Critical dynamics near QCD critical point based on nonlinear Langevin equation

南　佑樹、国広　悌二（京大理）

1　導入

QCD 相図には閉じ込め相と非閉じ込め相を隔てる一次相転移線の端点として臨界点の存在がさまざまな有効模型により予想されている。しかしながら、実験的にはその存在はまだ確かめられていない。そのため実験的に検証可能な QCD 臨界点のシグナルとなる様な臨界現象の探索が精力的に行われている。QCD 臨界点で期待される現象のひとつとして Karsch 等によって指摘された体積粘性率の発散が挙げられる [1]。しかし、文献 [1] で用いられている ansatz には疑問が出されており [2]、また、相対論的ボルツマン方程式に基づく解析では [3], 発散せずに有限に留まるなど、その振る舞いには議論の余地が存在する。

輸送係数の臨界発散は、一般に、巨視的な揺らぎの動的な非線形結合に由来することが知られており [4]、通常、一般化された非線形ランジュバン方程式に動的くりこみ群理論を適用することで解析される [5, 6]。一般化された非線形ランジュバン方程式は微視的運動方程式（リウビルまたはハイゼンベルグ方程式）を森の射影演算子の方法により [7]、形式的に、遅い変化と速い変化に分解することで導出されている。この分解は形式的なものであるので非線形ランジュバン方程式は、任意のゆっくり変化する力学量（遅い変数）について考えることができ、QCD 臨界点の場合であっても成り立つと期待できる。従って、本研究では QCD 臨界点近傍のダイナミクスを記述する非線形ランジュバン方程式を構成し動的繰り込み群により輸送係数の臨界挙動を明らかにする。以下で、非線形ランジュバン方程式と動的くりこみ群について簡単に紹介する。

非線形ランジュバン方程式は一般に次の形で与えられる [7]。

$$\frac{\partial}{\partial t}A_j(t) = v_j(A) - \sum_k L_{jk}(A)\frac{\delta(\beta H(A))}{\delta A_k} + \theta_j(t), \tag{1}$$

ここで A_j：遅い変数、$v_j(A(t))$：流れ項、$H(A(t))$：熱力学ポテンシャル、L_{jk}：運動学的係数、$\theta_j(t)$：ランダムノイズ。右辺第一、二項がゆっくりとした変化を表しており、遅い変数について非線形になっている。流れ項は可逆的な変化を表している。また、この項に含まれる非線形項は動的な非線形結合を表しており、静的な場合には存在しない。右辺第二項は散逸項、つまり、不可逆的な変化を表している。この項の非線形結合は熱力学ポテンシャルに由来するもので、静的な場合にも存在する。最後の項、$\theta_j(t)$ は速い変化を表しており、次の搖動散逸関係で特徴づけられる、確率変数として扱われる。

$$\langle\theta_j(t)\theta_k(t^{'});a\rangle = 2L_{jk}(a)\delta(t-t^{'}), \tag{2}$$

この関係は手で与えているのではなく、形式的な分解の過程で自動的に得られるものであることに注意。また、非線形ランジュバン方程式は赤外有効理論であるので紫外カットオフ Λ を持つことにも注意。

動的くりこみ変換は非線形ランジュバン方程式を波数が $\Lambda-\delta\Lambda<k<\Lambda$ の成分を持つ遅い変数について平均することで与えられる [6, 5]。つまり、カットオフを $\Lambda\to\Lambda-\delta\Lambda$ と変化させてランジュバン方程式の応答をみる。このとき、輸送係数の応答から

輸送係数に対する繰り込み群方程式が得られ、静的くりこみ群と同様の議論から臨界指数を得ることができる。ここで、臨界指数はランジュバン方程式の関数形のみから決定され、ランジュバン方程式に含まれるパラメーターの具体的な値は必要としないことに注意する。

2 QCD 臨界点における非線形ランジュバン方程式

QCD 臨界点近傍のダイナミクスを記述する非線形ランジュバン方程式を構成する。まず、QCD 臨界点における遅い変数を決める。遅い変数は、一般に、ソフトモードと保存量密度であたえられるが、QCD 臨界点におけるソフトモードはなんであろうか？答えは、カイラル極限と異なり、保存量密度の長波長成分、つまり、バリオン数密度、エネルギー密度、運動量密度であることが明らかにされている [8, 9]。ソフトモードが保存量密度なので、遅い変数として保存量密度のみを選ぶことができる。つまり、QCD 臨界点における遅い変数は

$$A_j = \{\delta n, \delta e = (\delta T^{00}), \delta J^i = (\delta T^{0i})\}. \quad (3)$$

である。保存量密度の遅い力学は基本的に流体力学に従うので、QCD 臨界点近傍の系は相対論的臨界液体として扱えるであろうことが期待できる。**基本的に**流体というだけで、通常の流体力学には無い、臨界点固有の非線形揺らぎの効果を含むことに注意。

以下の構成で注意すべきことは臨界点近傍で全ての揺らぎが増大するわけでは無いということである。揺らぎのおおまかな振る舞いは、相対論的線形流体方程式（線形レベルでの遅い変数の運動方程式）に静的なスケール則により熱力学量の特異性を加味することで解析される [10]。その結果として、δn と δe は増大するが $\delta \boldsymbol{J}$ は増大しないという事が得られる。つまり、$\delta \boldsymbol{J}$ の非線形性は無視してよい。

以下、スペースの都合上、細かい導出は省略するが相対論的線形流体方程式（線形ランダウ方程式）に、非線形ランジュバン方程式の一般形、式 (1) に基づいて非線形揺らぎの効果を取り込むことによって、次の非線形ランジュバン方程式が得られる。

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} = -\nabla\cdot(n\delta\boldsymbol{v}) - L_{nn}\frac{\delta(\beta H)}{\delta n} + \theta_n, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \delta e}{\partial t} = -\nabla\cdot((e+P_c)\delta\boldsymbol{v}), \quad (5)$$

$$\frac{\partial \delta \boldsymbol{J}}{\partial t} = -n\nabla\frac{\delta H}{\delta n} - (e+P_c)\nabla\frac{\delta H}{\delta e} - L_{JJ}\cdot\frac{\delta(\beta H)}{\delta \boldsymbol{J}} + \boldsymbol{\theta}_J, \quad (6)$$

ここで $\delta\boldsymbol{v} = \delta H/\delta\boldsymbol{J}$：流速揺らぎ、$n = n_c + \delta n$、$e = e_c + \delta e$。添え字 c が付いている量は、平衡状態での値を表す。また

$$L_{nn} = -\lambda_0\left(\frac{n_c T_c}{e_c + P_c}\right)^2 \nabla^2, \quad (7)$$

$$L^{ij}_{JJ} = -T_c[\eta_0\delta_{ij}\partial_i\partial_j + (\zeta_0 + (1-2/d)\eta_0)\partial_i\partial_j], \quad (8)$$

ここで、λ_0：熱伝導率、η_0：ずれ粘性率、ζ_0：体積粘性率、d：空間次元。さらに

$$H(\delta n, \delta e, \delta\boldsymbol{J}) = H_{\mathrm{Ising}}(\psi, m) + \frac{1}{2(e_c+P_c)}\delta\boldsymbol{J}^2, \quad (9)$$

である。QCD 臨界点の静的普遍類がイジング系の臨界点と同じであることから

$$\delta n = \alpha_1\psi + \beta_1 m, \quad (10)$$

$$T_c^{-1}\delta e = \alpha_2\psi + \beta_2 m. \quad (11)$$

の写像関係のもとイジング系の熱力学ポテンシャル H_{Ising} を用いた [6, 11]。ここで、ψ：スピン密度、m：イジング系のエネルギー密度。繰り込み群による解析では、写像関係における係数 $\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}$ は決めなくても良いことに注意。

3　動的繰り込み群による解析

詳しい導出は省略するが、ϵ 展開法を用い $O(\epsilon)$ で計算すると以下の繰り込み群方程式が得られる。

$$-\Lambda\frac{\partial\lambda(\Lambda)}{\partial\Lambda} = \frac{3}{4}f(\Lambda)\lambda(\Lambda), \tag{12}$$

$$-\Lambda\frac{\partial\eta(\Lambda)}{\partial\Lambda} = \frac{1}{24}f(\Lambda)\eta(\Lambda), \tag{13}$$

$$-\Lambda\frac{\partial f(\Lambda)}{\partial\Lambda} = f(\Lambda)(\epsilon-\frac{19}{24}f(\Lambda)), \tag{14}$$

$$-\Lambda\frac{\partial\zeta(\Lambda)}{\partial\Lambda} = A\gamma^2(\Lambda)\lambda^{-1}(\Lambda)\Lambda^{-\epsilon-4}, \tag{15}$$

ここで $f(\Lambda)\equiv B/(\eta(\Lambda)\lambda(\Lambda)\Lambda^{\epsilon})$、$\epsilon=4-d$、$A, B$：結果に影響しない定数。この繰り込み群方程式から、静的繰り込み群と同様の議論により、輸送係数の臨界指数を得ることができる。$d=3$ における、relevant な固定点近傍での漸近的振る舞いとして

$$\lambda_{\mathrm{R}} \sim \xi^{0.95}, \tag{16}$$

$$\eta_{\mathrm{R}} \sim \xi^{0.053}, \tag{17}$$

$$\zeta_{\mathrm{R}} \sim \xi^{2.8}. \tag{18}$$

を得る。体積粘性率と熱伝導率が強い発散を示し、ずれ粘性率が非常に弱い特異性を持つことがわかる。

4　まとめ

相対論的線形流体方程式に非線形ランジュバン方程式の一般形に基づいて臨界点特有の非線形揺らぎを取り込むことでQCD臨界点近傍のダイナミクスを記述する非線形ランジュバン方程式を構成した。また、得られたランジュバン方程式に動的くりこみ群を適用することでQCD臨界点近傍での輸送係数の臨界挙動を解析した。この結果から、通常、重イオン衝突の解析では無視される、体積粘性率と熱伝導率が非常に強い発散を示すことを明らかにした。つまり、QCD臨界点近傍ではずれ粘性率より体積粘性率および熱伝導率が重要になるであろう。また、重イオン衝突で生成される物質の完全流体としての記述もQCD臨界点近傍では成り立たないと考えられる。Karsch等[1]による結果と比較すると体積粘性率の発散的な振る舞いは同じだが発散の強さが大きく異なることに注意する。

今後の展望としてはここで得られた輸送係数の臨界発散に基づく実験的に検証可能なQCD臨界点のシグナルとなる現象の探索が考えられる。

参考文献

[1] F.Karsch, D.Kharzeev and K.Tuchin, Phys. Lett. B **663**, (2008), 217.

[2] P. Romatschke and D. T. Son, arXiv:0903.3946 [hep-ph]. G. D. Moore and O. Saremi, JHEP **0809** (2008) 015.

[3] C. Sasaki and K. Redlich, Nucl. Phys. A **832** (2010),62.

[4] 川崎恭治、「非平衡と相転移」、朝倉書店 (2000)

[5] G.F. Mazenko, *Nonequilibrium Statistical Mechanics*, (WiLEY-VCH, 2006).

[6] A. Onuki, *Phase Transition Dynamics*, (Cambridge University Press, 2007).

[7] H. Mori and H.Fujisaka, Prog. Theor. Phys. **49**, 764 (1973).

[8] H.Fujii, Phys. Rev .D **67** (2003),094018; H.Fujii and M.Ohtani, Phys. Rev. D **70** (2004), 014016; H. Fujii and M. Ohtani, Prog. Theor. Phys. Suppl. **153** (2004), 157;
H. Fujii and N. Tanji, J. Phys. G **35** (2008), 104060.

[9] D.T.Son and M.A.Stephanov, Phys. Rev. D **70** (2004), 056001.

[10] Y. Minami and T. Kunihiro, Prog. Theor. Phys. **122**, 881 (2010), and references therein.

[11] A. Onuki, Phys. Rev.E 55,403 (1997) and references therein.