





IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

2

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.001/93

Discretização do Modelo de Yang-Mills 2-d com
Supersimetria $N=2$

HIROMI IWAMOTO

Orientador

Abraham Hirsch Zimmerman



Abril 1993

IFT/TE
D-26

INSTITUTO DE FISICA TEORICA

UNESP

DISCRETIZAÇÃO

DO

MODELO DE YANG-MILLS 2-d COM SUPERSIMETRIA $N=2$

Hiromi Iwamoto

Tese de Doutorado

Dr. Abraham Hirsz Zimmerman

Orientador

1993

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. A.H.Zimerman, que me orientou com paciência e compreensão durante estes anos.
- A todos os professores do Instituto, que direta ou indiretamente contribuíram à minha formação.
- Ao Prof. G.W.Bund e ao Instituto pela acolhida.
- A todos colegas do Instituto, em especial à amizade da Maria, Darcy, Juan, José Geraldo, Nelson, Marcelo...
- À todos funcionários do Instituto.
- À Rosana, pela atenção especial durante estes anos.
- Aos colegas do Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina que me permitiram realizar este trabalho.
- Ao Mario, pelo companheirismo durante vários anos e leitura crítica deste trabalho.
- À Universidade Estadual de Londrina e a CAPES (programa PICD), pelo apoio financeiro .
- À todos que direta ou indiretamente contribuíram para a execução do trabalho.

RESUMO

Escrevemos na rede o modelo de Yang-Mills com supersimetria $N=2$ a duas dimensões fazendo uso do formalismo de Dirac-Kähler em duas versões. Na primeira, discretizamos a hamiltoniana do modelo usando a propriedade das supercargas, $Q^2 \sim H$, com o tempo permanecendo contínuo. Na segunda, conseguimos discretizar diretamente a lagrangeana fornecendo o modelo na rede espaço-temporal, obtendo-se duas lagrangeanas invariantes por transformações supersimétricas ligadas por uma reflexão temporal.

ABSTRACT

In this work the Dirac-Kähler formalism was used in order to put two-dimensional Yang-Mills model with supersymmetry, $N=2$ on the lattice in two versions. In the first one, the Hamiltonian of the model was discretized by the supercharges property $Q^2 \sim H$, with the time remaining continuous. In the second one, we discretized the Lagrangian on the space-time lattice, getting two supersymmetric invariant Lagrangian related to each other by time reflection transformation.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO - - - - -	1
I - O FORMALISMO DE DIRAC-KÄHLER - - - - -	5
1.1 - FORMALISMO DE DIRAC-KÄHLER NO CONTÍNUO	6
1.1.1 - Produto externo	7
1.1.2 - Operador de contração	8
1.1.3 - Produto de Clifford	8
1.1.4 - Operador estrela de Hodge	11
1.1.5 - Operadores diferenciais	12
1.1.6 - Produto escalar e correntes	14
1.2 - O FORMALISMO DE DIRAC-KÄHLER NA REDE	18
1.2.1 - Elementos básicos na rede	18
1.2.2 - Equações de campo na rede	22
1.2.3 - Campos de gauge na rede	24
II - CONSTRUÇÃO DO MODELO DE YANG-MILLS COM SUPERSIMETRIA $N=2$, d-2, POR REDUÇÃO DIMENSIONAL - - - - -	28
III - DISCRETIZAÇÃO DO MODELO PARA UMA REDE ESPACIAL, TEMPO CONTÍNUO MODELO HAMILTONIANO - - - - -	34
3.1 - Modelo Hamiltoniano no contínuo	35
3.2 - Modelo Hamiltoniano na rede	54
IV - DISCRETIZAÇÃO DO MODELO PARA UMA REDE ESPAÇO-TEMPORAL MODELO LAGRANGEANO - - - - -	66
4.1 - A lagrangeana na representação de Dirac-Kähler	67
4.2 - Discretização da lagrangeana	75
CONCLUSÕES - - - - -	90
BIBLIOGRAFIA - - - - -	92

INTRODUÇÃO

A partir do trabalho de K. G. Wilson [1], a utilização de modelos na rede tem-se tornado frequente como mais uma alternativa no tratamento da teoria dos campos, um método de aproximação que tem dado bons resultados em algumas aplicações, citando como exemplos o estudo do confinamento dos quarks ou a determinação do espectro de massa dos hádrons. Modelos na rede prestam-se à aplicação do método de simulação numérica conhecido como Método de Monte Carlo [2], muito utilizado a partir das facilidades oferecidas pelo advento dos modernos computadores eletrônicos. Neste contexto, trabalhos intensos foram desenvolvidos para a discretização de modelos no contínuo já existentes, porém esbarrando em algumas dificuldades, como o problema da degenerescência da energia dos férmions quando se tenta discretizar campos fermiônicos a partir dos mesmos procedimentos usados para os campos bosônicos.

O formalismo das formas diferenciais de Dirac-Kähler, principalmente a partir dos trabalhos desenvolvidos por Becker e Joos [3], tem-se mostrado uma ferramenta simples e eficiente para a transposição de modelos do contínuo para a rede. Esta facilidade decorre da existência de um mapeamento completo entre o espaço das formas diferenciais, no contínuo, e o espaço das co-cadeias, na rede.

Os campos de gauge, em particular o campo eletromagnético, foram os primeiros a serem representados no espaço das formas diferenciais, sendo a principal contribuição do formalismo de Dirac-Kähler estender a representação por formas diferenciais para os

campos fermiônicos, fornecendo um método de discretização dos mesmos que, além de simples, elimina um dos seus principais problemas, que é a degenerescência da energia dos férmions na rede[4].

A origem da degenerescência da energia dos férmions na rede está ligada à escolha inadequada das aproximações por diferenças finitas (na rede) para as derivadas (no contínuo). Por exemplo, para uma rede espacial cúbica com espaçamento $a_i = l$, escolhendo

$$\partial_i f(x) \longrightarrow \frac{f(x_i + a_i) - f(x_i - a_i)}{2a_i} ,$$

resulta na relação de dispersão (tempo contínuo)

$$\omega^2 = \sum_i (1/l^2) \sin^2 k_i l + m^2 , \quad -\pi/l < k_i < \pi/l ,$$

que tende à expressão correta no contínuo, $a_i \longrightarrow 0$,

$$\omega^2 = k_i^2 + m^2 ;$$

no entanto, na relação de dispersão acima, é fácil de se verificar que a energia é degenerada por substituições do tipo $k_i \longrightarrow \pi/a \pm k_i$ no momento.

No formalismo de Dirac-Kähler, são introduzidos dois tipos de derivadas (diferenças finitas) na rede,

$$\Delta_i^+ = f(x_i + a_i) - f(x_i)$$

e

$$\Delta_i^- = f(x_i) - f(x_i - a_i) \quad ,$$

a relação de dispersão resultante sendo

$$\omega^2 = \sum_i (4/l^2) \sin^2(k_i l/2) + m^2 \quad , \quad -\pi/l < k_i < \pi/l \quad ,$$

que tem o limite correto no contínuo e não apresenta degenerescência.

Muitos modelos na rede foram recentemente desenvolvidos a partir deste formalismo, citando como exemplos, os trabalhos do grupo de Joos-Becker [3] e Zimmerman-Aratyn [5], atuando o primeiro, em modelos com campos de gauge e o segundo, em modelos supersimétricos.

Para a discretização de modelos utilizando este formalismo diferencial, a primeira tarefa é a mudança da representação dos campos do espaço das funções usual para o espaço das formas diferenciais, no contínuo; a partir daí, faz-se a transposição do modelo para a rede. Nos modelos com supersimetria, há a dificuldade adicional em relação à expressão correta da interação supersimétrica, por ainda não se dispor de regras precisas para a construção de invariantes supersimétricas para campos no espaço das formas diferenciais.

Neste trabalho, faz-se a discretização de um modelo de Yang-Mills (teoria de gauge não-abeliano) com supersimetria $N=2$, no espaço-tempo a duas dimensões ($d=2$). No capítulo I, apresentamos o essencial do formalismo das formas diferenciais de Dirac-Kähler, nas versões no contínuo e na rede. No capítulo II, trabalha-se na obtenção do modelo supersimétrico $N=2$, $d=2$, através da redução dimensional, método utilizado por L. Brink et al [6]. O capítulo III é dedicado à

discretização do modelo aproveitando a propriedade $Q^2 = H$ da álgebra supersimétrica; discretiza-se a carga, e consequentemente, a hamiltoniana do modelo. Este procedimento permite apenas a discretização da coordenada espacial, permanecendo o tempo contínuo. No capítulo IV, constroem-se a lagrangeana para os campos na representação das formas diferenciais, com a consequente discretização da mesma numa rede espaço-temporal.

Em relação às notações adotadas, utiliza-se a notação tensorial de Minkowski, espaço-tempo quadri-dimensional, na apresentação geral do formalismo, capítulos I e II, e espaço-tempo bi-dimensional nos demais capítulos, com as regras usuais dos índices vetoriais covariantes e contravariantes; o tensor métrico mantemos indefinido, explicitado quando necessário, podendo corresponder a uma métrica Euclidiana, necessária no tratamento do formalismo na rede.

CAPITULO I

O FORMALISMO DE DIRAC-KAHLER

O formalismo das formas diferenciais de Dirac-Kähler é a principal ferramenta para o presente trabalho de discretização do modelo de Yang-Mills com supersimetria $N=2$ e dimensão $d=2$.

É bem conhecida a representação dos campos vetoriais de gauge no espaço das formas diferenciais. No formalismo de Dirac-Kähler, esta possibilidade é estendida para os campos spinoriais.

Veremos, portanto, que existe uma equivalência entre o formalismo matemático usual e o das formas diferenciais de Dirac-Kähler para a representação dos campos e das suas equações, em especial para os campos de Dirac. Esta verificação pode ser facilmente estendida para os campos escalares e os campos vetoriais, o que é suficiente para os propósitos deste trabalho. Como o formalismo de Dirac-Kähler existe em versões no contínuo e na rede, com regras de correspondência claras e bem definidas entre os elementos do contínuo e da rede, temos o formalismo ideal para a construção de modelos na rede a partir de modelos conhecidos do contínuo, principalmente porque o conhecido problema da degenerescência da energia dos férmions na rede não ocorre neste formalismo.

A seguir, descreveremos sucintamente este formalismo, apenas o necessário para os propósitos de desenvolvimento deste trabalho; veremos inicialmente no contínuo, e depois, de uma forma mais resumida, a versão na rede.

1.1 - FORMALISMO DE DIRAC-KÄHLER NO CONTÍNUO

Neste formalismo, os campos, de uma forma geral, são representados por formas diferenciais, compactamente escritos como

$$\phi(x) = \sum_H \varphi(x, H) dx^H = \sum_H \varphi_H(x) dx^H \quad (1.1)$$

Na notação multi-índices adotada, $H = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ é o conjunto ordenado de índices das coordenadas do espaço-tempo d-dimensional, $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_p$, e $0 \leq p \leq d$.

$$\{dx^H\} = \{1, dx^\mu, dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2}, dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \dots\}$$

é a base do espaço das formas diferenciais, cuja dimensão é dada pela somatória $\sum_{k=0}^d \binom{d}{k}$.

Temos como componentes de uma forma diferencial, definida pela equação (1.1), uma função escalar, $\varphi_0(x) = \varphi(x, \phi)$, coeficiente da base 0-forma ($H=\{\}$); uma função vetorial, $\varphi_\mu(x) = \varphi(x, \mu)$, coeficiente da base 1-forma ($H=\{\mu\}$); um tensor antissimétrico de segunda ordem, $\varphi_{\mu_1 \mu_2}(x) = \varphi(x, \mu_1 \mu_2)$, coeficiente da base 2-forma ($H=\{\mu_1, \mu_2\}$), etc.. Veremos que os campos spinoriais podem ser representados como combinações destas diversas funções.

Vamos, a seguir, definir algumas das operações básicas no espaço das formas diferenciais.

1.1.1 - PRODUTO EXTERNO

O produto externo (simbolizado pelo operador \wedge) é uma das principais operações, já usado na definição dos elementos da base,

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} = - dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_1} . \quad (1.2)$$

A operação produto externo $dx^\mu \wedge$ atuando sobre um elemento de base p-forma arbitrária dx^H fica

$$dx^\mu \wedge dx^H = \begin{cases} \rho_{\mu, H} dx^{\mu \cup H} & , \text{ se } \{\mu\} \cap H = \emptyset \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} . \quad (1.3)$$

A operação $dx^\mu \wedge$ transforma uma p-forma em (p+1)-forma.

De uma maneira mais genérica, o produto exterior entre dois elementos de base arbitrários fica

$$dx^H \wedge dx^K = \begin{cases} \rho_{H, K} dx^{H \cup K} & , \text{ se } H \cap K = \emptyset \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} . \quad (1.4)$$

O símbolo $\rho_{H, K} = (-1)^\nu$ define o sinal do produto externo; aqui, ν é o número de pares ordenados $(i, j) \in H \times K$ tal que $i > j$. As operações entre conjuntos são indicadas pela simbologia usual.

1.1.2 - OPERADOR DE CONTRAÇÃO

O operador de contração e_{μ}^{\lrcorner} é definido pela regra

$$e_{\mu}^{\lrcorner} dx^H = dx_{\mu}^{\lrcorner} dx^H = \begin{cases} \rho_{\mu, H \setminus \mu} dx^{H \setminus \mu} & , \text{ se } \mu \in H \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (1.5)$$

O operador de contração segue as propriedades

$$e^{\mu \lrcorner} (\phi + \psi) = e^{\mu \lrcorner} \phi + e^{\mu \lrcorner} \psi \quad (1.6)$$

$$e^{\mu \lrcorner} (\phi \wedge \psi) = (e^{\mu \lrcorner} \phi) \wedge \psi + (\mathcal{A}\phi) \wedge e^{\mu \lrcorner} \psi ,$$

onde \mathcal{A} representa um operador que atua sobre os elementos de base p-forma dx^H , $H = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$, invertendo o sinal quando p for ímpar, isto é, $\mathcal{A}dx^H = (-1)^p dx^H$; tem a propriedade $\mathcal{A}(\phi \wedge \psi) = \mathcal{A}\phi \vee \mathcal{A}\psi$.

1.1.3 - PRODUTO DE CLIFFORD

O produto de Clifford entre duas formas diferenciais pode ser definido através da combinação das operações básicas produto externo, equação (1.3) e contração, equação (1.5), que atuam sobre os elementos da base,

$$dx^{\mu} \vee dx^H = dx^{\mu} \wedge dx^H + e^{\mu \lrcorner} dx^H \quad (1.7)$$

Em particular,

$$dx^\mu \vee dx^\nu = g^{\mu\nu} + dx^\mu \wedge dx^\nu \quad ,$$

onde $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski. Esta relação mostra que o produto de Clifford define uma álgebra de Clifford,

$$dx^\mu \vee dx^\nu + dx^\nu \vee dx^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad . \quad (1.8)$$

É a mesma álgebra das matrizes γ^μ de Dirac sob a operação produto matricial,

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad . \quad (1.9)$$

A partir destas observações, pode-se traçar uma equivalência entre o espaço das formas diferenciais definidas pelos elementos diferenciais dx^μ (mais o produto de Clifford) e o espaço das matrizes definidas pelas matrizes γ^μ de Dirac (mais o produto matricial). Assim, é possível o mapeamento

$$\gamma^\mu \longrightarrow dx^\mu \vee \quad . \quad (1.10)$$

Neste contexto, define-se a função base

$$\begin{aligned} Z = 1 + \gamma_{\mu_1}^T dx^{\mu_1} + \frac{1}{2!} \gamma_{\mu_1}^T \gamma_{\mu_2}^T dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} + \frac{1}{3!} \gamma_{\mu_1}^T \gamma_{\mu_2}^T \gamma_{\mu_3}^T dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3} + \\ + \frac{1}{4!} \gamma_{\mu_1}^T \gamma_{\mu_2}^T \gamma_{\mu_3}^T \gamma_{\mu_4}^T dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4} \quad , \end{aligned}$$

que pode ser colocada na forma compacta

$$Z = \sum_H (-1)^{\binom{p}{2}} \gamma_H^T dx^H, \quad (1.11)$$

permitindo o mapeamento do espaço das formas diferenciais sobre o espaço de Clifford definido pelas matrizes de Dirac. Z é uma matriz, cujos elementos Z_{ab} definem uma nova base do espaço das formas diferenciais, de modo que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_H \varphi(x, H) dx^H = \sum_{a, b} \psi_a^{(b)} Z_{ab} \\ &= \sum_{a, b} \psi_a^{(b)} (\gamma_H)_{ba}^T dx^H, \end{aligned} \quad (1.12)$$

os coeficientes $\varphi_H(x) = \varphi(x, H)$ e $\psi_a^{(b)}(x)$ relacionados por

$$\varphi_H(x) = \sum_{a, b} \psi_a^{(b)} (\gamma_H)_{ba}^T \quad (1.13.a)$$

e

$$\psi_a^{(b)}(x) = \frac{1}{4} \sum_H \varphi(x, H) (\gamma_H)_{ab} \quad (1.13.b)$$

Se considerarmos os coeficientes $\psi_a^{(b)} = \psi_{ab}$ como os elementos da matriz $\psi(x)$, as relações acima ficam

$$\varphi_H(x) = \text{tr}\{\psi(x)(\gamma_H)^T\} \quad (1.14.a)$$

e

$$\psi(x) = \frac{1}{4} \sum_H \varphi_H(x) \gamma^H \quad (1.14.b)$$

Esta última equação é a equivalente matricial da forma diferencial definida pela equação (1.1).

1.1.4 - OPERADOR ESTRELA DE HODGE.

O operador linear estrela de Rodge, $*$, atua sobre os elementos da base dx^H transformando-os em dx^{CH} ,

$$* dx^H \longrightarrow dx^{CH} \quad , \quad (1.15)$$

CH indicando o conjunto complementar de H. Temos, como consequências imediatas,

$$** = 1 \quad , \quad * 1 = dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4} \quad ;$$

$$* dx^{\mu_1} = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu_2 \mu_3 \mu_4}^{\mu_1} dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4} \quad ;$$

$$* dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} = - \frac{1}{2!} \varepsilon_{\mu_3 \mu_4}^{\mu_1 \mu_2} dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4} \quad ;$$

e, de forma geral,

$$* \phi = \phi \vee \varepsilon ,$$

para

(1.16)

$$\varepsilon = dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4} .$$

1.1.5 - OPERADORES DIFERENCIAIS

A partir dos operadores definidos nas secções anteriores, que atuam sobre os elementos de base das formas diferenciais, mais os operadores usuais de derivação ∂_μ atuando sobre as funções $\varphi(x, H)$, coeficientes das formas diferenciais, definimos os seguintes operadores diferenciais básicos: (i) a derivada exterior

$$d = dx^\mu \wedge \partial_\mu \quad (1.17)$$

e (ii) a sua adjunta

$$\delta = -*d* = -e^\mu \lrcorner \partial_\mu \quad (1.18)$$

Devido à antissimetria do produto externo $dx^\mu \wedge dx^\nu$, temos as identidades

$$d^2 = 0 \quad \text{e} \quad \delta^2 = 0 \quad (1.19)$$

A combinação $(d - \delta)$ define o operador diferencial de Dirac-Kähler,

$$d - \delta = (dx^\mu \wedge \partial_\mu + e^\mu_J \partial_\mu) = dx^\mu \vee \partial_\mu \quad (1.20)$$

O mapeamento (1.10) , $\gamma^\mu \longleftrightarrow dx^\mu \vee$, permite identificar o mapeamento entre os operadores,

$$(d - \delta) \longleftrightarrow \gamma^\mu \partial_\mu \quad , \quad (1.21)$$

o que mostra a equivalência entre a equação de Dirac usual

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (1.22)$$

e a equação de Dirac-Kähler

$$(d - \delta + m)\phi = 0 \quad , \quad (1.23)$$

o primeiro definido no espaço das matrizes e o segundo no espaço das formas diferenciais. Mais precisamente, do ponto de vista das relações (1.13) e (1.14) , a equação (1.23) é equivalente, num espaço quadri-dimensional, a quatro equações de Dirac,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi^{(b)}(x) = 0 \quad , \quad (1.24)$$

sendo $\psi^{(b)}$, b variando de 1 a 4, matrizes coluna de quatro elementos

$$\psi^{(b)}(x) = \begin{bmatrix} \psi_1^{(b)}(x) \\ \vdots \\ \psi_4^{(b)}(x) \end{bmatrix} \quad . \quad (1.25)$$

O índice inferior (a) de $\psi_a^{(b)}(x)$ é o índice spinorial e o índice superior (b) o índice de "flavor".

A partir das equações (1.8), (1.19) e (1.20), podemos mostrar que o quadrado do operador de Dirac-Kähler resulta no operador d'Alambertiano

$$(d - \delta)^2 = - (d\delta + \delta d) = \partial^\mu \partial_\mu \quad . \quad (1.26)$$

Estas equações mostram a possibilidade de representar os campos spinoriais através de formas diferenciais, tendo como equação de movimento a equação de Dirac-Kähler (1.23), assim como os campos escalares, a partir da equação (1.26). Os campos vetoriais de gauge foram os primeiros a serem representados por formas diferenciais [8].

1.1.6 - PRODUTO ESCALAR E CORRENTES.

Dadas duas formas diferenciais arbitrárias

$$\phi(x) = \sum_H \phi(x, H) dx^H \quad (1.27)$$

e

$$Z(x) = \sum_H \xi(x, H) dx^H \quad , \quad (1.28)$$

define-se o produto escalar entre estas formas diferenciais como a

combinação invariante dos seus componentes,

$$(\phi, Z) \approx \sum_H \varphi_H(x) \xi^H(x) , \quad (1.29)$$

que pode ser obtida formalmente a partir da operação

$$\begin{aligned} (\phi, Z)_0 &= ((\beta\phi \vee Z) \wedge \mathcal{E}) \\ &= [\varphi_0 \xi^0 + \varphi_\mu \xi^\mu + \frac{1}{2!} \varphi_{\mu_1 \mu_2} \xi^{\mu_1 \mu_2} + \\ &+ \frac{1}{3!} \varphi_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \xi^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} + \frac{1}{4!} \varphi_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \xi^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}] \wedge \mathcal{E} , \end{aligned} \quad (1.30)$$

a ser usada como a definição do produto escalar. O produto escalar $(\phi, Z)_0$ é uma 4-forma, se o espaço considerado for quadri-dimensional. O operador β atua sobre os elementos dx^H da base das formas diferenciais, invertendo a ordem dos termos

$$\beta(dx^H \vee dx^K) = \beta dx^K \vee \beta dx^H$$

e

$$\beta(dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}) = dx^{\mu_p} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_1} . \quad (1.31)$$

Além deste produto escalar $(\phi, Z)_0$, 4-forma, definem-se os produtos $(\phi, Z)_p$, que resultam em $(d-p)$ -formas, onde d é a dimensão do espaço. Por exemplo, temos o produto $(d-1)$ -forma,

$$\begin{aligned}
(\phi, Z)_1 &= e_\alpha^J (dx^\alpha v\phi, Z)_0 = e_\alpha^J \{(\beta(dx^\alpha v\phi) vZ) \wedge \varepsilon\} \\
&= \{[\varphi^0 \xi_\alpha + \varphi_\alpha \xi^0 + \varphi^\mu \xi_{\alpha\mu} + \varphi_{\alpha\mu} \xi^\mu + \frac{1}{2!} (\varphi_{\alpha\mu_1\mu_2} \xi^{\mu_1\mu_2} + \\
&+ \varphi^{\mu_1\mu_2\alpha} \xi_{\alpha\mu_1\mu_2}) + \frac{1}{3!} (\varphi_{\alpha\mu_1\mu_2\mu_3} \xi^{\mu_1\mu_2\mu_3} + \\
&+ \varphi^{\mu_1\mu_2\mu_3} \xi_{\alpha\mu_1\mu_2\mu_3})\} \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3}^\alpha dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3}, \quad (1.32)
\end{aligned}$$

o produto (d-2)-forma

$$(\phi, Z)_2 = e_{\mu_1}^J e_{\mu_2}^J (dx^{\mu_2} v dx^{\mu_1} v \phi, Z)_0, \quad (1.33)$$

e, de forma geral, o produto (d-p)-forma

$$(\phi, Z)_p = e_{\mu_1}^J e_{\mu_2}^J \dots e_{\mu_p}^J (dx^{\mu_p} v \dots v dx^{\mu_1} v \phi, Z)_0. \quad (1.33)$$

Definido o produto escalar, podemos construir a ação invariante na representação das formas diferenciais de Dirac-Kähler,

$$S = \int (\bar{\phi}, (d-\delta)\phi)_0. \quad (1.34)$$

O produto $(\phi, Z)_1$ é usado para definir a corrente,

$$j = j^\mu dx_\mu = -^{*-1}(\phi, Z)_1. \quad (1.35)$$

Como

$$\delta j = \delta(j^\mu dx_\mu) = -e^\mu J \partial_\mu j = \partial_\mu j^\mu(x) \quad , \quad (1.36.a)$$

e também

$$\delta j = -*d*j = -*d(\phi, Z)_1 \quad , \quad (1.36.b)$$

pode-se mostrar que a equação (1.35) representa uma corrente conservada desde que os campos ϕ e Z obedeçam à equação de Dirac-Kähler,

$$(d - \delta + m)\phi = 0$$

e

$$(d - \delta + m)Z = 0 \quad ,$$

pois

$$d(\phi, Z)_1 = ((d - \delta + m)\phi, Z)_0 + (\phi, (d - \delta + m)Z)_0 \quad , \quad (1.37)$$

resultando na lei de conservação

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \longleftrightarrow \quad d(\phi, Z)_1 = 0 \quad . \quad (1.38)$$

1.2 - O FORMALISMO DE DIRAC-KÄHLER NA REDE

Nesta secção faremos uma breve apresentação do formalismo de Dirac-Kähler na rede. Será considerado o espaço-tempo euclidiano, quadri-dimensional.

1.2.1 - Elementos básicos da rede

Os elementos básicos da rede, ${}^p\mathcal{C}_i$, são :

(i) Pontos, ${}^0\mathcal{C}_i$ - um ponto x é definido através das suas coordenadas,

$$x \equiv (x^\mu) = (x^1, x^2, x^3, x^4) ,$$

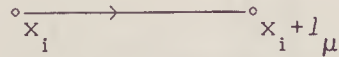
as coordenadas na rede sendo $x^\mu = n^\mu l_\mu$ (sem somatória), para n^μ inteiro positivo ou negativo e l_μ definindo o espaçamento entre os pontos vizinhos na rede na direção μ . Numa rede cúbica, o espaçamento é o mesmo em todas as direções. Representamos um ponto qualquer x_i na rede como

$${}^0\mathcal{C}_i = x_i = [x_i, \emptyset] , \quad \emptyset \text{ é o conjunto vazio.}$$

(ii) Links (linhas elementares), ${}^1\mathcal{C}_i$ - um link é um vetor elementar orientado numa certa direção μ , ligando dois pontos adjacentes x_i e $x_i + l_\mu$, sendo representado por

$${}^1\mathcal{C}_i = [x_i, \mu] \quad ,$$

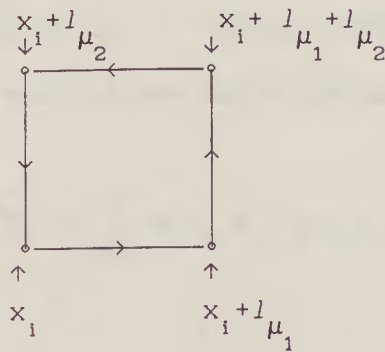
como mostra a figura abaixo (nestas definições, μ é o índice do espaço-tempo e $i = 1, 2, 3, \dots$ indica o i -ésimo ponto ou outro elemento da rede) :



(iii) Plaquetas (áreas elementares), ${}^2\mathcal{C}_i$ - uma plaqueta é uma área elementar orientada, representada por

$${}^2\mathcal{C}_i = [x_i, \mu_1 \mu_2] \quad ,$$

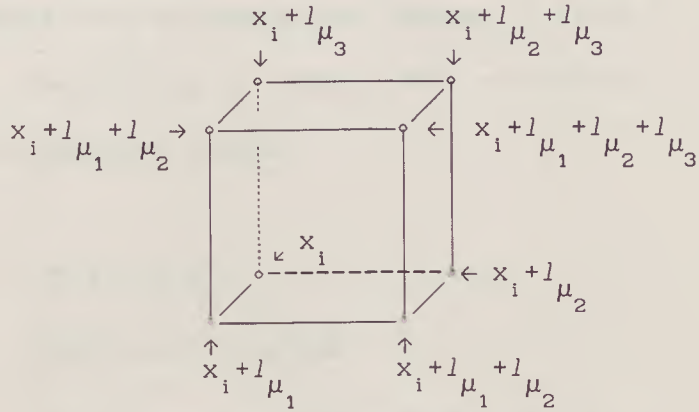
contornados por quatro links definidos a partir dos vértices (pontos) $x_i, x_i + l_{\mu_1}, x_i + l_{\mu_1} + l_{\mu_2}, x_i + l_{\mu_2}$, como mostrada na representação pictórica abaixo :



(iv) Cubos, ${}^3\mathcal{C}_i$ - um cubo elementar, tridimensional (3-cubo),

$${}^3\mathcal{C}_i = [x_i, \mu_1 \mu_2 \mu_3] \quad ,$$

é definido pelo elemento de volume orientado formado a partir dos oito pontos adjacentes que definem uma rede, como mostra a figura abaixo :



(v) Super-cubos ou p-cubos, ${}^p\mathcal{C}_i$ - um super-cubo ou p-cubo é a generalização natural do cubo tri-dimensional ou 3-cubo, sendo representado por

$${}^p\mathcal{C}_i = [x_i, \mu_1 \mu_3 \dots \mu_p] = [x_i, H_p] \quad ; \quad (1.39)$$

H_p representa o conjunto de p índices ordenados. A combinação linear destes elementos da rede definem as p-cadeias

$${}^p\mathcal{C} = \sum_i \alpha_i {}^p\mathcal{C}_i = \sum_i \alpha(x_i, H_p) [x_i, H_p]$$

e as cadeias

$$\mathcal{C} = \sum_p {}^p\mathcal{C} = \sum_{i,p} \alpha(x_i, H_p) [x_i, H_p] \quad , \quad (1.40)$$

onde $\alpha(x_i, H_p)$ são funções arbitrárias (reais ou complexos).

Deste modo, os p-cubos ou p-cadeias são as cadeias elementares, elementos da base do espaço das cadeias.

Dada a base do espaço das cadeias $\{ [x, H] \}$, a sua base dual $\{ d^{x, H} \}$, que define o espaço das co-cadeias, é definida como obedecendo às seguintes regras :

$$\begin{aligned} d^y [x] &= \delta_x^y, \\ d^{y, \mu} [x, \nu] &= l \delta_x^y \delta_\nu^\mu, \\ d^{y, \mu\nu} [x, \rho\sigma] &= l^2 \delta_x^y (\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu + \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu), \\ d^{y, K} [x, H] &= l^p \delta_x^y \delta_H^K, \end{aligned} \quad (1.41)$$

supondo uma rede cúbica de espaçamento l . Estas regras definem as integrações (somatórias) na rede.

A base dual define o espaço das co-cadeias, uma co-cadeia geral representada por

$$\phi = \sum_{x, H} \varphi(x, H) d^{x, H}. \quad (1.42)$$

As co-cadeias são as equivalentes na rede das formas diferenciais, equação (1.1), e portanto são usadas para representar os campos físicos na rede.

O formalismo de Dirac-Kähler na rede comporta operadores e operações análogos aos usados no contínuo, como estão bem explicitados nas referências indicadas.

1.2.2 - Equações de campo na rede

A equação de Dirac-Kähler na rede é dado por

$$(\overset{U}{\Delta} - \overset{U}{\nabla}) \phi = 0 \quad , \quad (1.43)$$

onde ϕ é a co-cadeia definida pela equação (1.42) e $\overset{U}{\Delta}$ e $\overset{U}{\nabla}$ são os equivalentes na rede dos operadores diferenciais d e δ do contínuo,

$$\overset{U}{\Delta} = d^\mu \wedge \Delta_\mu^- \quad (1.44)$$

e

$$\overset{U}{\nabla} = e^\mu \lrcorner \Delta_\mu^- \quad , \quad (1.45)$$

de modo que

$$(\overset{U}{\Delta} - \overset{U}{\nabla}) \phi = (d^\mu \wedge - e^\mu \lrcorner) \Delta_\mu^- \phi \equiv d^\mu \vee \Delta_\mu^- \phi \quad . \quad (1.46)$$

Nesta última equação, usamos o produto de Clifford,

$$d^\mu \vee \phi = d^\mu \wedge \phi + e^\mu \lrcorner \phi \quad , \quad (1.47)$$

análogo à definição (1.20) do contínuo, com a simbologia

$$d^\mu = \sum_x d^{x,\mu} \quad ; \quad d^H = \sum_x d^{x,H} \quad . \quad (1.48)$$

O produto externo é definido por

$$d^{x,H} \wedge d^{y,H} = \rho_{H,K} \delta^{x+e^H, y} d^{x,H \cup K}, \quad (1.49)$$

e a operação de contração por

$$e^\mu \lrcorner d^{x,H} = \rho_{\mu, H \setminus \mu} d^{x, H \setminus \mu}. \quad (1.50)$$

A partir destas definições, a equação de Dirac-Kähler fica

$$(\overset{U}{\Delta} - \overset{U}{\nabla}) \phi = d^\mu \vee \Delta_\mu^- \phi = \quad (1.51)$$

$$= \sum_{x,H} \left[\rho_{\mu, H \setminus \mu} \Delta_\mu^+ \phi(x, H \setminus \mu) + \rho_{\mu, H} \Delta_\mu^- \phi(x, H \cup \mu) \right] d^{x,H} = 0.$$

Esta equação apresenta duas diferenças finitas,

$$\Delta_\mu^+ \phi(x) = \phi(x + l^\mu) - \phi(x) \quad (1.52.a)$$

e

$$\Delta_\mu^- \phi(x) = \phi(x) - \phi(x - l^\mu), \quad (1.52.b)$$

que substituem as derivadas do contínuo.

É exatamente a presença destas diferenças finitas diferenciadas que elimina o problema da degenerescência da energia dos férmions na rede [4].

Para não alongar em demasia a exposição, não nos deteremos em apresentar outras operações definidas na rede, tais como produtos

escalares e a construção das correntes conservadas, feitas de maneira análoga às do contínuo.

1.2.3 - Campos de gauge na rede

Nos modelos de Yang-Mills, os campos estão na representação adjunta. A transformação de gauge na rede de um campo arbitrário $\varphi(x, H)$ é definida por [7]

$$\varphi(x, H) \longrightarrow \varphi'(x, H) = G(x) \varphi(x, H) G^{-1}(x+l_H) \quad . \quad (1.53)$$

$G(x)$ é a matriz de transformação do grupo de gauge,

$$G(x) = e^{it_a \omega^a(x)} \quad , \quad (1.54)$$

t^a são os geradores do grupo de simetria interna e

$$l_H = l_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots} = l_{\mu_1} + l_{\mu_2} + l_{\mu_3} \dots$$

(l_μ é o espaçamento da rede na direção μ).

Definimos o campo conjugado hermitiano $\varphi^\dagger(x, H)$, cuja transformação de gauge deve ser

$$\varphi^\dagger(x, H) \longrightarrow \varphi'^\dagger(x, H) = G(x+l_H) \varphi^\dagger(x, H) G^{-1}(x) \quad , \quad (1.55)$$

a fim de podermos construir a invariante de gauge

$$\text{tr} \left\{ \varphi^\dagger(x, H) \varphi(x, H) \right\} . \quad (1.56)$$

O campo de gauge na rede, $U(x, \mu)$, é uma função "link", com a transformação de gauge dada por

$$U(x, \mu) \longrightarrow U'(x, \mu) = G(x) U(x, \mu) G^{-1}(x+l_\mu) , \quad (1.57)$$

de acordo com a transformação geral (1.53). No limite do contínuo, relaciona-se com o campo de gauge usual $A_\mu(x)$ através da expressão (sem sematária em μ)

$$U(x, \mu) = \exp [il_\mu g A_\mu(x)] \simeq 1 + il_\mu g A_\mu(x) . \quad (1.58)$$

O seu conjugado hermitiano $U^\dagger(x, \mu)$ transforma-se como

$$U^\dagger(x, \mu) \longrightarrow U'(x, \mu) = G(x+l_\mu) U^\dagger(x, \mu) G^{-1}(x) . \quad (1.59)$$

Como vimos, à derivada ∂_μ do contínuo correspondem duas diferenças finitas, "por cima", Δ_μ^+ e "por baixo", Δ_μ^- , definidas pelas equações (1.52). Deve corresponder, portanto, a duas derivadas covariantes, definidas por (ref),

$$D_\mu^+ \varphi(x, H) = \left[U(x, \mu) \varphi(x+l_\mu, H) - \varphi(x, H) U(x+l_\mu, \mu) \right] \quad (1.60.a)$$

e

$$D_\mu^- \varphi(x, H) = \left[\varphi(x, H) U^\dagger(x+l_\mu-l_\mu, \mu) - U^\dagger(x-l_\mu, \mu) \varphi(x-l_\mu, H) \right] , \quad (1.60.b)$$

com as respectivas transformações de gauge

$$D_{\mu}^{+}\varphi(x, H) \longrightarrow G(x) D_{\mu}^{+}\varphi(x, H) G^{-1}(x+l_H+l_{\mu}) \quad (1.61.a)$$

e

$$D_{\mu}^{-}\varphi(x, H) \longrightarrow G(x) D_{\mu}^{-}\varphi(x, H) G^{-1}(x+l_H-l_{\mu}) \quad (1.61.b)$$

Os conjugados hermitianos das derivadas covariantes são

$$\left[D_{\mu}^{+}\varphi(x, H) \right]^{\dagger} = \left[\varphi^{\dagger}(x+l_{\mu}, H) U^{\dagger}(x, \mu) - U^{\dagger}(x+l_H, \mu) \varphi^{\dagger}(x, H) \right]$$

e

(1.62)

$$\left[D_{\mu}^{-}\varphi(x, H) \right]^{\dagger} = \left[U(x+l_H-l_{\mu}, \mu) \varphi^{\dagger}(x, H) - \varphi^{\dagger}(x-l_{\mu}, H) U(x-l_H, \mu) \right] ,$$

com as transformações de gauge

$$\left[D_{\mu}^{+}\varphi(x, H) \right]^{\dagger} \longrightarrow G(x+l_H+l_{\mu}) \left[D_{\mu}^{+}\varphi(x, H) \right]^{\dagger} G^{-1}(x)$$

e

(1.63)

$$\left[D_{\mu}^{-}\varphi(x, H) \right]^{\dagger} \longrightarrow G(x+l_H-l_{\mu}) \left[D_{\mu}^{-}\varphi(x, H) \right]^{\dagger} G^{-1}(x) .$$

O tensor "eletromagnético" é construído aplicando a derivação covariante sobre o campo de gauge $U_\mu(x)$, resultando

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) &= D_\mu^+ U(x, \nu) \\ &= \left[U(x, \mu) U(x+l_\mu, \nu) - U(x, \nu) U(x+l_\nu, \mu) \right] \quad , \quad (1.64)\end{aligned}$$

e o seu conjugado hermitiano

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mu\nu}^\dagger(x) &= \left[D_\mu^+ U(x, \nu) \right]^\dagger \\ &= \left[U^\dagger(x+l_\mu, \nu) U^\dagger(x, \mu) - U^\dagger(x+l_\nu, \mu) U^\dagger(x, \nu) \right] \quad . \quad (1.65)\end{aligned}$$

O equivalente ao campo elétrico é

$$E_1 = \frac{i}{1_9} \mathcal{F}_{12} \quad , \quad (1.66)$$

e

$$E_1^\dagger = - \frac{i}{1_9} \mathcal{F}_{12}^\dagger$$

Estes são alguns dos principais resultados do formalismo de Dirac-Kähler necessários para o desenvolvimento do presente trabalho.

CAPÍTULO II

CONSTRUÇÃO DO MODELO DE YANG-MILLS COM SUPERSIMETRIA N=2, d=2 , POR REDUÇÃO DIMENSIONAL

Neste capítulo vamos obter a ação de Yang-Mills com supersimetria $N = 2$, a duas dimensões ($d=2$), utilizando o procedimento de L. Brink et al [6], a partir da redução dimensional de uma ação supersimétrica quadri-dimensional

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} i \bar{\lambda}^a \Gamma^\mu D_\mu \lambda^a \right] \quad (2.1)$$

Aqui, λ^a representa spinores de Majorana, sendo a o índice do grupo interno, não abeliano, $SU(n)$, por exemplo. O campo de gauge é representado pelo vetor U_μ^a , que define a derivada covariante

$$D_\mu \lambda = D_\mu \lambda^a t^a = (\partial_\mu \lambda^a - g f_{bc}^a U_\mu^b \lambda^c) t^a \quad , \quad (2.2)$$

e o "tensor eletromagnético"

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a t^a = (\partial_\mu U_\nu^a - \partial_\nu U_\mu^a - g f_{bc}^a U_\mu^b U_\nu^c) t^a \quad ; \quad (2.3)$$

g é a constante de acoplamento, f_{abc} a constante de estrutura e t^a os geradores do grupo. A álgebra de Lie do grupo é definida pelas relações de comutação

$$[t^a, t^b] = if_{ab}^c t^c, \quad (2.4)$$

normalizados pela condição

$$\text{tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (2.5)$$

As matrizes de Dirac quadri-dimensionais serão representados por Γ^μ , como na equação (2.1), reservando γ^μ para o caso bi-dimensional.

A ação (2.1) é invariante pelas seguintes transformações supersimétricas :

$$\delta U_\mu^a = i\bar{\alpha} \Gamma_\mu \lambda^a \quad (2.6.a)$$

e

$$\delta \lambda^a = \sum_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} \alpha, \quad (2.6.b)$$

onde α é um parâmetro de Grassmann.

As matrizes de Dirac quadri-dimensionais Γ^μ e bi-dimensionais γ^μ relacionam-se através dos seguintes produtos diretos :

$$\Gamma^0 = \gamma^0 \otimes I_2 = \begin{bmatrix} \gamma^0 & 0 \\ 0 & \gamma^0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma^1 = \gamma^1 \otimes I_2 = \begin{bmatrix} \gamma^1 & 0 \\ 0 & \gamma^1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma^2 = \gamma_3 \otimes i\sigma_1 = i \begin{bmatrix} 0 & \gamma_3 \\ \gamma_3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma^3 = \gamma_3 \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_3 \\ -\gamma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

onde I_2 é a matriz identidade 2×2 e σ_i são as matrizes de Pauli. As matrizes de Dirac bi-dimensionais γ^μ são definidas por

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \gamma^3 &= \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Representando o spinor de Majorana λ como

$$\lambda = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

e impondo a condição de Majorana $\lambda = C \bar{\lambda}^T$, para

$$C = -i \Gamma^2 \Gamma^0 = -\gamma_1 \otimes \sigma_1 = -C_2 \otimes \sigma_1 \quad (2.10)$$

(C é o operador de conjugação de carga), resulta na estrutura

$$\lambda = \begin{pmatrix} \chi \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

onde

$$\tilde{\chi} = C_2 \bar{\chi}^T. \quad (2.12)$$

Nestas fórmulas, λ representa um spinor de Majorana num espaço quadri-dimensional e χ um spinor de Dirac num espaço bi-dimensional.

Para o campo vetorial de gauge

$$U_{\mu}^a(x) = (U_0^a, U_1^a, U_2^a, U_3^a) ,$$

faremos a decomposição

$$U_{\mu}^a(x) = (U_0^a, U_1^a) \quad (2.13)$$

e

$$\phi^a(x) = U_3^a(x) + i U_2^a(x) . \quad (2.14)$$

A partir destas redefinições dos campos, podemos decompor a ação (2.1) em função destes novos campos. Para a parte livre dos campos de gauge, temos

(i) para μ, ν variando de 0 a 1 :

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \longrightarrow -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} ,$$

(ii) para $\mu = 0, 1$; $\nu = 2, 3$; $\mu \longleftrightarrow \nu$:

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \longrightarrow \frac{1}{2} D_0 \phi^{*a} D_0 \phi^a + \frac{1}{2} D_1 \phi^{*a} D_1 \phi^a$$

(iii) e para $\mu, \nu = 2, 3$:

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \longrightarrow \frac{1}{2} g^2 (f_{abc} \phi^b \phi^{*c})^2 .$$

Para a parte spinorial, temos

(i) para μ variando de 0 a 1 :

$$\frac{1}{2} i \bar{\lambda}^a \Gamma^\mu D_\mu \lambda^a \longrightarrow i \bar{\chi}^a \gamma^\mu D_\mu \chi^a$$

(ii) e para μ variando de 2 a 3 :

$$\frac{1}{2} i \bar{\lambda}^a \Gamma^\mu D_\mu \lambda^a \longrightarrow \frac{i}{2} g f_{abc} \left[\bar{\chi}^a \gamma^3 \tilde{\chi}^b \phi^c - i \tilde{\chi}^a \gamma^3 \chi^b \phi^{*c} \right] .$$

Somando todos estes os termos, obtemos a ação (2.1) em função dos novos campos (considerados como independentes de x^2 e x^3),

$$\begin{aligned} S = \int d^2x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} D_\mu \phi^{*a} D^\mu \phi^a + i \bar{\chi}^a \gamma^\mu D_\mu \chi^a + \right. \\ \left. - \frac{i}{2} g f_{abc} \left[\bar{\chi}^a \gamma^3 \tilde{\chi}^b \phi^c - i \tilde{\chi}^a \gamma^3 \chi^b \phi^{*c} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} g^2 (f_{abc} \phi^b \phi^{*c})^2 \right] . \end{aligned} \quad (2.15)$$

As transformações supersimétricas (2.6), em função destes novos campos, ficam como

$$\delta U_\mu^a = i \left[\bar{\alpha} \gamma_\mu \chi^a - \bar{\chi}^a \gamma_\mu \alpha \right] , \quad (\mu = 0, 1) ,$$

$$\delta \left[U_3^a + i U_2^a \right] = \delta \phi^a = -2i \tilde{\alpha} \gamma_3 \chi^a ,$$

$$\delta [U_3^a - iU_2^a] = \delta \phi^{*a} = 2i\bar{\alpha} \gamma_3 \tilde{\chi}^a ,$$

$$\delta \lambda \longrightarrow \delta \chi^a = (\sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} g f_{abc} \phi^b \phi^{*c}) \alpha - \gamma^\mu D_\mu \phi^a \gamma_3 \tilde{\alpha} ,$$

$$\delta \tilde{\chi}^a = (\sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} - \frac{1}{2} g f_{abc} \phi^b \phi^{*c}) \tilde{\alpha} + \gamma^\mu D_\mu \phi^{*a} \gamma_3 \tilde{\alpha} . \quad (2.16)$$

A equação (2.15) representa uma ação de Yang-Mills com supersimetria N=2 no espaço-tempo bi-dimensional. As cargas supersimétricas geradores das transformações (2.16) serão explicitadas no próximo capítulo. A matriz γ^3 definida nas equações (2.8) é a correspondente bi-dimensional da matriz Γ^5 (ou γ^5 , na notação usual) do espaço-tempo quadri-dimensional.

CAPÍTULO III

DISCRETIZAÇÃO DO MODELO PARA UMA REDE ESPACIAL, TEMPO CONTÍNUO

MODELO HAMILTONIANO

No capítulo anterior determinamos a ação para um modelo de Yang-Mills com supersimetria $N=2$ no espaço-tempo a duas dimensões. Pelas discussões anteriores, seria aparentemente simples a tarefa de transposição de um modelo para a rede, bastando transcrever o modelo na linguagem das formas diferenciais, e a partir daí fazer o mapeamento para a rede. No entanto, não se conhecem regras precisas para a construção da interação supersimétrica no formalismo das formas diferenciais, o que torna a tarefa não tão simples como aparenta.

Neste capítulo, vamos explorar a álgebra superimétrica,

$$\left\{ Q_{\alpha}^a, Q_{\beta}^b \right\} = H \delta_{\alpha\beta}^{ab} + (\gamma_5)_{\alpha\beta} P, \quad (3.1)$$

que relaciona as supercargas com a hamiltoniana para, a partir da discretização das supercargas, obter a hamiltoniana do modelo na rede. Esta discretização deve ser realizada a partir da representação das supercargas dentro do formalismo de Dirac-Kähler. Neste procedimento, a discretização atinge apenas as coordenadas espaciais, permanecendo o tempo contínuo.

Os geradores supersimétricos (supercargas) são grandezas spinoriais, e portanto a super-álgebra é definida através de relações de anti-comutação. Na equação acima, $\alpha, \beta = 1, 2$ são índices spinoriais e $a, b = 1, 2$ são índices de simetria interna. Neste modelo

bi-dimensional, usaremos indistintamente γ^5 ou γ^3 .

Uma redefinição adequada das supercargas permite definir uma sub-álgebra envolvendo apenas a hamiltoniana, na forma

$$Q^2 = H \quad . \quad (3.2)$$

Deste modo, tendo as supercargas, é sempre possível obter a hamiltoniana do modelo. A partir das transformações supersimétricas, pode-se determinar as supercargas usando o teorema de Noether, aplicado sobre a ação inicial (2.15) do modelo. O sucesso do procedimento depende de conseguirmos escrever estas supercargas na linguagem das formas diferenciais de Dirac-Kähler, inicialmente no contínuo, e estabelecer as regras de transposição destas supercargas para a rede. A partir destes resultados, podemos obter a expressão da hamiltoniana, e consequentemente, da lagrangeana e as transformações supersimétricas na rede.

3.1 - MODELO HAMILTONIANO NO CONTÍNUO

Vamos usar a definição $g^{11} = -1$, $g^{22} = 1$ e $g^{\mu\nu} = 0$ quando $\mu \neq \nu$ para o tensor métrico $g^{\mu\nu}$ do espaço-tempo de Minkowski bi-dimensional, a componente espacial indicada pelo índice 1 e a componente temporal pelo índice 2.

As duas matrizes γ^μ de Dirac, para $\mu = 1$ ou 2, e o seu produto, $\gamma^5 = \gamma^3 = \gamma^2 \cdot \gamma^1$, são

$$\begin{aligned}
\gamma^2 &= \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \\
\gamma^1 &= i \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \\
\gamma^5 &= \gamma^2 \gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{3.3}$$

O operador conjugação de carga C é definido por

$$C = i\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.4}$$

A lagrangeana do modelo é definida pela ação (2.15),

$$\mathcal{L}(x) = - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} D_\mu \phi^{*a} D^\mu \phi^a + i \bar{\chi}^a \gamma^\mu D_\mu \chi^a + \tag{3.5}$$

$$- \frac{i}{2} g f_{abc} \left[\bar{\chi}^a \gamma^5 \tilde{\chi}^b \phi^c - i \tilde{\chi}^a \gamma^5 \chi^b \phi^{*c} \right] + \frac{1}{2} g^2 (f_{abc} \phi^b \phi^{*c})^2 ,$$

invariante pelas transformações supersimétricas (2.16) ,

$$\delta U_\mu^a = i \left[\bar{\alpha} \gamma_\mu \chi^a - \bar{\tilde{\chi}}^a \gamma_\mu \alpha \right] ,$$

$$\delta \phi^a = - 2i \bar{\alpha} \gamma_5 \chi^a ,$$

$$\delta \phi^{*a} = 2i \bar{\alpha} \gamma_5 \tilde{\chi}^a ,$$

$$\delta \chi^a = (\sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} g f_{abc} \phi^b \phi^{*c}) \alpha - \gamma^\mu D_\mu \phi^a \gamma_5 \tilde{\alpha} \quad ,$$

$$\delta \tilde{\chi}^a = (\sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} - \frac{1}{2} g f_{abc} \phi^b \phi^{*c}) \tilde{\alpha} + \gamma^\mu D_\mu \phi^{*a} \gamma_5 \tilde{\alpha} \quad . \quad (3.6)$$

Pelo teorema de Noether, a invariança da lagrangeana (3.5) pelas transformações (3.6) resulta nas correntes conservadas, J_μ^α , os geradores supersimétricos Q_α dados por

$$Q^\alpha = \int dx J_2^\alpha(x) \quad . \quad (3.7)$$

A corrente de Noether é obtida como

$$J_\mu^\alpha(x) = \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \varphi)} \delta \varphi + \Omega_\mu^\alpha \quad , \quad (3.8)$$

onde Ω_μ^α é uma função dos campos, cuja divergência é dado por

$$\partial^\mu \Omega_\mu^\alpha = \delta_F^\alpha \mathcal{L} \quad ; \quad (3.9)$$

$\delta_F \mathcal{L}$ é a variação funcional da lagrangeana, isto é

$$\delta_F \mathcal{L} = \mathcal{L}'(\varphi'(x'), \partial'_\mu \varphi'(x')) - \mathcal{L}(\varphi'(x'), \partial'_\mu \varphi'(x')) \quad .$$

Da variação funcional da lagrangeana (3.5) devido às transformações (3.6) resulta

$$\Omega_\mu^\alpha = \delta U_F^{\nu a} - i \delta \tilde{\chi}^a \gamma_\mu \chi^a - \frac{1}{2} [\delta \phi^a D_\mu \phi^{*a} + \delta \phi^{*a} D_\mu \phi^a] \quad . \quad (3.10)$$

O primeiro termo da corrente de Noether (3.8) resulta

$$\sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi = \frac{1}{2} [\delta \phi^a D_\mu \phi^{*a} + \delta \phi^{*a} D_\mu \phi^a] + \\ + i \bar{\chi}^a \gamma_\mu \delta \chi^a - F_{\mu\nu}^a \delta U^{\nu a} . \quad (3.11)$$

A soma destes termos, equações (3.10) e (3.11), resulta na corrente

$$J_\mu(x) = i \bar{\chi}^a \gamma_\mu \delta \chi^a - i \delta \bar{\chi}^a \gamma_\mu \chi^a , \quad (3.12)$$

onde $\delta \chi^a$ e $\delta \bar{\chi}^a$ são as transformações supersimétricas definidas em (3.6), de forma que a corrente acima assume a forma

$$J^\mu(x) = i \bar{\chi}^a \gamma^\mu \left[\left(\sigma_{\rho\nu} F^{\rho\nu a} + \frac{1}{2} g f_{abc} \phi^b \phi^{*c} \right) \alpha - \gamma^\nu D_\nu \phi^a \gamma_5 \tilde{\alpha} \right] + \\ - i \left[- \bar{\alpha} \left(\sigma_{\rho\nu} F^{\rho\nu a} + \frac{1}{2} g f_{abc} \phi^b \phi^{*c} \right) + \bar{\alpha} \gamma_5 \gamma^\nu D_\nu \phi^{*a} \right] \gamma^\mu \chi^a . \quad (3.13)$$

As super-cargas estão relacionadas com a componente temporal da corrente. Temos

$$\begin{aligned}
J_2(x) = & i \left\{ -\chi_1^* F_{12}^a + \frac{1}{2} g f_{abc} \chi_1^* \phi^b \phi^{*c} - \chi_2^a D_2 \phi^{*a} - \chi_2^a D_1 \phi^{*a} \right\} \alpha_1 \\
& + i \left\{ \chi_2^* F_{12}^a + \frac{1}{2} g f_{abc} \chi_2^* \phi^b \phi^{*c} - \chi_1^a D_2 \phi^{*a} + \chi_1^a D_1 \phi^{*a} \right\} \alpha_2 \\
& - i \alpha_1^* \left\{ -\chi_1^a F_{12}^a - \frac{1}{2} g f_{abc} \chi_1^a \phi^b \phi^{*c} - \chi_2^{*a} D_2 \phi^a - \chi_2^{*a} D_1 \phi^a \right\} \\
& - i \alpha_2^* \left\{ \chi_2^a F_{12}^a - \frac{1}{2} g f_{abc} \chi_2^a \phi^b \phi^{*c} - \chi_1^{*a} D_2 \phi^a + \chi_1^{*a} D_1 \phi^a \right\} . \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Na expressão acima, podemos identificar os seguintes geradores supersimétricos ou super-cargas :

$$Q_1 = \int dx \left\{ -\chi_1^* F_{12}^a + \frac{1}{2} g f_{abc} \chi_1^* \phi^b \phi^{*c} - \chi_2^a D_2 \phi^{*a} - \chi_2^a D_1 \phi^{*a} \right\} , \quad (3.15.a)$$

$$Q_2 = \int dx \left\{ \chi_2^* F_{12}^a + \frac{1}{2} g f_{abc} \chi_2^* \phi^b \phi^{*c} - \chi_1^a D_2 \phi^{*a} + \chi_1^a D_1 \phi^{*a} \right\} , \quad (3.15.b)$$

e seus complexos conjugados

$$Q_1^* = \int dx \left\{ -\chi_1^a F_{12}^a - \frac{1}{2} g f_{abc} \chi_1^a \phi^b \phi^{*c} - \chi_2^{*a} D_2 \phi^a - \chi_2^{*a} D_1 \phi^a \right\} , \quad (3.16.a)$$

$$Q_2^* = \int dx \left\{ \chi_2^a F_{12}^a - \frac{1}{2} g f_{abc} \chi_2^a \phi^b \phi^{*c} - \chi_1^{*a} D_2 \phi^a + \chi_1^{*a} D_1 \phi^a \right\} . \quad (3.16.b)$$

Utilizando as relações de comutação e de anticomutação a tempos iguais que definem a quantização canônica,

$$\left[F_{12}^a(x) , U_1^b(y) \right] = i \delta(x-y) \delta^{ab} ,$$

$$\left[D_2 \phi^a(x) , \phi^{*b}(y) \right] = -2 i \delta(x-y) \delta^{ab} ,$$

$$\left[D_2 \phi^{*a}(x) , \phi^b(y) \right] = -2 i \delta(x-y) \delta^{ab} ,$$

$$\left[D_2 \phi^a(x) , \phi^b(y) \right] = 0 ,$$

$$\left[D_2 \phi^{*a}(x) , \phi^{*b}(y) \right] = 0 ,$$

$$\left\{ \chi_\alpha^a(x) , \chi_\beta^{*b}(y) \right\} = \delta_{\alpha\beta} \delta(x-y) \delta^{ab} ,$$

$$\left\{ \chi_\alpha^a(x) , \chi_\beta^b(y) \right\} = 0 ,$$

$$\left\{ \chi_\alpha^{*a}(x) , \chi_\beta^{*b}(y) \right\} = 0 , \quad (3.17)$$

obtemos as relações de anticomutação das supercargas,

$$\begin{aligned} \left\{ Q_1 , Q_1^* \right\} = \int dx \left\{ F_{21}^a F_{21}^a + D_1 \phi^a D_1 \phi^{*a} + D_2 \phi^a D_2 \phi^{*a} + 4i \chi_2^a D_2 \chi_2^{*a} + \right. \\ \left. + D_1 \phi^{*a} D_2 \phi^a + D_1 \phi^a D_2 \phi^{*a} + 2ig f_{abc} (\chi_2^{*a} \chi_1^{*b} \phi^c + \chi_1^a \chi_2^b \phi^{*c}) + \right. \\ \left. - \frac{1}{4} g^2 (f_{abc} \phi^b \phi^{*c})^2 \right\} , \end{aligned}$$

$$\left\{ Q_2 , Q_2^* \right\} = \int dx \left\{ F_{21}^a F_{21}^a + D_1 \phi^a D_1 \phi^{*a} + D_2 \phi^a D_2 \phi^{*a} - 4i \chi_1^{*a} D_1 \chi_1^a + \right.$$

$$\begin{aligned}
& - D_1 \phi^{*a} D_2 \phi^a - D_1 \phi^a D_2 \phi^{*a} + 2igf_{abc} (\chi_2^{*a} \chi_1^{*b} \phi^c + \chi_1^a \chi_2^b \phi^{*c}) + \\
& - \frac{1}{4} g^2 (f_{abc} \phi^b \phi^{*c})^2 \Big\} , \\
\{ Q_1, Q_2 \} &= \int dx \Big\{ - 2F_{12}^a D_1 \phi^{*a} - 2igf_{abc} (\chi_1^a \chi_1^{*b} + \chi_2^{*a} \chi_2^b) \phi^{*c} + \\
& - gf_{abc} \phi^a \phi^{*b} D_2 \phi^{*c} \Big\} , \\
\{ Q_1^*, Q_2^* \} &= \int dx \Big\{ - 2F_{12}^a D_1 \phi^{*a} - 2igf_{abc} (\chi_1^a \chi_1^{*b} + \chi_2^{*a} \chi_2^b) \phi^c + \\
& - gf_{abc} \phi^a \phi^{*b} D_2 \phi^c \Big\} , \\
\{ Q_1, Q_1 \} &= \{ Q_2, Q_2 \} = 0 , \\
\{ Q_1^*, Q_1^* \} &= \{ Q_2^*, Q_2^* \} = 0 .
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Utilizando a lei de Gauss, que é a equação de movimento obtida pela variação da ação $S = \int L(x)dx$ em relação à componente temporal do campo de gauge, isto é $\delta S / \delta U_2 = 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta U_2^a} \phi^a &= F_{21}^a D_2 \phi^a - \frac{1}{2} gf_{abc} \phi^a \phi^{*b} D_2 \phi^c + igf_{abc} (\chi_1^a \chi_1^{*b} + \chi_2^a \chi_2^{*b}) \phi^c = 0 , \\
\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta U_2^a} \phi^{*a} &= F_{21}^a D_1 \phi^{*a} + \frac{1}{2} gf_{abc} \phi^a \phi^{*b} D_2 \phi^{*c} + igf_{abc} (\chi_1^a \chi_1^{*b} + \chi_2^a \chi_2^{*b}) \phi^{*c} = 0 .
\end{aligned} \tag{3.19}$$

as relações (3.18) ficam

$$\begin{aligned}
 \left\{ Q_1, Q_1^* \right\} &= 2 \left[H + P \right] , \\
 \left\{ Q_2, Q_2^* \right\} &= 2 \left[H - P \right] , \\
 \left\{ Q_1, Q_2 \right\} &= \left\{ Q_1^*, Q_2^* \right\} = 0 , \\
 \left\{ Q_1, Q_1 \right\} &= \left\{ Q_1^*, Q_1^* \right\} = 0 , \\
 \left\{ Q_2, Q_2 \right\} &= \left\{ Q_2^*, Q_2^* \right\} = 0 , \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

que podem ser resumidas como

$$\left\{ Q_\alpha, Q_\beta^* \right\} = 2 \left[H \delta_{\alpha\beta} + (\gamma^5)_{\alpha\beta} P \right] , \quad (3.21)$$

para $\alpha, \beta = 1, 2$.

A hamiltoniana é dada por

$$\begin{aligned}
 H = \frac{1}{2} \int dx \left\{ F_{21}^a F_{21}^a + D_1 \phi^a D_1 \phi^{*a} + D_2 \phi^a D_2 \phi^{*a} - 2i \chi_1^{*a} D_1 \chi_1^a + \right. \\
 \left. + 2i \chi_2^{*a} D_1 \chi_2^a + 2ig f_{abc} (\chi_1^{*a} \chi_2^{*b} \phi^c + \chi_1^a \chi_2^b \phi^{*c}) + \right. \\
 \left. - \frac{1}{4} g^2 (f_{abc} \phi^b \phi^{*c})^2 \right\} , \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

e o momento por

$$P = \frac{1}{2} \int dx \left\{ D_1 \phi^a D_2 \phi^{*a} + D_2 \phi^a D_1 \phi^{*a} + 2i \chi_1^{*a} D_1 \chi_1^a - 2i \chi_2^{*a} D_1 \chi_2^a \right\} . \quad (3.23)$$

Vamos definir as cargas $Q_\alpha^{(a)}$ ($a = 1, 2$) pela combinação das cargas Q_1 e Q_2 ,

$$Q_1 = (Q_1^{(1)} + iQ_1^{(2)}) \quad \text{e} \quad Q_2 = (Q_2^{(1)} + iQ_2^{(2)}) ,$$

ou seja,

$$Q_\alpha = (Q_\alpha^{(1)} + iQ_\alpha^{(2)}) . \quad (3.24)$$

Para estas novas cargas, as relações de anticomutação (3.18) ficam

$$\left\{ Q_1^{(1)} , Q_1^{(1)} \right\} = \left\{ Q_1^{(2)} , Q_1^{(2)} \right\} = H + P ,$$

$$\left\{ Q_2^{(1)} , Q_2^{(1)} \right\} = \left\{ Q_2^{(2)} , Q_2^{(2)} \right\} = H - P ,$$

$$\left\{ Q_\alpha^{(a)} , Q_\beta^{(b)} \right\} = 0 , \text{ para } a \neq b \text{ e } \alpha \neq \beta, \quad (3.24)$$

que são exatamente as relações (3.1),

$$\left\{ Q_\alpha^{(a)} , Q_\beta^{(b)} \right\} = \delta^{ab} \left[H \delta_{\alpha\beta} + (\gamma^5)_{\alpha\beta} P \right] . \quad (3.26)$$

Determinadas as cargas supersimétricas, vamos agora colocá-las

na notação das formas diferenciais.

Vamos definir os campos spinoriais como

$$\psi(x) = \sum_H \psi(x, H) dx^H \quad (3.27)$$

$$= \frac{1}{2} \left[f_0^a(x) - if_1^a(x)dx^1 + if_2^a(x)dx^2 - f_{12}^a(x)dx^1 \wedge dx^2 \right] t^a ,$$

onde H é um conjunto ordenado de índices; $f_0^a(x)$, $f_1^a(x)$, $f_2^a(x)$ e $f_{12}^a(x)$ são variáveis reais de Grassmann, satisfazendo às relações de anti-comutação em tempos iguais

$$\left\{ f_H^a(x) , f_K^b(y) \right\} = \delta_{H,K} \delta^{ab} \delta(x-y) , \quad (3.28)$$

sendo a e b índices de "flavor".

A equação (3.27) tem a equivalente representação matricial de Dirac-Kähler

$$\begin{aligned} \left[\psi(x) \right] &= \sum_H \psi(x, H) \gamma^H \\ &= \frac{1}{2} \left[f_0^a(x)I - if_1^a(x)\gamma^1 + if_2^a(x)\gamma^2 - f_{12}^a(x)\gamma^5 \right] t^a , \end{aligned} \quad (3.29)$$

ou

$$\left[\psi^a(x) \right] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} f_0^a(x) + f_{12}^a(x) & f_1^a(x) + f_2^a(x) \\ f_1^a(x) - f_{12}^a(x) & f_0^a(x) - f_{12}^a(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \psi_1^{a,(1)}(x) & \psi_1^{a,(2)}(x) \\ \psi_2^{a,(1)}(x) & \psi_2^{a,(2)}(x) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Podemos relacionar as componentes dos spinores $\psi(x)$ com as componentes dos spinores χ do nosso modelo como

$$\begin{aligned} \chi_1^a(x) &= \psi_1^{a,(1)}(x) + i \psi_1^{a,(2)}(x) = \frac{f_o^a(x) + f_{12}^a(x)}{2} + i \frac{f_1^a(x) + f_2^a(x)}{2} , \\ \chi_2^a(x) &= \psi_2^{a,(1)}(x) + i \psi_2^{a,(2)}(x) = i \frac{f_o^a(x) - f_{12}^a(x)}{2} + \frac{f_1^a(x) - f_2^a(x)}{2} . \end{aligned} \quad (3.31)$$

O campo escalar complexo podemos representar por

$$\phi(x) = (S^a(x) + iP^a(x))t^a = \phi^a(x)t^a \quad , \quad (3.32)$$

onde $S(x)$ e $P(x)$ são coeficiente de uma zero forma.

Os campos vetoriais de gauge tem a representação tradicional

$$U(x) = U_\mu^a(x)t^a dx^\mu \quad , \quad (3.33)$$

o tensor eletromagnético, para o caso não abeliano, definido por

$$F(x) = (d + gU \wedge) U(x) = F_{\mu\nu}^a(x)t^a dx^\mu \wedge dx^\nu \quad , \quad (3.34)$$

onde usamos a diferenciação exterior covariante

$$d + gU \wedge = dx^\mu \wedge D_\mu$$

Substituindo as definições (3.31) e (3.32) em (3.15), as cargas supersimétricas ficam nas seguintes formas:

$$\begin{aligned}
Q_1 = \frac{1}{2} \int dx \left\{ -(f_o^a + f_{12}^a) F_{12}^a - g f_{abc} (f_1^a + f_2^a) S^b P^c - (f_1^a - f_2^a) (D_2 S^a + D_1 S^a) + \right. \\
+ (f_o^a - f_{12}^a) (D_2 P^a + D_1 P^a) + i \left[(f_1^a + f_2^a) F_{12}^a - g f_{abc} (f_o^a + f_{12}^a) S^b P^c + \right. \\
\left. \left. - (f_o^a - f_{12}^a) (D_2 S^a + D_1 S^a) + (f_1^a - f_2^a) (D_2 P^a + D_1 P^a) \right] \right\}, \\
Q_2 = \frac{1}{2} \int dx \left\{ -(f_1^a - f_2^a) F_{12}^a - (f_o^a + f_{12}^a) (D_2 S^a - D_1 S^a) - g f_{abc} (f_o^a - f_{12}^a) S^b P^c + \right. \\
- (f_1^a + f_2^a) (D_2 P^a - D_1 P^a) + i \left[-(f_o^a - f_{12}^a) F_{12}^a - g f_{abc} (f_1^a - f_2^a) S^b P^c + \right. \\
\left. \left. - (f_1^a + f_2^a) (D_2 S^a - D_1 S^a) + (f_o^a + f_{12}^a) (D_2 P^a - D_1 P^a) \right] \right\},
\end{aligned}
\tag{3.35}$$

que podem ser representadas na forma (3.24),

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{(1)} + i Q_\alpha^{(2)},$$

para $\alpha = 1, 2$. Na representação matricial de Dirac-Kähler, as cargas spinoriais ficam

$$\begin{bmatrix} Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^{(1)} & Q_1^{(2)} \\ Q_2^{(1)} & Q_2^{(2)} \end{bmatrix} = \sum q_H \gamma^H, \quad (3.36)$$

onde

$$q_H = \text{tr} (Q \gamma^H) \quad (3.37)$$

Explicitamente, temos

$$\begin{aligned} q_0 = \text{tr}(Q) &= Q_1^{(1)} + Q_2^{(2)} = \int dx \left\{ -f_0^a F_{12}^a - g f_{abc} f_1^a S^b P^c - f_1^a D_2 S^a + \right. \\ &\quad \left. + f_2^a D_1 S^a + f_{12}^a D_2 P^a - f_0^a D_1 P^a \right\}, \\ q_1 = \text{tr}(Q \gamma^1) &= Q_1^{(2)} + Q_2^{(1)} = \int dx \left\{ f_1^a F_{12}^a - g f_{abc} f_0^a S^b P^c - f_0^a D_2 S^a + \right. \\ &\quad \left. + f_{12}^a D_1 S^a - f_2^a D_2 P^a + f_1^a D_1 P^a \right\}, \\ q_2 = \text{tr}(Q \gamma^2) &= Q_1^{(2)} - Q_2^{(1)} = \int dx \left\{ f_2^a F_{12}^a - g f_{abc} f_{12}^a S^b P^c + f_{12}^a D_2 S^a + \right. \\ &\quad \left. - f_0^a D_1 S^a + f_1^a D_2 P^a - f_2^a D_1 P^a \right\}, \\ q_3 = \text{tr}(Q \gamma^3) &= Q_1^{(1)} - Q_2^{(2)} = \int dx \left\{ -f_{12}^a F_{12}^a - g f_{abc} f_2^a S^b P^c + f_2^a D_2 S^a + \right. \\ &\quad \left. - f_1^a D_1 S^a - f_0^a D_2 P^a + f_{12}^a D_1 P^a \right\}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

satisfazendo às relações de anti-comutação

$$\{q_i, q_i\} = H$$

$$\{q_0, q_1\} = \{q_0, q_2\} = 0 \quad (3.39)$$

$$\{q_0, q_3\} = \{q_1, q_2\} = P$$

Utilizando as relações de comutação (tempos iguais),

$$\begin{aligned} \left[F_{21}^a(x), U_1^b(y) \right] &= -i \delta(x-y) \delta^{ab}, \\ \left[D_2 S^a(x), S^b(y) \right] &= -i \delta(x-y) \delta^{ab}, \\ \left[D_2 P^a(x), P^b(y) \right] &= -i \delta(x-y) \delta^{ab}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

e as relações de anticomutação (3.28), podemos obter, de acordo com as equações (3.38) e as relações de anti-comutação (3.39), a expressão da hamiltoniana. Obtemos várias expresões,

$$\begin{aligned} H_0 = \{q_0, q_0\} &= \frac{1}{2} \int dx \left\{ F_{12}^a F_{12}^a + (D_2 S^a)^2 + (D_1 S^a)^2 + (D_2 P^a)^2 + (D_1 P^a)^2 + \right. \\ &+ 2F_{12}^a D_1 P^a - 2i(f_2^a D_1 f_1^a + f_0^a D_1 f_{12}^a) + 2gf_{abc} (D_2 S^a) S^b P^c + \\ &+ 2igf_{abc} \left[(f_1^a f_{12}^b - f_0^a f_2^b) S^c + (f_1^a f_1^b + f_0^a f_0^b) P^c \right] + g^2 (f_{abc} S^b P^c)^2 \Big\} \\ H_1 = \{q_1, q_1\} &= \frac{1}{2} \int dx \left\{ F_{12}^a F_{12}^a + (D_2 S^a)^2 + (D_1 S^a)^2 + (D_2 P^a)^2 + (D_1 P^a)^2 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2F_{12}^a D_1 P^a - 2i(f_2^a D_1 f_1^a + f_0^a D_1 f_{12}^a) + 2gf_{abc}(D_2 S^a)S^b P^c + \\
& - 2igf_{abc} \left[(f_1^a f_{12}^b - f_0^a f_2^b)S^c + (f_1^a f_1^b + f_0^a f_0^b)P^c \right] + g^2(f_{abc} S^b P^c)^2 \Big\} , \\
H_2 = \{q_2, q_2\} = \frac{1}{2} \int dx \Big\{ & F_{12}^a F_{12}^a + (D_2 S^a)^2 + (D_1 S^a)^2 + (D_2 P^a)^2 + (D_1 P^a)^2 + \\
& - 2F_{12}^a D_1 P^a - 2i(f_2^a D_1 f_1^a + f_0^a D_1 f_{12}^a) - 2gf_{abc}(D_2 S^a)S^b P^c + \\
& + 2igf_{abc} \left[(f_1^a f_{12}^b - f_0^a f_2^b)S^c - (f_1^a f_1^b + f_0^a f_0^b)P^c \right] + g^2(f_{abc} S^b P^c)^2 \Big\} , \\
H_3 = \{q_3, q_3\} = \frac{1}{2} \int dx \Big\{ & F_{12}^a F_{12}^a + (D_2 S^a)^2 + (D_1 S^a)^2 + (D_2 P^a)^2 + (D_1 P^a)^2 + \\
& - 2F_{12}^a D_1 P^a - 2i(f_2^a D_1 f_1^a + f_0^a D_1 f_{12}^a) - 2gf_{abc}(D_2 S^a)S^b P^c + \\
& + 2igf_{abc} \left[(f_1^a f_{12}^b + f_0^a f_2^b)S^c - (f_1^a f_1^b - f_0^a f_0^b)P^c \right] + g^2(f_{abc} S^b P^c)^2 \Big\} .
\end{aligned}
\tag{3.41}$$

Recorrendo à equação de movimento dos campos, especificamente a lei de Gauss,

$$- F_{12}^a D_1 P^a - gf_{abc}(D_2 S^a)S^b P^c - \frac{1}{2}igf_{abc} \left[f_0^a f_0^b + f_1^a f_1^b + f_2^a f_2^b + f_{12}^a f_{12}^b \right] P^c = 0 ,
\tag{3.42}$$

é possível de se verificar que todas as expressões obtidas para a hamiltoniana, equações (4.41), são equivalentes,

$$H_0 = H_1 = H_2 = H_3 = H \quad ,$$

para

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2} \int dx \left\{ F_{12}^a F_{12}^a + (D_2 S^a)^2 + (D_1 S^a)^2 + (D_2 P^a)^2 + (D_1 P^a)^2 + \right. \\ \left. - 2i(f_2^a D_1 f_1^a + f_0^a D_1 f_{12}^a) + igf_{abc} \left[2(f_1^a f_{12}^b - f_0^a f_2^b) S^c + \right. \right. \\ \left. \left. + (f_0^a f_0^b + f_1^a f_1^b - f_2^a f_2^b - f_{12}^a f_{12}^b) P^c \right] + g^2 (f_{abc} S^b P^c)^2 \right\} . \quad (3.43) \end{aligned}$$

A lagrangeana correspondente é

$$\begin{aligned} L = \int dx \left\{ \frac{1}{2} F_{12}^a F_{12}^a + \frac{1}{2} \left[(D_2 S^a)^2 + (D_1 S^a)^2 + (D_2 P^a)^2 + (D_1 P^a)^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} i (f_0^a D_2 f_0^a + f_1^a D_2 f_1^a + f_2^a D_2 f_2^a + f_{12}^a D_2 f_{12}^a) + 2(f_2^a D_1 f_1^a + f_0^a D_1 f_{12}^a) + \right. \\ \left. - igf_{abc} \left[(f_1^a f_{12}^b - f_0^a f_2^b) S^c + \frac{1}{2} (f_0^a f_0^b + f_1^a f_1^b - f_2^a f_2^b - f_{12}^a f_{12}^b) P^c \right] + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} g^2 (f_{abc} S^b P^c)^2 \right\} , \quad (3.44) \end{aligned}$$

As super-cargas q_i são geradores das seguintes transformações supersimétricas :

(i) carga q_0 :

$$[q_0, U_1^a(x)] = \delta_{(0)} U_1^a(x) = -if_0^a(x) \quad ,$$

$$[q_o, U_2^a(x)] = \delta_{(o)} U_2^a(x) = if_{12}^a(x) \quad (\text{definição}) ,$$

$$[q_o, S^a(x)] = \delta_{(o)} S^a(x) = if_1^a(x) ,$$

$$[q_o, P^a(x)] = \delta_{(o)} P^a(x) = -if_{12}^a(x) ,$$

$$\{q_o, f_o^a(x)\} = \delta_{(o)} f_o^a(x) = -F_{12}^a(x) - D_1 P^a(x) ,$$

$$\{q_o, f_1^a(x)\} = \delta_{(o)} f_1^a(x) = -gf_{bc}^a S^b(x) P^c(x) - D_2 S^a(x) ,$$

$$\{q_o, f_2^a(x)\} = \delta_{(o)} f_2^a(x) = D_1 S^a(x) ,$$

$$\{q_o, f_{12}^a(x)\} = \delta_{(o)} f_{12}^a(x) = D_2 P^a(x) , \quad (3.45)$$

(ii) carga q_1

$$[q_1, U_1^a(x)] = \delta_{(1)} U_1^a(x) = +if_1^a(x) ,$$

$$[q_1, U_2^a(x)] = \delta_{(1)} U_2^a(x) = -if_2^a(x) \quad (\text{definição}) ,$$

$$[q_1, S^a(x)] = \delta_{(1)} S^a(x) = if_o^a(x) ,$$

$$[q_1, P^a(x)] = \delta_{(o)} P^a(x) = if_2^a(x) ,$$

$$\{q_1, f_o^a(x)\} = \delta_{(1)} f_o^a(x) = -gf_{bc}^a S^b(x) P^c(x) - D_2 S^a(x) ,$$

$$\{q_1, f_1^a(x)\} = \delta_{(1)} f_1^a(x) = F_{12}^a(x) + D_1 P^a(x) \quad ,$$

$$\{q_1, f_2^a(x)\} = \delta_{(1)} f_2^a(x) = -D_2 P^a(x) \quad ,$$

$$\{q_1, f_{12}^a(x)\} = \delta_{(1)} f_{12}^a(x) = D_1 S^a(x) \quad , \quad (3.46)$$

(iii) carga q_2

$$[q_2, U_1^a(x)] = \delta_{(2)} U_1^a(x) = if_2^a(x) \quad ,$$

$$[q_2, U_2^a(x)] = \delta_{(2)} U_2^a(x) = if_1^a(x) \quad (\text{definição}) \quad ,$$

$$[q_2, S^a(x)] = \delta_{(2)} S^a(x) = -if_{12}^a(x) \quad ,$$

$$[q_2, P^a(x)] = \delta_{(2)} P^a(x) = -if_1^a(x) \quad ,$$

$$\{q_2, f_0^a(x)\} = \delta_{(2)} f_0^a(x) = -D_1 S^a(x) \quad ,$$

$$\{q_2, f_1^a(x)\} = \delta_{(2)} f_1^a(x) = D_2 P^a(x) \quad ,$$

$$\{q_2, f_2^a(x)\} = \delta_{(2)} f_2^a(x) = F_{12}^a(x) - D_1 P^a(x) \quad ,$$

$$\{q_2, f_{12}^a(x)\} = \delta_{(2)} f_{12}^a(x) = -gf_{bc}^a S^b(x) P^c(x) + D_2 S^a(x) \quad , \quad (3.47)$$

(iv) carga q_3

$$[q_3, U_1^a(x)] = \delta_{(3)} U_1^a(x) = -if_{12}^a(x) \quad ,$$

$$[q_3, U_2^a(x)] = \delta_{(3)} U_2^a(x) = if_o^a(x) \quad (\text{definição}) \quad ,$$

$$[q_3, S^a(x)] = \delta_{(3)} S^a(x) = -if_2^a(x) \quad ,$$

$$[q_3, P^a(x)] = \delta_{(3)} P^a(x) = -if_o^a(x) \quad ,$$

$$\{q_3, f_o^a(x)\} = \delta_{(3)} f_o^a(x) = -D_2 P^a(x) \quad ,$$

$$\{q_3, f_1^a(x)\} = \delta_{(3)} f_1^a(x) = -D_1 S^a(x) \quad ,$$

$$\{q_3, f_{12}^a(x)\} = \delta_{(3)} f_{12}^a(x) = -F_{12}^a(x) + D_1 P^a(x) \quad ,$$

$$\{q_3, f_2^a(x)\} = \delta_{(3)} f_2^a(x) = -gf_{bc}^a S^b(x) P^c(x) + D_2 S^a(x) \quad , \quad (3.48)$$

A partir destes resultados para o contínuo, estamos prontos para fazer a transposição do modelo para a rede.

3.2 - MODELO HAMILTONIANO NA REDE

Vamos considerar as supercargas no formalismo de Dirac-Kähler no contínuo, equações (3.38), e proceder à sua discretização, usando como regra a substituição das variáveis e os operadores do contínuo para os seus equivalentes na rede. Na rede, devemos acrescentar às cargas os respectivos conjugados hermitianos, como definidos no capítulo I, secção 1.2, a fim de mantermos a invariança de gauge.

Obtemos, usando a definição (1.66) do "campo elétrico", as supercargas com os respectivos conjugados hermitianos,

$$Q_0 = \sum_x \text{tr} \left\{ -f_0^\dagger(x) E_1(x) U^\dagger(x, 1) + ig f_1^\dagger(x) [S(x), P(x)] U(x, 1) + \right. \\ \left. - f_1^\dagger(x) D_2 S(x) U(x, 1) + \frac{1}{I_1} f_2^\dagger(x) D_1^+ S(x) U^\dagger(x, 1) + \right. \\ \left. + f_{12}^\dagger(x) D_2 P(x) U(x, 1) - \frac{1}{I_1} f_0^\dagger(x) D_1^+ P(x) U^\dagger(x, 1) \right\} , \quad (3.49. a)$$

$$Q_0^\dagger = \sum_x \text{tr} \left\{ -f_0(x) U(x, 1) E_1^\dagger(x) + ig f_1(x) U^\dagger(x, 1) [S^\dagger(x), P^\dagger(x)] + \right. \\ \left. - f_1(x) U^\dagger(x, 1) (D_2 S(x))^\dagger + \frac{1}{I_1} f_2(x) U(x, 1) (D_1^+ S(x))^\dagger + \right. \\ \left. + f_{12}(x) U^\dagger(x, 1) (D_2 P(x))^\dagger - \frac{1}{I_1} f_0(x) U(x, 1) (D_1^+ P(x))^\dagger \right\} , \quad (3.49. b)$$

$$Q_1 = \sum_x \text{tr} \left\{ f_1^\dagger(x) E_1(x) + ig f_0^\dagger(x) [S(x), P(x)] - f_0^\dagger(x) D_2 S(x) + \right.$$

$$+ \frac{1}{I_1} f_{12}^\dagger(x) D_1^\dagger S(x) - f_2^\dagger(x) D_2 P(x) + \frac{1}{I_1} f_1^\dagger(x) D_1^\dagger P(x) \Big\} \quad , \quad (3.50. a)$$

$$Q_1^\dagger = \sum_x \text{tr} \left\{ f_1(x) E_1^\dagger(x) + ig f_0(x) [S^\dagger(x), P^\dagger(x)] - f_0(x) (D_2 S(x))^\dagger + \right. \\ \left. + \frac{1}{I_1} f_{12}(x) (D_1^\dagger S(x))^\dagger - f_2(x) (D_2 P(x))^\dagger + \frac{1}{I_1} f_1(x) (D_1^\dagger P(x))^\dagger \right\} \quad , \quad (3.50. b)$$

$$Q_2 = \sum_x \text{tr} \left\{ f_2^\dagger(x) E_1(x) U^\dagger(x, 1) + ig f_{12}^\dagger(x) [S(x), P(x)] U(x, 1) + \right. \\ \left. + f_{12}^\dagger(x) D_2 S(x) U(x, 1) - \frac{1}{I_1} f_0^\dagger(x) D_1^\dagger S(x) U^\dagger(x, 1) + \right. \\ \left. + f_1^\dagger(x) D_2 P(x) U(x, 1) - \frac{1}{I_1} f_2^\dagger(x) D_1^\dagger P(x) U^\dagger(x, 1) \right\} \quad , \quad (3.51. a)$$

$$Q_2^\dagger = \sum_x \text{tr} \left\{ f_2(x) U(x, 1) E_1^\dagger(x) + ig f_{12}(x) U^\dagger(x, 1) [S^\dagger(x), P^\dagger(x)] + \right. \\ \left. + f_{12}(x) U^\dagger(x, 1) (D_2 S(x))^\dagger - \frac{1}{I_1} f_0(x) U(x, 1) (D_1^\dagger S(x))^\dagger + \right. \\ \left. + f_1(x) U^\dagger(x, 1) (D_2 P(x))^\dagger - \frac{1}{I_1} f_2(x) U(x, 1) (D_1^\dagger P(x))^\dagger \right\} \quad , \quad (3.51. b)$$

$$Q_3 = \sum_x \text{tr} \left\{ -f_{12}^\dagger(x) E_1(x) + ig f_2^\dagger(x) [S(x), P(x)] + f_2^\dagger(x) D_2 S(x) + \right. \\ \left. - \frac{1}{I_1} f_1^\dagger(x) D_1^\dagger S(x) - f_0^\dagger(x) D_2 P(x) + \frac{1}{I_1} f_{12}^\dagger(x) D_1^\dagger P(x) \right\} \quad , \quad (3.52. a)$$

$$Q_3^\dagger = \sum_x \text{tr} \left\{ -f_{12}(x) E_1^\dagger(x) + ig f_2(x) [S^\dagger(x), P^\dagger(x)] + f_2(x) (D_2 S(x))^\dagger + \right.$$

$$- \frac{1}{l_1} f_1(x) (D_1^+ S(x))^\dagger - f_0(x) (D_2^+ P(x))^\dagger + \frac{1}{l_1} f_{12}(x) (D_1^+ P(x))^\dagger \Big\} , \quad (3.52.b)$$

Devido a nossa normalização da ação na rede, impomos as seguintes relações de anticomutação e comutação (tempo contínuo),

$$\left\{ f_H^{ab}(x), f_K^{\dagger cd}(y) \right\} = 2\delta_{HK} \delta^{ad} \delta^{bc} \delta_{xy} ,$$

$$\left\{ f_H(x) , f_K(y) \right\} = 0, \quad \forall H,K ,$$

$$\left\{ f_H^\dagger(x) , f_K^\dagger(y) \right\} = 0 , \quad \forall H,K ,$$

$$\left[E_i^{\dagger ab}(x), U^{cd}(y, j) \right] = -2gl_j \delta^{ad} \delta^{bc} \delta_{ij} \delta_{xy} ,$$

$$\left[E_i^{ab}(x), U^{\dagger cd}(y, j) \right] = 2gl_j \delta^{ad} \delta^{bc} \delta_{ij} \delta_{xy} ,$$

$$\left[(D_2 S(x))^{ab}, S^{\dagger cd}(y) \right] = -2i\delta^{ad} \delta^{bc} \delta_{x,y} ,$$

$$\left[(D_2 S(x))^{\dagger ab}, S^{cd}(y) \right] = -2i\delta^{ad} \delta^{bc} \delta_{x,y} ,$$

$$\left[(D_2 P(x))^{ab}, P^{\dagger cd}(y) \right] = -2i\delta^{ad} \delta^{bc} \delta_{x,y} ,$$

$$\left[(D_2 P(x))^{\dagger ab}, P^{cd}(y) \right] = -2i\delta^{ad} \delta^{bc} \delta_{x,y} , \quad (3.53)$$

onde H e K são os conjuntos de índices ordenados.

De maneira análoga ao contínuo, obtemos a hamiltoniana

$$\begin{aligned}
H_0 = & \frac{1}{4} \left\{ Q_0, Q_0^\dagger \right\} = \sum_x \text{tr} \left\{ \frac{1}{2} E_1(x) E_1^\dagger(x) + \frac{1}{2} \left[D_2 S(x) (D_2 S(x))^\dagger + \right. \right. \\
& + D_2 P(x) (D_2 P(x))^\dagger \left. \right] + \frac{1}{2I_1^2} \left[D_1^\dagger S(x) (D_1^\dagger S(x))^\dagger + D_1^\dagger P(x) (D_1^\dagger P(x))^\dagger \right] + \\
& - \frac{i}{2} g \left\{ D_2 S(x) [S^\dagger(x), P^\dagger(x)] + [S(x), P(x)] (D_2 S(x))^\dagger \right\} + \\
& + \frac{1}{2I_1} \left[D_1^\dagger P(x) E_1^\dagger(x) + E_1(x) (D_1^\dagger P(x))^\dagger \right] - \frac{gl_1}{2} \left\{ \left[f_0^\dagger(x) (D_2 P(x))^\dagger f_{12}(x) + \right. \right. \\
& - f_0^\dagger(x) (D_2 S(x))^\dagger f_1(x) + ig f_0^\dagger(x) [S^\dagger(x), P^\dagger(x)] f_1(x) \left. \right] U^\dagger(x, 1) + \\
& + \left[ig f_1^\dagger(x) [S(x), P(x)] - f_1^\dagger(x) D_2 S(x) + f_{12}(x) D_2 P(x) \right] f_0(x) U(x, 1) \left. \right\} + \\
& + \frac{g}{2} \left\{ f_{12}^\dagger(x) \left[f_1(x) U^\dagger(x, 1) S^\dagger(x) U(x, 1) - S^\dagger(x) f_1(x) \right] - f_1^\dagger(x) \left[S(x) f_{12}(x) + \right. \right. \\
& - f_{12}(x) U^\dagger(x, 1) S(x) U(x, 1) + P^\dagger(x) f_1(x) - f_1(x) U^\dagger(x, 1) P^\dagger(x) U(x, 1) + \\
& - f_1(x) U^\dagger(x, 1) P(x) U(x, 1) + P(x) f_1(x) \left. \right] + f_0^\dagger(x) \left[S^\dagger(x) f_2(x) + \right. \\
& - f_2(x) U(x, 1) S^\dagger(x+l_1) U^\dagger(x, 1) \left. \right] + f_0(x) \left[f_0^\dagger(x) P^\dagger(x) + \right. \\
& - U(x, 1) P^\dagger(x+l_1) U^\dagger(x, 1) f_0^\dagger(x) + U(x, 1) S(x+l_1) U^\dagger(x, 1) f_2^\dagger(x) + \\
& - f_2^\dagger(x) S(x) - U(x, 1) P(x+l_1) U^\dagger(x, 1) f_0^\dagger(x) + P(x) f_0^\dagger(x) \left. \right] \left. \right\} + \\
& + \frac{i}{2I_1} \left\{ f_1^\dagger(x+l_1) U^\dagger(x, 1) f_2(x) U(x, 1) U(x+l_1, 1) - f_1^\dagger(x) f_2(x) U(x, 1) + \right. \\
& + f_2^\dagger(x) f_1(x) U^\dagger(x, 1) - f_2^\dagger(x) U(x, 1) f_1(x+l_1) U^\dagger(x+l_1, 1) U^\dagger(x, 1) + \\
& + f_{12}^\dagger(x+l_1) U^\dagger(x, 1) f_0(x) U(x, 1) U(x+l_1, 1) - f_{12}^\dagger(x) f_0(x) U(x, 1) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f_0^\dagger(x) f_{12}(x) U^\dagger(x, 1) - f_0^\dagger(x) U(x, 1) f_{12}(x+l_1) U^\dagger(x+l_1, 1) U^\dagger(x, 1) \Big\} + \\
& - \frac{g^2}{2} [S(x), P(x)][S(x), P(x)] \Big\} . \tag{3.54}
\end{aligned}$$

A lagrangeana correspondente é

$$\begin{aligned}
L_o = \sum_x \text{tr} \Big\{ & \frac{1}{2} E_1(x) E_1^\dagger(x) + \frac{1}{2} [D_2 S(x) (D_2 S(x))^\dagger + D_2 P(x) (D_2 P(x))^\dagger] + \\
& - \frac{1}{2I_1^2} [D_1^\dagger S(x) (D_1^\dagger S(x))^\dagger + D_1^\dagger P(x) (D_1^\dagger P(x))^\dagger] + \\
& + \frac{i}{2} [f_0^\dagger(x) D_2 f_0(x) + f_1^\dagger(x) D_2 f_1(x) + f_2^\dagger(x) D_2 f_2(x) + f_{12}^\dagger(x) D_2 f_{12}(x)] + \\
& + \frac{gl_1}{2} \Big\{ f_0^\dagger(x) [(D_2 P(x))^\dagger f_{12}(x) - (D_2 S(x))^\dagger f_1(x) + \\
& + ig[S^\dagger(x), P^\dagger(x)] f_1(x)] U^\dagger(x, 1) + [igf_1^\dagger(x) [S(x), P(x)] f_0(x) + \\
& - f_1^\dagger(x) D_2 S(x) f_0(x) + f_{12}^\dagger(x) D_2 P(x) f_0(x)] U(x, 1) \Big\} + \\
& - \frac{g}{2} \Big\{ f_{12}^\dagger(x) [f_1(x) U^\dagger(x, 1) S^\dagger(x) U(x, 1) - S^\dagger(x) f_1(x)] + \\
& - f_{12}(x) [U^\dagger(x, 1) S(x) U(x, 1) f_1^\dagger(x) - f_1^\dagger(x) S(x)] + \\
& - f_0^\dagger(x) [S^\dagger(x) f_2(x) - f_2(x) U(x, 1) S^\dagger(x+l_1) U^\dagger(x, 1)] + \\
& - f_0(x) [f_2^\dagger(x) S(x) - U(x, 1) S(x+l_1) U^\dagger(x, 1) f_2^\dagger(x)] \Big\} + \\
& + \frac{g}{4} \Big\{ f_2^\dagger(x) [f_2(x), P(x)] + f_2(x) [f_2^\dagger(x), P^\dagger(x)] + f_1^\dagger(x) P(x) f_1(x) + \\
& + 2f_1(x) U^\dagger(x, 1) P(x) U(x, 1) f_1^\dagger(x) - f_1(x-l_1) P(x) f_1^\dagger(x-l_1) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f_0^\dagger(x) \left[f_0(x)P(x) - 2f_0(x)U(x,1)P(x+l_1)U^\dagger(x,1) + P(x)f_0(x) \right] + \\
& - f_0(x) \left[f_0^\dagger(x)P^\dagger(x) + P^\dagger(x)f_0^\dagger(x) - 2U(x,1)P^\dagger(x+l_1)U^\dagger(x,1)f_0^\dagger(x) \right] + \\
& + f_{12}(x)f_{12}^\dagger(x)P(x) + f_{12}^\dagger(x-l_1)f_{12}(x-l_1)P(x) + P^\dagger(x)f_1(x)f_1^\dagger(x) + \\
& + f_1^\dagger(x-l_1)f_1(x-l_1)P^\dagger(x) - 2U^\dagger(x,1)P^\dagger(x)U(x,1)f_1^\dagger(x)f_1(x) + \\
& + f_{12}(x)f_{12}^\dagger(x)P^\dagger(x) + f_{12}^\dagger(x-l_1)f_{12}(x-l_1)P^\dagger(x) \} + \\
& - \frac{g^2}{2} [S(x), P(x)][S(x), P(x)] \} \quad , \tag{3.55}
\end{aligned}$$

onde se usou a lei de Gauss

$$\begin{aligned}
& - ig(D_2 S(x))^\dagger [S(x), P(x)] + \frac{1}{l_1} D_1^\dagger P(x) E_1^\dagger(x) + \frac{g}{2} \left\{ -f_0^\dagger(x)[f_0(x), P(x)] \right. \\
& + f_2^\dagger(x)[f_2(x), P(x)] + f_1^\dagger(x-l_1)f_1(x-l_1)P(x) - f_1^\dagger(x)P(x)f_1(x) \\
& \left. + f_{12}(x)f_{12}^\dagger(x)P(x) + f_{12}^\dagger(x-l_1)f_{12}(x-l_1)P(x) \right\} = 0 \quad , \\
& - igD_2 S(x)[S^\dagger(x), P^\dagger(x)] + \frac{1}{l_1} (D_1^\dagger P(x))^\dagger E_1(x) + \frac{g}{2} \left\{ -f_0(x)[f_0^\dagger(x), P^\dagger(x)] \right. \\
& - f_2(x)[P^\dagger(x), f_2^\dagger(x)] + f_1^\dagger(x-l_1)f_1(x-l_1)P^\dagger(x) - f_1^\dagger(x)P^\dagger(x)f_1(x) \\
& \left. + f_{12}(x)f_{12}^\dagger(x)P^\dagger(x) + f_{12}^\dagger(x-l_1)f_{12}(x-l_1)P^\dagger(x) \right\} = 0 \quad . \tag{3.56}
\end{aligned}$$

A lagrangeana (3.55) é invariante pelas seguintes transformações supersimétricas (tempo contínuo) :

$$[Q_0^\dagger, U(x, 1)] = \delta_0 U(x, 1) = -2if_0(x)U(x, 1) \quad ,$$

$$[Q_0^\dagger, U(x, 2)] = \delta_0 U(x, 2) = 2if_{12}(x)U^\dagger(x, 1) \quad ,$$

$$[Q_0^\dagger, S(x)] = \delta_0 S(x) = 2if_1(x)U^\dagger(x, 1) \quad ,$$

$$[Q_0^\dagger, P(x)] = \delta_0 P(x) = -2if_{12}(x)U^\dagger(x, 1) \quad ,$$

$$\{Q_0^\dagger, f_0(x)\} = \delta_0 f_0(x) = 2 \left[-F_{12}(x) - \frac{1}{I_1} D_1 P(x) \right] U^\dagger(x, 1) \quad ,$$

$$\{Q_0^\dagger, f_1(x)\} = \delta_0 f_1(x) = -2 \left\{ g[S(x), P(x)] + D_2 S(x) \right\} U(x, 1) \quad ,$$

$$\{Q_0^\dagger, f_2(x)\} = \delta_0 f_2(x) = 2 \frac{1}{I_1} (D_1^\dagger S(x)) U^\dagger(x, 1) \quad ,$$

$$\{Q_0^\dagger, f_{12}(x)\} = \delta_0 f_{12}(x) = 2 (D_2 P(x)) U^\dagger(x, 1) \quad . \quad (3.57)$$

Vamos calcular H_1 de forma análoga à H_0 :

$$\begin{aligned} H_1 = \frac{1}{4} \{Q_1, Q_1^\dagger\} = \sum_x \text{tr} \left\{ \frac{1}{2} E_1(x) E_1^\dagger(x) + \frac{1}{2} \left[D_2 S(x) (D_2 S(x))^\dagger \right. \right. \\ \left. \left. + D_2 P(x) (D_2 P(x))^\dagger \right] + \frac{1}{2I_1^2} \left[D_1^\dagger S(x) (D_1^\dagger S(x))^\dagger + D_1^\dagger P(x) (D_1^\dagger P(x))^\dagger \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{2} ig \left\{ D_2 S(x) [S^\dagger(x), P^\dagger(x)] + [S(x), P(x)] (D_2 S(x))^\dagger \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{2I_1} \left[D_1^\dagger P(x) E_1^\dagger(x) + E_1(x) (D_1^\dagger P(x))^\dagger \right] - \frac{i}{2I_1} \left[f_{12}(x) (D_1^\dagger f_0(x))^\dagger \right. \right. \\ \left. \left. + f_{12}^\dagger(x) (D_1^\dagger f_0(x)) + f_1(x) (D_1^\dagger f_2(x))^\dagger + f_1^\dagger(x) D_1^\dagger f_2(x) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g}{2} \left\{ f_0^\dagger(x)[S(x), f_2(x)] + f_0(x)[S^\dagger(x), f_2^\dagger(x)] - f_1^\dagger(x)[S^\dagger(x) f_{12}(x) \right. \\
& - f_{12}(x) S^\dagger(x+l_1)] + f_1(x)[f_{12}^\dagger(x) S(x) - S(x+l_1) f_{12}^\dagger(x)] \\
& + f_0^\dagger(x)[f_0(x), P(x)] + f_0(x)[f_0^\dagger(x), P^\dagger(x)] + f_1^\dagger(x)[f_1(x) P^\dagger(x+l_1) \\
& - P^\dagger(x) f_1(x)] + f_1(x)[f_1^\dagger(x) P(x) - P(x+l_1) f_1^\dagger(x)] \left. \right\} \\
& - \frac{g^2}{2} [S(x), P(x)][S(x), P(x)] \left. \right\} , \tag{3.58}
\end{aligned}$$

que resulta na lagrangeana

$$\begin{aligned}
L_1 = \sum_x \text{tr} \left\{ \frac{1}{2} E_1(x) E_1^\dagger(x) + \frac{1}{2} [D_2 S(x) (D_2 S(x))^\dagger + D_2 P(x) (D_2 P(x))^\dagger] \right. \\
+ \frac{1}{2l_1^2} [D_1^\dagger S(x) (D_1^\dagger S(x))^\dagger + D_1^\dagger P(x) (D_1^\dagger P(x))^\dagger] \\
+ \frac{i}{2} [f_0^\dagger(x) D_2 f_0(x) + f_1^\dagger(x) D_2 f_1(x) + f_2^\dagger(x) D_2 f_2(x) \\
+ f_{12}^\dagger(x) D_2 f_{12}(x)] + \frac{i}{2l_1} [f_1^\dagger(x) D_1^\dagger f_2(x) + f_1(x) (D_1^\dagger f_2(x))^\dagger \\
+ f_{12}^\dagger(x) D_1^\dagger f_0(x) + f_{12}(x) (D_1^\dagger f_0(x))^\dagger] \\
- \frac{g}{2} \left\{ f_0^\dagger(x)[S(x), f_2(x)] + f_1(x)[f_{12}^\dagger(x) S(x) - S^\dagger(x+l_1) f_{12}^\dagger(x)] \right. \\
+ f_0(x)[S^\dagger(x), f_2^\dagger(x)] - f_1^\dagger(x)[S^\dagger(x) f_{12}(x) - f_{12}(x) S(x+l_1)] \\
- \frac{g}{4} \left\{ f_0^\dagger(x)[f_0(x), P(x)] + f_1(x)[f_1^\dagger(x) P(x) - P(x+l_1) f_1^\dagger(x)] \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f_0(x)[f_0^\dagger(x), P^\dagger(x)] + f_1^\dagger(x)[f_1(x)P^\dagger(x+l_1) - P^\dagger(x)f_1(x)] \\
& - f_2^\dagger(x)[f_2(x), P(x)] - f_{12}^\dagger(x)[f_{12}^\dagger(x)P(x) - P(x+l_1)f_{12}^\dagger(x)] \\
& - f_2(x)[f_2^\dagger(x), P^\dagger(x)] - f_{12}^\dagger(x)[f_{12}(x)P^\dagger(x+l_1) - P^\dagger(x)f_{12}(x)] \Big\} \\
& - \frac{g^2}{2} [S(x), P(x)][S(x), P(x)] \Big\} . \tag{3.59}
\end{aligned}$$

A lagrangeana acima é invariante pelas seguintes transformações supersimétricas (tempo contínuo)

$$\begin{aligned}
[Q_1^\dagger, U(x, 1)] &= \delta_1 U(x, 1) = 2f_1(x) , \\
[Q_1^\dagger, U(x, 2)] &= \delta_1 U(x, 2) = -2if_2(x) , \\
[Q_1^\dagger, S(x)] &= \delta_1 S(x) = 2if_0(x) , \\
[Q_1^\dagger, P(x)] &= \delta_1 P(x) = 2if_2(x) , \\
\{Q_1^\dagger, f_0(x)\} &= \delta_1 f_0(x) = -2g[S(x), P(x)] - 2D_2 S(x) , \\
\{Q_1^\dagger, f_1(x)\} &= \delta_1 f_1(x) = 2F_{12}(x) + 2\frac{1}{I_1}D_1^+ P(x) , \\
\{Q_1^\dagger, f_2(x)\} &= \delta_1 f_2(x) = -2D_2 P(x) , \\
\{Q_1^\dagger, f_{12}(x)\} &= \delta_1 f_{12}(x) = 2\frac{1}{I_1}D_1^+ S(x) , \tag{3.60}
\end{aligned}$$

Utilizando as supercargas (3.52), obtemos

$$H_3 = \frac{1}{4} \{Q_3, Q_3^\dagger\} = \sum_x \text{tr} \left\{ \frac{1}{2} E_1(x)E_1^\dagger(x) + \frac{1}{2} [D_2 S(x)(D_2 S(x))^\dagger \right.$$

$$\begin{aligned}
& + D_2 P(x)(D_2 P(x))^\dagger \Big] + \frac{1}{2l_1^2} \left[D_1^\dagger S(x)(D_1^\dagger S(x))^\dagger + D_1^\dagger P(x)(D_1^\dagger P(x))^\dagger \right] \\
& + \frac{1}{2} \operatorname{ig} \left\{ D_2 S(x)[S^\dagger(x), P^\dagger(x)] + [S(x), P(x)](D_2 S(x))^\dagger \right\} \\
& + \frac{1}{2l_1} \left[D_1^\dagger P(x)E_1^\dagger(x) + E_1(x)(D_1^\dagger P(x))^\dagger \right] - \frac{i}{2l_1} \left[f_{12}(x)(D_1^\dagger f_o(x))^\dagger \right. \\
& + f_{12}^\dagger(x)(D_1^\dagger f_o(x)) + f_1(x)(D_1^\dagger f_2(x))^\dagger + f_1^\dagger(x)D_1^\dagger f_2(x) \Big] \\
& + \frac{g}{2} \left\{ f_o^\dagger(x)[S^\dagger(x), f_2(x)] - f_o(x)[S(x), f_2^\dagger(x)] - f_1^\dagger(x)[S(x)f_{12}(x) \right. \\
& - f_{12}(x)S(x+l_1)] + f_1(x)[f_{12}^\dagger(x)S(x) - S(x+l_1)f_{12}^\dagger(x)] \\
& - f_2^\dagger(x)[f_2(x), P(x)] - f_2(x)[f_2^\dagger(x), P^\dagger(x)] - f_{12}^\dagger(x)[f_{12}(x)P^\dagger(x+l_1) \\
& - P^\dagger(x)f_{12}(x)] - f_{12}(x)[f_{12}^\dagger(x)P(x) - P(x+l_1)f_{12}^\dagger(x)] \Big\} \\
& - \frac{g^2}{2} [S(x), P(x)][S(x), P(x)] \Big\} , \tag{3.61}
\end{aligned}$$

correspondendo à lagrangeana

$$\begin{aligned}
L_3 = \sum_x \operatorname{tr} \Big\{ & \frac{1}{2} E_1(x)E_1^\dagger(x) + \frac{1}{2} \left[D_2 S(x)(D_2 S(x))^\dagger + D_2 P(x)(D_2 P(x))^\dagger \right] \\
& + \frac{1}{2l_1^2} \left[D_1^\dagger S(x)(D_1^\dagger S(x))^\dagger + D_1^\dagger P(x)(D_1^\dagger P(x))^\dagger \right] \\
& + \frac{i}{2} \left[f_o^\dagger(x)D_2 f_o(x) + f_1^\dagger(x)D_2 f_1(x) + f_2^\dagger(x)D_2 f_2(x) \right. \\
& + f_{12}^\dagger(x)D_2 f_{12}(x) \Big] + \frac{i}{2l_1} \left[f_1^\dagger(x)D_1^\dagger f_2(x) + f_1(x)(D_1^\dagger f_2(x))^\dagger \right. \\
& + f_{12}^\dagger(x)D_1^\dagger f_o(x) + f_{12}(x)(D_1^\dagger f_o(x))^\dagger \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{g}{2} \left\{ f_0^\dagger(x) [S^\dagger(x), f_2(x)] + f_1(x) [f_{12}^\dagger(x) S^\dagger(x) - S^\dagger(x+l_1) f_{12}^\dagger(x)] \right. \\
& + f_0^\dagger(x) [S(x), f_2^\dagger(x)] - f_1^\dagger(x) [S(x) f_{12}(x) - f_{12}(x) S(x+l_1)] \\
& - \frac{g}{4} \left\{ f_0^\dagger(x) [f_0(x), P(x)] + f_1(x) [f_1^\dagger(x) P(x) - P(x+l_1) f_1^\dagger(x)] \right. \\
& + f_0(x) [f_0^\dagger(x), P^\dagger(x)] + f_1^\dagger(x) [f_1(x) P^\dagger(x+l_1) - P^\dagger(x) f_1(x)] \\
& - f_2^\dagger(x) [f_2(x), P(x)] + f_{12}(x) [f_{12}^\dagger(x) P(x) - P(x+l_1) f_{12}^\dagger(x)] \\
& \left. - f_2(x) [f_2^\dagger(x), P^\dagger(x)] - f_{12}^\dagger(x) [f_{12}(x) P^\dagger(x+l_1) - P^\dagger(x) f_{12}(x)] \right\} \\
& \left. - \frac{g^2}{2} [S(x), P(x)] [S(x), P(x)] \right\} \quad (3.62)
\end{aligned}$$

Esta lagrangeana é invariante pelas seguintes transformações supersimétricas :

$$\begin{aligned}
[Q_3^\dagger, U(x, 0)] &= \delta_3 U(x, 0) = -2if_2(x) , \\
[Q_3^\dagger, S(x)] &= \delta_3 S(x) = -2if_2^\dagger(x) , \\
[Q_3^\dagger, P(x)] &= \delta_3 P(x) = 2if_0(x) , \\
\{Q_3^\dagger, f_2(x)\} &= \delta_3 f_2(x) = 2 [ig[S(x), P(x)] + D_2 S(x)] , \\
\{Q_3^\dagger, f_{12}(x)\} &= \delta_3 f_{12}(x) = 2 [-F_{12}(x) + (D_1^\dagger P(x))^\dagger] , \\
\{Q_3^\dagger, f_0(x)\} &= \delta_3 f_0(x) = -2D_2 P(x) , \\
\{Q_3^\dagger, f_1(x)\} &= \delta_3 f_1(x) = -\frac{2}{l_1} D_1^\dagger S(x) , \quad (3.63)
\end{aligned}$$

As várias expressões para a hamiltoniana e a lagrangeana na rede convergem todas ao limite correto no contínuo.

Aplicando o teorema de Noether na rede [7], podemos obter as correntes e as supercargas a partir das lagrangeanas determinadas. Temos o correto limite do contínuo a nível "árvore".

CAPÍTULO IV

DISCRETIZAÇÃO DO MODELO PARA UMA REDE ESPAÇO-TEMPORAL

MODELO LAGRANGEANO

No capítulo anterior foi feita a discretização espacial (tempo contínuo) do modelo, recorrendo à álgebra da supersimetria, que permite, através da discretização inicial das supercargas, obter a hamiltoniana na rede usando as relações supersimétricas do tipo $Q^2 = H$ entre as supercargas e a hamiltoniana.

Neste capítulo, vamos realizar a discretização do modelo para uma rede espaço-temporal, partindo da discretização da própria lagrangeana. Isto será feito construindo a lagrangeana a partir dos campos na representação das formas diferenciais, relativamente simples para a parte livre, porém com alguma dúvida para os termos da interação supersimétrica, em função da multiplicidade na representação dos campos no formalismo das formas diferenciais de Dirac-Kähler.

No contínuo, a construção da lagrangeana na representação das formas diferenciais é relativamente simples, incluindo os termos da interação supersimétrica. No entanto, a representação dos campos spinoriais por formas diferenciais não é unívoca, e embora este fato não seja relevante no contínuo, acarreta algumas dificuldades na rede, principalmente em função das transformações de gauge, que na rede dependem da definição da natureza geométrica dos campos.

4.1 - A LAGRANGEANA NA REPRESENTAÇÃO DE DIRAC-KÄHLER

Consideremos ação (2.15) da secção anterior,

$$\begin{aligned}
 S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} D_\mu \phi^a D^\mu \phi^{*a} + i \bar{\chi}^a \gamma^\mu D_\mu \chi^a + \right. \\
 \left. - \frac{i}{2} g f_{abc} \left[\bar{\chi}^a \gamma^5 \chi^b \phi^c - i \bar{\chi}^a \gamma^5 \chi^b \phi^{*c} \right] + \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} g^2 (f_{abc} \phi^b \phi^{*c})^2 \right] , \quad (2.15)'
 \end{aligned}$$

invariante pelas transformações supersimétricas (3.6).

Vamos introduzir novos campos $\psi_i(x)$ relacionados com os campos spinoriais $\chi_i(x)$ através de

$$\chi_1(x) = \frac{\psi_1^*(x) + \psi_2(x)}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \chi_2(x) = \frac{\psi_1^*(x) - \psi_2(x)}{\sqrt{2}} . \quad (4.1)$$

A ação anterior fica

$$\begin{aligned}
 S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} D_\mu \phi^a D^\mu \phi^{*a} + i \bar{\psi}^a \gamma^\mu D_\mu \psi^a + \right. \\
 \left. - \frac{i}{2} g f_{abc} \left[\bar{\psi}^a (1+\gamma^5) \psi^b \phi^c - i \bar{\psi}^a (1-\gamma^5) \psi^b \phi^{*c} \right] + \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} g^2 (f_{abc} \phi^b \phi^{*c})^2 \right] , \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

γ^μ e γ_5 definidos por (3.3).

Definimos os campos fermiônicos na representação das formas diferenciais como

$$\psi(x) = (f_o^a(x) - f_{12}^a(x) dx^1 \wedge dx^2) t^a, \quad (4.3.a)$$

com o seu complexo conjugado

$$\psi^*(x) = (f_o^{*a}(x) - f_{12}^{*a}(x) dx^1 \wedge dx^2) t^a. \quad (4.3.b)$$

Na representação matricial de Dirac-Kähler, temos

$$\begin{aligned} (\psi(x)) &= (f_o(x) + f_{12}(x) \gamma_5) = \begin{bmatrix} f_o(x) + f_{12}(x) & 0 \\ 0 & f_o(x) - f_{12}(x) \end{bmatrix} \\ e \\ (\psi^*(x)) &= (f_o^*(x) + f_{12}^*(x) \gamma_5) = \begin{bmatrix} f_o^*(x) + f_{12}^*(x) & 0 \\ 0 & f_o^*(x) - f_{12}^*(x) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

respectivamente.

Vamos definir as relações entre os campos spinoriais (4.1) e os coeficientes das formas diferenciais por

$$\psi_1(x) = f_o(x) + f_{12}(x),$$

$$\psi_2(x) = f_0(x) - f_{12}(x) \quad , \quad (4.5)$$

$$\psi_1^*(x) = f_0^*(x) + f_{12}^*(x) \quad ,$$

$$\psi_2^*(x) = f_0^*(x) - f_{12}^*(x) \quad .$$

O campo escalar complexo

$$\phi(x) = S(x) + iP(x)$$

pode ser representado pela forma diferencial

$$\phi(x) = (S^a(x) + P^a(x)dx^1 \wedge dx^2)t^a = \phi^a(x)t^a \quad , \quad (4.6.a)$$

com o seu conjugado

$$(\phi(x))^\dagger = (S^a(x) - P^a(x)dx^1 \wedge dx^2)t^a = (\phi^a(x))^\dagger t^a \quad . \quad (4.6.b)$$

Os campos de gauge tem a definição usual, equações (3.33) e (3.34),

$$U(x) = U_\mu^a(x)t^a dx^\mu \quad , \quad (3.33)'$$

$$F(x) = F_{\mu\nu}^a(x)t^a dx^\mu \wedge dx^\nu \quad . \quad (3.34)'$$

A lagrangeana, com os campos e os operadores diferenciais na

representação de Dirac-Kähler, fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = \mathcal{P}_0 \left\{ -\frac{1}{2} F^a(x) \vee F^a(x) + \frac{1}{2} ((d_u - \delta_u) \phi^a(x)) \vee ((d_u - \delta_u) \phi^{a\dagger}(x)) + \right. \\ \left. + i \psi^{*a}(x) \vee (d_u - \delta_u)_{ab} \vee dx^2 \vee \psi^b(x) + \right. \\ \left. - ig2\sqrt{2} f_{abc} \psi^{*a}(x) \vee dx^2 \vee \psi^b(x) \vee \phi^c(x) \vee dx^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} g^2 (f_{abc} \phi^{*b}(x) \vee \phi^c(x)) \vee (f_{ade} \phi^{*d}(x) \vee \phi^e(x)) \right\}, \quad (4.7) \end{aligned}$$

onde \mathcal{P}_0 é um operador projeção em zero forma, \vee denota o produto Clifford e

$$(d_u - \delta_u)_{ab} = (d - \delta)_{ab} + gf_{abc} U^c \vee,$$

para

$$U = U^a t^a dx^\mu \quad \text{e} \quad U^c = U_\mu^c dx^\mu.$$

A partir daqui, vamos adotar a formulação Euclidiana do espaço-tempo, mais adequado para a discretização da coordenada temporal; usam-se as seguintes redefinições

$$x^2 \longrightarrow ix^2,$$

$$\gamma_0 = \sigma_2 \quad \text{e} \quad \gamma_1 = \sigma_1 \quad ,$$

$$f_{12}(x) \longrightarrow i f_{12}(x) \quad ,$$

$$\partial_2 \longrightarrow i \partial_2 \quad ,$$

$$F_{12}(x) \longrightarrow i F_{12}(x) \quad ,$$

(4.8)

$$U_2(x) \longrightarrow i U_2(x) \quad .$$

A densidade de lagrangeana fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & -\frac{1}{2} F_{12}^a F_{12}^a + D_\mu S^a D^\mu S^a + D^\mu P^a D_\mu P^a + \\ & + 2f_0^{*a}(x) \left[D_2 f_0^a(x) - D_1 f_{12}^a(x) \right] + 2f_{12}^{*a}(x) \left[D_2 f_{12}^a(x) + D_1 f_0^a(x) \right] + \\ & + i g 2\sqrt{2} f_{abc} \left[(f_0^{*a}(x) f_0^b(x) - f_{12}^{*a}(x) f_{12}^b(x)) S^c(x) + (f_{12}^{*a}(x) f_0^b(x) + \right. \\ & \left. + f_0^{*a}(x) f_{12}^b(x)) P^c(x) \right] + 2g^2 (f_{abc} S^b(x) P^c(x))^2 \quad . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Nas transformações supersimétricas (3.6) podemos impor as seguintes condições (caso I) :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\varepsilon+}{2}$$

e

(4.10)

$$\alpha_1^* = -\alpha_2^* = \frac{\varepsilon+}{2} \quad ,$$

onde ε_+ e ε_- são parâmetros reais de Grassmann. As transformações supersimétricas ficam

$$\delta_+ S^a(x) = i\varepsilon_+ f_0^a(x) \quad ,$$

$$\delta_+ P^a(x) = i\varepsilon_+ f_{12}^a(x) \quad ,$$

$$\delta_+ f_0(x) = \delta_+ f_{12}(x) = 0 \quad ,$$

$$\delta_+ f_0^{*a}(x) = -i\varepsilon_+ [(D_2 S^a(x)) - (D_1 P^a(x))] \quad ,$$

$$\begin{aligned} \delta_+ f_{12}^{*a}(x) = & -i\varepsilon_+ \left[(D_2 P^a(x)) + (D_1 S^a(x)) + \right. \\ & \left. + \frac{i}{\sqrt{2}} F_{12}^a(x) + g\sqrt{2} f_{bc}^a S^b(x) P^c(x) \right] \quad , \end{aligned}$$

$$\delta_+ U_2^a(x) = \varepsilon_+ \sqrt{2} f_0^a(x) \quad ,$$

$$\delta_+ U_1^a(x) = -\varepsilon_+ \sqrt{2} f_{12}^a(x) \quad . \quad (4.11)$$

Podemos também impor as condições (caso II) :

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{\varepsilon_-}{2}$$

e

$$\alpha_1^* = \alpha_2^* = \frac{\varepsilon_-}{2} \quad .$$

(4.12)

As transformações supersimétricas ficam

$$\delta_- S^a(x) = i\varepsilon_- f_0^{*a}(x) \quad ,$$

$$\delta_- P^a(x) = i\varepsilon_- f_{12}^{*a}(x) \quad ,$$

$$\delta_- f_0^{*a}(x) = \delta_- f_{12}^{*a}(x) = 0 \quad ,$$

$$\delta_- f_0^a(x) = -i\varepsilon_- [(D_2 S^a(x)) + (D_1 P^a(x))] \quad ,$$

$$\begin{aligned} \delta_- f_{12}^a(x) = i\varepsilon_- \left[- (D_2 P^a(x)) + (D_1 S^a(x)) + \right. \\ \left. + \frac{i}{\sqrt{2}} F_{12}^a(x) + ig\sqrt{2} f_{bc}^a S^b(x) c^c P(x) \right] \quad , \end{aligned}$$

$$\delta_- U_2^a(x) = \sqrt{2} \varepsilon_- f_0^{*a}(x) \quad ,$$

$$\delta_+ U_1^a(x) = -\sqrt{2} \varepsilon_- f_{12}^{*a}(x) \quad . \quad (4.13)$$

Podemos observar que as transformações supersimétricas (4.11) e (4.13) relacionam-se através de uma "reflexão do tempo", definida por

$$f_0^a(x) \longleftrightarrow f_0^{*a}(x) \quad , \quad f_{12}^{*a}(x) \longleftrightarrow -f_{12}^a(x) \quad ,$$

$$S^a(x) \longleftrightarrow S^a(x) \quad , \quad P^a(x) \longleftrightarrow P^a(x) \quad ,$$

$$U_\mu^a(x) \longleftrightarrow U_\mu^a(x) \quad .$$

As correntes de Noether ficam, para o caso I,

$$\begin{aligned} J_{2+}(x) = & 4i \left[f_o^a(x) D_2 S^a(x) + f_{12}^a(x) D_2 P^a(x) + f_{12}^a(x) D_1 S^a(x) + \right. \\ & - f_o^a(x) D_1 P^a(x) - ig\sqrt{2} f_{abc} f_{12}^a(x) S^b(x) P^c(x) + \\ & \left. + \frac{i}{2\sqrt{2}} f_{12}^a(x) F_{12}^a(x) \right] \quad , \\ J_{1+}(x) = & 4i \left[-f_{12}^a(x) D_2 S^a(x) + f_o^a(x) D_2 P^a(x) + f_o^a(x) D_1 S^a(x) + \right. \\ & - f_{12}^a(x) D_1 P^a(x) - ig\sqrt{2} f_{abc} f_o^a(x) S^b(x) P^c(x) + \\ & \left. - \frac{i}{2\sqrt{2}} f_o^a(x) F_{12}^a(x) \right] \quad , \quad (4.14) \end{aligned}$$

e para o caso II,

$$\begin{aligned} J_{2-}(x) = & 4i \left[f_o^{*a}(x) D_2 S^a(x) + f_{12}^{*a}(x) D_2 P^a(x) - f_{12}^{*a}(x) D_1 S^a(x) + \right. \\ & + f_o^{*a}(x) D_1 P^a(x) - ig\sqrt{2} f_{abc} f_{12}^{*a}(x) S^b(x) P^c(x) + \end{aligned}$$

$$- \frac{i}{2\sqrt{2}} f_{12}^{*a}(x) F_{12}^a(x) \Big] ,$$

$$\begin{aligned} J_{1-}(x) = & 4i \left[f_{12}^{*a}(x) D_2 S^a(x) - f_o^{*a}(x) D_2 P^a(x) + f_o^{*a}(x) D_1 S^a(x) + \right. \\ & + f_{12}^{*a}(x) D_1 P^a(x) + ig\sqrt{2} f_{abc} f_o^{*a}(x) S^b(x) P^c(x) + \\ & \left. + \frac{i}{2\sqrt{2}} f_o^{*a}(x) F_{12}^a(x) \right] . \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.2 - DISCRETIZAÇÃO DA LAGRANGEANA

A equação (4.7) é a lagrangeana do modelo usando a representação das formas diferenciais de Dirac-Kähler no contínuo, para os spinores definidos por formas diferenciais, equações (4.3). Como, no entanto, uma forma diferencial comporta um número maior de graus de liberdade (o dobro, no caso $d=2$) que o necessário para representar um spinor, há uma certa arbitrariedade na representação dos spinores por formas diferenciais. Embora isto não ofereça nenhuma ambiguidade no contínuo, na rede a escolha da representação torna-se relevante devido às transformações de gauge, que dependem da natureza geométrica dos campos. Por exemplo, na lagrangeana (4.7), há duas possíveis representações dos campos spinoriais $\psi(x)$ e $\psi^*(x)$ que resultam na mesma expressão final da lagrangeana. Estes campos aparecem em combinações com $vd x^2$, que podem ter-se originado de operações envolvendo $\psi(x)vd x^2$ e $\psi^*(x)$ ou $\psi(x)$ e $\psi^*(x)vd x^2$.

No primeiro caso, os campos spinoriais serão representados pelas co-cadeias

$$\begin{aligned}\psi(x) &= f_0(x)d^{x,2} + f_{12}(x)d^{x,1}, \\ e \\ \psi^*(x) &= f_0^*(x)d^x + f_{12}^*(x)d^{x,12}.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Observe que nas representações acima, os campos $\psi(x)$ e $\psi^*(x)$ não são complexos conjugados. As transformações de gauge são

$$\begin{aligned}f_0(x) &\longrightarrow G(x)f_0(x)G^{-1}(x+l_2), \\ f_{12}(x) &\longrightarrow G(x)f_{12}(x)G^{-1}(x+l_1), \\ f_0^*(x) &\longrightarrow G(x)f_0^*(x)G^{-1}(x), \\ f_{12}^*(x) &\longrightarrow G(x)f_{12}^*(x)G^{-1}(x+l_1+l_2).\end{aligned}\tag{4.17}$$

No segundo caso, os campos spinoriais serão representados pelas co-cadeias

$$\begin{aligned}\psi(x) &= f_0(x)d^x + f_{12}(x)d^{x,12} \\ e \\ \psi^*(x) &= f_0^*(x)d^{x,2} + f_{12}^*(x)d^{x,1},\end{aligned}\tag{4.18}$$

com as transformações de gauge

$$f_0(x) \longrightarrow G(x)f_0(x)G^{-1}(x) \quad ,$$

$$f_{12}(x) \longrightarrow G(x)f_{12}(x)G^{-1}(x+l_1+l_2) \quad ,$$

$$f_0^*(x) \longrightarrow G(x)f_0^*(x)G^{-1}(x+l_2) \quad ,$$

$$f_{12}^*(x) \longrightarrow G(x)f_{12}^*(x)G^{-1}(x+l_1) \quad . \quad (4.19)$$

Para o campo escalar, a base da nossa escolha é $\phi v dx^2$ e representaremos pela co-cadeia

$$\phi(x) = S(x)d^{x,2} + P(x)d^{x,1} \quad , \quad (4.20)$$

com as transformações de gauge

$$S(x) \longrightarrow G(x)S(x)G^{-1}(x+l_2)$$

e

$$P(x) \longrightarrow G(x)P(x)G^{-1}(x+l_1) \quad .$$

(4.21)

Os campos de gauge e o "tensor eletromagnético" na rede são definidos por (1.57) e (1.64).

Inicialmente, concentraremos os nossos cálculos para a primeira escolha dos campos spinoriais. Vamos transcrever a densidade de lagrangeana (4.7) para a rede, usando os campos e o seus conjugados hermitianos para manter a invariança de gauge,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_+(x) = & \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2g^2(l_1 l_2)^2} \mathcal{F}_{12}(x) \mathcal{F}_{12}^\dagger(x) + \frac{1}{l_2^2} \left[D_2^- S(x) (D_2^- S(x))^\dagger + \right. \right. \\
& + D_2^+ P(x) (D_2^+ P(x))^\dagger \left. \right] + \frac{1}{l_1^2} \left[D_1^+ S(x) (D_1^+ S(x))^\dagger + D_1^- P(x) (D_1^- P(x))^\dagger \right] + \\
& + f_0^{*\dagger}(x) \left[\frac{1}{l_2} D_2^- f_0(x) - \frac{1}{l_1} D_1^- f_{12}(x) \right] + f_{12}^{*\dagger}(x) \left[\frac{1}{l_2} D_2^+ f_{12}(x) + \frac{1}{l_1} D_1^+ f_0(x) \right] + \\
& + f_0^*(x) \left[\frac{1}{l_2} (D_2^- f_0(x))^\dagger - \frac{1}{l_1} (D_1^- f_{12}(x))^\dagger \right] + \\
& + f_{12}^*(x) \left[\frac{1}{l_2} (D_2^+ f_{12}(x))^\dagger + \frac{1}{l_1} (D_1^+ f_0(x))^\dagger \right] + \\
& + g\sqrt{2} \left[f_0^{*\dagger}(x) \left(f_0^\dagger(x-l_2) S(x-l_2) - S(x) f_0^\dagger(x) + f_{12}^\dagger(x-l_1) P(x-l_1) + \right. \right. \\
& - P(x) f_{12}^\dagger(x) \left. \right) - f_{12}^{*\dagger}(x) \left(f_{12}^\dagger(x) S(x+l_1) - S(x) f_{12}^\dagger(x+l_2) + \right. \\
& - f_0^\dagger(x) P(x+l_2) + P(x) f_0^\dagger(x+l_1) \left. \right) - f_0^*(x) \left(S^\dagger(x-l_2) f_0(x-l_2) + \right. \\
& - f_0(x) S^\dagger(x) + P^\dagger(x-l_1) f_{12}(x-l_1) - f_{12}(x) P^\dagger(x) \left. \right) + f_{12}^*(x) \left(S^\dagger(x+l_1) f_{12}^\dagger(x) + \right. \\
& - f_{12}^\dagger(x+l_2) S^\dagger(x) - P^\dagger(x+l_2) f_0^\dagger(x) + f_0^\dagger(x+l_1) P^\dagger(x) \left. \right) + \\
& + 2g^2 \left[S(x) P(x+l_2) - P(x) S(x+l_1) \right] \left[P^\dagger(x+l_2) S^\dagger(x) - S^\dagger(x+l_1) P^\dagger(x) \right] \left. \right\} .
\end{aligned}$$

(4.22)

As transformações supersimétricas correspondentes a (4.10) na rede são

$$\delta_+ S(x) = i\varepsilon_+ f_0(x) \quad , \quad \delta_+ S^\dagger(x) = i\varepsilon_+ f_0^\dagger(x) \quad ,$$

$$\delta_+ P(x) = i\varepsilon_+ f_{12}(x) \quad , \quad \delta_+ P^\dagger(x) = i\varepsilon_+ f_{12}^\dagger(x) \quad ,$$

$$\delta_+ f_0(x) = \delta_+ f_{12}(x) = \delta_+^\dagger f_0(x) = \delta_+^\dagger f_{12}(x) = 0 \quad ,$$

$$\delta_+ f_0^*(x) = -i\varepsilon_+ \left[\frac{D_2^- S(x)}{l_2} - \frac{D_1^- P(x)}{l_1} \right] \quad ,$$

$$\delta_+ f_0^{*\dagger}(x) = -i\varepsilon_+ \left[\frac{(D_2^- S(x))^\dagger}{l_2} - \frac{(D_1^- P(x))^\dagger}{l_1} \right] \quad ,$$

$$\delta_+ f_{12}^*(x) = -i\varepsilon_+ \left[\frac{D_2^+ P(x)}{l_2} + \frac{D_1^+ S(x)}{l_1} - g\sqrt{2} \left[S(x)P(x+l_2) - P(x)S(x+l_1) \right] - \frac{\mathcal{F}_{12}(x)}{g\sqrt{2}l_1 l_2} \right] \quad ,$$

$$\delta_+ f_{12}^{*\dagger}(x) = -i\varepsilon_+ \left[\frac{(D_2^+ P(x))^\dagger}{l_2} + \frac{(D_1^+ S(x))^\dagger}{l_1} + g\sqrt{2} \left[P^\dagger(x+l_2)S^\dagger(x) - S^\dagger(x+l_1)P^\dagger(x) \right] + \frac{\mathcal{F}_{12}^\dagger(x)}{g\sqrt{2}l_1 l_2} \right] \quad ,$$

$$\delta_+ U(x,2) = i\varepsilon_+ \sqrt{2}l_2 f_0(x) \quad ,$$

$$\delta_+ U^\dagger(x,2) = -i\varepsilon_+ \sqrt{2} l_2 f_0^\dagger(x) ,$$

$$\delta_+ U(x,1) = -i\varepsilon_+ \sqrt{2} l_1 f_{12}(x) ,$$

$$\delta_+ U^\dagger(x,1) = i\varepsilon_+ \sqrt{2} l_1 f_{12}^\dagger(x) , \quad (4.23)$$

Nas expressões (4.22) e (4.23), junto com os campos

$$S(x) , \quad P(x) , \quad f_0(x) , \quad f_{12}(x) , \quad f_0^*(x) , \quad f_{12}^*(x) ,$$

foram introduzidos os campos conjugados

$$S^\dagger(x) , \quad P^\dagger(x) , \quad f_0^\dagger(x) , \quad f_0^{*\dagger}(x) , \quad f_{12}^\dagger(x) , \quad f_{12}^{*\dagger}(x) ,$$

cujas orientações na rede são opostas às dos campos originais; no limite do contínuo estes campos coincidem entre si.

A lagrangeana (4.22) não é invariante pelas transformações supersimétricas (4.23). Esta invariança é conseguida adicionando à lagrangeana um termo extra \mathcal{L}_+^1 , definindo uma lagrangeana total

$$\mathcal{L}_+^T = \mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_+^1 . \quad (4.24)$$

O termo extra tem a seguinte forma :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_+^1 = & \text{tr} \left\{ \frac{\mathcal{F}_{12}(x)}{l_1 l_2} \left[P^\dagger(x+l_1) S^\dagger(x) - S^\dagger(x+l_1) P^\dagger(x) \right] + \right. \\
& - \frac{\mathcal{F}_{12}(x)}{l_1 l_2} \left[P(x) S(x+l_1) - S(x) P(x+l_2) \right] + \\
& - \frac{D_1^- U(x+l_1, 2)}{l_1 l_2} \left[P(x+l_2) S^\dagger(x+l_1) - S^\dagger(x) P(x) \right] + \\
& \left. + \frac{(D_1^- U(x+l_1, 2))^\dagger}{l_1 l_2} \left[P^\dagger(x) S(x) - S(x+l_1) P^\dagger(x+l_2) \right] \right\} . \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Podemos observar que este termo adicional se anula, $\mathcal{L}_+^1 = 0$, no limite do tempo contínuo ($l_2 \rightarrow 0$).

A corrente de Noether na rede [7] é dado por

$$\Delta_\mu^- J^\mu = \sum \Delta_\mu^- \left[\frac{\delta \mathcal{L}(x+e^\mu)}{\delta \Delta_\mu^- \varphi_i(x)} \delta \varphi_i + \frac{\delta \mathcal{L}(x)}{\delta \Delta_\mu^+ \varphi_i(x)} \delta \varphi_i(x+e^\mu) - \Omega^\mu \right] = 0 , \quad (4.26)$$

que para o caso considerado será representado por

$$\Delta_\mu^- J^\mu = \Delta_{2+}^- J + \Delta_{1+}^- J = 0 . \quad (4.27)$$

Vamos escrever a componente temporal da corrente, J_{2+} , na forma

$$J_{2+} = J_{2+}^{(1)} + J_{2+}^{(2)} + J_{2+}^{(1)\dagger} - J_{2+}^{(2)\dagger} , \quad (4.28)$$

onde

$$\begin{aligned}
 -iJ_{2+}^{(1)}(x) = & \text{Tr} \left\{ \frac{1}{I_2} \left[(D_2^- S(x+l_2))^\dagger U^\dagger(x,2) f_o(x) + (D_2^+ P(x))^\dagger U(x,2) f_{12}(x+l_2) \right] \right. \\
 & + \frac{1}{I_1} \left[U^\dagger(x+l_2,1) \left[f_{12}(x+l_2) S^\dagger(x+l_1) U(x+l_1,2) - S^\dagger(x) U(x,2) f_{12}(x+l_2) \right] \right. \\
 & + U(x+l_2,1) \left[U^\dagger(x+l_1,2) f_o(x+l_1) P^\dagger(x+l_2) - P^\dagger(x+l_2) U^\dagger(x,2) f_o(x) \right] \\
 & \left. \left. + g\sqrt{2} l_2 \left[f_{12}^{*\dagger}(x) f_o(x) f_{12}(x+l_2) + f_o(x) f_o^*(x+l_2) f_o^\dagger(x) \right] \right] \right\} , \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -iJ_{2+}^{(2)}(x) = & \text{Tr} \left\{ \frac{\mathcal{F}_{12}(x)}{g\sqrt{2} l_1 l_2} U(x,0) f_{12}(x+l_2) + g\sqrt{2} \left[f_o(x) D_2^- S(x+l_2) S^\dagger(x) \right. \right. \\
 & + \left[(D_2^+ P(x))^\dagger S(x) + \left[P^\dagger(x+l_2) S^\dagger(x) - S^\dagger(x+l_1) P^\dagger(x) \right] U(x,2) \right] f_{12}(x+l_2) \\
 & + \frac{l_2}{l_1} \left[U^\dagger(x+l_2,1) \left[P(x+l_2) S^\dagger(x+l_1) f_o(x+l_1) - S^\dagger(x) f_o(x) P(x+l_2) \right] \right. \\
 & \left. \left. + (D_1^+ S(x))^\dagger S(x) f_{12}(x+l_2) \right] \right\} . \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

Escreveremos J_{1+} como

$$J_{1+} = J_{1+}^{(1)} + J_{1+}^{(2)} + J_{1+}^{(1)\dagger} - J_{1+}^{(2)\dagger} , \quad (4.31)$$

onde

$$\begin{aligned}
 -iJ_{1+}^{(1)}(x) = & \text{Tr} \left\{ \frac{1}{I_1} \left[(D_1^- P(x+l_1))^\dagger U^\dagger(x,1) f_{12}(x) + (D_1^+ S(x))^\dagger U(x,1) f_o(x+l_1) \right] \right. \\
 & - \frac{1}{I_2} \left[U^\dagger(x,1) f_{12}(x) (D_2^- S(x+l_1))^\dagger + P^\dagger(x) U(x,1) D_2^- f_o(x+l_1) \right] \\
 & \left. + g\sqrt{2} l_1 \left[f_o^*(x+l_1) f_{12}^\dagger(x) f_{12}(x) - f_{12}^{*\dagger}(x) f_{12}(x) f_o(x+l_1) \right] \right\}, \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -iJ_{1+}^{(2)}(x) = & \text{Tr} \left\{ \frac{\mathcal{F}_{12}(x)}{g\sqrt{2} l_1 l_2} U(x,1) f_o(x+l_1) + g\sqrt{2} \left[-D_1^- P(x+l_1) P^\dagger(x) f_{12}(x) \right. \right. \\
 & + \left. \left[P^\dagger(x-l_o) S^\dagger(x) - S^\dagger(x+l_1) P^\dagger(x) \right] U(x,1) f_o(x+l_1) \right. \\
 & + \left. U^\dagger(x+l_2,1) \left[S^\dagger(x) P(x) - P(x+l_2) S^\dagger(x+l_1) \right] f_o(x+l_1) \right. \\
 & + \left. U^\dagger(x,1) P(x) \left[S^\dagger(x-l_2+l_1) f_o(x-l_2+l_1) - f_o(x+l_1) S^\dagger(x+l_1) \right] \right. \\
 & \left. - \frac{l_1}{I_2} \left[(D_2^+ P(x))^\dagger P(x) f_o(x+l_1) - P(x)^\dagger f_{12}(x) D_2^- S(x+l_1) \right] \right\}. \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

As partes $J_{\mu+}^{(1)\dagger}$ e $J_{\mu+}^{(2)\dagger}$ são obtidas pelas regras usuais de conjugação hermitiana,

$$(A_1 A_2 \dots A_n)^\dagger = A_n^\dagger \dots A_2^\dagger A_1^\dagger.$$

Para o segundo caso, procederemos de forma análoga ao anterior. Neste caso, $f_o(x)$ comporta-se como uma "função" ponto, $S(x)$ e $f_o^*(x)$ como "função" link na direção temporal, $P(x)$ e $f_{12}^*(x)$ como "função" link na direção espacial e $f_{12}(x)$ como "função" plaqueta. As transformações de gauge estão definidas em (4.19) e (4.21).

Teranscrevermos a lagrangeana (4.9) na rede como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_-(x) = & \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2g^2(l_1 l_2)^2} \mathcal{F}_{12}^\dagger(x) \mathcal{F}_{12}(x) + \frac{1}{l_2^2} \left[D_2^- S(x) (D_2^- S(x))^\dagger \right. \right. \\ & + D_2^+ P(x) (D_2^+ P(x))^\dagger \left. \right] + \frac{1}{l_1^2} \left[D_1^+ S(x) (D_1^+ S(x))^\dagger + D_1^- P(x) (D_1^- P(x))^\dagger \right] \\ & + f_o^\dagger(x) \left[\frac{1}{l_2} D_2^- f_o^*(x) + \frac{1}{l_1} D_1^- f_{12}^*(x) \right] + f_{12}^\dagger(x) \left[\frac{1}{l_2} D_2^+ f_{12}^*(x) - \frac{1}{l_1} D_1^+ f_o^*(x) \right] \\ & + f_o(x) \left[\frac{1}{l_2} (D_2^- f_o^*(x))^\dagger + \frac{1}{l_1} (D_1^- f_{12}^*(x))^\dagger \right] \\ & + f_{12}(x) \left[\frac{1}{l_2} (D_2^+ f_{12}^*(x))^\dagger - \frac{1}{l_1} (D_1^+ f_o^*(x))^\dagger \right] \\ & + g\sqrt{2} \left[f_o^\dagger(x) \left(f_o^{*\dagger}(x-l_2) S(x-l_2) - S(x) f_o^{*\dagger}(x) + f_{12}^{*\dagger}(x-l_1) P(x-l_1) \right. \right. \\ & \left. \left. - P(x) f_{12}^{*\dagger}(x) \right) - f_{12}^{*\dagger}(x) \left(f_{12}^*(x) S(x+l_1) - S(x) f_{12}^*(x+l_2) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - f_o^*(x)P(x+l_2) + P(x)f_o^*(x+l_1) \Big] - f_o(x) \Big[S^\dagger(x-l_2)f_o^*(x-l_2) \\
& - f_o^*(x)S^\dagger(x) + P^\dagger(x-l_1)f_{12}^*(x-l_1) - f_{12}^*(x)P^\dagger(x) \Big] + f_{12}^*(x) \Big[S^\dagger(x+l_1)f_{12}^{*\dagger}(x) \\
& - f_{12}^{*\dagger}(x+l_2)S^\dagger(x) - P^\dagger(x+l_2)f_o^{*\dagger}(x) + f_o^{*\dagger}(x+l_1)P^\dagger(x) \Big] \\
& + 2g^2 \Big[S(x)P(x+l_2) - P(x)S(x+l_1) \Big] \Big[P^\dagger(x+l_2)S^\dagger(x) - S^\dagger(x+l_1)P^\dagger(x) \Big] \Big\} ,
\end{aligned}$$

(4.34)

com as transformações supersimétricas

$$\delta_- S(x) = i\varepsilon_- f_o^*(x) , \quad \delta_- S^\dagger(x) = i\varepsilon_- f_o^{*\dagger}(x) ,$$

$$\delta_- P(x) = i\varepsilon_- f_{12}^*(x) , \quad \delta_- P^\dagger(x) = i\varepsilon_- f_{12}^{*\dagger}(x) ,$$

$$\delta_- f_o^a(x) = -i\varepsilon_- \left[\frac{1}{l_2} D_2^- S(x) + \frac{1}{l_1} D_1^- P^a(x) \right] ,$$

$$\delta_- f_{12}(x) = i\varepsilon_- \left[-\frac{1}{l_2} D_2^+ P(x) + \frac{1}{l_1} D_1^+ S(x) - \frac{\mathcal{F}_{12}(x)}{g\sqrt{2}l_1 l_2} + \right.$$

$$\left. + g\sqrt{2} \left[S(x)P(x+l_2) - P(x)S(x+l_1) \right] \right] ,$$

$$\delta_- f_o^*(x) = \delta_- f_{12}^*(x) = \delta_- f_o^{*\dagger}(x) = \delta_- f_{12}^{*\dagger}(x) = 0 ,$$

$$\delta_- f_0^{a\dagger}(x) = -i\varepsilon_- \left[\frac{1}{l_2} (D_2^- S(x))^\dagger + \frac{1}{l_1} (D_1^- P^a(x))^\dagger \right] ,$$

$$\begin{aligned} \delta_- f_{12}^\dagger(x) = i\varepsilon_- \left[-\frac{1}{l_2} (D_2^+ P(x))^\dagger + \frac{1}{l_1} (D_1^+ S(x))^\dagger + \frac{\mathcal{F}_{12}^\dagger(x)}{g\sqrt{2}l_1 l_2} \right. \\ \left. - g\sqrt{2} \left[P^\dagger(x+l_2) S^\dagger(x) - S^\dagger(x+l_1) P^\dagger(x) \right] \right] , \end{aligned}$$

$$\delta_- U(x, 2) = i\varepsilon_- g\sqrt{2}l_2 f_0^*(x) ,$$

$$\delta_- U^\dagger(x, 2) = -i\varepsilon_- g\sqrt{2}l_2 f_0^{*\dagger}(x) ,$$

$$\delta_- U(x, 1) = i\varepsilon_- g\sqrt{2}l_1 f_{12}^*(x) ,$$

$$\delta_- U^\dagger(x, 1) = i\varepsilon_- g\sqrt{2}l_1 f_{12}^{*\dagger}(x) . \quad (4.35)$$

A lagrangeana (4.33) não é invariante pelas transformações supersimétricas (4.34). Adicionaremos um termo extra \mathcal{L}_-^1 , de forma que a lagrangeana total

$$\mathcal{L}_-^T = \mathcal{L}_- + \mathcal{L}_-^1 \quad (4.36)$$

seja invariante. O termo extra tem a seguinte forma :

$$\mathcal{L}_-^1 = \text{tr} \left\{ \frac{\mathcal{F}_{12}(x)}{l_1 l_2} \left[S^\dagger(x+l_1) P^\dagger(x) - P^\dagger(x+l_2) S^\dagger(x) \right] + \frac{\mathcal{F}_{12}^\dagger(x)}{l_1 l_2} \left[P(x) S(x+l_1) \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - S(x)P(x+l_2) \Big] + \frac{D_1^- U(x+l_1, 2)}{l_1 l_2} \left[P(x+l_2) S^\dagger(x+l_1) - S^\dagger(x) P(x) \right] \\
& - \frac{(D_1^- U(x+l_1, 2))^\dagger}{l_1 l_2} \left[P^\dagger(x) S(x) - S(x+l_1) P^\dagger(x+l_2) \right] \Big\} . \quad (4.37)
\end{aligned}$$

Podemos observar que o termo adicional se anula, $\mathcal{L}_-^1 = 0$, no limite do tempo contínuo ($l_2 \rightarrow 0$).

A corrente de Noether na rede é dado por

$$\Delta_2^- J_{2-} + \Delta_1^- J_{1-} = 0 . \quad (4.38)$$

Vamos escrever a corrente J_{2-} na forma

$$J_{2-} = J_{2-}^{(1)} + J_{2-}^{(2)} + J_{2-}^{(1)\dagger} - J_{2-}^{(2)\dagger} , \quad (4.39)$$

onde

$$\begin{aligned}
-iJ_{2-}^{(1)}(x) = & \text{Tr} \left\{ \frac{1}{l_2} \left[(D_2^- S(x+l_2))^\dagger U^\dagger(x, 2) f_o^*(x) + (D_2^\dagger P(x))^\dagger U(x, 2) f_{12}^*(x+l_2) \right] \right. \\
& + \frac{1}{l_1} \left[U^\dagger(x+l_2, 1) \left[S^\dagger(x) U(x, 2) f_{12}^*(x+l_2) - f_{12}^*(x+l_2) S^\dagger(x+l_1) U(x+l_1, 2) \right] \right. \\
& - U(x+l_2, 1) \left[U^\dagger(x+l_1, 2) f_o^*(x+l_1) P^\dagger(x+l_2) - P^\dagger(x+l_2) U^\dagger(x, 2) f_o^*(x) \right] \\
& \left. \left. + g\sqrt{2}l_2 \left[f_{12}^\dagger(x) f_o^*(x) f_{12}^*(x+l_2) + f_o(x+l_2) f_o^{*\dagger}(x) f_o^*(x) \right] \right] \right\} , \quad (4.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-iJ_{2-}^{(2)}(x) = & \text{Tr} \left\{ \frac{-\mathcal{F}_{12}^{\dagger}(x)}{g\sqrt{2}l_1l_2} U(x,2)f_{12}^*(x+l_2) + g\sqrt{2} \left[f_o^*(x)D_2^-S(x+l_2)S^{\dagger}(x) \right. \right. \\
& + \left. \left[(D_2^+P(x))^{\dagger}S(x) + \left[P^{\dagger}(x+l_2)S^{\dagger}(x) - S^{\dagger}(x+l_1)P^{\dagger}(x) \right] U(x,2) \right] f_{12}^*(x+l_2) \right. \\
& - \left. \frac{l_2}{l_1} \left[U^{\dagger}(x+l_2,1) \left[P(x+l_2)S^{\dagger}(x+l_1)f_o^*(x+l_1) - S^{\dagger}(x)f_o^*(x)P(x+l_2) \right] \right. \right. \\
& \left. \left. + (D_1^+S(x))^{\dagger}S(x)f_{12}^*(x+l_2) \right] \right\} . \quad (4.41)
\end{aligned}$$

Escreveremos J_{1+} como

$$J_{1-} = J_{1-}^{(1)} + J_{1-}^{(2)} + J_{1-}^{(1)\dagger} - J_{1-}^{(2)\dagger} , \quad (4.42)$$

onde

$$\begin{aligned}
-iJ_{1-}^{(1)}(x) = & \text{Tr} \left\{ \frac{1}{l_1} \left[(D_1^-P(x+l_1))^{\dagger}U^{\dagger}(x,1)f_{12}^*(x) + (D_1^+S(x))^{\dagger}U(x,1)f_o^*(x+l_1) \right] \right. \\
& - \frac{1}{l_2} \left[U^{\dagger}(x,1)f_{12}^*(x)(D_2^-S(x+l_1))^{\dagger} - P^{\dagger}(x)U(x,1)D_2^-f_o^*(x+l_1) \right] \\
& \left. + g\sqrt{2}l_1 \left[f_o(x+l_1)f_{12}^{*\dagger}(x)f_{12}^*(x) - f_{12}^{\dagger}(x)f_{12}^*(x)f_o(x+l_1) \right] \right\} , \quad (4.43)
\end{aligned}$$

$$-iJ_{1-}^{(1)}(x) = \text{Tr} \left\{ \frac{\mathcal{F}_{12}^{\dagger}(x)}{g\sqrt{2}l_1l_2} U(x,1)f_o^*(x+l_1) + g\sqrt{2} \left[D_1^-P(x+l_1)P^{\dagger}(x)f_{12}^*(x) \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left[P^\dagger(x+l_2) S^\dagger(x) - S^\dagger(x+l_1) P^\dagger(x) \right] U(x,1) f_o^*(x+l_1) \\
& - U^\dagger(x+l_2,1) \left[S^\dagger(x) P(x) - P(x+l_1) S^\dagger(x+l_1) \right] f_o^*(x+l_1) \\
& - U^\dagger(x,1) P(x) \left[S^\dagger(x-l_2+l_1) f_o^*(x-l_2+l_1) - f_o^*(x+l_1) S^\dagger(x+l_1) \right] \\
& - \frac{1}{I_2} \left[(D_2^+ P(x))^\dagger P(x) f_o^*(x+l_1) - P(x)^\dagger f_{12}^*(x) D_2^- S(x+l_1) \right] \Bigg\} . \quad (4.44)
\end{aligned}$$

Podemos observar que a lagrangeana (4.22), as transformações supersimétricas (4.23), as correntes (4.27) e (4.30) do primeiro caso relacionam-se respectivamente com (4.33), (4.34), (4.38) e (4.41) por meio da "inversão temporal" definida pelas seguintes transformações:

$$\begin{aligned}
f_o & \longleftrightarrow f_o^* , & f_{12} & \longleftrightarrow - f_{12}^* , \\
f_o & \longleftrightarrow f_o^{*\dagger} , & f_{12} & \longleftrightarrow - f_{12}^{*\dagger} , \\
S & \longleftrightarrow S , & P & \longleftrightarrow - P , \\
S & \longleftrightarrow S^\dagger , & P & \longleftrightarrow - P^\dagger , \quad (4.45) \\
U(x, \mu) & \longleftrightarrow U(x, \mu) , & U^\dagger(x, \mu) & \longleftrightarrow U^\dagger(x, \mu) .
\end{aligned}$$

CONCLUSÕES

Utilizamos o formalismo das formas diferenciais de Dirac-Kähler para fazer a discretização do modelo de Yang-Mills com supersimetria $N=2$ no espaço tempo bi-dimensional. O formalismo de Dirac-Kähler é um dos poucos, senão o único, que fornece um mecanismo completo para a discretização de modelos físicos, tendo-se mostrado particularmente útil em modelos de gauge com supersimetria. A principal vantagem refere-se ao tratamento unificado dispensado aos campos bosônicos e fermiônicos, particularmente importante em relação aos campos fermiônicos, onde o tradicional problema de degenerescência da energia simplesmente não se manifesta. Dificuldades com os campos de gauge também foram vencidas, pelo menos para os modelos na representação adjunta, como é o caso tratado aqui.

Em modelos de Yang-Mills com supersimetria, a principal dificuldade que resta para a discretização reside justamente na representação da parte da interação supersimétrica dentro do formalismo de Dirac-Kähler, devido em parte à multiplicidade dos campos fermiônicos contidos numa forma diferencial.

Uma maneira de contornar este problema, em modelos supersimétricos, é recorrer à própria álgebra supersimétrica, que relaciona as supercargas com a hamiltoniana, através das relações de anti-comutação. Consiste em discretizar inicialmente as supercargas, que são férmions, e portanto podem ser representados por formas diferenciais, e a partir da super-álgebra, construir a hamiltoniana. A desvantagem deste procedimento é que permite somente a discretização espacial do modelo, permanecendo o tempo contínuo. Este procedimento de

discretização foi aplicado no presente modelo no capítulo III.

O modelo utilizado neste trabalho, por ser relativamente simples, devido à restrição ao caso bi-dimensional, permitiu um tratamento mais completo de discretização da própria lagrangeana, a multiplicidade, ou duplicidade, no nosso caso bi-dimensional, de representação dos férmions resultando em duas versões da lagrangeana na rede, ambas com o correto limite no contínuo, e com as transformações entre os campos das duas versões bem definidas, relacionadas com inversão temporal. Com este trabalho, esperamos ter contribuído para uma melhor compreensão do formalismo de Dirac-Kähler, principalmente em suas aplicações para a construção de modelos na rede, já suficientemente desenvolvidas para atacar casos mais complexos como os modelos com supersimetrias estendidas.

REFERÊNCIAS

- [1] K.G.Wilson, Phys.Rev. D10(1974)2245.
- [2] J.B.Kogut Rev.Mod.Phys.35(1983),775.
- [3] P.Becher and H.Joos, Zeits.Phys. C15(1982),343.
 P.Becher, Phys.Lett.B104(1981),221.
 H.Joos, Lattice Approximation of Gauge Theory with Dirac Kähler Fermions,based lectures givem in August, September and part of October 1988 at IFT-UNESP.
 H.Joos, M.Mehamid Nucl.Phys.B(proc.Suppl.)49(1988),186.
 H.Joos, M.Shäfer Z.Phys.C-Particles and Fields 34(1987)465.
 H.Joos, Proc.XXXII Semester in the Stefan Banach Int.Math.in 1988, Word Scientific, 1990,199.
- [4] L.Susskind Phys.Rev.D16(1987),3031.
 A.Chodos aand J.B.Healy Nucl.Phys.B127(1977),426.
 L.H.Karsten and J.Smit Nucl.Phys.B183(1981),103.
- [5] H.Aratyn and A.H.Zimerman, Phys.Lett. 137B(1984),392. Erratum
 ibid 139b(1984),465.
 H.Aratyn, M.Goto and A.H.Zimerman, Il.Nuovo Cim. 84A(1984),255.
 H.Aratyn, M.Goto and A.H.Zimerman, Il Nuovo Cim. 88A(1985),225.
 H.Aratyn, P.F.Bessa and A.H.Zimerman, Zeits.Phys.C27(1985),535.
 H.Aratyn and A.H.Zimerman, J.Phys.A18(1985),487.
 H.Aratyn and A.H.Zimerman, Phys.Rev.D33(1986),2999.
 H.Iwamoto, H.Aratyn and A.H.Zimerman, Zeits.Phys.C31(1986),99.
- [6] L.Brink, J.H.Schwarz and S.Sherk, Nucl.Phys. B 121(1987),77.

- [7]. M. Goto, tese de doutorado, IFT, SP, 1985.
- M. Goto, Rev. Bras. de Física 17(1987), 311.
- [8] C. Von Westenholz, "Differential Forms in Mathematica Physics", North-Holland Publishing Compaanhy Amsterdam, 1981.
- [9] Modelos Supersimétricos na rede, ver
- J. Kogut, L. Susskind, Phys. Rev. D11(1975), 395.
- P. Dondi and H. Nicolai, Nuovo Cim. A41(1977), 1.
- B. Zumino, Phys. Lett. B87(1979), 87.
- S. Elitzur, S. Ravinovici and A. Schwimmer, Phys. Lett. 119B(1982), 185.
- N. Sakai and M. Sakamoto, Nucl. Phys. B229(1983), 173.
- S. Elitzur and A. Schwimmer, Nucl. Phys. B176(1980)419.
- S. Elitzur and A. Schwimmer, Nucl. Phys. B226(1983), 109.
- S. Cecotti, L. Girandelo, Ann. Phys. 145(1983), 81.
- S. Cecotti, L. Girandelo, Nucl. Phys. B229(1983), 417..
- J. Bartels and J. B. Browzan Phys. Rev. D28(1983), 818.
- [10] Férmion na rede.
- L. Susskind Phy. Rev. D16(1987), 3031.
- H. Nicolai Nucl. Phys. B140(1978), 294.
- B. Zumino, Phys. Lett. B87(1979), 87.
- G. T. Bodwin and E. V. Kovacs, Phys. Rev. D38(1988), 1206.
- [11] J. Wess and J. Bagger, "Supersymmetry and Supergravity" - Ed. Princeton University Press (1983).
- [12] J. C. Taylor, " A Review of Supersymmetry and Supergravity", Progress in Particle aand Nuclear Physics (1983).
- [13] N. Dragon, "Supersymmetry and Supergravity " Progress in Particle aand Nuclear Physics (1986).

- [14] M.Jacob, "Supersymmetry and Supergravity", North Holand/World Scientific, 1986.
- [15] S.Gates, N.T.Grisaru, R.Rocek, W.Siegel, "Superspace ", Frontiers in Physics, Benjamin Cummings publ. Corp, 1983.
- [16] G.W.Gibbons, S.W.Hawking, P.K.Townsend, "Supersymmetry and its applications: superstrings, anomalies and supergravity", Cambridge University Press, 1985.
- [17] C.Rebbi, "Lattice Gauge Theories and Monte Carlo Simmulations", Word Scientific, 1983.
- [18] D.W.Duke, J. F.Owens,"Advances in Lattice Gauge Theory", Word Scientific, 1985.
- [19] H.Satz, I.Harrity, J.Potvin, "Lattice Gauge Theory'86", NATO ASI Series - Serie B: Physics Vol 159.
- [20] Patrícia F.Bessa, monografia-IFT, 1984, detalhes do formalismo DK na rede.

