

Order-of-magnitude Estimate for the Bending Angle of Light by Modified QED Vacua

Jin Young KIM* · Taekoon LEE

Department of Physics, Gunsan National University, Gunsan 573-701, Korea

(Received 18 September 2014 : revised 7 October 2014 : accepted 7 October 2014)

We consider the possibility of testing light bending in a ground laboratory by using a non-linear quantum effect. We consider a high-power laser or an X-ray free-electron laser (XFEL) to be the source of light and a charged coupled device (CCD) to be the detector. As the source of the lensing, we consider the electric charge for cylindrical and spherical conductors, the magnetic field due to a superconducting solenoid magnet, and the radiation from cylindrical and spherical black bodies. We estimate the orders of magnitude of the bending angles. The bending angles are on the order of 10^{-18} rad for electric charges, 10^{-21} rad for the magnetic field of a solenoid, and 10^{-29} rad for black-body radiation. These value are too small compared to the maximum angle available today (10^{-7} rad).

PACS numbers: 12.20.Fv, 41.20.Jb, 42.15.-i

Keywords: Modified QED vacuum, Light bending, Geometric optics

변형된 QED 진공에 의한 빛의 휘어짐 각에 대한 어림계산

김진영* · 이태균

군산대학교 물리학과, 군산 573-701

(2014년 9월 18일 받음, 2014년 10월 7일 수정본 받음, 2014년 10월 7일 게재 확정)

비선형 양자효과에 의한 빛의 굽어짐을 지상의 실험실에서 측정 가능여부를 연구하였다. 광원으로 초강력 광학레이저 또는 자유전자 X-레이 레이저를 고려하고 검출장치로 CCD소자를 고려하였다. 원통대칭과 구대칭인 도체에 의한 전하, 자기쌍극자로 근사한 초전도 솔레노이드 전자석, 및 원통대칭과 구대칭인 흑체 복사에 의한 렌징에 대해 굽어지는 각도의 크기를 어림 계산하였다. 굽어지는 각도의 크기는 도체 전하에 의한 경우 10^{-18} rad, 초전도 솔레노이드 전자석에 의한 경우 10^{-21} rad, 흑체 복사의 경우 10^{-29} rad로 계산되었다. 이 값들은 현재 지상의 실험실에서 레이저와 CCD를 사용하여 측정 가능한 각도의 최대 한계인 10^{-7} rad보다 훨씬 작다.

PACS numbers: 12.20.Fv, 41.20.Jb, 42.15.-i

Keywords: 변형된 양자전기역학 진공, 빛의 굽어짐, 기하광학

*E-mail: jykim@kunsan.ac.kr



I. 서론

강한 전자기장이 있는 환경에서 빛의 속력은 양자전기역학적 효과에 의해 고전적인 진공에서의 빛의 속력 c 와 다른 값을 가진다. 이는 광자와 광자 사이의 산란에 의해 일어나는 것으로 1936년 오일러와 하이젠버그에 의해 처음 계산되었고 [1], 이후 양자전기역학의 틀 안에서 이론적인 연구가 꾸준히 계속되어 오고 있다 [2–6]. 진공편극 (vacuum polarization)에 의한 비선형양자효과에 대한 연구는 아주 강한 전자기장, 극한의 높은 온도 등에서 두드러지게 나타나므로 이에 대한 검증은 주로 천문학적 관측을 이용한 방법이 고려되고 있다 [7–16]. 비선형 양자효과가 중요해지는 임계 전기장, 임계자기장, 임계온도는 현 수준에서 실험실에서 도달 가능한 값보다 매우 크기 때문에 이를 직접 측정하는 것은 매우 도전적인 과제로 여겨진다. 그러나 최근 초강력 광학적 레이저 또는 자유전자 X-레이 레이저의 발전으로, 이 이론에 기초하여 나타나는 특징적 현상들을 지상의 실험실에서 직접적으로 검증하고자 하는 시도가 되고 있다 [17–19].

선행연구에서 우리는 전기장, 자기장, 흑체복사 등에 의해 변형된 양자전기역학적 진공에서 빛이 굽어지는 각도들을 기하광학에 기초하여 이론적으로 계산한 바 있다 [20–24]. 변형된 진공 배경에서 빛의 굽어짐을 실험실에서 직접 측정하는 경우, 빛의 진공편극효과는 광원의 파장이 짧을수록 크기 때문에 X-레이 파장 영역의 빛을 사용하는 것이 유리할 것이다. 가까운 미래에 완공될 포항가속기연구소의 X-레이 자유전자 레이저 (X-ray free electron laser, X-FEL)는 공간적인 결맞음성이 좋고 직진성이 강하고 펄스당 많은 광자수를 가진 고주파수의 빔을 제공해 줄 것으로 기대된다. 굽어지는 각도는 변형이 일어나지 않은 진공에서 빛이 도달한 위치와 전기장, 자기장, 온도장 등에 의해 변형이 일어난 진공에서 빛이 도달한 위치와의 차이를 전하결합소자 (charged-coupled device, CCD)로 측정하여 이를 각도로 환산하여 비교함으로써 계산해 낼 수 있을 것이다.

본 논문은 가까운 미래에 도달할 수 있는 실험 장치들에서 비선형 양자효과를 빛의 굽어짐을 통해 검출하는 실험방법을 제안하고 측정 가능한 물리량들의 한계를 정량적으로 산정해 보고자 한다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. II절에서는 굴절률에 기울기가 있을 때 굽어지는 각도를 구하는 방법을 간략히 소개하며 원통대칭과 구대칭 전하에 의한 굽어지는 경우를 고려하였다. III절에서는 초전도 솔레노이드 전자석의 자기장에 의해 굽어지는 경우를 자기쌍극자로 근사하여 살펴보았다. IV절에서는 원통대칭과 구대칭인 흑체 복사에 의해 굽어지는 경우를 고려하였다. 마지막으로 V절에서는 실험방법 및 측정한계에 대해 논의하였다.

II. 전기장

기하광학에서 매질의 굴절률이 연속적으로 변하는 경우 빛의 경로는 굽어질 수 있다. 만일 빛이 지나가는 경로에서 배경 전자기장의 양자 전기역학적인 보정에 의해 굴절률이 연속적으로 변하는 경우 빛의 경로는 휘어진다. 전기역학적 진공이 전기장에 의해 변형된 경우 빛의 속력은 선도 차수 (leading order)에서 다음과 같이 주어진다 [8].

$$\frac{v}{c} = 1 - \frac{a\alpha^2\hbar^3\epsilon_0}{45m^4c^5}(\mathbf{u} \times \mathbf{E})^2 \quad (1)$$

여기서 a 는 빛의 편광에 의존하는 값으로 빛의 진행벡터 $\mathbf{u}$ 와 전기장 $\mathbf{E}$ 가 만드는 평면에 수직인 편광모드 (polarization mode)에 대해서는 $a_{\perp} = 14$, 평면 내에 있는 편광모드에 대해서는 $a_{\parallel} = 8$ 의 값을 취한다. 굴절률은 식 (1)의 역수를 취하여 다음과 같이 구해진다.

$$n = 1 + \frac{a\alpha^2\hbar^3\epsilon_0}{45m^4c^5}(\mathbf{u} \times \mathbf{E})^2 \quad (2)$$

굴절률에 대한 보정이 아주 작을 때 빛의 궤적은 근사적으로 다음과 같이 쓸 수 있다 [20,21].

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = (\mathbf{u}_0 \times \nabla n) \times \mathbf{u}_0 \quad (3)$$

여기서 $\mathbf{u}_0$ 는 입사하는 광자의 초기방향을 나타내는 단위벡터이다. 광자가 $x = -\infty$ 에서 $+x$ 방향으로 진행하는 경우, 궤적방정식의 각 성분은 선도 차수에서 다음과 같다.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial n}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\partial n}{\partial z} \quad (4)$$

굴절률이 좌표의 함수로 주어지면 위의 식에서 빛의 궤적과 굽어지는 각도를 구할 수 있다.

실험실에서 빛이 굽어지게 할 수 있는 전하의 분포는 구대칭인 경우와 원통대칭형인 경우를 고려할 수 있다. 굴절률이 연속적으로 변하는 경우 빛이 굽어지는 각도를 계산하는 과정을 원통대칭인 경우를 예를 들어 설명한다 (Fig. 1 참조). 선전하 밀도가 λ 인 원통대칭의 전하 분포가 z 축에 놓여있고 빛이 xy 평면 ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$)에서 진행하는 경우를 고려하자. 궤적을 구하는 미분방정식의 구체적인 형태는 선도차수에서 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a\alpha^2\hbar^3\lambda^2}{90\pi^2\epsilon_0m^4c^5}\left(\frac{y}{r^4} - \frac{2y^3}{r^6}\right) \quad (5)$$

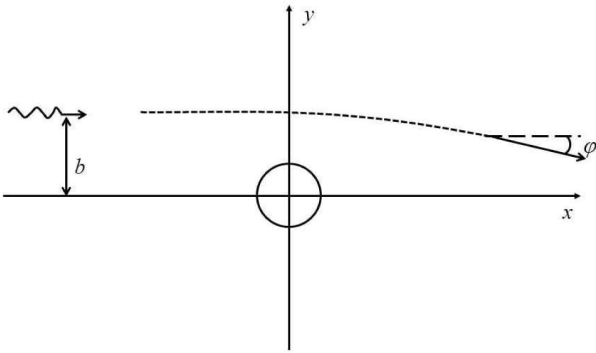


Fig. 1. Schematic of light bending by a cylindrical charge along the z -axis or a spherical charge at the origin.

$x = -\infty$ 에서 입사하는 광자의 충돌매개변수 (impact parameter)를 b 로 잡으면 궤적방정식의 초기조건은 다음과 같이 쓸 수 있고

$$y(-\infty) = b : y'(-\infty) = 0, \quad (6)$$

빛이 굽어지는 각도는 위의 식(5)를 적분하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y'(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_2 dx = \tan \varphi_e \simeq \varphi_e \quad (7)$$

식 (5)에 $y = b$ 를 대입하여 선도 차수에서의 굽어지는 각도를 계산한 결과는 다음과 같다.

$$\varphi_{e,cyl} = -\frac{a\alpha^2\lambda_e^4}{3600\pi\epsilon_0\hbar c} \frac{\lambda^2}{b^2} \quad (8)$$

여기서 $\lambda_e = \frac{h}{mc}$ 는 전자의 콤프턴파장 (Compton wavelength)이다.

전체 전하량이 Q 인 구대칭의 전하분포일 때의 굽어지는 각도는 다음과 같다 [20].

$$\varphi_{e,sph} = -\frac{a\alpha^2\lambda_e^4}{640\pi\epsilon_0\hbar c} \frac{Q^2}{b^4} \quad (9)$$

식 (8)과 (9)에서 굽어지는 각도의 충돌매개변수 의존성을 보면 $\varphi_{e,cyl} \propto 1/b^2$, $\varphi_{e,sph} \propto 1/b^4$ 로 충돌매개변수가 아주 큰 경우에는 원통대칭의 굽어지는 각도가 클 것으로 예상된다.

빛을 굽어지게 하는 렌즈로 충분히 긴 이상적인 원통형의 금속도선에 잉여전하(전자)로 하전시키는 경우를 고려하자. 선전하밀도는 도선의 반지름에 비례하여 증가하나 충돌매개변수 b 또한 같은 비율로 증가할 것이다. 실험실에서 도달 가능한 최대의 선전하밀도의 크기를 어림 계산해보자. 도체를 고려하면 잉여전하는 표면에 존재하므로 선전하밀도는 도체가 허용하는 표면전하

밀도의 최댓값에 의하여 결정될 것이다. 표면전하밀도의 최댓값의 어림크기는 표면에서의 전자들 사이의 평균 반발에너지가 금속표면에서의 전자의 일함수와 같은 크기를 가질 조건으로부터 계산할 수 있다. 표면에서의 전자들 사이의 평균거리를 d 라 하고 일함수를 W 라 하면 이 조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \sim W \quad (10)$$

구리, 알루미늄 등 대부분의 금속들에 대해 일함수의 크기는 수 전자볼트 (eV)이므로 $W \sim 1$ eV를 대입하여 구한 표면전자들 사이의 평균거리는 $d \sim 7.2 \times 10^{-10}$ m이다. 이에 대응하는 표면전하밀도는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sigma \sim \frac{e}{d^2} \sim 0.31 \text{ C/m}^2 \quad (11)$$

고체 이론에 근거한 좀 더 정확한 계산은 다음과 같이 어림계산 할 수 있을 것이다 [25,26]. 실제 금속의 경우 표면에서 잉여전하가 하전되는 두께는 수 페르미길이 (Fermi length) $\lambda_F = (3\pi^2 n_e)^{-1/3}$ (n_e 는 도체의 전자밀도)이다. 도체의 표면 근처에서의 전기장은 $E = \sigma/\epsilon_0$ 이므로 전자가 표면으로부터 이탈하는 조건은 다음과 같이 쓸 수 있고

$$eE\lambda_F = e \frac{\sigma}{\epsilon_0} (3\pi^2 n_e)^{-1/3} \sim W, \quad (12)$$

이로부터 구한 표면전하밀도는 다음과 같다.

$$\sigma \sim \frac{\epsilon_0 W}{e} (3\pi^2 n_e)^{1/3} \quad (13)$$

구체적인 값을 구리금속에 대해 어림해 보자. 구리도선 내에서 구리원자가 평균적으로 한 개의 잉여전자를 가질 수 있다고 가정하면 $n_e \sim 2.5 \times 10^{30}/\text{m}^3$ 이고, 구리금속의 일함수 $W = 4.7$ eV를 대입하여 구한 표면전하밀도는 $\sigma = 1.05 \text{ C/m}^2$ 로 식 (11)에서 구한 값의 약 3.4배이다.

반지름 r_0 인 도선을 하전시키고 도선의 표면을 스치듯이 지나가는 광선의 경우($b \sim r_0$) 선전하밀도 $\lambda = 2\pi r_0 \sigma$ 와 충돌매개변수는 모두 반지름에 비례하여 같이 증가하므로 원통형 전하분포의 경우 굽어지는 각의 어림크기는 다음과 같이 쓸 수 있고

$$\varphi_{e,cyl} \sim -\frac{\pi a\alpha^2\lambda_e^4}{900\epsilon_0\hbar c} \sigma^2 \left(\frac{r_0}{b}\right)^2, \quad (14)$$

편광모드에 대한 평균값을 취하여 $a_{av} \sim 11$, $\sigma \sim 1 \text{ C/m}^2$, $r_0/b \sim 1$ 에 대해 이 값의 크기는 대략 $\varphi_{e,cyl} \sim 1.6 \times 10^{-19}$ rad이다.

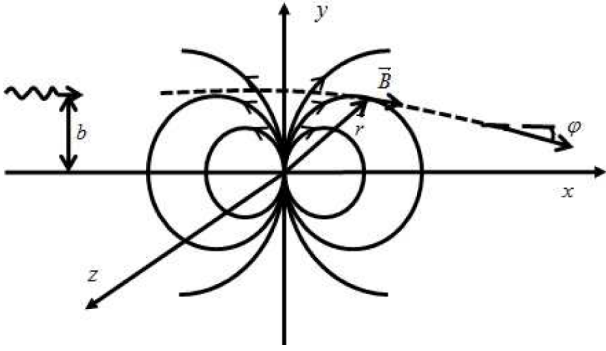


Fig. 2. Schematic of light bending by a magnetic dipole along the y -axis.

위의 논의를 반지름 r_0 인 구형도체에 적용하여 $Q = 4\pi r_0^2 \sigma$ 를 식(9)에 대입하면

$$\varphi_{e,sph} = -\frac{\pi a \alpha^2 \lambda_e^4}{40 \epsilon_0 \hbar c} \sigma^2 \frac{r_0^4}{b^4} \quad (15)$$

을 얻게 되고, 같은 조건에 대해 $\varphi_{e,sph} \sim 3.7 \times 10^{-18}$ rad이다.

III. 자기장

자기쌍극자에 의해 변형된 QED 진공에 의해 빛이 굽어지는 경우를 고려하자. 전하에 의해 변형되는 진공에서 빛의 굽어지는 방향은 항상 전하의 중심방향으로 일어난다. 자기쌍극자에 의해 변형된 진공에서 빛이 굽어지는 경우, 굽어지는 방향은 입사하는 광선과 자기쌍극자의 상대적인 방향에 의존한다. 자기쌍극자 모멘트의 크기가 M 인 이상적인 쌍극자가 원점에 놓여있고 입사광이 쌍극자에 수직으로 쌍극자의 남극 또는 북극을 지나는 경우를 고려하자 (Fig. 2 참조). 쌍극자의 방향을 $+y$ 으로 택하고 빛이 $x = -\infty$ 에서 $+x$ 방향으로 진행하는 경우를 고려하면 대칭성에 의해 z 축 방향으로의 굽어짐은 없고 y 축 방향의 굽어짐은 다음과 같다 [21].

$$\varphi_{m,pol} = -\frac{41\pi}{384} \frac{a \alpha^2 \epsilon_0 c}{\hbar} \left(\frac{\mu_0 M}{4\pi} \right)^2 \frac{\lambda_e^4}{b^6} \quad (16)$$

입사광이 이 방향으로 진행할 때가 굴절률의 기울기는 최대이고 따라서 굽어지는 각도 또한 최대가 된다.

원점에 위치하고 자기모멘트의 방향이 $+z$ 축을 향하는 가상적인 점 쌍극자에 의한 자기장 $\vec{B}$ 의 성분은 구면좌표계에서 다음과 같다.

$$B_r = \left(\frac{\mu_0 M}{4\pi} \right) \frac{2 \cos \theta}{r^3}; \quad B_\theta = \left(\frac{\mu_0 M}{4\pi} \right) \frac{\sin \theta}{r^3}; \quad B_\phi = 0 \quad (17)$$

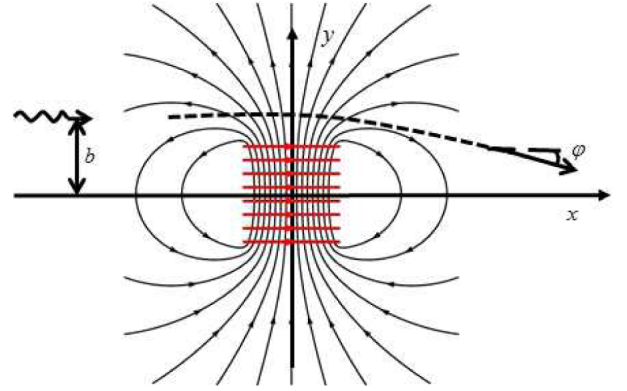


Fig. 3. (Color online) Schematic of light bending by a solenoid of length $2r_0$.

이상적인 점 쌍극자의 중심으로부터 z 축으로 거리 r_0 인 곳에서의 자기장은 다음과 같다.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{2\pi r_0^3} \hat{z} \quad (18)$$

실험실에서 자기쌍극자와 유사한 배치를 만드는 쉬운 방법으로 솔레노이드형 초전도 전자석을 고려할 수 있다. 길이가 $2r_0$ 인 초전도 전자석을 솔레노이드로 근사한다면 (Fig. 3 참조) 솔레노이드 바로 바깥으로 스치듯이 지나가는 빛이 자기장에 의해 굽어지는 각 (16)은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\varphi_{m,pol} = -\frac{41\pi}{1536} \frac{a \alpha^2 \epsilon_0 c}{\hbar} B_p^2 \lambda_e^4 \left(\frac{r_0}{b} \right)^6 \quad (19)$$

여기서 $B_p = \mu_0 M / 2\pi r_0^3$ 는 길이 $2r_0$ 인 솔레노이드의 극($z = r_0$)에서의 자기장의 세기이다. 현재 실험실에서 도달 가능한 최대 자기장의 세기는 대략 $B_p \sim 10T$ 이므로 $a_{av} \sim 11$, $r_0/b \sim 1$ 에 대해 이 값의 크기는 대략 $\varphi_{m,pol} \sim 2.8 \times 10^{-21}$ rad이다.

IV. 흑체복사

전기장이나 자기장이 아닌 일반적인 비전하적 요인에 의해 진공이 변형되는 경우 빛의 속력변화 또한 양자전기역학적 계산으로 구할 수 있다 [6]. 여기서는 흑체복사에 의한 빛의 굽어짐을 고려하자. 일반적으로 양자전기역학적 보정에 의한 빛의 속력변화는 에너지밀도에 의존한다. 구형 또는 원통형의 흑체가 복사하는 경우 흑체에서 멀어질수록 복사에 의한 에너지밀도가 희박해지므로 굴절률의 기울기가 발생할 수 있고 빛의 경로는 굽어질 수 있다. 연속적으로 변하는 전기장 또는 자기장에 의

해 빛의 경로가 굽어지는 현상을 양자전기역학적 관점에서 보면 전파하는 광자 (propagating photon)가 전기장 또는 자기장에 의한 가상의 광자 (virtual photon)와 상호작용한 결과로 이해할 수 있다. 흑체복사에 의해 진공의 변형이 일어나는 경우는 전파하는 광자가 흑체복사에 의한 실제 광자 (real photon)와 상호작용한 결과로 이해할 수 있을 것이다.

온도가 T_0 인 이상적인 구대칭 또는 원통대칭인 흑체에 의한 복사 배경에서의 빛이 굽어지는 각도는 각각 다음과 같다 [24].

$$\varphi_{b, sph} = -\frac{11\pi^3\alpha^2}{900} \frac{T_0^4}{T_c^4} \frac{r_0^2}{b^2}, \quad (20)$$

$$\varphi_{b, cyl} = -\frac{44\pi^2\alpha^2}{2025} \frac{T_0^4}{T_c^4} \frac{r_0}{b} \quad (21)$$

여기서 $T_c = mc^2/k_B$ 는 복사에너지가 전자의 질량에너지와 같아지는 양자전기역학의 임계온도로 $T_c = 5.94 \times 10^9$ K이고 r_0 는 구 또는 원통의 반지름이고 $a = a_{av} = 11$ 로 편광에 대해 평균을 취해 얻은 결과이다. 흑체복사에 의해 굽어지는 각도의 충돌매개변수 의존성을 보면 $\varphi_{b, sph} \propto 1/b^2$, $\varphi_{b, cyl} \propto 1/b^2$ 이다. 충돌매개변수가 큰 경우 원통대칭일 때의 굽어지는 각도가 클 것이다.

지상의 실험실에서 만들 수 있는 흑체의 온도는 대략 10^3 K로 $T_0/T_c \sim 10^{-6}$ 이고 식 (20)과 (21)은 이 값의 네 제곱에 비례하므로 온도에 의한 굽어짐 각은 전기장이나 자기장의 경우보다 훨씬 적을 것으로 예상할 수 있다. $T_0/T_c \sim 10^{-6}$ 와 $r_0/b \sim 1$ 에 대해 $\varphi_{b, sph} \sim 2.0 \times 10^{-29}$ rad 및 $\varphi_{b, cyl} \sim 1.1 \times 10^{-29}$ rad를 얻게 되는데 이 값은 전하나 자기장에 의한 굽어지는 값보다 훨씬 작다.

V. 결론 및 제언

실험을 위한 광원으로는 직진성인 좋은 초강력 광학 레이저 또는 자유전자 X-레이 레이저를 고려할 수 있을 것이다. 렌즈역할을 하는 전기장, 자기장, 흑체복사 등 변형된 QED진공을 제공하는 근원 주변은 높은 진공도가 유지되어 기체들에 의한 방해가 일어나지 않아야 한다. 빛의 경로변화를 측정하는데 쓰이는 가장 흔한 방법은 패브리-페로 (Fabry-Perot) 간섭계를 생각할 수 있을 것이다. 이는 경로차가 사용한 광원의 반파장 이상일 때 가능하다. 본 실험에서 계산된 결과는 굽어지는 각도이지 경로가 아니므로 거울을 이용하여 반사시켜 원래의 빛과 간섭을 일으키는 것을 생각할 수 있을 것이다. 그

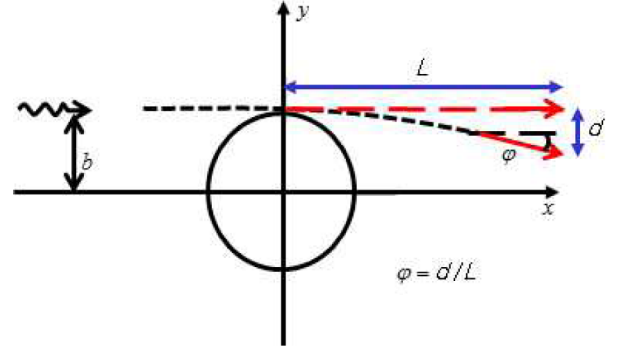


Fig. 4. (Color online) Schematic of measuring the bending angle.

러나 각도가 너무 작기 때문에 간섭을 일으키는 경로차를 만들기는 거의 불가능할 것으로 예상된다. 따라서 간섭에 의한 방법보다는 굽어지는 각도를 CCD로 직접 측정하는 것을 제안한다. 렌즈로부터 일정거리 L 후방에 CCD 스크린을 설치하고, 렌즈를 끈 상태에서 직진하는 광원이 도달한 CCD 위치로부터 렌즈를 켜 다음 도달한 위치 사이의 거리를 d 라 하면 굽어지는 각은 근사적으로 d/L 라 할 수 있다 (Fig. 4 참조). CCD의 해상도는 대략 마이크로미터 크기이므로 $d \sim 1 \mu\text{m}$, 스크린과 렌즈 사이의 거리를 $L \sim 10$ m로 잡으면 측정 가능한 각도는 대략 10^{-7} rad라 할 수 있다. 가장 많이 굽어지는 각도는 스치듯이 지나가는 점전하에 의한 것으로 10^{-18} rad으로 이 값은 오늘날 도달 가능한 해상도의 한계를 훨씬 초과한다.

감사의 글

실험장치, 측정방법, 물성, 자기장 등에 대해 도움을 주신 구태영, 노도영, 이병찬, 서재명, 윤성현 교수께 감사를 드립니다. 이 논문은 2012년도 정부 (교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업 지원을 받아 수행된 것임 (12A12840581).

REFERENCES

- [1] W. Heisenberg and H. Euler, Z. Phys. **98**, 714 (1936).
- [2] J. S. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [3] Z. Bialynicka-Birula and I. Bialynicki-Birula, Phys. Rev. D **2**, 2341 (1970).
- [4] H. Gies and W. Dittrich, Phys. Lett. B **431**, 420 (1998).

- [5] W. Dittrich and H. Gies, Phys. Rev. D **58**, 025004 (1998).
- [6] H. Gies, Phys. Rev. D **60**, 105033 (1999).
- [7] N. J. Shaviv, J. S. Heyl and Y. Lithwick, Mon. Not. R. Astron. Soc. **306**, 333 (1999).
- [8] V. I. Denisov, I. P. Denisova and S. I. Svertilov, Dokl. Akad. Nauk. Ser. Fiz. **380**, 435 (2001).
- [9] J. S. Heyl and N. J. Shaviv, Phys. Rev. D **66**, 023002 (2002).
- [10] V. I. Denisov and S. I. Svertilov, Astron. Astrophys. **399**, L39 (2003).
- [11] J. S. Heyl, N. J. Shaviv and D. Lloyd, Mon. Not. R. Astron. Soc. **342**, 134 (2003).
- [12] V. I. Denisov, I. P. Denisova and S. I. Svertilov, Theor. Math. Phys. **140**, 1001 (2004).
- [13] V. I. Denisov and S. I. Svertilov, Phys. Rev. D **71**, 063002 (2005).
- [14] A. Dupays, C. Robilliard, C. Rizzo and G. F. Big-nami, Phys. Rev. Lett. **94**, 161101 (2005).
- [15] A. Y. Potekhin, V. Urpin and G. Chabrier, Astron. Astrophys. **443**, 1025 (2005).
- [16] D. Mazur and J. S. Heyl, Mon. Not. R. Astron. Soc. **412**, 1381 (2011).
- [17] T. Heinzl, B. Liesfeld, K. -U. Amthor, H. Schworer and R. Sauerbrey *et al.*, Opt. Commun. **267**, 318 (2006).
- [18] A. Di Piazza, K. Z. Hatsagortsyan and C. H. Keitel, Phys. Rev. Lett. **97**, 083603 (2006).
- [19] B. King, A. Di Piazza and C. H. Keitel, Nat. Photonics **4**, 92 (2010).
- [20] J. Y. Kim and T. Lee, Mod. Phys. Lett. A **26**, 1481 (2011).
- [21] J. Y. Kim and T. Lee, J. Cosmol. Astropart. Phys. **11**, 017 (2011).
- [22] J. Y. Kim and T. Lee, New Phys.: Sae Mulli **62**, 1176 (2012).
- [23] J. Y. Kim and T. Lee, New Phys.: Sae Mulli **63**, 1202 (2013).
- [24] J. Y. Kim and T. Lee, J. Cosmol. Astropart. Phys. **01**, 002 (2014).
- [25] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics* (John Wiley & Sons, 1976).
- [26] J. Callaway, *Quantum Theory of the Solid State* (Academic Press, 1974).