



规范势下正方形格点超导量子比特电路中的量子态输运

赵艳军 谭宁 王垚琪 郑亚锐 王辉 刘伍明

Quantum state transport in a square-lattice superconducting qubit circuit under gauge potential

Zhao Yan-Jun Tan Ning Wang Yu-Qi Zheng Ya-Rui Wang Hui Liu Wu-Ming

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 100304 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20222349

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222349>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于辅助单比特测量的量子态读取算法

A quantum state readout method based on a single ancilla qubit

物理学报. 2021, 70(21): 210303 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211066>

量子态制备及其在量子机器学习中的前景

Quantum state preparation and its prospects in quantum machine learning

物理学报. 2021, 70(14): 140307 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210958>

基于量子算法的量子态层析新方案

A novel scheme of quantum state tomography based on quantum algorithms

物理学报. 2019, 68(14): 140301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190157>

基于光量子态避错及容错传输的量子通信

Quantum error rejection and fault tolerant quantum communication

物理学报. 2018, 67(13): 130301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180598>

铁基超导中拓扑量子态研究进展

Research progress of topological quantum states in iron-based superconductor

物理学报. 2018, 67(20): 207101 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181455>

一维超导传输线腔晶格中的拓扑相变和拓扑量子态的调制

Modulation of topological phase transitions and topological quantum states in one-dimensional superconducting transmission line cavities lattice

物理学报. 2022, 71(19): 194203 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220675>

专题: 量子计算新进展: 硬件、算法和软件

规范势下正方形格点超导量子比特电路中的量子态输运*

赵艳军¹⁾ 谭宁¹⁾ 王垚琪¹⁾ 郑亚锐²⁾ 王辉^{3)†} 刘伍明^{4)5)‡}

1) (北京工业大学, 光电子技术教育部重点实验室, 北京 100124)

2) (量元科技(深圳)有限公司, 深圳 518033)

3) (浪潮人工智能研究院, 济南 250011)

4) (中国科学院物理研究所, 北京凝聚态物理国家实验室, 北京 100190)

5) (中国科学院大学物理学院, 北京 100190)

(2022年12月11日收到; 2023年3月23日收到修改稿)

借助于电感型耦合器产生人造规范势(有效磁通), 本文研究了正方形传输子量子比特模型中的量子态输运性质. 理论计算发现, 单粒子本征态与单空穴本征态具有相同的本征能谱, 并且相同能量下, 两者的平均粒子流与平均空穴流受有效磁通正弦调制后互为相反数. 当初态为占据一个格点的单粒子与单空穴时, 如果系统时间反演对称(有效磁通为 4π 的整数倍), 单粒子与单空穴的含时波函数各分量相等, 否则不等. 分析证明, 以上计算结果是由于对体系哈密顿量的粒子-空穴操作等价于对其做时间反演. 此外还发现, 有效磁通为 π 时, 单粒子或单空穴只在初始比特与两个相邻比特之间输运, 有效磁通为0时, 单粒子或单空穴通过两个相邻比特输运到对角比特, 然后再反向输运; 无论有效磁通如何取值, 两者具有相同的平均(粒子或空穴)流和格点占据概率.

关键词: 规范势, 量子态输运, 量子态制备**PACS:** 03.67.Ac, 03.67.-a**DOI:** 10.7498/aps.72.20222349

1 引言

20世纪末, 由 Feynman^[1] 提出的使用一种人工可控的量子系统来模拟另一种现实中真实的量子系统的研究方案——量子模拟, 在凝聚态材料研究领域具有广阔的应用前景. 特别地, 作为一种新思路, 量子模拟方法可以避免经典计算机在处理多体量子态时面临的数据存储困难^[2]. 因此, 在人造量子系统中进行已知现象的演示, 或未知现象的探索已经成为凝聚态物理量子模拟研究的重要方向.

规范势理论在凝聚态物理的发展中充当十分重要的角色. 20世纪末的贝里相位^[3]、整数^[4]、分数^[5,6]量子霍尔效应, 以及21世纪初的量子自旋霍尔效应^[7-11]和拓扑绝缘体^[12], 都得益于规范势的发展, 激起了在量子模拟中引入规范势的研究. 其中, 比较突出的是冷原子平台^[13], 例如利用空间变化的激光与原子内态的耦合可以产生人造磁场^[14-18], 如果进一步控制失谐量随时间变化甚至可以产生人造电场^[16]. 但在集成化方面, 冷原子平台还面临着不小的困难. 而超导量子电路^[19-21]则因传承了传统的微电子工艺, 在集成方面享有独特的优势,

* 北京市自然科学基金(批准号: 4222064)、国家自然科学基金(批准号: 11904013, 61835013, 12234012)、国家重点研发计划(批准号: 2021YFA1400900, 2021YFA0718300, 2021YFA1402100)和中国载人航天工程空间应用系统项目资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wanghuiiphy@126.com

‡ 通信作者. E-mail: wliu@iphy.ac.cn

这有望催生面向量子模拟的专用超导量子芯片. 因而立足此平台开展关于规范势的量子模拟研究具有难以估量的应用前景.

自 1999 年单个电荷量子比特中呈现出量子振荡^[22]后, 多比特研究一直在追逐比特参数一致性以及良好相干性的过程中前进. 相应地, 基于超导量子电路的规范势研究也经历了从单比特到多比特的过程. 如何在格点之间产生规范势也是限制多比特下规范势研究的一个难点. 对于单比特系统而言, 研究重心主要集中在动量空间, 即利用量子比特哈密顿量的可调性来研究绝热变化下的贝里相位、陈数 (或缠绕数) 以及拓扑性质^[23–27]. 随着高品质芯片中比特数目的有效提高^[28], 在多比特构造的格点空间中研究规范势诱导的拓扑效应的报导越来越多. 这也得益于合成格点间有效磁通 (阿贝尔规范势) 的若干方案被相继提出, 例如周期调制量子比特频率^[29–31] 以及利用约瑟夫森结的非线性^[32–34] 等思路. 较典型地, 2017 年, Roushan 等^[34] 在三角形格点原包中利用周期调制的电感耦合器实现了光子的有效磁通, 并观察到了时间反演对称破缺诱导的单光子态与单空穴态的手性输运现象. 由于此三角形原包可看作实现分数量子霍尔效应的基本单元, 此研究为实现最终的二维分数量子霍尔效应奠定实验基础.

类似地, 由于正方形格点原包是整数量子霍尔效应的基本单元, 受文献^[34]启发, 本文将研究有效磁通对正方形格点原包中量子态的影响. 考虑利用电感耦合器产生有效磁通, 系统研究正方形格点中单粒子本征态、单空穴本征态、单粒子态以及单空穴态的制备方法, 输运性质以及测量方案. 同时, 将根据主流实验参数考虑环境对这些过程的影响. 虽然调制比特频率的方法产生有效磁通对样品制备的要求简单, 但耦合器对比特间的相互作用控制更加完美, 在需要精确开关比特耦合的场景更有优势. 本工作作为研究规范势下更复杂模型中的量子行为, 特别是整数量子霍尔效应, 提供重要的基础参考数据.

2 理论模型

如图 1 所示, 本文研究的正方形格点体系由传输子量子比特以及耦合器构成. 其中, 传输子量子比特由超导量子干涉仪 (SQUID), 分流电容 C_j 与自感 L_0 构成. 电感耦合器由约瑟夫森结 L_{Tj} 与自感

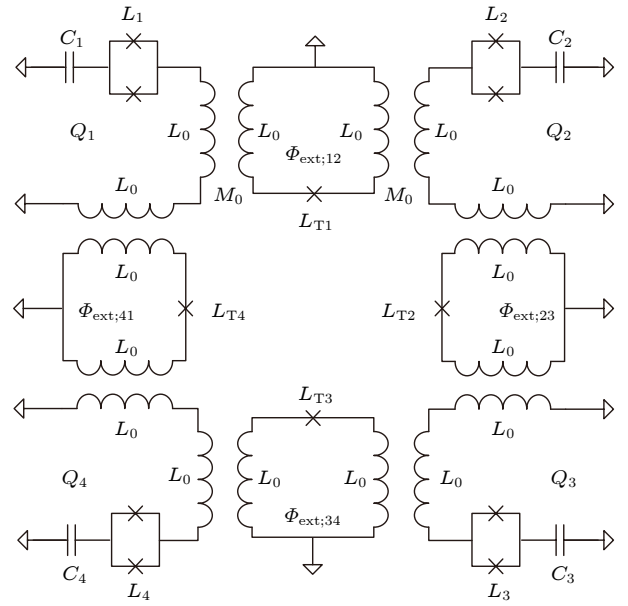


图 1 四量子比特电路结构示意图. 在该示意图中量子比特是由电容、电感和约瑟夫森结组成, 而耦合器由电感与约瑟夫森结组成的环路构成. 相邻两个量子比特之间通过耦合器实现耦合, 每一个耦合器可以调节外加磁通来实现可调耦合. 其中, Q_j 表示量子比特, L_j 与 L_{Tj} ($j = 1, 2, 3, 4$) 都代表约瑟夫森结电感, C_j 代表电容, L_0 代表电感, M_0 表示相邻电感之间的互感

Fig. 1. Schematic diagram of the four qubit circuit structure. In this diagram, a qubit is composed of a capacitor, an inductance and a Josephson junction, while a coupler is composed of a loop consisting of an inductance and a Josephson junction. The coupling between two adjacent qubits is realized by a coupler, where the external magnetic flux can be tuned to achieve adjustable coupling. Here, Q_j stands for a qubit, L_j and L_{Tj} ($j = 1, 2, 3, 4$) stand for Josephson junction inductance, C_j stands for the capacitance, L_0 stands for the inductance, M_0 denotes the mutual inductance between adjacent inductances.

L_0 组成的环路构成, 并且可通过外部磁通 $\Phi_{\text{ext};j,j+1}$ 进行控制. 借助于量子比特与耦合器之间的互感 M_0 , 比特之间可形成受 $\Phi_{\text{ext};j,j+1}$ 控制的等效耦合. 如果进一步考虑 4 个量子比特分别被经典场 (图中未明确标出) 驱动, 则经过一些列正则量子化与二能级近似操作, 体系的哈密顿量可以表示为

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_{j=1}^4 \frac{\hbar\omega_j}{2} \sigma_j^z \\
 & + \sum_{j=1}^4 \hbar g_{j,j+1}(t) (\sigma_j^+ + \sigma_j^-) (\sigma_{j+1}^+ + \sigma_{j+1}^-) \\
 & + \sum_{j=1}^4 \left[\frac{\hbar\Omega_j}{2} e^{i(\nu_j t + \varphi_j)} \sigma_j^- + \text{H.c.} \right]. \quad (1)
 \end{aligned}$$

为自洽起见, 约定在 (1) 式的下标中, 如果 $j = 4$, 应取 $j + 1 = 1$. 这里选取量子比特 Q_1 与 Q_3 完全相等, 量子比特 Q_2 与 Q_4 完全相等, $\omega_j = (\sqrt{8E_{C;j}E_{J;j}} - E_{C;j})/\hbar$ 代表量子比特 Q_j 从基态 $|g_j\rangle$ 到激发态 $|e_j\rangle$ 的跃迁频率, $\sigma_j^z = |e_j\rangle\langle e_j| - |g_j\rangle\langle g_j|$ 为泡利算符, $\sigma_j^+ = |e_j\rangle\langle g_j|$ ($\sigma_j^- = |g_j\rangle\langle e_j|$) 为量子比特 Q_j 的上升 (下降) 算符, $\Omega_j = C_c|V_{in}| \sqrt{\frac{2\omega_j}{\hbar C_{J;j}}}$, ν_j 与 $\phi_j = -\arg\{V_{in}\} - \pi/2$ 分别代表经典场的驱动强度、频率以及相位. 此外耦合器产生的比特间耦合强度为

$$g_{j,j+1} = \frac{1}{2} \frac{M_0^2 \sqrt{\omega_j \omega_{j+1}}}{\sqrt{L_{J;j} L_{J;j+1} L_{Tj}}} \cos(\Phi_{\text{ext};j,j+1}),$$

其大小受偏置磁通 $\Phi_{\text{ext};j,j+1}$ 控制. 其中 Φ_0 表示磁通量子, $E_{C;j} = e^2/(2C_{J;j})$ 表示约瑟夫森电荷能, e 表示元电荷量, $E_{J;j} = [\Phi_0/(2\pi)]^2/L_{J;j}$ 表示约瑟夫森能, $L_{J;j}$ 表示量子比特线性电感, $C_{J;j}$ 表示量子比特的电容, C_c 表示施加驱动场耦合电容, V_{in} 表示入射电压复振幅, M_0 是相邻电感 L_0 之间的互感, $L_{T;j}$ 表示约瑟夫森结线性电感. 1) 当 $\Phi_{\text{ext};j,j+1}$ 仅含静磁场时, 可以控制耦合的开关 [35,36]. 例如, 当 $g_{j,j+1}(t) \equiv g_{j,j+1} \neq 0$ 时, 比特间耦合打开; 当 $g_{j,j+1}(t) \equiv 0$ 时, 比特间耦合关断. 2) 而当 $\Phi_{\text{ext};j,j+1}$ 包含时变磁场时, 可以产生复数跳跃项 [34] 或双粒子激发 (湮灭) [37]. 后面可知, 前者是合成有效磁通 [38] 的基本原理, 后者可用于单空穴态的制备. 由此可见, 调控经典场以及比特间耦合强度可以来控制哈密顿量 H . 借助于此, 将围绕单粒子本征态, 单空穴本征态, 单粒子态以及单空穴态展开具体研究.

3 单粒子本征态和单空穴本征态

要产生正方格点中的有效磁通, 则需对耦合器施加时变偏置磁通, 使得耦合强度满足形式 $g_{j,j+1}(t) = 2g_0 \cos(\Delta_{j,j+1}t + \varphi_{j,j+1})$ [34]. 当耦合器的调制频率满足两端量子比特的频率差 $\Delta_{j,j+1} = \omega_{j+1} - \omega_j$ 时, 根据旋波近似理论, 可以忽略 $\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^+$ 与 $\sigma_j^- \sigma_{j+1}^-$ 两项. 此外, 进一步调节耦合器调制相位, 使其满足 $\varphi_{j,j+1} = \Phi_s/4$. 此时, 相互作用表象下的系统哈密顿量可以写为

$$H_I = H_{\text{eff}} + \sum_{j=1}^4 \left(\frac{\hbar \Omega_j}{2} e^{-i(\epsilon_j t + \phi_j)} \sigma_j^+ + \text{H.c.} \right).$$

其中, 有效哈密顿量为

$$H_{\text{eff}} = \sum_{j=1}^4 \hbar g_0 \left(\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- e^{i\frac{\Phi_s}{4}} + \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ e^{-i\frac{\Phi_s}{4}} \right), \quad (2)$$

其描述了正方格点量子比特的耦合情况. (2) 式可以映射为弱磁场下带电粒子的哈密顿量 [38], 因此, 将这里的相位 $\Phi_s = \sum_{j=1}^4 \varphi_{j,j+1}$ 称为穿过正方格点的有效磁通. 此外, 在驱动项中, 裸耦合强度为 $g_0 = M_0^2 \sqrt{\omega_j \omega_{j+1}} / (2\sqrt{L_{J;j} L_{J;j+1}} L_{Tj})$, 其中取 $L_{Tj} \equiv L_T$, 并且由于量子比特 Q_1 与 Q_3 完全相等, 量子比特 Q_2 与 Q_4 完全相等, 使得裸耦合强度相等; 驱动场与量子比特的频率差为 $\epsilon_j = \nu_j - \omega_j$.

为考察有效哈密顿量的本征态激发行为, 对量子比特的上升下降算符进行离散傅里叶变换,

$$\sigma_j^+ = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{n=1}^4 e^{-ik_n j} \Sigma_n^+ \quad \text{及} \quad \sigma_j^- = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{n=1}^4 e^{ik_n j} \Sigma_n^-.$$

其中, $k_n = (n-1)2\pi/4$ 称为波矢, $n = 1, 2, 3, 4$, 算符 Σ_n^+ (Σ_n^-) 代表量子比特的集体上升 (下降) 算符. 这时可以得到

$$H_I = \sum_{n=1}^4 \left[\hbar \tilde{\omega}_n \Sigma_n^+ \Sigma_n^- + \left(\frac{\hbar A_n}{2} \Sigma_n^+ + \text{H.c.} \right) \right],$$

其中

$$\tilde{\omega}_n = 2g_0 \cos(k_n + \Phi_s/4),$$

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{j=1}^4 e^{ik_n j} \Omega_j e^{-i(\epsilon_j t + \phi_j)}.$$

利用量子比特的集体上升算符, 单粒子本征态可以表示为 $|k_n\rangle = \Sigma_n^+ |0\rangle$, 这里 $|0\rangle = |0000\rangle$ 表示 (四比特) 基态. 此后约定, 右矢 $|q_1 q_2 q_3 q_4\rangle$ 中, $q_j = 0$ 和 $q_j = 1$ 分别表示比特 Q_j 处于基态 $|g_j\rangle$ 和激发态 $|e_j\rangle$.

基于以上模型, 可以从基态 $|0\rangle$ (可在关断比特间所有耦合及驱动场的条件下自然冷却获取) 出发, 制备单粒子本征态 $|k_n\rangle$. 具体方法为: 调节驱动场并使驱动频率 ν_j 与量子比特 Q_j 的跃迁频率 ω_j 满足共振条件 $\epsilon_j = \tilde{\omega}_n$, 并使驱动强度与相位满足 $\Omega_j e^{-i\phi_j} = \frac{1}{\sqrt{4}} e^{-ik_n j} B_n$, 此时驱动项只剩下 $\frac{\hbar B_n}{2} e^{-i\tilde{\omega}_n t} \Sigma_n^+ + \text{H.c.}$. 那么, 在强驱动条件下, 从初始时刻 t_0 施加一个 π 脉冲 $|B_n|(t_1 - t_0) = \pi$, 体系便可从基态 $|0\rangle$ 一次演化到单粒子本征态 $|k_n\rangle$. 这里, 强驱动条件是指驱动强度远大于量子比特的衰减率.

考察单粒子本征态 $|k_n\rangle$ 在有效磁通 Φ_S 下的手性输运性质. 关闭量子比特的所有驱动场后, 系统演化只受 H_{eff} 约束. 如果定义粒子流算符 $I_{j,j+1}$ 表示单位时间由量子比特 Q_j 流向量子比特 Q_{j+1} 的粒子数, 那么它应满足如下的连续性方程, 即

$$\frac{d(\sigma_j^+ \sigma_j^-)}{dt} = \frac{[\sigma_j^+ \sigma_j^-, H_{\text{eff}}]}{i\hbar} = I_{j-1,j} - I_{j,j+1}. \quad (3)$$

经过简单计算, 可以得到粒子流算符的形式为

$$I_{j,j+1} = ig_0(\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- e^{i\frac{\Phi_S}{4}} - \text{H.c.}). \quad (4)$$

单粒子本征态 $|k_n\rangle$ 下的平均粒子流为 $\langle I_{j,j+1} \rangle_{k_n} = \langle k_n | I_{j,j+1} | k_n \rangle = -\frac{g_0}{4} \sin\left(k_n + \frac{\Phi_S}{4}\right)$. 在图 2 中, 蓝色实线展示了裸耦合强度取 $g_0/(2\pi) = 4$ MHz 时, 平均粒子流在不同单粒子本征态 $|k_n\rangle$ 下随有效磁通 Φ_S 的变化. 可以看到, 平均粒子流与有效磁通 Φ_S 呈正弦函数关系, 波矢 k_n 主要决定正弦函数的初始相位.

如果将处于基态的量子比特看作一个空穴的话, 那么系统同样存在单空穴本征态, 即只有一个量子比特处于基态的本征态. 这时, $|0\rangle_h = |1111\rangle$ 可以看做空穴的真空态, 并且 σ_j^+ (σ_j^-) 可以看做空穴的湮灭 (产生) 算符 $\sigma_{h,j}^+$ ($\sigma_{h,j}^-$). 那么, 相互作用表象下的系统哈密顿量可以写为

$$H_1^h = H_{\text{eff}}^h + \sum_{j=1}^4 \left(\frac{\hbar\Omega_j}{2} e^{i(\epsilon_j t + \phi_j)} \sigma_{h,j}^+ + \text{H.c.} \right).$$

$$H_{\text{eff}}^h = \sum_{j=1}^4 \hbar g_0 \left(\sigma_{h,j}^+ \sigma_{h,j+1}^- e^{-i\frac{\Phi_S}{4}} + \sigma_{h,j}^- \sigma_{h,j+1}^+ e^{i\frac{\Phi_S}{4}} \right), \quad (5)$$

用来描述 $-\Phi_S$ 磁通下空穴的有效哈密顿量. 经过变换

$$\sigma_{h,j}^- = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{n=1}^4 e^{-ik_n j} \Sigma_{h,n}^-, \quad \sigma_{h,j}^+ = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{n=1}^4 e^{ik_n j} \Sigma_{h,n}^+$$

$$\text{之后, } H_1^h = \sum_{n=1}^4 \left[\hbar\tilde{\omega}_n \Sigma_{h,n}^+ \Sigma_{h,n}^- + \left(\frac{\hbar A_n}{2} \Sigma_{h,n}^- + \text{H.c.} \right) \right].$$

属于本征值 $\hbar\tilde{\omega}_n$ 的单空穴本征态为 $|k_n\rangle_h = \Sigma_h^+ |0\rangle_h$. 要制备单空穴本征态主要分为两步. 首先, 以真空态 $|0000\rangle$ 为初态, 在关闭比特耦合的情况下, 顺次对 4 个比特 $Q_1 - Q_4$ 施加 π 脉冲, 制备到空穴真空态 $|0\rangle_h$. 然后, 打开耦合器形成有效磁通, 同时调节驱动场并使驱动频率 ν_j 与量子比特 Q_j 的跃迁频率 ω_j 满足共振条件 $\epsilon_j = -\tilde{\omega}_n$, 并使驱动强度与相位满足 $\Omega_j e^{-i\phi_j} = e^{-ik_n j} B_n / \sqrt{4}$, 此时驱动项只剩下 $\frac{\hbar B_n}{2} e^{i\tilde{\omega}_n t} \Sigma_{h,n}^- + \text{H.c.}$. 那么, 在强驱动条件下, 从初始时刻 t_0 施加一个 π 脉冲 $|B_n|(t_1 - t_0) = \pi$, 体系便可从空穴真空态 $|0\rangle_h$ 一次演化到单空穴本征态 $|k_n\rangle_h$. 值得指出的是, 空穴真空态 $|0\rangle_h$ 的制备也可以通过调制耦合器达到. 首先, 打开 $Q_1 - Q_2$ 耦合, 改变耦合器偏置磁通使耦合强度满足形式 $g_{1,2}(t) = 2g_0 \cos(\Delta_{1,2}t + \varphi_{1,2})$, 其中, $\Delta_{1,2} = \omega_1 + \omega_2$. 根据旋波近似理论, 仅保留 $\sigma_1^+ \sigma_2^+$ 与 $\sigma_1^- \sigma_2^-$ 两项. 这时, 仅需一个脉冲 $g_0 t = \frac{\pi}{2}$, 体系便可从基态 $|0\rangle$ 到达量子态 $|1100\rangle$. 接着同样只打开 $Q_3 - Q_4$ 耦合, 使耦合强度 $g_{3,4}(t) = 2g_0 \cos(\Delta_{3,4}t + \varphi_{3,4})$, $\Delta_{3,4} = \omega_3 + \omega_4$. 这时仅保留 $\sigma_3^+ \sigma_4^+$ 与 $\sigma_3^- \sigma_4^-$ 两项. 类似地, 只需一个脉冲 $g_0 t = \frac{\pi}{2}$, 便可获取空穴真空态 $|0\rangle_h$.

类似地, 通过考察空穴的连续性方程, 同样可以求得空穴流算符为

$$I_{j,j+1}^h = ig_0(\sigma_{h,j}^+ \sigma_{h,j+1}^- e^{-i\frac{\Phi_S}{4}} - \text{H.c.}). \quad (6)$$

那么, 在本征态 $|k_n\rangle_h$ 下空穴流的平均值为

$$\begin{aligned} \langle I_{j,j+1} \rangle_{h,k_n} &= \langle k_n | I_{j,j+1}^h | k_n \rangle_h \\ &= \frac{g_0}{4} \sin\left(k_n + \frac{\Phi_S}{4}\right) = -\langle I_{j,j+1} \rangle_{k_n}. \end{aligned}$$

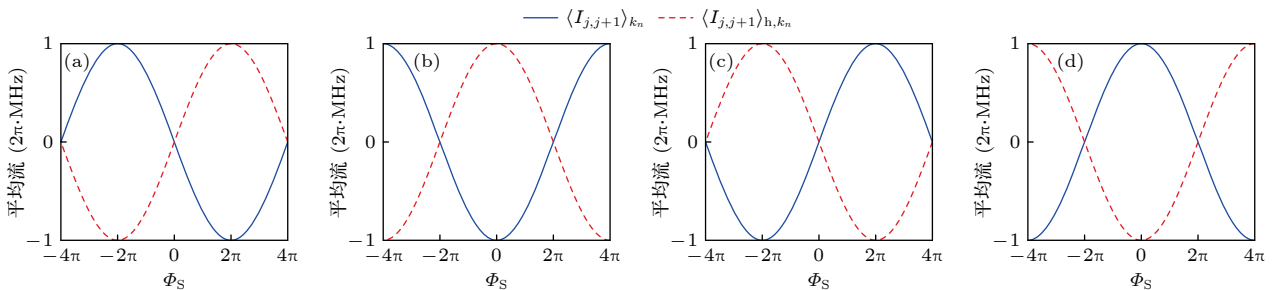


图 2 当 n 分别取 (a) 1, (b) 2, (c) 3, (d) 4 时, 单粒子 (空穴) 本征态 $|k_n\rangle$ ($|k_n\rangle_h$) 下的平均粒子 (空穴) 流 $\langle I_{j,j+1} \rangle_{k_n}$ ($\langle I_{j,j+1} \rangle_{h,k_n}$) 随有效磁通 Φ_S 的变化曲线. 取裸耦合强度 $g_0/(2\pi) = 4$ MHz. 此外, 蓝色实线 (红色虚线) 代表平均粒子 (空穴) 流

Fig. 2. Average particle (hole) current $\langle I_{j,j+1} \rangle_{k_n}$ ($\langle I_{j,j+1} \rangle_{h,k_n}$) in the single-particle (hole) eigenstate $|k_n\rangle$ ($|k_n\rangle_h$) against the effective magnetic flux Φ_S for n taking (a) 1, (b) 2, (c) 3, and (d) 4, respectively. We have taken the coupling strength $g_0/(2\pi) = 4$ MHz. Additionally, the solid blue (dashed red) curves represent the particle (hole) current.

可见, 在属于相同本征值的单粒子本征态与单空穴本征态下, 平均粒子流与平均空穴流方向相反, 如图 2 中红色虚线所示. 这种相反的空穴与粒子流, 可以从时间反演的角度来进行深度解释. 暂不考虑粒子态和空穴态带来的物理上的区别, 仅在数学上将所有的算符 (量子态) 都看成对应的矩阵 (向量), 亦即将粒子态基矢 $|q_1q_2q_3q_4\rangle$ 与空穴态基矢 $|q_1q_2q_3q_4\rangle_h$ 进行一一映射. 在后者中, $q_j = 0$ 与 $q_j = 1$ 分别表示量子比特 Q_j 处于激发态和基态. 这时, 对体系有效哈密顿量的粒子-空穴操作之后, 空穴的有效哈密顿量 H_{eff}^h 与粒子的有效哈密顿量 H_{eff} 互为时间反演, 即 $H_{\text{eff}}^h = TH_{\text{eff}}T^{-1}$. 其中 T 为时间反演算符, 此处单指取复共轭. 因此, 属于相同本征值 $2\hbar g_0 \cos\left(k_n + \frac{\Phi_S}{4}\right)$ 的单空穴本征态与单粒子本征态必互为时间反演, 即 $|k_n\rangle_h = T|k_n\rangle T^{-1}$, 这可由本征态具体表达式轻易验证. 另一方面, 发现粒子流与空穴流算符满足关系 $I_{j,j+1}^h = -TI_{j,j+1}T^{-1}$. 因此, 对于平均粒子流, 可得

$$\begin{aligned} \langle I_{j,j+1} \rangle_{h,k_n} &= \langle k_n | I_{j,j+1}^h | k_n \rangle_h \\ &= \langle T | k_n | T^{-1} \rangle (-TI_{j,j+1}T^{-1}) \langle T | k_n \rangle T^{-1} \\ &= -T \langle k_n | I_{j,j+1} | k_n \rangle T^{-1} = -\langle I_{j,j+1} \rangle_{k_n}, \end{aligned}$$

该式最后利用了平均粒子流是实数的性质. 这就从时间反演的角度解释了为什么在属于相同本征值的单粒子与单空穴本征态下, 平均粒子流与平均空穴流互为相反数. 特别地, 当有效磁通 Φ_S 为零时, 有效哈密顿量满足时间反演对称, 此时, 有效哈密顿量 $H_{\text{eff}} = H_{h,\text{eff}}$, 且均在本征值 $\hbar\tilde{\omega}_n$ 处有两个简并的本征态 $|k_n\rangle$ 与 $|k_n\rangle_h$.

4 单粒子态

单粒子态指只有一个量子比特被激发的态, 可表示为 $|j\rangle = \sigma_j^+ |0\rangle$, 其中 j 取值 1—4. 以单粒子态 $|1\rangle$ 为例, 其制备可以由基态 $|0\rangle$ 一步获取. 这只需在关断比特间所有耦合的情况下, 只对量子比特 Q_1 施加共振驱动场, 即 $\nu_1 = \omega_1$. 以 t_0 为初始时刻, 经历一个 π 脉冲 $\Omega_1(t_1 - t_0) = \pi$, 那么体系便可从初态 $|0\rangle$ 演化到单粒子态 $|1\rangle$.

现在, 考察单粒子态 $|1\rangle$ 在有效磁通下的手性输运性质. 通过关闭量子比特所有驱动场, 并打开所有耦合器, 对体系合成 (2) 式中的有效哈密顿量

H_{eff} . 由于 $|1\rangle$ 不是有效哈密顿的本征态, 因此会进行时间演化. 经过时间 t 后的波函数可记为 $|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_{\text{eff}}t\right)|1\rangle$. 将初态展开为单粒子本征态 (见第 3 节) 的线性叠加, 即可获得波函数的具体形式:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_{j=1}^4 \psi_j(t) |j\rangle = \frac{1}{2} [\cos(\tilde{\omega}_0 t) + \cos(\tilde{\omega}_3 t)] |1\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} [-i \sin(\tilde{\omega}_0 t) - \sin(\tilde{\omega}_3 t)] |2\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} [\cos(\tilde{\omega}_0 t) - \cos(\tilde{\omega}_3 t)] |3\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} [-i \sin(\tilde{\omega}_0 t) + \sin(\tilde{\omega}_3 t)] |4\rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

如前所述, $\tilde{\omega}_0 = 2g_0 \cos\frac{\Phi_S}{4}$ 和 $\tilde{\omega}_3 = 2g_0 \sin\frac{\Phi_S}{4}$ 是有效哈密顿量 H_{eff} 的两个本征频率. 进一步算得任意时刻的平均粒子流 $\langle I_{j,j+1}(t) \rangle_1 = \langle \psi_1(t) | I_{j,j+1} | \psi_1(t) \rangle$, 可得

$$\begin{aligned} \langle I_{12} \rangle_1 &= -\langle I_{41} \rangle_1 \\ &= \frac{g_0}{2} [\cos(\tilde{\omega}_0 t) + \cos(\tilde{\omega}_3 t)] \\ &\quad \times \left[\cos\frac{\Phi_S}{4} \sin(\tilde{\omega}_0 t) + \sin\frac{\Phi_S}{4} \sin(\tilde{\omega}_3 t) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \langle I_{23} \rangle_1 &= -\langle I_{34} \rangle_1 \\ &= -\frac{g_0}{2} [\cos(\tilde{\omega}_0 t) - \cos(\tilde{\omega}_3 t)] \\ &\quad \times \left[\cos\frac{\Phi_S}{4} \sin(\tilde{\omega}_0 t) - \sin\frac{\Phi_S}{4} \sin(\tilde{\omega}_3 t) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

观察平均粒子流表达式, 容易发现, 在 $\Phi_S = \pi + 2n\pi$ (n 为整数) 时比特 Q_3 无粒子流入, 即 $\langle I_{23} \rangle_1 = \langle I_{43} \rangle_1 \equiv 0$. 图 3(a)—(g) (图 3(i)—(p)) 给出了 $\Phi_S = \pi$ ($\Phi_S = 0$) 时, $Q_j - Q_{j+1}$ 间平均粒子流 $\langle I_{j,j+1} \rangle_1$ 和量子态 $|j\rangle$ 占据概率 $P_j = |\psi_j(t)|^2$ 的演化曲线. 这里, 蓝色虚线 (红色实线) 排除 (包含) 了环境的影响. 其中, 环境的影响可以用下面的主方程来描述:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \frac{[H_{\text{eff}}, \rho]}{i\hbar} + \sum_{j=1}^4 \mathcal{L}_j[\rho], \quad (10)$$

其中, $\rho(t)$ 为四比特体系的密度算符.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_j[\rho] &= -\gamma_j \langle e_j | \rho | e_j \rangle |e_j\rangle \langle e_j| \\ &\quad + \gamma_j \langle e_j | \rho | e_j \rangle |g_j\rangle \langle g_j| - \frac{\Gamma_j}{2} \langle e_j | \rho | g_j \rangle |e_j\rangle \\ &\quad \times \langle g_j| - \frac{\Gamma_j}{2} \langle g_j | \rho | e_j \rangle |g_j\rangle \langle e_j|, \end{aligned}$$

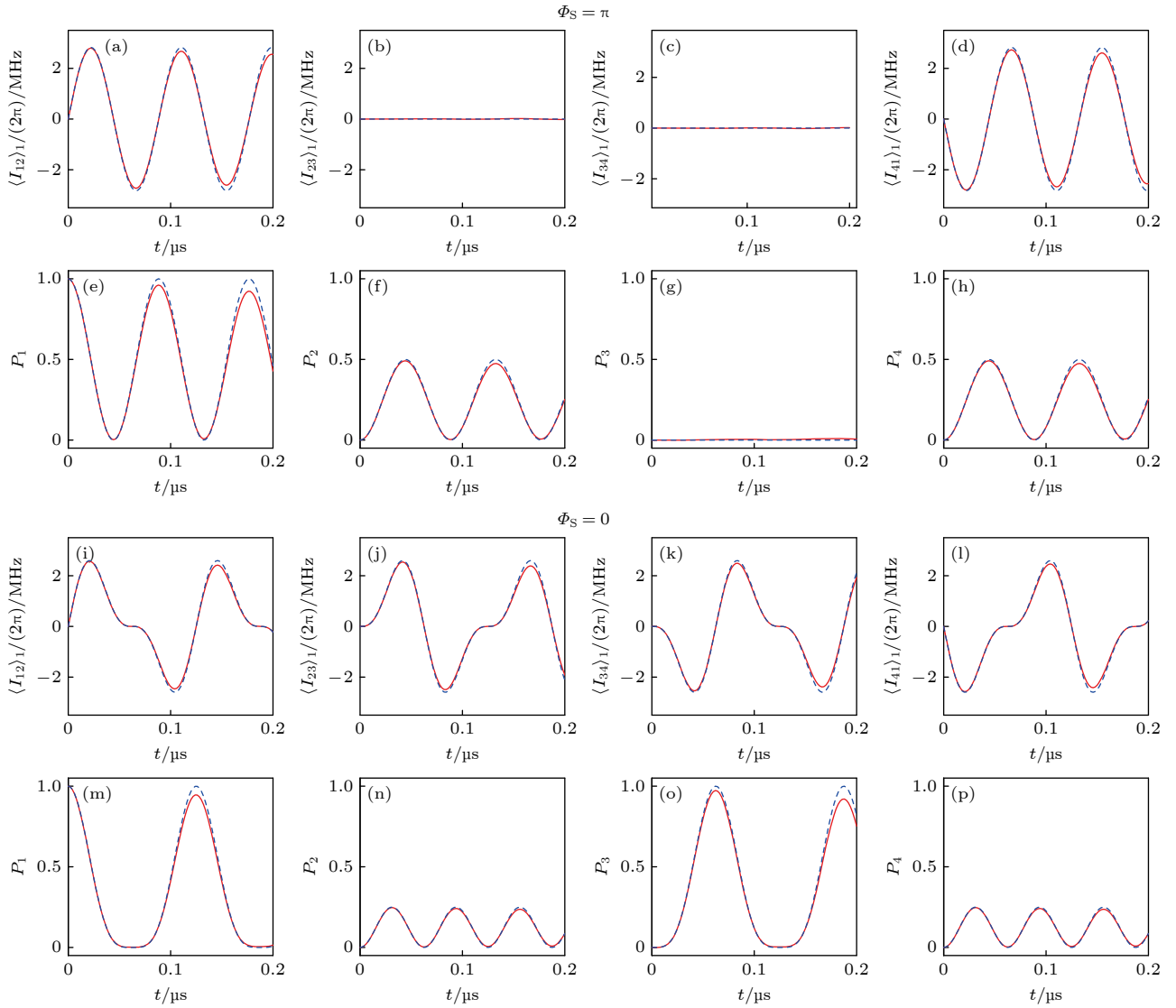


图3 当有效磁通取 $\Phi_S = \pi$ ($\Phi_S = 0$) 时, 单粒子态 $|1\rangle$ 演化时间 t 后 (a)–(d) [(i)–(l)] 比特 $Q_j - Q_{j+1}$ 之间的平均粒子流 $\langle I_{j,j+1} \rangle_1$ 与 (e)–(h) [(m)–(p)] 量子态 $|j\rangle$ 上的占据概率 P_j 的变化曲线. 其中, 蓝色虚线 (红色实线) 指排除 (包含) 环境影响, 此外, 取裸耦合强度 $g_0/(2\pi) = 4$ MHz, Q_j 弛豫速率 $\gamma_j/(2\pi) \equiv 0.05$ MHz, Q_j 退相速率 $\Gamma_j/(2\pi) \equiv 0.1$ MHz

Fig. 3. Variation curves of both the (a)–(d) [(i)–(l)] average $Q_j - Q_{j+1}$ particle current $\langle I_{j,j+1} \rangle_1$ and (e)–(h) [(m)–(p)] occupation probability P_j on the quantum state $|j\rangle$ for the effective magnetic flux taking $\Phi_S = \pi$ ($\Phi_S = 0$) after the time t for which the single-particle state $|1\rangle$ evolves. Here, the dashed blue (solid red) curves represent the environment influence is excluded (included). Additionally, we specify the bare coupling strength $g_0/(2\pi) = 4$ MHz, Q_j relaxation rate $\gamma_j/(2\pi) \equiv 0.05$ MHz, and Q_j dephasing rate $\Gamma_j/(2\pi) \equiv 0.1$ MHz.

这里, $\mathcal{L}_j[\rho]$ 表示量子比特 Q_j 的林德布拉德耗散项, $\gamma_j(\Gamma_j)$ 是量子比特 Q_j 的弛豫速率 (退相速率). 取耦合器裸耦合强度 $g_0/(2\pi) = 4$ MHz, 弛豫速率 $\gamma_j/(2\pi) \equiv 0.05$ MHz, 退相速率 $\Gamma_j/(2\pi) \equiv 0.1$ MHz. 结合上述的平均粒子流公式, 在图中可以很容易地看出粒子流 $\langle I_{12} \rangle_1$ 与 $\langle I_{41} \rangle_1$, $\langle I_{23} \rangle_1$ 与 $\langle I_{34} \rangle_1$ 在数值上互为相反数, 并且当有效磁通 Φ_S 为 0 和 π 时, 平均粒子流和量子态演化存在着不同的情况. 当 $\Phi_S = \pi$ 时, 发现单粒子由 Q_1 同时向着 Q_2 和 Q_4 演化, 同时 Q_3 上的占据概率 P_3 始终为零. 观察平均粒子流也

可以看出, 只有量子比特 $Q_1 - Q_2$ 和 $Q_1 - Q_4$ 之间出现非零的平均粒子流. 更直接地, 这是因为当 $\Phi_S = \pi$ 时, $\tilde{\omega}_0 = \tilde{\omega}_3 = \sqrt{2}g_0$, 进而由波函数公式 (见 (7) 式) 容易验证 [3] 上的概率振幅 $\psi_3(t) \equiv 0$. 另外, 非零的占据概率和平均粒子流均以频率 $2\tilde{\omega}_0$ 正弦振荡, 对应周期约为 $0.088 \mu\text{s}$, 这也可以在图中明显发现. 当 $\Phi_S = 0$ 时, 发现单粒子由 Q_1 同时沿着 Q_2 和 Q_4 向 Q_3 输运, 并且相邻两个量子比特之间均存在粒子流. 当 Φ_S 取 0 时, $\tilde{\omega}_0 = 2g_0$ 以及 $\tilde{\omega}_3 = 0$. 此时, 可以验证平均粒子流以 $\tilde{\omega}_0, 2\tilde{\omega}_0$ 两种频率正

弦振荡, 对应周期分别为 0.125 μs 和 0.0625 μs , 这就是图中平均粒子流不是单纯正弦函数的原因. 类似的振荡情况也适用于占据概率 P_1 和 P_3 . 而 P_2 , P_4 则只以频率 $2\tilde{\omega}_0$ 做正弦振荡. 两种有效磁通下, 环境影响均可忽略不计, 这是由于在所取典型参数下, 系统处于强耦合区.

5 单空穴态

不同于单粒子态只有一个比特处于激发态, 单空穴态中只有一个量子比特处于基态, 其余的量子比特都处于激发态, 即 $|j\rangle_{\text{h}} = \sigma_j^- |0\rangle_{\text{h}}$. 假设初态为基态 $|0\rangle$, 以 $|1\rangle_{\text{h}}$ 为例, 其制备可通过在关断比特间所有耦合时, 顺次对 Q_2 , Q_3 , Q_4 施加 π 脉冲来实现. 另一种制备方法可以利用耦合器的可调耦合. 仅打开 Q_2 — Q_3 间耦合, 改变耦合器偏置磁通, 使得耦合强度满足 $g_{2,3}(t) = 2g_0 \cos(\Delta_{2,3}t + \varphi_{2,3})$ ^[34], 其中, $\Delta_{2,3} = \omega_2 + \omega_3$. 根据旋波近似理论, 仅保留 $\sigma_2^+ \sigma_3^+$ 与 $\sigma_2^- \sigma_3^-$ 两项. 这时, 仅需一个脉冲 $g_0 t = \pi/2$, 即可制备到 $|0110\rangle$. 然后, 仅需对 Q_4 施加一个 π 脉冲, 即可制得单空穴态 $|1\rangle_{\text{h}} = |0111\rangle$.

对比单粒子态 $|1\rangle$, 继续考察单空穴态 $|1\rangle_{\text{h}}$ 在有效磁通下的手性输运性质, 此时继续对系统合成有效哈密顿量 H_{eff} ((2) 式). 通过将单空穴态展开为单空穴本征态 (第 3 节) 的线性叠加, 可以计算任意时刻的波函数为 $|\psi^{\text{h}}(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_{\text{eff}} t\right) |1\rangle_{\text{h}}$, 结果为

$$\begin{aligned} |\psi^{\text{h}}(t)\rangle &= \sum_{j=1}^4 \psi_j^{\text{h}}(t) |j\rangle_{\text{h}} = \frac{1}{2} [\cos(\tilde{\omega}_0 t) + \cos(\tilde{\omega}_3 t)] |1\rangle_{\text{h}} \\ &+ \frac{1}{2} [-i \sin(\tilde{\omega}_0 t) + \sin(\tilde{\omega}_3 t)] |2\rangle_{\text{h}} \\ &+ \frac{1}{2} [\cos(\tilde{\omega}_0 t) - \cos(\tilde{\omega}_3 t)] |3\rangle_{\text{h}} \\ &+ \frac{1}{2} [-i \sin(\tilde{\omega}_0 t) - \sin(\tilde{\omega}_3 t)] |4\rangle_{\text{h}}. \end{aligned} \quad (11)$$

利用此结果以及空穴流的表达式 ((6) 式), 可以进一步计算任意时刻的平均空穴流 $\langle I_{j,j+1}(t) \rangle_{\text{h},1} = \langle \psi^{\text{h}}(t) | I_{j,j+1}^{\text{h}} | \psi^{\text{h}}(t) \rangle$, 可得

$$\begin{aligned} \langle I_{12} \rangle_{\text{h},1} &= -\langle I_{41} \rangle_{\text{h},1} \\ &= \frac{g_0}{2} [\cos(\tilde{\omega}_0 t) + \cos(\tilde{\omega}_3 t)] \\ &\times \left[\cos \frac{\Phi_{\text{S}}}{4} \sin(\tilde{\omega}_0 t) + \sin \frac{\Phi_{\text{S}}}{4} \sin(\tilde{\omega}_3 t) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \langle I_{23} \rangle_{\text{h},1} &= -\langle I_{34} \rangle_{\text{h},1} \\ &= -\frac{g_0}{2} [\cos(\tilde{\omega}_0 t) - \cos(\tilde{\omega}_3 t)] \\ &\times \left[\cos \frac{\Phi_{\text{S}}}{4} \sin(\tilde{\omega}_0 t) - \sin \frac{\Phi_{\text{S}}}{4} \sin(\tilde{\omega}_3 t) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

对比单粒子态波函数 (7) 式与单空穴态波函数 (11) 式, 容易发现波函数在各个基矢上的占据概率满足关系 $P_j^{\text{h}} = P_j$, 其中, $P_j^{\text{h}} = |\psi_j^{\text{h}}(t)|^2$. 此外, 对于平均粒子流 (8) 式和 (9) 式与平均空穴流 (12) 式和 (13) 式, 可得 $\langle I_{j,j+1} \rangle_{\text{h},1} = \langle I_{j,j+1} \rangle_1$. 采取与图 3 相同的参数, $g_0/(2\pi) = 4$ MHz, $\gamma_j/(2\pi) = 0.05$ MHz, $\Gamma_j/(2\pi) = 0.1$ MHz, 图 4 给出了 P_j^{h} 以及 $\langle I_{j,j+1} \rangle_{\text{h},1}$ 的演化曲线. 可见, 无论是单粒子态或单空穴态, 对应格点处的占据概率, 以及平均 (粒子或空穴) 流具有相同的含时演化曲线, 因此, 其具体细节的描述可参考第 4 节. 但这并不意味着单粒子态和单空穴态具有完全等价的演化行为, 这是因为波函数不一定完全等价, 例如通过仔细观察可发现, 虽然 $\psi_1^{\text{h}} \equiv \psi_1$, $\psi_3^{\text{h}} \equiv \psi_3$, 但是, 当且仅当 $\Phi_{\text{S}} = 4n\pi$ (n 为整数) 时, $\psi_2^{\text{h}} \equiv \psi_2$, $\psi_4^{\text{h}} \equiv \psi_4$, 否则, $\psi_2^{\text{h}} \neq \psi_2$, $\psi_4^{\text{h}} \neq \psi_4$. 可以验证, 条件 $\Phi_{\text{S}} = 4n\pi$ (n 为整数) 意味着哈密顿量满足空间对称 $H_{\text{eff}}|_{Q_2 \leftrightarrow Q_4} = H_{\text{eff}}$ 以及时间反演对称 $TH_{\text{eff}}T^{-1} = H_{\text{eff}}$.

下文从空间对称性分析单粒子态与单空穴态具有相同格点占据概率以及平均 (粒子或空穴) 流的原因. 由于单粒子的上升 (下降) 算符等价于空穴的下降 (上升) 算符, 据前所述, 将空穴基矢 $|q_1 q_2 q_3 q_4\rangle_{\text{h}}$ 与粒子基矢 $|q_1 q_2 q_3 q_4\rangle$ 进行一一映射, 且不考虑它们的区别. 这样, 有效磁通 Φ_{S} 下单空穴态 $|1\rangle_{\text{h}}$ 的运动可以等价于有效磁通 $-\Phi_{\text{S}}$ 下单粒子态 $|1\rangle$ 的运动, 即

$$|\psi^{\text{h}}(t)\rangle_{\Phi_{\text{S}}} = |\psi(t)\rangle_{-\Phi_{\text{S}}}, \quad (14)$$

$$H_{\text{eff}}^{\text{h}}|_{\Phi_{\text{S}}} = H_{\text{eff}}|_{-\Phi_{\text{S}}}, \quad (15)$$

$$I_{j,j+1}^{\text{h}}|_{\Phi_{\text{S}}} = I_{j,j+1}|_{-\Phi_{\text{S}}}. \quad (16)$$

对于有效磁通 Φ_{S} 下单粒子态 $|1\rangle$ 的运动行为, 其含时波函数可以记为 $|\psi(t)\rangle_{\Phi_{\text{S}}} = \sum_{j=1}^4 \psi_j(t) |j\rangle$. 现在, 将此体系沿 Q_1 — Q_3 连线旋转角度 π , 在原始坐标系下观测, 即可得到有效磁通 $-\Phi_{\text{S}}$ 下的单粒子态的运动. 旋转之后的波函数 (算符) 也可以通过将旋转之前的波函数 (算符) 表达式中关于 Q_2 和 Q_4 的量相互交换得到. 可以验证, 有效磁通 $\pm\Phi_{\text{S}}$ 下的有

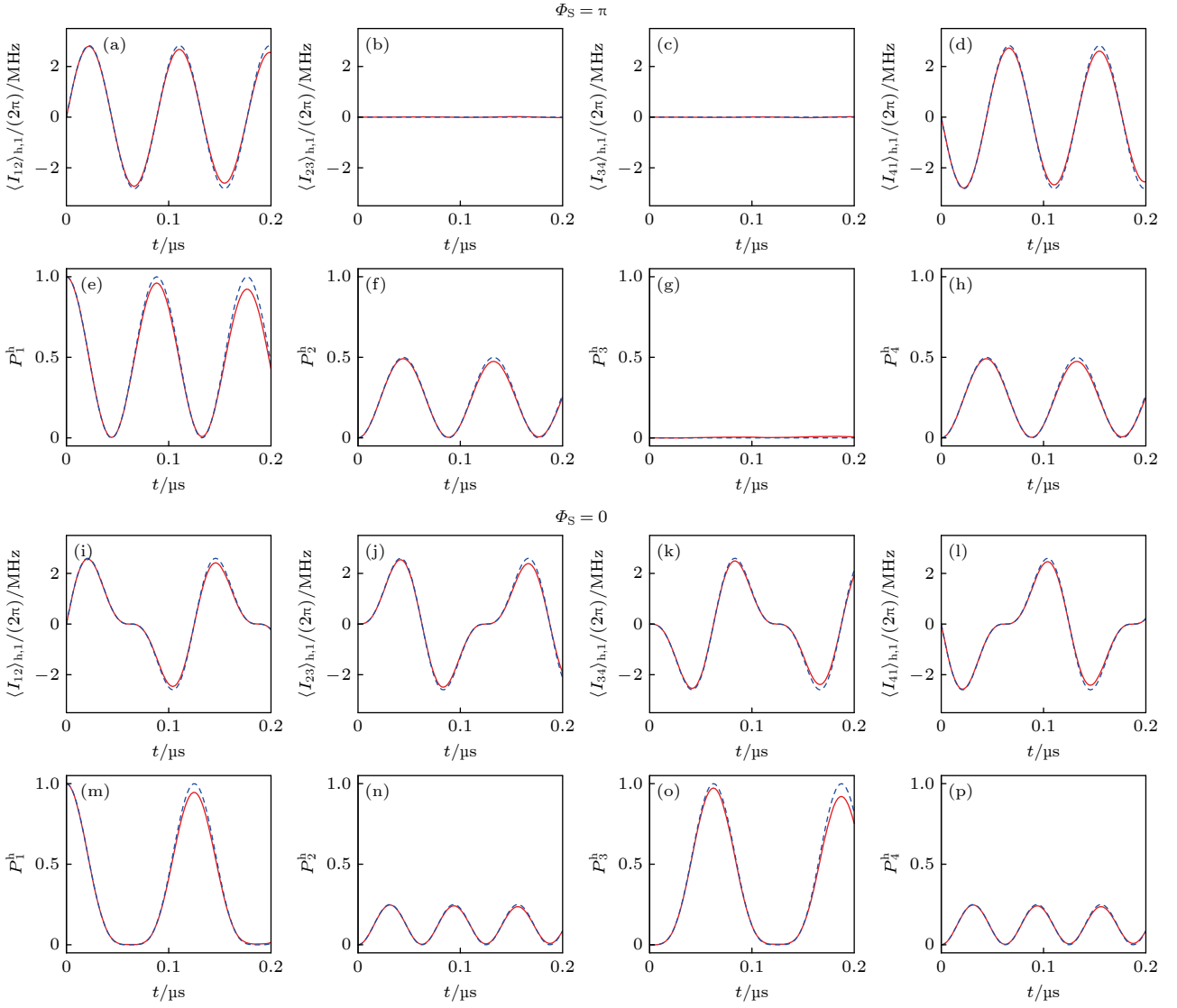


图 4 当有效磁通取 $\Phi_S = \pi$ ($\Phi_S = 0$) 时, 单空穴态 $|1\rangle_h$ 演化时间 t 后 (a)–(d) [(i)–(l)] 比特 $Q_j - Q_{j+1}$ 之间的平均空穴流 $\langle I_{j,j+1} \rangle_{h,1}$ 与 (e)–(h) [(m)–(p)] 量子态 $|j\rangle_h$ 上的占据概率 P_j^h 的变化曲线. 这里, 蓝色虚线 (红色实线) 指排除 (包含) 环境影响, 此外, 取裸耦合强度 $g_0/(2\pi) = 4$ MHz, Q_j 弛豫速率 $\gamma_j/(2\pi) \equiv 0.05$ MHz, Q_j 退相速率 $\Gamma_j/(2\pi) \equiv 0.1$ MHz

Fig. 4. Variation curves of both the (a)–(d) [(i)–(l)] average $Q_j - Q_{j+1}$ hole current $\langle I_{j,j+1} \rangle_{h,1}$ and (e)–(h) [(m)–(p)] occupation probability P_j^h on the quantum state $|j\rangle_h$ for the effective magnetic flux taking $\Phi_S = \pi$ ($\Phi_S = 0$) after the time t for which the single-hole state $|1\rangle_h$ evolves. Here, the dashed blue (solid red) curves represent the environment influence is excluded (included). Additionally, we specify the bare coupling strength $g_0/(2\pi) = 4$ MHz, Q_j relaxation rate $\gamma_j/(2\pi) \equiv 0.05$ MHz, and Q_j dephasing rate $\Gamma_j/(2\pi) \equiv 0.1$ MHz.

效哈密顿量, 粒子流算符, 以及含时波函数分别满足:

$$|\psi(t)\rangle_{-\Phi_S} = |\psi(t)\rangle_{\Phi_S, Q_2 \leftrightarrow Q_4}, \quad (17)$$

$$H_{\text{eff}}|_{-\Phi_S} = H_{\text{eff}}|_{\Phi_S, Q_2 \leftrightarrow Q_4}, \quad (18)$$

$$I_{j,j+1}|_{-\Phi_S} = I_{j,j+1}|_{\Phi_S, Q_2 \leftrightarrow Q_4}. \quad (19)$$

通过对比 (14)–(16) 式与 (17)–(19) 式, 可以建立 Φ_S 下单空穴态与单粒子的联系, 这时将去掉下标 Φ_S . 1) 对于波函数, $|\psi^h(t)\rangle = \psi_1(t)|1\rangle_h +$

$\psi_2(t)|2\rangle_h + \psi_3(t)|3\rangle_h + \psi_4(t)|4\rangle_h$. 如果 $\Phi_S = 4n\pi$, 则 $\psi_2(t) \equiv \psi_4(t)$, $|\psi^h(t)\rangle \equiv |\psi(t)\rangle$; 否则, 由于 $\psi_2(t) \neq \psi_4(t)$, $|\psi^h(t)\rangle \neq |\psi(t)\rangle$. 前者导致了空间对称性 $H_{\text{eff}}|_{Q_2 \leftrightarrow Q_4} = H_{\text{eff}}$, 这更意味着 $H_{\text{eff}}^h = H_{\text{eff}}$. 又因为初始时刻波函数 $|\psi^h(0)\rangle = |0\rangle_h$ 与 $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$ 可认为相等, 因此, 单空穴与单粒子经历相等哈密顿量演化后的波函数一定一致. 2) 对于平均 (粒子或空穴) 流, 有 $\langle I_{j,j+1} \rangle_{h,1} = \langle I_{j,j+1} \rangle_1|_{Q_2 \leftrightarrow Q_4}$ (如 $\langle I_{12} \rangle_{h,1} = \langle I_{14} \rangle_1$), 又由于 $\langle I_{j,j+1} \rangle_1|_{Q_2 \leftrightarrow Q_4} = \langle I_{j,j+1} \rangle_1$ (如 $\langle I_{14} \rangle_1 =$

$\langle I_{12} \rangle_1$), 可得 $\langle I_{j,j+1} \rangle_{h,1} = \langle I_{j,j+1} \rangle_1$. 3) 对于占据概率, $P_j^h = P_j |_{Q_2 \leftrightarrow Q_4}$. 由于 $P_j |_{Q_2 \leftrightarrow Q_4} = P_j$ (如 $P_2 = P_4$), 因此, 可得 $P_j^h = P_j$. 这就从空间对称性分析了单粒子态和单空穴态含时波函数与平均 (粒子或空穴) 流占据概率方面的异同.

从时间反演对称性这个角度来分析单粒子态与单空穴态具有相似演化行为的原因. 这里把空穴基矢 $|q_1 q_2 q_3 q_4\rangle_h$ 与粒子基矢 $|q_1 q_2 q_3 q_4\rangle$ 进行一一映射, 且不考虑它们的区别. 进一步对体系有效哈密顿量的粒子-空穴操作, 使得有效磁通 Φ_S 下的单空穴哈密顿量等价于对有效磁通 Φ_S 下的单粒子哈密顿量做时间反演. 这样, 单空穴态所对应的含时波函数 $|\psi^h(t)\rangle$ 等价于将单粒子态对应的含时波函数 $|\psi(t)\rangle$ 的各个系数 $\psi_j(t)$ 中的 t 替换为 $-t$ 并取共轭, 即

$$|\psi^h(t)\rangle = |\psi^*(-t)\rangle, \quad (20)$$

$$H_{\text{eff}}^h = T H_{\text{eff}} T^{-1}, \quad (21)$$

$$I_{j,j+1}^h = -T I_{j,j+1} T^{-1}. \quad (22)$$

其中 T 为时间反演算符, 对于有效磁通 Φ_S 下单粒子态 $|1\rangle$ 的运动行为, 其含时波函数可以记为 $|\psi(t)\rangle_{\Phi_S} = \sum_{j=1}^4 \psi_j(t) |j\rangle$.

通过对比 (20)–(22) 式, (7)–(9) 式和 (11)–(13) 式. 1) 对于波函数, $|\psi^h(t)\rangle = \psi_1^*(-t) |1\rangle_h + \psi_2^*(-t) |2\rangle_h + \psi_3^*(-t) |3\rangle_h + \psi_4^*(-t) |4\rangle_h$, 其中 $\psi_1^*(-t) \equiv \psi_1(t)$, $\psi_3^*(-t) \equiv \psi_3(t)$, 如果 $\Phi_S = 4n\pi$, $\psi_2^*(-t) \equiv \psi_2(t)$, $\psi_4^*(-t) \equiv \psi_4(t)$, $|\psi^h(t)\rangle \equiv |\psi(t)\rangle$; 否则, 由于 $\psi_2^*(-t) \neq \psi_2(t)$, $\psi_4^*(-t) \neq \psi_4(t)$, 使得 $|\psi^h(t)\rangle \neq |\psi(t)\rangle$. 可以看出前者满足时间反演对称性 $H_{\text{eff}}^h = T H_{\text{eff}} T^{-1} = H_{\text{eff}}$, 即单空穴与单粒子的哈密顿量等价. 又因为初始时刻波函数 $|\psi^h(0)\rangle = |0\rangle_h$ 与 $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$ 可认为相等, 因此, 单空穴与单粒子经历相等哈密顿量演化后的波函数一定一致. 这里定义相近度 $|\langle \psi^h(t) | \psi(t) \rangle|$ 表示单空穴态含时波函数 $|\psi^h(t)\rangle$ 与单粒子态含时波函数 $|\psi(t)\rangle$ 之间的区别, 并给出相近度表达式 $|\langle \psi^h(t) | \psi(t) \rangle| = 1 + \frac{1}{2} \cos(2\tilde{\omega}_3 t)$. 当有效磁通 Φ_S 满足条件 $\Phi_S = 4n\pi$ 时, 相近度 $|\langle \psi^h(t) | \psi(t) \rangle|$ 始终为 1, 如图 5 中红色实线所示, 可以认为单粒子态与单空穴态的含时波函数相等, 不存在区别. 当不满足条件时则发生了时间反演破缺, 此时单空穴与单粒子的哈密顿量不等价, 虽然初始波函数相同, 但是单空穴态含时波函数 $|\psi^h(t)\rangle$

与单粒子态含时波函数 $|\psi(t)\rangle$ 会随时间产生区别, 如图 5 中蓝色点段线和绿色虚线所示, 由相近度表达式得知变化的频率为 $2\tilde{\omega}_3$, 其中 $\tilde{\omega}_3 = 2g_0 \sin \frac{\Phi_S}{4}$, 当有效磁通 $\Phi_S = \pi/4$ 时, 与之对应的周期近似为 $0.32 \mu\text{s}$, 而当有效磁通 $\Phi_S = \pi/2$ 时, 与之对应的周期近似为 $0.163 \mu\text{s}$, 这个在图 5 中不难看出. 还有在相同的较小时刻且有效磁通 Φ_S 处于 $4n\pi$ 至 $4n\pi + 2\pi$ 区间, 相近度 $|\langle \psi^h(t) | \psi(t) \rangle|$ 随有效磁通 Φ_S 增大而减小. 2) 对于平均 (粒子或空穴) 流, 有

$$\begin{aligned} \langle I_{j,j+1}(t) \rangle_{h,1} &= T \langle I_{j,j+1}(t) \rangle_{h,1} T^{-1} \\ &= T \langle \psi^h(t) | T^{-1} T I_{j,j+1}^h T^{-1} T | \psi^h(t) \rangle T^{-1} \\ &= -\langle \psi(-t) | I_{j,j+1} | \psi(-t) \rangle_1 \\ &= -\langle I_{j,j+1}(-t) \rangle_1 = \langle I_{j,j+1}(t) \rangle_1, \end{aligned}$$

因此, 可得 $\langle I_{j,j+1}(t) \rangle_{h,1} = \langle I_{j,j+1}(t) \rangle_1$ (如 $\langle I_{12}(t) \rangle_{h,1} = \langle I_{12}(t) \rangle_1$). 3) 对于占据概率, $P_j^h = |\psi_j^*(-t)|^2$, 又因为 $|\psi_j^*(-t)|^2 = |\psi_j(t)|^2$, 因此, 无论是满足时间反演还是在时间反演破缺条件下, $P_j^h = P_j$. 以上就是从时间反演对称性分析了单粒子态和单空穴态含时波函数与平均 (粒子或空穴) 流占据概率方面的异同. 最后可认为如果采用量子层析测量 [39] 的方法就能够知道单粒子态与单空穴态的区别.

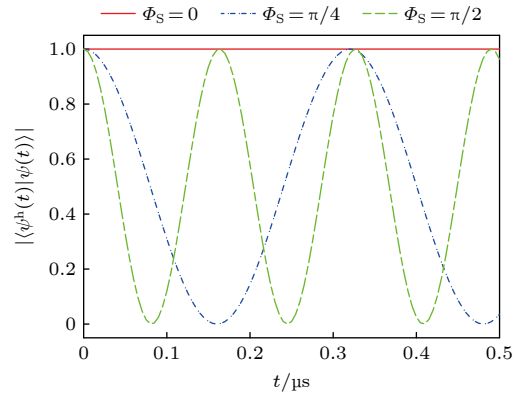


图 5 当有效磁通取 $\Phi_S = 0$ (红色实线), $\Phi_S = \pi/4$ (蓝点段线) 或 $\Phi_S = \pi/2$ (绿色虚线) 时, 演化时间 t 后单空穴态含时波函数 $|\psi^h(t)\rangle$ 与单粒子态含时波函数 $|\psi(t)\rangle$ 的相近度 $|\langle \psi^h(t) | \psi(t) \rangle|$ 的变化. 这里取裸耦合强度 $g_0/(2\pi) = 4 \text{ MHz}$.
Fig. 5. Variation curves of the similarity degree $|\langle \psi^h(t) | \psi(t) \rangle|$ between the time-dependent wave function $|\psi^h(t)\rangle$ in the single hole state and the time-dependent wave function $|\psi(t)\rangle$ in the single particle state for the effective magnetic flux taking $\Phi_S = 0$ (solid red), $\Phi_S = \pi/4$ (dash-dotted blue) or $\Phi_S = \pi/2$ (dashed green) after an evolution time t . Here, we specify the bare coupling strength $g_0/(2\pi) = 4 \text{ MHz}$.

6 粒子流和空穴流的测量方法

对于前面所提到的粒子流可以通过测量得到, 下面来叙述一下测量方法, 此方法借鉴于文献 [31]. 首先需要将现有的四量子比特方格结构进行解耦, 得到相邻两个量子比特 j 与 $j+1$ 之间的哈密顿量 $H_{j,j+1} = \hbar g_0 \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \text{H.c.}$, 由于其会受到环境因素 (弛豫速率 γ_j 与退相速率 Γ_j) 的影响, 因此 j 与 $j+1$ 两个量子比特间的相互作用可以使用以下林德布拉德主方程来描述:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{j,j+1} &= \frac{[H_{j,j+1}, \rho_{j,j+1}]}{i\hbar} + \mathcal{L}_j [\rho_{j,j+1}] \\ &+ \mathcal{L}_{j+1} [\rho_{j,j+1}] + \mathcal{L}_{j+2} [\rho_{j,j+1}] \\ &+ \mathcal{L}_{j-1} [\rho_{j,j+1}]. \end{aligned}$$

这里, $\mathcal{L}_j [\rho_{j,j+1}]$ 表示林德布拉德耗散项:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_j [\rho_{j,j+1}] \\ &= -\gamma_j \langle j | \rho_{j,j+1} | j \rangle \sigma_{jj} + \gamma_j \langle j | \rho_{j,j+1} | j \rangle \sigma_{00} \\ &\quad - \frac{\Gamma_j}{2} \langle j | \rho_{j,j+1} | 0 \rangle \sigma_{j,0} - \frac{\Gamma_j}{2} \langle 0 | \rho_{j,j+1} | j \rangle \sigma_{0,j}, \end{aligned} \quad (23)$$

其中, 投影算符为

$$\sigma_{jj} = |j\rangle\langle j|, \sigma_{00} = |0\rangle\langle 0|, \sigma_{j,0} = |j\rangle\langle 0|, \sigma_{0,j} = |0\rangle\langle j|.$$

在满足强耦合 $g_0 \gg \gamma_j, \Gamma_j$ 条件时, 可以定义粒子差 $P_{j,j+1}(t) = \langle j+1 | \rho_{j,j+1} | j+1 \rangle - \langle j | \rho_{j,j+1} | j \rangle$, 并且可以由林德布拉德主方程推导出:

$$\begin{aligned} P_{j,j+1}(t) &= e^{-\bar{\Gamma}t} \\ &\times \left[P_{j,j+1}(0) \cos(g_0 t) + \frac{2\langle I_{j,j+1} \rangle}{g_0} \sin(g_0 t) \right], \end{aligned} \quad (24)$$

$\bar{\Gamma} = (\gamma_j + \gamma_{j+1} + \Gamma_j + \Gamma_{j+1})/4$, $I_{j,j+1}$ 表示由 j 位置量子比特流向 $j+1$ 位置量子比特的粒子流. 同理, 也定义空穴差表达式为 $P_{j,j+1}^h(t) = \hbar \langle j+1 | \rho_{j,j+1}^h | j+1 \rangle_h - \hbar \langle j | \rho_{j,j+1}^h | j \rangle_h$, 由林德布拉德主方程推导出:

$$\begin{aligned} P_{j,j+1}^h(t) &= e^{-\tilde{\Gamma}t} \\ &\times \left[P_{j,j+1}^h(0) \cos(g_0 t) + \frac{2\langle I_{j,j+1}^h \rangle}{g_0} \sin(g_0 t) \right], \end{aligned} \quad (25)$$

$$\tilde{\Gamma} = (\gamma_j + \gamma_{j+1} + 2\gamma_{j+2} + 2\gamma_{j-1} + \Gamma_j + \Gamma_{j+1})/4,$$

其中, $\langle I_{j,j+1}^h \rangle$ 表示由 j 位置量子比特流向 $j+1$ 位

置量子比特的空穴流. 最终需要将仿真图像与实验数据进行拟合才可以得到粒子流 $\langle I_{j,j+1} \rangle$ 和空穴流 $\langle I_{j,j+1}^h \rangle$.

将空穴基矢 $|q_1 q_2 q_3 q_4\rangle_h$ 与粒子基矢 $|q_1 q_2 q_3 q_4\rangle$ 进行了一一映射, 对比 (24) 式与 (25) 式, 最大的差异主要来自于参数 $\bar{\Gamma}$ 和 $\tilde{\Gamma}$. 假设单粒子 (空穴) 态在 $|j\rangle (|j\rangle_h)$ 与 $|j+1\rangle (|j+1\rangle_h)$ 间演化, 其中单粒子态下林德布拉德耗散项 $\mathcal{L}_{j-1} [\rho_{j,j+1}]$ 和 $\mathcal{L}_{j+2} [\rho_{j,j+1}]$ 没有对林德布拉德主方程作出贡献, 而在考虑单空穴态时, 单空穴态下林德布拉德耗散项 $\mathcal{L}_{j-1} [\rho_{j,j+1}^h]$ 和 $\mathcal{L}_{j+2} [\rho_{j,j+1}^h]$ 对林德布拉德主方程作出贡献, 这个原因导致了参数 $\bar{\Gamma}$ 和 $\tilde{\Gamma}$ 的不同.

7 结论

本文基于电感型耦合器调制比特间耦合产生人造规范势 (有效磁通), 且每个比特受独立的经典场驱动的四传输子量子比特正方形格点体系, 研究了单粒子本征态、单空穴本征态、单粒子态以及单空穴态在格点环路存在有效磁通时的输运性质. 经过理论计算得到单粒子本征态 $|k_n\rangle$ 与单空穴本征态 $|k_n\rangle_h$ 具有相同的本征能谱, 并且相同能量下, 单粒子本征态的平均粒子流 $\langle I_{j,j+1} \rangle_{k_n}$ 与单空穴本征态的平均空穴流 $\langle I_{j,j+1} \rangle_{h,k_n}$ 都是有效磁通 Φ_S 的正弦函数, 二者的数值在相同有效磁通时互为相反数. 当初态为只占据一个格点的单粒子 (空穴) 时, 如果系统时间反演对称 (有效磁通 $\Phi_S = 4n\pi$, n 为整数), 单粒子与单空穴的含时波函数各分量 $\psi_j(t)$ 与 $\psi_j^h(t)$ 相等, 否则系统时间反演破缺, 单粒子与单空穴的含时波函数不相等. 进一步分析证明, 得到上述计算结果是由于对体系哈密顿量的粒子-空穴操作等价于对其做时间反演. 除此以外, 还发现单粒子态与单空穴态的演化行为比较相似, 存在两种特殊的情况: 1) 当有效磁通 $\Phi_S = \pi$ 时, 单粒子 (空穴) 只在初始比特与两个相邻比特之间输运, 即单粒子态 $|j\rangle$ (单空穴态 $|j\rangle_h$) 同时演化到单粒子态 $|j+1\rangle$ (单空穴态 $|j+1\rangle_h$) 和单粒子态 $|j-1\rangle$ (单空穴态 $|j-1\rangle_h$), 然后再同时反向演化; 2) 当有效磁通 $\Phi_S = 0$ 时, 单粒子 (空穴) 由初始比特通过两个相邻比特输运到初始比特的对角量子比特, 然后再反向输运, 即单粒子态 $|j\rangle$ (单空穴态 $|j\rangle_h$) 先同时演化到单粒子态 $|j+1\rangle$ (单空穴态 $|j+1\rangle_h$) 和单粒子态 $|j-1\rangle$ (单空穴态 $|j-1\rangle_h$), 再演化到单粒子态

$|j+2\rangle$ (单空穴态 $|j+2\rangle_h$), 随时间推移再次反向演化回到初始单粒子 (空穴) 态. 并且无论有效磁通 Φ_S 取何值时, 平均 (粒子或空穴) 流 $\langle I_{j,j+1} \rangle_1$ 和 $\langle I_{j,j+1} \rangle_{h,1}$ 相等, 以及单粒子与单空穴的占据概率 P_j 和 P_j^h 也相等. 另外, 对体系哈密顿量的粒子-空穴操作也等价于对体系做空间旋转, 在考虑单粒子与单空穴为初始态, 有效磁通 $\Phi_S = 4n\pi$ (n 为整数) 时, 经理论计算, 单粒子含时波函数分量 $\psi_2(t)$ 与 $\psi_4(t)$ 相等, 使得单粒子与单空穴含时波函数相等; 否则不相等. 对于平均 (粒子或空穴) 流, 以及单粒子与单空穴的占据概率得到的结论与时间反演情况一致. 本文也介绍了单粒子本征态、单空穴本征态、单粒子态以及单空穴态理想条件下制备流程, 以及粒子流与空穴流的测量方案, 希望对今后的实验中提供一些帮助. 本文中使用的量子体系可以作为二维正方格点体系的一个基本单元, 对今后的二维体系量子模拟, 特别是整数量子霍尔效应的研究中具有一定的参考意义.

参考文献

- [1] Feynman R P 1982 *Int. J. Theor. Phys.* **21** 467
- [2] Georgescu I M, Ashhab S, Nori F 2014 *Rev. Mod. Phys.* **86** 153
- [3] Berry M V 1984 *Proc. R. Soc. A* **392** 45
- [4] Hatsugai Y 1993 *Phys. Rev. B* **48** 11851
- [5] Tsui D C, Stormer H L, Gossard A C 1982 *Phys. Rev. Lett.* **48** 1559
- [6] Laughlin R B 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 1395
- [7] Kane C L, Mele E J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 146802
- [8] Bernevig B A, Hughes T L, Zhang S C 2006 *Science* **314** 1757
- [9] Bernevig B A, Zhang S C 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 106802
- [10] König M, Wiedmann S, Brune C, Roth A, Buhmann H, Molenkamp L W, Qi X L, Zhang S C 2007 *Science* **318** 766
- [11] Hsieh D, Qian D, Wray L, Xia Y, Hor Y S, Cava R J, Hasan M Z 2008 *Nature* **452** 970
- [12] Chiu C K, Teo J C Y, Schnyder A P, Ryu S 2016 *Rev. Mod. Phys.* **88** 035005
- [13] Goldman N, Juzeliunas G, Oehberg P, Spielman I B 2014 *Rep. Prog. Phys.* **77** 126401
- [14] Lin Y J, Compton R L, Perry A R, Phillips W D, Porto J V, Spielman I B 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 130401
- [15] Lin Y J, Compton R L, Jimenez-Garcia K, Porto J V, Spielman I B 2009 *Nature* **462** 628
- [16] Lin Y J, Compton R L, Jimenez-Garcia K, Phillips W D, Porto J V, Spielman I B 2011 *Nat. Phys.* **7** 531
- [17] Aidelsburger M, Atala M, Nascimbene S, Trotzky S, Chen Y A, Bloch I 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 255301
- [18] Aidelsburger M, Atala M, Lohse M, Barreiro J T, Paredes B, Bloch I 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 185301
- [19] Krantz P, Kjaergaard M, Yan F, Orlando T P, Gustavsson S, Oliver W D 2019 *Appl. Phys. Rev.* **6** 021318
- [20] Gu X, Kockum A F, Miranowicz A, Liu Y X, Nori F 2017 *Phys. Rep.* **718** 1
- [21] Blais A, Grimsmo A L, Girvin S M, Wallraff A 2021 *Rev. Mod. Phys.* **93** 025005
- [22] Nakamura Y, Pashkin Y A, Tsai J S 1999 *Nature* **398** 786
- [23] Leek P J, Fink J M, Blais A, Bianchetti R, Göppl M, Gambetta J M, Schuster D I, Frunzio L, Schoelkopf R J, Wallraff A 2007 *Science* **318** 1889
- [24] Möttönen M, Vartiainen J J, Pekola J P 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 177201
- [25] Neeley M, Ansmann M, Bialczak R C, Hofheinz M, Lucero E, O'Connell A D, Sank D, Wang H, Wenner J, Cleland A N, Geller M R, Martinis J M 2009 *Science* **325** 722
- [26] Schroer M D, Kolodrubetz M H, Kindel W F, Sandberg M, Gao J, Vissers M R, Pappas D P, Polkovnikov A, Lehnert K W 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 050402
- [27] Roushan P, Neill C, Chen Y, et al. 2014 *Nature* **515** 241
- [28] Barends R, Kelly J, Megrant A, et al. 2014 *Nature* **508** 500
- [29] Tangpanitanon J, Bastidas V M, Al-Assam S, Roushan P, Jaksch D, Angelakis D G 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 213603
- [30] Alaeian H, Chang C W S, Moghaddam M V, Wilson C M, Solano E, Rico E 2019 *Phys. Rev. A* **99** 053834
- [31] Zhao Y J, Xu X W, Wang H, Liu Y X, Liu W M 2020 *Phys. Rev. A* **102** 053722
- [32] Koch J, Houck A A, Hur K L, Girvin S M 2010 *Phys. Rev. A* **82** 043811
- [33] Yang Z H, Wang Y P, Xue Z Y, Yang W L, Hu Y, Gao J H, Wu Y 2016 *Phys. Rev. A* **93** 062319
- [34] Roushan P, Neill C, Megrant A, et al. 2017 *Nat. Phys.* **13** 146
- [35] Chen Y, Neill C, Roushan P, Leung N, Fang M, Barends R, Kelly J, Campbell B, Chen Z, Chiaro B 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 220502
- [36] Geller M R, Donate E, Chen Y, Neill C, Roushan P, Martinis J M 2015 *Phys. Rev. A* **92** 012320
- [37] Berkovits R 2013 *Phys. Rev. B* **87** 075141
- [38] Luttinger J M 1951 *Phys. Rev.* **84** 814
- [39] Ahmed S, Muoz C S, Nori F, Kockum A F 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 140502

SPECIAL TOPIC —Recent advances in hardware, algorithms and software of quantum computers

Quantum state transport in a square-lattice superconducting qubit circuit under gauge potential*

Zhao Yan-Jun¹⁾ Tan Ning¹⁾ Wang Yu-Qi¹⁾ Zheng Ya-Rui²⁾
Wang Hui^{3)†} Liu Wu-Ming^{4)5)‡}

1) (*Key Laboratory of Opto-electronic Technology, Ministry of Education, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China*)

2) (*Quantum Technology (Shenzhen) Co., Ltd., Shenzhen 518033, China*)

3) (*Inspur Artificial Intelligence Research Institute, Jinan 250011, China*)

4) (*Beijing National Laboratory for Condensed Matter Physics, Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

5) (*College of Physics, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

(Received 11 December 2022; revised manuscript received 23 March 2023)

Abstract

In this paper, we study the transport properties of quantum states in the square-lattice quantum bit model by using inductive couplers to generate the artificial gauge potential (effective magnetic flux). It is found by theoretical calculation that the eigenstates of single particle and single hole have the same eigen energy spectrum, and the average particle and hole currents, sinusoidally modulated by the effective magnetic flux, are opposite to each other with respect to the same eigen energy. For an initial single-particle or single-hole state where only one lattice site is occupied, if the time-inversion symmetry is preserved (the effective magnetic flux is an integral multiple of 4π), the components of the time-dependent wave functions of the single particle and the single hole are equal, otherwise they are not equal. The analysis demonstrates that the above calculation results are due to the fact that the particle-hole operation for the system Hamiltonian is equivalent to the time inversion. In addition, it is found that when the effective magnetic flux is π , a single particle or a single hole is only transported between the initial bit and two adjacent bits, and when the effective magnetic flux is 0, a single particle or a single hole is transported to the diagonal bit through two adjacent bits, and then transported in reverse. Regardless of the value of effective magnetic flux, both the single-particle and single-hole states share the same average (particle or hole) current and lattice site occupation probability.

Keywords: gauge potential, quantum state transport, quantum state preparation

PACS: 03.67.Ac, 03.67.-a

DOI: 10.7498/aps.72.20222349

* Project supported by the Natural Science Foundation of Beijing, China (Grant No. 4222064), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11904013, 61835013, 12234012), the National Key Research and Development Plan of China (Grant Nos. 2021YFA1400900, 2021YFA0718300, 2021YFA1402100), and the National Manned Space Engineering Space Application System Project.

† Corresponding author. E-mail: wanghui@iphy.ac.cn

‡ Corresponding author. E-mail: wliu@iphy.ac.cn