

# 基于 Svetlichny 不等式的多体量子非局域性探测\*

杨莹<sup>1)†</sup> 曹怀信<sup>2)</sup> 张程泱<sup>3)</sup>

1) (运城学院数学与信息技术学院, 运城 044000)

2) (陕西师范大学数学与统计学院, 西安 710119)

3) (西安外国语大学商学院, 西安 710128)

(2025 年 10 月 27 日收到; 2025 年 12 月 6 日收到修改稿)

量子非局域性作为一种极具价值的量子资源, 在诸多量子信息处理任务中扮演着不可或缺的关键角色. 对非局域性进行精准表征与有效探测, 始终是量子信息理论与实验探索中非常有挑战性的重要课题. 如何在结构复杂的多体量子系统里准确识别并验证量子非局域性现象, 如何设计出更为高效的非局域性探测方法, 已成为亟待解决的重要科学问题. 本文致力于多体量子非局域性的探测问题, 着重探究如何借助 Svetlichny 不等式来实现多体量子非局域性的探测. 首先探讨了 Svetlichny 不等式的最大量子违背, 构造了达到 Svetlichny 不等式的最大量子违背的量子态与可观测量集, 展示了如何构造其他的量子态与可观测量集来实现其最大量子违背, 以此阐明了实现 Svetlichny 不等式最大量子违背的量子态和可观测量集是不唯一的. 其次, 为了寻找更多违背 Svetlichny 不等式的量子态和可观测量集, 借助量子态的神经网络表示构建了神经网络量子态, 通过优化算法对网络参数进行优化来实现 Svetlichny 不等式的违背, 进而探测到非局域态. 通过与经典的 Nelder-Mead 单纯形法对比, 发现量子变分蒙特卡罗 (variational Monte Carlo, VMC) 方法在效率与精度上更适配基于神经网络量子态的非局域性探测, 并在不同哈密顿量下成功实现了借助神经网络量子态与 VMC 方法对多体量子纯态非局域性的探测. 本研究不仅证实了基于神经网络量子态与 VMC 方法的多体量子非局域性探测在理论上与技术上的可行性, 同时也为非局域性探测领域提供了颇具价值的研究新见解, 更为借助神经网络解决复杂的量子多体问题开拓了全新的研究思路.

**关键词:** 量子非局域性, 神经网络量子态, Svetlichny 不等式, 变分蒙特卡罗, 探测

**DOI:** 10.7498/aps.75.20251461

**CSTR:** 32037.14.aps.75.20251461

## 1 引言

量子非局域性是量子力学最迷人、最神秘的特征之一, 其否定了任何局域现实描述, 代表了量子物理与经典物理最深刻的背离, 是量子力学区别于经典力学的本质特征, 也是量子信息和量子计算的基础, 具有非常深刻的物理意义, 并被广泛应用于量子信息学的各个领域, 如量子密码<sup>[1]</sup>、量子隐形传态<sup>[2]</sup>、量子超密编码<sup>[3]</sup>、量子秘密共享<sup>[4]</sup>、分布式

量子机器学习<sup>[5]</sup>和量子安全直接通信<sup>[6]</sup>等. 对量子非局域性进行精准刻画与有效探测, 始终是量子信息理论与实验探索中极具挑战性的重要课题. 对于两体量子系统, Bell 不等式的提出首次为两体量子态非局域性的物理实验验证提供了量化判据<sup>[7]</sup>. 此后, Bell 不等式不断得到完善与改进, 更易于实验操作的 CHSH 不等式<sup>[8]</sup>应运而生, 这一突破直接激发了大量设计精巧的实验探索, 一系列旨在检验量子非局域性的贝尔实验相继开展<sup>[9-13]</sup>. 这些实验表明, 利用 Bell 不等式与 CHSH 不等式

\* 国家自然科学基金 (批准号: 12001480, 12271325)、山西省基础研究计划 (批准号: 202403021211003)、运城学院科研创新团队 (批准号: 2024002)、运城学院博士启动项目 (批准号: YQ-2023073) 和陕西省基础研究计划 (批准号: 2025JC-YBQN-112) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yangyingx163@163.com

这些强而有力的工具能够无可争辩地揭示出量子态的非局域性. 对于多体量子系统, 一方面多体非局域关联结构更加复杂, 可能涉及多粒子间的交叉关联, 另一方面非局域性的表征维度、实验验证与理论验证难度随粒子数呈指数增长, 这些因素共同导致了多体量子非局域性的研究比两体量子非局域性更为复杂. 同时, 多体量子系统也可能展现出一些独特的量子非局域效应, 这些效应在两体量子系统中可能不太显著. 因此, 对于多体量子非局域性的研究是一项非常有挑战性的课题. 其中多体量子非局域性的探测问题起着举足轻重的作用, 其不仅是验证多体量子非局域性存在的关键手段, 而且是推动该领域研究深入发展的重要驱动力. 实验上, 系统的高维度和多体特性导致复杂度剧增, 相关研究进展缓慢; 理论上, 完全表征多体系统经典关联已被证明是 NP-hard 问题<sup>[14]</sup>. 这使得传统理论和实验方法在精确刻画和有效探测多体非局域性时面临着严峻挑战. 目前已发现的含高阶关联的多体贝尔不等式仍不完整<sup>[15]</sup>, 研究者仅成功构造出基于两体关联的贝尔不等式<sup>[16-19]</sup>; 通过违背其中一个不等式, 多体非局域性已在玻色-爱因斯坦凝聚体中得到实验验证<sup>[20]</sup>, 这一突破重新激发了学界对多体非局域性研究的关注. 如何在复杂的多体量子系统中识别和验证量子非局域性现象, 如何使用含有高阶关联的多体不等式来探测多体非局域性, 并设计出更为高效的探测方法, 已成为亟待解决的重要科学问题. 近年来, 机器学习技术, 尤其是神经网络的飞速发展, 为解决复杂科学问题提供了全新的思路和强大的工具. 神经网络凭借其强大的函数逼近能力和数据处理能力, 已在众多领域取得显著成果, 如引力透镜<sup>[21]</sup>、波分析<sup>[22]</sup>和材料分析<sup>[23]</sup>等. 在量子领域, 神经网络已初显锋芒, 展现出处理量子多体问题的巨大潜力<sup>[24-38]</sup>. 将神经网络引入多体量子非局域性探测, 有望突破传统方法的局限. 神经网络一方面能够以多项式复杂度对量子态进行刻画, 有效避免传统方法中随粒子数增加而出现的“指数墙”; 另一方面通过与量子力学原理相结合, 有可能构建全新的非局域性探测框架,

实现对多体量子非局域性的高效、准确探测.

尽管已有部分研究尝试将神经网络应用于量子非局域性相关问题, 但在多体量子系统这一复杂场景下, 仍存在诸多关键问题亟待解决. 例如, 设计更有效的神经网络架构以适配多体量子态的复杂特性, 优化算法以提高非局域性探测的精度和效率等. 本研究旨在深入探索神经网络在多体量子非局域性探测中的应用, 通过创新方法和技术手段, 构建一套高效、准确的多体量子非局域性探测方案, 为该领域的发展提供新的理论和技术支持.

## 2 Svetlichny 不等式

在量子多体系统中, 粒子间的关联呈现出复杂多样的特性, 涵盖局域关联、非局域关联以及真正多体非局域关联等不同类型的. Svetlichny 不等式为判定量子多体系统的独特关联特性提供了关键依据, 当该不等式被违背时, 就标志着该系统展现出多体非局域特性.

先回顾 Svetlichny 不等式<sup>[39]</sup>. 假设有  $n$  个空间分离的观测者  $Alice_1, Alice_2, \dots, Alice_n$  共享一个  $n$  比特量子态, 第  $l$  个观测者  $Alice_l$  拥有两个  $\pm 1$  值可观测量  $\{A_l^{x_l}\}_{x_l=0,1}$ , 令  $\mathcal{A} = \{\{A_l^{x_l}\}_{x_l=0,1} : l \in [n]\}$  为  $\mathcal{H}^{(n)} := \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$  上的可观测量集, 其中  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . 复合系统  $\mathcal{H}^{(n)}$  上的  $n$  体 Svetlichny 算子定义为

$$S_n(\mathcal{A}) = \begin{cases} M_n, & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{1}{2}(M_n + M'_n), & n \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

其中, 算子  $M_n, M'_n$  是由  $M_1 = A_1^0, M'_1 = A_1^1$  和递推公式确定:

$$\begin{aligned} M_m &= \frac{1}{2} [M_{m-1} \otimes (A_m^0 + A_m^1) \\ &\quad + M'_{m-1} \otimes (A_m^0 - A_m^1)], \\ M'_m &= \frac{1}{2} [M'_{m-1} \otimes (A_m^1 + A_m^0) \\ &\quad + M_{m-1} \otimes (A_m^1 - A_m^0)]. \end{aligned}$$

$n$  体 Svetlichny 算子也可以表示为

$$\begin{aligned} S_n(\mathcal{A}) &= \sum_{x_1, \dots, x_n=0,1} \mu_n(x_1, x_2, \dots, x_n) A_1^{x_1} \otimes A_2^{x_2} \otimes \dots \otimes A_n^{x_n}, \\ \mu_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{1}{2^q} (-1)^{\sum_{i < j} x_i x_j + (q+1) \sum_{i=1}^n x_i + \frac{q^2-q}{2}}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $q = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  ( $\lceil \cdot \rceil$  表示向上取整).

本文将  $\mathcal{H}^{(n)}$  上所有量子态之集记为  $D(\mathcal{H}^{(n)})$ ,  $\mathcal{H}^{(n)}$  上满足局域隐变量模型<sup>[39]</sup>的所有局域态之集记为  $L(\mathcal{H}^{(n)})$ ,  $\mathcal{H}^{(n)}$  上所有非局域态之集记为  $NL(\mathcal{H}^{(n)})$ .

文献<sup>[39]</sup>指出, 局域态满足 Svetlichny 不等式, 同时还给出了 Svetlichny 算子在量子力学中所能达到的最大值, 这些结论可表述为下列两个引理.

**引理 1**<sup>[39]</sup> 若  $\rho \in L(\mathcal{H}^{(n)})$ , 则对于任意可观测量集  $\mathcal{A}$ , 都有

$$|\langle S_n(\mathcal{A}) \rangle_\rho| \leq 2^{n - \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} := B_{\text{loc}}(n). \quad (2)$$

不等式 (2) 称为 Svetlichny 不等式. 由引理 1 可知: 对于量子态  $\rho \in D(\mathcal{H}^{(n)})$ , 若存在可观测量集  $\mathcal{A}$  违背 Svetlichny 不等式 (2), 即  $|\langle S_n(\mathcal{A}) \rangle_\rho| > B_{\text{loc}}(n)$ , 则该量子态  $\rho$  必定具有非局域性. 因此, Svetlichny 不等式不仅可作为检测量子态非局域性的有效工具, 更为判定多体量子系统的非局域性提供了理论依据.

**引理 2**<sup>[39]</sup> 若  $\rho \in D(\mathcal{H}^{(n)})$ , 则对于任意可观测量集  $\mathcal{A}$ , 都有

$$|\langle S_n(\mathcal{A}) \rangle_\rho| \leq 2^{n - \lceil \frac{n}{2} \rceil - \frac{1}{2}} := B_{\text{quan}}(n) = \sqrt{2} B_{\text{loc}}(n).$$

因为  $B_{\text{quan}}(n) > B_{\text{loc}}(n)$ , 所以当  $|\langle S_n(\mathcal{A}) \rangle_\rho| = B_{\text{quan}}(n)$  时,  $\rho$  必定是非局域的.

一个兼具理论与实验双重意义、且值得深入探讨的问题是: 如何找到能违背 Svetlichny 不等式 (2) 的量子态  $\rho \in D(\mathcal{H}^{(n)})$  和可观测量集  $\mathcal{A}$ ? 又该如何找到量子态  $\rho \in D(\mathcal{H}^{(n)})$  与可观测量集  $\mathcal{A}$  使得  $|\langle S_n(\mathcal{A}) \rangle_\rho| = B_{\text{quan}}(n)$ , 进而实现 Svetlichny 不等式的最大量子违背?

解决这些问题是非常有挑战性的, 由于在 Svetlichny 不等式中, 每个观测者的测量选择具有任意性, 这无疑增加了问题的复杂程度; 又由于量子多体系统的希尔伯特空间会随系统规模扩大呈指数级增长, 相关量子期望值的计算成为一项极具难度的计算任务. 为此我们聚焦于识别特殊量子态  $\rho_0$  及与之相匹配的可观测量集  $\mathcal{A}_0$ , 以实现 Svetlichny 不等式的最大量子违背.

不失一般性, 我们首先固定量子态  $\rho_0$  为  $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ , 其中  $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \underbrace{|00 \cdots 01\rangle}_{n-1} + \underbrace{|11 \cdots 10\rangle}_{n-1} \right)$ , 然后寻找与之对应的可观测量集  $\mathcal{A}_0$ , 以实现 Svetlichny 不等式的最大量子违背. 通过构造, 得到了下列定理.

**定理 1** 对于不同情形的  $n$ , 按照以下方法选取可观测量集:

1) 当  $n = 4s - 1$  ( $s = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{4}$ ), 或  $n = 4s$  ( $s = 1, 2, \dots, \frac{n}{4}$ ) 时,

$$\mathcal{A}_0 : \begin{cases} A_1^0 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{2}}, \\ A_1^1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sqrt{2}}, \end{cases} \begin{cases} A_n^0 = \sigma_y, \\ A_n^1 = \sigma_x, \end{cases} \begin{cases} A_j^0 = \sigma_x, \\ A_j^1 = \sigma_y, \end{cases} \quad (j = 2, 3, \dots, n-1);$$

2) 当  $n = 4s + 1$  ( $s = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{4}$ ), 或  $n = 4s + 2$  ( $s = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-2}{4}$ ) 时,

$$\mathcal{A}_0 : \begin{cases} A_1^0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sqrt{2}}, \\ A_1^1 = \frac{-\sigma_x + \sigma_y}{\sqrt{2}}, \end{cases} \begin{cases} A_n^0 = \sigma_y, \\ A_n^1 = \sigma_x, \end{cases} \begin{cases} A_j^0 = \sigma_x, \\ A_j^1 = \sigma_y, \end{cases} \quad (j = 2, 3, \dots, n-1),$$

则  $|\langle S_n(\mathcal{A}_0) \rangle_{\rho_0}|$  达到了最大值  $B_{\text{quan}}(n)$ , 即:

$$\max_{\rho \in D(\mathcal{H}^{(n)}), \mathcal{A}} |\langle S_n(\mathcal{A}) \rangle_\rho| = |\langle S_n(\mathcal{A}_0) \rangle_{\rho_0}| = B_{\text{quan}}(n).$$

**证明** 对任意单位向量  $\mathbf{a}^i = (a_x^i, a_y^i, a_z^i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  和 Pauli 算子向量  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ , 有:

$$\mathbf{a}^1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{a}^2 \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \cdots \otimes \mathbf{a}^n \cdot \boldsymbol{\sigma} = \sum_{i_1, \dots, i_n = x, y, z} a_{i_1}^1 a_{i_2}^2 \cdots a_{i_n}^n \sigma_{i_1} \otimes \sigma_{i_2} \otimes \cdots \otimes \sigma_{i_n}.$$

计算可得:

1) 当  $n$  为偶数时, 有

$$\begin{aligned}
 & \langle \mathbf{a}^1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{a}^2 \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \cdots \otimes \mathbf{a}^n \cdot \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\rho_0} \\
 = & a_x^1 a_x^2 \cdots a_x^n + \sum_{i_j=x,y; N_y(i_1, i_2, \dots, i_{n-1})=4k} a_{i_1}^1 a_{i_2}^2 \cdots a_{i_{n-1}}^{n-1} a_x^n - \sum_{i_j=x,y; N_y(i_1, i_2, \dots, i_{n-1})=4k+2} a_{i_1}^1 a_{i_2}^2 \cdots a_{i_{n-1}}^{n-1} a_x^n \\
 & - \sum_{i_j=x,y; N_y(i_1, i_2, \dots, i_{n-1})=4k-1} a_{i_1}^1 a_{i_2}^2 \cdots a_{i_{n-1}}^{n-1} a_y^n + \sum_{i_j=x,y; N_y(i_1, i_2, \dots, i_{n-1})=4k+1} a_{i_1}^1 a_{i_2}^2 \cdots a_{i_{n-1}}^{n-1} a_y^n - a_z^1 a_z^2 \cdots a_z^n;
 \end{aligned} \tag{3}$$

2) 当  $n$  为奇数时, 有

$$\begin{aligned}
 & \langle \mathbf{a}^1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{a}^2 \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \cdots \otimes \mathbf{a}^n \cdot \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\rho_0} \\
 = & a_x^1 a_x^2 \cdots a_x^n + \sum_{i_j=x,y; N_y(i_1, i_2, \dots, i_{n-1})=4k} a_{i_1}^1 a_{i_2}^2 \cdots a_{i_{n-1}}^{n-1} a_x^n - \sum_{i_j=x,y; N_y(i_1, i_2, \dots, i_{n-1})=4k+2} a_{i_1}^1 a_{i_2}^2 \cdots a_{i_{n-1}}^{n-1} a_x^n \\
 & - \sum_{i_j=x,y; N_y(i_1, i_2, \dots, i_{n-1})=4k-1} a_{i_1}^1 a_{i_2}^2 \cdots a_{i_{n-1}}^{n-1} a_y^n + \sum_{i_j=x,y; N_y(i_1, i_2, \dots, i_{n-1})=4k+1} a_{i_1}^1 a_{i_2}^2 \cdots a_{i_{n-1}}^{n-1} a_y^n.
 \end{aligned} \tag{4}$$

其中,  $N_y(i_1, i_2, \dots, i_{n-1})$  表示  $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$  中  $y$  的个数.

由 (1) 式、(3) 式、(4) 式可得

$$\begin{aligned}
 \langle S_{4s-1}(\mathcal{A}_0) \rangle_{\rho_0} &= \frac{1}{2^{2s}} \times (-1)^{s-1} \times 2^{4s-1} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = (-1)^{s-1} \times 2^{2s-3/2}, \\
 \langle S_{4s}(\mathcal{A}_0) \rangle_{\rho_0} &= \frac{1}{2^{2s}} \times (-1)^{s-1} \times 2^{4s} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = (-1)^{s-1} \times 2^{2s-1/2}, \\
 \langle S_{4s+1}(\mathcal{A}_0) \rangle_{\rho_0} &= \frac{1}{2^{2s+1}} \times (-1)^s \times 2^{4s+1} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = (-1)^s \times 2^{2s-1/2}, \\
 \langle S_{4s+2}(\mathcal{A}_0) \rangle_{\rho_0} &= \frac{1}{2^{2s+1}} \times (-1)^s \times 2^{4s+2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = (-1)^s \times 2^{2s+1/2}.
 \end{aligned}$$

于是, 对于任意的  $n$ , 有  $|\langle S_n(\mathcal{A}_0) \rangle_{\rho_0}| = 2^{n - \lceil \frac{n}{2} \rceil - \frac{1}{2}}$ . 因此,

$$\max_{\rho \in D(\mathcal{H}^{(n)}), \mathcal{A}} |\langle S_n(\mathcal{A}) \rangle_{\rho}| = |\langle S_n(\mathcal{A}_0) \rangle_{\rho_0}| = B_{\text{quan}}(n).$$

证毕.

存在性问题已得到了解决, 接下来面临的问题是: 达到最大违背的量子态及可观测量集是否具有唯一性? 换句话说, 是否存在其他量子态及其匹配的可观测量集, 同样能达到该最大值? 下文将对此展开进一步探讨.

若  $U = U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_N$  是  $\mathcal{H}^{(n)}$  上的任意一个局域酉算子, 令:

$$\tilde{\rho} = U \rho U^\dagger, \quad S_n(\tilde{\mathcal{A}}) = U S_n(\mathcal{A}) U^\dagger,$$

则  $\langle S_n(\tilde{\mathcal{A}}) \rangle_{\tilde{\rho}} = \langle S_n(\mathcal{A}) \rangle_{\rho}$ . 因此, 如果存在  $\rho_1$  和可观测量集  $\mathcal{A}_1 = \{\{A_l^{x_l}\}_{x_l=0,1} : l = 1, 2, \dots, n\}$  满足

$$\max_{\rho \in D(\mathcal{H}^{(n)}), \mathcal{A}} |\langle S_n(\mathcal{A}) \rangle_{\rho}| = |\langle S_n(\mathcal{A}_1) \rangle_{\rho_1}|,$$

那么  $\tilde{\rho}_1 = U \rho_1 U^\dagger$  和可观测量集  $\tilde{\mathcal{A}}_1 = \{\{U_l A_l^{x_l} U_l^\dagger\}_{x_l=0,1} : l = 1, 2, \dots, n\}$  也满足

$$\max_{\rho \in D(\mathcal{H}^{(n)}), \mathcal{A}} |\langle S_n(\mathcal{A}) \rangle_{\rho}| = |\langle S_n(\tilde{\mathcal{A}}_1) \rangle_{\tilde{\rho}_1}|.$$

由于  $U$  的任意性, 因此达到最大值的量子态及可观测量集并不唯一.

特别地, 对于  $n$  比特 GHZ 态  $|\tilde{\psi}_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle^{\otimes n} + |1\rangle^{\otimes n})$ , 令  $\tilde{\rho}_0 = |\tilde{\psi}_0\rangle\langle\tilde{\psi}_0|$ , 定义可观测量集  $\tilde{\mathcal{A}}_0$  如下:

1) 当  $n = 4s - 1$  ( $s = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{4}$ ) 或  $n = 4s$  ( $s = 1, 2, \dots, \frac{n}{4}$ ) 时,

$$\tilde{\mathcal{A}}_0 : \begin{cases} \tilde{A}_1^0 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{2}}, \\ \tilde{A}_1^1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sqrt{2}}, \end{cases} \begin{cases} \tilde{A}_n^0 = -\sigma_y, \\ \tilde{A}_n^1 = \sigma_x, \end{cases} \begin{cases} \tilde{A}_j^0 = \sigma_x, \\ \tilde{A}_j^1 = \sigma_y, \end{cases} \quad (j = 2, 3, \dots, n-1);$$

2) 当  $n = 4s + 1$  ( $s = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{4}$ ) 或  $n = 4s + 2$  ( $s = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-2}{4}$ ) 时,

$$\tilde{\mathcal{A}}_0 : \begin{cases} \tilde{A}_1^0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sqrt{2}}, \\ \tilde{A}_1^1 = \frac{-\sigma_x + \sigma_y}{\sqrt{2}}, \end{cases} \begin{cases} \tilde{A}_n^0 = -\sigma_y, \\ \tilde{A}_n^1 = \sigma_x, \end{cases} \begin{cases} \tilde{A}_j^0 = \sigma_x, \\ \tilde{A}_j^1 = \sigma_y, \end{cases} \quad (j = 2, 3, \dots, n-1),$$

则  $|\langle S_n(\tilde{\mathcal{A}}_0) \rangle_{\tilde{\rho}_0}|$  达到了最大值  $B_{\text{quan}}(n)$ , 即

$$\max_{\rho \in D(\mathcal{H}^{(n)}), \mathcal{A}} |\langle S_n(\mathcal{A}) \rangle_{\rho}| = |\langle S_n(\tilde{\mathcal{A}}_0) \rangle_{\tilde{\rho}_0}| = B_{\text{quan}}(n).$$

由此可知, 从理论层面而言存在许多量子态及与之对应的可观测量集, 它们既能违背 Svetlichny 不等式, 又能达到最大量子值  $B_{\text{quan}}(n)$ . 这一结论不仅间接揭示了这些量子态的非局域性, 更为非局域态的探测提供了理论依据与方向指引. 值得进一步探讨的是: 除与  $\rho_0$  局部酉等价的量子态外, 是否还能识别出其他类型的非局域态? 这类态在理论上构造是可行的, 但比较困难, 下文将借助神经网络构建量子态来寻找更多的非局域态.

### 3 量子非局域性的探测

上述讨论表明 Svetlichny 不等式可作为非局域性检测的理论依据. 基于此, 下面试图利用 Svetlichny 算子构建哈密顿量, 将寻找违反 Svetlichny 不等式的量子态这一问题, 巧妙转化为求解哈密顿量基态的问题, 为后续探测多体量子非局域性的工作奠定前期基础.

#### 3.1 构造哈密顿量

一般来说, 对于给定的哈密顿量  $H$ , 由于在紧集  $D(\mathcal{H}^{(n)})$  上的连续函数  $f: \rho \mapsto \text{tr}(H\rho)$  是有界的, 因此一定存在最小值  $D_H = \min_{\rho \in D(\mathcal{H}^{(n)})} \langle H \rangle_{\rho}$ , 从而可得

$$\langle H \rangle_{\rho} \geq D_H, \quad \forall \rho \in D(\mathcal{H}^{(n)}).$$

利用 Svetlichny 算子  $S_n(\mathcal{A})$ , 构造哈密顿量为

$$H_n(\mathcal{A}) = \sum_{x_1, x_2, \dots, x_n=0,1} h_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \times A_1^{x_1} \otimes A_2^{x_2} \otimes \dots \otimes A_n^{x_n},$$

其中:

$$h_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} (-1)^s \mu_{4s-1}(x_1, x_2, \dots, x_{4s-1}), & n = 4s - 1; \\ (-1)^s \mu_{4s}(x_1, x_2, \dots, x_{4s}), & n = 4s; \\ (-1)^{s+1} \mu_{4s+1}(x_1, x_2, \dots, x_{4s+1}), & n = 4s + 1; \\ (-1)^{s+1} \mu_{4s+2}(x_1, x_2, \dots, x_{4s+2}), & n = 4s + 2, \end{cases}$$

式中  $\mu_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  由 (1) 式给出. 易知:

$$H_n(\mathcal{A}) = \begin{cases} (-1)^s S_{4s-1}(\mathcal{A}), & n = 4s - 1; \\ (-1)^s S_{4s}(\mathcal{A}), & n = 4s; \\ (-1)^{s+1} S_{4s+1}(\mathcal{A}), & n = 4s + 1; \\ (-1)^{s+1} S_{4s+2}(\mathcal{A}), & n = 4s + 2. \end{cases}$$

从而可得

$$|\langle H_n(\mathcal{A}) \rangle_{\rho}| = |\langle S_n(\mathcal{A}) \rangle_{\rho}|, \quad \forall \rho \in D(\mathcal{H}^{(n)}).$$

由引理 1 和引理 2 可得

$$\begin{aligned} -B_{\text{loc}}(n) &\leq \langle H_n(\mathcal{A}) \rangle_{\rho} \leq B_{\text{loc}}(n), \quad \forall \rho \in L(\mathcal{H}^{(n)}), \\ -B_{\text{quan}}(n) &\leq \langle H_n(\mathcal{A}) \rangle_{\rho} \leq B_{\text{quan}}(n), \quad \forall \rho \in D(\mathcal{H}^{(n)}). \end{aligned}$$

因此, 如果存在量子态  $\rho$  与可观测量集  $\mathcal{A}$ , 使得

$$\langle H_n(\mathcal{A}) \rangle_{\rho} < -B_{\text{loc}}(n) = -2^{n-\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1},$$

或

$$\langle H_n(\mathcal{A}) \rangle_{\rho} > B_{\text{loc}}(n) = 2^{n-\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1},$$

那么该量子态  $\rho$  与可观测量集  $\mathcal{A}$  也满足  $|\langle S_n(\mathcal{A}) \rangle_{\rho}| > 2^{n-\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$ , 即它们违反了 Svetlichny 不等式, 于是可判定该量子态  $\rho$  具有非局域性, 这为非局域态的探测奠定了理论基础.

因此, 为了获得违反 Svetlichny 不等式的量子态, 将其转化为寻找哈密顿量  $H_n(\mathcal{A})$  的最小期望值  $\min_{\rho \in D(\mathcal{H}^{(n)})} \langle H_n(\mathcal{A}) \rangle_{\rho}$  以及相应的量子态, 这等同于求解哈密顿量  $H_n(\mathcal{A})$  的基态能量和基态.

### 3.2 量子态的神经网络表示

由于量子多体系统的希尔伯特空间规模会随粒子数增加呈指数级膨胀, 这直接导致刻画其波函数所需的参数也随粒子数呈指数级增长, 很难对其进行完整刻画, 给计算期望值工作带来了根本性障碍. 然而, 神经网络模型具有表示或逼近任何复杂多变量函数的能力. 一个自然的想法是利用神经网络模型来表示量子多体波函数, 为量子多体问题提供一种新的解决思路. 受限玻尔兹曼机 (restricted Boltzmann machine, RBM) 作为一类应用广泛的神经网络 [24,27-29,31], 其逼近能力在数学上已得到证明: 只要隐藏神经元数量足够多, RBM 就能以任意精度拟合所有光滑函数 [40]. 这意味着理论上任何量子态都可通过 RBM 来表示. 由于 RBM 中隐藏神经元的个数随可见神经元的个数呈多项式增长, 因此在采用 RBM 表示量子态时, 所需参数的数量会随粒子数以多项式形式增加, 而非指数级增长. 这样一来, 在解决一些量子多体问题时, 借助 RBM 构造的量子态就有望避开“指数墙”这一关键难题. 基于此, 我们将采用 RBM 来构建神经网络量子态.

给定一个具有  $n$  个可见神经元和  $M$  个隐藏神经元的 RBM, 可通过以下方式定义神经网络量子态.

**定义 1** [36] 假设  $\mathcal{H}^{(n)} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ , 则由参数  $\Omega = (a, b, W)$  和输入可观测量  $S = \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z \otimes \cdots \otimes \sigma_n^z$  诱导的神经网络量子态表示为

$$|\Psi_{S,\Omega}\rangle = \sum_{\lambda_j \in \{-1,1\}} \Psi_{S,\Omega}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) |\psi_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_n\rangle,$$

其中,  $\lambda_j, |\psi_j\rangle$  分别表示  $\sigma_j^z = \sigma^z$  的特征值与特征态, 且

$$\Psi_{S,\Omega}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{h_i = \pm 1} \exp \left( \sum_{j=1}^n a_j \lambda_j + \sum_{i=1}^M b_i h_i + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^n W_{ij} h_i \lambda_j \right).$$

其中,  $\Psi_{S,\Omega}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  称为神经网络量子波函数.

由定义 1 容易看出, 对于输入可观测量  $S = \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z \otimes \cdots \otimes \sigma_n^z$  的每一个值  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , RBM 神经网络就可以计算出神经网络量子波函数  $\Psi_{S,\Omega}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  的值. 由文献 [36] 知,  $\Psi_{S,\Omega}(\lambda_1,$

$\lambda_2, \dots, \lambda_n)$  可以简化为

$$\Psi_{S,\Omega}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \prod_{j=1}^n e^{a_j \lambda_j} \cdot \prod_{i=1}^M 2 \cosh \left( b_i + \sum_{j=1}^n W_{ij} \lambda_j \right).$$

### 3.3 探测非局域态

在关于非局域性探测的研究中, 测量方案的设计是核心环节之一. 然而, 理论上测量选择具有无限多种可能, 若直接对所有可能的测量情形展开分析, 不仅会因参数空间的无限性陷入计算困境, 还有可能因缺乏聚焦点而难以提炼出规律性结论. 为此, 采用“从特殊到一般”的研究思路, 先聚焦于特殊的测量场景, 然后逐步实现向一般测量场景的平滑过渡.

对于给定的哈密顿量  $H_n(\mathcal{A})$ , 为了获得违反 Svetlichny 不等式的量子态, 实际上就是寻找给定哈密顿量  $H_n(\mathcal{A})$  的最小期望值  $\min_{\rho \in D(\mathcal{H}^{(n)})} \langle H_n(\mathcal{A}) \rangle_\rho$  以及相应的量子态, 这就等同于求解给定哈密顿量  $H_n(\mathcal{A})$  的基态能量和基态. 基于神经网络的强大表达能力, 我们将重点聚焦于借助神经网络量子态  $|\Psi_{S,\Omega}\rangle$  寻找给定哈密顿量  $H_n(\mathcal{A})$  的“可能的”基态能量:

$$\lambda(\mathcal{A}, S) = \min_{\Omega} F_n(\mathcal{A}, S, \Omega),$$

$$F_n(\mathcal{A}, S, \Omega) = \frac{\langle \Psi_{S,\Omega} | H_n(\mathcal{A}) | \Psi_{S,\Omega} \rangle}{\langle \Psi_{S,\Omega} | \Psi_{S,\Omega} \rangle}$$

及其基态的最优神经网络表示, 使得  $\lambda(\mathcal{A}, S) < -B_{\text{loc}}(n)$ , 从而获得违反 Svetlichny 不等式的量子态, 进而探测到非局域态.

探测非局域性的具体方法为: 先初始化一个随机的神经网络量子态  $|\Psi_{S,\Omega}\rangle$ , 该量子态通常不会违反 Svetlichny 不等式, 随后通过优化算法对内部参数  $\Omega = (a, b, W)$  进行优化, 旨在使哈密顿量  $H_n(\mathcal{A})$  在该量子态下的期望值达到最小值  $\lambda(\mathcal{A}, S)$ . 若此期望值小于  $-B_{\text{loc}}(n)$ , 则表明违反 Svetlichny 不等式, 进而可确定存在非局域态.

由定理 1 可知, 当可观测量集为  $\mathcal{A}_0$  时, 容易推导出  $\langle H_n(\mathcal{A}_0) \rangle_{\rho_0} = -B_{\text{quan}}(n)$ . 这说明违反 Svetlichny 不等式的量子态一定是存在的, 为验证我们方法的可行性, 先选取哈密顿量为  $H_n(\mathcal{A}_0)$ , 寻找能最大程度违反 Svetlichny 不等式的量子值及其对应的量子态, 以及能违反 Svetlichny 不等式的其

他态, 进而实现非局域态的探测.

**情景 1** 当哈密顿量为  $H_n(\mathcal{A}_0)$  时, 寻找  $|\Psi_{S,\Omega}\rangle$ , 使得  $\lambda(\mathcal{A}_0, S) < -B_{\text{loc}}(n)$ , 其中可观测量集  $\mathcal{A}_0$  见定理 1.

可以选用的优化算法种类非常多, 我们先选用无导数的数值优化算法——Nelder-Mead 单纯形法作为优化工具. 该方法通过在参数空间中构建“单纯形”, 并迭代调整其顶点位置来逐步逼近目标函数的最小值. 在每次迭代的过程中, 优化算法会根据目标函数值动态调整参数  $\Omega = (a, b, W)$ , 并借助 callback 回调函数与历史记录列表, 实时记录每一步迭代的参数, 这样既能追踪优化动态, 又能精准捕捉满足非局域性条件的关键参数. 这一过程通

过数值优化实现了从随机初始态到非局域态的迭代逼近, 为我们探测 Svetlichny 不等式的违反提供了可操作的计算框架.

图 1 和表 1 分别给出了当  $n = 8, 9, 10, 11$  时基于 Nelder-Mead 单纯形法寻找哈密顿量  $H_n(\mathcal{A}_0)$  可能的基态能量  $\lambda(\mathcal{A}_0, S)$  的优化过程以及迭代次数与能量误差, 其余情形类似可得. 由图 1(a)—(d) 和表 1 可以看出, 随着迭代的推进, 分别在 5580 次、4510 次、7220 次、6720 次迭代后  $F_n(\mathcal{A}, S, \Omega)$  值低于局域界  $-B_{\text{loc}}(n)$ , 并最终无限逼近最低量子界  $-B_{\text{quan}}(n)$ . 这表明从对应迭代次数起获得的量子态均为非局域态, 而最终得到的量子态能够实现 Svetlichny 不等式的最大量子违反.

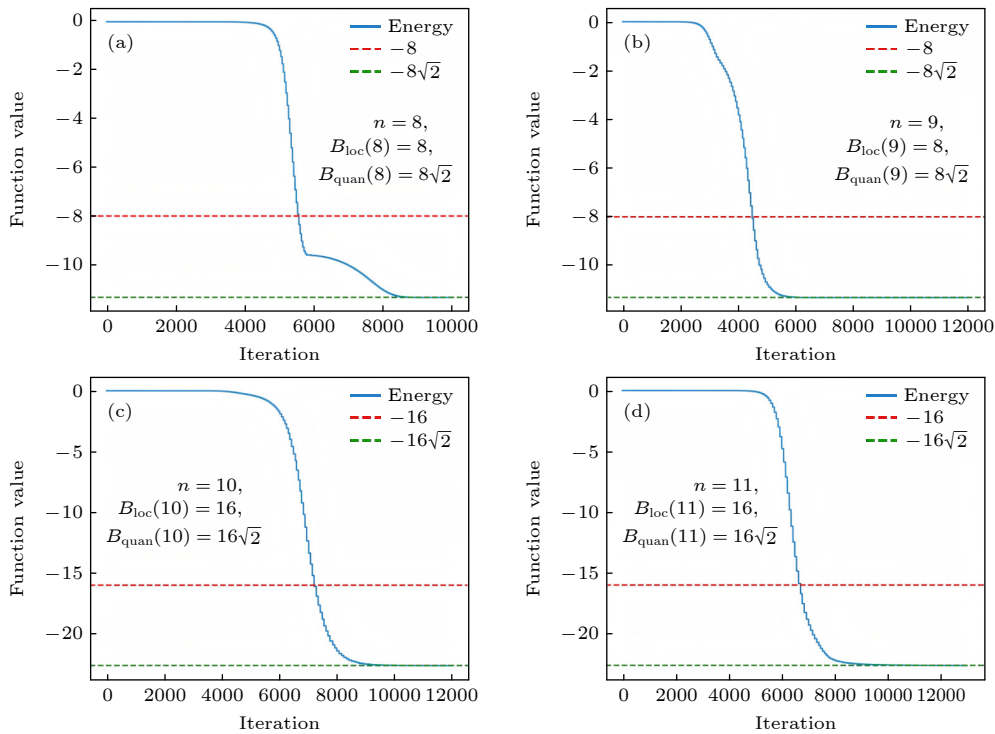


图 1 当  $n = 8, 9, 10, 11$  时, 基于 Nelder-Mead 单纯形法寻找哈密顿量  $H_n(\mathcal{A}_0)$  可能的基态能量  $\lambda(\mathcal{A}_0, S)$  的优化过程, 其中红色、绿色虚线分别代表局域界  $-B_{\text{loc}}(n)$  和量子界  $-B_{\text{quan}}(n)$ , 纵轴上的函数值表示  $F_n(\mathcal{A}, S, \Omega)$

Fig. 1. When  $n = 8, 9, 10, 11$ , the optimization process for finding the possible ground state energy  $\lambda(\mathcal{A}_0, S)$  of the Hamiltonian  $H_n(\mathcal{A}_0)$  using the Nelder-Mead simplex method, where the red and green dashed lines represent the local bound  $-B_{\text{loc}}(n)$  and quantum bound  $-B_{\text{quan}}(n)$ , respectively; the function value on the vertical axis represents  $F_n(\mathcal{A}, S, \Omega)$ .

表 1 基于 Nelder-Mead 单纯形法寻找哈密顿量  $H_n(\mathcal{A}_0)$  可能的基态能量的迭代次数与能量误差

Table 1. Iterations and energy error for finding the possible ground state energy of the Hamiltonian  $H_n(\mathcal{A}_0)$  using the Nelder-Mead simplex method.

$n$	能量首次低于局域界的迭代次数	对应的能量值	最大迭代次数	能量误差
8	5580	-8.3454	10000	$6.69 \times 10^{-6}$
9	4510	-8.0663	12000	$1.32 \times 10^{-8}$
10	7220	-16.1006	12000	$2.88 \times 10^{-3}$
11	6720	-16.7089	12000	$3.37 \times 10^{-3}$

进一步分析可知, 实现 Svetlichny 不等式最大违反的量子值最终无限逼近于哈密顿量  $H_n(\mathcal{A}_0)$  的基态能量, 所对应的量子态近似等于理论预期态  $|\psi_0\rangle$ , 这与定理 1 的结论一致, 这也充分说明 Nelder-Mead 单纯形法是行之有效的, 其不仅能探测到最大程度违反 Svetlichny 不等式的量子态, 也可捕捉到其他违反 Svetlichny 不等式的非局域态, 进一步证明了该方法在非局域态探测中的可靠性, 为后续非局域态的探测奠定了理论基础.

Nelder-Mead 单纯形法虽然有效, 但对初始值具有较强的依赖性. 为此我们尝试引入另一种优化方法——VMC, 进行对比研究, 旨在探寻收敛更快、性能更优的方案. 作为量子蒙特卡罗 (quantum Monte Carlo, QMC) 的重要分支, VMC 是 QMC 中应用最广泛的方法之一, 该方法融合“变分原理”与“蒙特卡罗抽样”的核心思想, 先通过含参数的试探波函数近似描述量子系统基态, 再利用 VMC 方法计算能量期望值, 最终通过优化参数使能量达到最低, 从而获得近似基态.

在具体实施时, 我们先以 RBM 神经网络为架构, 构建参数化神经网络量子波函数模型作为“波函数生成器”, 实现了用神经网络参数化量子态的波函数; 紧接着创建 MetropolisLocal 采样器, 整合“神经网络量子波函数模型”“采样器”和“样本规模”, 生成 1008 个可优化的量子态样本; 在此基础上, 进一步构建 VMC 优化的核心驱动模块, 将随机梯度下降 (stochastic gradient descent, SGD) 优化器与随机重构 (stochastic reconfiguration, SR) 预条件器结合, 实现对量子态参数  $\Omega = (a, b, W)$  的高效更新, 使 VMC 计算的能量期望值不断降低, 最终得到最优近似基态. 在 SGD 优化器中学习率取为 0.01, 在 SR 预条件器中对角偏移参数取为 0.01; 在每次迭代时, SGD 计算的梯度将先通过 SR 预条件器进行“几何校正”, 再用于参数更新, 从而加速收敛并提高稳定性. 特别是在非局域态探测中,

这种“SGD+SR”组合能有效处理量子态的复杂参数空间, 有效平衡优化效率与稳定性, 帮助我们更快地找到违反 Svetlichny 不等式的量子态. 与此同时, 我们借助 callback 回调函数与日志记录, 实时记录每一步迭代的参数, 便于后续复现结果与提取不同迭代阶段的量子态.

图 2 和表 2 分别给出了当  $n = 8, 9, 10, 11$  时基于 VMC 方法寻找哈密顿量  $H_n(\mathcal{A}_0)$  可能的基态能量  $\lambda(\mathcal{A}_0, S)$  的优化过程以及迭代次数与能量误差, 其余情形类似可得. 由图 2(a)—(d) 和表 2 可以看出, 随着迭代的推进, 分别在 30 次、50 次、30 次、50 次迭代后  $F_n(\mathcal{A}, S, \Omega)$  值低于局域界  $-B_{\text{loc}}(n)$ , 并最终无限逼近最低量子界  $-B_{\text{quan}}(n)$ . 这表明当迭代次数达到这些特定阈值后, 所获得的量子态均为非局域态, 而最终得到的量子态能够实现 Svetlichny 不等式的最大量子违反.

我们进一步分析发现, 实现 Svetlichny 不等式最大违反的量子值最终无限逼近于哈密顿量  $H_n(\mathcal{A}_0)$  的基态能量, 所对应的量子态近似等于理论预期态  $|\psi_0\rangle$ , 这也与定理 1 的结论吻合, 充分验证了 VMC 方法在非局域态探测中的有效性, 该方法不仅能探测到最大程度违反 Svetlichny 不等式的量子态, 还能有效识别其他违反 Svetlichny 不等式的非局域态.

从优化效率与非局域态探测能力的对比来看, Nelder-Mead 单纯形法与 VMC 方法存在显著的差异, 核心体现在迭代收敛速度上. Nelder-Mead 单纯形法需经过大量迭代才能突破局域性约束, 这意味着该方法需要耗费较多计算步骤才能完成非局域态的探测. 相比之下, VMC 方法展现出明显的效率优势, 在相同系统中, 其迭代次数仅为 Nelder-Mead 单纯形法的 0.5%—1.1%, 就能突破局域界. 这一结果不仅说明 VMC 能以更少的计算成本快速探测非局域态, 也印证了其在非局域探测问题中的适配性, 它通过结合变分原理与蒙特卡罗采样, 可更直接地朝着低能量非局域态的方向收敛, 避免

表 2 基于 VMC 方法寻找哈密顿量  $H_n(\mathcal{A}_0)$  可能的基态能量的迭代次数与能量误差

Table 2. Iterations and energy error for finding the possible ground state energy of the Hamiltonian  $H_n(\mathcal{A}_0)$  using the VMC method.

$n$	能量首次低于局域界的迭代次数	对应的能量值	最大迭代次数	能量误差
8	30	-8.3454	500	$1.45 \times 10^{-4}$
9	50	-11.047	500	$5.01 \times 10^{-7}$
10	30	-16.07	500	$3.05 \times 10^{-11}$
11	50	-22.51	500	$3.05 \times 10^{-11}$

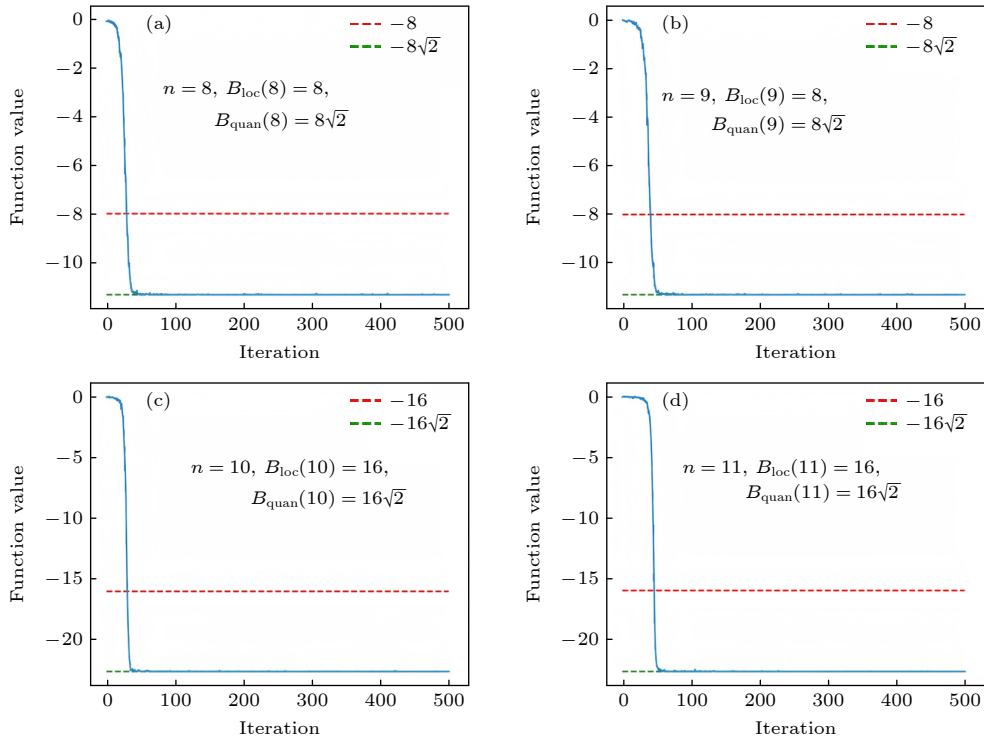


图 2 当  $n = 8, 9, 10, 11$  时, 基于 VMC 方法寻找哈密顿量  $H_n(\mathcal{A}_0)$  可能的基态能量  $\lambda(\mathcal{A}_0, S)$  的优化过程, 其中红色、绿色虚线分别代表局域界  $-B_{\text{loc}}(n)$  和量子界  $-B_{\text{quan}}(n)$ , 纵轴上的函数值表示  $F_n(\mathcal{A}, S, \Omega)$

Fig. 2. When  $n = 8, 9, 10, 11$ , the optimization process for finding the possible ground state energy  $\lambda(\mathcal{A}_0, S)$  of the Hamiltonian  $H_n(\mathcal{A}_0)$  using VMC method, where the red and green dashed lines represent the local bound  $-B_{\text{loc}}(n)$  and quantum bound  $-B_{\text{quan}}(n)$ , respectively; the function value on the vertical axis represents  $F_n(\mathcal{A}, S, \Omega)$ .

了 Nelder-Mead 单纯形法因依赖初始值、需在参数空间中缓慢调整顶点而导致的迭代冗余. 进一步而言, VMC 在快速探测非局域态的同时, 最终生成的量子态还能实现 Svetlichny 不等式的最大量子违反, 兼顾了效率与精度, 这正是其相较于 Nelder-Mead 单纯形法在非局域性研究中的核心优势.

基于上述分析, 接下来将针对其他哈密顿量, 统一采用 VMC 方法进行非局域性探测, 并通过效率一致性、稳定性、结果可靠性 3 个维度验证其普适性. 在效率一致性方面, 通过观察 VMC 在不同

哈密顿量下突破局域界的迭代次数, 验证其“快速探测”特性是否具有普适性; 在稳定性方面, 检查 VMC 在不同哈密顿量下是否均能稳定收敛, 而非仅在特定系统中偶然有效; 在结果可靠性方面, 验证各种情形下 VMC 最终的能量期望值是否符合理论预期, 从而阐明探测结果的可靠性. 若 VMC 在不同哈密顿量下均能高效、稳定地完成非局域性探测并输出可靠结果, 则可证实该方法在非局域性研究中的普适性.

**情景 2** 当哈密顿量为  $H_n(\mathcal{A}_1)$  时, 寻找  $|\Psi_{S, \Omega}\rangle$ , 使得  $\lambda(\mathcal{A}_1, S) < -B_{\text{loc}}(n)$ , 其中可观测量集  $\mathcal{A}_1$  为

$$\mathcal{A}_1 : \begin{cases} A_1^0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sqrt{2}}, \\ A_1^1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{2}}, \end{cases} \begin{cases} A_n^0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sqrt{2}}, \\ A_n^1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{2}}, \end{cases} \begin{cases} A_j^0 = \frac{-\sigma_x + \sigma_y}{\sqrt{2}}, \\ A_j^1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sqrt{2}}, \end{cases} \quad (j = 2, 3, \dots, n-1).$$

图 3 和表 3 分别给出了当  $n = 8, 9, 10, 11$  时, 基于 VMC 方法寻找哈密顿量  $H_n(\mathcal{A}_1)$  可能的基态能量  $\lambda(\mathcal{A}_1, S)$  的优化过程以及迭代次数与能量误差, 其余情形类似可得. 由图 3 和表 3 可以看出,

在这种测量场景下, 借助 VMC 方法也可以快速突破局域界检测到非局域态, 最终实现 Svetlichny 不等式的最大量子违反. 这也意味着实现 Svetlichny 不等式的最大量子违反的场景是不唯一的.

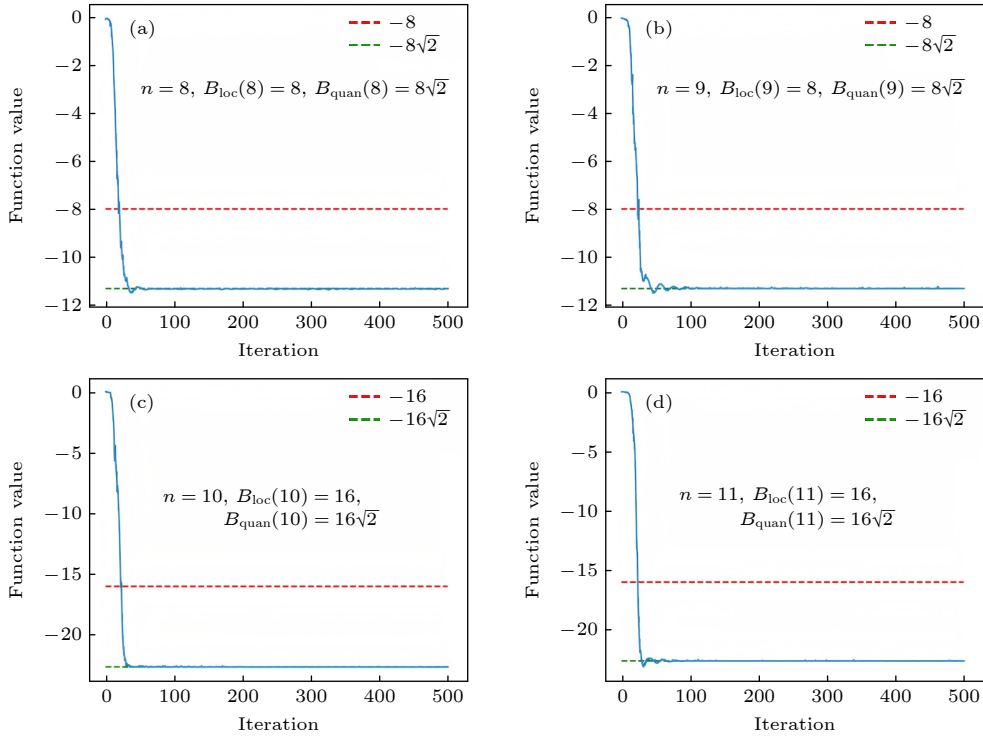


图 3 当  $n = 8, 9, 10, 11$  时, 基于 VMC 方法寻找哈密顿量  $H_n(\mathcal{A}_1)$  可能的基态能量  $\lambda(\mathcal{A}_1, S)$  的优化过程, 其中红色、绿色虚线分别代表局域界  $-B_{\text{loc}}(n)$  和量子界  $-B_{\text{quan}}(n)$ , 纵轴上的函数值表示  $F_n(\mathcal{A}, S, \Omega)$

Fig. 3. When  $n = 8, 9, 10, 11$ , the optimization process for finding the possible ground state energy  $\lambda(\mathcal{A}_1, S)$  of the Hamiltonian  $H_n(\mathcal{A}_1)$  using VMC method, where the red and green dashed lines represent the local bound  $-B_{\text{loc}}(n)$  and quantum bound  $-B_{\text{quan}}(n)$ , respectively; the function value on the vertical axis represents  $F_n(\mathcal{A}, S, \Omega)$ .

表 3 寻找哈密顿量  $H_n(\mathcal{A}_1)$  可能的基态能量的迭代次数与能量误差

Table 3. Iterations and energy error for finding the possible ground state energy of the Hamiltonian  $H_n(\mathcal{A}_1)$ .

$n$	能量首次低于局域界的迭代次数	对应的能量值	最大迭代次数	能量误差
8	30	-11.12	500	$1.36 \times 10^{-5}$
9	30	-10.899	500	$6.99 \times 10^{-4}$
10	30	-22.237	500	$3.002 \times 10^{-6}$
11	30	-22.44	500	$5.01 \times 10^{-3}$

**情景 3** 当哈密顿量为  $H_n(\mathcal{A}_2)$  时, 寻找  $|\Psi_{S,\Omega}\rangle$ , 使得  $\lambda(\mathcal{A}_2, S) < -B_{\text{loc}}(n)$ , 其中可观测量集  $\mathcal{A}_2$  为

$$\mathcal{A}_2: \begin{cases} A_1^0 = \frac{\sigma_x + \sqrt{2}\sigma_z}{\sqrt{3}}, & \begin{cases} A_n^0 = \frac{\sigma_x + \sqrt{2}\sigma_z}{\sqrt{3}}, \\ A_n^1 = \frac{\sigma_x - \sqrt{2}\sigma_z}{\sqrt{3}}, \end{cases} \\ A_1^1 = \frac{\sigma_x - \sqrt{2}\sigma_z}{\sqrt{3}}, \\ \begin{cases} A_j^0 = \frac{-\sigma_x + \sqrt{2}\sigma_z}{\sqrt{3}}, \\ A_j^1 = \frac{\sigma_x + \sqrt{2}\sigma_z}{\sqrt{3}}, \end{cases} \end{cases} \quad (j=2, 3, \dots, n-1).$$

由于哈密顿量  $H_n(\mathcal{A}_2)$  是自伴算子, 利用精确对角化 (exact diagonalization, ED) 求解其特征值得到: 当  $n = 3$  时, 基态能量约为  $-1.3608$ ; 当

$n = 9$  时, 基态能量约为  $-9.929$ ; 当  $n = 10$  时, 基态能量约为  $-19.572$ ; 当  $n = 11$  时, 基态能量约为  $-19.29$ . 图 4 和表 4 分别给出了当  $n = 3, 9, 10, 11$  时基于 VMC 方法寻找哈密顿量  $H_n(\mathcal{A}_2)$  可能的基态能量  $\lambda(\mathcal{A}_2, S)$  的优化过程以及迭代次数与能量误差, 其余情形类似可得. 由图 4 和表 4 观察到, 借助 VMC 方法也可以快速探测到非局域态, 最终无限逼近于基态能量, 这与理论预期是一致的. 特别地, 当  $n = 3$  时,  $\mathcal{A}_2$  可以探测到 W 态  $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)$ , 这是一类与  $|\psi_0\rangle$ , GHZ 态不具有局域酉等价的量子态, 也充分说明 VMC 方法可以探测到违背 Svetlichny 不等式的其他类型的量子态.

**情景 4** 当哈密顿量为  $H_n(\mathcal{A}_3)$  时, 寻找  $|\Psi_{S,\Omega}\rangle$ ,

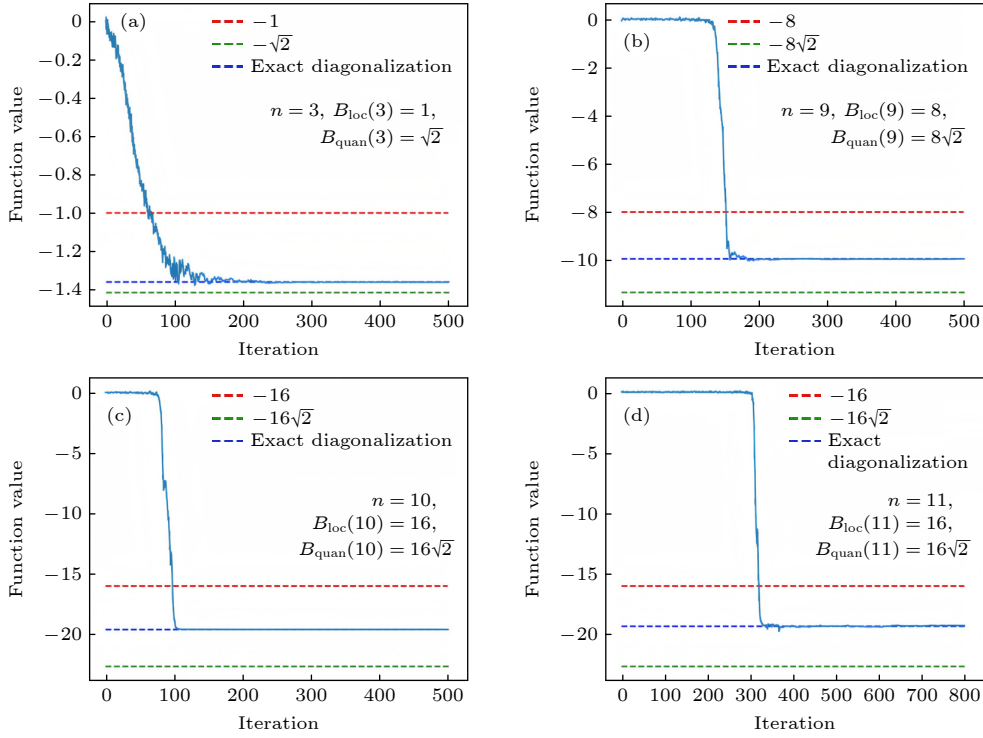


图 4 当  $n = 3, 9, 10, 11$  时, 基于 VMC 方法寻找哈密顿量  $H_n(\mathcal{A}_2)$  可能的基态能量  $\lambda(\mathcal{A}_2, S)$  的优化过程, 其中红色虚线代表局域界  $-B_{\text{loc}}(n)$ , 绿色虚线代表量子界  $-B_{\text{quan}}(n)$ , 蓝色虚线代表 ED 得到的基态能量, 纵轴上的函数值表示  $F_n(\mathcal{A}, S, \Omega)$

Fig. 4. When  $n = 3, 9, 10, 11$ , the optimization process for finding the possible ground state energy  $\lambda(\mathcal{A}_2, S)$  of the Hamiltonian  $H_n(\mathcal{A}_2)$  using VMC method, where the red dashed line represents the local bound  $-B_{\text{loc}}(n)$ , the green dashed line represents the quantum bound  $-B_{\text{quan}}(n)$ , and the blue dashed line represents the ground state energy obtained by ED; the function value on the vertical axis represents  $F_n(\mathcal{A}, S, \Omega)$ .

表 4 寻找哈密顿量  $H_n(\mathcal{A}_2)$  可能的基态能量的迭代次数与能量误差

Table 4. Iterations and energy error for finding the possible ground state energy of the Hamiltonian  $H_n(\mathcal{A}_2)$ .

$n$	能量首次低于局域界的迭代次数	对应的能量值	最大迭代次数	能量误差
3	40	-1.075	500	$8.35 \times 10^{-7}$
9	160	-9.571	500	$1.91 \times 10^{-3}$
10	100	-18.77	500	$2.53 \times 10^{-4}$
11	320	-16.57	500	$3.71 \times 10^{-2}$

使得  $\lambda(\mathcal{A}_3, S) < -B_{\text{loc}}(n)$ , 其中可观测量集为  $\mathcal{A}_3$  为

$$\mathcal{A}_3 : \begin{cases} A_1^0 = \frac{\sqrt{2}\sigma_y + \sqrt{3}\sigma_z}{\sqrt{5}}, \\ A_1^1 = \frac{\sqrt{2}\sigma_y - \sqrt{3}\sigma_z}{\sqrt{5}}, \end{cases} \begin{cases} A_n^0 = \frac{\sqrt{2}\sigma_y + \sqrt{3}\sigma_z}{\sqrt{5}}, \\ A_n^1 = \frac{\sqrt{2}\sigma_y - \sqrt{3}\sigma_z}{\sqrt{5}}, \end{cases} \begin{cases} A_j^0 = \frac{-\sqrt{2}\sigma_y + \sqrt{3}\sigma_z}{\sqrt{5}}, \\ A_j^1 = \frac{\sqrt{2}\sigma_y + \sqrt{3}\sigma_z}{\sqrt{5}}, \end{cases} \quad (j = 2, 3, \dots, n-1).$$

由 ED 求解  $H_n(\mathcal{A}_3)$  特征值得到: 当  $n = 8$  时, 基态能量约为  $-10.8634$ ; 当  $n = 9$  时, 基态能量约为  $-10.8084$ ; 当  $n = 10$  时, 基态能量约为  $-21.5074$ ; 当  $n = 11$  时, 基态能量约为  $-21.3984$ . 图 5 和表 5 分别给出了当  $n = 8, 9, 10, 11$  时基于 VMC 方

法寻找哈密顿量  $H_n(\mathcal{A}_3)$  可能的基态能量  $\lambda(\mathcal{A}_3, S)$  的优化过程以及迭代次数与能量误差, 其余情形类似可得.

**情景 5** 当哈密顿量为  $H_n(\mathcal{A}_4)$  时, 寻找  $|\Psi_{S, \Omega}\rangle$ , 使得  $\lambda(\mathcal{A}_4, S) < -B_{\text{loc}}(n)$ , 其中可观测量集为  $\mathcal{A}_4$  为

$$\mathcal{A}_4 : \begin{cases} A_1^0 = \frac{\sqrt{3}\sigma_x + \sqrt{2}\sigma_y + \sqrt{2}\sigma_z}{\sqrt{7}}, \\ A_1^1 = \frac{\sqrt{3}\sigma_x - \sqrt{2}\sigma_y + \sqrt{2}\sigma_z}{\sqrt{7}}, \end{cases} \begin{cases} A_n^0 = \frac{\sqrt{3}\sigma_x + \sqrt{2}\sigma_y + \sqrt{2}\sigma_z}{\sqrt{7}}, \\ A_n^1 = \frac{\sqrt{3}\sigma_x - \sqrt{2}\sigma_y + \sqrt{2}\sigma_z}{\sqrt{7}}, \end{cases} \begin{cases} A_j^0 = \frac{-\sqrt{3}\sigma_x + \sqrt{2}\sigma_y + \sqrt{2}\sigma_z}{\sqrt{7}}, \\ A_j^1 = \frac{\sqrt{3}\sigma_x + \sqrt{2}\sigma_y + \sqrt{2}\sigma_z}{\sqrt{7}}, \end{cases}$$

( $j = 2, 3, \dots, n-1$ ).

利用 ED 求解  $H_n(\mathcal{A}_4)$  特征值得到: 当  $n = 8$  时, 基态能量约为  $-10.6031$ ; 当  $n = 9$  时, 基态能量约为  $-10.5758$ ; 当  $n = 10$  时, 基态能量约为  $-21.0973$ ; 当  $n = 11$  时, 基态能量约为  $-21.0432$ . 图 6 和表 6 分别给出了当  $n = 8, 9, 10, 11$  时基于 VMC 方法寻找哈密顿量  $H_n(\mathcal{A}_4)$  可能的基态能量  $\lambda(\mathcal{A}_4, S)$  的优化过程以及迭代次数与能量误差, 其余情形类

似可得.

由图 4—图 6 可以看出, 对于这些不同组合的可观测量集, 借助 VMC 方法都可以快速探测到非局域态, 最终无限逼近于哈密顿量的基态能量, 这与理论预期是吻合的. 由此可知, VMC 方法在不同哈密顿量下均能高效、稳定地完成非局域性探测, 这展现了该方法在基于神经网络量子态的非局

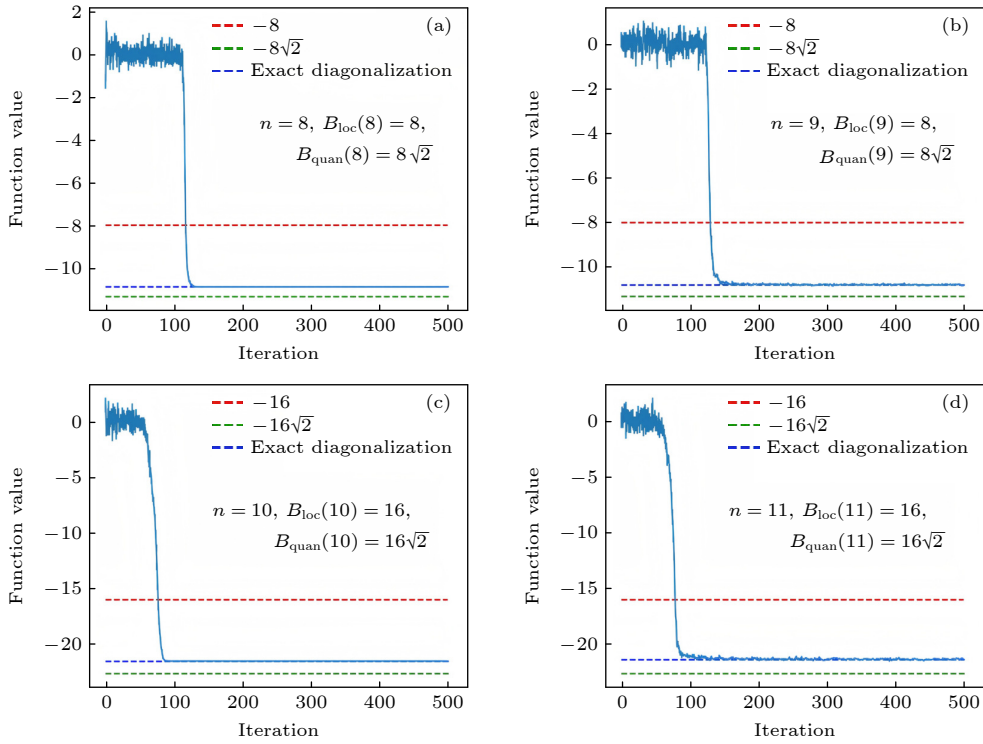


图 5 当  $n = 8, 9, 10, 11$  时, 基于 VMC 方法寻找哈密顿量  $H_n(\mathcal{A}_3)$  可能的基态能量  $\lambda(\mathcal{A}_3, S)$  的优化过程, 其中红色虚线代表局域界  $-B_{\text{loc}}(n)$ , 绿色虚线代表量子界  $-B_{\text{quan}}(n)$ , 蓝色虚线代表 ED 得到的基态能量, 纵轴上的函数值表示  $F_n(\mathcal{A}, S, \Omega)$

Fig. 5. When  $n = 8, 9, 10, 11$ , the optimization process for finding the possible ground state energy  $\lambda(\mathcal{A}_3, S)$  of the Hamiltonian  $H_n(\mathcal{A}_3)$  using VMC method, where the red dashed line represents the local bound  $-B_{\text{loc}}(n)$ , the green dashed line represents the quantum bound  $-B_{\text{quan}}(n)$ , and the blue dashed line represents the ground state energy obtained by ED; the function value on the vertical axis represents  $F_n(\mathcal{A}, S, \Omega)$ .

表 5 寻找哈密顿量  $H_n(\mathcal{A}_3)$  可能的基态能量的迭代次数与能量误差

Table 5. iterations and energy error for finding the possible ground state energy of the Hamiltonian  $H_n(\mathcal{A}_3)$ .

$n$	能量首次低于局域界的迭代次数	对应的能量值	最大迭代次数	能量误差
8	120	-10.138	500	$1.33 \times 10^{-4}$
9	130	-8.20	500	$5.59 \times 10^{-3}$
10	80	-19.40	500	$2.3 \times 10^{-4}$
11	80	-19.04	500	$6.84 \times 10^{-2}$

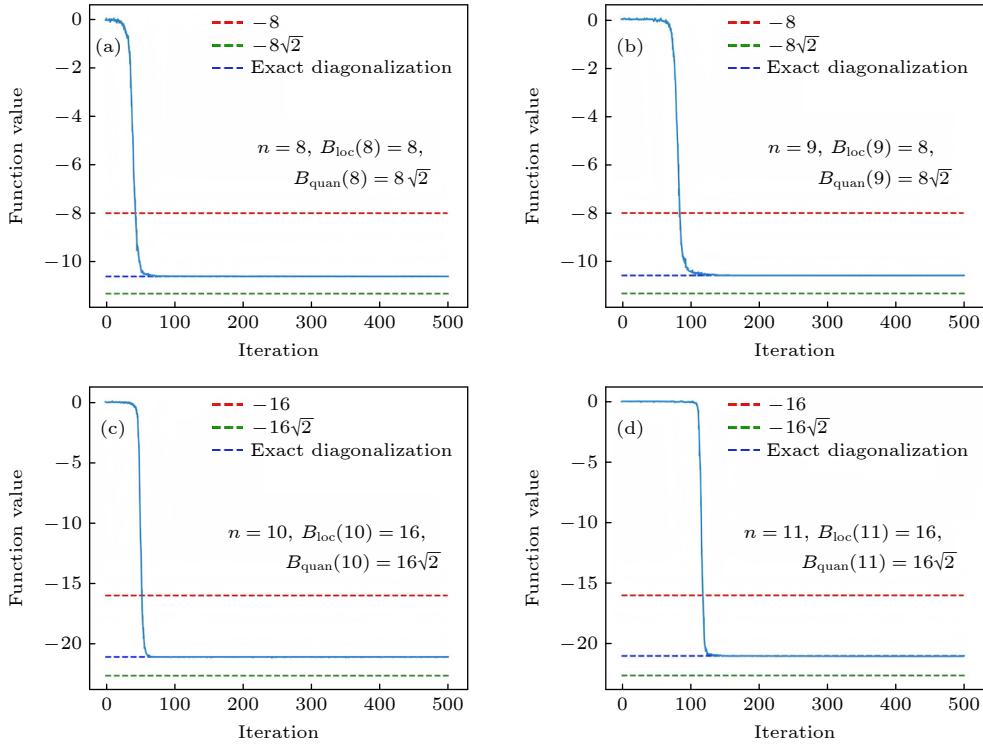


图 6 当  $n = 8, 9, 10, 11$  时, 基于 VMC 方法寻找哈密顿量  $H_n(\mathcal{A}_4)$  可能的基态能量  $\lambda(\mathcal{A}_4, S)$  的优化过程, 其中红色虚线代表局域界  $-B_{\text{loc}}(n)$ , 绿色虚线代表量子界  $-B_{\text{quan}}(n)$ , 蓝色虚线代表 ED 得到的基态能量, 纵轴上的函数值表示  $F_n(\mathcal{A}, S, \Omega)$

Fig. 6. When  $n = 8, 9, 10, 11$ , the optimization process for finding the possible ground state energy  $\lambda(\mathcal{A}_4, S)$  of the Hamiltonian  $H_n(\mathcal{A}_4)$  using VMC method, where the red dashed line represents the local bound  $-B_{\text{loc}}(n)$ , the green dashed line represents the quantum bound  $-B_{\text{quan}}(n)$ , and the blue dashed line represents the ground state energy obtained by ED; the function value on the vertical axis represents  $F_n(\mathcal{A}, S, \Omega)$ .

表 6 寻找哈密顿量  $H_n(\mathcal{A}_4)$  可能的基态能量的迭代次数与能量误差

Table 6. Iterations and energy error for finding the possible ground state energy of the Hamiltonian  $H_n(\mathcal{A}_4)$ .

$n$	能量首次低于局域界的迭代次数	对应的能量值	最大迭代次数	能量误差
8	50	-9.962	500	$5.1 \times 10^{-5}$
9	90	-9.787	500	$1.03 \times 10^{-3}$
10	60	-20.842	500	$2.35 \times 10^{-3}$
11	120	-18.39	500	$2.83 \times 10^{-4}$

域性探测中的有效性与普适潜力, 为多体量子系统的非局域特性研究提供了有力支撑, 也为实验上难以实现的复杂量子态探测开辟了新的途径.

值得注意的是, 不同哈密顿量的能量期望界存在差异, 并非所有的哈密顿量都能突破局域界并违反 Svetlichny 不等式. 而 VMC 方法恰好能借助这一特性, 预先判断特定哈密顿量是否具备探测非局域态的潜力, 从而筛选出适合进行非局域性探测的哈密顿量以及可观测量集, 为后续非局域性的深入研究奠定前期基础.

总体而言, VMC 方法不仅为探测 Svetlichny 不等式的违反构建了兼具可行性与操作性的计算框架, 也为量子非局域性的系统性研究提供了从前

期筛选到非局域态快速探测的完整技术支撑. 这一方法在量子非局域性研究领域展现出的普适性与高效性, 使其成为推动量子非局域性从理论模型到系统性研究落地的核心驱动力, 让原本依赖复杂理论推导或高成本实验验证的非局域性研究, 能够得以通过数值模拟来进行高效推进, 为该领域的基础探索与应用拓展筑牢了方法根基.

## 4 结 论

本文以多体量子非局域性探测为核心目标, 创新性地神经网络量子态与量子非局域性研究之间构建起全新的连接桥梁, 进而借助神经网络量子态来

推进探测实现. 在实施过程中, 先探讨了 Svetlichny 不等式的最大量子违背, 阐明了实现 Svetlichny 不等式最大量子违背的量子态和可观测量集是不唯一的; 然后借助神经网络强大的函数拟合能力, 构建了神经网络量子态, 以多项式复杂度刻画了量子态, 成功化解了多体系统中“指数墙”这一基础障碍; 随后通过对比 Nelder-Mead 单纯形法与 VMC 方法, 发现 VMC 方法在效率与精度上更适配基于神经网络量子态的非局域性探测; 最终验证了 VMC 方法在不同哈密顿量下均能高效、稳定地完成非局域性探测, 展现了该方法在基于神经网络量子态的非局域性探测中的有效性与普适潜力, 为非局域性探测领域提供了颇具价值的研究新见解, 还为多体量子非局域性的理论研究与实际应用提供了兼具可行性与高效性的实施路径, 更为实验上难以实现的复杂量子态探测开辟了新的途径.

未来, 可进一步拓展神经网络在该领域的应用, 探索借助其他类型神经网络构建神经网络量子态来探测非局域性; 也可突破态表示的局限, 探索混合态的神经网络表示方案, 使其适配实际环境中带噪声的量子系统, 从而将非局域性探测延伸至更贴近应用场景的领域, 为多体量子非局域性的研究开辟新方向, 也为其理论突破与技术落地提供更为全面的方法支撑.

## 参考文献

- [1] Ekert A K 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 661
- [2] Bennett C H, Brassard G, Crepeau C 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895
- [3] Mattle K, Weinfurter H, Kwiat P G 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 4656
- [4] Hillery M, Buzek V, Berthiaume A 1999 *Phys. Rev. A* **59** 1829
- [5] Sheng Y B, Zhou L 2017 *Sci. Bull.* **62** 1025
- [6] Long G L, Liu X S 2002 *Phys. Rev. A* **65** 032302
- [7] Bell J S 1964 *Physics* **1** 195
- [8] Clauser J F, Horne M A, Shimony A, Holt R A 1969 *Phys. Rev. Lett.* **23** 880
- [9] Aspect A, Grangier P, Roger G 1981 *Phys. Rev. Lett.* **47** 460
- [10] Tittel W, Brendel J, Zbinden H, Gisin N 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 3563
- [11] Weihs G, Jennewein T, Simon C, Weinfurter H, Zeilinger A 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 5039
- [12] Rowe M A, Kielpinski D, Meyer V, Sackett C A, Itano W M, Monroe C, Wineland D J 2001 *Nature* **409** 791
- [13] Giustina M, Mech A, Ramelow S, Wittmann B, Kofler J, Beyer J, Lita A, Calkins B, Gerrits T, Nam S W, Ursin R, Zeilinger A 2013 *Nature* **497** 227
- [14] Babai L, Fortnow L, Lund C 1991 *Comput. Complex* **1** 3
- [15] Brunner N, Cavalcanti D, Pironio S, Scarani V, Wehner S 2014 *Rev. Mod. Phys.* **86** 419
- [16] Tura J, Augusiak R, Sainz A B, Vértesi T, Lewenstein M, Acín A 2014 *Science* **344** 1256
- [17] Tura J, Augusiak R, Sainz A B, Luecke B, Klempt C, Lewenstein M, Acín A 2015 *Ann. Phys.* **362** 370
- [18] Tura J, Cuevas G D L, Augusiak R, Lewenstein M, Acín A, Cirac J I 2017 *Phys. Rev. X* **7** 021005
- [19] Wagner S, Schmied R, Fadel M, Treutlein P, Sangouard N, Bancal J D 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 170403
- [20] Schmied R, Bancal J D, Allard B, Fadel M, Scarani V, Treutlein P, Sangouard N 2016 *Science* **352** 441
- [21] Hezaveh Y D, Levasseur L P, Marshall P J 2017 *Nature* **548** 555
- [22] Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, et al 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 061102
- [23] Kalinin S V, Sumpter B G, Archibald R K 2015 *Nat. Mater.* **14** 973
- [24] Carleo G, Troyer M 2017 *Science* **355** 602
- [25] Biamonte J, Wittek P, Pancotti N, Rebentrost P, Wiebe N, Lloyd S 2017 *Nature* **549** 195
- [26] Gao X, Duan L M 2017 *Nat. Commun.* **8** 662
- [27] Deng D L, Li X P, Sarma S D 2017 *Phys. Rev. B* **96** 195145
- [28] Deng D L, Li X P, Sarma S D 2017 *Phys. Rev. X* **7** 021021
- [29] Deng D L 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 240402
- [30] Carleo G 2018 *Nat. Commun.* **9** 5322
- [31] Lu S, Gao X, Duan L M 2019 *Phys. Rev. B* **99** 155136
- [32] Jia Z A, Yi B, Zhai R, Wu Y C, Guo G C, Guo G P 2019 *Adv. Quantum Technol.* **2** 1800077
- [33] Nagy A, Savona V 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 250501
- [34] J Hartmann M, Carleo G 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 250502
- [35] Vicentini F, Biella A, Regnault N, Ciuti C 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 250503
- [36] Yang Y, Cao H X, Zhang Z J 2020 *Sci. China-Phys. Mech. Astron.* **63** 210312
- [37] Wang J Q, Wu H Q, He R Q, Lu Z Y 2024 *Phys. Rev. B* **109** 245120
- [38] El Ayachi F, Ait Mansour H, El Baz M 2025 *Phys. Scr.* **100** 016001
- [39] Jones N S, Linden N, Massar S 2005 *Phys. Rev. A* **71** 042329
- [40] Roux N L, Bengio Y 2008 *Neural Comput.* **20** 1631

# Detecting multipartite quantum nonlocality based on Svetlichny inequality\*

YANG Ying<sup>1)†</sup> CAO Huaixin<sup>2)</sup> ZHANG Chengyang<sup>3)</sup>

1) (*School of Mathematics and Information Technology, Yuncheng University, Yuncheng 044000, China*)

2) (*School of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China*)

3) (*Business School, Xi'an International Studies University, Xi'an 710128, China*)

( Received 27 October 2025; revised manuscript received 6 December 2025 )

## Abstract

Quantum nonlocality, as an invaluable quantum resource, plays an indispensable role in processing numerous quantum information. Accurate characterization and effective detection of nonlocality have always been important and challenging topics in theoretical and experimental quantum information research. How to precisely identify and verify the phenomenon of quantum nonlocality in complex many-body quantum systems, and how to design more efficient detection methods for the nonlocality, have become urgent scientific issues that need to be addressed. This paper is dedicated to the detection of multipartite quantum nonlocality, with a focus on exploring how the Svetlichny inequality can be used to detect it. First, the maximum quantum violation of the Svetlichny inequality is discussed. Through construction, a quantum state  $\rho_0$  and a set of observables  $\mathcal{A}_0$  are obtained, thereby achieving the maximum quantum violation of the Svetlichny inequality. It is also demonstrated how to construct other quantum states and sets of observables to achieve their maximum violation of the Svetlichny inequality, thereby clarifying that the quantum states and sets of observables that achieve the maximum quantum violation of the Svetlichny inequality are not unique. Second, in order to find more quantum states and sets of observables that violate the Svetlichny inequality, a corresponding Hamiltonian is constructed using the Svetlichny operator. This core issue of finding quantum states that violate the Svetlichny inequality is ingeniously transformed into solving the ground state of this Hamiltonian. Leveraging the powerful function approximation capability of neural networks, neural network quantum states are constructed. Two optimization algorithms, i.e. the Nelder-Mead simplex method and quantum variational Monte Carlo (VMC), are respectively adopted to optimize the network parameters in order to find the ground state energy and ground state of the Hamiltonian, thereby achieving a violation of the Svetlichny inequality and ultimately detecting nonlocal states. To ensure the efficiency and accuracy of the detection method, we conduct a comparative study of different optimization methods. By comparing the Nelder-Mead simplex method with the VMC method, we find that the VMC method is more suitable for nonlocality detection based on neural network quantum states in terms of efficiency and accuracy, providing reliable computational support for detecting many-body quantum nonlocality and the violation of the Svetlichny inequality. To verify the validity and universality of the proposed method, we detect the nonlocality of multipartite quantum pure states by using neural network quantum states and the VMC method under different Hamiltonians. The results indicate

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12001480, 12271325), the Research Foundation for Basic Research of Shanxi Province, China (Grant No. 202403021211003), the Scientific Research and Innovation Talent Team of Yuncheng University, China (Grant No. 2024002), the PhD Start-up Program of Yuncheng University, China (Grant No. YQ-2023073), and the Research Foundation for Basic Research of Shaanxi Province, China (Grant No. 2025JC-YBQN-112).

† Corresponding author. E-mail: [yangyingx163@163.com](mailto:yangyingx163@163.com)

that this method successfully captures violations of the Svetlichny inequality in many-body quantum systems, thereby achieving effective detection of multipartite quantum nonlocality. This fully confirms the validity and universal potential of the VMC method in nonlocality detection based on neural network quantum states. This study not only verifies the theoretical and technical feasibility of detecting multipartite quantum nonlocality based on neural network quantum states and the VMC method, but also provides valuable new insights for detecting nonlocality. More importantly, it opens up a new research avenue for using neural networks to solve complex quantum many-body problems.

**Keywords:** quantum nonlocality, neural network quantum state, Svetlichny inequality, variational Monte Carlo, detection

**DOI:** [10.7498/aps.75.20251461](https://doi.org/10.7498/aps.75.20251461)

**CSTR:** [32037.14.aps.75.20251461](https://cstr.cn/32037.14.aps.75.20251461)



基于Svetlichny不等式的多体量子非局域性探测

杨莹 曹怀信 张程泱

Detecting multipartite quantum nonlocality based on Svetlichny inequality

YANG Ying CAO Huaixin ZHANG Chengyang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 75, 050602 (2026) DOI: 10.7498/aps.75.20251461

CSTR: 32037.14.aps.75.20251461

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.75.20251461>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

Markov环境下“X”态基于CHSH不等式的量子非局域关联检验

Quantum nonlocality testing of the “X” state based on the CHSH inequality in Markov environment

物理学报. 2023, 72(5): 050301 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222218>

基于CHSH不等式几何解释的“X”态量子非局域关联检验

Quantum nonlocal test of “X” state based on geometric interpretation of CHSH inequality

物理学报. 2022, 71(17): 170302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220445>

含噪声的三体量子非局域共享的持久性

Persistency of tripartite nonlocality sharing with noise

物理学报. 2024, 73(21): 210301 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20241150>

量子混合态的两种神经网络表示

Two types of neural network representations of quantum mixed states

物理学报. 2023, 72(11): 110301 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20221905>

非马尔科夫环境中Werner态的量子非局域关联检验研究

Quantum non-local correlation testing of Werner state in non-Markovian environment

物理学报. 2024, 73(16): 160301 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20240450>

退相干条件下两比特纠缠态的量子非局域关联检验

Testing quantum nonlocality of two-qubit entangled states under decoherence

物理学报. 2022, 71(7): 070301 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211453>