



1949

A funkcionális renormálási csoport néhány alkalmazása a kvantumelméletben

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Kovács József

Témavezető: Dr. Sailer Kornél

DEBRECENI EGYETEM

Természettudományi Doktori Tanács

Fizikai Tudományok Doktori Iskolája

Debrecen, 2017

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Fizikai Tudományok Doktori Iskolájának Részecskefizika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából. Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 2017. 07. 19.

.....
Kovács József
jelölt

Tanúsítom, hogy **Kovács József** doktorjelölt 2012-2015 között a fent megnevezett Doktori Iskola Részecskefizika programjának keretében irányítással végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2017. 07. 19.

.....
Dr. Sailer Kornél
témavezető

**A FUNKCIONÁLIS RENORMÁLÁSI CSOPORT
NÉHÁNY ALKALMAZÁSA A
KVANTUMELMÉLETBEN**

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a fizika tudományágban

Írta: **Kovács József**, okleveles fizikus

Készült a Debreceni Egyetem Fizikai Tudományok Doktori Iskolájának
Részecskefizika programja keretében

Témavezető: **Dr. Sailer Kornél**

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

A doktori szigorlat időpontja:

Az értekezés bírálói:

Dr.

Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja:

Köszönetnyilvánítás

Szeretném köszönetemet kifejezni témavezetőmnek Dr. Sailer Kornél tanár úrnak, akitől nagyon sokat tanulhattam, bevezetve engem a kvantumtérelmélet tudományába és lehetőséget nyújtva számomra a kutatómunkába való bekapcsolódásra.

Nagyon sok köszönettel tartozom Dr. Nagy Sándor tanár úrnak minden részletre kiterjedő segítségéért, irányításáért és folyamatos bátorításáért továbbá a funkcionális renormálás vonatkozásában átadott ismeretekért.

Szeretnék köszönetet mondani Dr. Nándori Istvánnak a kétdimenziós kvantum-színdinamikát tárgyaló publikációhoz nyújtott hozzájárulásáért és további hasznos tanácsaiért.

Köszönetet mondok Dr. Schram Zsoltnak a kézirat nagyon alapos átnézését követően nyújtott számos javaslatért.

Az említett személyek mellett Dr. Kruppa Andrástól, Dr. Salamon Pétertől, Dr. Sohler Dórától és Dr. Trócsányi Zoltántól is kaptam tanácsokat az értekezés ill. a téziszfüzet megírása során melyeket szintén szeretnék megköszönni.

Sok köszönettel tartozok jelenlegi főnökömnek, Dr. Lévai Gézának az értekezésem elkészítéséhez nyújtott támogatásáért. Emellett köszönetet mondok a Debreceni Egyetem és a MTA Atommagkutató Intézet nagyon sok munkatársának, akiktől az évek folyamán segítséget kaptam, különös tekintettel a doktori iskola tanárainak.

Végül, de nem utolsó sorban köszönetet mondok édesanyámnak és bátyámnak akik végig mellettem álltak és segítettek. Különösen köszönöm a bátyámnak az értekezés és a téziszfüzet vonatkozásában nyújtott technikai segítségét.

Alkalmazott rövidítések

CL	Caldeira-Leggett
CSS	kompakt tartójú folytonosan differenciálható
IR	infravörös
LPA	lokálispotenciál-közelítés
QED ₂	kétdimenziós téridőben tekintett kvantum-elektrodinamika
QCD ₂	kétdimenziós téridőben tekintett kvantum-színdinamika
RG	renormálási csoport
SG	sine-Gordon
UV	ultraibolya
WH	Wegner–Houghton

Tartalomjegyzék

1.	Bevezetés	1
2.	A funkcionális renormálásicsoport-módszer	5
2.1.	Bevezetés	5
2.2.	A funkcionális renormálás alapgondolata	6
2.3.	A kvantumtérelmélet és a statisztikus fizika kapcsolata	8
2.4.	A Wegner–Houghton-féle renormálási séma	13
2.5.	Az effektívhatás-szemlélet	17
2.6.	A fázisátalakulások vizsgálata	22
2.7.	A kvantumtérelméleti modellek osztályozása a renormálás szempontjából	33
3.	A renormálási séma optimalizálása a kvantált anharmonikus oszcillátor esetén	36
3.1.	Bevezetés	36
3.2.	A kvantált anharmonikus oszcillátor renormálása	37
3.3.	A renormálási séma optimalizálása	44
4.	A Caldeira–Leggett-modell folytonos spektrumú változatainak vizsgálata	53
4.1.	A Caldeira–Leggett-modell	53
4.2.	A kvantum-klasszikus átmenet	59
4.3.	A renormálásicsoport-egyenletek	60
4.4.	A kritikus exponensek vizsgálata	62
5.	A sine-Gordon-modell nagyenergiás kiterjesztésének vizsgálata	70
5.1.	A sine-Gordon-modell	70

5.2.	A nagyenergiás kiterjesztés RG vizsgálata	74
5.3.	A sine-Gordon-modell fázisszerkezete	76
5.4.	A sine-Gordon modell nagyenergiás kiterjesztése . .	81
5.5.	A modellben megnyilvánuló dualitás	84
6.	A bozonizált kétdimenziós kvantum-színdinamika vizsgálata a renormálásicsoport-módszerrel	88
6.1.	Alacsonydimenziós modellek	88
6.2.	A bozonizált QCD_2	91
6.3.	A renormálásicsoport-egyenlet ultraibolya viselkedése	94
6.4.	A renormálásicsoport-egyenlet infravörös viselkedése	100
7.	Összefoglalás	105
8.	Angol nyelvű összefoglalás (Summary in English)	110

Irodalomjegyzék

I

1. Bevezetés

Értekezésem témáját különböző elméleti modellek funkcionális renormálási-csoport-módszerrel történő vizsgálata képezi. Ennek az elméleti módszernek az alkalmazási köre a fizika több területét felöleli, magába foglalva a részecskefizikához és a szilártestfizikához tartozó modelleket is. A funkcionális renormálás által elért eredmények közül bizonyára a térelméleti modellek fázisszerkezetének kutatásában elért sikerek a legismertebbek, melyek forradalmasították a folytonos fázisátalakulások tanulmányozását. Részben ezeknek az eredményeknek, részben az eljárás elvi jelentőségének köszönhetően jelenleg is fontos kutatási terület a renormálás több évtizede ismert eljárásának további fejlesztése és alkalmazásának kiterjesztése.

A funkcionális renormálás jelentőségének értékeléséhez szemléletének több előnyös tulajdonságát érdemes megemlíteni. Ilyen tulajdonságnak tekinthető a nemperturbatív megközelítés, a különböző hullámhosszú gerjesztésekhez tartozó szabadsági fokok elkülönítése és a vizsgált modell kevésbé lényeges jellemzőit elhanyagoló hatékony közelítések alkalmazása. Ezek a jellegzetes előnyök a módszert a térelméleti modellek vizsgálatának ígéretes eszközévé avatják, amelynek alkalmazása nem csupán a fázisátalakulások leírására korlátozódik.

Az elsőként említett nemperturbatív tárgyalás jelentősen kiterjeszti a módszer alkalmazási körét. A perturbációs számítás alkalmazása általában jelentősen korlátozza a vizsgált kölcsönhatás erősségét jellemző paraméternek, azaz a csatolásnak a megválasztását. A funkcionális renormálás esetén nincs ilyen elvi korlát, mivel ez a módszer a perturbatív renormálással ellentétben nem támaszkodik a csatolás értéke szerinti sorfejtés gyors konvergenciájára.

A funkcionális renormálás egyik legfontosabb sajátossága, hogy a hagyományos tárgyalástól eltérően lehetőséget kínál a szabadsági fokok csoportjainak elkülönülten történő kezelésére. A térelméleti szemlélet során az euklideszi téridő formalizmusát és a Fourier-transzformációt alkalmazva független szabadsági fokoknak a vizsgált rendszer különböző hullámhosszú

gerjesztései tekinthetőek, így természetes lehetőség kínálkozik a szabadsági fokok méretskála szerinti rendezésére. Mindazáltal a különböző hullámhosszú gerjesztéseket általában nem különítjük el élesen. A hullámhossz szerinti rendezés a Fourier-módusok (a $\hbar = c = 1$ egységrendszerben energia dimenziójú) hullámszáma szerinti fordított irányú rendezésnek felel meg, így általában energiaskála szerinti csoportosításról beszélünk.

A fizikai rendszerek tanulmányozása során a szabadsági fokok csoportosításának előnye többreár. Egyrészt a szabadsági fokok fentiek szerinti elkülönítése nyilvánvalóan fizikai jelentést hordoz, ezért információt veszítenénk, ha a különböző energiával jellemezhető folyamatoknak csupán az összhatását vennénk figyelembe. Másrészt azáltal, hogy számításaink adott lépésében csupán adott energiájú gerjesztéseket veszünk figyelembe, lehetőség nyílik az elmélet korlátainak tiszteletben tartására és ezen korlátok feltárására.

A tárgyalás során a szabadsági fokok ilyen szétválasztása annak reményével is kecsegtet, hogy a természet strukturált felépítését kihasználva közelítéseinket hatékonyabbá tehetjük. Ez alatt azt értem, hogy mivel a természetben a különböző térbeli illetve időbeli kiterjedéssel rendelkező folyamatok gyakran elkülönülnek egymástól, a vizsgált rendszerrel nagyságrendekkel kisebb vagy nagyobb objektumok hatását sokszor érdemes az adott rendszer modelljének kisebb módosításain keresztül figyelembe venni. Például az atommag leírására sikeresen alkalmazhatóak azon effektív modellek, melyekben eltekintünk a nukleonok belsejében zajló részecskefizikai folyamatok és a magot körülvevő elektronfelhő részletes tárgyalásától.

Mindezek mellett a módszer szemléletének alapvető sajátossága, hogy a tanulmányozott elméletet a számítások során egyszerűbb effektív modellekre leképezve a vizsgált rendszer leglényegesebb jellemzőinek megragadására törekszik. Számítási képességeink korlátjainak köszönhetően a fizikában általános az a törekvés, hogy az adott modelltől levonható következtetéseket a természet pontos leírásából adódó egyenletek nyers erővel történő megoldása helyett az elhanyagolható részleteket mellőzve határozzuk meg. Más szavakkal megfogalmazva megpróbálunk az elmélet számunkra érdek-

telen jellemzőinek kiszámítását elkerülő hidat építeni a bonyolult, valóság-hű modell és az alkalmazások során felmerülő egyszerű kérdések között. Ennek köszönhetően a renormálás alkalmazása indokolt lehet olyan kérdések esetén is, amelyek más eszközökkel is tárgyalhatóak.

A renormálási csoport gazdag irodalmának ellenére még számos nyitott kérdés található mind a módszer fejlesztésének, mind a lehetséges alkalmazások kiaknázásának területén. Az első csoportba tartozik a renormálási séma optimalizálásának kérdése, melynek megközelítésére több különböző út ismert. Bár a különböző sémák elvileg egyenértékűnek tekinthetők, a gyakorlatban a kutatások során a rendelkezésre álló erőforrások korlátoosságának köszönhetően az optimalizálás hiánya vagy elégtelensége egyik akadálya lehet a módszerben rejlő lehetőségek maximális kihasználásának. Kutatásunk során többek között azt a célt tűztük ki, hogy az optimalizálást egy viszonylag egyszerű modell, a kvantált anharmonikus oszcillátor esetén tanulmányozzuk, amely modellre vonatkozóan nagy pontosságú irodalmi adatok állnak rendelkezésre.

A renormálás számos ígéretes alkalmazási területe közül értekezésemben három modellt ismertetek. Elsőként a nyílt kvantummechanikai rendszerek vizsgálatában kiemelt szerepet betöltő kvantált Caldeira–Leggett-modell folytonos spektrumú környezetet leíró változatait tárgyalom. Az értekezésemben tanulmányozott esetekben a releváns alrendszer környezetére vonatkozó információinkat a modell hőfürdőjének spektrálfüggvényében foglaljuk össze. A spektrálfüggvény realisztikus megválasztása a spektrum nagyenergiás levágásának bevezetését igényli, amely szükségessé teszi annak tisztázását, hogy a különböző típusú és értékű levágások alkalmazása hogyan befolyásolja a modellben megfigyelhető fázisátalakulást. Ekkor a kritikus exponensek pontos meghatározásán túlmenően a spektrálfüggvényben megjelenő csatolás esetleges nem perturbatív jellege is a funkcionális renormálás alkalmazására ösztönöz.

További alkalmazást jelent a jelentős érdeklődésre számot tartó sine-Gordon-modell nagyenergiás kiterjesztésének tanulmányozása. A sine-Gordon-modell több különleges tulajdonsága által (topologikus fázisátalakulás,

periodikus potenciál, integrálhatóság) egyszerűsége ellenére kiemelkedik a kvantumtérelméleti modellek sorából és új elméleti módszerek kipróbálására nyújt lehetőséget. A modell nagyenergiás kiterjesztése olyan hatással jellemezhető, melynek kifejezésében a térváltozó magasabb rendű deriváltjai is megjelennek. Ezért célul tűztük ki olyan renormálásicsoport-egyenletek levezetését, melyek ilyen nagyenergiás kiterjesztések vizsgálatára nyújtanak lehetőséget. Az ilyen irányú vizsgálatok az aszimptotikus biztonság kérdésének teljesebb tárgyalását és a fázisszerkezet mélyebb megismerését kínálják.

Harmadik modellként az egy fermionízzel rendelkező kétdimenziós kvantum-színdinamikát tekintem. Bár az alacsonydimenziós tárgyalás nyilvánvalóan minőségi eltérést jelent a valósághű, négydimenziós elmélethez képest ezen egyszerűsített modell tanulmányozása mégis egy lépést jelenthet a rendkívül bonyolult erős kölcsönhatás megértése felé vezető úton. Vizsgálataink során a fermionikus elmélet bozonizációja által nyert skaláris modellel indultunk ki, amely sine-Gordon típusú önkölcsönhatást tartalmaz. Ez jelentős motivációt jelent arra, hogy a modellt alávessük a periodikus modellek tanulmányozásában rendkívül hatékonynak bizonyuló renormálási csoport vizsgálatnak. Az egyik legfontosabb kérdés a lehetséges fázisok meghatározása, amely a speciális tömegmátrixú réteges sine-Gordon-modellre vezető alacsonyenergiás közelítés keretén belül megválaszolható.

Ezeket a különböző kérdésfelvetéseket figyelembe véve doktori értekezésem hét további fejezetre tagolódik. Az elméleti háttérrel ismertető fejezet után külön fejezetben tárgyalom a kvantált anharmonikus oszcillátornak, a Caldeira–Leggett-modell folytonos spektrumú változatainak, a sine-Gordon-modell nagyenergiás kiterjesztésének és a kétdimenziós kvantum-színdinamikának RG-módszerrel történő vizsgálatát, majd a magyar és angol nyelvű összefoglaló fejezetekkel zárom az értekezést.

2. A funkcionális renormálásicsoport-módszer

2.1. Bevezetés

A funkcionális renormálásicsoport-módszer (angolul renormalization group method, a továbbiakban RG-módszer) alábbi általános áttekintése közben nem törekedhettem a teljességre, a célom csupán az, hogy az irodalomban megtalálható eredmények részleges ismertetésével bevezetést nyújtsak az értekezésemben tanulmányozott kérdésekhez. Az RG-módszer gazdag szakirodalmából az általános áttekintés vonatkozásában a [1-7] munkákra hivatkozom. A matematikai formalizmus bemutatása során csupán a tézisem szempontjából releváns skaláris elméleteket tekintem, nem térve ki a funkcionális renormálás fermionikus elméletekre [8], mértékelméletekre [9] és kvantumgravitációra [10] történő alkalmazására. A teljesség kedvéért megemlítem, hogy az RG-módszer által az értekezésemben érintett területek mellett véges hőmérsékletű kvantumtérelméleti modellek [11] és nemegyensúlyi statisztikus fizikai rendszerek [12] is vizsgálhatóak, továbbá a renormálásnak a zárt időtengelyes formalizmussal [13-15] történő összekapcsolása is fontos kutatási terület.

A funkcionális RG-módszerre a szakirodalomban több különböző elnevezés is használatos, úgymint nemperturbatív, egzakt ill. differenciális RG. Ezeknek a jelzőknek a célja a módszernek a csatolások szerinti sorfejtésen alapuló perturbatív renormálástól történő megkülönböztetése. A továbbiakban renormálás alatt mindig a funkcionális RG alkalmazását értem.

A fejezet további részében először áttekintem a funkcionális renormálás alapgondolatát, majd a statisztikus fizikát a kvantumtérelmélettel összekapcsoló funkcionális formalizmust. Ezt követően tárgyalom az RG-egyenletek levezetését mind a Wegner–Houghton-séma szemléletében, mind a Wetterich-féle effektívhatás-szemlélet esetén. Végül kitérek a módszernek a fázisátalakulások tanulmányozásában betöltött szerepére és az alkalmazott megközelítés jelentőségére a kvantumtérelméleti modellalkotás vonatkozásában.

2.2. A funkcionális renormálás alapgondolata

A funkcionális RG-módszer bevezetése és céljának megjelölése többféleképpen is megtehető [2], így az alább ismertetett megközelítés nem kizárólagos. Mivel a módszer alkalmazási köre szilárdtestfizikai és részecskefizikai modelleket is felölel, a renormálás bevezetése megtörténhet mind a statisztikus fizika, mind a kvantumtérelmélet fogalmain keresztül. Az euklideszi kvantumtérelméleti modellek és a folytonos térváltozóval jellemzett statisztikus fizikai modellek közötti nagyon szoros analógia [16, 17] következtében az RG-egyenletek levezetése során általában mindegy, hogy melyik esetre gondolunk, noha a képletek fizikai interpretációja a két esetben különböző.

Az RG alapgondolata nagyon hasonló a statisztikus fizikában alkalmazott modellalkotáshoz. Általában a statisztikus fizika tárgykörébe tartozó sok szabadsági fokkal rendelkező rendszerek vizsgálata során olyan modelleket alkotunk, amelyek nem képesek számot adni minden egyes szabadsági fokról, viszont meghatározzák az adott fizikai rendszert jellemző legfontosabb mennyiségek értékeit [18]. A rendkívül sok szabadsági fokkal rendelkező rendszerek esetén elkerülhetetlenné válik egyes részletek elhanyagolása a leírás során. Ezért a statisztikus fizika egyik alapvető kérdése, hogy egy adott fizikai rendszer esetén hogyan alkossunk olyan egyszerűbb modellt, amely viszonylag pontosan reprodukálja az eredeti bonyolult rendszer legfontosabb tulajdonságait. Ebből a nézőpontból a funkcionális renormálást olyan műveletnek tekinthetjük, amelynek célja a fizikai valóságot leíró bonyolult modellek egyszerűbb modellekre történő leképezése az eredeti rendszernek a vizsgálat szempontjából lényeges tulajdonságait megőrző közelítéseket alkalmazva.

A renormálás szó arra utal, hogy az új modell bevezetése az eredeti modell paramétereinek megváltoztatása, „újrarenormálása” által történik. Az a követelmény, hogy a renormálással kapott modell csupán a paramétereinek értékeiben különbözzön az eredeti modelltől valójában nem jelent szigorú megszorítást. Ha a renormálással kapott modell partíciós függvényének exponenciájában (ill. térelméleti modell esetén a generáló funkcionál exponenciájában) új tagok jelennek meg, akkor úgy tekinthetjük, hogy ezek a tagok az

eredeti modell esetén is szerepeltek zérus együtthatóval. A renormálás által kapott modellt azért tekinthetjük egyszerűbbnek, mert abban már nem szerepeltetjük a korábbi modell egyes szabadsági fokait. Az elhanyagolt szabadsági fokok hatását csupán közelítések alkalmazásával, a renormált modell megváltoztatott paraméterei által vesszük figyelembe.

Általában a közelítések következtében a szabadsági fokok eltávolítását több lépésben kell elvégezni [1], azaz egy adott lépésben kapott renormált modellt újabb renormálási transzformációnak alávetve modellek láncolatát szükséges végigkövetni. Gyakran differenciálegyenletekkel leírható folytonos transzformációkat alkalmazunk. Ekkor az egyenleteket numerikusan megoldva az elmélet paraméterterében kirajzolódó görbén haladunk végig, melyet RG-trajektóriának nevezünk. Mindazáltal a számítások általában nem korlátozódnak egyetlen trajektóriára, mert gyakran szükséges megvizsgálni a kezdeti modell paramétereinek több lehetséges értékét.

A renormálás nemcsak egyszerűbb modellekre vezet, hanem gyakran elvileg teljes értékű módszerként alkalmazható az adott modell vizsgálatára. Ez annak a következménye, hogy a szabadsági fokok következetes eltávolítása a modellek partíciós függvényében (ill. generáló funkcionáljában) a mikroállapotokra történő összegzés (ill. a térkonfigurációkra) történő integrálás elvégzésének felel meg, amely által a fizikai rendszert jellemző mennyiségek értéke meghatározható. Emellett bizonyos kérdések (ilyen általában a fázisátalakulások kimutatása) nem igénylik a trajektóriákat meghatározó differenciálegyenletek, azaz az RG-egyenletek megoldását, hanem megválaszolhatóak a renormálási transzformációnak a dimenziótlanított egyenletek fixpontjai körül linearizált alakjának vizsgálatával. Ezáltal a módszer fontos szerepet kap bonyolult modellek kvalitatív viselkedésének feltérképezésében.

A funkcionális renormálás nagyon szemléletesé válik azon gyakori megvalósítás során, amikor a fizikai rendszert Fourier-térben tekintjük és a renormálás egyes lépéseiben mindig a legkisebb hullámhosszú Fourier-módusokat távolítjuk el. Ekkor eljárásunk olyan képzeletbeli mikroszkóp működéséhez hasonlítható [20], amelynek felbontását fokozatosan csökkentjük azért, hogy láthatóvá váljon a fizikai rendszer makroszkopikus viselkedése.

A szakirodalomban széleskörűen használt renormálási csoport elnevezéssel kapcsolatban érdemes megemlíteni, hogy a történetileg kialakult elnevezés bizonyos szempontból félrevezető, ugyanis az alkalmazások során végrehajtott renormálási transzformációk általában nem alkotnak csoportot, mert nem invertálható leképezést valósítanak meg. Ez azért nyilvánvaló, mert általában végtelen sok szabadsági fokú rendszereket vizsgálva közelítéseket alkalmazva egy adott renormálási lépésben végtelen sok szabadsági fokot mellőzünk, melyek hatását véges sok paraméter megváltoztatásával vesszük figyelembe.

2.3. A kvantumtérelmélet és a statisztikus fizika kapcsolata

Az RG-egyenletek levezetése előtt röviden ismertetem a statisztikus fizikát a kvantumtérelmélettel összekapcsoló funkcionális formalizmust.

Ebben a formalizmusban a kvantumtérelmélet vizsgálata során kulcsszerepet játszik a generáló funkcionál fogalma, melyet a Minkowski-téridőben tekintett egy komponensű skaláris térelmélet esetén $\hbar = c = 1$ egységrendszert alkalmazva a

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int_{\gamma} dt \int d^3x (\mathcal{L} + J\phi)} \quad (1)$$

funkcionális integrállal definiálhatunk [17]. A képletben $\mathcal{D}\phi$ jelöli a pályaintegrált definiáló, a ϕ -vel jelölt térkonfigurációkon értelmezett dimenziótlan integrálási mértéket, $\mathcal{L}$ jelöli az elmélet Lagrange-sűrűségét, J jelöli a térváltozóhoz csatolt külső forrást. A téridő koordináták szerinti integrálás határait természetesen a vizsgált rendszert magába foglaló téridőbeli tartomány határai szolgáltatják. A γ index arra utal, hogy az időváltozó szerinti integrálás során az integrálási kontúrt óramutató járása szerinti irányban infinitezimálisan elforgatjuk a komplex számsíkon.

Érdemes megemlíteni, hogy a fenti formális definíció véges együtthatókkal jellemzett Lagrange-sűrűség esetén általában divergáló fizikai mennyiségekhez vezet, ezért a térelméleti modellek szigorú matematikai definiálásához az adott elmélet esetén alkalmazott regularizációs eljárásokat is figye-

lembe kellene venni. Ez a kérdés azonban alapvetően nem érinti a kvantumtérelmélet és a statisztikus fizika kapcsolatát.

Értekezésem további részében euklideszi téridőben tekintett kvantumtérelméleti modelleket vizsgállok. Az euklideszi téridőre történő áttérés annak felel meg, hogy az időváltozó szerinti integrálás kontúrját a komplex síkon az imaginárius tengelyre forgatjuk el az óramutató járása szerint végzett forgatás által. Ha az értelmezési tartományt az egyszerűbb tárgyalás céljából a teljes téridőre kiterjesztjük, az euklideszi téridőben tekintett elméletet a

$$Z_E[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3x (\mathcal{L} + J\phi)} \quad (2)$$

generáló funkcionál által definiálhatjuk.

A $\tau = it$ változó bevezetésével az $\int_{-\infty}^{\infty} dt \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (-i)d\tau$ helyettesítéses integrálást alkalmazva

$$Z_E[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int_{-\infty}^{\infty} (-i)d\tau \int d^3x (\mathcal{L}(\vec{x}, t(\tau)) + J(\vec{x}, t(\tau))\phi(\vec{x}, t(\tau)))}, \quad (3)$$

így az $\int d^4x_E = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d^3x$ és $\mathcal{L}_E(\vec{x}, \tau) = -\mathcal{L}(\vec{x}, t(\tau))$ jelöléseket bevezetve a

$$Z_E[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^4x_E (\mathcal{L}_E - J\phi)} = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E + \int J\phi d^4x_E} \quad (4)$$

alakot [17] nyerjük, ahol $S_E = \int \mathcal{L}_E d^4x_E$ az euklideszi hatás. Az irodalomban [17] szokásos módon a Minkowski-térbeli Lagrange-sűrűséget

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - V(\phi) \quad (5)$$

alakúnak tekintjük. A τ változó definíciójából következően $\partial_t = i\partial_\tau$, azaz $(\partial_t \phi)^2 = -(\partial_\tau \phi)^2$, így az euklideszi Lagrange-sűrűség az

$$\mathcal{L}_E = -\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\tau \phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + V(\phi) \equiv \frac{1}{2}(\partial_E \phi)^2 + V(\phi) \quad (6)$$

formában írható. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért ha az ellenkezőjét nem említtem mindig feltételezem a potenciál Z_2 -szimmetriáját, azaz a $V(\phi) = V(-\phi)$ feltétel teljesülését.

Célszerű definiálni az összefüggő Feynman-gráfok generáló funkcionálját, a

$$W[J] = \ln Z_E[J] \quad (7)$$

funkcionált, és ennek Legendre-transzformáltját, az effektív hatásnak vagy átlagos effektív hatásnak nevezett

$$\Gamma[\varphi] = \int J\varphi d^4x_E - W[J] \quad (8)$$

funkcionált [21]. A Legendre-transzformációból következően a (8) egyenletben szereplő J függvényt a φ függvény határozza meg a $\varphi = \frac{\delta W[J]}{\delta J}$ egyenlet által. Az effektív hatás hatékonyan foglalja össze a modell legfontosabb jellemzőit. Az effektív hatás triviálistól eltérő minimuma az elméletben fellépő spontán szimmetriasértésre mutat, második deriváltjának zérus helyei meghatározzák a részecske tömegét, továbbá a $\Gamma[\varphi]$ funkcionál által generált egyrészecske-irreducibilis Feynman-gráfok a Lehmann-Symanzik-Zimmermann redukciós formulának [17] köszönhetően meghatározzák a szórási kísérletek eredményét leíró S -mátrix elemeit.

Az euklideszi kvantumtérelmélet generáló funkcionáljának a (4) egyenletben felírt alakja analógiát mutat a paramágneses-ferromágneses fázisátalakulás tanulmányozására bevezetett modellek partíciós függvényével. A mágneses rendszereket leíró modellek közül talán a legismertebb az Ising-modell [19]. A modell szerint a rendszer mikroállapota a diszkrét rácspontokban definiált spinnek nevezett változó értékeivel írható le, melynek értéke kétféle lehet, 1 ill. -1. Ez annak felel meg, hogy egy adott rácspont spinje kétféle irányban állhat, a külső mágneses tér irányával megegyezően ill. azzal ellentétesen.

A szomszédos rácspontok kölcsönhatnak egymással oly módon, hogy a kölcsönhatás a spinek irányát azonossá igyekszik állítani. Ennek megfelelően

egy adott s spinkonfiguráció által megvalósított mikroállapot energiája az

$$E_s = \sum_{\langle i,j \rangle} J s_i s_j - \sum_i s_i B \quad (9)$$

kifejezéssel jellemezhető, ahol s_i a i . rácspont spinje, $J < 0$ a szomszédos spinek közötti kölcsönhatás erősségét meghatározó paraméter, a B paraméter a külső mágneses tér erősségét jellemzi. $\sum_{\langle i,j \rangle}$ a szomszédos rácspontokra történő összegzést jelöli, amely során adott pontpárt csak egyszer veszünk figyelembe.

Kanonikus eloszlást feltételezve T hőmérsékletű rendszer esetén a modellt jellemző makroszkopikus mennyiségek várható értéke a

$$Z = \sum_s e^{-\beta E_s} \quad (10)$$

partíciós függvény által számítható ki, ahol $\beta = \frac{1}{kT}$, k a Boltzmann-állandó és az összegzés az összes lehetséges¹ spinkonfigurációra kiterjed. A modell vizsgálata során azért, hogy a számított mennyiségek értéke ne függjön a rácspontok N számától, gyakran célszerű az intenzív mennyiségek vonatkozásában az $N \rightarrow \infty$ ún. termodinamikai határeset képzése, melyet a rácspontok számának és a rendszer térfogatának hányadosát rögzítve valósítunk meg.

A modell általánosítható azon esetre, amikor a térváltozónak nevezett, ϕ -vel jelölt „spinváltozó” folytonos függvénye a térkoordinátának és tetszőleges értéket felvehet. Az általánosítás során megengedjük, hogy a külső mágneses tér a koordináta tetszőleges függvénye legyen és megengedjük, hogy az adott térkonfiguráció energiája függjön a térváltozó deriváltjától. Az általánosítás során bevezetjük továbbá az α paramétert. Így d térdimenzióban a

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^d x \mathcal{H}} \quad (11)$$

¹Az összegzésből ki kell zárni azokat a térkonfigurációkat, amelyek bár energetikailag kedvezőek, viszont a rendszer vizsgálatának ideje alatt nem valósulhatnak meg. Ilyen eset léphet fel például spontán szimmetriasértés vagy több fázis létezése esetén [19].

partíciós függvénnyel definiált modellt kaphatjuk², ahol

$$\mathcal{H}(\vec{x}) = \mathcal{H}_0(\vec{x}) - \beta B(\vec{x})\phi(\vec{x}), \quad (12)$$

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}\alpha(\nabla\phi)^2 + V(\phi). \quad (13)$$

A folytonos esetre történő általánosítás során a funkcionális integrál a térkonfigurációkra történő összegzés általánosítását valósítja meg. A végtelen térfogatnak megfelelő határeset képzését (a diszkrét esethez hasonlóan) természetesen a partíciós függvény helyett a várható értékekre kapott kifejezésekben kell elvégezni. A $V(\phi)$ függvény

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\phi^4 \quad (14)$$

módon történő megválasztása esetén az úgynevezett Landau–Ginzburg-modellt [19] kapjuk.

Az $\mathcal{L}_E \leftrightarrow \mathcal{H}_0$, $J \leftrightarrow \beta B$ megfeleltetés esetén a partíciós függvény (11) képlete és a generáló funkcionál (4) képlete formailag megegyezik, így a d dimenziós euklideszi téridőben tekintett kvantumtérelmélet d dimenziós térben tekintett statisztikus fizikai rendszernek feleltethető meg. Több komponensű térváltozót tartalmazó térelméleti modellnek természetesen több komponensű spinváltozót tartalmazó statisztikus fizikai modell felel meg. Teljessé téve az analógiát a $W[J]$ funkcionál a Helmholtz-féle szabadenergiával, a $\Gamma[\varphi]$ funkcionál a Gibbs-féle szabadenergiával (azaz a szabadentalpiával) állítható párhuzamba.

A fenti formalizmus segítségével a kvantummechanikai modellek is hasonló módon vizsgálhatóak, ekkor a Lagrange-sűrűség szerepét a klasszikus elmélet Lagrange-függvénye, a termennyiség szerepét a pályát meghatározó koordináta-idő függvény veszi át [20, 22]. Ekkor több térdimenzióban tekintett kvantummechanikai rendszernek több komponensű termennyiséget tartalmazó egydimenziós statisztikus fizikai rendszer feleltethető meg.

²Az itt alkalmazott jelölés során a β tényezőt $\mathcal{H}$ -ba olvasztjuk, ezért itt $\mathcal{H}$ nem az energiasűrűséget jelöli.

2.4. A Wegner–Houghton-féle renormálási séma

A térelméleti modellek esetén a funkcionális renormálás megvalósításának legalább két fontosabb megközelítést különböztethetjük meg [1]: a Wilson–Polchinski-féle szemléletet [23–25] és az ún. effektívhatás-formalizmust, amely a Wetterich-egyenletre vezet [5, 26]. A matematikai formalizmus tárgyalás során nem ismertetem részletesen a levezetéseket, csupán a legfontosabb összefüggések kiemelésére törekszek, mivel a célom csupán az, hogy bevezetést nyújtsak a később tárgyalt kutatási kérdésekhez.

A Wilson–Polchinski-féle szemléletet vonatkozásában csupán a munkám szempontjából releváns Wegner–Houghton-féle renormálási séma (a továbbiakban WH-séma) ismertetésére szorítkozom. Ebben a renormálási sémában [23] a modell szabadsági fokainak fokozatos eltávolítását a nagyenergiájú Fourier-módusoktól az alacsony energiájú módusok felé haladva végezzük el. Az euklideszi téridőben tekintett $\phi(\vec{x}_E)$ térváltozót a

$$\phi(\vec{x}_E) = \int \frac{1}{(2\pi)^d} e^{i\vec{p}_E \cdot \vec{x}_E} \tilde{\phi}(\vec{p}_E) d^d p_E \quad (15)$$

módon fejezhetjük ki a tér Fourier-módusai segítségével, az általánosság céljából nem rögzítve a téridő d -vel jelölt dimenzióját. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért általában elhagyom az euklideszi téridőre utaló E indexeket és alkalmazom a tömörebb $x = \vec{x}$, $p = \vec{p}$, $\int_x f(x) = \int f(x) d^d x$, $\int_p f(p) = \int \frac{1}{(2\pi)^d} f(p) d^d p$ jelöléseket.

A WH-egyenlet alábbi levezetése során az euklideszi generáló funkcionálnak a

$$Z_d = \int \mathcal{D}\tilde{\phi} e^{-S[\tilde{\phi}] + \int_x J\phi} \quad (16)$$

alakjából indulunk ki, amelyben a pályaintegrált a $\tilde{\phi}$ Fourier-módusok terében végezzük el.

A d index arra utal, hogy a (16) képletbe klasszikus elméletek hatását behelyettesítve általában egyes fizikai mennyiségek értékére divergáló eredmények adódnak, így az elmélet módosítása válik szükségessé. Ennek végrehajtására, azaz a regularizált elmélet bevezetésére több lehetőség van. A

WH-séma esetén a nagyenergiás, azaz ultraibolya (továbbiakban UV) módusok által okozott divergenciák elkerülését az integrálási tartomány módosításával végezzük el. Ekkor a pályaintegrált csupán azokra a Fourier-módusokra írjuk elő, amelyekre $\tilde{\phi} \in \mathcal{F}_\Lambda$, ahol $\mathcal{F}_\Lambda$ azon $\tilde{\phi}(\vec{p})$ függvények terét jelöli, amelyek csupán a $|\vec{p}| \leq \Lambda$ intervallumban különböznek nullától. Az önkényesen bevezetett Λ paraméterre általában UV-levágásként hivatkozunk.

A generáló funkcionál így módosított képletét a továbbiakban a

$$Z = \int \mathcal{D}_\Lambda \tilde{\phi} e^{-S_\Lambda[\tilde{\phi}] + \int_x J\phi} \quad (17)$$

módon jelölöm.

A statisztikus fizikai modellek esetén a Λ paraméter fizikai jelentése annak feleltethető meg, hogy mivel a rács atomjainak távolsága nem lehet tetszőlegesen kicsiny, ezáltal a Fourier-módusok energiája nem lehet tetszőlegesen nagy. A kvantumtérelméleti modellek esetén a Λ paraméter olyan energiaértéknek feleltethető meg, amelynél már nem alkalmazható az alacsonyenergiás viselkedést leíró modell. Ilyen esetre szolgáltat például a Planck-tömegnek megfelelő energiaérték [17], mivel ilyen energiájú folyamatok leírása során a gravitációs kölcsönhatást figyelmen kívül hagyó modellek várhatóan érvényüket veszítik. Fontos hangsúlyozni, hogy mind a kvantumtérelméleti, mind a statisztikus fizikai modellek esetén általában az elmélet alacsonyenergiás viselkedését vizsgáljuk, amelyet nem befolyásol Λ értékének önkényesnek tűnő megválasztása.

A WH-egyenlet levezetése során az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a külső forrás nagy frekvenciájú Fourier-módusainak értéke zérus, így a forrás jelenléte nem befolyásolja a nagy energiájú módusokra történő integrálás elvégzését. A funkcionális renormálás szemléletét alkalmazva a hatás funkcionálját a továbbiakban a k -val jelölt energiaskála függvényének tekintjük oly módon, hogy a

$$Z = \int \mathcal{D}_\Lambda \tilde{\phi} e^{-S_\Lambda[\tilde{\phi}] + \int_x J\phi} = \int \mathcal{D}_k \tilde{\phi} e^{-S_k[\tilde{\phi}] + \int_x J\phi} \quad (18)$$

egyenlet teljesüljön, ahol $\int \mathcal{D}_k \tilde{\phi}$ a pályaintegrálnak a $\tilde{\phi} \in \mathcal{F}_k$ módusokra történő korlátozását jelöli, ahol $\mathcal{F}_k$ azon $\tilde{\phi}(\vec{p})$ függvények terét jelöli, amelyek csupán a $|\vec{p}| \leq k$ intervallumban különböznek nullától. A szokásos jelölés során a k index az egyes mennyiségeknek az energiaskálától történő függését hangsúlyozza. Az energiaskálától függő hatás bevezetésével olyan modellt definiálunk, amely nem tartalmazza a k -nál nagyobb energiájú Fourier-módusokat, ezáltal az RG programját megvalósítva csökkentjük a modell szabadsági fokait.

A WH-egyenlet alábbiakban ismertetett levezetése megtalálható például a [2] munkában. Ennek során a

$$Z = \int \mathcal{D}_k \tilde{\phi} e^{-S_k[\tilde{\phi}] + \int_x J\phi} = \int \mathcal{D}_{k-\Delta k} \tilde{\phi} e^{-S_{k-\Delta k}[\tilde{\phi}] + \int_x J\phi} \quad (19)$$

egyenlettel definiálva az $S_{k-\Delta k}$ funkcionált, majd a $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}' + \tilde{\phi}''$, $\tilde{\phi}' \in \mathcal{F}_{k-\Delta k}$, $\tilde{\phi}'' \in \mathcal{F}_k \setminus \mathcal{F}_{k-\Delta k}$ módon szétválasztva a különböző energiájú módusokat a

$$Z = \int \mathcal{D}\tilde{\phi}' \int \mathcal{D}\tilde{\phi}'' e^{-S_k[\tilde{\phi}' + \tilde{\phi}''] + \int_x J\phi} = \int \mathcal{D}\tilde{\phi}' e^{-S_{k-\Delta k}[\tilde{\phi}'] + \int_x J\phi}, \quad (20)$$

azaz

$$e^{-S_{k-\Delta k}[\tilde{\phi}']} = \int \mathcal{D}\tilde{\phi}'' e^{-S_k[\tilde{\phi}' + \tilde{\phi}'']} \quad (21)$$

egyenletet írhatjuk fel. Az S_k -ra funkcionálra vonatkozó differenciálegyenlet, azaz a $\Delta k \rightarrow 0$ határeset levezetéséhez az $S_k[\tilde{\phi}' + \tilde{\phi}'']$ funkcionált úgy közelítjük, hogy annak $\tilde{\phi}''$ szerinti, $\tilde{\phi}''$ azonosan zérus helyen tekintett sorfejtését a kvadratikusan bezárólag vesszük figyelembe. Ezt a

$$\begin{aligned} S_k[\tilde{\phi}' + \tilde{\phi}''] &\approx S_k[\tilde{\phi}'] + \int dp \frac{\delta S_k[\tilde{\phi}' + \tilde{\phi}'']}{\delta \tilde{\phi}''(p)} \Big|_{\tilde{\phi}''=0} \tilde{\phi}''(p) \\ &+ \frac{1}{2} \int dp_1 \int dp_2 \frac{\delta^2 S_k[\tilde{\phi}' + \tilde{\phi}'']}{\delta \tilde{\phi}''(p_1) \delta \tilde{\phi}''(p_2)} \Big|_{\tilde{\phi}''=0} \tilde{\phi}''(p_1) \tilde{\phi}''(p_2) \end{aligned} \quad (22)$$

közelítést alkalmazva a (21) egyenlet $\frac{\delta^2 S_k[\tilde{\phi}]}{\delta \tilde{\phi}'' \delta \tilde{\phi}''} > 0$ esetén gaussi funkcionális integrálra vezet, amelyet elvégezve az

$$\begin{aligned} S_k[\tilde{\phi}] - S_{k-\Delta k}[\tilde{\phi}] &= \int dp_1 \int dp_2 \frac{1}{2} \frac{\delta S_k[\tilde{\phi}]}{\delta \tilde{\phi}''(p_1)} \left(\frac{\delta^2 S_k[\tilde{\phi}]}{\delta \tilde{\phi}''(p_1) \delta \tilde{\phi}''(p_2)} \right)^{-1} \frac{\delta S_k[\tilde{\phi}]}{\delta \tilde{\phi}''(p_2)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \frac{\delta^2 S_k[\tilde{\phi}]}{\delta \tilde{\phi}'' \delta \tilde{\phi}''} \end{aligned} \quad (23)$$

egyenletet vezethetjük le, ahol a traceképzés alatt a funkcionális derivált változóit azonossá téve az impulzus térben a $k - \Delta k \leq |\vec{p}| \leq k$ gömbhéjon végzett integrálást értjük³. A levezetett egyenletre Wegner–Houghton-egyenletként hivatkoznak az irodalomban [2].

Ahhoz, hogy a sorfejtéssel kapott egyenlet egzaktta váljon természetesen szükséges a $\Delta k \rightarrow 0$ határeset képzése, ekkor a hatásfunkcionálra vonatkozó differenciálegyenletet kapunk, melynek kezdeti feltételét a hatásnak a $k = \Lambda$ helyen felvett értéke határozza meg. Mivel az alkalmazások során általában $\left. \frac{\delta S_k[\tilde{\phi}' + \tilde{\phi}''']}{\delta \tilde{\phi}''(p)} \right|_{\tilde{\phi}''=0} = 0$, azaz a nyeregpont triviális, ezért a továbbiakban az általánosabb esetben fellépő nehézségeket [2] elkerülve a sorfejtés lineáris részéből származó tagot elhagyom.

Az úgynevezett lokálispotenciál-közelítés (az angolul local potential approximation, a továbbiakban LPA) által lehetőség nyílik arra, hogy a hatásfunkcionálra vonatkozó differenciálegyenlet helyett a V potenciál függvényére vonatkozó differenciálegyenlettel dolgozzunk.

LPA esetén feltételezzük, hogy az energiaskálától függő hatás az

$$S_k[\phi(x)] = \int_x \frac{1}{2} Z(\partial_E \phi(x))^2 + V_k(\phi(x)) \quad (24)$$

alakban írható fel és a Z együttható nem függ k értékétől. Általában a V_k potenciál ϕ szerinti sorfejtésének konstans tagjának értéke nem befolyásolja a modell vizsgált tulajdonságait, ezért értéke szabadon megválasztható.

³Az irodalmat követve nem jelölöm külön a logaritmus és a trace képzése során az egyenlet dimenziótlánításáért felelős tényezőket.

Ekkor a $Z = 1$ esetet tekintve a (23) egyenletből a konstans ϕ térkonfigurációra vonatkozóan a $\Delta k \rightarrow 0$ határeset képzését követően a

$$k \frac{\partial}{\partial k} V_k(\phi) = -\frac{\Omega_d k^d}{2(2\pi)^d} \ln \left(\frac{k^2 + V_k''(\phi)}{k^2} \right) \quad (25)$$

egyenlet [20] vezethető le. Az irodalomban szokásos jelölést alkalmazva a vessző a térváltozó szerinti deriválást jelöli és Ω_d a d dimenziós gömbi koordináta-rendszerben elvégzett impulzusintegrálnak a térszögre történő integrálásból származó járulékát jelöli, amely az

$$\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \quad (26)$$

módon fejezhető ki az Euler-féle Γ -függvény segítségével. A (25) egyenletben a logaritmus argumentumának nevezőjét az egyszerűsége törekedve választottuk meg. A térváltozótól független nevező valójában többféleképpen megválasztható a potenciál konstans tagjának megválasztását követve.

Az ismertett WH-sémának történelmi jelentősége és technikai egyszerűsége ellenére jelentős hátránya, hogy ebben a renormálási sémában az LPA túllépése nehézségekbe ütközik [2].

2.5. Az effektívhatás-szemlélet

Az RG-egyenletek levezetésének másik lehetséges megközelítése, az effektívhatás-szemlélet [5, 26] lehetőséget nyújt az LPA túllépésére. Ebben a megközelítésben a Wetterich-egyenletnek nevezett funkcionális differenciálegyenletet vezethetjük le, amelynek segítségével az elméletet definiáló hatásfunkcionálból mint kezdeti feltételből kiindulva meghatározhatjuk az effektív hatást. Az egyenlet alább ismertett levezetése megtalálható az [1] munkában.

A továbbiakban a jelölés egyszerűsítése céljából elhagyom a Fourier-transzformáltak $\sim$ -vel történő jelölését és az impulzustérre történő áttérést csupán a függvény argumentuma által jelölöm $f(p) = \int_x e^{-ipx} f(x)$ illetve

$f(p, q) = \int_x \int_y e^{-ipx} e^{-iqy} f(x, y)$ módon. Bevezetem továbbá az $f \cdot g = \int_x f(x)g(x) = \int_p f(-p)g(p)$ és $f \cdot M \cdot g = \int_x \int_y f(x) M(x, y) g(y) = \int_p \int_q f(-p)M(p, q)g(-q)$ jelöléseket.

A Wetterich-féle megközelítésben fontos szerepet játszik az ún. regulátor funkcionál, melyet az

$$R_k[\phi(p)] = \frac{1}{2} \int_p \phi(p) R_k(p) \phi(-p) \quad (27)$$

módon az $R_k(p)$ regulátor függvény által definiálunk. A WH-sémához hasonlóan a k változóra szokásos a skála elnevezés használata. A számítások során a k -től és p -től függő regulátor függvényt bizonyos általános feltételek kielégítése mellett szabadon választhatjuk meg és eszerint különböző renormálási sémákról beszélhetünk.

A regulátor függvénytől a következő tulajdonságok teljesítését követeljük meg:

1. $R_k(p)$ p -nek páros függvénye.
2. $k \neq 0$ esetén $\lim_{p \rightarrow 0} R_k(p) > 0$.
3. $\lim_{k \rightarrow 0} R_k(p) = 0$ a p impulzus bármely értéke esetén.
4. p kis értékei esetén $R_\Lambda(p) \approx \Lambda^2$ vagy $R_\Lambda(p) \rightarrow \infty$.

Koordinátatérben a regulátort az

$$R_k[\phi_x] = -\frac{1}{2} \int_x \int_y \phi(x) R_k(x - y) \phi(y) \quad (28)$$

egyenlettel definiálhatjuk. Bizonyos esetekben kényelmes az

$$R_k(p_1, p_2) = (2\pi)^d \delta^d(p_1 + p_2) R_k(p_1) \quad (29)$$

és

$$R_k(x, y) = R_k(x - y) \quad (30)$$

módon bevezetett több változót tartalmazó regulátor függvények alkalmazása.

Az effektív hatásra vonatkozó funkcionális egyenlet levezetése során a k -tól függő regulátoron keresztül a modellek egyparaméteres seregét definiáljuk, a

$$Z_k = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_\Lambda[\phi] - R_k[\phi] + J \cdot \phi} \quad (31)$$

generáló funkcionál által. A Λ index arra utal, hogy a modellt definiáló S_Λ funkcionál értékét a nagy energiájú $\phi(p) \notin \mathcal{F}_\Lambda$ módusok esetén zérusnak választjuk az esetleges UV-divergenciák elkerülése érdekében. Ezt figyelembe véve a pályaintegrált és a regulátor funkcionál értelmezési tartományát a Fourier-módusok teljes terére kiterjesztjük. Az eredeti regulátort nem tartalmazó modellnek a $k \rightarrow 0$ határeset felel meg.

Mindegyik modell esetén definiáljuk a $W_k[J] = \ln Z_k[J]$ funkcionált és ennek Legendre-transzformáltját a $\Gamma'_k[\varphi]$ funkcionált, továbbá a

$$\Gamma_k[\varphi] = \Gamma'_k[\varphi] - R_k[\varphi] \quad (32)$$

funkcionált. Megemlítem, hogy a szakirodalomban elterjedt jelölés kissé félrevezető, ugyanis a $\Gamma_k[\varphi]$ funkcionál csak a $k \rightarrow 0$ határesetben azonos az effektív hatással.

Az irodalomban [1] részletesebben ismertetett levezetést során a (31) egyenletből kiindulva $\partial_k Z_k$ -ra a

$$\partial_k Z_k[J] = \left(-\frac{1}{2} \int_{x,y} \partial_k R_k(x-y) \frac{\delta}{\delta J_x} \frac{\delta}{\delta J_y} \right) e^{W_k[J]} \quad (33)$$

egyenletet, $\partial_k W_k$ -ra a

$$\partial_k W_k[J] = -\frac{1}{2} \int_{x,y} \partial_k R_k(x-y) \left(\frac{\delta^2 W_k}{\delta J_x \delta J_y} + \frac{\delta W_k}{\delta J_x} \frac{\delta W_k}{\delta J_y} \right) \quad (34)$$

egyenletet, $\partial_k \Gamma_k$ -ra

$$\partial_k \Gamma_k[\varphi] = \frac{1}{2} \int_{x,y} \partial_k R_k(x-y) \frac{\delta^2 W_k}{\delta J_x \delta J_y} \quad (35)$$

egyenletet írják fel. A következő lépés a $\partial_k \Gamma_k$ -ra vonatkozó egyenlet jobb oldalának kifejezése Γ_k segítségével. Ezáltal a

$$\partial_k \Gamma_k[\varphi] = \frac{1}{2} \int_{x,y} \partial_k R_k(x-y) (\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1}(x,y) \quad (36)$$

egyenlet vezethető le, ahol $\Gamma_k^{(2)}$ a Γ_k funkcionál φ szerinti másodrendű funkcionális deriváltját jelöli és az invertálást operátorra vonatkozóan kell értelmezni az $\int_y f(x,y) f^{-1}(y,z) = \delta(x-z)$ módon. Ennek felhasználása céljából az egyenletet olyan tartományban értelmezzük, melyben az operátor inverze létezik.

Az egyenlet a Fourier-térben bevezetett mennyiségek segítségével a

$$\partial_k \Gamma_k[\varphi] = \frac{1}{2} \int_p \partial_k R_k(p) (\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1}(p, -p) \quad (37)$$

alakban írható fel, amely egyenletben a $\Gamma^{(2)}$ a Fourier-térbeli $\Gamma^{(2)}(p,q) = \int_{x,y} e^{-i(p x + q y)} \Gamma^{(2)}(x,y)$ függvényt jelöli. A Γ_k funkcionálra levezetett (37) funkcionális differenciálegyenlet [26] Wetterich-egyenlet néven ismert az irodalomban.

Érdemes hangsúlyozni, hogy bár az egyenletben megjelenik a regulátor függvény, a funkcionális egyenletnek a különböző regulátort alkalmazó renormálási sémák esetén kapott megoldása a $k \rightarrow 0$ határesetben azonos [27].

Az egyenlet alkalmazásához a Γ_Λ kezdeti feltétel meghatározása szükséges. Ez a probléma úgy oldható meg, hogy kellően nagy Λ érték esetén Γ_Λ S_Λ -val megegyezőnek tekinthető [1]. Ez azért teljesül, mert a

$$e^{-\Gamma_k[\varphi]} = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_\Lambda[\phi] + \int_x \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \varphi(x)} (\phi(x) - \varphi(x)) - \frac{1}{2} \int_{x,y} (\phi(x) - \varphi(x)) R_k(x-y) (\phi(y) - \varphi(y))} \quad (38)$$

egyenletben a $k \rightarrow \Lambda$ határesetben a regulátor függvénytől megkövetelt 4. tulajdonság következtében az integrálhoz csupán a φ -hez közeli ϕ térkonfigurációk adhatnak jelentős járulékot [1]. Ekkor viszont a pályaintegrál a

normálási tényezőtől eltekintve az integrandus $\phi = \varphi$ helyen felvett értékével közelíthető, amelyből $\Gamma_\Lambda[\varphi] \approx S_\Lambda[\phi]$ következik.

Az alkalmazott módon az effektív hatás kiszámítása a (37) funkcionális differenciál egyenlet megoldására vezethető vissza elkerülve a pályaintegrált tartalmazó képlet alkalmazását. Az egyenletben szereplő Γ_k fizikai jelentését tekintve az effektív hatásnak a k -nál nagyobb frekvenciájú módusoktól származó járulékával hozható kapcsolatba [1], bár a Wetterich-féle szemlélet esetén a WH-sémával ellentétben a különböző energiájú módusok járuléka nem különül el élesen. Érdekes továbbá megemlíteni, hogy a szemléletbeli különbségek ellenére a WH-sémában kapott egyes eredmények bizonyos esetekben reprodukálhatóak a Wetterich-egyenlettel speciális regulátort alkalmazva [5, 28], ezért a Wetterich-egyenlet általánosabbnak tekinthető.

A térelméleti modellek kvantitatív vizsgálata általában csupán közelítések alkalmazásával végezhető el. Ezáltal lehetővé válik, hogy az effektív hatásra kapott eredményt a funkcionálra vonatkozó (37) egyenlet helyett függvényekre vonatkozó differenciálegyenletek megoldása által határozzuk meg. A közelítések egyik ára, hogy az eredmények bizonyos mértékben függeni fognak a regulátor megválasztásától.

LPA esetén a Γ_k funkcionál alakjára a

$$\Gamma_k[\varphi(x)] = \int_x \frac{1}{2} Z (\partial_E \varphi(x))^2 + V_k(\varphi(x)) \quad (39)$$

feltételezést rójuk ki, ahol a Z hullámfüggvény-renormálás a k skálától és a térváltozótól független. A $Z = 1$ esetben a homogén, azaz térben állandó φ térkonfiguráció esetén a potenciálra vonatkozó

$$\partial_k V_k = \frac{1}{2} \int_p \frac{\partial_k R_k(p)}{p^2 + R_k(p) + V_k''} \quad (40)$$

egyenlet vezethető le [1], ahol a vessző a φ szerinti deriváltat jelöli. Az effektív hatás az egyenlet megoldásának $k \rightarrow 0$ határesetére által határozható meg.

Az LPA-n túlmutató közelítésre a hullámfüggvény-renormálás skálafüggésének és térváltozófüggésének figyelembevétele nyújt lehetőséget. A Γ_k

funkcionál alakjára a

$$\Gamma_k[\varphi] = \int_x \left(V_k(\varphi) + \frac{1}{2} Z_k(\varphi) (\partial_E \varphi)^2 \right) \quad (41)$$

feltételt kiróva a Wetterich-egyenletből a V_k potenciálra a

$$k \partial_k V_k = \frac{1}{2} \int_p \frac{k \partial_k R_k}{Z_k p^2 + R_k + V_k''} \quad (42)$$

a Z_k hullámfüggvény-renormálásra a

$$\begin{aligned} k \partial_k Z_k = \frac{1}{2} \int_p k \partial_k R_k(p) & \left[- \frac{Z_k''}{(p^2 Z_k + R_k + V_k'')^2} \right. \\ & + \frac{\frac{2}{d} Z_k'^2 p^2 + 4 Z_k' (Z_k' p^2 + V_k''')}{(p^2 Z_k + R_k + V_k'')^3} \\ & - 2 \frac{(Z_k' p^2 + V_k''')^2 (Z_k + \partial_{p^2} R_k + \frac{2}{d} p^2 \partial_{p^2}^2 R_k)}{(p^2 Z_k + R_k + V_k'')^4} \\ & - 2 \frac{\frac{4}{d} Z_k' p^2 (Z_k' p^2 + V_k''') (Z_k + \partial_{p^2} R_k)}{(p^2 Z_k + R_k + V_k'')^4} \\ & \left. + \frac{\frac{8}{d} p^2 (Z_k' p^2 + V_k''')^2 (Z_k + \partial_{p^2} R_k)^2}{(p^2 Z_k + R_k + V_k'')^5} \right] \quad (43) \end{aligned}$$

egyenlet [3] vezethető le, ahol a vessző a térváltozó szerinti deriválást jelöli. Az LPA legegyszerűbb túllépésére, a Z_k hullámfüggvény-renormálást térváltozótól függetlennek tekintő közelítésre LPA' néven hivatkoznak az irodalomban [1].

Az ismertetett közelítő eljárásra, amely a Γ funkcionálra kirótt feltevésben $\partial_E \varphi$ magasabb rendű hatványait figyelembe véve fejleszthető gradiens ill. derivált sorfejtés néven hivatkoznak az irodalomban [1, 2, 29].

2.6. A fázisátalakulások vizsgálata

Bizonyos kérdések az ismertetett differenciálegyenletek $k \rightarrow 0$ határesetben tekintett megoldásának meghatározása nélkül, pusztán az RG-egyenletek viselkedésének tanulmányozása által megválaszolhatóak. A fázisátalakulások

tanulmányozása olyan alkalmazási terület, amely a fázishatárok és a kritikus exponensek kiszámításán keresztül lehetőséget nyújt arra, hogy ilyen módon kvantitatív információkat nyerjünk a vizsgált modellről.

Az egyensúlyban lévő termodinamikai rendszerek lényeges tulajdonságai általában a szabadenergia ill. a szabadentalpia függvényéből kiolvashatóak, ezért elméleti szempontból a statisztikus fizikai modellek egyes fázisainak megkülönböztetése gyakran a vizsgált termodinamikai potenciál⁴ viselkedése szerint történik. Eszerint az egyes fázisok a termodinamikai potenciál analitikus tartományainak feleltethetőek meg [30] és a fázisok közötti minőségi különbséget a tartományok határán tapasztalt nem analitikus viselkedés jelzi⁵. Aszerint, hogy a termodinamikai potenciál elsőrendű deriváltja folytonos-e a fázisátalakulási pontban⁶ megkülönböztethetünk elsőrendű és folytonos fázisátalakulásokat, amely csoportosítás tulajdonképpen megfelel a látens hő megjelenése szerinti osztályozásnak [19, 20]. A továbbiakban az egyszerűség céljából a folytonos fázisátalakulások tárgyalására szorítkozom.

A fentebb említett ferromágneses-paramágneses átalakulást leíró modellek mellett nagyon sok fizikai rendszerben találkozhatunk folytonos fázisátalakulással, amelyre példát szolgáltat a kritikus pontban bekövetkező folyékony-légnemű halmazállapot-változás, a megfelelő összetételű kétkomponensű folyadékok hűtése során a poláris és az apoláris összetevő elkülönülése, a folyékony hélium hűtése során a szuperfolyékony kondenzátum megjelenése továbbá egyes szupravezető anyagok esetén külső mágneses tér hiányában a szupravezető állapot kialakulása [19].

További példát szolgáltat a folytonos fázisátalakulásokra a kétdimenziós XY-spin-modell [19] megfelelő közelítésében és a későbbiekben tárgya-

⁴Az egyszerűbb szóhasználat kedvéért nem jelzem külön, hogy a végtelen térfogatú határesetben a térfogattal arányos termodinamikai potenciál helyett annak egységnyi térfogatra eső értékét, azaz a potenciálsűrűséget kell tekinteni.

⁵Bizonyos esetekben (pl. folyékony-légnemű fázis) a fizikai rendszer az egyik fázisból a másikba fázisátalakulás nélkül is átvihető, ezért a fázisok ilyen megkülönböztetése nem minden szempontból egyértelmű [30].

⁶A továbbiakban feltételezem, hogy a termodinamikai határeset képzése által a fázisátalakulás a kontrollparaméter infinitezimális tartományára korlátozható, azaz elhanyagolom az ún. véges méret effektust ld. [30] 2.3.3 alfejezete.

landó sine-Gordon-modellben megjelenő [32-34] Kosterlitz–Thouless (vagy Berezinskii–Kosterlitz–Thouless [31]) fázisátalakulásnak nevezett topologikus fázisátalakulás.

Ekkor az XY-spin-modell esetén az alacsony hőmérsékletű fázisnak vortex-antivortex⁷ párokat tartalmazó spinkonfiguráció felel meg, míg a magas hőmérsékletű fázisban ezen párok felbomlanak [35]. Ekkor az alacsony hőmérsékletű fázist nem jellemzi hosszútávú térbeli rendezettség csupán rövidtávú, ún. topologikus rendezettség figyelhető meg [36]. A fázisátalakulás egyik különlegessége, hogy végtelen rendű, azaz a fázisátalakulási pontban a szabadenergia folytonosan differenciálható [35].

Gyakran vizsgálunk olyan modelleket amelyben spontán szimmetriasértés léphet fel mivel a fizikai rendszer alapállapota nem feltétlenül invariáns a modellt definiáló Hamilton-függvény ill. Hamilton-operátor szimmetriájával szemben. Erre az egyik legegyszerűbb példa a ferromágneses anyagok azon állapota, melyben a mágneszettség egy térbeli irányt kitüntetve spontán módon megsérti a rendszer forgásszimmetriáját. Ezen szempontból megkülönböztethetjük a rendszer szimmetrikus és szimmetriasértett fázisát. A kvantitatív leírás érdekében célszerű bevezetni a rendparamétert, amelynek értéke a szimmetrikus (rendezetlen) fázisban nulla, míg a szimmetriasértett (rendezett) fázisban nullától különböző [35].

A folytonos fázisátalakulások statisztikus fizikai leírása során általában kulcsszerepet játszanak a fizikai mennyiségek fluktuációi, melyek a korrelációs függvények segítségével jellemezhetők. Az $\vec{r}_1$ és $\vec{r}_2$ pontokban az X -szel jelölt mennyiségnek a várhatóértékétől való eltérésének korrelációja a

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle X(\vec{r}_1)X(\vec{r}_2) \rangle - \langle X(\vec{r}_1) \rangle \langle X(\vec{r}_2) \rangle \quad (44)$$

módon definiált korrelációs függvény által írható le, ahol $\langle \rangle$ az adott statisztikus fizikai sokaságon értelmezett várhatóérték képzését jelöli.

⁷A vortexek a spinváltó zárt görbe mentén történő elfordulása által megvalósuló speciális spinkonfigurációk, melyek részletesebb ismertetése megtalálható például [19] 13.3 alfejezetében. A vortex és az antivortex közötti különbség a spinek elfordulásának irányában van.

A továbbiakban izotrop Hamilton-függvénnyel ill. Hamilton-operátorral rendelkező transzlációinvariáns rendszert tételezek fel, ekkor a fenti függvény csupán a kiválasztott pontok r távolságától függ. Ekkor a rendparaméterhez tartozó korrelációs függvény a fázisátalakulási ponthoz közeledve nagy r távolságok esetén a

$$G(r) \sim e^{-\frac{r}{\xi}} \quad (45)$$

aszimptotikus alakot ölti, ahol a korrelációk fennállásának távolságát jellemző ξ mennyiség a korrelációs hossz. A fázisátalakulási pontban az aszimptotikus alak a

$$G(r) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}} \quad (46)$$

kifejezéssel adható meg, ahol η a korrelációs függvény jellemzésére bevezetett kritikus exponens és d a rendszer dimenzióját jelöli. Az η exponensre szokásos az anomális dimenzió elnevezés használata is.

A fázisátalakulási ponthoz közeli rendszerek szokásos módszerekkel történő tárgyalásának nehézségét az okozza [35], hogy a hatványfüggvény szerinti viselkedés következtében a fázisátalakulási pontban a korrelációs hossz divergál, ezért minden hullámhosszú fluktuáció jelentőssé válik.

A folytonos fázisátalakulások általában ún. kritikus viselkedést mutatnak, melynek során egyes fizikai mennyiségek a fázisátalakulási ponthoz közelítve hatványfüggvénnyel jellemezhető módon divergálnak. E hatványfüggvények kitevői, az ún. kritikus exponensek között skálatörvényeknek nevezett összefüggések állnak fenn. Az időtől független folyamatok jellemzése során több kritikus exponens használatos, melyek közül a skálatörvények következtében általában kettő tekinthető egymástól függetlennek [35]. A vizsgált jelenségek egyik legérdekesebb jellemzője az univerzalitás, amely a skálatörvényeknek a modellspecifikus jellemzőktől való függetlenségében is megnyilvánul. Ezenkívül a kritikus exponensek értéke a modell néhány tulajdonsága által meghatározott, így ennek alapján a fizikai rendszerek univerzalitási osztályokba sorolhatóak.

Exponens	Az exponenst definiáló kritikus viselkedés a fázisátalakulási pont környezetében
α	$c_B = \frac{k\beta^2}{N} \frac{\partial^2 \ln Z(\beta, B)}{\partial \beta^2} \sim \alpha^{-1} \left(\left(\frac{ T-T_c }{T_c} \right)^{-\alpha} - 1 \right)$
β	$M = \left\langle \frac{\sum_i s_i}{N} \right\rangle = \frac{1}{\beta N} \frac{\partial \ln Z(\beta, B)}{\partial B} \sim (T_c - T)^\beta$
γ	$\chi_T = \frac{\partial M}{\partial B} \sim T - T_c ^{-\gamma}$
δ	$M(T = T_c) \sim B^{\frac{1}{\delta}}$
η	$\lim_{r \rightarrow \infty} G(r, T = T_c) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}}$
ν	$\xi \sim T - T_c ^{-\nu}$

1. táblázat : Hat gyakran alkalmazott kritikus exponens definíciója az Ising-modell esetén. A táblázat [19] 1.1 táblázata nyomán készült. Az egyszerűség kedvéért nem jelöltem külön, hogy a δ exponens esetének kivételével a kritikus viselkedés mindig zérus külső mágneses tér esetére vonatkozik. Z a partíciós függvény, T_c a fázisátalakulási ponthoz tartozó kritikus hőmérséklet, k a Boltzmann-állandó, $\beta = \frac{1}{kT}$, N a rácspontok száma, B a külső mágneses tér erősségét meghatározó paraméter, c_B az állandó külső mágneses tér esetén tekintett egy rácspontra eső fajlagos hőkapacitás, M a mágnesezettség, χ_T az állandó hőmérséklet esetén tekintett szuszceptibilitás, G az összefüggő kétpont-korrelációs függvény, d a modell dimenziója és ξ a korrelációs hossz.

Az Ising-modell esetén a rendparaméternek az M -mel jelölt a mágnesezettség felel meg, amelyet a spinváltozók átlagának várhatóértékeként definiálhatunk. Az 1. táblázat az Ising-modell vonatkozásában a hőkapacitás, a mágnesezettség, a szuszceptibilitás, a korrelációs függvény és a korrelációs hossz kritikus viselkedését jellemző exponensek definícióját ismerteti, míg a 2. táblázat hat nevezetes skálatörvényt foglal össze.

A fejezet további részében a fázisszerkezet tanulmányozását az egyszerűség kedvéért LPA-ra szorítkozva ismertetem. Az RG-egyenletekkel végzett vizsgálatok során gyakran megtehető, hogy a V_k potenciálra vonat-

Elnevezés	Skálatörvény
Widom	$\gamma = \beta(\delta - 1)$
Griffiths	$\alpha + \beta(\delta + 1) = 2$
Rushbrooke	$\alpha + 2\beta + \gamma = 2$
Josephson	$2 - \alpha = \nu d$
Fisher	$(2 - \eta)\nu = \gamma$
Buckingham-Gunton	$2 - \eta = d(\delta - 1)(\delta + 1)^{-1} = d\gamma(2\beta + \gamma)^{-1}$

2. táblázat : Nevezetes skálatörvények. A táblázat [35] 7.5 alfejezete szerint készült. Fontos hangsúlyozni, hogy amint a megjelölt forrásban kifejtésre kerül, a dimenziók d -vel jelölt számától függő skálatörvények nem teljesülnek d tetszőleges értékére.

kozó (40) egyenletben a potenciált térváltozó szerinti Taylor-sorfejtett alakjával közelítjük, ezáltal a parciális differenciálegyenlet helyett a sorfejtési együtthatókra vonatkozó közönséges differenciálegyenlet-rendszerrel dolgozhatunk. A sorfejtés együtthatóit csatolásoknak nevezzük, melyeket a k skála függvényeinek kell tekinteni. A továbbiakban a figyelembe vett csatolások összességére a $\vec{g}$ jelölést alkalmazom. Ekkor a kapott differenciálegyenlet-rendszer a

$$k\partial_k \vec{g} = \vec{\beta}(\vec{g}, k) \quad (47)$$

alakban írható, ahol a jobb oldal jelölése arra utal, hogy az egyes csatolások skálafüggését meghatározó egyenleteket a szakirodalomban β -függvényeknek nevezik.

Az RG-egyenletek viselkedésének tanulmányozása kényelmesebben végezhető el fizikai dimenzióval nem rendelkező mennyiségek bevezetése által. Az impulzus dimenziójú k változó helyett bevezetjük a dimenziótlan $t = \ln \frac{k}{\Lambda}$ változót, melyet renormálási időnek nevezünk. A t szerinti deriválást az irodalomban szokásos módon ponttal jelölöm. Az irodalom [3] jelöléseit követve bevezethetjük továbbá a fizikai mennyiségek $\sim$ -vel jelölt dimenziótlan megfelelőit, melyeket az eredeti dimenzióval rendelkező

mennyiségek és az impulzus dimenziójú k változó megfelelő hatványának szorzataként definiálunk. Ekkor a k^{d_i} -nek megfelelő fizikai dimenzióval rendelkező g_i csatolásra vonatkozó

$$k\partial_k g_i = \dot{g}_i = \beta_i(\vec{g}, k) \quad (48)$$

egyenlet a dimenziótlan $\tilde{g}_i = g_i k^{-d_i}$ csatolásra vonatkozó

$$\dot{\tilde{g}}_i = -d_i \tilde{g}_i + \beta_i(\vec{\tilde{g}}, 1) \equiv \tilde{\beta}_i(\vec{\tilde{g}}) \quad (49)$$

egyenlettel helyettesíthető.

A dimenziótlan mennyiségek bevezetése annak felel meg, hogy a renormálási transzformáció elvégzése során a modellt jellemző fizikai mennyiségeket újraszkalázzuk k új értékének megfelelően. Ennek hasznossága azáltal szemléltethető, hogy pl. az Ising-modell esetén a rendszer viselkedése szempontjából nem a korrelációs hossz számszerű értéke, hanem annak a rácsállandóhoz viszonyított értéke a lényeges [1].

A

$$\dot{\vec{\tilde{g}}} = \vec{\tilde{\beta}}(\vec{\tilde{g}}) \quad (50)$$

differentiálegyenlet-rendszer megoldása által a modell paraméterterében kirajzolt, trajektóriának nevezett görbe irányának általában a k skála csökkenésének irányát tekintjük. Mivel a fizikai rendszer leírásához a kísérletileg változtatható paraméterek (pl. a hőmérséklet) mellett általában kísérletileg nem változtatható paraméterek (pl. a kölcsönhatás erőssége) figyelembevétele is szükséges, ezért a paraméterter pontjai általában fizikailag nem megvalósítható állapotoknak felelnek meg. Ennek következtében a renormálási transzformációt leíró trajektóriák még a statisztikus fizikai modellek esetén sem feleltethetők meg fizikai folyamatoknak.

Bár a modellek fázisszerkezete a különböző kezdeti feltételekhez tartozó trajektóriák által feltérképezhető, a fázistér hatékony vizsgálata az egyenletek fixpontjainak megkeresése által lehetséges. Fixpontoknak nevezzük a paraméterter azon $\vec{\tilde{g}}_*$ pontjait, amelyekre a dimenziótlan $\vec{\tilde{\beta}}$ -függvények

zérus értéket vesznek fel, azaz az adott pontban alkalmazott renormálási transzformáció a dimenziótlan csatolások értékeit változatlanul hagyja. A triviális $\vec{g}_* = \vec{0}$ fixpontot gaussi fixpontnak nevezzük, amely szabad, tömeg nélküli térelméleti modellnek felel meg.

Természetesen lehetséges, hogy a $\vec{\beta} = \vec{0}$ egyenlet aszimptotikusan teljesül amikor valamely csatolás értéke divergál. A továbbiakban erre nem térünk ki, feltételezve, hogy ez az eset a modell átparametrizálása által visszavezethető a csatolások véges értékénél megjelenő fixpont esetére.

A legegyszerűbb eseteket tekintve megkülönböztethetünk vonzó, taszító és hiperbolikus fixpontot. A fixpont környezetéből indított trajektória vonzó fixpont esetén a fixpontba tart, taszító fixpont esetén attól távolodik, míg hiperbolikus pontok esetén a fixpont környezetéből indított trajektória viselkedése a kezdőpont megválasztása szerint változik.

A fixpont viselkedésének meghatározását megkönnyíti, hogy az adott fixpont környezetében általában lehetőség nyílik arra, hogy a (50) egyenleteket sorfejtésük lineáris tagjával közelítsük. Ezáltal a $\vec{g}_*$ fixpont esetén a

$$\dot{g}_i = \tilde{\beta}_i(\vec{g}_*) + \sum_j \frac{\partial \tilde{\beta}_i}{\partial \tilde{g}_j} \Big|_{\vec{g}=\vec{g}_*} (\tilde{g}_j - \tilde{g}_{*,j}) \quad (51)$$

egyenleteket nyerjük. Bevezetve az

$$M_{ij} = \frac{\partial \tilde{\beta}_i}{\partial \tilde{g}_j} \Big|_{\vec{g}=\vec{g}_*} \quad (52)$$

érzékenységi mátrixot és az $y_i = \tilde{g}_i - \tilde{g}_{*,i}$ változókat az egyenletrendszer az

$$\dot{\vec{y}} = M \vec{y} \quad (53)$$

alakba írható. Sok esetben az érzékenységi mátrix diagonalizálható, így az egyenletrendszer még egyszerűbb alakban írható. Legyen S olyan mátrix, amely esetén az $M' = S^{-1}MS$ módon definiált mátrix diagonális. Ekkor a $\vec{z} = S^{-1}\vec{y}$ vektor bevezetésével az egyenletrendszert

$$\dot{\vec{z}} = M' \vec{z} \quad (54)$$

alakban felírva $\vec{z}$ komponenseire a

$$\dot{z}_i = s_i z_i \quad (55)$$

egyenletek adódnak, ahol s_i a diagonális M' mátrix megfelelő sajátértékét jelöli. Az egyenletek t_0 -ban ismert kezdeti feltételhez tartozó megoldása

$$z_i(t) = z_i(t_0)e^{s_i t}. \quad (56)$$

Természetesen ezek az egyenletek csupán akkor adnak jó közelítést, ha a trajektória t_0 -beli értéke is a fixpont közelében van.

Ezáltal látható, hogy ha az M' mátrix minden saját értéke negatív, akkor a fixpont infravörös (IR) taszító⁸; ha minden saját értéke pozitív, akkor a fixpont IR-vonzó; ha mind pozitív, mind negatív sajátértékekkel rendelkezik, akkor a fixpont hiperbolikus pont más néven nyeregpont.

Egy adott fixpont tekintetében megkülönböztetünk [35] releváns, marginális és irreleváns csatolásokat aszerint, hogy az érzékenységi mátrix adott csatoláshoz tartozó sajátértéke negatív, nulla vagy pozitív. Az elnevezések arra utalnak, hogy egy adott trajektórián k csökkenésének irányában haladva a fixpont közelében a releváns csatolások esetén a csatolás eltérése a fixponti értéktől növekszik, az irreleváns csatolások esetén csökken.

Emellett az irodalomban [3] szokásos releváns skálázásról beszélni ha a csatolás abszolút értéke k függvényében monoton csökkenő és irreleváns skálázásról beszélni, ha a csatolás abszolút értéke k függvényében monoton növekvő. Az elnevezések ezen használata érthetővé válik, ha figyelembe vesszük, hogy általában visszsafele haladunk a skálán és a célunk a $k \rightarrow 0$ határeset vizsgálata.

Az RG-módszernek a fázisátalakulások vizsgálatában betöltött szerepét [20, 19, 30, 35, 37] csupán általánosságban mutatom be, ezáltal a legegyszerűbb viselkedést feltételezve nem térek ki a bonyolultabb speciális esetek elemzésére.

⁸Az infravörös jelző arra utal, hogy a trajektóriák irányának a k skála irányának csökkenését, azaz t csökkenésének irányát tekintjük. Ellenkező irányt vizsgálva a vonzó és taszító fixpontok szerepe természetesen felcserélődik.

A továbbiakban az egyszerűség céljából érdemes feltételezni, hogy a modell egyetlen paraméterének finomhangolása által a fázisátalakulási pontban lévő rendszert írhatunk le. A (9) és (10) képletekkel definiált Ising-modell példája azt mutatja, hogy a mágnesezettséget tekintve rendparaméternek a fázisátalakulás megjelenéséhez a kritikus hőmérséklet beállítása mellett a $B = 0$ feltétel biztosítása, azaz a külső mágneseztér kikapcsolása is szükséges. Ezért a továbbiakban [1] szóhasználatát követve a külső mágneses tér erősségét nem számítom a modell paramétereire, azaz úgy tekintem, hogy a (11) képlettel megadott modellek paraméterterét a $\mathcal{H}_0$ -ban megjelenő paraméterek feszítik ki.

Abból, hogy a fázisátalakulás létrejöttéhez egy paraméter rögzítése elég-séges az következik, hogy a modell paraméterterében a fázisátalakulási pontban lévő rendszereknek megfelelő tartomány, amelyet kritikus felületnek nevezünk egykódimenziós [1]. A továbbiakban azon egyszerű, mindazáltal gyakori esetet tekintem, amikor az egyszeresen összefüggő kritikus felület a két fázisnak megfelelően két részre vágja a paraméterteret.

A trajektóriák kvalitatív viselkedése legkönnyebben a WH-séma esetén vezethető le, mert ekkor a renormálási transzformáció a generáló funkcionál értékét és így a ξ korrelációs hossz értékét is változatlanul hagyja. A korrelációs hosszak a folytonos fázisátalakulás során mutatott kritikus viselkedését kihasználva a kritikus felületet olyan tartományként is értelmezhetjük, melyen a korrelációs hossz divergál. Felhasználva, hogy a k skálát csökkentve a ξ dimenziós korrelációs hossz változatlan marad, ebből következően a skálát csökkentve a dimenziótlan $\tilde{\xi} = \xi k$ korrelációs hossz csökken, nyilvánvalóvá válik, hogy a kritikus felület pontjaiból indított trajektóriák nem hagyhatják el a felületet, míg a felületen kívüli pontból indulva távolodunk a kritikus felülettől.

Az egyszerűbb modellek esetén a kritikus felületről induló trajektóriák a kritikus felületen lévő fixpontba folynak bele. Ezen fixpont, melyet Wilson–Fischer-fixpontnak is neveznek hiperbolikus fixpont, mivel a kritikus felületen kívüli trajektóriákat taszítja. Általában az egykódimenziós kritikus felület következtében a kritikus fixpont érzékenységi mátrixa megfelelően

parametrizálva csupán egyetlen negatív sajátértékkel, azaz egyetlen releváns iránnyal rendelkezik [35].

A kritikus felületen kívülről induló trajektóriák a legegyszerűbb esetben az adott fázisnak megfelelő vonzó fixpontba torkollnak, ezáltal mutatva a különböző fázisoknak megfelelő rendszerek eltérő alacsonyenergiás viselkedését. A legegyszerűbb esetben ezen vonzó fixpontok a zérus hőmérsékletű rendszernek megfelelő alacsonyhőmérsékleti fixpont (melynek a rendezett, szimmetriasértett fázis felel meg) és a végtelen hőmérsékletű rendszernek megfelelő magashőmérsékleti fixpont (melynek a rendezetlen, szimmetrikus fázis felel meg) [35].

A RG-módszer a transzformáció hiperbolikus fixpontjainak megtalálása által teszi lehetővé a fázisátalakulás és a rendszer lehetséges új fázisainak kimutatását. Tovább haladva a leírásban a módszer számot ad a kritikus viselkedés jellemzőiről. A hatványfüggvényekben megnyilvánuló skálainvariáns viselkedést a divergáló korrelációs hossz következményének tekinthetjük, a skálatörvények fennállása, azaz a két független mennyiség általi jellemzés lehetősége pedig a kritikus felületet az adott fázis oldaláról megközelítő trajektóriák hasonló viselkedése által magyarázható.

Ennek a képnek [1, 4] a keretében a hasonló viselkedés a következőképpen értelmezhető. A kritikus felület megközelítéséhez két független feltétel biztosítása szükséges; zérushoz közeli külső mágnesestér választása és egy további paraméter finomhangolása. A felülethez közeli pontból indulva a trajektória kezdetben a felületen haladó trajektóriákhoz hasonlóan viselkedik, azaz a felülettel szinte párhuzamosan haladva a kritikus fixpont felé tart, majd annak közelében (mivel a kiinduló pont nem volt rajta a kritikus felületen) eltávolodik attól. Így az egymástól távoli kezdeti pontokból induló trajektóriák egymáshoz közel kerülnek, azaz a sok paraméterük tekintetében különböző fizikai rendszerek hasonlóan viselkednek. A különböző modelleket ugyanazon paramétertér különböző pontjainak tekintve a skálatörvények mellett a kritikus exponensek értékében megnyilvánuló univerzalitásra is magyarázatot kapunk.

A fázisátalakulásra vonatkozó kvantitatív információkat tekintve a kontrollparaméter kritikus értékét (pl. a fázisátalakuláshoz tartozó kritikus hőmérsékletet) mint a modell többi paraméterének függvényét folytonos fázisátalakulás esetén a kritikus felület egyenlete határozza meg [35], míg a kritikus exponensek értékét az egyenletek fixpont körüli viselkedésével hozhatjuk kapcsolatba.

A legegyszerűbb esetben a ν és η exponenseket könnyen meghatározhatjuk, majd a többi exponens értékét a skálatörvényeket felhasználva kaphatjuk meg. A ν exponens értékét a kritikus fixponthoz tartozó érzékenységi mátrix s -sel jelölt releváns sajátértékének ismeretében a

$$\nu = -\frac{1}{s} \quad (57)$$

módon határozhatjuk meg [3]. Az η anomális dimenzió értéke LPA-ban zérusnak adódik [1]. η értékének pontosabb meghatározása a hullámfüggvény-renormálás figyelembevételével történhet, amely a kritikus fixpont környezetében $k^{-\eta}$ szerinti skálafüggést mutat [5].

2.7. A kvantumtérelméleti modellek osztályozása a renormálás szempontjából

A funkcionális renormálás szemlélete nemcsak jelentős eredményeket ért el a kvantumtérelméleti modellek vizsgálatában, hanem új megvilágításba is helyezte azokat.

A kvantumtérelméleti modellek esetén nehézséget okoz, hogy általában a véges értékű paramétereket tartalmazó klasszikus hatásból kiindulva végzett számítások során a felírt integrálok divergálnak. A történetileg korábbi perturbatív megközelítés esetén a térelméleti modellekben megjelenő kölcsönhatásokat a perturbatív sorfejtés tagjaiban megjelenő divergenciák viselkedése szerint ún. szuperrenormálható, renormálható és nemrenormálható osztályokba sorolhatjuk [17].

Az ezen osztályozás szerint szuperrenormálhatónak és renormálhatónak nevezett elméletek esetén a fizikai mennyiségekre kapott divergáló eredmé-

nyek véges sok mennyiség által kifejezhetőek, ezáltal lehetőség nyílik arra, hogy a számítások eredményeit mérhető mennyiségek értékeivel kifejezve a kísérletek eredményeire jóslatokat tegyünk. Ezzel szemben a nemrenormálható csoportba sorolt elméletek esetén ez az út nem járható, mert ekkor a perturbáció számítás magasabb rendjeiben megjelenő divergenciák kezelése a korábban figyelembe vett mennyiségek mellett további mennyiségek ismeretét követelné meg. Ennek következtében kialakult egy olyan szemlélet, amely szerint vizsgálatainkat a renormálható elméletekre kell korlátozni. Azonban a funkcionális renormálás nézőpontjából tekintve a problémát ez nem szükségszerű [20].

Matematikai szempontból a divergáló eredmények gyakran elkerülhetőek akkor, ha a pályaintegrálban a nagy energiájú Fourier-módusok járulékát nem vesszük figyelembe. Mivel nincs okunk feltételezni, hogy az egyes modellek a fizikai valóság teljes körű leírását adják, ezért arra gondolhatunk, hogy a számítások során kapott divergáló integrálok a modell érvényességi tartományának túllépésére figyelmeztetnek. Így a modell nagy-energiájú folyamatok leírására vonatkozó korlátait a Λ -val jelölt UV-levágás bevezetésével figyelembe véve az elmélet véges eredményeket szolgáltat. Ekkor az elmélet jóslatai formálisan függeni fognak Λ értékétől. Ezért további problémát jelent annak tisztázása, hogy egy alacsonyenergiás folyamatban mérhető mennyiség értéke hogyan függhet a nála általában sok nagyságrenddel nagyobb Λ értékétől.

Ez a kérdés az RG-módszer által a hatás különböző kölcsönhatásokat leíró tagjait szorzó csatolások skálafüggését tanulmányozva megválaszolható. A $V(\phi) = \phi^n$ potenciállal definiált d dimenzióban tekintett skaláris elmélet példáján [20, 19] látható, hogy általában a nemrenormálható kölcsönhatáshoz (pl. négy dimenzióban a ϕ^6 típusú kölcsönhatáshoz) tartozó csatolás irreleváns módon skálázik, azaz értéke a k skála csökkentésével csökken míg a renormálható kölcsönhatás csatolása marginálisan, a szuperrenormálható kölcsönhatás csatolása releváns módon skálázik. Ennek következtében a nemrenormálható kölcsönhatások figyelembevétele csupán rendkívül gyengén befolyásolja az elmélet alacsonyenergiás mérésekre vonatkozó jóslatait,

így a Λ levágás a mérhető mennyiségek értékénél nagyságrendekkel nagyobb-nak választható. Ezáltal a nemrenormálhatónak nevezett elméletek vizsgálata is lehetővé válik.

Az elektromágneses, gyenge és erős kölcsönhatásokra vonatkozó ismereteinket összefoglaló Standard modell perturbatíván renormálható a csatlások szerinti sorfejtések kezdeti tagjainak tekintetében, amennyiben a sorfejtések alappontját a jelenlegi nagyenergiás kísérleteknek megfelelően választjuk. Ennek ellenére korai lenne a nemrenormálható elméletek jelentőségéről ítéletet mondani, hiszen nem ismerjük teljesen a természet alapvető kölcsönhatásait. Nagyon keveset tudunk a Standard modell kiterjesztéseiről és a tömegvonzás a kvantumelmélettel konzisztens leírásáról, továbbá ezen kölcsönhatásnak a Planck-tömegnek megfelelő energiatartományon mutatott viselkedéséről.

Emellett az is előfordulhat, hogy egy perturbatíván renormálható kölcsönhatás alacsonyabb energián nemrenormálható effektív elméletként írható le. Ilyen nemrenormálható effektív elméletre talán a legismertebb példát a gyenge kölcsönhatás alacsonyenergiás viselkedésének tárgyalására alkalmazható Fermi-féle modell [38] szolgáltatja.

A fejezetet lezárásaként értékelve a bemutatott módszert megállapíthatjuk, hogy az RG mellett, hogy új eszközzel gazdagította az elméleti fizika fegyvertárát és átütő eredményeket hozott a fázisátalakulások során fel-lépő kritikus jelenségek megértésében hozzájárult az alapvető kölcsönhatá-sokról kialakult szemléletünk fejlődéséhez.

3. A renormálási séma optimalizálása a kvantált anharmonikus oszcillátor esetén

3.1. Bevezetés

Az effektívhatás-szemlélet során a regulátor megválasztására több lehetőség adódik, így felmerül a renormálási séma optimalizálásának kérdése. Ennek az összetett kérdésnek többféle megközelítése ismert. Az egydimenziós kvantált anharmonikus oszcillátor viszonylag egyszerű modellje esetén nagy pontosságú irodalmi adatok állnak rendelkezésre, így ideális lehetőség adódik a sémaoptimalizálás bonyolult kérdésének tanulmányozására.

Azért, hogy minél kevesebb paraméterrel rendelkező modellt tekinthessünk tárgyalásunkat olyan egydimenziós modellre korlátozzuk, amelyben a potenciál operátora a koordináta operátor negyedfokú polinomja. Ezen egyszerűsítés mellett további érvet szolgáltat, hogy ezen típusú kölcsönhatás (amelyet gyakran ϕ^4 típusú kölcsönhatásnak neveznek) kiemelt szerepet tölt be a fizikában. Ugyanis négydimenziós téridőben a ϕ^4 típusú kölcsönhatás perturbatív módon renormálható, míg a magasabb rendű polinomokkal megadott kölcsönhatások perturbatív úton nem renormálhatóak [17]. Továbbá a Standard modell szerint a Higgs-mező ϕ^4 típusú önkölcsönhatással rendelkezik, míg magasabb rendű ϕ^6 , ϕ^8 ... stb. típusú alapvető kölcsönhatások jelenlegi ismereteink szerint nem valósulnak meg a természetben.

Látszólagos egyszerűsége ellenére a kvantált anharmonikus oszcillátornak az RG-módszerrel történő teljes körű tárgyalása nem tekinthető triviális feladatnak [39, 40], ha az eredeti modell nem konvex potenciállal rendelkezik, akkor a konvexszé váló effektív potenciál kiszámítása technikai nehézségeket okozhat. Ugyanakkor a modell kétség nélkül megfelelő lehetőséget nyújt a különböző renormálási sémák összehasonlítására, mivel megfelelő kezdeti potenciál esetén az első gerjesztett állapot energiájának meghatározásában az RG megközelítése már sikeresnek bizonyult [41].

Az eredmények ismertetése során elsőként a vizsgált modell és az RG-módszer alkalmazásának jellemzőit tekintem át, majd ezt követően fejtem ki az optimalizálás kérdését.

3.2. A kvantált anharmonikus oszcillátor renormálása

Az általunk vizsgált egydimenziós modell klasszikus fizikai megfelelője az

$$S_M = \int dt \left\{ \frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right\}, \quad (53)$$

hatással és a

$$V_\Lambda = \frac{m_\Lambda^2}{2} q^2 + g_\Lambda q^4, \quad (54)$$

potenciállal⁹ jellemezhető, ahol az M index a Minkowski-téridőre utal és q a modell egyetlen szabadsági fokát jellemző mennyiség. A kvantumtérelméletben szokásos $\hbar = c = 1$ mértékegységrendszert használva a hatás dimenziótlan és a q mennyiség dimenziója a távolság dimenziójának négyzetgyöke. Ez lehetővé teszi, hogy a kinetikus tag együtthatóját a fenti módon dimenziótlannak válasszuk. A potenciál együtthatóinak Λ indexe arra utal, hogy a kvantált modell RG-módszerrel történő vizsgálata során a klasszikus modell paramétereit kell a csatolások UV-levágásnál megadott értékeinek megfeleltetni. A potenciál kvadratikus tagját tömegtagnak is nevezik, mivel kvantumtérelméletek esetén a megfelelő kvadratikus tag együtthatója határozza meg a részecskék tömegét.

A kvantált modell definiálása során az RG szemléletére tekintettel az euklideszi téridő formalizmusát és a Feynman-féle pályaintegrálos kvantálást alkalmazzuk. Ezáltal a kvantált anharmonikus oszcillátornak az

$$S_E = \int d\tau \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\tau q)^2 + V(q) \right\} \quad (55)$$

hatással és

$$Z_E[J] = \int \mathcal{D}q e^{-S_E + \int J q d\tau} \quad (56)$$

⁹A térelméleti tárgyalásmód nyelvezetére tekintettel a klasszikus mechanika szóhasználatától eltérően a V függvényre potenciálként hivatkozom.

generáló funkcionállal definiált, egydimenziós téridőben¹⁰ tekintett kvantumtérelméleti modell feleltethető meg.

Mivel a potenciál $V(q)$ függvényét párosnak választottuk mind a klasszikus, mind a kvantált modell a belső téren érvényesülő tükrözési szimmetriával rendelkezik, melyre gyakran Z_2 -szimmetriaként hivatkoznak. Ezen egyszerű szimmetria azért különösen érdekes, mert ennek spontán sérülését tekintve a kvantált modell és klasszikus megfelelője eltérő viselkedést mutat.

Ha a potenciál két minimummal rendelkezik (konkáv), akkor a klasszikus oszcillátor legalacsonyabb energiájú állapota spontán megsérti a Z_2 -szimmetriát, ami nem fordulhat elő az egyetlen minimummal rendelkező potenciál esetén. Ezáltal a potenciál kvadratikusan tagjának előjelétől függően a klasszikus modell szimmetrikus és szimmetriasértett fázisait különböztethetjük meg. Ezzel szemben a kvantált modell esetén az alagúteffektus következtében nem jöhet létre szimmetriasértett alapállapot, a modell mindig a szimmetrikus fázisban van az m_Λ^2 együttható előjelétől függetlenül. Ez a tény az RG-módszer esetén abban nyilvánul meg, hogy a $k \rightarrow 0$ határesetben értelmezett potenciál, melyet effektív potenciálnak neveznek mindig konvex. Mindazáltal, amint látni fogjuk, a konvex effektív potenciál elérése az RG-módszer közelítésekkel történő alkalmazása esetén nem mindig garantálható.

A modellt LPA-ban vizsgáltam, elhanyagolva a térmennyiségtől függő hullámfüggvény-renormálást [41], amelynek funkcionális alakja nagyon nehezen kezelhető Taylor-sorfejtéssel. A kvantált oszcillátor esetén LPA-ban a Wetterich-egyenlet az előző fejezetben ismertetett módon a

$$\dot{V}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dp \frac{\dot{R}_k}{p^2 + R_k + V_k''}, \quad (57)$$

parciális differenciálegyenletre vezet.

¹⁰Az alkalmazott euklideszi téridő egyetlen dimenzióját az idődimenzió általánosításának tekinthetjük, hiszen egy Minkowski-téridőben tekintett kvantummechanikai modell kvantumtérelméletként olyan Minkowski-téridőben tárgyalható, amely csupán idő jellegű dimenzióval rendelkezik.

Az egyenlet peremfeltételét a skálafüggő potenciálnak a Λ UV-levágás esetén érvényes formája határozza meg. A szakirodalmat [41] követve Λ értékét 1500-nak választottuk.

A továbbiakban az RG-módszerrel történő tárgyalás során a potenciál argumentumára a térelméletben szokásos ϕ jelölést alkalmazom. Az (57) parciális differenciálegyenlet közelítő megoldását keresve a potenciál alakjára a

$$V_k(\phi) = \frac{m_k^2}{2}\phi^2 + g_k\phi^4 + \sum_{n=3}^N \frac{g_{2n}(k)}{(2n)!}\phi^{2n}, \quad (58)$$

feltételezést róttam ki, melyben az energiaskálától függő m_k , g_k , $g_{2n}(k)$ csatolások nem függenek a ϕ változótól.

A csatolások számának, azaz N értékének optimális megválasztását több tényező határozza meg. Bár N értékét növelve a (58) formula a Taylor-sor több tagját veszi figyelembe, a bonyolultabbá váló egyenlet a számítások numerikus hibáit is növeli. Ezért az optimális választás a csatolásokra vonatkozó egyenletek megoldása során alkalmazott numerikus eljárástól függ.

Bár a potenciálnak a kezdeti feltételeket meghatározó, UV-levágásnál érvényes alakjában csupán az első két tag csatolása különbözik nullától, az energiaskála alacsonyabb értékei esetén természetesen a magasabb rendű tagok csatolásai is jelentőssé válhatnak. A potenciál (58) kifejezését az (57) egyenletbe helyettesítve egy közönséges differenciálegyenlet-rendszer vezethető le az m_k^2 , g_k , $\dots$, $g_{2N}(k)$ csatolásokra. Az egyenleteknek a csatolások számának növelésével terjedelmessé váló levezetése szimbolikus számítások elvégzésére alkalmas program (pl. a Mathematica [42]) segítségével történhet. Az első két csatolásra vonatkozó egyenlet:

$$\begin{aligned} \dot{m}_k^2 &= -\frac{12}{\pi} \int_0^\infty dp \dot{R}_k \frac{g_k}{(p^2 + R_k + m_k^2)^2}, \\ \dot{g}_k &= \frac{1}{48\pi} \int_0^\infty dp \dot{R}_k \left[\frac{3456g_k^2}{(p^2 + R_k + m_k^2)^3} - \frac{g_6}{(p^2 + R_k + m_k^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

A magasabb rendű csatolásokra kapott egyenletek hasonló szerkezetet mutatnak.

A differenciálegyenlet-rendszer megoldása során természetesen numerikus módszerek (pl. a Runge–Kutta-módszer [43]) által szolgáltatott eredményekre kell szorítkoznunk és általában a p szerinti integrálást szintén csak numerikusan tudjuk elvégezni. A numerikus számítások elvégzése például a [43] programjai által történhet. Az improprius integrál numerikus kezelését az eredeti integrálási tartományt véges intervallumra leképező integrálranszformáció [43] által valósítottuk meg.

Vizsgálataim megkezdésekor a kvantált anharmonikus oszcillátor tanulmányozásában szerzőtársaim már jelentős tapasztalatokkal rendelkeztek [40]. A numerikus számításokat tekintve a legfontosabb feladatom az általuk használt program továbbfejlesztése volt a kompakt tartójú folytonosan differenciálható regulátor alkalmazása céljából, majd a konkrét számítások elvégzése ezzel a regulátorral.

Számításaim során a sémafüggés vizsgálata céljából az oszcillátor alapállapot energiájának és az első gerjesztett állapot energiájának különbségét határoztam meg, amelyre a továbbiakban első gerjesztési energiaként hivatkozom. Az első gerjesztési energia pontos értéke a Schrödinger-egyenlet numerikus megoldása által meghatározható, így a szakirodalomban [41] megadott értékeket vezérfonalként használhatjuk az RG-módszerrel kapott eredményeink ellenőrzésére. Ezekre az értékekre a továbbiakban egzakt értékeként hivatkozom.

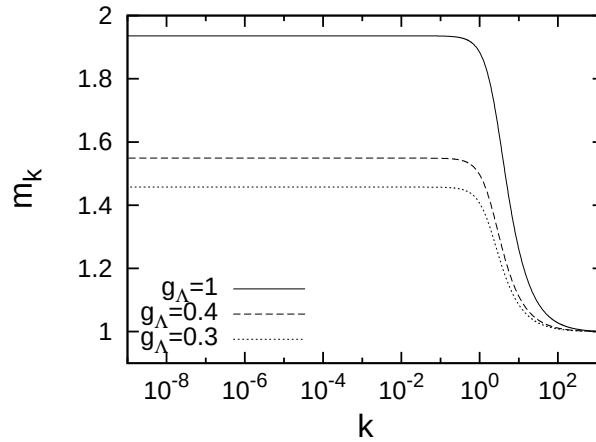
Az első gerjesztési energiát esetünkben a

$$\Delta E = \lim_{k \rightarrow 0} \sqrt{V_k''} \Big|_{\phi = \langle \phi \rangle}, \quad (60)$$

formula segítségével határozhatjuk meg [44], ahol $\langle \phi \rangle$ a térmennyiség vákuum várható értékét jelöli. A vizsgált kvantummechanikai modell esetén $\langle \phi \rangle = 0$, azaz a triviális térkonfiguráció, ezért

$$\Delta E = \lim_{k \rightarrow 0} m_k = m_0. \quad (61)$$

Ily módon az első gerjesztési energia az m_k csatolás IR határértékével azonosítható. Ez az összefüggés szemléletes analógiát mutat a kvantumtérel-



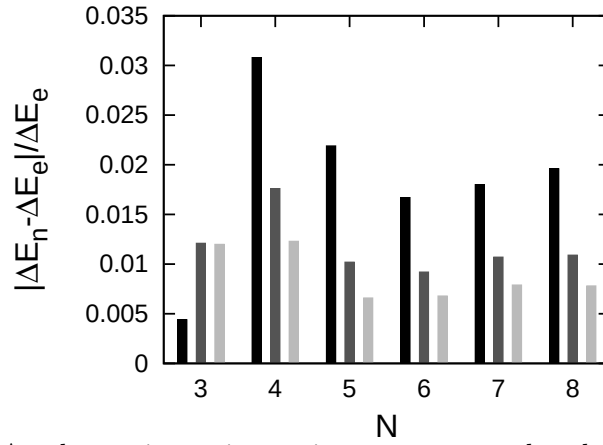
1. ábra : Az m_k csatolás fejlődése Callan–Symanzik-séma esetén, $m_\Lambda^2 = 1$ kezdeti értékről indulva. A különböző görbék a megadott kezdeti g_Λ értékekre vonatkoznak. A magasabb rendű csatolások kezdeti értéke nulla.

mélettel, ahol az első gerjesztési energia a szabad részecske tömegével azonosítható ha nem léteznek kötött állapotok.

Az 1. ábra az m_k csatolás fejlődését szemlélteti $R_k(p) = k^2$ renormálási séma esetén a g_k csatolás különböző kezdeti értékeire. Erre a sémára Callan–Symanzik-sémaként ill. tömeglevágásként (az angolul „mass cutoff”-ként) hivatkoznak a szakirodalomban. Megfigyelhető, hogy az IR határesetben az energia dimenziójú m_k csatolás logaritmikus skálát tekintve marginálisan skálázik, azaz konstans értékhez tart.

Callan–Symanzik-séma esetén megvizsgáltam, hogyan függenek a gerjesztési energiára kapott eredmények a potenciál alakjára vonatkozó feltevésben figyelembe vett csatolások N -nel jelölt számától. A technikailag bonyolultabbnak számító $m_\Lambda^2 < 0$ esetre vonatkozó tapasztalataimat a 2. ábra szemlélteti.

A 2. ábra azt sugallja, hogy LPA-ban az alkalmazott numerikus módszer esetén Callan–Symanzik-sémában $N = 6$ csatolást figyelembe véve közelíthetjük meg legjobban az egzakt értékeket a vizsgált kezdeti feltételek esetén,



2. ábra : Az első gerjesztési energia számított értékének (ΔE_n) eltérése az egzakt értékektől (ΔE_e) N függvényében különböző g_Λ kezdeti értékek esetén. A fekete oszlop $g_\Lambda = 0.4$ kezdeti értékre, a sötétszürke oszlop $g_\Lambda = 0.3$ értékre, a világosszürke oszlop $g_\Lambda = 0.2$ értékre vonatkozik. A magasabb rendű csatolások kezdeti értéke nulla. Az ábrázolt adatok Callan–Symanzik-sémára és $m_\Lambda^2 = -1$ kezdeti értékre vonatkoznak.

m_Λ^2	g_Λ	ΔE_{exact}	ΔE_{PT}	ΔE_{Litim}	ΔE_{CS}	ΔE_{exp}
1	1	1.9341	1.9380	1.9386	1.9358	1.9382
1	0.4	1.5482	1.5498	1.5507	1.5490	1.5504
1	0.1	1.2104	1.2109	1.2110	1.2105	1.2109
1	0.05	1.1208	1.1210	1.1211	1.1208	1.1210
1	0.03	1.0779	1.0780	1.0780	1.0779	1.0778
1	0.02	1.0540	1.0542	1.0542	1.0541	1.0542
-1	0.4	0.9667	0.9730	0.9778	0.9733	0.9772
-1	0.3	0.8166	0.8233	0.8288	0.8241	0.8281
-1	0.2	0.6159	0.6227	0.6309	0.6262	0.6302

3. táblázat : Az első gerjesztési energia értéke különböző kezdeti feltételek esetén. A különböző oszlopok rendre a jól ismert egzakt értékeket, a Schwinger-féle proper time formalizmussal számított értékeket [41], és az általunk Litim-, Callan–Symanzik- ill. exponenciális sémákban számított értékeket mutatják.

ezért a további számítások során hat csatolást vettem figyelembe. Amint a 3. táblázatból is látható a pozitív m_Λ^2 esetén kapott eredmények jóval pontosabbak, ezért a csatolások számának megválasztása során a kritikussabbnak számító negatív m_Λ^2 értékek esetét vettem figyelembe. $N = 6$ csatolást figyelembe véve a szakirodalomban gyakran alkalmazott Litim-regulátor [45]

$$R_{\text{Litim}}(p) = (k^2 - p^2)\theta(k^2 - p^2), \quad (62)$$

és exponenciális regulátor [5]

$$R_{\text{exp}}(p) = \frac{p^2}{e^{\frac{p^2}{k^2}} - 1}, \quad (63)$$

esetére végzett számításaimat a 3. táblázat foglalja össze.

Amint a bevezetésben említettük a modell RG-módszerrel történő vizsgálata során az $m_\Lambda^2 < 0$ eset technikai nehézségeket okozhat. Ekkor a kezdetben nem konvex potenciálnak a renormálás során az IR határesetben

konvexszé kellene válnia. Mindazáltal, ha az anharmonikus tag csatolásának kezdeti g_Λ értéke kicsi, akkor előfordulhat, hogy az adott közelítésben k csökkentése során a nem konvex potenciál miatt az (59) egyenletekben a nevező nullához tart. Ekkor adott k értéknél az egyenletek már nincsenek értelmezve és nem érhető el a $k \rightarrow 0$ határeset. Az egyenletek értelmezési tartományának IR korlátja spontán-szimmetriasértett fázis létezése esetén fizikailag indokolható lehetne [3], azonban a vizsgált modell nem rendelkezik szimmetriasértett fázissal, ezért a tapasztalt IR viselkedés magyarázatát a számítások során alkalmazott közelítésekben kereshetjük.

3.3. A renormálási séma optimalizálása

A Wetterich-egyenlet levezetése során a regulátortól megkövetelt általános feltételek többféle regulátor függvények alkalmazását megengedik. A közelítések alkalmazása miatt a funkcionális egyenlet differenciálegyenletekkel történő helyettesítésével nyert eredmények függenek a regulátor megválasztásától, ezért az alkalmazások szempontjából fontossá válik a renormálási séma optimalizálásának kérdése.

A legelőnyösebb renormálási séma megválasztására többféle optimalizálási stratégia létezik aszerint, hogy milyen tulajdonságot követelünk meg az optimálisnak tekintett regulátortól. Ha az adott modellt jellemző egyes fizikai mennyiségek értékei más módszerrel pontosan meghatározhatóak, akkor a legkézenfekvőbb eljárás az RG-módszer eredményeinek az ismert értékekkel történő összehasonlítása. Ekkor tekinthetjük optimálisnak azt a regulátort amely az ismert értékekhez legközelebbi eredményeket szolgáltatja. Ez az eljárás azonban nem tekinthető prediktívnek egy ismeretlen modell esetén.

Egy másik közismert optimalizálási stratégia [45, 46] annak a regulátornak a meghatározását takarja, amely a megfelelő közelítések fokozatos javítása során bizonyos értelemben az eredmények leggyorsabb konvergenciáját biztosítja. Az LPA esetén így optimalizált regulátorra Litim-regulátorként hivatkoznak, amely gyakran más szempontok szerint is optimálisnak bizonyul.

Egy harmadik, gyakran alkalmazott [47-52] eljárást jelent az ún. legkisebb érzékenység elvén alapuló optimalizálási stratégia, amely azt a regulátort tekinti optimálisnak, amely esetén a kapott eredmény a legkevésbé függ a regulátor paramétereitől.

Egy további lehetőséget jelent a fázisszerkezet meghatározás szerint történő optimalizálás. Egyes modellek esetén ugyanis előfordul, hogy az adott közelítésben az RG-módszer tévesen határozza meg a modell fázisait. Ekkor tekinthető optimálisnak az a regulátor, amely bizonyos értelemben a legjobban reprodukálja a modell fázisszerkezetét [53].

A kvantált oszcillátor modellje esetén lehetőség kínálkozik az ismert irodalmi értékek [41] szerint végrehajtott optimalizálásra. Az egzakt eredmények azonban nem jelentenek akkora segítséget, mint azt első ránézésre várnánk, mivel az alkalmazott közelítések következtében nem várható el az irodalmi értékek pontos reprodukálása. Az LPA, a potenciál sorfejtésének a csonkolása és a numerikus számítások hibái egyaránt hozzájárulhatnak az egzakt értékektől való eltéréshez, ezért a sémafüggés vizsgálata szempontjából ez az optimalizálási stratégia nem tekinthető meghatározónak.

Értekezésemben a leggyorsabb konvergencián alapuló optimalizálás nehézségeit elkerülve a legkisebb érzékenység elve és a fázisszerkezet alapján történő optimalizálásra szorítkozom.

A legkisebb érzékenység elve alapján történő optimalizálás tulajdonképpen a fizikai mennyiségekre vonatkozó számítási eredményeknek a regulátor paraméterei tekintetében stacionárius pontjainak megkeresését jelenti. Ez a stratégia azt a kézenfekvő elgondolást tükrözi, hogy minél inkább függ a számított eredmény a regulátor önkényesen megválasztott paramétereitől, annál kevésbé tekinthető megbízhatónak a számításnak a mérhető mennyiségekre vonatkozó jóslata. A módszer hátránya a többi optimalizálási stratégiával szemben, hogy segítségével csak azonos funkcionális formával rendelkező regulátorok hasonlíthatók össze.

Erre a problémára megoldást jelenthet az ún. kompakt tartójú folytonosan differenciálható (angolul compactly supported smooth) regulátor bevezetése [54], amelyre a továbbiakban CSS-regulátorként hivatkozok. A CSS-

regulátor matematikai alakja a magfizikában alkalmazott Salamon–Vertse-potenciálból [55-57] származtatható.

A szakirodalomban gyakran alkalmazott

$$R_{\text{Litim}} = (k^2 - p^2)\theta(k^2 - p^2) \quad (64)$$

Litim-regulátor,

$$R_{\text{exp}} = \frac{p^2}{e^{\frac{p^2}{k^2}} - 1} \quad (65)$$

exponenciális regulátor és

$$R_{\text{polinom}} = p^2 \left(\frac{k^2}{p^2} \right)^b \quad (66)$$

hatványfüggvény-regulátor az

$$R_{\text{CSS}} = \frac{s_1 p^2}{\exp \left[\frac{s_1 p^{2b}}{k^{2b} - s_2 p^{2b}} \right] - 1} \theta(k^{2b} - s_2 p^{2b}) \quad (67)$$

CSS-regulátor speciális eseteinek tekinthető. A képletekben θ a Heaviside-féle egységugrásfüggvényt jelöli.

A hatványfüggvény-regulátor az $R = k^2$ Callan–Symanzik-séma általánosításának tekinthető, amelyből a Callan–Symanzik-séma a $b = 1$ választással származtatható. A b paraméter értékére a $b \geq 1$ megszorítás érvényes, amely érvényben marad a CSS-regulátor esetén is. A CSS-regulátor másik két paramétere az $s_1 > 0$ és $s_2 > 0$ megszorításoknak tesz eleget. A CSS-regulátor ismertett alakja az [58] szerinti parametrizálásnak felel meg. Az irodalomban gyakran a regulátorok $r(y) = \frac{R(y)}{p^2}$ dimenziótlan formáját adják meg, ahol $y = \frac{p^2}{k^2}$ dimenziótlan változó. A CSS-regulátor dimenziótlan formája

$$r_{\text{CSS}} = \frac{s_1}{\exp[s_1 y^b / (1 - s_2 y^b)] - 1} \theta(1 - s_2 y^b). \quad (68)$$

A CSS-regulátor megfelelő határesetei visszaadják [58] a korábban említett gyakran alkalmazott regulátor függvényeket:

$$\lim_{s_1 \rightarrow 0} r_{\text{CSS}} = \left(\frac{1}{y^b} - s_2 \right) \theta(1 - s_2 y^b), \quad (69)$$

$$\lim_{s_1 \rightarrow 0, s_2 \rightarrow 0} r_{\text{CSS}} = \frac{1}{y^b}, \quad (70)$$

$$\lim_{s_2 \rightarrow 0} r_{\text{CSS}} = \frac{s_1}{\exp[s_1 y^b] - 1}. \quad (71)$$

Az első határeset a Litim-regulátornak felel meg $s_2 = 1$ esetén, a második határeset a hatványfüggvény-regulátort szolgáltatja, a harmadik határeset az exponenciális regulátornak felel meg $s_1 = 1$ esetén. A Litim- és az exponenciális regulátor eredetileg említett formulái a $b = 1$ esetnek felelnek meg, de ezek a regulátorok a fenti képletek szerint általánosíthatóak tetszőleges b esetre. Ezáltal a CSS-regulátor így lehetőséget nyújt a Litim-, az exponenciális és a hatványfüggvény-regulátornak a legkisebb érzékenység elvével történő összehasonlítására.

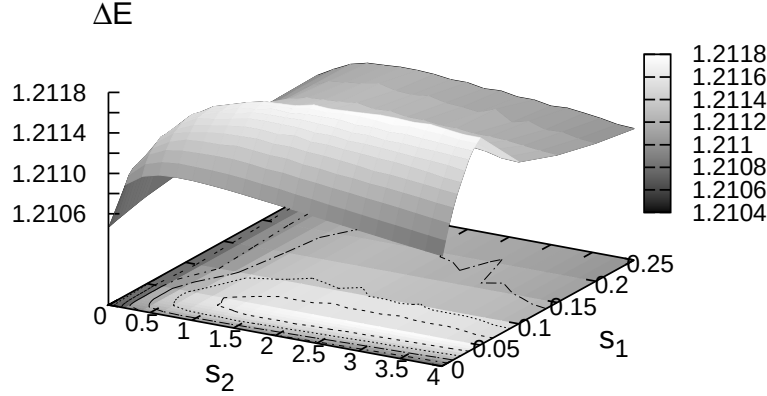
A továbbiakban vizsgálatainkat a $b = 1$ esetre korlátozzuk, amely kielégíti a

$$\lim_{y \rightarrow 0} yr = 1 \text{ és } \lim_{y \rightarrow \infty} yr = 0 \quad (72)$$

normálási feltételeket [59].

A CSS-regulátor esetén az impulzus szerinti integrálás nem végezhető el analitikusan és a regulátor bonyolult formájának köszönhetően más regulátorokhoz képest technikailag jóval nehezebben kezelhető. Ennek ellenére a szakirodalomban a CSS-regulátor optimalizálását már több modell esetén vizsgálták, például a kvantum-Einstein-gravitáció [58], a háromdimenziós $O(1)$ -modell [58] és a sine-Gordon típusú modell [61] tekintetében.

A numerikus számítások során a (67) kifejezés közvetlen alkalmazása problémákat okozhat. $p = 0$ esetén a kifejezés értelmezése határérték-számítást igényel, a nevezőben lévő különbség kis értékei esetén a lebegőpontos számábrázolás jelentős hibát eredményezhet, továbbá a nevezőben lévő exponenciális függvény túlsordulást okozhat. Ezért a program elkészítése



3. ábra: A ΔE gerjesztési energia a regulátor s_1 és s_2 paramétereinek függvényében. A b paraméter értéke 1. A csatolások kezdeti értéke $m_\Lambda^2 = 1$ és $g_\Lambda = 0.1$. A magasabb rendű csatolások kezdeti értéke nulla.

során külön gondoskodtam ezeknek a problémás eseteknek a kezeléséről. A programozás során természetesen a Heaviside-függvény implementálását is meg kellett oldanom.

A legkisebb érzékenység elve szerinti optimalizálás céljából a kvantált anharmonikus oszcillátor esetén az első gerjesztési energiát a regulátor s_1 és s_2 paramétereinek függvényében vizsgáltam. A 3. ábra az $m_\Lambda^2 = 1$ és $g_\Lambda = 0.1$ kezdeti értékek esetén kapott eredményeket szemlélteti.

A 3. ábra szerint az első gerjesztési energia nagyon kevésbé függ a regulátor megválasztásától, a vizsgált különböző sémák esetén az eltérés általában csupán a 4. tizedesjegyben jelentkezik. Ez különösen azért érdekes, mert más modellek esetén, például a kvantum-Einstein-gravitáció [58] esetén nagyon erős sémafüggés tapasztalható.

A kvantummechanikai modell esetén tapasztalt gyenge regulátorfüggés valószínűleg azzal kapcsolatos, hogy a kvantummechanikai modell egydimenziós téridőben tekintett térelméleti modellnek tekinthető, így nem jelennek meg benne UV-divergenciák, míg a magasdimenziós modellek esetén az UV-divergenciák különbözőképpen történő eltávolítása erősítheti az eredmények sémafüggését.

Amint az a 3. ábráról látható a kapott felület az $s_1 = 0$ érték közelében szignifikáns maximummal rendelkezik, amely más kezdeti értékek esetén is megjelenik. Ez meglepő eredmény, mert a szélsőérték nem a Litim-regulátornak megfelelő $s_1 \rightarrow 0$, $s_2 = 1$ pontban jelenik meg, ezért a legkisebb érzékenység elve alapján a Litim-félétől eltérő renormalizációs sémát kell optimálisnak tekinteni. Bár az ábrázolt felület olyan tartománnyal is rendelkezik, amelyben az energiakülönbség értéke nem változik jelentősen, ebben a tartományban nem figyelhetünk meg szignifikáns szélsőértéket. Ezért a továbbiakban a Litim-regulátornak megfelelő pont közelében, de attól eltérően helyen megjelenő maximumot vizsgáltam.

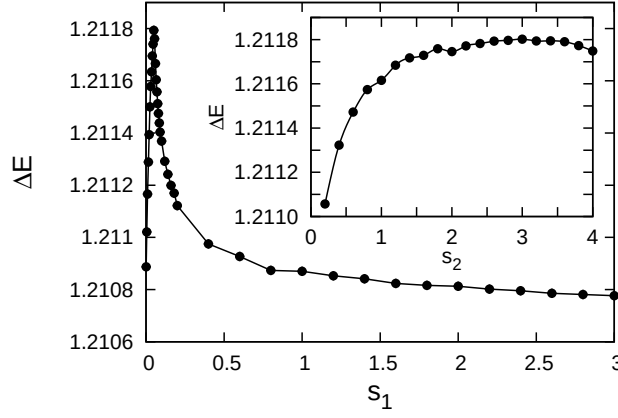
Az ábrázolt esetben éppen a maximum esetén a legnagyobb az eltérés az egzakt értéktől (1.2104), így a legkisebb érzékenység elvének figyelembevétele az egzakt értékek szerint történő optimalizálástól eltérő eredményt szolgáltat. Ez azonban nem meglepő, hiszen a funkcionális RG-egyenlet differenciálegyenletekkel történő helyettesítése és az egyenletek numerikus megoldása által közelítéseket alkalmaztunk. A továbbiakban a legkisebb érzékenység elvét alkalmazzuk, amely akkor is helyesen határozza meg az optimális regulátort, ha a kapott eredmények a közelítések hibái miatt körülbelül azonos értékkel eltolódnak.

A 3. ábra kezdeti feltételei esetén a gerjesztési energia maximális értékét közelítőleg az $s_1 = 0.05$ és $s_2 = 3$ paraméterek esetén kapjuk, amelyek az

$$r_{\max} = \frac{0.05}{\exp[0.05y/(1-3y)] - 1} \theta(1-3y) \quad (73)$$

regulátornak felelnek meg. A 4. ábrán részletesebben látható a gerjesztési energia értékének változása a Litim-regulátor környezetében¹¹.

¹¹Az eredményeinket tárgyaló publikációban elírás következtében az adott ábrához tar-



4. **ábra** : ΔE felületének a maximumon áthaladó, $s_2 = 3$ ill. $s_1 = 0.05$ rögzítésével kapott metszetei. A csatolások kezdeti értékei $m_\Lambda^2 = 1$ és $g_\Lambda = 0.1$. A magasabb rendű csatolások kezdeti értéke nulla.

Mindazáltal a (73) képlettel adott regulátor az s_1 paramétert tekintve nagyon kevésbé tér el a Litim-regulátortól, így ez a regulátor közelíthető a CSS-regulátornak az $s_1 = 0$ pontban tekintett s_1 szerinti Taylor-sorfejtésével, azaz

$$r_{\max} \approx \left(\frac{1 - s_2 y^b}{y^b} - \frac{s_1}{2} + \frac{y^b s_1^2}{12(1 - s_2 y^b)} + \dots \right) \theta(1 - s_2 y^b). \quad (74)$$

Az s_1 tekintetében lineárisnál magasabb rendű tagokat elhanyagolva az

$$r_{\text{lin}} = \left(\frac{1 - s_2 y^b}{y^b} - \frac{s_1}{2} \right) \theta(1 - s_2 y^b), \quad (75)$$

regulátort kapjuk, amely a Litim-regulátor perturbatív általánosításának tekinthető. Ekkor a $b = 1$ esetet tekintve az (57) egyenlet a

$$\dot{V}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{k}{\sqrt{s_2}}} dp \frac{2k^2}{k^2 + p^2(1 - s_2 - \frac{s_1}{2}) + V_k''}, \quad (76)$$

tozó g_Λ értéke tévesen van megadva.

alakot ölti. Ekkor a p impulzus szerinti integrálás analitikusan elvégezhető és a potenciálra a

$$\dot{V}_k = \frac{k^2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(1 - s_2 - \frac{s_1}{2})(k^2 + V_k'')}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{(1 - s_2 - \frac{s_1}{2})k^2}{s_2(k^2 + V_k'')}} \right) \quad (77)$$

egyenletet nyerjük.

Az alkalmazott közelítésben az RG-módszer tévesen szimmetriasértett fázis megjelenését jósolja, így lehetőség nyílik a renormálási sémának a fázis-szerkezet alapján történő optimalizálására. A látszólagos szimmetriasérülés akkor jelenik meg számításainkban, amikor az m_Λ^2 kezdeti érték negatív és a g_Λ kezdeti érték egy kritikus értéknél kisebb. Így lehetséges optimálisnak tekinteni azt a regulátort, amelyre a legkisebb g_Λ kritikus értéke. Tapasztalataim szerint $m_\Lambda^2 = -1$ esetén közelítőleg $g_{\text{kritikus}} = 0.08$ a g csatolás legkisebb kezdeti értéke, amely esetén még az effektív potenciál meghatározható az alkalmazott közelítések és numerikus módszerek keretein belül. A szakirodalomban [41] a potenciál sorfejtésének elkerülésével RG-módszerrel $g_\Lambda = 0.02$ érték esetén is kaptak eredményt az első gerjesztési energiára vonatkozóan, mindazáltal ebben a tartományban az alkalmazott módszer csupán minőségi leírást nyújt.

A 4. táblázat a gerjesztési energiának különböző s_1 és s_2 paraméterekkel rendelkező regulátorok által nyert értékeit tartalmazza $g_\Lambda = 0.08$ esetén. A hiányzó adatokhoz tartozó s_1 és s_2 értékek esetén nem lehetséges az effektív potenciál meghatározása. A szélsőségesen magas értékek a számítások során megjelenő numerikus instabilitásokra utalnak.

A táblázat eredményei azt sugallják, hogy a fázisszerkezet szerint történő optimalizálás nem a korábban optimálisnak bizonyuló regulátorhoz, hanem a Litim-regulátorhoz vezet, mert a Litim-regulátorhoz közeli regulátor ($s_1 = 0.001$, $s_2 = 1$) esetén a legkisebb a gerjesztési energia értéke. Ezért úgy tűnik, hogy a különböző optimalizálási módok alapján különböző regulátorok bizonyulnak optimálisnak.

Összefoglalva tapasztalatainkat a kvantált anharmonikus oszcillátor egyszerű problémájának RG-módszerrel történő megközelítése új fényt vetett a

	$s_2 = 0.001$	$s_2 = 1$	$s_2 = 2$	$s_2 = 3$
$s_1 = 0.001$	–	0.23538	0.23679	753913.25671
$s_1 = 0.05$	–	0.23598	0.23785	23102.53408
$s_1 = 1$	0.23766	0.23556	341061.15077	–
$s_1 = 2$	0.23612	0.23604	–	–
$s_1 = 3$	0.23566	0.23644	–	–

4. táblázat : Az első gerjesztési energia értéke a regulátor különböző s_1 és s_2 paramétereinek esetén $m_\Lambda^2 = -1$ és $g_\Lambda = 0.08$ kezdeti értékeket tekintve.

sémafügges vizsgálata, mivel esetünkben LPA-ban a legkisebb érzékenység elve szerint végzett optimalizálás a széles körben optimálisnak tekintett Litim-regulátortól eltérő optimális regulátorra vezetett. A fejezetben ismertett eredmények a [62] és [60] cikkben kerültek publikálásra.

4. A Caldeira–Leggett-modell folytonos spektrumú változatainak vizsgálata

4.1. A Caldeira–Leggett-modell

Amint az értekezés bevezetésében említésre került, az RG-módszer alkalmazási területének bővítésére az egyik lehetőséget a Caldeira–Leggett-modell (továbbiakban CL-modell) különböző változatainak részletesebb vizsgálata kínálja. A modell egyes folytonos spektrumú kvantált változataiban fázisátalakulás jelenik meg, melynek tanulmányozása indokoltá teszi az RG-módszer alkalmazását.

A fázisátalakulás tanulmányozása során annak tisztázását tűztük ki célul, hogy a spektrálfüggvényben szereplő levágás különböző értékei ill. a levágás bevezetésének módja hogyan befolyásolja a fázisátalakulás kritikus exponenseinek értékét. Eredményeim tárgyalása előtt a CL-modell több változatát áttekintve ismertetem a tanulmányozott modellek megalkotására vonatkozó eljárást és ennek motivációját, majd kitérek a kvantált változatokban folytonos spektrálfüggvény esetén megjelenő fázisátalakulásra. Ezt követően ismertetem az alkalmazott közelítésben nyerhető RG-egyenleteket és a szuszceptibilitás ill. a korrelációs hossz kritikus exponenseire vonatkozó új eredményeket.

Ha precízen fogalmazunk meg kell állapítanunk, hogy a Caldeira–Leggett elnevezés nem csupán egyetlen modellre, hanem modellek egy csoportjára használatos, hiszen a folytonos spektrumú környezetet jellemző kvantált modell definiálása nem a szintén e névvel illetett [65] klasszikus modell szokásos kvantálása által történik. Ezeknek a modelleknek a legfontosabb közös jellemzője, hogy vizsgálataink során megkülönböztetünk egy olyan alrendszert, amely a környezetével történő kölcsönhatás miatt nem tekinthető zártnak.

A CL típusú modellek bevezetését [63, 64] elsősorban a modell bizonyos mértékben empirikus kvantált változatai indokolják, amelyek disszipatív jelenségek a kvantummechanika keretei között történő tárgyalására [65] adnak lehetőséget. A disszipáció fellépése esetén a vizsgálat szempontjából releváns alrendszer nem zárt, ezért olyan kvantált modell alkotása, amely csak

az adott alrendszer szabadsági fokait tartalmazza nehézségekbe ütközik [66]. Bár a releváns alrendszer a környezetével együtt zárt rendszert alkot, melynek vonatkozásában a klasszikus modell kvantálása könnyen elvégezhető, a környezetszabadsági fokainak eliminálása technikailag csak nagyon kivételes esetekben végezhető el, ezért indokolttá válik az ismertetésre kerülő egyszerűsített modellek megalkotása.

A folytonos spektrálfüggvénnyel rendelkező modellek lehetőséget nyújtanak arra, hogy a vizsgált alrendszer és környezete közötti kölcsönhatást csupán néhány paraméter segítségével, a kölcsönhatás konkrét alakjának megadása nélkül vegyük figyelembe, így általuk fizikai rendszerek széles köre tanulmányozható. A CL típusú modellek felhasználhatóak a Brown-mozgás kvantummechanikai tárgyalására [67], a Josephson-átmenet [68, 69], a szennyyeződést tartalmazó fémekben megvalósuló elektrontranszport [69, 70], az optikai rezonátorban lévő Bose–Einstein-kondenzátum [71] és egyes magfizikai folyamatok [72] vizsgálta során, továbbá egyes hűrelméleti problémákkal is kapcsolatba hozhatóak [73].

A lehetséges alkalmazásokon túlmenően a nyílt rendszerek vizsgálata elméleti szempontból is figyelmet érdemel. A környezet szerepe kulcsfontosságú a dekoherencia kialakulásában [74], amely jelenség fontos szerepet tölt be annak vizsgálatában, hogy a kvantummechanika törvényeinek engedelmeskedő rendszer hogyan kerülhet a mérés során a klasszikus fizika által leírható állapotba.

Általános esetben a kvantált modellek megalkotásának ismertetésre kerülő gondolatmenete egy viszonylag hosszadalmas, több lépésből álló eljárás. Ennek során abból a képből indulunk ki, amelyben a vizsgálat szempontjából releváns alrendszer egy anharmonikus oszcillátor, amely lineárisan csatolódik a környezetét alkotó, egymással kölcsön nem ható harmonikus oszcillátorok sokaságához [75], amelyet hőfürdőnek is neveznek. Ebben az esetben a klasszikus hatás az

$$S_d = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} M \dot{q}^2 - V(q) + \sum_n \frac{1}{2} m_n \dot{q}_n^2 - \sum_n \frac{1}{2} m_n \omega_n^2 q_n^2 + q \sum_n C_n q_n \right] dt \quad (78)$$

alakban írható fel, ahol a q , M és V jelölések rendre az anharmonikus osz-

cillátor koordinátájára, tömegére és potenciáljára vonatkoznak, a q_n , m_n , ω_n és C_n jelölések rendre a környezethez tartozó n . harmonikus oszcillátor koordinátájára, tömegére, rezgésének körfrekvenciájára és csatolására vonatkoznak. A hatás d indexe arra utal, hogy ebben az esetben az anharmonikus oszcillátor környezetének gerjesztéseit diszkrét frekvenciák által jellemezhetjük. Amint a jelölés sugallja q -t nem tekintjük több komponensű vektornak, mivel az egyszerűség kedvéért a [76] munkát követve egy térdimenzióban tekintett modellt vizsgálunk. Az előző fejezet vizsgálataihoz hasonlóan a potenciál $V(q)$ függvényét páros negyedfokú polinomnak tekintjük.

A hőfürdő jellemzése céljából érdemes bevezetnünk a J -vel jelölt¹² spektrálfüggvényt, amelyet a (78) egyenletben szereplő hatás esetén a

$$J_d(\omega) = \sum_n \frac{C_n^2}{4m_n\omega_n} 2\pi\delta(\omega - \omega_n) \quad (79)$$

módon definiálhatunk. A $J_d(\omega)$ bevezetése azért előnyös, mert a hőfürdőt alkotó harmonikus oszcillátorok mozgásegyenletére vonatkozó kezdeti feltételeket megfelelően megválasztva a releváns alrendszerre vonatkozó mozgásegyenlet olyan formába írható [76], amelyben a hőfürdő hatása csupán a spektrálfüggvényen keresztül jelenik meg.

Ekkor a releváns alrendszerre vonatkozó mozgásegyenlet által olyan klasszikus modellt definiálhatunk, amely már nem tartalmazza a nyílt alrendszer környezetének q_n szabadsági fokait, hanem a környezetre vonatkozó minden információt a spektrálfüggvény által vesz figyelembe. Ezt a modellt módosíthatjuk úgy, hogy a mozgásegyenletben a J_d diszkrét spektrumú környezetet jellemző spektrálfüggvényt folytonos függvénnyel helyettesítjük. E lépés során a modellnek több, a spektrálfüggvény megválasztása szerint különböző változatát definiálhatjuk. Már a klasszikus modell megalkotását is jelentősen befolyásolja, hogy milyen a bevezetni kívánt spektrálfüggvény

¹²Az irodalomban szerencsétlen módon mind a környezetet jellemző spektrálfüggvény, mind a térelméleti tárgyalásban megjelenő külső forrás esetén szokásos a J jelölés alkalmazása.

viselkedése. Ha megengedjük, hogy a spektrálfüggvény tetszőlegesen nagy értéket is felvegyen, akkor a mozgásegyenletben divergáló tag jelenhet meg. Nem megfelelő viselkedésű spektrálfüggvények alkalmazására is lehetőséget nyújt azon (a fizikai szemlélet szempontjából kifogásolható, mindazáltal az irodalomban [76] mégis alkalmazott) eljárás, amely során egy mesterséges ellentagot bevezetésével végessé tesszük a releváns alrendszer mozgásegyenletében szereplő eredő erőt. Az ellentag csupán a $V(q)$ potenciál kvadratikusan tagjához ad korrekciót, ezért hatása az elmélet egyetlen paraméterébe beolvasztható és a klasszikus modellek esetén nem járul hozzá a disszipációhoz.

Ezt az eljárást alkalmazzák

$$J_{\Omega}(\omega) = \eta\omega \quad (80)$$

függvény esetén is, amely a spektrálfüggvény megválasztásának egyik legegyszerűbb lehetőségét kínálja. A képletben szereplő η tényező a környezettel történő kölcsönhatás erősségét jellemző pozitív paraméter. Ebben az ohmikus disszipációnak nevezett esetben a releváns alrendszerre vonatkozó mozgásegyenletben olyan tag jelenik meg, amely arányos a sebességgel ($\dot{q}$ -tal) [76], ezáltal a szokásos disszipatív erőkomponensnek feleltethető meg.

Realisztikusabb modelleket kapunk ha elkerülve az ellentag mesterséges bevezetését olyan spektrálfüggvényt választunk, amely levágást tartalmaz vagy gyorsan lecseng ω nagy értékei esetén. Ez megtörténhet a θ egységugrásfüggvény (más néven Heaviside-függvény) segítségével a

$$J_u(\omega) = \eta\omega\theta(\Lambda_u - \omega) \quad (81)$$

módon és a Lorentz-függvény segítségével a

$$J_l(\omega) = \eta\omega \frac{\Lambda_l^2}{\Lambda_l^2 + \omega^2} \quad (82)$$

módon, ahol Λ_u ill. Λ_l a levágás értékét ill. a lecsengés gyorsaságát meghatározó pozitív paraméter. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban az utóbbi esetre is a levágás kifejezést használom. Az (81) ill. (82) egyenletek a szilárdtestfizikában a fononspektrum esetén bevezetett Debye-féle

ill. Drude-féle levágásnak feleltethetők meg. Értekezésemben CL-modell mindkét változatát az ellentag bevezetése nélkül vizsgálom, ezért a későbbi egyenletekben $\Lambda_u \rightarrow 0$ ill. $\Lambda_l \rightarrow 0$ határesetek nem feleltethetők meg az irodalomban korábban vizsgált ellentagot tartalmazó modellnek [76, 77] annak ellenére, hogy a ezekben a határesetekben visszkapjuk az ohmikus spektrálfüggvényt.

A kvantált CL-típusú modellek megalkotásához vezető eljárás kezdetén a harmonikus oszcillátorok által megvalósított hőfürdő (78) egyenletben ismertetett esetéből indulunk ki. A [76, 77] publikációkat követve euklideszi téridőben tekintett modell tanulmányozva, a

$$S_{E,d} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} M(\partial_\tau q)^2 + V(q) + \sum_n \frac{1}{2} m_n (\partial_\tau q_n)^2 + \sum_n \frac{1}{2} m_n \omega_n^2 q_n^2 - q \sum_n C_n q_n \right] d\tau \quad (83)$$

euklideszi hatást írhatjuk fel, ahol az integrálást a térelméleti tárgyalás céljából a teljes időtengelyre kiterjesztettük és bevezettük a $\tau = it$ változót.

Ekkor pályaintegrálos kvantálást alkalmazva kvantummechanikai modellt definiálhatunk. Az egyszerűség kedvéért csupán a generáló funkcionál zérus külső forrás esetére vonatkozó alakját [77] írom fel, amely $\hbar = c = 1$ egységrendszerben:

$$Z_d = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}q \prod_n \left\{ \int \mathcal{D}q_n \right\} e^{-S_{E,d}}, \quad (84)$$

ahol a $\mathcal{N}$ a normálási tényezőt jelöli. Az $S_{E,d}$ hatás esetén a hőfürdőt harmonikus oszcillátorok valósítják meg, ezért a környezet q_n szabadságfokai tekintetében gaussi pályaintegrált kapunk, melyet analitikusan elvégezve a

$$Z_d = \frac{1}{\mathcal{N}'} \int \mathcal{D}q \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} M(\partial_\tau q)^2 + V(q) \right] d\tau + \Delta S_d \right\} \quad (85)$$

egyenletet nyerjük, ahol

$$\Delta S_d[q] = -\frac{1}{2} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \bar{q}(\omega) \frac{C_n^2}{m_n(\omega^2 + \omega_n^2)} \bar{q}(-\omega) d\omega, \quad (86)$$

$$\bar{q}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau) e^{-i\tau\omega} d\tau. \quad (87)$$

A Σ_d sajátenergia bevezetésével a hatásban a hőfürdő ΔS járuléka

$$\Delta S_d = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{q}(\omega) \Sigma_d(\omega) \bar{q}(-\omega) d\omega \quad (88)$$

alakban írható, amely

$$\Sigma_d(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} J_d(\omega') \frac{4\omega'}{\omega^2 + \omega'^2} d\omega' \quad (89)$$

módon fejezhető ki a (79) egyenletben bevezetett J_d spektrálfüggvény segítségével. Ekkor a generáló funkcionált a (85) és (88) egyenletek által a q_n szabadsági fokokra történő hivatkozás nélkül is definiálhatjuk, ezáltal a harmonikus oszcillátorok által megvalósított fenti speciális hőfürdő esetén a releváns alrendszer környezetének jellemzőit a kvantált modellek esetén is a spektrálfüggvénybe olvashatjuk.

Ha a releváns alrendszer környezetének spektrumát a levágást tartalmazó J_u ill. J_l spektrálfüggvényekkel kívánjuk leírni, akkor a sajátenergiára vonatkozó (89) egyenletbe J_d helyébe a J_u ill. J_l spektrálfüggvényeket helyettesítve az előbbiekhez hasonlóan definiálhatjuk a kvantált CL-modell folytonos spektrumú változatait. Ezáltal a klasszikus elmélet kvantálásának szokásos eljárását kikerülve empirikus módon alkotunk modellt a nyílt alrendszer leírására.

A (89) egyenletbe J_d helyett az ohmikus disszipáció esetének megfelelő J_Ω spektrálfüggvényt beírva az ω' szerinti integrál divergálni fog. Ebben az esetben a modell a klasszikus esethez hasonlóan a hatásba bevezetett ellentag segítségével definiálható. Az ellentagot az irodalomban [77] ismert módon bevezetve a divergáló sajátenergiát a

$$\Sigma_{\Omega,r}(\omega) = \eta|\omega| \quad (90)$$

véges, renormált kifejezéssel helyettesíthetjük. Ennek segítségével a hatás környezetet leíró tagját és a generáló funkcionált a (88) és (85) egyenletekhez hasonlóan definiálva megalkothatjuk a kvantált modellt ohmikus disszipáció esetén is.

4.2. A kvantum-klasszikus átmenet

A CL típusú modellek hatásában a környezet szerepét tekintetbe vevő tag megváltoztatja a modellek fázisszerkezetét az anharmonikus oszcillátor előző fejezetben tárgyalt esetéhez képest. A statisztikus fizika szemszögéből tekintve a problémát megállapíthatjuk, hogy az ekvivalens egydimenziós $O(1)$ modellt tekintve az új tagnak az energia kifejezésében megjelenő nemlokális járulék felel meg, amely az egyetlen dimenzió ellenére lehetővé teszi spontán-szimmetriasértett fázis kialakulását. Ez a járulék az η paraméterrel arányos, így a fázisátalakulás során η tölti be a kontrollparaméter szerepét. Ennek következtében a modellekben megjelenő fázisátalakulásra disszipatív fázisátalakulásként is hivatkoznak [78], amely zérus hőmérsékleten megjelenő kvantum-fázisátalakulásra szolgáltat példát.

Amint az előző fejezetben tárgyaltakból következik a kvantált anharmonikus oszcillátor esetén a spontán szimmetriasértés az alagúteffektus elnyomásának feleltethető meg. Ez az eltérés a hőfürdő nélkül tekintett oszcillátor esetétől bár első ránézésre furcsának tűnik valójában nem rendkívüli, hiszen régóta ismert, hogy a környezettel történő kölcsönhatás megszünteti az alrendszer hullámfüggvényének koherenciáját. Mivel a környezet hatásának köszönhetően egyes kvantummechanikai jelenségek nem figyelhetők meg az alrendszerben. A szimmetriasértett fázis megjelenésére az irodalomban kvantum-klasszikus átmenet néven hivatkoznak [77]. Ohmikus disszipáció esetén a fázisátalakulás létezését az RG módszerrel végzett vizsgálatok mellett az instanton módszerrel kapott eredmények [77] is megerősítik.

Az előzőek alapján evidensnek tűnik, hogy konkáv $V(q)$ potenciál esetén az η paraméter értékének növelésével bekövetkezik a szimmetrikusból a szimmetriasértett fázisba történő átmenet, azonban a konkrét számítások elvégzése előtt nem ismerjük η -nak azon értékét, amelynél a fázisátalakulás bekövetkezik, ezért a fázisátalakulás vizsgálata során olyan módszert célszerű alkalmazni, amely nem támaszkodik az η szerinti perturbatív sorfejtésre. Amellett, hogy ez megvalósítható a nem perturbatív renormálás által [76, 77] az RG különösen hatékony eszközt kínál az átalakulási pont közelében megjelenő kritikus viselkedés tanulmányozására.

4.3. A renormálásicsoport-egyenletek

Értekezésemben az euklideszi téridőben kvantált CL-modell ellentag nélküli, J_u ill. J_l spektrálfüggvények által bevezetett változatait, továbbá az ohmikus disszipáció ellentag bevezetésével értelmezett esetét vizsgálom. A modell ezen változatait a diszkrét spektrumú hőfürdő esetéhez hasonlóan generáló funkcionál által definiálhatjuk a

$$Z = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}q \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} M (\partial_\tau q)^2 + V(q) \right] d\tau + \Delta S \right\}, \quad (91)$$

$$\Delta S = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{q}(\omega) \Sigma(\omega) \bar{q}(-\omega) d\omega, \quad (92)$$

$$\bar{q}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau) e^{-i\tau\omega} d\tau \quad (93)$$

egyenletek segítségével, ahol a Σ -val jelölt, sajátenergiának nevezett mennyiséget a a bevezetni kívánt spektrálfüggvény paraméterei segítségével a

$$\Sigma = \begin{cases} \Sigma_{\Omega,r}(\omega) = \eta|\omega| & \text{az ellentag bevezetésével} \\ & \text{tekintett ohmikus} \\ & \text{disszipáció esetén,} \\ \Sigma_u(\omega) = -\frac{2\eta}{\pi} \left(\Lambda_u - |\omega| \arctan \frac{\Lambda_u}{|\omega|} \right) & J_u \text{ spektrálfüggvény} \\ & \text{esetén,} \\ \Sigma_l(\omega) = -\frac{\eta\Lambda_l^2}{\Lambda_l + |\omega|} & J_l \text{ spektrálfüggvény} \\ & \text{esetén.} \end{cases} \quad (94)$$

módon definiáljuk. Az egységugrásfüggvény szerinti levágás bevezetése esetén ill. a Lorentz-függvény szerinti levágás bevezetése esetén a sajátenergiára vonatkozó kifejezést a diszkrét esethez (89) hasonlóan a megfelelő spektrálfüggvény integrálása által nyerjük.

A CL típusú modellek tanulmányozását a technikai előnyökre tekintettel WH- és Litim-sémában [45] végeztem. Az RG-egyenletek levezetése során

a [76] munkát követve az η -t nem tekintettem az energiaskálától függő csatolásnak. Az egyszerűség kedvéért a további számításokat $M = 1$ egységrendszerben végzem, amelyben η tömeg dimenziójú. Érdemes megemlíteni, hogy ezen keretek között az η -nak megfelelő dimenziótlan $\tilde{\eta} = \frac{\eta}{k}$ paraméter vonatkozásában nem találunk nem triviális fixpontot.

A WH-séma esetén az energiafüggő hatásra az

$$S_k[q] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left[\dot{q}^2 + V_k(q) \right] d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \Sigma(\omega) \bar{q}(-\omega) \bar{q}(\omega) \right] d\omega \quad (95)$$

szerint LPA-t alkalmazva a WH-egyenlet a

$$\dot{V}_k = -\frac{k}{2\pi} \ln(k^2 + V_k'' + \Sigma_k) \quad (96)$$

formában adódik, ahol $\dot{V}_k = k \partial_k$, $V_k'' = \partial_q^2 V_k$ és $\Sigma(k) = \Sigma(\omega)$. Amint látható az alkalmazott közelítésben a WH-séma esetén a nagyenergiájú módusokra történő integrálás a sajátenergia formájától függetlenül analitikusan elvégezhető.

Az energiaskálától függő potenciál alakjára a

$$V_k = \frac{1}{2} m_k^2 q^2 + \frac{1}{4!} g_k q^4 + \sum_{n=3}^N \frac{g_{2n}(k)}{(2n)!} q^{2n} \quad (97)$$

feltételezést róttam ki, amelyben figyelembe vettük, hogy a renormálás által negyedfokúnál magasabb rendű tagok is generálódnak. Munkám során a korábbi numerikus tapasztalatokat felhasználva $N = 6$ -nak választottam a figyelembe vett csatolások számát.

Az RG-módszert a Wetterich-féle effektívhatás-szemlélet keretében alkalmazva LPA-ban a

$$\dot{V}_k = \int_p \frac{\dot{R}_k}{p^2 + V_k'' + \Sigma_k + R_k} \quad (98)$$

egyenlet írható fel, amelyet az

$$R_k = (k^2 - p^2) \theta(k^2 - p^2) \quad (99)$$

regulátor által definiált Litim-sémában tanulmányoztam. A Litim-sémában az ohmikus disszipáció és a Lorentz-függvényt tartalmazó spektrálfüggvény esetén a p szerinti integrálás analitikusan elvégezhető, ezekben az esetekben a (98) egyenlet a

$$\dot{V}_k = \frac{k^2}{\eta\pi} \ln \left(1 + \frac{\eta k}{k^2 + V_k''} \right), \quad (100)$$

illetve

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &= \frac{k^2}{\pi(k^2 + V_k'')^2} \\ &\times \left(k^3 + 2\eta\Lambda_1^2 \operatorname{arctanh} \left(\frac{k(k^2 + V_k'')}{k^3 + 2k^2\Lambda_1 - 2\eta\Lambda_1^2 + (k + 2\Lambda_1)V''} \right) + kV_k'' \right) \end{aligned} \quad (101)$$

formát ölti.

4.4. A kritikus exponensek vizsgálata

Amint a hőfürdő nélküli oszcillátor esetén is tettük, a konkrét számítások elvégzése során a potenciálra vonatkozó (97) egyenletet alkalmazva a (96) ill. (98) parciális differenciálegyenleteket közönséges differenciálegyenlet-rendszerre vezethetjük vissza, amelynek kezdeti feltételeit a csatolásoknak a Λ levágásnál felvett értékei adják meg.

A differenciálegyenlet-rendszer megoldása rendkívül rossz numerikus tulajdonságokkal rendelkezik, a vizsgált tartományban a csatolások értékei több nagyságrenden keresztül változnak. Az egyenletek megoldásának minél pontosabb meghatározása céljából olyan Runge–Kutta-módszert alkalmazó programot írtam, amely a csatolások változásainak megfelelően adaptívan változtatja a differenciálegyenletek numerikus megoldása során alkalmazott lépésközt. A lépésköz változtatása különösen fontos a szimmetriasértett fázisban az energiaskála kritikus értékének meghatározása során.

A szimmetrikus és a szimmetriasértett fázis közötti különbség a propagátor eltérő viselkedésében mutatkozik meg. Általánosan az inverz propagátor a

$$G^{-1} = k^2 + \mathcal{M}_k^2, \quad (102)$$

módon definiálható, ahol $\mathcal{M}_k^2 = m_k^2 + \Sigma_k$ a hőfürdővel történő kölcsönhatás által felöltötött tömeg, amely az m_k^2 csatolás mellett a sajátenergiának a spektrálfüggvény levágásának értékétől függő járulékát is tartalmazza. A szimmetrikus fázisban az energiaskálától függő inverz propagátor értéke mindig pozitív, a szimmetriasértett fázis esetén azonban k valamely adott értékénél az inverz propagátor zérussá válik. Az energiaskála ezen kritikus értékét a továbbiakban k_c -vel jelöljük. Általában a csatolásokra levezett RG-egyenletek olyan nevezőt tartalmaznak, amely k_c értékét megközelítve nullához tart, ezért a a szimmetriasértett fázisban az egyenletek numerikus megoldása során (a szimmetrikus fázissal ellentétben) nem érhetjük el a $k \rightarrow 0$ határesetet [3, 79, 80]. Ilyen módon a számítások során az eredmények részletes kiértékelése nélkül is eldönthető, hogy a fázistér vizsgált pontja a szimmetrikus vagy a szimmetriasértett fázishoz tartozik.

A differenciál-egyenletrendszer megoldására adaptív lépésközt alkalmazó program esetén a kritikus érték megközelítése során a csatolások gyors változásának következtében a lépésköz értéke sok nagyságrendet csökken. Ezáltal a futási eredmények kitüntetnek egy értéket az energiaskálán, melyet a k_c -vel azonosítottam.

Vizsgálataim során a leírtak szerint azonosítva a fázisokat a szuszceptibilitás és a korrelációs hossz kritikus viselkedését tanulmányoztam. Az általános szuszceptibilitást a szimmetrikus fázisban a

$$\chi = G_{k \rightarrow 0} = \frac{1}{\mathcal{M}_0^2}, \quad (103)$$

módon definiálhatjuk, amely a fázisátalakulási ponthoz közeledve divergál.

Ezáltal a vizsgált esetekben a szuszceptibilitás

$$\chi = \frac{1}{\mathcal{M}_0^2} = \begin{cases} m_0^2 & \text{az ellentag bevezetésével tekintett} \\ & \text{ohmikus disszipáció esetén,} \\ m_0^2 - \frac{2\eta}{\pi}\Lambda_u & \text{az egységugrásfüggvény} \\ & \text{szerinti levágás esetén,} \\ m_0^2 - \eta\Lambda_l & \text{a Lorentz-függvény szerinti levágás esetén.} \end{cases} \quad (104)$$

A megfelelő kritikus exponenst a szokásos módon γ -val jelölve a kritikus viselkedés

$$\chi \sim (\eta_c - \eta)^{-\gamma} \quad (105)$$

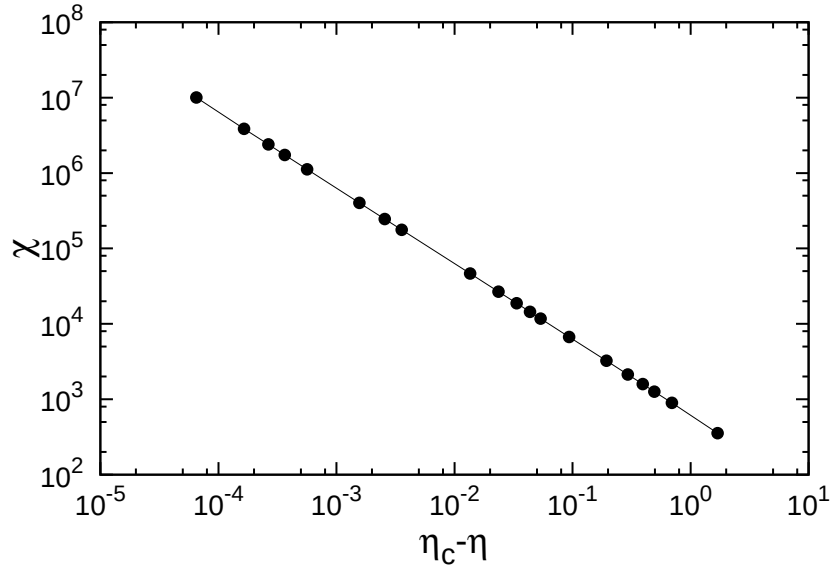
alakban írható, ahol η_c az η paraméter fázisátalakulási ponthoz tartozó kritikus értéke. Az 5. ábra WH-séma és ohmikus disszipáció esetén szemlélteti a szuszceptibilitás viselkedését.

A szimmetriasértett fázisban a propagátor divergálása által meghatározott k_c érték az elmélet kitüntetett impulzus értékének felel meg, amely-nél alacsony energiájú gerjesztések által alkotott kondenzátum megjelenését feltételezhetjük [3]. Ezáltal magától értetődően feltételezhetjük, hogy k_c reciproka a kondenzátum méretét jellemzi, így a korrelációs hossz $\xi = \frac{1}{k_c}$ módon határozható meg [3, 81]. Ezt az értéket numerikusan meghatározva szintén kritikus viselkedést tapasztalunk, azaz

$$\xi \sim (\eta - \eta_c)^{-\nu}, \quad (106)$$

ahol szokásos módon ν jelöli a ξ korrelációs hosszhoz tartozó kritikus exponenst. A ν exponens értéke a γ -hoz hasonlóan a fázisátalakulási pont közelében a log-log skálán ábrázolt adatokra illesztett egyenes meredekségéből leolvasható.

A frekvencialevágás nélküli ohmikus disszipáció esetén a γ exponens értékét már tanulmányozták a szakirodalomban [76]. Ezt az esetet WH-sémában vizsgálva $\gamma = 1$ és $\nu = 1$ értéket kaptam.



5. ábra : A χ szuszeptibilitás skálázása a kritikus η_c érték közelében. A log-log skálán ábrázolt görbe meredeksége a $\gamma = 1$ értéket szolgáltatja a kritikus exponensre. Az ábra a levágást nem tartalmazó ohmikus spektrálfüggvény esetén WH-sémában $N = 6$ csatolás figyelembevételével kapott eredményeket mutatja.

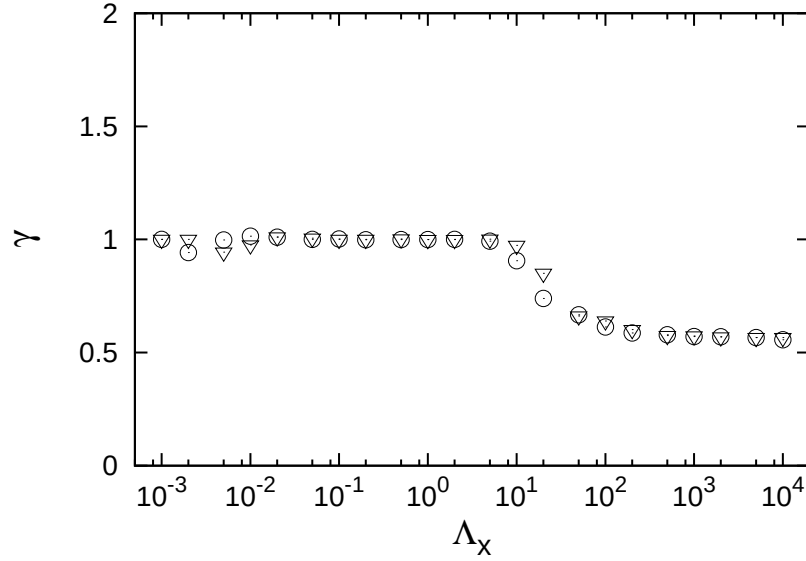
A γ exponensre kapott érték eltér a [76]-ban szereplő értéktől. Az eltérés azzal magyarázható, hogy az idézett munkában más numerikus módszert alkalmaztak az exponens meghatározására. Az általam alkalmazott módszer során a kritikus viselkedést tanulmányozva pontosabban megközelítettem a fázisátalakulási pontot és lehetőség nyílt arra, hogy η_c numerikus értékének utolsó jegyeit a kritikus viselkedés log-log skálán történő ábrázolása során az adatpontokra illesztett egyenes által határozzam meg. Ezeknek köszönhetően az exponensek értékének jóval pontosabb meghatározása vált lehetségessé.

A modell olyan változatai esetén, amelyekben a spektrálfüggvény frekvencialevágást tartalmaz a kritikus exponensek természetesen függenek a levágástól, ezért a γ és a ν exponenseket a levágás értékét széles tartományban változtatva vizsgáltam. A számításokat WH-sémában mind az egységugrásfüggvény, mind a Lorentz-függvény által bevezetett levágás esetén elvégeztem. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért a kétféle levágás hasonlóságát hangsúlyozva bevezetem a Λ_x jelölést, amely mind Λ_u -t, mind Λ_l -t helyettesíti.

A γ exponensre vonatkozó eredményeket a 6. ábra szemlélteti. Megállapíthatjuk, hogy Λ_x értékét kicsinek választva, azaz Λ_x IR határesetében mind a két fajta levágás esetén visszanyertem a levágás nélküli esetben kapott $\gamma = 1$ értéket. Az alacsony Λ_x értékeknél látható széles platóból következően ezen sémában az exponens értéke több nagyságrenden keresztül függetlennek mutatkozik a levágás értékétől és fajtájától. Λ_x UV határesetében szintén levágásfüggetlenséget tapasztaltam, ekkor viszont $\gamma \approx 0.57$ érték adódik. Azonban a nagy Λ_x esetén kapott értékeket nem tekinthetjük fizikailag relevánsnak, mert ekkor a Λ_x paraméter nem hanyagolható el a renormálás során bevezetett UV-levágáshoz képest, melynek értékét [76]-t követve mindig $\Lambda = 10^4$ -nek választottuk. A 6. ábra középső tartományán tapasztalt gyors változás bizonyára a Λ_x és η_c közötti több nagyságrendnyi különbségnek a fázisátalakulási pont eltolódása miatti csökkenésével magyarázható. A numerikus eredmények szerint η_c jelentősen függ Λ_x -tól, $\eta_c \sim \Lambda_x^{-1}$ alakú korrelációt mutatva.

A korrelációs hossz kritikus viselkedését hasonló módon vizsgálva a 7. ábrán ismertetett eredményeket kapjuk. A Λ_x levágás IR határesetében az exponens értéke $\nu = 1$ -hez tart, amely szintén megegyezik a levágás nélküli esetben kapott értékkel. Amint az ábráról látszik IR határesetben az adott renormálási sémában ν is független a levágás értékétől és fajtájától. A Λ_x levágás UV határesetében $\nu \approx 0.3$, de amint említettük az ekkor kapott eredmény nem hordoz fizikai jelentést.

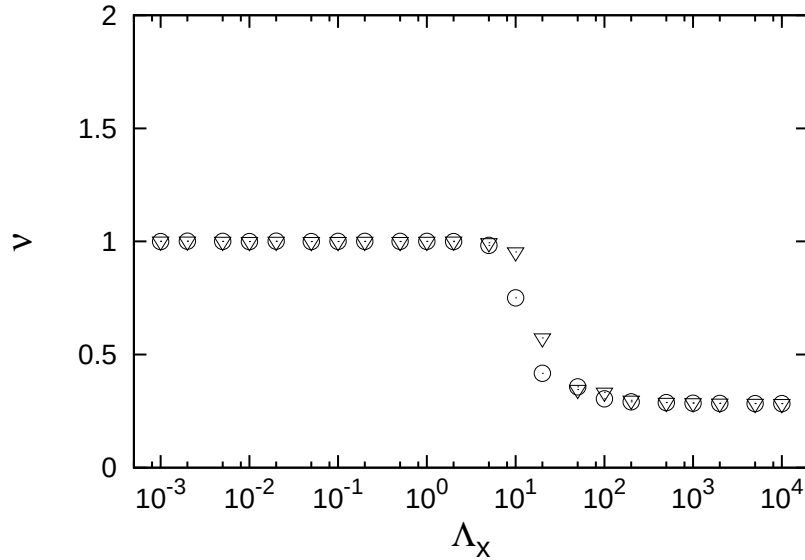
Eredményeimet ellenőrizve a Lorentz-függvényt tartalmazó levágás és az ohmikus disszipáció esetén a Litim-féle renormálási sémában is elvégeztem



6. ábra : A γ kritikus exponens értéke a frekvencialevágás függvényében. Az x index az u ill. l indexeket helyettesíti. A háromszögek az egységugrás-függvényt tartalmazó spektrálfüggvény esetén, a körök a Lorentz-függvényt tartalmazó spektrálfüggvény esetén mutatják a kritikus exponens értékét. Az ábra az $m^2(\Lambda) = -1$, $g(\Lambda) = 1$, $\Lambda = 10^4$ módon megválasztott kezdeti feltételekre vonatkozik.

a γ exponens vizsgálatát. Ezeknek a számításaimnak az eredményei a 8. ábrán láthatóak.

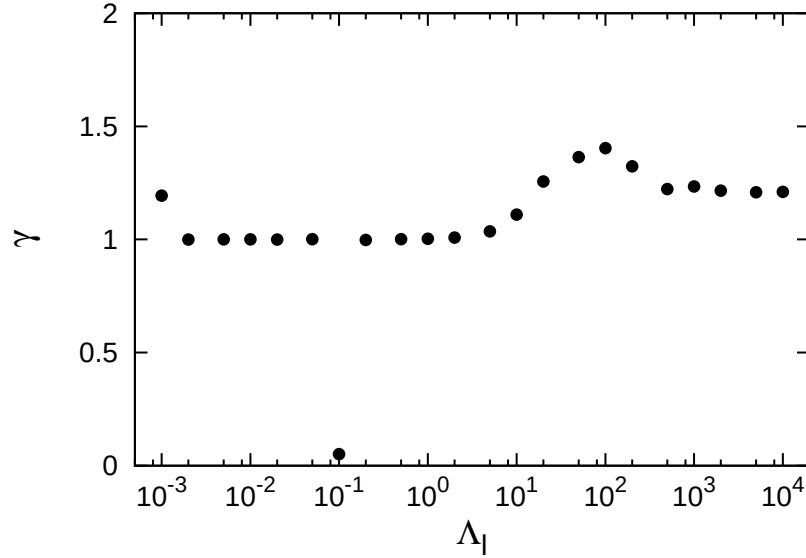
Az ábra két kiugró pontot tartalmaz, melyeket a következtetések levonása során nem vehetünk figyelembe. A $\Lambda_l = 0,1$ érték esetén a program futása során gyűjtött adatokat részletesebben megvizsgálva a legmagasabb rendű csatolás tekintetében rendhagyó viselkedést tapasztalhatunk. Ez arra utal, hogy az adott tartományban a vizsgálataim során alkalmazott eljárás nem kielégítő. Ez a probléma bizonyára technikai jellegű, hiszen az



7. ábra : A ν kritikus exponens értéke a frekvencialevágás függvényében. Az x index az u ill. l indexeket helyettesíti. A háromszögek az egységugrás-függvényt tartalmazó spektrálfüggvény esetén, a körök a Lorentz-függvényt tartalmazó spektrálfüggvény esetén mutatják a kritikus exponens értékét. Az ábra az $m^2(\Lambda) = -1$, $g(\Lambda) = 1$, $\Lambda = 10^4$ módon megválasztott kezdeti feltételekre vonatkozik.

LPA mellett további közelítéseket alkalmaztunk a magasabb rendű csatlások elhanyagolása, differenciálegyenletek numerikus megoldása és a spontán szimmetriasértés azonosítása alkalmazott módszer által. (Az utóbbi az η paraméter kritikus értékének meghatározásán keresztül befolyásolhatja a szimmetrikus fázisban nyert eredményeket.)

A legszélső adatpont ($\Lambda_1 = 0,001$) esetén problémát jelent, hogy ekkor η kritikus értéke ($\eta_c \approx 2311$) nagyon nagy. Ekkor Λ_1 nagy értékei esetén adott érvelést megismételve kétségesse válik az eredmények megbízhatósága.



8. ábra : A γ kritikus exponens értéke a Lorentz-függvényt tartalmazó levágás esetén Litim-féle renormálási sémában. Az ábra az $m^2(\Lambda) = -1$, $g(\Lambda) = 1$, $\Lambda = 10^4$ módon megválasztott kezdeti feltételekre vonatkozik.

Ezeket figyelembe véve a Litim-sémára vonatkozó számításaim megerősítik a WH-séma esetén nyert $\gamma = 1$ eredményt.

Összefoglalva eredményeimet a CL típusú modellek RG-módszerrel történő vizsgálata a szuszceptibilitás és a korrelációs hossz kritikus viselkedéséhez tartozó exponens pontosabb meghatározása által lehetővé tette a modellekben megjelenő fázisátalakulás pontosabb leírását és igazolta a modell különböző spektrálfüggvényt tekintő változatainak hasonló kritikus viselkedését. A fejezetben bemutatott eredmények az *Annals of Physics* folyóiratban kerültek publikálásra [82].

5. A sine-Gordon-modell nagyenergiás kiterjesztésének vizsgálata

5.1. A sine-Gordon-modell

A kétdimenziós sine-Gordon-modell (továbbiakban SG-modell) a különböző szilárdtestfizikai alkalmazások mellett több érdekes tulajdonsággal (periodikusság, végtelen rendű fázisátalakulás, integrálhatóság) rendelkezik, melyek a modell vizsgálatát elméleti szempontból indokoltá teszik. A modell RG-módszerrel történő tanulmányozásával már LPA-ra szorítkozva [83-85] is jelentős eredményeket értek el, melyeket kiegészítettek a hullámfüggvény-renormálás [86-88] figyelembevételével végzett vizsgálatok.

Értekezésemben a modell nagyenergiás kiterjesztését vizsgálom, amely az eredeti modell csatolásainak bővítését igényli. Ezt impulzusfüggő hullámfüggvény-renormálás alkalmazásával valósítjuk meg, a fázistér bővítését egy új csatolás bevezetésére korlátozva. Ennek a kiterjesztésnek tanulmányozása az aszimptotikus biztonság és a dualitás kérdésének teljesebb tárgyalását teszi lehetővé.

A továbbiakban a modell áttekintése után a nagyenergiás viselkedés kérdésének RG szemléletére térek ki, majd az impulzustól független hullámfüggvény-renormálás esetén nyert fázisszerkezet és az új csatolás figyelembevételének hatását tárgyalom. Ezt követően az SG-modell duális szimmetriáját, továbbá a tömeges SG-modell és az SG-modell tanulmányozott kiterjesztése között fennálló duális kapcsolatot ismertetem. Az SG-modellt az

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_E \phi)^2 + \cos(\phi) \quad (105)$$

euklideszi Lagrange-sűrűség által definiálhatjuk, melynek Minkowski-téridőbeli megfelelője egyetlen térdimenzió esetén az SG-egyenletként [89] ismert

$$\partial_t^2 \phi(x, t) - \partial_x^2 \phi(x, t) + \sin(\phi(x, t)) = 0 \quad (106)$$

mozgásegyenletet szolgáltatja a ϕ térváltozóra.

A Lagrange-sűrűség potenciálját a

$$V(\phi) = u \cos(\beta\phi) \quad (107)$$

módon általánosíthatjuk, bevezetve a kölcsönhatás erősségét jellemző u paramétert és a térváltozóban periodikus potenciál periódushosszát megváltoztató β paramétert. Mivel a β paramétert a kinetikus tag együtthatójába olvaszthatjuk ha a Lagrange-sűrűséget egy új $\phi' = \beta\phi$ térváltozóval fejezzük ki, a továbbiakban az

$$\mathcal{L}_{\text{SG}} = \frac{z}{2}(\partial_{\text{E}}\phi)^2 + u \cos(\phi) \quad (108)$$

Lagrange-sűrűséggel definiált modellt tekintem, a β paraméter helyett a kinetikus tag z együtthatóját bevezetve.

A modell felírásához több irányból is eljuthatunk, az SG-egyenlet a torziós szállal összekapcsolt ingarendszer folytonos határesetet tekintő általánosításától [7, 188] kezdve egyes hűrelméleti problémákig [90, 91] a fizika számos területén felbukkan. Kísérleti szempontból a modell jelentősége nagy részben annak köszönhető, hogy a kétdimenziós Coulomb-gázzal [92] ekvivalensnek tekinthető [7, 93], így több alkalmazási lehetősége ismert [94]. Erre láthatunk példát a szuperfolyékony ^4He és szupravezető filmek [92], a kétdimenziós kristályok olvadásának [95] és a szilárd testek felületeinek [96] vizsgálata során. Továbbá az SG-modell több térváltozóra történő általánosításával mind a mágneses csatolással [97] mind a Josephson típusú csatolással [98] összekapcsolt szupravezető rétegek tárgyalhatóak.

Emellett a nem lineáris rendszerek tanulmányozására lehetőséget nyújtó [99] SG-egyenlet megjelenik például a rácshibák modellezésére alkalmazható Frenkel–Kontorova-modell folytonos közelítésében [100, 101], nem lineáris optikai rendszerek [102] vizsgálatában és a DNS-molekula leírása során [103] is.

Bár természetesen az SG-modell magasabb térdimenzióban is tekinthető [7, 88, 104, 105] tárgyalásomat az irodalomban gyakran vizsgált kétdimenziós modellre korlátozom. Ez a Coulomb-gáznak történő megfeleltetésen

kívül a korábban említett Ising típusú modellekkel is szoros kapcsolatban van, mivel a kétdimenziós XY-spin-modell közelítése az SG-modellre vezet [7, 186]. Emellett az SG-modell tömegtagot tartalmazó kiterjesztése a Yukawa-gáz modelljével ekvivalens [7], továbbá a modell következő fejezetben tárgyalt megfelelő általánosításai fermionikus elméletek bozonizált megfelelőinek tekinthetők. Maga az SG-modell megfelelő paraméterekkel a tömeges Thirring-modell bozonizáltjának tekinthető [106].

Bár az SG-modell részecskefizikai modellként nem tekinthető realiztikusnak, mégis számos, a nagyenergiás fizika nézőpontjából is érdekes elméleti vizsgálat tárgyát képezi a modell különleges tulajdonságainak köszönhetően. Ezek közül a legkönnyebben látható, hogy a Lagrange-sűrűség a Z_2 -szimmetria mellett egy további diszkrét szimmetriával rendelkezik, mivel a potenciál a térváltozóban periodikus. Ennek következtében a más esetekben gyakran alkalmazott perturbatív megközelítés, amely a potenciál Taylor-sorfejtésén alapul megsérti a modell szimmetriáját, így nemperturbatív módszerek alkalmazása válhat szükségessé [107].

Az elmélet egyik érdekes jellemzője, hogy fázisszerkezete nem triviális, így az RG-módszer alkalmazása különösen indokoltá válik. A fázisok megkülönböztetésének problémáját több módon is megközelíthetjük. Erre szemléletes utat kínál az XY-spin-modell nyelvét alkalmazva a topologikus rendezettség fogalmának bevezetése [36], mindazáltal az RG szemléletének esetén egyszerűbb a dimenziótlan potenciál viselkedésének vagy a potenciál IR univerzalitásának vizsgálata [3]. Szimmetria szempontjából a fázisátalakulás a modell periodikussága következtében fennálló diszkrét szimmetria spontán sérülésével hozható kapcsolatba [83, 108]. A modell két fázissal rendelkezik, melyek között Kosterlitz-Thouless típusú fázisátalakulást [31-35, 109-112] figyelhetünk meg.

A fázisátalakulást meghatározó kritikus fixpont mellett az RG-egyenlet más fixpontjainak vizsgálata is érdekes. A fixpontok definíció szerint skálainvariáns rendszernek, azaz globális dilatációs szimmetriával rendelkező elméletnek feleltethetők meg. Nagyon gyakran a skálainvariáns modellek a konformális transzformációkkal, azaz a szögtartó koordinátatranszformá-

ciókkal szemben is invariánsak, annak ellenére, hogy ez nem feltétele a skálainvarianciának [113].

A kétdimenziós téridő kitüntetett, mivel ekkor a konformális szimmetria által generált algebra végtelen sok generátorral rendelkezik [114]. A generátorok a Virasoro-algebra szerinti

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0} \quad (109)$$

kommutációs relációt [7, 115] elégítik ki, ahol a c az ún. centrális töltés, melynek értéke az adott fixpontnak megfelelő elméletet jellemzi. Az RG-módszer és a konformális szimmetrián alapuló megközelítés között Zamolodchikov tétele teremt kapcsolatot [7, 116-118], amely a csatolások olyan függvényének konstruálására ad lehetőséget, melynek értéke a trajektóriákon a szokásos irányban (az energiaskálát csökkentve) haladva monoton csökken és a megfelelő fixpontokban a jellemző centrális töltés értékét veszi fel.

Az SG-modell iránti érdeklődéshez az is hozzájárul, hogy az elmélet az ún. integrálható modellek közé tartozik [119]. A térelméletben, amely végtelen sok szabadsági fokkal írható le, a klasszikus modell integrálhatósága végtelen sok független megmaradó mennyiség létezésében nyilvánul meg [120]. Az integrálhatóság különösen érdekessé válik a kvantált elmélet vizsgálata során mivel a szórás mátrix és a korrelációs függvények kiszámításának új megközelítését veti fel [120].

A jelentős irodalommal rendelkező SG-modell vizsgálatával kapcsolatban több módszert (az S-mátrix faktorizálása [121, 122], önmegoldó kvantálás [120], peremfeltételek alkalmazása [123-126]) meg lehet említeni, melyek tárgyalása értekezésem témáján túlmutat.

A kétdimenziós modellek értékeléséhez érdemes kiemelni, hogy bár az alacsonydimenziós tárgyalás hátrányt jelent a négydimenziós realisztikus kvantumtérelméleti modellek nézőpontjából, a kétdimenziós téridő kitüntetett szerepet játszik a húrelmélet szempontjából. Ez annak köszönhető, hogy az egydimenziós húr a téridőbeli mozgása során egy kétdimenziós ún. világfelületet söpör végig [127, 128], így a húr pontjainak koordinátái a

kétdimenziós világfelületen értelmezett térelmélet által [129] értelmezhetőek. A kétdimenziós modellek iránti érdeklődést az is növeli [120], hogy az AdS/CFT megfeleltetés [130] feltételezése szerint létezik olyan négydimenziós szuperszimmetrikus konformális mértékelmélet melynek húrelméleti modell feleltethető meg.

A teljesség kedvéért kiemelem, hogy az eredeti modell több kiterjesztése ill. módosítása ismert az irodalomban melyekre SG típusú modellekként hivatkozhatunk [7]. Így megemlíthető a tömeges [108, 131, 132], a szuperszimmetrikus [133, 134], és a kétfrekvenciás [135-139] a sinh-Gordon-modell [140, 141], az általánosított SG-modell [104] továbbá a következő fejezetben tárgyalt réteges modellek.

5.2. A nagyenergiás kiterjesztés RG vizsgálata

Az RG-módszer alkalmazása egy adott elmélet nagyenergiás kiterjesztésének kutatására a korábban bemutatottól kissé eltérő megközelítést igényel. A különbség matematikailag abban mutatkozik meg, hogy a nagyenergiás viselkedést tanulmányozva az RG-egyenletek megoldása során a korábbiakkal ellentétben az energiaskála növekedésének irányába haladunk.

A renormálásnak ilyen alkalmazását elsősorban a részecskefizika szemlélete indokolja. A térelméleti formalizmus hasonlósága ellenére a részecskefizika megközelítése általában különbözik a szilárdtestfizikáétól [19]. A részecskefizikában gyakran jelentkezik a korlátozott energiájú kísérletekre támaszkodva felállított fenomenologikus modellek nagyenergiás kiterjesztésének igénye. Más szavakkal élve, megpróbáljuk megkeresni azt az elméletet, amely amellett, hogy reprodukálja a kísérletek ismert eredményeit, leírja azon mikroszkopikus folyamatokat is, melyek megfigyelését a detektorok felbontása nem teszi lehetővé.

Ez az RG-módszer által úgy valósítható meg, hogy egy alacsony UV-levágással definiált modellt tekintünk, majd meghatározzuk a csatolásokra vonatkozó differenciálegyenletek megoldásának az UV-levágásnál nagyobb energiájú tartományra vonatkozó értékeit. Az ilyen irányú vizsgálatok azért is érdekesek, mert lehetőséget nyújtanak a fázisátalakulás és a fázis fogal-

mának általánosítására is. Eszerint a nagyenergiás viselkedés szempontjából különböző fázisúaknak tekinthetjük egy modell paraméterterének olyan pontjait is, amelyek között a minőségi különbség csupán a nagyenergiás kiterjesztéseik között látható. Ezáltal lehetőség nyílik olyan fázisátalakulások és kritikus viselkedés tanulmányozására is, melyek hagyományos módon, csupán az alacsonyenergiás viselkedésre tekintve rejtve maradnának.

A nagyenergiás viselkedést jellemezve az egyik legfontosabb kérdés, hogy a fizikai mennyiségekre vonatkozó RG-egyenletek megoldása a $k \rightarrow \infty$ határesetben divergál vagy véges értékhez tart. Az első eset nagyon gyakori, hiszen az irreleváns módon skálázó (azaz az UV-tartomány felé haladva növekvő) csatolások esetén a divergencia elkerülése speciális feltételeket igényel. Elméletileg azonban a másik lehetőség is megvalósulhat, hiszen például a kvantum-színdinamika esetén a perturbatív eredmények szerint az energiaskálát növelve a kölcsönhatás erőssége nullához tart [143], amely jelenséget aszimptotikus szabadságnak nevezünk.

Az elméleteknek $k \rightarrow \infty$ határeset viselkedése szerinti osztályozását az aszimptotikus szabadság általánosítása, az aszimptotikus biztonság fogalma [3, 10, 144] írja le. Aszimptotikus biztonságról akkor beszélünk ha az RG-egyenletek megoldásának ezen határesetéhez is jól definiált, véges csatolásokkal rendelkező elmélet tartozik. Ekkor az energiaskála növelésével az RG-trajektóriák egy fixpontba folynak bele, melyhez az eredeti hatás paramétereinek véges, ugyanakkor nem feltétlenül triviális értéke tartozik. Ilyen fixpont létezését mutatták ki például a kvantum-Einstein-gravitáció [10, 58, 59] vizsgálata során. Ezen modell vizsgálta által az utóbbi időkben előtérbe került az RG-módszer alkalmazása a nagyenergiás viselkedés tanulmányozására [142], így az SG modell ezen szempontból történő vizsgálata is időszerűvé vált, amelyre a modell alább ismertetett közelítése nyújt lehetőséget.

A konkrét egyenletek tárgyalása előtt érdemes hangsúlyozni, hogy a modellek nagyenergiás viselkedésének vizsgálatából levonható fizikai következtetések általában korlátozottak, mivel a modellek alkalmazhatóságának energiatartományából kilépve a tanulmányozott rendszer leírása új szabad-

sági fokok figyelembevételét igényelheti. Ezen vizsgálatok mégis fontosak, mert kijelölhetik a modell érvényességi körét és ötleteket adhatnak az elmélet továbbfejlesztéséhez. Például közismert, hogy a gyenge kölcsönhatás Fermi-féle elméletének az unitaritást sértő nagyenergiás viselkedése [38] az elmélet módosításának szükségességére hívja fel a figyelmet.

5.3. A sine-Gordon-modell fázisszerkezete

Értekezésemben az SG-modellt Callan–Symanzik-sémában, azaz $R_k(p) = k^2$ regulátor esetén tárgyalom és csupán a skálafüggő potenciál Fourier-sorának első tagját veszem figyelembe, amely az eredeti potenciálban is szerepel. Ekkor a Γ_k funkcionál formájára a

$$\Gamma_k = \int_x \left[\frac{z_k}{2} (\partial_E \phi)^2 + V_k(\phi) \right] = \int_x \left[\frac{z_k}{2} (\partial_E \phi)^2 + u_k \cos(\phi) \right] \quad (110)$$

feltételt kiróva a dimenziótlan $\tilde{u} = \frac{u}{k^2}$ és $z = \tilde{z}$ csatolásokra az

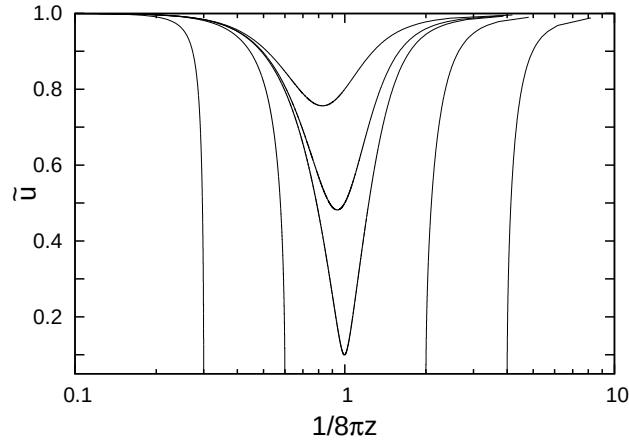
$$\begin{aligned} \dot{\tilde{u}} &= -2\tilde{u} + \frac{1}{2\pi\tilde{u}z} \left[1 - \sqrt{1 - \tilde{u}^2} \right], \\ \dot{z} &= -\frac{1}{24\pi} \frac{\tilde{u}^2}{(1 - \tilde{u}^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (111)$$

egyenleteket nyerjük, melyek megoldását már tanulmányozták az irodalomban [86]. Az ismertetésre kerülő fázisszerkezetet a 9. ábra szemlélteti.

Mivel $\tilde{u} = 0$ -ban az első egyenlet nincs értelmezve, szigorúan tekintve az egyenletrendszer nem rendelkezik fixponttal. Ugyanakkor az első egyenlet $\tilde{u} = 0$ körüli

$$\dot{\tilde{u}} = -2\tilde{u} + \frac{1}{2\pi\tilde{u}z} \left[1 - \sqrt{1 - \tilde{u}^2} \right] = -2\tilde{u} + \frac{1}{2\pi z} \left[\frac{\tilde{u}}{2} \right] + \mathcal{O}(\tilde{u}^3) \quad (112)$$

sorfejtéséből látható, hogy a határesetet értelmezve az $\tilde{u} = 0$ pontokat fixpontoknak lehet tekinteni. Ezek közül különleges a $z = \frac{1}{8\pi}$ értékkel rendelkező, ún. Kosterlitz–Thouless-pont, amely elválasztja egymástól a különböző viselkedésű fixpontokat. A $z > \frac{1}{8\pi}$ esetén az $\tilde{u}$ csatolás relevánsan, míg



9. ábra : Az SG-modell fázisszerkezete. Az $\frac{1}{8\pi z}$ paraméterhez tartozó tengely skálázása logaritmikus. Az ábra szemlélteti, hogy az $\tilde{u} = 0$ egyenes pontjai, továbbá az $(\tilde{u} = 1, z \rightarrow 0)$ és $(\tilde{u} = 1, z \rightarrow \infty)$ pontok fixpontoknak tekinthetők.

$z < \frac{1}{8\pi}$ esetén irrelevánsan skálázik, ezért az $\tilde{u} = 0$ egyenes előbbi pontjai IR-taszító míg az utóbbiak IR-vonzó fixpontoknak tekinthetők.

Ebből következően a Kosterlitz–Thouless-pont kritikus fixpontnak tekinthető, amely a fázistér trajektóriáit két különböző alacsonyenergiás viselkedést mutató csoportba osztja. Az alacsonyenergiás viselkedést tekintve az energiaskála IR értékei felé haladva az $\tilde{u} = 0$ -ban végződő trajektóriák a szimmetrikus fázishoz [3], míg a többi trajektória a szimmetriasértett fázishoz tartozik, ezáltal a fázisátalakulás kimutatható.

Az ábrázolt trajektóriák további fixpontok létezését sugallják melyeket a (111) egyenletek átparametrizálásával találhatunk meg. Az $\omega = \sqrt{1 - \tilde{u}^2}$, $\chi = \frac{1}{\omega z}$ és $\partial_\tau = \omega^2 k \partial_k$ módon bevezetett új változók segítségével az egyen-

letrendszer a

$$\begin{aligned}\partial_\tau \omega &= 2\omega(1 - \omega^2) - \frac{\omega^2 \chi}{2\pi}(1 - \omega), \\ \partial_\tau \chi &= \chi^2 \frac{1 - \omega^2}{24\pi} - 2\chi(1 - \omega^2) + \frac{\omega \chi^2}{2\pi}(1 - \omega)\end{aligned}\quad (113)$$

alakot ölti, mely a $(\chi = 0, \omega = 0)$ fixpontot szolgáltatja, amely az eredeti változókat tekintve az $\tilde{u} \rightarrow 1$ és $z \rightarrow \infty$ határesetnek felel meg. Ezen a szimmetriasértett fázishoz tartozó trajektóriákat összegyűjtő IR-vonzó fixpont létezése nemrég vált ismertté az irodalomban [86, 87].

Az IR fixpont megjelenését más skaláris modellek is megfigyelhetjük [3, 87, 81, 145]. A fázistér az IR fixponthoz közeli tartománya a kritikus fixponttól való távolság ellenére szintén érdekes lehet a fázisátalakulás vizsgálata során, mivel bizonyos esetekben lehetőséget kínál a korrelációs hossz kritikus viselkedésének meghatározására [145]. Az SG-modell esetén is, akárcsak a CL-modell esetén az energia csökkentése során a szingularitás megjelenése által kitüntetett energiaérték reciproka által meghatározott távolságérték a spontán szimmetriasértés által kialakuló rendezett fázisra jellemző korrelációs hossz becslésére nyújt lehetőséget [3]. A spontán szimmetriasértett fázisban tapasztalt viselkedést mélyebben megvizsgálva kézenfekvő azon értelmezés mely szerint a fixpont környezetében az egyenletek szinguláris viselkedése azt jelzi, hogy a spontán-szimmetriasértett fázisban minőségileg új kollektív gerjesztések jelennek meg, melyek leírása kényelmetlen a modell nagyenergiás viselkedésének tanulmányozása során alkalmazott szabadsági fokok nyelvén. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy bizonyos értelemben az RG-módszer az eredeti modell alkalmazhatóságának alacsonyenergiás korlátját jelöli ki.

A 9. ábra az egyenletek további, nagyenergiás fixpontjának létezését veti fel, melyet az $\omega = \sqrt{1 - \tilde{u}^2}$ és $\zeta = z\omega$ változókat bevezetve találhatunk

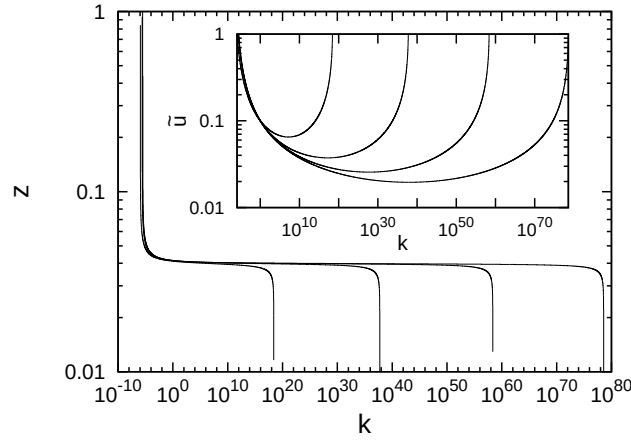
meg. Ekkor a csatolásokra vonatkozó egyenletek a

$$\begin{aligned}\partial_\tau \omega &= 2\zeta\omega(1-\omega^2) - \frac{\omega^2}{2\pi}(1-\omega), \\ \partial_\tau \zeta &= \left(2\zeta^2 - \frac{\zeta}{24\pi}\right)(1-\omega^2) - \frac{\omega\zeta}{2\pi}(1-\omega)\end{aligned}\quad (114)$$

alakba írhatóak melyek az $(\omega = 0, \zeta = 0)$ fixpontot szolgáltatják. Ez a fixpont, mely az $\tilde{u} \rightarrow 1$ és $z \rightarrow 0$ határesetnek felel meg UV-vonzó, azaz ha a szokásos módon az IR-tartomány felé haladnánk, akkor taszítaná a trajektóriákat. Ha úgy tekintjük, hogy a $k \rightarrow \infty$ határesetben a trajektóriák ezen fixpontba folynak bele, akkor ezen nem triviális (nem gaussi) fixpontban az aszimptotikus biztonság példáját láthatjuk. Ugyanakkor hangsúlyozni kell, hogy a fázistér ezen pontja csupán határesetként értelmezhető, nem része az eredeti egyenletrendszer értelmezési tartományának és a 10. ábrán szemléltetett megoldások szerint a trajektóriák már a k skála véges értékénél befolynak a fixpontba. Az ismertetett fixpontok által a fázistér trajektóriái három csoportba sorolhatóak aszerint, hogy az adott trajektória az $\tilde{u} = 1$ UV fixpontot köti össze az $\tilde{u} = 0$ egyenes egy fixpontjával, az $\tilde{u} = 1$ UV fixpontot köti össze az $\tilde{u} = 1$ IR fixponttal, vagy az $\tilde{u} = 0$ egyenes egy fixpontját köti össze az $\tilde{u} = 1$ IR fixponttal.

A z és az $\tilde{u}$ csatolás viselkedését tanulmányozva látható, hogy az energiaskála egy adott értékénél az egyenletek megoldása szingulárisává válik. Mindazáltal az $\tilde{u}$ csatolás hirtelen növekedése és a z csatolás hirtelen csökkenése bizonyos értelemben kompenzálja egymást, ezért a trajektóriák folyása reguláris marad, az UV fixponthoz tartozó trajektóriákra a $\frac{d\tilde{u}}{dz}$ differenciálhányados a $z \rightarrow 0, \tilde{u} \rightarrow 1$ határesetben nullához tart. Az UV fixpont környezetében a csatolások viselkedése a $z = (1 - \tilde{u})^{\frac{3}{2}}$ összefüggéssel közelíthető. A csatolások szinguláris viselkedése az IR határesetben tapasztaltakhoz hasonlóan egy kritikus k_c energiaértéket határoz meg, melynek reciproka lehetőséget kínál a rendszert jellemző korrelációs hossz definiálására.

Mivel az energiaskála növekedésének irányában haladva nem minden trajektória folyik bele az UV fixpontba, a trajektóriák minőségileg különböző



10. ábra : Az $\tilde{u}$ és a z csatolásokra vonatkozó egyenletek megoldásának viselkedése. Az IR-tartományhoz hasonlóan a hirtelen csökkenés és a hirtelen növekedés az energiaskála ugyanazon kritikus értékénél jelenik meg.

viselkedése alapján a nagyenergiás viselkedés szempontjából a modell két fázisát különböztethetjük meg. A fázishatárhoz tartozó kritikus kezdeti értékeket megközelítve ebben az esetben is lehetőség adódik a kritikus viselkedés tanulmányozására. A redukált hőmérséklet¹³ a hullámfüggvény-renormálás kezdeti értékének a kritikustól való eltéréseivel arányosnak tekinthető a $t \sim z^*(\Lambda) - z(\Lambda)$ módon. Ezt felhasználva a modell UV-tartományában is megfigyelhető a korrelációs hossz $\ln(\xi) \sim t^{-\nu}$ szerinti viselkedése, azaz a Kosterlitz–Thouless típusú skálázás.

Az SG-modellt a kétdimenziós XY-spin-modell tárgyalására alkalmazva az UV-tartományban a szinguláris viselkedés által kijelölt kritikus értéknek szemléletes jelentés tulajdonítható. Ekkor alacsony energián a modellt elképzelhetjük úgy, hogy elemi gerjesztéseinek a vortexeket tekintjük. Az

¹³A redukált hőmérséklet a hőmérsékletnek a fázisátalakulási hőmérséklettől való eltérését jellemző dimenziótlan mennyiség.

energiaskála növelése a szokásos blokkosítással¹⁴ [1, 20, 19] ellentétes folyamattal szemléltethető, amely a rendszer egyre kisebb méretű vortexekkel történő leírásának felel meg. Ekkor a vortexek méretével a rácsállandó értékéhez közelítve a csomóponthoz rögzített spinek új, elemibb szabadsági fokait használó leírás válik szükségessé.

5.4. A sine-Gordon modell nagyenergiás kiterjesztése

Az SG-modell nagyenergiás kiterjesztése olyan hatással definiálható, amely a térváltozó magasabb rendű deriváltjait is tartalmazza. Ezért vizsgálataink során a korábbi tárgyaláshoz hasonlóan a potenciál Fourier-sorának magasabb rendű tagjait mellőzve a Γ_k funkcionál matematikai formájára a

$$\Gamma_k = \int_x \left[\frac{Z_k(\partial^2)}{2} (\partial_E \phi)^2 + u_k \cos(\phi) \right] \quad (115)$$

feltevést rójuk ki, melyben a Z -vel jelölt hullámfüggvény-renormálást az általánosabb tárgyalás céljából operátornak tekintjük.

A modellt Fourier-térben vizsgálva a hullámfüggvény-renormálást egyszerűbben, az impulzus függvényeként írhatjuk fel, melynek a továbbiakban a

$$Z_k(P^2) = z + z_1 P^2 \quad (116)$$

sorfejtett alakját tekintjük. Ebben a formában z és z_1 operátorok helyett függvényeket jelölnek, így egyetlen új csatolás bevezetése által figyelembe vehető. Később látni fogjuk, hogy a z_1 csatolás az UV-tartományban akkor is jelentős értéket vehet fel, ha az energiaskála alacsonyabb helyén értékét nullának választjuk. Ez egyértelműen mutatja, az új csatolás szükségességét a nagyenergiás kiterjesztés tanulmányozása során.

¹⁴Például az Ising-modellt tekintve az energiaskála csökkentése esetén a renormálás során alkalmazott transzformáció úgy szemléltethető, hogy az adott lépésben egy nagyobb rácsállandóval rendelkező rendszer vizsgálatára térünk át úgy, hogy az eredeti rendszer egymáshoz közel lévő spinjeiből csoportokat (blokkokat) képezünk, majd egy adott blokk spinjeit meghatározott szabály szerint egyetlen spinnel reprezentáljuk.

A továbbiakban bevezetem a $\mathcal{P}_n$ jelölést arra az operátorra, amely tetszőleges ψ függvényre a $\mathcal{P}_n\psi = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} d\phi \cos(n\phi)\psi$ módon hat. Az impulzusfüggő hullámfüggvény-renormálásra vonatkozóan a

$$\begin{aligned} P^2 \partial_k Z_k(P^2) &= \mathcal{P}_0 \int_p \frac{k \partial_k R_{k,p} (V_k''')^2}{(p^2 Z_k(p^2) + R_{k,p} + V_k'')^2} \times \\ &\quad \left(\frac{1}{(P+p)^2 Z_k((P+p)^2) + R_{k,P+p} + V_k''} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{p^2 Z_k(p^2) + R_{k,p} + V_k''} \right) \end{aligned} \quad (117)$$

RG-egyenlet áll fenn.

A modell vizsgálata során a legfontosabb önálló eredményem a z és z_1 csatolásokra vonatkozó RG-egyenleteknek a fenti egyenletből történő levezetése volt. A levezetést a $b = 1$ paraméterrel tekintett CSS-regulátor esetre végeztem el. A terjedelmes, nehezen automatizálható számítások eredményét a az Acta Physica Debrecina folyóiratban publikáltuk [187], értekezésemben csupán az $R_{k,p} = k^2$ regulátorra, azaz a Callan–Symanzik-sémára vonatkozó végeredményt ismertetem.

Ekkor a dimenziós csatolásokra a

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \mathcal{P}_1 \int_p k^2 \mathcal{D} \\ \dot{z} &= 2\mathcal{P}_0 \int_p k^2 V'''^2 \mathcal{D}^4 [-\partial_{p^2} Z - 2z_1 p^2 + 2p^2 (\partial_{p^2} Z)^2 \mathcal{D}] \\ \dot{z}_1 &= \mathcal{P}_0 \int_p k^2 V'''^2 \mathcal{D}^4 \left[-2z_1 \right. \\ &\quad + [24p^2 z_1 \partial_{p^2} Z + 2(\partial_{p^2} Z)^2 + 12z_1^2 p^4] \mathcal{D} \\ &\quad - [12p^2 (\partial_{p^2} Z)^3 + 36p^4 z_1 (\partial_{p^2} Z)^2] \mathcal{D}^2 \\ &\quad \left. + 12p^4 (\partial_{p^2} Z)^4 \mathcal{D}^3 \right], \end{aligned} \quad (118)$$

egyenleteket nyerjük, ahol alkalmaztuk a $\mathcal{D} = \frac{1}{Z_k p^2 + k^2 + V_k''}$ jelölést a propagátorra.

A dimenziótlán csatolásokra a

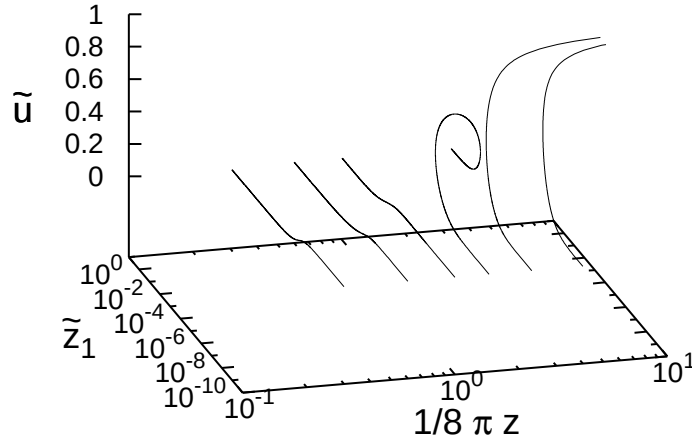
$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{u}} &= -2\tilde{u} - \frac{1}{\tilde{u}} \int_y \left[1 - \frac{\tilde{Z}y + 1}{[(\tilde{Z}y + 1)^2 - \tilde{u}^2]^{1/2}} \right] \\
\dot{\tilde{z}} &= \frac{\tilde{u}^2}{4} \int_y \left[\frac{-(2\partial_y \tilde{Z} + 4\tilde{z}_1 y)(\tilde{Z}y + 1)}{[(\tilde{Z}y + 1)^2 - \tilde{u}^2]^{5/2}} + \frac{y(\partial_y \tilde{Z})^2(4(\tilde{Z}y + 1)^2 + \tilde{u}^2)}{[(\tilde{Z}y + 1)^2 - \tilde{u}^2]^{7/2}} \right] \\
\dot{\tilde{z}}_1 &= 2\tilde{z}_1 + \frac{1}{48} \int_y \left[\frac{-24\tilde{z}_1(\tilde{Z}y + 1)}{[(\tilde{Z}y + 1)^2 - \tilde{u}^2]^{5/2}} \right. \\
&\quad + \frac{(72\tilde{z}_1(\partial_y \tilde{Z})y + 6(\partial_y \tilde{Z})^2 + 36\tilde{z}_1^2 y^2)(4(1 + zy + \tilde{z}_1 y^2)^2 + \tilde{u}^2)}{[(\tilde{Z}y + 1)^2 - \tilde{u}^2]^{7/2}} \\
&\quad + \frac{(-36(\partial_y \tilde{Z})^3 y - 108\tilde{z}_1(\partial_y \tilde{Z})^2 y^2)(\tilde{Z}y + 1)(4(\tilde{Z}y + 1)^2 + 3\tilde{u}^2)}{[(\tilde{Z}y + 1)^2 - \tilde{u}^2]^{9/2}} \\
&\quad \left. + \frac{(18(\partial_y \tilde{Z})^4 y^2)(8(\tilde{Z}y + 1)^4 + 12(\tilde{Z}y + 1)^2 \tilde{u}^2 + \tilde{u}^4)}{[(\tilde{Z}y + 1)^2 - \tilde{u}^2]^{11/2}} \right] \quad (119)
\end{aligned}$$

egyenletek adódnak, ahol bevezettük a $\tilde{Z} = zy + \tilde{z}_1 y^2$, $\tilde{z}_1 = z_1 k^2$ és $y = \frac{p^2}{k^2}$ jelöléseket.

Az egyenletek numerikus vizsgálata szerint az új csatolásra a $\tilde{z}_1 \sim k^2$ irreleváns skálázás jellemző, minőségileg nem módosítja az IR-tartományra vonatkozó korábbi eredményeket. Az UV-tartományban azonban jelentős változást tapasztalhatunk a korábbi fázisszerkezethez képest.

A modell nagyenergiás viselkedését két különböző skálázás versengése határozza meg. Az RG-egyenletek a pólust megközelítve szingulárisan viselkednek, a $\tilde{z}_1$ csatolás növekedése azonban megakadályozhatja a szingularitás megjelenését. Ezáltal amint a 11. ábrán látható a modellben az UV viselkedés alapján két eltérő fázis különböztethető meg.

A $\tilde{z}_1$ csatolás figyelembevétele az UV-tartomány mindkét fázisában új eredményeket szolgáltat. A szimmetriasértett fázisban az egyenletek szingularitása a korábbiakhoz hasonlóan kitüntet egy kritikus értéket az energiaskálán. Az általa meghatározott korrelációs hossz azonban a szingularitás környezetében a $\xi \sim t^{-\nu}$ módon függ a redukált hőmérséklettől, azaz Kosterlitz–Thouless helyett Ising típusú kritikus viselkedést mutat, továbbá



11. ábra : Az SG-modell nagyenergiás kiterjesztésének néhány trajektoriája a $\tilde{z}_1(\Lambda) = 0,0$ kezdeti feltétel esetén. Az ábra a két különböző nagyenergiás fázist szemlélteti.

a kritikus exponensre $\nu = \frac{1}{4}$ érték adódik. A másik fázis esetén a $k \rightarrow \infty$ határesetben a $\tilde{z}_1$ csatolás divergál, megszüntetve a modell aszimptotikus biztonságát. Ezáltal a $\tilde{z}_1$ csatolás bevezetése megsérti az SG-modell fázisszerkezetének szimmetriáját.

5.5. A modellben megnyilvánuló dualitás

Az SG-modellt tanulmányozva szembevető a 9. ábrán látható fázisszerkezet szimmetriája. A minőségileg megnyilvánuló tükörszimmetria a

$$z \rightarrow \frac{1}{z} \quad (120)$$

és

$$k \rightarrow \frac{1}{k} \quad (121)$$

transzformációk által egyszerűen tanulmányozható. Az első transzformáció (a logaritmikus ábrázolás miatt) közelítőleg a tükrözésnek felel meg, a második pedig az energiaskálán történő haladás irányát fordítja meg. Az utóbbi, amely a $t = \ln(\frac{k}{\Lambda})$ ún. „renormálási idő” tükrözésének felel meg, azért szükséges, hogy a szimmetria a trajektóriák irányításának figyelembevétele esetén is fennálljon. Ez a transzformáció a modell alacsony- és nagyenergiás viselkedését cseréli fel.

A továbbiakban a (120) és (121) transzformációk alkalmazásával nyerhető új modellt az adott modell duálisának nevezzük. Az impulzusfüggetlen hullámfüggvény-renormálás közelítésében tekintett SG-modell trajektóriáinak szimmetriája következtében azt mondhatjuk, hogy az SG-modell ebben az esetben közelítőleg önmaga duálisának tekinthető. Ez nem csupán a duális fixpont létezésben nyilvánul meg, hanem a fixpont körüli viselkedés hasonlóságában is, azaz mind az IR, mind az UV fixpont esetén a korrelációs hossz Kosterlitz–Thouless típusú skálázást mutat $\nu = \frac{1}{2}$ exponenssel.

Az elméleti fizikában általában a szimmetriák kitüntetett szerepet töltenek be. A duális transzformációhoz tartozó szimmetria is nagy jelentőségű, mert teljesülése esetén következtetéseket vonhatunk le a modell alacsonyenergiás viselkedéséből a modell nagyenergiás viselkedésére és fordítva, jelentősen egyszerűsítve a modell vizsgálatát.

Érdemes megvizsgálni, hogy a hullámfüggvény-renormálás impulzusfüggését figyelembevevő modellnek milyen duális modell feleltethető meg. Mivel a bevezetett $\tilde{z}_1$ csatolás irrelevánsan skálázik, ezért a korábbi transzformációkkal által meghatározott duális modell (mivel változik a trajektóriák irányítása is) az eredeti modelltől eltérően viselkedik. Ezért kézenfekvőnek tűnik a (120) és (121) transzformációkat úgy kiterjeszteni, hogy az irrelevánsan skálázó $\tilde{z}_1$ csatolásnak relevánsan skálázó csatolást feleltessenek meg.

Relevánsan skálázó csatolás bevezetésére az egyik legegyszerűbb lehető-

ség a modell tömegtaggal történő bővítése, azaz a tömeges SG-modellnek nevezett [108, 131]

$$\mathcal{L}_{\text{MSG}} = \frac{z}{2}(\partial_E \phi)^2 + \frac{1}{2}m\phi^2 + u \cos(\phi) \quad (122)$$

euklideszi Lagrange-sűrűséggel definiált modell vizsgálata. A tömegtag bevezetése jelentős változtatásnak felel meg, mert megsérti az eredeti modell periodikussága következtében fennálló szimmetriát. A hullámfüggvény-renormálás impulzusfüggését elhanyagolva a modell dimenziótlan $\tilde{u} = \frac{u}{k^2}$, $\tilde{z} = z$ és $\tilde{m}^2 = \frac{m^2}{k^2}$ csatolásaira az

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{u}} &= -2\tilde{u} + \frac{1}{2\pi\tilde{u}z} \left[1 + \tilde{m}^2 - \sqrt{(1 + \tilde{m}^2)^2 - \tilde{u}^2} \right], \\ \dot{\tilde{z}} &= -\frac{1}{24\pi} \frac{\tilde{u}^2}{((1 + \tilde{m}^2)^2 - \tilde{u}^2)^{3/2}}, \\ \dot{\tilde{m}^2} &= -2\tilde{m}^2. \end{aligned} \quad (123)$$

RG-egyenleteket nyerjük. A $\tilde{m}^2$ dimenziótlan csatolás releváns módon skálázik, ezért megváltoztatja az eredeti modell alacsonyenergiás viselkedését, viszont elhanyagolható a nagyenergiás viselkedés tárgyalása során. Így amint az 5. táblázat kiemeli az IR fixpont környezetében megváltozik a korrelációs hossz kritikus viselkedésének típusa, míg az UV fixpont környezetében változatlan marad.

A korábbi transzformációkat célszerű a

$$\tilde{z}_1 \leftrightarrow \tilde{m}^2 \quad (124)$$

transzformációval kiegészíteni ezáltal a $\tilde{z}_1$ csatolás figyelembevételével vizsgált SG-modell az impulzusfüggetlen hullámfüggvény-renormálással tekintett tömeges SG-modellnek feleltethető meg. A kölcsönös megfeleltetés következtében a két modell duális párt alkot. Ez a megfeleltetés nem jelent ekvivalens leképezést, amely az Ising típusú viselkedést mutató fixpontok kritikus exponensének eltérésében is megnyilvánul. Az egyes modellek UV

modell	UV	IR
SG	KT típusú, $\nu = 1/2$	KT típusú, $\nu = 1/2$
MSG	KT típusú, $\nu = 1/2$	Ising típusú, $\nu = 1/2$
ZSG	Ising típusú, $\nu = 1/4$	KT típusú, $\nu = 1/2$

5. táblázat : Az értekezésemben tárgyalt SG típusú modellek esetén az UV és az IR-tartományban megjelenő szingularitás környezetében az energiaskála kritikus értéke által meghatározott korrelációs hossz kritikus viselkedése és a hozzá tartozó exponens értéke. A táblázatban SG a tömegtag nélküli SG-modellt, MSG tömeges SG-modellt, ZSG az SG-modellnek az új csatolás bevezetésével nyert nagyenergiás kiterjesztését jelöli, a KT rövidítés a Kosterlitz–Thouless típusú viselkedésre utal.

és IR fixpontjainak környezetében megfigyelhető kritikus viselkedést az 5. táblázat foglalja össze.

A tömeges modell vonatkozásában megnyilvánuló duális kapcsolat egy további motivációt szolgáltat az SG-modellnek a fejezetben ismertetett, a hullámfüggvény-renormálás impulzusfüggését figyelembe vevő bővített fázistéren történő vizsgálatára. A fejezetben ismertetett eredmények a Physical Review D folyóiratban kerültek publikálásra [146].

6. A bozonizált kétdimenziós kvantum-színdinamika vizsgálata a renormálásicsoport-módszerrel

6.1. Alacsonydimenziós modellek

A kvantumtérelméleti modellek vizsgálata során a természet leírásában elért jelentős sikerek mellett az is nyilvánvalóvá vált, hogy a modellek matematikai kezelése, azaz az elmélet jóslatainak pontos kiszámítása során óriási technikai nehézségek lépnek fel. Különösen nagy kihívást jelent az erős kölcsönhatást leíró elmélet, a kvantum-színdinamika alacsonyenergiás viselkedésének tárgyalása, amely megválaszolatlan kérdéseket vet fel. Megoldatlan feladat például az erős kölcsönhatás egyik legnyilvánvalóbb tulajdonságának, a kvarkbezárás jelenségének az elméletből történő levezetése [147].

A problémák megoldásához vezető út keresése során kézenfekvő lehetőség egyszerűbb modellek vizsgálata, amelyek a valóságtól való eltérés árán matematikailag sokkal könnyebben kezelhetők, ezáltal ötleteket adhatnak a bonyolultabb realisztikus modellek vizsgálatához. Így az alacsonydimenziós kvantumtérelméleti modellek bár nem rendelkeznek közvetlen fizikai jelentéssel, játékmódként kitűnő lehetőséget nyújtanak új módszerek kipróbálására mivel jelentősen egyszerűbbek négydimenziós megfelelőjüknél. A kvantum-elektrodinamika kétdimenziós téridőben történő tárgyalása, a QED_2 [148-153] az abeli mértékszimmétia ellenére lehetőséget kínál a kvarkbezárás egyes kérdéseinek vizsgálatára [149, 154-156], továbbá a kvantum-színdinamika kétdimenziós megfelelőjének a QCD_2 -nek [150, 157-160] a keretében a színszám reciproka szerinti sorfejtés [157], a barion spektrum [161-163] és a mezon-barion szórási folyamat [164] tanulmányozható.

A kétdimenziós modellek egyszerűsége abban a minőségi különbségben is megnyilvánul, hogy ekkor a bozonizációnak nevezett eljárás [16, 106, 161, 165-167] által lehetőség nyílik arra, hogy fermionikus elméleteknek és mértékelméleteknek skaláris modellt feleltessünk meg, melynek vizsgálatával az eredeti modell tulajdonságaira következtethetünk. Ezen modellek egyszerűsége azonban nem jelent trivialitást, hiszen a bozonizált modellek gyakran periodikus potenciállal leírható önkölcsönhatást tartalmaznak,

amely a szokásos perturbatív módon nem renormálható. Ez a körülmény indokolttá teszi ezen bozonizált modelleknek a periodikus SG-modell vizsgálatában sikeresen alkalmazott RG-módszerrel történő vizsgálatát.

A továbbiakban az Einstein-féle jelölési módot alkalmazom, mely szerint az azonos indexek összegzést jelölnék a szumma jel szerepeltetése nélkül. A kétdimenziós téridő következtében a görög betűs indexek 0-tól 1-ig futnak továbbá a Minkowski-téridőbeli modellek esetén a jelölések vonatkozásában a [168] jegyzetben ismertetett kovariáns formalizmust követem, amelyben $x_0 = x^0 = ct$, $x_1 = -x^1 = -x$ és a $g^{00} = 1$, $g^{01} = g^{10} = 0$, $g^{11} = -1$ komponensekkel definiált metrikus tenzort alkalmazom.

A kétdimenziós téridő esetén a fermionokat reprezentáló spinorok két-komponensűek, ezért a fermionikus elméletek definiálása előtt szükséges ki térni a γ mátrixok két dimenzióra történő általánosítására. Ennek során a

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad (124)$$

antikommutációs reláció teljesülését követeljük meg, ahol $\mathbf{I}_{2 \times 2}$ a 2×2 -es egységmátrix. A Minkowski-téridő esetén az ezen feltételt kielégítő γ mátrixok megválasztása például a

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (125)$$

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (126)$$

módon történhet.

Az alacsonydimenziós fermionikus modellek közül történetileg az egyik legjelentősebb a négy fermionos vektor-vektor kölcsönhatást tartalmazó Thirring-modell [169], amely az

$$\mathcal{L}_{\text{Th}} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{G}{2} (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \quad (127)$$

Lagrange-sűrűség által definiálható [170]. A tömeg nélküli Thirring-modell szabad bozonikus térelméletnek feleltethető meg, míg a tömeges Thirring-modell bozonizációja az SG-modellre vezet [106].

Az alacsonydimenziós mértékelméletek definiálása a négydimenziós megfelelőjükkel analóg módon történhet. A QED_2 esetén a fermiontömeget nem tartalmazó modell Schwinger-modellként [171, 172] ismert az irodalomban. A QED_2 -ben a négydimenziós modellel eltérően lényeges [149] a vákuumállapotot jellemző θ paraméter szerepe. A bozonizáció által az egyetlen fermionízt tartalmazó modell a θ paraméter megfelelő értéke esetén tömeges SG-modellnek feleltethető meg [170]. Több fermionízt tartalmazó modell esetén a bozonizáció által ún. réteges SG-modellt nyerhetünk [173], ahol a rétegek száma a fermionízek számával egyezik meg. Az elnevezés a szilárdtestfizikai alkalmazásból [7, 97, 98] származik utalva a modellnek a szupravezető rétegekben kialakuló vortexek leírásában betöltött szerepére.

A nemabeli mértékszimmétria alacsonydimenziós vizsgálatára a QCD_2 keretében nyílik lehetőség. A kétdimenziós mértékelméletek bozonizációjának jelentős előnye, hogy a bozonizációval nyert skaláris modellek nem tartalmazzák a mértékteret, ezáltal az RG-módszer alkalmazása során elkerülhető a mértékszimmétria megőrzésének problémája [174-177]. Általános esetben a skaláris modell levezetése ún. nemabeli bozonizáció [166, 167, 178] alkalmazását igényli, ezért értekezésemben a QCD_2 egyetlen fermionízt tartalmazó változatát tárgyalom, amikor az egyszerűbb abeli bozonizáció a színek tetszőleges N_c száma esetén alkalmazható.

A tömeges Thirring-modell bozonizáltjának megfelelő SG-modell mellett az irodalomban korábban már az RG-módszerrel sikeresen tanulmányozták a QED_2 bozonizációjával nyert réteges SG-modellt [153, 173], így kézenfekvővé vált ezen munkák kiegészítése a bozonizált QCD_2 vizsgálatával. A modell tanulmányozása során a fázisszerkezet meghatározására fókuszálunk, ezáltal lehetőség nyílik a Hamilton-sűrűségben végzett sorfejtés alkalmazására.

A további tárgyalás során először ismertetem a QCD_2 bozonizációja által kapott skaláris modellt és annak alacsonyenergiás közelítését, kiemelve a ha-

sonlóságot ezen közelítés és a réteges SG-modellre vezető bozonizált QED₂ között. Ezt követően felírom a sorfejtett modellre az LPA-ban levezetett RG-egyenletet, majd az irodalomban sikeresen alkalmazott közelítéseket felhasználva ismertetem a csatolások UV és IR viselkedésének vizsgálatából a modell fázisszerkezetével kapcsolatban levonható következtetéseket, kitérve a modellnek a színszám növelésével kapott általánosítására.

6.2. A bozonizált QCD₂

A QCD₂ tanulmányozása során az általánosság céljából a vizsgált modellben egyelőre nem rögzítem a színek $N_c \geq 2$ számát, amely meghatározza a modell szimmetriáját leíró $SU(N_c)$ -csoportot. A modell bozonizálását már többen tárgyalták az irodalomban [161, 179].

A továbbiakban egyetlen kvarkízt tekintve a

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_a \left[\frac{1}{2} (\Pi_a^2 + (\partial_1 \phi_a)^2) - y \cos(2\sqrt{\pi} \phi_a) \right] \\ & + A \sum_{a,b} (\phi_a - \phi_b)^2 + B \sum_{a,b} \frac{\sin(2\sqrt{\pi}(\phi_a - \phi_b))}{\phi_a - \phi_b} \end{aligned} \quad (128)$$

Hamilton-sűrűséggel definiált skaláris modellből indulunk ki¹⁵, ahol az összegzést természetesen N_c számú skalártérre kell elvégezni, és Π_a jelöli a ϕ_a skalártérhez tartozó kanonikusan konjugált impulzust.

A modell vizsgálata lényegesen egyszerűbbé válik, ha lehetőség nyílik a Hamilton-sűrűség utolsó tagjában a $\phi_a - \phi_b = 0$ helyen végzett sorfejtés magasabb rendű tagjainak elhagyására. Ezen közelítés nem sérti meg a modell szimmetriáit, ezért nem várható, hogy minőségileg befolyásolja a modell fázisszerkezetét. Azért, hogy alátámasszam a triviális térkonfiguráció körül végzett sorfejtés jogosságát a [151, 153] munkákhoz hasonlóan numerikusan

¹⁵Mivel a további vizsgálatok szempontjából nem releváns, mellőzöm annak tárgyalását, hogy a bozonikus modell y , A és B paraméterei milyen kapcsolatban vannak az eredeti modell paramétereivel. A részletesebb tárgyalás tekintetében a [179] publikációra utalok.

vizsgáltam a Hamilton-sűrűség integrálásával számított energiát minimalizáló statikus térkonfigurációt $N_c = 2$ és $N_c = 3$ esetén.

A QED₂ vizsgálatában jelentős tapasztalatokkal rendelkező szerzőtársaim rendelkezésemre bocsátottak egy numerikus szélsőértékkeresést megvalósító programot, melyet továbbfejlesztettem a vizsgált modellre történő alkalmazás céljából. A program a diszkretizált Hamilton-sűrűséget minimalizáló térkonfiguráció megkeresését a konjugált gradiens módszer [43] alkalmazásával végzi.

A szélsőértékkeresést elvégezve N_c mindkét értéke esetén azt kaptam eredményül, hogy az energia akkor minimális, ha mindegyik térváltozó értéke azonos. Ez lehetőséget nyújt arra, hogy amikor vizsgálatainkat az alapállapothoz közeli térkonfigurációkra korlátozzuk, elhagyjuk a kvadratikusknál magasabb rendű tagokat (128) utolsó tagjának a triviális térkonfiguráció körül tekintett sorfejtésében. Ekkor a térfüggetlen konstans tagtól eltekintve a Hamilton-sűrűség a

$$\mathcal{H} \approx \sum_a \left[\frac{1}{2} (\Pi_a^2 + (\partial_1 \phi_a)^2) - A \cos(2\sqrt{\pi} \phi_a) \right] + \frac{J}{4} \sum_{a,b} (\phi_a - \phi_b)^2 \quad (129)$$

alakba írható. A későbbiekben felhasználásra kerül, hogy a fizikailag releváns esetekben a bevezetett J paraméter értéke pozitív.

Bevezetve a tömörebb $\Phi^T = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_c})$ jelölést és az

$$(\mathcal{M}_{\text{QCD}_2}^2)_{a,b} = (N_c - 1)J\delta_{a,b} - J \quad (130)$$

tömegmátrixot a Φ oszlopvektor segítségével a (129) egyenlet kvadratikus tagja az $\frac{1}{2}\Phi^T \mathcal{M}_{\text{QCD}_2}^2 \Phi$ alakba írható. A tömegmátrix egyetlen zérus értékű sajátértéket és $N_c - 1$ zérustól különböző, $N_c J$ értékű sajátértéket szolgáltat.

Alkalmazva a $\frac{1}{2}(\partial_E \Phi)^2 = \sum_a \frac{1}{2}(\partial_E \phi_a)^2$ jelölést a (129) egyenlet közelítésében a bozonizált modell az

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}_2} = \frac{1}{2}(\partial_E \Phi)^2 + \frac{1}{2}\Phi^T \mathcal{M}_{\text{QCD}_2}^2 \Phi + y \sum_{a=1}^{N_c} \cos(2\sqrt{\pi} \phi_a) \quad (131)$$

euklideszi Lagrange-sűrűséggel definiálható. Ezért az euklideszi téridőben

$$\mathcal{L}_{\text{LSG}} = \frac{1}{2}(\partial_E \Phi)^2 + \frac{1}{2}\Phi^T \mathcal{M}_{\text{LSG}}^2 \Phi + y \sum_{a=1}^N \cos(\beta \phi_a) \quad (132)$$

Lagrange-sűrűséggel definiált $N = N_c$ skalárteret tartalmazó réteges (angolul layered) SG-modell [7, 97, 98, 180-182] a bozonizált QCD₂ alacsonyenergiás közelítésének felel meg a $\beta = 2\sqrt{\pi}$ paraméterválasztás és a tömegmátrix megfelelő megválasztása esetén. Az $\mathcal{M}_{\text{QCD}_2}^2$ típusú tömegmátrix a réteges SG-modell nyelvén Josephson-csatolással [98] összekapcsolt rétegeknek felel meg.

Ezáltal a QCD₂ szoros kapcsolatot mutat a többbízú QED₂-vel, melynek bozonizált formája az

$$\mathcal{L}_{\text{QED}_2} = \frac{1}{2}(\partial_E \Phi)^2 + \frac{1}{2}\Phi^T \mathcal{M}_{\text{QED}_2}^2 \Phi + y \sum_{a=1}^{N_f} \cos\left(2\sqrt{\pi}\phi_a - \frac{\theta}{N}\right) \quad (133)$$

Lagrange-sűrűséggel definiálható [173], ahol N_f jelöli a fermionizációk számát, $\Phi^T = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_f})$ és θ a vákuumállapotot jellemző paraméter. Érdemes hangsúlyozni, hogy a tömegmátrix megválasztására a modell szimmetriája következtében több lehetőség is kínálkozik, melyek az egyes elemek előjelében különböznek. A mátrix minden elemét azonosnak választva $\mathcal{M}_{\text{QED}_2}^2$ elemei $G = \frac{e^2}{\pi}$ értékűnek választhatóak, ahol e a fermionikus modellben a fermiontér és a mértéktér csatolását meghatározó paraméter. A továbbiakban a tömegmátrix

$$(\mathcal{M}_{\text{QED}_2}^2)_{a,b} = (-1)^{a+b} G, \quad a, b = 1, 2, \dots, N_f \quad (134)$$

módon történő megválasztásával élünk. A mátrix $N_f - 1$ zérus értékű sajátértékkel és egyetlen $N_f G$ értékű sajátértékkel rendelkezik.

A bozonizált QED₂ a θ paraméter megfelelő értéke esetén a sorfejtett QCD₂-höz hasonlóan réteges SG-modellnek felel meg. Ennek ellenére, amint a zérus értékű sajátértékek számából látható, $N_c > 2$ ill. $N_f > 2$ esetén

$\mathcal{M}_{\text{QCD}_2}^2$ és $\mathcal{M}_{\text{QED}_2}^2$ nem lehet azonos, azaz általános esetben a két modell különböző réteges SG-modellnek felel meg. Ugyanakkor figyelemre méltó, hogy két réteget tekintve, azaz $N_C = N_f = 2$ esetén a két modell azonosnak tekinthető, mivel ekkor a diagonalizált tömegmátrixok azonos szignatúrájúnak adódnak.

A továbbiakban a QCD_2 -höz tartozó bozonizált modell fázisait a tömeges SG-modellhez hasonlóan a Z_2 -szimmetria spontán sérülése szerint különböztetjük meg. Azonnal felvetődik a kérdés, hogy ténylegesen megvalósulhat-e mind a két fázis, hiszen például a többbízű QED_2 bozonizálásával nyert réteges SG-modell esetén végzett korábbi vizsgálatok [173] alapján lehetséges, hogy csak a szimmetriasértett fázis valósulhat meg. Ugyanakkor egyetlen íz esetén a QED_2 két különböző fázissal rendelkezik [131, 173, 183]. Amint látni fogjuk, az alacsonyenergiás bozonizált modell esetén a Z_2 -szimmetrikus fázis létezésének kérdése a megfelelő közelítések keretei között az RG-módszer alkalmazásával megválaszolható.

6.3. A renormálásicsoport-egyenlet ultraibolya viselkedése

A bonyolultabb modellek vizsgálatát kézenfekvő az RG-egyenletek nagyenergiás (UV) közelítésének tanulmányozásával kezdeni, ezért elsőként az UV-levágásnál linearizált RG-egyenletből levonható következtetéseket tekintem át és a következő szakaszban térek ki arra, hogy helytálló-e a modell fázis-szerkezetére ebben a közelítésben nyert eredmény.

Mivel elsődleges célunk a fázisszerkezet minőségi leírása az alacsonyenergiás bozonizált QCD_2 RG-módszerrel történő vizsgálatát LPA-ra korlátozzuk. Az egyszeűség kedvéért a modell vizsgálata során a WH-féle renormálási sémát alkalmazzuk, amely a tanulmányozott kétdimenziós esetben LPA-ban a Callan–Symanzik-sémával azonosnak tekinthető [108]. A WH-féle renormálási sémát alkalmazva a $\tilde{V}_k = k^{-2}V_k$ módon definiált dimenziótlan potenciálra vonatkozóan a

$$(2 + k \partial_k) \tilde{V}_k(\Phi) = -\frac{1}{4\pi} \ln \left[\det \left(\delta_{ij} + \tilde{V}_k^{ij}(\Phi) \right) \right] \quad (135)$$

egyenletet nyerjük [173], ahol $\tilde{V}_k^{ij} = \partial_{\phi_i} \partial_{\phi_j} \tilde{V}_k$.

Az egyenlet kezdeti feltételét, azaz a potenciál UV-levágásnál megadott alakját természetesen a modellt definiáló Lagrange-sűrűség határozza meg. A nagyenergiás közelítés ismertetése során az általánosabb tárgyalás céljából a (132) egyenlettel definiált réteges SG-modellt tekintem át, nem rögzítve a tömegmátrixot és a β paraméter értékét. Az $\tilde{\mathcal{M}}_{\text{LSG}}^2$ módon jelölve az $\mathcal{M}_{\text{LSG}}^2 k^{-2}$ dimenziótlan tömegmátrixot az egyenlet megoldása során a potenciálra a

$$\tilde{V}_k(\Phi) = \frac{1}{2} \Phi^T \tilde{\mathcal{M}}_{\text{LSG}}^2(k) \Phi + \tilde{y}(k) \sum_{n=1}^N \cos(\beta \phi_n) \quad (136)$$

feltételt rójuk ki. Ezen feltételben a felharmonikusokat elhanyagoljuk felhasználva azt a tapasztalatot [86], hogy az SG-modell esetén a Fourier-sorfejtés magasabb rendű tagjainak figyelembevétele minőségileg nem befolyásolja a fázisszerkezet meghatározását.

Az egyenlet periodikus és nem periodikus részét szétválasztva a dimenziótlanított tömegmátrixra vonatkozó

$$(2 + k \partial_k) \tilde{\mathcal{M}}_{\text{LSG}}^2(k) = 0, \quad (137)$$

egyenletet nyerjük. Az egyenlet megoldása szerint a tömegmátrix $\mathcal{M}_{\text{QCD}_2}^2$ ill. $\mathcal{M}_{\text{QED}_2}^2$ szerinti megválasztása esetén a dimenziótlan $\tilde{J}$ ill. $\tilde{G}$ csatolás a kanonikus dimenzió szerint skálázik, azaz eltűnik a dimenziós J ill. G csatolás skálafüggése.

Bevezetve az $\tilde{U}_k = \tilde{y}(k) \sum_{n=1}^N \cos(\beta \phi_n)$ jelölést a dimenziótlan potenciál periodikus tagjára és a

$$\det \left(\delta_{ij} + \tilde{V}_k^{ij}(\Phi) \right) \approx C + F_1(\tilde{U}_k) + \mathcal{O}(\tilde{U}_k^2) \quad (138)$$

módon a (135) egyenletben szereplő determináns $\tilde{U}_k$ -ban magasabb rendű tagjait elhagyva az RG-egyenlet linearizálása a

$$(2 + k \partial_k) \tilde{U}_k = -\frac{1}{4\pi} \frac{F_1(U_k)}{C} \quad (139)$$

egyenletre [173] vezet. Ezen közelítésre tömeg-korrigált RG-áramlásigörbe-ként hivatkoznak a szakirodalomban [173] megkülönböztetve az egyszerű $\partial_{\phi_n}^2 \tilde{V}_k$ -ban történő sorfejtéstől, mely a híg gáz közelítésnek feleltethető meg [173].

A (139) egyenlet megoldásaként az $\tilde{y}$ dimenziótlan csatolás skálafüggésére az $\mathcal{M}_{\text{QCD}_2}^2$ tömegmátrix esetén

$$\tilde{y}(k) = \tilde{y}(\Lambda) \left(\frac{k}{\Lambda} \right)^{\frac{\beta^2}{N4\pi} - 2} \left(\frac{k^2 + NJ}{\Lambda^2 + NJ} \right)^{\frac{(N-1)\beta^2}{N8\pi}}, \quad (140)$$

míg az $\mathcal{M}_{\text{QED}_2}^2$ tömegmátrix esetén

$$\tilde{y}(k) = \tilde{y}(\Lambda) \left(\frac{k}{\Lambda} \right)^{\frac{(N-1)\beta^2}{N4\pi} - 2} \left(\frac{k^2 + NG}{\Lambda^2 + NG} \right)^{\frac{\beta^2}{N8\pi}} \quad (141)$$

adódik, ahol $\tilde{y}(\Lambda)$ a csatolásnak a Λ UV-levágásnál felvett értékét jelöli.

Annak ellenére, hogy az $N_c = 1$ esetre a QCD_2 nincs definiálva egyetlen réteg esetén is definiálhatjuk QCD_2 típusú tömegtagot tartalmazó réteges SG-modellt. Mivel az

$$\frac{1}{2} \Phi^T \mathcal{M}_{\text{QCD}_2}^2 \Phi = \sum_{a=1}^{N_c} \sum_{b=1}^{N_c} \frac{J}{4} (\phi_a - \phi_b)^2 \quad (142)$$

egyenletből kiindulva $N_c = 1$ esetén a QCD_2 típusú tömegtag eltűnik az $\mathcal{M}_{\text{QCD}_2}^2$ tömegmátrixú réteges SG-modellnek egyetlen réteg esetén az egyszerű tömegtelen SG-modell feleltethető meg. Érdemes hangsúlyozni, hogy ez eltérést jelent a tömegmátrix $N_c > 1$ esetben érvényes (130) egyenletben szereplő kifejezésétől.

Az egyenletekből leolvasható a $k \rightarrow 0$ aszimptotikus határesetben $\tilde{y}$ releváns és irreleváns skálázását elválasztó kritikus β érték. A QCD₂ típusú tömegmátrixra vonatkozó (140) egyenlet esetén β^2 kritikus értéke $\beta_c^2 = 8\pi N$, míg a QED₂ típusú tömegmátrixra vonatkozó (141) egyenlet esetén a kritikus érték $\beta_c^2 = \frac{8\pi N}{N-1}$. A kritikus érték függését a rétegek számától a QCD₂ és QED₂ típusú tömegmátrixok esetén a 12. ábra szemlélteti. A kapott kritikus értékek szerint a nagyenergiás közelítésből az következik, hogy mind a bozonizált QED₂, mind az alacsonyenergiás bozonizált QCD₂ a réteges SG-modell szimmetriasértett fázisának felel meg mivel az ezen modelleknek megfelelő $\beta^2 = 4\pi$ érték β_c^2 -nél kisebb.

Amint az előző fejezetekben vizsgált modellek példáján láthattuk a szimmetriasértett fázisban az RG-egyenlet a szimmetrikus fázistól minőségileg eltérő viselkedést mutat, melynek tanulmányozása egy további módot ad annak eldöntésére, hogy az adott kezdeti feltétel melyik fázishoz tartozik. Vizsgálatainkat a (136) feltétel szerint az alapharmonikusra korlátozva a (135) egyenletben a logaritmus argumentumának zérussá válása által megjelenő pólus utal a szimmetriasértett fázisra. Első közelítésben azt a kérdést tehetjük fel, hogy megjelenik-e a pólus az RG-egyenletek UV viselkedését a k skála alacsonyabb értékei felé extrapolálva.

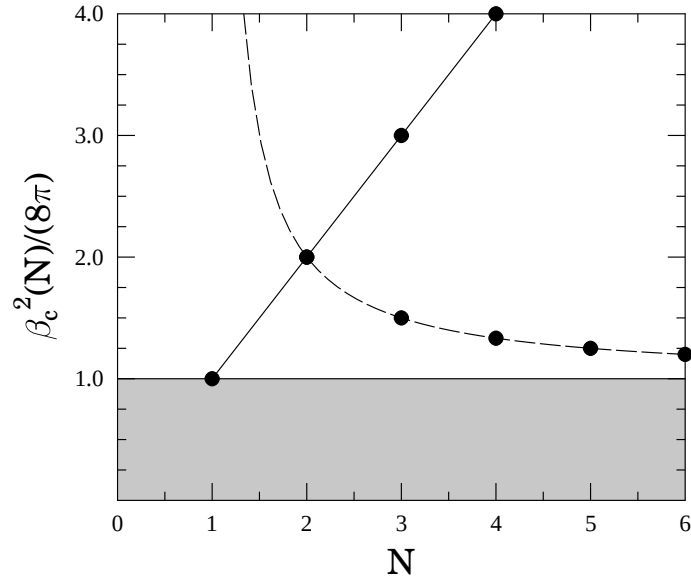
Három szín, azaz három réteg esetén a (135) RG-egyenlet a

$$\begin{aligned}
 (2 + k\partial_k)\tilde{V}_k &= -\frac{1}{4\pi} \ln \left[(1 + \tilde{V}_k^{11})(1 + \tilde{V}_k^{22})(1 + \tilde{V}_k^{33}) + \tilde{V}_k^{12}\tilde{V}_k^{23}\tilde{V}_k^{31} \right. \\
 &\quad + \tilde{V}_k^{13}\tilde{V}_k^{21}\tilde{V}_k^{32} - \tilde{V}_k^{13}(1 + \tilde{V}_k^{22})\tilde{V}_k^{31} \\
 &\quad \left. - \tilde{V}_k^{12}\tilde{V}_k^{21}(1 + \tilde{V}_k^{33}) - (1 + \tilde{V}_k^{11})\tilde{V}_k^{23}\tilde{V}_k^{32} \right] \quad (143)
 \end{aligned}$$

alakot ölti, a (136) feltétel pedig (QCD₂ típusú tömegmátrix esetén) a

$$\tilde{V}_k = \frac{1}{2} \tilde{J}[(\phi_1 - \phi_2)^2 + (\phi_2 - \phi_3)^2 + (\phi_3 - \phi_1)^2] + \tilde{y}[\cos(\beta\phi_1) + \cos(\beta\phi_2) + \cos(\beta\phi_3)] \quad (144)$$

alakban írható fel. A potenciálnak ezt a formáját az RG-egyenletbe helyet-



12. ábra : A $\frac{\beta^2}{8\pi}$ hányados az egyenletek UV viselkedése szerint meghatározott $\beta = \beta_c$ kritikus érték esetén az N rétegszám függvényében. A szaggatott vonallal összekötött értékek a QED₂ típusú tömegmátrix esetére, a folytonos vonallal összekötött értékek a QCD₂ típusú tömegmátrix esetére vonatkoznak. A β_c -nek megfelelő érték minden esetben az elszűrített tartományon kívül található.

tesítve a $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$ helyen a pólus létezésének feltételére az

$$(1 - \beta^2 \tilde{y})(1 + 3\tilde{J} - \beta^2 \tilde{y})^2 = 0 \quad (145)$$

egyenlet adódik, ahol $\tilde{J} > 0$. Az egyenlet UV viselkedésének extrapolálásából az következik, hogy $\tilde{y}$ a (140) egyenlet szerint releváns módon skálázik és $1 - \beta^2 \tilde{y}$ valamely k értéknél nullához tart, ezáltal pólus jelenik meg az RG-egyenletben. Ezen közelítés szerint $N_c = 3$ esetén az RG-egyenlet minden kezdeti feltétele a szimmetriasértett fázishoz tartozik, ezért a modellnek egy fázisa van.

Hasonló vizsgálat természetesen a QED₂ típusú tömegmátrix esetén is elvégezhető, ekkor a háromrétegű modell esetén a pólus megjelenésének feltételére az

$$(1 - \beta^2 \tilde{y})^2(1 + 3\tilde{G} - \beta^2 \tilde{y}) = 0 \quad (146)$$

egyenletet nyerjük, így mivel a (141) egyenlet szerint az $\tilde{y}$ csatolás ebben az esetben is aszimptotikusan tekintve a k skála negatív kitevőjű hatványával arányos így az érvelésünk szintén a pólus megjelenéséhez, azaz a szimmetriasértett fázis kizárólagosságához vezet, összhangban a szakirodalom eredményével [173].

Az általánosság céljából vizsgálatainkat nagy rétegszám esetére kiterjesztve a QCD₂ típusú tömegmátrix esetén a pólusra vonatkozó feltételre az

$$(1 - \beta^2 \tilde{y})(1 + N\tilde{J} - \beta^2 \tilde{y})^{N-1} = 0 \quad (147)$$

egyenlet adódik, amely a csatolás (140) egyenlet szerinti skálafüggése esetén mindig divergencia megjelenéséhez vezet. Ezért a megközelítésünk azt sugallja, hogy tetszőleges színszám esetén a spontán szimmetriasértés mindig megvalósul a modellben, azaz az alacsonyenergiás bozonizált QCD₂ egyetlen fázissal rendelkezik.

Ez a közelítés nem veszi figyelembe azt, hogy az RG-egyenlet megoldása során az energiaskála csökkentésével a potenciálban a magasabb frekvenciájú módusokból származó járulékok is megjelennek, amelyek az $\tilde{y}$ csatolás

skalázását is megváltoztathatják. Ennek következtében a fázisszerkezetre levont következtetést ellenőrizni szükséges, amelyre az RG-egyenlet IR viselkedésének tárgyalása során nyílik lehetőség.

6.4. A renormálásicsoport-egyenlet infravörös viselkedése

A réteges SG-modellre vonatkozó (135) RG-egyenlet megoldása technikailag jelentős kihívás, mindazáltal az egyenlet alacsonyenergiás (IR) viselkedésének tanulmányozása numerikusan kezelhetővé válik az alábbiakban ismertetett közelítés által. Ennek alkalmazásához az N -komponensű Φ térváltozó elforgatásával új térváltozót vezetünk be, melynek segítségével a tömegmátrix diagonális formában írható fel. QCD₂ típusú tömegmátrix esetén (amint a mátrix sajátértékeiből következik) az új térváltozó komponensei egyetlen tömegtelen és $N - 1$ tömeggel rendelkező skalártérnek felelnek meg. Ezt kihasználva feltételezhetjük, hogy a tömeggel rendelkező skalárterek nagy amplitúdójú fluktuációi el vannak nyomva, azaz alkalmazhatjuk a potenciál tömeggel rendelkező térkomponensekben sorfejtett alakját. Hasonló megközelítést korábban már sikeresen alkalmaztak a réteges SG-modell vizsgálata során [184].

Ezt az utat követve a három színre vonatkozó $N = 3$ esetben az új térváltozó komponenseit az

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^3 \mathcal{R}_{ij} \phi_j \quad (148)$$

egyenlettel vezetjük be, ahol az $\mathcal{R}$ mátrixot az

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad (149)$$

alakban választjuk meg. Az új térváltozók segítségével a Lagrange-sűrűség

az

$$\mathcal{L}_\alpha = \frac{1}{2}(\partial_E \alpha_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_E \alpha_2)^2 + \frac{1}{2}(\partial_E \alpha_3)^2 + \frac{3}{2}J(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) + V_\alpha \quad (150)$$

alakba írható, ahol¹⁶

$$\begin{aligned} V_\alpha = & 2\tilde{y} \cos\left(\beta \frac{\alpha_1}{\sqrt{3}}\right) \cos\left(\beta \frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\beta \frac{\alpha_3}{\sqrt{6}}\right) \\ & - 2\tilde{y} \sin\left(\beta \frac{\alpha_1}{\sqrt{3}}\right) \cos\left(\beta \frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\beta \frac{\alpha_3}{\sqrt{6}}\right) \\ & + \tilde{y} \cos\left(\beta \frac{\alpha_1}{\sqrt{3}}\right) \cos^2\left(\beta \frac{\alpha_3}{\sqrt{6}}\right) - \tilde{y} \cos\left(\beta \frac{\alpha_1}{\sqrt{3}}\right) \sin^2\left(\beta \frac{\alpha_3}{\sqrt{6}}\right) \\ & + 2\tilde{y} \sin\left(\beta \frac{\alpha_1}{\sqrt{3}}\right) \cos\left(\beta \frac{\alpha_3}{\sqrt{6}}\right) \sin\left(\beta \frac{\alpha_3}{\sqrt{6}}\right). \end{aligned} \quad (151)$$

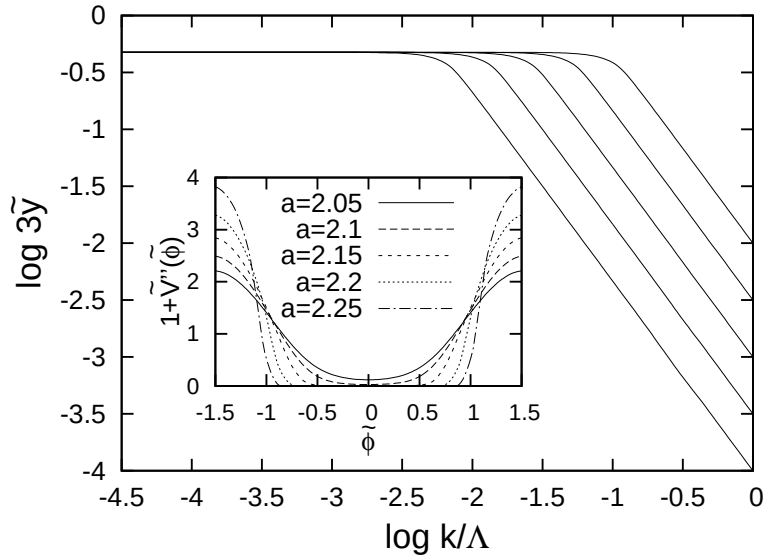
Az ismertett stratégia szerint a potenciált az $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ helyen a tömeggel rendelkező komponensekben Taylor-sorba fejtve a sorfejtés első tagja az

$$\mathcal{L}_\alpha^0 = \frac{1}{2}(\partial_E \alpha_1)^2 + 3\tilde{y} \cos\left(\beta \frac{\alpha_1}{\sqrt{3}}\right) \quad (152)$$

Lagrange-sűrűségre vezet. Ebből következően a modell alacsonyenergiás viselkedése az egyszerű SG-modell IR viselkedése által írható le. A bozonizáció során a β paraméter értéke rögzített, ezért a háromszínű bozonizált QCD₂-nek megfelelő SG-modell paramétere $\beta_{SG} = \frac{\beta}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}}$ amely paraméter a szimmetriasértett fázishoz tartozik [86].

A fázisszerkezetre vonatkozó megállapítás mellett érdemes kitérni a modell IR viselkedésének néhány további jellemzőjére. Az RG-trajektóriák viselkedését az IR-tartományban egy vonzó fixpont határozza meg, amelynek következtében a k skála értékét csökkentve a potenciál az ultraibolya-levágásban felvett értékétől függetlenné válik, amire az irodalomban szuperuniverzális skálázásként hivatkoznak. A potenciál ezen viselkedését a 13.

¹⁶Az eredményeinket tárgyaló [185] publikációban V_α képlete tévesen szerepel, mindazáltal ez nem befolyásolja a levont következtetéseket.



13. ábra : A dimenziótlan $\tilde{\gamma}$ csatolásnak az IR-tartományban megfigyelt szuperuniverzális skálázása különböző kezdeti értékek esetén. A betétrész szemlélteti a potenciál alakjának változását a k skála csökkentése során. A betétrész görbéi a $k/\Lambda = 10^{-a}$ értékekre vonatkoznak.

ábra szemlélteti megjelenítve az RG-egyenlet néhány különböző kezdeti feltételhez tartozó megoldását. Az irodalom egyes korábbi vizsgálatai [108, 84] abba az irányba mutattak, hogy az univerzálissá váló dimenziótlan potenciál alakja a térváltozó alacsony értékei esetén parabola. A Fourier-sorfejtés elkerülésével végzett nagy pontosságú numerikus számítások szerint azonban a potenciál alakja eltér a parabolától, amint azt a 13. ábra betétrésze szemlélteti. Látható továbbá, hogy a potenciálnak az RG-egyenlet megoldásával nyert alakja nem analitikus, ezért a spontán szimmetriasértés megjelenésére következtethetünk.

Vizsgálatainkat érdemes kiterjeszteni tetszőleges színszám esetre. Ekkor a fenti érvelés szerint a tömeggel rendelkező térkomponensekben elvég-

zett sorfejtés magasabb rendű tagjait elhagyva az

$$\mathcal{L}_\alpha^0 = \frac{1}{2}(\partial_E \alpha_1)^2 + N\tilde{y} \cos\left(\beta \frac{\alpha_1}{\sqrt{N}}\right) \quad (153)$$

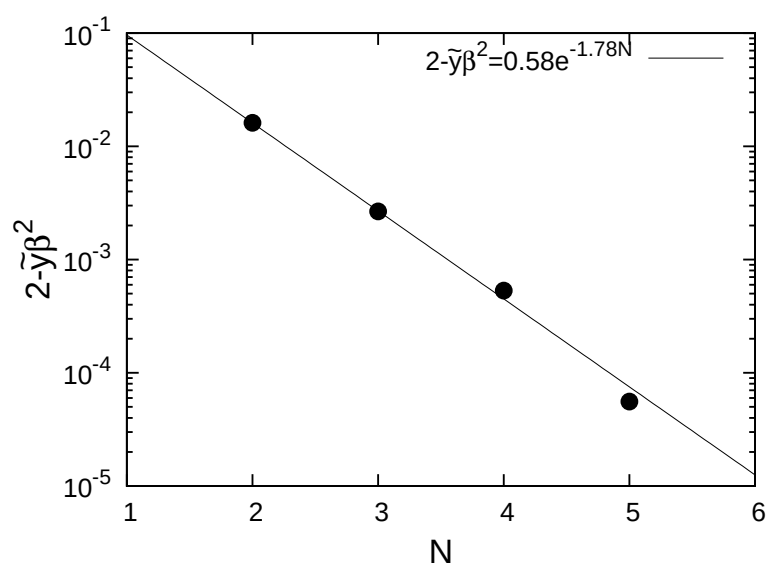
Lagrange-sűrűséget nyerjük, amely $\beta_{SG} = \frac{\beta}{\sqrt{N}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{N}}$ paraméterű SG-modellnek felel meg. Ebből következően a bozoniált QCD₂ alacsonyenergiás viselkedését tekintve tetszőleges színszám esetén csupán a szimmetriasértett fázis valósulhat meg.

Végezetül feltehetjük azt a kérdést, hogy a szuperuniverzális potenciál alakja hogyan függ a színek számától¹⁷. A parabolától eltérő szuperuniverzális potenciál tekintetében a Fourier-sorfejtés elkerülésével végzett számítások és a korábbi eredmények közötti különbség az alapharmonikusnak a $\frac{2}{\beta^2}$ értéktől való eltéréseivel, ezáltal a $2 - \tilde{y}\beta^2$ mennyiség IR-ben tekintett értékével jellemezhető. A 14. ábra azt szemlélteti, hogy hogyan függ ez a mennyiség a színek számától.

Látható, hogy a színek számának növelésével a potenciál alakja egyre kevésbé tér el a korábbi eredményektől. Az ábra alapján feltételezhetjük, hogy a parabolikus potenciál az $N \rightarrow \infty$ határesetnek felel meg. Ennek ellenére ezt az állítást az ismertett módszerrel közvetlenül nem ellenőrizhetjük, mivel a numerikus számítások elvégzése N növelésével technikailag egyre nehezebbé válik.

Az RG-módszer által a QCD₂ alacsonyenergiás közelítésének vizsgálatában elért új eredményeink a Journal of High Energy Physics folyóiratban kerültek publikálásra [185].

¹⁷Az egyszerűség kedvéért a színek száma kifejezést használom, amelyet az $N = 1$ esetre tekintettel a QCD₂ típusú tömegmátrixszal jellemzett réteges SG-modell rétegszámaként kell értelmezni.



14. ábra : $2 - \tilde{\gamma}\beta^2$ IR értékének függése a színek N számától.

7. Összefoglalás

Értekezésemben euklideszi téridőben tekintett kvantált fizikai modelleket vizsgáltam a funkcionális renormáláscsoport-módszer (RG-módszer) alkalmazásával. Ez a módszer amellet, hogy forradalmasította a folytonos fázisátalakulások vizsgálatát, kvantumelméleti és statisztikus fizikai modellek rendkívül elegáns megközelítésére nyújt lehetőséget. Az RG szemléletének az előnyei közé tartozik a nemperturbatív tárgyalás mellett a vizsgálandó rendszer lényeges jellemzőit megragadó közelítések alkalmazása és az energiaskála különböző tartományaihoz tartozó szabadsági fokok elkülönítése. A módszer alkalmazása során következetesen figyelembe vehetjük a modellek érvényességének mind az alacsony-, mind a nagyenergiás korlátját ill. bizonyos közelítésekben ezeknek a korlátoknak az értékére is következtethetünk.

A kutatási kérdések tárgyalása előtt értekezésem 2. fejezetében áttekintést adtam az RG-módszerről. A módszer általános szemléletének ismertetését követően kitértem az euklideszi téridőben tekintett kvantumtérelméleti modellek és a statisztikus fizikai modellek kapcsolatára, melynek köszönhetően a renormálás fogalma mind a szilárdtestfizika, mind a részecskefizika területéről megközelíthető. Ennek az analógiának az ismertetése során röviden kitértem az Ising-modellre és ennek folytonos általánosítására, és megemlítettem, hogy a formalizmus kvantummechanikai modellek kezelésre is lehetőséget nyújt.

Az RG-módszer matematikai formalizmusát áttekintve nagy vonalakban ismertettem a Wegner–Houghton-egyenlet és a Wetterich-egyenlet levezetését. A Wegner–Houghton-féle megközelítés technikailag egyszerűbb, de alkalmazásának jelentős korlátjai vannak. A Wetterich-féle formalizmus általánosabban alkalmazható, viszont az úgynevezett regulátor függvény többféle megválasztását engedélyezi, mely szerint különböző renormálási sémákat különböztetünk meg.

Az alkalmazások során általában a hatás alakjára kirótt feltevésekkel élünk, így közelítések által a funkcionális RG-egyenletet az energiaskálától függő függvényekre vonatkozó differenciálegyenlet-rendszerre képezhet-

jük le. A vizsgált modell makroszkopikus jellemzőit az egyenleteknek az energiaskála alacsony értékeihez tartozó megoldása határozza meg.

Az RG-módszer fázisátalakulásokra vonatkozó alkalmazását tárgyalva ismertettem a fázisátalakulás kritikus fixpont létezésén keresztül történő kimutatását és a linearizált RG-egyenletek kapcsolatát a korrelációs hossz kritikus exponensével. A további kritikus exponensek kielégítő meghatározása a hullámfüggvény-renormálás viselkedése által meghatározott anomális dimenzió által történhet. A kvantitatív jellemzés mellett az RG-módszer a trajektóriák kritikus felülethez közeli viselkedését leírva egyszerű, szemléletes magyarázatot ad a különböző rendszerek fázisátalakulása során tapasztalható univerzalitásra. Emellett az RG módszer jelentősége abban is megnyilvánul, hogy új megvilágításba helyezte a történeti osztályozás alapján az ún. nemrenormálható elméletek közé sorolt térelméleti modelleket, hozzájárulva az alapvető kölcsönhatásokról kialakult szemléletünk fejlődéséhez.

Értekezésemben a kutatási problémák kifejtése a vizsgált modellek szerint négy részre tagolódik. A 3. fejezetben a kvantált anharmonikus oszcillátort, a 4. fejezetben a Caldeira–Leggett-modell egyes változatait, az 5. fejezetben a sine-Gordon-modell nagyenergiás kiterjesztését, a 6. fejezetben a kétdimenziós kvantum-színdinamikának megfelelő bozonizált modell alacsonyenergiás közelítését tárgyaltam.

Az egydimenziós kvantált anharmonikus oszcillátor tanulmányozásának motivációját az szolgálhatta, hogy ez a viszonylag egyszerű modell ideális lehetőséget nyújt a renormálási séma optimalizálásának vizsgálatára. Az optimalizálást az első gerjesztett állapot és az alapállapot energiájának különbségének tekintetében végeztem, amely mennyiség vonatkozásában pontos irodalmi értékek állnak rendelkezésre.

Mivel az eredmények pontosságát a renormálási séma megválasztásától független közelítések is befolyásolják, az irodalomban gyakran a legkisebb érzékenység elvét alkalmazzák. Ez által azt a regulátort tekintik optimálisnak, amely esetén a vizsgált fizikai mennyiségre vonatkozó, a regulátor paraméterétől függő eredménynek stacionárius helye van.

A közelmúltban bevezetett CSS-regulátor lehetőséget nyújt a Litim-regulátor, a hatványfüggvény-regulátor és az exponenciális regulátor legkisebb érzékenység elve szerint történő összehasonlítására, mivel ezek a különböző formájú regulátorok előállíthatóak a CSS-regulátor speciális határeseiteiként. Értekezésemben a CSS-regulátor két paraméterét változtatva az említett energiakülönbség tekintetében tanulmányoztam a renormálási séma optimalizálását. Eredményeim szerint a modell esetén a legkisebb érzékenység elve a széles körben optimálisnak tekintett Litim-regulátornál előnyesebb regulátorra vezet. Tapasztalataim alapján javaslatot tettünk a Litim-regulátor olyan módosítására, amely esetén az impulzusintegrál a Litim-sémához hasonlóan analitikusan elvégezhető.

A 4. fejezetben a kvantált Caldeira–Leggett-modell egyes folytonos spektrumú változatait tárgyaltam, melyek nyílt kvantummechanikai rendszerek tárgyalására kínálnak lehetőséget. Ezekben a modellekben a vizsgálat szempontjából releváns alrendszer környezetének hatását a környezet gerjesztéseinek frekvenciáit jellemző spektrálfüggvényen keresztül vesszük figyelembe. A környezet spektrumának realiztikus leírása a spektrálfüggvény levágásának bevezetését igényli. Értekezésemben a levágásnak a Heaviside-féle egységugrásfüggvénnyel megadott Debye-féle és a Lorentz-függvénnyel megadott Drude-féle bevezetését alkalmaztam.

A környezettel történő kölcsönhatás következtében a modellekben a Z_2 -szimmetria spontán sérülésével kapcsolatos fázisátalakulás jelenik meg, melyre kvantum-klasszikus átmenetként hivatkoznak az irodalomban. A fázisátalakuláshoz kapcsolódó kritikus viselkedést az RG eszözeivel tanulmányoztam. A Wegner–Houghton-séma alkalmazásával a Debye- és Drude-féle levágás esetén meghatároztam a szuszceptibilitás és a korrelációs hossz kritikus viselkedését jellemző exponensek értékét, kitérve annak vizsgálatára, hogy a bevezetett levágás értéke ill. a levágás típusának megválasztása hogyan befolyásolja az exponensek értékét.

Az eredményeim szerint a levágás alacsony értékei esetén a kritikus exponensek a spektrálfüggvény levágásától függetlennek tekinthetők és a két-féle típusú levágás egyező értékeket szolgáltat. A Drude-féle levágás esetén

a szuszceptibilitásra vonatkozóan Litim-sémában is végeztem számításokat. Emellett a folytonos spektrumú kvantált Caldeira-Leggett modell levágás nélküli változatának kritikus viselkedését is tárgyaltam.

Az 5. fejezetben a kétdimenziós sine-Gordon-modell nagyenergiás kiterjesztését tárgyaltam. A sine-Gordon-modell tanulmányozásában az RG-módszer már korábban is jelentős sikereket ért el leírva a modell összetett fázisszerkezetét és jellegzetes Kosterlitz–Thouless típusú fázisátalakulását.

A sine-Gordon-modellre vonatkozó rövid irodalmi áttekintést követően ismertettem a modell két csatolás figyelembevételével által nyert fázisszerkezetét, amely az általánosan értelmezett aszimptotikus biztonság kérdését veti fel. A kérdés teljesebb tárgyalása a modell nagyenergiás kiterjesztésének részletesebb vizsgálatát igényli.

Az RG-módszer a számítások során az energiaskálán a szokásossal ellentétes irányban haladva bizonyos keretek között lehetőséget nyújt a modell nagyenergiás kiterjesztésének tanulmányozására is. A nagyenergiás kiterjesztés a térváltozó magasabb rendű deriváltjait tartalmazó hatás által jellemezhető, melynek tanulmányozása impulzusfüggő hullámfüggvény-renormálást igényel. Az értekezésemben Callan–Symanzik-séma esetén ismertetett RG-egyenletek vizsgálgatnkat a potenciál alapharmonikusára korlátozva egy új csatolás bevezetése által impulzusfüggő hullámfüggvény-renormálás alkalmazására nyújtanak lehetőséget.

Az egyenletek alkalmazásával a nagyenergiás viselkedés tekintetében egy új fázis megjelenése által Kosterlitz–Thouless típusú fázisátalakulást figyelhetünk meg. Az új fázis létezése megsérti a modellben két csatolásának figyelembevételével esetén tapasztalható általánosított aszimptotikus biztonságot.

A fejezet végén ismertettem a modellben közelítőleg érvényesülő duális szimmetriát és a duális transzformáció általánosítását. Ez az általánosítás a modell nagyenergiás kiterjesztését a tömeges sine-Gordon-modell alacsonyenergiás viselkedésével kapcsolja össze.

A 6. fejezetben az egy fermionízzel rendelkező kétdimenziós kvantum-színdinamika bozonizálásával nyerhető skaláris modell alacsonyenergiás kö-

zelítésének fázisszerkezetét tárgyaltam. A bozonizált modell Hamilton-sűrűségében a triviális térkonfiguráció körül végzett sorfejtés vezető tagjai a réteges sine-Gordon modellnek felelnek meg. Ahhoz, hogy ebben a közelítésben az alacsonyenergiás viselkedést tárgyalhassuk kulcsfontosságú, hogy a Hamilton-sűrűséget minimalizáló térkonfiguráció triviális legyen. Ennek ellenőrzése céljából a diszkretizált Hamilton-sűrűséget tekintve a konjugált gradiens módszerrel numerikusan kerestem meg az energiafunkcionált minimalizáló térkonfigurációt.

Értekezésemben kitértem a többbízű kétdimenziós kvantum-elektrodinamika tárgyalására, melynek bozonizálása szintén réteges sine-Gordon-moddre vezet. A rétegek száma ekkor a fermionizék számával, míg a korábban említett modell esetén a színek számával egyezik meg.

Értekezésemben a réteges sine-Gordon modell tekintetében lokális potenciál közelítésre szorítkoztam. Az RG-módszer keretében a fázisszerkezetre több módon próbálhatunk következtetni. Értekezésemben tárgyaltam a csatolás skálafüggésének a tömegkorrigált áramlásigörbék ultraibolya-tartományban érvényes RG-egyenlete szerinti meghatározását a potenciál alapharmonikusára szorítókozó közelítés esetén. Emellett tárgyaltam az infravörös-tartomány felé extrapolált egyenlet pólusának vizsgálatát is. Mindkét érvelés arra utal, hogy a modell egyetlen fázissal rendelkezik, amely a szimmetriasértett fázis.

A fázisszerkezet egyértelmű meghatározása a RG-egyenlet infravörös viselkedésének ismeretét igényli. A tömegmátrix új térváltozók bevezetésével történő diagonalizálása után az alacsonyenergiás viselkedés meghatározására a hatás tömeges komponensekben sorfejtett közelítését alkalmazhatjuk, amely esetben az infravörös viselkedés kérdése már technikailag könnyebben kezelhető. Az így végzett vizsgálat egyértelműen egyetlen fázis létezését mutatja. Ekkor a potenciál felharmonikusainak szerepe is vizsgálható, amely csupán mennyiségi változást okoz az alapharmonikusra szorítókozó közelítéshez képest.

8. Angol nyelvű összefoglalás (Summary in English)

In my dissertation quantum theoretical models in Euclidean spacetime are examined by the functional renormalization group (RG) method. This method has revolutionised the investigation of the continuous phase transitions and given extremely elegant approach for field theoretical models both in quantum physics and in statistical physics. Advantages of this method are the non-perturbative treatment, the efficient approximations of the studied system and the separation of degrees of freedom according to the different energy domain. Furthermore in certain cases applying this method we can respect and compute the limits of the theory in the energy scale.

Before the studied questions in chapter 2 RG method was reviewed. After reviewing the features of the method the connection between the quantum field theories in Euclidean spacetime and statistical physics is discussed. Due to this analogy the functional renormalization can be introduced both from the viewpoint of solid state physics and from viewpoint of particle physics. Describing this analogy I mentioned the Ising model, the continuous generalization of this model and the application of the formalism for quantum mechanical systems.

Reviewing the mathematical formalism of the RG method the derivation of the Wegner-Houghton equation and the Wetterich equation were roughly described. The Wegner-Houghton approach is easier, but there are several limits for its application. The second approach is more general and here we can apply various regulators. According to our choice we may distinguish different renormalization schemes.

During computations we apply assumptions for the form of the scale dependent action so we get a differential equation system from the original functional equation. The macroscopic feature of the investigated model can be determined from the solution in the low-energy domain of the energy scale.

The most common application of the RG method is the investigation of phase transitions. Usually phase transitions can be established by critical fixed point of RG transformations and critical exponents of the transition can be determined by the linearized RG equations around the fixed point. In my dissertation the determination of the anomalous dimension and the determination of the exponent corresponding to the critical behaviour of the correlation length were mentioned. The RG approach for the explanation of the universality in critical phenomena and for the so-called non-renormalizable theories were also reviewed.

In the dissertation the investigated problems posed by different models were discussed in separated chapters. Chapter 3 is devoted to the quantized anharmonic oscillator, chapter 4 to the Caldeira-Leggett type models, chapter 5 to the high-energy extension of the sine-Gordon model and chapter 6 to the low-energy behaviour of the two dimensional quantum chromodynamics.

Study of quantized anharmonic oscillator is motivated by the optimization of the renormalization. This simple model gives ideal ground for the subtle problem of scheme optimization. The optimization was investigated with respect to the energy gap between the first excited state and the ground state. In the literature there are precise values for this quantity. The applied approximations which independent from the choice of the renormalization scheme influence the result of the RG method, so in the literature the principle of minimal sensitivity is often applied for optimization. This optimization strategy considers that scheme to optimal where the computed quantity as function of the regulator's parameter has stationary point.

Applying the recently introduced CSS regulator we can compare the Litim, the power-law and the exponential regulator by the principle of minimal sensitivity, because these regulators can be reproduced by special limits of the CSS regulator. In case of the anharmonic oscillator the optimization of two parameters of the CSS regulator was investigated with respect to the noted energy gap. In this case the principle of minimal sensitivity we get such optimal regulator which differs from the Litim regulator, which is usually considered optimal. Based on our experience we recommended

the modification of the Litim regulator. In this modified case in the local potential approximation we get RG equation for the potential in which the momentum integral can be performed analitically similar to the Litim scheme.

In chapter 4 certain versions of the quantized Caldeira-Leggett model defined by continuous spectral functions are discussed. These empirical models can be applied to investigate open quantum mechanical systems. In these models the impact of the environment of the relevant subsystem is incorporated to the spectral function which characterize the frequency spectrum of the environment. The realistic description of the spectrum demands to introduce a frequency cutoff in the spectral function. In this dissertation I applied the Debye type cutoff defined by the Heaviside type unitstep function and the Drude type cutoff defined by Lorentzian function.

In this models due to the environment a phase transition appears, which is referred to in the literature as the quantum-classical transition. This phase transition can be characterized by the spontaneous broken of the Z_2 symmetry. The control parameter of the phase transition is the amplitude of the spectral function. This parameter characterizes the strength of the interaction between the relevant subsystem and the environment.

Applying RG method in Wegner-Houghton scheme I determined the exponents correspond to the critical behaviour of the susceptibility and the correlation length both in the case of Debye type cutoff and in the case of Drude type cutoff. I investigated that the chosen value of the cutoff and the type of the cutoff how affect the value of the exponents. I showed that in the case of low value of the cutoff the critical exponents can be considered independent from the value and the type of the cutoff. Besides I also discussed the critical behaviour of that version of the Caldeira-Leggett model which does not contain cutoff.

In chapter 5 the high-energy extension of two dimensional sine-Gordon model is discussed. In the investigation of the sine-Gordon model the RG method has already achieved serious successes, describing the Kosterlitz-Thouless type phase transition of the model. After a short review of the

literature of the sine-Gordon model I described its phase structure limiting our approach to two couplings. This known results pose the problem of the asymptotic safety in general sense. A more dedicate discussion of the problem can be performed by a more careful investigation of the high-energy extension of the model.

In the framework of the RG method going along the energy scale in the opposite direction as usual we can examine the high-energy extension. The high-energy extension can be characterized by action extended with the inclusion of higher-order derivative terms, so it demands momentum dependent wave-function renormalization.

In my dissertation in Callan-Symanzik scheme new RG equations were discussed which takes momentum dependent wave-function renormalization into account via the introduction of a new coupling. Applying these equations we experience the emergence of a new phase which breaks asymptotic safety and we experience a Kosterlitz-Thouless type phase transition in the high-energy extension.

The phase space of the sine-Gordon model considering with two couplings shows an approximate symmetry which can be characterized by the so-called dual transformation. The generalization of this transformation are also discussed. By this generalization the investigated high-energy extension and the low-energy behaviour of the massive sine-Gordon model are connected.

In chapter 6 the low-energy behaviour of the bosonized model corresponds to the two dimensional quantum chromodynamics in the case of one fermion flavour is discussed. If we examine the low-energy behaviour of the model we can use the truncated expansion of the Hamiltonian density restricting our investigations to field configuration around the ground state.

The leading terms of the expansion in Hamiltonian around the trivial field configuration correspond to the layered sine-Gordon model which was successfully studied in literature in the framework of the RG method. The extension of the known succesful RG investigations of the layered sine-Gordon model to the low-energy approximation of the bosonized quantum

chromodynamics demands trivial field configuration in the ground state. I numerically determined the field configuration which minimizes the discretized Hamiltonian by conjugated gradient method. Due to the gained trivial configuration we can consider the theory as layered sine-Gordon model in the low-energy case.

The phase structure of the model in respect of the Z_2 symmetry was discussed. In local potential approximation considering the fundamental frequency of the potential the approximation of the mass corrected RG flow in the ultraviolet domain shows that the model has only a single phase which is the broken symmetric phase. The extrapolation of this equation towards the infrared domain possesses pole which affirmed this result also.

More detailed investigations can be performed if we study the infrared behaviour of the RG equation for the potential. Introducing new field variables the mass matrix of the model can be diagonalized and leading terms of expansion with respect to the massive components get the problem amenable for numerical methods. This examination confirms the earlier results for the single phase. In this manner higher frequency modes of the potential also can be studied but they give only quantitative changes.

Chapter 7 was devoted to the summarization of the results.

Irodalomjegyzék

- [1] B. Delamotte, arXiv:cond-mat/0702365.
- [2] J. Polonyi, Central Eur. J. Phys. **1**, 1 (2003), arXiv:hep-th/0110026.
- [3] S. Nagy, Ann. Phys. **350**, 310 (2014), arXiv:hep-th/1211.4151v2.
- [4] O. J. Rosten, Phys. Rep. **511**, 177 (2012).
- [5] J. Berges, N. Tetradis, C. Wetterich, Phys. Rep. **363**, 223 (2002).
- [6] C. Bagnuls, C. Bervillier, Phys. Rep. **348**, 91 (2001).
- [7] I. Nándori, *Lecture Note on the Functional Renormalization Group Study of Sine-Gordon Models* (előkészületben).
- [8] M. Salmhofer, C. Honerkamp, Prog. Theor. Phys. **105**, 1 (2001).
- [9] H. Gies, Lect. Notes Phys. **852**, 287 (2012).
- [10] M. Reuter, arXiv:hep-th/0708.1317v1.
- [11] S.-B. Liao, J. Polonyi, D. Xu, Phys. Rev. **D 51**, 748 (1995).
- [12] L. M. Sieberer, S. D. Huber, E. Altman, S. Diehl, Phys. Rev. **B 89**, 134310 (2014).
- [13] E. A. Calzetta, B. L. Hu, Francisco D. Mazzitelli, Phys. Rep. **352**, 459 (2001).

- [14] S. Nagy, J. Polonyi, I. Steib, Phys. Rev. **D 93**, 025008 (2016).
- [15] J. Polonyi, Phys. Rev. **A 92**, 042111 (2015).
- [16] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, 4. edition, (Oxford University Press, 2002).
- [17] M. E. Peskin, D. V. Schoeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, (Westview Press, 1995).
- [18] Sailer Kornél, *Bevezetés a statisztikusfizikába és a termodinamikába*, <https://www.phys.unideb.hu/dtp/hu/jegyzetek> oldalon elérhető elektronikus jegyzet.
- [19] J. J. Binney, N. J. Dowrick, A. J. Fisher, M. E. J. Newman, *The theory of critical phenomena*, (Oxford, 1993).
- [20] Sailer Kornél, *Renormálási csoport a kvantumelméletben*, <https://www.phys.unideb.hu/dtp/hu/jegyzetek> oldalon elérhető elektronikus jegyzet.
- [21] Sailer Kornél, *Szimmetriák és sérülésük a kvantumtérelméletben* (Kossuth Lajos Tudományegyetem, Debrecen, 1994).
- [22] J. Polonyi, Ann. Phys. **252**, 300 (1996), arXiv:hep-th/9409004v2.
- [23] F. J. Wegner, A. Houghton, Phys. Rev. **A 8**, 401 (1973).
- [24] K. G. Wilson, J. Kogut, Phys. Rep. **12**, 75 (1974).
- [25] J. Polchinski, Nucl. Phys. **B 231**, 269 (1984).
- [26] C. Wetterich, Phys. Lett. **B 301**, 90 (1993).
- [27] J. M. Pawłowski, M. M. Scherer, R. Schmidt, S. J. Wetzel, arXiv:hep-th/1512.03598v1.

-
- [28] J.-M. Caillol, Nucl. Phys. **B 855**, 854 (2012), arXiv:cond-mat.stat-mech/1109.4024v2.
- [29] T. R. Morris, Phys. Lett. **B 329**, 241 (1994).
- [30] N. Goldenfeld, *Lectures of Phase transitions and the renormalization group*, (Westview Press, 1992).
- [31] D. B. Kaplan, J.-W. Lee, D. T. Son, M. A. Stephanov, Phys. Rev. **D 80**, 125005 (2009).
- [32] V. L. Berezinski, Sov. Phys. JETP **34**, 610 (1972).
- [33] J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless, J. Phys. **C 5**, L124 (1972).
- [34] J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless, J. Phys. **C 6**, 1181 (1973).
- [35] Gulácsi Zsolt, *A fázisátalakulások elmélete*, <https://www.phys.unideb.hu/dtp/hu/jegyzetek> oldalon elérhető elektronikus jegyzet.
- [36] Zs. Gulácsi, M. Gulácsi, Advances in Physics **47**, 1 (1998).
- [37] A. C. D. van Enter, R. Fernández, Alan D. Sokal, Phys. Rev. Lett. **66**, 3253 (1991).
- [38] A. Pich, arXiv:hep-ph/9412274.
- [39] A. Kapoyannis, N. Tetradis, Phys.Lett. **A 276**, 225 (2000).
- [40] S. Nagy, K. Sailer, Ann. Phys. **326**, 1839 (2011).
- [41] D. Zappala, Phys.Lett. **A 290**, 35 (2001).
- [42] <https://www.wolfram.com/mathematica>.
- [43] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Wetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C The Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).

- [44] K.-I. Aoki, A. Horikoshi, M. Taniguchi, H. Terao, Prog. Theor. Phys. **108**, 571 (2002).
- [45] D. F. Litim, Phys. Rev. **D 64**, 105007 (2001).
- [46] D. F. Litim, Phys. Lett. **B 486**, 92 (2000).
- [47] L. Canet, B. Delamotte, D. Mouhanna, J. Vidal, Phys. Rev. **D 67**, 065004 (2003).
- [48] L. Canet, B. Delamotte, D. Mouhanna, J. Vidal, Phys. Rev. **B 68**, 064421 (2003).
- [49] M.-F. Li, M. Luo, Phys. Rev. **D 85**, 085027 (2012).
- [50] K. Essafi, J. P. Kownacki, D. Mouhanna, Phys. Rev. **E 89**, 042101 (2014).
- [51] K. Essafi, J. Kownacki, D. Mouhanna, Europhys. Lett. **98**, 51002 (2012).
- [52] T. Kloss, L. Canet, B. Delamotte, N. Wschebor, Phys. Rev. **E 89**, 022108 (2014).
- [53] I. Nandori, I. Marian, and V. Bacso, Phys. Rev. **D 89**, 047701 (2014).
- [54] I. Nandori, JHEP **2013/04**, 150 (2013), arXiv:hep-th/1208.5021.
- [55] P. Salamon, T. Vertse, Phys. Rev. **C 77**, 037302 (2008).
- [56] A. Racz, P. Salamon, T. Vertse, Phys. Rev. **C 84**, 037602 (2011).
- [57] P. Salamon, R. G. Lovas, R. M. Id Betan, T. Vertse, L. Balkay, Phys. Rev. **C 89**, 054609 (2014), arXiv:nucl-th/1210.1721.
- [58] S. Nagy, B. Fazekas, L. Juhasz, K. Sailer, Phys. Rev. **D 88**, 116010 (2013), arXiv:hep-th/1307.0765.

-
- [59] M. Reuter, F. Saueressig, Phys. Rev. **D 65**, 065016 (2002), arXiv:hep-th/0110054.
 - [60] J. Kovács, S. Nagy, K. Sailer, Acta Physica Debrecina **XLVII**, 77 (2013).
 - [61] I. Marian, U. Jentschura, I. Nandori, J.Phys. **G 41**, 055001 (2014), arXiv:1311.7377 [hep-th].
 - [62] J. Kovacs, S. Nagy, K. Sailer, Int. J. Mod. Phys. **A 30**, 1550058 (2015).
 - [63] A. O. Caldeira, A. J. Leggett, Phys. Rev. Lett. **46**, 211 (1981).
 - [64] A. O. Caldeira, A. J. Leggett, Ann. Phys. **149**, 374 (1983).
 - [65] U. Weiss, *Quantum dissipative systems*, (World Scientific, 1993).
 - [66] H. Dekker, Phys. Rep. **80**, 1 (1981).
 - [67] A. O. Caldeira, A. J. Leggett, Physica **A 121**, 587 (1983).
 - [68] S. L. Lukyanov, P. Werner, J. Stat. Mech. **2007/06**, P06002 (2007).
 - [69] G. Schön, A.D. Zaikin, Phys. Rep. **198**, 237 (1990).
 - [70] G. Schön, A.D. Zaikin, Phys. Rev. **B 40**, 5231 (1989).
 - [71] M. Kulkarni, B. Oztop, H. E. Tureci, Phys. Rev. Lett. **111**, 220408 (2013).
 - [72] H. Yabu, Prog. Theor. Phys. Supp. **129**, 231 (1997).
 - [73] C. G. Callan, L. Thorlacius, Nucl. Phys. **B 329**, 117 (1990).
 - [74] M. Schlosshauer, Rev. Mod. Phys. **76**, 1267 (2004).
 - [75] P. Ullersma, Physica **32** 27, **32** 56, **32** 74, **32** 90 (1966).

- [76] K.-I. Aoki, A. Horikoshi, Phys. Rev. **A 66**, 042105 (2002).
- [77] K.-I. Aoki, A. Horikoshi, Phys. Lett. **A 314**, 177 (2003).
- [78] J. S. Penttilä, Ü. Parts, P. J. Hakonen, M. A. Paalanen, E. B. Sonin, Phys. Rev. Lett. **82**, 1004 (1999).
- [79] J. Braun, H. Gies, and D. D. Scherer, Phys.Rev. **D 83**, 085012 (2011), arXiv:hep-th/1011.1456.
- [80] V. Pangon, S. Nagy, J. Polonyi, K. Sailer, Int. J. Mod. Phys. **A 26**, 1327 (2011), arXiv:hep-th/0907.0144.
- [81] S. Nagy, Phys. Rev. **D 86**, 085020 (2012), arXiv:hep-th/1201.1625.
- [82] J. Kovács, B. Fazekas, S. Nagy, K. Sailer, Ann. Phys. **376**, 372 (2017).
- [83] I. Nandori, J. Polonyi, K. Sailer, Phys. Rev. **D 63**, 045022 (2001).
- [84] S. Nagy, I. Nandori, J. Polonyi, K. Sailer, Phys. Lett. **B 647**, 152 (2007), arXiv:hep-th/0611061.
- [85] V. Pangon, S. Nagy, J. Polonyi, K. Sailer, Phys. Lett. **B 694**, 89 (2010), arXiv:hep-th/0907.0496.
- [86] S. Nagy, I. Nandori, J. Polonyi, K. Sailer, Phys. Rev. Lett. **102**, 241603 (2009), arXiv:hep-th/0904.3689.
- [87] S. Nagy, K. Sailer, Int. J. Mod. Phys. **A 28**, 1350130 (2013), arXiv:hep-th/1012.3007.
- [88] I. Nandori, arXiv:hep-th/1108.4643.
- [89] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, Phys. Rev. Lett. **30**, 1262 (1973).
- [90] D. M. Hofman, J. M. Maldacena, J. Phys. **A 39**, 13095 (2006), arXiv:hep-th/0604135.

-
- [91] A. Mikhailov, arXiv:hep-th/0504035v5.
- [92] P. Minnhagen, Rev. Mod. Phys. **59**, 1001 (1987).
- [93] C. Mudry, *Lecture notes on field theory in condensed matter physics* (World Scientific, 2014).
- [94] A. Diehl, M. C. Barbosa, Y. Levin, Phys. Rev. **E 56**, 619 (1997).
- [95] D. R. Nelson, B. I. Halperin, Phys. Rev. **B 21**, 5312 (1980).
- [96] S. T. Chui, J. D. Weeks, Phys. Rev. **B 14**, 4978 (1976).
- [97] I. Nandori, K. Vad, S. Meszaros, U. D. Jentschura, S. Nagy, K. Sailer, J. Phys. Condens. Matter **19**, 496211 (2007).
- [98] I. Nandori, K. Vad, S. Meszaros, U. D. Jentschura, S. Nagy, K. Sailer, J. Phys. Condens. Matter **19**, 236226 (2007).
- [99] V. G. Ivancevic, T. T. Ivancevic, arXiv:1305.0613v1 [q-bio.OT].
- [100] O. M. Braun, Y. S. Kivshar, Phys. Rep. **306**, 1 (1998).
- [101] D. Gablinger, *Notes on The Sine Gordon Equation*, CiteSeerX digitális könyvtár <http://citeseerx.ist.psu.edu/index>.
- [102] A. LeClair, arXiv:hep-th/9410037v1.
- [103] C.-T. Zhang, Phys. Rev. **A 35**, 886 (1987).
- [104] I. Nandori, U.D. Jentschura, K. Sailer, G. Soff, Phys. Rev. **D 69**, 025004 (2004).
- [105] M. Monda, K. Yokoyama, Prog. Theor. Phys. **87**, 791 (1992).
- [106] S. R. Coleman, Phys. Rev. **D 11**, 2088 (1975).
- [107] István Nándori, *Aspects of Non-Perturbative Renormalization* doktori értekezés, Drezda (2003), <http://w3.atomki.hu/PhD/these/>.

- [108] I. Nandori, S. Nagy, K. Sailer, A. Trombettoni, Phys. Rev. **D 80**, 025008 (2009).
- [109] L. Benfatto, C. Castellani, T. Giamarchi, Phys. Rev. Lett. **99**, 207002 (2007), arXiv:0707.1271 [cond-mat.supr-con].
- [110] M. Grater, C. Wetterich, Phys. Rev. Lett. **75**, 378 (1995), arXiv:hep-ph/9409459.
- [111] G. Von Gersdorff, C. Wetterich, Phys. Rev. **B 64**, 054513 (2001), arXiv:hep-th/0008114.
- [112] D. J. Amit, Y. Y. Goldschmidt, G. Grinstein, J. Phys. **A 13**, 585 (1980).
- [113] V. Riva, J. Cardy, Phys. Lett. **B 622**, 339 (2005).
- [114] P. Ginsparg, arXiv:hep-th/9108028v1.
- [115] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. **B 241**, 333 (1984).
- [116] A. Zamolodchikov, JETP Lett. **43**, 730 (1986).
- [117] V. Bacsó, N. Defenu, A. Trombettoni, I. Nándori, Nucl. Phys. **B 901**, 444 (2015).
- [118] A. Codello, G. D’Odorico, C. Pagani, JHEP **2014/07**, 040 (2014), arXiv:hep-th/1312.7097.
- [119] H. Babujian, A. Fring, M. Karowski, A. Zapletal, Nucl. Phys. **B 538**, 535 (1999).
- [120] Bajnok Zoltán, *Integrálható modellek és az AdS/CFT megfeleltetés*, MTA doktori értekezés, Budapest (2009), <http://real-d.mtak.hu>.
- [121] I. Y. Aref’eva, V. E. Korepin, JETP Lett. **20**, 312 (1974).

-
- [122] A. B. Zamolodchikov, A. B. Zamolodchikov, *Annals Phys.* **120**, 253 (1979).
- [123] E. Sklyanin, *J. Phys.* **A 21**, 2375 (1988).
- [124] S. Ghoshal, A. B. Zamolodchikov, *Int. J. Mod. Phys.* **A 9**, 3841 (1994), arXiv:hep-th/9306002.
- [125] Z. Bajnok, L. Palla, G. Takacs, G. Toth, *Nucl. Phys.* **B 622**, 548 (2002), arXiv:hep-th/0106070.
- [126] Z. Bajnok, L. Palla, G. Takacs, arXiv:hep-th/0211132.
- [127] Varga Bonbien, *Bozonikus Húrelmélet Vizsgálata* szakdolgozat, Budapest (2010),
http://fizweb.elte.hu/old-fizweb/BSc_szakdolgozatok/fizika.
- [128] M. R. Gaberdiel, arXiv:hep-th/9910156v2.
- [129] C. Schmidhuber, arXiv:hep-th/9701113v1.
- [130] J. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998).
- [131] S. Nagy, I. Nandori, J. Polonyi, K. Sailer, *Phys. Rev.* **D 77**, 025026 (2008), arXiv:hep-th/0611216.
- [132] S. Nagy, K. Sailer, J. Polonyi, *J. Phys.* **A 39**, 8105 (2006).
- [133] Z. Bajnok, L. Palla, G. Takacs, *Nucl. Phys.* **B 644**, 509 (2002), arXiv:hep-th/0207099.
- [134] Z. Bajnok, C. Dunning, L. Palla, G. Takacs, F. Wagner, *Nucl. Phys.* **B 679**, 521 (2004), arXiv:hep-th/0309120.
- [135] I. Nandori, S. Nagy, K. Sailer, A. Trombettoni, *JHEP* **2010/09**, 069 (2010).

- [136] G. Delfino, G. Mussardo, Nucl. Phys. **B 516**, 675 (1998), arXiv:hep-th/9709028.
- [137] Z. Bajnok, L. Palla, G. Takács, F. Wágner, Nucl. Phys. **B 601**, 503 (2001).
- [138] G. Mussardo, V. Riva, G. Sotkov, Nucl. Phys. **B 687**, 189 (2004), arXiv:hep-th/0402179.
- [139] M. Fabrizio, A. O. Gogolin, A. A. Nersesyan, arXiv:cond-mat/0001227v1 [cond-mat.str-el].
- [140] A. Koubek, G. . Mussardo, Phys. Lett. **B 311**, 193 (1993).
- [141] E. K. Skylanin, Nucl. Phys. **B 326**, 719 (1989).
- [142] D. F. Litim, F. Sannino, JHEP **2014/12**, 178 (2014), arXiv:hep-th/1406.2337.
- [143] F. A. Wilczek, *Asymptotic freedom: from paradox to paradigm*, Nobel-előadás, (2004),
https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2004/wilczek-lecture.html.
- [144] R. Percacci, arXiv:hep-th/0709.3851.
- [145] S. Nagy, Nucl. Phys. **B 864**, 226 (2012), arXiv:hep-th/1204.0440.
- [146] J. Kovács, S. Nagy, K. Sailer, Phys. Rev. **D 91**, 045029 (2015).
- [147] R. Alkofer, J. Greensite, J. Phys. **G 34**, S3 (2007).
- [148] J. H. Lowenstein, J. A. Swieca, Ann. Phys. **68**, 172 (1971).
- [149] S. Coleman, Ann. Phys. **101**, 239 (1976).

-
- [150] E. Abdalla, M.C.B. Abdalla, K.D. Rothe, *Non-perturbative Methods in Two-Dimensional Quantum Field Theory*, (World Scientific, Singapore, 2001).
- [151] S. Nagy, J. Polonyi, K. Sailer, Phys. Rev. **D 70**, 105023 (2004), arXiv:hep-th/0405156.
- [152] M. A. Metlitski, Phys. Rev. **D 75**, 045004 (2007).
- [153] S. Nagy, Phys. Rev. **D 79**, 045004 (2009).
- [154] W. Fischler, J. Kogut, L. Susskind, Phys. Rev. **D 19**, 1188 (1979).
- [155] S. Coleman, R. Jackiw, L. Susskind, Ann. Phys. **93**, 267 (1975).
- [156] H. J. Rothe, K. D. Rothe, J. A. Swieca, Phys. Rev. **D 19**, 3020 (1979).
- [157] G. t' Hooft, Nucl. Phys. **B 75**, 461 (1974).
- [158] C. G. Callan, N. Coote, D. J. Gross, Phys. Rev. **D 13**, 1649 (1976).
- [159] K. Aoki, T. Ichihara, Phys. Rev. **D 52**, 6435 (1995).
- [160] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla, Phys. Rep. **265**, 253 (1996).
- [161] Y. Frishman, J. Sonnenschein, Phys. Rep. **223**, 309 (1993).
- [162] J. Ellis, Y. Frishman, JHEP **2005/08**, 081 (2005).
- [163] H. Blas, JHEP **2007/03**, 055 (2007).
- [164] J. Ellis, Y. Frishman, M. Karliner, Phys. Lett. **B 566**, 201 (2003).
- [165] M. B. Halpern, Phys. Rev. **D 12**, 1684 (1975).
- [166] E. Witten, Commun. Math. Phys. **92**, 455, (1984).
- [167] C. M. Naón, Phys. Rev. **D 31**, 2035 (1985).

- [168] Sailer Kornél, *Speciális relativitáselmélet*,
<https://www.phys.unideb.hu/dtp/hu/jegyzetek> oldalon elérhető
elektronikus jegyzet.
- [169] W. E. Thirring, Ann. Phys. **3**, 91 (1958).
- [170] I. Nandori, Phys. Rev. **D 84**, 065024 (2011), arXiv:hep-th/1008.2934.
- [171] J. Schwinger, Phys. Rev. **128**, 2425 (1962).
- [172] Sándor Nagy, *Periodic Ground State in QED₁₊₁*, doktori értekezés,
Debrecen, 2004, <http://w3.atomki.hu/PhD/these/>.
- [173] I. Nandori, Phys. Lett. **B 662**, 302 (2008).
- [174] M. Reuter, C. Wetterich, Nucl. Phys. **B 391**, 147 (1993).
- [175] J. Alexandre, J. Polonyi, K. Sailer, Phys. Lett. **B 531**, 316 (2002).
- [176] T. R. Morris, Oliver J. Rosten, J. Phys. **A 39**, 11657 (2006).
- [177] V. Branchina, K. A. Meissner, G. Veneziano, Phys. Lett. **B 574**, 319
(2003).
- [178] D. Gepner, Nucl. Phys. **B 252**, 481 (1985).
- [179] V. Baluni, Phys. Lett. **B 90**, 407 (1980).
- [180] I. Nandori, S. Nagy, K. Sailer, U. D. Jentschura, Nucl. Phys. **B 725**,
467 (2005).
- [181] I. Nandori, K. Sailer, Phil. Mag. **86**, 2033 (2006).
- [182] I. Nandori, J. Phys. **A 39**, 8119 (2006).
- [183] T. M. R. Byrnes, P. Sriganesh, R. J. Bursill, C. J. Hamer, Phys. Rev.
D 66, 013002 (2002).

-
- [184] U. D. Jentschura, I. Nandori, J. Zinn-Justin, *Ann. Phys.* **321**, 2647 (2006).
- [185] J. Kovács, S. Nagy, I. Nándori, K. Sailer, *JHEP* **2011/01**, 126 (2011).
- [186] J. José, *Phys. Rev. D* **14**, 2826 (1976).
- [187] J. Kovács, S. Nagy, K. Sailer, *Acta Physica Debrecina* **XLVIII**, 1 (2014). Csak elektronikusan érhető el:
<http://www.phys.unideb.hu/apd/sites/default/files/content/2014/kovacsjozsef.pdf>
- [188] A. R. Bishop, J. A. Krumhansl, S. E. Trullinger, *Physica D* **1**, 1 (1980).