



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Hidrodinámica relativista y cosmología

Tesis para optar al título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el Área de Ciencias Físicas
por **Lic. Nahuel Omar MIRON GRANESE**

Fecha de defensa: 19/03/2021

Director de Tesis: **Dr. Esteban Adolfo CALZETTA**
Consejero de Estudios: **Dr. Fernando LOMBARDO**

Lugar de Trabajo: Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Departamento de Física

Resumen

En esta tesis trabajamos sobre la descripción hidrodinámica de fluidos reales en contextos relativistas y sobre sus aplicaciones concretas en cosmología.

La primera parte está dedicada a introducir las motivaciones y los conceptos básicos sobre los modelos hidrodinámicos necesarios para describir fluidos reales relativistas. En esta oportunidad optamos por trabajar con las denominadas Teorías de Segundo Orden (SOT por sus siglas en inglés) y en particular, con el formalismo de las Teorías de Tipo Divergencia (DTT por sus siglas en inglés), que asegura causalidad en la dinámica y el cumplimiento de la segunda ley de la Termodinámica de forma no perturbativa. Gran parte del trabajo original se basó en elaborar desarrollos formales que permitan estudiar la dinámica no lineal de los nuevos grados de libertad que introducen estas teorías hidrodinámicas causales para describir los efectos no ideales. A su vez, a partir de una generalización del teorema de fluctuación-disipación estudiamos cómo las fluctuaciones térmicas inherentes a la disipación afectan al sector tensorial de los grados de libertad. Desarrollamos un esquema autoconsistente para analizar las funciones de correlación relevantes del sistema y sus correcciones debidas a efectos no lineales usando métodos funcionales como el formalismo Martin-Siggia-Rose y la Acción Efectiva Irreducible de Dos Partículas. Un resultado interesante del análisis previo sugiere que los modos tensoriales podrían desarrollar una cascada inversa de entropía y así sostener, al menos en parte, la generación de estructuras de gran escala a partir de fluctuaciones en escalas pequeñas.

En la segunda parte elaboramos una aplicación particular de la hidrodinámica relativista a la cosmología relacionada con las ondas gravitatorias primordiales (pGW por sus siglas en inglés). La hipótesis central es que consideramos al plasma primordial en el universo temprano como un fluido disipativo descrito por una DTT.

Nuestra contribución es presentar un esquema hidrodinámico que permite estudiar la evolución del espectro de pGW en presencia del plasma primordial viscoso en el universo temprano, a través de una interacción que incorpora la retro-acción de las GW sobre el plasma. En particular estudiamos cómo los modos de spin-2 del fluido, que representan parte de los grados de libertad no ideales de la DTT, se acoplan con las GW a primer orden capturando la interacción entre las GW y el fluido viscoso. Dicha interacción descrita en el esquema de las SOT es compatible con los desarrollos basados en teoría cinética y no puede ser completamente descrita por las teorías hidrodinámicas usuales de primer orden.

Consideramos que todas las propiedades no ideales del plasma primordial se deben a un campo escalar extra auto-interactuante, efectivamente no masivo cuyo estado de vacío durante Inflación se convierte en uno de muchas partículas luego de Recalentamiento para el cual una descripción hidrodinámica efectiva es adecuada. En el caso más simple los efectos viscosos se incorporan a través de un único parámetro dimensional, el tiempo de relajación τ . Las condiciones iniciales de la evolución tanto de las GW como de los modos de spin-2 del fluido se obtienen a partir de las fluctuaciones cuánticas al final de Inflación. Resolvemos numéricamente las ecuaciones de evolución y calculamos explícitamente el espectro actual de GW que consta de dos contribuciones. Por un lado encontramos el canal disipativo caracterizado por la absorción de la energía de las pGW para escalas pequeñas, cuya longitud de onda cumple $\lambda < c\tau$, debido al efecto de amortiguamiento generado por la propagación libre de los modos de spin-2 del fluido conducido por la expansión del universo. En el caso estudiado la disminución relativa de la amplitud del espectro respecto al caso ideal es de entre 1 y 10 %. Por otro lado tenemos el canal de producción de GW debido al decaimiento efectivo de las fluctuaciones iniciales del fluido, esta contribución al espectro es despreciable comparada con la anterior.

Vale la pena notar la posibilidad de que este efecto sobre el espectro de pGW pueda repercutir, al menos en parte, en el esquivo espectro de modos B primordiales de la polarización del Fondo Cósmico de Radiación. Asimismo nuestro esquema para modelar la relación entre GW y disipación puede ser útil en otros escenarios como por ejemplo para describir la producción y evolución de GW en la fusión binaria de estrellas de neutrones y en transiciones de fase cosmológicas. A su vez, incorporar las fluctuaciones térmicas descritas en la primera parte en este formalismo permite ampliar el estudio de la producción de GW debida a las fluctuaciones hidrodinámicas de un fluido.

Las teorías hidrodinámicas relativistas han mostrado ser un terreno muy fértil para describir fluidos reales en las conocidas Colisiones de Iones Pesados Relativistas. Tal vez el contexto cosmológico y en particular el universo temprano también sean escenarios en los que la hidrodinámica causal se vuelva una herramienta muy poderosa que permita capturar adecuadamente parte de sus fenómenos y procesos característicos. Esta tesis pretende ser un pequeño aporte en esa dirección.

Palabras clave: *Cosmología, Hidrodinámica Relativista, Teorías Tipo-Divergencia, Ondas Gravitatorias Primordiales.*

Abstract

In this thesis we elaborate on the description of real fluids in relativistic contexts and its applications to cosmology.

The first part is dedicated to introduce the motivations and basic concepts about the suitable in models to describe relativistic real fluids. In this opportunity, we choose to work with the framework of the so-called Second Order Theories (SOT) and, in particular, with the Divergence Type Theory (DTT) formalism, which ensures both causality and that the Second Law of Thermodynamics is non-perturbatively fulfilled. Part of the original work is based on elaborating formal developments that allow to study the non-linear dynamics of the new degrees of freedom introduced by these causal hydrodynamic theories to describe non-ideal effects. In turn, considering a generalization of the fluctuation-dissipation theorem, we study how the thermal fluctuations, inherent to dissipation, affect the tensor sector of the degrees of freedom. We develop a self-consistent scheme to analyze the relevant correlation functions of the system and their corrections due to non-linear effects using functional methods like the Martin-Siggia-Rose formalism and the Two Particle Irreducible Effective Action. An interesting result of the previous analysis suggests that the tensor modes could sustain an inverse entropy cascade and thus support, at least in part, the generation of large-scale structures from small-scale fluctuations.

In the second part we elaborate on a particular application of the relativistic hydrodynamics to cosmology related to the primordial gravitational waves (pGW). The main hypothesis lies in modelling the cosmological plasma of the Early Universe as a dissipative fluid described by a DTT.

Our contribution is to present a hydrodynamical scheme that allows to study the evolution of the pGW in presence of the primordial viscous plasma in the Early Universe, through a self-consistent interaction which includes the back-reaction of the GW on the plasma. In particular, we study how the spin-2 modes of the fluid, which represent part of the non-ideal degrees of freedom, couple to GW to first order capturing the GW-viscous fluid interaction. This interaction developed within the SOT scheme is compatible with the description arising from the kinetic theory approach and it is not fully captured by the usual first order hydrodynamic theories.

We consider that all the dissipative effects of the plasma are due to an effectively massless, minimally coupled and self-interacting extra scalar field. During Inflation it remains in its vacuum state, but towards the end of Reheating the state becomes a highly excited many-particles one, for which a hydrodynamic description is suitable. In the simplest case, non-ideal effects are included

through a single dimensionful parameter, the relaxation time τ . The initial conditions, for both the gravitons and the fluid, are obtained from the quantum fluctuations at the end of Inflation.

We numerically solve the evolution equations and explicitly compute the current GW spectrum consisting of two contributions. On the one hand we find the dissipative channel characterized by the absorption of the pGW energy for small scales with wavelengths $\lambda < c\tau$ due to the damping effect produced by the free-streaming spin-2 modes of the fluid and driven by the expansion of the universe. In our case, the relative amplitude decrease of the spectrum compared to the ideal one is of about 1 to 10 %. On the other hand we have the GW production channel due to the effective decay of the initial fluctuations of the fluid, this contribution is negligible compared to the previous one.

It is worth noting the possibility that this effect may have an impact on the elusive primordial B-modes spectrum of the Cosmic Microwave Background polarization. Likewise, our scheme to model the relation between GW and dissipation can be useful in other scenarios, such as for describing the production and evolution of GW during a binary neutron star merger or a cosmological phase transitions. In turn, incorporating the thermal fluctuations in this formalism allows to broaden the study of GW production due to the fluid hydrodynamic fluctuations.

Relativistic hydrodynamics has proven to be a very fertile ground in describing real fluids in the well-known Relativistic Heavy Ion Collisions. Perhaps the cosmological context and in particular the Early Universe could be scenarios in which causal hydrodynamics becomes a powerful tool that brings out some of its characteristic phenomena and processes. This Thesis aims to be a small contribution in that direction.

Keywords: *Cosmology, Relativistic Hydrodynamics, Divergence-Type Theory, Primordial Gravitational Waves.*

Trabajos realizados durante esta tesis doctoral

- N. Mirón-Granese and E. Calzetta. Primordial gravitational waves amplification from causal fluids. *Phys. Rev. D* **97**, 023517 (2018) arXiv:1709.01661 [gr-qc]
- N. Mirón-Granese, A. Kandus and E. Calzetta. Nonlinear fluctuations in relativistic causal fluids. *J. High Energ. Phys.* **2020**, 64 (2020) arXiv:2002.08323 [hep-th]
- E. Lescano and N. Mirón-Granese. On the phase space in Double Field Theory. *J. High Energ. Phys.* **2020**, 239 (2020) arXiv:2003.09588 [hep-th]
- N. Mirón-Granese. Relativistic viscous effects on the primordial gravitational waves spectrum. *JCAP* 06 **2021** 008 (2021) arXiv:2012.11422 [astro-ph.CO]
- N. Mirón-Granese, E. Calzetta and A. Kandus. Primordial Weibel instability. *JCAP* 01 **2022** 028 (2022) arXiv:2101.03644 [astro-ph.HE] (2021)

Para Fran

Agradecimientos

Nunca es justa una lista, pero ahí vamos.

Primero quisiera agradecer a quien dirigió este trabajo doctoral, Esteban. Gracias por transmitir pasión por la física, por haberme enseñado cómo trabajar, por ser un excelente referente y guía científico y por darme la libertad de tomar decisiones sobre el rumbo de nuestras investigaciones. A pesar de lo anterior mi agradecimiento más grande es hacia su comprensión de la realidad, apoyo y paciencia. Es un honor haber trabajado con Esteban.

Gracias a Ale por sus consejos científicos tan acertados y por el entusiasmo con el que hemos emprendido los proyectos de investigación en los que trabajamos juntos.

Hace ya muchos años nos encontrábamos sentados en un aula del colegio secundario discutiendo sobre ventiladores y relatividad. Emprendimos una amistad y un viaje académico desde aquel entonces. Hoy, después de 14 años, puedo afirmar que además de amigos hermanos nos hemos convertido en colegas. Gracias Eric por haber participado de esta tesis.

Gracias a Pablo Minnini, a Gastón Giribet, a Guillem Perez-Nadal y a Andrés Perez por las discusiones. Gracias Marian por estar siempre con buena onda aún para resolver quilombos.

Gracias al Departamento de Física, a la Secretaría de Cultura Científica y Bienestar y al programa UBAXXII. Gracias infinitas al personal y a la hermosa institución del Jardín Mi Pequeña Ciudad.

Gracias a la UBA por financiar mi beca.

Si existen personas que confían en mí y que me han apoyado incondicionalmente desde siempre, esas personas son mi mamá, mi papá y mi hermana. Agradezco a la deidad que le lectore reconozca como tal (en caso de no hacerlo, entonces reemplazar por azar) por la familia que me tocó. Así, las cosas son más fáciles. No tengo palabras para agradecerles su apoyo material y emocional.

Gracias a Flor por haber estado siempre y seguir estando, por haberme apoyado y por haber sido tan comprensiva. Gracias por ser la mejor mamá que Fran podría tener.

Gracias a la oficina mejor equipada y mejor administrada de todo el DF. Gracias a Andrelo, a Fede, a Galo y a Nico por hacer valer la pena un almuerzo de 2 horas. Sí, gracias a Dani también.

Gracias a la banda del grupo ‘Tu vieja’ con quienes nos formamos desde Física 1 y hoy nos seguimos riendo de que P' no es la derivada de P , o sí.

Gracias a mis amigos y amigas de toda la vida porque siempre me han transmitido confianza y palabras de aliento. Les agradezco la misma cantidad de veces que me preguntaron qué car... estudiaba.

Alguien me enseñó a ser paciente, me enseñó que con la experiencia se aprende, me enseñó a mirar a los ojos, me enseñó lo que es el amor en el estado más puro, me enseñó qué es la ternura, me enseñó a enojarme, me enseñó a sentirme absolutamente vulnerable, me enseñó la responsabilidad, me enseñó a ponerme en segundo lugar, me enseñó a entender qué es lo que realmente importa y me enseñó a ser papá. Fran, si algún día lees esto espero haber compensado algo de todo lo que me enseñas, te amo hija. Gracias.

Índice general

1. Breve introducción	1
I Hidrodinámica relativista: desarrollos formales	3
2. Conceptos generales de hidrodinámica relativista	5
2.1. Regimen no relativista	8
2.1.1. Caso ideal	8
2.1.2. Caso no ideal	9
2.2. Regimen relativista del fluido ideal	11
2.3. Regimen relativista del fluido no ideal: Hidrodinámica de Landau-Lifshitz	13
2.3.1. Problemáticas con la Hidrodinámica de Landau-Lifshitz	15
2.4. Teorías de Segundo Orden	20
2.5. Ansatz exponencial, Teoría Cinética y DTTs	22
2.5.1. Un ansatz particular	27
2.6. Fluctuaciones hidrodinámicas y DTTs	28
3. Construcción fenomenológica de las DTTs	31
3.1. DTT conforme más allá de la Hidrodinámica de Landau-Lifshitz	32
3.2. Velocidades de propagación e ‘incompresibilidad’	38
4. Fluctuaciones Hidrodinámicas en las DTTs	41
4.1. La acción efectiva de Martin-Siggia-Rose	43
4.1.1. Teorema de fluctuación-disipación para una DTT	43
4.1.2. Formalismo MSR y la 2PIEA	47
4.1.3. Dinámica inducida	50
4.2. Fluctuaciones lineales alrededor del equilibrio	52
4.2.1. Identificación de los grados de libertad físicos	52
4.2.2. La acción cuadrática	56
4.2.3. Los propagadores de orden más bajo	56
4.3. Fluctuaciones no lineales alrededor del equilibrio	61
4.3.1. Términos cúbicos en la acción ‘clásica’	62
4.3.2. Autoenergía para modos tensoriales	63
4.3.3. Núcleo de ruido para los modos tensoriales	69
4.3.4. Correlaciones tensoriales no lineales	70
4.3.5. Fluctuaciones en la entropía y el EMT	71

II	Fluidos relativistas y cosmología	73
5.	Universo muy temprano y evolución de perturbaciones	75
5.1.	Primeras etapas del Universo: Inflación y Recalentamiento	75
5.2.	Perturbaciones alrededor del Universo isótropo y homogéneo	78
6.	Ondas gravitatorias primordiales y fluidos relativistas	83
6.1.	Ondas gravitatorias cosmológicas	83
6.2.	Descripción general del problema a resolver	84
6.2.1.	Escenario cosmológico e hidrodinámico	85
6.2.2.	Vinculación con trabajos previos	86
6.2.3.	Organización del resto del capítulo	88
6.3.	El plasma primordial como un fluido causal	88
6.3.1.	Descripción microscópica del fluido	89
6.3.2.	Ecuaciones hidrodinámicas	91
6.4.	Ondas gravitatorias y modos de spin-2 del fluido	94
6.4.1.	Ecuaciones de evolución	94
6.4.2.	Dinámica del universo homogéneo e isótropo	96
6.4.3.	Espectros primordiales	97
6.4.4.	Implementación numérica	101
6.5.	Espectro actual de ondas gravitatorias	103
6.5.1.	Canal de efectos viscosos sobre las pGW	104
6.5.2.	Canal de producción de GW debido al fluido	109
III	Observaciones finales	111
7.	Conclusiones	113
7.1.	Conclusiones de la Parte I	113
7.2.	Conclusiones de la Parte II	115
7.3.	Conclusiones globales	117
	Appendixes	119
A.	Reglas de escala de los diagramas relevantes	119
B.	Invariancia conforme de las ecuaciones hidrodinámicas	121
C.	Núcleo de ruido de un campo escalar durante Inflación	125
D.	Regímenes del fluido: colisional y no colisional.	
	Comparación con el enfoque cinético	129
D.1.	Escenario con espacio-tiempo de fondo plano	129
D.2.	Escenario cosmológico	131
	Bibliography	133

Capítulo 1

Breve introducción

En esta tesis trabajaremos sobre las teorías hidrodinámicas adecuadas para estudiar fluidos reales (disipativos) en regímenes o contextos relativistas y sus aplicaciones a la cosmología.

El cuerpo principal de la tesis se divide en dos partes.

En la Parte I describiremos las características generales de las teorías hidrodinámicas desde los primeros desarrollos hasta la concepción más moderna. Si bien la hidrodinámica no relativista para fluidos ideales y reales tiene una aceptación global, la descripción de un fluido real relativista es un gran dilema hasta el día de la fecha. A grandes rasgos dos tipos de teorías intentan ser superadoras: las Teorías de Primer Orden y las Teorías de Segundo Orden. Luego de detallar sus características, elegimos trabajar con las segundas que compatibilizan los requerimientos de la Relatividad General con los termodinámicos incorporando nuevos grados de libertad que describen las propiedades no ideales del fluido. A su vez mostramos cómo construir un modelo particular de este grupo de teorías incorporando fluctuaciones hidrodinámicas y efectos no lineales. Finalmente estudiamos las características de las correlaciones de los nuevos grados de libertad de la teoría resultante.

La primera parte contiene tres capítulos: el Capítulo 2 es un racconto de los modelos hidrodinámicos establecidos hasta la fecha, sus inconvenientes y posibles soluciones; en el Capítulo 3 mostramos la construcción fenomenológica de un modelo hidrodinámico particular propio de las Teorías de Segundo Orden y en el Capítulo 4 desarrollamos un esquema que permite incluir fluctuaciones térmicas en estos modelos hidrodinámicos y estudiar su impacto en la dinámica del fluido a partir de sus algunas propiedades estadísticas.

En la Parte II presentaremos algunas aplicaciones de la hidrodinámica relativista a la cosmología. Nos concentraremos en escenarios cosmológicos en los cuales es adecuado modelar la

materia como fluidos reales relativistas cumpliendo con los requerimientos termodinámicos de la Segunda Ley y de una dinámica hiperbólica presentados en la primera parte. Particularmente discutiremos la evolución de las ondas gravitatorias primordiales en presencia del plasma primordial con efectos viscosos. Para modelar el fluido utilizaremos las Teorías de Segundo Orden, particularmente una teoría disipativa construida a partir de teoría cinética, lo cual permite capturar los efectos viscosos en la evolución de las ondas gravitatorias a través de su interacción con los modos tensoriales del fluido.

La segunda parte contiene dos capítulos: el Capítulo 5 resume brevemente el contexto cosmológico estándar relevante para el capítulo siguiente y en el Capítulo 6 estudiamos la evolución de las ondas gravitatorias primordiales en presencia del plasma primordial viscoso.

Finalmente la Parte III cuenta con las conclusiones parciales y generales. También agregamos varios apéndices.

A lo largo de toda la tesis utilizamos unidades tales que $c = \hbar = k_B = 1$, $M_{\text{pl}}^2 = 1/(8\pi G)$ con G la constante de Newton y la convención MTW $(-, +, +, +)$ para la signatura de la métrica.

Parte I

Hidrodinámica relativista: desarrollos formales

Capítulo 2

Conceptos generales de hidrodinámica relativista

El origen de la hidrodinámica se remonta a los tiempos en los que la humanidad necesitó entender, controlar o predecir algún aspecto de dos sustancias vitales: el agua y el aire. Si bien por una cuestión de espacio y tiempo no vamos a trazar una cronología desde aquellas épocas¹, el comentario basta para comprender que la intuición cotidiana sobre qué es un fluido ha sido necesaria desde hace mucho tiempo. Tal vez los conceptos intuitivos más relevantes para describir nuestra experiencia cotidiana con el aire y el agua sean el fluir y la continuidad. Sin embargo, hoy en día sabemos que ambas sustancias están formadas por partículas individuales y aún así estamos seguros de que esta idea debe conciliarse de alguna forma con la continuidad de los fluidos.

Ciertamente todas las teorías hidrodinámicas son descripciones efectivas (no fundamentales) de ciertos estados de la materia válidas cuando las longitudes a analizar son más grandes que el tamaño o distancia entre las partículas constituyentes. No obstante existen diversos enfoques para desarrollar las teorías hidrodinámicas que permiten cuantificar su aplicabilidad de formas más precisa.

Como mencionamos la dinámica de fluidos pretende generar una descripción continua de un sistema discreto compuesto por un conjunto de partículas con algún tipo de interacción entre ellas. Notablemente han surgido distintas formas de construir esta descripción durante el tiempo. En primera instancia podríamos considerar un sistema con N partículas interactuantes en un dominio de longitud L y definir la noción de elemento de fluido como un volumen infinitesimal

¹Ver [1] para una cronología completa.

de dimensión dl con M partículas, de modo que $N \gg M \gg 1$ y $dl \ll L$. La hidrodinámica será aplicable siempre y cuando en cada elemento de fluido existan muchas colisiones entre partículas (interacciones) que establezcan el equilibrio termodinámico local y así poder asignar cantidades macroscópicas, como por ejemplo la densidad de energía, cuyo valor caracterice dicho elemento de fluido [1]. La dinámica de este sistema ahora se simplifica pues consistirá en ecuaciones que determinen la evolución de dichas variables macroscópicas y no de las partículas individuales.

Otro enfoque asume una descripción estadística de los componentes microscópicos a través de una función de distribución $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ definida sobre el espacio de fase $\{\mathbf{x}, \mathbf{p}\}$ [2]. La evolución de esta función estará determinada por la ecuación de Boltzmann $df/dt = I_{\text{col}}[f]$ con df la variación total de la función de distribución y $I_{\text{col}}[f]$ es un término vinculado a las colisiones o interacciones entre las partículas. En ciertos casos simplificados es posible dar una forma cerrada de $I_{\text{col}}[f]$ desde primeros principios. Una propiedad interesante es que para un sistema en equilibrio $f = f_{\text{eq}}$ con $df_{\text{eq}}/dt = 0$ y en consecuencia debe suceder que $I_{\text{col}}[f_{\text{eq}}] = 0$. Esto no implica la ausencia de colisiones sino lo contrario, una vez alcanzado el equilibrio las colisiones son las encargadas de mantenerlo y de que la función de distribución no varíe. Para un gas diluido de partículas clásicas que colisionan elásticamente la condición $I_{\text{col}}[f_{\text{eq}}] = 0$ determina que la f_{eq} es la distribución de equilibrio de Maxwell-Boltzmann. Otra propiedad del equilibrio es que la producción de entropía es nula.

La construcción de variables macroscópicas se realiza a partir de promedios, o momentos, de la función de distribución sobre el espacio de fases, por ejemplo la densidad de partículas $n = \int f d^3p$. La dinámica de estas variables está determinada por las ecuaciones de transferencia que se extraen tomando los respectivos promedios sobre la ecuación de Boltzmann [2, 3]. El régimen hidrodinámico se define como el escenario en el que el camino libre medio λ_{clm} entre colisiones es mucho menor que la longitud característica del sistema L , según $K_n = \lambda_{\text{clm}}/L \ll 1$, con K_n el número de Knudsen. En este régimen es posible deducir las ecuaciones hidrodinámicas a partir del esquema microscópico. Para el caso de equilibrio $f = f_{\text{eq}}$, $I_{\text{col}}[f_{\text{eq}}] = 0$ y las ecuaciones de transferencia resultan ser las ecuaciones de un fluido ideal. Para incorporar efectos no ideales debemos tomar una pequeña perturbación de la función de distribución $f = f_{\text{eq}} + f_1$ tal que $f_1 \ll f_{\text{eq}}$ y además tener una expresión para $I_{\text{col}}[f_{\text{eq}}]$ por ejemplo en la aproximación de relajación $I_{\text{col}}[f] \sim -(f - f_{\text{eq}})/\tau$ con τ un tiempo de relajación. De aquí pueden obtenerse las conocidas ecuaciones de Navier-Stokes. Finalmente el rango de aplicabilidad de este desarrollo

queda supeditado por todas las hipótesis realizadas pero particularmente por $f \approx f_{\text{eq}}$ y $K_n \ll 1$.

La descripción hidrodinámica más moderna consiste en una construcción fenomenológica válida para longitudes de onda larga. La dinámica de los grados de libertad macroscópicos efectivos se construye como una serie de gradientes a partir del fluido ideal (orden cero, homogéneo e isótropo) incorporando sucesivamente perturbaciones de órdenes superiores las cuales permiten describir los efectos no ideales [4]. Uno de los resultados más importante que establece el análisis de esta serie de gradientes hidrodinámicos, es que el rango de aplicabilidad de la hidrodinámica *no* necesariamente queda supeditado a sistema termalizado o muy cerca del equilibrio. De hecho muestra que, en algunos casos, los desarrollos hidrodinámicos pueden aplicarse con éxito a sistemas con anisotropías apreciables [5, 6] o incluso en situaciones en las que no se cumple la condición $K_n \ll 1$ sino que $K_n \lesssim 1$ [4]. De este modo amplía el rango de escalas y tiempos en los que la hidrodinámica sigue siendo útil y consistente.

Los desarrollos más sofisticados y complejos han permitido conectar el enfoque cinético con la teoría cuántica de campos fuera del equilibrio y la teoría de campos efectiva (el enfoque más moderno) [4, 7]. Es esperable que todas las descripciones sean compatibles cuando sus rangos de aplicabilidad coinciden aunque todavía ignoramos muchos aspectos fundamentales y no se ha logrado un acuerdo completo entre todas las teorías.

Independientemente del esquema elegido el poder de la descripción hidrodinámica consiste en representar la dinámica total del sistema con unos pocos grados de libertad macroscópicos como la densidad de energía, el campo de velocidades, la presión, entre otros que representan efectivamente el comportamiento de los *casi infinitos* grados de libertad microscópicos. La reducción de la cantidad de información necesaria para describir el sistema lo convierte en uno abarcable. Como veremos esta reducción no es trivial ni universal y depende del modelo hidrodinámico utilizado.

A la hora de modelar un sistema de la naturaleza siempre es importante tener en cuenta qué tipo de preguntas queremos responder para poder elegir o desarrollar una teoría que permita abordarlas. Cuando se pretende estudiar un fluido en el régimen de alta energía o incorporar consistentemente efectos gravitatorios al sistema es imprescindible trabajar con lo que llamamos hidrodinámica relativista. Esta descripción de fluidos para materia relativista ha demostrado ser una herramienta muy poderosa para entender fenómenos de alta energía. Ejemplos puntuales pueden ser el estudio de la termalización [4] e isotropización [8] del plasma de quarks y gluones

formado luego de una colisión relativista de iones pesados (RHIC por sus siglas en inglés) [9], el comportamiento de los núcleos internos de las estrellas de neutrones [10, 11, 12, 13], en fluidos en el contexto cosmológico [14, 15, 16] (que desarrollamos en el Capítulo 6) y durante transiciones de fase [17]. Otros fenómenos de interés podrían ser el colapso gravitatorio de un gas autogravitante [2] o el disco de acreción y el plasma circundante a un agujero negro [18]. Más aún, en muchos de los casos mencionados utilizar la hidrodinámica relativista de un fluido ideal es insuficiente, no permite explicar todos los fenómenos observados. Un ejemplo claro es la necesidad de considerar viscosidad para compatibilizar las observaciones con la sobreestimación del flujo elíptico en RHICs causada por modelar el plasma como un fluido ideal [9]. Por ello es importante analizar efectos de fluidos reales (no sólo los ideales), es decir, incorporar fluctuaciones y efectos disipativos. En consecuencia, además de la compatibilidad con la teoría de la Relatividad General, es necesario asegurar el cumplimiento de todas las leyes de la termodinámica y en particular obtener una producción de entropía positiva.

En efecto, para lograr una descripción satisfactoria debemos desarrollar una teoría hidrodinámica compatible tanto con las leyes de la termodinámica como con la teoría de la Relatividad General. Este es el desafío que pretende resolver la hidrodinámica relativista. A continuación describiremos los pasos más importantes en la construcción de esta teoría.

2.1. Regimen no relativista

Los primeros modelos matemáticos hidrodinámicos fueron desarrollados por I. Newton, L. Euler, D. Bernoulli y L. Lagrange en el siglo XVIII, muy anteriores a la relatividad [1]. Básicamente estos trabajos consideraron fluidos en el régimen newtoniano que hoy llamamos no relativista. En las próximas subsecciones presentamos los casos ideal y no ideal en este régimen.

2.1.1. Caso ideal

Los fluidos ideales pueden ser descriptos por las siguientes cantidades macroscópicas: la densidad de masa ρ , la densidad de energía ϵ , la presión p y el campo de velocidades $\vec{v}$. Su dinámica queda determinada por la conservación de la masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.1)$$

la conservación del momento

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = 0, \quad (2.2)$$

la conservación de la energía

$$\rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \epsilon \right) + p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.3)$$

y la ecuación de estado $p = p(\rho, \epsilon)$. Estas conocidas ecuaciones de la mecánica Newtoniana pueden derivarse desde un enfoque cinético-microscópico [2] como comentamos al comienzo del capítulo. Para asegurarnos de que las cantidades macroscópicas estén bien definidas y sean estables asumimos el límite $K_n \ll 1$, gracias al cual se alcanza un equilibrio termodinámico local. En términos microscópicos, la función de distribución f será la distribución de equilibrio de Maxwell-Boltzmann f_{eq} y en consecuencia la producción de entropía será nula para fluidos ideales.

2.1.2. Caso no ideal

Aquí describimos la dinámica no relativista de un fluido no ideal. La función de distribución del sistema f ya no será la de equilibrio sino que será necesario incorporar términos que se aparten de f_{eq} . Básicamente hay que considerar un desarrollo en serie de la función de distribución en potencias de K_n alrededor de f_{eq} (conocida como la expansión de Chapman-Enskog) y, además, conocer explícitamente $I_{\text{col}}[f]$ (por ejemplo en la aproximación de relajación del comienzo del capítulo $I_{\text{col}}[f] \sim -\Delta f / \tau$). Si asumimos que estamos cerca del equilibrio podemos truncar la serie de la función de distribución y quedarnos con los primeros términos. Esto va a permitirnos describir fenómenos reales de transporte tanto disipativos como de transferencia de calor.

En términos de las variables macroscópicas se incorporan dos modificaciones centrales respecto al caso ideal. Primero el tensor de presiones P_{ij} (o tensor de esfuerzos) que en el caso ideal era diagonal ya no lo es sino que

$$P_{ij} = p \delta_{ij} - S_{ij}, \quad (2.4)$$

donde $S_{ij} = \eta \sigma_{ij} + \zeta v_{k,k} \delta_{ij}$, con $\sigma_{ij} = [v_{j,i} + v_{i,j} - 2/3 v_{k,k} \delta_{ij}]$ el tensor de cizalla, η y ζ los coeficientes de viscosidad de cizalla y volumétrica respectivamente. Segundo, aparece un flujo de

calor $\vec{q}$ no nulo que podemos relacionar con la temperatura a través de la Ley de Fourier según

$$\vec{q} = -\kappa \vec{\nabla} T, \quad (2.5)$$

con κ el coeficiente de conductividad térmica. Esta expresión da lugar a la conocida ecuación de difusión del calor.

Las ecuaciones que rigen la dinámica de este tipo de fluidos son la conservación de la masa (2.1), la conservación del momento o ecuación de Navier-Stokes

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\eta \sigma_{ij} + \zeta \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right\} = 0, \quad (2.6)$$

la conservación de la energía

$$\rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \epsilon \right) + p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} - 2\eta (v_{i,j} + v_{j,i}) (v_{i,j} + v_{j,i}) - \left(\zeta - \frac{2}{3} \eta \right) (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})^2 = 0 \quad (2.7)$$

y nuevamente una ecuación de estado. Podemos notar que si se anulan los coeficientes de transporte (η , ζ) y el flujo de calor $\vec{q}$, recuperamos el comportamiento del fluido ideal. Estas cantidades serán las que determinen la producción de entropía.

Las ecuaciones pueden derivarse tanto desde teoría cinética con la expansión de Chapman-Enskog como fenomenológicamente a partir de la generalización del tensor de presiones P_{ij} y el flujo de calor $\vec{q}$. Es importante notar que estas dos nuevas cantidades deben estar determinadas. En consecuencia, o bien fijamos las relaciones constitutivas que vinculen dichas cantidades con los grados de libertad ya existentes que describían el caso ideal (como la velocidad), o bien las consideramos como nuevas variables y proponemos una dinámica que las determine. Si bien en principio es natural y sensato considerar los mismos grados de libertad para describir tanto el caso ideal (equilibrio) como el no ideal (ligeramente fuera de equilibrio), es relevante recordar que es una elección a la hora de construir la teoría. La navaja de Occam es una máxima que suele guiar las investigaciones científicas y nos indica que a mismos resultados no hay motivos para no elegir la explicación más simple. En este sentido cabe la pregunta ¿tiene sentido ampliar la cantidad de grados de libertad?. Pues bien en el caso no relativista la respuesta, en efecto, parece ser que no hay motivo para tal ampliación. No obstante, como veremos luego, en el desarrollo de las teorías hidrodinámicas relativistas este será un punto clave de análisis.

2.2. Regimen relativista del fluido ideal

En esta sección describimos el desarrollo de la hidrodinámica relativista para el fluido ideal. El desafío básico es generar un esquema hidrodinámico que sea aplicable en regímenes relativistas de modo que debe ser un desarrollo compatible con los principios de la Relatividad General. Según el principio de covariancia general todas las leyes de la física deben ser equivalentes (concretamente covariantes) ante cambios generales de coordenadas. En particular las ecuaciones hidrodinámicas deben respetar este principio y en consecuencia respetar la simetría ante el grupo de los difeomorfismos. La compatibilidad entre hidrodinámica y Relatividad General tiene implicancias tanto fundamentales como prácticas que todavía hoy son tema de investigación [1, 2].

Las cantidades covariantes que definen al fluido más simple en un esquema relativista son la corriente de partículas N^μ y el tensor de energía-impulso (EMT por sus siglas en inglés) $T^{\mu\nu}$. En particular el EMT depende de la densidad de energía ρ , la presión p , la cuadrivelocidad u^μ (con la normalización $u^2 = -1$) y tensor métrico $g^{\mu\nu}$. En el referencial de reposo local el $T^{\mu\nu}$ de un fluido perfecto debe ser isótropo de modo que en ese referencial vale que $T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p)$. A su vez en ese mismo sistema la corriente de partículas será $N^\mu = (n, 0, 0, 0)$, con n la densidad de partículas. Finalmente haciendo una transformación de Lorentz llegamos a que, para un referencial general, el EMT y la corriente son

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \quad (2.8)$$

$$N^\mu = n u^\mu. \quad (2.9)$$

Las ecuaciones dinámicas, naturalmente covariantes, corresponden con las conservaciones de los tensores fundamentales: $\nabla_\mu N^\mu = 0$ y $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Aquí ∇_μ indica derivada covariante. Si agregamos la ecuación de estado $p = p(\rho, n)$ obtenemos un sistema cerrado para el fluido relativista ideal.

Es posible ser más explícitos con las ecuaciones a partir de una descomposición temporal-espacial definida a partir del vector temporal u^μ y el proyector ortogonal tipo espacial

$$\Delta^{\mu\nu} = u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Utilizando la notación $D = u^\mu \nabla_\mu$ y $\nabla_\perp^\rho = \Delta^{\mu\rho} \nabla_\mu$ la conservación de la corriente de partículas

$\nabla_\mu N^\mu = 0$ se lee

$$Dn + n\nabla_\mu^\perp u^\mu = 0. \quad (2.11)$$

La proyección ortogonal de la conservación del EMT $\Delta^\mu_\nu \nabla_\rho T^{\rho\nu} = 0$ queda

$$(\rho + p) Du^\mu + \nabla_\perp^\mu p = 0, \quad (2.12)$$

y la temporal $u_\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ es

$$D\rho + (\rho + p) \nabla_\mu^\perp u^\mu = 0. \quad (2.13)$$

Estas ecuaciones cumplen con todos los requisitos de la Relatividad General. Más aún al tomar el límite no relativista: velocidades bajas $|\vec{v}| \ll 1$, $p \ll \rho$ y la métrica de Minkowski $g^{\mu\nu} \rightarrow \eta^{\mu\nu}$; los operadores se reducen a $D \rightarrow \partial_t + \vec{v} \cdot \nabla + O(v^2)$, $\nabla_\perp^\mu = (0, \vec{\nabla}) + O(v)$ y las ecuaciones (2.11)-(2.13) convergen a las ya conocidas (2.1)-(2.3).

Al igual que en el caso no relativista ideal, esta dinámica puede derivarse desde una perspectiva microscópica a partir de la Teoría Cinética. Nuevamente la idea es utilizar la hipótesis de equilibrio local junto con la condición $K_n \ll 1$ y asumir que la función de distribución es la función de equilibrio. Claro, en este caso el equilibrio no es determinado por la distribución de Maxwell-Boltzmann sino por la distribución de Maxwell-Jüttner aplicable al caso relativista [3].

En el esquema relativista la segunda ley de la Termodinámica se lee $\nabla_\mu S^\mu \geq 0$ con S^μ el flujo de entropía. Para el caso ideal de equilibrio (sin efectos viscosos)

$$S^\mu = su^\mu \quad (2.14)$$

con s la densidad de entropía en el referencial de reposo. Naturalmente en el régimen de equilibrio la producción de entropía es nula y $\nabla_\mu S^\mu = 0$. Por ejemplo para un fluido sin cargas conservadas, con potencial químico $\mu = 0$, la Primera Ley es

$$\rho + p = Ts \quad (2.15)$$

$$Tds = d\rho \quad (2.16)$$

y usando la ecuación (2.13) es fácil mostrar que $\nabla_\mu S^\mu = 0$.

Hasta aquí no existe ninguna objeción hacia la hidrodinámica relativista.

2.3. Regimen relativista del fluido no ideal: Hidrodinámica de Landau-Lifshitz

No existe una forma universal y completamente consensuada de cómo incorporar los efectos no ideales a la dinámica de un fluido relativista. No obstante comenzaremos con desarrollar la Hidrodinámica de Landau-Lifshitz como un ejemplo de una de las denominadas Teorías de Primer Orden (FOTs). Si bien no todas las FOTs son equivalentes entre sí, la característica distintiva de estas teorías es que para describir los efectos no ideales fuera de equilibrio mantienen los mismos grados de libertad con los cuales describen el estado de equilibrio.

Las ecuaciones centrales seguirán siendo las conservaciones de la corriente de partículas $\nabla_\mu N^\mu = 0$ y del EMT $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. No obstante N^μ y $T^{\mu\nu}$ contendrán ahora nuevos términos que incorporen los efectos no ideales. Por simplicidad consideremos un fluido sin cargas conservadas para el cual la ecuación de conservación de la corriente de partículas se vuelve irrelevante, el potencial químico es nulo y en consecuencia sólo es necesario concentrarse en la extensión del EMT. En efecto

$$T^{\mu\nu} \rightarrow T_0^{\mu\nu} + \Pi^{\mu\nu} \quad (2.17)$$

de modo tal que $T_0^{\mu\nu}$ es el EMT del fluido ideal (2.8) y $\Pi^{\mu\nu}$ es el tensor de esfuerzos viscosos que contiene toda la información sobre los efectos no ideales. Para continuar la construcción vamos a asumir que los grados de libertad o variables que describen al fluido en este régimen fuera del equilibrio siguen siendo los mismos, es decir que $\Pi^{\mu\nu} [\rho, u^\mu, g^{\mu\nu}]$. No incluimos explícitamente la presión p ya que quedará determinada por la ecuación de estado $p = p(\rho)$. Si bien no hay dudas del rol que juega el tensor métrico $g^{\mu\nu}$, es necesario definir las relaciones constitutivas que definen el rol de la densidad de energía ρ y la cuadri-velocidad u^μ en el régimen fuera del equilibrio. La Hidrodinámica de Landau-Lifshitz impone concretamente que $(-)\rho$ y u^μ sean el autovalor y el

autovector temporal asociados al operador $T^{\mu\nu}$ de modo que

$$u_\mu T^{\mu\nu} = -\rho u^\nu. \quad (2.18)$$

Podríamos haber elegido otro tipo de relación constitutiva, por ejemplo en la Hidrodinámica de Eckart se asume que la cuadvirvelocidad y la densidad de partículas n quedan definidas según $N^\mu = n u^\mu$ aún cuando no estamos en equilibrio.

El EMT $T^{\mu\nu}$ es la fuente del campo gravitatorio y por ende simétrico. En consecuencia el tensor $\Pi^{\mu\nu}$ también es simétrico. A su vez la relación (2.18) implica que $u_\nu \Pi^{\mu\nu}[\rho, u^\rho, g^{\rho\sigma}] = 0$. Suele ser conveniente definir que

$$\Pi^{\mu\nu} = \pi^{\mu\nu} + \Delta^{\mu\nu} \Pi, \quad (2.19)$$

con $\pi_\mu^\mu = 0$. Las ecuaciones dinámicas son $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, que en la descomposición temporal-espacial se leen

$$D\rho + (\rho + p)\nabla_\mu^\perp u^\mu - \Pi^{\mu\nu}\nabla_{(\mu} u_{\nu)} = 0 \quad (2.20)$$

$$(\rho + p)Du^\mu - \nabla_\perp^\mu p + \Delta_\nu^\mu \nabla_\lambda \Pi^{\lambda\nu} = 0, \quad (2.21)$$

donde $A_{(\mu\nu)} = (A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})/2$ es la simetrización de $A_{\mu\nu}$.

Dado que estamos tratando con fluidos reales es de vital importancia asegurar el cumplimiento de la segunda ley de la Termodinámica. Ya mencionamos que en el contexto relativista la Segunda Ley se expresa como $\nabla_\mu S^\mu \geq 0$ saturando la desigualdad en el caso de equilibrio. La incógnita aquí es el flujo de entropía S^μ . Una posibilidad es extender la aplicabilidad de la expresión (2.14), válida en equilibrio, al escenario fuera del equilibrio. Como el caso que estamos analizando no tiene cargas conservadas, el potencial químico $\mu = 0$ y las expresiones termodinámicas de la Primera Ley son las ecuaciones (2.15) y (2.16). Asimismo, usando la ecuación de movimiento (2.20) llegamos a

$$\nabla_\mu S^\mu = \nabla_\mu (s u^\mu) = Ds + s \nabla_\mu^\perp u^\mu = -\frac{1}{T} \Pi^{\mu\nu} \nabla_{(\mu} u_{\nu)} \geq 0. \quad (2.22)$$

De este modo la condición que garantiza la producción positiva de entropía es $-\Pi^{\mu\nu} \nabla_{(\mu} u_{\nu)} \geq$

0. Esta relación nos permite determinar parcialmente cuál es la forma del tensor de esfuerzos viscosos $\Pi^{\mu\nu}$. En efecto a primer orden en derivadas podemos asumir que

$$\pi^{\mu\nu} = -\eta \sigma^{\mu\nu} \quad \text{y} \quad \Pi = -\zeta \nabla_\lambda^\perp u^\lambda, \quad (2.23)$$

con $\sigma_{\mu\nu} = \nabla_\nu^\perp u_\mu + \nabla_\mu^\perp u_\nu - 2/3 \Delta^{\mu\nu} \nabla_\lambda^\perp u^\lambda$ y η y ζ los coeficientes de transporte vinculados a la viscosidad de cizalla y volumétrica respectivamente. Usando que $\eta, \zeta \geq 0$ y la relación (2.19), aseguramos el cumplimiento de la desigualdad (2.22). Es importante notar que aquí no obtenemos un flujo de calor generalizado q^μ debido a que elegimos trabajar con la Hidrodinámica de Landau-Lifshitz, en compensación si consideráramos la corriente de partículas N^μ encontraríamos términos no ideales que caracterizan la difusión de partículas. En la Hidrodinámica de Eckart ocurre lo opuesto, no hay difusión de partículas en N^μ pero sí un flujo de calor generalizado q^μ en $T^{\mu\nu}$.

Cabe destacar que es posible obtener la expresión (2.23) para el tensor de esfuerzos viscosos a partir de una expansión en serie tal que

$$\Pi^{\mu\nu} = T_1^{\mu\nu} + T_2^{\mu\nu} + \dots, \quad (2.24)$$

donde $T_i^{\mu\nu}$ representa la suma de todos los términos posibles con gradientes covariantes de orden i . De esta forma aumentar el orden i permitirá describir mayores anisotropías y mayores apartamientos del equilibrio. Asumiendo las relaciones constitutivas de Landau-Lifshitz, la forma más general de $T_1^{\mu\nu}$ coincide con la expresión (2.23) obtenida a través del análisis entrópico.

2.3.1. Problemáticas con la Hidrodinámica de Landau-Lifshitz

Hasta aquí parece ser que hemos encontrado expresiones cerradas para el tensor de esfuerzos viscosos (2.23), su dinámica (2.20)-(2.21) y a su vez para la producción de entropía en cumplimiento con la segunda ley de la Termodinámica. No obstante, a continuación describiremos dos cuestiones a revisar: primero si el tipo de dinámica que representan las ecuaciones (2.20)-(2.21) y (2.23) es aceptable desde el punto de vista relativista y segundo si es válido extrapolar la expresión del flujo de entropía para fluidos ideales (2.14) para fluidos reales.

Los desarrollos de hidrodinámica relativista de fluidos no ideales [19, 20] no fueron construi-

dos truncando explícitamente una serie de gradientes sino a partir de imponer que la producción de entropía sea positiva para cualquier configuración posible. Estas condiciones determinan completamente $\Pi^{\mu\nu}$ a primer orden en los gradientes (a menos de los coeficientes de transporte). Desarrollemos la dinámica para el caso que estamos analizando, es decir, para un fluido sin cargas conservadas en el que la ecuación para la corriente de partículas se vuelve trivial y las ecuaciones que rigen su movimiento son

$$\nabla_\mu [T_0^{\mu\nu} + \Pi^{\mu\nu}] = 0. \quad (2.25)$$

Aquí $\Pi^{\mu\nu}$ representa el tensor de esfuerzos viscosos a primer orden de la ecuación (2.23). A partir de la descomposición temporal-espacial obtenemos

$$D\rho + (\rho + p)\nabla_\mu^\perp u^\mu = \frac{\eta}{2}\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} + \zeta\left(\nabla_\mu^\perp u^\mu\right)^2, \quad (2.26)$$

$$(\rho + p)Du^\mu + \nabla_\perp^\mu p = \Delta_\rho^\mu \nabla_\sigma \left(\eta \sigma^{\rho\sigma} + \zeta \Delta^{\rho\sigma} \left(\nabla_\lambda^\perp u^\lambda \right) \right). \quad (2.27)$$

En particular las ecuaciones (2.26)-(2.27) se las conoce como las ecuaciones de Navier-Stokes relativistas. En efecto si tomamos el límite no relativista como lo hicimos anteriormente obtenemos las ecuaciones de Navier-Stokes usuales newtonianas (2.6)-(2.7). Estas últimas tienen la característica de conformar un sistema parabólico que admite la propagación instantánea de información, es decir velocidades de propagación infinitas. Este fenómeno no debe llamarnos la atención ya que en el régimen newtoniano las interacciones instantáneas están permitidas. Sin embargo, la generalización relativista que acabamos de exponer (2.26)-(2.27) presenta la misma característica: sus ecuaciones diferenciales forman lo que se conoce como un sistema parabólico. Ahora sí surge una controversia pues la relatividad no permite velocidades de propagación mayores a la de la luz.

Veámoslo con un poco más de detalle. Para ello es ilustrativo estudiar las perturbaciones alrededor de un estado de equilibrio en el espacio de Minkowski [9] de modo que

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho \quad u^\mu = \delta_0^\mu + \delta u^\mu \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}. \quad (2.28)$$

La velocidad δu^μ (en una dirección particular, digamos ‘y’) queda determinada a primer orden

por la siguiente ecuación

$$\partial_t \delta u^y - \frac{\eta_0}{\rho_0 + p_0} \partial_x^2 \delta u^y = 0, \quad (2.29)$$

que es de tipo difusión. La relación de dispersión correspondiente a ondas planas es

$$\omega = \frac{\eta_0}{\rho_0 + p_0} k^2, \quad (2.30)$$

donde ω es la frecuencia y k el número de onda. Luego, la velocidad de difusión del modo k se estima según

$$v_D(k) = \frac{d\omega}{dk} \sim \frac{\eta_0}{\rho_0 + p_0} k. \quad (2.31)$$

Como esta cantidad crece linealmente con k es posible argumentar que para longitudes de onda pequeñas ($k \rightarrow \infty$) dicha velocidad no está acotada y en consecuencia supera la velocidad de la luz causando un comportamiento no causal. En [21] podemos encontrar un análisis más general y formal sobre estas patologías. Una versión más moderna [9] que involucra el estudio de las funciones de Green características de la ecuación (2.29), muestra que a partir de una excitación inicial puntual (tipo delta de Dirac en el espacio) se obtiene una solución con valores no nulos en todo el espacio para cualquier tiempo posterior. Esto implica la no causalidad de la teoría, del mismo modo que ocurre con la ecuación de difusión del calor newtoniana usual [2].

Cualquier teoría hidrodinámica, por definición, es inaplicable en distancias arbitrariamente pequeñas con lo cual el argumento previo sobre la no causalidad parece irrelevante. Basta recordar que la descripción será válida para $k \rightarrow 0$ y que en ese régimen no surgen tales violaciones a la causalidad. Sin embargo tener que recortar *a posteriori* el rango de modos en el que la teoría es aplicable genera inconvenientes en la resolución práctica de problemas. En particular el comportamiento no causal en el ultravioleta (UV) producto del sistema de ecuaciones parabólico produce tanto inestabilidades espurias (no físicas) sobre estados de equilibrio triviales [21] como la imposibilidad de tener un problema de valores iniciales bien definido [2, 22]. Básicamente los modos k que se propagan a velocidades mayores que c en un sistema de referencia, viajan hacia atrás en el tiempo en otro sistema impidiendo así que las condiciones iniciales se fijen unívocamente en un único tiempo. Este comportamiento hace impracticable obtener soluciones

numéricas estables. En efecto, las ecuaciones de Navier-Stokes relativistas sólo pueden ser útiles a la hora de analizar fluidos en situaciones muy simples en las cuales hallamos soluciones analíticas y tenemos bajo control la posterior aplicación del límite de longitud de onda larga ($k \rightarrow 0$). Dentro de estas situaciones simples encontramos sistemas cuyas condiciones iniciales y de equilibrio no contemplan rotaciones [22].

Para generar compatibilidad con la Relatividad General es necesario un sistema de ecuaciones diferenciales hiperbólico, como el de una ecuación de ondas, en el que todas las velocidades de propagación sean menores a la de la luz. A grandes rasgos dicho sistema hiperbólico provendrá de una dinámica con un comportamiento UV regulado *a priori*. A su vez la hiperbolicidad permitirá evitar las inestabilidades espurias y tener un problema de valores iniciales bien formulado. A diferencia de los parabólicos, ahora el sistema de ecuaciones tiene las propiedades fundamentales para, en principio, ser implementado prácticamente sobre un amplio conjunto de configuraciones iniciales [2].

Por otra parte analicemos el cumplimiento de la segunda ley de la Termodinámica. Ya mencionamos que en el contexto relativista la Segunda Ley se expresa como $\nabla_\mu S^\mu \geq 0$. En el caso ideal el flujo de entropía S^μ es el de la ecuación (2.14) y se satura la desigualdad dando una producción nula de entropía como es esperable. Cuando pasamos al caso fuera de equilibrio está claro que el EMT ahora es (2.17) y las ecuaciones dinámicas son (2.20) y (2.21), en principio con un tensor de esfuerzos viscosos general (sin determinar explícitamente). La pregunta central es, ¿la expresión del flujo de entropía (2.14) debería generalizarse y contener explícitamente contribuciones relacionadas con $\Pi^{\mu\nu}$? Se ha argumentado [23, 24, 25] que el flujo de entropía debería ser una función algebraica de las variables hidrodinámicas y en consecuencia contemplar la incorporación de términos del tipo

$$S^\mu = s u^\mu + \gamma_1 u^\mu \Pi^2 + \gamma_2 u^\mu \pi^{\rho\sigma} \pi_{\rho\sigma} + \dots, \quad (2.32)$$

donde $\gamma_{1,2}$ son coeficientes de transporte a determinar. A su vez para la producción de entropía se obtiene

$$\nabla_\mu S^\mu = \nabla_\mu (s u^\mu) + \nabla_\mu (\gamma_1 u^\mu \Pi^2 + \gamma_2 u^\mu \pi^{\rho\sigma} \pi_{\rho\sigma}) + \dots. \quad (2.33)$$

Claramente las nuevas contribuciones son de orden superior y por ello muy cerca del equilibrio son despreciables respecto al primero término. No obstante si asumimos que $\Pi^{\mu\nu}$ es la de la forma (2.19, 2.23) sólo el primer término en el lado derecho de (2.33) es definido positivo, por lo tanto no podemos asegurar que para cualquier configuración se cumpla que $\nabla_\mu S^\mu \geq 0$. Para lograr que $\nabla_\mu S^\mu \geq 0$ debemos redefinir $\Pi^{\mu\nu}$ agregando términos de orden superior que hagan que todos los términos en (2.33) se transformen en definidos positivos. Más aún esta extensión debe contener términos con derivadas temporales del tipo $D\Pi^{\mu\nu}$ de modo que ahora el tensor de esfuerzos viscosos se transformaría en un nuevo grado de libertad con una dinámica propia adecuada para que la producción de entropía sea definida positiva. Este escenario suele denominarse ‘Termodinámica Irreversible Extendida’ [26]. Como veremos luego, esta dinámica fija un sistema de ecuaciones diferenciales hiperbólico, lo cual es muy interesante ya que permitiría cumplir con un requerimiento de compatibilidad con la teoría de la relatividad. Aún así, debemos recordar que todo el desarrollo depende de una definición *a priori* del flujo de entropía S^μ a un cierto orden en las variables hidrodinámicas. En consecuencia sólo podemos asegurar la Segunda Ley perturbativamente, es decir, que para considerar contribuciones de orden superior en la dinámica es necesario reformular la teoría orden por orden para asegurar el cumplimiento de la Segunda Ley.

En resumen en esta sección mostramos cuáles son los puntos claves que debemos tener en cuenta a la hora de analizar una teoría hidrodinámica relativista: sistema de ecuaciones diferenciales hiperbólico, causalidad y velocidad de propagación infinitas, inestabilidades espurias y el problema de valores iniciales más el cumplimiento de la Segunda Ley.

En este punto surge el interrogante de si estos inconvenientes de la teoría provienen de truncar la serie (2.24) a primer orden y que, en efecto, deberíamos considerar o bien órdenes superiores o bien la serie completa.

Resulta ser que tener en cuenta correcciones de segundo orden en $\Pi^{\mu\nu}$ no resuelve los problemas de causalidad de la teoría [4]. Para que la teoría resultante conste de un sistema de ecuaciones hiperbólico es necesario no sólo expandir $\Pi^{\mu\nu}$ a segundo orden, sino resumar o reestructurar la expansión a través de una prescripción muy simple que es reemplazar los términos del tipo $D\sigma^{\mu\nu}$ por $D\Pi^{\mu\nu}$. De esta forma se obtiene una teoría completamente diferente [27] en la que $\Pi^{\mu\nu}$ se transforma en una nueva variable hidrodinámica con una dinámica propia que vuelve el sistema de ecuaciones hiperbólico.

Estudios actuales muestran que la serie hidrodinámica completa 2.24 no es convergente lo cual es inconveniente ya que la idea de aumentar el orden de los gradientes para obtener una solución cada vez más adecuada podría no ser conducente. En [4] se puede encontrar una amplia revisión sobre cómo tratar esta serie de gradientes y sus implicancias.

En la próxima sección tratamos sobre cómo superar los inconvenientes de la Hidrodinámica de Landau-Lifshitz a través del uso de las denominadas Teorías de Segundo Orden (SOTs por sus siglas en inglés).

2.4. Teorías de Segundo Orden

La característica fundamental de las Teorías de Segundo Orden es que el tensor de esfuerzos viscosos $\Pi_{\mu\nu}$ es promovido a un verdadero grado de libertad dinámico de la teoría que satisface ecuaciones de relajación de tipo Maxwell-Cattaneo [28, 29, 30, 31, 32], constituyendo así un sistema hiperbólico. La implementación del cumplimiento de la Segunda Ley dependerá de cada SOT en particular.

La introducción del tensor $\Pi_{\mu\nu}$ como una nueva variable dinámica que representa las propiedades no ideales del fluido, amplía no sólo la cantidad sino el tipo de grados de libertad que describen al fluido. Además de los grados de libertad escalares (spin-0) y vectoriales (spin-1), ya presentes en las teorías de Landau-Lifshitz o Eckart, ahora es posible obtener modos genuinamente tensoriales (spin-2). Este hecho permite extender la descripción de los procesos irreversibles hidrodinámicos que un fluido real relativista puede experimentar.

Dos escenarios en los que esta ampliación se vuelve relevante son la interacción entre las ondas gravitatorias y los efectos disipativos del plasma primordial en el Universo Temprano [14, 15], y la descripción de un plasma primordial anisótropo en el que puedan desencadenarse inestabilidades electromagnéticas [16]. En la Parte II de esta tesis, describimos en detalle el escenario de interacción entre ondas gravitatorias y el plasma primordial. Los objetos compactos astrofísicos de alta energía podrían ser escenarios en los que los modos tensoriales jueguen un rol central. Por ejemplo en estrellas de neutrones existen modos normales rotantes de spin-2 [11], que puede excitar ondas gravitatorias, sin embargo en la actualidad no existe un modelo hidrodinámico convincente para esos modos.

Los trabajos de Maxwell y Cattaneo [28, 29] sobre la ecuación del calor mostraron que

la ley de Fourier (2.5) podía ser generalizada al considerar un nuevo término de ‘inercia’ del tipo $\tau \partial \vec{q} / \partial t$ y que en consecuencia las perturbaciones ya no se propagan instantáneamente sino que las velocidades de propagación resultan finitas. En el límite en que el parámetro $\tau \rightarrow 0$ recuperaban el comportamiento usual de la ecuación del calor. Tiempo después, Müller aplicó estos desarrollos a las ecuaciones de Navier-Stokes y mostró que su estructura parabólica de la teoría puede transformarse en hiperbólica si se incluyen términos cuadráticos del tensor de esfuerzos viscosos $\Pi_{\mu\nu}$ en el flujo de entropía análogo a (2.33) [23]. Al establecer el vínculo de producción positiva de entropía se obtiene un sistema de ecuaciones hiperbólico compatible con el esquema linealizado de Grad [33] que describe los efectos transitorios que se propagan con velocidades finitas a partir de Teoría Cinética. Este enfoque fue extendido al régimen relativista por W. Israel y M. Stewart y otros [21, 24, 26, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42] dando lugar un universo muy amplio de SOTs.

El problema de las ecuaciones parabólicas no se restringe a los fluidos relativistas. Las teorías hiperbólicas son útiles también en el régimen no relativista, siempre que el tiempo de relajación hacia un estado de equilibrio sea mayor que el tiempo entre colisiones como por ejemplo en las ondas de segundo sonido en superfluidos y sólidos, fluidos poliméricos, entre otros [43, 44]. La diferencia entre las teorías parabólicas e hiperbólicas se puede ignorar sólo cuando los tiempos de relajación son más cortos que la escala de tiempo característica del sistema, lo cual fue sugerido originalmente por Maxwell [28]. Por otra parte Muronga [25] estudió las primeras etapas de las RHICs con ambas descripciones, FOTs y SOTs, y sus resultados sugieren que estas últimas son más precisas y confiables en las etapas más tempranas.

En 1986 Liu, Müller y Ruggieri [45] desarrollaron una teoría de campos para la densidad de partículas, el flujo de partículas y los componentes del EMT. Las ecuaciones consistían en la conservación del número de partículas, del EMT y el balance de flujos. El tipo de dinámica estaba fuertemente restringido por el principio de relatividad, el requisito de hiperbolicidad y de producción positiva de entropía. Las únicas funciones desconocidas del formalismo eran las viscosidades de cizalla y volumétrica y la conductividad térmica. A su vez todas las velocidades de propagación permanecían finitas. Varios años después, Geroch y Lindblom ampliaron este análisis y elaboraron una teoría general donde todas las ecuaciones dinámicas estaban representadas por ecuaciones de divergencia total [46, 47]. Este tipo de descripciones se denominan Teorías Tipo Divergencia (DTT por sus siglas en inglés) y fueron desarrolladas posteriormente por otros

autores [48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56].

Las ecuaciones de las DTTs se expresan en términos de la divergencia covariante total de sus variables, lo cual permite analizar con claridad los criterios de hiperbolicidad, de causalidad y del problema de valores iniciales. Toda su dinámica está determinada por un único funcional generador escalar y una fuente de disipación, siendo ambas cantidades funciones algebraicas de los grados de libertad hidrodinámicos, lo cual permite plasmar la teoría en una forma matemática muy simple. Otra característica central es que el flujo de entropía se introduce como una función algebraica y local de las variables hidrodinámicas cuya divergencia es definida positiva sólo en virtud de sus ecuaciones dinámicas. Este hecho garantiza que la Segunda Ley se cumpla automáticamente a todo orden, a diferencia de las teorías tipo Termodinámica Irreversible Extendida que deben asegurar su cumplimiento a través de la construcción orden por orden [57].

Otras SOTs son: la teoría BRSSS resumada [27], la teoría DNMR [58], la Hidrodinámica Anisótropa [8], las vinculadas al principio variacional de producción de entropía [59] y otras teorías que pueden ser derivadas de la ecuación de Boltzmann con parametrizaciones particulares de la función de distribución microscópica.

En esta tesis elegimos trabajar con las SOTs y en particular con DTTs conformes. Estas últimas, como muchas otras teorías hidrodinámicas, pueden construirse tanto a partir de la Teoría Cinética microscópica como desde una perspectiva fenomenológica macroscópica. En la Sección 2.5 mostramos cómo construir una teoría hidrodinámica conforme, cuyas ecuaciones finales son análogas a las de una DTT generalizada, a partir del enfoque microscópico. Esta teoría hidrodinámica será utilizada en la Parte II a la hora de modelar el plasma primordial del universo temprano. Complementariamente en el Capítulo 3 nos encargamos de desarrollar una DTT generalizada conforme a partir de una construcción fenomenológica basada en el funcional generador y las simetrías de los grados de libertad de la teoría.

2.5. Ansatz exponencial, Teoría Cinética y DTTs

El objetivo de esta sección es deducir un esquema de ecuaciones hidrodinámicas a partir de la ecuación de Boltzmann y un ansatz particular para la función de distribución de una partícula (1pdf por sus siglas en inglés). Finalmente veremos que la dinámica de la teoría descripta puede escribirse como un sistema de ecuaciones de divergencias totales.

Consideramos por simplicidad un fluido de partículas clásicas distinguibles en el régimen relativista. Por lo tanto la 1pdf de equilibrio es la generalización de la distribución de Maxwell-Boltzmann al caso relativista, es decir la 1pdf de Maxwell-Jüttner [2, 3]. No obstante la extensión a la estadística cuántica, ya sea de Bose-Einstein o de Fermi-Dirac, es directa.

En efecto la 1pdf de equilibrio de Maxwell-Jüttner es

$$f = e^{\alpha + \beta_\mu p^\mu} \quad (2.34)$$

con $\alpha = \mu/T$, μ el potencial químico, T la temperatura, $\beta_\mu = u_\mu/T$, u^μ la cuadrivelocidad y p_μ el cuádrimomento. La corriente de partículas y el EMT son momentos de la distribución tal que

$$N^\mu = \int Dp \, p^\mu f(x^\mu, p^\mu) \quad (2.35)$$

$$T^{\mu\nu} = \int Dp \, p^\mu p^\nu f \quad (2.36)$$

con Dp la medida de integración invariante

$$Dp = 4\pi \frac{d^4 p_\mu}{(2\pi)^4 \sqrt{-g}} \delta(m^2 + p^2) \theta(p^0) . \quad (2.37)$$

La ecuación de evolución de la 1pdf es la ecuación de Boltzmann y en este contexto es

$$p^\mu \nabla_\mu f = I_{\text{col}}[f] , \quad (2.38)$$

donde I_{col} es el término de colisiones que tiene en cuenta las interacciones. Como $f(x^\mu, p_\mu)$ es un escalar del espacio de fases el operador ∇_μ aplicado a f es la derivada covariante del espacio de fases².

Las ecuaciones de transferencia $\nabla_\mu N^\mu = 0$ y $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ se deducen a partir los respectivos momentos a la ecuación de Boltzmann (2.38) usando que la integral de colisiones debe cumplir $I_{\text{col}}[f_{\text{eq}}] = 0$ y $\int Dp \, I_{\text{col}}[f] = \int Dp \, p^\mu I_{\text{col}}[f] = 0$ [3]. En [60] hemos mostrado que este procedimiento es aplicable para describir materia incluso en geometrías extendidas.

²Este operador contiene un término extra, con respecto a la derivada covariante usual, vinculado a las derivadas parciales respecto a p_μ [3, 55].

Por otra parte el flujo de entropía queda definido por

$$S^\mu = \int Dp \, p^\mu f [1 - \ln f] . \quad (2.39)$$

El teorema H implica que, si f es solución de la ecuación de Boltzmann, la divergencia de la expresión (2.39) es

$$\nabla_\mu S^\mu = - \int Dp \, \ln f \, I_{\text{col}}[f] \geq 0 , \quad (2.40)$$

de modo que la Segunda Ley, $\nabla_\mu S^\mu \geq 0$, queda garantizada por la condición (2.40) sobre la integral de colisiones. A su vez si $f = f_{\text{eq}}$ entonces $\nabla_\mu S^\mu = 0$.

La construcción de una DTT disipativa (no ideal) a partir de Teoría Cinética se realiza incorporando los grados de libertad no ideales $\zeta^{\mu\nu}$ (análogos a $\Pi^{\mu\nu}$) a la 1pdf. Tomemos una parametrización de la 1pdf de modo que

$$f \rightarrow \bar{f}[x, p; \zeta] \quad (2.41)$$

donde ζ representa todas las variables hidrodinámicas $\zeta^A = (\alpha, \beta^\mu, \zeta^{\mu\nu})$. Las ecuaciones macroscópicas suficientes para cerrar el sistema se obtienen tomando momentos de la ecuación de Boltzmann según

$$\int Dp \, R_A[x, p; \zeta] \, p^\mu \nabla_\mu \bar{f}[x, p; \zeta] = \int Dp \, R_A[x, p; \zeta] \, I_{\text{col}}[\bar{f}] \quad (2.42)$$

con $R_A[x, p; \zeta]$ los ‘pesos’ de cada promedio. El flujo de entropía vinculado a esta nueva $\bar{f}$ se lee

$$\bar{S}^\mu = \int Dp \, p^\mu \bar{f} [1 - \ln \bar{f}] . \quad (2.43)$$

La producción entropía entonces es

$$\nabla_\mu \bar{S}^\mu = - \int Dp \, \ln \bar{f} \, p^\mu \nabla_\mu \bar{f} . \quad (2.44)$$

Aquí no podemos usar el teorema H y asegurar que la expresión para la producción de entropía (2.44) sea definida positiva porque $\bar{f}$ no es una solución de la ecuación de Boltzmann. Sin embargo

podemos asumir el siguiente ansatz exponencial

$$\ln \bar{f} = \sum_A \zeta^A R_A \quad (2.45)$$

y apelando a las ecuaciones (2.42) obtener

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \bar{S}^\mu &= - \sum_A \zeta^A \int Dp R_A p^\mu \nabla_\mu \bar{f} \\ &= - \sum_A \zeta^A \int Dp R_A I_{\text{col}} [\bar{f}] \\ &= - \int Dp \ln \bar{f} I_{\text{col}} [\bar{f}] \geq 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Ahora sí, asumiendo la relación (2.45), la condición de producción positiva de entropía queda asegurada a través de una propiedad de la integral de colisiones (2.46). De esta forma concluimos que un ansatz exponencial para la 1pdf del tipo (2.45) es termodinámicamente aceptable.

Estamos interesados en analizar el fluido con simetría conforme. La relación microscópica que determina el caso conforme es $p^\mu p_\mu = m^2 = 0$ con m la masa de las partículas que constituyen el fluido. Es posible que el caso conforme no sea exactamente no masivo sino que las partículas sean relativistas y su energía total E_m cumpla $E_m \gg m$ en cuyo caso el sistema es efectivamente no masivo y aproximadamente conforme. En cualquier escenario, como el número de partículas no se conserva, la corriente N^μ no está presente y $T_\mu^\mu = 0$, en consecuencia los grados de libertad de la teoría conforme son $9 = 14 - 5$. Las variables hidrodinámicas son α , β^μ y $\zeta^{\mu\nu}$ (simétrico), para compatibilizar con el número de grados de libertad no alcanza con fijar $\alpha = 0$ y asumir que $\zeta_\mu^\mu = 0$, sino que debemos imponer además que $\beta_\mu \zeta^{\mu\nu} = 0$. Esto introduce un pequeño problema puesto que β_μ y $\zeta_{\mu\nu}$ ya no serían variables independientes. Para resolverlo se suelen deducir las ecuaciones hidrodinámicas como si lo fueran y recién luego imponer el vínculo. Cabe destacar que pueden existir teorías que se vuelvan triviales o inconsistentes al imponer el vínculo.

A su vez, las ecuaciones hidrodinámicas para el ansatz exponencial conforme más simple³,

³La teoría hidrodinámica desarrollada a partir de este ansatz es formalmente equivalente a la DTT que construimos fenomenológicamente en el Capítulo 3.

$\bar{f} = \exp \{ \beta^\mu p_\mu + \zeta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \}$, resultan ser

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.47)$$

$$\nabla_\mu A^{\mu\nu\rho} = I^{\nu\rho} \quad (2.48)$$

con

$$A^{\mu\nu\rho} = \int Dp \, p^\mu p^\nu p^\rho \bar{f} \quad (2.49)$$

$$I^{\nu\rho} = \int Dp \, p^\nu p^\rho I_{col} [f] . \quad (2.50)$$

Es decir que contamos con 13 ecuaciones para 9 grados de libertad. Una solución es descartar 4 ecuaciones proyectando la expresión (2.48) con el proyector simétrico, transversal y sin traza

$$\Lambda_{\sigma\lambda}^{\nu\rho} = \frac{1}{2} \left[\Delta_\sigma^\nu \Delta_\lambda^\rho + \Delta_\lambda^\nu \Delta_\sigma^\rho - \frac{2}{3} \Delta^{\nu\rho} \Delta_{\sigma\lambda} \right] , \quad (2.51)$$

de forma que ahora contamos con las siguientes 9 ecuaciones

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu\nu} &= 0 \\ \Lambda_{\sigma\lambda}^{\nu\rho} \left[\nabla_\mu A^{\mu\sigma\lambda} - I^{\sigma\lambda} \right] &= 0 , \end{aligned} \quad (2.52)$$

para los 9 grados de libertad de la teoría. En la construcción desde teoría cinética, la proyección en la ecuación (2.52) surge naturalmente a partir de la propiedad $\beta_\mu \zeta^{\mu\nu} = 0$.

Básicamente estamos descartando las ecuaciones

$$u_\rho [\nabla_\mu A^{\mu\nu\rho} - I^{\nu\rho}] = 0 , \quad (2.53)$$

o, en otras palabras, asumiendo que $I^{\nu\rho}$ es tal que su proyección longitudinal $u_\nu I^{\nu\rho}$ asegura la existencia de soluciones de la ecuación (2.53) con el vínculo $\beta_\mu \zeta^{\mu\nu} = 0$. En consecuencia es posible que $u_\nu I^{\nu\rho}$ ya no sea una función algebraica de las variables hidrodinámicas y por eso denominamos a estas teorías hidrodinámicas como DTT generalizadas. Cabe destacar que sólo la parte transversal de $I^{\nu\rho}$ contribuye a la producción de entropía.

Las generalidades sobre el conteo de grados de libertad y ecuaciones en el caso conforme

son independientes del ansatz elegido. Diferentes ansatz exponenciales, incluido el caso simple expuesto más arriba, han sido estudiados en [53, 55, 61]. No resulta trivial que cualquier ansatz recupere el comportamiento hidrodinámico adecuado. Por ejemplo surgen problemas de convergencia en las integrales al tomar los momentos de la ecuación de Boltzmann y construir las ecuaciones [53]. Incluso regularizando los problemas de convergencia, los modelos deben ser capaces de ser aplicados a los casos donde existen soluciones exactas y reproducir aproximadamente su comportamiento. En [55] se ha presentado un ansatz particular que funciona muy bien en los casos conformes del flujo de Bjorken y Gubser. La comparación entre la solución de las ecuaciones hidrodinámicas y la solución exacta proveniente de la ecuación de Boltzmann muestran un amplio acuerdo. La teoría hidrodinámica resultante de este ansatz la describimos en la próxima sección.

2.5.1. Un ansatz particular

El ansatz conforme del cual partimos para obtener la teoría hidrodinámica es

$$\bar{f} = \exp \left\{ \beta^\mu p_\mu + \frac{1}{(-u^\mu p_\mu)} \zeta^{\nu\rho} p_\nu p_\rho \right\}. \quad (2.54)$$

Según la ecuación (2.42) y el ansatz (2.54), los ‘pesos’ R_A de las variables hidrodinámicas β^μ y $\zeta^{\mu\nu}$ son $R_\mu = p_\mu$ y

$$R^{\nu\rho} = \frac{1}{(-u^\mu p_\mu)} \Lambda_{\sigma\lambda}^{\nu\rho} p^\sigma p^\lambda \quad (2.55)$$

respectivamente. Las ecuaciones hidrodinámicas entonces son

$$\int Dp \, p^\nu p^\mu \nabla_\mu \bar{f} = 0 \quad (2.56)$$

y

$$\int Dp \, R^{\nu\rho} p^\mu \nabla_\mu \bar{f} = \int Dp \, R^{\nu\rho} I_{col} [f] \quad (2.57)$$

que pueden escribirse como

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.58)$$

$$\Lambda_{\sigma\lambda}^{\nu\rho} \left[\nabla_\mu A^{\mu\sigma\lambda} - K^{\sigma\lambda\tau\mu} \nabla_\mu u_\tau - I^{\sigma\lambda} \right] = 0 \quad (2.59)$$

donde

$$T^{\sigma\lambda} = \int Dp \, p^\sigma p^\lambda \bar{f} \quad (2.60)$$

$$A^{\mu\sigma\lambda} = \int Dp \, \frac{p^\mu p^\sigma p^\lambda}{(-u^\tau p_\tau)} \bar{f} \quad (2.61)$$

$$K^{\sigma\lambda\tau\mu} = \int Dp \, \frac{p^\mu p^\sigma p^\lambda p^\tau}{(-u^\eta p_\eta)^2} \bar{f} \quad (2.62)$$

$$I^{\sigma\lambda} = \int Dp \, \frac{p^\sigma p^\lambda}{(-u^\mu p_\mu)} I_{col} [\bar{f}] . \quad (2.63)$$

Las ecuaciones finales a las que llegamos son análogas a las de una DTT. No obstante dado que el ansatz presenta un factor extra $1/(u^\mu p_\mu)$ que genera una dependencia explícita con las coordenadas en el funcional generador y ya no es posible deducir las ecuaciones con el procedimiento usual. Una posibilidad para eludir este problema y construir un funcional generador generalizado del cual deducir la dinámica, es tratar al vector u^μ de este factor como un campo externo a la teoría y recién luego de obtener las ecuaciones vincularlo con la cuadrivelocidad [55].

Nada asegura que esta teoría con un único tensor $\zeta^{\mu\nu}$ como variable de no equilibrio sea suficientemente realista, sin embargo es un buen primer paso en una escala creciente de complejidad. En la Parte II de esta tesis, en particular en la Sección 6.3.2 aplicamos esta teoría hidrodinámica para modelar el plasma primordial en el universo temprano.

2.6. Fluctuaciones hidrodinámicas y DTTs

Uno de los resultados más importantes en la mecánica estadística y la termodinámica avanzada es el teorema de fluctuación-disipación [62] que implica esencialmente que la disipación y las fluctuaciones térmicas son fenómenos inescindibles. La presencia de disipación genera fluctuaciones y viceversa. Los desarrollos hidrodinámicos reportados en las secciones previas consideran fluidos con efectos disipativos. En consecuencia es necesario incorporar fluctuaciones en dichos modelos independientemente del régimen relativista o clásico [4].

Las fluctuaciones puede provenir de diferentes fuentes, no obstante las propias fluctuaciones térmicas dadas por el teorema de fluctuación-disipación siempre está presentes en sistemas reales. Eventualmente en algunos casos pueden ser despreciables pero no *a priori*. Cuando consideramos un fluido real las llamadas fluctuaciones hidrodinámicas serán las inducidas por las propias

fluctuaciones térmicas del fluido.

Landau y Lifshitz [19, 63, 64, 65, 66] fueron pioneros en el desarrollo de las fluctuaciones hidrodinámicas, al aplicar el teorema de fluctuación-disipación a la ecuación de Navier-Stokes. Las fluctuaciones hidrodinámicas en una teoría relativista fueron estudiadas en [39] y, en el contexto de las DTTs, en [49]. Desde el punto de vista fenomenológico las fluctuaciones generadas por el ruido térmico son relevantes para el cálculo de los coeficientes de transporte del fluido [67, 68, 69], renormalizando sus valores o incluso generando que los coeficientes adquieran una dependencia con la escala de energía, y para el fenómeno de colas pesadas, el cual produce que las correlaciones permanezcan en el tiempo y no decaigan exponencialmente [70, 71, 72, 73, 74, 75, 76]. El ruido, ya sea térmico o no, también puede desempeñar un papel importante en los fenómenos del Universo temprano como la inducción del campo magnético primordial [77, 78] y las transiciones de fase [79, 80].

Landau y Lifshitz propusieron incorporar las fluctuaciones en las teorías hidrodinámicas a través de un nuevo término estocástico $\Pi_s^{\mu\nu}$ en el EMT, cuya función de correlación está determinada por el teorema de fluctuación-disipación. El proceso cualitativo de construcción del EMT puede resumirse en

$$T^{\mu\nu} \rightarrow T_0^{\mu\nu} \rightarrow T_0^{\mu\nu} + \Pi^{\mu\nu} \rightarrow T_0^{\mu\nu} + \Pi^{\mu\nu} + \Pi_s^{\mu\nu}. \quad (2.64)$$

En efecto el teorema de fluctuación-disipación para la hidrodinámica de Landau-Lifshitz [49] implica que la autocorrelación de $\Pi_s^{\mu\nu}$ corresponde a ruido blanco gaussiano con una amplitud determinada por los coeficientes de transporte y la temperatura. En particular en el caso conforme la única combinación posible es

$$\langle \Pi_s^{\mu\nu}(x) \Pi_s^{\rho\sigma}(x') \rangle = 2\eta T \left[\Delta^{\mu\rho} \Delta^{\nu\sigma} + \Delta^{\mu\sigma} \Delta^{\nu\rho} - \frac{2}{3} \Delta^{\mu\nu} \Delta^{\rho\sigma} \right] \delta^{(4)}(x, x') \quad (2.65)$$

con $\delta^{(4)}(x, x')$ una 4-delta covariante. La fórmula (2.65) es la generalización de las fluctuaciones hidrodinámicas de las ecuaciones de Navier-Stokes [63] al caso relativista.

En el Capítulo 4 llevamos a cabo la incorporación de fluctuaciones a la DTT generalizada desarrollada en el Capítulo 3 y estudiamos su impacto en la dinámica a través del estudio de las funciones de correlación de la teoría.

Capítulo 3

Construcción fenomenológica de las DTTs

Entre todas las posibles SOTs, elegimos una DTT para construir una extensión mínima de la Hidrodinámica de Landau-Lifshitz que asegure el cumplimiento de la Segunda Ley de manera no perturbativa, y cuyas ecuaciones formen un sistema hiperbólico. Construiremos la teoría en el caso conforme desde un enfoque fenomenológico (no microscópico) a partir del funcional generador. La dinámica del fluido neutro estará determinada por las leyes de conservación del EMT y de un nuevo tensor de tercer orden $A^{\mu\nu\rho}$ que codifica las propiedades no ideales del fluido. La teoría se completa considerando una corriente de entropía S^μ cuya ecuación de conservación impone la segunda ley de la Termodinámica. Las simetrías básicas de los tensores son: $T^{\mu\nu}$ simétrico y sin traza y $A^{\mu\nu\rho}$ totalmente simétrico y de traza nula en cualesquiera dos índices [81].

En la Sección 3.1 construimos una teoría de orden superior a la Hidrodinámica de Landau-Lifshitz (ver Sección 2.3) considerando un funcional generador con perturbaciones de segundo orden respecto del equilibrio. Luego, calculamos los tensores relevantes que describen al fluido y establecemos explícitamente la dinámica general de la teoría. En la Sección 3.2 analizamos las ecuaciones de evolución linealizadas de los modos de cada sector escalar, vectorial y tensorial. A partir de las velocidades de propagación de cada sector definimos una aproximación denominada régimen ‘incompresible’ de la teoría dentro del cual los modos escalares pueden descartarse. En el próximo capítulo estudiamos las fluctuaciones hidrodinámicas de esta teoría dentro de dicha aproximación.

3.1. DTT conforme más allá de la Hidrodinámica de Landau-Lifshitz

Las DTTs son teorías hidrodinámicas físicamente consistentes con la termodinámica y la Relatividad General, cuyas ecuaciones dinámicas pueden escribirse como la divergencia total de las variables hidrodinámicas.

En este capítulo construimos una DTT generalizada con simetría conforme. En consecuencia la conservación del número de partículas no es un requisito físico y toda la dinámica vinculada a la corriente de partículas N^μ puede descartarse. En efecto, las variables hidrodinámicas estarán descritas sólo por el EMT, que además cumple que $T^\mu_\mu = 0$. Las ecuaciones de tipo divergencia que definen la teoría son

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla_\mu A^{\mu\nu\rho} = I^{\nu\rho}, \quad (3.2)$$

La ecuación (3.1) es la ecuación de conservación usual y (3.2) describe la dinámica de los efectos disipativos de la teoría. En nuestro caso, los tensores $A^{\mu\nu\rho}$ e $I^{\mu\nu}$ son funciones algebraicas de las variables dinámicas, totalmente simétricos y libres de traza en cualquiera de sus índices. Por su parte $I^{\mu\nu}$ define los efectos disipativos y por lo tanto es una fuente de irreversibilidad y entropía que en equilibrio debe anularse.

El conteo de grados de libertad para fluidos conformes y sus inconvenientes están comentados en la Sección 2.5. Aquí simplemente recordamos que los parametrizamos con las variables β_μ y $\zeta_{\mu\nu}$. Ambas serán independientes a la hora de desarrollar la teoría pero una vez halladas las ecuaciones es necesario imponer las propiedades $\zeta^\mu_\mu = \beta_\mu \zeta^{\mu\nu} = 0$ para obtener el conteo correcto.

Para completar la teoría es fundamental definir el flujo de entropía S^μ , también como una función algebraica de las variables, que cumplirá $\nabla_\mu S^\mu \geq 0$ para cualquier configuración física en virtud del cumplimiento de (3.1) y (3.2). Una de las hipótesis más importante de la DTT es que la forma local de la primera ley de la Termodinámica sea

$$dS^\mu = -\beta_\nu dT^{\mu\nu} - \zeta_{\nu\rho} dA^{\mu\nu\rho}, \quad (3.3)$$

donde notamos que las variables β_μ y $\zeta_{\mu\nu}$ son multiplicadores de Lagrange que aseguran el cumplimiento de las ecuaciones dinámicas. La producción de entropía queda determinada por

$$\nabla_\mu S^\mu = -\zeta_{\nu\rho} I^{\mu\nu}. \quad (3.4)$$

Por lo expuesto arriba diremos que $\zeta^{\mu\nu}$ codifica las propiedades no ideales del fluido.

Finalmente la Segunda Ley está asegurada siempre y cuando

$$\zeta_{\mu\nu} I^{\mu\nu} \leq 0. \quad (3.5)$$

La ecuación (3.5) guía la construcción de las posibles fuentes de entropía $I^{\mu\nu}$. Es posible definir una nueva cantidad, la función de densidad de Massieu Φ^μ [46, 47], a partir de la siguiente transformada de Legendre

$$\Phi^\mu = S^\mu + \beta_\nu T^{\mu\nu} + \zeta_{\nu\rho} A^{\mu\nu\rho}. \quad (3.6)$$

Usando la forma local de la Primera Ley (3.3) es directo ver que

$$\frac{\partial \Phi^\mu}{\partial \beta_\nu} = T^{\mu\nu}, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \Phi^\mu}{\partial \zeta_{\nu\rho}} = A^{\mu\nu\rho}. \quad (3.8)$$

Más aún, dada la simetría de $T^{\mu\nu}$, la relación (3.7) permite escribir [82]

$$\Phi^\mu = \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_\mu}. \quad (3.9)$$

En este caso la teoría queda completamente definida por una función escalar Φ y por el tensor $I^{\mu\nu}$, sujeto a la ecuación (3.5). Ambas cantidad serán funciones locales de las variables dinámicas β^μ y $\zeta^{\mu\nu}$.

Comenzamos por construir la función generadora Φ según

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 \quad (3.10)$$

donde cada término del lado derecho representa desviaciones respecto del equilibrio de orden 0 (equilibrio), orden 1 y orden 2 respectivamente.

En equilibrio $\zeta^{\mu\nu} = 0$, entonces

$$\Phi_0 = \phi_0(X) \quad (3.11)$$

con $X = \beta_\mu \beta^\mu$. A su vez

$$\Phi_0^\mu = 2\beta^\mu \phi_0'(X) , \quad (3.12)$$

$$T_0^{\mu\nu} = 4\beta^\mu \beta^\nu \phi_0''(X) + 2g^{\mu\nu} \phi_0'(X) . \quad (3.13)$$

Como $T_\mu^\mu = 0$, obtenemos la relación

$$0 = 4 [X \phi_0'' + 2\phi_0'] . \quad (3.14)$$

La única opción para ϕ_0 es

$$\phi_0 = -\frac{\sigma}{6} X^{-1} , \quad (3.15)$$

con σ una constante que fija la densidad de energía en equilibrio. En consecuencia

$$\Phi_0^\mu = \frac{\sigma}{3} \beta^\mu X^{-2} \quad (3.16)$$

$$T_0^{\mu\nu} = \sigma X^{-2} \left[-X^{-1} \beta^\mu \beta^\nu + \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} \right] . \quad (3.17)$$

Para los términos de primer orden tenemos que

$$\Phi_1 = \phi_1(X) \zeta_\lambda^\lambda + \phi_2(X) \zeta_{\lambda\sigma} \beta^\lambda \beta^\sigma \quad (3.18)$$

$$\Phi_1^\mu = 2\beta^\mu \left[\phi_1'(X) \zeta_\lambda^\lambda + \phi_2'(X) \zeta_{\lambda\sigma} \beta^\lambda \beta^\sigma \right] + 2\phi_2(X) \zeta_\sigma^\mu \beta^\sigma \quad (3.19)$$

por lo cual

$$\begin{aligned} T_1^{\mu\nu} &= 4\beta^\mu \beta^\nu \left[\phi_1''(X) \zeta_\lambda^\lambda + \phi_2''(X) \zeta_{\lambda\sigma} \beta^\lambda \beta^\sigma \right] + 2g^{\mu\nu} \left[\phi_1'(X) \zeta_\lambda^\lambda + \phi_2'(X) \zeta_{\lambda\sigma} \beta^\lambda \beta^\sigma \right] \\ &+ 4\phi_2'(X) (\zeta_\sigma^\mu \beta^\nu + \zeta_\sigma^\nu \beta^\mu) \beta^\sigma + 2\phi_2(X) \zeta^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.20)$$

y

$$A_1^{\mu\nu\rho} = 2\beta^\mu \left[\phi_1'(X) g^{\nu\rho} + \phi_2'(X) \beta^\nu \beta^\rho \right] + \phi_2(X) (g^{\mu\nu} \beta^\rho + g^{\mu\rho} \beta^\nu) . \quad (3.21)$$

Para obtener las ecuaciones finales imponemos las condiciones $\zeta_\lambda^\lambda = \zeta_{\lambda\sigma}\beta^\sigma = 0$. Dado $A^{\mu\nu\rho}$ debe ser totalmente simétrico tenemos que $\phi_2 = 2\phi'_1$. A su vez como tiene traza nula en cualquier para de índices $X\phi'_2 + 3\phi_2 = 0$. Entonces

$$\phi_2 = -\frac{a}{2}X^{-3} \quad (3.22)$$

con a una constante que fija la amplitud de las desviaciones de primer orden respecto del equilibrio. Su valor preciso dependerá del sistema físico considerado. Los tensores finales a primer orden son

$$\Phi_1^\mu = 0 \quad (3.23)$$

$$T_1^{\mu\nu} = -aX^{-3}\zeta^{\mu\nu} \quad (3.24)$$

$$A_1^{\mu\nu\rho} = 3aX^{-4}\beta^\mu\beta^\nu\beta^\rho - \frac{1}{2}aX^{-3}(g^{\mu\nu}\beta^\rho + g^{\mu\rho}\beta^\nu + g^{\nu\rho}\beta^\mu) . \quad (3.25)$$

Por último tenemos la contribución de segundo orden al funcional generador. En la ecuación (3.26) Dejamos afuera términos que darán contribuciones nulas a los tensores finales cuando apliquemos los vínculos. Así

$$\Phi_2 = \phi_3(X)\zeta_\lambda^{2\lambda} + \phi_4(X)\zeta_{\lambda\sigma}^2\beta^\lambda\beta^\sigma \quad (3.26)$$

y

$$\Phi_2^\mu = 2\phi'_3(X)\zeta_\lambda^{2\lambda}\beta^\mu + 2\phi'_4(X)\zeta_{\lambda\sigma}^2\beta^\lambda\beta^\sigma\beta^\mu + \phi_4(X)\zeta_{\lambda\sigma}^2\left[g^{\lambda\mu}\beta^\sigma + g^{\sigma\mu}\beta^\lambda\right] , \quad (3.27)$$

para lo cual usamos la notación $B_\lambda^{2\lambda} = B^{\lambda\rho}B_{\rho\lambda}$ y $B_{\mu\nu}^2 = B_{\mu\lambda}B_\nu^\lambda$. En consecuencia

$$T_2^{\mu\nu} = 4\phi''_3(X)\zeta_\lambda^{2\lambda}\beta^\mu\beta^\nu + 2\phi'_3(X)\zeta_\lambda^{2\lambda}g^{\mu\nu} + \phi_4(X)\zeta_{\lambda\sigma}^2\left[g^{\lambda\mu}g^{\sigma\nu} + g^{\lambda\nu}g^{\sigma\mu}\right] \quad (3.28)$$

y

$$A_2^{\mu\rho\sigma} = 8\phi'_3(X)\zeta^{\rho\sigma}\beta^\mu + 2\phi_4(X)\left[\zeta^{\rho\mu}\beta^\sigma + \zeta^{\sigma\mu}\beta^\rho\right] . \quad (3.29)$$

A partir de $T_{2\mu}^\mu = 0$ llegamos a

$$4X\phi''_3 + 8\phi'_3 + 2\phi_4 = 0 \quad (3.30)$$

y a partir de las simetrías de $A^{\mu\nu\rho}$ obtenemos $\phi_4 = 4\phi'_3$. Finalmente nos queda

$$\begin{aligned}\Phi_2^\mu &= \frac{b}{4} X^{-4} \beta^\mu \zeta_\lambda^{2\lambda} \\ T_2^{\mu\nu} &= b X^{-4} \left[\zeta^{2\mu\nu} + \frac{1}{4} (g^{\mu\nu} - 8 X^{-1} \beta^\mu \beta^\nu) \zeta_\lambda^{2\lambda} \right]\end{aligned}\quad (3.31)$$

$$A_2^{\mu\nu\rho} = \frac{b}{2} X^{-4} (\zeta^{\mu\nu} \beta^\rho + \zeta^{\mu\rho} \beta^\nu + \zeta^{\nu\rho} \beta^\mu) \quad (3.32)$$

con b otra constante que fija la amplitud de las desviaciones de segundo orden.

La densidad de energía queda determinada por

$$\rho = -X^{-1} \beta_\nu \beta_\mu T^{\mu\nu} = X^{-2} \left[\sigma + \frac{7}{4} b X^{-2} \zeta_\lambda^{2\lambda} \right] \quad (3.33)$$

y la corriente de entropía es

$$S^\mu = \frac{4}{3} \sigma \beta^\mu X^{-2} + \frac{3}{2} b X^{-4} \beta^\mu \zeta_\lambda^{2\lambda} \approx \frac{4}{3} \rho \beta^\mu \left[1 - \frac{5}{8} \frac{b}{\sigma} X^{-2} \zeta_\lambda^{2\lambda} \right], \quad (3.34)$$

en la última igualdad se descartan términos de tercer orden. Es conveniente aplicar el siguiente cambio en las variables y constantes

$$\zeta^{\mu\nu} = -\sqrt{\frac{\sigma}{b}} X Z^{\mu\nu} \quad (3.35)$$

$$a = \alpha \sqrt{b\sigma} \quad (3.36)$$

y así obtener las expresiones de los tensores

$$T^{\mu\nu} = \sigma X^{-2} \left[-X^{-1} \beta^\mu \beta^\nu + \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} + \alpha Z^{\mu\nu} + Z^{2\mu\nu} + \frac{1}{4} (g^{\mu\nu} - 8 X^{-1} \beta^\mu \beta^\nu) Z_\lambda^{2\lambda} \right] \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned}A^{\mu\nu\rho} &= \frac{1}{2} a X^{-4} \{ 6 \beta^\mu \beta^\nu \beta^\rho - X [g^{\mu\nu} \beta^\rho + g^{\mu\rho} \beta^\nu + g^{\nu\rho} \beta^\mu \\ &+ \alpha^{-1} (Z^{\mu\nu} \beta^\rho + Z^{\mu\rho} \beta^\nu + Z^{\nu\rho} \beta^\mu)] \} \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$S^\mu = \frac{4}{3} \sigma \beta^\mu X^{-2} \left[1 + \frac{9}{8} Z_\lambda^{2\lambda} \right]. \quad (3.39)$$

Por análisis dimensional $X^{-1} = -T^2$, donde T tiene unidades de temperatura, y $Z^{\mu\nu}$ no tiene dimensiones. Si asumimos que $\beta^\mu = u^\mu/T$ las relaciones constitutivas de la teoría toman la forma

$$T^{\mu\nu} = \sigma T^4 \left[\left(1 + \frac{7}{4} Z_{\lambda}^{2\lambda} \right) \left(u^\mu u^\nu + \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} \right) + \alpha Z^{\mu\nu} + \left(Z^{2\mu\nu} - \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} Z_{\lambda}^{2\lambda} \right) \right] \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} A^{\mu\nu\rho} &= \frac{1}{2} a T^5 \{ 6 u^\mu u^\nu u^\rho + [g^{\mu\nu} u^\rho + g^{\mu\rho} u^\nu + g^{\nu\rho} u^\mu \\ &\quad + \alpha^{-1} (Z^{\mu\nu} u^\rho + Z^{\mu\rho} u^\nu + Z^{\nu\rho} u^\mu)] \} \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$S^\mu = \frac{4}{3} \sigma u^\mu T^3 \left[1 + \frac{9}{8} Z_{\lambda}^{2\lambda} \right]. \quad (3.42)$$

Para fijar el resto de las constantes pedimos que la teoría converja a primer orden con la Hidrodinámica de Landau-Lifshitz. Esto implica una relación entre la temperatura T y la temperatura de Landau-Lifshitz T_{LL} definida por $\rho = \sigma T_{LL}^4$, de modo que $T = T_{LL} (1 + O(Z^2))$. A su vez debe suceder que

$$\sigma \alpha T^4 Z^{\mu\nu} = -\eta \sigma^{\mu\nu}. \quad (3.43)$$

En esta DTT generalizada, la ecuación dinámica para $A^{\mu\nu\rho}$ es la proyección transversal y sin traza de la ecuación (3.2), a saber

$$\Lambda_{\sigma\lambda}^{\mu\nu} A^{\sigma\lambda\rho}_{;\rho} = \Lambda_{\sigma\lambda}^{\mu\nu} I^{\rho\sigma}. \quad (3.44)$$

con $\Lambda_{\sigma\lambda}^{\mu\nu}$ el proyector definido en (2.51). Dado que el lado izquierdo de la ecuación (3.44) a primer orden es

$$\Lambda_{\sigma\lambda}^{\mu\nu} A^{\sigma\lambda\rho}_{;\rho} = \frac{1}{2} a T^5 \sigma^{\mu\nu}, \quad (3.45)$$

la relación (3.43) implica que el tensor de interacciones viscosas debe ser

$$\Lambda_{\sigma\lambda}^{\mu\nu} I^{\rho\sigma} = -\frac{a \sigma \alpha T^6}{2} \frac{T^3}{\eta} Z^{\mu\nu}. \quad (3.46)$$

A su vez es conveniente introducir el tiempo de relajación τ a través de la prescripción de Anderson-Witting [83, 84, 85]

$$\Lambda_{\sigma\lambda}^{\mu\nu} I^{\rho\sigma} = -\frac{a T^5}{2 \alpha \tau} Z^{\mu\nu} \quad (3.47)$$

y en consecuencia

$$\alpha^2 = \frac{1}{\sigma T \tau} \left(\frac{\eta}{T^3} \right). \quad (3.48)$$

Es posible estimar η a partir de la cota que proviene de la dualidad AdS/CFT [86], $\eta \geq s_0/4\pi$, con $s_0 = (4/3)\sigma T_0^3$ y T_0 la densidad de entropía y temperatura en equilibrio. En la próxima subsección mostramos que para asegurar causalidad $\alpha^2 \leq 2/3$ y entonces $T\tau \geq 3\eta/2\sigma T_0^3 \geq 1/2\pi$.

De aquí en adelante asumimos el límite de propagación libre $\tau \rightarrow \infty$, con lo cual $\alpha \rightarrow 0$. Esta aproximación nos permite acotar el tipo de interacciones relevantes dentro de la teoría como mostramos en la Sección 3.2. En el Capítulo 4 describimos algunos escenarios en los que la aproximación de propagación libre es plausible.

3.2. Velocidades de propagación e ‘incompresibilidad’

Antes de pasar al Capítulo 4, en el que estudiamos las fluctuaciones térmicas de la DTT construida en este capítulo, es importante analizar la dinámica lineal para conocer la propagación de las perturbaciones alrededor de equilibrio. Sabemos que al considerar las ecuaciones de evolución a orden lineal en las variables hidrodinámicas los sectores escalar, vectorial y tensorial quedan desacoplados. En particular vamos a hallar la velocidad de propagación de los modos de cada sector [87] y mostrar que en el límite $\alpha \rightarrow 0$ los modos escalares pueden considerarse congelados y podemos considerar que la dinámica relevantes ocurre entre modos vectoriales y tensoriales. A este régimen lo denominamos incompresible.

Analizamos una situación en la que una discontinuidad se propaga a lo largo de la superficie $z = ct$, con c la velocidad de propagación. Por delante del frente propagante el fluido está en equilibrio en el espacio de Minkowski, con lo cual $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $T = T_0$ es constante, $u^\mu = U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ y $Z^{\mu\nu} = 0$. Las variables hidrodinámicas son continuas en el frente. Cualquier variable $\mathcal{X}$ que permanezca constante en el frente debe cumplir la relación $\dot{\mathcal{X}} = -c\mathcal{X}'$, donde $\mathcal{X}' = \mathcal{X}_{,3}$ y el subíndice 3 se refiere a la coordenada z . Además las condiciones $u^2 = -1$ y $Z^{\mu\nu}u_\nu = 0$ implican que $u^0_{,\rho} = Z^{\mu 0}_{,\rho} = 0$, mientras que la relación $Z^\rho_\rho = 0$ resulta en $Z^a_a = -Z^3_3$ (los índices a, b recorren de 1 a 2, lo que denota las coordenadas x e y).

La teoría se descompone en modos tensoriales $Z^{ab} + (1/2)\delta^{ab}Z^3_3$, que sólo decaen no se propagan, modos vectoriales u^a and Z^{a3} y modos escalares T , u^3 y Z^{33} . Las ecuaciones dinámicas, $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ y $\Lambda^{\mu\nu}_{\rho\lambda}A^{\rho\lambda}_{;\sigma} = 0$ (pues $I^{\mu\nu} = 0$ en el frente), nos llevan a dos sistemas de ecuaciones.

Para los modos vectoriales tenemos

$$u'_a - \frac{c}{\alpha} Z'_{a3} = 0 \quad (3.49)$$

$$-\frac{4}{3}cu'_a + \alpha Z'_{a3} = 0, \quad (3.50)$$

lo cual muestra que se propagan con una velocidad

$$c_V^2 = 3\alpha^2/4. \quad (3.51)$$

Para los modos escalares obtenemos el sistema

$$\frac{4}{3}cu'_3 - \frac{c}{\alpha} Z'_{33} = 0 \quad (3.52)$$

$$\frac{T'}{T_0} - cu'_3 + \frac{3}{4}\alpha Z'_{33} = 0 \quad (3.53)$$

$$-c\frac{T'}{T_0} + \frac{1}{3}u'_3 = 0, \quad (3.54)$$

el cual admite un modo no propagante con $u'_3 = 0$, $T'/T_0 = -(3/4)\alpha Z'_{33}$, y dos modos que se propagan con velocidad

$$c_S^2 = \frac{1}{3} + \alpha^2. \quad (3.55)$$

Para mantener la causalidad relativista se requiere que $\alpha^2 \leq 2/3$. Si $\alpha^2 \ll 2/3$ entonces $c_S \gg c_V$ y concluimos que en este régimen podemos descartar los modos escalares y considerar que la interacción de interés será entre los modos ‘lentos’, i.e. los vectoriales y los tensoriales.

Capítulo 4

Fluctuaciones Hidrodinámicas en las DTTs

La relevancia de las fluctuaciones hidrodinámicas ya han sido comentadas en la Sección 2.6. En términos generales en este capítulo vamos a establecer un esquema auto-consistente que nos permita incorporar fluctuaciones térmicas a la DTT construida en el Capítulo 3 y estudiar su impacto en la dinámica del fluido a través de sus propiedades estadísticas, en particular las correcciones a las funciones de correlación de la teoría. Los desarrollos de este capítulo están basados en [88].

En la literatura sobre fluctuaciones hidrodinámicas en la teoría de Landau-Lifshitz [63], no se hacen distinciones entre fluctuaciones de tipo escalar o vectorial, y naturalmente no se mencionan fluctuaciones tensoriales. Como una característica distintiva de las SOTs es la presencia de modos tensoriales, nos concentramos en el estudio de las fluctuaciones hidrodinámicas puramente tensoriales.

En este escenario a grandes rasgos las fluctuaciones térmicas inducen fuerzas de agitación estocásticas que excitan los modos tensoriales preservando la conservación de la energía. A su vez estos modos excitan modos vectoriales¹ que retroalimentan el sector de spin-2 produciendo así una dinámica no lineal efectiva para los modos tensoriales.

Para abordar el tema de estudio utilizamos métodos de teorías efectivas de campos, que han sido útiles en el estudio de la turbulencia [89, 90, 91] y que continúan siendo una poderosa

¹Como elegimos trabajar en el límite de propagación libre (o de ‘incompresibilidad’), podemos descartar los modos escalares (ver Sección 3.2).

herramienta para analizar fluidos estocásticos [92, 93, 94, 95]. Entre estos métodos, el formalismo de la Acción Efectiva permite expresar las diferentes funciones de correlación de N puntos de la teoría en términos de diagramas en lazos², tal y como se estructura en la teoría cuántica. Este esquema permite ganar cierta intuición sobre cómo interpretar las correlaciones. En este análisis vamos a usar el formalismo de la Acción Efectiva Irreducible de Dos Partículas (2PIEA por sus siglas en inglés), a través del cual escribimos las ecuaciones de evolución para las funciones relevantes de correlación de dos puntos, a saber, los propagadores causal y de Hadamard. Según este método los propagadores se construyen a partir de las contribuciones de todos los diagramas de interacción cerrados que no puedan ser separados cortando dos de sus líneas internas. A estos diagramas se los conoce como diagramas irreducibles de dos partículas (2PI por sus siglas en inglés).

Por otra parte usaremos el formalismo Martin-Siggia-Rose (MSR) [96, 97, 98, 99, 100, 101] como método sistemático para derivar la 2PIEA del sistema, que puede ser evaluada de forma simple a través de una expansión diagramática [101, 102, 103, 104, 105]. Estos métodos ya han sido aplicados a fluidos relativistas en [4, 106, 107, 108]. A su vez para caracterizar las fluctuaciones térmicas usaremos una formulación del teorema de fluctuación-disipación adecuada a las DTTs [49], que recupera las conocidas fluctuaciones hidrodinámicas de Landau-Lifshitz como un caso límite (ver Sección 2.6).

Comenzamos presentando el teorema de fluctuación-disipación en DTTs consistente con una teoría causal [49] y delineamos el formalismo Martin-Siggia-Rose para el cálculo de 2PIEA en la Sección 4.1. Mostramos brevemente cómo este formalismo permite escribir ecuaciones de evolución para los principales propagadores de la teoría, a saber, el propagador causal y la función de dos puntos de Hadamard (o correlación térmica). En la Sección 4.2 estudiamos el efecto de las fluctuaciones lineales alrededor de un estado de equilibrio y encontramos el propagador causal y el de Hadamard al orden más bajo. En la Sección 4.3 ampliamos el análisis para incluir fluctuaciones no lineales.

Decidimos trabajar en el límite de propagación libre que equivale a considerar tiempos de evolución más cortos que el tiempo característico de relajación macroscópico. Incluso en estos tiempos tan tempranos tiene sentido formular una hidrodinámica consistente que actúe como un atractor para la evolución del sistema [6, 109, 110]. La aproximación de propagación libre

²Usamos lazo como traducción del concepto de *loop* en los diagramas de Feynman de la teoría cuántica.

es equivalente al límite $\tau \rightarrow \infty$ que resultó ser apropiado para estudiar las primeras etapas de las RHICs [111]. A su vez como mostramos en la Sección 3.2 en este límite el fluido puede ser considerado ‘incompresible’ y por ello descartamos todos los modos escalares, quedándonos sólo con los vectoriales y tensoriales. En este régimen encontramos que, considerando las interacciones de un lazo causadas por las fluctuaciones y usando la regularización dimensional para tratar las divergencias ultravioletas, la ecuación para el propagador tensorial causal adquiere un nuevo término que renormaliza el tiempo de relajación introduciendo una dependencia con la escala proporcional a la cuarta potencia del momento p . En consecuencia, la función de correlación de Hadamard también adquiere una dependencia con la escala de energía y muestra una transición de un espectro plano, para valores pequeños p , a un espectro que escala como p^{-4} conforme aumenta p .

Antes de continuar, es necesaria una aclaración. Es posible que en el límite $\tau \rightarrow \infty$ una plétora de modos no hidrodinámicos contribuyan a la dinámica. No obstante, hemos optado por considerar sólo los modos tensoriales que describimos en el Capítulo 3. En este sentido el análisis que aquí presentamos es un primer paso en dirección a considerar teorías con complejidad creciente.

Finalmente en la Sección 4.3 discutimos brevemente el efecto de las fluctuaciones tensoriales sobre el valor medio de la entropía. Su espectro sufre una disminución en la amplitud para el rango UV, lo cual podría ser un indicio de la presencia de una cascada inversa de entropía [112].

4.1. La acción efectiva de Martin-Siggia-Rose

En esta sección revisaremos el teorema de fluctuación-disipación apropiado para fluidos reales causales [49] (ver también [39, 113]), y luego usaremos la formulación MSR para construir una Acción Efectiva a partir de la cual podamos obtener las ecuaciones de Dyson para las correlaciones estocásticas de las variables hidrodinámicas vectoriales y tensoriales en el régimen de propagación libre o de ‘incompresibilidad’.

4.1.1. Teorema de fluctuación-disipación para una DTT

Las fluctuaciones hidrodinámicas para la teoría de Landau-Lifshitz se introducen a través de un término estocástico en el EMT cuyas propiedades estadísticas quedan determinada por el

teorema de fluctuación-disipación usual, como muestra la Sección 2.6. Por el contrario cuando se consideran las fluctuaciones térmicas en una DTT, el tensor $I^{\mu\nu}$ que define las interacciones disipativas adquiere una componente estocástica $I^{\mu\nu} \rightarrow I^{\mu\nu} + F^{\mu\nu}$ poniendo en pie de igualdad la disipación y las fluctuaciones [49]. Como veremos en breve las propiedades estocásticas de $F^{\mu\nu}$ quedan determinadas por el teorema de fluctuación-disipación adecuado a estos esquemas hidrodinámicos causales. Las fluctuaciones en el $T^{\mu\nu}$ aparecen al resolver la dinámica considerando esta nueva fuente.

Definimos la siguiente notación abreviada para las variables y tensores relevantes

$$X^A = (\beta^\mu, \zeta^{\mu\nu}), \quad (4.1)$$

$$A_A^\mu = (T^{\mu\nu}, A^{\mu\nu\rho}), \quad (4.2)$$

$$I_B = (0, I_{\mu\nu}) \quad (4.3)$$

$$F_B = (0, F_{\mu\nu}), \quad (4.4)$$

$$S^\mu = \Phi^\mu - X^B A_B^\mu, \quad (4.5)$$

$$A_B^\mu = \frac{\delta \Phi^\mu}{\delta X^B}, \quad (4.6)$$

La producción de entropía está dada por

$$S_{;\mu}^\mu = -X^B A_{B;\mu}^\mu. \quad (4.7)$$

Para incluir las fluctuaciones térmicas agregamos la fuente estocástica F_B en la ecuación de movimiento para A_B^μ que se convierte en la siguiente ecuación tipo-Langevin

$$A_{B;\mu}^\mu = I_B + F_B. \quad (4.8)$$

Una teoría satisfactoria debe predecir que la producción de entropía media es nula en equilibrio, entonces

$$\langle S_{;\mu}^\mu \rangle = -\langle X^B(x) I_B(x) \rangle - \langle X^B(x) F_B(x) \rangle = 0. \quad (4.9)$$

Sin embargo, dado que el límite de coincidencia no está bien definido, imponemos una condición

más restrictiva basada en consideraciones elementales de causalidad

$$\langle X^B(x)I_B(x') \rangle + \langle X^B(x)F_B(x') \rangle = 0 \quad (4.10)$$

para cualquier par (x, x') que sea de tipo espacial. En lo que sigue vamos a asumir que x y x' pertenecen a la misma hipersuperficie de tiempo, es decir $t = t'$. Al orden más bajo I_B es una función lineal de X^C , de modo que

$$\langle X^B(x)I_B(x') \rangle = \int d^3x'' I_{(B,C)} \langle X^B(x)X^C(x'') \rangle. \quad (4.11)$$

con

$$I_{(B,C)} = \frac{1}{2} \left[\frac{\delta I_B(x')}{\delta X^C(x'')} + \frac{\delta I_C(x'')}{\delta X^B(x')} \right]. \quad (4.12)$$

Sólo aparece la derivada simetrizada en (4.11) debido a la simetría de los promedios estocásticos. Asumiendo una distribución Gaussiana de ruido blanco para F_B ,

$$\langle F_B(x)F_C(x') \rangle = \sigma_{BC}(x, x') \delta(t - t'), \quad (4.13)$$

obtenemos que las correlaciones entre los flujos X^A y el ruido es

$$\langle X^A(x)F_B(x') \rangle = \int d^3x'' \sigma_{BC}(x', x'') \frac{\delta X^A(x)}{\delta F_C(x'')}. \quad (4.14)$$

donde $t'' = t'$. El teorema de fluctuación-disipación se deduce a partir de

$$\langle X^B(x)X^C(x') \rangle = 2 \frac{\delta X^B(x)}{\delta F_C(x')} = 2 \frac{\delta X^C(x')}{\delta F_B(x)}, \quad (4.15)$$

cuando $t = t'$, que a su vez implica

$$\langle X^B(x)I_B(x') \rangle = \int d^3x'' I_{(B,C)} \frac{\delta X^B(x)}{\delta F_C(x'')}. \quad (4.16)$$

En efecto, usando las ecuaciones (4.10), (4.12), (4.14) y (4.16) obtenemos

$$\sigma_{BC} = -2 I_{(B,C)}, \quad (4.17)$$

o de forma equivalente

$$\langle F_A(x)F_B(x') \rangle = - \left[\frac{\delta I_A(x)}{\delta X^B(x')} + \frac{\delta I_B(x')}{\delta X^A(x)} \right] \delta(t - t'). \quad (4.18)$$

La ecuación (4.18) es la versión del teorema de fluctuación-disipación compatible con las teorías hidrodinámicas causales. Vamos a usar esta relación para fijar la amplitud de las funciones de correlación de las fluctuaciones térmicas en términos de las propiedades disipativas del fluido. En el límite en que la DTT converge a la Hidrodinámica de Landau-Lifshitz, la correlación de la parte estocástica del EMT converge al conocido ruido de Landau-Lifshitz [63, 64].

Para ver que la ecuación (4.15) se cumple, multiplicamos a ambos lados por la matriz no singular

$$M_{AB} = n_a \frac{\delta^2 \Phi^a}{\delta X^A \delta X^B} \quad (4.19)$$

donde n_μ es el campo unitario normal a la superficie de tiempos que contiene a ambos x y x' . En la aproximación lineal para A_B^μ , el vector generador Φ^μ es cuadrático en X^A y

$$M_{AB}X^B = \frac{\delta(n_a \Phi^a)}{\delta X^A} = -\frac{\delta \Phi^0}{\delta X^A}. \quad (4.20)$$

En equilibrio podemos aplicar la fórmula de Einstein, que relaciona el potencial termodinámico con la función de distribución de las fluctuaciones, para concluir que

$$M_{AB} \langle X^B(x) X^C(x') \rangle = -\delta_A^C \delta^{(3)}(x, x') \quad (4.21)$$

donde $\delta^{(3)}(x, x')$ la función delta tridimensional covariante en la superficie de Cauchy. Básicamente esto es una versión generalizada del teorema de equipartición. Por otro lado

$$M_{AB} \frac{\delta X^B(x)}{\delta F_C(x')} = -\frac{\delta A_A^0(x)}{\delta F_C(x')} \quad (4.22)$$

with $A_A^0 = -n_\mu A_A^\mu$. Es posible escribir las ecuaciones de movimiento (4.8) como

$$\frac{\partial A_A^0(x)}{\partial t} + L_A(x) = F_A(x) \quad (4.23)$$

donde L_A involucra las variables evaluadas en la superficie de tiempo constante, pero no sus

derivadas ortogonales, y $\partial/\partial t := n^\mu \partial/\partial x^\mu$. En efecto

$$\frac{\delta A_A^0(x)}{\delta F_C(x')} = \frac{1}{2} \delta_A^C \delta^{(3)}(x, x'). \quad (4.24)$$

El factor $1/2$ viene de tener en cuenta el promedio de las derivadas evaluadas en $x = x'^-$ y $x = x'^+$. En consecuencia (4.21) y (4.22) son iguales. Dado que la matriz M_{AB} es no singular, mostramos la validez de la ecuación (4.15).

Estos resultados implican que en nuestro caso las fluctuaciones térmicas se expresan a través de un término estocástico $F^{\mu\nu}$ en la ecuación dinámica que describe los efectos no ideales (3.2). Considerando sólo la parte transversal y sin traza de $I^{\mu\nu}$ dada por (3.46)-(3.47), la relación entre las fluctuaciones y la disipación (4.18) determina la amplitud del ruido según

$$\langle F^{\mu\nu}(x) F_{\sigma\lambda}(x') \rangle = N \delta(t - t') \delta^{(3)}(x - x') \Lambda_{\sigma\lambda}^{\mu\nu} \quad (4.25)$$

donde

$$N = \frac{a^2 T_0^7}{\alpha^2 \sigma \tau}. \quad (4.26)$$

4.1.2. Formalismo MSR y la 2PIEA

Las principales herramientas para estudiar la evolución y las propiedades físicas de un sistema estocástico son sus diferentes propagadores, o funciones de Green, que determinan la respuesta del sistema tanto a sus propias fluctuaciones térmicas como a las fluctuaciones en las condiciones iniciales [111, 114, 115]. En el régimen de fluctuaciones fuertes, las correcciones no lineales a las correlaciones se vuelven relevantes [101, 102, 103, 104] y es en este escenario donde los métodos de teoría de campos efectiva, como el MSR, muestran su potencia [96, 97, 98, 100]. Estos métodos han sido aplicados a la teoría de turbulencia, ver [102, 103, 116] y más recientemente para estudiar las fluctuaciones en la Hidrodinámica de Landau-Lifshitz [106, 107].

En este caso vamos a elegir trabajar dentro de la aproximación de propagación libre, $\tau \rightarrow \infty$, en la cual los modos escalares se propagan más rápido que los vectoriales y por lo tanto pueden considerarse congelados y el fluido como ‘incompresible’ (ver Sección 3.2). En efecto la dinámica relevante se ve reducida a la interacción entre los grados de libertad vectoriales y tensoriales, descartando los modos escalares. El formalismo MSR permite convertir la estructura del problema

de las fluctuaciones clásicas en una teoría cuántica de campos, para la cual derivamos la 2PIEA. Este formalismo expresa las ecuaciones de Schwinger-Dyson para los propagadores de la forma más directa.

En hidrodinámica no existe un parámetro ‘pequeño’ único y explícito, análogo a $\hbar$ en la teoría cuántica de campos, que pueda usarse para organizar la expansión perturbativa de las fluctuaciones. Por esta razón se ha propuesto que la expansión en lazos debe entenderse como una expansión en la ‘complejidad de las interacciones’ [102, 103], ya que la suma de términos de orden superior tenderá cancelarse debido a la aleatoriedad de la agitación que producen las fluctuaciones. Por otra parte, es posible identificar parámetros pequeños que sean relevantes para diferentes conjuntos de gráficos restringidos. En el caso que nos ocupa, este análisis sugiere que la expansión en lazos es una expansión en potencias de $(p/p_L)^3$ donde

$$p_L = (c_V^2 \sigma T_0^3)^{1/3}, \quad (4.27)$$

con c_V la velocidad de propagación de los modos vectoriales definida en (3.51). En el apéndice A detallamos el procedimiento. En consecuencia la expansión en lazos será consistente mientras $p < p_L$.

Volvamos a la construcción de la 2PIEA. Usando la notación abreviada en (4.1)-(4.6), las ecuaciones de movimiento pueden escribirse como $P_A = F_A$, con $P_B = A_{B;\mu}^\mu - I_B$. La notación $X^A[F]$ indica la solución a las ecuaciones para una fuente F_A dada. Para las fluctuaciones térmicas tenemos que todos los valores medios $\langle X^A \rangle = 0$. Por lo tanto podemos escribir el funcional generador de las funciones de correlación $\langle X^A X^\beta \rangle$ como

$$e^{iW[K_{AB}]} = \int DX^A \int DF_A \mathcal{P}[F^A] e^{i \int K_{AB} X^A X^B / 2} \delta(X^A - X^A[F]) \quad (4.28)$$

donde $\mathcal{P}[F^A]$ es la densidad de probabilidad gaussiana de la fuente F_A , las corrientes K_{AB} (que se acoplan a las variables de la teoría) son introducidas por el formalismo para derivar las correlaciones necesarias y la integración se realiza sobre todas las posibles realizaciones de las fuentes de ruido. La delta $\delta(X^A - X^A[F])$ asegura evaluar las correlaciones sobre las soluciones

de las ecuaciones de movimiento. Es útil notar el siguiente cambio de variables

$$\delta (X^A - X^A [F]) = \text{Det} \left[\frac{\delta P_A}{\delta X^A} \right] \delta (P_A - F_A) . \quad (4.29)$$

Es posible mostrar que el determinante en (4.29) es una constante [117] y en consecuencia podemos descartarlo o redefinirlo dentro de la normalización de la integral. La introducción de campos auxiliares Y_A permite exponenciar la función delta del lado derecho de (4.29) según

$$e^{iW[K_{AB}]} = \int DY^A \int DX^A \int DF_A \mathcal{P}[F^A] e^{i \int K_{AB} X^A X^B / 2} e^{i \int Y^A (P_A - F_A)} . \quad (4.30)$$

Si las correlaciones del ruido son

$$\langle F_A F_B \rangle = N_{AB} \quad (4.31)$$

obtenemos finalmente

$$e^{iW[K_{AB}]} = \int DY^A \int DX^A e^{iS} e^{i \int K_{AB} X^A X^B / 2} \quad (4.32)$$

con

$$S = \int d^4x \left[Y^A P_A + \frac{i}{2} Y^A N_{AB} Y^B \right] . \quad (4.33)$$

Si bien todo este desarrollo parece muy técnico, hemos logrado mapear el problema de las fluctuaciones hidrodinámicas en una teoría de campos fuera del equilibrio, donde S en la ecuación (4.33) juega el rol de la ‘acción clásica’. En este sentido, avanzamos un paso más, y agregamos formalmente nuevas corrientes (análogas a K_{AB}) acopladas a los nuevos campos auxiliares y consideraremos que todas las componentes de $\mathcal{X}^K = (X^A, Y^A)$ son grados de libertad de la teoría.

La transformada de Legendre del funcional generador es la 2PIEA, $\Gamma[\mathcal{G}^{JK}]$, donde $\mathcal{G}^{JK} = \langle \mathcal{X}^J \mathcal{X}^K \rangle$ representa todas las funciones de correlación existentes en la teoría. Una vez determinada la 2PIEA, las correlaciones reales físicas se obtienen como sus extremos tal que

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \mathcal{G}^{JK}} = 0 \quad (4.34)$$

La 2PIEA tiene la estructura [7]

$$\Gamma = \frac{1}{2} \frac{\delta^2 S}{\delta \mathcal{X}^J \delta \mathcal{X}^K} \Big|_{\mathcal{X}=0} \mathcal{G}^{JK} - \frac{i}{2} \ln \text{Det} [\mathcal{G}^{JK}] + \Gamma_{2Q} \quad (4.35)$$

donde Γ_{2Q} representa la suma de todos los diagramas de Feynman irreducibles de dos partículas de una teoría cuyas interacciones son los términos cúbicos (o de orden superior) en S y cuyos propagadores son $\mathcal{G}^{JK}$.

Dado que $\langle Y^A Y^B \rangle = 0$ [105, 118] y

$$\frac{\delta^2 S}{\delta X^A \delta X^B} \Big|_{\mathcal{X}=0} = \frac{\delta \Gamma_{2Q}}{\delta \langle X^A X^B \rangle} = 0 \quad (4.36)$$

tenemos sólo dos conjuntos de ecuaciones, uno corresponde a la dinámica de los propagadores causales, $G_{ret}^{AB} = -i \langle X^A Y^B \rangle$,

$$\left\{ \frac{\delta^2 S}{\delta Y^B \delta X^C} \Big|_{\mathcal{X}=0} + 2 \frac{\delta \Gamma_{2Q}}{\delta \langle Y^B X^C \rangle} \right\} G_{ret}^{CA} = \delta_B^A \quad (4.37)$$

y otro para las correlaciones térmicas, $G^{AB} = \langle X^A X^B \rangle$,

$$\left\{ \frac{\delta^2 S}{\delta Y^B \delta X^A} \Big|_{\mathcal{X}=0} + 2 \frac{\delta \Gamma_{2Q}}{\delta \langle Y^B X^A \rangle} \right\} G^{AB} + i \left\{ \frac{\delta^2 S}{\delta Y^B \delta Y^C} \Big|_{\mathcal{X}=0} + 2 \frac{\delta \Gamma_{2Q}}{\delta \langle Y^B Y^C \rangle} \right\} G_{adv}^{CB} = 0 \quad (4.38)$$

con $G_{adv}^{CB} = -i \langle Y^C X^B \rangle$ y

$$G^{AB} = (-i) G_{ret}^{AC} G_{adv}^{DB} \left\{ \frac{\delta^2 S}{\delta Y^C \delta Y^D} \Big|_{\mathcal{X}=0} + 2 \frac{\delta \Gamma_{2Q}}{\delta \langle Y^C Y^D \rangle} \right\}. \quad (4.39)$$

4.1.3. Dinámica inducida

En esta subsección comenzamos a estudiar la dinámica inducida por la presencia de las fluctuaciones térmicas. Las cantidades que determinan dicha dinámica son el correlador causal en la ecuación (4.37) y el correlador estocástico (4.38) también llamado función de Hadamard. En equilibrio sabemos que $\langle \mathcal{X}^K \rangle = 0$. La acción ‘clásica’ (4.33) puede escribirse como

$$S_C [\mathcal{X}^K] = S_Q [\mathcal{X}^K] + S_I [\mathcal{X}^K] \quad (4.40)$$

donde S_Q es cuadrática y S_I contiene los términos de interacción de orden superior. En nuestro caso sólo consideraremos términos de orden cúbico en los campos. La 2PIEA está dada por la ecuación (4.35) junto con

$$e^{i\Gamma_{2Q}} = \mathcal{N} \int D\mathcal{X}^K e^{-\frac{1}{2}\mathcal{X}^K (\mathcal{G}^{-1})_{KL} \mathcal{X}^L + iS_C[\mathcal{X}^K]} \quad (4.41)$$

con $(\mathcal{G}^{-1})_{KL}$ la inversa de la matriz de propagadores $\mathcal{G}_{KL}$ y $\mathcal{N} \propto (\text{Det}\mathcal{G}^{KL})^{-1/2}$ [7]. Usamos la notación

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \mathcal{N} \int D\mathcal{X}^K e^{-\frac{1}{2}\mathcal{X}^K (\mathcal{G}^{-1})_{KL} \mathcal{X}^L} \mathcal{O}[\mathcal{X}^K] \quad (4.42)$$

con la normalización tal que $\langle 1 \rangle = 1$. Si $\langle S_C \rangle = 0$, como en nuestro caso, la contribución de orden más bajo a Γ_{2Q} es

$$\Gamma_{2Q} = \frac{i}{2} \langle S_C^2 \rangle \quad (4.43)$$

y entonces la auto energía se lee

$$\Sigma_{KL} = 2 \frac{\delta \Gamma_{2Q}}{\delta \mathcal{G}^{KL}} = i \left\langle \frac{\delta S_C}{\delta \mathcal{X}^K} \frac{\delta S_C}{\delta \mathcal{X}^L} \right\rangle \quad (4.44)$$

El valor de expectación en el lado de derecho se calcula en términos de los diagramas de Feynman 2PI con los propagadores $\mathcal{G}^{KL}$ en las líneas internas [7]. Nuevamente al orden más bajo, podemos reemplazar los propagadores completos por su aproximación de orden más bajo

$$\frac{\delta^2 S_Q}{\delta \mathcal{X}^K \delta \mathcal{X}^M} \mathcal{G}_0^{ML} = i\delta_K^L \quad (4.45)$$

lo cual describe las correlaciones debidas a las fluctuaciones linealizadas alrededor del equilibrio. Las ecuaciones para los propagadores, en presencia de fluctuaciones no lineales, (4.37) y (4.38) pueden escribirse de una forma compacta como

$$\left[\frac{\delta^2 S_Q}{\delta \mathcal{X}^K \delta \mathcal{X}^M} + \Sigma_{KM} \right] \mathcal{G}^{ML} = i\delta_K^L \quad (4.46)$$

4.2. Fluctuaciones lineales alrededor del equilibrio

A partir de la discusión de la sección anterior la formulación de la Acción Efectiva según el formalismo MSR para la DTT del Capítulo 3 indica que la acción ‘clásica’ (ecuación (4.33)) es de la forma

$$S = \frac{i}{2}N \int d^4x Y_{\mu\nu} Y^{\mu\nu} - \int d^4x \{Y_{\mu;\nu} T^{\mu\nu} + Y_{\mu\nu;\rho} A^{\mu\nu\rho} + Y_{\mu\nu} I^{\mu\nu}\}. \quad (4.47)$$

Aquí la proyección transversal y sin traza de la ecuación (3.44) para $A^{\mu\nu\rho}$, se expresa en las propiedades de transversalidad y traza nula del campo auxiliar $Y_{\mu\nu}$. Por otra parte como estamos descartando los modos escalares, los campos auxiliares Y_μ y $Y_{\mu\nu}$ contienen sólo grados de libertad vectoriales y tensoriales. Esto significa que las variables independientes son Y^j y Y^{jk} correspondientes al sector espacial que obedecen las simetrías $Y_{;j}^j = Y_{;j}^{jk} = Y_k^k = 0$. Las componentes temporales quedan restringidas mediante $Y_\mu u^\mu = Y_{\mu\nu} u^\mu = Y_\mu^\mu = 0$. Notemos que Y_μ tiene unidades de T^{-1} , mientras que $Y_{\mu\nu}$ de T^{-2} . La expresión (4.47) se puede descomponer como $S = S_N + S_T + S_A + S_I$ con

$$S_N = \frac{iN}{2} \int d^4x Y_{\mu\nu} Y^{\mu\nu} \quad (4.48)$$

$$S_T = -\sigma T_0^4 \int d^4x Y_{\mu;\nu} \left[u^\mu u^\nu + \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} + \alpha Z^{\mu\nu} + Z^{2\mu\nu} + \frac{1}{4} (g^{\mu\nu} - 8u^\mu u^\nu) Z_\lambda^{2\lambda} \right] \quad (4.49)$$

$$S_A = -\frac{1}{2} a T_0^5 \int d^4x Y_{\mu\nu;\rho} [6u^\mu u^\nu u^\rho + g^{\mu\nu} u^\rho + g^{\mu\rho} u^\nu + g^{\nu\rho} u^\mu + \frac{1}{\alpha} (Z^{\mu\nu} u^\rho + Z^{\mu\rho} u^\nu + Z^{\nu\rho} u^\mu)] \quad (4.50)$$

$$S_I = \frac{T_0^5}{2\alpha\tau} \int d^4x Y_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} \quad (4.51)$$

4.2.1. Identificación de los grados de libertad físicos

Ahora aplicamos el formalismo para estudiar las fluctuaciones térmicas alrededor de una configuración de equilibrio particular con velocidad $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$, temperatura T_0 y la métrica de Minkowski $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Sólo retenemos los términos cuadráticos (S_q) o cúbicos S_c en desviaciones del equilibrio³.

Para identificar los grados de libertad físicos expandimos las variables alrededor de equilibrio

³No confundir con la acción ‘clásica’ S_C .

e imponemos las simetrías y vínculos necesarios. Comenzamos por escribir $u^\mu = U^\mu + V^\mu$, la condición $u^2 = -1$ se convierte en $U_\mu V^\mu = -V^2/2$ y entonces

$$V^\mu = h_\nu^\mu V^\nu + \frac{1}{2} U^\mu V^2. \quad (4.52)$$

Esto sugiere tomar $V^k = \Delta_\nu^k V^\nu$ como variables independientes, por lo tanto

$$V^0 = \frac{1}{2} \left(V_k V^k - (V^0)^2 \right) \approx \frac{1}{2} V_k V^k + o.s. \quad (4.53)$$

Cualquier tensor transversal admite una descomposición similar, a saber

$$Y_0 \approx Y_k V^k + o.s. \quad (4.54)$$

$$Y_{0j} \approx Y_{kj} V^k + o.s. \quad (4.55)$$

$$Y_{00} \approx Y_{kj} V^k V^j + o.s. \quad (4.56)$$

$$Z_{0j} \approx Z_{kj} V^k + o.s. \quad (4.57)$$

$$Z_{00} \approx Z_{kj} V^k V^j + o.s. \quad (4.58)$$

donde *o.s.* significa órdenes superiores. Además $Y_k^k = Z_k^k = 0$. Ahora podemos identificar los términos cuadráticos y cúbicos de la acción ‘clásica’. Los términos cuadráticos son

$$S_{Nq} = \frac{iN}{2} \int d^4x Y_{jk} Y^{jk} \quad (4.59)$$

$$S_{Tq} = -\sigma T_0^4 \int d^4x \left[\frac{4}{3} Y_{j;0} V^j + \alpha Y_{j;k} Z^{jk} \right] \quad (4.60)$$

$$S_{Aq} = -\frac{1}{2} a T_0^5 \int d^4x \left[\frac{1}{\alpha} Y_{jk;0} Z^{jk} + Y_{jk;l} \left(g^{jl} V^k + g^{kl} V^j \right) \right] \quad (4.61)$$

$$S_{Iq} = \frac{a T_0^5}{2\alpha\tau} \int d^4x Y_{jk} Z^{jk} \quad (4.62)$$

y usando que $V_{;j}^j = Y_{;j}^j = Z_{;ij}^{ij} = Y_{;ij}^{ij} = 0$, los términos cúbicos son

$$S_{Tc} = -\sigma T_0^4 \int d^4x \left[-\alpha Y_{j;0} Z_{kj} V^k + Y_{j;k} \left(\frac{4}{3} V^j V^k + Z^{jl} Z_l^k \right) \right] \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} S_{Ac} = & -\frac{1}{2} a T_0^5 \int d^4x \left[10 \left(Y_{kj} V^k \right)_{;0} V^j + \frac{2}{\alpha} \left(Y_{kj} V^k \right)_{;l} Z^{jl} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\alpha} Y_{jk;l} \left(Z^{jk} V^l + Z^{kl} V^j + Z^{lj} V^k \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.64)$$

El próximo paso es transformar en modos de Fourier todos los grados de libertad. La convención adoptada es

$$V^k(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\vec{x}} V^k(p, t). \quad (4.65)$$

En efecto obtenemos

$$S_{Nq} = \frac{iN}{2} \int dt \frac{d^3p}{(2\pi)^3} Y_{jk}(-p, t) Y^{jk}(p, t) \quad (4.66)$$

$$S_{Tq} = -\sigma T_0^4 \int dt \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{4}{3} Y_{j;0}(-p, t) V^j(p, t) - i p_k \alpha Y_j(-p, t) Z^{jk}(p, t) \right] \quad (4.67)$$

$$S_{Aq} = -\frac{1}{2} a T_0^5 \int dt \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{\alpha} Y_{jk;0}(-p, t) Z^{jk}(p, t) - 2i p^k Y_{jk}(-p, t) V^j(p, t) \right] \quad (4.68)$$

$$S_{Iq} = \frac{a T_0^5}{2\alpha\tau} \int dt \frac{d^3p}{(2\pi)^3} Y_{jk}(-p, t) Z^{jk}(p, t) \quad (4.69)$$

y

$$\begin{aligned} S_{Tc} = & -\sigma T_0^4 \int dt \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[-\alpha Y_{j;0}(-p-q, t) Z_{kj}(q, t) V^k(p, t) \right. \\ & \left. - i(p+q)_k Y_j(-p-q, t) \left(\frac{4}{3} V^j(p, t) V^k(q, t) + Z^{jl}(p, t) Z_l^k(q, t) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} S_{Ac} = & -\frac{1}{2} a T_0^5 \int dt \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[5 Y_{kj;0}(-p-q, t) V^k(p, t) V^j(q, t) \right. \\ & - i q_l \frac{2}{\alpha} Y_{kj}(-p-q, t) V^k(p, t) Z^{jl}(q, t) \\ & \left. - \frac{i}{\alpha} (p+q)_l Y_{jk}(-p-q, t) \left(Z^{jk}(q, t) V^l(p, t) + 2 Z^{kl}(q, t) V^j(p, t) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.71)$$

Es posible simplificar las expresiones usando las ecuaciones de movimiento a orden lineal

$$0 = -\sigma T_0^4 \frac{4}{3} Y_{j;0}(-p, t) + a T_0^5 i p^k Y_{jk}(-p, t) \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{1}{2\alpha} a T_0^5 Y_{jk;0}(-p, t) + \frac{i}{2} \alpha \sigma T_0^4 (p_k Y_j(-p, t) \\ & + p_j Y_k(-p, t)) + \frac{a T_0^5}{2\alpha\tau} Y_{jk}(-p, t) \end{aligned} \quad (4.73)$$

donde $O_{;0}$ indica la derivada respecto al tiempo t , de modo que

$$\begin{aligned} S_{Tc} = & \int dt \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[\frac{3}{4} \alpha a T_0^5 i p^k Y_{jk}(-p, t) Z_{lj}(q, t) V^l(p - q, t) \right. \\ & \left. + i \sigma T_0^4 p_k Y_j(-p, t) \left(\frac{4}{3} V^j(p - q, t) V^k(q, t) + Z^{jl}(p - q, t) Z_l^k(q, t) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} S_{Ac} = & - \int dt \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[5 \left[i \alpha \sigma T_0^4 p_k Y_j(-p, t) + \frac{a T_0^5}{2\alpha\tau} Y_{jk}(-p, t) \right] V^k(p - q, t) V^j(q, t) \right. \\ & - i q_l \frac{a}{\alpha} T_0^5 Y_{kj}(-p, t) V^k(p - q, t) Z^{jl}(q, t) \\ & \left. - \frac{i}{\alpha} \frac{a}{2} T_0^5 Y_{jk}(-p, t) p_l \left(Z^{jk}(q, t) V^l(p - q, t) + 2 Z^{kl}(q, t) V^j(p - q, t) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Finalmente distinguimos entre los modos vectoriales y tensoriales según

$$Z^{jk} = i \left(p^j Z_T^k + p^k Z_T^j \right) + Z_{TT}^{jk} \quad (4.76)$$

$$Y^{jk} = i \left(p^j Y_T^k + p^k Y_T^j \right) + Y_{TT}^{jk} \quad (4.77)$$

con $p_j Z_T^j = p_j Y_T^j = p_j Z_{TT}^{jk} = p_j Y_{TT}^{jk} = 0$.

4.2.2. La acción cuadrática

Luego de la descomposición vectorial/tensorial, los términos de la acción cuadrática se desacoplan. Para los vectores tenemos

$$S_{NqV} = iN \int dt \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^2 Y_{Tj}(-p, t) Y_T^j(p, t) \quad (4.78)$$

$$S_{TqV} = -\sigma T_0^4 \int dt \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{4}{3} Y_{j;0}(-p, t) V^j(p, t) + p^2 \alpha Y_j(-p, t) Z_T^j(p, t) \right] \quad (4.79)$$

$$S_{AqV} = -\frac{1}{2} a T_0^5 \int dt \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{2}{\alpha} p^2 Y_{Tj;0}(-p, t) Z_T^j(p, t) - 2p^2 Y_{Tj}(-p, t) V^j(p, t) \right] \quad (4.80)$$

$$S_{IqV} = \frac{a T_0^5}{\alpha \tau} \int dt \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^2 Y_{Tj}(-p, t) Z_T^j(p, t) \quad (4.81)$$

y para los tensores

$$S_{NqT} = \frac{iN}{2} \int dt \frac{d^3p}{(2\pi)^3} Y_{TTjk}(-p, t) Y_{TT}^{jk}(p, t) \quad (4.82)$$

$$S_{AqT} = -\frac{1}{2} a T_0^5 \int dt \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{\alpha} Y_{TTjk;0}(-p, t) Z_{TT}^{jk}(p, t) \right] \quad (4.83)$$

$$S_{IqT} = \frac{a T_0^5}{2\alpha \tau} \int dt \frac{d^3p}{(2\pi)^3} Y_{TTjk}(-p, t) Z_{TT}^{jk}(p, t) . \quad (4.84)$$

4.2.3. Los propagadores de orden más bajo

Los grados de libertad de nuestro fluido conforme, dentro de la aproximación del régimen ‘incompresible’, son $\mathcal{X}^K$. Entre ellos distinguimos los campos físicos vectoriales V^j y Z_T^j , los campos auxiliares vectoriales Y^j y Y_T^j , el campo físico tensorial Z_{TT}^{ij} y el campo auxiliar tensorial Y_{TT}^{ij} . Las correlaciones entre los campos físicos y auxiliares determinan los propagadores causales. Si el campo físico se encuentra a la izquierda será un propagador causal. Las correlaciones entre campos físicos dan lugar a las correlaciones estocásticas de la teoría. Por último, como ya mencionamos, las correlaciones entre campos auxiliares se anulan. Al orden más bajo obtenemos que las ecuaciones de evolución de los propagadores vectoriales y tensoriales quedan desacopladas.

Correlaciones causales vectoriales

Las correlaciones causales vectoriales se pueden dividir en dos grupos: por un lado $\langle V^j Y^k \rangle$ y $\langle Z_T^j Y^k \rangle$, y por el otro $\langle V^j Y_T^k \rangle$ y $\langle Z_T^j Y_T^k \rangle$. Ambos pares se encuentran desacoplados entre sí. Todos tienen la siguiente estructura

$$\langle V^j(p, t) Y^k(q, t') \rangle = i (2\pi)^3 \delta(p + q) P^{jk}[p] G_{VY}(p, t - t') \quad (4.85)$$

donde

$$P^{jk}[p] = \delta^{jk} - \frac{p^j p^k}{p^2} \quad (4.86)$$

Las ecuaciones de movimiento para el par G_{VY} , $G_{Z_T Y}$ son

$$\sigma T_0^4 \left[\frac{4}{3} \frac{d}{dt} G_{VY} - \alpha p^2 G_{Z_T Y} \right] = \delta(t - t') \quad (4.87)$$

$$a T_0^5 p^2 \left[G_{VY} + \frac{1}{\alpha} \frac{d}{dt} G_{Z_T Y} \right] + \frac{a T_0^5}{\alpha \tau} p^2 G_{Z_T Y} = 0 \quad (4.88)$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} G_{VY} &= \frac{e^{-(t-t')/2\tau}}{\sigma T_0^4} \left[\cos \omega(t - t') + \frac{\sin \omega(t - t')}{2\omega\tau} \right] \Theta(t - t') \\ &= \frac{c_V p}{\sigma T_0^4 \omega} e^{-(t-t')/2\tau} \cos[\omega(t - t') - \varphi_p] \Theta(t - t') \end{aligned} \quad (4.89)$$

$$G_{Z_T Y} = \frac{-\alpha e^{-(t-t')/2\tau}}{\omega \sigma T_0^4} \sin \omega(t - t') \Theta(t - t') \quad (4.90)$$

con

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{3}{4} \alpha^2 p^2 - \frac{1}{4\tau^2}} \\ \varphi_p &= \tan^{-1} \left(\frac{1}{2\omega\tau} \right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(2\omega\tau). \end{aligned} \quad (4.91)$$

La constante $c_V = \sqrt{3}\alpha/2$ es la velocidad de propagación de los modos vectoriales (ver Sección (3.2)), que en el régimen de ‘incompresibilidad’ considerado satisface $c_V \ll 1$.

X_α	Y_β	$C_{\alpha\beta}$	$\varphi_{\alpha\beta}$
V	Y	$(c_V p) / (\sigma T_0^4 \omega)$	φ_p
Z_T	Y	$(-\alpha) / (\sigma T_0^4 \omega)$	$\pi/2$
V	Y_T	$(3\alpha^2) / (4aT_0^5 \omega)$	$\pi/2$
Z_T	Y_T	$(c_V \alpha) (aT_0^5 p \omega)$	$-\varphi_p$

Cuadro 4.1: Resumen de los propagadores causales vectoriales definidos en (4.95). Las expresiones de ω y φ_p se encuentran en (4.91).

Para el segundo par de campos $\langle V^j Y_T^k \rangle$ y $\langle Z_T^j Y_T^k \rangle$ obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma T_0^4 \left[\frac{4}{3} \frac{d}{dt} G_{VY_T} - \alpha p^2 G_{Z_T Y_T} \right] &= 0 \\ aT_0^5 p^2 \left[G_{VY_T} + \frac{1}{\alpha} \frac{d}{dt} G_{Z_T Y_T} \right] + \frac{aT_0^5}{\alpha \tau} p^2 G_{Z_T Y_T} &= \delta(t - t') \end{aligned} \quad (4.92)$$

cuyas soluciones son

$$G_{VY_T} = \frac{3\alpha^2}{4aT_0^5 \omega} e^{-(t-t')/2\tau} \sin \omega(t - t') \Theta(t - t') \quad (4.93)$$

$$G_{Z_T Y_T} = \frac{c_V \alpha}{aT_0^5 p \omega} e^{-(t-t')/2\tau} \cos [\omega(t - t') + \varphi_p] \Theta(t - t') \quad (4.94)$$

En resumen, todas las correlaciones causales vectoriales tienen la siguiente estructura

$$\langle X_\alpha^j(p, t) Y_\beta^k(q, t') \rangle = i (2\pi)^3 \delta(p + q) P^{jk}[p] C_{\alpha\beta} e^{-(t-t')/2\tau} \cos [\omega(t - t') - \varphi_{\alpha\beta}] \Theta(t - t') . \quad (4.95)$$

Las diferentes correlaciones se encuentran en la Tabla 4.1.

Correlaciones causales tensoriales

La única correlación causal tensorial es

$$\langle Z_{TT}^{ij}(p, t) Y_{TTkl}(q, t') \rangle = i (2\pi)^3 \delta(p + q) S_{TT}^{ijkl}[p] G_{Z_{TT} Y_{TT}}(p, t - t') \quad (4.96)$$

donde

$$S_{TT}^{ijkl}[p] = \frac{1}{2} \left[P_k^i P_l^j + P_l^i P_k^j - P^{ij} P_{kl} \right] . \quad (4.97)$$

La ecuación dinámica es

$$\frac{aT_0^5}{2\alpha} \left[\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right] G_{Z_{TT}Y_{TT}} = \delta(t - t') \quad (4.98)$$

y su solución

$$G_{Z_{TT}Y_{TT}} = \frac{2\alpha}{aT_0^5} e^{-(t-t')/\tau} \Theta(t - t') . \quad (4.99)$$

Aquí podemos observar que los modos tensoriales no se propagan y su dependencia con el momento p es trivial.

Funciones de Hadamard vectoriales

Las funciones de Hadamard vectoriales son $\langle V^j V^k \rangle$, $\langle V^j Z_T^k \rangle$ y $\langle Z_T^j Z_T^k \rangle$. Su estructura es

$$\langle V^j(p, t) V^k(q, t') \rangle = (2\pi)^3 \delta(p + q) P^{jk}[p] G_{1VV}(p, t - t') \quad (4.100)$$

y se determinan a través de la ecuación (4.39). Por ejemplo

$$G_{1VV}(p, t - t') = 2Np^2 \int^{\min(t, t')} dt'' G_{VY_T}(p, t - t'') G_{VY_T}(p, t' - t'') . \quad (4.101)$$

Explicitamente

$$\begin{aligned} G_{1VV}(p, t - t') &= \frac{3}{4\sigma T_0^3} e^{-|t-t'|/2\tau} \left[\cos \omega |t - t'| + \frac{\sin \omega |t - t'|}{2\omega\tau} \right] \\ &= \frac{3c_V p}{4\sigma T_0^3 \omega} e^{-|t-t'|/2\tau} \cos [\omega |t - t'| - \varphi_p] . \end{aligned} \quad (4.102)$$

De forma análoga

$$G_{1VZ_T}(p, t - t') = 2Np^2 \int^{\min(t, t')} dt'' G_{VY_T}(p, t - t'') G_{Z_T Y_T}(p, t' - t'') . \quad (4.103)$$

A partir de la ecuaciones para los propagadores se obtiene

$$G_{1VZ_T}(p, t - t') = 2Np^2 \int^{\min(t, t')} dt'' G_{VY_T}(p, t - t'') \frac{4}{3\alpha p^2} \frac{d}{dt'} G_{VY_T}(p, t' - t'') . \quad (4.104)$$

X_α	X_β	$C_{1\alpha\beta}$	$\varphi_{1\alpha\beta}$	$q_{\alpha\beta}$
V	V	$(3c_V p) / (4\sigma T_0^3 \omega)$	φ_p	0
V	Z_T	$(3\alpha) / (4\sigma T_0^3 \omega)$	$\pi/2$	1
Z_T	Z_T	$(c_V) / (\sigma T_0^3 \omega p)$	$-\varphi_p$	0

Cuadro 4.2: Lista de las distintas funciones de Hadamard vectoriales definidas en (4.107). φ_p está definido en la ecuación (4.91).

Como el integrando se anula en el límite superior, encontramos que

$$\begin{aligned}
G_{1VZ_T}(p, t - t') &= \frac{4}{3\alpha p^2} \frac{d}{dt'} G_{1VV}(p, t - t') \\
&= \frac{3\alpha}{4\sigma T_0^3 \omega} e^{-|t-t'|/2\tau} \sin \omega |t - t'| \text{sign}(t - t') .
\end{aligned} \tag{4.105}$$

La función de Hadamard $G_{1Z_T Z_T}$ es par en $t - t'$, y por eso no hay pérdida de generalidad en asumir $t > t'$. En este caso, llegamos a

$$\begin{aligned}
G_{1Z_T Z_T}(p, t - t') &= \frac{4}{3\alpha p^2} \frac{d}{dt} G_{1VZ_T}(p, t - t') \\
&= \frac{1}{\sigma T_0^3 p^2} e^{-|t-t'|/2\tau} \left[\cos \omega |t - t'| - \frac{\sin \omega |t - t'|}{2\omega \tau} \right] \\
&= \frac{c_V}{\sigma T_0^3 \omega p} e^{-|t-t'|/2\tau} \cos [\omega |t - t'| + \varphi_p] .
\end{aligned} \tag{4.106}$$

Resumiendo, la estructura general de las funciones de Hadamard vectoriales es

$$\begin{aligned}
\langle X_\alpha^j(p, t) X_\beta^k(q, t') \rangle &= (2\pi)^3 \delta(p + q) P^{jk}[p] C_{1\alpha\beta} e^{-|t-t'|/2\tau} \times \\
&\quad \times \cos [\omega |t - t'| - \varphi_{1\alpha\beta}] (\text{sign}(t - t'))^{q_{\alpha\beta}}
\end{aligned} \tag{4.107}$$

y las distintas combinaciones se encuentran en la Tabla 4.2.

Funciones de Hadamard tensoriales

La correlación que resta es trivial. Tiene la estructura

$$\langle Z_{TT}^{jk}(p, t) Z_{TT}^{lm}(q, t') \rangle = (2\pi)^3 \delta(p + q) S_{TT}^{jklm}[p] G_{1Z_{TT} Z_{TT}}(p, t - t') \tag{4.108}$$

donde S_{TT}^{jklm} está definida en (4.97) y

$$\begin{aligned} G_{1Z_{\text{TT}}Z_{\text{TT}}} &= N \left(\frac{2\alpha}{aT_0^5} \right)^2 \frac{\tau}{2} e^{-|t-t'|/\tau} \\ &= \frac{2}{\sigma T_0^3} e^{-|t-t'|/\tau}. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Antes de continuar es importante asegurar que en el límite $\tau \rightarrow 0$, en el que recuperamos la Hidrodinámica de Landau-Lifshitz, las fluctuaciones hidrodinámicas también converjan a las de Landau-Lifshitz. En efecto en este límite podemos aproximar

$$G_{1Z_{\text{TT}}Z_{\text{TT}}} = \frac{4\tau}{\sigma T_0^3} \delta(t-t'). \quad (4.110)$$

A su vez la autocorrelación de la parte tensorial del EMT viscoso (ecuación (3.40)) es

$$\begin{aligned} \langle \Pi_{\text{TT}}^{jk}(p, t) \Pi_{\text{TT}}^{lm}(q, t') \rangle &= \alpha^2 \sigma^2 T_0^8 \langle Z_{\text{TT}}^{jk}(p, t) Z_{\text{TT}}^{lm}(q, t') \rangle \\ &= (2\pi)^3 \delta(p+q) S_{\text{TT}}^{jklm}[p] 4T_0 \eta \delta(t-t') \end{aligned} \quad (4.111)$$

donde hemos usado la relación (3.48). Así vemos que cuando $\tau \rightarrow 0$ recuperamos la proyección tensorial en el espacio de Fourier de las fluctuaciones hidrodinámicas de Landau-Lifshitz [63, 64] definidas en la ecuación (2.65).

4.3. Fluctuaciones no lineales alrededor del equilibrio

El objetivo de esta sección es calcular el impacto que tienen las fluctuaciones térmicas en el régimen no lineal sobre las funciones de correlación de la teoría. En este sentido es vital contar con los métodos funcionales y de teoría de campos fuera de equilibrio ya que tenemos una estructura clara que organiza las interacciones orden por orden en términos de diagramas de Feynman. Particularmente calculamos las correcciones a un lazo para las correlaciones tensoriales de la sección anterior y aplicamos los resultados para derivar las fluctuaciones correspondientes a las densidades de energía y entropía. Para ello debemos conocer los términos cúbicos de la acción ‘clásica’ (4.47).

Si pensamos en las RHICs, surge la pregunta ¿en qué etapa de la evolución son relevantes

las correcciones provenientes de los lazos? Más abajo argumentamos (ecuación (4.153)) que la condición, en términos de la escala de energía, para que las correcciones sean significativas es $p > p_T \sim T_0 (T_0 \tau)^{-3/8}$. Como trabajamos en el régimen $\tau \rightarrow \infty$, esto implica que las correlaciones espaciales para tiempos iguales son no triviales para distancias $r < p_T^{-1} < c_V \tau < \tau$. Estas son las escalas relevantes en las etapas más tempranas de las RHICs.

4.3.1. Términos cúbicos en la acción ‘clásica’

Para hallar las correcciones a las correlaciones tensoriales no son necesarios todos los términos cúbicos. En principio no requerimos los términos que no tengan modos tensoriales. Entre los que contienen modos tensoriales, distinguimos según

- a) Términos que sólo contienen $Y_{\text{TT}jk}(-p, t)$. Naturalmente se dividen en dos

$$S_{Y_{\text{TT}}} = S_{Y_{\text{TT}}VV} + S_{Y_{\text{TT}}VZ_{\text{T}}} \quad (4.112)$$

con

$$\begin{aligned} S_{Y_{\text{TT}}VV} &= -\frac{5aT_0^5}{2\alpha\tau} \int dt \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} D_{jkr s}(p, q) Y_{\text{TT}}^{jk}(-p, t) V^r(p - q, t) V^s(q, t) \\ S_{Y_{\text{TT}}VZ_{\text{T}}} &= -\frac{aT_0^5}{\alpha} \int dt \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} E_{jkr s}(p, q) Y_{\text{TT}}^{jk}(-p, t) V^r(p - q, t) Z_{\text{T}}^s(q, t) \end{aligned} \quad (4.113)$$

y

$$\begin{aligned} D_{jkr s}(p, q) &= \delta_{rk} \delta_{js} \\ E_{jkr s}(p, q) &= \left(q^2 + p_l q^l \right) \delta_{sj} \delta_{kr} + q^k (\delta_{js} p_r + p_s \delta_{jr}) . \end{aligned} \quad (4.114)$$

- b) Términos que sólo contienen $Z_{\text{TT}lm}(q, t)$. También se separan en

$$S_{Z_{\text{TT}}} = S_{Y_{\text{T}}VZ_{\text{TT}}} + S_{Y_{\text{T}}Z_{\text{T}}Z_{\text{TT}}} \quad (4.115)$$

con

$$\begin{aligned}
S_{Y_{\text{T}} V Z_{\text{TT}}} &= \frac{aT_0^5}{\alpha} \int dt \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} F_{rslm}(p, q) Y_{\text{T}}^r(-p, t) V^s(p - q, t) Z_{\text{TT}}^{lm}(q, t) \\
S_{Y Z_{\text{T}} Z_{\text{TT}}} &= -\sigma T_0^4 \int dt \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} G_{rslm}(p, q) Y^r(-p, t) Z_{\text{T}}^s(p - q, t) Z_{\text{TT}}^{lm}(q, t)
\end{aligned} \tag{4.116}$$

y

$$\begin{aligned}
F_{rslm}(p, q) &= \frac{3}{4} \alpha^2 p^2 \delta_{mr} \delta_{ls} + 2p^l \delta_{mr} p_s + p^m p_l \delta_{rs} \\
G_{rslm}(p, q) &= p_m \left((p - q)^r \delta_{ls} + (p - q)^l \delta_{rs} \right) + \delta_{rm} \left(p_s (p - q)^l + p_k (p - q)^k \delta_{sl} \right)
\end{aligned} \tag{4.117}$$

Tampoco necesitaremos conocer la forma explícita de los siguientes términos restantes:

- c) Términos que contienen ambos $Y_{\text{TT}jk}(-p, t)$ y $Z_{\text{TT}lm}(q, t)$,
- d) Términos cuadráticos en $Z_{\text{TT}lm}(q, t)$.

El objetivo de la sección completa es calcular las correcciones no lineales a las correlaciones tensoriales. Teniendo en mente que la dinámica de las correlaciones causales se basa en la ecuación (4.37) y que las funciones de Hadamard se extraen de la ecuación (4.39), necesitaremos calcular por un lado la autoenergía ($\sim \delta\Gamma/\delta\langle Y_{\text{TT}} Z_{\text{TT}} \rangle$) y por el otro el núcleo de ruido ($\sim \delta\Gamma/\delta\langle Y_{\text{TT}} Y_{\text{TT}} \rangle$).

4.3.2. Autoenergía para modos tensoriales

La expresión para el cálculo de la autoenergía para los modos tensoriales es

$$\Sigma_{jklm}(-p, q, t - t') = 2 \frac{\delta\Gamma_Q}{\delta\langle Y_{\text{TT}}^{jk}(-p, t) Z_{\text{TT}}^{lm}(q, t') \rangle} \tag{4.118}$$

Podemos dividir esta expresión en dos contribuciones, una sólo con propagadores vectoriales en las líneas internas y otro con propagadores que tenga un modo vectorial y un modo tensorial. Nuestra finalidad es deducir la dependencia de la autoenergía y el núcleo de ruido con respecto a momento p . Como los propagadores tensoriales al orden más bajo son independientes del momento, los diagramas de Feynman que los contengan también serán independientes de p . Por este momento no los vamos a considerar.

La autoenergía para los modos tensoriales sólo con propagadores vectoriales en las líneas

internas es

$$\Sigma_{jklm}^{(V)}(-p, q, t - t') = i \left\langle \frac{\delta(S_{Y_{TT}VV} + S_{Y_{TT}VZ_T})}{\delta Y_{TT}^{jk}(-p, t)} \frac{\delta(S_{Y_TVZ_{TT}} + S_{YZ_TZ_{TT}})}{\delta Z_{TT}^{lm}(q, t')} \right\rangle \quad (4.119)$$

donde se entiende que luego de calcular la derivada funcional es necesario volver a aplicar el proyector tensorial. Los términos que involucran $S_{Y_{TT}VV}$ están suprimidos por una potencia de τ y por ende no los calculamos. Comencemos con

$$\begin{aligned} \Sigma_{jklm}^{(V1)}(-p, q, t - t') &= i \left\langle \frac{\delta S_{Y_{TT}VZ_T}}{\delta Y_{TT}^{jk}(-p, t)} \frac{\delta S_{Y_TVZ_{TT}}}{\delta Z_{TT}^{lm}(q, t')} \right\rangle \\ &= -i \frac{a^2 T_0^{10}}{\alpha^2} \int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^6} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^6} E_{jkrs}(p, q') F_{uvlm}(p', q) \\ &\quad \{ \langle V^r(p - q', t) Y_T^u(-p', t') \rangle \langle Z_T^s(q', t) V^v(p' - q, t') \rangle \\ &\quad + \langle V^r(p - q', t) V^v(p' - q, t') \rangle \langle Z_T^s(q', t) Y_T^u(-p', t') \rangle \} \end{aligned} \quad (4.120)$$

La expresión $\Sigma_{jklm}^{(V1)}$ es nula a menos que $t \geq t'$, por lo cual asumimos esta condición. Además, como finalmente vamos a evaluar las correlaciones para tiempos iguales descartamos la segunda línea del lado derecho de (4.120) ya que se anula cuando $t = t'$. El diagrama correspondiente al término relevante se muestra en la Figura 4.1. Nos queda entonces

$$\Sigma_{jklm}^{(V1)}(-p, q, t - t') = \frac{9\alpha a T_0^2}{16\sigma} \delta(p - q) (2\pi)^{-6} e^{-(t-t')/\tau} \Theta(t - t') \sigma_{jklm}^{(V1)} \quad (4.121)$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma_{jklm}^{(V1)} &= \int d^3 q' E_{jkrs}(p, q') F_{uvlm}(q', p) P^{rv}[p - q'] P^{su}[q'] \\ &\quad \frac{|p - q'|}{q' \omega_{q'} \omega_{p-q'}} \cos[\omega_{p-q'}(t - t') - \varphi_{p-q'}] \cos[\omega_{q'}(t - t') + \varphi_{q'}] \end{aligned} \quad (4.122)$$

Por análisis dimensional vemos que la autoenergía tiene unidades de T^4 y $\sigma_{jklm}^{(V1)}$ tiene unidades de p^5 .

Para obtener la verdadera autoenergía debemos volver a proyectar sobre las componentes transversas, simétricas y sin traza en jk y lm . Si asumimos p completamente en la dirección z , sólo necesitamos calcular $\sigma_{abcd}^{(V1)}$, donde los índices corren de 1 a 2. Como no hay una dirección

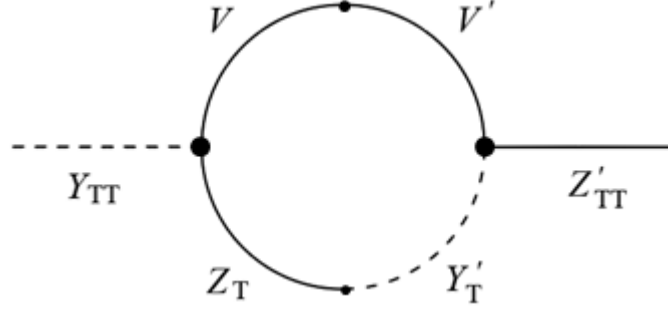


Figura 4.1: Diagrama que representa la corrección a un lazo de la autoenergía proveniente de (4.120). Aquí sólo consideramos el término que es no nulo en el límite $t \rightarrow t'$. En las líneas externas tenemos un campo físico Z'_{TT} y un campo auxiliar Y_{TT} ambos tensoriales. En las líneas internas encontramos los propagadores vectoriales $\langle VV' \rangle$ y $\langle Z_{\text{T}}Y'_{\text{T}} \rangle$.

ortogonal privilegiada obtenemos

$$\sigma_{abcd}^{(V1)} = A\delta_{ac}\delta_{bd} + B\delta_{ad}\delta_{bc} + C\delta_{ab}\delta_{cd} \quad (4.123)$$

La simetrización en ab nos lleva a

$$\sigma_{abcd}^{(V1)} \rightarrow \frac{1}{2} (A + B) (\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}) + C\delta_{ab}\delta_{cd} \quad (4.124)$$

y al remover la traza en ab obtenemos

$$\sigma_{abcd}^{(V1)} \rightarrow (A + B) S_{\text{TT}abcd} \frac{1}{2} (\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc} - \delta_{ab}\delta_{cd}) \quad (4.125)$$

donde $S_{\text{TT}abcd}$ es el proyector (4.97) evaluado en el caso en que $\mathbf{p}$ se encuentra en la dirección z ($i = 3$). Esto significa que la autoenergía física toma la forma

$$\Sigma_{ijlm}^{(V1)}(-p, q, t - t') = \frac{9\alpha a T_0^2}{16\sigma} \delta(p - q) (2\pi)^{-6} e^{-|t-t'|/\tau} \Theta(t - t') \sigma_{phys}^{(V1)} S_{\text{TT}ijlm} \quad (4.126)$$

con

$$\sigma_{phys}^{(V1)} = \frac{1}{2} \int d^3q' W[p, q'] \frac{|p - q'|}{\omega_{p-q'}} \cos[\omega_{p-q'}(t - t') - \varphi_{p-q'}] \cos[\omega_{q'}(t - t') + \varphi_{q'}] \quad (4.127)$$

y

$$W [p, q'] = \frac{1}{q' \omega_{q'}} S_{\text{TT}}^{ijkl} [p] E_{jkr s} (p, q') F_{uvlm} (q', p) P^{rv} [p - q'] P^{su} [q'] . \quad (4.128)$$

Como hemos visto, las ecuaciones ‘clásicas’ para los correladores (4.88, 4.92, 4.98) son locales en el tiempo. Para proceder con el cálculo vamos a asumir que las correcciones a dichas ecuaciones que provienen de los lazos también deben ser locales en el tiempo. Por lo tanto sólo nos ocuparemos de los términos de la autoenergía y del núcleo de ruido que son proporcionales a $\delta(t - t')$. Dado que los propagadores son funciones regulares, cualquier término singular sólo puede ser resultado del comportamiento de la región UV del dominio de integración. En esta región $|q'|$ es asintóticamente grande y tanto $\omega_{q'}$ como $\omega_{p-q'}$ son reales.

En principio diferentes esquemas hidrodinámicos como rBRSSS [4, 27], DNMR [58], Hidrodinámica Anisótropa [8] o las DTTs, puede llevar a distintos comportamiento UV y, además, podemos adoptar diferentes procedimientos para regularizar la contribución UV en los diagramas de Feynman. Por lo tanto, la discusión y resultados que siguen están basados en nuestra elección: DTTs y regularización dimensional.

Para calcular $\sigma_{phys}^{(V1)}$ sólo retenemos los términos que varían lentamente y que no son nulos en el límite de coincidencia

$$\begin{aligned} & \cos [\omega_{p-q'} (t - t') - \varphi_{p-q'}] \cos [\omega_{q'} (t - t') + \varphi_{q'}] \\ & \simeq \frac{1}{2} \cos [(\omega_{p-q'} - \omega_{q'}) (t - t')] \cos [\varphi_{p-q'}] \cos [\varphi_{q'}] . \end{aligned} \quad (4.129)$$

Entonces

$$\sigma_{phys}^{(V1)} \approx \frac{1}{4} \int d^3 q' W [p, q'] \frac{|p - q'|}{\omega_{p-q'}} \cos [(\omega_{p-q'} - \omega_{q'}) (t - t')] \cos [\varphi_{p-q'}] \cos [\varphi_{q'}] . \quad (4.130)$$

Nuevamente asumimos que $p^j = (0, 0, p)$ y así $\omega_{p-q'} - \omega_{q'}$ se anula cuando $q' = (q_T, p/2)$, con q_T en el plano x, y . Es conveniente escribir $q' = (q_T, p/2 + \delta q_3)$ para obtener

$$\omega_{p-q'} - \omega_{q'} \approx -\frac{c_V^2 p}{\omega_{q'}} \delta q_3 , \quad (4.131)$$

donde aparezca q' explícitamente vale $q' = (q_T, p/2)$. Luego de evaluar $\delta q_3 = 0$ en los prefactores

podemos integrar sobre δq_3 para obtener la parte singular de la autoenergía

$$\sigma_{phys}^{(V1)} \approx \frac{\pi}{2c_V^2} \delta(t-t') \int d^2 q_T W[p, q'] \frac{q'}{p} \cos^2[\varphi_{q'}] . \quad (4.132)$$

En el límite de propagación libre que asumimos, $\tau \rightarrow \infty$ ($\alpha \rightarrow 0$), podemos aproximar

$$\cos^2[\varphi_{q'}] = \frac{1 + \cos[2\varphi_{q'}]}{2} = 1 - \frac{1}{4\omega_{q'}^2 \tau^2} \approx 1 . \quad (4.133)$$

Para continuar debe calcular $J^{(V1)}$ descartando términos de orden α^2 . En efecto

$$\begin{aligned} J^{(V1)} &= \frac{\pi}{2c_V^2} \int d^2 q_T W[p, q'] \frac{q'}{p} \\ &= \frac{\pi}{2p c_V^3} \int \frac{d^2 q_T \left[-q_T^8 + \frac{5}{8} q_T^6 p^2 - \frac{1}{8} q_T^4 p^4 + \frac{17}{128} q_T^2 p^6 \right]}{\left(q_T^2 + \frac{p^2}{4} \right)^2 \left(q_T^2 + \frac{p^2}{4} - \frac{1}{4c_V^2 \tau^2} \right)^{1/2}} . \end{aligned} \quad (4.134)$$

Básicamente tenemos integrales de la forma

$$\begin{aligned} s^{(n)}(p) &= \int \frac{d^2 q_T (q_T^2)^n}{\left(q_T^2 + \frac{p^2}{4} \right)^2 \left(q_T^2 + \frac{p^2}{4} - \frac{1}{4c_V^2 \tau^2} \right)^{1/2}} \\ &= \frac{\Gamma[5/2]}{\Gamma[2]\Gamma[1/2]} \int_0^1 dx (1-x) x^{-1/2} \int \frac{d^2 q_T q_T^{2n}}{\left(q_T^2 + \frac{p^2}{4} - \frac{x}{4c_V^2 \tau^2} \right)^{5/2}} . \end{aligned} \quad (4.135)$$

Estas integrales puede calcularse dentro del esquema de regularización dimensional en $D = 2 - \epsilon$ dimensiones. Siguiendo las referencias [119, 120] se obtiene

$$\begin{aligned} s^n(p) &= \pi^{1-\epsilon/2} \frac{\Gamma[1-\epsilon/2+n]\Gamma[3/2+\epsilon/2-n]}{\Gamma[2]\Gamma[1/2]\Gamma[1-\epsilon/2]} \\ &\quad \mu^\epsilon \int_0^1 dx (1-x) x^{-1/2} \left[\frac{1}{4} \left(p^2 - \frac{x}{c_V^2 \tau^2} \right) \right]^{n-\epsilon/2-3/2} . \end{aligned} \quad (4.136)$$

El límite $\epsilon \rightarrow 0$ es regular para cualquier n entero y por ello tomamos directamente $\epsilon = 0$ ($D = 2$).

Finalmente, aplicando una vez más el límite $\tau \rightarrow \infty$, llegamos a

$$J^{(V1)} = \frac{493 \pi^2 p^4}{480 c_V^3} \quad (4.137)$$

y entonces

$$\Sigma_{ijlm}^{(V1)}(-p, q, t - t') = \frac{493\sqrt{3}\pi^2}{2560} \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{a T_0^2 p^4}{c_V^2 \sigma} \delta(p - q) \delta(t - t') S_{\text{TT}ijlm}(p) \quad (4.138)$$

Ahora consideremos el diagrama restante

$$\Sigma_{jklm}^{(V2)}(-p, q, t - t') = i \left\langle \frac{\delta S_{Y_{\text{TT}} V Z_{\text{T}}}}{\delta Y_{\text{TT}}^{jk}(-p, t)} \frac{\delta S_{Y_{Z_{\text{T}} Z_{\text{TT}}}}}{\delta Z_{\text{TT}}^{lm}(q, t')} \right\rangle. \quad (4.139)$$

En la Figura 4.2 se muestra la representación gráfica del término que es no nulo cuando $t = t'$.

Repitiendo los mismos pasos que en el caso anterior se obtiene

$$\Sigma_{jklm}^{(V2)}(-p, q, t - t') = -\frac{a T_0^2 c_V^2 e^{-(t-t')/\tau}}{(2\pi)^6 \alpha \sigma} \Theta(t - t') \delta(p - q) \sigma_{phys}^{(V2)}(p, t - t') S_{\text{TT}jklm}(p). \quad (4.140)$$

y

$$\sigma_{phys}^{(V2)}(p, t - t') \simeq \frac{\pi}{2 c_V^2} \delta(t - t') \int \frac{d^2 k_{\perp}}{p \omega_k} \frac{[\frac{1}{2} k_{\perp}^8 + k_{\perp}^6 p^2 + \frac{9}{32} k_{\perp}^4 p^4 + \frac{9}{64} k_{\perp}^2 p^6 - \frac{3}{128} p^8]}{\left(k_{\perp}^2 + \frac{p^2}{4}\right)^2} \quad (4.141)$$

Aplicando las integrales (4.136) y tomando el límite $\tau \rightarrow \infty$, queda

$$\sigma_{phys}^{(V2)}(p, t - t') = \frac{17\pi^2}{60} \frac{p^4}{c_V^3} \delta(t - t') \quad (4.142)$$

y así

$$\Sigma_{jklm}^{(V2)}(-p, q, t - t') = -\frac{17\sqrt{3}}{240} \frac{\pi^2}{(2\pi)^6} \frac{a T_0^2 p^4}{c_V^2 \sigma} \delta(p - q) \delta(t - t') S_{\text{TT}jklm}(p) \quad (4.143)$$

La autoenergía física para los modos tensoriales inducida por fluctuaciones vectoriales, en el límite $\tau \rightarrow \infty$, es

$$\Sigma_{jklm}^{(V)}(-p, q, t - t') = \frac{\gamma_{\Sigma}}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{3} a T_0^2 p^4}{4 c_V^2 \sigma} \delta(p - q) \delta(t - t') S_{\text{TT}jklm}(p) \quad (4.144)$$

con

$$\gamma_{\Sigma} = \frac{187}{384} \frac{\pi^2}{(2\pi)^3}. \quad (4.145)$$

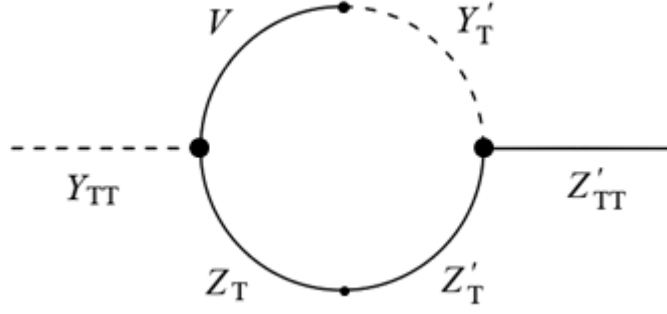


Figura 4.2: Diagrama que representa la corrección a un lazo de la autoenergía proveniente de (4.139). Aquí sólo consideramos el término que es no nulo en el límite $t \rightarrow t'$. En las líneas externas tenemos un campo físico Z'_{TT} y un campo auxiliar Y_{TT} ambos tensoriales. En las líneas internas encontramos los propagadores vectoriales $\langle VY'_T \rangle$ y $\langle Z_T Z'_T \rangle$

4.3.3. Núcleo de ruido para los modos tensoriales

El cálculo del núcleo de ruido comienza con la expresión

$$N_{jklm}(-p, q, t - t') = -2i \frac{\delta \Gamma_Q}{\delta \langle Y_{TT}^{jk}(-p, t) Y_{TT}^{lm}(q, t') \rangle} \quad (4.146)$$

Por los mismos argumentos que expusimos al desarrollar la autoenergía en la ecuación (4.118), la contribución relevante al núcleo de ruido es

$$N_{jklm}^{(V)}(-p, q, t - t') = \left\langle \frac{\delta(S_{Y_{TT}VV} + S_{Y_{TT}VZ_T})}{\delta Y_{TT}^{jk}(-p, t)} \frac{\delta(S_{Y_{TT}VV} + S_{Y_{TT}VZ_T})}{\delta Y_{TT}^{lm}(q, t')} \right\rangle \quad (4.147)$$

Los términos que involucran $S_{Y_{TT}VV}$ se encuentran suprimidos por una potencia τ y por ello los descartamos. Así el núcleo de ruido es

$$N_{jklm}^{(V)}(-p, q, t - t') = \left\langle \frac{\delta S_{Y_{TT}VZ_T}}{\delta Y_{TT}^{jk}(-p, t)} \frac{\delta S_{Y_{TT}VZ_T}}{\delta Y_{TT}^{lm}(q, t')} \right\rangle. \quad (4.148)$$

El diagrama que representa la corrección al núcleo de ruido tensorial (4.148) se muestra en la Figura 4.3. Al igual que con la autoenergía, buscamos la parte singular en el tiempo del núcleo de ruido. Para el cálculo seguimos los mismos pasos de la sección anterior y obtenemos

$$N_{jklm}^{(V)}(-p, q, t - t') = \frac{\gamma_N}{(2\pi)^3} \frac{3a^2 T_0^4 p^4}{4c_V^3 \sigma^2} \delta(p - q) \delta(t - t') S_{TTjklm}(p) \quad (4.149)$$

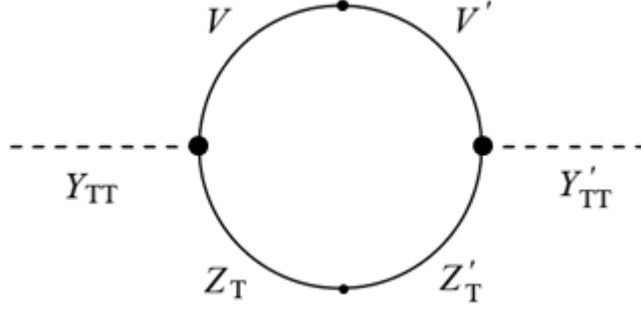


Figura 4.3: Diagrama correspondiente a la corrección del núcleo de ruido tensorial a un lazo, ecuación (4.148). Sólo consideramos el término que es no nulo en el límite $t \rightarrow t'$. En las líneas externas tenemos dos campos auxiliares tensoriales Y_{TT} y Y'_{TT} . En las líneas internas sólo encontramos los propagadores térmicos vectoriales $\langle VV' \rangle$ y $\langle Z_T Z'_T \rangle$.

con

$$\gamma_N = \frac{73 \pi^2}{320 (2\pi)^3}. \quad (4.150)$$

4.3.4. Correlaciones tensoriales no lineales

Para hallar la ecuación dinámica para el propagador causal de los modos tensoriales corregida a un lazo debemos agregar el término singular de la autoenergía a la ecuación ‘clásica’ (4.98). En efecto

$$\frac{aT_0^5}{2\alpha} \left[\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau_1} \right] G_{Z_{TT}Y_{TT}} = \delta(t - t') \quad (4.151)$$

donde

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau} \left[1 + \gamma_\Sigma \left(\frac{p}{p_T} \right)^4 \right]. \quad (4.152)$$

y

$$p_T = \left(\frac{c_V \sigma T_0^3}{\tau} \right)^{1/4} = \left(\frac{p_L^3}{c_V \tau} \right)^{1/4}, \quad (4.153)$$

con p_L en (4.27), el valor máximo de p para el cual la expansión en lazos es consistente. Como $c_V \tau \sim \sqrt{\tau/T}$, en el límite $\tau \rightarrow \infty$, obtenemos que $p_T \ll p_L$.

Notemos que el efecto de las correcciones no lineales a un lazo en la ecuación (4.151) es renormalizar el tiempo de relajación, el cual adquiere una dependencia con la escala p según (4.152). Por lo tanto el propagador causal para los modos tensoriales que sin correcciones era

(4.99), ahora se convierten en

$$G_{Z_{\text{TT}}Y_{\text{TT}}} = \frac{2\alpha}{aT_0^5} e^{-(t-t')/\tau_1} \Theta(t-t') . \quad (4.154)$$

Del mismo modo la función de Hadamard ‘vestida’, análoga a (4.109), ahora es

$$\begin{aligned} G_{1Z_{\text{TT}}Z_{\text{TT}}} &= \left[N + \gamma_N \frac{3a^2 T_0^4 p^4}{4c_V^3 \sigma^2} \right] \left(\frac{2\alpha}{aT_0^5} \right)^2 \frac{\tau_1}{2} e^{-|t-t'|/\tau_1} \\ &= \frac{2}{\sigma T_0^3} e^{-|t-t'|/\tau_1} \frac{\tau_1}{\tau} \left[1 + \gamma_N \left(\frac{p}{p_{\text{T}}} \right)^4 \right] . \end{aligned} \quad (4.155)$$

Dentro del régimen de ‘incompresibilidad’ asumido o equivalentemente en la aproximación de propagación libre (ver Sección 3.2), tenemos dos rangos de interés $p \ll p_{\text{T}}$ y $p_{\text{T}} \ll p < p_{\text{L}}$. Para el primero recuperamos un espectro espacialmente plano en (4.109) y para el segundo obtenemos

$$G_{1Z_{\text{TT}}Z_{\text{TT}}} = \frac{4\tau}{\sigma T_0^3} \left(\frac{\tau_1}{\tau} \right)^2 \left[1 + \gamma_N \left(\frac{p}{p_{\text{T}}} \right)^4 \right] \delta(t-t') \quad (4.156)$$

$$= \frac{4\gamma_N c_V}{\gamma_{\Sigma}^2 p^4} \delta(t-t') . \quad (4.157)$$

El análisis previo muestra claramente una transición de un espectro plano para $p \ll p_{\text{T}}$ a una ley de potencias p^{-4} para $p_{\text{T}} \ll p < p_{\text{L}}$.

4.3.5. Fluctuaciones en la entropía y el EMT

Con las correlaciones ya calculadas es fácil hallar las fluctuaciones del EMT, la densidad de energía y la densidad de entropía. Dado que para longitudes de onda larga recuperamos las fluctuaciones de Landau-Lifshitz para $\Pi_{\text{TT}}^{\mu\nu}$ (ecuación 4.111), aquí sólo citamos la expresión para el rango $p_{\text{T}} \ll p < p_{\text{L}}$. En efecto

$$\left\langle \Pi_{\text{TT}}^{jk}(p, t) \Pi_{\text{TT}}^{lm}(q, t') \right\rangle = (2\pi)^3 \frac{16\gamma_N c_V^3 \sigma^2 T_0^8}{3\gamma_{\Sigma}^2 p^4} \delta(p+q) S_{\text{TT}}^{jklm}[p] \delta(t-t') \quad (4.158)$$

Por otra parte la contribución de los modos tensoriales a la densidad de energía es

$$\rho = \sigma T_0^4 \left[1 + \frac{7}{4} Z_{\text{TT}}^{jk} Z_{\text{TT}jk} \right] . \quad (4.159)$$

Para calcular el valor de expectación de $Z_{\text{TT}}^{jk} Z_{\text{TT}jk}$ para tiempos iguales usamos la forma completa, ecuación (4.155), y llegamos a

$$\langle \rho \rangle = \sigma T_0^4 \left[1 + \frac{7}{\sigma T_0^3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1 + \gamma_N \left(\frac{p}{p_T} \right)^4}{1 + \gamma_\Sigma \left(\frac{p}{p_T} \right)^4} \right] \quad (4.160)$$

El espectro es plano en ambos regímenes $p \ll p_T$ y $p_T \ll p < p_L$, pero en el último la amplitud disminuye por un factor

$$\frac{\gamma_N}{\gamma_\Sigma} \approx 0,47. \quad (4.161)$$

Por último, podemos estimar el espectro de las fluctuaciones de entropía de un forma similar. La densidad de entropía es

$$s = \frac{4}{3} \sigma T_0^3 \left[1 + \frac{9}{8} Z_{\text{TT}}^{jk} Z_{\text{TT}jk} \right] \quad (4.162)$$

y por lo tanto

$$\langle s \rangle = \frac{4}{3} \sigma T^3 \left[1 + \frac{9}{2\sigma T_0^3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1 + \gamma_N \left(\frac{p}{p_T} \right)^4}{1 + \gamma_\Sigma \left(\frac{p}{p_T} \right)^4} \right]. \quad (4.163)$$

Como aclaramos anteriormente estos espectros son los inducidos por los modos tensoriales únicamente, la energía y entropía completas tendrán contribuciones de los modos vectoriales.

Estos espectros no triviales muestran que existe una redistribución concreta de la entropía entre los modos de longitud de onda corta debido a efectos no lineales. Aunque este análisis no nos permite determinar la dirección de los flujos de energía y entropía, el hecho de que cuando se alcanza el equilibrio el espectro de longitud de onda corta tiene una amplitud menor con respecto al caso lineal sugiere la existencia de una cascada inversa de entropía [112].

Parte II

Fluidos relativistas y cosmología

Capítulo 5

Universo muy temprano y evolución de perturbaciones

El modelo estándar de la cosmología actual se lo denomina Λ CDM [121, 122]. Representa un universo espacialmente plano que, además de contener los constituyentes del Modelo Estándar de partículas (SM por sus siglas en inglés), está formado por materia oscura fría y energía oscura (o constante cosmológica) y verifica la siguiente concatenación de etapas: Inflación, Recalentamiento, Dominio de la Radiación, Dominio de la Materia y finalmente Dominio de la Energía Oscura hasta hoy [123].

5.1. Primeras etapas del Universo: Inflación y Recalentamiento

Para los tiempos posteriores a la época de Planck, la Relatividad General es una teoría adecuada para modelar el Universo. En el modelo cosmológico estándar se asume que esta etapa comienza con un período denominado Inflación en el cual el universo experimenta una violenta expansión exponencial¹. Existen distintos modelos de Inflación, en los más simples el contenido de energía fundamental es un campo escalar llamado inflatón ϕ con un potencial particular $V(\phi)$.

Una variable central en la evolución del universo es la constante de Hubble $H = \dot{a}/a$, con a el factor de escala que mide el tamaño relativo del universo y $\dot{a}$ indica la derivada con respecto al

¹El período de Inflación es necesario para resolver el llamado problema del horizonte [121] y a su vez explicar por ejemplo el problema de naturalidad de la planitud espacial.

tiempo físico t . La ecuación que determina esta variable se la denomina ecuación de Friedmann² y es, para un universo espacialmente plano

$$H^2 = \frac{1}{3 M_{\text{pl}}^2} \rho, \quad (5.1)$$

donde ρ es la densidad de energía del contenido del universo. Durante el período de Inflación la densidad de energía es $\rho = \dot{\phi}^2/2 + V[\phi]$.

La expansión exponencial se establece cuando H es constante. Los modelos de Inflación de tipo ‘rodadura lenta’ generan dicha condición a partir de asumir que el inflatón evoluciona sobre un potencial $V[\phi]$ aproximadamente constante mientras los términos cinéticos, vinculados a $\dot{\phi}$, y la aceleración del campo $\ddot{\phi}$ se mantienen despreciables. En particular la contribución del término cinético a la densidad de energía es despreciable $\dot{\phi}^2/2 \ll \rho$. A su vez esta condición sólo persistirá si la aceleración también es pequeña, es decir que $|\ddot{\phi}| \ll |H\dot{\phi}|$. Estas condiciones nos llevan a que la ecuación de Friedmann (5.1) sea

$$H^2 \approx \frac{V}{3 M_{\text{pl}}^2}. \quad (5.2)$$

La primera aproximación que puede hacerse para simplificar la dinámica es asumir que el potencial es estrictamente constante con lo cual, según la ecuación (5.2), el parámetro de Hubble es constante $H = H_{\text{inf}}$ determinado por el valor del potencial V . Como $H_{\text{inf}} = \text{cte}$ la aceleración es exactamente exponencial $a \sim \exp(H_{\text{inf}} t)$ y caracteriza un espacio de de Sitter. Bajo estas aproximaciones la densidad de energía es $\rho = V = \text{cte}$ y su relación con la presión cumple $p = -\rho = -V$.

Un problema que surge inmediatamente es que Inflación debe terminar en algún momento y dar paso al universo térmico dominado por la radiación. Nuevamente la respuesta parece estar en la forma del potencial. Se asume que en algún momento el potencial constante y las condiciones de ‘rodadura lenta’ dejan de valer y el inflatón evoluciona hacia el mínimo de potencial. La dinámica del inflatón cerca del mínimo de potencial establece un régimen oscilatorio alrededor del valor de expectación de vacío. En este proceso de finalización de Inflación, toda la energía del inflatón debe transferirse a los campos del SM en un proceso que se denomina Recalentamiento.

²Existen dos ecuaciones de Friedmann, una para $\dot{a}$ (la primera) y otra para $\ddot{a}$ (la segunda). Aquí mostramos sólo la primera.

Al día de hoy no existe una teoría de Recalentamiento unificada y completa, aunque se han logrado muchos avances [124]. La descripción cualitativa del proceso indica que el inflatón debe acoplarse de alguna forma con los campos de materia del SM. En consecuencia su decaimiento oscilatorio hacia su estado de vacío produce partículas en cada oscilación mediante un efecto no perturbativo llamado resonancia paramétrica. El acoplamiento inflatón-SM puede ser directo o darse a través del acoplamiento mínimo cuyo intermediario es el campo gravitatorio. Una vez creadas las partículas fundamentales, la interacción entre ellas permite su termalización. El fin de este proceso da lugar a un estado de radiación térmica con temperatura T_γ y marca el comienzo de la época dominada por la radiación.

Recientemente [125, 126, 127] se encontró que, desde el comienzo de Recalentamiento, la ecuación de estado se transforma en la de radiación $p = \rho/3$ en un período de tiempo muy corto. Todavía no queda claro el período de tiempo en el cual se alcanza el equilibrio químico y finalmente termodinámico. Sin embargo, si la idea no es estudiar explícitamente Recalentamiento, una hipótesis sensata que simplifica muchísimo la conexión entre Inflación y Radiación es considerar una etapa de Recalentamiento instantánea y completamente efectiva. Mediante la ecuación de Friedmann (5.1) podemos relacionar la constante de Hubble durante la Inflación H_{inf} con la temperatura de Recalentamiento T_γ , que indica el comienzo del dominio de la radiación, como

$$H_{\text{inf}}^2 = \frac{\pi^2 g_*(T_\gamma) T_\gamma^4}{90 M_{\text{pl}}^2} \quad (5.3)$$

donde $g_*(T_\gamma)$ representa la cantidad de grados de libertad del SM que son relativistas a la temperatura T_γ .

El conjunto de todas las partículas fundamentales interactuando a energía relativistas se lo denomina plasma primordial y se describe efectivamente como un fluido ideal cuya ecuación de estado es $p = \rho/3$. Es interesante notar que considerar las perturbaciones de este estado es vital para modelar precisamente el Fondo Cósmico de Radiación (CMB por sus siglas en inglés) y la formación de estructuras a gran escala. En efecto la descripción efectiva más adecuada será considerar un fluido ideal de fondo e incluir tanto perturbaciones en las variables hidrodinámicas como perturbaciones vinculadas efectos no ideales: disipativos, difusivos, etc.

5.2. Perturbaciones alrededor del Universo isótropo y homogéneo

Nuestro universo no es estrictamente isótropo y homogéneo. La distribución de galaxias, cúmulos y super cúmulos muestra que el principio cosmológico es sólo una buena aproximación para las escalas más grandes que observamos. El grado de inhomogeneidades, de anisotropías y el contraste de densidades aumentó con la evolución del universo. De hecho el grado relativo de anisotropías en la temperatura durante Recombinación fue del orden de 10^{-5} y se considera que sobre estas fluctuaciones se desarrollaron todas las estructuras que observamos hoy. De modo que resulta necesario conocer tanto el origen de estas fluctuaciones como su evolución.

El estudio de las perturbaciones alrededor de un universo isótropo y homogéneo, compatible con el principio cosmológico, brinda información vital para conocer la naturaleza de nuestro universo y comprender mejor las observaciones que se han obtenido en las últimas décadas. En efecto hoy entendemos que la estructura del universo es el resultado de la evolución de las perturbaciones tanto de materia o energía como de la geometría a partir de ciertas condiciones iniciales determinadas por fluctuaciones cuánticas durante Inflación [121, 128].

Parte de la clave del éxito de la cosmología moderna fue desarrollar la teoría sobre la creación y evolución de las perturbaciones y conectarlas con las observaciones de alta precisión, desde las fluctuaciones en el CMB hasta las estructuras de materia como las galaxias, cúmulos de galaxias y super cúmulos.

El esquema en el que estudiamos estas perturbaciones propone el siguiente ansatz para la ecuación de Einstein

$$G^{(0)\mu\nu} + \delta G^{\mu\nu} = \frac{1}{M_{\text{pl}}^2} \left[T^{(0)\mu\nu} + \delta T^{\mu\nu} \right]. \quad (5.4)$$

Las cantidades $\delta G^{\mu\nu}$ y $\delta T^{\mu\nu}$ representan las perturbaciones del tensor de Einstein y el EMT alrededor de sus expresiones isótropas y homogéneas $G^{(0)\mu\nu}$ y $T^{(0)\mu\nu}$ respectivamente [128]. Como es usual $T^{(0)\mu\nu}$ corresponde a un fluido ideal definido por las variables hidrodinámicas densidad de energía ρ , presión p y cuadrivelocidad u^μ según la expresión (2.8). El término $\delta T^{\mu\nu}$ estará determinado no sólo por las perturbaciones de las variables hidrodinámicas sino que ahora es posible (y necesario) agregar términos vinculados a los efectos de fluidos no ideales. A saber

$$\delta T_{\mu\nu} = (\delta\rho + \delta p) u_\mu^{(0)} u_\nu^{(0)} + \delta p g_{\mu\nu}^{(0)} + 2(\rho_0 + p_0) u_\nu^{(0)} \delta u_\mu + p_0 \delta g_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu}, \quad (5.5)$$

con $\Pi_{\mu\nu}$ el tensor de esfuerzos viscosos a primer orden. La perturbación en el tensor de Einstein puede escribirse en términos de la métrica perturbada, según $g_{\mu\nu} = g_{(0)\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ con $g_{(0)\mu\nu} = a^2(\eta) \eta_{\mu\nu}$, η el tiempo conforme que cumple $d\eta = dt/a$ y $\eta_{\mu\nu}$ la métrica de Minkowski. Por su parte $\delta g_{\mu\nu}$ tiene 10 grados de libertad y puede expresarse según

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} A & B_i \\ B_i & E_{ij} \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

con E_{ij} un tensor simétrico.

La relación de orden cero $G^{(0)\mu\nu} = T^{(0)\mu\nu}/M_{\text{pl}}^2$ da lugar a las conocidas ecuaciones de Friedmann. A su vez la ecuación $\nabla_\mu^{(0)} T^{(0)\mu\nu} = 0$ será la ecuación de conservación usual del fluido ideal. Por otra parte la dinámica de las perturbaciones a primer orden está determinada por la relación

$$\delta G^{\mu\nu} = \frac{1}{M_{\text{pl}}^2} \delta T^{\mu\nu} \quad (5.7)$$

y por las ecuaciones de conservación propias del fluido

$$\delta(\nabla_\mu T^{\mu\nu}) = 0. \quad (5.8)$$

Es conveniente implementar una descomposición escalar (spin-0), vectorial (spin-1) y tensorial (spin-2) (SVT por sus siglas en inglés) de todos los grados de libertad y ecuaciones (5.5)-(5.8) para desacoplar cada uno de estos sectores entre sí. A la hora de elegir explícitamente los grados de libertad debemos tener en cuenta la libertad de gauge propia de los cambios de coordenadas en Relatividad General. Existen dos opciones válidas, una es fijar el gauge con alguna condición ad-hoc y otra es la construcción de variables invariantes de gauge y deducir su dinámica [128]. En cualquier caso seguiremos teniendo perturbaciones de los tres tipos.

Dentro de las perturbaciones escalares encontramos las densidades de materia y radiación y los potenciales gravitatorios. Este sector es el que describe las futuras estructuras de gran escala como galaxias y cúmulos de galaxias. Al estudiar su evolución encontramos que, para ciertas escalas, las pequeñas fluctuaciones de densidad de materia iniciales se amplifican primero en un régimen lineal y luego a través de un colapso gravitatorio no lineal. Estas estructuras colapsadas son las que formarán los cúmulos de galaxias. A su vez las perturbaciones vectoriales de la

métrica y del fluido, como la vorticidad, decaen rápidamente conforme se expande el universo en la mayoría de los escenarios.

Las perturbaciones tensoriales son invariantes de gauge por construcción. Por parte de la métrica tenemos las ondas gravitatorias (GW por sus siglas en inglés) que denotamos h_{ij} y provienen de la parte tensorial del tensor E_{ij} de la ecuación (5.6). Por parte del fluido tenemos Π_{ij}^{TT} , la parte espacial transversal y sin traza del tensor de esfuerzos anisótropo $\Pi^{\mu\nu}$ en la ecuación (5.5). Suele argumentarse que a primer orden el fluido no exhibe este tipo de perturbaciones debido a que los desarrollos hidrodinámicos convencionales no contemplan este tipo de modos. En ese caso las GW evolucionan libremente sin acoplarse al fluido. Por el contrario en el Capítulo 6 estudiamos particularmente la evolución de las GW en presencia de un fluido con modos tensoriales provenientes del tensor de esfuerzos anisótropo que modela los efectos viscosos.

En cualquier caso se obtienen ecuaciones en derivadas parciales linealizadas y en consecuencia es útil hacer una expansión en modos de Fourier para obtener la dinámica para cada modo k por separado como función del tiempo. En la mayoría de las ecuaciones se distinguen dos regímenes con comportamientos cualitativamente diferentes:

$$k \ll aH = \mathcal{H} \rightarrow \lambda_{\text{phys}} \gg H \quad \text{super-Hubble,} \quad (5.9)$$

$$k \gg aH = \mathcal{H} \rightarrow \lambda_{\text{phys}} \ll H \quad \text{sub-Hubble,} \quad (5.10)$$

aquí k es el número de onda comóvil, λ_{phys} es la longitud de onda física, H la constante de Hubble y $\mathcal{H}$ la constante de Hubble comóvil. En esta tesis la nomenclatura super-Hubble será equivalente a super-horizonte (idem para sub-Hubble). En la Figura 5.1 se muestra tanto la evolución de las longitudes de onda físicas (o distancias físicas) como del radio de Hubble H^{-1} en función del factor de escala a junto con las condiciones (5.9) y (5.10). Por ejemplo, en el escenario convencional, los modos de las perturbaciones tensoriales de la métrica (i.e. las GW) se vuelven constantes al salir del horizonte durante Inflación y permanecen constantes en su evolución mientras están fuera del horizonte. Una vez que reingresan al horizonte comienzan a oscilar y decaer. Incluso el decaimiento depende de si el modo vuelve a entrar al horizonte durante la etapa dominada por la radiación o por la materia, λ y λ_{Rec} en la Figura 5.1 respectivamente.

La Figura 5.1 permite entender distintas cuestiones sobre la importancia de Inflación a la hora de definir las condiciones iniciales de las perturbaciones. En primera instancia vemos que

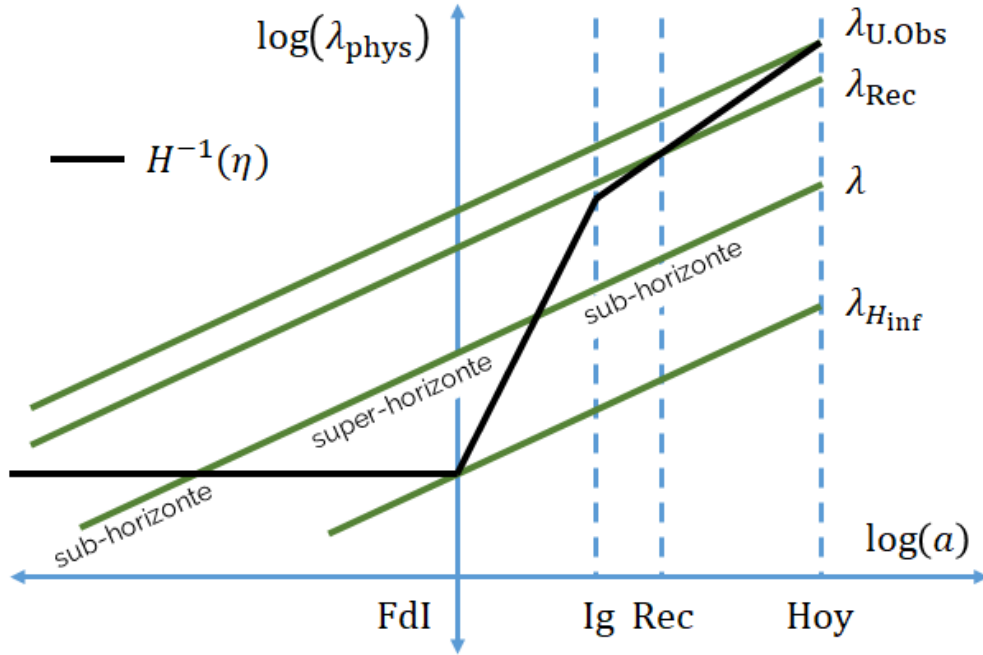


Figura 5.1: Esquema representativo de la evolución de las longitudes de onda físicas λ_{phys} y del horizonte de Hubble local H^{-1} en función del factor de escala a . Asumimos una primera etapa de Inflación que finaliza en el momento FdI, Recalentamiento instantáneo, Dominio de Radiación, Igualdad y Dominio de Materia (en este esquema ignoramos la etapa dominada por la energía oscura). Vemos cómo una escala física λ que en el pasado lejano es sub-horizonte, en algún momento durante Inflación sale del horizonte gracias a que $H_{\text{inf}} = \text{cte}$. Todas las escalas de interés cumplen $\lambda \gg \lambda_{H_{\text{inf}}}$ y por lo tanto en el momento FdI son super-horizonte. Eventualmente vuelven a entrar al horizonte en tiempos posteriores. Las escalas más grande reingresan al horizonte más tarde. Por ejemplo λ_{Rec} corresponde a la escala que en Recombinación tiene el tamaño del horizonte y $\lambda_{\text{U.Obs}}$ es aproximadamente la longitud del Universo observable hoy.

las longitudes de onda de un cierto modo siempre evolucionan proporcionales al factor de escala $\lambda_{\text{phys}} \sim a$. Por otra parte el escaleo del horizonte local H^{-1} (o radio de Hubble) depende de la etapa que consideremos. Para el modelo de Inflación más simple $H^{-1} = \text{cte}$, mientras que para el dominio de la radiación y materia H^{-1} escalea como a^2 y $a^{3/2}$ respectivamente³. Por lo tanto cualquier perturbación creada durante Inflación con longitud de onda λ se transforma en super-horizonte para luego volver a entrar al horizonte en tiempos posteriores cuando domina la radiación o la materia.

En la actualidad las escalas físicas de interés cosmológico corresponden a distancias $\lambda \gg \lambda_{H_{\text{inf}}}$ según observamos en la Figura 5.1. En el fin de Inflación (FdI) todas esas longitudes de onda

³Estamos descartando el análisis sobre la época dominada por la energía oscura debido a que es una etapa muy reciente y sólo podría afectar las escalas más grandes del orden del universo observable.

son super-horizonte por lo tanto para explicar las condiciones iniciales correspondientes al FdI necesitamos un mecanismo que genere perturbaciones en escalas que se encuentran fuera del horizonte local. Inflación provee este esquema.

Cuando un modo del inflatón con número de onda k sale del horizonte durante el período inflacionario ($k/aH_{\text{inf}} < 1$), sus fluctuaciones cuánticas $\langle \phi_k^2 \rangle$ se vuelven independientes del tiempo y se ‘congelan’. Se cree que hacia el fin de Inflación estas fluctuaciones han devenido en fluctuaciones clásicas estocásticas, habiendo diversas propuestas en la literatura acerca de mecanismos que podrían mediar en esta transición [129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136]. En el régimen super-horizonte la dependencia con respecto a las escalas cumple $\langle \phi_k^2 \rangle \sim H_{\text{inf}}^2/k^3$. A su vez se define el espectro de potencias como $\Delta_\phi(k) = k^3 \langle \phi_k^2 \rangle / (2\pi)^3$ y en consecuencia notamos que $\Delta_\phi(k)$ es invariante de escala ⁴. El mismo mecanismo ocurre sobre todos los campos que representan las perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales, tanto de la métrica como del EMT fijando así las condiciones iniciales de los respectivos espectros de potencias al momento del fin de Inflación. Naturalmente estos modos volverán a entrar al horizonte en tiempos posteriores y evolucionarán con una dinámica no trivial hasta el día de hoy.

En el Capítulo 6 estudiamos la evolución de las perturbaciones cosmológicas tensoriales dentro del contexto cosmológico descrito a grandes rasgos en este capítulo. Ciertos aspectos relevantes son revisitados con un mayor grado de detalle.

⁴En un escenario más general en el que el potencial del inflatón no es estrictamente constante obtendríamos una ligera dependencia respecto de k .

Capítulo 6

Ondas gravitatorias primordiales y fluidos relativistas

6.1. Ondas gravitatorias cosmológicas

El espectro de ondas gravitatorias primordiales (pGW por sus siglas en inglés) se produce a partir de fluctuaciones cuánticas durante Inflación y luego evoluciona hasta hoy. Dado que la creación de las pGW es previa a Recombinación, a Nucleosíntesis Primordial (BBN por sus siglas en inglés) y a cualquier etapa de la cual tengamos datos observacionales; una eventual detección permitiría arrojar luz sobre el Universo muy temprano y en consecuencia sobre la física de alta energía. De hecho cualquier observación relacionada con las pGW proporcionaría una evidencia fundamental del modelo inflacionario.

Tener un conocimiento preciso de dicho espectro podría ser una herramienta muy valiosa a la hora de contrastar con una observación directa mediante, por ejemplo, Matrices Sincronizadas de Pulsares o Interferómetros de Ondas Gravitatorias (ver [137, 138, 139]); o indirecta a través de los modos B primordiales en la polarización del CMB que muchos experimentos, como QUBIC [140], pretenden detectar. Sabemos que el espectro de pGW, en el tiempo de Recombinación, determina la existencia de dichos modos.

La evolución de las pGW está determinada por la proyección transversal y sin traza (TT) del sector espacial de las ecuaciones de Einstein linealizadas (5.2). Su dinámica depende tanto de la evolución del factor de escala $a(t)$ como de la proyección TT del tensor de esfuerzos an-

isótopo Π_{ij}^{TT} que actúa como una fuente. El espectro de pGW estándar ha sido estudiado en [141, 142, 143] donde se muestra que incluso sin fuentes ($\Pi_{ij}^{\text{TT}} = 0$), surgen efectos no triviales debido a las variaciones en el factor de escala $a(t)$ particularmente a través del cambio entre las diferentes eras (radiación, materia y energía oscura) o el decaimiento de los grados de libertad relativistas. El impacto de ecuaciones de estado no convencionales [144, 145] y de diferentes escenarios inflacionarios y post-inflacionarios [146, 147] también ha sido analizado.

Entre los efectos sobre la evolución de las pGW relacionados con fuentes no nulas, es decir con $\Pi_{ij}^{\text{TT}} \neq 0$, encontramos el amortiguamiento debido a la propagación libre de partículas [141, 142, 143, 144, 145, 148, 149, 150, 151] y la absorción de GW debido a su propagación en medios viscosos [152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164]. Por otra parte las GW podrían ser producidas dentro del contexto cosmológico por fenómenos, distintos a Inflación, vinculados directamente con las anisotropías de spin-2 de la materia Π_{ij}^{TT} . Entre ellos cabe mencionar la evolución de campos escalares durante Recalentamiento [165, 166, 167, 168], las transiciones de fase cosmológicas [169, 170, 171, 172, 173], la evolución de las perturbaciones escalares de segundo orden [174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182] y las fluctuaciones térmicas de los plasmas [183, 184, 185, 186]. Una vez creadas, estas GW podrían evolucionar de manera no trivial dependiendo el caso. También se han estudiado las anisotropías angulares del fondo de GW generadas tanto por el proceso de producción, ya sea astrofísico o cosmológico, como por su propagación a lo largo de distintas trayectorias a través de la ecuación de Boltzmann para la función de distribución de las GW [187, 188, 189]. Finalmente, en [137, 138, 139] se puede encontrar una revisión completa sobre las GW cosmológicas y sus fuentes.

6.2. Descripción general del problema a resolver

En el desarrollo de este capítulo concentramos nuestra atención en la evolución de las pGW acopladas al plasma primordial en el universo temprano considerando efectos viscosos a través de una interacción autoconsistente que incorpora la reacción inversa de las GW sobre el plasma. Particularmente estudiamos la evolución del sistema GW-plasma desde el inicio de la era de Radiación hasta la actualidad. Las ideas que desarrollamos a continuación están basadas en los trabajos [14, 15].

6.2.1. Escenario cosmológico e hidrodinámico

El escenario cosmológico en el que estudiamos la evolución de las GW es el modelo cosmológico estándar Λ CDM. Las características de este modelo que son relevantes para el desarrollo de este capítulo están descritas en el Capítulo 5.

Asumimos que durante el proceso de Recalentamiento, luego de un período inflacionario estándar de de Sitter, toda la energía del inflatón se transfiere a los campos de materia. En consecuencia, el estado de estos campos se convierte en un estado excitado de muchas partículas. Las fluctuaciones cuánticas para las escalas que salen del horizonte durante Inflación, pierden su coherencia cuántica y pueden ser tratadas como partículas clásicas (ver Sección 5.2) [129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136]. En efecto, al finalizar Recalentamiento, la descripción hidrodinámica para modelar de forma efectiva el estado excitado de los campos es adecuada [7].

Por simplicidad asumimos una etapa de Recalentamiento instantánea [125, 126, 127] (ver ecuación 5.3). Al comienzo de la era dominada por la radiación, se establece el plasma primordial que es un estado térmico de alta temperatura compuesto por partículas con energías relativistas. Consideramos que el plasma primordial contiene todas las especies del SM más un campo escalar adicional, s , efectivamente no masivo, mínimamente acoplado y con autointeracciones débiles. Dado que trabajaremos con masas y constantes de acoplamiento muy pequeñas, este campo adicional s pertenece a la familia de las partículas tipo axiones (ALP por sus siglas en inglés) [190], frecuentemente utilizadas en cosmología como candidatas a materia o radiación oscura [191, 192, 193, 194].

Describimos al plasma primordial como un fluido real, particularmente como un fluido perfecto más pequeñas perturbaciones no ideales (disipativas). Todas las especies del SM forman la radiación dominante modelada como un fluido ideal. A su vez, el estado hidrodinámico post-Recalentamiento del campo escalar s corresponde a un fluido viscoso, de modo que las fluctuaciones no ideales del plasma se deben completamente a s .

Nuestro interés final es estudiar la evolución de las pGW teniendo en cuenta la interacción pGW-plasma primordial debida a los efectos viscosos. Para ello analizamos la dinámica de las perturbaciones lineales alrededor del estado térmico ideal compuesto por la radiación de fondo.

Describir el plasma primordial del universo temprano como un fluido efectivo que presenta efectos viscosos requiere de un modelo hidrodinámico. Naturalmente el escenario cosmológico

exige la compatibilidad con la Relatividad General y la presencia de efectos disipativos requiere el cumplimiento de la segunda ley de la Termodinámica. Como lo desarrollamos en el Capítulo 2, los modelos que cumplen con estas condiciones serán los correspondientes a la hidrodinámica relativista. Desde el punto de vista fenomenológico nuestra motivación en usar la hidrodinámica relativista en este contexto deriva del éxito que han tenido estas teorías en modelar el plasma de quarks y gluones creado en las etapas tempranas de las RHICs [8, 9]. De hecho nuestro problema tiene similitudes significativas con las RHICs [186, 195].

Entre los esquemas de la hidrodinámica relativista elegimos trabajar con las SOTs y particularmente con la DTT construida a partir de la ecuación de Boltzmann y un ansatz particular para la 1pdf como discutimos en la Sección 2.5.1.

Además de cumplir con los requisitos relativistas, termodinámicos y haber mostrado buen acuerdo con las soluciones exactas conocidas para los casos de Bjorken y Gubser [55] como argumentamos en las Secciones 2.4 y 2.5, existen al menos dos motivos más que guían la elección. Por un lado como las GW tiene la simetría de un campo de spin-2 y estamos estudiando su acoplamiento a primer orden con el plasma primordial, es importante que la teoría hidrodinámica capture las anisotropías tensoriales del fluido como grados de libertad propios, tal y como son los modos de spin-2 comunes a la mayoría de las SOTs. Por el otro, como se argumentó en [25, 44], las SOTs son apropiadas para estudiar los procesos de relajación de las fluctuaciones no ideales del fluido al estado de equilibrio que en nuestro caso es la radiación dominante.

Dado que sólo consideramos perturbaciones lineales alrededor del equilibrio, los resultados que reportamos serán cualitativamente independientes de la elección de una SOT particular, sea una DTT [54, 55], la teoría BRSSS resumada [27], la Hidrodinámica Anisótropa [8], la teoría DNMR [58], las vinculadas al principio variacional de producción de entropía [59] u otras.

6.2.2. Vinculación con trabajos previos

La dinámica lineal acoplada entre las GW y los modos spin-2 del fluido queda definida a través de la proyección TT de las ecuaciones Einstein (ver Sección 6.4) y la dinámica de relajación de tipo Maxwell-Cattaneo para los modos de spin-2 del fluido con tiempo de relajación τ . Surgen dos escenarios posibles en los cuales evolucionar estas ecuaciones hasta hallar el espectro de GW en la actualidad. Estos corresponden a dos conjuntos de condiciones iniciales diferentes. Por un lado tenemos el canal de efectos disipativos, y por otro el canal de producción de GW, como

describimos a continuación.

En el canal de efectos disipativos detallado en la Sección 6.5.1 consideramos que el espectro inicial de las GW es el usual proveniente de las fluctuaciones cuánticas durante Inflación (ver Subsección 6.4.3) y que el espectro inicial de los modos de spin-2 del fluido es nulo.

Este enfoque está relacionado con estudios sobre la absorción de GW en presencia de medios disipativos o de libre propagación en [152, 153, 154, 155, 156, 157, 158] y más recientemente en [148, 159, 160, 161, 162, 163]. En particular analizamos conceptualmente el mismo fenómeno expuesto en [148, 160] en donde la dinámica de la interacción GW-fluido fue estudiada dentro del marco de la teoría cinética para los regímenes colisional y no colisional del fluido. En esta parte nuestro aporte es revisar la propagación de las GW a través de un medio viscoso estableciendo un esquema hidrodinámico causal con variables dinámicas no ideales independientes que capturan la dinámica acoplada entre las GW y los modos de spin-2 del fluido a primer orden. El resultado final es el cálculo explícito del espectro actual de las pGW.

En el canal de producción de GW expuesto en la Sección 6.5.2, el espectro inicial de los modos de spin-2 del fluido es extraído a partir de la proyección TT del núcleo de ruido del campo escalar s en el fin de Inflación (ver Subsección 6.4.3), mientras que las GW iniciales son nulas.

De esta forma analizamos la producción de GW debido a los modos iniciales de spin-2 del fluido y su evolución desde el comienzo de la etapa de Radiación hasta la actualidad. La evolución se caracteriza por la misma dinámica disipativa que consideramos para el canal de efectos disipativos. Esto implica un decaimiento efectivo de estas fluctuaciones iniciales en una escala de tiempo τ , que a su vez produce GW. Vale la pena señalar que las fluctuaciones y la disipación surgen naturalmente en la evolución de los campos cuánticos interactuantes [7, 196, 197], nuestro objetivo es capturar esa dinámica disipativa de la forma más simple dentro de un marco hidrodinámico. Por supuesto, para lograr una evolución completa y precisa se deben incluir muchos otros efectos.

Es posible vincular esta parte de nuestro trabajo con estudios sobre la producción de GW debido a las fluctuaciones térmicas de plasmas [183, 184, 185, 186]. Un camino muy interesante, que esperamos desarrollar en las próximas investigaciones, es aplicar los conceptos sobre fluctuaciones térmicas en las DTT del Capítulo 4 al escenario cosmológico de este capítulo y estudiar la producción de GW por este efecto.

6.2.3. Organización del resto del capítulo

Organizamos el resto del capítulo de modo tal que en la Sección 6.3 elaboramos la descripción del plasma primordial como un fluido viscoso en un marco hidrodinámico causal usando una DTT derivada a partir de la ecuación de Boltzmann. En la Sección 6.4 derivamos las ecuaciones dinámicas que capturan los efectos viscosos a través del acoplamiento entre las GW y los modos de spin-2 del fluido. Las condiciones iniciales y su implementación numérica se presentan en las Secciones 6.4.3 y 6.4.4. El espectro actual de GW se describe en la Sección 6.5. En particular, mostramos la evolución de las GW primordiales creadas durante Inflación en presencia del plasma viscoso en la Sección 6.5.1, mientras que la producción de GW debido al decaimiento efectivo de las fluctuaciones iniciales del fluido se muestra en la Sección 6.5.2.

6.3. El plasma primordial como un fluido causal

El plasma primordial está compuesto por todos los grados de libertad relativistas de los campos fundamentales del SM más un campo escalar extra efectivamente no masivo, mínimamente acoplado y con autointeracciones, s , representado por un ALP [190, 191, 192, 193, 194]. Este plasma se describe como un fluido perfecto de fondo, con una densidad de energía media ρ_{rad} y una cuadrivelocidad que en el referencial de reposo se lee $U_{\text{rad}}^\mu = \delta_0^\mu/a$, más pequeñas fluctuaciones provenientes sólo del nuevo campo escalar s . La densidad de energía media de la radiación total es

$$\rho_{\text{rad}} = \rho_{\text{SM}} + \rho_s = \frac{g_*}{2} \rho_\gamma \quad (6.1)$$

donde ρ_{SM} y ρ_s son las densidades de energía de los grados de libertad relativistas del SM y el campo escalar s respectivamente. Además $\rho_\gamma = \pi^2 T_{\text{rad}}^4/15$ es la densidad de energía media de los fotones con T_{rad} su temperatura física y $g_*(T_{\text{rad}})$ el número total de grados de libertad relativistas [121]. La temperatura física de los fotones escala como $T_{\text{rad}} \sim T_{\gamma,0}(a_0/a)$ debido a la evolución cuasi-adiabática del Universo. No obstante más adelante comentamos cómo impacta la variación de $g_*(T_{\text{rad}})$ sobre la relación $T_{\text{rad}} - a$ conforme evoluciona el universo.

Asumiendo que m_s es la masa del campo escalar s y $T_{\text{phys},s}$ la temperatura física del fluido compuesto por las partículas de s , en el Apéndice B mostramos que mientras $p^\mu p_\mu/T_{\text{phys},s}^2 =$

$m_s^2/T_{\text{phys},s}^2 \ll 1$ la teoría hidrodinámica que utilizamos para modelar el plasma (Subsección 2.5.1), resulta ser invariante conforme¹. Elegimos el parámetro m_s de forma tal que se cumpla el régimen no masivo conforme durante toda su evolución hasta hoy. Por ello, para simplificar los cálculos, es útil considerar una transformación conforme tal que $g_{\mu\nu} = a^2 \tilde{g}_{\mu\nu}$ con la métrica conforme $\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ donde $\eta_{\mu\nu}$ la perturbación $h_{\mu\nu}$ representa las GW. En efecto, en las próximas dos subsecciones derivamos las ecuaciones hidrodinámicas comóviles para el fluido efectivo en términos de las variables comóviles temperatura T_s , cuadrivelocidad u^μ y del nuevo tensor $\zeta^{\mu\nu}$ que captura los efectos viscosos.

6.3.1. Descripción microscópica del fluido

En esta subsección describimos brevemente las propiedades microscópicas del fluido compuesto por el campo s . La idea es aplicar la teoría desarrollada en la Subsección 2.5.1 a este escenario y extraer las ecuaciones hidrodinámicas.

Partimos introduciendo la 1pdf para partículas escalares sin masa, a saber, la 1pdf de Bose-Einstein². Para tener en cuenta los efectos no ideales, incluimos fluctuaciones sobre la función de distribución de equilibrio f_0 . La distribución f_0 se escribe en términos de la temperatura T_s y la cuadrivelocidad del referencial de reposo $U^\mu = \delta_0^\mu$ como

$$f_0 = d_s \frac{1}{\exp(-U^\mu p_\mu/T_s) - 1}, \quad (6.2)$$

donde d_s es el número de estados posibles del campo escalar s . Asumimos $d_s = 2$ por conveniencia en vistas de futuras comparaciones, sin embargo, cambiar este parámetro es trivial. Introducimos las fluctuaciones en la 1pdf a través de la temperatura $\mathbf{T}_s = T_s + \delta T_s$, la cuadrivelocidad $u^\mu = U^\mu + v^\mu$ y la nueva variable de no-equilibrio $\zeta_{\mu\nu}$ según

$$f = d_s \left[\exp \left(-u^\mu p_\mu / \mathbf{T}_s - \frac{\zeta^{\mu\nu} p_\nu p_\mu}{(-\mathbf{T}_s u^\lambda p_\lambda)} \right) - 1 \right]^{-1}. \quad (6.3)$$

A partir de esta 1pdf extraemos las ecuaciones de conservación a partir del procedimiento de momentos de la ecuación de Boltzmann de la Subsección 2.5.1.

¹La relación cuasi-conforme entre la temperatura y el factor de escala la incorporamos *a posteriori* en la Sección 6.4.

²En la teoría de la Subsección 2.5.1 consideramos la distribución de equilibrio de Maxwell-Jüttner, aquí usamos su extensión a la 1pdf de Bose-Einstein.

Como nos interesa la evolución dinámica de las GW a primer orden implementamos una descomposición SVT de todos los grados de libertad y observamos que los tres sectores quedan desacoplados a primer orden. Por lo tanto, simplificamos nuestro análisis considerando que los grados de libertad físicos escalares y vectoriales que describen al fluido del campo escalar s , como su velocidad y su temperatura, se equilibran con el resto del plasma al comienzo de la era dominada por la Radiación. Dicho equilibrio se mantendrá gracias a las interacciones escalares y vectoriales entre s y el resto del SM, hasta que eventualmente estas se vuelvan ineficientes y el fluido s se desacople del resto de la radiación. El desacople ocurre cuando $T_{\text{rad}} = T_{\text{dec},s}$, siendo la temperatura de desacople, $T_{\text{dec},s}$, un parámetro externo que caracteriza este fenómeno. En consecuencia la relación entre las temperaturas físicas es $T_{\text{phys},s}/T_{\text{rad}} = 1$ hasta el desacople de s . Para tiempos posteriores el cociente $T_{\text{phys},s}/T_{\text{rad}}$ queda determinado por la conservación de la entropía total y de la entropía propia de s [121]. Más adelante desarrollamos esta relación cuando calculamos el vínculo entre las densidades de energía de s y de los fotones, ρ_s/ρ_γ . De este modo sólo consideramos fluctuaciones tensoriales (spin-2) alrededor del estado de fondo del plasma primordial. A primer orden, dichas fluctuaciones sólo pueden surgir de la variable de no equilibrio $\zeta_{\mu\nu}$ del fluido y la perturbación métrica $h_{\mu\nu}$.

Los efectos viscosos que consideramos son producidos por la auto-interacción entre los modos tensoriales (de spin-2) del fluido compuesto por las partículas de s . La forma efectiva de introducirlos es a través de una integral de colisiones lineal de tipo Anderson-Witting [83, 84, 85]

$$I_{\text{col}} = \frac{u^\mu p_\mu}{\tau} (f - f_0) \quad (6.4)$$

donde $\tau = \tau_{\text{phys}}/a$ es el tiempo de relajación comóvil de los modos tensoriales del fluido. Desde la perspectiva de la teoría cuántica de campos es posible estimar el tiempo de relajación en el límite no masivo a partir de la relación [7, 198]

$$\tau_{\text{phys}} \sim \frac{1}{g^4 T_{\text{phys},s}}. \quad (6.5)$$

siendo g la constante de acoplamiento adimensional que regula la auto-interacción entre los modos de spin-2 del estado hidrodinámico del campo escalar s . Considerando que $T_{\text{phys},s}/T_{\text{rad}} \sim O(1)$, la estimación del tiempo de relajación comóvil resulta $\tau \sim 1/g^4 T_{\gamma,0}$ con $T_{\gamma,0}$ la temperatura actual

de los fotones³. En el régimen no masivo que estamos considerando también es posible identificar una viscosidad de cizalla física efectiva en términos del tiempo de relajación y la densidad de energía según $\eta_{\text{phys}} \sim \rho_s \tau_{\text{phys}}$ [153, 199, 200].

La idea de concentrar todos los efectos disipativos en un único campo se debe a que sólo un candidato a materia oscura podría tener un valor de τ tan grande tal que los efectos disipativos sean cosmológicamente relevantes, y entre los candidatos las ALPs parecen los más verosímiles [190, 201, 202, 191, 192, 193, 194].

En términos más concretos estamos interesados en una ALP débilmente interactuante producida por fenómenos térmicos en el universo muy temprano [191], cuyas constantes de acoplamiento sean muy pequeñas, del orden $g \sim 10^{-6} - 10^{-4}$ [14], o cuyos tiempos de relajación (análogos al tiempo de vida media) sean muy grandes [194]. Estas condiciones podrían generar efectos asociados a escalas de interés cosmológico. Asumiendo que $T_{\gamma,0} \simeq 2,73 \text{ K}$ y $a_0 = 1$, el tiempo de relajación comóvil es

$$\tau \sim \frac{1}{g^4} \cdot 10^{-11} \text{ s}. \quad (6.6)$$

Los valores de τ con los que estamos tratando son compatibles con los valores del tiempo de vida medio $\Gamma_{a \rightarrow \gamma\gamma}^{-1}$ en ciertos modelos de ALPs [190, 201, 202].

6.3.2. Ecuaciones hidrodinámicas

A partir de la simetría conforme de la teoría hidrodinámica que estamos utilizando, es posible escribir las ecuaciones en términos de las variables comóviles y de la métrica comóvil $\tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Recordamos que para describir la interacción de primer orden entre los modos de spin-2 del fluido provenientes de $\zeta_{\mu\nu}$ y las GW, $h_{\mu\nu}$ sólo consideramos las perturbaciones tensoriales. Los modos escalares y vectoriales no son perturbados y en particular la temperatura y la cuadrivelocidad permanecen como variables de orden cero determinadas por T_s y $U^\mu = \delta^\mu_0$ respectivamente. De este modo, a primer orden en perturbaciones, la 1pdf (6.3) y la integral de

³El subíndice 0 significa valores actuales.

colisiones (6.4) quedan

$$f = f_0 \left[1 + (1 + f_0) \frac{\zeta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu}{(-T_s U^\lambda p_\lambda)} \right], \quad (6.7)$$

$$I_{\text{col}} = -f_0(1 + f_0) \frac{\zeta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu}{T_s \tau}. \quad (6.8)$$

Las cantidades de primer orden, $\zeta^{\mu\nu}$ y $h^{\mu\nu}$, cumplen con las siguientes propiedades de simetría y gauge $\zeta_{\mu\nu} U^\mu = \zeta^\mu{}_\mu = h_{\mu\nu} U^\mu = h^\mu{}_\mu = 0$.

Siguiendo la prescripción de la Subsección 2.5.1, las ecuaciones dinámicas para este caso son la conservación del EMT comóvil

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0 \quad (6.9)$$

con

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \int Dp \, p^\mu p^\nu f \quad (6.10)$$

y la ecuación de clausura proyectada para los tensores de no-equilibrio

$$\Lambda^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \left[\tilde{\nabla}_\rho \tilde{A}^{\mu\nu\rho} - \tilde{K}^{\mu\nu} - \tilde{I}^{\mu\nu} \right] = 0 \quad (6.11)$$

donde

$$\tilde{A}^{\mu\nu\rho} = \int Dp \, p^\mu p^\nu p^\rho \left(\frac{1}{-U_\sigma p^\sigma} \right) f, \quad (6.12)$$

$$\tilde{K}^{\mu\nu} = \int Dp \, p^\mu p^\nu \left[p^\lambda \tilde{\nabla}_\lambda \left(\frac{1}{-U_\sigma p^\sigma} \right) \right] f \quad (6.13)$$

y

$$\tilde{I}^{\mu\nu} = \int Dp \, p^\mu p^\nu \left(\frac{1}{-U_\sigma p^\sigma} \right) I_{\text{col}}. \quad (6.14)$$

El proyector en la ecuación (6.11) es la versión comóvil y de orden cero de (2.51), a saber

$$\Lambda^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\Delta^\alpha{}_\mu \Delta^\beta{}_\nu + \Delta^\alpha{}_\nu \Delta^\beta{}_\mu - \frac{2}{3} \Delta^{\alpha\beta} \Delta_{\mu\nu} \right] \quad (6.15)$$

con el proyector ortogonal

$$\Delta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu, \quad (6.16)$$

también análogo a (2.10).

Para hallar la forma explícita de las ecuaciones hidrodinámicas (6.9) y (6.11) es necesario resolver las integrales (6.10) y (6.12)-(6.14) usando las expresiones (6.7) y (6.8). Finalmente las cantidades relevantes para estudiar la evolución de las GW son la densidad física de energía media del fluido

$$\rho_s = \sigma T_{\text{phys},s}^4, \quad (6.17)$$

con $\sigma = d_s \pi^2/30 = \pi^2/15$, la parte transversal y sin traza del EMT completo linealizado en componentes mixtas

$$\Lambda^\mu{}_\nu{}^\rho{}_\sigma \tilde{T}^{(1)\mu}{}_\nu = \frac{8}{15} \sigma T_s^4 \zeta^\mu{}_\nu \quad (6.18)$$

y la ecuación de clausura (6.11) linealizada

$$\zeta^{\mu\nu}{}_{,0} + \frac{1}{\tau} \zeta^{\mu\nu} = -b h^{\mu\nu}{}_{,0}, \quad (6.19)$$

el parámetro b depende específicamente de la teoría hidrodinámica considerada, $b = 1/2$ en nuestro caso.

En resumen, el plasma primordial se describirá mediante un EMT con un fluido perfecto de fondo cuya densidad de energía física es (6.1) más una parte viscosa, que corresponde a las perturbaciones lineales no ideales (6.18), vinculada sólo con el estado hidrodinámico del campo escalar s . La dinámica de estas fluctuaciones lineales de spin-2 del fluido está determinada por (6.19).

6.4. Ondas gravitatorias y modos de spin-2 del fluido

6.4.1. Ecuaciones de evolución

Las ecuaciones dinámicas para las GW se deducen a partir de la proyección espacial, transversal y sin traza (TT) que extrae los modos de spin-2 de las ecuaciones de campos de Einstein en componentes mixtas, a saber

$$G^{(1)i}{}_{j\text{TT}} = \frac{1}{a^2 M_{\text{pl}}^2} \tilde{T}^{(1)i}{}_{j\text{TT}} \quad (6.20)$$

donde $G^{(1)i}{}_{j\text{TT}}$ y $\tilde{T}^{(1)i}{}_{j\text{TT}}$ son las proyecciones espaciales TT del tensor de Einstein y del EMT comóvil del plasma primordial respectivamente, en ambos consideramos sólo los términos de primer orden. La proyección TT del tensor de Einstein es

$$G^{(1)i}{}_{j\text{TT}} = \frac{1}{2} \left[-\eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma + 2 \frac{a'(\eta)}{a(\eta)} \partial_0 \right] h_{ij}, \quad (6.21)$$

mientras que $\tilde{T}^{(1)i}{}_{j\text{TT}}$ está dada por la proyección TT sobre las componentes espaciales de (6.18). Para extraer explícitamente los modos de spin-2 (TT), expandimos los tensores en modos de Fourier según

$$a_{ij}^{\text{TT}}(\eta, \mathbf{x}) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{k},\lambda}(\eta) \epsilon_{ij}^{\lambda}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \quad (6.22)$$

La cantidad $a_{\mathbf{k},\lambda}$ es el modo de Fourier de spin-2 con índice de polarización λ vinculado al tensor de polarización $\epsilon_{ij}^{\lambda}(\mathbf{k})$, para el cual $\epsilon_{ij}^{\lambda}(\mathbf{k})k_i = \epsilon_{ii}^{\lambda}(\mathbf{k}) = 0$ y $\epsilon_{ij}^{\lambda}(\mathbf{k}) \epsilon_{ij}^{\lambda'}(\mathbf{k}) = 2\delta_{\lambda\lambda'}$.

La dinámica de las GW está determinada por la ecuación (6.20) y las expresiones (6.21) y (6.18). Usando las definiciones de la densidad de energía física de s (6.17), de la densidad crítica $\rho_c = 3H^2 M_{\text{pl}}^2$ y de la constante de Hubble $H = a'(\eta)/a^2(\eta)$, las proyecciones TT de la ecuación de Einstein (6.20) y de la ecuación de clausura (6.19) resultan ser

$$h''_{\mathbf{k},\lambda}(\eta) + \frac{2a'(\eta)}{a(\eta)} h'_{\mathbf{k},\lambda}(\eta) + k^2 h_{\mathbf{k},\lambda}(\eta) = 6 \left(\frac{\rho_s(\eta)}{\rho_c(\eta)} \right) \left(\frac{a'(\eta)}{a(\eta)} \right)^2 \left[\frac{8\zeta_{\mathbf{k},\lambda}(\eta)}{15} \right]. \quad (6.23)$$

$$\zeta'_{\mathbf{k},\lambda}(\eta) + \frac{1}{\tau} \zeta_{\mathbf{k},\lambda}(\eta) = -b h'_{\mathbf{k},\lambda}(\eta). \quad (6.24)$$

El factor de escala $a(\eta)$ y las densidades $\rho_c(\eta)$ y $\rho_s(\eta)$ están determinadas por las ecuaciones de Friedmann y la conservación de la entropía como detallamos en la Subsección 6.4.2. De este modo podemos incorporar los efectos de las variaciones de $g_*(T_{\text{rad}})$ en las ecuaciones obteniendo así una evolución del universo cuasi-adiabática. En la Sección 6.5 mostramos la importancia de incluir los decaimientos de los grados de libertad relativista en la evolución de las pGW.

El sistema de ecuaciones (6.23)-(6.24) representa la dinámica acoplada entre los modos de spin-2 del fluido $\zeta_{\mathbf{k},\lambda}$, relacionados con los efectos viscosos, y las pGW $h_{\mathbf{k},\lambda}$ (que también son modos de spin-2). La ecuación (6.23) es un resultado conocido en Cosmología y Relatividad General que determina la producción y evolución del GW [121]. El lado derecho de dicha ecuación actúa como una fuente que será diferente para cada EMT considerado. En la Sección 6.1 mencionamos varios mecanismos que podrían actuar como fuente. Si esos fenómenos no están correlacionados entonces la fuente total será la suma de cada uno.

Es notable que incluso en el caso sin fuentes, la propagación libre de las GWs no es trivial debido a la evolución del factor de escala $a(\eta)$. Varios trabajos elaboran sobre este punto [141, 142, 143] y enfatizan que la forma del espectro de GWs depende principalmente del contenido de fondo del Universo y, en particular, del número de grados de libertad relativistas g_* definidos en la ecuación (6.1).

En nuestro caso, la fuente de las GWs es la parte viscosa del plasma primordial, específicamente los modos spin-2 provenientes de (6.18). Como podemos observar en (6.23) la razón ρ_s/ρ_c , con ρ_s la densidad media de energía del campo escalar, determina la intensidad de la interacción entre los modos de spin-2 del fluido y las pGW.

Un comportamiento robusto y común de las teorías hidrodinámicas causales linealizadas, y en particular de la considerada en este trabajo, es que la evolución de las variables que describen los efectos viscosos corresponde a una dinámica de relajación tipo Maxwell-Cattaneo sobre una escala de tiempo τ a través de una ecuación como (6.24). Es interesante notar que la ecuación de clausura (6.24), típica de las SOT, incluye la retro-acción de las GW sobre el fluido y así el sistema (6.23)-(6.24) recupera cualitativamente la misma dinámica descripta para la interacción GW-fluido dentro del marco de la teoría cinética [148, 160]. En el Apéndice D argumentamos la compatibilidad entre nuestros desarrollos y los de teoría cinética para ambos regímenes de fluido: el colisional, dominado por las colisiones, y el no colisional, caracterizado por la propagación libre de los modos de spin-2 del fluido. En contraposición, si hubiéramos usado la hidrodinámica de

Landau-Lifshitz para describir los efectos viscosos del plasma primordial, habríamos encontrado que el lado derecho de (6.23) es proporcional a $-\eta h'_{\mathbf{k},\lambda}$ [152, 153, 154] y, por supuesto, la ecuación (6.24) no aplicaría.

En una dinámica de relajación de Maxwell-Cattaneo general es posible definir dos escalas de tiempo independientes: τ_{MC} , relacionada con la dinámica de relajación, y τ , vinculada con los efectos viscosos. En este caso la ecuación de clausura es

$$\zeta'_{\mathbf{k},\lambda}(\eta) + \frac{1}{\tau_{\text{MC}}} \zeta_{\mathbf{k},\lambda}(\eta) = -b_{\text{eff}} h'_{\mathbf{k},\lambda}(\eta) \quad (6.25)$$

donde $b_{\text{eff}} = b\tau/\tau_{\text{MC}}$ tiene el rol del parámetro b efectivo. En el límite $\tau_{\text{MC}} \rightarrow 0$ recuperamos el comportamiento hidrodinámico de las FOTs. Nuestro caso corresponde a $\tau_{\text{MC}} = \tau$.

6.4.2. Dinámica del universo homogéneo e isótropo

Para resolver el sistema (6.23)-(6.24) primero debemos encontrar $a(\eta)$ integrando numéricamente la ecuación de Friedmann

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\text{pl}}^2} (\rho_{\text{rad}} + \rho_{\text{M}} + \rho_{\Lambda}). \quad (6.26)$$

Los valores de los parámetros cosmológicos los elegimos cercanos a los reportados por Planck [203]. Asumimos un universo espacialmente plano con un $H_0 = h 100 \text{ km/s/Mpc}$, $h = 0,7$. Los parámetros de densidad para la materia no relativista⁴ y para la energía oscura son $\Omega_{\text{M}} = 0,3$ y $\Omega_{\Lambda} = 1 - \Omega_{\text{rad}} - \Omega_{\text{M}} \simeq 0,7$ respectivamente. Para la radiación tenemos la ecuación (6.1). Por un lado definimos el parámetro de densidad para la radiación fotónica que es $\Omega_{\gamma} = 5,04 \cdot 10^{-5}$, y por el otro tenemos la función g_* que tiene en cuenta la radiación completa, fotónica y no fotónica. En particular necesitamos la evolución de los grados de libertad relativistas como función de la temperatura del plasma

$$g_*(T_{\text{rad}}) = g_{*\text{SM}}(T_{\text{rad}}) + g_{*s}(T_{\text{rad}}) \quad (6.27)$$

donde $g_{*\text{SM}}$ y g_{*s} corresponden a los campos Modelo Estándar y al campo escalar extra s . La evolución detallada de $g_{*\text{SM}}(T_{\text{rad}})$ es extraída de la referencia [143]. Por otro lado, dado

⁴Aquí se considera la materia en forma de polvo, tanto la bariónica como la materia oscura fría.

que s cumple la aproximación no masiva hasta hoy, su densidad de energía física media es $\rho_s = \pi^2 T_{\text{phys},s}^4/15$ (ecuación (6.17)). Por lo tanto la función $g_{*s} = 2\rho_s/\rho_\gamma$ queda determinada por la razón entre las temperaturas físicas $T_{\text{phys},s}/T_{\text{rad}}$. Al comienzo de la era dominada por la radiación, donde las temperaturas de todos los campos están en equilibrio, $T_{\text{phys},s} = T_{\text{rad}}$. Después del desacople de s , para temperaturas $T_{\text{rad}} \leq T_{\text{dec},s}$, el cociente es

$$\frac{T_{\text{phys},s}}{T_{\text{rad}}} = \left[\frac{g_{*,\text{ent}}(T_{\text{rad}})}{g_{*,\text{ent}}(T_{\text{dec},s})} \right]^{1/3} \quad (6.28)$$

debido a la conservación de la entropía [121]. En la expresión (6.28) $g_{*,\text{ent}}(T_{\text{rad}})$ indica los grados de libertad relativistas relacionados con la densidad de entropía, no con la densidad de energía. Esta función también es extraída de [143].

La relación aproximadamente conforme entre T_{rad} y a la obtenemos a partir de la conservación de la entropía, debido a la expansión adiabática del Universo, según $g_{*,\text{ent}}(T_{\text{rad}}) a^3 T_{\text{rad}}^3 = \text{cte}$ [121]. El estado inicial al comienzo de la era dominada por la radiación, está caracterizado por una temperatura de recalentamiento $T_\gamma \simeq 6 \cdot 10^{15}$ GeV. Dado que asumimos una etapa de Recalentamiento instantánea, la constante de Hubble en Inflación que determinamos $H_{\text{inf}} \simeq 5 \cdot 10^{13}$ GeV según la ecuación (5.3). Estos valores fijan la amplitud de las perturbaciones tensoriales con un valor del parámetro ‘tensores a escalares’ $r \simeq 0,04$ [121].

Dado que los modos de spin-2 del fluido son variables independientes, procedemos a establecer las condiciones iniciales tanto para las pGW como para los modos de spin-2 del fluido en la siguiente sección.

6.4.3. Espectros primordiales

Nuevamente como asumimos la etapa de Recalentamiento instantánea, las condiciones iniciales de las variables dinámicas se fijan a partir de igualar las fluctuaciones cuánticas al fin de Inflación con las fluctuaciones estocásticas al comienzo de la época dominada por la radiación.

Ondas gravitatorias

Las dos amplitudes de polarización de las GW $h_{\mathbf{k},\lambda}$, con $\lambda = +, \times$, durante Inflación son equivalentes a dos campos cuánticos no masivo canónicos, a saber $\tilde{h}_{\mathbf{k},\lambda} = M_{\text{pl}} a(\eta) h_{\mathbf{k},\lambda}/\sqrt{2}$ [204]. Para aplicar la cuantización canónica al campo $\tilde{h}_{\mathbf{k},\lambda}$ y calcular sus fluctuaciones cuánticas,

asumimos la descomposición

$$\tilde{h}_{\mathbf{k},\lambda}(\eta) = v_{k,\lambda}(\eta)\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda} + v_{k,\lambda}^*(\eta)\hat{a}_{-\mathbf{k},\lambda}^\dagger \quad (6.29)$$

con $\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger$ y $\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}$ son los operadores de creación y destrucción. La función $v_{k,\lambda}(\eta)$ debe cumplir la ecuación de movimiento

$$v_{k,\lambda}''(\eta) + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)v_{k,\lambda}(\eta) = 0, \quad (6.30)$$

y análogamente para $v_{k,\lambda}^*(\eta)$.

El estado de vacío de la teoría $|0\rangle$ queda determinado por $\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}|0\rangle = 0$. Definir un vacío está asociado a elegir la solución $v_{k,\lambda}(\eta)$ tal que corresponda a la función de frecuencia positiva para el pasado asintótico de cada modo, o equivalentemente para cuando los modos son sub-horizonte ($k \gg aH$). Si tomamos la prescripción convencional que define el vacío de Bunch-Davies y asumimos que el período inflacionario de de Sitter puro, es decir que $H_{\text{inf}} = \text{cte.}$, entonces la solución general es

$$v_{k,\lambda}(\eta) = \frac{i\mathcal{H}}{\sqrt{2k^3}} \left[1 - i\frac{k}{\mathcal{H}}\right] e^{ik/\mathcal{H}} \quad (6.31)$$

donde $\mathcal{H} = aH_{\text{inf}}$. Cuando los modos evolucionan y salen del horizonte, se convierten en super-horizonte $k \ll \mathcal{H}$, la función $v_{k,\lambda} \sim H_{\text{inf}} a$ y en consecuencia las perturbaciones tensoriales $h_{\mathbf{k},\lambda} \sim v_{k,\lambda}/a \sim H_{\text{inf}}$ se congelan volviéndose constantes en el tiempo. Por otro lado los operadores de creación y destrucción cumplirán las relaciones de conmutación canónicas

$$[\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}; \hat{a}_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (6.32)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}; \hat{a}_{\mathbf{k}',\lambda'}] = [\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger; \hat{a}_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger] = 0. \quad (6.33)$$

Con estos resultados podemos calcular las fluctuaciones cuánticas $\langle 0|\tilde{h}_{\mathbf{k},\lambda}\tilde{h}_{\mathbf{k}',\lambda'}|0\rangle$.

Para obtener las fluctuaciones estocásticas que serán las condiciones iniciales del sistema (6.23)-(6.24), usamos la prescripción de Landau que conecta las fluctuaciones estocásticas y las cuánticas según $\langle AB \rangle_S = 1/2\langle \{A; B\} \rangle_Q$ con $\{\cdot; \cdot\}$ el anticonmutador. Por otra parte sólo estamos interesados en las escalas que son super-horizonte en el fin de Inflación, es decir $k < a_I H_{\text{inf}}$. En

consecuencia el espectro de pGW que utilizaremos como condición inicial es [121, 137]

$$\langle h_{\mathbf{k},\lambda} h_{\mathbf{k}',\lambda'}^* \rangle_S = \frac{1}{2} \langle 0 | \{ h_{\mathbf{k},\lambda}; h_{\mathbf{k}',\lambda'}^* \} | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left(\frac{2\pi^2}{2k^3} \right) \mathcal{P}_h(k), \quad (6.34)$$

con

$$\mathcal{P}_h(k) = \frac{H_{\text{inf}}^2}{\pi^2 M_{\text{pl}}^2} \bigg|_{k=aH}, \quad (6.35)$$

evaluado en el momento en que el modo salió del horizonte ($k = aH$). En nuestro caso usamos el escenario inflacionario más simple con $H_{\text{inf}} = \text{const.}$ y por ello $\mathcal{P}_h(k)$ no tiene ninguna dependencia con la escala.

Modos de spin-2 del fluido

Las condiciones iniciales para los modos de spin-2 del fluido $\zeta_{\mathbf{k},\lambda}$ se establecen a partir de vincular las fluctuaciones estocásticas del plasma primordial al comienzo de la etapa de Radiación con las fluctuaciones cuánticas de vacío del campo escalar s en el fin de la Inflación. Para este propósito, igualamos la autocorrelación del EMT, denominado núcleo de ruido, de cada lado de la transición [14, 15].

Por un lado consideramos la proyección espacial TT del núcleo de ruido del campo escalar s durante Inflación, a saber

$$\left[N_{j\ l}^{i\ k}(x, x') \right]^{\text{TT}} = \frac{1}{2} \langle 0 | \left\{ \left(\hat{T}^i_{\ j}(x) - \langle \hat{T}^i_{\ j}(x) \rangle \right); \left(\hat{T}^k_{\ l}(x') - \langle \hat{T}^k_{\ l}(x') \rangle \right) \right\} | 0 \rangle^{\text{TT}}, \quad (6.36)$$

donde $|0\rangle$ es el vacío de Bunch-Davies para el campo s y $\hat{T}^i_{\ j}$ corresponde a las componentes espaciales del EMT del campo s . El núcleo de ruido para un campo escalar mínimamente acoplado en el espacio de de Sitter fue calculado en [205, 206, 207].

Al igual que en el caso de las pGW, estamos interesados en las escalas que son super-horizonte en el fin de Inflación, $k < a_I H_{\text{inf}}$, correspondientes a los modos que se ‘congelaron’ al salir del horizonte durante Inflación. En consecuencia tomamos un núcleo de ruido ‘renormalizado’ al cual le sustraemos las fluctuaciones de vacío para las escalas sub-horizonte ($k > a_I H_{\text{inf}}$) [14]. Como resultado obtenemos un núcleo de ruido que en el fin de Inflación es nulo para escalas dentro del horizonte mientras su dependencia para escalas fuera del horizonte permanece igual

a las reportadas en [205, 206, 207]. A diferencia de [14], aquí consideramos que el horizonte H_{inf} juega el rol explícito de una escala física que genera un corte a partir de la cual, para escalas más pequeñas (rango ultravioleta), se anulan las fluctuaciones. En efecto, si η_I indica el fin de Inflación, el núcleo de ruido en $\eta = \eta_I^-$ es

$$\left[N_{j\ l}^{i\ k}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \eta_I) \right]_{\text{Q}}^{\text{TT}} \simeq \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} S_{\text{TT}}^{ijkl}(\mathbf{k}) \frac{H_{\text{inf}}^5}{5\pi^3 a_I^3} \Theta(a_I H_{\text{inf}} - k), \quad (6.37)$$

donde $a_I = a(\eta_I)$, $S_{\text{TT}}^{ijkl}(\mathbf{k})$ es el proyector espacial TT que extrae los modos de spin-2, definido en (4.97), y Q indica valor de expectación cuántico. En el Apéndice C se encuentran más detalles sobre este cálculo.

Por otra parte, luego de la etapa de Recalentamiento instantánea, tenemos el fluido efectivo formado por partículas del campo s . La cantidad relevante en este caso es la proyección TT de la autocorrelación del EMT del fluido a primer orden en perturbaciones

$$\left[N_{j\ l}^{i\ k}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \eta_I) \right]_{\text{S}}^{\text{TT}} = \left[\left\langle T^{(1)\ i}_{\ j}(\mathbf{x}) T^{(1)\ k}_{\ l}(\mathbf{x}') \right\rangle - \left\langle T^{(1)\ i}_{\ j}(\mathbf{x}) \right\rangle \left\langle T^{(1)\ k}_{\ l}(\mathbf{x}') \right\rangle \right]_{\eta=\eta_I}^{\text{TT}}, \quad (6.38)$$

donde $T^{(1)\ k}_{\ l}$ es la versión física (no comóvil) del EMT de primer orden (6.18) y S significa promedio estocástico en el comienzo de la era dominada por la radiación. Usando que $\langle T^{(1)\ k}_{\ l} \rangle = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} \left[N_{j\ l}^{i\ k}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \eta_I) \right]_{\text{S}}^{\text{TT}} &= 2 \left(\frac{8\sigma}{15} \right)^2 T_{\gamma}^8 \left\langle \zeta^{\text{TT}\ i}_{\ j}(\mathbf{x}) \zeta^{\text{TT}\ k}_{\ l}(\mathbf{x}') \right\rangle_{\eta=\eta_I} = \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} S_{\text{TT}}^{ijkl}(\mathbf{k}) 2 \left(\frac{8\sigma}{15} \right)^2 \left(\frac{2\pi^2}{2k^3} \right) T_{\gamma}^8 \mathcal{P}_{\zeta}(k, \eta_I), \end{aligned} \quad (6.39)$$

con T_{γ} la temperatura de Recalentamiento (5.3).

Al igualar (6.37) y (6.39), encontramos que

$$\mathcal{P}_{\zeta}(k) = \frac{1}{23040\pi} \frac{g_*^2|_{\eta_I}}{\sigma^2} \left(\frac{H_{\text{inf}}}{M_{\text{pl}}} \right)^4 \left(\frac{k}{a_I H_{\text{inf}}} \right)^3 \Theta(a_I H_{\text{inf}} - k). \quad (6.40)$$

Notemos que este espectro está globalmente suprimido por el factor independiente de la escala $(H_{\text{inf}}/M_{\text{pl}})^4$ y alcanza sus valores máximos para las escalas cercanas al la escala límite $k \lesssim a_I H_{\text{inf}}$.

En resumen, el espectro inicial $\mathcal{P}_{\zeta}(k, \eta_I)$ para $\zeta_{\mathbf{k},\lambda}$ representa las fluctuaciones de spin-2 del

fluido efectivo compuesto por las partículas del campo s en el comienzo de la etapa dominada por la radiación. Finalmente la expresión $\mathcal{P}_\zeta(k, \eta_I)$ es extraída a partir de la proyección TT del núcleo de ruido del campo escalar s en el fin de Inflación.

Como hemos calculado, las fluctuaciones de spin-2 del núcleo de ruido del campo escalar s están presentes en el fin de Inflación. El sistema de ecuaciones (6.23)-(6.24) nos permite, en parte, estudiar la evolución de estas fluctuaciones mencionadas de una forma efectiva, luego de Recalentamiento, cuando se estable el régimen hidrodinámico del estado del campo s .

6.4.4. Implementación numérica

Las ecuaciones (6.23)-(6.24) pueden ser reescritas en términos de la variable adimensional $u \rightarrow k\eta$ y así obtenemos, para cada modo de polarización,

$$h''_{\mathbf{k}}(u) + \frac{2a'(u)}{a(u)} h'_{\mathbf{k}}(u) + h_{\mathbf{k}}(u) = 6 \left(\frac{\rho_s(u)}{\rho_c(u)} \right) \left(\frac{a'(u)}{a(u)} \right)^2 \left[\frac{8\zeta_{\mathbf{k}}(u)}{15} \right] \quad (6.41)$$

$$\zeta'_{\mathbf{k}}(u) + \frac{1}{k\tau} \zeta_{\mathbf{k}}(u) = -b h'_{\mathbf{k}}(u). \quad (6.42)$$

De aquí en adelante $(')$ denota la derivada respecto de u .

Las condiciones iniciales del sistema previo corresponden a los espectros primordiales calculados en la Sección 6.4.3. Ambos espectros, el de GW y el de los modos de spin-2 del fluido, se originan a partir de fluctuaciones cuánticas durante Inflación. Nuestro análisis sólo será válido para escalas que son super-horizonte al final de Inflación ($k < a_I H_{\text{inf}}$), eventualmente estas escalas vuelven a entrar al horizonte en tiempos posteriores.

El próximo objetivo es implementar los espectros primordiales estocásticos como las condiciones iniciales en el sistema de ecuaciones lineales (6.41)-(6.42). Proponemos el siguiente ansatz

$$h_{\mathbf{k}}(u) = h_{\mathbf{k}}^{\text{prim}} h_1(k, u) + \zeta_{\mathbf{k}}^{\text{prim}} h_2(k, u) \quad (6.43)$$

$$\zeta_{\mathbf{k}}(u) = h_{\mathbf{k}}^{\text{prim}} z_1(k, u) + \zeta_{\mathbf{k}}^{\text{prim}} z_2(k, u) \quad (6.44)$$

que distingue las variables estocásticas $h_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{prim}}$ y $\zeta_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{prim}}$, vinculadas a los espectros iniciales, de las funciones de transferencia $h_i(k, \eta)$ y $z_i(k, \eta)$, que contienen la información de la evolución dinámica. Consideramos el escenario inicial más simple [148], de modo que las funciones de

transferencia deben cumplir

$$h_1(k, u_I) = 1 \quad h'_1(k, u_I) = 0 \quad z_1(k, u_I) = 0 \quad (6.45)$$

$$h_2(k, u_I) = 0 \quad h'_2(k, u_I) = 0 \quad z_2(k, u_I) = 1. \quad (6.46)$$

Existe una tercera combinación de condiciones iniciales que corresponde a una solución independiente que decaen rápidamente y se vuelve despreciable respecto a las anteriores, por ello no la consideramos.

Las propiedades estocásticas de los espectros primordiales son

$$\langle h_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{prim}} h_{\mathbf{k}',\lambda'}^{\text{prim}*} \rangle = (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{2\pi^2}{2k^3} \mathcal{P}_h(k, \eta_I) \quad (6.47)$$

$$\langle \zeta_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{prim}} \zeta_{\mathbf{k}',\lambda'}^{\text{prim}*} \rangle = (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{2\pi^2}{2k^3} \mathcal{P}_\zeta(k, \eta_I) \quad (6.48)$$

$$\langle h_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{prim}} \zeta_{\mathbf{k}',\lambda'}^{\text{prim}*} \rangle = \langle \zeta_{\mathbf{k},\lambda}^{\text{prim}} h_{\mathbf{k}',\lambda'}^{\text{prim}*} \rangle = 0, \quad (6.49)$$

con $\mathcal{P}_h(k, \eta_I)$ y $\mathcal{P}_\zeta(k, \eta_I)$ en (6.35) y (6.40) respectivamente. La correlación cruzada inicial es nula porque ambos espectros están originados por fenómenos físicos descorrelacionados. Al reemplazar el anstz (6.44) en (6.41)-(6.42) y hacer uso de las propiedades (6.47)-(6.49) obtenemos las ecuaciones para las funciones de transferencia $h_{1,2}$ y $z_{1,2}$

$$h_i''(k, u) + \frac{2a'(u)}{a(u)} h_i'(k, u) + h_i(k, u) = \frac{16}{5} \left(\frac{\rho_s(u)}{\rho_c(u)} \right) \left(\frac{a'(u)}{a(u)} \right)^2 z_i(k, u) \quad (6.50)$$

$$z_i'(k, u) + \frac{1}{k\tau} z_i(k, u) = -b h_i'(k, u). \quad (6.51)$$

Aplicando las condiciones (6.45) tenemos la solución para h_1 y ζ_1 , en cambio con la condición (6.46) determinamos h_2 and z_2 .

Los cantidades a , ρ_s , y $\rho_c(u)$ se obtienen a partir de la solución numérica de la ecuación de Friedmann (6.26) y las conservaciones planteadas en la Subsección 6.4.2. Finalmente resolvemos numéricamente las ecuaciones (6.50)-(6.51) para ambas condiciones iniciales (6.45) y (6.46) por separado. Utilizamos un esquema numérico propio basado en [143].

El sistema se resuelve independientemente para cada número de onda k desde el tiempo inicial η_I (final de Inflación) hasta η_0 (hoy). La variable de evolución adimensional $u = k\eta$ indica si la escala k está dentro a fuera del horizonte para los diferentes tiempos, $u \ll 1$ implica que la

escala en ese momento en super-horizonte y $u \gg 1$ que es sub-horizonte. Para las escalas que consideramos el sistema se inicializa fuera del horizonte $u_I = k\eta_I \ll 1$ y luego evoluciona hasta $u_0 = k\eta_0$. Para las escalas más grande (k más chicos) $u_0 \gtrsim 1$ y para las escalas más pequeñas $u \gg 1$. Para $u \gg 1$ la solución de la ecuación (6.50) para $h(k, u)$ tiende a una solución homogénea de tipo WKB [143, 148]

$$h(k, u) = \frac{A(k)}{a(u)} \sin(u + \varphi(k)), \quad (6.52)$$

con $A(k)$ y $\varphi(k)$ constante a determinar para cada número de onda k . En consecuencia definimos el esquema para evolucionar numéricamente el sistema sólo hasta $u = u_{\max} \sim 10^2 - 10^3$ y luego continuar la evolución hasta $u = u_0$ empalmando en $u = u_{\max}$ con una solución del tipo (6.52) usando la continuidad de $h(k, u)$ y su derivada para definir $A(k)$ y $\varphi(k)$.

6.5. Espectro actual de ondas gravitatorias

En esta sección describimos el espectro actual de las pGW. En primer lugar, la densidad de energía de las GW es

$$\begin{aligned} \rho_{\text{GW}}(t) &= \frac{M_{\text{pl}}^2}{4} \left\langle \dot{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) \dot{h}^{ij}(t, \mathbf{x}) \right\rangle \\ &= \frac{M_{\text{pl}}^2}{4} \frac{1}{a^2(\eta)} \int d(\log k) \sum_{\lambda} \left[\mathcal{P}_h(k) [h'_1(k, \eta)]^2 + \mathcal{P}_{\zeta}(k) [h'_2(k, \eta)]^2 \right], \end{aligned} \quad (6.53)$$

donde usamos la descomposición (6.22) y la expresión (6.43). La cantidad observacionalmente relevante es el espectro actual del parámetro de densidad de las pGW (@ $\eta = \eta_0$) definido por

$$\Omega_{\text{GW}}(k, \eta_0) = \frac{1}{\rho_c} \frac{d\rho_{\text{GW}}}{d \log k} = \Omega_{\text{GW},h}(k, \eta_0) + \Omega_{\text{GW},\zeta}(k, \eta_0) \quad (6.54)$$

con

$$\Omega_{\text{GW},h}(k, \eta_0) = \frac{1}{6 a_0^2 H_0^2} \mathcal{P}_h(k) [h'_1(k, \eta_0)]^2, \quad (6.55)$$

$$\Omega_{\text{GW},\zeta}(k, \eta_0) = \frac{1}{6 a_0^2 H_0^2} \mathcal{P}_{\zeta}(k) [h'_2(k, \eta_0)]^2. \quad (6.56)$$

El espectro $\Omega_{\text{GW}}(k, \eta)$ tiene dos contribuciones descorrelacionadas que provienen de los espectros estocásticos primordiales $\mathcal{P}_h$ y $\mathcal{P}_\zeta$. Si bien las funciones de transferencia h_1 y h_2 cumplen las mismas ecuaciones dinámicas la diferencia en las condiciones iniciales (ecuaciones (6.45)-(6.46)) las convierte en soluciones práctica y conceptualmente muy distintas.

6.5.1. Canal de efectos viscosos sobre las pGW

En esta sección enfocamos nuestra atención a la contribución $\Omega_{\text{GW},h}(k, \eta_0)$ (ecuación (6.55)) cuyas condiciones iniciales corresponden a 6.45. Esto significa que el espectro inicial de las GW es $\mathcal{P}_h$ y el de los modos de spin-w del fluido es nulo.

Para describir un ejemplo representativo tenemos que fijar la constante de acoplamiento g , que a su vez determina el tiempo de relajación τ a través de (6.5), y la temperatura de desacople $T_{\text{dec},s}$. Resulta ser que τ define la escala característica de disipación. Entre los valores de g mencionados en (6.6) elegimos $g \simeq 10^{-6}$ ya que su frecuencia asociada $f_\tau \sim 10^{-14}$ Hz (y longitud de onda $\lambda_\tau \sim 1$ Mpc) es de interés cosmológico [137]. Notemos que el número de onda k , la longitud de onda λ y la frecuencia f son cantidades comóviles, y dado que optamos por la convención $a_0 = 1$ también coinciden con sus valores físicos hoy. La relación entre dichas cantidades es $f = ck/2\pi = c/\lambda^5$. Al mismo tiempo la temperatura de desacople determina tanto la función ρ_s/ρ_c como el número efectivo de grados de libertad de la radiación no fotónica, N_{eff} . Como N_{eff} es una función decreciente de la temperatura de desacople, elegimos su mínimo valor, $T_{\text{dec},s} = 125$ MeV, para el cual $N_{\text{eff}} \simeq 3,5$ satura el intervalo de 3σ actual (99.7 % CL) asociado a las observaciones del CMB [203] y a las observacion de abundancias primordiales y BBN [208, 194] por separado. Distintas combinaciones estadísticas de ambas mediciones resultan en cotas más estrictas [208]. Por ello, al final de esta sección, explicamos cómo cambian nuestros resultados para N_{eff} más pequeños como así también comentamos el impacto de las variaciones en τ (o g). Finalmente como s es una ALP producida en equilibrio térmico en el universo temprano y efectivamente no masiva hasta hoy, no genera un efecto apreciable en la evolución del proceso de formación de estructuras durante la era dominada por la materia.

En la Figura 6.1 mostramos el resultado de la integración numérica para $\Omega_{\text{GW},h}(k, \eta_0)$. Primero tenemos el espectro actual de las pGW para la evolución libre, i.e. cuando no hay fuentes

⁵Aunque estamos usando unidades en las que $c = k_B = \hbar = 1$, en esta sección ponemos explícitamente la velocidad de la luz c en las definiciones de f , k y λ por claridad.

(línea azul sólida en la Figura 6.1), a este espectro lo llamamos libre⁶. En este caso recuperamos el conocido espectro de pGW [141, 142, 143], con pequeñas diferencias debidas a la incorporación del campo escalar extra s . Se caracteriza por dos regímenes: uno para escalas que reingresan al horizonte luego de Igualdad durante la época dominada por la materia, $k < k_{\text{EQ}}$, y otro para escalas ingresando al horizonte antes de Igualdad mientras el universo estaba dominado por la Radiación, $k > k_{\text{EQ}}$. La escala $k_{\text{EQ}} \sim 10^{-2}/\text{Mpc}$ corresponde al tamaño del horizonte en el momento de Igualdad. Para $k < k_{\text{EQ}}$ la amplitud decae como k^{-2} y para $k > k_{\text{EQ}}$ encontramos un espectro casi plano. Los escalones suaves que se aprecian están vinculados al decaimiento de los grados de libertad relativistas. El cambio al dominio de la Energía Oscura sólo es observable para longitudes de onda muy grandes $k < k_{\Lambda} \sim 10^{-5}/\text{Mpc}$ y no es relevante para nuestro análisis.

Cuando consideramos la interacción con el fluido (línea sólida naranja en la Figura 6.1) observamos que la frecuencia límite f_{τ} distingue dos regímenes del fluido: el régimen colisional, $f/f_{\tau} \ll 1 \rightarrow kc\tau \ll 1$, en el cual las colisiones son eficientes y el régimen no colisional, $f/f_{\tau} \gg 1 \rightarrow kc\tau \gg 1$, caracterizado por la propagación libre de los modos spin-2 del fluido. Resulta que para las escalas en las que dominan las colisiones, las mismas tienden a borrar las anisotropías del fluido haciendo que la fuente de GW se vuelva despreciable [160] mientras que en la etapa no colisional (o de propagación libre de los modos de spin-2 del fluido), el EMT anisótropo no es despreciable y, en consecuencia, ocurre un fenómeno de amortiguamiento de las GW conducido por la expansión del Universo [148, 160]. En el Apéndice D analizamos sendos regímenes y presentamos una comparación entre nuestra descripción de la interacción GW-fluido a partir de un esquema hidrodinámico basado en las SOT y la expuesta en [148, 160] realizada desde el marco de la teoría cinética. La comparación nuestra un amplio acuerdo cualitativo entre ambas descripciones.

Los efectos viscosos y de amortiguamiento están principalmente determinados por la escala $k_{\tau} = 1/c\tau$ y la razón ρ_s/ρ_c que define la intensidad de la interacción entre las pGW y el fluido. Es posible estimar una viscosidad física efectiva relacionada a este fluido, en el régimen dominado por las colisiones, como $\eta_{\text{phys}} = (8b/15) \rho_s \tau_{\text{phys}}$. Su valor actual $\eta_{\text{phys},0}$ es despreciable comparado con las cotas correspondientes a la viscosidad del medio interestelar que puede afectar la propagación de GW producidas e.g. durante la colisión de dos agujeros negros [162, 163].

⁶En la Figura 6.1 agregamos, por completitud, el espectro actual de pGW para la evolución libre sin considerar el decaimiento de los grados de libertad relativistas (línea gris sólida en la Figura 6.1), como observamos es un espectro plano.

Para cuantificar el efectos de los fenómenos no ideales sobre las pGW con respecto al espectro de evolución libre considerando los grados de libertad relativista, definimos la diferencia relativa

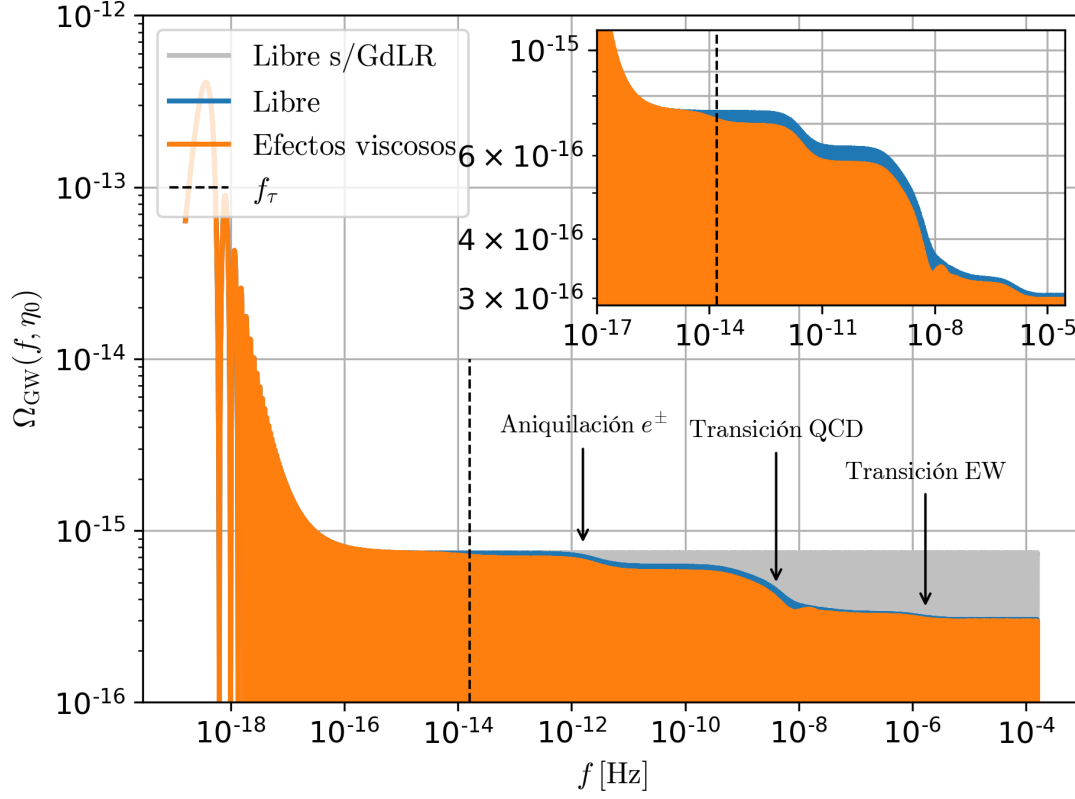


Figura 6.1: Espectro actual de las pGW, $\Omega_{\text{GW},h}(f, \eta_0)$ (ecuación (6.55)) en función de la frecuencia de la onda hoy en Hz. La línea sólida azul representa la evolución libre de las pGW y la naranja tiene en cuenta los efectos no ideales del plasma primordial. Observamos una frecuencia límite $f_\tau = 1/2\pi\tau$ relacionada con la escala de tiempo característica de los fenómenos disipativos τ . Para el régimen colisional del fluido ($f < f_\tau$) el impacto de los efectos viscosos elimina las anisotropías del fluido, la fuente de GW se vuelve despreciable y obtenemos un espectro de pGW igual al de evolución libre. En cambio, para el régimen no colisional ($f > f_\tau$) la interacción GW-fluido genera una absorción de la energía de las pGW, debido al fenómeno de amortiguamiento conducido por la expansión del universo, que lleva a una disminución relativa del orden de 10 %. Como se muestra en la figura, los escalones suaves que se observan en ambos espectros (azul y naranja) se deben al decaimiento de los grados de libertad relativistas. El espectro de la línea sólida gris corresponde a la evolución libre pero sin considerar la dinámica del decaimiento de los grados de libertad relativista (Libre s/GdLR en la etiqueta).

entre los espectros según

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega}(k) = \frac{|\Omega_{\text{GW,libre}}(k) - \Omega_{\text{GW,vis}}(k)|}{\Omega_{\text{GW,prom}}(k)}, \quad (6.57)$$

con $\Omega_{\text{GW,prom}}(k)$ el promedio entre $\Omega_{\text{GW,libre}}(k)$ y $\Omega_{\text{GW,vis}}(k)$ para cada k .

En la Figura 6.2 mostramos la cantidad $\Delta\Omega/\Omega$ vs. f ($f = ck/2\pi$). Para el régimen no colisional del fluido ($f < f_\tau$) la diferencia relativa es del orden de 10 %. Como hemos argumentado previamente, esta disminución de la amplitud está fuertemente correlacionado con el cociente ρ_s/ρ_c . Sin embargo en el régimen dominado por las colisiones ($f > f_\tau$) las mismas se vuelven eficientes, producen la ‘isotropización’ del fluido y así borran la fuente de GW independientemente de ρ_s/ρ_c obteniendo un espectro de GW igual al ideal sin fuente. Para construir la curva $\rho_s(\eta)/\rho_c(\eta)$ vs. f relacionamos el tiempo conforme η con la escala particular que coincide con el tamaño del horizonte en ese momento según $k = H(\eta)a(\eta)$. La razón ρ_s/ρ_c mide la contribución del campo escalar s a la densidad de energía total del universo. Como es un campo no masivo durante toda su evolución, su contribución sólo es apreciable en la época dominada por la radiación. Durante esta etapa la curva puede aproximarse por

$$\frac{\rho_s}{\rho_c} \simeq \begin{cases} \frac{2}{g_*(T_{\text{rad}})} & \text{si } T_{\text{rad}} > T_{\text{dec},s} \\ \frac{2}{g_*(T_{\text{rad}})} \left(\frac{g_{*,\text{ent}}(T_{\text{rad}})}{g_{*,\text{ent}}(T_{\text{dec},s})} \right)^{4/3} & \text{si } T_{\text{rad}} < T_{\text{dec},s} \end{cases}. \quad (6.58)$$

Conforme se expande el universo la temperatura baja y entonces vemos que para tiempos tempranos con $T_{\text{rad}} > T_{\text{dec},s}$, el cociente ρ_s/ρ_c crece mientras desciende la temperatura. La dependencia para el caso $T_{\text{rad}} < T_{\text{dec},s}$ es más compleja pero como sabemos que en el futuro lejano, cuando domina la materia, $\rho_s/\rho_c \ll 1$ el máximo ocurrirá durante el dominio de la radiación y luego del desacople. En el caso particular que estamos analizando la escala de energía del desacople de s se superpone con la transición QCD. En términos de la frecuencia sucede que para $f < f_{\text{EQ}}$ ρ_s/ρ_c decae abruptamente. Para $f > f_{\text{EQ}}$ el cociente está determinado por la relación (6.58) y los escalones y picos que se observan en dicha región, en la Figura 6.2, corresponden tanto al decaimiento de los grados de libertad relativistas como al desacople del fluido formado por las partículas del campo s .

Más allá de este ejemplo analizamos un rango amplio de parámetros. A saber, para todas

las frecuencias características f_τ , determinadas por cualquier constante de acoplamiento dentro de nuestro rango de interés $g \sim 10^{-6} - 10^{-4}$, hallamos el mismo comportamiento. Esto es, pueden distinguirse dos regímenes: el colisional $f < f_\tau$, sin absorción de GW, y el no colisional

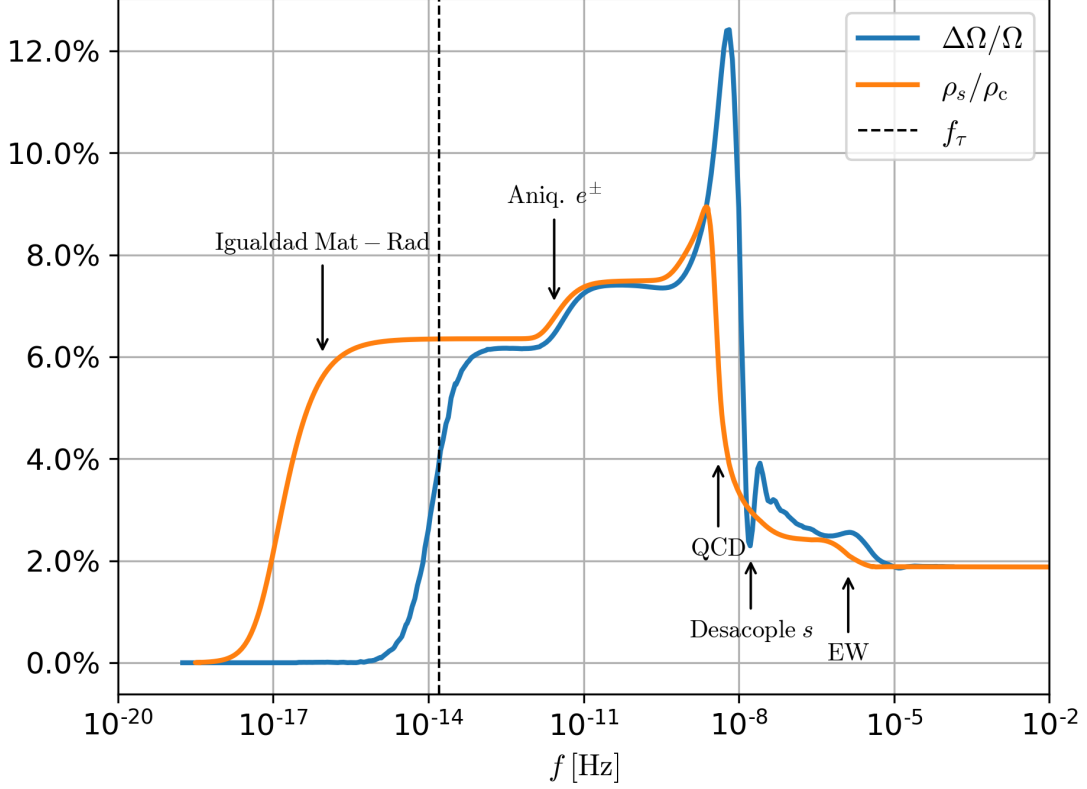


Figura 6.2: Diferencia relativa $\Delta\Omega/\Omega$ (ecuación (6.57)) entre los espectros azul y naranja presentados en la Figura 6.1. Mide el impacto de los efectos no ideales con respecto al caso de evolución libre sin fuentes. Además mostramos el cociente, $\rho_s(\eta)/\rho_c(\eta)$, entre la densidad de energía del fluido compuesto por partículas del campo s y la densidad crítica del universo en función de la frecuencia. Para expresar la relación entre η y f (o k) consideramos que f es la frecuencia correspondiente al tamaño del horizonte en el tiempo η según $f = H(\eta)a(\eta)/2\pi$. Observamos que la disminución relativa de la amplitud del espectro de las pGW en el régimen no colisional ($f > f_\tau$) es del orden de 10 % y está fuertemente correlacionada con el cociente ρ_s/ρ_c . Sin embargo para longitudes de onda larga ($f < f_\tau$) el efecto es despreciable independientemente de ρ_s/ρ_c . La variación irregular que notamos en el momento del desacople de s es producto artificial del cálculo debido a la implementación de un desacople abrupto. En este caso consideramos $N_{\text{eff}} \simeq 3,5$ al límite de las cotas observacionales a 3σ (o 99.7% CL) correspondientes al CMB [203] y BBN [208, 194] por separado. Para valores de N_{eff} más pequeños encontramos el mismo comportamiento cualitativo con una disminución relativa máxima en la amplitud que se reduce gradualmente de 12 a 2 % conforme $N_{\text{eff}} = 3,5 \rightarrow 3,1$.

$f > f_\tau$, con efectos de amortiguamiento de las GW debido a la propagación libre de los modos de spin-2 del fluido. Por otra parte, las temperaturas de desacople $T_{\text{dec},s} \geq 125 \text{ MeV}$ implican que $3,1 \leq N_{\text{eff}} \leq 3,5$. El valor mínimo $N_{\text{eff}} = 3,1$ se alcanza para cualquier temperatura $T_{\text{dec},s} > m_{\text{top}} \sim 200 \text{ GeV}$. La distinción de regímenes y los efectos cualitativos reportados en las Figuras 6.3 y 6.2 son los mismos para todo el rango de N_{eff} . Cuantitativamente obtenemos que el valor máximo de $\Delta\Omega/\Omega$ se reduce gradualmente desde el 12 % hasta el 2 % para $N_{\text{eff}} = 3,5 \rightarrow 3,1$.

Finalmente concluimos que la contribución $\Omega_{\text{GW},h}(k, \eta_0)$ al espectro total (6.54) representa la evolución no trivial del espectro de pGW, creado por fluctuaciones cuánticas durante Inflación, en presencia de un plasma primordial viscoso. Este fenómeno incluye tanto efectos puramente disipativos colisionales como efectos de amortiguamiento no colisionales debido a la propagación libre de los modos de spin-2 del fluido, en particular la pérdida de energía de las GW a través de la interacción con el fluido ocurre en el régimen no colisional en el que las colisiones del fluido no son relevantes.

6.5.2. Canal de producción de GW debido al fluido

En esta sección analizamos la contribución $\Omega_{\text{GW},\zeta}(k, \eta_0)$ (ecuación (6.56)). El espectro resultante se muestra en la Figura 6.3. Como en este caso comenzamos la evolución sin GW iniciales, el espectro de GW final es producido enteramente por los modos de spin-2 del fluido iniciales, vinculados a la proyección TT del núcleo de ruido del campo escalar s en el fin de Inflación. La función de transferencia $z_2(k, \eta)$ (ecuaciones (6.46) y (6.51)) muestra el decaimiento efectivo de dichas fluctuaciones acopladas a las GW luego de Recalentamiento cuando el estado del campo s puede describirse como un fluido.

La amplitud del espectro $\Omega_{\text{GW},\zeta}$ está fuertemente suprimida por el factor $(H_{\text{inf}}/M_{\text{pl}})^4$. Aunque la función de transferencia $h_2(k, \eta)$ resulta ser no trivial, es aproximadamente plana para longitudes de onda pequeñas con lo cual la dependencia de $\Omega_{\text{GW},\zeta}$ con respecto a k (o f) está determinada por el espectro inicial $\mathcal{P}_\zeta(k) \sim k^3$. Por lo tanto la producción total de GW por el fluido, $\Omega_{\text{GW},\zeta}(k, \eta_0)$, es despreciable comparada con $\Omega_{\text{GW},h}(k, \eta_0)$ para el rango de frecuencias que estamos considerando.

En consecuencia concluimos que para las frecuencias de interés cosmológico, el espectro total de pGW $\Omega_{\text{GW}}(k, \eta_0)$ (ecuación (6.54)) está determinado esencialmente por la contribución $\Omega_{\text{GW},h}(k, \eta_0)$, que se muestra en la Figura 6.1.

El espectro $\Omega_{\text{GW},\zeta}(k, \eta_0)$ puede ser relevante para frecuencias muy altas relacionadas con el tamaño del horizonte al fin de Recalentamiento, $f \sim 10^8$ Hz. Es importante notar que el resultado final depende del método de regularización y ‘renormalización’ usado para calcular $\mathcal{P}_\zeta$ (ecuación (6.40)), el cual a su vez es sensible a la escala de energía de Inflación H_{inf} .

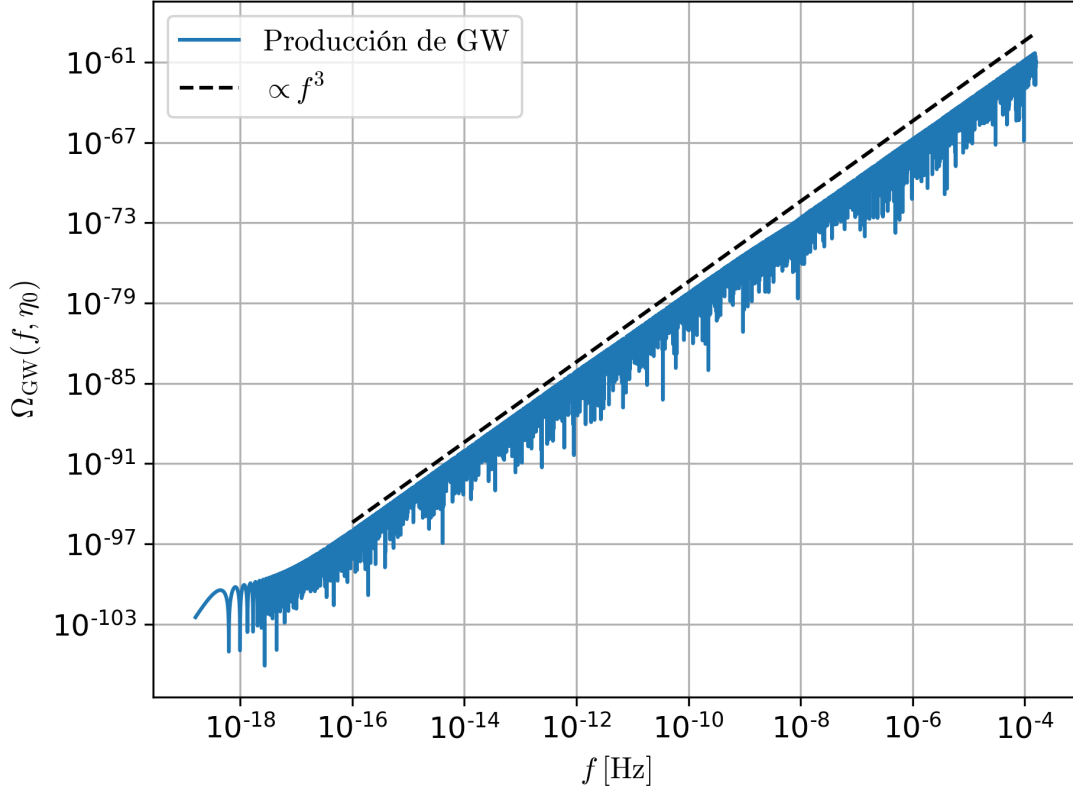


Figura 6.3: Espectro actual de GW producido por el decaimiento de las fluctuaciones iniciales de los modos de spin-2 del fluido, $\Omega_{\text{GW},\zeta}(k, \eta_0)$ (ecuación (6.56)). Estas fluctuaciones iniciales provienen del núcleo de ruido del campo escalar s en el fin de Inflación. La amplitud del espectro está globalmente suprimida por el factor $(H_{\text{inf}}/M_{\text{pl}})^4$. Dado que la función de transferencia es una casi plano para longitudes de onda corta, la dependencia en k está esencialmente determinada por el espectro inicial $\mathcal{P}_\zeta(k) \sim k^3$. Para el rango de frecuencias considerado este espectro resulta despreciable comparado con el de la Figura 6.1. No obstante, este espectro puede ser relevante para frecuencias altas ($f \sim 10^8$ Hz) que corresponde al tamaño del horizonte al final de Recalentamiento.

Parte III

Observaciones finales

Capítulo 7

Conclusiones

7.1. Conclusiones de la Parte I

Las SOTs son teorías hidrodinámicas que para describir los efectos no ideales de un fluido real introducen nuevas variables con una dinámica propia, extendiendo así el conjunto de grados de libertad que se utiliza en la teoría del fluido ideal. En estos esquemas extendidos existen grados de libertad de tipo escalar, vectorial y tensorial; las FOTs no presentan estos últimos. Además, las SOTs incorporan consistentemente los requerimientos de la Relatividad General y la Termodinámica para fluidos reales relativistas. Sus ecuaciones dinámicas forman un sistema hiperbólico que asegura la causalidad y un problema de valores iniciales bien formulado. Las DTTs son una clase particular de SOTs que, a su vez, cumplen la segunda ley de la Termodinámica de forma no perturbativa.

En el Capítulo 3 mostramos la construcción de una DTT desde el enfoque fenomenológico a partir del funcional generador y obtenemos las ecuaciones dinámicas generales. Luego estudiamos las perturbaciones SVT alrededor de un equilibrio trivial en el espacio de Minkowski y mostramos que dentro de la aproximación de propagación libre ($\tau \rightarrow 0$) la dinámica relevante está determinada por la interacción entre los modos vectoriales y tensoriales, descartando los modos escalares, por lo cual denominamos a dicho régimen límite de ‘incompresibilidad’.

A partir de la generalización del teorema de fluctuación-disipación para las teorías hidrodinámicas causales incorporamos las fluctuaciones térmicas propias del fluido en la DTT desarrollada en el Capítulo 3. Para estudiar el impacto de dichas fluctuaciones térmicas en la dinámica conside-

ramos un fluido con perturbaciones alrededor del equilibrio en el espacio de Minkowski asumiendo la aproximación de ‘incompresibilidad’. Nos concentramos en una situación más simplificada aún en la que analizamos sólo las fluctuaciones térmicas tensoriales. Estas fluctuaciones excitan modos vectoriales que a su vez retro-accionan sobre los modos tensoriales generando una dinámica efectiva no lineal para los modos tensoriales.

En este escenario analizamos las propiedades estadísticas de dicha dinámica a través de las funciones de correlación entre los modos. Para organizar la expansión perturbativa de las interacciones de la teoría y poder calcular las funciones de correlación utilizamos técnicas tomadas del Análisis Funcional y la Teoría Cuántica de Campos Fuera de Equilibrio, a saber la 2PIEA y el formalismo MSR. De esta forma podemos escribir las ecuaciones de evolución para los propagadores causales y de Hadamard, tanto para el sector vectorial como para el tensoriales, a orden lineal, sin considerar las interacciones, y luego considerar las interacciones en un desarrollo perturbativo diagramático en términos de cantidad de lazos.

Encontramos que al considerar las interacciones a orden de un lazo, obtenemos los propagadores ‘vestidos’. En efecto los espectro de los propagadores ‘vestidos’ adquieren una dependencia no trivial con la escala, con dos regímenes diferenciados para las escalas grandes ($p \ll p_T$) y escalas pequeñas ($p_T \ll p < p_L$, con p_T y p_L en la ecuación (4.153)). De hecho, debido a las no linealidades, el espectro de la función de correlación tensorial para escalas grandes recupera el espectro plano de la teoría lineal sin interacciones pero para escalas pequeñas se convierte en una ley de potencias p^{-4} . En consecuencia también se renormaliza el tiempo de relajación de la teoría de forma tal que adquiere la misma dependencia con la escala que el espectro tensorial mencionado.

En virtud de que las funciones de correlación decaen exponencialmente en el tiempo, las correcciones al espectro de fluctuaciones tensoriales sólo son significativas para tiempos más cortos que el tiempo de relajación macroscópico o bien para escalas r tales que $r < c\tau$, las cuales son relevantes en las etapas iniciales de las RHICs.

Las estructuras no triviales de los espectros ‘vestidos’ implican la redistribución de energía y entropía entre las escalas pequeñas debido a los efectos no lineales. Encontramos que la corrección a la densidad de entropía al orden más bajo es cuadrática en las fluctuaciones tensoriales y su espectro es plano en ambos regímenes ($p \ll p_T$ y $p_T \ll p < p_L$) pero con una amplitud menor para escalas pequeñas. Este resultado sugiere que los modos tensoriales podrían sostener una

cascada turbulenta inversa de entropía [112].

7.2. Conclusiones de la Parte II

Para estudiar el universo temprano, particularmente inmediatamente después de Inflación, es importante incluir todas las interacciones entre los campos fundamentales que componen el contenido del universo. Claramente es un desafío abrumador sino imposible. Por ello se propone tratar a los campos y sus interacciones con teorías hidrodinámicas relativistas efectivas. A su vez sabemos que la descripción de fluido ideal es insuficiente para capturar todos los fenómenos de interés, como aprendimos de las RHICs, y es por eso que necesitamos incorporar efectos disipativos.

En el Capítulo 6 describimos la evolución lineal de las pGW incluyendo los efectos viscosos del plasma primordial dentro de un marco hidrodinámico covariante y causal basado en la DTT construida en la Subsección 2.5.1. Consideramos un escenario cosmológico estándar con un campo escalar extra (s) auto-interactuante, efectivamente no masivo y mínimamente acoplado, perteneciente a la familia de las ALP. El estado del campo escalar, que durante Inflación es de vacío, se convierte en un estado excitado de muchas partículas al inicio de la era dominada por la radiación, y puede ser descripto efectivamente como un fluido causal real (viscoso). En el marco de la DTT, el conjunto de grados de libertad hidrodinámicos se amplía para capturar los fenómenos disipativos. Además de cumplir con la Segunda Ley y constituir una dinámica hiperbólica que asegura la causalidad de la teoría y un problema de valores iniciales bien formulado, este esquema permite tener en cuenta los fenómenos de relajación en escalas de tiempo de orden τ o menores. En este conjunto extendido de variables existen modos de spin-2 que se acoplan con las GW a primer orden capturando la interacción viscosa entre las GW y el fluido. Dicha interacción no puede ser completamente descripta por las teorías hidrodinámicas usuales de primer orden. En consecuencia, enfocamos nuestra atención en estos modos de spin-2 del fluido y escribimos las ecuaciones lineales que determinan la dinámica acoplada entre las GW y estos modos, a saber, las ecuaciones (6.41)-(6.42). Luego, encontramos el espectro actual de las GW $\Omega_{\text{GW}}(k, \eta_0)$ (ecuación (6.54)) resolviendo numéricamente el sistema (6.41)-(6.42) con las condiciones iniciales (6.43)-(6.49). Este espectro cuenta con dos contribuciones no correlacionadas.

Por un lado $\Omega_{\text{GW},h}(k, \eta_0)$ representa la evolución de las pGW, creadas por fluctuaciones

cuánticas durante la Inflación, en presencia de un plasma viscoso relativista. Los efectos viscosos provienen principalmente de la parte del plasma compuesta por las partículas de campo escalar s y se caracterizan efectivamente por un tiempo característico τ a través de una integral de colisiones lineal bajo la aproximación de relajación (ecuación (6.4)). El espectro dado por esta contribución se muestra en la Figura 6.1. Observamos que existe una frecuencia característica $f_\tau = 1/2\pi\tau$ vinculada a los efectos viscosos que distingue dos regímenes: el colisional $f/f_\tau < 1$ y el no colisional $f/f_\tau > 1$ con f la frecuencia de la GW. En el primero las colisiones son eficientes, producen la 'isotropización' del fluido y eliminan así la posible fuente de las GW, en consecuencia obtenemos efectos despreciables en el espectro de pGW. En el régimen no colisional ocurre la absorción de energía de las GW y una consecuente disminución de la amplitud del espectro debido al efecto de amortiguamiento que genera la propagación libre de los modos de spin-2 del fluido conducida por la expansión del universo. Este fenómeno incluso se ha utilizado para restringir ciertos parámetros de materia oscura a partir de las observaciones de GW producidas en fusiones de sistemas binarios y que se propagaron a través del Universo tardío [162, 163].

En virtud de la ecuación de clausura típica de SOTs (6.24), que se acopla a las GW a través de la ecuación (6.23) e incluye la retro-acción de las GW sobre el fluido, recuperamos el mismo comportamiento cualitativo que se encuentra en la descripción de la interacción GW-fluido a partir de teoría cinética [148, 160] (ver Apéndice D). En nuestro caso fijamos una realización simple y concreta de los efectos viscosos del fluido y calculamos explícitamente el espectro actual de pGW. Los parámetros se fijaron para analizar escalas de interés cosmológico. En particular, la constante de acoplamiento g que regula la interacción entre los modos de spin-2 del fluido determina el valor de τ y de la frecuencia característica $f_\tau = 1/2\pi\tau$ que distingue los regímenes de longitud de onda pequeña y grande, $f > f_\tau$ y $f < f_\tau$ respectivamente. Para una constante de acoplamiento muy pequeña $g \simeq 10^{-6}$, esta frecuencia es $f_\tau \simeq 10^{-13}$ Hz. La disminución de amplitud con respecto al espectro de evolución libre para longitudes de onda pequeñas depende del número de especies de radiación no fotónica N_{eff} determinado básicamente por la temperatura de desacople $T_{\text{dec},s}$. La disminución relativa máxima varía entre 2 y 12 % según N_{eff} toma valores en el rango $3,1 \rightarrow 3,5$.

Por otro lado, $\Omega_{\text{GW},\zeta}(k, \eta_0)$ está relacionado con la producción de GW por el decaimiento efectivo de los modos de spin-2 del fluido iniciales provenientes de la proyección TT del núcleo de ruido del campo escalar s en el final de Inflación. Esta contribución es despreciable en compa-

ración con $\Omega_{\text{GW},h}(k, \eta_0)$ para las escalas consideradas y sólo puede ser relevante para frecuencias muy altas (10^8 Hz) vinculadas con el tamaño del horizonte en el fin de Recalentamiento. No obstante, este esquema simple permite estudiar la producción de GW dada por el decaimiento efectivo de las fluctuaciones de spin-2 del fluido. En consecuencia pueden considerarse diferentes espectros iniciales para los grados de libertad tensoriales motivados en otros fenómenos físicos y estudiar la producción de GW durante el decaimiento efectivo de estos modos dado por la DTT.

Otro camino interesante dentro de este esquema, es incluir las fluctuaciones térmicas, que desarrollamos en el Capítulo 4, en el modelo hidrodinámico causal del plasma primordial y analizar la producción de GW debido a la evolución de dichas fluctuaciones [183, 184, 185, 186]. Finalmente, enfatizamos que este esquema hidrodinámico causal podría ser útil para estudiar el efecto de la disipación en la producción de GW en al menos dos escenarios más: en una fusión binaria de estrellas de neutrones [13], y en una transición de fase cosmológica debido a las ondas sonido o a los movimiento turbulento del fluido generados por la expansión o la colisión de burbujas. Para este último escenario es particularmente relevante modelar la interacción efectiva de tipo disipativa entre el plasma relativista y el campo que desarrolla el fenómeno de ruptura de simetría [170, 171].

7.3. Conclusiones globales

Como conclusión final destacamos que los campos en condiciones extremas, como colisiones de alta energía, escenarios fuera de equilibrio o las etapas tempranas de producción y evolución de un plasma, evidencian la necesidad de nuevos esquemas de descripción que incorporen interacciones y procesos no ideales, como disipación, fluctuaciones y termalización. Las teorías hidrodinámicas relativistas causales son candidatas prometedoras para incluir los efectos característicos de estos regímenes ya sea desde el punto de vista fundamental formal como en las aplicaciones directas. De hecho, han mostrado ser un esquema adecuado para describir fluidos reales en las RHICs. Probablemente el contexto cosmológico, y en particular el universo muy temprano, sea el escenario en el que las teorías relativistas de fluidos reales se manifiestan en todo su rango dinámico siendo indispensables para capturar sus procesos y fenómenos característicos.

La línea de investigación que llevamos en el último tiempo, y en particular el trabajo de esta tesis, contribuye a esta idea. En la parte de desarrollos formales realizamos contribuciones

en la incorporación de fluctuaciones térmicas y cómo estudiar su impacto en la dinámica a través de métodos funcionales de Teoría de Campos en [88] y generalizamos el formalismo de la construcción de las ecuaciones de transferencia para los tensores relevantes en geometrías extendidas en [60]. En las aplicaciones a cosmología estudiamos la evolución de las pGW en presencia del plasma primordial viscoso en [14, 15] y por otra parte usamos las SOTs para describir un plasma estrictamente anisótropo en el universo temprano y analizar el desencadenamiento de inestabilidades electromagnéticas en [16].

Apéndice A

Reglas de escala de los diagramas relevantes

En este apéndice discutimos las reglas de escala del subconjunto de diagramas con los que se construyen los propagadores. Realizamos un análisis general en el que consideramos un número arbitrario de lazos L y encontramos la condición, sobre una combinación particular de parámetros, que hace que la expansión en lazos sea válida.

En la Teoría Cuántica de Campos es usual dibujar las correcciones en lazos como diagramas de Feynman [7, 209]. En cualquier esquema los vértices corresponden a la acción de interacción S_{int} y las líneas internas a los propagadores.

Tomemos el núcleo de ruido (4.146) como ejemplo. En términos de diagramas el núcleo de ruido tiene dos vértices externos del mismo tipo: $(Y_{TT}-V-Z_T)$ con Y_{TT} en las líneas externas. Para simplificar, consideramos que en la estructura interna sólo tenemos los campos Y , V y Z_T y vértices del tipo $(Y-Z_T-Z_T)$ o $(Y-V-V)$. En este caso las líneas internas son $\langle VV \rangle$, $\langle VY \rangle$, $\langle VZ_T \rangle$, $\langle Z_TY \rangle$ y $\langle Z_TZ_T \rangle$.

Asumamos que el número de vértices internos está indicado por v y el de líneas internas por j según los diferentes tipos como $v(YVV)$, $v(YZ_TZ_T)$, $j(VV)$, $j(VY)$, $j(VZ_T)$, $j(Z_TY)$ y

$j(Z_T Z_T)$. Como el número de lazos es L debemos tener los siguientes vínculos

$$\begin{aligned}
2 + 2v(YVV) &= 2j(VV) + j(VY) + j(VZ_T) \\
2 + 2v(YZ_T Z_T) &= 2j(Z_T Z_T) + j(Z_T Y) + j(VZ_T) \\
v(YVV) + v(YZ_T Z_T) &= j(VY) + j(Z_T Y) \\
j(VV) + j(VZ_T) + j(Z_T Z_T) &= L + 1
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Cada componente de la estructura del diagrama (líneas internas, vértices internos y externos y las integrales de sobre los lazos) tiene un factor de escala. El diagrama completo tiene una regla de escala que es el producto de los factores de cada componente. A partir de las Tablas 4.1 y 4.2 extraemos las reglas para los propagadores, de modo que

$$\begin{aligned}
\langle VV \rangle &\rightarrow C_{VV} \sim (\sigma T_0^3)^{-1} \\
\langle VY \rangle &\rightarrow C_{VY} \sim (\sigma T_0^4)^{-1} \\
\langle VZ_T \rangle &\rightarrow C_{VZ_T} \sim (\sigma T_0^3 p)^{-1} \\
\langle Z_T Y \rangle &\rightarrow C_{Z_T Y} \sim (\sigma T_0^4 p)^{-1} \\
\langle Z_T Z_T \rangle &\rightarrow C_{Z_T Z_T} \sim (\sigma T_0^3 p^2)^{-1}.
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Según las ecuaciones (4.74) y (4.76) el factor de los vértices es

$$\begin{aligned}
(YVV) &\rightarrow V_{YVV} \sim \sigma T_0^4 p \\
(YZ_T Z_T) &\rightarrow V_{YZ_T Z_T} \sim \sigma T_0^4 p^3.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Además debemos agregar un factor p^3 por cada integral de lazos y un factor $1/c_V p$ por cada integral sobre las etiquetas temporales de los vértices internos. Por último, como extraemos la parte singular de la dependencia temporal del diagrama completo, tenemos que introducir el factor global $\delta(t - t')/(c_V p)$. Finalmente, la regla de escala del diagrama completo es

$$\delta(p - p') \delta(t - t') \frac{a^2 T_0^7 p}{c_V \sigma} \left(\frac{p^3}{c_V^2 \sigma T_0^3} \right)^L. \tag{A.4}$$

Si $p_L^3 = c_V^2 \sigma T_0^3$, la condición para hacer que la expansión en lazos sea consistente es $p < p_L$.

Apéndice B

Invariancia conforme de las ecuaciones hidrodinámicas

Las ecuaciones hidrodinámicas de la Subsección 2.5.1 son invariantes conforme siempre y cuando las partículas que conforman el fluido sean efectivamente no masivas.

Hemos mostrado que a partir de teoría cinética y un ansatz particular para la 1pdf podemos deducir las siguientes ecuaciones hidrodinámicas

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$A^{\mu\nu\rho}{}_{;\rho} = K^{\mu\nu} + I^{\mu\nu}, \quad (\text{B.2})$$

con la derivada covariante usual de un tensor definida por la conexión de Levi-Civita $\Gamma_{\rho\lambda}^{\mu}$ según

$$B^{\mu\nu}{}_{;\rho} = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} B^{\mu\nu} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu} B^{\lambda\nu} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\nu} B^{\mu\lambda}. \quad (\text{B.3})$$

El procedimiento de tomar momentos de la ecuación de Boltzmann nos lleva a que los tensores son

$$T^{\mu\nu} = \int Dp \, p^{\mu} p^{\nu} f(x^{\mu}, p_{\mu}) \quad (\text{B.4})$$

$$A^{\mu\nu\rho} = \int Dp \, p^{\mu} p^{\nu} p^{\rho} \frac{1}{-u_{\lambda} p^{\lambda}} f(x^{\mu}, p_{\mu}) \quad (\text{B.5})$$

$$K^{\mu\nu} = \int Dp \, p^\mu p^\nu \left[p^\lambda \nabla_\lambda \left(\frac{1}{-u_\sigma p^\sigma} \right) \right] f(x^\mu, p_\mu) \quad (\text{B.6})$$

$$I^{\mu\nu} = \int Dp \, p^\mu p^\nu \frac{1}{-u_\sigma p^\sigma} I_{col}[f]. \quad (\text{B.7})$$

donde la 1pdf y la integral de colisiones son

$$f(x^\mu, p_\mu) = [\exp \{ -\beta^\mu p_\mu - \zeta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu / (-T u_\lambda p^\lambda) \} + a]^{-1} \quad (\text{B.8})$$

$$f_0(x^\mu, p_\mu) = [\exp \{ -\beta^\mu p_\mu \} + a]^{-1} \quad (\text{B.9})$$

$$I_{col} = \frac{u^\mu p_\mu}{\tau} [f(x^\mu, p_\mu) - f_0(x^\mu, p_\mu)]. \quad (\text{B.10})$$

La cantidad $\beta_\mu = u_\mu/T$ es un vector de Killing, u_μ es la cuatriveLOCIDAD del fluido, T es la temperatura, τ es el tiempo de relajación, $\zeta^{\mu\nu}$ es la variable de no equilibrio, p_μ es el cuatrimomento y Dp es la medida de integración invariante relativista

$$Dp = \frac{4\pi d^4 p_\mu}{\sqrt{-g} (2\pi)^4} \delta(p^2) \Theta(p^0). \quad (\text{B.11})$$

El parámetro a toma los valores $a = 1$, $a = 0$ y $a = -1$ para la distribución de Fermi-Dirac, Maxwell-Jüttner y Bose-Einstein respectivamente.

Consideremos una transformación conforme tal que

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (\text{B.12})$$

con las siguientes reglas de transformación para las variables relevantes a variables cómoviles (tildadas) $p_\mu = \tilde{p}_\mu$, $u^\mu = \tilde{u}^\mu/a$, $T = \tilde{T}/a$, $\tau = a\tilde{\tau}$ y $\zeta^{\mu\nu} = \tilde{\zeta}^{\mu\nu}/a^2$. De este modo $Dp = \tilde{D}p/a^2$ y

$$\beta^\mu p_\mu = \tilde{\beta}^\mu \tilde{p}^\mu, \quad (\text{B.13})$$

$$\zeta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu / (-T u^\lambda p_\lambda) = \tilde{\zeta}^{\mu\nu} \tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu / (-\tilde{T} \tilde{u}^\lambda \tilde{p}_\lambda). \quad (\text{B.14})$$

Estas últimas reglas implican que las 1pdf (B.8) y (B.9) son invariantes conformes lo cual significa

$f = \tilde{f}$ and $f_0 = \tilde{f}_0$. Por otra parte la conexión cumple

$$\Gamma_{\mu\rho}^\nu = \tilde{\Gamma}_{\mu\rho}^\nu + \frac{a'}{a}\gamma_{\mu\rho}^\nu \quad (\text{B.15})$$

$$\gamma_{\mu\rho}^\nu = \delta_\rho^\nu \delta_\mu^0 + \delta_\mu^\nu \delta_\rho^0 - \tilde{g}^{\nu 0} \tilde{g}_{\mu\rho} \quad (\text{B.16})$$

A continuación mostramos que la dinámica (B.1)-(B.2) es invariante conforme si $p^\mu p_\mu = 0$. A partir de las definiciones (B.4)-(B.10) y de las reglas de transformación mencionadas obtenemos

$$T^{\mu\nu} = a^{-6} \tilde{T}^{\mu\nu} \quad (\text{B.17})$$

$$A^{\mu\nu\rho} = a^{-7} \tilde{A}^{\mu\nu\rho} \quad (\text{B.18})$$

$$I^{\mu\nu} = a^{-7} \tilde{I}^{\mu\nu} \quad (\text{B.19})$$

$$K^{\mu\nu} = a^{-7} \left[\tilde{K}^{\mu\nu} + \frac{a'}{a} \tilde{A}^{\mu\nu 0} \right]. \quad (\text{B.20})$$

La divergencia del EMT es

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = a^{-6} \left[\tilde{T}^{\mu\nu}_{;\nu} + \tilde{\Gamma}_{\nu\rho}^\nu \tilde{T}^{\mu\rho} + \tilde{\Gamma}_{\nu\rho}^\mu \tilde{T}^{\nu\rho} + \frac{a'}{a} \left(-6\tilde{T}^{\mu 0} + \gamma_{\nu\rho}^\nu \tilde{T}^{\mu\rho} + \gamma_{\nu\rho}^\mu \tilde{T}^{\nu\rho} \right) \right]. \quad (\text{B.21})$$

Al expandir los coeficientes γ dentro de los paréntesis mostramos que la expresión entre paréntesis es nula cuando $p^2 = 0$. A saber,

$$-6\tilde{T}^{\mu 0} + \gamma_{\nu\rho}^\nu \tilde{T}^{\mu\rho} + \gamma_{\nu\rho}^\mu \tilde{T}^{\nu\rho} = -\tilde{g}^{\mu 0} \tilde{T}_\nu^\nu = 0. \quad (\text{B.22})$$

pues si $p^2 = 0$ entonces $T_\mu^\mu = \tilde{T}_\mu^\mu = 0$. Por lo tanto $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ implica

$$\tilde{T}^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (\text{B.23})$$

Esta última ecuación está escrita en términos de variables comóviles.

La transformación de la ecuación (B.2) es

$$\tilde{A}^{\mu\nu\rho}_{;\rho} + \frac{a'}{a} \left(-7\tilde{A}^{\mu\nu 0} + \gamma_{\rho\lambda}^\rho \tilde{A}^{\mu\nu\lambda} + \gamma_{\rho\lambda}^\mu \tilde{A}^{\rho\nu\lambda} + \gamma_{\rho\lambda}^\nu \tilde{A}^{\mu\rho\lambda} \right) = \tilde{K}^{\mu\nu} + \tilde{I}^{\mu\nu} + \frac{a'}{a} \tilde{A}^{\mu\nu 0}. \quad (\text{B.24})$$

Luego de expandir los coeficientes γ y usar que $A^{\mu\nu\rho}$ es simétrico y sin traza en cualquier par de

índices (a causa de $p^2 = 0$), es directo mostrar que

$$\tilde{A}^{\mu\nu\rho}_{;\rho} = \tilde{K}^{\mu\nu} + \tilde{I}^{\mu\nu}. \quad (\text{B.25})$$

En resumen observamos que si $p^2 = 0$ entonces las ecuaciones (B.1)-(B.2) implican las ecuaciones comóviles (B.23) y (B.25), mostrando así la invariancia conforme de la teoría.

Apéndice C

Núcleo de ruido de un campo escalar durante Inflación

Consideremos una Inflación de de Sitter exacta y un campo escalar mínimamente acoplado en su estado de vacío de Bunch-Davies. El núcleo de ruido se define según

$$N_{\mu\nu\rho'\sigma'}(x, x') = \frac{1}{2} \left\langle 0 \left| \left\{ (\hat{T}_{\mu\nu}(x) - \langle \hat{T}_{\mu\nu}(x) \rangle); (\hat{T}_{\rho'\sigma'}(x') - \langle \hat{T}_{\rho'\sigma'}(x') \rangle) \right\} \right| 0 \right\rangle, \quad (\text{C.1})$$

donde $|0\rangle$ es el vacío de Bunch-Davies y $\hat{T}_{\mu\nu}(x)$ es el EMT del campo escalar. El núcleo de ruido (C.1) en el espacio de de Sitter fue calculado en términos de la función de Wightman $G_{xx'} = \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') | 0 \rangle$ en [205, 206, 207, 210]. Trabajar con el EMT cuántico $\hat{T}_{\mu\nu}(x)$ no es trivial, la generalización más inmediata a partir del tensor clásico resulta estar mal definida y en consecuencia es necesario considerar métodos de regularización para obtener expresiones bien definidas como por ejemplo la regularización a partir de la separación de puntos [210, 211]. No obstante resulta que el núcleo de ruido (C.1) es una cantidad bien definida con una divergencia esperable en el límite de coincidencia ($x \rightarrow x'$). Dado que estamos interesados en la proyección espacial TT del núcleo de ruido, sólo consideramos la contribución del término cinético en el EMT. Aunque el límite no masivo no es equivalente al caso no masivo exacto [205], la proyección TT descarta los términos conflictivos y evita este comportamiento singular. Entonces, las componentes espaciales del núcleo de ruido que proviene sólo del término cinético

son

$$N^i_{j \ k'}(x, x') = \frac{1}{2} \left[g^{in} g^{k'm'} \nabla_n \nabla_{m'} G_{xx'} \nabla_j \nabla_{l'} G_{xx'} + g^{in} g^{l'm'} \nabla_n \nabla_{m'} G_{xx'} \nabla_j \nabla_{k'} G_{xx'} + \right. \\ \left. + (x \leftrightarrow x') \right]. \quad (\text{C.2})$$

En [212] están las fórmulas explícitas para lidiar con las derivadas de tensores evaluados en dos puntos diferentes (bitensores).

Como hemos mencionamos en la Sección 6.4.3 consideramos el núcleo de ruido sólo para modos que se ‘congelan’ al salir del horizonte, es decir escalas que sean super-horizonte en el fin de Inflación. Es posible encontrar un núcleo de ruido ‘renormalizado’ sustrayendo las fluctuaciones del vacío local adiabáticas para escalas dentro del horizonte [14, 15]. Aplicando este procedimiento el núcleo de ruido ‘renormalizado’ para tiempo iguales $\eta = \eta' = \eta_I$ es

$$N^i_{j \ k} (r) = \frac{H_{\text{inf}}^4}{8 \pi^4 a_I^4} \left[r^i r^j r^k r^l F_1(r) + (\delta^{il} r^j r^k + \delta^{jk} r^i r^l) F_2(r) + \right. \\ \left. + \delta^{il} \delta^{jk} F_3(r) + (k \leftrightarrow l) \right] \quad (\text{C.3})$$

donde

$$F_1(r) = \frac{4}{r^8} \Theta(r - r_0) \quad (\text{C.4})$$

$$F_2(r) = -\frac{2}{r^6} \Theta(r - r_0) \quad (\text{C.5})$$

$$F_3(r) = \frac{1}{r^4} \Theta(r - r_0) \quad (\text{C.6})$$

donde $r^i = (\mathbf{x}^i - \mathbf{x}'^i)$ indica las componentes de las coordenadas espaciales comóviles y $r_0 = \alpha/a_I H_{\text{inf}}$ con $\alpha \sim 1$. En el lado derecho de la expresión (C.3) descartamos el primado en los índices y para subirlos o bajarlos usamos la delta de Kronecker.

La proyección TT de (C.3) es

$$\left[N^i_{j \ k} (r) \right]^{\text{TT}} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \frac{H_{\text{inf}}^4}{4 \pi^4 a_I^4} S_{\text{TT}}^{ijkl}(\mathbf{p}) \times \\ \times \left[\frac{2\hat{F}_1''(p)}{p^2} - \frac{2\hat{F}_1'(p)}{p^3} - \frac{2\hat{F}_2'(p)}{p} + \hat{F}_3(p) \right] \quad (\text{C.7})$$

con

$$\hat{F}_i(p) = \int d^3r e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} F_i(r), \quad (\text{C.8})$$

y los proyectores transversal, $P^{ij}(\mathbf{k})$, y TT, $S_{\text{TT}}^{ijkl}(\mathbf{k})$, en el espacio de Fourier definidos en (4.86) y (4.97) respectivamente.

Luego de calcular las transformadas de Fourier de (C.4)-(C.6) y reemplazarlas en (C.7) obtenemos la expresión (6.37).

Apéndice D

Regímenes del fluido: colisional y no colisional. Comparación con el enfoque cinético

En la referencia [160] los autores generalizan el trabajo realizado en [148] para incorporar los efectos de las colisiones en la evolución de las GW acopladas a un fluido anisótropo usando, en ambos casos, un esquema de teoría cinética para describir al fluido. Aquí analizamos la compatibilidad entre el enfoque cinético mencionado y nuestra descripción en la que usamos una SOT para modelar el fluido.

D.1. Escenario con espacio-tiempo de fondo plano

Primero analizamos la evolución de las GW acopladas a un fluido causal en un espacio-tiempo con un fondo de Minkowski cuya métrica es

$$ds^2 = -dt^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j, \quad (\text{D.1})$$

donde h_{ij} representa las GW con $h^i_i = \partial_i h_{ij} = 0$. Las ecuaciones dinámicas resultan ser

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) h_{ij}(\mathbf{r}, t) = \frac{2}{M_{\text{pl}}^2} T_{ij}^{(1)\text{TT}}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{D.2})$$

Usamos una DTT generalizada para describir el fluido (ver Secciones 2.5 y 6.3) y en consecuencia la fuente de GW, i.e. la parte de spin-2 del EMT a primer orden, queda definida como

$$T_{ij}^{(1)\text{TT}} = \frac{8}{15} \rho_s \zeta_{ij}, \quad (\text{D.3})$$

con ρ_s la densidad de energía media del fluido. La dinámica de las nuevas variables de no equilibrio ζ_{ij} está determinada por las ecuaciones (6.11) y (6.19) en las cuales asumimos la aproximación de relajación para la integral de colisiones. En efecto llegamos a

$$\frac{\partial}{\partial t} \zeta_{ij} + \frac{1}{\tau} \zeta_{ij} = -b \frac{\partial}{\partial t} h_{ij}. \quad (\text{D.4})$$

Al aplicar la transformada de Fourier a las ecuaciones (D.2) y (D.4) tanto en espacio como en tiempo y usando la descomposición (6.22) obtenemos, para cada polarización,

$$(-\omega^2 + k^2) h_{\mathbf{k},\omega} = \frac{16}{15} \frac{1}{M_{\text{pl}}^2} \rho_s \zeta_{\mathbf{k},\omega} \quad (\text{D.5})$$

$$\left(i\omega - \frac{1}{\tau}\right) \zeta_{\mathbf{k},\omega} = -b i \omega h_{\mathbf{k},\omega}. \quad (\text{D.6})$$

La relación de dispersión general es

$$\omega^2 - k^2 - \frac{B}{1 + i/(\omega\tau)} = 0 \quad (\text{D.7})$$

con $B = 16 \rho_s b / (15 M_{\text{pl}}^2)$. En el régimen no colisional en el que las colisiones son ineficientes, $\omega\tau \gg 1$, la relación de dispersión queda

$$\omega^2 - k^2 - B \left(1 - \frac{i}{\omega\tau}\right) = O \left[\left(\frac{1}{\omega\tau}\right)^2 \right]. \quad (\text{D.8})$$

Para el régimen colisional en el cual las colisiones son eficientes, $\omega\tau \ll 1$, la relación de dispersión es

$$\omega^2 - k^2 + i B \omega\tau = O \left[(\omega\tau)^2 \right]. \quad (\text{D.9})$$

Ambas expresiones (D.8) y (D.9) coinciden cualitativamente con los resultados presentados en [160]. En particular observamos que el exponente de decaimiento crece linealmente con $\omega\tau$ en el régimen colisional mientras que decrece como $(\omega\tau)^{-1}$ en el régimen no colisional de modo que el efecto máximo de decaimiento ocurre para $\omega\tau \sim 1$. Es importante notar que asumir más colisiones en un fluido se traduce en considerar valores menores de τ .

D.2. Escenario cosmológico

En lugar de considerar un fondo estático plano, el caso que desarrollamos en el Capítulo 6 detalla la evolución de las GW acopladas a la materia en un contexto cosmológico. Este fenómeno ya ha sido estudiado en [148], para partículas que se propagan libremente, y generalizado en [160], para incorporar los efectos de las colisiones, ambos dentro de un esquema proveniente de teoría cinética. En este apéndice comparamos cualitativamente sus resultados con nuestro desarrollo hidrodinámico utilizando una SOT.

Para la SOT más simple, la dinámica principal está dada por las ecuaciones (6.41) y (6.42). Analicemos el canal de efectos viscosos (Sección 6.5.1) en el cual asumimos que los modos de spin-2 del fluido son nulos, i.e. $\zeta_{\mathbf{k}}(u_I) = 0$. Esto es equivalente a fijar la 1pdf inicial de equilibrio en presencia de GW tal y como en [148, 160]. Con estas condiciones iniciales es posible reescribir el sistema de ecuaciones (6.41)-(6.42) como la siguiente expresión formal

$$h''_{\mathbf{k}}(u) + \frac{2a'(u)}{a(u)} h'_{\mathbf{k}}(u) + h_{\mathbf{k}}(u) = -24 \frac{\rho_s(u)}{\rho_c(u)} \left(\frac{a'(u)}{a(u)} \right)^2 \int_{u_I}^u d\tilde{u} e^{-(u-\tilde{u})/(k\tau)} \frac{h'_{\mathbf{k}}(\tilde{u})}{15} \quad (\text{D.10})$$

El lado derecho es la fuente de GW producida por el fluido asumiendo una condición inicial nula para los modos de spin-2 del fluido. El factor exponencial tiene en cuenta las colisiones y en consecuencia, al igual que en la sección previa, pueden ser analizados dos regímenes distintos. En el régimen colisional, $ck\tau \ll 1$, notamos que como las colisiones son eficientes, borran las anisotropías del fluido haciendo que la fuente de GW (lado derecho de (D.10)) se vuelva despreciable debido al factor exponencial $e^{-(u-\tilde{u})/(k\tau)}$, independientemente de los prefactores ρ_s/ρ_c y $(a'/a)^2$. Para el régimen no colisional en el que los modos de spin-2 del fluido se propagan libremente, $ck\tau \gg 1$, obtenemos que la fuente de GW genera un efecto de amortiguamiento conducido por la expansión del universo lo cual implica un decrecimiento en la amplitud del espectro de GW

como se muestra en la Figura 6.1. De esta forma recuperamos el comportamiento cualitativo reportado en [148, 160].

Al considerar colisiones dentro del esquema de teoría cinética, el lado derecho de (D.10) se expresa como [160]

$$-24 \frac{\rho_s(u)}{\rho_c(u)} \left(\frac{a'(u)}{a(u)} \right)^2 \int_{u_I}^u d\tilde{u} e^{-(u-\tilde{u})/(k\tau)} K(u-\tilde{u}) h'_{\mathbf{k}}(\tilde{u}) \quad (\text{D.11})$$

con $K(s) = j_2(s)/s^2$ y $j_2(s)$ la función esférica de Bessel de segundo orden. El núcleo $K(s)$ contempla los efectos de las variaciones espaciales de las anisotropías producidas por las partículas que se mueven en la dirección de propagación de las GW.

Nuestra ecuación (6.42) para los modos de spin-2 del fluido es análoga a la ecuación linealizada para las perturbaciones de la 1pdf en el enfoque cinético. En efecto usando la ecuación (6.42) deducimos la expresión (D.10) que captura de forma efectiva la misma dinámica cualitativa encontrada en el esquema cinético como expresamos en los párrafos previos. El promedio de momentos realizado para construir la ecuación (6.42) a primer orden (ver ecuaciones (6.11)-(6.14)) y la parametrización elegida para la 1pdf no permiten expresar el efecto del núcleo $K(s)$ y en consecuencia obtenemos una dependencia trivial $K(s) \rightarrow K(0) = 1/15$, como puede notarse comparando el lado derecho de (D.10) y (D.11).

Bibliografía

- [1] N. Andersson and G.L. Comer, *Relativistic fluid dynamics: physics for many different scales*, *arXiv:2008.12069 [gr-qc]* (2020) .
- [2] L. Rezzolla and O. Zanotti, *Relativistic hydrodynamics*, Oxford University Press (2013).
- [3] C. Cercignani and G.M. Kremer, *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*, Birkhäuser, Basel (2002).
- [4] P. Romatschke and U. Romatschke, *Relativistic fluid dynamics in and out of equilibrium: and applications to relativistic nuclear collisions*, Cambridge University Press (2019).
- [5] M. Strickland, *Thermalization and isotropization in heavy-ion collisions*, *Pramana* **84** (2015) 671.
- [6] M. Strickland, J. Noronha and G.S. Denicol, *Anisotropic nonequilibrium hydrodynamic attractor*, *Phys. Rev. D* **97** (2018) 036020.
- [7] E.A. Calzetta and B.-L.B. Hu, *Nonequilibrium quantum field theory*, Cambridge University Press (2008).
- [8] M. Strickland, *Anisotropic hydrodynamics: three lectures*, *Acta Physica Polonica B* **45** (2014) 2355.
- [9] P. Romatschke, *New developments in relativistic viscous hydrodynamics*, *International Journal of Modern Physics E* **19** (2010) 1.
- [10] X.-G. Huang, M. Huang, D.H. Rischke and A. Sedrakian, *Anisotropic hydrodynamics, bulk viscosities, and r-modes of strange quark stars with strong magnetic fields*, *Phys. Rev. D* **81** (2010) 045015.

- [11] J.L. Friedman and N. Stergioulas, *Rotating relativistic stars*, Cambridge University Press (2013).
- [12] V. Paschalidis and N. Stergioulas, *Rotating stars in relativity*, *Living Reviews in Relativity* **20** (2017) 7.
- [13] M.G. Alford, L. Bovard, M. Hanauske, L. Rezzolla and K. Schwenzer, *Viscous dissipation and heat conduction in binary neutron-star mergers*, *Phys. Rev. Lett.* **120** (2018) 041101.
- [14] N. Miron-Granese and E. Calzetta, *Primordial gravitational waves amplification from causal fluids*, *Phys. Rev. D* **97** (2018) 023517.
- [15] N. Mirón-Granese, *Relativistic viscous effects on the primordial gravitational waves spectrum*, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2021** (2021) 008.
- [16] N. Mirón-Granese, E. Calzetta and A. Kandus, *Primordial weibel instability*, *arXiv:2101.03644 [astro-ph.HE]* (2021) .
- [17] N. Peter, S. Martin and S. Günter, *Gravitational waves produced by compressible MHD turbulence from cosmological phase transitions*, *Classical and Quantum Gravity* **35** (2018) 144001.
- [18] J.C. McKinney, A. Tchekhovskoy and R.D. Blandford, *General relativistic magnetohydrodynamic simulations of magnetically choked accretion flows around black holes*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **423** (2012) 3083.
- [19] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press (1959).
- [20] C. Eckart, *The thermodynamics of irreversible processes. III. Relativistic theory of the simple fluid*, *Phys. Rev.* **58** (1940) 919.
- [21] W.A. Hiscock and L. Lindblom, *Generic instabilities in first-order dissipative relativistic fluid theories*, *Phys. Rev. D* **31** (1985) 725.
- [22] A.L. García-Perciante and O. Reula, *On the illposedness and stability of the relativistic heat equation*, *Journal of Mathematical Physics* **61** (2020) 051506.
- [23] I. Müller, *Zum paradoxon der wärmeleitungstheorie*, *Zeitschrift für Physik* **198** (1967) 329.

- [24] W. Israel, *Nonstationary irreversible thermodynamics: A causal relativistic theory*, *Annals of Physics* **100** (1976) 310 .
- [25] A. Muronga, *Causal theories of dissipative relativistic fluid dynamics for nuclear collisions*, *Phys. Rev. C* **69** (2004) 034903.
- [26] D. Jou, J. Casas-Vázquez and G. Lebon, *Extended irreversible thermodynamics*, Springer, fourth ed. (2010).
- [27] R. Baier, P. Romatschke, D.T. Son, A.O. Starinets and M.A. Stephanov, *Relativistic viscous hydrodynamics, conformal invariance, and holography*, *Journal of High Energy Physics* **2008** (2008) 100.
- [28] J.C. Maxwell, IV. *On the dynamical theory of gases*, *Philosophical transactions of the Royal Society of London* (1867) 49.
- [29] C. Cattaneo, *Sulla conduzione del calore*, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena* **3** (1948) 83.
- [30] C. Cattaneo, *Sur la propagation de la chaleur en relativité*, *C. R. Acad. Sci. Paris* **247** (1958) 431.
- [31] D.D. Joseph and L. Preziosi, *Heat waves*, *Rev. Mod. Phys.* **61** (1989) 41.
- [32] D.D. Joseph and L. Preziosi, *Addendum to the paper "heat waves"[rev. mod. phys. 61, 41 (1989)]*, *Rev. Mod. Phys.* **62** (1990) 375.
- [33] H. Grad, *On the kinetic theory of rarefied gases*, *Communications on pure and applied mathematics* **2** (1949) 331.
- [34] W. Israel and J. Stewart, *Thermodynamics of nonstationary and transient effects in a relativistic gas*, *Physics Letters A* **58** (1976) 213 .
- [35] W. Israel and J. Stewart, *Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory*, *Annals of Physics* **118** (1979) 341.
- [36] W. Israel and J.M. Stewart, *On Transient Relativistic Thermodynamics and Kinetic Theory. II*, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **365** (1979) 43.

- [37] W. Israel and J.M. Stewart, *Progress in Relativistic Thermodynamics and Electrodynamics of Continuous Media*, in *General Relativity and Gravitation II*, A. Held, ed., vol. 2, p. 491, Jan., 1980.
- [38] T.S. Olson and W.A. Hiscock, *Plane steady shock waves in Israel-Stewart fluids*, *Annals of Physics* **204** (1990) 331 .
- [39] D. Jou, J. Rubi and J. Casas-Vazquez, *Hydrodynamical fluctuations in extended irreversible thermodynamics*, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **101** (1980) 588 .
- [40] D. Pavon, D. Jou and J. Casas-Vazquez, *Heat conduction in relativistic extended thermodynamics*, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **13** (1980) L77.
- [41] T.S. Olson, *Stability and causality in the Israel-Stewart energy frame theory*, *Annals of Physics* **199** (1990) 18 .
- [42] F.S. Bemfica, M.M. Disconzi and J. Noronha, *Causality of the Einstein-Israel-Stewart theory with bulk viscosity*, *Phys. Rev. Lett.* **122** (2019) 221602.
- [43] A.M. Anile, D. Pavon and V. Romano, *The case for hyperbolic theories of dissipation in relativistic fluids*, *arXiv:9810014 [gr-qc]* (1998) .
- [44] L. Herrera and D. Pavón, *Why hyperbolic theories of dissipation cannot be ignored: Comment on a paper by Kostädt and Liu*, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 088503.
- [45] I.-S. Liu, I. Müller and T. Ruggeri, *Relativistic thermodynamics of gases*, *Annals of Physics* **169** (1986) 191 .
- [46] R. Geroch and L. Lindblom, *Dissipative relativistic fluid theories of divergence type*, *Phys. Rev. D* **41** (1990) 1855.
- [47] R. Geroch and L. Lindblom, *Causal theories of dissipative relativistic fluids*, *Annals of Physics* **207** (1991) 394 .
- [48] G.B. Nagy and O.A. Reula, *On the causality of a dilute gas as a dissipative relativistic fluid theory of divergence type*, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **28** (1995) 6943.

- [49] E. Calzetta, *Relativistic fluctuating hydrodynamics*, *Classical and Quantum Gravity* **15** (1998) 653.
- [50] J. Peralta-Ramos and E. Calzetta, *Divergence-type nonlinear conformal hydrodynamics*, *Phys. Rev. D* **80** (2009) 126002.
- [51] J. Peralta-Ramos and E. Calzetta, *Divergence-type 2 + 1 dissipative hydrodynamics applied to heavy-ion collisions*, *Phys. Rev. C* **82** (2010) 054905.
- [52] E. Calzetta, *Hydrodynamic approach to boost invariant free streaming*, *Phys. Rev. D* **92** (2015) 045035.
- [53] M. Aguilar and E. Calzetta, *Causal relativistic hydrodynamics of conformal Fermi-Dirac gases*, *Phys. Rev. D* **95** (2017) 076022.
- [54] L. Lehner, O.A. Reula and M.E. Rubio, *Hyperbolic theory of relativistic conformal dissipative fluids*, *Phys. Rev. D* **97** (2018) 024013.
- [55] L. Cantarutti and E. Calzetta, *Dissipative-type theories for bjorken and gubser flows*, *International Journal of Modern Physics A* **35** (2020) 2050074.
- [56] E. Calzetta, *Fully developed relativistic turbulence*, *Phys. Rev. D* **103** (2021) 056018.
- [57] R. Loganayagam, *Entropy current in conformal hydrodynamics*, *Journal of High Energy Physics* **2008** (2008) 087.
- [58] G.S. Denicol, H. Niemi, E. Molnár and D.H. Rischke, *Derivation of transient relativistic fluid dynamics from the boltzmann equation*, *Phys. Rev. D* **85** (2012) 114047.
- [59] J. Peralta-Ramos and E. Calzetta, *Macroscopic approximation to relativistic kinetic theory from a nonlinear closure*, *Phys. Rev. D* **87** (2013) 034003.
- [60] E. Lescano and N. Mirón-Granese, *On the phase space in double field theory*, *Journal of High Energy Physics* **2020** (2020) 239.
- [61] O.A. Reula and G.B. Nagy, *A causal statistical family of dissipative divergence-type fluids*, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **30** (1997) 1695.

- [62] H.B. Callen and T.A. Welton, *Irreversibility and generalized noise*, *Phys. Rev.* **83** (1951) 34.
- [63] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Hydrodynamic fluctuations*, *Zh. Eksp. Teor. Fiz* **32** (1957) 618.
- [64] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Statistical Mechanics. Part II*, Pergamon Press (1959).
- [65] R.F. Fox and G.E. Uhlenbeck, *Contributions to non-equilibrium thermodynamics. i. theory of hydrodynamical fluctuations*, *The Physics of Fluids* **13** (1970) 1893.
- [66] R.F. Fox and G.E. Uhlenbeck, *Contributions to nonequilibrium thermodynamics. II. fluctuation theory for the boltzmann equation*, *The Physics of Fluids* **13** (1970) 2881.
- [67] G.D. Moore and K.A. Sohrabi, *Kubo formulas for second-order hydrodynamic coefficients*, *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011) 122302.
- [68] P. Kovtun, G.D. Moore and P. Romatschke, *Stickiness of sound: An absolute lower limit on viscosity and the breakdown of second-order relativistic hydrodynamics*, *Phys. Rev. D* **84** (2011) 025006.
- [69] J. Peralta-Ramos and E. Calzetta, *Shear viscosity from thermal fluctuations in relativistic conformal fluid dynamics*, *Journal of High Energy Physics* **2012** (2012) 85.
- [70] B.J. Alder and T.E. Wainwright, *Decay of the velocity autocorrelation function*, *Phys. Rev. A* **1** (1970) 18.
- [71] M.H. Ernst, E.H. Hauge and J.M.J. van Leeuwen, *Asymptotic time behavior of correlation functions*, *Phys. Rev. Lett.* **25** (1970) 1254.
- [72] P. Kovtun and L.G. Yaffe, *Hydrodynamic fluctuations, long-time tails, and supersymmetry*, *Phys. Rev. D* **68** (2003) 025007.
- [73] J.I. Kapusta, B. Müller and M. Stephanov, *Relativistic theory of hydrodynamic fluctuations with applications to heavy-ion collisions*, *Phys. Rev. C* **85** (2012) 054906.
- [74] Y. Akamatsu, A. Mazeliauskas and D. Teaney, *Kinetic regime of hydrodynamic fluctuations and long time tails for a bjorken expansion*, *Phys. Rev. C* **95** (2017) 014909.

- [75] M. Martinez and T. Schäfer, *Stochastic hydrodynamics and long time tails of an expanding conformal charged fluid*, *Phys. Rev. C* **99** (2019) 054902.
- [76] X. An, G.m.c. Başar, M. Stephanov and H.-U. Yee, *Relativistic hydrodynamic fluctuations*, *Phys. Rev. C* **100** (2019) 024910.
- [77] A. Kandus, E.A. Calzetta, F.D. Mazzitelli and C.E. Wagner, *Cosmological magnetic fields from gauge-mediated supersymmetry-breaking models*, *Physics Letters B* **472** (2000) 287 .
- [78] E. Calzetta and A. Kandus, *Self-consistent estimates of magnetic fields from reheating*, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 063004.
- [79] E. Calzetta and E. Verdaguer, *Noise induced transitions in semiclassical cosmology*, *Phys. Rev. D* **59** (1999) 083513.
- [80] E. Calzetta, A. Roura and E. Verdaguer, *Dissipation, noise, and vacuum decay in quantum field theory*, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2001) 010403.
- [81] E. Calzetta, *Real relativistic fluids in heavy ion collisions*, *arXiv:1310.0841 [hep-ph]* (2013) .
- [82] S. Pennisi, *Some considerations on a non-linear approach to extended thermodynamics*, in *Symposium on Kinetic Theory and Extended Thermodynamics*, I. Müller and T. Ruggeri, eds., 1987.
- [83] J. Anderson and H. Witting, *A relativistic relaxation-time model for the boltzmann equation*, *Physica* **74** (1974) 466 .
- [84] J. Anderson and H. Witting, *Relativistic quantum transport coefficients*, *Physica* **74** (1974) 489 .
- [85] M. Takamoto and S. ichiro Inutsuka, *The relativistic kinetic dispersion relation: Comparison of the relativistic Bhatnagar–Gross–Krook model and Grad’s 14-moment expansion*, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **389** (2010) 4580.
- [86] G. Policastro, D.T. Son and A.O. Starinets, *Shear viscosity of strongly coupled $n = 4$ supersymmetric yang-mills plasma*, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 081601.

- [87] I. Müller, *Speeds of propagation in classical and relativistic extended thermodynamics*, *Living Reviews in Relativity* **2** (2016) 1.
- [88] N. Mirón-Granese, A. Kandus and E. Calzetta, *Nonlinear fluctuations in relativistic causal fluids*, *Journal of High Energy Physics* **2020** (2020) 64.
- [89] E. Hopf, *Statistical hydromechanics and functional analysis*, *J. Rat. Mech. Anal* **1** (1952) 87.
- [90] R.M. Lewis and R.H. Kraichnan, *A space-time functional formalism for turbulence*, *Communications on Pure and Applied Mathematics* **15** (1962) 397.
- [91] C. DeDominicis and P.C. Martin, *Energy spectra of certain randomly-stirred fluids*, *Phys. Rev. A* **19** (1979) 419.
- [92] S. Grozdanov and J. Polonyi, *Viscosity and dissipative hydrodynamics from effective field theory*, *Phys. Rev. D* **91** (2015) 105031.
- [93] M. Crossley, P. Glorioso and H. Liu, *Effective field theory of dissipative fluids*, *Journal of High Energy Physics* **2017** (2017) 95.
- [94] K. Jensen, N. Pinzani-Fokeeva and A. Yarom, *Dissipative hydrodynamics in superspace*, *Journal of High Energy Physics* **2018** (2018) 127.
- [95] F.M. Haehl, R. Loganayagam and M. Rangamani, *Effective action for relativistic hydrodynamics: fluctuations, dissipation, and entropy inflow*, *Journal of High Energy Physics* **2018** (2018) 194.
- [96] P.C. Martin, E.D. Siggia and H.A. Rose, *Statistical dynamics of classical systems*, *Phys. Rev. A* **8** (1973) 423.
- [97] J.D. Dominicis, *Techniques de renormalisation de la théorie des champs et dynamique des phénomènes critiques*, *J. Physique Coll.* **37** (1976) C1.
- [98] A. Kamenev, *Field theory of non-equilibrium systems*, Cambridge University Press (2011).
- [99] G.L. Eyink, *Turbulence noise*, *Journal of Statistical Physics* **83** (1996) 955.

- [100] J. Zanella and E. Calzetta, *Renormalization group and nonequilibrium action in stochastic field theory*, *Phys. Rev. E* **66** (2002) 036134.
- [101] W.D. McComb, *Homogeneous, Isotropic Turbulence: Phenomenology, Renormalization and Statistical Closures*, Oxford University Press (2014).
- [102] H. Wyld, *Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid*, *Annals of Physics* **14** (1961) 143 .
- [103] L.L. Lee, *A formulation of the theory of isotropic hydromagnetic turbulence in an incompressible fluid*, *Annals of Physics* **32** (1965) 292 .
- [104] W.D. McComb, *The physics of fluid turbulence*, Oxford University Press (1990).
- [105] E. Calzetta, *Kadanoff-Baym equations for near-Kolmogorov turbulence*, *arXiv:0908.4068 [physics.flu-dyn]* (2009) .
- [106] P. Kovtun, *Lectures on hydrodynamic fluctuations in relativistic theories*, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **45** (2012) 473001.
- [107] P. Kovtun, G.D. Moore and P. Romatschke, *Towards an effective action for relativistic dissipative hydrodynamics*, *Journal of High Energy Physics* **2014** (2014) 123.
- [108] M. Harder, P. Kovtun and A. Ritz, *On thermal fluctuations and the generating functional in relativistic hydrodynamics*, *Journal of High Energy Physics* **2015** (2015) 25.
- [109] P. Romatschke, *Relativistic hydrodynamic attractors with broken symmetries: non-conformal and non-homogeneous*, *Journal of High Energy Physics* **2017** (2017) 79.
- [110] G.S. Denicol and J. Noronha, *Exact hydrodynamic attractor of an ultrarelativistic gas of hard spheres*, *Phys. Rev. Lett.* **124** (2020) 152301.
- [111] S. Kamata, M. Martinez, P. Plaschke, S. Ochsenfeld and S. Schlichting, *Hydrodynamization and nonequilibrium green's functions in kinetic theory*, *Phys. Rev. D* **102** (2020) 056003.
- [112] G.L. Eyink and T.D. Drivas, *Cascades and dissipative anomalies in relativistic fluid turbulence*, *Phys. Rev. X* **8** (2018) 011023.

- [113] K. Murase, *Causal hydrodynamic fluctuations in non-static and inhomogeneous backgrounds*, *Annals of Physics* **411** (2019) 167969.
- [114] A. Kurkela, A. Mazeliauskas, J.-F.m.c. Paquet, S. Schlichting and D. Teaney, *Effective kinetic description of event-by-event pre-equilibrium dynamics in high-energy heavy-ion collisions*, *Phys. Rev. C* **99** (2019) 034910.
- [115] A. Kurkela, A. Mazeliauskas, J.-F.m.c. Paquet, S. Schlichting and D. Teaney, *Matching the nonequilibrium initial stage of heavy ion collisions to hydrodynamics with qcd kinetic theory*, *Phys. Rev. Lett.* **122** (2019) 122302.
- [116] D. Forster, D.R. Nelson and M.J. Stephen, *Large-distance and long-time properties of a randomly stirred fluid*, *Phys. Rev. A* **16** (1977) 732.
- [117] J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena*, Clarendon Press (1996).
- [118] M. Franco and E. Calzetta, *Wave propagation in non-gaussian random media*, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **48** (2015) 045206.
- [119] P. Ramond, *Field theory: A modern primer*, Westview press (2001).
- [120] H. Kleinert and V. Schulte-Frohlinde, *Critical Properties of ϕ^4 -theories*, World Scientific (2001).
- [121] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press (2008).
- [122] S. Dodelson, *Modern cosmology*, Academic press (2003).
- [123] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press (2005).
- [124] K.D. Lozanov, *Lectures on reheating after inflation*, *arXiv:1907.04402 [astro-ph.CO]* (2019) .
- [125] K.D. Lozanov and M.A. Amin, *Equation of state and duration to radiation domination after inflation*, *Phys. Rev. Lett.* **119** (2017) 061301.
- [126] J. Fan, K.D. Lozanov and Q. Lu, *Spillway preheating*, *Journal of High Energy Physics* **2021** (2021) 69.

- [127] D. Podolsky, G.N. Felder, L. Kofman and M. Peloso, *Equation of state and beginning of thermalization after preheating*, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 023501.
- [128] P. Peter and J.-P. Uzan, *Primordial cosmology*, Oxford University Press (2013).
- [129] C. Kiefer, D. Polarski and A.A. Starobinsky, *Quantum-to-classical transition for fluctuations in the early universe*, *International Journal of Modern Physics D* **07** (1998) 455.
- [130] D. Campo and R. Parentani, *Decoherence and entropy of primordial fluctuations. i. formalism and interpretation*, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 065044.
- [131] F.C. Lombardo and D. López Nacir, *Decoherence during inflation: The generation of classical inhomogeneities*, *Phys. Rev. D* **72** (2005) 063506.
- [132] M. Franco and E. Calzetta, *Decoherence in the cosmic background radiation*, *Classical and Quantum Gravity* **28** (2011) 145024.
- [133] E. Calzetta, *Chaos, decoherence and quantum cosmology*, *Classical and Quantum Gravity* **29** (2012) 143001.
- [134] S. Landau, G. León and D. Sudarsky, *Quantum origin of the primordial fluctuation spectrum and its statistics*, *Phys. Rev. D* **88** (2013) 023526.
- [135] D. Sudarsky, *Spontaneous Collapse Theories and Cosmology*, in *Do wave functions jump?*, V. Allori, A. Bassi, D. Dürr and N. Zanghi, eds., 2021.
- [136] J. Martin and V. Vennin, *Collapse Models and Cosmology*, in *Do wave functions jump?*, V. Allori, A. Bassi, D. Dürr and N. Zanghi, eds., 2021.
- [137] C. Caprini and D.G. Figueroa, *Cosmological backgrounds of gravitational waves*, *Classical and Quantum Gravity* **35** (2018) 163001.
- [138] M. Maggiore, *Gravitational waves. Volume 2: Astrophysics and cosmology*, Oxford University Press (2018).
- [139] M. Giovannini, *Primordial backgrounds of relic gravitons*, *Progress in Particle and Nuclear Physics* **112** (2020) 103774.

- [140] A. Mennella et al., *QUBIC: Exploring the primordial universe with the Q&U bolometric interferometer*, *Universe* **5** (2019) 42.
- [141] Y. Watanabe and E. Komatsu, *Improved calculation of the primordial gravitational wave spectrum in the standard model*, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 123515.
- [142] S. Kuroyanagi, T. Chiba and N. Sugiyama, *Precision calculations of the gravitational wave background spectrum from inflation*, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 103501.
- [143] K. Saikawa and S. Shirai, *Primordial gravitational waves, precisely: the role of thermodynamics in the standard model*, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2018** (2018) 035.
- [144] L.A. Boyle and P.J. Steinhardt, *Probing the early universe with inflationary gravitational waves*, *Phys. Rev. D* **77** (2008) 063504.
- [145] X.-J. Liu, W. Zhao, Y. Zhang and Z.-H. Zhu, *Detecting relic gravitational waves by pulsar timing arrays: Effects of cosmic phase transitions and relativistic free-streaming gases*, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 024031.
- [146] P.M. Sá and A.B. Henriques, *Parametric resonance and cosmological gravitational waves*, *Phys. Rev. D* **77** (2008) 064002.
- [147] P.M. Sá and A.B. Henriques, *Gravitational-wave generation in hybrid quintessential inflationary models*, *Phys. Rev. D* **81** (2010) 124043.
- [148] S. Weinberg, *Damping of tensor modes in cosmology*, *Phys. Rev. D* **69** (2004) 023503.
- [149] A. Mangilli, N. Bartolo, S. Matarrese and A. Riotto, *Impact of cosmic neutrinos on the gravitational-wave background*, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 083517.
- [150] B.A. Stefanek and W.W. Repko, *Analytic description of the damping of gravitational waves by free streaming neutrinos*, *Phys. Rev. D* **88** (2013) 083536.
- [151] A. Hook, G. Marques-Tavares and D. Racco, *Causal gravitational waves as a probe of free streaming particles and the expansion of the universe*, *Journal of High Energy Physics* **2021** (2021) 117.

- [152] S. Hawking, *Perturbations of an expanding universe*, *The Astrophysical Journal* **145** (1966) 544.
- [153] S. Weinberg, *Entropy generation and the survival of protogalaxies in an expanding universe*, *The Astrophysical Journal* **168** (1971) 175.
- [154] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, New York: Wiley (1972).
- [155] A.M. Anile and V. Pirronello, *High-frequency gravitational waves in a dissipative fluid, II* *Nuovo Cimento B (1971-1996)* **48** (1978) 90.
- [156] J. Madore, *The absorption of gravitational radiation by a dissipative fluid*, *Communications in Mathematical Physics* **30** (1973) 335.
- [157] F.P. Esposito, *Absorption of Gravitational Energy by a Viscous Compressible Fluid*, *The Astrophysical Journal* **165** (1971) 165.
- [158] A. Prasanna, *Propagation of gravitational waves through a dispersive medium*, *Physics Letters A* **257** (1999) 120 .
- [159] J.B. Dent, L.M. Krauss, S. Sabharwal and T. Vachaspati, *Damping of primordial gravitational waves from generalized sources*, *Phys. Rev. D* **88** (2013) 084008.
- [160] G. Baym, S.P. Patil and C.J. Pethick, *Damping of gravitational waves by matter*, *Phys. Rev. D* **96** (2017) 084033.
- [161] I. Brevik and S. Nojiri, *Gravitational waves in the presence of viscosity*, *International Journal of Modern Physics D* **28** (2019) 1950133.
- [162] G. Goswami, G.K. Chakravarty, S. Mohanty and A.R. Prasanna, *Constraints on cosmological viscosity and self-interacting dark matter from gravitational wave observations*, *Phys. Rev. D* **95** (2017) 103509.
- [163] B.-Q. Lu, D. Huang, Y.-L. Wu and Y.-F. Zhou, *Damping of gravitational waves in a viscous universe and its implication for dark matter self-interactions*, *arXiv:1803.11397 [astro-ph.HE]* (2018) .

- [164] M. Zarei, N. Bartolo, D. Bertacca, A. Ricciardone and S. Matarrese, *Non-markovian open quantum system approach to the early universe: I. damping of gravitational waves by matter*, *arXiv:2104.04836 [astro-ph.CO]* (2021) .
- [165] J.F. Dufaux, A. Bergman, G. Felder, L. Kofman and J.-P. Uzan, *Theory and numerics of gravitational waves from preheating after inflation*, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 123517.
- [166] J.M. Hyde, *Sensitivity of gravitational waves from preheating to a scalar field's interactions*, *Phys. Rev. D* **92** (2015) 044026.
- [167] D.G. Figueroa, J. García-Bellido and F. Torrentí, *Gravitational wave production from the decay of the standard model higgs field after inflation*, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 103521.
- [168] K.D. Lozanov and M.A. Amin, *Gravitational perturbations from oscillons and transients after inflation*, *Phys. Rev. D* **99** (2019) 123504.
- [169] M. Hindmarsh, S.J. Huber, K. Rummukainen and D.J. Weir, *Gravitational waves from the sound of a first order phase transition*, *Phys. Rev. Lett.* **112** (2014) 041301.
- [170] L. Leitaó and A. Mégevand, *Gravitational waves from a very strong electroweak phase transition*, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2016** (2016) 037.
- [171] M. Hindmarsh, S.J. Huber, K. Rummukainen and D.J. Weir, *Shape of the acoustic gravitational wave power spectrum from a first order phase transition*, *Phys. Rev. D* **96** (2017) 103520.
- [172] M. Hindmarsh, S.J. Huber, K. Rummukainen and D.J. Weir, *Erratum: Shape of the acoustic gravitational wave power spectrum from a first order phase transition [phys. rev. d 96, 103520 (2017)]*, *Phys. Rev. D* **101** (2020) 089902.
- [173] D. Cutting, M. Hindmarsh and D.J. Weir, *Vorticity, kinetic energy, and suppressed gravitational-wave production in strong first-order phase transitions*, *Phys. Rev. Lett.* **125** (2020) 021302.
- [174] K. Tomita, *Non-Linear Theory of Gravitational Instability in the Expanding Universe*, *Progress of Theoretical Physics* **37** (1967) 831.

- [175] S. Matarrese, S. Mollerach and M. Bruni, *Relativistic second-order perturbations of the einstein–de sitter universe*, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 043504.
- [176] H. Noh and J.-c. Hwang, *Second-order perturbations of the Friedmann world model*, *Phys. Rev. D* **69** (2004) 104011.
- [177] C. Carbone and S. Matarrese, *Unified treatment of cosmological perturbations from superhorizon to small scales*, *Phys. Rev. D* **71** (2005) 043508.
- [178] K. Nakamura, *Second-Order Gauge Invariant Cosmological Perturbation Theory: — Einstein Equations in Terms of Gauge Invariant Variables —*, *Progress of Theoretical Physics* **117** (2007) 17.
- [179] K.N. Ananda, C. Clarkson and D. Wands, *Cosmological gravitational wave background from primordial density perturbations*, *Phys. Rev. D* **75** (2007) 123518.
- [180] D. Baumann, P. Steinhardt, K. Takahashi and K. Ichiki, *Gravitational wave spectrum induced by primordial scalar perturbations*, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 084019.
- [181] G. Domènech, *Induced gravitational waves in a general cosmological background*, *International Journal of Modern Physics D* **29** (2020) 2050028.
- [182] V. Domcke, R. Jinno and H. Rubira, *Deformation of the gravitational wave spectrum by density perturbations*, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2020** (2020) 046.
- [183] S. del Campo and L.H. Ford, *Graviton emission by a thermal bath of photons*, *Phys. Rev. D* **38** (1988) 3657.
- [184] J. Ghiglieri and M. Laine, *Gravitational wave background from standard model physics: qualitative features*, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2015** (2015) 022.
- [185] J. Ghiglieri, G. Jackson, M. Laine and Y. Zhu, *Gravitational wave background from standard model physics: complete leading order*, *Journal of High Energy Physics* **2020** (2020) 92.
- [186] E. McDonough, *The cosmological heavy ion collider: Fast thermalization after cosmic inflation*, *Physics Letters B* **809** (2020) 135755.

- [187] C.R. Contaldi, *Anisotropies of gravitational wave backgrounds: A line of sight approach*, *Physics Letters B* **771** (2017) 9.
- [188] N. Bartolo, D. Bertacca, S. Matarrese, M. Peloso, A. Ricciardone, A. Riotto et al., *Characterizing the cosmological gravitational wave background: Anisotropies and non-gaussianity*, *Phys. Rev. D* **102** (2020) 023527.
- [189] L. Valbusa Dall’Armi, A. Ricciardone, N. Bartolo, D. Bertacca and S. Matarrese, *Imprint of relativistic particles on the anisotropies of the stochastic gravitational-wave background*, *Phys. Rev. D* **103** (2021) 023522.
- [190] D.J. Marsh, *Axion cosmology*, *Physics Reports* **643** (2016) 1 .
- [191] D. Baumann, D. Green and B. Wallisch, *New target for cosmic axion searches*, *Phys. Rev. Lett.* **117** (2016) 171301.
- [192] L. Hui, J.P. Ostriker, S. Tremaine and E. Witten, *Ultralight scalars as cosmological dark matter*, *Phys. Rev. D* **95** (2017) 043541.
- [193] P.B. Dev, F. Ferrer, Y. Zhang and Y. Zhang, *Gravitational waves from first-order phase transition in a simple axion-like particle model*, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2019** (2019) 006.
- [194] D. Ghosh and D. Sachdeva, *Constraints on axion-lepton coupling from big bang nucleosynthesis*, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2020** (2020) 060.
- [195] S. Jeon and U. Heinz, *Introduction to hydrodynamics*, *International Journal of Modern Physics E* **24** (2015) 1530010.
- [196] E. Calzetta and B.L. Hu, *Quantum fluctuations, decoherence of the mean field, and structure formation in the early universe*, *Phys. Rev. D* **52** (1995) 6770.
- [197] E. Calzetta and B.L. Hu, *Stochastic behavior of effective field theories across the threshold*, *Phys. Rev. D* **55** (1997) 3536.
- [198] A. Berera, M. Gleiser and R.O. Ramos, *Strong dissipative behavior in quantum field theory*, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 123508.

- [199] S. Gavin, *Transport coefficients in ultra-relativistic heavy-ion collisions*, *Nuclear Physics A* **435** (1985) 826 .
- [200] M.H. Thoma, *Viscosity coefficient of the quark-gluon plasma in the weak coupling limit*, *Physics Letters B* **269** (1991) 144 .
- [201] A. Diez-Tejedor and D.J. Marsh, *Cosmological production of ultralight dark matter axions*, *arXiv:1702.02116 [hep-ph]* (2017) .
- [202] C. Abel et al., *Search for axionlike dark matter through nuclear spin precession in electric and magnetic fields*, *Phys. Rev. X* **7** (2017) 041034.
- [203] Planck Collaboration, *Planck 2018 results - VI. Cosmological parameters*, *A&A* **641** (2020) A6.
- [204] L.H. Ford and L. Parker, *Quantized gravitational wave perturbations in robertson-walker universes*, *Phys. Rev. D* **16** (1977) 1601.
- [205] G. Pérez-Nadal, A. Roura and E. Verdaguer, *Stress tensor fluctuations in de Sitter spacetime*, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2010** (2010) 036.
- [206] G. Pérez-Nadal, *Gravitational effects of quantum fields in de Sitter spacetime*, Ph.D. thesis, Universitat de Barcelona, 2010.
- [207] A. Dhanuka and K. Lochan, *Stress energy correlator in de Sitter spacetime: Its conformal masking or growth in connected Friedmann universes*, *Phys. Rev. D* **102** (2020) 085009.
- [208] B.D. Fields, K.A. Olive, T.-H. Yeh and C. Young, *Big-bang nucleosynthesis after planck*, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2020** (2020) 010.
- [209] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company (1995).
- [210] B.L. Hu and E. Verdaguer, *Stochastic gravity: Theory and applications*, *Living Reviews in Relativity* **11** (2008) 3.
- [211] N.D. Birrell and P. Davies, *Quantum fields in curved space*, Cambridge university press (1984).

[212] J.L. Synge, *Relativity: the general theory*, North-Holland Publishing Company (1960).