

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Tópicos sobre campos de gauge
a temperatura finita

Fernando Tadeu Caldeira Brandt

Texto sistematizado apresentado ao
Instituto de Física da Universidade de São Paulo
visando a obtenção do título de Livre-Docente.

São Paulo
2004

RESUMO

Após uma breve revisão sobre tópicos básicos de teorias de gauge, apresentaremos resultados relacionados a um conjunto de trabalhos que tratam do formalismo de teoria de campos a temperatura finita aplicada ao estudo de teorias de gauge. A ênfase será mais especificamente nos trabalhos sobre a versão não-comutativa destas teorias. Um dos principais objetivos destes trabalhos é a investigação fenômenos no limite de altas temperaturas em termos de uma ação efetiva invariante de gauge. Concluiremos com uma breve discussão sobre a possibilidade de se introduzir a não-comutatividade em presença das interações gravitacionais.

Sumário

1	Introdução	p. 1
2	Alguns conceitos da Teoria de Campos	p. 3
2.1	Simetria interna local	p. 3
2.1.1	Breve histórico	p. 3
2.1.2	Construção de Yang-Mills	p. 4
2.1.3	Quantização e regras de Feynman	p. 8
2.1.4	Identities de Ward	p. 15
2.2	Interações gravitacionais	p. 21
2.2.1	Gravitação como uma teoria de campos	p. 22
2.2.2	Regras de Feynman	p. 25
2.3	Espaços não comutativos	p. 29
2.3.1	Principais motivações	p. 29
2.3.2	Quantização de Weyl e o produto de Grönenwold-Moyal	p. 30
2.3.3	Regras de Feynman da teoria de Yang-Mills em espaços não-comutativos	p. 33
2.4	Teoria de campos à temperatura finita	p. 36
2.4.1	Motivação e considerações gerais	p. 36
2.4.2	Formalismo do tempo imaginário	p. 38
3	Algumas técnicas e resultados sobre funções de Green térmicas	p. 41
3.1	Funções de Green térmicas e amplitudes frontais	p. 41
3.1.1	A região de “hard thermal loops”	p. 44
3.1.2	Conexão com a equação de transporte	p. 45
3.2	Propriedades do tensor de polarização abeliano e não-abeliano	p. 50
3.3	Equação de transporte no campo de gravitação	p. 54
3.4	Propriedades do tensor de polarização gravitacional	p. 60

4	Efeitos térmicos na teoria de Yang-Mills não-comutativa	p. 65
4.1	O limite de altas temperaturas da teoria de Yang-Mills não-comutativa	p. 65
4.1.1	O tensor de polarização	p. 65
4.1.2	Blindagem elétrica e magnética	p. 69
4.1.3	A função de três pontos	p. 71
4.1.4	Ação efetiva	p. 76
5	Considerações finais e alguns possíveis desdobramentos	p. 78
	Apêndice A – Equação de Dyson-Schwinger	p. 81
	Apêndice B – Cálculo de funções de estrutura na teoria de Yang-Mills não-comutativa	p. 86
	Apêndice C – Estrutura geral do tensor de polarização gravitacional	p. 89
	Referências Bibliográficas	p. 93

1 Introdução

Fenômenos térmicos e ultrarelativísticos são comuns à sistemas tão complexos quanto a cosmologia do universo primordial e a astrofísica de estrelas compactas ou mesmo experimentos de colisão de íons pesados realizados em laboratório. Presentemente, o formalismo teórico para descrever certos regimes destes fenômenos é fornecido pela teoria de campos a temperatura finita. Em um nível fundamental, mas não necessariamente o mais fundamental, essa descrição se dá em termos de teorias de campos de gauge, ou seja, das teorias de gauge abelianas, não-abelianas e da gravitação. É portanto importante que o formalismo teórico seja desenvolvido da maneira mais completa possível, em todas as suas vertentes, através de soluções explícitas das equações envolvidas nestes modelos teóricos.

A derivação de resultados analíticos em teoria de campos a temperatura finita encontra dificuldades semelhantes àquelas enfrentadas na teoria quântica de campos usual, a temperatura zero. Uma das maneiras de abordar os diversos problemas envolvidos, consiste em se utilizar as técnicas de *teoria de perturbação*. Os temas aqui abordados empregam essencialmente este mesmo tipo de técnica. Porém, veremos que, sob certas condições, é possível obter informação sobre todos os termos da série perturbativa a partir do conhecimento de um número finito de termos e de certas simetrias. Uma das condições para que isso ocorra é a possibilidade de se variar o parâmetro *temperatura* T até certos limites extremos.

Antes de apresentar os problemas mais específicos, achamos conveniente acrescentar um capítulo reunindo os principais conceitos pertinentes à esta linha de pesquisa. Isso será feito no próximo capítulo, onde apresentaremos uma breve revisão sobre certos aspectos de teorias de gauge, interações gravitacionais, teoria de campos em espaços não-comutativos e teoria de campos a temperatura finita. Esta pequena revisão visa também fixar certas convenções e notações. Além disso, pretendemos chamar a atenção para certos conceitos e propriedades que foram temas de outros de nossos trabalhos, alguns dos quais não fazem parte da linha principal aqui exposta.

No capítulo 3 são apresentadas algumas técnicas mais específicas que foram desenvolvidas e aplicadas por nós e outros pesquisadores. De maneira geral, estes trabalhos tratam do limite de altas temperaturas e da obtenção da ação efetiva térmica. No capítulo 4 tratamos de temas mais recentes relacionados com efeitos térmicos em teorias de gauge não-comutativas. Apresentaremos os cálculos detalhados das funções de Green térmicas que constituem um importante passo para se obter a ação efetiva das teorias de gauge não-comutativas e também a forma explícita desta ação em certos limites.

Encerraremos com algumas considerações finais no capítulo 5, onde serão discutidas, de maneira superficial, algumas idéias sobre a possibilidade de se introduzir a não-comutatividade nas interações gravitacionais. Emobra aparentemente fora de contexto, este assunto possui, na verdade, uma interessante conexão com certos aspectos das teorias de gauge a temperatura finita, especialmente no que se refere à invariância local de um ação que não possui invariância de Lorentz.

Ao longo de todo o texto, utilizaremos o sistema de unidades $\hbar = c = k_B = 1$ (k_B é a constante de Boltzmann). As coordenadas de espaço-tempo x^μ são rotuladas por índices gregos ($\mu, \nu, \alpha \dots = 0, 1, 2, 3$), com $x^0 = t$, e as coordenadas espaciais x^i por índices latinos ($i = 1, 2, 3$). Os sinais da métrica de Minkowski $\eta^{\mu\nu}$ são $(+, -, -, -)$. A métrica do espaço-tempo curvo é denotada por $g^{\mu\nu}$. Para não quebrar a continuidade da apresentação, acrescentamos três apêndices.

2 Alguns conceitos da Teoria de Campos

A finalidade deste capítulo é apresentar um breve sumário das idéias básicas envolvidas nos trabalhos que serão descritos nos capítulos seguintes. Embora sua leitura seja completamente dispensável para quem já tenha estudado estes assuntos em um dos diversos livros textos ou artigos de revisão, achamos útil reunir em um mesmo capítulo os vários resultados que serão referenciados nos capítulos posteriores. Ao mesmo tempo, estaremos também padronizando a notação e convenções utilizadas.

Na próxima seção serão introduzidos alguns tópicos básicos sobre teoria de Yang-Mills, com ênfase na obtenção das *regras de Feynman*. Na segunda seção trataremos da formulação da gravitação como uma teoria de campos no contexto da expansão de campos fracos. Em seguida, na terceira seção, introduziremos os alguns conceitos da teoria de campos em *espaços não comutativos* e da formulação das teorias de gauge nestes espaços. Finalizaremos este capítulo introduzindo os conceitos da teoria de campos a temperatura finita no formalismo do tempo imaginário.

2.1 Simetria interna local

2.1.1 Breve histórico

A idéia de que todas as interações da natureza são fundamentalmente descritas por *teorias de campos* possuindo *invariância sob transformações de gauge locais* constitui um dos princípios mais importantes da física das partículas elementares. Antes que esse princípio se consolidasse da forma como o entendemos atualmente, um longo caminho foi percorrido. Weyl em 1918 introduziu o conceito de invariância de gauge¹ generalizando a Teoria da Relatividade Geral de modo a descrever a gravitação e o eletromagnetismo de maneira unificada [Weyl 1918]. Embora a idéia original de Weyl tenha falhado como uma teoria física², esse foi um importantíssimo passo na direção do entendimento do significado da invariância de gauge e de suas implicações físicas. O passo seguinte foi dado por Fock em 1926 ao estabelecer a conexão entre a ambigüidade de escolha dos potenciais vetor e escalar na teoria de Maxwell e a transformação de fase local da função de onda do elétron. É importante ressaltar que a formulação do princípio de invariância local, da maneira como o entendemos hoje, está dada nas equações (5) (transformações dos potenciais) e (9) (transformação de fase local) do artigo de Fock em [Fock 1926]. Logo depois, o próprio Weyl [Weyl 1929], inspirado também por idéias de London [London 1927],

¹O termo “gauge”, que pode ser traduzido como calibre, teve sua origem na idéia desenvolvida por Weyl, segundo a qual escalas de comprimentos e tempos seriam *calibrados* por fatores não integráveis e $\oint \text{d}x^\mu A^\mu$, onde A^μ seria identificado com o potencial eletromagnético. Assim, da mesma forma que a interação gravitacional pode ser descrita em termos da conexão entre referenciais locais, o eletromagnetismo seria descrito em termos da conexão entre escalas locais.

²A natureza quântica da matéria introduz uma *escala natural*, dada pelo comprimento de onda Compton de uma partícula de massa m , $\lambda_C = h/mc$, a qual não pode depender da posição. Por outro lado, a idéia de invariância local de escala estaria em contradição com este fato.

consagrou o princípio de invariância de gauge no contexto fisicamente correto. Com essa interpretação, foi possível obter um entendimento das interações eletromagnéticas em termos de um princípio simples, bem como estabelecer a relação entre a conservação da carga elétrica e a invariância local (um exemplo da relação entre simetrias e leis de conservação que já era conhecido no caso das simetrias de espaço-tempo).

Ao mesmo tempo, ficava claro que outras interações estavam envolvidas nos fenômenos que ocorrem na escala sub-nuclear. Já por volta da década de 1950 as *interações fortes* haviam sido bastante estudadas do ponto de vista fenomenológico. Uma interessante questão, do ponto de vista teórico, era a possibilidade de descrever *todas* interações em termos de teorias possuindo as mesmas características de simplicidade do Eletromagnetismo de Maxwell e, especialmente, de sua versão quantizada, ou seja, a Eletrodinâmica Quântica (QED) ³.

Yang e Mills, em 1954, aplicaram o princípio de invariância local de gauge às interações entre nucleons (prótons e nêutrons), impondo que a simetria sob transformações do spin isotópico fosse localmente realizada [Yang e Mills 1954]. Ao contrário do que ocorre na QED, onde o potencial eletromagnético A_μ não possui carga e portanto não interage consigo mesmo (a QED é uma teoria linear), a construção de Yang-Mills leva naturalmente a equações não-lineares para os potenciais. Tais potenciais são denominados campos de gauge *não abelianos*. Uma importante característica destes campos vetoriais é a sua *massa nula*. Embora as interações entre prótons e nêutrons não pudesse ser descrita como sendo mediada por partículas de massa nula ⁴ a idéia de Yang-Mills tornou-se o protótipo para os avanços que vieram a ocorrer cerca de vinte anos depois com o desenvolvimento da *Cromodinâmica Quântica* (QCD)⁵, teoria de gauge que descreve as interações fortes em termos dos constituintes mais elementares dos nucleons, e da teoria unificada das interações eletrofracas. Pela segunda vez o princípio de invariância local teve que esperar mais um pouco para que seu conteúdo físico pudesse ser devidamente apreciado. De qualquer forma, já era claro que tanto a QED como a gravitação obedeciam a este princípio. Restava saber se as interações que se manifestam na escala microscópica também poderiam ser entendidas com base no mesmo princípio.

2.1.2 Construção de Yang-Mills

A idéia básica da simetria de gauge pode ser exemplificada da seguinte forma. Consideremos um sistema físico descrito por uma lagrangiana invariante sob transformações de um grupo de simetria contínuo G . Ao promovermos a simetria a uma simetria local, fazendo $G \rightarrow G(x)$, onde $x = x_\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) são as coordenadas do espaço-tempo, somos obrigados a generalizar as derivadas usuais ∂_μ , substituindo-as por *derivadas co-variantes* $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$. As grandezas A_μ são potenciais vetores possuindo componentes nos geradores da álgebra de Lie do grupo G e se transformam de tal forma que D_μ se transforme co-variantemente. Portanto, a simetria local nos força a introduzir o campo A_μ o que por sua vez determina a *forma das interações* entre A_μ e os campos de matéria, assim como suas auto-interações (estas, como veremos, surgem quando o grupo de simetria é não-abeliano). No caso das interações eletrofracas há um conjunto de potenciais A_μ que podem ser identificados com o fóton e os bósons vetoriais Z^0, W^\pm , enquanto na QCD A_μ contém os campos dos *glúons*.

A fim de ilustrar explicitamente a aplicação do princípio de gauge, consideremos inicialmente a Lagrangiana

³Utilizaremos sempre as iniciais da denominação em língua inglesa, a saber, “Quantum Electrodynamics”

⁴O curto alcance das interações nucleares, mediadas por píons massivos, já era conhecido há bastante tempo. A massa destes mediadores havia sido prevista teoricamente por Yukawa em 1935 [Yukawa 1935] e confirmada experimentalmente por Lattes, Occhialini e Powell em 1947 [Lattes, Occhialini e Powell 1947]. Yukawa e Powell foram laureados com o prêmio Nobel em 1949 e 1950, respectivamente

⁵Novamente estamos utilizando as iniciais da denominação “Quantum Chromodynamics”

de Dirac para férmions livres de massa m

$$\mathcal{L}^{(0)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (2.1.1)$$

Naturalmente os fenômenos fisicamente mais interessantes envolvem *interações* entre os férmions. A fim de descrever tais fenômenos, teríamos que adicionar um *termo de interação* a $\mathcal{L}^{(0)}$, assumindo, da maneira usual, que a interação é mediada por um outro campo. No entanto, há uma infinidade de possibilidades, compatíveis com a invariância de Lorentz, para um tal termo de interação.

Além da simetria sob transformações de Lorentz, a lagrangiana $\mathcal{L}^{(0)}$ é também invariante sob a seguinte transformação de gauge *global*

$$\psi \rightarrow e^{i\omega}\psi, \quad (2.1.2)$$

onde ω é um número real. Esta simetria global também não é suficiente para restringir a forma de um possível termo de interação.

Vejamos o que ocorre quando impomos o princípio de *invariância local* fazendo $\omega \rightarrow \omega(x)$. Obviamente, a lagrangiana livre (2.1.1) não é invariante sob transformações locais e se modifica como

$$\mathcal{L}^{(0)} \rightarrow \mathcal{L}^{(0)} - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\omega. \quad (2.1.3)$$

Neste ponto, podemos observar que a grandeza proporcional à $\partial_\mu\omega$ pode ser cancelada se adotarmos o seguinte procedimento. Primeiro adicionamos à lagrangiana livre um termo de *interação* envolvendo um *campo vetorial* A_μ de tal forma que a lagrangiana total (livre mais interação) é dada por

$$\mathcal{L}_{\text{mat}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \quad (2.1.4)$$

Em seguida impomos a lei de transformação de A_μ como sendo ⁶

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\omega. \quad (2.1.5)$$

Vemos assim que o princípio de invariância local traz consigo uma previsão fenomenológica bem determinada, a saber, a *forma da interação* entre os campos da teoria. Temos uma teoria envolvendo espinores e campos vetoriais interagentes, cujas leis de transformação são dadas pelas equações (2.1.2) (com ω dependente das coordenadas de espaço-tempo) e (2.1.5). Resta saber qual é a dinâmica clássica de $A_\mu(x)$.

Mencionamos anteriormente que a simetria local pode ser implementada substituindo a derivada usual por uma derivada co-variante D_μ . É imediato verificar que, de fato, a lagrangiana (2.1.4) é obtida de (2.1.1) substituindo ∂_μ por

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu. \quad (2.1.6)$$

Além da simplicidade formal, o procedimento $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ nos indica um possível caminho para estabelecer a conexão com a forma de *lagrangiana de Maxwell*. Levando em conta que o tensor de campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ é anti-simétrico nos índices de Lorentz é natural supor que este possa ser escrito em termos do comutador das derivadas co-variantes $[D_\mu, D_\nu]$. De fato, podemos verificar facilmente que

$$F_{\mu\nu} = -i[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu] \quad (2.1.7)$$

Naturalmente, o último termo, envolvendo o comutador dos campos de gauge $[A_\mu, A_\nu]$ é identicamente nulo no

⁶As equações (2.1.5) e (2.1.2) correspondem às equações (5) e (9) do artigo de Fock em [Fock 1926].

caso da teoria de Maxwell. Mas a generalização para o caso não-abeliano torna-se imediata a partir da equação (2.1.7) e será utilizada mais adiante.

A lagrangiana que descreve a dinâmica dos campos de gauge (lagrangiana de Maxwell) é dada por⁷

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.1.8)$$

onde $F^{\mu\nu}$ é dado por (2.1.7), *sem o termo* $[A_\mu, A_\nu]$. Podemos observar que $\mathcal{L}_{\text{Maxwell}}$ é a forma mais simples compatível a invariância de Lorentz. Mais adiante mostraremos que $\mathcal{L}_{\text{Maxwell}}$ é também invariante sob transformações de gauge. É importante ressaltar que a invariância de gauge e de Lorentz ainda permite outros tipos de termos na lagrangiana. Dentre as possibilidades podemos mencionar termos envolvendo o tensor totalmente anti-simétrico $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$, “potências” maiores de $F_{\mu\nu}$ ⁸, ou mesmo *termos de Chern-Simons* [Chern e Simons 1974, Deser, Jackiw e Templeton 1982] quando a dimensão do espaço tempo for ímpar. No presente caso, temos uma teoria de campos definida pela lagrangiana da QED

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \mathcal{L}_{\text{Maxwell}} + \mathcal{L}_{\text{mat}}, \quad (2.1.9)$$

onde $\mathcal{L}_{\text{Maxwell}}$ e \mathcal{L}_{mat} são respectivamente dadas por (2.1.8) e (2.1.4), que é invariante sob as transformações locais (2.1.2) e (2.1.5).

Vamos agora considerar o caso em que $[A_\mu, A_\nu]$ é não nulo. Existem diversos cenários fisicamente distintos nos quais isso pode ocorrer. Por exemplo, na QCD ou na teoria eletrofraca ou mesmo no contexto mais atual das teorias de campos formuladas em espaços não comutativos [Szabo 2003]. Tanto no caso da QCD como na teoria eletrofraca o grupo $SU(N)$ ($N = 3$ para a QCD e $N = 2$ para a teoria eletrofraca) desempenha um papel fundamental como o grupo de transformações não-abelianas. Esse será o cenário que vamos considerar aqui, deixando para mais tarde o caso de espaços não comutativos.

A grandeza N representa o número de componentes do espinor de Dirac no espaço de simetria interna (Yang e Mills haviam proposto um dubleto de isospin formado pelos estados p (próton) e n (nêutron) e transformando-se sob o grupo $SU(2)$). Suponhamos agora que os espinores em (2.1.1) são objetos de N componentes, $\psi = \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$, e se transformam como

$$\psi \rightarrow U \psi, \quad (2.1.10)$$

onde U é um elemento do grupo $SU(N)$. Como $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} U^\dagger$ e $U^\dagger U = 1$ a lagrangiana livre é invariante quando U não depende das coordenadas do espaço tempo. Impondo a condição de localidade das transformações, ($U \rightarrow U(x)$) vemos que

$$\partial_\mu \psi \rightarrow \partial_\mu(U \psi) = U \partial \psi + (\partial_\mu U) \psi = U [\partial_\mu \psi + (U^\dagger \partial_\mu U) \psi]. \quad (2.1.11)$$

A invariância é recuperada fazendo a substituição $\partial_\mu \psi \rightarrow D_\mu \psi$ onde D_μ é dada pela equação (2.1.6) com A_μ não-abeliano. Porém agora o potencial A_μ deve ser transformar de tal forma que a condição de co-variância

$$D_\mu \psi \rightarrow U D_\mu \psi \quad (2.1.12)$$

⁷O sinal *negativo* na lagrangiana de Maxwell leva a um coeficiente *positivo* para $(\partial_0 A_i)^2$, ou seja, quanto maior for a variação temporal maior será a ação.

⁸Em um trabalho recente [Brandt, Medina e Machado 2002], investigamos lagrangianas do tipo Born-Infeld [Born e Infeld 1934] no contexto de teorias efetivas que emergem no limite de baixas energias da teoria de cordas abertas. Obtivemos todos os termos envolvendo cinco tensores de campo ou duas derivadas co-variantes e quatro campos (simbolicamente, $F^5 + (DF)^2 F^2$).

seja satisfeita. Usando (2.1.10), (2.1.11) e (2.1.6) a equação (2.1.12) nos dá

$$A_\mu \rightarrow U A_\mu U^\dagger - i(\partial_\mu U)U^\dagger = U (A_\mu + i\partial_\mu) U^\dagger. \quad (2.1.13)$$

A última igualdade decorre da condição $UU^\dagger = 1$ que por sua vez permite escrever $(\partial_\mu U)U^\dagger = -U(\partial_\mu U^\dagger)$.

Podemos agora inferir algumas importantes propriedades satisfeitas pelos potenciais não abelianos A_μ . Obviamente, tendo em vista a equivalência física dos potenciais relacionados por (2.1.13), cada A_μ tem que ser uma matriz N por N , como é o caso de U . Além disso, essas matrizes podem ser tomadas consistentemente como *hermitianas*, uma vez que (2.1.13) preserva a condição $A_\mu - A_\mu^\dagger = 0$. Escrevendo os elementos do grupo $SU(N)$ explicitamente em termos dos geradores hermitianos T^a como

$$U = e^{i\omega^a T^a}, \quad (2.1.14)$$

e considerando as transformações com ω^a infinitesimal $U \simeq 1 + i\omega^a T^a$, obtemos a partir de (2.1.13)

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \omega^a T^a + i\omega^a [T^a, A_\mu]. \quad (2.1.15)$$

Tomando o traço de (2.1.15) e usando $\text{tr} T^a = 0$ bem como a propriedade cíclica no termo envolvendo o comutador, vemos que o traço de A_μ não se transforma. Portanto, podemos tomar A_μ consistentemente como matrizes de traço nulo.

As duas propriedades acima verificadas, a saber, hermiticidade e traço nulo, nos permitem expressar os potenciais não abelianos em termos dos geradores T^a da seguinte maneira

$$A_\mu = A_\mu^a T^a, \quad (2.1.16)$$

onde A_μ^a são grandezas reais. Logo, em uma teoria não abeliana de gauge, existem tantos potenciais quantos são os geradores do grupo $SU(N)$, ou seja, $N^2 - 1$ potenciais (8 glúons no caso da QCD). Substituindo em (2.1.15) a álgebra de Lie dos geradores

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c, \quad (2.1.17)$$

(f^{abc} são as *constantes de estrutura* do grupo) obtemos a seguinte transformação para os potenciais A_μ^a

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + D_\mu^{ab} \omega^b, \quad (2.1.18)$$

onde

$$D_\mu^{ab} \equiv \delta^{ab} \partial_\mu - f^{abc} A_\mu^c \quad (2.1.19)$$

é o operador de *derivada co-variante na representação adjunta*. É interessante observar que para ω independente das coordenadas de espaço-tempo os potenciais A_μ^a se transformam como membros da *representação adjunta* do grupo (são submetidos à uma “rotação” infinitesimal no espaço de dimensão $N^2 - 1$).

Usando (2.1.13) podemos facilmente verificar que o tensor $F_{\mu\nu}$ em (2.1.7) se transforma como

$$F_{\mu\nu} \rightarrow U F_{\mu\nu} U^\dagger. \quad (2.1.20)$$

Desta relação segue imediatamente que a grandeza $\text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ é invariante sob as transformações locais de $SU(N)$. Portanto, a versão não abeliana da lagrangiana de Maxwell pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}}^{\text{na}} = -\frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.1.21)$$

Substituindo a relação (2.1.16) em (2.1.7) e usando (2.1.17), podemos obter a forma explícita das componentes $F_{\mu\nu}^a$ de $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a$ como sendo dadas por

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.1.22)$$

Usando (2.1.18), bem como a relação⁹

$$f^{abe} f^{cde} + f^{bce} f^{ade} + f^{bde} f^{cae} = 0, \quad (2.1.23)$$

podemos verificar facilmente que

$$F_{\mu\nu}^a \rightarrow F_{\mu\nu}^a - f^{abc} \omega^b F_{\mu\nu}^c. \quad (2.1.24)$$

Ou seja, $F_{\mu\nu}^a$ transforma-se como um membro da representação adjunta.

Levando em conta a normalização

$$\text{tr } T^a T^b = \frac{1}{2} \delta^{ab}, \quad (2.1.25)$$

a lagrangiana (2.1.21) pode então ser reescrita em termos de $F_{\mu\nu}^a$ como

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}}^{\text{na}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}. \quad (2.1.26)$$

Temos assim, resumizando, uma teoria definida pela lagrangiana

$$\mathcal{L}^{\text{na}} = \mathcal{L}_{\text{Maxwell}}^{\text{na}} + \mathcal{L}_{\text{mat}}^{\text{na}}, \quad (2.1.27)$$

onde $\mathcal{L}_{\text{Maxwell}}^{\text{na}}$ e $\mathcal{L}_{\text{mat}}^{\text{na}}$ são dadas respectivamente por (2.1.26) e (2.1.4), considerando, nesta última, ψ como um espinor de N componentes internas. A teoria de campos clássica assim definida é invariante sob as transformações (2.1.10) e (2.1.18) (note que a invariância local da QED, segue como um caso particular tomando $f^{abc} = 0$ e $\omega^a = \omega$).

2.1.3 Quantização e regras de Feynman

A quantização perturbativa de teorias de campo pode ser formalmente resumida em termos de *integrais de trajetória* através da seguinte relação

$$\begin{aligned} Z[J] &\equiv \int D\phi e^{iS[\phi] + iJ \cdot \phi} = \int D\phi e^{-\frac{1}{2} \phi \cdot K \cdot \phi + iV(\phi) + iJ \cdot \phi} \\ &= e^{V(\frac{\delta}{i\delta J})} e^{\frac{1}{2} J \cdot \frac{1}{K} \cdot J}. \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

Do lado esquerdo temos o funcional gerador das *funções de Green* de uma teoria de campos *genérica*. O campo ϕ representa aqui um “vetor” cujas componentes ϕ_i encapsulam as coordenadas de espaço-tempo, índices de Lorentz, índices de simetria interna (cor), etc. O “produto escalar” “.” em (2.1.28) representa uma soma sobre índices de Lorentz, índices internos e também as coordenadas de espaço-tempo, ou seja, uma *integral*. A matriz formal K define o *termo quadrático* da teoria e a grandeza $V(\phi)$ representa todos os termos envolvendo potências de ϕ maiores do que dois. Estas grandezas podem ser lidas diretamente na lagrangiana da teoria.

A passagem da primeira para a segunda linha de (2.1.28) é feita via cálculo de *integrais gaussianas*. Funções de Green são então obtidas por *derivação funcional* em relação à J , ou seja, aplicando o operador $\delta/\delta J$ no lado

⁹Esta relação segue da identidade de Jacobi $[T^a, [T^b, T^c]] + \text{permut. cíclicas} = 0$.

direito de (2.1.28). Este algoritmo produz expressões para as funções de Green que podem ser sinteticamente representadas em termos dos *diagramas de Feynman* da teoria os quais descrevem processos físicos de propagação e interação (produzindo espalhamento ou decaimento) dos quanta associados aos campos ϕ (partículas). Este é o único significado que atribuiremos à expressões como (2.1.28), ou seja, um algoritmo bastante direto que permite conectar a ação $S[\phi]$ com as regras de Feynman da teoria quântica. Na prática, freqüentemente os problemas são primeiramente reconhecidos e resolvidos via formalismo diagramático e só depois formulados elegantemente na linguagem de integrais funcionais. De fato, foi dessa forma que Feynman [Feynman 1963] descobriu que a teoria quântica não pode ser consistentemente definida utilizando simplesmente a ação clássica de Yang-Mills (além de um termo de fixação de gauge como na QED) em (2.1.28).

Ao tentarmos aplicar a relação (2.1.28) no caso da teoria de Yang-Mills, nos deparamos de imediato com um problema fundamental, a saber, *K não possui inversa*. De fato, podemos verificar facilmente que a matriz K correspondente à expressão (2.1.21) é proporcional ao operador

$$Q_{\text{transv.}}^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu. \quad (2.1.29)$$

Notando que

$$\partial_\nu \omega(x) Q_{\text{transv.}}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.1.30)$$

ou seja, $Q_{\text{transv.}}^{\mu\nu}$ possui *auto-valores* nulos, concluímos que a matriz K^{-1} não existe no caso da teoria de Yang-Mills. Ao nível clássico esta característica é bem conhecida na teoria de Maxwell, onde sabemos que a solução da equação $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$ ou, equivalentemente, $Q_{\mu\nu} A^\nu = J^\nu$, somente pode ser obtida fazendo uma *escolha de gauge* para os potenciais A_μ . Ou seja, há vários (uma infinidade) potenciais correspondentes a um mesmo sistema físico.

Este problema torna-se mais crítico no caso das teorias não-abelianas e constituiu um importante obstáculo para que a teoria de Yang-Mills pudesse ser aceita, tendo em vista a dificuldade de se obter regras de Feynman e realizar cálculos perturbativos. Progressos neste direção foram também importantes para as primeiras tentativas de se quantizar a gravitação. No início dos anos 1960, Feynman observou que seria necessário introduzir campos fictícios (fantasmas) a fim de cancelar uma aparente violação de unitariedade [Feynman 1963]. Esse procedimento foi depois confirmado por DeWitt em cálculos mais detalhados [Dewitt 1967]. Mais tarde, Faddeev e Popov [Faddeev e Popov 1967] desenvolveram um método sistemático para lidar com este tipo de problema, ao nível quântico, no contexto de integrais de trajetória, ou seja, na formulação sintetizada em (2.1.28), bem como esclareceram o papel dos fantasmas. Esse método é essencial no caso da teoria de Yang-Mills e também na gravitação (em geral, em teorias de gauge não lineares).

A fim de ilustrar os principais aspectos do método, vamos considerar a expressão do lado esquerdo de (2.1.28) com $J = 0$. Além disso, vamos focalizar apenas a teoria pura de Yang-Mills (sem os férmions) que é onde está o problema. Neste caso, a grandeza relevante é

$$Z[0] = \int DA e^{iS_{\text{Max.}}^{\text{na}}[A]}; \quad S_{\text{Max.}}^{\text{na}}[A] = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{Maxwell}}^{\text{na}}, \quad (2.1.31)$$

onde $\mathcal{L}_{\text{Maxwell}}^{\text{na}}$ está dada em (2.1.26). Primeiramente, podemos verificar que a *medida de integração* DA em (2.1.31), da mesma forma que a ação $S_{\text{Max.}}^{\text{na}}[A]$, também é invariante. De fato, sob uma transformação de gauge $A \rightarrow A^\omega$ teremos

$$DA \rightarrow DA \det \left(\frac{\partial A_\mu^{\omega a}}{\partial A_\nu^b} \right) = DA \det \left(\delta^{ab} - f^{abc} \omega^c \right) = DA (1 + \mathcal{O}(\omega^2)), \quad (2.1.32)$$

onde utilizamos (2.1.18) e a identidade

$$\det(1 + L) = e^{\text{tr} \log(1+L)} = 1 + \text{tr}L + \mathcal{O}(L^2). \quad (2.1.33)$$

Podemos então reformular o problema de quantização de uma teoria de gauge da seguinte maneira. Temos que calcular uma integral cujo integrando permanece constante em um sub-espaço das variáveis de integração. Assim o problema consiste em fatorizar explicitamente a integração sobre as chamadas *órbitas de gauge*, de maneira análoga à fatorização de (2π) que ocorre em uma integral do tipo $\int dx dy \exp[S(x^2 + y^2)]$ quando utilizamos coordenadas polares (2π é o “volume” do grupo de rotações em duas dimensões). Como veremos, ao separarmos este fator, teremos, ao mesmo tempo, resolvido o problema de definir o termo quadrático da ação, uma vez que a matriz K em (2.1.28) será modificada. Seguindo o procedimento de Faddeev e Popov, definimos inicialmente a grandeza $\Delta[A]$ através da relação

$$1 = \Delta[A] \int D\omega \delta[f(A^\omega)], \quad (2.1.34)$$

onde $f(A^\omega)$ é uma grandeza *dependente de gauge* e δ é o *funcional delta de Dirac*. Como a integração é feita sobre todo o espaço de gauge, é imediato verificar que $\Delta[A]$ é independente de gauge. Inserindo (2.1.34) no integrando de (2.1.31), teremos

$$Z[0] = \int D\omega \int DA e^{iS_{\text{Max.}}^{\text{na}}[A]} \Delta[A] \delta[f(A^\omega)]. \quad (2.1.35)$$

Fazendo a transformação inversa $A \rightarrow A^{\omega^{-1}}$ e usando a invariância de DA , $S_{\text{Max.}}^{\text{na}}[A]$ e $\Delta[A]$ obtemos finalmente

$$Z[0] = \left(\int D\omega \right) \int DA \Delta[A] \delta[f(A)] e^{iS_{\text{Max.}}^{\text{na}}[A]} \quad (2.1.36)$$

Embora o volume de um grupo compacto seja finito, a integração $(\int D\omega)$ é infinita, uma vez que há um elemento do grupo para cada ponto do espaço-tempo. A definição da teoria quântica é feita eliminando este fator infinito do funcional gerador. Equivalentemente, estamos introduzindo um *ansatz* segundo o qual a medida invariante na integração funcional (mesmo com $J \neq 0$) deve ser substituída por $DA \Delta[A] \delta[f(A)]$.

A função $f(A)$ define o tipo de fixação de gauge utilizado para quantizar a teoria. Usualmente ela é tomada como sendo linear em A da seguinte forma

$$f(A) = G^\mu A_\mu^a - \sigma^a, \quad (2.1.37)$$

onde G^μ é um operador ou um vetor qualquer e σ^a é uma função qualquer das coordenadas de espaço-tempo. Por exemplo, a escolha usual na QED é o chamado gauge co-variante onde $G^\mu = \partial^\mu$. A forma explícita de $\Delta[A]$ pode agora ser facilmente obtida. Substituindo (2.1.37) em (2.1.34), teremos

$$\Delta[A] = \left(\int D\omega \delta[G^\mu A_\mu^a - \sigma^a] \right)^{-1}. \quad (2.1.38)$$

Em seguida, levamos em conta que $\Delta[A]$ sempre aparece multiplicado por $\delta[G^\mu A_\mu^a - \sigma^a]$ e fazemos a transformação (2.1.18), obtendo

$$\Delta[A] = \left(\int D\omega \delta[G^\mu (f^{abc} \omega^b A_\mu^c - \partial_\mu \omega^a)] \right)^{-1} + \dots, \quad (2.1.39)$$

onde \dots representa os termos que não contribuem quando multiplicados por $\delta[G^\mu A_\mu^a - \sigma^a]$. Definindo o operador $K^{ab}(x, y)$ tal que

$$\int d^4 y K^{ab}(x, y) \omega^b(y) = G^\mu (f^{abc} \omega^b A_\mu^c - \partial_\mu \omega^a) \quad (2.1.40)$$

e usando a identidade

$$\int D\omega \delta[K \cdot \omega] = (\det K)^{-1}, \quad (2.1.41)$$

obtemos

$$\Delta[A] = \det K = \int Dc_1 Dc_2 e^{iS_{\text{ghost}}[c_1, c_2]}, \quad (2.1.42)$$

onde

$$S_{\text{ghost}}[c_1, c_2] = \int d^4x d^4y c_1^a(x) K_{ab}(x, y) c_2^b(y) \quad (2.1.43)$$

e $c_i(x)$, $i = 1, 2$ são variáveis de Grassmann conhecidas como *fantasmas de Faddeev Popov*. A denominação “fantasmas” é devida ao fato de que esses campos violam a conexão spin-estatística, tendo em vista que, embora sejam campos escalares, eles anti-comutam. Esta violação é aceitável uma vez que tais campos não estão associados com partículas físicas. Na teoria de campos à temperatura finita somos levados à atribuir uma estatística térmica de Bose-Einstein para os fantasmas.

Usando a forma explícita de K^{ab} que pode ser derivada a partir de (2.1.40), obtemos

$$S_{\text{ghost}}[c_1, c_2] = - \int d^4x c_1^a(x) G^\mu \left(\delta^{ab} \partial_\mu - f^{abc} A_\mu^c \right) c_2^b(x). \quad (2.1.44)$$

Em termos do operador de derivada co-variante em (2.1.19), teremos

$$S_{\text{ghost}}[c_1, c_2] = - \int d^4x c_1^a(x) G^\mu D_\mu^{ab} c_2^b(x). \quad (2.1.45)$$

É possível também obter uma forma exponenciada para $\delta[f(A)]$. Levando em conta que a integral funcional em (2.1.36) não depende de $f(A)$ e, em particular, não depende de σ^a , podemos multiplica-la por um funcional qualquer de σ e integrar sobre σ . Uma escolha conveniente é

$$e^{-\frac{i}{2\xi} \int d^4x \sigma(x)^2}, \quad (2.1.46)$$

onde ξ é uma constante, e usando o funcional delta de Dirac, teremos

$$Z = \int DA Dc_1 Dc_2 e^{iS_{\text{Max}}^{\text{na}} + iS_{\text{ghost}} + iS_{\text{fix}}}, \quad (2.1.47)$$

onde

$$S_{\text{fix}} = -\frac{1}{2\xi} \int d^4x f(A)^2 = -\frac{1}{2\xi} \int d^4x (G^\mu A_\mu^a)^2. \quad (2.1.48)$$

Podemos notar que ocorrerá uma grande simplificação no caso da teoria abeliana. De fato, tomando $f^{abc} = 0$, vemos que o campo de fantasmas se desacopla dos campos de gauge e a integração funcional sobre c_1 e c_2 resulta em um fator constante que pode ser omitido¹⁰. Naturalmente, estamos supondo que G^μ depende linearmente dos campos de gauge. Algumas escolhas mais populares para G^μ são as seguintes:

- Gauge de Coulomb: $G^\mu = (0, \vec{\partial})$.
- Gauge de Lorentz: $G^\mu = \partial^\mu$.
- Gauge Axial: $G^\mu = n^\mu$, onde n^μ define uma direção fixa no espaço-tempo.
- Gauge temporal: $G^\mu = (1, \vec{0})$.

¹⁰No entanto, este fator possui um papel importante na contagem dos graus de liberdade da QED formulada a temperatura finita.

Em cada um destes casos, o parâmetro ξ , introduzido em (2.1.46), pode ser variado produzindo toda uma classe de gauges ¹¹.

Podemos agora retornar à relação (2.1.28) considerando seguinte forma para a ação

$$S[A, c_1, c_2] = S_{\text{Max}}^{\text{na}} + S_{\text{ghost}} + S_{\text{fix}}. \quad (2.1.49)$$

Vemos que o termo S_{fix} modifica o termo quadrático em $S_{\text{Max}}^{\text{na}}$, de tal forma que agora o *propagador* da teoria pode ser obtido. Por exemplo, no caso do gauge de Lorentz, teremos, após *integração por partes*

$$S[A, c_1, c_2] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} A_\mu^a Q_{ab}^{\mu\nu} A_\nu^b + c_1^a Q_{ab}^{\text{ghost}} c_2^b + \mathcal{L}^{\text{int.}} \right), \quad (2.1.50)$$

onde os *termos de interação* em $\mathcal{L}^{\text{int.}}$ serão explicitados mais adiante e

$$Q_{ab}^{\text{ghost}} = -\delta_{ab} \partial^2. \quad (2.1.51)$$

O novo operador quadrático

$$Q_{ab}^{\mu\nu} \equiv \delta_{ab} \left[\eta^{\mu\nu} \partial^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\mu \partial^\nu \right] = \delta_{ab} \left(Q_{\text{transv.}}^{\mu\nu} - \frac{1}{\xi} \partial^\mu \partial^\nu \right) \quad (2.1.52)$$

($Q_{\text{transv.}}^{\mu\nu}$ é a *parte transversal* definida em (2.1.29)) pode ser facilmente invertido. De fato, a equação

$$Q_{ad}^{\mu\alpha} D_{\alpha\nu}^{db}(x-y) = \delta_\nu^\mu \delta_a^b \delta^4(x-y) \quad (2.1.53)$$

tem a seguinte solução

$$D_{ab}^{\mu\nu}(x-y) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{D}_{ab}^{\mu\nu}(k) e^{ik(x-y)}, \quad (2.1.54)$$

onde

$$i \tilde{D}_{ab}^{\mu\nu}(k) \equiv -i \frac{\delta_{ab}}{k^2 + i\varepsilon} \left[\eta^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] \quad (2.1.55)$$

é o *propagador livre* no espaço dos momentos. O parâmetro ε , implícito na integral (2.1.47), é infinitesimal e positivo, de tal forma a tornar a integração funcional convergente para grandes valores do integrando. Estamos também levando em conta o fator (i) presente na exponencial em (2.1.47) (este procedimento será consistentemente adotado mais adiante quando forem definidas as *regras de Feynman* para o propagador dos fantasmas e para as interações). De maneira semelhante, os propagadores de férmion e de fantasmas são obtidos respectivamente de (2.1.1) e (2.1.51), sendo dados por

$$i \tilde{S}(k) \equiv \frac{i}{\not{k} - m + i\varepsilon} = i \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (2.1.56)$$

e

$$i \tilde{D}_{ab}^{\text{ghost}} \equiv \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} \delta_{ab}. \quad (2.1.57)$$

A fim de obter as regras de Feynman para os *vértices* da teoria, vamos inicialmente escrever a lagrangiana de interação $\mathcal{L}^{\text{int.}}$. Colecionando os termos envolvendo interações entre os férmions, os campos de gauge e os

¹¹Muitas vezes é interessante investigar a dependência de gauge calculando as funções de Green para valores quaisquer de ξ . Este tipo de abordagem foi empregada por nós tanto para $T = 0$ [Brandt e Frenkel 1986] quanto nos estudos mais recentes a temperatura finita [Brandt, Frenkel e Machado 2000, Brandt, Das e Frenkel 2000, Brandt, Cuadros-Melgar e Machado 2003].

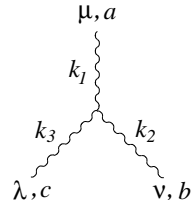
fantasmas, presentes nas expressões (2.1.4), (2.1.26) e (2.1.43), teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{int}} &= g \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu^a T^a \psi - \frac{1}{2} g f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) A^{b\mu} A^{c\nu} \\ &- \frac{1}{4} g^2 f^{eab} f^{ecd} A_\mu^a A_\nu^b A^{c\mu} A^{d\nu} + g f^{abc} c_1^a c_2^b G_\mu^a A^{c\mu}. \end{aligned} \quad (2.1.58)$$

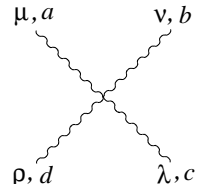
Note que estamos introduzindo explicitamente a *constante de acoplamento* g , fazendo $A \rightarrow gA$ e $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}/g^2$. Levando em conta a simetria bosônica dos campos de gauge e as propriedades de ciclicidade e de anti-simetria das constantes de estrutura ($f^{abc} = f^{bca} = f^{cab}$ e $f^{abc} = -f^{acb}$), a expressão para $iS^{\text{int}} = i \int d^4x \mathcal{L}^{\text{int}}$ gera os seguintes vértices no espaço dos momentos



$$: ig \gamma^\mu T_{ij}^a, \quad (2.1.59a)$$



$$: g f^{abc} \left[(k_1 - k_2)^\lambda \eta^{\mu\nu} + (k_2 - k_3)^\mu \eta^{\nu\lambda} + (k_3 - k_1)^\nu \eta^{\lambda\mu} \right], \quad (2.1.59b)$$



$$: -ig^2 \left[f^{abe} f^{cde} (\eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\lambda}) + f^{ade} f^{cbe} (\eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho}) + f^{ace} f^{bde} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\lambda}) \right], \quad (2.1.59c)$$



$$: g f^{abc} p^\mu, \quad (2.1.59d)$$

onde está implícito um fator de conservação de momento $(2\pi)^4 \delta(\Sigma k)$ ¹². Todos os momentos são tomados em-

¹²Fatores de simetria serão levados em conta no cálculo explícito das amplitudes quânticas.

trando nos vértices. Cada um dos propagadores é representado da maneira usual pelos seguintes diagramas

$$\begin{array}{lcl}
 \xrightarrow{k} & : & i\tilde{S}(k) \\
 \mu \text{ --- } \xrightarrow{k} \text{ --- } \nu & : & i\tilde{D}_{\mu\nu}^{ab}(k) \\
 \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} & : & i\tilde{D}_{ab}^{\text{ghost}}(k)
 \end{array} \tag{2.1.60}$$

Vimos que a definição da teoria quântica de gauge requer a introdução de termos adicionais na ação de Yang-Mills envolvendo os fantasmas de Faddeev-Popov. Devido ao acoplamento entre os fantasmas e os campos de gauge, as transformações de gauge usuais em (2.1.10) e (2.1.18) não são uma simetria da ação modificada em (2.1.49). Somos então levados naturalmente a supor que os campos de fantasmas também devem se transformar de maneira a compensar a transformação dos campos de gauge. A fim de examinar esta possibilidade, vamos supor que o parâmetro infinitesimal da transformação de gauge possa ser escrito em termos dos campos de fantasmas $c_i^a(x)$, da seguinte maneira

$$\omega^a(x) = (\delta\lambda) c_2^a(x). \tag{2.1.61}$$

A grandeza $\delta\lambda$ é uma variável de Grassmann ($(\delta\lambda)^2 = 0$) independente das coordenadas de espaço-tempo e que satisfaz a relação de anti-comutação

$$\{(\delta\lambda), c_2^a(x)\} = 0. \tag{2.1.62}$$

Note que $\delta\lambda$ desempenha o importante papel de manter o caráter bosônico do parâmetro ω . Em termos do *ansatz* (2.1.61), as transformações de gauge locais (2.1.10) e (2.1.18) podem ser reescritas como

$$\delta\psi = i(\delta\lambda) T^a c_2^a \psi, \tag{2.1.63}$$

$$\delta A_\mu^a = (\delta\lambda) D_\mu^{ab} c_2^b. \tag{2.1.64}$$

A transformação (2.1.64) introduz a seguinte modificação no termo de fixação de gauge em (2.1.48)

$$-\frac{1}{\xi} (G^\mu A_\mu^a) (\delta\lambda) (G^\nu D_\nu^{ab} c_2^b). \tag{2.1.65}$$

A invariância é recuperada, se definirmos a variação de c_1 em (2.1.45) como sendo dada por

$$\delta c_1^a = i(\delta\lambda) \frac{1}{\xi} \partial^\mu A_\mu^a. \tag{2.1.66}$$

No entanto, a ação para os campos de fantasmas em (2.1.45) também vai se transformar sob (2.1.64) e (2.1.66). Esta transformação pode ser compensada de tal forma a determinar a correspondente variação do campo c_2 . É possível mostrar, usando integração por partes e a identidade de Jacobi dada em (2.1.23), que a transformação procurada é

$$\delta c_2^a = -\frac{1}{2} (\delta\lambda) f^{abc} c_2^b c_2^c. \tag{2.1.67}$$

Observe que a anti-simetria de f^{abc} e o caráter grassmaniano dos campos c fazem com que o lado direito da expressão acima seja não nulo.

Outra importante propriedade das transformações (2.1.64), (2.1.66) e (2.1.67) é que elas mantêm invariante

a medida de integração funcional em (2.1.47). Isto ocorre porque o determinante das matrizes (jacobiano)

$$\begin{aligned}\frac{\delta(A_\mu^a(x) + \delta A_\mu^a(x))}{\delta A_\nu^b(y)} &= \delta^4(x-y) \delta_\mu^\nu \left(\delta^{ab} + (\delta\lambda) f^{abc} c_2^c \right) \\ \frac{\delta(c_1^a(x) + \delta c_1^a(x))}{\delta c_1^b(y)} &= \delta^4(x-y) \delta^{ab} \\ \frac{\delta(c_2^a(x) + \delta c_2^a(x))}{\delta c_2^b(y)} &= \delta^4(x-y) \left(\delta^{ab} - (\delta\lambda) f^{abc} c_2^c \right)\end{aligned}\quad (2.1.68)$$

é igual a um (isto pode ser facilmente verificado usando a propriedade grassmaniana $(\delta\lambda)^2 = 0$ e a anti-simetria de f^{abc}).

Sumarizando, as transformações (2.1.64), (2.1.66) e (2.1.67) deixam a ação (2.1.49) invariante, generalizando assim a simetria de gauge da ação clássica. A descoberta desta simetria foi feita independentemente por mais de um grupo de pessoas, tendo sido denominadas *transformações de BRST* [Becchi, Rouet e Stora 1975, Tyutin 1975, Zinn-Justin 1974]. Ela desempenha um papel importante no estudo das propriedades de renormalizabilidade da teoria de gauge. De maneira geral esta simetria permite estabelecer relações entre diferentes amplitudes quânticas (ou térmicas) da teoria.

2.1.4 Identidades de Ward

Vamos agora explorar uma interessante conexão entre a invariância sob transformações dos campos e certas identidades entre as funções de Green da teoria¹³. No presente contexto das teorias não abelianas de gauge, tais identidades são denominadas *identidades de Slavnov-Taylor* [Slavnov 1972, Taylor 1971]. Antes de abordarmos o caso geral, vamos examinar o papel destas identidades no contexto da *teoria clássica* descrita pela lagrangiana de Yang-Mills dada por (2.1.27). Isso permitirá obter a estrutura básica destas identidades, comum a qualquer teoria possuindo simetria local de gauge.

Considerados separadamente, os termos quadrático e as auto-interações do tipo cúbica, A^3 , e quártica, A^4 , não são invariantes sob a transformação de gauge (2.1.18). No entanto, a invariância da lagrangiana faz com que um termo de ordem A^n esteja relacionado com outro de ordem A^{n-1} , uma vez que a transformação em (2.1.18) envolve a combinação de um termo de ordem A^0 e outro de ordem A^1 . Este simples fato tem uma importante consequência no entendimento da propriedade de transversalidade do termo quadrático, exibida em (2.1.30). De fato, aplicando a transformação (2.1.18) na lagrangiana (2.1.26), a invariância do termo de ordem mais baixa em A (ordem um) é equivalente a propriedade (2.1.30)¹⁴. Nas ordens seguintes, a condição de invariância implica em identidades entre o termo cúbico e o termo quadrático (variação de ordem dois em A) e entre o termo quártico e o termo cúbico (variação de ordem três em A). Tais identidades são especialmente úteis quando escritas no espaço dos momentos onde normalmente os cálculos perturbativos são realizados. Neste caso, elas assumem as

¹³A forma abeliana destas identidades foi descoberta por Ward [Ward 1950] e generalizada para todas as ordens perturbativas por Takahashi [Takahashi 1957]. Para uma interessante abordagem sobre o impacto destas identidades no desenvolvimento da teoria de campos ver [Jackiw 1997].

¹⁴A transversalidade deixaria de ser válida caso houvesse um termo linear (“tadpole”) na ação. Como veremos, esta possibilidade de fato ocorre no caso da ação efetiva térmica da gravitação.

sob transformações locais de coordenadas. Há também o caso das *ações efetivas térmicas*, em teorias de gauge, onde existem infinitos vértices efetivos (funções de Green térmicas) relacionados, dois a dois, por identidades de Ward possuindo a mesma estrutura de (2.1.69).

É possível também explorar as identidades de Ward no sentido inverso, ou seja, investigando a possibilidade de se construir uma ação invariante de gauge, simplesmente escrevendo todos os possíveis termos de ordem A^n , $n = 2, 3, \dots$, compatíveis com a simetria de Bose e invariância de Lorentz, e determinando a estrutura destes termos a partir da invariância de gauge. Estaríamos assim *construindo* a ação a partir do zero (a ordem zero fica determinada a menos de uma constante de normalização). Naturalmente este tipo de construção é dispensável no caso da teoria de Yang-Mills ou da gravitação de Einstein, uma vez que nesses casos a forma completa da ação invariante pode ser obtida de maneira mais direta. Porém, esta pode ser a única alternativa no caso de teorias de calibre mais gerais, como por exemplo a gravitação formulada no espaço-tempo não comutativo. Esta possibilidade será examinada em maior detalhe na seção 5.

Vejamos agora a forma das identidades de Ward no caso geral, ou seja, quando consideramos todas as *correções quânticas* para os vértices em (2.1.59). Tais correções vão necessariamente envolver diagramas possuindo *linhas internas* de campos de gauge, ou seja, propagadores. Vimos que, para que estas grandezas possam ser definidas, não podemos nos restringir somente aos termos presentes na ação clássica, mas devemos levar em conta a ação da teoria quântica dada por (2.1.49), envolvendo fixação de gauge e fantasmas. Portanto, no caso geral, as identidades de Ward devem ser dedutíveis a partir da simetria do *funcional gerador quântico* sob as transformações de BRST dadas por (2.1.64), (2.1.66) e (2.1.67).

A fim tornar a análise suficientemente geral e ao mesmo tempo mais compacta, consideremos mais uma vez a forma do funcional gerador dada em (2.1.28). A idéia chave consiste em notar que o lado esquerdo de (2.1.28) é independente da variável de integração ϕ , de modo que a transformação (ε tanto pode ser um parâmetro infinitesimal como uma variável de Grassmann)

$$\begin{aligned}\phi_i &\rightarrow \phi_i + \varepsilon F_i[\phi] \\ F_i[\phi] &\equiv f_i + f_{ij} \phi_j + f_{ijk} \phi_j \phi_k + \dots\end{aligned}\quad (2.1.73)$$

mantém $Z[J]$ inalterado. A medida de integração e o integrando se transformam respectivamente como

$$\begin{aligned}D\phi &\rightarrow \det \left| \delta_{ij} - \varepsilon \frac{\delta F_i[\phi]}{\delta \phi_j} \right| = D\phi \left(1 - \varepsilon \frac{\delta F_i[\phi]}{\delta \phi_i} \right) \\ e^{iS[\phi] + iJ \cdot \phi} &\rightarrow e^{iS[\phi] + iJ \cdot \phi} \left[1 + i\varepsilon \left(\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi_i} + J_i \right) F_i[\phi] \right].\end{aligned}\quad (2.1.74)$$

Levando as transformações (2.1.73) em (2.1.28) e agrupando os termos de ordem ε teremos

$$\int D\phi \left[i \left(\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi_i} + J_i \right) F_i[\phi] - \frac{\delta F_i[\phi]}{\delta \phi_i} \right] e^{iS[\phi] + iJ \cdot \phi} = 0. \quad (2.1.75)$$

Utilizando a equivalência

$$\phi_i \leftrightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_i} \quad (2.1.76)$$

podemos escrever

$$\left\{ i \left(\frac{\delta S}{\delta \phi_i} \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] + J_i \right) F_i \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] - \frac{\delta F_i}{\delta \phi_i} \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] \right\} Z[J] = 0. \quad (2.1.77)$$

É interessante considerar o caso especial da *invariância translacional* da integral funcional, ou seja, quando

$F_i[\phi] = f_i = \text{constante}$. No apêndice A mostramos como isto leva às *equações de Dyson-Schwinger* para os funcionais geradores.

Nos casos mais gerais, quando há uma simetria, com $F_i[\phi]$ qualquer, a ação é invariante

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi_i} F_i[\phi] = 0 \quad (2.1.78)$$

e também a *medida de integração funcional* é invariante

$$\frac{\delta F_i[\phi]}{\delta \phi_i} = 0. \quad (2.1.79)$$

Quando isto ocorre, a equação (2.1.77) nos dá a *identidade de Ward*

$$J_i F_i \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] Z[J] = 0. \quad (2.1.80)$$

Derivando a equação acima em relação à J , teremos as diversas identidades de Ward que relacionam as funções de Green desconexas, geradas pelo funcional Z .

As condições que nos levaram à equação (2.1.80), a saber a invariância da ação e da medida, são precisamente aquelas satisfeitas pelo funcional gerador da teoria de Yang-Mills dado por (2.1.47) devidamente modificado com os termos de fontes para os campos de gauge e fantasmas. Neste caso, os F_i podem ser diretamente lidos nas equações (2.1.64), (2.1.66) e (2.1.67). No entanto, freqüentemente é mais útil obter as identidades de Ward para a *ação efetiva* Γ geradora das funções de Green 1PI (ver a equação (A.0.14) no apêndice A). Entre outras coisas, isto permitirá também estabelecer a conexão com as identidades (2.1.69), obtidas a partir da invariância da *ação clássica* de Yang-Mills, no limite clássico. Além disso, podemos investigar, em geral, a relação entre as simetrias da ação efetiva e da ação clássica.

Usando a relação (A.0.15) do apêndice A, podemos reescrever (2.1.80) como

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi_i} F_i \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] Z[J] = 0. \quad (2.1.81)$$

Ou seja, a ação efetiva $\Gamma[\phi]$ é invariante sob a transformação¹⁶

$$\phi_i \rightarrow \phi_i + \varepsilon \langle F_i[\phi] \rangle_{J_\phi}; \quad \langle F_i[\phi] \rangle_{J_\phi} \equiv F_i \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] Z[J]. \quad (2.1.83)$$

Esta transformação de simetria certamente coincide com (2.1.73) no caso especial quando F_i são funcionais *lineares* dos campos¹⁷. No entanto, já sabemos que isto não é a regra geral, uma vez que as transformações BRST possuem termos não lineares. Portanto, as transformações de simetria da ação efetiva serão diferentes, tendo em vista que a média de um funcional não linear nem sempre coincide com o funcional dos valores médios. De fato, a forma de $\langle F_i \rangle_{J_\phi}$ como um funcional de ϕ depende em geral da dinâmica do sistema, sendo usualmente não local. Por outro lado, as transformações de BRST possuem uma característica especial que permite simplificar o tratamento do problema da simetria da ação efetiva. De fato, podemos facilmente verificar, a partir de (2.1.64),

¹⁶Estamos usando

$$\frac{1}{Z[J]} \mathcal{O} \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] Z[J] = \langle \mathcal{O}[\phi] \rangle_{J_\phi}. \quad (2.1.82)$$

¹⁷Para um dado ϕ_i , a corrente J_i é a que faz $\langle \phi_i \rangle$ igual a ϕ_i .

(2.1.66) e (2.1.67) e também usando a identidade de Jacobi (2.1.23), que

$$\begin{aligned}\delta(D_V^{ab} c_2^b) &= 0 \\ \delta(f^{abc} c_2^b c_2^c) &= 0.\end{aligned}\tag{2.1.84}$$

Tomando a simetria de BRST como o protótipo para possíveis casos mais gerais, vamos então supor que as transformações em (2.1.73) também possuem a *propriedade de nilpotência* exemplificada em (2.1.84). A fim de explorar esta propriedade de maneira a obter identidades de Ward para a ação efetiva, introduzimos um conjunto de campos clássicos K_i e definimos uma *nova ação efetiva* de tal forma que

$$\Gamma[\phi] \rightarrow \Gamma[\phi, K] \equiv W[J_{\phi, K}, K] - \phi \cdot J_K,\tag{2.1.85}$$

onde

$$e^{iW[J_{\phi, K}, K]} \equiv \int D\phi e^{(iS[\phi] + iF \cdot K + iJ \cdot \phi)}.\tag{2.1.86}$$

e está subentendido que $S[\phi]$ é a ação contendo os termos de fixação de gauge e de fantasmas. A corrente $J_{\phi, K}$ é aquela requerida para que os campos ϕ tenham o valor esperado

$$\phi_i \equiv \frac{\delta W[J, K]}{\delta J_i}.\tag{2.1.87}$$

Seguindo os mesmos passos que nos levaram à relação (2.1.81) e usando a propriedade de nilpotência ($\delta F_i = 0$), obtemos

$$\langle F_i \rangle_{J, K} \frac{\delta \Gamma[\phi, K]}{\delta \phi_i} = 0,\tag{2.1.88}$$

onde $\langle \dots \rangle_{J, K}$ é o valor esperado calculado na presença da corrente J dos campos externos K . Ou seja,

$$\langle \mathcal{O}[\phi] \rangle_{J, K} = \frac{\int D\phi \mathcal{O}[\phi] e^{(iS[\phi] + iF \cdot K + iJ \cdot \phi)}}{\int D\phi e^{(iS[\phi] + iF \cdot K + iJ \cdot \phi)}}.\tag{2.1.89}$$

A grande vantagem deste procedimento é que agora é possível expressar o valor esperado de F_i diretamente em termos de derivadas funcionais da ação efetiva. Tomando a derivada de (2.1.85) em relação à K_i , teremos

$$\frac{\delta \Gamma[\phi, K]}{\delta K_i} = \frac{\delta W[\phi, K]}{\delta K_i} + \frac{\delta W[\phi, K]}{\delta J_l} \frac{\delta J_l}{\delta K_i} - \phi_l \frac{\delta J_l}{\delta K_i}.\tag{2.1.90}$$

Usando a equação (2.1.87), vemos que os dois últimos termos da equação acima se cancelam. Levando em conta e as equações (2.1.86) e (2.1.89), teremos

$$\frac{\delta \Gamma[\phi, K]}{\delta K_i} = \frac{\delta W[\phi, K]}{\delta K_i} = \langle F_i \rangle_{J, K}\tag{2.1.91}$$

Substituindo a equação acima em (2.1.88), obtemos a equação de *Zinn-Justin*

$$\frac{\delta \Gamma[\phi, K]}{\delta K_i} \frac{\delta \Gamma[\phi, K]}{\delta \phi_i} = 0.\tag{2.1.92}$$

A equação acima constitui um importante passo para a demonstração da renormalizabilidade das teorias de gauge.

As identidades (2.1.69) podem agora ser entendidas como uma consequência direta de (2.1.92). Isto pode ser facilmente constatado, tomando o limite clássico de (2.1.92) quando os as médias quânticas (ou térmicas) se reduzem aos valores clássicos dos operadores, ou seja, $\langle F_i \rangle_{J, K} \rightarrow F_i$, e derivando funcionalmente em relação aos campos.

Em muitas situações estamos especificamente interessados na forma explicitamente *perturbativa* de (2.1.92)

em uma expansão de “loops”. É interessante considerar, tendo em vista principalmente as aplicações que faremos mais adiante, o termo de ordem de um “loop” em (2.1.92). A identidade correspondente é

$$\frac{\delta\Gamma^{(0)}[\phi, K]}{\delta K_i} \frac{\delta\Gamma^{(1)}[\phi, K]}{\delta\phi_i} + \frac{\delta\Gamma^{(1)}[\phi, K]}{\delta K_i} \frac{\delta\Gamma^{(0)}[\phi, K]}{\delta\phi_i} = 0, \quad (2.1.93)$$

onde os índices (0) e (1) denotam respectivamente as contribuições para a ação efetiva de ordem zero e um “loop”.

Por exemplo, tomando uma derivada de (2.1.93) em relação a ϕ_j , no caso em que o índice j corresponde ao campo de gauge A_μ^a , teremos a seguinte identidade de Ward envolvendo a contribuição de ordem de um loop para o tensor de polarização Π_{ij} (ver no apêndice A, especialmente a equação (A.0.12), como as grandezas estão definidas)

$$\frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta K_i} \Pi_{ij}^{(1)} = \frac{\delta\Gamma^{(1)}}{\delta K_i} \Delta_{ij}^{-1} - \frac{\delta^2\Gamma^{(0)}}{\delta\phi_j\delta K_i} \Gamma_i^{(1)} - \frac{\delta^2\Gamma^{(1)}}{\delta\phi_j\delta K_i} \Gamma_i^{(0)}, \quad (2.1.94)$$

onde

$$\Gamma_i^{(n)} \equiv \frac{\delta\Gamma^{(n)}}{\delta\phi_i}. \quad (2.1.95)$$

Em praticamente todos os casos de interesse físico, a grandeza $\Gamma_i^{(0)}$ é nula para todos os campos físicos descritos coletivamente pelo índice i . Na teoria de Yang-Mills, $\Gamma_i^{(n)}$, também se anula em qualquer ordem n quando o índice coletivo i percorre os valores correspondentes ao campo de gauge A_μ^a . Veremos mais adiante que na gravitação as *contribuições térmicas* para $\Gamma_i^{(1)}$ são não nulas (com o índice i percorrendo os valores correspondentes ao gráviton $h_{\mu\nu}$)¹⁸. A fim de expressar o caso da teoria de Yang-Mills de maneira mais explícita, devemos utilizar a equação (2.1.29) para Δ_{ij}^{-1} e também (2.1.64) para a derivada em relação a K . Além disso, devemos lembrar que o segundo termo do lado direito de (2.1.94) é não nulo quando o índice i em K_i percorre os valores correspondentes ao campo de fantasma c_1 ¹⁹. Fazendo isto, a equação (2.1.94) nos dá

$$\int d^4x (\partial_\mu c_2^a) \Pi_{\mu\nu}^{ab} = \int d^4x \Gamma_\nu^a Q_{\text{transv.}}^{\mu\nu}. \quad (2.1.96)$$

onde introduzimos a grandeza

$$\Gamma_\nu^a \equiv \langle D_\nu^{ab} c_2^b \rangle^{(1)} \quad (2.1.97)$$

obtida pela substituição de (2.1.64) em (2.1.91). Sempre que a média $\langle \dots \rangle$ preservar a invariância de Lorentz, o lado direito de (2.1.96) será nulo, pois Γ_ν^b será necessariamente proporcional à uma derivada ∂_ν e $Q_{\text{transv.}}^{\mu\nu}$ é o tensor transversal dado por (2.1.29). Certamente este não será *necessariamente* o caso quando, por exemplo, levamos em conta os efeitos térmicos, uma vez que o banho térmico introduz uma direção u_μ no espaço do Minkowski. Este fato será analisado mais detalhadamente no capítulo 3. Veremos que apenas no caso especial do *limite de altas temperaturas* a transversalidade do tensor de polarização é preservada (a grandeza (2.1.97) é subdominante no limite de altas temperaturas). Uma análise bastante completa da estrutura do tensor de polarização na teoria de Yang-Mills térmica é feita por Weldon em [Weldon 1999]. O problema análogo na gravitação foi investigado por nós em [Brandt e Frenkel 1998, Brandt e Frenkel 1999].

¹⁸O processo de desaparecimento de um glúon viola a conservação da carga de cor. Por exemplo, um diagrama do tipo tadpole possuindo um loop de glúon se anula devido a anti-simetria das constantes de estrutura. Note que a regularização dimensional à temperatura zero daria um resultado nulo mesmo no caso da gravitação.

¹⁹É precisamente esta contribuição que vai cancelar que o termo de fixação de gauge em Δ_{ij}^{-1} .

2.2 Interações gravitacionais

No breve histórico apresentado na seção 2.1.1 mencionamos como a gravitação inspirou as idéias mais profundas envolvidas nas teorias de gauge. Na presente seção vamos explorar os aspectos da gravitação que revelam a grande analogia existente entre as interações gravitacionais, mediadas pelo campo tensorial do gráviton, e as interações mediadas pelos campos vetoriais de Yang-Mills²⁰.

Consideremos inicialmente a ação de Einstein-Hilbert²¹

$$S[g] = \bar{M}_P^2 \int d^4x \sqrt{-g} R; \quad \bar{M}_P^2 \equiv \frac{1}{16\pi G}, \quad (2.2.1)$$

onde $g = \det g_{\mu\nu}$ denota o determinante da métrica do espaço-tempo, R é a curvatura escalar, G é a constante de Newton e \bar{M}_P é a massa de Planck modificada²². A dependência explícita na métrica $g_{\mu\nu}$ está encapsulada nas seguintes relações

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (2.2.2a)$$

$$R_{\mu\kappa} = R^{\nu}_{\mu\nu\kappa}, \quad (2.2.2b)$$

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} = \partial_\nu \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa} - \partial_\kappa \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\kappa}, \quad (2.2.2c)$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (2.2.2d)$$

e

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}. \quad (2.2.2e)$$

É interessante destacar, no presente contexto, as seguintes características da ação de Einstein-Hilbert. A primeira delas é a evidente *não linearidade*, ou seja, a ação contém termos envolvendo o produto de mais de dois tensores $g_{\mu\nu}$. Uma outra propriedade evidente é que todos os termos da ação possuem exatamente duas potências da derivada ∂ , como pode ser verificado diretamente nas relações (2.2.2). Por último, e talvez o mais importante, é que a forma desta ação é determinada pela invariância sob transformações *gerais de coordenadas* do tipo

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \omega^\mu(x). \quad (2.2.3)$$

Embora a gravitação tenha sido originalmente desenvolvida por Einstein em termos estritamente geométricos, é também possível adotar um ponto de vista onde interações gravitacionais são descritas, de maneira análoga às outras interações conhecidas, pela troca dos quanta de um *campo gravitacional*, ou seja, *grávitons*. É este o enfoque utilizado na presente abordagem e também nos trabalhos que serão descritos mais adiante. Como veremos, há certas limitações intrínsecas neste tipo de abordagem. Além disso, o próprio conceito físico de gráviton pode ser questionável e talvez desnecessário. Por outro lado, é possível tratar de maneira bastante direta certos tipos de problemas e ao mesmo tempo expor as limitações desta abordagem através cálculos explícitos.

Antes de prosseguir, será necessário entender de que maneira são descritas as interações gravitacionais com os outros campos da natureza. O procedimento mais simples e natural consiste em modificar a ação de teoria de campos, originalmente formulada no espaço de Minkowski e invariante sob transformações de Lorentz, de modo a torna-la invariante sob as transformações (2.2.3). Esta condição será satisfeita se adotarmos as seguintes

²⁰A analogia pode também ser traçada adotando-se um ponto de vista mais geométrico tal que o análogos dos potenciais de Yang-Mills são as conexões de Christoffel definidas na equação (2.2.2d). No entanto, não será esta a alternativa aqui adotada.

²¹Nesta seção adotaremos a dimensionalidade $D = 4$ para o espaço-tempo.

²²A massa de Planck é usualmente definida, sem o fator $1/\sqrt{16\pi}$, como $M_P = 1/G \sim 10^{19} m_{\text{próton}} \sim 10^{19} \text{GeV}$.

prescrições mínimas

$$\int d^4x \longrightarrow \int d^4x \sqrt{-g}, \quad (2.2.4a)$$

$$\eta^{\mu\nu} \longrightarrow g^{\mu\nu} \quad (2.2.4b)$$

e

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu, \quad (2.2.4c)$$

onde D_μ é a derivada co-variante da relatividade geral satisfazendo

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi, \quad (2.2.5a)$$

$$D_\nu \phi_\mu = \partial_\nu \phi_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \phi_\alpha, \quad (2.2.5b)$$

$$D_\sigma \phi_{\mu\nu} = \partial_\sigma \phi_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \phi_{\alpha\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \phi_{\mu\alpha}, \quad (2.2.5c)$$

$$D_\sigma \phi_{\mu\nu\dots} = \partial_\sigma \phi_{\mu\nu\dots} - \text{um } \Gamma \text{ para cada índice.} \quad (2.2.5d)$$

Por exemplo, seguindo as prescrições acima, a ação para a teoria de campos escalares em interação com campos gravitacionais é

$$S_{\text{scal.}}[\phi, g] = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi). \quad (2.2.6)$$

As equações de movimento clássicas são obtidas usando o princípio variacional na ação total. Fazendo isso, obtemos a equação de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.2.7)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o *tensor de energia-momento* associado aos diversos campos de natureza não gravitacional ($T^{\mu 0}$ e $T^{\mu i}$ são respectivamente a densidade e o fluxo de energia-momento).

2.2.1 Gravitação como uma teoria de campos

Vamos agora introduzir o contexto físico onde a noção de gráviton, mencionada acima, emerge naturalmente. Nosso ponto de partida será um dos resultados mais profundos da teoria de gravitação, sintetizado na relação

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (2.2.8)$$

Esta relação nos informa que o tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$ pode ser obtido considerando a ação S_M , de quaisquer outros campos, formulada no espaço de métrica $g_{\mu\nu}$ (seguindo as prescrições dadas em (2.2.4)) e tomando a variação em relação à $g_{\mu\nu}$, mantendo x^μ fixo. É instrutivo notar que, independentemente do interesse específico nas propriedades das interações gravitacionais, a relação (2.2.8) fornece uma maneira simples e fundamental de se obter o tensor de energia momento usual no espaço plano de Minkowski. De fato, introduzindo o campo $h_{\mu\nu}$ tal que²³

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.2.9)$$

expandindo a ação S_M até primeira ordem em $h_{\mu\nu}$, e levando em conta (2.2.8), teremos

$$S_M = S_M(h=0) - \int d^4x \left(\frac{1}{2} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2) \right). \quad (2.2.10)$$

²³Estamos absorvendo um fator $\sqrt{32\pi G}$ em $h_{\mu\nu}$. Portanto, $h_{\mu\nu}$ é adimensional.

Ou seja, o efeito da gravitação é “sentido” por todos os outros campos através do acoplamento de $h_{\mu\nu}$ com o tensor de energia-momento no *espaço plano*. Do ponto de vista físico, este é um bom motivo para se atribuir o status de *campo do gráviton* ao tensor de Minkowski $h_{\mu\nu}$. Temos assim um cenário onde a interação gravitacional ocorre no espaço plano de Minkowski, analogamente à interação do campo do fóton A_μ com a corrente eletromagnética J^μ .

Fazendo uma breve digressão, antes de prosseguir, é interessante notar que esta abordagem permite também obter certas propriedades gerais do tensor de energia-momento. De fato, considerando a forma geral da ação

$$S_M = \int d^4x \sqrt{-g} \left(A + g^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} C_{\mu\nu\lambda\rho} + \dots \right) \quad (2.2.11)$$

expandindo a métrica até primeira ordem em $h_{\mu\nu}$

$$\sqrt{-g} = 1 + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2); \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.2.12)$$

e comparando com (2.2.10), obtemos a seguinte expressão geral para o tensor de energia-momento no espaço plano

$$T_{\mu\nu} = 2 \left(B_{\mu\nu} + 2 C_{\mu\nu\lambda\rho} \eta^{\lambda\rho} + \dots \right) - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.2.13)$$

onde \mathcal{L} é a densidade de lagrangiana no espaço de Minkowski. Tomando o traço

$$\eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = -4A - 2 \eta^{\mu\nu} B_{\mu\nu}. \quad (2.2.14)$$

Vemos que não há uma contribuição do termo $g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} C_{\mu\nu\lambda\rho}$ para o traço do tensor de energia-momento. É precisamente este tipo de termo que será gerado ao aplicarmos as prescrições (2.2.4) à lagrangiana de Maxwell (2.1.8). Portanto, o tensor de energia momento de campo eletromagnético possui traço nulo.

Substituindo (2.2.9) na ação gravitacional (2.2.1) e usando as relações (2.2.2), vamos obter uma ação para o campo do gráviton dada por uma soma de infinitos termos em ordem crescente de “potências” de $h_{\mu\nu}$, iniciando pelo termo quadrático. Como vimos anteriormente, todos os termos envolverão exatamente duas derivadas ∂ . Esquemáticamente podemos escrever [Zee 2003]

$$S_{\text{grav.}}[h] = \bar{M}_p^2 \int d^4x \left(\partial h \partial h + h \partial h \partial h + h^2 \partial h \partial h + \dots \right). \quad (2.2.15)$$

Cada um dos termos acima representa, na verdade, uma combinação das diversas possíveis contrações de índices dos campos $h_{\mu\nu}$ e das derivadas ∂_μ . Obviamente estas contrações são feitas com o tensor de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ e cada termo individual é um *escalar de Lorentz*. Deixando de lado as óbvias dificuldades de cálculo algébrico (estas podem ser tratadas utilizando-se *computação simbólica*) temos aqui um cenário conceitualmente idêntico ao das teorias de campos usuais onde a ação possui um termo quadrático e termos de interação. Os termos de interação em (2.2.15) descrevem o auto acoplamento do gráviton de maneira análoga aos termos de interação da teoria de Yang-Mills. Enquanto a auto-interação dos campos de Yang-Mills ocorre porque os campos carregam carga, no caso dos grávitons a auto-interação se dá porque o gráviton (como qualquer outra partícula) carrega energia.

A forma explícita de cada um dos termos em (2.2.15) pode ser obtida diretamente substituindo (2.2.9) em (2.2.2) e (2.2.1) e expandindo a métrica, sua inversa e seu determinante até a ordem desejada. É possível também explorar uma interessante alternativa, baseada em considerações de simetria, que além de tornar os cálculos muito mais simples, permite identificar o campo $h_{\mu\nu}$ como um autêntico campo de gauge, análogo ao campo de

Yang-Mills. O ponto chave consiste em notar que a ação (2.2.15) (equivalente à ação (2.2.1)) é invariante sob a transformação (2.2.3), sob a qual a métrica transforma-se como (até primeira ordem em ω)

$$\begin{aligned}
g'_{\mu\nu}(x') &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x) \\
&= (\delta_\mu^\alpha + \partial_\mu \omega(x)^\alpha) (\delta_\nu^\beta + \partial_\nu \omega(x)^\beta) g_{\alpha\beta}(x) \\
g'_{\mu\nu}(x) - \omega(x)^\alpha \partial_\alpha g'_{\mu\nu}(x) &= g_{\mu\nu}(x) + g_{\alpha\nu}(x) \partial_\mu \omega(x)^\alpha + g_{\alpha\mu}(x) \partial_\nu \omega(x)^\alpha \\
\delta g_{\mu\nu} &= g_{\alpha\nu} \partial_\mu \omega^\alpha + g_{\alpha\mu} \partial_\nu \omega^\alpha + \omega^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.2.16}$$

Na última linha, $\delta g_{\mu\nu} \equiv g'_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}$ e ω^μ são funções de x^μ ²⁴. Usando a equação (2.2.5b) a última linha da equação acima pode ser escrita de maneira bem mais elegante como

$$\delta g_{\mu\nu} = D_\mu \omega_\nu + D_\nu \omega_\mu. \tag{2.2.17}$$

Portanto, usando (2.2.9), vemos que o campo gravitacional se transforma como

$$\delta h_{\mu\nu} = D_\mu \omega_\nu + D_\nu \omega_\mu. \tag{2.2.18}$$

A equivalência formal entre a transformação de gauge para os potenciais de Yang-Mills em (2.1.18) é evidente. É importante ressaltar que a transformação (2.2.18) é *linear* em $h_{\mu\nu}$, como pode ser constatado substituindo (2.2.9) na última linha de (2.2.16), mantendo derivadas com índices em baixo e coordenadas com índice em cima. Portanto, a gravitação formulada como uma teoria de campos revela sua invariância de gauge de maneira equivalente à teoria de Yang-Mills.

Na seção 2.1.4 mencionamos que as identidades de Ward (consequência da invariância sob transformações locais) podem ser aplicadas no sentido inverso, ou seja, de tal modo a determinar a forma da ação. Mostraremos agora como isso pode ser feito no caso da gravitação. Além de conceitualmente interessante este procedimento evita o trabalho tedioso envolvido na expansão da métrica. Começando pelo termo quadrático, escrevemos todas as possíveis contrações compatíveis com a invariância de Lorentz e contendo duas derivadas. A ação mais geral que satisfaz este critério é²⁵

$$S^0[h] = \int d^4x (a \partial_\alpha h^{\mu\nu} \partial^\alpha h_{\mu\nu} + b \partial_\alpha h_\mu^\mu \partial^\alpha h_\nu^\nu + c \partial_\alpha h^{\alpha\nu} \partial^\mu h_{\mu\nu} + d \partial^\mu h_\alpha^\alpha \partial^\nu h_{\mu\nu}). \tag{2.2.19}$$

Impondo a condição de invariância $\delta S^0[h] = S^0[h'] - S^0[h] = 0$, com $h'_{\mu\nu}$ dado por (2.2.18), e usando integração por partes para a contribuição linear em $h_{\mu\nu}$, teremos a seguinte condição²⁶

$$(4a + 2c) \omega^\nu \partial^2 \partial^\mu h_{\mu\nu} + (4b + 2d) \omega^\nu \partial^2 \partial^\nu h + (2c + 2d) \omega^\nu \partial_\nu \partial^\mu \partial^\lambda h_{\mu\lambda} = 0. \tag{2.2.20}$$

A existência de três estruturas independentes e quatro constantes a serem determinadas é uma excelente oportunidade de fazer contato com o limite newtoniano, fixando a normalização em termos da constante de Newton. Como veremos, isso requer uma normalização tal que, em unidades de \bar{M}_p^2 , as constantes em (2.2.20) sejam

²⁴A resposta $\delta \phi$ de um campo ϕ a uma transformação de coordenadas recebe o nome de *derivada de Lie*.

²⁵Devemos considerar todas as contrações de pares de índices em $\partial^{\alpha_1} h^{\mu_1 \nu_1} \partial^{\alpha_2} h^{\mu_2 \nu_2}$. Há dois termos com α_1 contraído com α_2 e dois termos com α_1 contraído com um dos índices de h . Esta sistemática pode ser generalizada para ordens superiores.

²⁶O termo quadrático em h se combina com a variação da parte cúbica da ação produzindo as condições que determinam a ação em ordem h^3 .

escolhidas como $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$ e $d = 2$. Substituindo estes valores em (2.2.19), teremos

$$S^0[h] = \frac{\bar{M}_P^2}{2} \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha h^{\mu\nu} \partial^\alpha h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\alpha h_\mu^\mu \partial^\alpha h_\nu^\nu - \partial_\alpha h^{\alpha\nu} \partial^\mu h_{\mu\nu} + \partial^\mu h_\alpha^\alpha \partial^\nu h_{\mu\nu} \right). \quad (2.2.21)$$

Como não poderia deixar de ser, se tivéssemos feito o cálculo direto, tedioso e não instrutivo, usando a expansão da métrica nas equações (2.2.2) e (2.2.1), teríamos obtido o mesmo resultado acima.

Em princípio podemos prosseguir com este algoritmo, obtendo termos de ordem superior em h como os indicados simbolicamente em (2.2.15). No apêndice A da referência [Brandt e Frenkel 1993], onde calculamos o vértice de três grávitons em ordem de um “loop”, são obtidos os termos de ordem até h^5 e as respectivas expressões no espaço dos momentos (regras de Feynman)²⁷. Anteriormente, já haviam sido obtidos os termos até ordem h^3 que foram utilizados na referência [Capper, Leibbrandt e Medrano 1973] para o cálculo do tensor de polarização do gráviton, a temperatura zero, usando regularização dimensional.

2.2.2 Regras de Feynman

A obtenção das regras de Feynman para os vértices que descrevem as auto-interações do gráviton (vértice cúbico, quártico, etc) é um procedimento automatizável que não envolve qualquer tipo de dificuldade conceitual. Como já mencionamos, “qualquer computador”, devidamente programado, pode fazer isso²⁸. Por isso, vamos focalizar aqui a obtenção do *propagador do gráviton*. Um texto clássico sobre este assunto é a referência [Veltman 1976], onde o ponto de partida é a construção do propagador de uma partícula de spin 2, levando em conta que as duas outras possibilidades mais simples, spin 0 ou spin 1, são descartadas por fatos experimentais elementares²⁹.

Em grande parte o problema principal envolvido na obtenção do propagador do gráviton já foi tratado na seção 2.1.3 quando tivemos que inverter o termo quadrático em (2.1.21) proveniente da ação de Yang-Mills. A fim de exibir explicitamente o problema análogo da gravitação, é conveniente usar integração por partes de modo a escrever (2.2.21) como

$$S^0[h] = \frac{\bar{M}_P^2}{2} \int d^4x \int d^4x h_{\mu\nu} Q_{\text{transv.}}^{\mu\nu; \alpha\beta} h_{\alpha\beta}, \quad (2.2.22)$$

onde $Q_{\text{transv.}}^{\mu\nu; \alpha\beta}$ atua no espaço linear de tensores (de Minkowski) simétricos de dois índices. Sabemos que o operador $Q_{\text{transv.}}^{\mu\nu; \alpha\beta}$ possui auto-valores nulos, uma vez que a invariância de gauge implica em

$$Q_{\text{transv.}}^{\mu\nu; \alpha\beta} \partial_\alpha \omega_\beta = 0. \quad (2.2.23)$$

Portanto, não é possível obter o operador inverso de $Q_{\text{transv.}}^{\mu\nu; \alpha\beta}$, ou seja, não podemos obter o propagador do gráviton. A solução para este problema é a mesma empregada no caso da teoria de Yang-Mills, a saber, fazemos uma escolha de gauge, impondo uma condição sobre os campos $h_{\mu\nu}$ de tal forma que a integração funcional

²⁷Na verdade, o programa de cálculo simbólico utilizado nos cálculos da referência [Brandt e Frenkel 1993] empregou diretamente as fórmulas (2.2.1) e (2.2.2) e, em seguida, as identidades de Ward dadas em (2.2.33), decorrentes de (2.2.18), foram utilizadas como um teste dos resultados. Um algoritmo computacional baseado na construção da ação ordem a ordem, como descrito nesta seção, pode vir a ser uma interessante alternativa.

²⁸É interessante que os primeiros programas de computação simbólica foram desenvolvidos com o propósito de realizar cálculos em teorias de gauge. De fato, o próprio Veltman desenvolveu, no início da década de 1960, um programa chamado Schoonschip [Strubbe 1974, Veltman e Williams 1991].

²⁹O campo gravitacional não pode ser escalar (spin 0) uma vez que a gravitação se acopla à energia, a qual não é uma grandeza escalar. Um campo vetorial (spin 1) também deve ser descartado, tendo em vista que partículas e anti-partículas, de qualquer tipo, interagem gravitacionalmente da mesma maneira.

em (2.1.28) seja feita somente sobre regiões não conectadas por transformações de gauge. Seguindo o procedimento adotado para a teoria de Yang-Mills, introduzimos um termo extra à ação, o qual viola a invariância sob transformações de coordenadas, e modifica termo quadrático de tal forma a torna-lo inversível. Uma escolha usual para esta fixação de gauge consiste em adicionar um termo tal que a equação de movimento resultante é a equação de onda $\partial^2 h_{\mu\nu} = 0$, no vácuo. Por isso esta escolha é as vezes denominada *gauge harmônico*. Esta escolha também resulta na forma mais simples para o propagador, analogamente ao caso do gauge de Feynman na QED. Para ver como isso pode ser feito, consideremos inicialmente a forma explícita do termo quadrático em (2.2.22) a qual pode ser escrita equivalentemente como ³⁰

$$\begin{aligned} Q_{\text{transv.}}^{\mu\nu; \alpha\beta} &= \frac{1}{4} \left[-K^{\mu\nu; \alpha\beta} \partial^2 + \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \partial^2 + \right. \\ &+ \eta^{\nu\beta} \partial^\mu \partial^\alpha + \eta^{\mu\beta} \partial^\nu \partial^\alpha + \eta^{\nu\alpha} \partial^\mu \partial^\beta + \eta^{\mu\alpha} \partial^\nu \partial^\beta \\ &\left. - 2\eta^{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta - 2\eta^{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\mu \right], \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

onde foi introduzida a grandeza

$$K_{\mu\nu; \alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} (\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}). \quad (2.2.25)$$

É fácil verificar que (aqui as contrações são efetuadas com a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$)

$$K_{\mu\nu; \rho\sigma} K^{\rho\sigma; \alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta + \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha) \equiv I_{\mu\nu}^{\alpha\beta}, \quad (2.2.26)$$

onde $I_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ é a matriz identidade no espaço de tensores simétricos de dois índices. A identidade (2.2.26) sugere que uma escolha de gauge conveniente é aquela que elimina todos os termos de (2.2.24), exceto o primeiro. Esse critério pode ser implementado adicionando à ação gravitacional o seguinte *termo de fixação de gauge*

$$S_{\text{fix.}}^0[h] = \frac{\bar{M}_P^2}{2} \frac{1}{\xi} \int d^4x f^\mu(h) f_\mu(h) \quad \text{com} \quad f^\mu(h) \equiv \partial_\alpha h^{\alpha\mu} - \frac{1}{2} \partial^\mu h^\lambda_\lambda \quad (2.2.27)$$

e fazendo $\xi = 1$ ³¹. Desse modo, o novo termo quadrático pode ser facilmente invertido, usando (2.2.26), levando à seguinte expressão para o propagador do gráviton no espaço de momento

$$\underbrace{\mu\nu \quad k \quad \alpha\beta}_{\text{diagrama}} : D_{\mu\nu; \alpha\beta}(k; \xi = 1) \equiv \frac{1}{2} \frac{\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon}. \quad (2.2.28)$$

Este é o análogo do propagador no gauge de Feynman na QED (compare com (2.1.55)). Na gravitação este gauge é freqüentemente denominado gauge de Feynman-De Donder. Uma classe mais geral de gauges co-variantes (co-variância de Lorentz) é caracterizada por um parâmetro real ξ qualquer ³².

O caráter não linear da gravitação requer, tal como na teoria de Yang-Mills, a utilização do formalismo de Faddeev-Popov. De fato, adotando um procedimento análogo ao da seção 2.1.3 somos levamos a introduzir na ação gravitacional um termo que descreve a interação entre *campos vetoriais fictícios* (variáveis de Grassmann) e os grávitons [Fradkin e Tyutin 1970]. Este termo extra tem a seguinte forma

$$S_{\text{ghost.}}[h, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2] = - \int d^4x \mathcal{C}_1^\alpha \frac{\delta f_\alpha(h, \omega)}{\delta \omega^\beta} \mathcal{C}_2^\beta. \quad (2.2.29)$$

³⁰Esta forma é obtida usando integração por partes em (2.2.21), simetrizando nos pares de índices de cada campo e levando em conta a simetria bosônica $\mu\nu \leftrightarrow \alpha\beta$.

³¹Note que este termo é de fato *não invariante* sob transformações gerais de coordenadas.

³²Na gravitação a classe de gauges co-variantes de Lorentz e lineares em $h_{\mu\nu}$ pode ser mais geral ainda. Por exemplo, uma escolha do tipo $f^\mu(h) \equiv \partial_\alpha h^{\alpha\mu} - \beta \partial^\mu h^\lambda_\lambda$ foi considerada na referência [Capper 1980].

as correspondentes funções 1PI térmicas também satisfazem (2.2.33).

Podemos agora empregar as regras de Feynman gravitacionais em cálculos perturbativos utilizando as técnicas usuais de teoria de campos. No entanto, é importante lembrar que existem importantes diferenças em relação à teoria de Yang-Mills, sendo que a mais notória é a *não renormalizabilidade* da teoria perturbativa definida pela soma das ações (2.2.15), (2.2.27) e (2.2.29). No presente contexto, este problema já é entendido há mais de trinta anos. No início da década de 1970 't Hooft e Veltman mostraram que as divergências ultravioletas em cálculos de ordem de um loop, surpreendentemente, se cancelam [Hooft e Veltman 1974]. Porém, este cancelamento deixa de ocorrer quando são introduzidas as interações com a matéria [Hooft e Veltman 1974, Deser, Tsao e Nieuwenhuizen 1974, Deser e Nieuwenhuizen 1974] ou mesmo na teoria sem matéria em ordem de dois loops [Goroff e Sagnotti 1986, Ven 1992]³⁴ Adotando-se um ponto de vista mais moderno, a teoria deve ser reinterpretada como uma *teoria efetiva* que surge no limite de baixas energias de uma teoria mais fundamental [Gomis e Weinberg 1996, Deser 2000, Burgess 2003] e que talvez possa ser empregada em escalas de energia tais que a física mais fundamental não se manifesta. Uma possibilidade seria a existência de uma física diferente, e não entendida completamente até o presente, em escalas da ordem da energia de Planck $1/\sqrt{G} = 10^{19} m_{\text{proton}}$ ³⁵. Nosso principal interesse tem sido o cálculo de *loops térmicos* no formalismo de teoria de campos a temperatura finita, onde a temperatura constitui um “cutoff” natural para as divergências ultravioletas. Como veremos na seção 3.4, quando a temperatura é suficientemente alta, *fenômenos coletivos* caracterizados por uma escala de energia-momento k admitem, em princípio, uma descrição em termos de aproximações de ordem de um loop, desde que a temperatura T esteja no intervalo $k \ll T \ll \tilde{M}_{\text{Planck}}$.

³⁴Em versões supersimétricas da gravitação as divergências se cancelam em ordem de um [Grisaru, Nieuwenhuizen e Vermaseren 1976] ou dois loops [Grisaru 1977]. Este resultado é uma consequência das identidades de Ward supersimétricas [Grisaru, Pendleton e Nieuwenhuizen 1977].

³⁵Na verdade, dependendo da escala de energia dos fenômenos envolvidos, é possível adotar um ponto de vista ainda mais pragmático e considerar valores bem menores para esta escala.

2.3 Espaços não comutativos

2.3.1 Principais motivações

A idéia de que as coordenadas de espaço-tempo possam não comutar em escalas de distância muito pequenas (por exemplo, da ordem da escala de Planck, 10^{-35} m) foi formalizada pela primeira vez por Snyder em 1947 [Snyder 1947, Snyder 1947]³⁶. De maneira análoga aos observáveis de momento e posição na mecânica quântica, a não comutatividade das coordenadas introduz células mínimas de espaço-tempo, dentro das quais há uma indeterminação dos respectivos observáveis. Assim, a interação pontual deixa efetivamente de existir e as divergências ultravioletas são regularizadas por uma escala análoga à constante de Planck na Mecânica Quântica. Esta maneira de “resolver” o problema das divergências ultravioletas possuía ainda o atrativo de ser em princípio uma formulação invariante de Lorentz, ao contrário do que ocorria com as regularizações conhecidas na época. Esta abordagem foi logo esquecida tendo em vista que, na mesma época, o programa de *renormalização* de teorias quânticas de campos acabava de obter pleno sucesso para previsão de observáveis físicos da QED³⁷.

Há no entanto um argumento heurístico e fisicamente bastante profundo para a possível existência de uma incerteza para os observáveis de espaço-tempo. O argumento se desenvolve a partir da combinação da gravitação de Einstein com as relações de incerteza de Heisenberg, da seguinte maneira [Doplicher, Fredenhagen e Roberts 1994, Doplicher, Fredenhagen e Roberts 1995]. Uma medida de posição com precisão a leva a uma indeterminação na energia da ordem de $1/a$ (considerando as massas de repouso muito pequenas) distribuída na região de localização. Como vimos na seção anterior, o *tensor de energia-momento* $T_{\mu\nu}$, por sua vez, gera uma métrica $g_{\mu\nu}$ de acordo com a equação de Einstein (2.2.7). Portanto, quanto maior for a precisão da medida maior será o campo gravitacional gerado pelo processo de medida. A localização deixará de ter um significado operacional quando a intensidade do campo gravitacional for suficientemente grande a ponto de impedir que qualquer sinal saia da região de localização. Possivelmente, a natureza quântica do campo gravitacional deverá também ser levada em conta em um tal cenário.

O ponto de partida mais natural para a formalização destas idéias é a relação de comutação

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}. \quad (2.3.1)$$

Nesta relação os *operadores hermitianos* \hat{x}^μ são associados às coordenadas usuais x^μ , de maneira análoga ao procedimento adotado na mecânica quântica para se associar observáveis aos operadores. Estaremos aqui focalizando o caso mais simples quando $\theta^{\mu\nu}$ é uma matriz anti-simétrica *independente de* x^μ . O conceito heurístico descrito acima segue imediatamente, uma vez que a relação de comutação implica na relação de incerteza

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu \geq \frac{1}{2} |\theta^{\mu\nu}|. \quad (2.3.2)$$

Ou seja, um ponto qualquer do espaço-tempo deixa de ter significado. Temos agora o análogo de uma célula de Planck para o espaço-tempo e a descrição de fenômenos físicos em escalas de distância da ordem de $\sqrt{|\theta|}$ deve necessariamente fazer uso dos elementos de uma álgebra não comutativa. Neste contexto, a motivação de Snyder pode ser entendida uma vez que os fenômenos em escalas de distância menores do que $\sqrt{|\theta|}$ seriam intrinse-

³⁶Consta que estas idéias já haviam sido consideradas por Heisenberg em uma carta escrita para Pierls. A idéia teria se propagado até Snyder pela via Pierls → Pauli → Oppenheimer → Snyder [Jackiw 2002].

³⁷Feynman, Schwinger e Tomonaga completaram a renormalização da Eletrodinâmica Quântica em 1948 e receberam o prêmio Nobel em 1965 [Feynman 1948, Schwinger 1948, Tomonaga e Oppenheimer 1948]. Dyson mostrou a equivalência entre os formalismos de Feynman e Schwinger e calculou correções de ordem superior para a polarização do vácuo [Dyson 1949].

camente inacessíveis, de maneira semelhante ao procedimento de regularização por “cutoff” dos diagramas de Feynman. Os desenvolvimentos mais recentes vieram a mostrar que esta expectativa não se realizou de fato e o parâmetro θ não regulariza todas as divergências da teoria.

O conceito matemático de *geometria não comutativa* para o espaço-tempo foi redescoberto na década de 1980, em trabalhos dos matemáticos Connes e Woronowicz que generalizaram a noção de uma estrutura diferencial para o caso não comutativo [Connes 1985, Woronowicz 1987].

Nos últimos anos o interesse em teorias não comutativas foi renovado quando se descobriu que a dinâmica da corda aberta na presença de um campo anti-simétrico pode ser descrita, em certos limites, em termos de teorias de gauge formuladas em espaços não comutativos [Seiberg e Witten 1999]³⁸.

Vários outros desenvolvimentos e ramificações sobre teoria de campos não comutativa, bem como uma lista bastante completa de referências, podem ser encontrados em bons artigos de revisão tais como [Szabo 2003]. Faremos a seguir uma breve apresentação de alguns conceitos mais diretamente relacionados com as pesquisas que desenvolvemos sobre o assunto³⁹. Um tratamento mais aprofundado de certos tópicos, como por exemplo a renormalizabilidade de teorias não comutativas ou o tratamento de modelos super-simétricos, pode ser encontrados nas referências [Girotti 2003, Gomes 2001].

2.3.2 Quantização de Weyl e o produto de Grönenwold-Moyal

O formalismo que descreve a não comutatividade do espaço-tempo se inspira em algumas idéias fundamentais da Mecânica Quântica. Uma destas idéias, introduzida por Weyl, é a prescrição para se associar determinados operadores quânticos a uma função clássica das variáveis do espaço de fase [Weyl 1927, Weyl 1931]. Como veremos a seguir, esta prescrição permite descrever os espaços não comutativos de maneira bastante geral e estudar sistematicamente as teorias de campos definidas nestes espaços.

Vamos supor que todos os campos da teoria, representados aqui por $f(x)$, satisfaçam as *condições usuais*⁴⁰ que permitem representa-los em termos de componentes de Fourier

$$\tilde{f}(k) = \int d^D x e^{-ik_\mu x^\mu} f(x). \quad (2.3.3)$$

O espaço não comutativo é definido pela substituição de x^μ por operadores hermitianos \hat{x}^μ , satisfazendo a relação (2.3.1). Ou seja, os operadores \hat{x}^μ adquirem o status de *geradores* de uma álgebra não comutativa de operadores. A quantização de Weyl estabelece uma correspondência entre a álgebra dos campos e álgebra dos operadores. Dadas as componentes de Fourier de um campo qualquer podemos introduzir o *símbolo de Weyl*

$$\hat{\mathcal{W}}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{ik_\mu \hat{x}^\mu}. \quad (2.3.4)$$

O mapeamento entre operadores e campos é realizado pelo operador

$$\hat{\Delta}(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{-ik_\mu x^\mu} \quad (2.3.5)$$

³⁸Como uma indicação da popularidade adquirida por este assunto de pesquisa, é interessante notar que esta referência foi citada 1510 vezes até a presente data (10.05.2004), de acordo com <http://www.slac.stanford.edu/spires/hep/>.

³⁹Vamos nos basear principalmente na referência [Szabo 2003].

⁴⁰As derivadas de qualquer ordem se anulam no infinito tanto no espaço de posição quanto no espaço de momento.

em termos do qual podemos reescrever (2.3.4) como

$$\hat{\mathcal{W}}[f] = \int d^D x f(x) \hat{\Delta}(x). \quad (2.3.6)$$

Note que no *caso comutativo*, ou seja, quando $\theta^{\mu\nu} = 0$, o operador $\hat{\Delta}(x)$ se reduz à função delta de Dirac $\delta^D(\hat{x} - x)$. Em geral, $\hat{\Delta}(x)$ é o objeto que faz a interpolação entre os operadores de Weyl e os campos.

É possível também mapear as derivadas usuais em “derivadas” de operadores definidas pelo operador anti-hermitiano $i\hat{\partial}_\mu$ em termos das relações

$$[\hat{\partial}_\mu, \hat{x}^\mu] = \delta_\nu^\mu, \quad [\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}_\nu] = 0. \quad (2.3.7)$$

Usando (2.3.5) podemos verificar facilmente que

$$[\hat{\partial}_\mu, \hat{\Delta}(x)] = -\partial_\mu \hat{\Delta}(x). \quad (2.3.8)$$

Substituindo a relação acima em (2.3.6) e integrando por partes, obtemos a relação

$$[\hat{\partial}_\mu, \hat{\mathcal{W}}[f]] = \int d^D x \partial_\mu f(x) \hat{\Delta}(x) = \hat{\mathcal{W}}[\partial_\mu f]. \quad (2.3.9)$$

A relação (2.3.8) permite também definir os geradores unitários de translações $\exp(i v^\mu \hat{\partial}_\mu)$ tais que a seguinte identidade é verificada

$$\begin{aligned} e^{-v^\mu \hat{\partial}_\mu} \hat{\Delta}(x) e^{v^\mu \hat{\partial}_\mu} &= \hat{\Delta} - v^\mu [\hat{\partial}_\mu, \hat{\Delta}] + \frac{1}{2} v^\mu v^\nu [\hat{\partial}_\mu, [\hat{\partial}_\nu, \hat{\Delta}]] + \dots \\ &= \hat{\Delta}(x + v). \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Introduzindo agora a operação de *traço*, denotada por Tr , definida na álgebra dos operadores de Weyl e usando (2.3.6), teremos

$$\text{Tr} \hat{\mathcal{W}}[f] = \int d^D x f(x) \text{Tr} \hat{\Delta}(x). \quad (2.3.11)$$

Usando a identidade (2.3.10) e a *propriedade cíclica do traço*, vemos que $\text{Tr} \hat{\Delta}(x)$ é independente de x . Adotando a normalização $\text{Tr} \hat{\Delta}(x) = 1$, a última equação acima nos dá

$$\text{Tr} \hat{\mathcal{W}}[f] = \int d^D x f(x). \quad (2.3.12)$$

Ou seja, o *traço dos operadores de Weyl* é representado por uma *integração dos campos*.

A relação (2.3.6) nos dá diretamente os operadores de Weyl a partir dos campos ou seja,

$$f(x) \xrightarrow{\hat{\Delta}(x)} \hat{\mathcal{W}}[f] \quad (2.3.13)$$

É igualmente importante saber a forma explícita da relação inversa correspondente e das condições para sua existência. Esta relação pode ser obtida conhecendo-se o produto de dois operadores $\hat{\Delta}$ em pontos quaisquer do espaço-tempo. Usando a equação (2.3.5) e a *fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff* (lembrando que, de acordo com (2.3.1), $[x^\mu, x^\nu]$ comuta com \hat{x}^α),

$$e^{i k_\mu \hat{x}^\mu} e^{i k'_\nu \hat{x}^\nu} = e^{\frac{1}{2} [i k_\mu \hat{x}^\mu, i k'_\nu \hat{x}^\nu]} e^{i k_\mu \hat{x}^\mu + i k'_\nu \hat{x}^\nu} = e^{-\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} e^{i(k_\mu + k'_\mu) \hat{x}^\mu}, \quad (2.3.14)$$

teremos

$$\hat{\Delta}(x) \hat{\Delta}(y) = \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} e^{-\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} e^{i(k_\mu + k'_\mu) \hat{x}^\mu} e^{-i k_\mu x^\mu - i k'_\mu y^\mu}. \quad (2.3.15)$$

Usando (2.3.6) com $f = \exp(i(k_\mu + k'_\mu)\hat{x}^\mu)$, a relação acima pode ser escrita como

$$\hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y) = \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \int d^D z e^{i(k_\mu + k'_\mu)z^\mu} \hat{\Delta}(z) e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} e^{-ik_\mu x^\mu - ik'_\mu y^\mu}. \quad (2.3.16)$$

Calculando as integrais gaussianas em k e k' (estamos assumindo que a matriz θ possui inversa), teremos

$$\hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y) = \frac{1}{\pi^D |\det \theta|} \int d^D z \hat{\Delta}(z) e^{-2i(\theta^{-1})_{\mu\nu}(x-z)^\mu(y-z)^\nu}. \quad (2.3.17)$$

Usando a normalização do traço de Δ e a anti-simetria de θ^{-1} , obtemos a seguinte condição de *ortonormalidade*

$$\text{Tr}(\hat{\Delta}(x)\hat{\Delta}(y)) = \delta^D(x-y). \quad (2.3.18)$$

Multiplicando o lado esquerdo de (2.3.6) por $\hat{\Delta}(y)$, tomando o traço e usando a relação (2.3.18) obtemos finalmente a seguinte relação para a inversa de (2.3.6)

$$f(x) = \text{Tr}(\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\Delta}(x)). \quad (2.3.19)$$

A função $f(x)$ assim obtida a partir do correspondente operador quântico é denominada *função de distribuição de Wigner* [Wigner 1932] e o mapeamento realizado por $\Delta(x)$ é o análogo da *correspondência Weyl-Wigner* da teoria quântica usual.

A relação (2.3.19) pode ser usada para se obter sistematicamente a representação no espaço de coordenadas de *produtos* de operadores $\hat{\mathcal{W}}[f]$, $\hat{\mathcal{W}}[g]$, etc. Uma tal expressão constitui o ponto de partida para que possamos mapear os operadores de Wigner de uma teoria de campos qualquer. Por exemplo, o produto de dois operadores possui a seguinte expressão no espaço de coordenadas

$$\text{Tr}(\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g]\hat{\Delta}(x)) = \frac{1}{\pi^D |\det \theta|} \iint d^D y d^D z f(y) g(z) e^{-2i(\theta^{-1})_{\mu\nu}(x-y)^\mu(x-z)^\nu}, \quad (2.3.20)$$

onde usamos as relações (2.3.6), (2.3.17) e (2.3.18). Usando a expressão (2.3.4) no produto $\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g]$, substituindo as componentes de Fourier por (2.3.3) e levando em conta a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff em (2.3.14), podemos escrever

$$\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g] = \hat{\mathcal{W}}[f \star g], \quad (2.3.21)$$

onde

$$\begin{aligned} f(x) \star g(x) &= \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k' - k) e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} e^{ik'_\mu x^\mu} \\ &= f(x) \exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x) \\ &= f(x) g(x) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \theta^{\mu_1 \nu_1} \dots \theta^{\mu_n \nu_n} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} f(x) \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_n} g(x). \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

é o *produto estrela* de Gröenewold-Moyal [Groenewold 1946, Moyal 1949].

É interessante considerar algumas conseqüências simples da expressão (2.3.22). Por exemplo, usando a

anti-simetria de $\theta^{\mu\nu}$, o *comutador* e o *anti-comutador* de Grönenwold-Moyal podem ser escritos como

$$\begin{aligned} [f(x), g(x)]_\star &\equiv f(x) \star g(x) - g(x) \star f(x) \\ &= 2i f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu \right) g(x), \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

e

$$\begin{aligned} \{f(x), g(x)\}_\star &\equiv f(x) \star g(x) + g(x) \star f(x) \\ &= 2f(x) \operatorname{cos} \left(\frac{1}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu \right) g(x). \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

No caso geral (produto de vários operadores), somos levados a considerar a seguinte extensão da fórmula (2.3.22)

$$f_1(x_1) \star \cdots \star f_n(x_n) = \prod_{a < b} \exp \left(\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_a^\mu} \frac{\partial}{\partial x_b^\nu} \right) f_1(x_1) \cdots f_n(x_n). \quad (2.3.25)$$

Vemos assim que o produto de Grönenwold-Moyal constitui uma alternativa ao produto de operadores de Weyl. A não comutatividade se manifesta como uma *deformação* do produto de funções das coordenadas do espaço-tempo. Integrando a expressão (2.3.25) em todo espaço-tempo e usando a equação (2.3.12) obtemos a seguinte relação explícita entre as duas maneiras de se representar a não comutatividade

$$\operatorname{Tr} \left(\hat{\mathcal{W}}[f_1] \cdots \hat{\mathcal{W}}[f_n] \right) = \int d^D x f_1(x) \star \cdots \star f_n(x). \quad (2.3.26)$$

Levando em conta a propriedade de ciclicidade do traço, concluímos que a integral de um produto de Grönenwold-Moyal permanece invariante quando permutamos ciclicamente as funções $f_a(x)$. No caso especial de duas funções, teremos

$$\int d^D x f(x) \star g(x) = \int d^D x g(x) \star f(x) = \int d^D x f(x) g(x). \quad (2.3.27)$$

Esta igualdade pode ser verificada diretamente usando a equação (2.3.22) e notando que os termos envolvendo θ se anulam ao serem integrados por partes. Vemos que a integração no espaço de coordenadas é formalmente uma operação de “traço” do produto deformado de funções.

2.3.3 Regras de Feynman da teoria de Yang-Mills em espaços não-comutativos

O formalismo geral apresentado na seção anterior pode, em princípio, ser aplicado a qualquer teoria de campos. Na versão não comutativa da *densidade de lagrangiana* da teoria, cada um dos campos e suas derivadas são substituídos pelos correspondentes operadores de Weyl. A *ação a teoria* é então obtida pela operação de traço, introduzida em (2.3.12), e a relação (2.3.26) é empregada. Finalmente, a forma explícita do produto de Grönenwold-Moyal dado por (2.3.22) é empregado.

Poderíamos então supor que a versão não comutativa da teoria de Yang-Mills descrita pela lagrangiana (2.1.26) seguiria os passos descritos acima sem nenhuma condição adicional. Há no entanto um importante detalhe físico, específico das teorias de gauge, que deve ser levado em conta. Devemos lembrar que a construção da teoria de Yang-Mills usual poderia ter sido feita levando em conta não apenas a simetria sob transformações de $S(N)$, mas sim o grupo $U(N) = U(1) \times SU(N)/\mathbb{Z}_N$. Porém, na teoria de campos comutativa, o “fóton”, associado à $U(1)$, se desacopla dos $N^2 - 1$ campos de gauge associados à $SU(N)$. O mesmo não vai ocorrer na versão não-comutativa da teoria de Yang-Mills. De fato, se g e h são dois elementos do grupo, em geral $\det(g \star h) \neq \det(g) \star \det(h)$. Portanto, o grupo especial unitário não é um grupo no espaço não-comutativo. Por

outro lado, devido à propriedade $(g \star h)^\dagger = h^\dagger \star g^\dagger$, o produto $g \star h$ de duas matrizes unitárias é sempre unitário. A possibilidade de se introduzir outros grupos de gauge é restringida se quisermos manter a associatividade da álgebra não-comutativa [Matsubara 2000, Madore et al. 2000].

Somos então levados a considerar a seguinte versão não-comutativa da ação de Yang-Mills

$$S_{\text{nc}}^{\text{YM}} = \int d^4x \text{Tr} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{1}{2} (i c_1 \star \partial_\mu D^\mu c_2 - i \partial_\mu D^\mu c_2 \star c_1) \right) \quad (2.3.28)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu]_\star, \quad (2.3.29)$$

e

$$A_\mu = A_\mu^A T^A, \quad A = 0 \dots N^2 - 1. \quad (2.3.30)$$

A versão não-comutativa da transformação de gauge em (2.1.15) é⁴¹.

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \omega + i (\omega \star A_\mu - A_\mu \star \omega) \quad (2.3.32)$$

ou, equivalentemente,

$$A_\mu^A T^A \rightarrow A_\mu^A T^A + \partial_\mu \omega^A T^A + \frac{i}{2} [\omega^A, A_\mu^B]_\star \{T^A, T^B\} + \frac{i}{2} \{ \omega^A, A_\mu^B \}_\star [T^A, T^B]. \quad (2.3.33)$$

Usando as relações,

$$[T^A, T^B] = if_{ABC} T^C, \quad \{T^A, T^B\} = d_{ABC} T^C, \quad \text{Tr}(T^A T^B) = \delta^{AB}, \quad (2.3.34)$$

onde as grandezas f_{ABC} e d_{ABC} são as constantes de estrutura do grupo $U(N)$ respectivamente simétrica e anti-simétrica, podemos escrever

$$A_\mu^A \rightarrow A_\mu^A + \partial_\mu \omega^A + \frac{i}{2} [\omega^A, A_\mu^B]_\star d_{ABC} - \frac{1}{2} \{ \omega^A, A_\mu^B \}_\star f_{ABC}. \quad (2.3.35)$$

Note que mesmo no caso $N = 1$ (QED não comutativa), quando $T^0 = 1$ e $d_{000} = 2$, as transformações mantêm um caráter não-abeliano.

Usando identidades do tipo

$$[A_\mu, A_\nu]_\star = \frac{1}{2} \{A_\mu^A, A_\nu^B\}_\star [T_\mu^A, T_\nu^B] + \frac{1}{2} [A_\mu^A, A_\nu^B]_\star \{T_\mu^A, T_\nu^B\}, \quad (2.3.36)$$

bem como as relações (2.3.34), a ação (2.3.28) pode ser expressa diretamente em termos dos campos A_μ^A , c_1^A e c_2^A . Em seguida, usando (2.3.23) e (2.3.24) e expressando os campos em termos de suas componentes de Fourier, as regras de Feynman podem ser lidas diretamente de $iS_{\text{nc}}^{\text{YM}}$. Os resultados assim obtidos generalizam as regras de Feynman da teoria usual, dadas em (2.1.59b), (2.1.59c) e (2.1.59d), pela substituição das constantes de estrutura f^{abc} por

$$C^{ABC}(p_1, p_2) = f^{ABC} \cos\left(\frac{p_1 \times p_2}{2}\right) + d^{ABC} \sin\left(\frac{p_1 \times p_2}{2}\right); \quad p_1 \times p_2 \equiv p_1^\mu \theta_{\mu\nu} p_2^\nu \quad (2.3.37)$$

e levando em conta que p_1 , p_2 e p_3 estão associados aos campos cuja cor é respectivamente A , B e C . Os propagadores são obtidos de (2.1.55) e (2.1.57) fazendo $\delta^{ab} \rightarrow \delta^{AB}$. A teoria perturbativa assim definida possui

⁴¹ Estas transformações são compatíveis com a condição de unitariedade

$$U(x) \star U^\dagger(x) = U^\dagger(x) \star U(x) = I_N. \quad (2.3.31)$$

as propriedades de invariância sob transformações de BRST e é renormalizável [Bonora e Salizzoni 2001]. Na seção 4.1 vamos aplicar estes resultados ao estudo de feitos térmicos em teorias de calibre não-comutativas, utilizando o formalismo apresentado na seção 2.4.

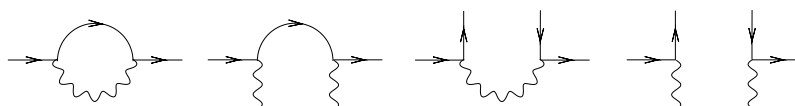
2.4 Teoria de campos à temperatura finita

2.4.1 Motivação e considerações gerais

A teoria de campos à temperatura finita fornece uma descrição, em termos das interações fundamentais, que é apropriada para sistemas térmicos cuja natureza quântica e relativística são igualmente importantes. Por exemplo, a descrição do universo primordial, em cosmologia, em termos de um plasma de partículas elementares. Há portanto dois cenários, igualmente importantes, que se unificam neste formalismo. O primeiro deles é aquele descrito pela *teoria quântica de campos*, empregada na descrição da dinâmica quântica de processos tais como a colisão entre um elétron e um anti-elétron. Um aspecto fundamental da física codificada na teoria quântica de campos é o conceito de *flutuação quântica*, como caracterizado no princípio de incerteza de Heisenberg. Efeitos das flutuações quânticas em processos físicos são representados por diagramas de Feynman possuindo linhas internas. O segundo cenário que compõe a teoria de campos a temperatura finita é aquele descrito pela *mecânica estatística*. Aqui, estamos interessados em estudar fenômenos envolvendo um número muito grande de partículas, e o conceito de *flutuação estatística* deve ser levado em conta.

O formalismo que resulta desta combinação de teoria quântica de campos com a mecânica estatística é certamente apropriado para o estudo de *problemas de muitos corpos* cuja dinâmica fundamental é descrita por campos quânticos. Deste modo, estão sendo levados em conta, ao mesmo tempo, flutuações quânticas e estatísticas. Por esta razão, é de se esperar que a teoria de campos a temperatura finita possua uma estrutura muito mais rica e interessante do que a teoria quântica de campos usual. Veremos entretanto que vários *aspectos formais* se assemelham bastante nos dois casos, sendo que a teoria de campos usual pode ser obtida como o limite de temperatura zero da teoria de campos a temperatura finita.

Para ilustrar de maneira bem simples o tipo de descrição física fornecido pela teoria de campos a temperatura finita é interessante considerar, de maneira qualitativa, o processo elementar de propagação do elétron. As flutuações quânticas do vácuo estão *sempre* presentes e devem ser levadas em conta neste processo. O primeiro diagrama na figura



ilustra uma das possíveis contribuições de flutuações quânticas onde as linhas internas representam *partículas virtuais*, presentes no vácuo, interagindo com o elétron (assumimos, por simplicidade, que somente as interações eletromagnéticas estão presentes). No último diagrama da figura acima está representada uma das contribuições do efeito de interação do elétron com *partículas reais* presentes no meio térmico possuindo distribuição de Bose-Einstein (fótons), n_B , ou de Fermi-Dirac (elétrons), n_F . Já os dois diagramas centrais representam a mistura dos efeitos térmicos e quânticos. Como veremos na seção 3.1, esta interpretação física qualitativa está de fato de acordo com o formalismo teoria de campos a temperatura finita.

Existem atualmente formalismos bem compreendidos e desenvolvidos para o estudo de teoria de campos a temperatura finita. Na verdade existem três formalismos distintos, porém equivalentes [Matsubara 1955, Schwinger 1961, Umezawa, Matsumoto e Tachiki 1982], sendo que cada um deles pode ser o mais adequado para determinadas aplicações. O mais antigo destes formalismos, desenvolvido por Matsubara [Matsubara 1955], é mais apropriado ao estudo de *fenômenos de equilíbrio*, sendo que fenômenos com variação temporal podem, em

princípio, ser analisados utilizando-se continuação analítica. Nos outros dois formalismos a variável temporal é mantida inalterada, e a temperatura é introduzida através de condições de contorno. Estes são os chamados *formalismos de tempo real*. O mais antigo deles, introduzido por Schwinger no contexto de integrais de trajetória, é conhecido como *trajetória temporal fechada* [Schwinger 1961]. O segundo, mais recente, desenvolvido por Umezawa utiliza o método de quantização canônica via operadores (embora também neste caso, seja possível utilizar integrais de trajetória) e é conhecido como *dinâmica de campos térmicos* [Umezawa, Matsumoto e Tachiki 1982].

De maneira geral, o formalismo de teoria de campos a temperatura finita difere das abordagens mais antigas tais como a *teoria cinética* [Lifshitz e Pitaevskii 1980] ou a teoria de muitos corpos [Fetter e Walecka 1971]. Uma das vantagens da abordagem utilizada pela teoria de campos a temperatura finita, é a possibilidade de uma formulação em termos de *integrais de trajetória*, bastante semelhante a (2.1.28), e a aplicação ao estudo de teorias de *calibre não-abelianas* quaisquer. Além disso, é possível obter uma formulação *co-variante de Lorentz*. Como veremos, estas vantagens são uma consequência da semelhança formal com a teoria quântica de campos.

Nesta seção introduziremos as idéias básicas do formalismo de Matsubara, denominado *formalismo do tempo imaginário*. Estas idéias serão empregadas nas aplicações que apresentaremos ao longo de todo este trabalho. O objetivo central desta seção é introduzir a sistemática para o *cálculo perturbativo* de médias térmicas que pode, em princípio, ser empregada em qualquer teoria quântica de campos.

Relações termodinâmicas

Os processos de criação e aniquilação de partículas, típicos das teorias quânticas relativísticas, são mais apropriadamente descritos em termos do ensemble *grand canônico*. Um sistema em equilíbrio térmico possuindo valores médios da energia e quaisquer cargas conservadas é caracterizado por sua *matriz de densidade* $\hat{\rho}$, satisfazendo $[\hat{\rho}, \hat{H}] = 0$ (\hat{H} é o *operador hamiltoniano*) e a condição de máxima entropia

$$S = \langle -\ln \hat{\rho} \rangle \equiv -\text{Tr} \hat{\rho} \ln \hat{\rho}. \quad (2.4.1)$$

A temperatura $T = 1/\beta$ e os potenciais químicos μ_i são introduzidos como multiplicadores de Lagrange $\beta = T^{-1}$ e $\alpha_i = -\beta\mu_i$, determinando a energia média $\langle \hat{H} \rangle$ e as cargas médias $\langle \hat{N}_i \rangle$ a partir de $[\hat{H}, \hat{N}_i] = 0$ e $[\hat{N}_i, \hat{N}_j] = 0$, respectivamente. Isso determina

$$\hat{\rho} = Z^{-1} \exp\{-\beta\hat{H} - \sum_i \alpha_i \hat{N}_i\}, \quad (2.4.2)$$

onde o fator de normalização Z é a função de partição grande canônica.

$$Z(V, \beta, \mu_i) = \text{Tr} \exp\{-\beta\hat{H} - \sum_i \alpha_i \hat{N}_i\}. \quad (2.4.3)$$

A função de partição Z determina as grandezas termodinâmicas tais como pressão, entropia, energia e densidades de cargas, denotadas respectivamente como P , \mathcal{S} , \mathcal{E} e \mathcal{N} . No limite termodinâmico, estas grandezas

são dadas por

$$P = T \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = \frac{T}{V} \ln Z, \quad (2.4.4)$$

$$\mathcal{S} \equiv S/V = \frac{\partial P}{\partial T}, \quad (2.4.5)$$

$$\mathcal{E} \equiv \langle \hat{H} \rangle / V = -\frac{1}{V} \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \quad (2.4.6)$$

$$\mathcal{N}_i \equiv \langle \hat{N}_i \rangle / V = \frac{\partial P}{\partial \mu_i}. \quad (2.4.7)$$

2.4.2 Formalismo do tempo imaginário

O resultado central desta seção é a expressão geral para a função de partição dada por (2.4.17). Esta expressão constitui uma generalização de (2.1.28) para o caso de sistemas térmicos. A seguir apresentaremos algumas motivações para a introdução de (2.4.17).

Mecânica estatística e teoria de campos no espaço euclidiano

A conexão entre mecânica estatística e teoria quântica de campos possui uma interessante motivação heurística baseada em um argumento bastante simples e fisicamente profundo devido a Bloch [Bloch 1958]. Bloch observou que o operador $e^{-\beta H}$, na função de partição, pode ser identificado com o operador de evolução “temporal” ao longo do *eixo temporal imaginário*. Ou seja, formalmente, o operador quântico de evolução temporal e^{-itH} se transforma em $e^{-\beta H}$ quando realizamos a *continuação analítica* $t \rightarrow -i\beta$.

Em retrospectiva, esta observação nos leva a considerar a possibilidade de que a teoria de campos a temperatura finita possa ser formulada a partir da *versão euclidiana* do funcional gerador em (2.1.28), obtida fazendo a *rotação de Wick* $t \rightarrow -it_E$, onde t_E é o “tempo euclidiano”. A fim de ilustrar a idéia básica com um exemplo específico, porém bastante típico, consideremos o funcional

$$\mathcal{Z} = \int D\phi e^{iS[\phi]} \quad (2.4.8)$$

com

$$S[\phi] = \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - V(\phi) \right]. \quad (2.4.9)$$

Fazendo a rotação de Wick, teremos

$$\begin{aligned} d^D x &\rightarrow -i dt_E d^{D-1} x \equiv -i d_E^D x, \\ \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - V(\phi) &\rightarrow -\frac{1}{2} (\partial_{t_E} \phi)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\partial}\phi)^2 - V(\phi) \\ &\equiv - \left[\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + V(\phi) \right]_E \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

de modo que a versão euclidiana de (2.4.8) é

$$\mathcal{Z} = \int D\phi e^{-S_E[\phi]}, \quad (2.4.11)$$

onde

$$S_E[\phi] \equiv \int d_E^D x \left[\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + V(\phi) \right]_E. \quad (2.4.12)$$

A integral funcional euclidiana em (2.4.11) sugere, qualitativamente, a conexão com a mecânica estatística, levando em conta que $S_E[\phi]$ pode ser considerado como o *funcional de energia*, estático, para o campo ϕ ⁴². Para exibir explicitamente esta conexão, consideremos primeiramente um sistema de partículas possuindo energia $E(p, q)$. Neste caso a função de partição *clássica* é

$$Z = \prod_i \int dp_i dq_i e^{-\beta E(p, q)}. \quad (2.4.13)$$

Fazendo a integração nos momentos p e omitindo o fator constante,

$$Z = \prod_i \int dq_i e^{-\beta V(q)}. \quad (2.4.14)$$

Tomando o limite contínuo $i \rightarrow x$ e $q_i \rightarrow \phi(x)$, somos levados à uma integral funcional como em (2.4.11). Ou seja, a *mecânica estatística clássica* no espaço de D dimensões pode ser obtida considerando uma *teoria de campos euclidiana* formulada em D dimensões. No entanto, nosso interesse é na *mecânica estatística quântica* descrita a partir das interações fundamentais de uma teoria quântica relativística. Vejamos a seguir como isso pode ser conseguido.

Consideremos a função de partição quântica

$$Z = \text{tr} e^{-\beta H} = \sum_n \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle \quad (2.4.15)$$

de bósons cujo hamiltoniano é H . Lembrando que uma grandeza da forma geral $\langle A | e^{-iHt} | B \rangle$ pode ser expressa em termos de uma integral de trajetórias de mecânica quântica, fazendo as substituições $t \rightarrow -i\beta$, $|A\rangle \rightarrow |n\rangle$, $|B\rangle \rightarrow |n\rangle$ e finalmente somando sobre $|n\rangle$, obtemos

$$Z = \text{tr} e^{-\beta H} = \int_{\text{per.}} Dq e^{-\int_0^\beta d\tau L(q)}. \quad (2.4.16)$$

O símbolo $\int_{\text{per.}}$ significa que a integração funcional é feita sobre todas as trajetórias $q(\tau)$ sujeitas à condição de contorno $q(0) = q(\beta)$ (veremos mais adiante que no caso de férmions a condição é de anti-periodicidade $q(0) = -q(\beta)$). Esta condição é o reflexo da operação de traço na formulação funcional.

A generalização para um cenário que incorpore efeitos relativísticos torna-se agora bastante evidente. Efetuamos a mesma generalização que nos leva da teoria quântica da partícula para a teoria quântica de campos, considerando uma teoria de campos formulada $D + 1$ dimensões (a expressão (2.4.16) é o caso particular $D = 0$). Neste caso, a função de partição é

$$Z = \text{tr} e^{-\beta H} = \int_{\text{per.}} D\phi e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^D x \mathcal{L}[\phi(x)]}, \quad (2.4.17)$$

com a integração sobre todas as configurações que satisfazem

$$\phi(\vec{x}, 0) = \pm \phi(\vec{x}, \beta), \quad (2.4.18)$$

onde as duas condições (periodicidade ou anti-periodicidade) são satisfeitas para campos bosônicos ou fermiônicos, respectivamente.

O *ansatz* (2.4.17) nos informa que a física térmica de um sistema quântico em D dimensões espaciais pode ser descrita por uma teoria de campos euclidiana formulada em $D + 1$ dimensões espaço-temporais, com o

⁴²Note que após a rotação de Wick a dependência temporal deixa de existir e passamos a uma descrição estática no espaço euclidiano de D dimensões espaciais. Uma questão interessante é a possibilidade de se introduzir dependência temporal em observáveis termodinâmicos fazendo a rotação inversa.

“tempo” τ restrito ao intervalo $0 \leq \tau \leq \beta$ e satisfazendo as condições de contorno (2.4.18).

É interessante observar que no limite de temperatura nula, quando $\beta \rightarrow \infty$ a expressão (2.4.17) se reduz a teoria de campos usual formulada no espaço euclidiano (neste caso, as condições de contorno deixam de ser importantes).

Por outro lado, no limite de altas temperaturas, $\beta \rightarrow 0$, (2.4.17) se reduz a (2.4.11), ou seja, a dinâmica do sistema térmico pode ser descrita classicamente.

Regras de Feynman térmicas

O cálculo direto da expressão (2.4.17) apresenta as mesmas formidáveis dificuldades da teoria de campos usual. Uma opção natural é a expansão perturbativa em termos de diagramas de Feynman. Dada uma teoria de campos qualquer e suas regras de Feynman usuais a temperatura zero, podemos imediatamente escrever as correspondentes regras de Feynman térmicas substituindo todos os momentos $k \equiv (k_0, \vec{k})$ por $(i\omega_n, \vec{k})$, onde

$$\omega_n = \begin{cases} 2n\pi T & \text{(bosons)} \\ (2n+1)\pi T & \text{(fermions)} \end{cases} ; n = -\infty, \dots, +\infty \quad (2.4.19)$$

são as frequências de Matsubara. Além disso as integrações sobre momentos internos são modificadas segundo

$$\int dk_0 d^D k f(k_0, \vec{k}) \rightarrow 2\pi T \sum_n \int d^D k f(i\omega_n, \vec{k}). \quad (2.4.20)$$

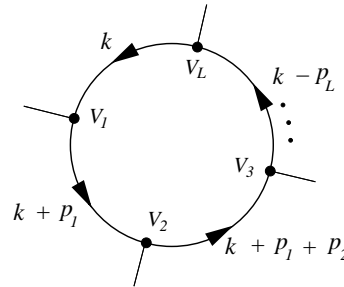
As duas relações acima são uma consequência simples e direta da passagem para o espaço euclidiano ($k_0 \rightarrow i\omega$) e das condições de (anti)periodicidade no intervalo finito $[0, \beta]$ (ω discreto).

3 Algumas técnicas e resultados sobre funções de Green térmicas

3.1 Funções de Green térmicas e amplitudes frontais

Consideremos uma teoria de campos qualquer descrita por uma ação clássica sem termo de massa. Sabemos que (veja o apêndice A.0.1) a ação efetiva pode ser expressa em termos dos diagramas 1PI da teoria. No presente contexto, teríamos uma *ação efetiva térmica* cuja contribuição perturbativa mais importante é dada por diagramas em ordem de um loop. Veremos a seguir que é possível obter uma expressão geral para todos os diagramas 1PI, em ordem de um loop, já tendo efetuado a soma sobre as frequências de Matsubara.

Um diagrama 1PI qualquer, em ordem de um loop, possuindo L linhas externas, tem a seguinte forma



$$: \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{S}_L(\vec{k}; p_1, \dots, p_L), \quad (3.1.1)$$

onde

$$\mathcal{S}_L \equiv T \sum_{k_0=i\omega_n} \frac{1}{k_0^2 - \vec{k}^2} \frac{1}{(k_0 + p_{10})^2 - (\vec{k} + \vec{p}_1)^2} \dots \frac{t(k; p_1, \dots, p_L)}{(k_0 - p_{L0})^2 - (\vec{k} - \vec{p}_L)^2} \quad (3.1.2)$$

e $t(k; p_1, \dots, p_L)$ podem ser tensores de Lorentz ou qualquer objeto possuindo índices correspondentes às coordenadas de espaço-tempo.

Sob certas condições bastante gerais¹, a soma \mathcal{S}_L pode ser transformada em uma integral no plano complexo usando a identidade (no lado direito, k_0 é uma variável complexa contínua)

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_0 = i\omega_n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dk_0 f(k_0) \frac{1}{2} \left[\coth \left(\frac{1}{2} \beta k_0 \right) \right]^{\pm 1}. \quad (3.1.3)$$

Aqui o contorno de integração C é o mostrado na figura (a) abaixo. Empregando o contorno equivalente \bar{C} mostrado na figura (b) acima, podemos reescrever o lado direito de (3.1.3) como

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\int_{i\infty-\delta}^{-i\infty-\delta} dk_0 f(k_0) \frac{1}{2} \left[\coth \left(\frac{1}{2} \beta k_0 \right) \right]^{\pm 1} + \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dk_0 f(k_0) \frac{1}{2} \left[\coth \left(\frac{1}{2} \beta k_0 \right) \right]^{\pm 1} \right]. \quad (3.1.4)$$

¹Uma condição importante é que a função \mathcal{S}_L não possua polos ao longo do eixo imaginário. Em teorias de gauge isso nem sempre é verdade. Por exemplo, quando usamos o *gauge temporal* é preciso adotar prescrições especiais para o cálculo de funções de Green, tais como as utilizadas em [Brandt, Frenkel e Machado 2000, Brandt, Cuadros-Melgar e Machado 2003].

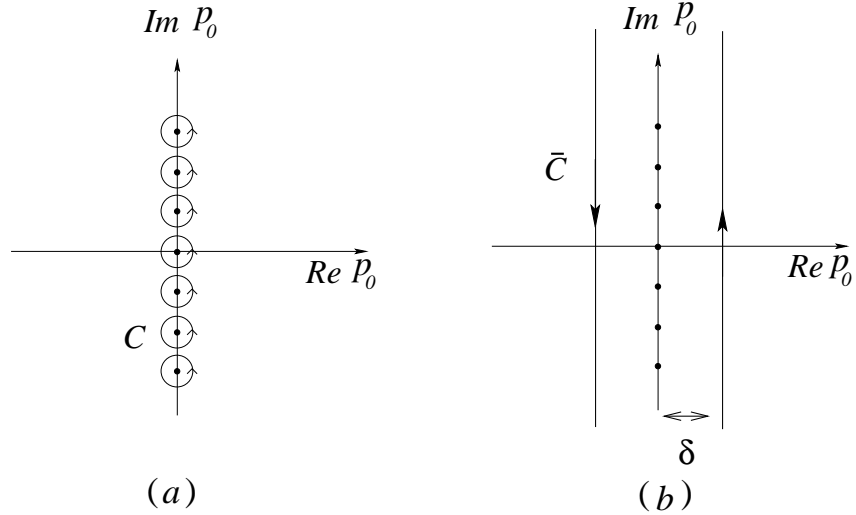


Figura 3.1:

Fazendo $k_0 \rightarrow -k_0$ na primeira integral obtemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dk_0 (f(k_0) + f(-k_0)) \frac{1}{2} \left[\coth \left(\frac{1}{2} \beta k_0 \right) \right]^{\pm 1}. \quad (3.1.5)$$

Usando a identidade algébrica

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\coth \left(\frac{1}{2} \beta k_0 \right) \right]^{\pm 1} &= \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{1}{2} \beta k_0} \pm e^{-\frac{1}{2} \beta k_0}}{e^{\frac{1}{2} \beta k_0} \mp e^{-\frac{1}{2} \beta k_0}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{1}{2} \beta k_0} \pm e^{-\frac{1}{2} \beta k_0} \pm e^{-\frac{1}{2} \beta k_0} \mp e^{-\frac{1}{2} \beta k_0}}{e^{\frac{1}{2} \beta k_0} \mp e^{-\frac{1}{2} \beta k_0}} \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{e^{\beta k_0} \mp 1} = \frac{1}{2} \pm N_{B,F}(k_0) \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

obtemos a seguinte forma geral para a soma sobre as freqüências de Matsubara

$$\mathcal{S}_L = \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dk_0}{4\pi i} [f(k_0) + f(-k_0)] \pm \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} \frac{dk_0}{2\pi i} [f(k_0) + f(-k_0)] N_{B,F}(k_0) \quad (3.1.7)$$

A relação (3.1.7) possui uma interpretação importante física. Vemos que a contribuição de ordem de um loop para uma função de Green térmica 1PI qualquer se decompõe na soma de uma parte euclidiana, que é independente da temperatura e idêntica à rotação de Wick da contribuição de temperatura zero, com uma parte dependente a temperatura. Esta última envolve explicitamente as distribuições de Bose-Einstein ou Fermi-Dirac, introduzidas em (3.1.6), e tende a zero no limite $T \rightarrow 0$. Esta expressão também mostra que as distribuições térmicas no segundo termo de (3.1.7) impedem o surgimento de divergências ultravioletas. Ou seja, a temperatura de fato desempenha o papel de um “cutoff” natural para as divergências ultravioletas do segundo termo de (3.1.7). Já o primeiro termo necessita, em geral, de ser regularizado da maneira usual utilizando, por exemplo, regularização dimensional. Em teorias renormalizáveis, sabemos como eliminar a dependência nesse regulador. No caso de teorias não renormalizáveis existe a possibilidade de que, em certos intervalos de temperatura, o regulador seja efetivamente desprezível. No que se segue vamos focalizar a parte térmica destas amplitudes 1PI.

Substituindo o resultado obtido para a soma sobre as freqüências de Matsubara, (3.1.7), na expressão geral

para as funções de Green térmicas, (3.1.1), obtemos a seguinte expressão para a parte térmica

$$\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} \frac{dk_0}{2\pi i} N_{B,F}(k_0) \left[f(k_0, \vec{k}) + f(-k_0, \vec{k}) \right]. \quad (3.1.8)$$

Fazendo a mudança de variável $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ no segundo termo, obtemos

$$\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} \frac{dk_0}{2\pi i} N_{B,F}(k_0) \left[f(k_0, \vec{k}) + k \rightarrow -k \right]. \quad (3.1.9)$$

Em teorias escalares ou teorias de calibre formuladas no calibre de Feynman (ou Feynman-De Donder, no caso da gravitação), temos sempre a seguinte forma

$$f(k_0, \vec{k}) = \frac{1}{k_0^2 - \vec{k}^2} \frac{1}{(k_0 + p_{10})^2 - (\vec{k} + \vec{p}_1)^2} \dots \frac{t(k; p_1, p_2 \dots p_L)}{(k_0 - p_{L0})^2 - (\vec{k} - \vec{p}_L)^2} \quad (3.1.10)$$

Além disso, como $t(k; p_1, p_2 \dots p_L)$ não possui pólos no plano complexo, podemos calcular facilmente a integral em k_0 usando decomposição em termos de *frações parciais*

$$\frac{1}{(k_0 + p_{i0})^2 - (\vec{k} + \vec{p}_i)^2} = \frac{1}{2|\vec{k} + \vec{p}_i|} \left[\frac{1}{k_0 + p_{i0} - |\vec{k} + \vec{p}_i|} - \frac{1}{k_0 + p_{i0} + |\vec{k} + \vec{p}_i|} \right] \quad (3.1.11)$$

e fechando o contorno no plano direito. Usando a *periodicidade* das distribuições térmicas $N_{B,F}(x + p_{i0}) = N_{B,F}(x)$ (x é o módulo de alguma combinação de momentos) e redefinindo o momento de integração \vec{k} , resulta na seguinte relação

$$\left[\begin{array}{c} \text{Diagrama de um círculo com vértices } V_1, V_2, V_3, \dots, V_L \text{ e momentos } k, k - p_L, \dots, k + p_1, k + p_1 + p_2 \end{array} \right]_{thermal} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{N_{B,F}(|\vec{k}|)}{2|\vec{k}|} \mathcal{A}(k; p_1, p_2, \dots, p_L) \quad (3.1.12)$$

onde $\mathcal{A}(k; p_1, \dots, p_L)$ é dada por

$$\mathcal{A}(k; p_1, p_2, \dots, p_L) \equiv \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagrama de uma cadeia de vértices } V_1, V_2, V_3, \dots, V_L \text{ com momentos } k, k + p_1, \dots, k - p_L, k \text{ e} \\ \text{momentos externos } p_1, p_2, p_3, \dots, p_L \text{ apontando para os vértices } V_1, V_2, V_3, \dots, V_L \end{array} + \begin{array}{c} \text{permut.} \\ \text{cíclic. de} \\ V_1, \dots, V_L \\ + k \leftrightarrow -k \end{array} \right\}_{k^2=0}. \quad (3.1.13)$$

Veremos mais adiante que esta forma de expressar as funções de Green térmicas 1PI é extremamente conveniente para se obter as propriedades gerais da ação efetiva térmica que emerge no limite de altas temperaturas.

Um caso especial da equação (3.1.12) foi originalmente sugerido por Barton como uma espécie de *ansatz* [Barton 1990] para o comportamento de fótons e elétrons térmicos. De maneira geral, a equação (3.1.12) revela que as funções de Green térmicas 1PI podem ser interpretadas como descrevendo o comportamento de “partículas térmicas” possuindo distribuição de Bose-Einstein ou Fermi-Dirac, interagindo com campos externos.

É também interessante notar que uma vez que a soma sobre as frequências de Matsubara já foi realizada, podemos fazer uma *continuação analítica* nas frequências externas para valores em todo o plano complexo (por exemplo, para o espaço de Minkowski). Fisicamente, estaríamos descrevendo regimes fora do equilíbrio térmico, como por exemplo *fenômenos de transporte* induzidos por campos externos. Veremos a seguir que esta

interpretação é de fato possível especialmente quando consideramos o limite de altas temperaturas.

3.1.1 A região de “hard thermal loops”

Consideremos os cenários físicos nos quais seja possível separar as escalas de distância média entre as partículas, da ordem de $1/T$, das escalas de comprimentos de onda *de excitações coletivas* da ordem de $1/(gT)$, onde g representa o parâmetro perturbativo (tipicamente a constante de acoplamento). Em termos de funções de Green térmicas, este cenário é descrito por contribuições de *hard thermal loops* caracterizadas por

$$k \sim T \gg p_i \sim gT, \quad (3.1.14)$$

onde p_i são os momentos externos na função de Green térmica (associados às excitações coletivas) e k representa o momento típico das partículas térmicas em (3.1.12).

Do ponto de vista técnico, a separação das escalas é consistente com a seguinte expansão em série de potências dos momentos externos nas amplitudes frontais em (3.1.13)

$$\frac{1}{p_i^2 + 2p_i \cdot k} = \frac{1}{2p_i \cdot k} - \frac{(p_i)^2}{(2p_i \cdot k)^2} + \frac{(p_i)^4}{(2p_i \cdot k)^3} + \dots \quad (3.1.15)$$

Levando em conta também a possível dependência de momento nos vértices de $\mathcal{A}(k; p_1, p_2, \dots, p_L)$ e coletando os termos de mais alta ordem em k temos uma maneira sistemática de obter as contribuições de “hard thermal loops”².

²Tendo em vista que as manipulações algébricas podem se tornar bastante complicadas, o uso do computador (*computação simbólica*), é imprescindível, especialmente quando tratamos de teorias de calibre onde a natureza tensorial dos campos de calibre envolve vários índices descrevendo graus de liberdade de espaço-tempo e cor.

3.1.2 Conexão com a equação de transporte

Existe uma outra abordagem para descrever o acoplamento entre campos médios (possuindo grandes comprimentos de onda) e partículas. Uma das principais motivações para este tipo de abordagem, no presente contexto, é a possibilidade de obter uma forma fechada para a ação efetiva térmica que encapsula todos os efeitos de altas temperaturas. Para tornar isso possível, veremos que é necessário introduzir uma corrente que pode ser definida em termos da distribuição no espaço de fase. A conexão com teoria de campos a temperatura finita emerge quando esta mesma corrente é expressa em termos de derivadas funcionais da ação efetiva térmica (amplitudes térmicas IPI).

Consideremos inicialmente um sistema de partículas cuja densidade de probabilidade no espaço de fase é uma função $F(x^\mu, k_\mu)$ tal que o número de partículas em um elemento de volume do espaço de fase é

$$dN = F(x^\mu, k_\mu) \delta(k^2 - m^2) dk^4 dx^4. \quad (3.1.16)$$

A função de distribuição clássica

$$f(x^\mu, k_\mu) = \frac{1}{(2\pi)^3} F(x^\mu, k_\mu) \delta(k^2 - m^2) \quad (3.1.17)$$

é solução da *equação de transporte*

$$\frac{d}{d\tau} f(x, k) = \mathcal{C}. \quad (3.1.18)$$

onde x e k são as coordenadas e momento da partícula e τ é o tempo próprio. A grandeza \mathcal{C} é o *termo de colisão*, que assumiremos, em primeira aproximação, como sendo nulo³. Os detalhes da interação entre campos e as partículas são explicitados quando reescrevemos a equação de transporte na forma

$$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial k_\alpha} \frac{dk_\alpha}{d\tau} = 0 \quad (3.1.19)$$

e usamos as equações clássicas de movimento

$$k_\alpha = m \frac{dx^\alpha}{d\tau}; \quad m \frac{dk_\alpha}{d\tau} = \mathcal{F}_\alpha, \quad (3.1.20)$$

onde \mathcal{F}_μ é uma 4-força envolvendo explicitamente os campos. Fazendo isso, teremos a seguinte forma para a equação de transporte

$$k \cdot \partial f(x, k) = -\mathcal{F} \cdot \partial_k f(x, k). \quad (3.1.21)$$

Vamos agora aplicar a equação (3.1.21) ao cenário físico de um plasma nas proximidades do equilíbrio térmico. No equilíbrio, $F(x, k)$ é a distribuição de Bose-Einstein ou Fermi-Dirac $N_{B,F}(|k_0|)$, introduzidas em (3.1.6), que de fato é solução de (3.1.21) no caso em que $\mathcal{F} = 0$, ou seja, quando os campos estão “desligados”. No caso mais geral podemos tentar obter uma solução perturbativa da forma

$$f(x, k) = f^{(0)}(k) + f^{(1)}(x, k) + f^{(2)}(x, k) + \dots, \quad (3.1.22)$$

onde $f^{(n)}$ envolve o produto de n campos, ou seja, é de ordem n na constante de acoplamento da interação entre

³Esta aproximação está relacionada com a aproximação de ordem de um loop na teoria de campos a temperatura finita.

os campos e as partículas. Desse modo, podemos escrever a seguinte solução iterativa

$$f^{(n)} = (-1)^n \underbrace{\left(\frac{1}{k \cdot \partial} \mathcal{F} \cdot \partial_k \right) \dots \left(\frac{1}{k \cdot \partial} \mathcal{F} \cdot \partial_k \right)}_n f^{(0)}. \quad (3.1.23)$$

Para não perder de vista alguns dos aspectos físicos essenciais envolvidos na equivalência entre o formulação em termos da equação de transporte e aquela em termos de “hard thermal loops”, vamos agora aplicar a equação (3.1.23) ao caso do plasma neutro da QED. Neste caso, a 4-força é

$$\mathcal{F}_\alpha = e k^\mu F_{\mu\alpha} = e k^\mu (\partial_\mu A_\alpha - \partial_\alpha A_\mu), \quad (3.1.24)$$

onde e é a carga do elétron. A interação do plasma com o campo externo da origem à uma corrente

$$J^\mu = \int d^4k k^\mu [e f(x, k) + e \longleftrightarrow -e]. \quad (3.1.25)$$

A contribuição $e \longleftrightarrow -e$ garante que em ordem zero a corrente é nula, como deveria ser para um plasma neutro. Em um plasma carregado, a corrente em ordem zero, $J_i^{(0)}$, também seria nula por causa da simetria das distribuições térmicas (o integrando envolveria o produto de uma função simétrica $f^{(0)}$ por k_i).

Veamos agora sob quais condições as equações (3.1.22), (3.1.23) e (3.1.25) podem ser relacionadas com a teoria de campos a temperatura finita. A chave para esta interessante conexão é a equação (A.0.15) do apêndice A. Se admitirmos que a corrente em (3.1.25) seja derivável da *ação efetiva térmica*, então

$$J^\mu = - \frac{\delta \Gamma_{\text{term.}}}{\delta A_\mu}. \quad (3.1.26)$$

Mais precisamente, estamos supondo que exista algum limite de temperatura, tal que a corrente obtida via teoria clássica de transporte seja idêntica a que é obtida da ação efetiva de teoria de campos. Como vimos na seção 2.4.2 (ver terceiro parágrafo após a equação (2.4.18)), no limite de *altas temperaturas* a teoria de campos descreve um sistema clássico. Lembrando que a ação efetiva é a soma de todos os diagramas 1PI (ver (A.0.14)) cuja forma geral está dada em (3.1.12) e levando em conta que o limite de altas temperaturas é obtido utilizando as expansões do tipo (3.1.15), é possível mostrar que de fato as relações (3.1.25) e (3.1.26) são idênticas.

A fim de exibir em mais detalhes o mecanismo descrito no parágrafo acima, notamos primeiramente, que ao substituir (3.1.23) em (3.1.25), a corrente pode ser escrita como

$$J^\mu = \sum_n \left[e \int d^4k k^\mu \prod_{i=1}^n \left(\frac{-e}{k \cdot \partial} k^{\alpha_i} F_{\alpha_i \beta_i} \frac{\partial}{\partial k_{\beta_i}} \right) f^{(0)} + e \longleftrightarrow -e \right] \quad (3.1.27)$$

A *conservação da corrente* $\partial_\mu J^\mu = 0$ é facilmente verificada notando que o operador $1/(k \cdot \partial)$ mais à esquerda se cancela e, fazendo uma integração por partes em $\partial/\partial k_{\beta_1}$, o resultado se anula como consequência da anti-simetria de $F_{\alpha_1 \beta_1}$.

Uma simples contagem de potências do momento k mostra que os termos de ordem $n > 1$, em (3.1.27), serão todos sub-dominantes na temperatura (é claro que somente os termos com n ímpar contribuem). Pelo mesmo argumento, o termo dominante, $n = 1$ será proporcional à T^2 (assumindo $m \ll T$, ou seja, $k_0/T \simeq |\vec{k}|/T$)

4. Integrando por partes e usando a anti-simetria de $F_{\mu\nu}(x)$ a contribuição dominante é

$$\begin{aligned} J^\mu(x) &= 2e^2 \int d^4k \left(\frac{\eta^{\mu\beta}}{k \cdot \partial} - k^\mu \partial^\beta \frac{1}{(k \cdot \partial)^2} \right) k^\alpha F_{\alpha\beta} f^{(0)} + \dots \\ &= 2e^2 \int d^4k \left(\eta^{\mu\beta} \partial_\lambda - \delta_\lambda^\mu \partial^\beta \right) \frac{k^\lambda k^\alpha}{(k \cdot \partial)^2} F_{\alpha\beta} f^{(0)} + \dots \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

Levando em conta a conservação da corrente $J^\mu(x)$, mostrada acima, e a equação (3.1.26), somos levados a considerar o seguinte *ansatz* para a ação efetiva invariante de gauge

$$\Gamma_{\text{term}} = -\frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) J^{(1)\mu}(x) + \dots, \quad (3.1.29)$$

onde $J^{(1)\mu}(x)$ representa o termo de primeira ordem em A^μ escrito explicitamente em (3.1.28). Note que o fator $1/2$ em (3.1.29) leva em consideração a maneira como $J^{(1)\mu}$ depende de x através de $A^\mu(x)$. Usando (2.1.5) é imediato verificar que (3.1.29) é invariante de gauge. De fato, como na QED $F_{\mu\nu}$ é invariante, então o próprio J^μ é invariante. Por outro lado, integrando por partes o termo contendo a variação $\partial_\mu \omega$ de A_μ e usando a conservação da corrente, obtemos a invariância de Γ_{term} .

Substituindo (3.1.28) em (3.1.29) e integrando por partes, obtemos a seguinte expressão para a ação efetiva invariante de gauge

$$\Gamma_{\text{term}} = e^2 \int d^4x \int d^4k \left(F^\beta{}_\lambda \frac{k^\lambda k^\alpha}{(k \cdot \partial)^2} F_{\alpha\beta} \right) f^{(0)}(k) + \dots \quad (3.1.30)$$

A dependência explícita de Γ_{term} na temperatura pode ser facilmente obtida substituindo a ordem zero de (3.1.17) em (3.1.30) e usando a delta de Dirac para efetuar integral em k_0 . Fazendo também $k = |\vec{k}|(1, \hat{k}) \equiv T u(1, \hat{k})$, resulta

$$\Gamma_{\text{term}} = e^2 T^2 \int_0^\infty du \frac{u}{e^u \pm 1} \int d^4x \int \frac{d\Omega}{(2\pi)^3} \left(F^\beta{}_\lambda \frac{K^\lambda K^\alpha}{(K \cdot \partial)^2} F_{\alpha\beta} \right) + \dots, \quad (3.1.31)$$

onde introduzimos o quadrivetor $K \equiv (1, \hat{k})$ e a integração em $d\Omega$ se estende às direções de \hat{k} . A integral em dk é $\pi^2/6$ ou $\pi^2/12$ respectivamente no caso fermiônico ou bosônico [Gradshteyn e Ryzhik 1980]. No caso da QED, onde a interação ocorre somente com os férmions do meio térmico, teremos

$$\Gamma_{\text{term}} = \frac{e^2 \pi^2 T^2}{12} \int d^4x \int \frac{d\Omega}{(2\pi)^3} \left(F^\beta{}_\lambda \frac{K^\lambda K^\alpha}{(K \cdot \partial)^2} F_{\alpha\beta} \right) + \dots \quad (3.1.32)$$

Esta expressão pode ser escrita numa forma ainda mais sugestiva, expressando os campos de gauge em termos das componentes de Fourier⁵. Fazendo isso, teremos

$$\Gamma_{\text{term}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{A}_\mu(p) \Pi_{\text{transp.}}^{\mu\nu}(p) \tilde{A}_\nu(-p) + \dots, \quad (3.1.34)$$

onde

$$\Pi_{\text{transp.}}^{\mu\nu}(p) = \frac{e^2 \pi^2 T^2}{3} \int \frac{d\Omega}{(2\pi)^3} \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu K^\nu + p^\nu K^\mu}{K \cdot p} + \frac{p^2 K^\mu K^\nu}{(K \cdot p)^2} \right), \quad (3.1.35)$$

é o *tensor de polarização* que resulta do formalismo da teoria de transporte.

A unicidade do *ansatz* para a ação efetiva, em (3.1.29), pode agora ser testada diretamente comparando

⁵Note que $f(x, k)$, introduzido em (3.1.17), possui grau -2 em k .

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ix \cdot k} \tilde{A}_\mu(k); \quad \delta(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ix \cdot k}. \quad (3.1.33)$$

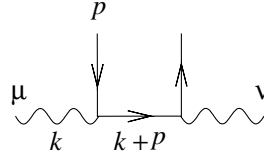


Figura 3.2:

(3.1.35) com o limite de altas temperaturas do tensor de polarização da QED. Além disso, também devemos verificar que os diagramas 1PI com um “loop” térmico de férmions e possuindo $n = 4, 6, 8 \dots$ fótons externos (diagramas com n ímpar se anulam pelo teorema de Furry) são todos sub-dominantes⁶. Isso pode ser facilmente constatado por contagem de potências, usando as regras de Feynman (2.1.56) e (2.1.59a) (no caso da QED, $T_{ij}^a = 1$), bem como a relação (3.1.12) e a expansão (3.1.15). Desse modo, vemos que de fato a única contribuição dominante proporcional a T^2 é a do tensor de polarização e a amplitude frontal que contribui para (3.1.12) é a mostrada na figura abaixo (está implícito um segundo diagrama com as setas de férmions invertidas). Calculando esta amplitude frontal, expandindo o denominador como em (3.1.15) e substituindo o resultado em (3.1.12) obtemos o mesmo resultado que em (3.1.35).

O mecanismo ilustrado acima nos dá uma indicação de como, em geral, a equação de transporte pode ser um *bom programa* para o tratamento de teorias de campos no limite de altas temperaturas. De fato, esta interessante conexão entre “hard thermal loops” e a equação de transporte sem colisões tem sido verificada no caso da QCD (ver [Litim e Manuel 2002] para uma revisão geral sobre o assunto) e também no caso da gravitação [Brandt, Frenkel e Taylor 1995]. Mais recentemente, obtivemos resultados semelhantes no caso de teorias de gauge não comutativas [Brandt et al. 2002, Brandt, Das e Frenkel 2002, Brandt, Das e Frenkel 2003]. No entanto, a não linearidade das teorias não abelianas faz com que a obtenção de um *ansatz* do tipo (3.1.29), bem como sua confirmação via cálculos perturbativos, seja muito mais complicada. Na próxima seção ilustraremos esse problema no caso da gravitação.

No caso da teoria de Yang-Mills, a generalização mais natural do *ansatz* (3.1.30) consiste em substituir ∂ e $F_{\mu\nu}$ respectivamente pelo operador de derivada co-variante, dado em (2.1.19), e pelo o tensor não abeliano, dado em (2.1.22) (e somar sobre os índices de cor). Fazendo isso, teremos

$$\Gamma_{\text{term}} = \frac{g^2 \pi^2 T^2}{12} N \int d^4x \int \frac{d\Omega}{(2\pi)^3} \left(F_{\lambda}^{a\beta} \frac{K^\lambda K^\alpha}{(K \cdot D)^2} F_{\alpha\beta}^a \right) \quad (3.1.36)$$

Esta ação invariante de gauge foi proposta originalmente por Taylor e Wong [Taylor e Wong 1990] e confirmada por diversos cálculos explícitos de funções de Green térmicas 1PI utilizando inclusive diferentes tipos de fixação de gauge [Frenkel e Taylor 1990, Frenkel e Taylor 1992, Brandt e Frenkel 1997, Brandt, Frenkel e Machado 2000, Brandt, Frenkel e Machado 2000, Brandt, Das e Frenkel 2000]. É evidente que a ação efetiva térmica da teoria de Yang-Mills soma diagramas 1PI envolvendo um número qualquer de linhas externas (para ver isso, basta considerar a expansão perturbativa do operador $1/(k \cdot D)$ em 3.1.36)). A confirmação diagramática dessa propriedade simples é um exercício elementar de contagem de potências que consiste em usar (3.1.15) nas amplitudes frontais possuindo um número qualquer de campos externos A_μ , dada em (3.1.12). Isso mostra que de fato *todas* as amplitudes irão produzir uma contribuição dominante proporcional à T^2 ⁷. No entanto, a consistência mais

⁶Seria interessante verificar se, por exemplo, a amplitude de quatro fótons concorda com a que seria obtida considerando o termo quártico não escrito explicitamente em (3.1.32). Para isso, teríamos que levar em conta a massa não nula do elétron.

⁷Na QED não comutativa, diagramas com mais de duas linhas externas apresentam uma aparente contribuição de ordem T^3 que se cancela

completa do *ansatz* somente se manifesta quando realizamos um cálculo detalhado.

É interessante também procurar entender porque não foi necessário levar em conta o *termo de colisão* no programa descrito por (3.1.18). Vimos que a função de distribuição $f(x, p)$ contém toda a informação sobre os diagramas 1PI em ordem de um loop, que por sua vez podem ser interpretados fisicamente em termos de excitações no meio térmico (plasmons) interagindo com campos externos, mas não entre si. As “colisões” entre plasmons somente começam a aparecer em ordem de dois loops. Assim, enquanto os efeitos devidos a um loop térmico podem ser descritos conhecendo apenas a dinâmica clássica (\mathcal{F} em (3.1.20)) não temos a priori uma forma para o termo de colisão $\mathcal{C}[f]$ que não seja fenomenológica. Por outro lado, é possível derivar a equação de transporte completa (incluindo o termo de colisão) a partir da teoria de campos a temperatura finita. Isso permite obter grandezas físicas que dependem tipicamente da dinâmica dos plasmons relativísticos tais como viscosidades ou coeficientes de difusão [Arnold, Moore e Yaffe 2003].

quando usamos *identidades eiconais* tais como

$$\frac{1}{(p_1 \cdot k)(p_2 \cdot k)} + \frac{1}{(p_1 \cdot k)(p_3 \cdot k)} + \frac{1}{(p_2 \cdot k)(p_3 \cdot k)} = 0. \quad (3.1.37)$$

3.2 Propriedades do tensor de polarização abeliano e não-abeliano

Veamos agora algumas propriedades do tensor de polarização em (3.1.35). Antes de mais nada, é importante salientar que a forma deste tensor é a mesma que na teoria de Yang-Mills, diferindo apenas por um fator $C \delta^{ab}$, onde $a, b = 1 \dots N^2 - 1$ para o grupo $SU(N)$. De fato, como vimos acima, a generalização de (3.1.30) para o caso de uma teoria não abeliana não irá alterar a *forma* do termo quadrático. Sendo assim, as propriedades que discutiremos a seguir são também verdadeiras para o caso da teoria de Yang-Mills.

Uma importante propriedade do tensor de polarização é a transversalidade

$$p_\mu \Pi_{\text{transp.}}^{\mu\nu}(p) = 0 \quad (3.2.1)$$

necessária para a invariância de gauge de (3.1.34). No presente contexto, essa propriedade se verifica *ao nível do integrando* de (3.1.35). De fato, o tensor simétrico

$$G^{\mu\nu}(K, p) \equiv \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu K^\nu + p^\nu K^\mu}{K \cdot p} + \frac{p^2 K^\mu K^\nu}{(K \cdot p)^2} \quad (3.2.2)$$

satisfaz a condição de transversalidade $p_\mu G^{\mu\nu} = 0$. Caso o resultado explícito da integral em (3.1.35) dependesse de p de uma maneira co-variante de Lorentz, como ocorre na teoria a temperatura zero, então existiria apenas um tensor transversal em termos do qual poderíamos escrever $\Pi_{\text{transp.}}^{\mu\nu}(p)$, a saber $p^\mu p^\nu - \eta^{\mu\nu} p^2$. No entanto, podemos notar que a integral $\int d\Omega G^{\mu\nu}(K, p)$ depende de p_0 e de \vec{p} de maneira independente. Essa falta de co-variância reflete a escolha manifesta que fizemos para o *referencial do banho térmico* quando introduzimos as distribuições térmicas em (3.1.6). Uma escolha mais geral consiste em tomar a quadri-velocidade do banho térmico como sendo um quadri-vetor qualquer u_μ de modo que $K_0 \rightarrow K \cdot u$. Com essa dependência em u , o número de possíveis tensores simétricos, não necessariamente transversais, passa de dois para quatro. Por exemplo, poderíamos usar uma *base tensorial* formada pelos tensores $\eta^{\mu\nu}$, $p^\mu p^\nu / p^2$, $u^\mu u^\nu$ e $(p^\mu u^\nu + p^\nu u^\mu) / p \cdot u$, onde os dois últimos aparecem quando os efeitos térmicos são considerados⁸.

Esses quatro tensores podem ser linearmente combinados de maneira a constituir uma base que reflita mais diretamente certas simetrias físicas. Por completeza, vamos acrescentar também três tensores que aparecem no contexto das teorias não-comutativas e são definidos em termos de $\tilde{p}_\mu \equiv p^\nu \theta_{\nu\mu}$, onde $\theta_{\nu\mu}$ foi introduzido em (2.3.1). Assim, em muitos casos é mais conveniente utilizar a seguinte base [Weldon 1999, Gross, Pisarski e Yaffe 1981, Brandt, Frenkel e McKeon 2002]

$$\begin{aligned} P_T^{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{p^2 - (p \cdot u)^2} [p^\mu p^\nu + p^2 u^\mu u^\nu - p \cdot u (p^\mu u^\nu + u^\mu p^\nu)] - \eta^{\mu\nu}, \\ P_L^{\mu\nu} &\equiv \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - \eta_{\mu\nu} - P_T^{\mu\nu}, \\ \tilde{P}_T^{\mu\nu} &\equiv -\frac{\tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu}{\tilde{p}^2}, \\ \tilde{P}_L^{\mu\nu} &\equiv \left(p^\mu - \frac{p^2}{p \cdot u} u^\mu \right) \tilde{p}^\nu + \left(p^\nu - \frac{p^2}{p \cdot u} u^\nu \right) \tilde{p}^\mu, \\ P_5^{\mu\nu} &\equiv \eta^{\mu\nu} \\ P_6^{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{p \cdot u} (p^\mu u^\nu + u^\mu p^\nu), \\ \tilde{P}_7^{\mu\nu} &\equiv p^\mu \tilde{p}^\nu + \tilde{p}^\mu p^\nu. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

⁸Na verdade, estas estruturas também podem aparecer quando calculamos funções de Green usando gauges não co-variantes tais como o gauge temporal.

No presente contexto, apenas os dois primeiros tensores são relevantes. De fato, é fácil verificar que os tensores $P_{T,L}^{\mu\nu}$ obedecem à propriedade de transversalidade

$$p_\mu P_{T,L}^{\mu\nu} = 0, \quad (3.2.4)$$

sendo que $P_T^{\mu\nu}$ e $P_L^{\mu\nu}$ são respectivamente transversais e longitudinais em relação à componente espacial de p , ou seja ⁹,

$$\begin{aligned} p_i P_T^{i\nu} &= 0 \\ p_i P_L^{i\nu} &\neq 0. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Por construção, a soma

$$P_T^{\mu\nu} + P_L^{\mu\nu} = \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - \eta^{\mu\nu} \quad (3.2.6)$$

resulta ser o único tensor transversal que pode ser construído na teoria à temperatura zero.

Em termos destas grandezas, podemos escrever a forma geral do tensor de polarização transversal como (para simplificar a notação, omitiremos o subscrito “transp.” em $\Pi_{\text{transp.}}^{\mu\nu}$.)

$$\Pi^{\mu\nu} = G P_T^{\mu\nu} + F P_L^{\mu\nu}. \quad (3.2.7)$$

Contraindo com os dois tensores e resolvendo o sistema obtemos

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2} [(1 - \sigma^2) \Pi_{00} - \Pi^\mu_\mu] \\ F &= -(1 - \sigma^2) \Pi_{00}; \quad \sigma^2 \equiv \frac{\omega^2}{(\vec{p})^2}. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Note que fizemos a *continuação analítica* $p_0 \rightarrow \omega$. Usando (3.2.2), $G^\mu_\mu = 2$ e

$$G_{00} = 1 - \frac{2\sigma}{\sigma - x} + \frac{\sigma^2 - 1}{(\sigma - x)^2}, \quad (3.2.9)$$

onde x é o co-seno do ângulo formado entre \vec{p} e \hat{k} na integral (3.1.35). Substituindo G_{00} e G^μ_μ em (3.1.35) podemos fazer facilmente as integrações, resultando em

$$\Pi^\mu_\mu = m_D^2; \quad m_D^2 \equiv \frac{e^2 T^2}{3}, \quad (3.2.10)$$

$$\Pi_{00} = m_D^2 \left(1 - \frac{\sigma}{2} \log \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} \right), \quad (3.2.11)$$

que mostra a dependência bastante simples na *massa de Debye* m_D . Esse resultado mostra de maneira explícita que a ação efetiva *invariante de gauge*, porém não local, em (3.1.34), descreve um sistema de campos de gauge *efetivamente massivos*.

A fim de investigar em maior detalhe esses modos massivos, vamos agora determinar o *propagador efetivo* $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ resolvendo as equações (ver a equação (A.0.21) do apêndice A)

$$\begin{aligned} -\Pi_{\mu\nu} &= \mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1} - \mathcal{D}_0^{-1}{}_{\mu\nu} \\ \mathcal{D}^{\mu\alpha} \mathcal{D}_{\alpha\nu}^{-1} &= \eta^\mu_\nu. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

⁹Observe que a transversalidade em relação à p_i é uma consequência da transversalidade em relação à ambos p_μ e u_μ

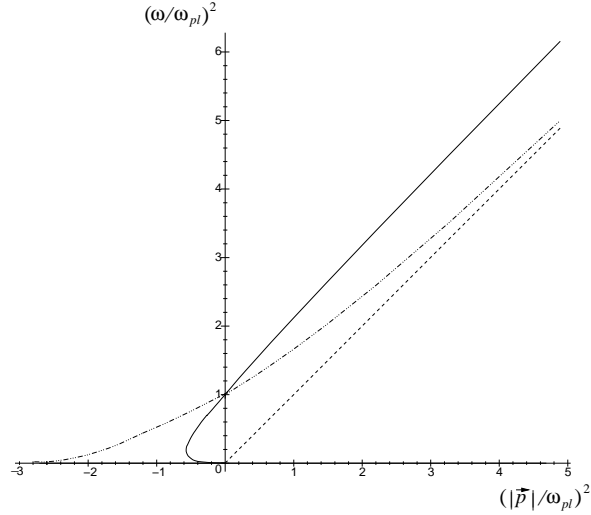


Figura 3.3: Localização dos pólos dos dois modos do propagador térmico em teorias de gauge. A linha diagonal tracejada representa o cone de luz. Os modos espacialmente transversal e longitudinal são representados respectivamente pelas linhas contínua e traço-pontilhada. Os valores positivos e negativos de $|\vec{p}|^2$ correspondem respectivamente à propagação e a blindagem dinâmica. A escala está em unidades do quadrado da frequência de plasma $\omega_{pl}^2 = m_D^2/3$.

Usando a expressão para $\mathcal{D}_{0\mu\nu}$ dada em (2.1.55) (sem o fator δ^{ab}), teremos

$$\mathcal{D}_0^{-1}{}_{\mu\nu} = -p^2 \eta_{\mu\nu} - \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) p_\mu p_\nu. \quad (3.2.13)$$

A solução de (3.2.12) pode ser mais facilmente obtida usando a seguinte decomposição para o propagador

$$\mathcal{D}^{\mu\nu} = P_T^{\mu\nu} x_T + P_L^{\mu\nu} x_L. \quad (3.2.14)$$

Substituindo (3.2.7) e (3.2.14) em (3.2.12), contraindo com os dois tensores e resolvendo o sistema de equações obtemos ¹⁰

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{\xi}{p^2} - \frac{1}{\omega^2 - |\vec{p}|^2 + G} \\ x_L &= \frac{\xi}{p^2} - \frac{1}{\omega^2 - |\vec{p}|^2 + F}. \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

A solução numérica para a localização dos pólos é mostrada na figura 3.3. Esse é um resultado bem conhecido de livro texto (ver por exemplo a equação (5.43) de [Kapusta 1989]). Estas equações nos informam sobre as *massas térmicas*. No *limite estático*, $\sigma = 0$, as equações (3.2.8) se reduzem a $G = 0$ e $F = -m_D^2$. Ou seja, o modo espacialmente transversal, $P_T^{\mu\nu}$, não é blindado pela polarização do meio térmico e o modo espacialmente longitudinal, $P_L^{\mu\nu}$, é blindado em uma escala de distância da ordem de $1/m_D$. De fato, o potencial elétrico de uma carga Q imersa no banho térmico

$$\Phi(r) = Q \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{|\vec{k}|^2 - F} = \frac{Q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kr)}{r} \frac{k dk}{|\vec{k}|^2 - F} = \frac{Q}{4\pi r} e^{-m_D r} \quad (3.2.16)$$

decai exponencialmente. Na teoria de resposta linear, o gradiente de Φ fornece o campo elétrico longitudinal gerado pela carga Q .

¹⁰ Mesmo no caso geral com os sete tensores em (3.2.3) esse cálculo tedioso não leva mais do que cinco segundos em um computador com processador de 260MH.

No referencial de repouso do plasma somente as *componentes espaciais* $P_T^{ij} = \delta^{ij} - p^i p^j / |\vec{p}|^2$ são não nulas, sendo portanto um modo magnético. Como $G = 0$, este modo não será blindado pelos meio térmico. Naturalmente, estes resultados levam em conta apenas as correções de ordem de um loop. Uma outra questão interessante é sobre o efeito que a não-comutatividade teria no valor das massas de blindagem. Na seção 4.1.2 apresentaremos uma possível alternativa para analisar este problema.

3.3 Equação de transporte no campo de gravitação

Consideremos, por simplicidade, um sistema de partículas de massa efetivamente nula, ou seja, muito menor que a escala típica de temperatura, e possuindo *apenas* interações gravitacionais. Neste caso, devemos generalizar grandezas (3.1.16) e (3.1.17) da seguinte maneira

$$dx^4 \rightarrow \sqrt{-g(x)} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (3.3.1)$$

$$dk^4 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} dk_0 dk_1 dk_2 dk_3 \quad (3.3.2)$$

e

$$f(x^\mu, k_\mu) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} F(x^\mu, k_\mu) \delta(g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu). \quad (3.3.3)$$

Usando as equações de movimento

$$k^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad \text{e} \quad \frac{dk^\alpha}{d\tau} = -\Gamma_{\mu\nu}^\alpha k^\mu k^\nu \quad (3.3.4)$$

teremos

$$\begin{aligned} \frac{dk_\alpha}{d\tau} &= \frac{dg_{\alpha\rho} k^\rho}{d\tau} = g_{\alpha\rho} \frac{dk^\rho}{d\tau} + k^\rho \frac{dg_{\alpha\rho}}{d\tau} = \\ &g_{\alpha\rho} \frac{dk^\rho}{d\tau} + k^\rho \partial_\sigma g_{\alpha\rho} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = \\ &g_{\alpha\rho} \frac{dk^\rho}{d\tau} + k^\rho k^\sigma \partial_\sigma g_{\alpha\rho} = \\ &-g_{\alpha\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho k^\mu k^\nu + k^\mu k^\nu \partial_\mu g_{\alpha\nu} = \\ &k^\mu k^\nu (\partial_\mu g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\alpha,\mu\nu}) = \\ &k^\mu k^\nu \left(\partial_\mu g_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu g_{\alpha\mu} + \frac{1}{2} \partial_\alpha g_{\mu\nu} \right) = \\ &k^\mu k^\nu \left(\frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu g_{\alpha\mu} + \frac{1}{2} \partial_\alpha g_{\mu\nu} \right) = \frac{1}{2} k^\mu k^\nu (\partial_\alpha h_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Na última linha os dois primeiros termos do lado esquerdo se anulam devido a anti-simetria sob $\mu \rightarrow \nu$ e no lado direito usamos a definição do campo do gráviton introduzida em (2.2.9). Substituindo a primeira equação de (3.3.4) e o resultado (3.3.5) em (3.1.19), obtemos

$$k \cdot \partial f(x, k) = - \left(\frac{1}{2} (\partial_\alpha h_{\mu\nu}) k^\mu k^\nu \frac{\partial}{\partial k_\alpha} + h_{\mu\nu} k^\mu \partial^\nu \right) f(x, k), \quad (3.3.6)$$

sendo que o produto escalar do lado direito é $k \cdot \partial = \eta_{\mu\nu} k^\mu \partial^\nu$ ¹¹. A solução iterativa de (3.3.6) pode então ser escrita como

$$f^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \underbrace{\left(\frac{1}{k \cdot \partial} \hat{L}\right) \cdots \left(\frac{1}{k \cdot \partial} \hat{L}\right)}_n f^{(0)} \quad (3.3.8)$$

onde

$$\hat{L} \equiv (\partial_\alpha h_{\mu\nu}) k^\mu k^\nu \frac{\partial}{\partial k_\alpha} + h_{\mu\nu} k^\mu \partial^\nu + h_{\mu\nu} k^\nu \partial^\mu \quad (3.3.9)$$

e

$$f^{(0)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(k^2) N_B(|k_0|) \quad (3.3.10)$$

A conexão com o formalismo de teoria de campos pode ser estabelecida através da relação (2.2.8), porém, considerando que no presente contexto a ação S_M é na verdade uma ação efetiva térmica $\Gamma_{\text{term.}}^{\text{grav.}}$ que emerge no limite de altas temperaturas. Por outro lado, levando em conta (3.3.2), uma definição natural para o tensor de energia momento é

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \int d^4k k^\mu k^\nu f(x, k) = \int d^4k k^\mu k^\nu f^{(0)}(k_0) + \mathcal{O}(h) \quad (3.3.11)$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima é o tensor de energia momento de um sistema de partículas livres e os termos seguintes envolvem interações. Usando (3.3.8), podemos agora escrever o *ansatz*

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{term.}}^{\text{grav.}} &= \sum_n \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \int d^4x h_{\mu_1 \nu_1} \int d^4k k^{\mu_1} k^{\nu_1} \\ &\quad \prod_{i=2}^n \left(\frac{1}{k \cdot \partial} (\partial_{\alpha_i} h_{\mu_i \nu_i}) k^{\mu_i} k^{\nu_i} \frac{\partial}{\partial k_{\alpha_i}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{k \cdot \partial} (h_{\mu_i \nu_i} k^{\mu_i} \partial^{\nu_i} + h_{\mu_i \nu_i} k^{\nu_i} \partial^{\mu_i})\right) f^{(0)}(k_0) \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

que se reduz à (2.2.10) no limite de campo fraco. O fator $1/n!$ leva em conta a simetria bosônica dos campos.

Vamos agora calcular explicitamente os termos de primeira e segunda ordem em (3.3.12). Na ordem mais

¹¹Podemos mostrar que a densidade de probabilidade no espaço de fase, F , em (3.3.3), também satisfaz (3.3.6). De fato,

$$\begin{aligned} \partial_\alpha f &= \delta(k^2) \partial_\alpha F + F \delta'(k^2) \partial_\alpha g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \\ \frac{\partial f}{\partial k_\beta} &= \delta(k^2) \frac{\partial F}{\partial k_\beta} + F \delta'(k^2) 2k_\mu g^{\mu\beta} \end{aligned}$$

Substituindo as duas relações acima em (3.3.6), o coeficiente de $F \delta'(k^2)$ é

$$\begin{aligned} k^\alpha \partial_\alpha g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu + 2k_\mu g^{\mu\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma k_\gamma k^\alpha &= \\ k^\alpha k_\mu k_\nu \partial_\alpha g^{\mu\nu} + 2k^\alpha k^\beta k_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma &= \\ k^\alpha k^\beta g_{\beta\mu} k_\gamma \partial_\alpha g^{\mu\gamma} + 2k^\alpha k^\beta k_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma &= \\ k^\alpha k^\beta k_\gamma g_{\beta\mu} \partial_\alpha g^{\mu\gamma} + 2k^\alpha k^\beta k_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma &= \\ k^\alpha k^\beta k^\gamma (g_{\gamma\gamma} g_{\beta\mu} \partial_\alpha g^{\mu\gamma} + 2\Gamma_{\gamma\alpha\beta}^\gamma) &= \\ k^\alpha k^\beta k^\gamma (-g_{\gamma\gamma} g^{\mu\gamma} \partial_\alpha g_{\beta\mu} + 2\Gamma_{\gamma\alpha\beta}^\gamma) &= \\ k^\alpha k^\beta k^\gamma (-\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + 2\Gamma_{\gamma\alpha\beta}^\gamma) &= \\ k^\alpha k^\beta k^\gamma (-\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\alpha g_{\gamma\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) &= \\ k^\alpha k^\beta k^\gamma (\partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) &= 0 \end{aligned}$$

onde utilizamos a relação

$$g_{\alpha\mu} \partial_\gamma g^{\mu\beta} = -g^{\mu\beta} \partial_\gamma g_{\alpha\mu}. \quad (3.3.7)$$

baixa, teremos simplesmente

$$\Gamma_{\text{term.}}^{\text{grav.}} = -\frac{1}{2} \int d^4x h^{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} k_\mu k_\nu \delta(k^2) N_B(|k_0|) + \dots, \quad (3.3.13)$$

onde usamos (3.3.10). Procedendo como na passagem da equação (3.1.30) para (3.1.31), obtemos

$$\Gamma_{\text{term.}}^{\text{grav.}} = -\frac{T^4}{2} \int_0^\infty du \frac{u^3}{e^u - 1} \int d^4x h^{\mu\nu} \int \frac{d\Omega}{(2\pi)^3} K_\mu K_\nu + \dots \quad (3.3.14)$$

Efetuando a integração em u [Gradshteyn e Ryzhik 1980],

$$\Gamma_{\text{term.}}^{\text{grav.}} = -\frac{\pi^4 T^4}{30} \int d^4x h^{\mu\nu} \int \frac{d\Omega}{(2\pi)^3} K_\mu K_\nu + \dots \quad (3.3.15)$$

Em segunda ordem, há uma contribuição do primeiro termo do produtório em (3.3.12) (mas não da última linha, que só vai contribuir a partir da terceira ordem) e a contribuição

$$h^{\mu_1\nu_1} k_{\mu_1} k_{\nu_1} - 2k_{\mu_2} k_{\nu_2} h_{\nu_1}^{\mu_2} h^{\nu_2\nu_1} + \dots,$$

onde está subentendido que as contrações são feitas com a métrica plana $\eta_{\mu\nu}$ de Minkowski¹². Fazendo uma integração por partes em k e procedendo como no cálculo do termo de primeira ordem, teremos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{term.}}^{\text{grav.}} &= -\frac{\pi^4 T^4}{30} \int d^4x h^{\mu_1\nu_1} \int \frac{d\Omega}{(2\pi)^3} \left[K_{\mu_1} K_{\nu_1} + \right. \\ &\quad \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial K_{\alpha_2}} \frac{K_{\mu_1} K_{\nu_1} K_{\mu_2} K_{\nu_2}}{K \cdot \partial} \partial_{\alpha_2} \right. \\ &\quad \left. - \eta_{\mu_2\nu_1} K_{\mu_1} K_{\nu_2} - \eta_{\mu_1\nu_2} K_{\mu_2} K_{\nu_1} \right. \\ &\quad \left. \left. - \eta_{\mu_2\mu_1} K_{\nu_1} K_{\nu_2} - \eta_{\nu_2\nu_1} K_{\mu_1} K_{\mu_2} \right) h^{\mu_2\nu_2} \right] + \dots, \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

onde foi levado em conta a simetria bosônica e a simetria nos índices de Lorentz dos campos $h_{\mu\nu}$. Expressando os campos em termos das componentes de Fourier, teremos

$$\Gamma_{\text{term.}}^{\text{grav.}} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[\delta(p) \tilde{h}^{\mu\nu}(p) \Pi_{\mu\nu}(p) + \frac{1}{2} \tilde{h}^{\alpha\beta}(p) \Pi_{\alpha\beta\mu\nu}(p) \tilde{h}^{\mu\nu}(-p) \right] + \dots, \quad (3.3.17)$$

onde

$$\Pi_{\mu\nu} = -\kappa \frac{\pi^4 T^4}{30} \int \frac{d\Omega}{(2\pi)^3} K_\mu K_\nu, \quad (3.3.18)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta\mu\nu}(p) &= -\kappa^2 \frac{\pi^4 T^4}{60} \int \frac{d\Omega}{(2\pi)^3} \left[p \cdot \partial_K \frac{K_\alpha K_\beta K_\mu K_\nu}{K \cdot p} \right. \\ &\quad \left. - \eta_{\mu\beta} K_\alpha K_\nu - \eta_{\alpha\nu} K_\mu K_\beta \right. \\ &\quad \left. - \eta_{\mu\alpha} K_\beta K_\nu - \eta_{\nu\beta} K_\alpha K_\mu \right], \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

onde a *constante de acoplamento* $\kappa = \sqrt{32\pi G}$ foi agora introduzida fazendo $h_{\mu\nu} \rightarrow \kappa h_{\mu\nu}$.

Como vimos na seção 2.2.2, a possível invariância do funcional (3.3.12) sob as transformações (2.2.18) implicaria nas identidades de Ward da forma (2.2.33). Em particular, (3.3.18) e (3.3.19) devem satisfazer a

¹²Esta última corresponde à expansão da métrica no termo $h_{\mu_1\nu_1} k_{\mu_2} k_{\nu_2} g^{\mu_2\mu_1} g^{\nu_2\nu_1}$ em (3.3.12).

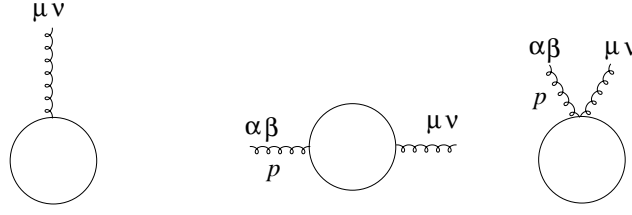


Figura 3.4:

identidade

$$-\left(p^\alpha \delta_\lambda^\beta + p^\beta \delta_\lambda^\alpha\right) \Pi_{\alpha\beta\ \mu\nu}(p) = \kappa W_{\mu\nu\ \lambda}^{\alpha\beta}(p, -p) \Pi_{\alpha\beta}. \quad (3.3.20)$$

Usando (2.2.34) é fácil verificar que de fato a identidade acima é satisfeita. Procedendo com o termo de terceira ordem, verificamos que também neste caso a identidade é satisfeita. Assim, podemos dizer que (3.3.12) tem boas chances de ser de fato invariante de gauge.

Uma inspeção direta de (3.3.18) e (3.3.19) mostra que as seguintes identidades também são satisfeitas

$$\eta^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu} = 0 \quad (3.3.21a)$$

$$\eta^{\alpha\beta} \Pi_{\alpha\beta\ \mu\nu}(p) = -\Pi_{\mu\nu}. \quad (3.3.21b)$$

Esta identidade não é meramente accidental. Trata-se de uma *identidade de Weyl* que reflete a invariância da ação efetiva térmica sob a transformação conforme $g_{\mu\nu} \rightarrow \exp[-\sigma(x)] g_{\mu\nu}$ ¹³.

Resta ainda verificar se as funções 1PI geradas por (3.3.12) coincidem com aquelas calculadas pelo método diagramático. A figura 3.4 mostra os diagramas que contribuem para a função de um e de dois grávitons no caso de uma teoria escalar descrita pela ação

$$S^{\text{scal-grav}} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \quad (3.3.22)$$

e usando (2.2.9) para obter as regras de Feynman¹⁴. Como nos casos anteriores, a parte térmica destes diagramas pode ser expressa em termos das amplitudes frontais em (3.1.12) e a contribuição dominante, no limite de altas temperaturas, é obtida utilizando (3.1.15). O resultado assim obtido coincide exatamente com as expressões (3.3.18) e (3.3.19).

Em situações um pouco mais realísticas, devemos levar em conta que *todas* as partículas (grávitons inclusive) interagem gravitacionalmente. Mas a inclusão de mais graus de liberdade não massivos no formalismo de transporte somente vai modificar (3.3.12) por um fator constante que conta os *graus de liberdade de helicidade*. O teste diagramático desta propriedade foi feito levando em conta as interações com fótons descritas pela ação

$$\begin{aligned} S^{\text{foton-grav}} &= -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \\ &\quad - \frac{1}{2\alpha} \int d^4x \sqrt{-g} (D_\mu A^\mu) (D_\nu A^\nu) \\ &\quad + \int d^4x g^{\mu\nu} \sqrt{-g} (\partial_\mu c^1) (\partial_\nu c^2) \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

¹³Para deduzir as identidades, considere a transformação $h_{\mu\nu} \rightarrow (1 - \sigma(x))h_{\mu\nu} - \sigma(x) \eta_{\mu\nu}$, com $\sigma(x)$ infinitesimal, e imponha a invariância da ação efetiva.

¹⁴Note que, semelhantemente ao caso da ação de Einstein-Hilbert, todos os vértices serão de grau dois no momento. O mesmo é verdade no caso da ação da QED em (3.3.23).

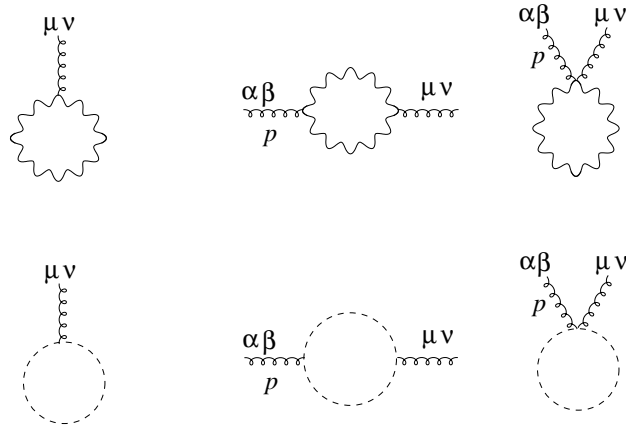


Figura 3.5: A linha tracejada representa o ghost da QED.

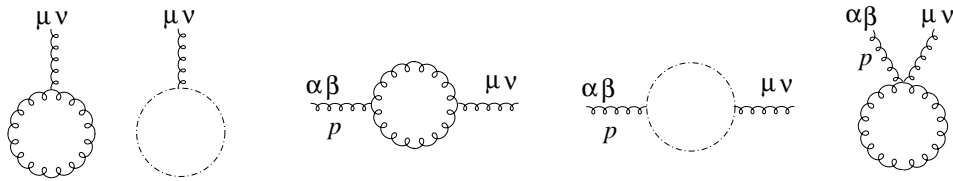


Figura 3.6: A linha traço-pontilhada representa o ghost da gravitação.

O cálculo dos diagramas da figura 3.5, no limite de altas temperaturas, mostra que de fato o resultado é exatamente o dobro do obtido para o caso de loops escalares. Esta propriedade foi confirmada até mesmo para o caso em que são levadas em conta as interações entre os próprios grávitons, gerando os diagramas da figura (3.6)¹⁵ (o segundo diagrama com loop de ghost subentende a superposição de dois diagramas com setas em direções opostas). Os detalhes destes e outros cálculos estão nas referências [Brandt e Frenkel 1998, Brandt e Frenkel 1999, Brandt e Frenkel 1993, Brandt, Frenkel e Taylor 1993, Brandt, Frenkel e Taylor 1992].

Cálculos ainda mais complicados, envolvendo a função de três grávitons também confirmam o *ansatz* (3.3.12) [Brandt e Frenkel 1993]. Além disso, em [Brandt e Frenkel 1998], consideramos uma classe geral de “gauges” do tipo Feynman-de Donder, na gravitação pura, e calculamos as contribuições proporcionais a T^4 , T^2 e $\log T$. Em [Brandt, Cuadros-Melgar e Machado 2003] fizemos uma análise detalhada no caso do *gauge temporal axial*. Entre outras coisas, todos estes cálculos confirmaram a independência de gauge das contribuições dominantes.

Como o objetivo de tentar adquirir informação que seja independente da ordem de teoria de perturbação, fizemos em [Brandt e Frenkel 1999] uma análise geral da estrutura da auto-energia do gráviton. Esse trabalho é formalmente análogo ao que havia sido feito por Weldon no caso da QCD [Weldon 1999]. Utilizando as identidades BRST [Becchi, Rouet e Stora 1975, Tyutin 1975], foi possível obter relações não-lineares entre certas componentes da auto-energia (como veremos, existem em geral 14 componentes).

A definição do campo gravitacional $h_{\mu\nu}$ em (2.2.9) não é a única possível. Dentre as várias possibilidades, há por exemplo a popular *representação de Goldberg* [Goldberg 1958]), onde $\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu}$. No trabalho

¹⁵A complexidade algébrica destes cálculos, especialmente no caso do diagrama com dois vértices cúbicos, é de tal monta que o uso de ferramentas computacionais de *computação simbólica* torna-se indispensável. Um exemplo típico de programa utilizado pode ser visto na página http://calibre.if.usp.br/cgi-bin/form_test1.

[Brandt e Frenkel 1993] calculamos a auto-energia do gráviton, utilizando diferentes representações para o campo gravitacional. Impondo que a ação efetiva térmica seja independente de representação (além de ser invariante de gauge), é possível obter relações gerais para a auto-energia em diferentes representações. De fato, usando a relação mais geral possível entre duas representações quaisquer

$$h_i^{\mu\nu} = ah^{\mu\nu} + bh^\lambda{}_\lambda \eta^{\mu\nu} + ch^\lambda{}_\lambda h^{\mu\nu} + dh^{\mu\lambda} h^\nu{}_\lambda + e \left(h^\lambda{}_\lambda \right)^2 \eta^{\mu\nu} + fh_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} + \dots, \quad (3.3.24)$$

e impondo a invariância da ação efetiva (3.3.17) obtemos,

$$\Pi^{\mu\nu} = a\Pi_i^{\mu\nu}, \quad (3.3.25)$$

e

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu\alpha\beta} &= a^2\Pi_i^{\mu\nu\alpha\beta}(k) + ab \left(\Pi_i^{\mu\nu,\rho} \eta^{\alpha\beta} + \Pi_i^{\alpha\beta,\rho} \eta^{\mu\nu} \right) \\ &+ c \left(\Pi_i^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} + \Pi_i^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} \right) \\ &+ \frac{d}{2} \left(\Pi_i^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \Pi_i^{\nu\beta} \eta^{\mu\alpha} + \Pi_i^{\nu\alpha} \eta^{\mu\beta} + \Pi_i^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha} \right). \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

Uma das utilidades deste tipo de relação é que podemos calcular a auto-energia empregando a representação mais conveniente. Por exemplo, se tivéssemos calculado as funções de um e dois grávitons na representação de Goldberg teríamos obtido¹⁶,

$$\Pi_i^{\mu\nu} = \frac{\pi^4 T^4}{30} \int \frac{d\Omega}{(2\pi)^3} K_\mu K_\nu, \quad (3.3.27)$$

e

$$\Pi_i^{\alpha\beta\mu\nu} = -\frac{\pi^4 T^4}{60} \int \frac{d\Omega}{(2\pi)^3} \left[p \cdot \partial_K \frac{K_\alpha K_\beta K_\mu K_\nu}{K \cdot p} \right]. \quad (3.3.28)$$

Por outro lado, expandindo $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}$ vemos que a relação entre a representação (2.2.9) e a representação de Goldberg é tal que $a = -1$, $b = 1/2$, $c = -1/2$, $d = 1$, $e = 1/8$ e $f = -1/4$ em (3.3.24). Substituindo estas grandezas em (3.3.25) e (3.3.26) obtemos as expressões (3.3.18) e (3.3.19) (observe o cancelamento do segundo e terceiro termos de (3.3.26)). Em vista da maior simplicidade da auto-energia na representação de Goldberg, talvez fosse interessante repetir a derivação da ação efetiva nesta representação.

¹⁶Uma das vantagens desta representação é que o número de termos em cada um dos vértices é menor do que na representação (2.2.9). Talvez essa seja a principal razão da popularidade da representação de Goldberg.

3.4 Propriedades do tensor de polarização gravitacional

Na seção anterior vimos que as funções 1PI de um e dois grávitons estão relacionadas pela identidade de Ward (3.3.20). Como no caso da QED, esta importante propriedade de invariância de gauge se manifesta ao nível do integrando, sendo portanto independente da estrutura analítica destas funções. No entanto, tendo em vista possíveis aplicações, torna-se necessário efetuar as integrais explicitamente. Felizmente, as integrais envolvidas não são muito diferentes daquelas tratadas no caso da QED. O que muda é essencialmente a complexidade algébrica.

Vamos começar com o cálculo bastante elementar da integral na função de um ponto em (3.3.18). Como nos casos anteriores, é conveniente introduzir uma base tensorial que neste caso consiste em apenas dois tensores, a saber, $u_\mu u_\nu$ e $\eta_{\mu\nu}$. Escrevendo

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} K_\mu K_\nu = a u_\mu u_\nu + b \eta_{\mu\nu} \quad (3.4.1)$$

e em seguida contraindo com $u_\mu u_\nu$ e $\eta_{\mu\nu}$, obtemos facilmente (note que $K \cdot u = 1$ e $K^2 = 0$) $a = 4/3$ e $b = -1/3$. Levando estes valores em (3.4.1) e substituindo o resultado em (3.3.18), obtemos

$$\Pi_{\mu\nu} = -\kappa \frac{\rho_S}{2} \left(\frac{4}{3} u_\mu u_\nu - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} \right) \quad (3.4.2)$$

onde

$$\rho_S \equiv \frac{\pi^2 T^4}{30} \quad (3.4.3)$$

é a densidade de energia de um gás ultra-relativístico de partículas escalares. Note que, nesta ordem de aproximação, o tensor de energia momento é (compare (2.2.10) com (3.3.17)) $T^{\mu\nu} = -2\Pi^{\mu\nu}$.

O cálculo das integrais angulares em (3.3.19) segue essencialmente o mesmo algoritmo acima. Porém, a base tensorial envolve todos os possíveis tensores de quatro índices que podem ser formados com u_μ , p_μ e $\eta_{\mu\nu}$ possuindo as simetrias de (3.3.19). Uma análise direta das possíveis combinações simétricas, conduz à base tensorial mostrada na tabela C.1 do apêndice C¹⁷.

O próximo passo é bastante direto, porém de uma imensa complexidade algébrica. Apesar disso, é importante ressaltar que as relações que apresentaremos a seguir são facilmente derivadas utilizando um programa de computação simbólica que possua os elementos básicos de contração de índices de Lorentz. O algoritmo é exatamente o que fizemos, usando papel e lápis, no caso da função de um ponto ou até mesmo no caso do tensor de polarização da QED. Primeiramente escrevemos o tensor de polarização (3.3.19) em termos da combinação linear

$$\Pi_{\mu\nu\alpha\beta} = -\kappa^2 \frac{\rho_S}{4} \sum_{j=1}^{14} T_{\mu\nu\alpha\beta}^j \int \frac{d\Omega}{4\pi} C^j = -\kappa^2 \frac{\rho_S}{8} \sum_{j=1}^{14} T_{\mu\nu\alpha\beta}^j \int_{-1}^1 dx C^j, \quad (3.4.4)$$

onde x é o co-seno do ângulo entre \hat{K} e \vec{p} . Tendo em vista que o integrando em (3.3.19) e a base tensorial são ambos de grau zero nos momentos, os coeficientes C^j só dependerão de x e da razão $\sigma^2 = p_0^2/(\vec{p})^2$, introduzida em (3.2.8). De fato, C^j são soluções do sistema linear

$$\sum_{j=1}^{14} \left(T_i^{\mu\nu\alpha\beta} T_{j\mu\nu\alpha\beta} \right) C^j(\sigma, x) = G^i(\sigma, x) \quad (i = 1..14), \quad (3.4.5)$$

¹⁷Para gerar uma base deste tipo, escreva primeiramente as seguintes estruturas: $\eta\eta$, ηpp , ηuu , $\eta up + \eta pu$, $ppuu$. Observe que para cada uma destas estruturas, existe um tensor automaticamente simétrico colocando os índices μ e ν em η ou em pp do último. As outras possibilidades consistem em trocar μ por α nas anteriores e simetrizar. Isso perfaz um total de 10 tensores. Finalmente, existem mais 4 tensores obtidos das estruturas $pppp$, $uuuu$, $pppu$ e $uppp$, cada uma das quais possuindo multiplicidade 1.

com

$$G^i(\sigma, x) = T_i^{\mu\nu\alpha\beta} \left[p \cdot \partial_K \frac{K_\alpha K_\beta K_\mu K_\nu}{K \cdot p} - \eta_{\mu\beta} K_\alpha K_\nu - \eta_{\alpha\nu} K_\mu K_\beta - \eta_{\mu\alpha} K_\beta K_\nu - \eta_{\nu\beta} K_\alpha K_\mu \right]. \quad (3.4.6)$$

Resolvendo o sistema

$$\bar{C}^i \equiv -\frac{1}{8} \int_{-1}^1 dx C^i = -\frac{1}{8} \sum_j (T_i^{\mu\nu\alpha\beta} T_{j\mu\nu\alpha\beta})^{-1} \int_{-1}^1 dx G^j(\sigma, x) \quad (3.4.7)$$

e calculando as 14 integrais elementares, obtemos¹⁸

$$\bar{C}_1 = \frac{1}{6} - \frac{P^2}{24} + \frac{P^4 L(\sigma)}{8} \quad (3.4.8a)$$

$$\bar{C}_2 = -\frac{1}{3} + \frac{P^2}{12} - \frac{5P^4}{24} + \frac{5P^6 L(\sigma)}{8} \quad (3.4.8b)$$

$$\bar{C}_3 = -\frac{P^2}{3} + \frac{7P^4}{12} - \frac{35P^6}{24} + \frac{35P^8 L(\sigma)}{8} \quad (3.4.8c)$$

$$\bar{C}_4 = -\frac{P^2}{24} + \frac{P^4 L(\sigma)}{8} \quad (3.4.8d)$$

$$\bar{C}_5 = \frac{P^2}{12} - \frac{5P^4}{24} + \frac{5P^6 L(\sigma)}{8} \quad (3.4.8e)$$

$$\bar{C}_6 = \left(-\frac{1}{12} + \frac{5P^2}{24} - \frac{5P^4 L(\sigma)}{8} \right) \sigma^2 \quad (3.4.8f)$$

$$\bar{C}_7 = \left(\frac{1}{3} - \frac{7P^2}{12} + \frac{35P^4}{24} - \frac{35P^6 L(\sigma)}{8} \right) \sigma^2 \quad (3.4.8g)$$

$$\bar{C}_8 = P^2 \left(-\frac{1}{12} - \frac{5P^2}{24} + \frac{P^2 L(\sigma)}{2} + \frac{5P^4 L(\sigma)}{8} \right) \quad (3.4.8h)$$

$$\bar{C}_9 = P^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{2P^2}{3} - \frac{35P^4}{24} + \frac{15P^4 L(\sigma)}{4} + \frac{35P^6 L(\sigma)}{8} \right) \quad (3.4.8i)$$

$$\bar{C}_{10} = \left(\frac{1}{6} - \frac{2P^2}{3} - \frac{35P^4}{24} + \frac{15P^4 L(\sigma)}{4} + \frac{35P^6 L(\sigma)}{8} \right) \sigma^2 \quad (3.4.8j)$$

$$\bar{C}_{11} = \left(\frac{1}{4} + \frac{35P^2}{24} - \frac{5P^2 L(\sigma)}{2} - \frac{35P^4 L(\sigma)}{8} \right) \sigma^2 P^2 \quad (3.4.8k)$$

$$\bar{C}_{12} = P^4 \left(L(\sigma) + 5P^2 L(\sigma) + \frac{35P^4 L(\sigma)}{8} - \frac{13}{12} - \frac{35P^2}{24} \right) \quad (3.4.8l)$$

$$\bar{C}_{13} = P^2 \left(-\frac{1}{12} - \frac{5P^2}{24} + \frac{P^2 L(\sigma)}{2} + \frac{5P^4 L(\sigma)}{8} \right) \quad (3.4.8m)$$

$$\bar{C}_{14} = \left(-\frac{1}{12} + \frac{5P^2}{24} - \frac{5P^4 L(\sigma)}{8} \right) \sigma^2 \quad (3.4.8n)$$

onde introduzimos $P^2 = \sigma^2 - 1$ e

$$L(\sigma) = \frac{\sigma}{2} \ln \frac{\sigma+1}{\sigma-1} - 1. \quad (3.4.9)$$

por conveniência de notação. Assim a forma final para o tensor de polarização gravitacional é

$$\Pi_{\mu\nu\alpha\beta} = \rho_S \sum_{j=1}^{14} T_{\mu\nu\alpha\beta}^j \bar{C}^j. \quad (3.4.10)$$

Esta expressão foi obtida originalmente por Rebhan [Rebhan 1991] em um estudo sobre instabilidades na gravitação a temperatura finita. Posteriormente, foram consideradas as contribuições sub-dominantes na temperatura levando em conta também os diagramas mostrados na figura 3.5. As expressões completas estão no apêndice B da referência [Almeida, Brandt e Frenkel 1994]. Mais recentemente, a dependência de gauge das contribuições sub-dominantes foi investigada em [Brandt, Cuadros-Melgar e Machado 2003].

Na seção 3.2 vimos que, no limite de altas temperaturas, o tensor de polarização dos campos de gauge de-

¹⁸Como nos casos anteriores, também esse cálculo tedioso não leva mais do que alguns segundos utilizando um computador modesto.

termina o comportamento dos modos coletivos efetivamente massivos que se propagam no meio térmico. Em certas situações extremas, tais como as que ocorrem em cenários cosmológicos, o tensor de polarização gravitacional também possui interesse. Ele descreve a resposta à perturbações da métrica e determina a evolução de flutuações de grande escala. Há também em certa relevância na teoria de gravitação semi-clássica estocástica [Hu e Verdaguer 2003] onde são estudadas as flutuações estatísticas da matéria no espaço curvo como uma forma de embasamento para um melhor entendimento da teoria quântica da gravitação.

A propriedade de invariância sob a transformação conforme, refletida nas identidades (3.3.21), é crucial para que possamos aplicar os resultados obtidos para as funções de um e dois grávitons ao estudo de perturbações da métrica. Em primeiro lugar, ela permite que a matéria esteja em equilíbrio térmico, apesar da métrica ser dependente do espaço-tempo. De fato, sendo a métrica conformemente plana, $ds^2 = \sigma(\tau, \vec{x})(d\tau^2 - dx^2)$, a *temperatura local* em uma métrica curva de fundo é determinada pelo fator de escala σ . Em segundo lugar, funções 1PI térmicas, no espaço de fundo curvo, são obtidas por uma transformação conforme daquelas calculadas no espaço plano.

Levando em conta que as identidades (3.3.20) e (3.3.21) fornecem um total de 11 condições, o número de estruturas realmente independentes que podem aparecer em (3.4.10) se reduz de 14 para 3. Ou seja, é possível escolher uma nova base tensorial possuindo apenas 3 tensores. As funções de estrutura correspondentes poderiam ser, por exemplo,

$$\mathcal{C}_1 = \frac{1}{\rho_S} \Pi_{0000}(p), \quad \mathcal{C}_2 = \frac{1}{\rho_S} \Pi_{0\mu}{}^\mu{}_0(p), \quad \mathcal{C}_3 = \frac{1}{\rho_S} \Pi_{\mu\nu}{}^{\mu\nu}(p). \quad (3.4.11)$$

Usando a expressão (3.3.19), obtemos

$$\mathcal{C}_1 = L(\sigma) - \frac{1}{4}, \quad \mathcal{C}_2 = -1, \quad \mathcal{C}_3 = 0. \quad (3.4.12)$$

Procedendo como na seção IV de [Brandt e Frenkel 1998], o propagador efetivo do gráviton é obtido a partir da ação total

$$S[g] = S[g] + \Gamma_{\text{term.}}^{\text{grav.}}, \quad (3.4.13)$$

onde $S[g]$ é a ação de Einstein em (2.2.1) e $\Gamma_{\text{term.}}^{\text{grav.}}$ é dada por (3.3.17). O cálculo auto-consistente do propagador efetivo deve levar em conta uma métrica de fundo curva (porém conformemente plana), tal que

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}, \quad (3.4.14)$$

Considerando a variação de segunda ordem

$$\delta^2 S[g] = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g^{(0)}} \delta g_{\alpha\beta} P^{\alpha\beta\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (3.4.15)$$

um cálculo direto, nos dá

$$\begin{aligned} P^{\alpha\beta\mu\nu}(p, u) = & \left\{ \left[\eta^{\alpha\nu} p^\beta p^\mu - \eta^{\alpha\beta} p^\mu p^\nu + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} p^2 - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} p^2 \right. \right. \\ & - 8\pi G\rho \left(\frac{1}{3} \eta^{\beta\mu} (4u^\alpha u^\nu - \eta^{\alpha\nu}) + \frac{1}{6} \eta^{\alpha\beta} (4u^\mu u^\nu - \eta^{\mu\nu}) \right) \\ & \left. \left. + (\text{simet. } \mu \leftrightarrow \nu) \right] + (\text{simet. under } \alpha \leftrightarrow \beta) \right\} \\ & - 16\pi G \Pi^{\alpha\beta\mu\nu}(p, u). \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

O propagador efetivo (inverso de $P^{\alpha\beta\mu\nu}(p, u)$) somente pode ser obtido se impusermos vínculos físicos para

as flutuações da métrica. A imposição de que flutuações de spin 0 ou 1 não se propagam nos leva a considerar flutuações $\delta g_{\mu\nu}$ respectivamente de *traço nulo* e *transversais* [Gribosky, Donoghue e Holstein 1989]. Estas condições implicam que somente as componentes transversais e de traço nulo (TT) de $(P^{\alpha\beta\mu\nu})^{-1}$ vão contribuir para a equação de resposta linear

$$\delta g_{\alpha\beta} = -16\pi G \left(P^{\alpha\beta\mu\nu} \right)^{-1} \delta T^{\mu\nu}. \quad (3.4.17)$$

Uma base de tensores TT e que também satisfazem as condições de ortogonalidade e idempotência é dada por

$$\mathcal{T}_I^{\alpha\beta\mu\nu} = \sum_{i=1}^{14} c_{Ii} T^{\alpha\beta\mu\nu}_i, \quad I = A, B, C. \quad (3.4.18)$$

onde os coeficientes c_{Ii} estão dados na tabela 3.1. Calculando as projeções de $P^{\alpha\beta\mu\nu}(p, u)$ na base TT, obtemos

i	c_{A_i}	c_{B_i}	c_{C_i}
1	$\frac{1}{2}$	0	0
2	$\frac{1}{2} \frac{p^2}{(p \cdot u)^2 - p^2}$	$-\frac{1}{2} \frac{p^2}{(p \cdot u)^2 - p^2}$	0
3	$\frac{1}{2} \frac{(p^2)^2}{((p \cdot u)^2 - p^2)^2}$	$-2 \frac{(p^2)^2}{((p \cdot u)^2 - p^2)^2}$	$\frac{3}{2} \frac{(p^2)^2}{((p \cdot u)^2 - p^2)^2}$
4	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$
5	$-\frac{1}{2} \frac{p^2}{(p \cdot u)^2 - p^2}$	0	$\frac{1}{2} \frac{p^2}{(p \cdot u)^2 - p^2}$
6	$-\frac{1}{2} \frac{p \cdot u}{(p \cdot u)^2 - p^2}$	$\frac{1}{2} \frac{p \cdot u}{(p \cdot u)^2 - p^2}$	0
7	$-\frac{1}{2} \frac{p^2 p \cdot u}{((p \cdot u)^2 - p^2)^2}$	$2 \frac{p^2 p \cdot u}{((p \cdot u)^2 - p^2)^2}$	$-\frac{3}{2} \frac{p^2 p \cdot u}{((p \cdot u)^2 - p^2)^2}$
8	$\frac{1}{2} ((p \cdot u)^2 - p^2)^{-1}$	$-\frac{1}{2} \frac{(p \cdot u)^2}{p^2 ((p \cdot u)^2 - p^2)}$	0
9	$\frac{1}{2} \frac{2(p \cdot u)^2 - p^2}{((p \cdot u)^2 - p^2)^2}$	$-2 \frac{(p \cdot u)^2}{((p \cdot u)^2 - p^2)^2}$	$\frac{1}{2} \frac{2(p \cdot u)^2 + p^2}{((p \cdot u)^2 - p^2)^2}$
10	$\frac{1}{2} \frac{p^2}{((p \cdot u)^2 - p^2)^2}$	$-\frac{1}{2} \frac{3(p \cdot u)^2 + p^2}{((p \cdot u)^2 - p^2)^2}$	$\frac{3}{2} \frac{(p \cdot u)^2}{((p \cdot u)^2 - p^2)^2}$
11	$-\frac{1}{2} \frac{p \cdot u}{((p \cdot u)^2 - p^2)^2}$	$\frac{(p \cdot u)^2 + p^2}{p^2} \frac{p \cdot u}{((p \cdot u)^2 - p^2)^2}$	$-\frac{1}{2} \frac{(2(p \cdot u)^2 + p^2) p \cdot u}{p^2 ((p \cdot u)^2 - p^2)^2}$
12	$\frac{1}{2} ((p \cdot u)^2 - p^2)^{-2}$	$-2 \frac{(p \cdot u)^2}{p^2 ((p \cdot u)^2 - p^2)^2}$	$\frac{1}{6} \frac{4(p \cdot u)^4 + 4(p \cdot u)^2 p^2 + (p^2)^2}{(p^2)^2 ((p \cdot u)^2 - p^2)^2}$
13	$-\frac{1}{2} ((p \cdot u)^2 - p^2)^{-1}$	0	$\frac{1}{6} \frac{2(p \cdot u)^2 + p^2}{p^2 ((p \cdot u)^2 - p^2)}$
14	$\frac{1}{2} \frac{p \cdot u}{(p \cdot u)^2 - p^2}$	0	$-\frac{1}{2} \frac{p \cdot u}{(p \cdot u)^2 - p^2}$

Tabela 3.1: Componentes dos tensores transversais e de traço nulo.

as seguintes *relações de dispersão* para os três modos *transversais* e de *traço nulo*

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{\rho_S}{M_P^2} \left(\frac{5}{9} + \frac{1}{2} P^4 L - \frac{1}{6} P^2 \right) \\ p^2 &= \frac{\rho_S}{M_P^2} \left(\frac{2}{9} - 2P^4 L + \frac{2}{3} P^2 + \frac{10}{9} \frac{1}{P^2} \right) \\ p^2 &= \frac{\rho_S}{M_P^2} \left(\frac{8}{9} + 3P^4 L - P^2 + \frac{28}{27} \frac{1}{P^2} \right). \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

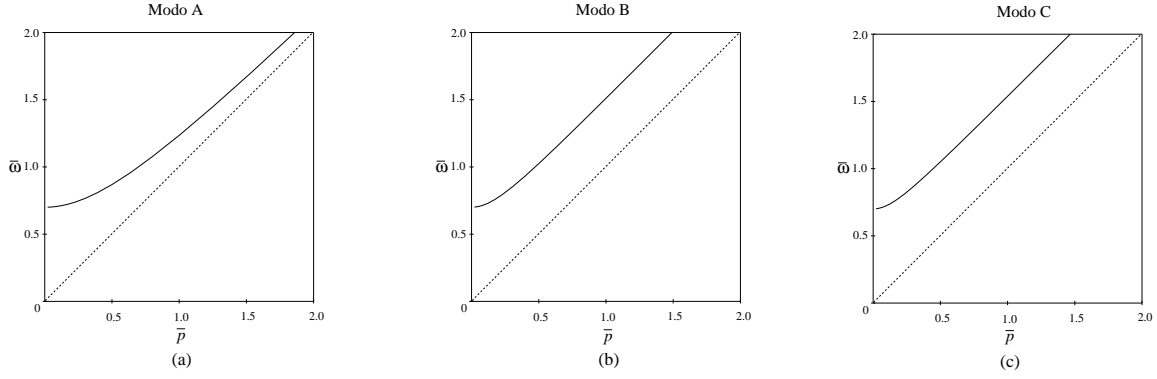


Figura 3.7: Relações de dispersão para os modos de propagação em unidades de $\sqrt{\rho_S/\bar{M}_P}$. A diagonal tracejada representa o cone de luz.

Como um exemplo simples mostramos na figura 3.7 os modos de propagação que ocorrem para valores reais de $\omega \equiv \sqrt{\rho_S/\bar{M}_P} \bar{\omega}$ e $|\vec{p}| \equiv \sqrt{\rho_S/\bar{M}_P} \bar{p}$. Analisando o comportamento quando $\bar{k} \rightarrow 0$ vemos que, semelhantemente às equações da QCD em (3.2.15), os três modos possuem uma *freqüência de plasma comum*, dada por

$$\bar{\omega}_{pl} = \sqrt{\frac{22}{45}}. \quad (3.4.20)$$

Para grandes momentos $\bar{p} \gg 1$, o comportamento assintótico é

$$\bar{\omega}_A = \bar{p}_A + \frac{5}{18\bar{p}_A} \quad (3.4.21a)$$

$$\bar{\omega}_B = \bar{p}_B + \sqrt{\frac{5}{18}} \quad (3.4.21b)$$

$$\bar{\omega}_C = \bar{k}_C + \sqrt{\frac{7}{27}}. \quad (3.4.21c)$$

Portanto, neste limite, o modo A possui uma massa efetiva $m_A^2 = 5/9(\rho_S/\bar{M}_P^2)$. Por outro lado, os outros dois modos adquirem uma massa que cresce ilimitadamente. Abaixo da freqüência de plasma, surge, ao invés de uma massa de blindagem, como ocorre na QCD, uma instabilidade acima de um comprimento de onda crítico [Rebhan 1991]. Seria interessante investigar o papel que a não comutatividade desempenharia neste contexto.

4 Efeitos térmicos na teoria de Yang-Mills não-comutativa

4.1 O limite de altas temperaturas da teoria de Yang-Mills não-comutativa

A existência da ação efetiva térmica para a teoria comutativa dada por (3.1.36) nos leva naturalmente a investigar o problema análogo na versão não comutativa da teoria. Logo de início nos defrontamos com uma diferença importante, em relação à teoria comutativa, que diz respeito às escalas envolvidas. De fato, enquanto na teoria comutativa os “hard thermal loops” são completamente definidos considerando-se a região onde os momentos externos p são tais que $p \ll T$, na teoria não comutativa temos que levar em conta também a magnitude do parâmetro $\theta p T$ ($\theta \equiv \sqrt{\theta_{\mu\nu}\theta^{\mu\nu}}$). O primeiro passo para investigar os detalhes desse problema consiste em analisar o comportamento das funções 1PI de dois e três pontos no limite de altas temperaturas. Esta abordagem será descrita nas subseções seguintes utilizando as técnicas descritas na seção 3.1. Além disso, vamos aplicar as técnicas apresentadas na seção 3.2 para investigar as massas térmicas no caso não comutativo.

4.1.1 O tensor de polarização

Na figura 4.1 são mostrados os diagramas que contribuem para o tensor de polarização na teoria de Yang-Mills não-comutativa. A figura 4.2 mostra as amplitudes correspondentes que contribuem para a equação (3.1.12). Usando as regras de Feynman obtidas na seção (2.3.3) e fazendo a expansão (3.1.15) na região $p \ll k \sim T$, as técnicas descritas na seção 3.2 resultam em

$$\Pi_{\mu\nu}^{AB} = \frac{4g^2 N \delta^{A,B}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2|\vec{k}|} [1 - \delta^{A,0} \cos(\vec{p} \cdot k)] N_B(|\vec{k}|) G_{\mu\nu}(k, p); \quad \tilde{p}_\mu \equiv p^\nu \theta_{\nu\mu} \quad (4.1.1)$$

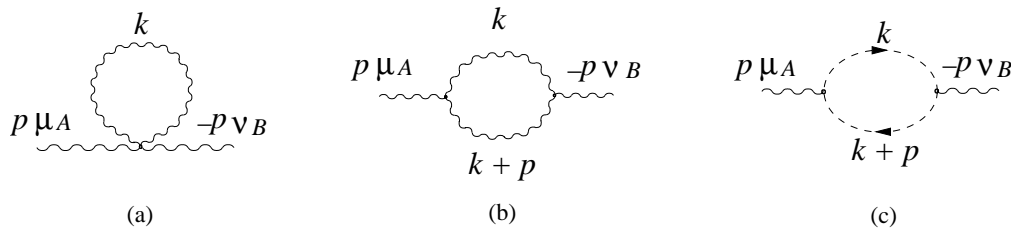


Figura 4.1: Diagramas que contribuem para o tensor de polarização da teoria de Yang-Mills não-comutativa. Está subentendido um segundo diagrama com loop de ghosts possuindo setas no sentido anti-horário.

onde $k_0 = |\vec{k}|$. O tensor $G_{\mu\nu}(k, p)$, dado por (3.2.2), é o mesmo que foi obtido na teoria de Yang-Mills usual. Portanto, a propriedade de transversalidade

$$p^\mu \Pi_{\mu\nu}^{AB} = 0 \quad (4.1.2)$$

é, também no caso da teoria não comutativa, verificada ao nível do integrando. Considerando os quatro possíveis tensores transversais, podemos escrever

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{AB} &= \Pi_1^{AB} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) + \Pi_2^{AB} \left(p_\mu - \frac{p^2}{p \cdot u} u_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p^2}{p \cdot u} u_\nu \right) \frac{1}{p^2} \\ &+ \Pi_3^{AB} p^2 \tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu + \Pi_4^{AB} \left[\left(p_\mu - \frac{p^2}{p \cdot u} u_\mu \right) \tilde{p}_\nu + \left(p_\nu - \frac{p^2}{p \cdot u} u_\nu \right) \tilde{p}_\mu \right] \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Substituindo (4.1.1) em (4.1.3), e usando as técnicas de computação simbólica mencionadas na seção 3.2, obtemos

$$\Pi_1^{AB} = \Pi_\mu^{\mu AB} + (\sigma^2 - 1) \Pi_{00}^{AB} - \frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^2} \Pi_{\mu\nu}^{AB}; \quad \sigma^2 \equiv \frac{p_0^2}{\tilde{p}^2} \quad (4.1.4a)$$

$$\Pi_2^{AB} = \sigma^2 \Pi_\mu^{\mu AB} + 2\sigma^2(\sigma^2 - 1) \Pi_{00}^{AB} - \sigma^2 \frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^2} \Pi_{\mu\nu}^{AB} \quad (4.1.4b)$$

$$\Pi_3^{AB} = -\frac{1}{\tilde{p}^2 p^2} \Pi_\mu^{\mu AB} - \frac{\sigma^2 - 1}{\tilde{p}^2 p^2} \Pi_{00}^{AB} + 2 \frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^4 p^2} \Pi_{\mu\nu}^{AB} \quad (4.1.4c)$$

$$\Pi_4^{AB} = (\sigma^2 - 1) \frac{p_0 \tilde{p}^\mu}{\tilde{p}^2 p^2} \Pi_{\mu 0}^{AB} \quad (4.1.4d)$$

(estamos considerando somente a não-comutatividade entre coordenadas espaciais, ou seja, $\theta_{0\mu} = 0$).

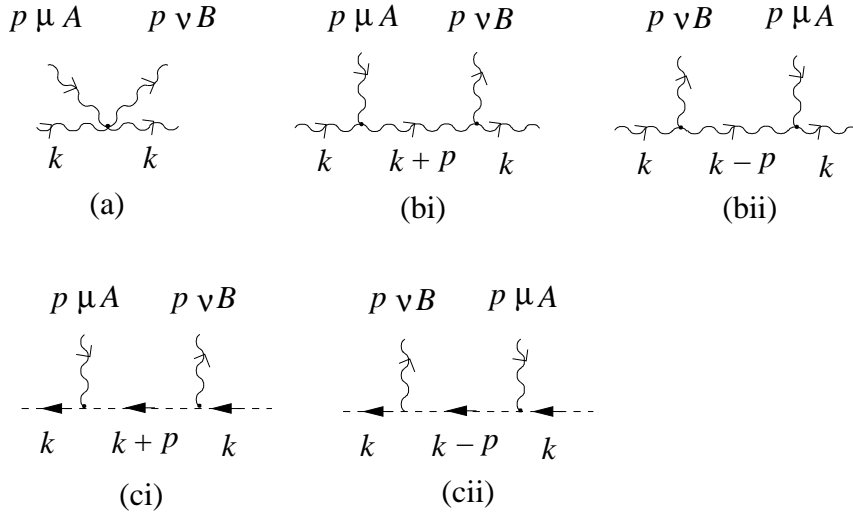


Figura 4.2: Amplitudes de espalhamento correspondentes ao tensor de polarização da teoria de Yang-Mills não comutativa. A direção do momento do ghost é para a esquerda, como a do momento correspondente do glúon. Contribuições com $k \rightarrow -k$ estão sub-entendidas.

O cálculos das integrais em (4.1.4), feito no apêndice (B), resulta em

$$\tilde{p}^\mu \Pi_{\mu 0}^{AB} = 0, \quad (4.1.5)$$

$$\Pi_\mu^{\mu AB} = N \delta^{A,B} \frac{g^2 T^2}{3} \left[1 - \frac{6}{\pi^2} \delta^{A,0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \tau^2} \right], \quad (4.1.6)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{00}^{AB} &= \frac{2g^2 N \delta^{A,B} T^2}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 d\zeta \left[1 - \frac{2\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{\sigma^2 - 1}{(\sigma - \zeta)^2} \right] \\ &\times \left[\frac{\pi^2}{6} - \delta^{A,0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{[n^2 + \tau^2(1 - \zeta^2)]^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^2} \Pi_{\mu\nu}^{AB} &= -\frac{2g^2 N \delta^{A,B} T^2}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 d\zeta \left\{ \left[\frac{\sigma^2 - 1}{(\sigma - \zeta)^2} \frac{1 - \zeta^2}{2} - 1 \right] \right. \\ &\times \left[\frac{\pi^2}{6} - \delta^{A,0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{[n^2 + \tau^2(1 - \zeta^2)]^{3/2}} \right] \\ &\left. + \delta^{A,0} \frac{\sigma^2 - 1}{(\sigma - \zeta)^2} \frac{1}{2\tau^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(n - \sqrt{n^2 + \tau^2(1 - \zeta^2)} \right)^2 \left(n + 2\sqrt{n^2 + \tau^2(1 - \zeta^2)} \right)}{(n^2 + \tau^2(1 - \zeta^2))^{3/2}} \right\}, \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

onde introduzimos a grandeza $\tau^2 \equiv \tilde{p}^2 T^2 = (\theta_{\mu\nu} p^\nu)^2 T^2$.

Vamos agora analisar alguns casos limites. Quando $\theta p T \gg 1$, os termos proporcionais à $\delta_{A,0}$ se anulam e o resultado pode ser facilmente integrado, resultando em

$$\Pi_{\mu}^{\mu AB} = N \delta^{A,B} \frac{g^2 T^2}{3}, \quad (4.1.9)$$

$$\Pi_{00}^{AB} = N \delta^{A,B} \frac{g^2 T^2}{3} \left(1 - \frac{\sigma}{2} \log \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} \right) \quad (4.1.10)$$

e

$$\frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^2} \Pi_{\mu\nu}^{AB} = -N \delta^{A,B} \frac{g^2 T^2}{3} \frac{\sigma}{2} \left[\frac{1}{2} (\sigma^2 - 1) \log \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} - \sigma \right] \quad (4.1.11)$$

Por outro lado, quando $\theta p T \ll 1$, podemos extrair das somas em (4.1.6), (4.1.7) e (4.1.8) a contribuição dominante em τ^2 . Usando $\zeta(2) = \pi^2/6$ e $\zeta(4) = \pi^4/90$, obtemos

$$\Pi_{\mu}^{\mu AB} \approx N \delta^{A,B} \frac{g^2 T^2}{3} \left[1 - \delta^{A,0} + \frac{(\pi \tau)^2}{15} \delta^{A,0} \right], \quad (4.1.12)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{00}^{AB} &\approx N \delta^{A,B} \frac{g^2 T^2}{3} \left[\left(1 - \frac{\sigma}{2} \log \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} \right) (1 - \delta^{A,0}) \right. \\ &\left. + \frac{(\pi \tau)^2}{15} \left(2 - 3\sigma^2 + \frac{3}{2} \sigma (\sigma^2 - 1) \log \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} \right) \delta^{A,0} \right] \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^2} \Pi_{\mu\nu}^{AB} &= -N \delta^{A,B} \frac{g^2 T^2}{3} \left\{ \frac{\sigma}{2} \left[\frac{1}{2} (\sigma^2 - 1) \log \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} - \sigma \right] (1 - \delta^{A,0}) \right. \\ &\left. + \frac{(\pi \tau)^2}{15} \left[1 - \frac{15}{4} \sigma^2 + \frac{9}{4} \sigma^4 - \frac{9}{8} \sigma (\sigma^2 - 1)^2 \log \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} \right] \delta^{A,0} \right\}. \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Termos de ordem τ^4 , ou superior, podem ser calculados de maneira similar.

Um outro limite interessante é o limite estático $\sigma \rightarrow 0$. Neste caso, a integração sobre ζ pode ser feita em

(4.1.7) e (4.1.8), resultando em

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \Pi_{00}^{AB} = N \delta^{A,B} \frac{g^2 T^2}{3} \left[1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 + \tau^2)^2} \delta^{A,0} \right], \quad (4.1.15)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^2} \Pi_{\mu\nu}^{AB} = -2N \delta^{A,B} \frac{g^2 T^2}{\pi^2} \delta^{A,0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^2}{(n^2 + \tau^2)^2}. \quad (4.1.16)$$

As somas em (4.1.6), (4.1.15) e (4.1.16) podem ser efetuadas, resultando em [Gradshteyn e Ryzhik 1980]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \coth(\pi a) - \frac{1}{2a^2}, \quad (4.1.17)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3} \coth(\pi a) + \frac{\pi^2}{4a^2} \operatorname{csch}^2(\pi a) - \frac{1}{2a^4}. \quad (4.1.18)$$

O que resulta em

$$\Pi_{\mu}^{\mu AB} = N \delta^{A,B} \frac{g^2 T^2}{3} \left[1 - 3 \left(\frac{1}{\pi \tau} \coth(\pi \tau) - \frac{1}{(\pi \tau)^2} \right) \delta^{A,0} \right], \quad (4.1.19)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \Pi_{00}^{AB} = N \delta^{A,B} \frac{g^2 T^2}{3} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left[\frac{1}{\pi \tau} \coth(\pi \tau) - \operatorname{csch}^2(\pi \tau) \right] \delta^{A,0} \right\} \quad (4.1.20)$$

e

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^2} \Pi_{\mu\nu}^{AB} = -N \delta^{A,B} g^2 T^2 \frac{\operatorname{csch}^2(\pi \tau)}{2(\pi \tau)^2} \left[1 + (\pi \tau)^2 - \cosh(2\pi \tau) + \frac{\pi \tau}{2} \sinh(2\pi \tau) \right] \delta^{A,0}. \quad (4.1.21)$$

Usando os resultados acima, podemos agora obter o limite estático das equações (4.1.4a), (4.1.4b) e (4.1.4c) (mostramos no apêndice B que $\Pi_4^{AB} = 0$). Da equação (4.1.4a), teremos

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \Pi_1^{AB} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \Pi_{\mu}^{\mu AB} - \lim_{\sigma \rightarrow 0} \Pi_{00}^{AB} - \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^2} \Pi_{\mu\nu}^{AB}. \quad (4.1.22)$$

Usando (4.1.6), (4.1.15) e (4.1.16), obtemos

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \Pi_1^{AB} = 0. \quad (4.1.23)$$

O limite estático de Π_2 , na equação (4.1.4b), se comporta como σ^2 . Portanto, Π_2 contribui somente para Π_{00}^{AB} , na equação (4.1.3), mas não para Π_{ij}^{AB} ou Π_{0i}^{AB} ($i, j = 1, 2, 3$). Usando (4.1.4c), obtemos no limite estático de Π_3

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \Pi_3^{AB} &= -\frac{1}{|\vec{p}|^2 |\tilde{p}|^2} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left[\Pi_{\mu}^{\mu AB} - \Pi_{00}^{AB} - 2 \frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^2} \Pi_{\mu\nu}^{AB} \right] \\ &= -\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^2} \Pi_{\mu\nu}^{AB} \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

Finalmente, substituindo (4.1.21) em (4.1.24) e usando relações funcionais entre funções hiperbólicas, obtemos

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \Pi_3^{AB} = -N \delta^{A,B} \delta^{A,0} g^2 T^2 \left[\frac{1}{\sinh^2(\pi \tau)} - \frac{2}{(\pi \tau)^2} + \frac{\cosh(\pi \tau)}{\pi \tau \sinh(\pi \tau)} \right]. \quad (4.1.25)$$

Podemos também examinar $\Pi_{\mu\nu}^{AB}$ no limite de grandes comprimentos de onda $\sigma \rightarrow \infty$ e $\tau \rightarrow 0$. Neste caso,

vemos que as equações (4.1.6), (4.1.7) e (4.1.8) resultam

$$\begin{aligned}\Pi_{00}^{AB} &\longrightarrow 0, \\ \Pi_{\mu}^{AB\mu} &\longrightarrow N\delta^{A,B}\frac{g^2 T^2}{3}(1 - \delta^{A,0}), \\ \frac{\tilde{p}^{\mu}\tilde{p}^{\nu}}{\tilde{p}^2}\Pi_{\mu\nu}^{AB} &\longrightarrow N\delta^{A,B}\frac{g^2 T^2}{9}(1 - \delta^{A,0}).\end{aligned}\quad (4.1.26)$$

4.1.2 Blindagem elétrica e magnética

Substituindo (4.1.25) em (4.1.3) podemos obter as componentes Π_{ij}^{AB} . É interessante notar que na teoria de Yang-Mills usual, Π_{00}^{AB} , que fornece a massa elétrica, é não nulo mas Π_{ij}^{AB} se anula. Na versão não-comutativa da teoria, a equação (4.1.25) mostra que $\Pi_{ij}^{AB} \neq 0$ quando $A = 0$ (setor $U(1)$). Isto parece ser consistente com as interações magnéticas adicionais que foram introduzidas devido à não-comutatividade.

Para examinar os aspectos mais essenciais deste problema, vamos considerar o caso especial da teoria com simetria $U(1)$ (QED não-comutativa) e aplicar as técnicas apresentadas na seção 3.2 ao caso não comutativo. Em primeiro lugar, estendemos a parametrização (3.2.7) de modo a incluir os outros dois tensores transversais em (3.2.3), obtendo assim

$$\Pi^{\mu\nu} = G(P_T^{\mu\nu} - \tilde{P}_T^{\mu\nu}) + F P_L^{\mu\nu} + \tilde{G} \tilde{P}_T^{\mu\nu} + \tilde{F} \tilde{P}_L^{\mu\nu}. \quad (4.1.27)$$

Em seguida expressamos G , F , \tilde{G} e \tilde{F} em termos das componentes calculadas acima, obtendo

$$G = (1 - \sigma^2)\Pi_{00} - \Pi_{\mu}^{\mu} + \frac{\tilde{p}_{\mu}\tilde{p}_{\nu}}{\tilde{p}^2}\Pi^{\mu\nu} \quad (4.1.28a)$$

$$\tilde{G} = -\frac{\tilde{p}_{\mu}\tilde{p}_{\nu}}{\tilde{p}^2}\Pi^{\mu\nu} \quad (4.1.28b)$$

$$F = -(1 - \sigma^2)\Pi_{00} \quad (4.1.28c)$$

$$\tilde{F} = \frac{\tilde{p}_{\mu}\Pi^{0\mu}}{\tilde{p}^2 p_0}\sigma^2 = 0. \quad (4.1.28d)$$

(Note que as relações acima se reduzem ao limite comutativo em (3.2.8) quando fazemos $\tilde{G} \rightarrow G$ e eliminamos $\tilde{p}_{\mu}\tilde{p}_{\nu}/\tilde{p}^2\Pi^{\mu\nu}$.) As equações (3.2.12) são então resolvidas usando a seguinte parametrização para o propagador

$$\mathcal{D}^{\mu\nu} = (P_T^{\mu\nu} - \tilde{P}_T^{\mu\nu})x_T + P_L^{\mu\nu}x_L + \tilde{P}_T^{\mu\nu}\tilde{x}_T + \tilde{P}_L^{\mu\nu}\tilde{x}_L + P_5^{\mu\nu}x_5 + P_6^{\mu\nu}x_6 + P_7^{\mu\nu}x_7. \quad (4.1.29)$$

Um cálculo direto fornece

$$x_T = \frac{\xi}{p^2} - \frac{1}{p_0^2 - |\vec{p}|^2 + G} \quad (4.1.30a)$$

$$\tilde{x}_T = \frac{\xi}{p^2} - \frac{1}{p_0^2 - |\vec{p}|^2 + \tilde{G}} \quad (4.1.30b)$$

$$x_L = \frac{\xi}{p^2} - \frac{1}{p_0^2 - |\vec{p}|^2 + F} \quad (4.1.30c)$$

$$x_5 = \frac{\xi}{p^2} \quad (4.1.30d)$$

$$\tilde{x}_L = x_6 = x_7 = 0. \quad (4.1.30e)$$

Note que não há uma dependência de gauge nos pólos físicos do propagador.

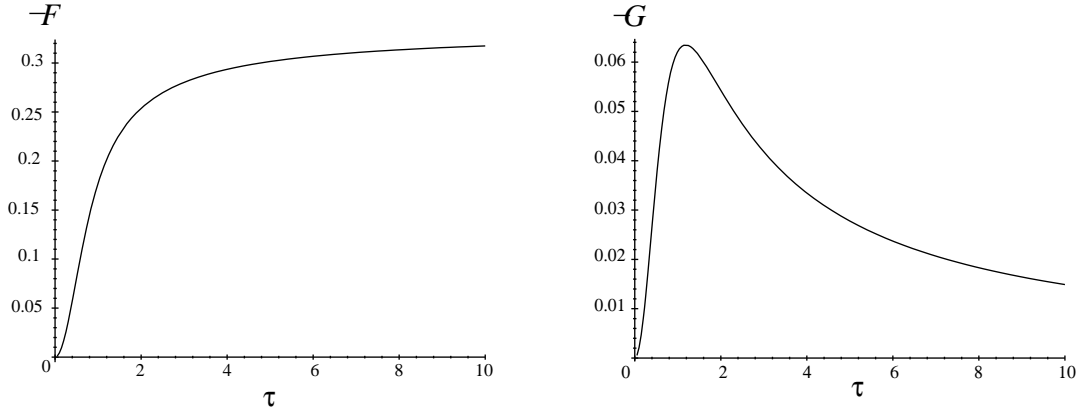
A equação (4.1.22), mostra que $G = 0$ no limite estático, para qualquer valor de θpT . Portanto, a massa

magnética usual segue sendo nula mesmo na versão não-comutativa da teoria. Por outro lado, F e \tilde{G} são, no mesmo limite,

$$F = -\frac{e^2 T^2}{3} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\coth \pi \tau}{\pi \tau} - \operatorname{cosech}^2 \pi \tau \right) \right] \quad (4.1.31a)$$

$$\tilde{G} = -\frac{e^2 T^2}{2} \left[\frac{\coth \pi \tau}{\pi \tau} + \operatorname{cosech}^2 \pi \tau - \frac{2}{(\pi \tau)^2} \right], \quad (4.1.31b)$$

onde usamos os resultados da seção anterior fazendo $N = 1$ e $g = e$. Na figura abaixo mostramos o gráficos de $-F$ e $-\tilde{G}$, os quais, em vista das relações (4.1.30a) podem ser interpretados como as massas de blindagem dos modos elétrico e “magnético”.



No limite comutativo, as duas massas tendem a zero, restando apenas a contribuição fermiônica para F , dada em (3.2.10). É interessante notar que no limite $\tau = \theta p T \rightarrow \infty$ a massa elétrica tende para o mesmo valor da massa de Debye em (3.2.10). Por outro lado, a blindagem magnética atinge um máximo para um valor específico do parâmetro da escala θT . Uma análise mais detalhada da física envolvida poderia ser feita levando em conta a versão não comutativa da teoria de resposta linear.

4.1.3 A função de três pontos

As figuras 4.3 e 4.4 mostram respectivamente as representações diagramáticas da função IPI de três pontos e das amplitudes correspondentes que contribuem para a equação (3.1.12). Vamos considerar primeiramente as possíveis estruturas geradas pelos fatores trigonométricos associados aos diagramas (a), (b) e (c) da figura 4.4. A expressão (2.3.37) mostra que estes diagramas envolvem o produto de três funções trigonométricas cujos argumentos são ($p_3 = -p_1 - p_2$)

$$\frac{1}{2}(-k - p_1) \times k = \frac{k \times p_1}{2}, \quad (4.1.32a)$$

$$\frac{1}{2}(-k - p_1 - p_2) \times (k + p_1) = \frac{k \times p_2}{2} + \frac{p_1 \times p_2}{2}, \quad (4.1.32b)$$

e

$$\frac{1}{2}(-k) \times (k - p_3) = \frac{k \times p_3}{2}. \quad (4.1.32c)$$

Usando uma relação trigonométrica elementar para o seno ou co-seno do segundo argumento acima, é possível então escrever o diagrama (a) da figura 4.4 como

$$\mathcal{A}_{\mu\nu\lambda}^{glABC} = \left[\sin\left(\frac{p_1 \times p_2}{2}\right) C_{\sin}^{glABC}(k) + \cos\left(\frac{p_1 \times p_2}{2}\right) C_{\cos}^{glABC}(k) \right] L_{\mu\nu\lambda}^{gl}. \quad (4.1.33)$$

Da mesma forma as amplitudes em (b) e (c) são

$$\mathcal{A}_{\mu\nu\lambda}^{ghABC} = \left[\sin\left(\frac{p_1 \times p_2}{2}\right) C_{\sin}^{ghABC}(k) + \cos\left(\frac{p_1 \times p_2}{2}\right) C_{\cos}^{ghABC}(k) \right] L_{\mu\nu\lambda}^{gh}. \quad (4.1.34)$$

As grandezas C_{\sin}^{glABC} , C_{\cos}^{glABC} , C_{\sin}^{ghABC} e C_{\cos}^{ghABC} envolvem um fator contendo as constantes de estrutura do grupo $U(N)$ e o produto de funções trigonométricas, seno ou co-seno, cujos argumentos são $(k \times p_i)/2$, $i = 1, 2, 3$. As estruturas de Lorentz $L_{\mu\nu\lambda}^{gl}$ e $L_{\mu\nu\lambda}^{gh}$ evoluem produtos escalares e tensoriais contendo p_i e k e são semelhantes aquelas da teoria comutativa.

Vamos agora considerar a região $p_i \ll k \sim T$ ($i = 1, 2, 3$) e usar as expansões do tipo 3.1.15 para expandir as estruturas de Lorentz. Como os diferentes termos da expansão serão funções pares ou ímpares da variável de integração k . Os coeficientes dos termos ímpares em k serão

$$\begin{aligned} A_{\sin}^{glABC} &= \frac{1}{2} \left(C_{\sin}^{glABC}(k) - C_{\sin}^{glABC}(-k) \right) \\ A_{\sin}^{ghABC} &= \frac{1}{2} \left(C_{\sin}^{ghABC}(k) - C_{\sin}^{ghABC}(-k) \right) \\ A_{\cos}^{glABC} &= \frac{1}{2} \left(C_{\cos}^{glABC}(k) - C_{\cos}^{glABC}(-k) \right) \\ A_{\cos}^{ghABC} &= \frac{1}{2} \left(C_{\cos}^{ghABC}(k) - C_{\cos}^{ghABC}(-k) \right) \end{aligned} \quad (4.1.35)$$

E os coeficientes dos termos pares serão

$$\begin{aligned} S_{\sin}^{glABC} &= \frac{1}{2} \left(C_{\sin}^{glABC}(k) + C_{\sin}^{glABC}(-k) \right) \\ S_{\sin}^{ghABC} &= \frac{1}{2} \left(C_{\sin}^{ghABC}(k) + C_{\sin}^{ghABC}(-k) \right) \\ S_{\cos}^{glABC} &= \frac{1}{2} \left(C_{\cos}^{glABC}(k) + C_{\cos}^{glABC}(-k) \right) \\ S_{\cos}^{ghABC} &= \frac{1}{2} \left(C_{\cos}^{ghABC}(k) + C_{\cos}^{ghABC}(-k) \right) \end{aligned} \quad (4.1.36)$$

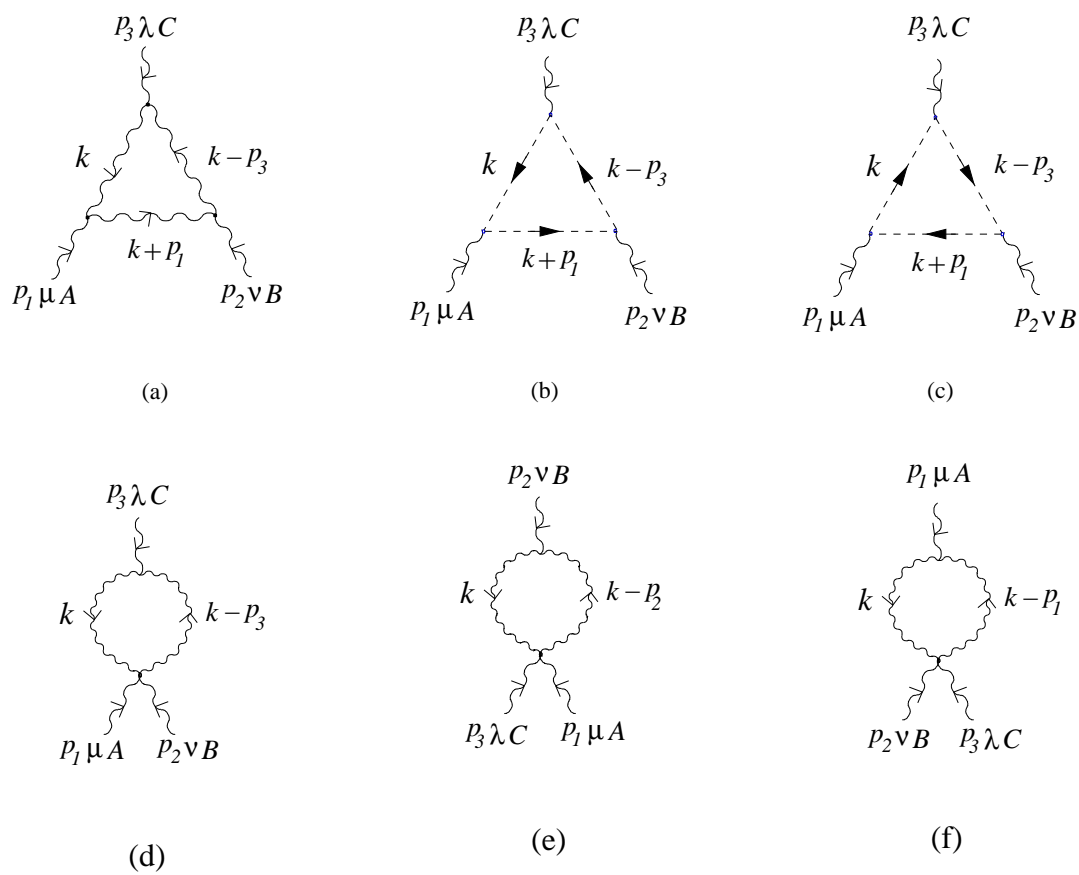


Figura 4.3: Diagramas que contribuem para a função de três pontos.

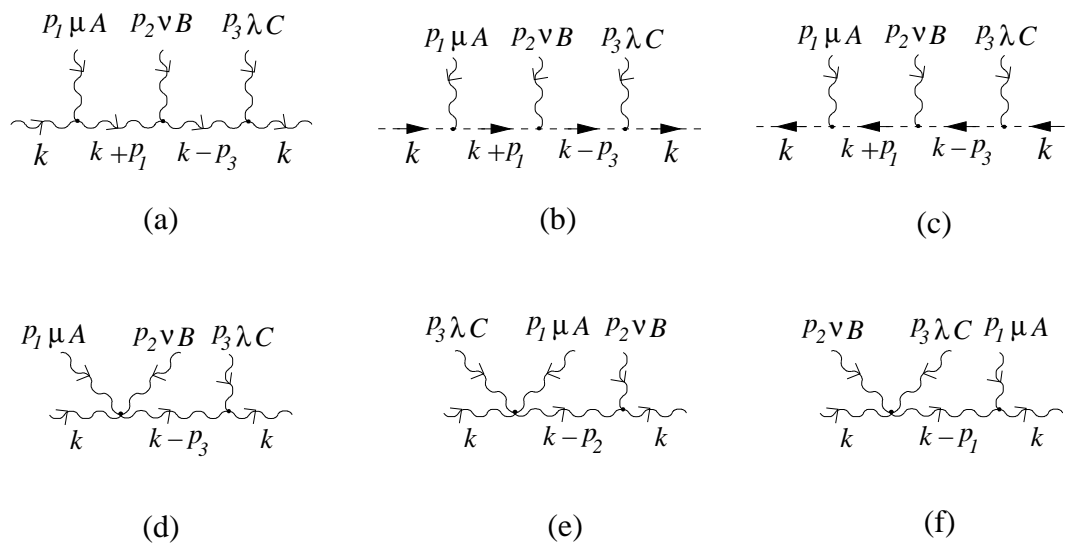


Figura 4.4: Amplitudes de espalhamento correspondentes aos diagramas da figura 4.3. A direção do momento do ghost é a mesma que a do glúon correspondente. Estão subentendidos diagramas obtidos por permutações dos vértices.

Introduzindo a notação

$$(F_A)_{BC} \equiv f_{BAC}, \quad (D_A)_{BC} \equiv d_{BAC} \quad (4.1.37)$$

e

$$c_p \equiv \cos(p \times k), \quad c_{pq} \equiv \cos(p \times q), \quad c_{\frac{1}{2}p} \equiv \cos\left(\frac{1}{2}p \times k\right), \quad s_{\frac{1}{2}p} \equiv \sin\left(\frac{1}{2}p \times k\right), \quad c_{\frac{1}{2}p \times q} \equiv \cos\left(\frac{1}{2}p \times q\right) \quad (4.1.38)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} A_{\sin}^{glABC} = & -\text{Tr} \left[F^A D^B D^C c_{\frac{1}{2}p_1} c_{\frac{1}{2}p_2} s_{\frac{1}{2}p_3} - F^A F^B F^C c_{\frac{1}{2}p_1} s_{\frac{1}{2}p_2} c_{\frac{1}{2}p_3} \right. \\ & \left. + F^C D^A D^B s_{\frac{1}{2}p_1} c_{\frac{1}{2}p_2} c_{\frac{1}{2}p_3} - F^B D^C D^A s_{\frac{1}{2}p_1} s_{\frac{1}{2}p_2} s_{\frac{1}{2}p_3} \right]. \end{aligned} \quad (4.1.39)$$

Usando as relações

$$\text{Tr} F^A F^B F^C = -\frac{N}{2} f^{ABC} = -\text{Tr} F^A D^B D^C, \quad (4.1.40)$$

e também a propriedade cíclica do traço, obtemos

$$\begin{aligned} A_{\sin}^{glABC} = & -\frac{N}{2} f^{ABC} \left[c_{\frac{1}{2}p_1} c_{\frac{1}{2}p_2} s_{\frac{1}{2}p_3} + c_{\frac{1}{2}p_1} s_{\frac{1}{2}p_2} c_{\frac{1}{2}p_3} \right. \\ & \left. + s_{\frac{1}{2}p_1} c_{\frac{1}{2}p_2} c_{\frac{1}{2}p_3} - s_{\frac{1}{2}p_1} s_{\frac{1}{2}p_2} s_{\frac{1}{2}p_3} \right] \\ = & -\frac{N}{2} f^{ABC} \sin\left(\frac{p_1 + p_2 + p_3}{2} \times k\right) = 0. \end{aligned} \quad (4.1.41)$$

O mesmo tipo de cálculo resulta em

$$A_{\sin}^{ghABC} = 0. \quad (4.1.42)$$

Portanto, não existirão contribuições ímpares que sejam proporcionais à $\sin[(p_1 \times p_2)/2]$.

Vejamos agora as contribuições A_{\cos}^{glABC} e A_{\cos}^{ghABC} . Neste caso, será necessário levar em conta as seguintes expressões

$$\begin{aligned} \text{Tr} D^A D^B D^C &= \frac{N}{2} \eta_{ABC} d^{ABC}; \quad \eta_{ABC} \equiv d_A d_B d_C - 4\delta_{A+B+C,0} \\ \text{Tr} F^A F^B D^C &= -\frac{N}{2} c_A c_B d_C d^{ABC}; \quad c_A \equiv 1 - \delta_{A,0}; \quad d_A \equiv 1 + \delta_{A,0} \end{aligned} \quad (4.1.43)$$

Um cálculo direto fornece

$$\begin{aligned} A_{\cos}^{glABC} = & -\text{Tr} \left[F^A F^B D^C c_{\frac{1}{2}p_1} c_{\frac{1}{2}p_2} s_{\frac{1}{2}p_3} + D^A F^B F^C s_{\frac{1}{2}p_1} c_{\frac{1}{2}p_2} c_{\frac{1}{2}p_3} \right. \\ & \left. + F^C F^A D^B c_{\frac{1}{2}p_1} s_{\frac{1}{2}p_2} c_{\frac{1}{2}p_3} + D^A D^B D^C s_{\frac{1}{2}p_1} s_{\frac{1}{2}p_2} s_{\frac{1}{2}p_3} \right] \end{aligned} \quad (4.1.44)$$

Ao contrário do coeficiente anti-simétrico de $\sin[(p_1 \times p_2)/2]$, A_{\cos}^{glABC} não é trivialmente nulo. Usando a ciclicidade do traço podemos escrever,

$$\begin{aligned} A_{\cos}^{glABC} = & \text{Tr} \left[-F^A F^B D^C c_{\frac{1}{2}p_1} c_{\frac{1}{2}p_2} s_{\frac{1}{2}p_3} + \frac{1}{3} D^A D^B D^C s_{\frac{1}{2}p_1} s_{\frac{1}{2}p_2} s_{\frac{1}{2}p_3} \right] \\ & + \text{cyclic permut.} \end{aligned} \quad (4.1.45)$$

A expansão das estruturas de Lorentz possui um termo denominado *super-dominante*, que na teoria comutativa poderia dar uma contribuição proporcional à T^3 , caso não se cancelasse por simetria. Essa estrutura é essencial-

mente a mesma para os três diagramas (a), (b) e (c) da 4.4 sendo proporcional à

$$\frac{k_\mu k_\nu k_\lambda}{k \cdot p_1 k \cdot p_3}. \quad (4.1.46)$$

Incluindo o fator de cor e o fator $\cos\left(\frac{p_1 \times p_2}{2}\right)$ teremos

$$\cos\left(\frac{p_1 \times p_2}{2}\right) A_{\cos}^{glABC}(p_1, p_2, p_3) k_\mu k_\nu k_\lambda \frac{1}{k \cdot p_1 k \cdot p_3}. \quad (4.1.47)$$

A única parte de (4.1.47) que muda, quando incluimos as permutações cíclicas, é o seu denominador. Usando conservação de momento

$$\frac{1}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} + \frac{1}{k \cdot p_1 k \cdot p_3} + \frac{1}{k \cdot p_2 k \cdot p_3} = 0. \quad (4.1.48)$$

Portanto esta contribuição é nula também no caso da teoria não-comutativa.

Aplicando o mesmo procedimento para as estruturas simétricas, obtivemos

$$\begin{aligned} S_{\cos}^{glABC} &= \text{Tr} \left[F^A F^B F^C c_{\frac{1}{2}p_1} c_{\frac{1}{2}p_2} c_{\frac{1}{2}p_3} + F^A D^B D^C c_{\frac{1}{2}p_1} s_{\frac{1}{2}p_2} s_{\frac{1}{2}p_3} \right. \\ &\quad \left. + F^B D^C D^A s_{\frac{1}{2}p_1} c_{\frac{1}{2}p_2} s_{\frac{1}{2}p_3} + F^C D^A D^B s_{\frac{1}{2}p_1} s_{\frac{1}{2}p_2} c_{\frac{1}{2}p_3} \right] \\ &= -\frac{N}{2} f^{ABC} \cos \left[\frac{1}{2} (p_1 + p_2 + p_3) \times k \right] = -\frac{N}{2} f^{ABC}, \end{aligned} \quad (4.1.49)$$

$$\begin{aligned} S_{\cos}^{ghABC} &= \text{Tr} \left[F^A F^B F^C \left(c_{\frac{1}{2}p_1}^2 c_{\frac{1}{2}p_3}^2 - c_{\frac{1}{2}p_1} c_{\frac{1}{2}p_3} s_{\frac{1}{2}p_1} s_{\frac{1}{2}p_3} \right) \right. \\ &\quad - F^A D^B D^C \left(c_{\frac{1}{2}p_1}^2 s_{\frac{1}{2}p_3}^2 + c_{\frac{1}{2}p_1} c_{\frac{1}{2}p_3} s_{\frac{1}{2}p_1} s_{\frac{1}{2}p_3} \right) \\ &\quad - F^B D^C D^A \left(s_{\frac{1}{2}p_1}^2 s_{\frac{1}{2}p_3}^2 - c_{\frac{1}{2}p_1} c_{\frac{1}{2}p_3} s_{\frac{1}{2}p_1} s_{\frac{1}{2}p_3} \right) \\ &\quad \left. - F^C D^A D^B \left(s_{\frac{1}{2}p_1}^2 c_{\frac{1}{2}p_3}^2 + c_{\frac{1}{2}p_1} c_{\frac{1}{2}p_3} s_{\frac{1}{2}p_1} s_{\frac{1}{2}p_3} \right) \right] \\ &= -\frac{N}{2} f^{ABC}, \end{aligned} \quad (4.1.50)$$

$$\begin{aligned} S_{\sin}^{glABC} &= \text{Tr} \left[-F^A F^B D^C c_{\frac{1}{2}p_1} s_{\frac{1}{2}p_2} s_{\frac{1}{2}p_3} - F^B F^C D^A s_{\frac{1}{2}p_1} s_{\frac{1}{2}p_2} c_{\frac{1}{2}p_3} \right. \\ &\quad \left. + F^C F^A D^B c_{\frac{1}{2}p_1} c_{\frac{1}{2}p_2} c_{\frac{1}{2}p_3} + D^A D^B D^C s_{\frac{1}{2}p_1} c_{\frac{1}{2}p_2} s_{\frac{1}{2}p_3} \right] \\ &= -\frac{N}{2} d^{ABC} \left[1 + c_{p_1} (\delta^{A,0} \delta^{B,0} \delta^{C,0} - \delta^{B,0} \delta^{C,0} - \delta^{A,0}) \right. \\ &\quad - c_{p_2} (\delta^{A,0} \delta^{B,0} \delta^{C,0} - \delta^{A,0} \delta^{C,0} - \delta^{B,0}) \\ &\quad \left. - c_{p_3} (\delta^{A,0} \delta^{B,0} \delta^{C,0} - \delta^{A,0} \delta^{B,0} - \delta^{C,0}) \right] \end{aligned} \quad (4.1.51)$$

e

$$\begin{aligned}
S_{\sin}^{ghABC} &= \frac{1}{4} \text{Tr} [F^A F^B D^C + F^A D^B F^C + D^A F^B F^C - D^A D^B D^C \\
&\quad + c_{p_1} (F^A F^B D^C + F^A D^B F^C - D^A F^B F^C + D^A D^B D^C) \\
&\quad + c_{p_2} (-F^A F^B D^C + F^A D^B F^C - D^A F^B F^C - D^A D^B D^C) \\
&\quad + c_{p_3} (-F^A F^B D^C + F^A D^B F^C + D^A F^B F^C + D^A D^B D^C)] \\
&= -\frac{N}{2} d^{ABC} [1 + c_{p_1} (\delta^{A,0} \delta^{B,0} \delta^{C,0} - \delta^{B,0} \delta^{C,0} - \delta^{A,0}) \\
&\quad - c_{p_2} (\delta^{A,0} \delta^{B,0} \delta^{C,0} - \delta^{A,0} \delta^{C,0} - \delta^{B,0}) \\
&\quad + c_{p_3} (\delta^{A,0} \delta^{B,0} \delta^{C,0} - \delta^{A,0} \delta^{B,0} - \delta^{C,0})]. \tag{4.1.52}
\end{aligned}$$

Substituindo as equações (4.1.49), (4.1.50), (4.1.51) e (4.1.52) em (4.1.33) e (4.1.34) obtemos a seguinte expressão para as amplitudes (a), (b) e (c) da figura 4.4

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\mu\nu\lambda}^{ABC} \Big|_{(a),(b),(c)} &= -\frac{N}{2} \left[f^{ABC} \cos\left(\frac{p_1 \times p_2}{2}\right) + d^{ABC} (1 + \mathcal{O}^{ABC}) \sin\left(\frac{p_1 \times p_2}{2}\right) \right] \\
&\quad \times \left[L_{\mu\nu\lambda}^{gl} + L_{\mu\nu\lambda}^{gh} \right], \tag{4.1.53}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^{ABC} &= \cos(p_1 \times k) (\delta^{A,0} \delta^{B,0} \delta^{C,0} - \delta^{B,0} \delta^{C,0} - \delta^{A,0}) \\
&\quad - \cos(p_2 \times k) (\delta^{A,0} \delta^{B,0} \delta^{C,0} - \delta^{A,0} \delta^{C,0} - \delta^{B,0}) \\
&\quad + \cos(p_3 \times k) (\delta^{A,0} \delta^{B,0} \delta^{C,0} - \delta^{A,0} \delta^{B,0} - \delta^{C,0}). \tag{4.1.54}
\end{aligned}$$

O comportamento oscilatório de \mathcal{O}^{ABC} contrasta com os outros termos em (4.1.53), especialmente no limite $\theta pT \gg 1$, quando sua contribuição para a integral é efetivamente nula. Adicionando as permutações cíclicas, e introduzindo o resultado explícito para a contribuição dominante do fator de Lorentz, teremos

$$\begin{aligned}
\lim_{(\theta pT) \rightarrow \infty} \mathcal{A}_{\mu\nu\lambda}^{ABC} \Big|_{(a),(b),(c)} &= -\frac{iN C^{ABC}(p_1, p_2)}{k \cdot p_3} \left[\frac{k_\mu k_\nu k_\lambda p_3^2}{(k \cdot p_1)^2} + 2 \frac{k_\mu k_\lambda p_{3\nu}}{k \cdot p_1} + (\mu \leftrightarrow \nu) \right] \\
&\quad + [(A, \mu, p_1), (C, \lambda, p_3)] \longleftrightarrow [(C, \lambda, p_3), (A, \mu, p_1)]. \tag{4.1.55}
\end{aligned}$$

A contribuição dos diagramas (d), (e) e (f) da figura 4.4 pode ser calculada de maneira similar, resultado em

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\mu\nu\lambda}^{ABC} \Big|_{(d),(e),(f)} &= -2iN d^{ABC} \sin\left(\frac{p_1 \times p_2}{2}\right) \cos(p_1 \times k) (\delta^{A,0} \delta^{B,0} \delta^{C,0} - \delta^{B,0} \delta^{C,0} - \delta^{A,0}) \\
&\quad \times \frac{k_\mu \eta_{\nu\lambda} + k_\nu \eta_{\mu\lambda} + 4k_\lambda \eta_{\mu\nu}}{k \cdot p_3} \\
&\quad + ([(\mu, p_1), (\nu, p_2)]) \longleftrightarrow ([(\nu, p_2), (\mu, p_1)]) \\
&\quad + \text{cyclic perm. of } (\mu, p_1), (\nu, p_2), (\lambda, p_3). \tag{4.1.56}
\end{aligned}$$

Vemos que (4.1.56) se anula no caso da teoria comutativa quando $\sin((p_1 \times p_2)/2) = 0$ e é efetivamente nulo no limite $\theta pT \gg 1$.

Obtivemos assim a forma geral das amplitudes mostradas na figura 4.4 bem como o limite especial $\theta pT \gg 1$ quando os resultados se simplificam consideravelmente. No caso geral, a expressão para a função de três pontos

é obtida em termos da amplitude, usando a expressão (4.1.56) de tal forma que

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{ABC}(p_1, p_2, p_3) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{2|\vec{k}|} N(|\vec{k}|) \mathcal{A}_{\mu\nu\lambda}^{ABC} \Big|_{k_0=|\vec{k}|}; \quad A, B, C = 0, 1, 2, \dots, N^2 - 1. \quad (4.1.57)$$

O cálculo completo das integrais em (4.1.57) é bastante complicado, até mesmo no caso da teoria comutativa. No entanto, precisamente como nos casos analisados anteriormente, nos quais a condição $p_i \ll k \sim T$ foi utilizada, verificamos que a identidade de Ward

$$p_3^\lambda \Gamma_{\mu\nu\lambda}^{ABC}(p_1, p_2, p_3) = ig C^{ABX}(p_1, p_2) (\Pi_{\mu\nu}^{XC}(p_1) - \Pi_{\nu\mu}^{XC}(p_2)) \quad (4.1.58)$$

é satisfeita para *quaisquer valores* de θpT . Ou seja, temos aqui exatamente o tipo de identidade que aparece em (2.1.69b) envolvendo os vértices da ação clássica (fazendo a substituição $f^{abc} \rightarrow C^{ABC}(p_1, p_2)$). No caso especial $\theta pT \gg 1$ a identidade é facilmente verificada usando (4.1.55) e a expressão para o tensor de polarização em (4.1.1).

Embora estes resultados sejam formalmente semelhantes ao que se obtém na QCD comutativa, podemos notar algumas importantes diferenças especialmente no que se refere à dependência com a temperatura. Ao contrário da QCD, as integrais em (4.1.57) não possuem simplesmente um comportamento T^2 , mas sim $T^2 f(\theta pT)$, onde p representa um dos momentos externos. Além disso, as equações (4.1.20) e (4.1.25), juntamente com a identidade de Ward (4.1.58), implicam que o *limite estático da função de três pontos* é não nulo. Este importante resultado contrasta com a QCD onde o tensor de polarização é a única função 1PI que possui limite estático não nulo na região $p_i \ll k \sim T$. Há portanto, uma possível contribuição extra para os efeitos de blindagem.

4.1.4 Ação efetiva

A identidade de Ward (4.1.58), satisfeita para valores quaisquer de θpT , nos leva naturalmente a considerar a possibilidade de uma descrição dos fenômenos na escala $p_i \ll k \sim T$ em termos de uma ação efetiva. Teríamos assim uma generalização da QCD comutativa onde a ação efetiva desempenha uma papel importante no programa de ressonância dos efeitos da escala de momento duro $k \sim T$. É interessante salientar que o setor $U(1)$ se desacopla no limite $\theta_{\mu\nu} \rightarrow 0$ e os resultados usuais da QCD comutativa são recuperados. Efeitos de mistura UV/IR, bem conhecidos na teoria a temperatura nula, não estão presentes, uma vez que a temperatura T fornece um corte ultravioleta para as amplitudes térmicas, tornando o limite $\theta_{\mu\nu} \rightarrow 0$ suave.

As principais propriedades verificadas pelo cálculo direto das amplitudes nas seções 4.1.1 e 4.1.3 podem ser sumarizadas como:

- (a) As amplitudes, no espaço de configuração, possuem não localidades da forma $(k \cdot \partial)^{-1}$.
- (b) Os integrandos em (3.1.12) serão sempre funções homogêneas em k multiplicadas por fatores trigonométricos.
- (c) As amplitudes satisfazem identidades de Ward como em (2.1.69) com $f^{abc} \rightarrow C^{ABC}(p_1, p_2)$.

Supondo que estas propriedades se generalizem para todas as ordens, e usando argumentos empregados em [Brandt et al. 1993], talvez seja possível determinar a ação efetiva térmica da versão não comutativa da QCD.

Um primeiro passo nessa direção foi dado na referência [Brandt et al. 2002] utilizando uma versão não-comutativa do formalismo de equação de transporte, descrito na seção 3.1.2, para região $\theta pT \gg 1$. Neste caso,

a integração da equação de transporte forneceu o seguinte resultado¹

$$\Gamma_{\text{therm}}^{\text{nc}}[A] = \frac{g^2 \pi^2 T^2}{12} N \int d^4x \int \frac{d\Omega}{(2\pi)^3} \left[\left(\frac{K^\alpha}{\hat{K} \cdot D} F^A_{\mu\alpha} \right) \star \left(\frac{K_\beta}{\hat{K} \cdot D} F^A_{\mu\beta} \right) \right], \quad (4.1.59)$$

onde $F_{\mu\nu}^A T^A = F_{\mu\nu}$ é dado por (2.3.29). Esta é a generalização mais natural que poderíamos esperar partindo da ação efetiva da teoria de Yang-Mills comutativa, dada em (3.1.36), e introduzindo o produto Grönenwold-Moyal. As derivadas funcionais desta ação concordam com os resultados obtidos para as funções 1PI de dois e três pontos, obtidas nas seções anteriores, no caso especial $\theta pT \gg 1$. Entretanto, levando em conta que a identidade de Ward em (4.1.58) foi verificada para qualquer θpT , é natural supor que exista uma ação efetiva mais geral. Uma parte de resposta à esta questão foi obtida em [Brandt et al. 2003] onde o limite estático foi considerado. Um aspecto central revelado por esta análise foi a necessidade de se encontrar a correta definição para a generalização não-comutativa do termo de “força” análogo à \mathcal{F}_α na equação (3.1.24).

Este problema foi investigado em [Brandt, Das e Frenkel 2002], onde propusemos uma equação de transporte para excitações térmicas possuindo carga e , e obtivemos, a partir dessa, a auto-energia e a função de três fótons, correspondentes às contribuições de “loops” fermiônicos carregados. Em seguida, consideramos a equação de transporte que descreve as contribuições de “loops” bosônicos neutros (fótons). Essa equação descreve excitações térmicas, não puntiformes, as quais interagem de uma maneira intrinsecamente não comutativa com os campos externos aplicados ao plasma. No limite de pequenos valores dos momentos externos, essa nova interação é caracteristicamente do tipo *quadrupolo*, possuindo também termos não locais. É interessante notar que a imagem convencional de excitações neutras descritas em termos de dipolos [Sheikh-Jabbari 1999], adquire um comportamento térmico efetivamente quadrupolar para escalas de altas temperaturas. Naturalmente, um importante teste para esta proposta de ação efetiva foi a concordância com os resultados apresentados nas seções anteriores, para θpT assumindo quaisquer valores².

Mais recentemente, esta proposta de equação de transporte foi derivada a partir do operador de Wigner na QED não-comutativa [Brandt, Das e Frenkel 2003]. Usando a equação de transporte assim obtida, foi possível verificar que as funções 1PI de dois e três pontos concordam com os resultados aqui obtidos, para qualquer θpT , no caso especial do grupo $U(1)$. Posteriormente, em [Das et al. 2003] o método de quantização com campo de fundo [Dewitt 1967, Honerkamp 1972] foi empregado para derivar a função de Wigner e foi obtida uma forma fechada para a função de distribuição $f(x, k)$ da QED não-comutativa. Em vista da similaridade formal existente entre a QED não-comutativa e a teoria de Yang-Mills, os desenvolvimentos descritos acima tiveram recentemente uma interessante aplicação no contexto da QCD comutativa, onde foi obtida a forma fechada para a função de distribuição [Frenkel e Taylor 2004].

¹Estamos adotando a notação e convenções compatíveis com o presente trabalho.

²Uma forma mais compacta dos resultados das seções anteriores, particularizados para o caso $N = 1$, está dada nas equações (13), (14) e (15) de [Brandt, Das e Frenkel 2002].

5 *Considerações finais e alguns possíveis desdobramentos*

Apresentamos aqui alguns temas relacionados a um conjunto específico de trabalhos que desenvolvemos ao longo dos últimos anos, com ênfase na linha de pesquisa sobre teorias de calibre a temperatura finita e sua generalização para espaços não-comutativos. Procuramos incluir trabalhos que possuem certas características comuns, mesmo que somente do ponto de vista formal. A inclusão de outros temas, como por exemplo os trabalhos sobre teorias de Chern-Simons, tornaria o texto longo e pouco coeso.

Alguns dos problemas aqui abordados podem vir a produzir certos desdobramentos. Por exemplo, o problema da blindagem magnética em teorias de Yang-Mills não-comutativas, levando em conta a teoria de resposta linear e possíveis contribuições da função de três pontos. O estudo de correções de ordem de dois loops e correções para a pressão também pode vir a ser investigado.

Um outro problema que temos procurado entender, mais recentemente, é sobre a possibilidade de que os efeitos de não-comutatividade possam influenciar também as interações gravitacionais. Uma possível motivação para este estudo são os efeitos produzidos pela introdução da escala θT , especialmente a modificação das relações de dispersão da teoria de Yang-Mills vista na seção 4.1.2. Uma questão imediata que podemos tentar responder é sobre qual seria a modificação introduzida nos modos transversais e de traço nulo discutidos na seção 3.4.

O primeiro passo para iniciar esta investigação consiste em saber qual seria a ação que descreve as interações com os campos do gráviton $h_{\mu\nu}$ quando a não-comutatividade é levada em conta. Este problema tem sido investigado recentemente em diversos trabalhos com diferentes níveis de profundidade¹. O tipo de abordagem que a primeira vista nos pareceu mais simples e familiar é a adotada por Moffat em [Moffat 2000, Moffat 2000] cuja a motivação principal era investigar as propriedades de renormalizabilidade da versão não-comutativa da gravitação (a conclusão destas investigações é que a teoria permanece não renormalizável). A não-comutatividade foi introduzida de maneira bastante simples, trocando os produtos usuais na expansão perturbativa da ação de Einstein-Hilbert, em (2.2.1), pelo produto de Gröenwold-Moyal em (2.3.22).

No entanto, não é evidente que essa maneira de introduzir a não-comutatividade seja compatível invariância de gauge da ação, uma vez que $\theta_{\mu\nu}$ não se transforma como um tensor. Na verdade, como o caráter não-tensorial de $\theta_{\mu\nu}$ viola até mesmo a simetria de Lorentz, certas generalizações do produto de Gröenwold-Moyal tem sido consideradas [Carlson, Carone e Zobin 2002, Das e Frenkel 2004]. No caso das interações gravitacionais, talvez seja possível introduzir um produto de Gröenwold-Moyal modificado onde a derivada usual é substituída por uma derivada co-variante e o parâmetro não comutativo por um tensor. Em 1 + 1 dimensões esta possibilidade foi explorada na referência [Barcelos-Neto 2002]. Uma característica comum destas generalizações é que o produto

¹Ao invés de citar um longa lista de referências, sugerimos uma busca em <http://www.slac.stanford.edu/spires/hep/>, usando palavras tais como "gravity" e "noncommutative".

de Grönenwold-Moyal perde sua simplicidade original e certas propriedades simples, tais como a associatividade e a ciclicidade, podem deixar de ser verdadeiras. Isto tornaria a realização de cálculos explícitos extremamente complicada, mesmo no caso de uma expansão perturbativa de campo gravitacional fraco.

Por outro lado, nossa experiência com as teorias de gauge formuladas a temperatura finita revela a existência de teorias efetivas cujas ações *não são* invariantes sob transformações globais mas exibem invariância sob as transformações locais. Um exemplo explícito é o funcional obtido em (3.3.16) que é invariante sob (2.2.18) mas é dependente do referencial do banho térmico. De fato, embora os termos individuais em (3.3.16) sejam dependentes de referencial² eles estão relacionados entre si por identidades de Ward. Ou seja, mesmo na presença do *não tensor* u_μ , o funcional ação efetiva é invariante sob transformações locais.

Vimos, na seção 2.2.1, como a ordem mais baixa da expansão ação de Einstein-Hilbert, dada em (2.2.21), é obtida utilizando apenas a invariância sob as transformações (2.2.18), e mencionamos que este procedimento poderia ser iterado de maneira a obter as ordens superiores. Essa simples técnica de livro texto³ talvez possa ser aplicada com o objetivo de construir a versão não comutativa da ação (3.3.22) que é o modelo mais simples envolvendo interações gravitacionais⁴. A maneira mais geral de parametrizar as diferentes ordens é

$$S_{\text{ncs}}^{(0)} = \frac{1}{2} \int d^4x \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi, \quad (5.0.1a)$$

$$S_{\text{ncs}}^{(1)} = \frac{1}{2} \int d^4x C^{(1)\mu\nu\mu_1\nu_1} h_{\mu_1\nu_1} \star \partial_\mu \phi \star \partial_\nu \phi, \quad (5.0.1b)$$

$$S_{\text{ncs}}^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^4x C^{(2)\mu\nu\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2} h_{\mu_1\nu_1} \star h_{\mu_2\nu_2} \star \partial_\mu \phi \star \partial_\nu \phi, \quad (5.0.1c)$$

$$\vdots \quad (5.0.1d)$$

$$S_{\text{ncs}}^{(n)} = \frac{1}{2} \int d^4x C^{(n)\mu\nu\mu_1\nu_1\dots\mu_n\nu_n} h_{\mu_1\nu_1} \star \dots \star h_{\mu_n\nu_n} \star \partial_\mu \phi \star \partial_\nu \phi. \quad (5.0.1e)$$

A ordem zero é simplesmente a teoria escalar livre, uma vez que o produto \star não modifica a parte quadrática. As estruturas $C^{(n)}$ envolvem combinações de produtos da métrica de Minkowski. Por exemplo, levando em conta a simetria de $h_{\mu_1\nu_1}$ podemos escrever

$$C^{(1)} = a \eta^{\mu\nu} \eta^{\mu_1\nu_1} + b (\eta^{\mu\mu_1} \eta^{\nu\nu_1} + \eta^{\mu\nu_1} \eta^{\nu\mu_1}). \quad (5.0.2)$$

Note que estruturas envolvendo derivadas estão excluídas por razões de dimensionalidade e localidade (a não localidade está restrita ao produto \star). É interessante notar que, independentemente do valor das constantes a e b , esta simetria implica em

$$S_{\text{ncs}}^{(1)} = \frac{1}{4} C^{(1)\mu\nu\mu_1\nu_1} \int d^4x h_{\mu_1\nu_1} \{ \partial_\mu \phi, \partial_\nu \phi \}_\star. \quad (5.0.3)$$

Portanto o vértice correspondente envolve somente o $\cos(p_1 \times p_2)$, onde p_1 e p_2 são os momentos associados às partículas escalares (ver equação (2.3.24)). Esta simetria da ação sob $\theta_{\mu\nu} \leftrightarrow -\theta_{\mu\nu}$ é possivelmente uma propriedade que deve ser mantida em ordens superiores.

Os coeficientes a e b podem agora ser determinados relacionando $S_{\text{ncs}}^{(1)}$ com $S_{\text{ncs}}^{(0)}$ via invariância sob as transformações locais. Nesta ordem, apenas o termo independente de $h_{\mu\nu}$ em (2.2.18) é relevante. Mas devemos

²O exemplo mais simples disso é o termo de ordem mais baixa em (3.3.15).

³Ver por exemplo a página 422 da referência [Zee 2003].

⁴Note que não podemos introduzir efeitos de não comutatividade fazendo simplesmente a substituição dos produtos de campos na ação (3.3.22) pelo produto Grönenwold-Moyal, pois isso certamente violaria a invariância local da ação.

também incluir a variação do campo escalar. Na teoria comutativa, teríamos simplesmente

$$\delta\phi = \omega^\mu \partial_\mu \phi. \quad (5.0.4)$$

A paridade de $S_{\text{ncs}}^{(0)} + S_{\text{ncs}}^{(1)}$ sob $\theta_{\mu\nu} \leftrightarrow -\theta_{\mu\nu}$ nos informa que a generalização natural de (5.0.4) deve ser

$$\delta\phi = \frac{1}{2} \{ \omega^\mu, \partial_\mu \phi \}_\star. \quad (5.0.5)$$

Da mesma forma, os termos em (2.2.18) que evoluem produtos devem ser substituídos pela metade do anti-comutador Moyal ⁵. Impondo a condição de invariância $\delta(S_{\text{ncs}}^{(0)} + S_{\text{ncs}}^{(1)}) = 0$, um cálculo direto fornece $a = 1/2$ e $b = -1/2$ em (5.0.2). Portanto, a ação até primeira ordem em $h_{\mu\nu}$ é

$$S_{\text{ncs}} = \frac{1}{2} \int d^4x \left(\eta^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h^\alpha{}_\alpha - h^{\mu\nu} \right) \frac{1}{2} \{ \partial_\mu \phi, \partial_\nu \phi \}_\star + \mathcal{O}(h^2). \quad (5.0.6)$$

Este resultado é de certa forma trivial, tendo em vista que o termo entre parêntesis é simplesmente a linearização de $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}$. Nesta ordem não ocorrem produtos \star envolvendo os próprios campos gravitacionais. No entanto, ele tem o mérito de mostrar a sistemática a ser empregada para ordens superiores ⁶.

Embora o conjunto de equações (5.0.1) não constitua a forma mais elegante de escrever uma ação, toda a informação relevante para a obtenção das regras de Feynman pode em princípio ser assim obtida. Na verdade, mesmo que tivéssemos uma forma fechada para a ação ⁷, a expansão em (5.0.1) seria o ponto de partida em cálculos perturbativos das funções de Green da teoria. Por exemplo, uma vez obtida a forma de $S_{\text{ncs}}^{(2)}$, poderemos calcular a versão não comutativa do tensor de polarização gravitacional cujos diagramas são idênticos aos mostrados na figura 3.4. Note que a contribuição para a função de um ponto (primeiro diagrama da figura 3.4) pode ser calculada usando somente a ação dada em (5.0.6). Porém, o resultado será o mesmo que na teoria comutativa, pois o momento externo é nulo neste caso.

Mesmo sem ter a forma explícita do tensor de polarização, podemos adiantar qual seria a sua estrutura geral. Vimos como a introdução de $\theta_{\mu\nu}$ na QED gerou duas novas estruturas transversais. Da maneira semelhante, no caso gravitacional, devemos levar em conta todas as possíveis estruturas tensoriais. Para referência futura, apresentamos na tabela C.2, do apêndice C, os possíveis tensores que devem ser incluídos de maneira a estender a base mostrada na tabela C.1. Além disso, exibimos também a forma geral dos novos modos transversais e de traço nulo.

⁵É interessante notar que na QED não-comutativa a transformação $\theta_{\mu\nu} \leftrightarrow -\theta_{\mu\nu}$ e $A_\mu \leftrightarrow -A_\mu$ possui uma interpretação em termos de *conjugação de carga* quando levamos em conta que o espectro das teorias não-comutativas contém *dipolos* cujo momento de dipolo é proporcional à $\theta_{ij} p^j$ [Sheikh-Jabbari 2000]. A equação (2.3.29) mostra que $F_{\mu\nu}$ muda de sinal sob estas transformações e a ação correspondente permanece invariante. Ao mesmo tempo, as transformações de gauge são consistentes com esta invariância da ação, como pode ser visto tomando, por exemplo, $N = 1$ em (2.3.35).

⁶O cálculo algébrico das ordens superiores pode em princípio ser implementado em um algoritmo de computação simbólica. O resultado deste cálculo nos dirá se este cenário é consistente.

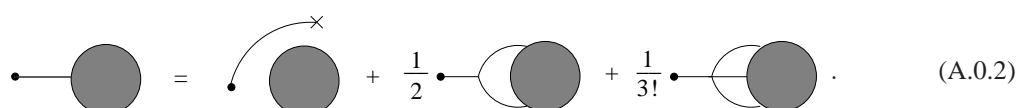
⁷Não está descartada a possibilidade de se encontrar um *ansatz* a partir da forma individual de cada termo.

APÊNDICE A – Equação de Dyson-Schwinger

Tomando $F_i[\phi] = f_i = \text{constante}$ vemos que a (2.1.77) se reduz a

$$\left(\frac{\delta S}{\delta \phi_i} \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] + J_i \right) Z[J] = 0. \quad (\text{A.0.1})$$

Esta é a importante *equação de Dyson-Schwinger* para o funcional gerador das funções de Green desconexas [Dyson 1949, Dyson 1949, Schwinger 1951, Schwinger 1951]. Na linguagem diagramática esta equação permite obter todos os diagramas de Feynman que contribuem para um dado processo, ordenando-os de acordo com o número de vértices (a ordem em teoria de perturbação). Por exemplo, em um cenário físico descrito por uma ação possuindo termos cúbicos e quárticos a versão diagramática da equação (A.0.1) é

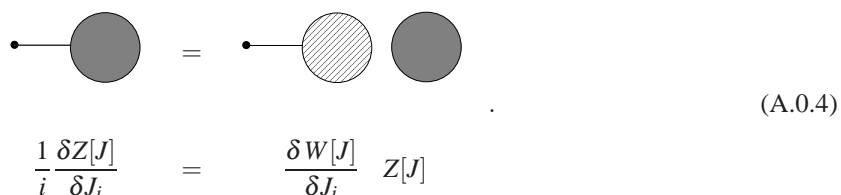


$$\bullet \text{---} \bigcirc = \bullet \text{---} \overset{\times}{\bigcirc} + \frac{1}{2} \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc + \frac{1}{3!} \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc. \quad (\text{A.0.2})$$

A interpretação física é clara. A amplitude de probabilidade de desaparecimento ou criação de uma partícula, representada pelo diagrama do lado direito, é obtida pela superposição das amplitudes de probabilidade dos processos de *absorção ou criação por uma fonte* (representada pela cruz) e de processos envolvendo cada uma das possíveis interações. O diagrama \bigcirc representa o funcional gerador

$$Z[J] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} G_{i_1, \dots, i_m} J_{i_1} \cdots J_{i_m}, \quad (\text{A.0.3})$$

onde G_{i_1, \dots, i_m} é a função de Green de m pontos. Portanto, qualquer função de Green desconexa pode ser obtida via diferenciação funcional da equação (A.0.2). Os diagramas até uma dada ordem perturbativa são obtidos pela iteração da equação. A representação diagramática é também útil para estabelecer a relação entre o funcional gerador $Z[J]$ e o funcional gerador $W[J]$ das *funções de Green conexas*. De fato, ao seguir uma linha para dentro de uma função desconexa, ocorrerá a fatoração entre uma parte que se conecta à linha e o restante, de tal forma que podemos escrever



$$\bullet \text{---} \bigcirc = \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \quad (\text{A.0.4})$$

$$\frac{1}{i} \frac{\delta Z[J]}{\delta J_i} = \frac{\delta W[J]}{\delta J_i} Z[J]$$

Ou seja,

$$Z[J] = e^{iW[J]}. \quad (\text{A.0.5})$$

Naturalmente, os processos fisicamente interessantes são aqueles descritos pelas funções de Green conexas G_{i_1, \dots, i_m}^c em termos das quais

$$W[J] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} G_{i_1, \dots, i_m}^c J_{i_1} \cdots J_{i_m}. \quad (\text{A.0.6})$$

Usando (A.0.1) e (A.0.4), a correspondente equação de Dyson-Schwinger para as funções conexas pode ser escrita como¹

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_i} \left[\frac{\delta W[J]}{\delta J} + \frac{\delta}{\delta J} \right] + J_i = 0. \quad (\text{A.0.7})$$

No caso de uma teoria com interações cúbica e quártica, esta equação possui a seguinte versão diagramática

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= \text{Diagram} \times + \frac{1}{2} \text{Diagram} + \frac{1}{2} \text{Diagram} \\ &+ \frac{1}{3!} \text{Diagram} + \frac{3}{3!} \text{Diagram} \\ &+ \frac{1}{3!} \text{Diagram} \end{aligned} \quad (\text{A.0.8})$$

Em geral, diagramas conexas, tais como os que aparecem no exemplo mostrado na equação (A.0.8), podem ainda ser expressos em termos dos *diagramas de Feynman 1PI* (“one particle irreducible”). De fato, seguindo uma linha qualquer de um diagrama conexo, teremos a seguinte situação descrita na figura abaixo

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= \text{Diagram} \times + \text{Diagram} + \text{Diagram} \\ &+ \frac{1}{2} \text{Diagram} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.0.9})$$

Ou seja, a linha que penetra o diagrama conexo pode encontrar uma fonte (denotada pela cruz) ou um digrama 1PI. O diagrama 1PI, por sua vez, pode estar conectado por uma, duas, etc, linhas a diagramas conexas. As funções de Green representadas pelos diagramas 1PI

$$\text{Diagram} \equiv \Gamma_{i,j,\dots,k} \quad (\text{A.0.10})$$

são definidas de tal forma que não podem ser desconectadas cortando-se somente uma de suas linhas internas.

¹Estamos usando a relação

$$\frac{1}{Z[J]} \frac{\delta}{\delta J} (Z[J] f[J]) = \left(\frac{\delta W[J]}{\delta J} + \frac{\delta}{\delta J} \right) f[J].$$

Além disso, ao contrário das funções de Green conexas, $\Gamma_{ij\dots k}$ não possui propagadores nas pernas externas. Os índices $i, j, \dots k$ estão diretamente associados aos vértices do diagrama 1PI. Introduzindo o “campo” ϕ através da relação

$$\phi_i \equiv \frac{\delta W[J]}{\delta J_i} = \text{---} \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} , \quad (\text{A.0.11})$$

podemos escrever a forma analítica de (A.0.9) como

$$\phi_i = \Delta_{ij} \left(J_j + \Gamma_j + \Pi_{jk} \phi_k + \frac{1}{2} \Gamma_{jkl} \phi_k \phi_l + \dots \right), \quad (\text{A.0.12})$$

onde Δ_{ij} é o propagador nu e Π_{jk} é a *auto-energia própria* (note que esta é uma *equação integral* para o campo ϕ). É conveniente também definir a grandeza $\Gamma_{ij} \equiv -\Delta_{ij}^{-1} + \Pi_{ij}$ de modo a reescrever (A.0.12) como

$$J_i + \Gamma_i + \Gamma_{ij} \phi_j + \frac{1}{2} \Gamma_{ijk} \phi_j \phi_k + \dots = 0. \quad (\text{A.0.13})$$

Introduzindo a *ação efetiva* (funcional gerador das funções de Green 1PI)

$$\Gamma[\phi] = \sum_{m=1} \frac{1}{m!} \Gamma_{i_1 \dots i_m} \overbrace{\phi_{i_1} \dots \phi_{i_m}}^m, \quad (\text{A.0.14})$$

podemos reescrever a relação (A.0.9) entre funções conexas e 1PI como

$$\text{---} \times \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} = 0 \quad (\text{A.0.15})$$

$$J_i + \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi_i} = 0$$

As relações (A.0.11) e (A.0.15) podem ser sumarizadas na *transformação de Legendre*

$$W[J] = \Gamma[\phi] + \phi_i J_i. \quad (\text{A.0.16})$$

Note que as condições $\delta W / \delta \phi = \delta \Gamma / \delta J = 0$ seguem da relação acima, usando (A.0.11) e (A.0.15).

A fim de obter as equações de Dyson-Schwinger para as funções 1PI, podemos agora utilizar a equação (A.0.11) eliminando derivadas em relação à J por derivadas em relação à ϕ de tal forma que

$$\frac{\delta}{\delta J_i} = \frac{\delta \phi_j}{\delta J_i} \frac{\delta}{\delta \phi_j} = \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_i \delta J_j} \frac{\delta}{\delta \phi_j}. \quad (\text{A.0.17})$$

O lado direito desta relação pode ser implicitamente expresso em termos de funções 1PI tomando a derivada funcional de (A.0.15) em relação à J_j

$$0 = \delta_{ij} + \frac{\delta}{\delta J_j} \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi_i} = \delta_{ij} + \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_j \delta J_k} \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_k \delta \phi_i}. \quad (\text{A.0.18})$$

O significado diagramático desta relação torna-se mais claro quando separamos a ação efetiva em uma parte livre e uma parte de interação

$$\Gamma[\phi] = -\frac{1}{2} \phi_i \Delta_{ij}^{-1} \phi_j + \Gamma_I[\phi] \quad (\text{A.0.19})$$

de tal forma que podemos extrair de (A.0.18) a seguinte relação

$$\begin{aligned}
 \text{---} \bigcirc \text{---} &= \text{---} \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + \dots \\
 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_i \delta J_j} &= \Delta_{ij} + \Delta_{ik} \frac{\delta^2 \Gamma_L[\phi]}{\delta \phi_k \delta \phi_l} \Delta_{lj} + \dots
 \end{aligned} \tag{A.0.20}$$

Assim, $\delta^2 W[J]/\delta J_i \delta J_j \equiv W''[J]$ é o propagador completo o qual soma todas as auto-energias próprias. Ou seja,

$$W''[J] = \frac{1}{\Delta^{-1} - \Gamma_L''[\phi]}. \tag{A.0.21}$$

Temos agora todas as relações necessárias para reescrever uma equação de Dyson-Schwinger diretamente para as funções de Green 1PI. Usando as equações (A.0.11) e (A.0.15) podemos agora reescrever a equação (A.0.7) trocando derivadas em relação a J por derivadas em relação a ϕ bem como utilizar (A.0.21). Fazendo isto, teremos

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi_i} = \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi_i} \left[\phi + W''[J] \frac{\delta}{\delta \phi} \right]. \tag{A.0.22}$$

Esta importante relação revela uma das razões para a denominação “ação efetiva” utilizada para $\Gamma[\phi]$. Vemos que se as derivadas funcionais forem desconsideradas, a ação efetiva se reduz à ação clássica. O papel das derivadas é gerar “loops”, ou seja, *correções quânticas* ou *flutuações térmicas*. É conveniente exibir a estrutura da equação (A.0.22) no caso mais concreto de uma teoria possuindo interações cúbicas e quárticas, como fizemos anteriormente. Neste caso, a equação (A.0.22) adquire a seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi_i} &= -\Delta_{ij}^{-1} \phi_j + \frac{1}{2} \gamma_{ijk} \phi_k \phi_j + \frac{1}{6} \gamma_{ijkl} \phi_l \phi_k \phi_j \\
 &+ \frac{1}{2} \gamma_{ijk} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_k \delta J_j} + \frac{1}{2} \gamma_{ijkl} \phi_l \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_k \delta J_j} \\
 &+ \frac{1}{6} \gamma_{ijkl} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_j \delta J_m} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_k \delta J_n} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_l \delta J_p} \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_m \delta \phi_n \delta \phi_p}.
 \end{aligned} \tag{A.0.23}$$

Na primeira linha da equação acima temos as contribuições da ação clássica (estas contribuições são de fato *puramente clássicas*, quando o campo ϕ é dado pelo primeiro termo do lado esquerdo da equação (A.0.12)). Também no caso da equação (A.0.23) é conveniente escrever a correspondente versão diagramática, que é dada por

$$\begin{aligned}
 \text{---} \bigcirc \text{---} &= - \text{---} \bigcirc \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + \frac{1}{3!} \text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc \text{---} \\
 &+ \frac{1}{2} \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + \frac{3}{3!} \text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc \text{---} \\
 &+ \frac{1}{3!} \text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \text{---}
 \end{aligned} \tag{A.0.24}$$

A linha cortada com “/”, no primeiro diagrama do lado direito da equação, representa o inverso do propagador (um “vértice” quadrático). As funções de Green próprias podem agora ser obtidas iterativamente tomando derivadas de (A.0.24) em relação à ϕ . Por exemplo, tomando a primeira derivada em relação à ϕ , teremos a seguinte equação de Dyson-Schwinger para a auto-energia

$$\begin{aligned}
 \text{---} \bullet \text{---} &= \text{---} / \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \bullet \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \bullet \text{---} \\
 &+ \frac{1}{2} \text{---} \bullet \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \bullet \text{---} \\
 &+ \frac{1}{3!} \text{---} \bullet \text{---} + \frac{1}{3!} \text{---} \bullet \text{---} .
 \end{aligned}
 \tag{A.0.25}$$

Na relação acima foi empregada a identidade

$$\frac{\delta}{\delta \phi_i} \text{---} \bullet \text{---} = \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \tag{A.0.26}$$

que pode ser obtida a partir de (A.0.20).

APÊNDICE B – Cálculo de funções de estrutura na teoria de Yang-Mills não-comutativa

Vamos calcular as integrais nas equações (4.1.4a)–(4.1.4d). Consideremos primeiramente

$$p_0 \tilde{p}^\mu \Pi_{\mu 0}^{AB} = \frac{2g^2 N \delta^{A,B}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{k}}{|\vec{k}|} N(|\vec{k}|) [1 - \delta^{A,0} \cos(k \cdot \tilde{p})] K \cdot \tilde{p} \left[\frac{p^2}{(K \cdot p)^2} - \frac{p_0}{K \cdot p} \right]. \quad (\text{B.0.1})$$

Usando um sistema de coordenadas formado pelos eixos $\frac{\tilde{p}}{|\tilde{p}|}$ e $\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ e levando em conta que o integrando é uma função ímpar de $\vec{K} \cdot \tilde{p}$, concluímos que

$$\Pi_4^{AB} = 0. \quad (\text{B.0.2})$$

Usando $G_\mu^\mu = 2$, o traço pode ser escrito como

$$\Pi_\mu^{\mu AB} = \frac{4g^2 N \delta^{A,B}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{k}}{|\vec{k}|} N(|\vec{k}|) [1 - \delta^{A,0} \cos(k \cdot \tilde{p})]. \quad (\text{B.0.3})$$

Usando as coordenadas mostradas na figura B.1,

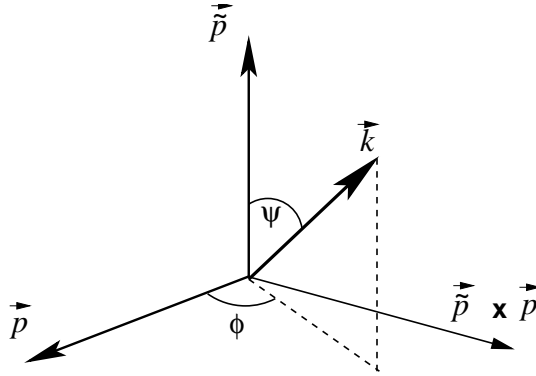


Figura B.1:

$$k \cdot \tilde{p} = -|\tilde{p}| \theta |\vec{k}| \cos(\psi), \quad (\text{B.0.4})$$

podemos escrever (com $u \equiv \frac{|\vec{k}|}{T}$)

$$\begin{aligned} \Pi_\mu^{\mu AB} &= \frac{4g^2 N \delta^{A,B} T^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{udu}{e^u - 1} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\zeta [1 - \delta^{A,0} \cos(\tau u \zeta)] \\ &= \frac{8g^2 N \delta^{A,B} T^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{udu}{e^u - 1} \left[1 - \delta^{A,0} \frac{\sin(\tau u)}{\tau u} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.0.5})$$

Expressando a distribuição de Bose em termos da série geométrica,

$$\frac{1}{e^u - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nu}, \quad \frac{u}{e^u - 1} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dn} e^{-nu}. \quad (\text{B.0.6})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{u du}{e^u - 1} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dn} \int_0^{\infty} du e^{-nu} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{B.0.7})$$

e, semelhantemente,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin(bu) du}{e^u - 1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \sin(bu) e^{-nu} du \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{2i} \left(e^{(ib-n)u} - e^{(-ib-n)u} \right) du = b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^2 + n^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.0.8})$$

obtemos de (B.0.5)

$$\Pi_{\mu}^{\mu AB} = \frac{8g^2 N \delta^{A,B} T^2}{(2\pi)^2} \left[\frac{\pi^2}{6} - \delta^{A,0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \tau^2} \right] \quad (\text{B.0.9})$$

Empregando as coordenadas mostradas na figura B.2,

$$\begin{aligned} \Pi_{00}^{AB} &= \frac{2g^2 N \delta^{A,B} T^2}{(2\pi)^3} \int_{-1}^1 d(\cos(\psi)) \int_0^{\infty} \frac{duu}{e^u - 1} \int_0^{2\pi} d\phi \left[1 - \frac{2\sigma}{\sigma - \cos(\psi)} + \frac{\sigma^2 - 1}{(\sigma - \cos(\psi))^2} \right] \\ &\times [1 - \delta^{A,0} \cos(\tau u \sin(\psi) \cos(\phi))]. \end{aligned} \quad (\text{B.0.10})$$

Usando [Gradshteyn e Ryzhik 1980]

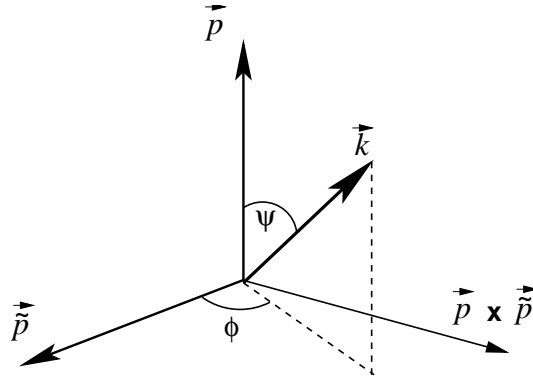


Figura B.2:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \cos(a \cos(\phi)) = 2\pi J_0(a), \quad (\text{B.0.11})$$

obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_{00}^{AB} &= \frac{2g^2 N \delta^{A,B} T^2}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 d(\cos(\psi)) \int_0^{\infty} \frac{duu}{e^u - 1} [1 - \delta^{A,0} J_0(\tau u \sin(\psi))] \\ &\times \left[1 - \frac{2\sigma}{\sigma - \cos(\psi)} + \frac{\sigma^2 - 1}{(\sigma - \cos(\psi))^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.0.12})$$

Usando a relação

$$\int_0^{\infty} \frac{duu}{e^u - 1} J_0(au) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dn} \int_0^{\infty} e^{-nu} J_0(au) \quad (\text{B.0.13})$$

podemos escrever [Gradshteyn e Ryzhik 1980]

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dn} \frac{1}{\sqrt{n^2 + a^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + a^2)^{3/2}} \approx \frac{\pi^2}{6} \left(1 - \frac{\pi^2 a^2}{10} \right). \quad (\text{B.0.14})$$

De acordo com as equações (B.0.7) e (B.0.14), (B.0.12) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \Pi_{00}^{AB} &= \frac{2g^2 N \delta^{A,B} T^2}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 d\zeta \left[1 - \frac{2\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{\sigma^2 - 1}{(\sigma - \zeta)^2} \right] \\ &\times \left[\frac{\pi^2}{6} - \delta^{A,0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{[n^2 + \tau^2(1 - \zeta^2)]^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.0.15})$$

Finalmente, vamos calcular $\frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^2} \Pi_{\mu\nu}^{AB}$. Usando (4.1.1) e as coordenadas mostradas na figura B.2, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^2} \Pi_{\mu\nu}^{AB} &= - \frac{2g^2 N \delta^{A,B} T^2}{(2\pi)^3} \int_{-1}^1 d(\cos(\psi)) \int_0^\infty \frac{duu}{e^u - 1} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &\times \left[\frac{\sigma^2 - 1}{(\sigma - \cos(\psi))^2} (\sin(\psi) \cos(\phi))^2 - 1 \right] \\ &\times [1 - \delta^{A,0} \cos(\tau u \sin(\psi) \cos(\phi))]. \end{aligned} \quad (\text{B.0.16})$$

Fazendo a integração em ϕ [Gradshteyn e Ryzhik 1980]

$$\int_0^{2\pi} d\phi \cos^2 \phi \cos(a \cos(\phi)) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi (1 + \cos(2\phi)) \cos(a \cos(\phi)) = \pi [J_0(a) - J_2(a)], \quad (\text{B.0.17})$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^2} \Pi_{\mu\nu}^{AB} &= - \frac{2g^2 N \delta^{A,B} T^2}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 d(\cos(\psi)) \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dn} \int_0^\infty e^{-nu} du \right) \\ &\times \left\{ \left[\frac{\sigma^2 - 1}{(\sigma - \cos(\psi))^2} \frac{\sin^2 \psi}{2} - 1 \right] [1 - J_0(\tau u \sin(\psi)) \delta^{A,0}] \right. \\ &\left. + \frac{\sigma^2 - 1}{(\sigma - \cos(\psi))^2} \frac{\sin^2 \psi}{2} J_2(\tau u \sin(\psi)) \delta^{A,0} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.0.18})$$

De maneira semelhante à (B.0.7) e (B.0.13), teremos no presente caso

$$\int_0^\infty \frac{duu}{e^u - 1} J_2(au) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dn} \int_0^\infty e^{-nu} J_2(au) \quad (\text{B.0.19})$$

que pode ser escrita como [Gradshteyn e Ryzhik 1980]

$$\begin{aligned} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dn} \int_0^\infty e^{-nu} J_2(au) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dn} \frac{a^{-2} (\sqrt{n^2 + a^2} - n)^2}{\sqrt{n^2 + a^2}} \\ &= \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n - \sqrt{n^2 + a^2})^2 (2\sqrt{n^2 + a^2} + n)}{(n^2 + a^2)^{3/2}} \\ &\approx \frac{3}{4} a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4 a^2}{120}. \end{aligned} \quad (\text{B.0.20})$$

Podemos agora reduzir $\frac{\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{\tilde{p}^2} \Pi_{\mu\nu}^{AB}$ a expressão envolvendo a integral em $\zeta = \cos(\psi)$ dada na equação (4.1.8).

APÊNDICE C – Estrutura geral do tensor de polarização gravitacional

A estrutura geral do tensor de polarização pode ser escrita como

$$\Pi_{\mu\nu\alpha\beta}(p, \theta, u) = \sum_{i=1}^{29} c_i(p, \theta, u) \mathcal{T}_{\mu\nu\alpha\beta}^i(p, \theta, u). \quad (\text{C.0.1})$$

As 14 primeiras estruturas são dadas na tabela C.1. As novas estruturas, mostradas na tabela C.2, foram obtidas a partir da tabela C.1 segundo a seguinte sistemática. Primeiramente consideramos o conjunto formado por $\mathcal{T}^6, \dots, \mathcal{T}^{14}$ trocando $k \rightarrow \tilde{k}$ e $u \rightarrow \tilde{k}$. Procedendo da mesma maneira com as estruturas T^8, T^{12}, T^{13} , cada uma delas vai gerar uma única estrutura. Já as seis restantes geram duas estruturas cada. Isso produz as 15 estruturas mostradas na tabela C.2, onde foram introduzidos fatores apropriados de modo a torna-las adimensionais.

A partir destas estruturas, é possível gerar cinco grandezas transversais e de traço nulo, mutuamente ortogonais, as quais podem ser expressas em termos das combinações lineares

$$T_I = \sum_{j=1}^{29} c_{Ij} T^j; \quad I = A, B, C, D, E. \quad (\text{C.0.2})$$

O trabalho hercúleo envolvido no cálculo das constantes de estrutura foi feito com o uso de computação simbólica. Os resultados são mostrados na tabela C.3 e estão expressos em termos dos parâmetros

$$r_c^2 = \frac{p_0^2}{|\vec{p}|^2} - 1 \quad \text{e} \quad r_{nc}^2 = |\vec{p}|^2 |\vec{p}|^2. \quad (\text{C.0.3})$$

Temos assim a generalização não-comutativa dos resultados da tabela 3.1.

Expressando as componentes transversais e de traço nulo do tensor de polarização na forma (omitindo índices)

$$\Pi_{TT} = c_A T_A + c_B T_B + c_C T_C + c_D T_D + c_E T_E \quad (\text{C.0.4})$$

e empregando (C.0.1) obtemos

$$c_A = 2c_1 + r_c^2 r_{nc}^2 \left(c_{24} - \frac{3c_{22}}{4} \right) \quad (\text{C.0.5a})$$

$$c_B = 2 \left(c_1 - \frac{c_2}{r_c^2} \right) + r_c^2 r_{nc}^2 c_{24} \quad (\text{C.0.5b})$$

$$c_C = 2 \left(c_1 - \frac{4c_2}{3r_c^2} + \frac{c_3}{3r_c^4} \right) - \frac{r_c^2 r_{nc}^2}{2} c_{22} \quad (\text{C.0.5c})$$

$$c_D = -r_c^2 r_{nc}^2 \left(c_{24} + \frac{3c_{22}}{8} \right) \quad (\text{C.0.5d})$$

$$c_E = r_c^2 r_{nc}^2 \frac{c_{22}}{4}. \quad (\text{C.0.5e})$$

Portanto, as cinco constantes de estrutura que determinam a parte transversal e de traço nulo do tensor de polarização são c_1, c_2, c_3, c_{22} a c_{24} .

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu\alpha\beta}^1 &= \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^2 &= \eta_{\mu\alpha}u_\nu u_\beta + \eta_{\mu\beta}u_\nu u_\alpha + \eta_{\nu\alpha}u_\mu u_\beta + \eta_{\nu\beta}u_\mu u_\alpha \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^3 &= u_\mu u_\nu u_\alpha u_\beta \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^4 &= \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^5 &= \eta_{\mu\nu}u_\alpha u_\beta + \eta_{\alpha\beta}u_\mu u_\nu \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^6 &= \frac{1}{p \cdot u} [(\eta_{\mu\alpha}p_\nu + \eta_{\nu\alpha}p_\mu)u_\beta + (\eta_{\mu\beta}p_\nu + \eta_{\nu\beta}p_\mu)u_\alpha + \\
&\quad + (\eta_{\mu\alpha}u_\nu + \eta_{\nu\alpha}u_\mu)p_\beta + (\eta_{\mu\beta}u_\nu + \eta_{\nu\beta}u_\mu)p_\alpha] \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^7 &= \frac{1}{p \cdot u} (p_\mu u_\nu u_\alpha u_\beta + p_\nu u_\mu u_\alpha u_\beta + p_\alpha u_\mu u_\nu u_\beta + p_\beta u_\mu u_\nu u_\alpha) \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^8 &= \frac{1}{p^2} (\eta_{\mu\alpha}p_\nu p_\beta + \eta_{\mu\beta}p_\nu p_\alpha + \eta_{\nu\alpha}p_\mu p_\beta + \eta_{\nu\beta}p_\mu p_\alpha) \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^9 &= \frac{1}{p^2} (p_\mu p_\nu u_\alpha u_\beta + p_\alpha p_\beta u_\mu u_\nu) \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^{10} &= \frac{1}{(p \cdot u)^2} [(p_\mu u_\nu + p_\nu u_\mu)(p_\alpha u_\beta + p_\beta u_\alpha)] \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^{11} &= \frac{1}{p^2 p \cdot u} (u_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta + u_\nu p_\mu p_\alpha p_\beta + u_\alpha p_\mu p_\nu p_\beta + u_\beta p_\mu p_\nu p_\alpha) \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^{12} &= \frac{1}{p^4} p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^{13} &= \frac{1}{p^2} (\eta_{\mu\nu}p_\alpha p_\beta + \eta_{\alpha\beta}p_\mu p_\nu) \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^{14} &= \frac{1}{p \cdot u} [\eta_{\mu\nu} (p_\alpha u_\beta + u_\alpha p_\beta) + \eta_{\alpha\beta} (p_\mu u_\nu + u_\mu p_\nu)]
\end{aligned}$$

Tabela C.1: Base tensorial para o tensor de polarização do gráviton no espaço-tempo comutativo. As quatorze estruturas independentes construídas com $\eta_{\mu\nu}$, p_μ e u_μ satisfazem a condição de simetria $T_{\mu\nu,\alpha\beta}^i = T_{\nu\mu,\alpha\beta}^i = T_{\mu\nu,\beta\alpha}^i = T_{\alpha\beta,\mu\nu}^i$.

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu\alpha\beta}^{15} &= p^2 (\eta_{\mu\alpha}\tilde{p}_\nu\tilde{p}_\beta + \eta_{\mu\beta}\tilde{p}_\nu\tilde{p}_\alpha + \eta_{\nu\alpha}\tilde{p}_\mu\tilde{p}_\beta + \eta_{\nu\beta}\tilde{p}_\mu\tilde{p}_\alpha) \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^{16} &= p^4 \tilde{p}_\mu\tilde{p}_\nu\tilde{p}_\alpha\tilde{p}_\beta \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^{17} &= p^2 (\eta_{\mu\nu}\tilde{p}_\alpha\tilde{p}_\beta + \eta_{\alpha\beta}\tilde{p}_\mu\tilde{p}_\nu) \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^{18} &= (\eta_{\mu\alpha}p_\nu + \eta_{\nu\alpha}p_\mu)\tilde{p}_\beta + (\eta_{\mu\beta}p_\nu + \eta_{\nu\beta}p_\mu)\tilde{p}_\alpha \\
&\quad + (\eta_{\mu\alpha}\tilde{p}_\nu + \eta_{\nu\alpha}\tilde{p}_\mu)p_\beta + (\eta_{\mu\beta}\tilde{p}_\nu + \eta_{\nu\beta}\tilde{p}_\mu)p_\alpha \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^{19} &= p \cdot u [(\eta_{\mu\alpha}\tilde{p}_\nu + \eta_{\nu\alpha}\tilde{p}_\mu)u_\beta + (\eta_{\mu\beta}\tilde{p}_\nu + \eta_{\nu\beta}\tilde{p}_\mu)u_\alpha \\
&\quad + (\eta_{\mu\alpha}u_\nu + \eta_{\nu\alpha}u_\mu)\tilde{p}_\beta + (\eta_{\mu\beta}u_\nu + \eta_{\nu\beta}u_\mu)\tilde{p}_\alpha] \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^{20} &= p^2 (p_\mu\tilde{p}_\nu\tilde{p}_\alpha\tilde{p}_\beta + p_\nu\tilde{p}_\mu\tilde{p}_\alpha\tilde{p}_\beta + p_\alpha\tilde{p}_\mu\tilde{p}_\nu\tilde{p}_\beta + p_\beta\tilde{p}_\mu\tilde{p}_\nu\tilde{p}_\alpha) \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^{21} &= p \cdot u (\tilde{p}_\mu u_\nu u_\alpha u_\beta + \tilde{p}_\nu u_\mu u_\alpha u_\beta + \tilde{p}_\alpha u_\mu u_\nu u_\beta + \tilde{p}_\beta u_\mu u_\nu u_\alpha) \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^{22} &= p_\mu p_\nu \tilde{p}_\alpha \tilde{p}_\beta + p_\alpha p_\beta \tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^{23} &= p^2 (\tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu u_\alpha u_\beta + \tilde{p}_\alpha \tilde{p}_\beta u_\mu u_\nu) \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^{24} &= (p_\mu \tilde{p}_\nu + p_\nu \tilde{p}_\mu)(p_\alpha \tilde{p}_\beta + p_\beta \tilde{p}_\alpha) \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^{25} &= (p \cdot u)^2 [(\tilde{p}_\mu u_\nu + \tilde{p}_\nu u_\mu)(\tilde{p}_\alpha u_\beta + \tilde{p}_\beta u_\alpha)] \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^{26} &= \frac{1}{p^2} (\tilde{p}_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta + \tilde{p}_\nu p_\mu p_\alpha p_\beta + \tilde{p}_\alpha p_\mu p_\nu p_\beta + \tilde{p}_\beta p_\mu p_\nu p_\alpha) \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^{27} &= (p \cdot u) p^2 (u_\mu \tilde{p}_\nu \tilde{p}_\alpha \tilde{p}_\beta + u_\nu \tilde{p}_\mu \tilde{p}_\alpha \tilde{p}_\beta + u_\alpha \tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu \tilde{p}_\beta + u_\beta \tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu \tilde{p}_\alpha) \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^{28} &= \eta_{\mu\nu} (p_\alpha \tilde{p}_\beta + \tilde{p}_\alpha p_\beta) + \eta_{\alpha\beta} (p_\mu \tilde{p}_\nu + \tilde{p}_\mu p_\nu) \\
T_{\mu\nu\alpha\beta}^{29} &= p \cdot u [\eta_{\mu\nu} (\tilde{p}_\alpha u_\beta + u_\alpha \tilde{p}_\beta) + \eta_{\alpha\beta} (\tilde{p}_\mu u_\nu + u_\mu \tilde{p}_\nu)]
\end{aligned}$$

Tabela C.2: Quinze estruturas independentes construídas com $\eta_{\mu\nu}$, p_μ , u_μ e $\tilde{p}_\mu \equiv \theta_{\mu\nu} p^\nu$ e satisfazendo a condição de simetria $T_{\mu\nu,\alpha\beta}^i = T_{\nu\mu,\alpha\beta}^i = T_{\mu\nu,\beta\alpha}^i = T_{\alpha\beta,\mu\nu}^i$.

i	c_{A_i}	c_{B_i}	c_{C_i}	c_{D_i}	c_{E_i}
1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	$\frac{r_c^2}{2}$	$-\frac{r_c^2}{2}$	0	0	$\frac{3r_c^2}{2}$
3	$\frac{r_c^4}{2}$	$-2r_c^4$	$\frac{3r_c^4}{2}$	$-\frac{3r_c^4}{2}$	$\frac{9r_c^4}{4}$
4	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{13}{4}$
5	$-\frac{r_c^2}{2}$	0	$\frac{r_c^2}{2}$	$-\frac{r_c^2}{2}$	$-\frac{5r_c^2}{4}$
6	$-\frac{r_c^2}{2} - \frac{1}{2}$	$\frac{r_c^2}{2} + \frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{3r_c^2}{2} - \frac{3}{2}$
7	$-\frac{r_c^2(r_c^2+1)}{2}$	$2r_c^2(r_c^2+1)$	$-\frac{3r_c^2(r_c^2+1)}{2}$	$\frac{3r_c^2(r_c^2+1)}{2}$	$-\frac{9r_c^2(r_c^2+1)}{4}$
8	$\frac{r_c^2}{2}$	$-\frac{r_c^2}{2} - \frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3r_c^2}{2} - \frac{3}{4}$
9	$\frac{(r_c^2+2)r_c^2}{2}$	$-2r_c^2(r_c^2+1)$	$\frac{(3r_c^2+2)r_c^2}{2}$	$-\frac{(3r_c^2+2)r_c^2}{2}$	$\frac{(9r_c^2+14)r_c^2}{4}$
10	$\frac{r_c^2(r_c^2+1)}{2}$	$-\frac{(r_c^2+1)(4r_c^2+3)}{2}$	$\frac{3(r_c^2+1)^2}{2}$	$-\frac{3(r_c^2+1)^2}{2}$	$\frac{(3r_c^2+3)(3r_c^2+1)}{4}$
11	$-\frac{r_c^2(r_c^2+1)}{2}$	$(r_c^2+1)(2r_c^2+1)$	$-\frac{(3r_c^2+2)(r_c^2+1)}{2}$	$\frac{(3r_c^2+2)(r_c^2+1)}{2}$	$-\frac{(9r_c^2+2)(r_c^2+1)}{4}$
12	$\frac{r_c^4}{2}$	$-2r_c^2(r_c^2+1)$	$\frac{(3r_c^2+2)^2}{6}$	$-\frac{(3r_c^2+4)r_c^2}{2}$	$\frac{(9r_c^2+4)r_c^2}{4}$
13	$-\frac{r_c^2}{2}$	0	$\frac{r_c^2}{2} + \frac{1}{3}$	$-\frac{r_c^2}{2}$	$-\frac{5r_c^2}{4} + 2$
14	$\frac{r_c^2}{2} + \frac{1}{2}$	0	$-\frac{r_c^2}{2} - \frac{1}{2}$	$\frac{r_c^2}{2} + \frac{1}{2}$	$\frac{5r_c^2}{4} + \frac{5}{4}$
15	0	0	0	$\frac{1}{r_{nc}^2 r_c^2}$	$\frac{3}{2r_{nc}^2 r_c^2}$
16	0	0	0	$\frac{4}{r_{nc}^4 r_c^4}$	$-\frac{6}{r_{nc}^4 r_c^4}$
17	0	0	0	0	$-\frac{4}{r_{nc}^2 r_c^2}$
22	0	0	0	0	$\frac{4}{r_{nc}^2 r_c^2}$
24	0	0	0	$-\frac{1}{r_{nc}^2 r_c^2}$	$-\frac{3}{2r_{nc}^2 r_c^2}$

Tabela C.3: Componentes dos cinco tensores transversais e de traço nulo na base dos tensores exibidos nas tabelas C.1 e C.2.

Referências Bibliográficas

- [Almeida, Brandt e Frenkel 1994]ALMEIDA, A. P. de; BRANDT, F. T.; FRENKEL, J. Thermal matter and radiation in a gravitational field. *Phys. Rev.*, D49, p. 4196–4208, 1994.
- [Arnold, Moore e Yaffe 2003]ARNOLD, P.; MOORE, G. D.; YAFFE, L. G. Effective kinetic theory for high temperature gauge theories. *JHEP*, v. 01, p. 030, 2003.
- [Barcelos-Neto 2002]BARCELOS-NETO, J. Noncommutative fields in curved space. 2002.
- [Barton 1990]BARTON, G. On the finite temperature Quantum Electrodynamics of free electrons and photons. *Ann. Phys.*, v. 200, p. 271, 1990.
- [Becchi, Rouet e Stora 1975]BECCHI, C.; ROUET, A.; STORA, R. Renormalization of the Abelian Higgs-Kibble model. *Commun. Math. Phys.*, v. 42, p. 127–162, 1975.
- [Bloch 1958]BLOCH, C. Sur la détermination de l'état fondamental d'un système de particules. *Nucl. Phys.*, v. 7, p. 451, 1958.
- [Bonora e Salizzoni 2001]BONORA, L.; SALIZZONI, M. Renormalization of noncommutative $U(N)$ gauge theories. *Phys. Lett.*, B504, p. 80–88, 2001.
- [Born e Infeld 1934]BORN, M.; INFELD, L. Foundations of the new field theory. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A144, p. 425–451, 1934.
- [Brandt, Cuadros-Melgar e Machado 2003]BRANDT, F. T.; CUADROS-MELGAR, B.; MACHADO, F. R. Thermal one- and two-graviton Green's functions in the temporal gauge. *Phys. Rev.*, D67, p. 125006, 2003.
- [Brandt, Das e Frenkel 2000]BRANDT, F. T.; DAS, A.; FRENKEL, J. Behavior of the thermal gluon self-energy in the Coulomb gauge. *Phys. Rev.*, D62, p. 127702, 2000.
- [Brandt, Das e Frenkel 2002]BRANDT, F. T.; DAS, A.; FRENKEL, J. Classical transport equation in noncommutative QED at high temperature. *Phys. Rev.*, D66, p. 105012, 2002.
- [Brandt, Das e Frenkel 2003]BRANDT, F. T.; DAS, A.; FRENKEL, J. Transport equation for the photon Wigner operator in non-commutative QED. *A ser publicado na Phys. Rev. D*, 2003.
- [Brandt et al. 2002]BRANDT, F. T. et al. Transport equation and hard thermal loops in noncommutative Yang-Mills theory. *Phys. Rev.*, D66, p. 045011, 2002.
- [Brandt et al. 2003]BRANDT, F. T. et al. The static effective action for non-commutative QED at high temperature. *Phys. Rev.*, D67, p. 105010, 2003.
- [Brandt e Frenkel 1986]BRANDT, F. T.; FRENKEL, J. Infrared behavior of three and four gluon vertices in Yang-Mills theory. *Phys. Rev.*, D33, p. 464, 1986.
- [Brandt e Frenkel 1993]BRANDT, F. T.; FRENKEL, J. The graviton selfenergy in thermal quantum gravity. *Phys. Rev.*, D48, p. 4940–4945, 1993.
- [Brandt e Frenkel 1993]BRANDT, F. T.; FRENKEL, J. The three graviton vertex function in thermal quantum gravity. *Phys. Rev.*, D47, p. 4688–4697, 1993.
- [Brandt e Frenkel 1997]BRANDT, F. T.; FRENKEL, J. Generalized forward scattering amplitudes in QCD at high temperature. *Phys. Rev.*, D56, p. 2453–2456, 1997.
- [Brandt e Frenkel 1998]BRANDT, F. T.; FRENKEL, J. The structure of the graviton self-energy at finite temperature. *Phys. Rev.*, D58, p. 085012, 1998.

- [Brandt e Frenkel 1999]BRANDT, F. T.; FRENKEL, J. General structure of the graviton self-energy. *Phys. Rev.*, D59, p. 127701, 1999.
- [Brandt, Frenkel e Machado 2000]BRANDT, F. T.; FRENKEL, J.; MACHADO, F. R. Finite temperature gluon self-energy in a class of general temporal gauges. *Phys. Rev.*, D61, p. 125014, 2000.
- [Brandt, Frenkel e Machado 2000]BRANDT, F. T.; FRENKEL, J.; MACHADO, F. R. Thermal forward scattering amplitudes in temporal gauges. *Published in Osaka 2000, High Energy Physics, vol. 2 1353-1355*, p. 4, 2000.
- [Brandt, Frenkel e McKeon 2002]BRANDT, F. T.; FRENKEL, J.; MCKEON, D. G. C. Hard thermal effects in noncommutative U(N) Yang-Mills theory. *Phys. Rev.*, D65, p. 125029, 2002.
- [Brandt, Frenkel e Taylor 1992]BRANDT, F. T.; FRENKEL, J.; TAYLOR, J. C. Metric dependence of partition function at high temperature. *Nucl. Phys.*, B374, p. 169–182, 1992.
- [Brandt, Frenkel e Taylor 1993]BRANDT, F. T.; FRENKEL, J.; TAYLOR, J. C. The energy of the high temperature quark-gluon plasma. *Nucl. Phys.*, B410, p. 3–22, 1993.
- [Brandt, Frenkel e Taylor 1995]BRANDT, F. T.; FRENKEL, J.; TAYLOR, J. C. High temperature QCD and the classical Boltzmann equation in curved space-time. *Nucl. Phys.*, B437, p. 433–446, 1995.
- [Brandt et al. 1993]BRANDT, F. T. et al. Effective actions for Braaten-Pisarski resummation. *Can. J. Phys.*, v. 71, p. 219–226, 1993.
- [Brandt, Medina e Machado 2002]BRANDT, F. T.; MEDINA, R.; MACHADO, F. R. The open superstring 5-point amplitude revisited. *JHEP*, v. 07, p. 071, 2002.
- [Burgess 2003]BURGESS, C. P. Quantum gravity in everyday life: General relativity as an effective field theory. 2003.
- [Capper 1980]CAPPER, D. M. A general gauge graviton loop calculation. *J. Phys.*, A13, p. 199, 1980.
- [Capper, Leibbrandt e Medrano 1973]CAPPER, D. M.; LEIBBRANDT, G.; MEDRANO, M. R. Calculation of the graviton self-energy using dimensional regularization. *Phys. Rev.*, D8, p. 4320–4331, 1973.
- [Carlson, Carone e Zobin 2002]CARLSON, C. E.; CARONE, C. D.; ZOBIN, N. Noncommutative gauge theory without Lorentz violation. *Phys. Rev.*, D66, p. 075001, 2002.
- [Chern e Simons 1974]CHERN, S.-S.; SIMONS, J. Characteristic forms and geometric invariants. *Annals Math.*, v. 99, p. 48–69, 1974.
- [Connes 1985]CONNES, A. Introduction to noncommutative differential geometry. *Workshop Bonn 1984 (Bonn, 1984), 3-16, Lecture Notes in Math., 1111, Springer, Berlin-New York*, 1985.
- [Das e Frenkel 2004]DAS, A.; FRENKEL, J. Kontsevich product and gauge invariance. *Phys. Rev.*, D69, p. 065017, 2004.
- [Das et al. 2003]DAS, A. et al. Background field quantization and noncommutative QED. *Phys. Lett.*, B577, p. 76–82, 2003.
- [Deser 2000]DESER, S. Infinities in quantum gravities. *Annalen Phys.*, v. 9, p. 299–307, 2000.
- [Deser, Jackiw e Templeton 1982]DESER, S.; JACKIW, R.; TEMPLETON, S. Topologically massive gauge theories. *Ann. Phys.*, v. 140, p. 372–411, 1982.
- [Deser e Nieuwenhuizen 1974]DESER, S.; NIEUWENHUIZEN, P. van. Nonrenormalizability of the quantized Dirac-Einstein system. *Phys. Rev.*, D10, p. 411, 1974.
- [Deser, Tsao e Nieuwenhuizen 1974]DESER, S.; TSAO, H.-S.; NIEUWENHUIZEN, P. van. One loop divergences of the Einstein Yang-Mills system. *Phys. Rev.*, D10, p. 3337, 1974.
- [Dewitt 1967]DEWITT, B. S. Quantum theory of gravity. ii. the manifestly covariant theory. *Phys. Rev.*, v. 162, p. 1195–1239, 1967.

- [Doplicher, Fredenhagen e Roberts 1994]DOPLICHER, S.; FREDENHAGEN, K.; ROBERTS, J. E. Space-time quantization induced by classical gravity. *Phys. Lett.*, B331, p. 39–44, 1994.
- [Doplicher, Fredenhagen e Roberts 1995]DOPLICHER, S.; FREDENHAGEN, K.; ROBERTS, J. E. The quantum structure of space-time at the Planck scale and quantum fields. *Commun. Math. Phys.*, v. 172, p. 187–220, 1995.
- [Dyson 1949]DYSON, F. J. The radiation theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman. *Phys. Rev.*, v. 75, p. 486–502, 1949.
- [Dyson 1949]DYSON, F. J. The S matrix in Quantum Electrodynamics. *Phys. Rev.*, v. 75, p. 1736–1755, 1949.
- [Faddeev e Popov 1967]FADDEEV, L. D.; POPOV, V. N. Feynman diagrams for the Yang-Mills field. *Phys. Lett.*, B25, p. 29–30, 1967.
- [Fetter e Walecka 1971]FETTER, A. L.; WALECKA, J. D. *Quantum theory of many-particle systems*. New York: McGraw-Hill, 1971.
- [Feynman 1948]FEYNMAN, R. P. Relativistic cutoff for quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, v. 74, p. 1430–1438, 1948.
- [Feynman 1963]FEYNMAN, R. P. Quantum theory of gravitation. *Acta Phys. Polon.*, v. 24, p. 697–722, 1963.
- [Fock 1926]FOCK, V. On the invariant form of the wave equations and the equations of motion for a charged point mass. *Z. Phys.*, v. 39, p. 226–232, 1926.
- [Fradkin e Tyutin 1970]FRADKIN, E. S.; TYUTIN, I. V. S matrix for Yang-Mills and gravitational fields. *Phys. Rev.*, D2, p. 2841–2857, 1970.
- [Frenkel e Taylor 1990]FRENKEL, J.; TAYLOR, J. C. High temperature limit of thermal QCD. *Nucl. Phys.*, B334, p. 199, 1990.
- [Frenkel e Taylor 1992]FRENKEL, J.; TAYLOR, J. C. Hard thermal QCD, forward scattering and effective actions. *Nucl. Phys.*, B374, p. 156–168, 1992.
- [Frenkel e Taylor 2004]FRENKEL, J.; TAYLOR, J. C. Distribution functions for hard thermal particles in QCD. *Nucl. Phys.*, B685, p. 393–402, 2004.
- [Girotti 2003]GIROTTI, H. O. Noncommutative quantum field theories. 2003.
- [Goldberg 1958]GOLDBERG, J. N. Conservation laws in general relativity. *Phys. Rev.*, v. 111, p. 315–320, 1958.
- [Gomes 2001]GOMES, M. Renormalization in noncommutative field theory. 2001. Prepared for 11th Jorge Andre Swieca Summer School on Particle and Fields, Campos do Jordao, Brazil, 14-27 Jan 2001.
- [Gomis e Weinberg 1996]GOMIS, J.; WEINBERG, S. Are nonrenormalizable gauge theories renormalizable? *Nucl. Phys.*, B469, p. 473–487, 1996.
- [Goroff e Sagnotti 1986]GOROFF, M. H.; SAGNOTTI, A. The ultraviolet behavior of Einstein gravity. *Nucl. Phys.*, B266, p. 709, 1986.
- [Gradshteyn e Ryzhik 1980]GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, M. *Tables of Integral Series and Products*. New York: Academic, 1980.
- [Gribosky, Donoghue e Holstein 1989]GRIBOSKY, P. S.; DONOGHUE, J. F.; HOLSTEIN, B. R. The stability of hot curved space. *Ann. Phys.*, v. 190, p. 149, 1989.
- [Grisaru 1977]GRISARU, M. T. Two loop renormalizability of supergravity. *Phys. Lett.*, B66, p. 75, 1977.
- [Grisaru, Nieuwenhuizen e Vermaseren 1976]GRISARU, M. T.; NIEUWENHUIZEN, P. van; VERMASEREN, J. A. M. One loop renormalizability of pure supergravity and of Maxwell-Einstein theory in extended supergravity. *Phys. Rev. Lett.*, v. 37, p. 1662, 1976.
- [Grisaru, Pendleton e Nieuwenhuizen 1977]GRISARU, M. T.; PENDLETON, H. N.; NIEUWENHUIZEN, P. van. Supergravity and the s matrix. *Phys. Rev.*, D15, p. 996, 1977.

- [Groenewold 1946]GROENEWOLD, H. J. On the principles of elementary quantum mechanics. *Physica*, v. 12, p. 405–460, 1946.
- [Gross, Pisarski e Yaffe 1981]GROSS, D. J.; PISARSKI, R. D.; YAFFE, L. G. QCD and instantons at finite temperature. *Rev. Mod. Phys.*, v. 53, p. 43, 1981.
- [Honerkamp 1972]HONERKAMP, J. The question of invariant renormalizability of the massless Yang-Mills theory in a manifest covariant approach. *Nucl. Phys.*, B48, p. 269–287, 1972.
- [Hooft e Veltman 1974]HOOFT, G. 't; VELTMAN, M. J. G. One loop divergencies in the theory of gravitation. *Annales Poincare Phys. Theor.*, A20, p. 69–94, 1974.
- [Hu e Verdaguer 2003]HU, B. L.; VERDAGUER, E. Stochastic gravity: Theory and applications. 2003.
- [Jackiw 1997]JACKIW, R. Evolution of (Ward-) Takahashi relations and how I used them. 1997.
- [Jackiw 2002]JACKIW, R. Physical instances of noncommuting coordinates. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, v. 108, p. 30–36, 2002.
- [Kapusta 1989]KAPUSTA, J. I. *Finite Temperature Field Theory*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1989.
- [Lattes, Occhialini e Powell 1947]LATTES, C. M. G.; OCCHIALINI, G. P. S.; POWELL, C. F. Observations on the tracks of slow mesons in photographic emulsions. 1. *Nature*, v. 160, p. 453–456, 1947.
- [Lifshitz e Pitaevskii 1980]LIFSHITZ, E. M.; PITAEVSKII, L. P. *Statistical Physics*. Oxford: Pergamon Press, 1980.
- [Litim e Manuel 2002]LITIM, D. F.; MANUEL, C. Semi-classical transport theory for non-Abelian plasmas. *Phys. Rept.*, v. 364, p. 451–539, 2002.
- [London 1927]LONDON, F. Quantum mechanical interpretation of the Weyl's theory. (in German). *Z. Phys.*, v. 42, p. 375–389, 1927.
- [Madore et al. 2000]MADORE, J. et al. Gauge theory on noncommutative spaces. *Eur. Phys. J.*, C16, p. 161–167, 2000.
- [Matsubara 2000]MATSUBARA, K. Restrictions on gauge groups in noncommutative gauge theory. *Phys. Lett.*, B482, p. 417–419, 2000.
- [Matsubara 1955]MATSUBARA, T. A new approach to quantum statistical mechanics. *Prog. Theor. Phys.*, v. 14, p. 351–378, 1955.
- [Moffat 2000]MOFFAT, J. W. Noncommutative quantum gravity. *Phys. Lett.*, B491, p. 345–352, 2000.
- [Moffat 2000]MOFFAT, J. W. Perturbative noncommutative quantum gravity. *Phys. Lett.*, B493, p. 142–148, 2000.
- [Moyal 1949]MOYAL, J. E. Quantum mechanics as a statistical theory. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, v. 45, p. 99–124, 1949.
- [Rebhan 1991]REBHAN, A. Collective phenomena and instabilities of perturbative quantum gravity at nonzero temperature. *Nucl. Phys.*, B351, p. 706–734, 1991.
- [Schwinger 1948]SCHWINGER, J. S. Quantum electrodynamics. i: A covariant formulation. *Phys. Rev.*, v. 74, p. 1439, 1948.
- [Schwinger 1951]SCHWINGER, J. S. On the Green's functions of quantized fields. 1. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, v. 37, p. 452–455, 1951.
- [Schwinger 1951]SCHWINGER, J. S. On the Green's functions of quantized fields. 2. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, v. 37, p. 455–459, 1951.
- [Schwinger 1961]SCHWINGER, J. S. Brownian motion of a quantum oscillator. *J. Math. Phys.*, v. 2, p. 407–432, 1961.

- [Seiberg e Witten 1999]SEIBERG, N.; WITTEN, E. String theory and noncommutative geometry. *JHEP*, v. 09, p. 032, 1999.
- [Sheikh-Jabbari 1999]SHEIKH-JABBARI, M. M. Open strings in a B-field background as electric dipoles. *Phys. Lett.*, B455, p. 129–134, 1999.
- [Sheikh-Jabbari 2000]SHEIKH-JABBARI, M. M. Discrete symmetries (c,p,t) in noncommutative field theories. *Phys. Rev. Lett.*, v. 84, p. 5265–5268, 2000.
- [Slavnov 1972]SLAVNOV, A. A. Ward identities in gauge theories. *Theor. Math. Phys.*, v. 10, p. 99–107, 1972.
- [Snyder 1947]SNYDER, H. S. The electromagnetic field in quantized space-time. *Phys. Rev.*, v. 72, p. 68–71, 1947.
- [Snyder 1947]SNYDER, H. S. Quantized space-time. *Phys. Rev.*, v. 71, p. 38–41, 1947.
- [Strubbe 1974]STRUBBE, H. Manual for schoonschip: A CDC 6000/7000 program for symbolic evaluation of algebraic expressions. *Comput. Phys. Commun.*, v. 8, p. 1–30, 1974.
- [Szabo 2003]SZABO, R. J. Quantum field theory on noncommutative spaces. *Phys. Rept.*, v. 378, p. 207–299, 2003.
- [Takahashi 1957]TAKAHASHI, Y. On the generalized Ward identity. *Nuovo Cim.*, v. 6, p. 371, 1957.
- [Taylor 1971]TAYLOR, J. C. Ward identities and charge renormalization of the Yang-Mills field. *Nucl. Phys.*, B33, p. 436–444, 1971.
- [Taylor e Wong 1990]TAYLOR, J. C.; WONG, S. M. H. The effective action of hard thermal loops in QCD. *Nucl. Phys.*, B346, p. 115–128, 1990.
- [Tomonaga e Oppenheimer 1948]TOMONAGA, S.-I.; OPPENHEIMER, J. R. On infinite field reactions in quantum field theory. *Phys. Rev.*, v. 74, p. 224–225, 1948.
- [Tyutin 1975]TYUTIN, I. V. Gauge invariance in field theory and statistical physics in operator formalism. 1975. LEBEDEV-75-39.
- [Umezawa, Matsumoto e Tachiki 1982]UMEZAWA, H.; MATSUMOTO, H.; TACHIKI, M. Thermo field dynamics and condensed states. 1982. Amsterdam, Netherlands: North-holland (1982) 591p.
- [Veltman 1976]VELTMAN, M. J. G. Quantum theory of gravitation. 1976. In *Les Houches 1975, Proceedings, Methods in Field Theory*, Amsterdam 1976, 265-327.
- [Veltman e Williams 1991]VELTMAN, M. J. G.; WILLIAMS, D. N. Schoonschip '91. 1991.
- [Ven 1992]VEN, A. E. M. van de. Two loop quantum gravity. *Nucl. Phys.*, B378, p. 309–366, 1992.
- [Ward 1950]WARD, J. C. An identity in quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, v. 78, p. 182, 1950.
- [Weldon 1999]WELDON, H. A. Structure of the gluon propagator at finite temperature. *Annals Phys.*, v. 271, p. 141, 1999.
- [Weyl 1918]WEYL, H. Gravitation and Electricity. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, v. 1918, p. 465, 1918.
- [Weyl 1927]WEYL, H. Quantum mechanics and group theory. *Z. Phys.*, v. 46, p. 1, 1927.
- [Weyl 1929]WEYL, H. Electron and gravitation. *Z. Phys.*, v. 56, p. 330–352, 1929.
- [Weyl 1931]WEYL, H. *The theory of groups and Quantum Mechanics*; pg. 274. New York: Dover, 1931. 274 p.
- [Wigner 1932]WIGNER, E. P. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev.*, v. 40, p. 749–760, 1932.
- [Woronowicz 1987]WORONOWICZ, S. L. Twisted SU(2) group: An example of a noncommutative differential calculus. *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto*, v. 23, p. 117–181, 1987.

[Yang e Mills 1954]YANG, C.-N.; MILLS, R. L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, v. 96, p. 191–195, 1954.

[Yukawa 1935]YUKAWA, H. On the interaction of elementary particles. *Proc. Phys. Math. Soc. Jap.*, v. 17, p. 48–57, 1935.

[Zee 2003]ZEE, A. *Quantum Field Theory in a nutshell*. Princeton: Princeton University Press, 2003.

[Zinn-Justin 1974]ZINN-JUSTIN, J. Renormalization of gauge theories. 1974. Lectures given at Int. Summer Inst. for Theoretical Physics, Jul 29 - Aug 9, 1974, Bonn, West Germany.