$

with

$$\alpha_0 = -m^2/m^2 \quad \text{and} \quad \alpha_1 = 1/m^2.$$

Let us introduce the integral representation

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\epsilon}(k; r, r') = -i\alpha_1 \int_0^{\infty} \mathcal{G}(k; r, r'; e^{i\chi}) e^{i\chi x - \epsilon x} dx \quad (16)$$

and the related quantity

$$\tilde{\mathcal{D}}(k; r, r') = \tilde{\mathcal{L}}_{\epsilon}(k; r, r') - \tilde{\mathcal{L}}_{\epsilon}(k; r, r')^* \quad (17)$$

with a positive infinitesimal ϵ . The propagator of the $\hat{q}-\hat{p}$ system is defined by the Fourier transform

$$D_{\epsilon}(x; r, r') = \frac{1}{(2\pi)^r} \int \tilde{D}_{\epsilon}(k; r, r') e^{ikx} dk \quad (18)$$

which satisfies the differential equation

$$(\mathbb{P}^2 - \mathcal{M}_{\epsilon}^2) D_{\epsilon}(x; r, r') = \delta(r-r'; \mathbb{P}) \delta^{(r)}(x). \quad (19)$$

The commutation function and its positive and negative-frequency parts are defined by

$$D_{\epsilon}(x; r, r') = \frac{1}{(2\pi)^r} \int \epsilon(k) \tilde{D}(k; r, r') e^{ikx} dk \quad (20)$$

and

$$D_{\pm}(x; r, r') = \pm \frac{1}{(2\pi)^r} \int \theta(\pm k_0) \tilde{D}(k; r, r') e^{ikx} dk, \quad (21)$$

respectively. All of them are proved to satisfy the homogeneous differential equation

$$(\mathbb{P}^2 - \mathcal{M}_{\epsilon}^2) D_{\epsilon, \pm}(x; r, r') = 0. \quad (22)$$

We find the relations between the singular functions of the $\hat{q}-\hat{p}$ system and those in the local field theory as

$$D_{\alpha}(x; r, r') = \sum_{(n)} V_{\mu_1 \dots \mu_n}^{(n)}(r; \mathbb{P}) V_{\nu_1 \dots \nu_n}^{(n)}(r'; \mathbb{P}) \Delta_{\alpha}(x; k_{\text{tot}}) \quad (23)$$

for $\alpha = C, 0, +$ and $-$, where Δ_{ϵ} is the Feynman propagator and Δ_0 is the Pauli-Jordan function with the positive and negative-frequency parts Δ_{\pm} . These relations are helpful because they imply the physical content of bilocal singular functions. As is shown in the relation

$$\Delta_{\epsilon}(x; r) = \partial(x) \Delta_+(x; r) - \partial(x) \Delta_-(x; r), \quad (24)$$

the Feynman function Δ_c works to propagate positive-frequency parts of wave aroused at $x_\mu=0$ forward in time ($x_0>0$), and its negative-frequency parts backward in time ($x_0<0$). Although such a strict causal relation concerning the external time variable does not hold for the \mathcal{D}_c -function, we find that it satisfies the asymptotic-macrocausal relation

$$\lim_{|x_0| \rightarrow \infty} \mathcal{D}_c = \theta(x_0) \lim_{|x_0| \rightarrow \infty} \mathcal{D}_+ - \theta(-x_0) \lim_{|x_0| \rightarrow \infty} \mathcal{D}_- \quad (25)$$

in the x_0^* -space. This asymptotic relation implies the fact that \mathcal{D}_c -function maintains the definite external time-ordering for the propagation of \hat{q} - \hat{q} system.

We quantize the bilocal field by imposing the condition

$$[\Phi(x, r), \Phi(x', r')] = i \mathcal{D}_0(x-x'; r, r'). \quad (26)$$

Inserting the Fierz decomposition (4) into eq. (26), we get the commutation relations

$$[\varphi_{p_1 \dots p_L}^{(n)}(x), \varphi_{(n')}^{p_1' \dots p_L'}(x')] = i \delta_{(n)(n')} \delta_{p_1 \dots p_L}^{p_1' \dots p_L'} \Delta_0(x-x'; p_{(n)}) \quad (27)$$

for the free component local fields which satisfy the condition of microcausality. The component local field is decomposed further into the form

$$\begin{aligned} \varphi_{p_1 \dots p_L}^{(n)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{L}{2}}} \sum_{\lambda=-L}^L \int [e_{p_1 \dots p_L}(\lambda, k) e^{ikx} a_{(n)}(\lambda, k) + \text{h.c.}] \frac{dk}{\sqrt{2k_{(n)}}} \\ &: k_{(n)} = \sqrt{k^2 + p_{(n)}^2} \end{aligned} \quad (28)$$

in terms of the plane wave and the helicity tensor, the amplitude $a_{(n)}$ and $a_{(n)}^\dagger$ are proved to obey the commutation rules

$$\begin{cases} [a_{(n)}(\lambda, k), a_{(n)}(x', k')^\dagger] = \delta_{(n)(n')} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{(k-k')} \\ [a_{(n)}(\lambda, k), a_{(n)}(x', k')] = [a_{(n)}(\lambda, k)^\dagger, a_{(n)}(x', k')^\dagger] = 0. \end{cases} \quad (29)$$

The Fock space is introduced as usual. We define the vacuum state $|0\rangle$ as the normalized state vector satisfying the requirements

$$a_n(\lambda, k) |0\rangle = 0 \quad \text{for } \forall (n), \lambda \text{ and } k. \quad (30)$$

Many-meson states are built up by operating appropriate creation operators to the vacuum state as many times as necessary.

We can introduce the concept of the normal product in the local field theory into our scheme as it stands. The product of two field operators $\Phi(x, r)$ and $\Phi(x', r')$, for example, is expressed as

$$\Phi(x, r) \Phi(x', r') = : \Phi(x, r) \Phi(x', r') : + \underbrace{\Phi(x, r) \Phi(x', r')} \quad (31)$$

by the sum of the normal product and the ordinary pairing

$$\underbrace{\Phi(x, r) \Phi(x', r')} = i \mathcal{D}_+(x - x'; r, r') = \langle 0 | \Phi(x, r) \Phi(x', r') | 0 \rangle \quad (32)$$

of them. As the generalization of this decomposition, Wick's theorem for normal products holds also in our theory.

It is impossible to arrange, in a relativistically invariant way, bilocal field operators in the definite order of external time variable x_0 , because they do not satisfy the locality condition with respect to external variables x_μ . For bilocal field operators $\Phi_j = \Phi(x_j, r_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, we define here the chronological product (T' -product) as Wick's sum of normal products including the $\frac{1}{2}\delta$ - $\frac{1}{2}\bar{\delta}$ propagators as follows:

$$\begin{aligned} T[\Phi_1 \Phi_2 \cdots \Phi_n] = & : \Phi_1 \Phi_2 \cdots \Phi_n : + \underbrace{\Phi_1 \Phi_2}_{\frac{1}{2}\delta} \cdots \Phi_n + \cdots + \underbrace{\Phi_1 \cdots \Phi_{n-1}}_{\frac{1}{2}\bar{\delta}} \Phi_n \\ & + \underbrace{\Phi_1 \Phi_2}_{\frac{1}{2}\delta} \underbrace{\Phi_3 \cdots \Phi_n}_{\frac{1}{2}\bar{\delta}} + \cdots \end{aligned} \quad (33)$$

where the chronological pairing (T' -pairing) is given by

$$\underbrace{\Phi(x, r) \Phi(x', r')} = \begin{cases} i \mathcal{D}_c(x - x'; r, r') & x \neq x' \\ i \mathcal{D}_+(x - x'; r, r') & x = x' \end{cases} \quad (34)$$

Using the asymptotic-macrocausal relation (25) of the $\hat{q}-\hat{q}$ propagator, we can prove the asymptotic theorem

$$\lim_{\lambda_{10} \rightarrow \infty} T[\hat{\Phi}_1 \hat{\Phi}_2 \dots \hat{\Phi}_n] = \hat{\Phi}_1 T[\hat{\Phi}_2 \dots \hat{\Phi}_n] \quad (35)$$

for the T -product, and its generalization

$$\lim_{\lambda_{10} \rightarrow \infty} T[A_1 A_2 \dots A_n] = A_1 T[A_2 \dots A_n] \quad (36)$$

for the mixed T' -products, where

$$A_j = : \hat{\Phi}(x_j, t_j) \hat{\Phi}(x_j, t_j) \hat{\Phi}(x_j, t_j) : \quad (37)$$

In an arbitrarily-fixed Lorentz frame, let us consider the state vector $|t\rangle$ being labelled and specified by the external time variable $t = x_0$. For the U -matrix defined by

$$|t\rangle = U(t, -\infty) |-\infty\rangle, \quad (38)$$

we postulate the equation

$$i \frac{d}{dt} U(t, -\infty) = H_I(t) U(t, -\infty), \quad (39)$$

where

$$H_I(t) = - \int_{x_0=t} \mathcal{L}_I(x) dx. \quad (40)$$

The analogue of the U -matrix in the local field theory,

$$U_a(t, -\infty) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \int_{-\infty}^t dt_1 \dots \int_{-\infty}^t dt_N T[H_I(t_1) \dots H_I(t_N)] \quad (41)$$

with T' -products in place of T -products, is proved to satisfy asymptotically eq. (39). Consequently we get the S -matrix

$$S = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \int dx_1 \dots \int dx_N T[\mathcal{L}_I(x_1) \dots \mathcal{L}_I(x_N)] \quad (42)$$

which is apparently invariant under the Lorentz transformation. It is not clarified yet whether our S -matrix is unitary or not.

Let us consider here the pseudolocal interactions

$$L_2(x) = g^2 \int \bar{\Phi}(x, r) \bar{\Phi}(x, r') \bar{\Phi}(x, r'') \delta(r+r'+r'') dr dr' dr'' \quad (43)$$

for the bilocal field, and

$$L_1(x) = e \int \bar{\Phi}(x, r) \bar{\Phi}(x, r) A(x) dr \quad (44)$$

between a scalar local field $A(x)$ and the bilocal field, where g and e are coupling constants. It should be emphasized that, although these interactions are local with respect to the external variables x_r , they produce the nonlocal interactions among meson-field, and between the local field $A(x)$ and meson-fields. To clarify this fact, let us rewrite the Fierz-expansion of the bilocal field in the integral form

$$\bar{\Phi}(x, r) = \sum_{(n)} \int \bar{\psi}_{p_1 \dots p_n}^{(n)}(r; x-y) \psi_{p_1 \dots p_n}^{(n)}(y) dy, \quad (45)$$

where

$$\bar{\psi}_{p_1 \dots p_n}^{(n)}(r; x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \bar{\psi}_{p_1 \dots p_n}^{(n)}(r; k) e^{-ik(x-y)} dk \quad (46)$$

This expansion shows that the (n) -meson is created and annihilated at y_r around x_r with certain probability^{6/} determined by the function in eq.(46).

It is straightforward to generalize our theory, discussed so far, so as to include the trilocal fields which describe the composite systems of three scalar quarks.

The simplest application of our theory is found in the calculation of form factors and structure functions^{7,8/} (see Fig.1, and Fig.2). From the interaction (44) and the similar

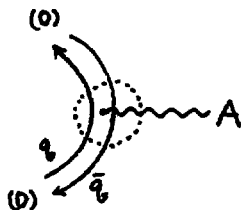


Fig. 1

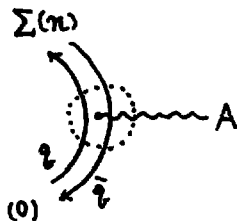


Fig. 2

form for the trilocal field, we get the form factors

$$G_n(t) = (1 - \frac{t}{2\mu^2})^{-1}, \quad (47)$$

$$G_p(t) = (1 - \frac{t}{2\mu^2})^{-2} \quad (48)$$

and

$$G_n(t) = 0, \quad (49)$$

respectively, for the pion, proton and neutron. Similarly their structure functions for deep inelastic processes are obtained in the Bjorken limit as^{8/}

$$\lim_{\nu} \nu W_2^{(\pi)} = 2|\alpha_1| (1-x') e^{-2|x'+(1-x')^2}, \quad (50)$$

$$\lim_{\nu} \nu W_2^{(p)} = 2|\alpha_2| (1-x')^3 e^{-2|x'+(1-x')^2} \quad (51)$$

and

$$\lim_{\nu} \nu W_2^{(n)} = 0, \quad (52)$$

respectively. All the results from eq. (47) to eq. (52) are compatible with the conjecture given by Drell and Yan^{9/}.

Next let us calculate S-matrix elements of elastic hadron-hadron scatterings. For the π - π scattering the dominant contribution in high-energy region results from the process shown in Fig. 3 where all the excited \bar{q} - \bar{q} states are exchanged in the t -channel.

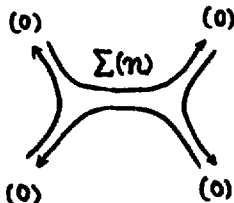


Fig. 3

For this process we find the amplitude

$$A_{\pi\pi}(s, t) \propto i\alpha_1 g^2 \left(\frac{\mu^2}{3\mu^2 - t}\right)^2 \int_0^\infty e^{i\alpha x - \epsilon x} J(e^{\alpha x}) dx \quad (53)$$

where

$$J(s) = \left\{ (q-s) \left[\left(\frac{s-t}{3s-t} \right)^2 - \zeta^2 \right] \left[\left(\frac{s-t}{3s-t} - \zeta^2 \right)^2 - \left(2 \frac{s-u}{3s-t} \zeta^2 \right)^2 \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (54)$$

Similar parametrized-amplitudes are obtained for the πp and pp elastic scattering processes. The high-energy behaviour of these processes with fixed $(-t)$ are shown in the table where the cross-section are listed with the quark-spin corrections. Our results agree with power laws predicted by Matveev, Muradyan and Tavkhelidze^{10/} and Brodsky and Farrar^{11/}. As for the hard structure of hadrons, our theory seems to work very well.

Table

Amplitude		$\left(\frac{d\sigma}{dt} \right)$	corrected
$\pi\pi$	S^{-3}	S^{-6}	
πp	S^{-4}	S^{-8}	
pp	S^{-5}	S^{-10}	

References

1. I.Sogami, Prog. Theor. Phys. 41 (1969) 1352; 43, (1970) 1050.
2. I.Sogami, ibid. 50 (1973) 1729.
3. H.Yukawa, Phys. Rev. 77 (1950) 219; 80 (1950) 1047;
Y.Katayama and H.Yukawa, Prog.Theor.Phys.Suppl. No 41 (1968) 4.
4. M.A.Markov
5. S.N.Gupta, Phys.Rev. 95 (1954) 1334.
6. D.I.Blokhintsev. Space and Time in Microworld ("Nauka", Publishing Company, 1970).
7. K.Fujimura et al., Prog.Theor.Phys. 44 (1970) 193.
8. I.Sogami and J.Werle, Phys.Lett. 53B (1974) 81.
9. S.D.Drell and T.M.Yan, Phys.Rev.Lett. 24 (1970) 181;
E.D.Bloom and F.J.Gilman, Phys.Rev.Lett. 25 (1970) 1140.
10. V.Matveev, R.Muradyan and A.Tavkhelidze, Joint Institute for Nuclear Research Report No. D2-7110 (1973).
11. S.J.Brodsky and G.R.Farrar, Phys.Rev.Lett. 31 (1973) 1153.

КВАРК-ЛЕПТОННАЯ АНАЛОГИЯ И ОСЦИЛЛЯЦИИ НЕЙТРИНО

С.М.Биленький, Б.М.Понтекорво

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

1. Смешивание нейтрино и нейтринные осцилляции были рассмотрены много лет тому назад^{/1/}. В работе^{/2/} была дана теория осцилляций нейтрино. Возможные эффекты осцилляций в нейтринной астрономии были рассмотрены в работах^{/2-5/}.

Авторы работы^{/2/} исходили из предположения о существовании только четырех стационарных состояний нейтрино (два нейтрино Майорана с массой). В этой теории два нейтрино занимают особое место среди фундаментальных фермионов (каждый из всех других лептонов и кварков описывается четырехкомпонентным спинором). Теория^{/2/} является в принципе теорией с тремя параметрами (две массы и угол смешивания). В работе^{/2/} приводятся, однако, некоторые соображения в пользу максимального смешивания.

В этой заметке мы введем смешивание нейтрино, основываясь на аналогии между слабым взаимодействием лептонов и слабым взаимодействием кварков. При этом мы будем предполагать, что каждое нейтрино описывается четырехкомпонентным спинором. Как будет видно, следствия представленной здесь теории и теории^{/2/} практически совпадают, хотя, с теоретической точки зрения, эти теории различны.

2. Как хорошо известно^{/6/}, слабое взаимодействие адронов в случае четырех кварков может быть построено таким образом, чтобы изменяющийся странный ток не появлялся в первом порядке, но возникал (в соответствии с результатами опытов) в высших порядках теории возмущений. Этого можно достигнуть, если, наряду с кабиббовской комбинацией d и s кварков

$$d' = d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \quad (I)$$

ввести в гамильтониан ортогональную (I) комбинацию

$$s' = -d \sin \theta_c + s \cos \theta_c. \quad (2)$$

Для того, чтобы запретить в первом порядке процессы типа $\mu \rightarrow e + \gamma$, введем (по аналогии с кварками) две ортогональные комбинации нейтринных полей^{7,8/}

$$\begin{aligned} \nu_e &= \nu \cos \theta + \nu' \sin \theta \\ \nu_\mu &= -\nu \sin \theta + \nu' \cos \theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Мы должны, однако, учесть глубокое отличие между лептонами и кварками, состоящее в том, что кварки, кроме слабого взаимодействия, участвуют также в сильном взаимодействии, в котором сохраняется странность. Рассматриваемая кварк-лептонная аналогия является по существу аналогией между слабым взаимодействием лептонов и кварков. В случае лептонов нет квантовых чисел, аналогичных странности, и, следовательно, нет параметра, полностью аналогичного углу Кабиббо, который бы характеризовал степень нарушения мюонного заряда. Угол θ априори может быть любым. Однако выделенными значениями θ являются $\theta = 0$ (обычная теория с сохранением мюонного заряда) и $\theta = \frac{\pi}{4}$ (максимальное смешивание). В дальнейшем мы рассмотрим случай $\theta = \frac{\pi}{4}$. Итак, предположим, что поля нейтрино входят в гамильтониан взаимодействия в виде

$$\begin{aligned} \nu_e'' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\nu + \nu') \\ \nu_\mu'' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-\nu + \nu'). \end{aligned} \quad (4)$$

При этом исчезает понятие мюонного заряда. Возникает вопрос: чем отличаются ν и ν' . Очевидно, что нейтрино ν и ν' должны иметь разные массы (обозначим их m и m').

Заряженный лептонный ток имеет вид

$$j_a = (\bar{e} \gamma_a (1 + \gamma_5) \nu_e) + (\bar{\mu} \gamma_a (1 + \gamma_5) \nu_\mu). \quad (5)$$

Очевидно, что нейтральный ток, возникающий в теориях типа Салама-Вайнберга, наряду с заряженным током (5), симметричен. Несимметричные нейтральные токи ($\mu \rightarrow e + \gamma$ и др. эффекты) могут появляться только в высших порядках теории возмущений.

3. Из недавнего опыта^{/9/} по изучению β -распада ^3H следует, что масса антинейтрино, испускаемого вместе с электроном, ≤ 30 эВ. Из этих данных получаем, что

$$m \leq 30 \text{ эВ} \quad (6)$$

$$m' \leq 30 \text{ эВ}.$$

Это заключение относится ко всем теориям с несохранением мюонного заряда (т.е. со смешиванием нейтрино). В частности, оно относится и к теории, предложенной в^{/2/}.

В рассматриваемой теории может быть вычислена вероятность распада $\mu \rightarrow e \gamma$. Используя (6), можно показать^{/8,10/}, что

$$\frac{\Gamma_{\mu \rightarrow e \gamma}}{\Gamma_{\mu}} \leq 10^{-25}. \quad \text{Экспериментальная верхняя граница}$$

$$\left(\frac{\Gamma_{\mu \rightarrow e \gamma}}{\Gamma_{\mu}} \right)_{\text{эксп}} \leq 2 \cdot 10^{-8}.$$

Очевидно, что для проверки теории со смешиванием нейтрино нужны эксперименты другого типа. Такими экспериментами являются опыты по изучению эффектов, связанных с нейтринными осцилляциями. Как известно, в этих экспериментах измеряется амплитуда (а не ее квадрат).

Уравнения, описывающие поведение нейтринного пучка в рассматриваемой нами схеме, аналогичны уравнениям, полученным в работе^{/2/}. Мы обсудим ниже ряд эффектов и выясним, какую можно получить информацию о величине $m' - m$.

Пучки нейтрино не описываются в случае, если имеет место смешивание, стационарными состояниями. Возникают, следовательно, такие эффекты, как образование электронов при взаимодействии нейтрино от $\pi - \mu$ -распада с ядрами, появление "стерильных" нейтрино в пучках нейтрино от реактора и Солнца и др.

Для отношения числа электронов, образующихся при взаимодействии с ядрами нейтрино от π - μ -распада, к соответствующему числу мюонов, получаем

$$\left(\frac{N_e}{N_\mu}\right) = \frac{1 - \cos 2 \frac{L}{L_0}}{1 + \cos 2 \frac{L}{L_0}}, \quad (7)$$

где L - расстояние от источника нейтрино до детектора, $L_0 = \frac{2\rho}{m^2 - m'^2}$ - длина осцилляций (ρ - импульс нейтрино в лаб. системе). Из данных, полученных в опыте ЦЕРН^{II}, с помощью (7) находим

$$|m' - m| \leq 1 \text{ эВ.}$$

Меньшее верхнее значение величины $|m' - m|$ может быть найдено из данных, полученных в экспериментах с реакторными антинейтрино¹². Из сравнения измеренного на опыте выхода позитронов в процессе

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$$

с величиной, ожидаемой в случае, если нет осцилляций, находим

$$|m' - m| \leq 10^{-1} \text{ эВ.}$$

Обсудим теперь эксперименты с солнечными нейтрино. Интенсивность детектируемых солнечных нейтрино (ν_e'') дается следующим выражением^{*}

$$I(R, \rho) = \frac{1}{2} I_0(R, \rho) \left(1 + \cos 2 \frac{R}{L_0}\right), \quad (8)$$

где $I_0(R, \rho)$ - интенсивность детектируемых нейтрино (ν_e''), ожидаемая в случае, если осцилляции отсутствуют, R - расстояние между Землей и Солнцем.

^{*} В рассматриваемой нами схеме более тяжелое нейтрино распадается на более легкое с испусканием фотона. Используя (6), можно показать, что нейтрино с энергией 1 МэВ за время жизни проходит расстояние, на несколько порядков большее расстояния между Землей и Солнцем.

Эффекты, связанные с осцилляциями, могут, в принципе, наблюдаться, если $L_0 \lesssim R$, т.е. если

$$|m' - m| \gtrsim 10^{-6} \text{ эВ.}$$

При любой реалистической в настоящее время постановке опыта член $\cos 2 \frac{R}{L_0}$ в выражении (8) исчезает из-за всевозможных усреднений. В этом случае из (8) получаем

$$\bar{I} = \frac{1}{2} \bar{I}_0. \quad (9)$$

Отметим, что с точки зрения проверки этого соотношения наибольший интерес представляют создающиеся в настоящее время новые детекторы нейтрино, основанные на Ga-Ge - радиохимических методах [13, 14].

4. Сделаем в заключение несколько замечаний. Хорошо известно, что в случае, если массы обоих нейтрино равны нулю, имеются две эквивалентные теории нейтрино:

- 1) два двухкомпонентных нейтрино,
- 2) два нейтрино Майорана.

Если в гамильтониане взаимодействия поля двух нейтрино смешиваются, то для того, чтобы подавить такие процессы, как $\mu \rightarrow e \gamma$, они должны входить в гамильтониан в виде ортогональных комбинаций. В такой теории массы нейтрино, разумеется, должны быть разными.

Теория, предложенная в работе [2], основана на обобщении случая (2) и является, следовательно, теорией, в которой каждое из двух нейтрино с массой могут находиться в двух состояниях.

Рассмотренная здесь теория основана на обобщении (1) и является, следовательно, теорией, в которой два нейтрино с массой описываются четырехкомпонентными спинорами. В этой схеме нейтрино ν и $\bar{\nu}'$ описываются так же, как и остальные лептоны и кварки, в то время как в теории [2] нейтрино занимают особое место среди остальных фундаментальных частиц.

Следствия, вытекающие из обеих схем, практически совпадают, хотя в принципе их можно различить. Например, в теории [2] разрешен двойной безнейтринный β -распад. В нашем случае этот

процесс запрещен (сохраняется лептонный заряд). Расчеты ^{/15/} показывают, однако, что двойной β -распад весьма сильно в теории ^{/2/} подавлен.

Л и т е р а т у р а

1. Б.Понтекорво, ЖЭТФ, 34, 247, 1958.
2. V.Gribov, B.Pontecorvo, Phys.Lett. 29B, 493, 1969.
3. Б.Понтекорво, ЖЭТФ, 53, 1717, 1967.
Б.Понтекорво. Письма в ЖЭТФ, 13, 281, 1971.
Б.Понтекорво. УФН, 104, 3, 1971.
4. J.Bahcall, S.Frautschi, Phys.Lett. 29B, 623, 1969.
5. Д.Качаров, Б.Фернберг, препринт ФТИ, Ленинград, № 299, 1970.
6. S.L.Glashow, J.I.Iliopoulos, L.Maiani, Phys.Rev. D2, 1285, 1970.
7. S.M.Bilenky, B.Pontecorvo, Phys.Lett. 62B, 1976.
8. S.Eliezer, D.A.Ross, Phys.Rev. D10, 3088, 1974.
9. Е.Ф.Третьяков и др. Препринт ИТЭФ, № 15, 1976.
10. С.Т.Петков, препринт ОИЯИ, P2-9595, 1976.
11. J.K.Bienlein et al. Phys.Lett. 12, 80, 1964.
12. F.A.Nezrik, F.Reines, Phys.Rev. 142, 852, 1966.
13. A.A.Pomansky, A.I.Sevastjanov, Neutrino 75, v.II, 383, 1975.
14. P.Davis, J.Evans. Proc.of Intern.Seminar, Leningrad, August, 1974.
15. М.Г.Шепкин, Труды семинара по μ -е проблеме, стр.109, "Наука", 1974.

vacuum manifold R . We shall consider a field $(\phi(\vec{x}), B_\alpha(\vec{x}))$ which is smooth for $|\vec{x}| \leq 1$ and satisfies

$$\phi(\vec{x}) = \gamma\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right), B_\alpha(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|} b_\alpha\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right), \nabla_\alpha \phi = 0 \quad (8)$$

for $|\vec{x}| > 1$. (By means of simple topological considerations one can prove the existence of such a smooth function $b_\mu(\vec{x})$ that the condition $\nabla_\alpha \phi = 0$ is fulfilled).

It is easy to verify that the fields under consideration have finite energy. One can prove that the magnetic charge $\mu(\phi, B_\alpha)$ is equal to $\frac{1}{2\pi e} \xi(\phi, B_\alpha)$, where $e \neq 0$ and $\xi(\phi, B_\alpha)$ is an integer which can be defined for example by means of the integration of the 2-form $\gamma^* \omega$ over the sphere S^2 :

$$\xi(\phi, B_\alpha) = \frac{c}{2\pi} \oint \gamma^* \omega = \frac{c}{2\pi} \int \omega_{ab}(\gamma(\vec{x})) \frac{\mathcal{D}(x^a, x^b)}{\mathcal{D}(\theta, \varphi)} d\theta d\varphi \quad (9)$$

(The proof of (9) is sketched in preprint^{7/}; it is based on some topological theorems).

For every integer z one can construct a field (ϕ, B_α) satisfying $\xi(\phi, B_\alpha) = z$, therefore there exist the fields having finite energy and non-zero magnetic charge.

Let us discuss briefly the case of arbitrary group H . We choose compact one-parameter subgroups U_i belonging to the center of H (i.e., commuting with all elements of H). Let h_i be the generators of these subgroups; we suppose that h_1, \dots, h_z generate the center of the Lie algebra of H . It is easy to see that there exist z independent "magnetic charges". Really, replacing h_0 by h_i in the definitions of $h(\phi)$ and ω we get

i) The interpretational requirement

The free multilocal field $\varphi_0(x, r)$ must be decomposable into physical states. This in turn will allow me to define an S -matrix within the LSZ framework. Thus

$$\varphi_0(x, r) = \sum_{\alpha} U^{\alpha}(r, \frac{1}{i}\partial) \varphi_0^{\alpha}(x) \quad (3)$$

(Fierz' decomposition).

$U^{\alpha}(r, \frac{1}{i}\partial)$ is a c -number operator and $\varphi_0^{\alpha}(x)$ conventional free field with quantum numbers α and mass μ_{α} . The free equation must have the form

$$(\square + M^2(\frac{1}{i}\partial, \partial_r, r)) \varphi_0(x, r) = 0 \quad (4)$$

which is solved by solving the eigenvalue equation

$$M^2(p, \partial_r, r) U^{\alpha}(r, p) = \mu_{\alpha}^2 U^{\alpha}(r, p). \quad (5)$$

ii) The confinement or macrocausality condition

$\varphi_0(x, r)$ must satisfy

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, r) &< \infty \quad \text{for } r^{\mu} = 0 \text{ and} \\ \varphi_0(x, r) &\rightarrow 0 \quad \text{for } r^{\mu} \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (6)$$

sufficiently fast.

This condition implies that $U^{\alpha}(r, p)$ has to depend on $r \cdot p$, where p^{μ} is time-like (this provides the necessary damping along the internal light-cone $r^2 \approx 0$). Thus only if (5) yields a positive definite mass spectrum one can have confinement.

$U^{\alpha}(r, p)$ - must be normalizable according to

$$\int d^4r U^{\alpha}(r, p) U^{\alpha'}(r, p) = \delta_{\alpha, \alpha'} \quad (7)$$

for time-like p^{μ} .

The quantization of $\varphi_0(x, r)$ is given by the requirement that $\varphi_0(x)$ must be canonically quantized in the conventional way (the particle states must have positive definite metric). The commutator is

$$[\varphi_0(x, r), \varphi_0(x', r')] = i G(x - x'; r, r'), \quad (8)$$

where

$$G(x; r, r') = \sum_{\alpha} \psi^{\alpha}(r, \frac{1}{2}) \psi^{\alpha}(r', \frac{1}{2}) \Delta(x; \mu_{\alpha}). \quad (9)$$

Since $\psi^{\alpha}(r, p)$ depends on $r \cdot p$, $G(x; r, r')$ will in general not vanish for $x^2 < 0$ (we have an extended object). However, due to the confinement condition the contribution outside $x^2 = 0$ will be effectively only for a compact domain.

The work of Sogami^{1/2} suggests that G always can be divided according to

$$G(x; \dots) = G_1(x; \dots) + G_0(x; \dots), \quad (10)$$

where G_1 vanishes for $x^2 < 0$, and G_0 for $x^2 > 0$. The confinement condition implies that

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \pm\infty} G_0(x; \dots) = 0. \quad (11)$$

Interaction is introduced by the insertion of a source term on the RHS of Eq. (4). Integrating the resulting equation one obtains

$$\begin{aligned} \varphi(x, r) &= \varphi_{in}^{out}(x, r) + \\ &+ \int \int d^4x' d^4r' G_R(x - x'; r, r') \varphi(x', r'), \quad (12) \end{aligned}$$

where $\phi_{in}(x,r)$ are the free in- and out-fields and where the retarded and advanced Green's functions have to satisfy

- i) $D(x, x', r) G_R(x, x'; r, r') = \delta^4(x-x') \delta^4(r-r')$
- ii) $\lim_{t \rightarrow \mp\infty} G_R(x, \dots) = 0$
- iii) $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (G_R(x, \dots) \pm G(x, \dots)) = 0$ (13)
- iv) $G_R(x, \dots) - G_A(x, \dots) = -G(x, \dots)$
- v) $G_A(x; r, r') = G_R(-x; r', r).$

The only possible solution is

$$G_R(x; \dots) = -\theta(x_0) G(x; \dots) - \frac{1}{2} G_0(x; \dots). \quad (14)$$

When $G_0 \neq 0$ the Yang-Feldman-Källén quantization is inconsistent since it violates

$$[\phi_{out}(x, r), \phi_{out}(x', r')] = [\phi_{in}(x, r), \phi_{in}(x', r')] \quad (15)$$

which is a necessary condition for the existence of a unitary S-operator. However, I conjecture that there still exists a consistent quantization and that this quantization can be obtained by adding correction terms to the Y-F-K quantization. This I have checked up to the 4th order in the coupling constant.

The S-operator may be solved for order by order in the coupling constant and will not be represented by a simple generalized Dyson solution. However such a representation constitutes the main contribution to the S-operator and it is given by

$$S^F = T e^{iW_{in}}, \quad (16)$$

where T is the generalized time-ordering of Okubo^{3/}. The true S -operation is obtained by the addition of small correction terms on the loop level to eq. (16).

A simple and calculable model which can be fully fitted within the above general framework has been presented by Sogami^{12/}. He solves equation (5) with the mass operator (r^μ is here a single relative coordinate)

$$M^2 = -m_0^2 + M_\perp^2 + \lambda M_\parallel^2, \quad (17)$$

where

$$\begin{aligned} M_\perp^2 &= m_1^2 \eta_\perp^{\mu\nu} (\partial^2 \partial_{r_\mu} \partial_{r_\nu} - \partial^2 r^2) \\ M_\parallel^2 &= -m_1^2 \eta_\parallel^{\mu\nu} (\partial^2 \partial_{r_\mu} \partial_{r_\nu} - \partial^2 r_\nu^2) \\ \eta_\parallel^{\mu\nu} &= \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square}; \quad \eta_\perp^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \eta_\parallel^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (18)$$

where m_0^2, m_1^2, λ and g are parameters. As a subsidiary equation he has

$$W^2 U^\alpha(r, p) = L(L+1) U^\alpha(r, p), \quad (19)$$

where

$$\begin{aligned} W_\mu &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\lambda\rho\nu} p^\lambda S^{\rho\nu} / \sqrt{p^2} \\ S^{\rho\nu} &= -i(r^\rho \partial r^\nu - r^\nu \partial r^\rho). \end{aligned} \quad (20)$$

The confined solution is given by

$$\begin{aligned} U^{(NKLm)}(r, p) &= R_\parallel^{(N)}(\tau^2) R_\perp^{(K,L)}(-F^2) \times \\ &\quad \times \Theta_{\mu_1 \dots \mu_L}^{\nu_1 \dots \nu_L}(p) r_{\nu_1} \dots r_{\nu_L} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_L}(m, p) \\ R_\parallel^{(N)}(\tau^2) &= (g \sqrt{\pi} 2^N N!)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2} \tau^2) H_N(\tau) \\ R_\perp^{(K,L)}(-F^2) &= \left(\frac{K! (2L+1)!! (2\pi)^{-1}}{g^{3+2L} \Gamma(K+L+\frac{3}{2}) L!} \right)^{1/2} \exp(\frac{1}{2} F^2) {}_L^{(L+K)}(-F^2), \end{aligned} \quad (21)$$

where
$$\tau = \frac{(p \cdot r)}{p^2}, \quad F^2 = \frac{1}{p^2} \eta^{\mu\nu} r_\nu r_\mu,$$

K and N is the radial and time excitation quantum number, respectively. L is the angular momentum (spin) and m helicity. The mass spectrum is given by

$$\mu_{NKL}^2 = -m_0^2 + (\lambda+3)m_1^2 + 2(2K+L+2N)m_1^2. \quad (22)$$

Thus the particles lie on linear Regge trajectories with the slope

$$\alpha' = \frac{1}{2m_1^2} \quad (23)$$

and leading intercept

$$\alpha_0 = \frac{m_0^2 - (\lambda+3)m_1^2}{2m_1^2}. \quad (24)$$

The mass spectrum is positive definite for $\lambda \geq 0$ and $\alpha_0 < 0$.

I shall now consider the following interaction for Sogami's bilocal field

$$W = \frac{g}{3} \iiint d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \tilde{\varphi}(x_1, x_2) \tilde{\varphi}(x_2, x_3) \tilde{\varphi}(x_3, x_1) \quad (25)$$

which imitates a three-string vertex in the dual models. By the replacement $\varphi(x, r) = \tilde{\varphi}(x_1, x_2)$ where $r^\mu = x_1^\mu - x_2^\mu$, $x^\mu = \frac{x_1^\mu + x_2^\mu}{2}$ one obtains

$$W = \frac{g}{3} \iiint d^4x d^4r d^4r' \varphi(x - \frac{1}{2}r, r) \varphi(x, r - r') \varphi(x + \frac{1}{2}r, r'), \quad (26)$$

For simplicity I shall only consider the quasi-local version, i.e.,

$$W = \frac{g}{3} \iiint d^4x d^4r d^4r' \varphi(x, r) \varphi(x, r - r') \varphi(x, r'). \quad (27)$$

The nonlocality will be reflected in the momentum space by a particular singularity structure of the vertex function, which is defined by

$$S^4(p_1, p_2, p_3) V_{\alpha, \alpha_2, \alpha_3}(m_1^2, m_2^2, m_3^2) = \langle p_2, \alpha_2; p_3, \alpha_3 | W | p_1, \alpha_1 \rangle. \quad (28)$$

For eq. (27) one has

$$V_{\alpha, \alpha_2, \alpha_3}(m_1^2, m_2^2, m_3^2) \propto \int d^4 q \tilde{U}^{\alpha_1}(q, p_1) \tilde{U}^{\alpha_2}(q, p_2) \tilde{U}^{\alpha_3}(q, p_3) \quad (29)$$

which will have singularities if the integral does not converge for all values of p_i^2 , $i=1, 2, 3$.

For the Sogami model this integral is a gaussian one, which I define by

$$\int d^4 q \exp \{-q^\mu M_{\mu\nu} q^\nu\} = \frac{\pi^2}{\sqrt{\text{Det } M_{\mu\nu}}}.$$

I obtain

$$V_{000}(m_1^2, m_2^2, m_3^2) \propto g s^2 \sqrt{\frac{m_1^2 m_2^2 m_3^2}{3(m_1^2 m_2^2 m_3^2) + m_1^6 + m_2^6 + m_3^6 - (m_1^2 m_2^2 + m_1^2 m_3^2 + m_2^2 m_1^2 + m_3^2 m_1^2 + m_2^2 m_3^2 + m_1^2 m_3^2)}} \quad (30)$$

which simplifies for $m_2^2 = m_3^2$:

$$V_{000}(m_1^2, m_2^2, m_2^2) \propto g s^2 \left/ \frac{m_2^2}{m_1^2 - m_2^2} \right|. \quad (31)$$

In fact $V_{000}(\cdot)$ determines the position of the singularities for a general vertex function and they seem not to be in the physical region.

Thus, in the momentum space there are additional singularities in the Feynman graphs which explains why unitarity requires correction terms to these graphs.

I shall now consider the Born amplitude of the elastic scattering of two ground state mesons with the interaction (27). Using the naive representation of the Green's function, I obtain

the following T-matrix for the S-graph

$$T_S \propto \alpha'(g s^2)^2 \int_0^1 dz z^{-1-\alpha(t)} (9-z^2)^{-1/2} \times \\ \times \left(\left(\frac{s}{m^2} - 1 \right)^2 - z^2 \left(\frac{s}{m^2} - 3 \right)^2 \right)^{-1/2} \left(3 \left(\frac{s}{m^2} - 1 \right) - z^2 \left(\frac{s}{m^2} - 3 \right) + \frac{2z}{m^2} (t-u) \right)^{-1/2} \\ \times \left(3 \left(\frac{s}{m^2} - 1 \right) - z^2 \left(\frac{s}{m^2} - 3 \right) + \frac{2z}{m^2} (u-t) \right)^{-1/2}. \quad (32)$$

This expression contains the particle poles which is seen if one performs an expansion around $z=0$ in the integrand. These poles will have the following singular coefficients

$$\left(\frac{s}{m^2} - 1 \right)^{-2-n}$$

due to the vertex function (31). The asymptotic behaviour is

$$T_S \sim \frac{1}{s^2}, \quad s \rightarrow \infty.$$

For the t-graph I obtain

$$T_t \propto \alpha'(g s^2)^2 \int_0^1 dz z^{-1-\alpha(t)} (9-z^2)^{-1/2} \times \\ \times \left(\left(\frac{t}{m^2} - 1 \right)^2 - z^2 \left(\frac{t}{m^2} - 3 \right)^2 \right)^{-1/2} \left(3 \left(\frac{t}{m^2} - 1 \right) - z^2 \left(\frac{t}{m^2} - 3 \right) + \right. \\ \left. + \frac{2z}{m^2} (s-u) \right)^{-1/2} \left(3 \left(\frac{t}{m^2} - 1 \right) - z^2 \left(\frac{t}{m^2} - 3 \right) + \frac{2z}{m^2} (u-s) \right)^{-1/2}. \quad (33)$$

This diagram represents the exchange of the extended object. Its leading behaviour at high energy is determined by the $z=0$ end of the integral since s is multiplied by z . A full z -plane analysis can be performed by taking the Mellin transform of (33) and expanding the integrand around $z=0$. The leading behaviour turns out to be

$$T_t \stackrel{s \rightarrow \infty}{\sim} \beta^2(t) \Gamma(-\alpha(t)) (1 + e^{-i\pi\alpha(t)}) s^{\alpha(t)}, \quad (34)$$

where

$$\beta(t) = \frac{\sqrt{\alpha'}(g s^2)}{(1 - \frac{t}{m^2})} \left(\frac{g}{3(m^2 - t)} \right)^{\frac{\alpha(t)}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha(t)}{2}\right). \quad (35)$$

The nonleading behaviour is represented by daughter trajectory Regge behaviour and odd order fixed poles. Thus, eq. (34) represents the leading behaviour only for $\alpha(t) > -1$. For $\alpha(t) < -1$ the fixed pole at $j = -1$ will take over. At $\alpha(t) = -1$ one has a double pole as leading behaviour.

The full Born amplitude is obtained by adding together the S -, t - and u -graphs. Thus crossing is just a consequence of the field theoretic framework.

From the calculations so far it seems to me quite possible that one here has a space-time description of the scattering of extended objects in consistency with relativity and quantum mechanics, and that a model theory of this type yields an S-matrix that satisfies.

- i) Relativistic invariance
- ii) Unitarity (?)
- iii) Positive definite mass spectrum, and positive definite normed states
- iv) Crossing
- v) Regge behaviour

However, maximal analyticity seems very hard to obtain within the present scheme and it is an open question whether the extra singularities in the unphysical region of the amplitudes at the end will act destructively or not. In a way they seem to be a natural consequence of the fact that the hadrons have finite size. Indeed it is these singularities that yield the main contribution to the electromagnetic form factors.

References

1. (N.Craigie), R.Marnelius in preparation.
2. I.Sogami, Prog.Theor.Phys. 50, 1729 (1973).
3. S.Okubo, Prog.Theor.Phys. 49, 2125 (1973); 51, 920 (1974).

СПИСОК УЧАСТНИКОВ

Анева Б.	- ОИЯИ	Киржниц Д.А.	- СССР
Атакишиев Н.М.	- СССР	Кириллов А.А.	- СССР
Балдян А.М.	- ОИЯИ	Кобзарев И.Ю.	- СССР
Барбашов Б.М.	- ОИЯИ	Коноплева Н.П.	- СССР
Басуев А.Г.	- СССР	Кулиш П.П.	- СССР
Белиничер В.	- СССР	Кути Д.	- Венгрия
Березин Ф.А.	- СССР	Лалидус Л.И.	- ОИЯИ
Биленький С.М.	- ОИЯИ	Лендбел В.И.	- СССР
Блохинцев Д.И.	- ОИЯИ	Лукерски Я.	- Польша
Боголюбов П.Н.	- ОИЯИ	Лопушански Я.	- Польша
Васильев А.Н.	- СССР	Марков М.А.	- СССР
Веселова А.М.	- СССР	Марнелиус Р.	- Швейцария
Де Витт Б.	- Англия	Матинян С.Г.	- СССР
Волков Д.В.	- СССР	Медведев Б.В.	- СССР
Волков М.К.	- ОИЯИ	Мир-Касимов Р.М.	- ОИЯИ
Воронов Б.Л.	- СССР	Михайлов А.В.	- СССР
Владимиров А.А.	- ОИЯИ	Мишустин И.Н.	- СССР
Гогохия В.Ш.	- ОИЯИ	Мотц Г.	- ОИЯИ
Джин-Жустен Дж.	- Франция	Намсрай Х.	- Монголия
Донков А.	- Болгария	Нестеренко В.В.	- ОИЯИ
Драгович Б.	- ОИЯИ	Нога М.	- Чехословакия
Ефимов Г.В.	- ОИЯИ	Огиевацкий В.И.	- ОИЯИ
Ефремов А.В.	- ОИЯИ	Павлов В.П.	- СССР
Захаров В.Е.	- СССР	Пашнев А.И.	- СССР
Иванов Е.А.	- ОИЯИ	Первушин В.Н.	- ОИЯИ
Кадышевский В.Г.	- ОИЯИ	Переломов А.П.	- СССР
Казаков Д.И.	- ОИЯИ	Петрина Д.Я.	- СССР
Кафиев Д.А.	- СССР	Петрунькин В.А.	- СССР
Кашлун Ф.	- ГДР	Погребков А.К.	- СССР
		Поляков А.М.	- СССР
		Понтекорво Б.М.	- ОИЯИ

Разумов А.В.	- СССР
Ржежевски К.	- Польша
Рочев В.Е.	- СССР
Сабов В.И.	- СССР
Сабад Е.П.	- СССР
Семенов А.С.	- СССР
Славнов А.А.	- СССР
Славнов Д.А.	- СССР
Сморodinский Я.А.	- СССР
Согами И.	- Япония
Сокачев Э.	- ОИЯИ
Соколов С.Н.	- СССР
Стойнов Д.	- ОИЯИ
Струминский Б.В.	- СССР
Сушко В.И.	- СССР
Суханов А.Д.	- СССР
Суяров У.С.	- СССР
Тавхелидзе А.Н.	- СССР
Терентьев М.В.	- СССР
Тодоров И.Т.	- Болгария
Тхтин И.В.	- СССР
Ульманн А.	- ГДР

Фаддеев Л.Д.	- СССР
Файнберг В.Я.	- СССР
Фаустов Р.Н.	- СССР
Филиппов А.Т.	- ОИЯИ
Филтер Я.	- Чехословакия
Фомин П.И.	- СССР
Фрадкин Е.С.	- СССР
Франка В.А.	- СССР
Френкель А.	- Венгрия
Химич И.В.	- СССР
Христов Х.Я.	- Болгария
Ходжаев Л.Ш.	- СССР
Черников Н.А.	- ОИЯИ
Шавохина Н.С.	- ОИЯИ
Шварц А.С.	- СССР
Шелест В.П.	- СССР
Шерк Дж.	- Франция
Широков М.И.	- ОИЯИ
Широков Ю.И.	- СССР
Ширков Д.В.	- ОИЯИ
Шургая А.В.	- СССР
Эберт Д.	- ОИЯИ

СПИСОК ДОКЛАДОВ, НЕ ВОШЕДШИХ В СБОРНИК

1. В.П.Акулов, Д.В.Волков, В.Л.Сороко
Об общековариантных суперсимметричных теориях поля
V.P.Akulov, D.V.Volkov, V.L.Soroka
On the General-Covariant Super-Symmetric Field Theories
2. А.М.Анненкова, В.А.Франке
Некоторые обобщения модели релятивистской струны
A.M.Annenkova, V.A.Franke
Some Generalizations of Relativistic String Model
3. Н.М.Атакишиев, Р.М.Мир-Касимов, Ш.М.Нагиев
Ковариантная формулировка релятивистской гамильтоновой теории на световом конусе
N.M.Atakishiev, R.M.Mir-Kasimov, Sh.M.Nagiev
The Covariant Formulation of the Relativistic Hamiltonian Theory on the Light Cone
4. П.Н.Боголюбов
Модели кварковых мешков и их следствия
P.N.Bogolubov
Quark Bag Models and their Consequences
5. В.Де Витт
Квантовая теория поля в кривом пространстве-времени
B. De Witt
Quantum Field Theory in Curved Space-Time
6. М.И.Гайсак, В.И.Ленцвел
Низкоэнергетическое πN -рассеяние в нелинейной киральной динамике с использованием суперпропагаторов
M.I.Gaysak, V.I.Lendiel
Low-Energy πN -Scattering in Nonlinear Chiral Dynamics with Superpropagators
7. А.В.Ефремов
Процессы с большой передачей импульса (теория и эксперимент)
A.V.Efremov
Processes with High p_{\perp} (Theory and Experiment).

8. Е.А.Иванов, В.И.Огиевецкий
Калибровочные теории как теории спонтанного нарушения
E.A.Ivanov, V.I.Ogievetsky
Gauge Theories as Theories of Spontaneous Breakdown
9. Ю.И.Кафиев
Комбинированные модели нарушения киральной $SU(3) \times SU(3)$ -
симметрии
Yu.I.Kafiev
The Combined Models of the Chiral Symmetry Breaking
 $SU(3) \times SU(3)$
10. Д.А.Киржниц, А.Д.Линде
Поведение нарушенных симметрий под влиянием внешних воз-
действий
D.A.Kirzhnits, A.D.Linde
The Behaviour of Broken Symmetries under the Extremal
Influence
11. И.Ю.Кобзарев
О свойствах квазисолитонов
I.Yu.Kobzarev
On the Properties of Quasisolitons
12. П.П.Кулиш
Устойчивость солитонов
P.P.Kulish
Stability of Solitons
13. Д.Кути
Протяженная модель адронов с поверхностным натяжением
D.Kuti
Extended Hadron Model with Surface Tension
14. Я.Лопушански
Алгебра суперсимметричных преобразований
J.Lopuszanski
Supersymmetry Transformation Algebra
15. Я.Лукерски
Лагранжева модель конформно-инвариантной квантовой теории
поля
J.Lukierski
The Lagrangian Model of Conformal Invariant Quantum Field Theory

16. М.А.Марков
О возможной нелокальности в квантовой теории гравитации
M.A.Markov
On Possible Nonlocality in Quantum Gravitation Theory
17. Б.В.Медведев
Энергия, импульс и центр масс релятивистских систем
B.V.Medvedev
Energy, Momentum and Center of Mass of Relativistic Systems
18. Х.Намсрай
Стохастическая интерпретация квантовой электродинамики
H.Namsray
Stochastic Interpretation of Quantum Electrodynamics
19. Д.Эберт, Х.И.Отто, В.Н.Первушин
О перенормировках редже-траекторий в модели Невью-Шварца-Рамонда
D.Ebert, H.-J.Otto, V.N.Pervushin
On the Regge-Trajectory Renormalization in the Nevue-Schwartz-Ramond-Model
20. А.М.Переломов
Несколько замечаний о монополях в калибровочных теориях поля
A.M.Perelomov
Some Notes About Monopoles in Gauge Field Theories
21. В.А.Петрунькин
Коэффициенты поляризуемости и структура адронов
V.A.Pertunkin
Polarizability Coefficients and Hadron Structure
22. А.М.Поляков
Многоликие солитоны
23. К.Ржажевски
Релятивистская струна в двухмерном пространстве-времени
K.Zazerski
Relativistic String in the Two-Dimensional Spacetime
24. Д.А.Славнов
Релятивистская ковариантность и локальность в электродинамике с дефинитной метрикой

D.A.Slavnov

Relativistic Covariance and Locality in Electrodynamics with
Definite Metric

25. М.В.Терентьев

Мезоны из релятивистских кварков

M.V.Terentiev

Mesons Made of Relativistic Quarks

26. П.И.Фомин

О регуляризирующем механизме гравитации в проблеме собствен-
ной энергии электрона

P.I.Fomin

On Regularizing Gravitation Mechanism in the Problem of
Electron Proper Energy

27. Ю.М.Широков

Квантование и предельные переходы к классике

Yu.M.Shirokov

Quantization and Transitions to the Classic Limit

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.
Заказ 21788. Тираж 400. Уч.-изд. листов 23,4.
Редакторы Б.Б.Колесова, Э.В.Ивашкевич.
Корректор Т.Е.Жильцова.
Обложка художника Ю.Г.Мешенкова, Подписано к печати 27.7.76.

Цена 2 руб. 40 коп.