ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МОДУЛИРОВАННЫХ ПУЧКОВ С ПЛАЗМОЙ*

В. И. КУРИЛКО

Физико-технический институт АН УССР, СССР

1. Как было показано Файнбергом [1], ускорение заряженных частиц в плазме при помощи продольных волн, возбуждаемых вводимыми извне пучками электронов, обладает рядом существенных преимуществ по сравнению с классическими методами линейного ускорения. В основе этого метода лежит неустойчивость пучка заряженных частиц относительно черенковского возбуждения продольных колебаний плазмы [2, 3], в результате развития которой энергия пучка преобразуется в ускоряющее поле.

В настоящее время линейная теория плазменно-пучкового взаимодействия изучена достаточно подробно [4], поэтому основной задачей теории является исследование нелинейных характеристик этого взаимодействия, в частности, определения максимальной амплитуды ускоряющего поля [5]. Наибольшего успеха в этом направлении удалось достичь с помощью квазилинейного приближения [6, 7]. Однако применимость последнего ограничена, с частности, требованием высокой плотности спектра возбуждаемых колебаний $\varepsilon \gg \Delta\omega \equiv \Delta k V$($\varepsilon$ — инкремент нарастания неустойчивости, $\Delta\omega$ —расстояние между собственными частотами плазмы V—скорость частиц пучка). Генерируемое при этом поле представляет собой совокупность большого числа колебаний с независимыми фазами. Такие поля представляют интерес для стохастического нагрева и ускорения плазмы [8—12]. Для ускорения регулярными волнами необходимо обеспечить разрежение спектра плазменных колебаний [5], например, путем предварительной модуляции пучка [13, 14].

В настоящей работе рассмотрена нелинейная теория черенковского возбуждения регулярных колебаний в плазме инжектируемым в нее извне модулированным пучком заряженных частиц в условиях, когда стабилизация роста амплитуды колебаний определяется обратным влиянием возбуждаемого пучком поля на движении частиц пучка.

---

* Доклад не зачитывался.

2. Рассмотрим плазменный резонатор медленной волны, образованный отрезком плазменного волновода, поле в котором возбуждается модулированным пучком электронов. Спектр колебаний резонатора можно считать дискретным, если инкремент нарастания мал по сравнению с расстоянием $\Delta\omega = \Delta k \cdot V$ между отдельными его линиями: $\varepsilon \ll \Delta\omega$. При этом эффективность возбуждения резонатора максимальна для колебаний, фазовая скорость которых равна скорости пучка: $V_{\phi}^{(s)} \equiv \Omega_s / k_s = V$. Так как $\Delta k \simeq \pi / L$, где L—длина резонатора, то условие $\varepsilon \ll \Delta\omega$ эквивалентно требованию малости времени пролета $T \equiv L/V$ по сравнению с характерным временем $\tau_f \sim \varepsilon^{-1}$ нарастания поля. В этом случае существенное увеличение амплитуды поля в резонаторе может быть обеспечено накоплением в нем энергии, теряемой последовательно входящими частицами пучка*. Для этого необходимо, чтобы добротность резонатора была достаточно большой.

Самосогласованная система уравнений, описывающи взаимодействие пучка с плазменным резонатором в рассматриваемых условиях, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 E_{\parallel}}{\partial t^2} + 2d\Omega_s \frac{\partial E_{\parallel}}{\partial t} + \Omega_s^2 E_{\parallel} = -4\pi \frac{\partial}{\partial t} j_{в}, \tag{1}$$

$$j_{в} \equiv \frac{e}{2\pi r} \delta(r) \int dq I(q) \cdot \delta[z - Z(\tau, q)] \cdot \dot{Z}(\tau, q);$$

$$\dot{P} = eE_{\parallel}[Z(\tau, q);\ t(\tau, q)]; \tag{2}$$

$$q \equiv (t_o p_o);\ P(\tau, q) \equiv m_o \dot{Z}(\tau, q) \cdot [1 - \dot{Z}^2/c^2]^{-1/2}. \tag{3}$$

Здесь точкой обозначена производная по τ при фиксированном q; t_0— момент влета частицы с импульсом p_0; $I(q)$—ток частиц на входе в резонатор.

Эффективное возбуждение одного резонансного колебания может иметь место только при малом тепловом разбросе в пучке, поэтому ниже мы будем пренебрегать этим разбросом, считая пучок модулированным лишь по плотности. В этом случае $I(t_o)$ является периодической функцией времени, причем из условия синхронизма $V_{\phi}^{s} = V$ следует равенство $\omega_м = \Omega_s$, где $\omega_м$ —частота модуляции пучка.

Считая правую часть (2) известной, можно проинтегрировать (1) и найти зависимость от времени поля искомого колебания:

$$F(\tau) = -2\psi \int_0^{\tau} d\tau' \psi(\tau') \int_0^{\theta(\tau')} d\tau'' \cos[\tau - \tau' + \Delta(\tau''\tau')], \tag{4}$$

где введены обозначения

$$\tau \equiv \Omega_s t;\ F \equiv \frac{eEk_s}{m_0 \Omega_s^2}; \qquad E_{\parallel}(r, z, t) = E(\tau) \cos k_s z \Phi(r);$$

* В квазилинейном приближении эф ект накопления рассмотрен в работах [15, 16].

$$\Phi(0)=1; \qquad \mu\equiv\frac{4\pi e^2 \bar{I}}{m_0\Omega^2_s SL}; \qquad S\equiv\int\Phi^2(r)rdr;$$

$$I(\tau)=\bar{I}\cdot\psi(\tau); \qquad \Delta(\tau'', \tau')\equiv k_s Z(\tau'', \tau')-\tau'';$$

$\theta(\tau')$ —время пролета через резонатор частицы, вошедшей в него в момент влета τ'.

Соотношения (3) и (4) представляют собой систему интегро-дифференциальных уравнений для поля в резонаторе. Учитывая, что при $\varepsilon T\gg 1$ амплитуда R и фаза φ поля ($F\equiv-R\cos(\tau\ \varphi)$) мало меняются за время пролета T, можно проинтегрировать уравнения движения (3). Тогда из (4) получим следующую систему уравнений для R и φ:

$$\frac{d}{dn}[R(n)e^{i\varphi(n)}]=\mu_*\int_{-\pi}^{+\pi}\psi(\tau')d\tau'\int_0^{d(n,\tau')}\frac{dx\exp\{i[x-\tau'+\varphi(n,\tau')]\}}{\dot{\Delta}[R(n),\varphi(n),\tau',x]}, \quad (5)$$

где $\mu_*\equiv\mu/2\pi$ а $d(n,\tau')\equiv\Delta[\theta(\tau'),\tau']$ —смещение на выходе из резонатора частицы, вошедшей в него в момент времени $\tau_0=2\pi n+\tau'$.

Ниже мы рассмотрим решения системы (5) в простейших предельных случаях сильной и слабой модуляции, релятивистского и нерелятивистского пучка.

3. СИЛЬНО МОДУЛИРОВАННЫЙ ПУЧОК ($\psi(\tau)=\delta(\tau)$)

а) Нерелятивистские энергии ($V\ll c$) [17].

Сильно модулированный пучок возбуждает резонатор спонтанным черенковским излучением последовательности сгустков. При этом на начальной стадии поля сгустков когерентно складываются, в результате чего амплитуда поля линейно нарастает со временем: $R(\tau)=4\pi\mu N\tau$ ($2\pi N\equiv k_s L$). На нелинейной стадии зависимость от времени амплитуды и фазы поля определяется уравнениями (5), из которых находим максимальную амплитуду и соответствующую фазу поля:

$$E_{max}=\frac{m_0V^2}{2e|L}\cdot\frac{8}{\pi N}K^2(k^2_m);$$

$$2E(k^2_m)-K(k^2_m)=0, \qquad k_m\simeq 0{,}826;$$

$$\varphi_m=2\arcsin k_m-\pi/2,$$

где E и K—полные эллиптические интегралы первого и второго рода, соответственно.

Физически насыщение роста амплитуды поля объясняется смещением сгустка по фазе под действием поля резонатора. При больших амплитудах это смещение настолько велико, что за время пролета сгусток успеет совершить половину фазового колебания ($\alpha_{max}=-\alpha_{min}=\pi/2$), побывает в тормозящей и ускоряющей фазах поля и выйдет из резонатора с энергией, равной энергии инжекции. Основанная на этих соображениях оценка дает величину E_{max} того же порядка, что и аналитический расчет (6).

Согласно (5), вследствие нарушения когерентности излучения сгустков из-за их фазового движения, амплитуда поля на нелинейной стадии нарастает пропорционально $n^{2/3}$, а не линейно со временем. Зная скорость роста амплитуды, оценим необходимую для достижения E_{max} длительность импульса n_{max}, а также кпд системы

$\eta \equiv W_f/W_p$ ($W_f \equiv \frac{1}{8\pi} E^2_m \pi SL$ —энергия поля, $W_p \equiv 2\pi \bar{I} \times \Omega^{-1}_s n_m$ — энергия прошедших частиц). Под ставляя сюда значения параметров системы, найдем:

$$\eta \simeq {}^1/_N; \qquad n_{max} \simeq R^{3/2}_{max} \mu^{-1}, \tag{7}$$

где численные множители порядка единицы опущены, поскольку длительность импульса n_m определена лишь по порядку величины.

б) Релятивистские энергии ($\gamma \equiv (1-\beta_0^2)^{-1/2} \gg 1$)

В этом случае из уравнений для амплитуды и фазы поля (5) имеем:

$$E_{max} = \begin{cases} \dfrac{m_0 c^2 \gamma}{|e|L} \cdot \dfrac{4\gamma^2}{\pi N} \cdot K^2(k^2_m) & \gamma^2 \ll N; \\ \dfrac{4 m_0 c^2 \gamma}{|e|L} & \gamma^2 \gg N. \end{cases} \tag{8}$$

Таким образом, максимум высокочастотного потенциала, наводимого пучком в резонаторе, равен учетверенной энергии пучка. Для длительности импульса n_m и кпд η генератора в этом случае имеем:

$$n_{max} \simeq \frac{\gamma^{1/2}}{N^{3/2}\mu}; \qquad \eta \simeq (\gamma/N)^{1/2}. \tag{9}$$

в) Изложенная выше теория взаимодействия модулированного пучка с плазменным резонатором применима в условиях первого эксперимента по коллективному взаимодействию электронного пучка с плазмой [18] ($I \simeq 1A$; $n_p \simeq 7 \cdot 10^{10}$ см$^{-3}$; $\beta_0 \simeq {}^1/_2$; $\lambda_д \simeq 5$ см; $N=4$). Для этих параметров $\mu \sim 2 \cdot 10^{-5}$, $\varepsilon \simeq \Omega \dot{R} \simeq 4\pi\mu N\Omega \sim 10^{-3}\Omega$, $\Delta\omega \sim \frac{\Omega}{2N} \sim 0{,}1\Omega$. Измеренная в эксперименте ширина линии оказалась сравнимой с $\Delta\omega$. Причина этого, повидимому, заключается в неоднородности плазмы по длине резонатора, нарушающей синхронизм между пучком и волной [19,20]. При отсутствии неоднородности на установке с такими параметрами можно было бы получить $E_{max} \simeq 3kV/_{см}$ и $(\Delta\varepsilon)_{max} \simeq 15keV$. Повидимому, именно неоднородность плазмы по длине установки и, возможно, большая частота соударений, не позволили наблюдать коллективное возбуждение плазмы релятивистским модулированным пучком [21]. Оценка ожидаемой величины напряженности поля и потерь энергии для этого эксперимента затруднена отсутствием данных о параметрах пучка и плазмы. Можно лишь утверждать, что для характерных размеров секции и длин волн ($L \sim 10^2_{см}$, $\lambda \sim 10_{см}$, $\gamma \sim 10$, $I \simeq 0{,}1A$)

$E_{max} \sim 200 kV/_{см}$, а соответствующая длительность импульса равна

$$\tau \sim 7 \cdot 10^{-6} сек (Q > n_m \simeq 2 \cdot 10^4).$$

4. Немодулированный пучок ($\psi(\tau) = 1$).

В этом случае на начальной стадии развития неустойчивости эффект усилия модуляции пучка полем резонатора приводит к экспоненциальному росту амплитуды поля со временем с инкрементом

$$\varepsilon_L = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/3}} (\pi N \mu)^{1/3} \Omega_s.$$

На нелинейной стадии, когда смещение частиц пучка под действием поля растет, уравнение (5) для амплитуды поля принимает следующий вид:

$$\frac{d}{dn} R^{3/2} = 6\sqrt{2}\mu_* \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta [\sin\alpha_-(\theta) - \mathrm{sh}\alpha_+(\theta)], \qquad (10)$$

где зависимость фаз $\alpha_\mp$ вылета ускоренных (+) и замедленных (—) частиц от фазы влета ϑ определяется уравнениями:

$$\sqrt{2R}\{\pi N + \theta - \arcsin[\sin\theta \,\mathrm{ch}\alpha_+(\theta)]\} = \int_0^{\alpha_+(\theta)} \frac{dx}{(1 - \sin^2\theta \,\mathrm{ch}^2 x)^{1/2}}; \qquad (11)$$

$$\sqrt{2R}\{\pi N + - \arcsin\theta [\sin\theta \cos\alpha_-(\theta)]\} = \int_0^{\alpha_-(\theta)} \frac{dx}{(1 - \sin^2\theta \cos^2 x)^{1/2}}.$$

Эти соотношения справедливы при условии монотонного изменения фазы частицы и в области значений амплитуд, определяемой неравенствами $(\mu N^2)^2 \ll R \ll N^{-2}$, дают экспоненциальный рост амплитуды поля со временем с показателем экспоненты

$$\varepsilon_{NL} = \frac{1}{2} \mu \pi^2 N^2.$$

Максимальная амплитуда поля в этом случае $R_{max} \approx N^{-2}$ отличается от (6) численным множителем порядка 0,1. Физически уменьшение (на нелинейной стадии) скорости роста поля и его максимальной амплитуды для немодулированного пучка объясняется тем, что в этом случае нарастание амплитуды определяется разностным эффектом торможения и ускорения частиц, попадающих в соответствующие значения фазы поля при входе в резонатор. Сокращение характерного времени нарастания амплитуды поля с увеличением глубины модуляции пучка качественно объясняет наблюдавшуюся в [22] сильную зависимость спектральной плотности генерируемого пучком поля от уровня мощности модуляции.

5. Рассмотренный выше эффект фазового скольжения частиц пучка под действием возбуждаемого ими поля ограничивает рост амплитуды поля только при малых плотностях пучка. Для плотных пучков стабилизация неустойчивости может быть обусловлена нелинейным эффектом

зависимости частоты (фазовой скорости) волны от ее амплитуды [5,23]. Ниже мы рассмотрим этот эффект для моноэнергетического релятивистского ($\gamma \gg 1$) пучка, движущегося сквозь холодную электронную плазму*.

Исходная система уравнений состоит из уравнений движения для частиц пучка и плазмы в переменных Лагранжа и уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} Z_\alpha (t,q) = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} E[Z_\alpha (t,q);\ t]; \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} E(z,t) = 4\pi \sum_\alpha e_\alpha \int dq' f_\alpha (q') \cdot \delta[z - Z_\alpha (t,q')], \tag{13}$$

где $\alpha \equiv (p, b, i)$; f_α (q) — сохраняющаяся вдоль траектории функция распределения частиц сорта α по координатам и импульсам

$$(q \equiv (z_0 p_0); \quad m_\alpha \equiv m_{0\alpha} \cdot (1 - \beta_\alpha^2)^{-1/2}).$$

Эти уравнения эквивалентны системе из двух нелинейных интегро-дифференциальных уравнений для

$$\Delta_\alpha (t,q) \equiv Z_\alpha (t,q) - q - V_\alpha t,$$

которая при малом тепловом разбросе ($q \equiv z_0$) и отсутствии пересечения траекторий ($|\Delta_g| \ll \lambda_д$) сводится к следующей системе дифференциальных уравнений с малой нелинейностью [24]:

$$\left(\gamma^3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2{}_b\right)\Delta_b(t,q) = \omega^2{}_p \Delta_p(t,q + V_b t;) \tag{14}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2{}_p\right)\Delta_p(t,q) = \omega^2{}_b \Delta_b(t,q - V_b t) + \frac{3}{2}\omega^2{}_p \Delta_p \cdot \frac{\dot{\Delta}_p^2}{c^2}; \tag{15}$$

$$f_i \equiv n_i \delta(p_0); \quad f_b \equiv n_p \delta(p_0); \quad f_b \equiv n_p \delta[p_0 - p(V_b)];$$

$$\omega^2{}_\alpha \equiv 4\pi e^2 \cdot m_{0\alpha}^{-1} \cdot n_\alpha; \qquad n_i \equiv n_p + n_b.$$

Исключая $\Delta_b(t, q)$ из (15) с помощью (14), для медленно меняющих со временем амплитуды R и фазы φ колебаний электронов плазмы $k_0 \Delta_p(t,q) \equiv R(t) \cos[\omega_p t - k_0 q + \varphi(t)]$, в первом приближении совпадающих с амплитудой и фазой поля, получим следующую систему уравнений в полных производных:

$$2i \frac{d^3}{d\tau^3}[Re^{i\varphi}] - \frac{3}{2}\frac{d^2}{d\tau^2}[R^3 e^{i\varphi}] - \mu R e^{i\varphi} = 0, \tag{16}$$

$$\tau \equiv \omega_p t; \quad \mu\gamma^3 \equiv n_b/n_p; \quad k_0 V_b \equiv \omega_p.$$

Исследование этого уравнения показывает, что максимальная амплитуда поля с точностью до численного коэффициента порядка единицы определяется выражением $R_{max} = \mu^{1/6} \ll 1$. Нелинейным уходом резонансной частоты пучка при этом можно пренебречь, если плотность

* Излагаемые ниже результаты получены автором совместно с А. П. Толстолужским.

его не слишком мала: $n_b\gamma \gg n_p$, а условие пренебрежения тепловым разбросом плазмы ($V_{тр}\varepsilon^{-1} \ll \lambda R_m/2\pi$) эквивалентно неравенству $V_{тр} \ll \mu^{1/3}c$, которое мы также предполагаем выполненным.

Легко видеть, что изложенное выше рассмотрение применимо к описанию неустойчивости электронного пучка, движущегося относительно ионного фона, рассмотренной Будкером [25] ($m \equiv \frac{n_+^1}{n_-^1} \cdot \frac{m}{M}$, где n_+^1 и n_-^1 — плотности ионов и электронов в системе отсчета, где электроны покоятся).

Автор выражает искреннюю признательность Я. Б. Файнбергу за постоянный интерес к работе и ценные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Я. Б. Файнберг,** Proc. Symp. CERN, 1, 84, 1956; Атомная энергия», 6, 431, 1959.
2. **А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг,** ДАН СССР, 69, 555, 1949; ЖЭТФ, 21, 1262, 1951.
3. **D. Bohm,** E. P. **Gross,** Phys. Rev., 75, 1851, 1949.
4. **Я. Б. Файнберг,** Атомная энергия, 11, 313, 1961.
5. **Я. Б. Файнберг,** Czech. Journ. of Phys., B—18, 652, 1968.
6. **А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев,** «Ядерный синтез», Приложение, 2, 465, 1962.
7. **W.** E. **Drummond,** D. **Pines,** Nucl. Fus., Suppl. 3, 1 49 19 2.
8. **T H. Stix,** Phys. of Fluids, 7, 1960, 1964.
9. **Ф. Г. Басс, Я. Б. Файнберг, В. Д. Шапиро,** ЖЭТФ, 49, 329, 1966.
10. **P. A Sturrock,** Phys. Rev., 141, 186, 1966.
11. **В. Н. Цытович,** УФН, 89, 89, 1966.
12. **А. К. Березин, Я. Б. Файнберг** и др., Атомная энергия», 14, 243, 1963.
13. **Я. Б. Файнберг, В. Д. Шапиро,** Атомная энергия, 18, 315, 1965.
14. **В. Б. Красовицкий, В. И. Курилко, М. А. Стржемечный,** Атомная энергия, 24, 545, 1968.
15. **А. А. Веденов,** «Атомная энергия», 13, 1, 1962.
16. **Я. Б. Файнберг, В. Д. Шапиро,** ЖЭТФ, 47, 1389, 1964.
17. **V. I. Kurilko,** I. **Ullschmied,** Nucl. Fus.' 9 № 2, 1969.
18. **И. Ф. Харченко, Я. Б. Файнберг,** ЖЭТФ, 38, 685, 1960.
19. **J. A. Davis,** A. **Bers,** Proc. Symp on Turbulence of Fluids and Flasmas; N—Y, April—1958.
20. **Б. Н. Брейзман, Д. Д. Рютов,** ЖЭТФ, 57, 3, 1969.
21. **J. S. Mendell, E. H Holt,** Journ of Appl. Phys., 38, 5416, 1967.
22. **А. К. Березин, Я. Б. Файнберг и др.** Сб. «Международная конференция по ускорителям, Дубна, 1963», Атомиздат, 1964, стр. 1023.
23. **В. Б. Красовицкий, В. И. Курилко,** ЖЭТФ, 51, 445, 1966.
24. **А. И. Ахиезер, Р. В. Половин,** ДАН СССР, 102, 193, 1955; **Р. В. Половин,** ЖЭТФ, 31, 354, 1956.
25. **А. М. Будкер,** Атомная энергия, 1, 9, 1957.