

Wojciech Słomczyński, Anna Szymusiak (Kraków)

Zespolone proste równokątne i hipoteza Zaunera

Prosta zespolona w d -wymiarowej przestrzeni zespolonej to jednowymiarowa afiniczna podprzestrzeń zespolona. W szczególności dla dwóch takich prostych $[w]$ oraz $[z]$ przechodzących przez 0 (tylko takie będziemy dalej rozważać) generowanych odpowiednio przez $w, z \in \mathbb{C}^d$, przy czym $\|w\| = \|z\| = 1$, kąt (hermitowski, zob. [33]) między nimi definiujemy jako $\arccos |(w, z)|$. Powstaje więc pytanie: jak wiele można umieścić w $\mathbb{C}^d$ prostych zespolonych tak, aby każde dwie z nich przecinały się pod tym samym kątem? Jest to naturalne uogólnienie problemu istnienia rzeczywistych prostych równokątnych, o którym pisał niedawno na tych łamach Andrzej Grzesik (zob. [20]). Mimo pozornego podobieństwa, przejście do świata zespolonego sprawia jednak, że zagadnienia te różnią się w sposób jakościowy, a przypadek rzeczywisty jest pod pewnymi względami łatwiejszy, pod innymi zaś trudniejszy od zespolonego. Wynika to z samej definicji kąta (lub prostej), który w pierwszym przypadku dany jest z dokładnością do mnożenia wektorów przez ± 1 , w drugim zaś przez liczbę zespoloną o module 1, czyli – używając terminologii fizycznej – przez fazę. Dlatego też przypadek rzeczywisty można w znacznej mierze badać metodami matematyki dyskretnej, co nie wydaje się możliwe w przypadku zespolonym, gdzie metody algebraiczne i geometryczne zdają się odgrywać większą rolę. Niewątpliwie problem znalezienia maksymalnej liczebności zbioru zespolonych prostych równokątnych stanowi jedno z ważniejszych i bardziej fascynujących zagadnień zarówno geometrii przestrzeni zespolonych, jak i teorii informacji kwantowej, od kilkunastu lat zajmując poczesne miejsce na listach słynnych problemów otwartych w tych dziedzinach (zob. [24, 40]).

Rozpatrywane zagadnienie ma też dwie elementarne interpretacje geometryczne. Zauważmy, że zbiór prostych zespolonych w $\mathbb{C}^d$ można utożsamić z elementami *zespólonej przestrzeni rzutowej* $\mathbb{CP}^{d-1}$, której wymiar rzeczywisty wynosi $2d - 2$. Jeżeli w tej przestrzeni rozważymy jedyną (z dokładnością do stałej) unitarnie niezmienniczą *metrykę Fubinięgo–Study’ego* d_{FS} zadaną przez kąt, czyli wzorem $d_{FS}([w], [z]) := \arccos |(w, z)|$ dla $w, z \in S(\mathbb{C}^d)$, przy czym $S(\mathbb{C}^d)$ oznacza tu jednostkową sferę zespoloną w $\mathbb{C}^d$, to zbiorowi prostych równokątnych będzie odpowiadał zbiór równoodległych od siebie punktów w $(\mathbb{CP}^{d-1}, d_{FS})$. Dla dowolnej przestrzeni metrycznej maksymalną liczbę takich punktów nazywa się czasem *wymiarem równobocznym* (*equilateral dimension*) – pytanie o maksymalną liczbę prostych równokątnych jest więc zarazem pytaniem o wymiar równoboczny zespolonych przestrzeni rzutowych. Takie sformułowanie sugeruje od razu, że problem może być trudny, gdyż dla niewielu rozmaitości wymiary równoboczne udało się dotychczas znaleźć (zob. [28])¹.

Po utożsamieniu prostej zespolonej $[z] \in \mathbb{CP}^{d-1}$, przy czym $z \in S(\mathbb{C}^d)$, z rzutem ortogonalnym P_z na tę prostą, otrzymujemy z kolei naturalne zanurzenie zespolonej przestrzeni rzutowej w przestrzeń $\mathcal{L}_s(\mathbb{C}^d)$ odwzorowań hermitowskich (samosprężonych) w $\mathbb{C}^d$. Po złożeniu go z przesunięciem $\mathcal{L}_s(\mathbb{C}^d) \ni P \mapsto P - I/d \in \mathcal{L}_s(\mathbb{C}^d)$, przy czym I oznacza odwzorowanie identycznościowe na $\mathbb{C}^d$, uzyskujemy zanurzenie $\mathbb{CP}^{d-1}$ w przestrzeń $\mathcal{L}_s^0(\mathbb{C}^d)$ hermitowskich odwzorowań o śladzie 0 (gdyż $\text{tr}(P_z - I/d) = 1 - d/d = 0$). Zauważmy tu dwa proste fakty. Po pierwsze, $\mathcal{L}_s^0(\mathbb{C}^d)$ jest *rzeczywistą* przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym (*Hilberta–Schmidta*) danym wzorem $(P, Q)_{HS} := \text{tr}(PQ)$ dla $P, Q \in \mathcal{L}_s^0(\mathbb{C}^d)$, a jej wymiar rzeczywisty, co łatwo sprawdzić, wynosi $d^2 - 1$. Po drugie zaś, nasze zanurzenie odwzorowuje izometrycznie przestrzeń rzutową $(\mathbb{CP}^{d-1}, d_{FS})$ w sferę w $\mathcal{L}_s^0(\mathbb{C}^d)$ o promieniu $\sqrt{1 - 1/d}$ (gdyż $\text{tr}(P_w P_z) = |(w, z)|^2$, a więc $\text{tr}(P_w - I/d)(P_z - I/d) = |(w, z)|^2 - 1/d$ dla $w, z \in S(\mathbb{C}^d)$), a szukany zbiór punktów równoodległych przekształca w sympleks foremny wpisany w tę sferę.

Wynikają stąd dwie podstawowe własności zbiorów prostych równokątnych. Po pierwsze, ich maksymalna liczba wynosi d^2 , bo nie jest możliwe wpisanie sympleksu o większej liczbie wierzchołków w sferę w przestrzeni $(d^2 - 1)$ -wymiarowej. Po drugie, co wynika wprost z geometrii sfery rzeczywistej, jeżeli uda się skonstruować d^2 prostych równokątnych w $\mathbb{C}^d$, to cosinus kąta między dowolnymi dwiema takimi prostymi wyniesie $1/\sqrt{d+1}$. Jeszcze inaczej argumentując, można wykazać, że rzutowania na proste równokątne

¹ Na przykład nie tak łatwo znaleźć maksymalny pięcioelementowy zbiór równoodległych punktów na „płaskim” dwuwymiarowym torusie $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

muszą tworzyć zbiór wektorów niezależnych w $\mathcal{L}_s(\mathbb{C}^d)$, a więc ich liczba nie może przekraczać $\dim \mathcal{L}_s(\mathbb{C}^d) = d^2$. Warto zauważyć, że podobne rozumowanie w przypadku rzeczywistym pozwala oszacować od góry liczbę rzeczywistych prostych równokątnych przez $d(d+1)/2$, czyli przez wymiar przestrzeni rzeczywistych macierzy symetrycznych. Jest to tzw. *ograniczenie Gerzona*, o którym pisze Grzesik we wspomnianym wyżej artykule [20]. Ale na tym właściwie podobieństwo obu przypadków się kończy.

Obraz przestrzeni rzutowej w $\mathcal{L}_s^0(\mathbb{C}^d)$ przez omówione wyżej zanurzenie nazywa się czasem *zbiorem Blocha* od nazwiska Feliksa Blocha, laureata Nagrody Nobla w dziedzinie fizyki z 1952 roku, który jako pierwszy z fizyków rozważał taką reprezentację zespolonej przestrzeni rzutowej. Zbiór Blocha stanowi więc $(2d-2)$ -wymiarową podrozmierność sfery (d^2-2) -wymiarowej. Dla $d=2$ zbiór Blocha wypełnia całą sferę, ale dla $d>2$ stanowi jej podzbiór miary zero. Przykładowo dla $d=3$ otrzymujemy 4-wymiarową podrozmierność 7-wymiarowej sfery w $\mathbb{R}^8$. Łatwo jest w sferę (d^2-2) -wymiarową wpisać sympleks foremny o d^2 wierzchołkach, ale powstaje pytanie, czy da się to zrobić tak, aby wszystkie te wierzchołki trafiły do zbioru Blocha. Tylko wtedy bowiem uda się skonstruować d^2 prostych równokątnych i ograniczenie górne na ich liczbę zostanie osiągnięte. Na pierwszy rzut oka takie wpisanie sympleksu w sferę zdaje się być dla $d>2$ wysoce nieprawdopodobne. Mogłoby się więc wydawać, że – podobnie jak to jest dla ograniczenia Gerzona w przypadku rzeczywistym, gdzie być może jest ono osiąmane jedynie dla wymiarów $d=2, 3, 7$ i 23 – także maksymalne ograniczenie w przypadku zespolonym rzadko będzie wysyczone. Nieoczekiwanie, jak się przekonamy, sytuacja jest w tym przypadku całkiem inna.

W porównaniu z problemem rzeczywistym, analizowanym już od lat czterdziestych XX wieku, jego zespolony odpowiednik ma o wiele krótszą historię. W sposób systematyczny zespolone proste równokątne badali bowiem po raz pierwszy w 1975 roku w pracy [11] Philippe Delsarte, Jean-Marie Goethals i Johan Seidel. Wykazali oni ich podstawową własność, której dowód zarysowaliśmy powyżej.

Twierdzenie 1. *Dowolny zbiór zespolonych prostych równokątnych w przestrzeni $\mathbb{C}^d$ ma moc nie większą niż d^2 . Ponadto, jeżeli ich liczba wynosi dokładnie d^2 , to cosinus kąta między dowolnymi dwiema takimi prostymi równa się $1/\sqrt{d+1}$.*

Przykłady, zresztą w zasadzie już znane od dawna, w których to oszacowanie jest osiąmane, autorzy pracy podali jednak jedynie dla dwóch najmniejszych wymiarów: $d=2$ oraz $d=3$. Żeby bliżej się przyjrzeć tym konstrukcjom, podkreślmy raz jeszcze, że problem istnienia d^2 prostych równokątnych w $\mathbb{C}^d$ można równoważnie sformułować jako zagadnienie istnienia takich d^2

wektorów jednostkowych $f_1, f_2, \dots, f_{d^2}$ w $\mathbb{C}^d$, że $|(f_j, f_k)|^2 = \frac{1}{d+1}$ dla wszystkich $j \neq k$. Znalezienie tych wektorów można zatem sprowadzić do rozwiązania (w liczbach rzeczywistych) układu $\binom{d^2+1}{2}$ równań algebraicznych (d^2 kwadratowych i $\binom{d^2}{2}$ czwartego stopnia) dla $2d^3$ zmiennych.

W wymiarze $d = 2$ poprawność rozwiązania

$$(1, 0), \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(1, \sqrt{2}), \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(1, \sqrt{2}e^{\frac{2\pi i}{3}}), \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(1, \sqrt{2}e^{-\frac{2\pi i}{3}})$$

można sprawdzić w pamięci. Nietrudno też zauważyć, że w reprezentacji Blocha wektorom tym odpowiadać będą wierzchołki *czworoscianu foremego* wpisanego w sferę w przestrzeni trójwymiarowej o promieniu $1/\sqrt{2}$. Pierwsza znana konstrukcja dla wymiaru $d = 3$ wydaje się być znacznie ciekawsza i pochodzi z pracy [10] matematyka kanadyjskiego Harolda S. M. Coxetera. Jest to dziewięć *przekątnych wielościanu Hessego*, regularnego wielościanu zespolonego o 27 wierzchołkach w $\mathbb{C}^3$. Zauważmy, że w przypadku wypukłych wielościanów rzeczywistych dokładnie dwa wierzchołki leżą na przekątnej, ale w przypadku zespolonym przekątne są prostymi zespolonymi i mogą zawierać więcej wierzchołków; w przypadku wielościanu Hessego zawierają 3, stąd otrzymujemy 9 przekątnych. W zapisie wektorowym opisane są one przez wszystkie cykliczne permutacje współrzędnych wektorów postaci $(0, 1, -\omega^j)$, przy czym $j \in \{0, 1, 2\}$ oraz $\omega := \exp \frac{2\pi i}{3}$. Warto w tym miejscu wspomnieć, że nazwiskiem Ludwiga Hessego ochrzcił ten wielościan właśnie Coxeter, zauważając, że jego przekątne, rozważane jako elementy zespolonej płaszczyzny rzutowej $\mathbb{CP}^2$ stanowią realizację *konfiguracji Hessego* znanej z teorii krzywych eliptycznych. Innymi słowy, jest to dziewięć punktów w $\mathbb{CP}^2$ położonych na dwunastu zespolonych prostych rzutowych w taki sposób, że na każdej z tych prostych znajdują się trzy punkty oraz przez każdy punkt przechodzą cztery proste.

Na znalezienie kolejnego przykładu maksymalnego zbioru zespolonych prostych równokątnych trzeba było czekać aż sześć lat. Podał go Stuart G. Hoggara w 1981 roku w pracy [21]. Są to tzw. *proste Hoggara* w wymiarze $d = 8$. Ponownie mamy do czynienia z przekątnymi wielościanu, tym razem jednak jest to wielościan kwaternionowy w $\mathbb{H}^4$ o 128 wierzchołkach, a proste Hoggara są kompleksyfikacją jego 64 przekątnych. Ciekawostkę stanowi fakt, że Hoggara sprawdził swój wynik jedynie na komputerze, a formalny dowód opublikował w artykule [23] dopiero siedemnaście lat później. Dziś znamy zresztą wiele równoważnych konstrukcji prostych Hoggara (zob. [26, 38]). Niemal do końca XX wieku te rozwiązania dla wymiarów $d = 2, 3$ i 8 były jedynymi przykładami maksymalnych zbiorów zespolonych prostych równokątnych. Co ciekawsze, jak się później okazało, były to w gruncie rzeczy przykłady wyjątkowe, charaktery-

zujące się wysoką symetrią, a sam przykład podany przez Hoggara jest w ogóle jedyny w swoim rodzaju. Wrócimy jeszcze do tej kwestii pod koniec artykułu.

Zainteresowania Hoggara nie były jednak ściśle związane z prostymi równokątnymi. Badał je niejako przy okazji, w szerszym kontekście opisanym dokładnie w pracy [22] poświęconej rzutowym t -wzorcom (*projective t -designs*), czyli odpowiednikom t -wzorców sferycznych w $\mathbb{C}^d$ w przestrzeniach rzutowych – nie tylko rzeczywistych, ale również zespolonych, kwaternionowych, a nawet oktonionowych. Takie przestrzenie spełniają aksjomatykę *przestrzeni Delsarte’a* wprowadzonych przez wiedeńskiego matematyka Arnolda Neumaiera w nieopublikowanych wykładach [29] z 1981 roku, a zatem można do nich zastosować jego abstrakcyjną teorię t -wzorców.

Czym są zespolone rzutowe t -wzorze? Można w ich definicji wyjść zarówno od pojęcia przestrzeni rzutowej $\mathcal{P}(\mathbb{C}^d)$, rozumianej jako przestrzeń jednowymiarowych projekcji ortogonalnych, jak i bezpośrednio od jednostkowej sfery zespolonej $S(\mathbb{C}^d)$. W tym drugim przypadku mówimy zwykle o (zespolonych) sferycznych (t, t) -wzorcach lub zespolonych t -wzorcach. To podejście może być bardziej intuicyjne, jeżeli powiemy, że interesuje nas tu dyskretna i regularna aproksymacja sfery zespolonej. Na czym taka aproksymacja miałaby polegać? Analogicznie jak w przypadku (rzeczywistych) t -wzorców, chcemy, żeby średnia arytmetyczna wartości pewnych wielomianów w punktach wzorca była równa całce takiego wielomianu po sferze $S(\mathbb{C}^d)$ względem unormowanej miary Haara (unitarnie niezmienniczej). O ile w przypadku rzeczywistym rozważamy po prostu wielomiany (jednorodne) stopnia t , to w przypadku zespolonym bierzemy wielomiany jednorodne stopnia t zarówno względem z , jak i $\bar{z}$:

$$\text{Hom}(t, t; d) := \text{span}\{z \mapsto z^\alpha \bar{z}^\beta : z \in \mathbb{C}^d, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, |\alpha| = |\beta| = t\},$$

co prowadzi do następującej definicji.

Definicja 1. Zbiór $\{f_j\}_{j=1}^n \subset S(\mathbb{C}^d)$ nazywamy *sferycznym (t, t) -wzorcem*, jeżeli dla każdego $p \in \text{Hom}(t, t; d)$,

$$\int_{S(\mathbb{C}^d)} p \, d\sigma = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p(f_j)$$

przy czym σ jest unormowaną miarą Haara na sferze $S(\mathbb{C}^d)$.

Gdy $s = 1, \dots, t-1$ i $q \in \text{Hom}(s, s; d)$, mamy $\|\cdot\|^{2(t-s)} q \in \text{Hom}(t, t; d)$, a zatem każdy sferyczny (t, t) -wzorec jest również sferycznym (s, s) -wzorcem, jeżeli $1 \leq s < t$. Można też podać definicję równoważną, trudniejszą do interpretacji, ale za to łatwiejszą do sprawdzenia, opierającą się na *tożsamości Welch*,

która charakteryzuje (t, t) -wzorce:

$$\frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^n |(f_j, f_k)|^{2t} = \binom{d+t-1}{t}^{-1}.$$

Warto zauważyć, że dla dowolnego układu wektorów jednostkowych w $\mathbb{C}^d$ lewa strona powyższej równości, która może być interpretowana jako pewna miara jednostajnego rozłożenia kierunków na sferze, nie może być mniejsza od prawej, co wykazał Lloyd R. Welch w 1974 roku w artykule [39]. Sferyczne (t, t) -wzorce są zatem układami punktów minimalizującymi tę miarę. Ponieważ widać, że definicja ta nie zależy od fazy, przechodząc do przestrzeni $\mathcal{P}(\mathbb{C}^d)$ możemy podobnie zdefiniować zespolony rzutowy t -wzorec jako zbiór $\{P_j\}_{j=1}^n$ jednowymiarowych projekcji ortogonalnych spełniających równość:

$$\frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^n (P_j, P_k)_{HS}^t = \binom{d+t-1}{t}^{-1}.$$

W szczególności sferyczne $(1, 1)$ -wzorce są ściśle związane z *ramkami ciasnymi* (*tight frames*), czyli układami wektorów w $\mathbb{C}^d$ stanowiącymi w pewnym sensie naturalne uogólnienie baz ortonormalnych. W definicji ramki ciasnej wymagamy mianowicie, aby taki układ $\{f_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{C}^d$ umożliwiał rozpisanie dowolnego wektora $f \in \mathbb{C}^d$ w postaci przypominającej szereg Fouriera, to znaczy

$$f = A \sum_{j=1}^n (f, f_j) f_j$$

dla pewnego $A > 0$. Jeśli założymy dodatkowo, że wektory $\{f_j\}_{j=1}^n$ leżą na sferze jednostkowej (wtedy $A = d/n$), to łatwo udowodnić, że otrzymamy równoważną definicję zespolonego sferycznego $(1, 1)$ -wzorca. Elementarne obliczenia natomiast dowodzą, że dla $n = d^2$ pojęcia zespolonego sferycznego $(2, 2)$ -wzorca i układu wektorów równokątnych na sferze zespolonej pokrywają się.

Te związki prostych równokątnych z ramkami i wzorcami można więc podsumować za pomocą poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 2. Niech $f_1, \dots, f_{d^2} \in S(\mathbb{C}^d)$ oraz niech $P_1, \dots, P_{d^2}$ będą odpowiadającymi im projekcjami ortogonalnymi. Następujące warunki są równoważne:

- (a) Proste generowane przez f_j ($j = 1, \dots, d^2$) są równokątne,
- (b) $|(f_j, f_k)|^2 = \frac{1}{d+1}$ dla dowolnych $j \neq k$,
- (c) $(P_j, P_k)_{HS} = \frac{1}{d+1}$ dla dowolnych $j \neq k$,
- (d) $\{f_j\}_{j=1}^{d^2}$ jest równokątną ramką ciasną,

- (e) $\sum_{j,k=1}^{d^2} |(f_j, f_k)|^4 = \frac{2d^3}{d+1}$ (czyli $\{f_j\}_{j=1}^{d^2}$ jest zespolonym sferycznym $(2, 2)$ -wzorcem),
 (f) $\sum_{j,k=1}^{d^2} (P_j, P_k)_{HS}^2 = \frac{2d^3}{d+1}$ (czyli $\{P_j\}_{j=1}^{d^2}$ jest zespolonym rzutowym 2-wzorcem).

Co ciekawe, w przeciwieństwie do przypadku rzeczywistego, problem istnienia maksymalnych zbiorów zespolonych prostych równokątnych nie był w ogóle rozważany przez blisko dwadzieścia lat. Prawdziwy przełom nastąpił dopiero w momencie, gdy zagadnieniem zainteresowali się, z powodów, o których jeszcze opowiemy, fizycy zajmujący się teorią informacji kwantowej. I tak w 2003 roku Joseph M. Renes, Robin Blume-Kohout, Andrew J. Scott i Carlton M. Caves opublikowali pracę [32], w której skonstruowali nieskończoną jednoparametrową rodzinę unitarnie nierównoważnych układów dziewięciu prostych równokątnych w wymiarze 3 oraz przykład szesnastu prostych równokątnych w wymiarze 4. Co więcej, znaleźli numerycznie takie przybliżone konstrukcje we wszystkich wymiarach $d \leq 45$, co pozwalało postawić hipotezę, że w dowolnym wymiarze d istnieje d^2 zespolonych prostych równokątnych. Ogólny dowód istnienia maksymalnego zbioru prostych równokątnych we wszystkich skończonych wymiarach określili jako „zwodniczo (*tantalizingly*) bliski, ale jednocześnie w jakiś sposób odległy”. Dziś można by śmiało to stwierdzenie powtórzyć. Hipoteza, którą postawili w pracy, szła zresztą nawet o krok dalej, postulując nie tylko istnienie, ale także określoną symetrię takich rozwiązań. Wkrótce jednak okazało się, że w swoich przypuszczeniach wcale nie byli pierwsi.

Cztery lata wcześniej Gerhard Zauner, doktorant na Uniwersytecie Wiedeńskim, obronił pod kierunkiem Neumaiera rozprawę doktorską [41] o *wzorcach kwantowych*, pewnym uogólnieniu wzorców rzutowych, a jednocześnie odpowiedniku wzorców (*designs*) znanych z kombinatoryki, gdzie rolę mocy zbiorów pełniły ślady operatorów. Wśród rozmaitych wyników znalazło się tam też kilka dotyczących d^2 zespolonych prostych równokątnych w $\mathbb{C}^d$, które Zauner nazywał *Maximale Quantendesigns*: analityczne przykłady w wymiarach 3, 4 (równoważne tym podanym w pracy [32]) i 5, jak również numeryczne przybliżone rozwiązania w wymiarach 6 i 7, a także śmiała hipoteza dotycząca postaci rozwiązań w dowolnym wymiarze. Rozprawa, napisana w języku niemieckim, została udostępniona na stronie promotora, jednak sam autor po uzyskaniu doktoratu nie wybrał zawodowej kariery naukowej, lecz pracę w sektorze IT i zapewne dlatego jego wyniki nie zostały początkowo zauważone. I na tym historia Zaunera i jego doktoratu mogłaby się zakończyć, gdyby kilka lat później Andreas Klappenecker i Martin Roetteler, zajmujący się podobną tematyką, nie „odkryli” jego rozprawy, a w niej hipotezy dużo mocniejszej niż ta

z pracy [32]. Wkrótce rozprawa [41] miała już dziesiątki cytowań, ze względu na nieustające zainteresowanie została przetłumaczona na język angielski, a w 2011 roku przekład doktoratu [42] został opublikowany w *International Journal of Quantum Information*. Wspomnianą hipotezę nazywa się dziś powszechnie *hipotezą Zaunera*, a cytowania pracy [41] można obecnie liczyć już w setkach.

Zanim przejdziemy do omówienia hipotezy Zaunera, zobaczmy, dlaczego problem zespolonych prostych równokątnych do tego stopnia zafascynował środowisko fizyków kwantowych, że dzisiaj – jeżeli ktoś jest zainteresowany tym tematem – to w wyszukiwarce nie powinien wpisywać frazy „complex equiangular lines”, lecz raczej „SIC-POVM”, które to hasło jest akronimem wyrażenia *symmetric informationally complete positive operator-valued measure*. Nazwa ta, wprowadzona w pracy [32], bardzo szybko przyjęła się w środowisku fizyków. W użyciu jest też skrócona forma SIC – zwykle w odniesieniu do elementów sfery $S(\mathbb{C}^d)$ lub przestrzeni rzutowej $\mathbb{CP}^{d-1}$ – będziemy też stosowali ją dalej w tym artykule². Skrót POVM nie oznacza nic innego, jak tylko miarę półspektralną, będącą w fizyce kwantowej matematyczną reprezentacją pomiaru kwantowego (czy też, mówiąc bardziej precyzyjnie, obserwabli, czyli obserwowanej wielkości fizycznej). W przypadku skończonym pojęcie to można zredukować do zbioru $\{\Pi_j\}_{j=1}^n$ operatorów nieujemnie określonych na $\mathbb{C}^d$ sumujących się do identyczności: $\sum_{j=1}^n \Pi_j = I$. Informacyjna zupełność (IC) oznacza z kolei fizycznie możliwość odtworzenia stanu układu przed pomiarem na podstawie jego statystyk, matematycznie sprowadza się zaś ona do warunku $\text{span}\{\Pi_j : j = 1, \dots, n\} = \mathcal{L}_s(\mathbb{C}^d)$. W definicji SIC-POVM zakładamy ponadto, że n jest minimalne, to znaczy równe d^2 , wszystkie operatory Π_j są rzędu 1, natomiast symetryczność (S) związana jest z warunkiem $(\Pi_j, \Pi_k)_{HS} = \frac{1}{d^2(d+1)}$ dla $j \neq k$. Taka definicja, co łatwo widać, oznacza, że operatory Π_j są przeskalowanymi projekcjami ortogonalnymi na jednowymiarowe podprzestrzenie generowane przez układ d^2 zespolonych prostych równokątnych. Dzięki swoim własnościom SIC-POVM znajdują zastosowanie między innymi w problemach tomografii stanu kwantowego czy też kryptografii kwantowej. Wydaje się jednak, że symetryczność w ich nazwie jest związana z czymś głębszym niż tylko równością poszczególnych iloczynów skalarnych, bowiem kryje się za nią na ogół (a być może zawsze) prawdziwa matematyczna symetria tych zbiorów.

Aby się bliżej przyjrzeć tym symetriom zauważmy, że – jak stwierdza twierdzenie Wignera (zob. [13]) – grupę izometrii przestrzeni rzutowej $\mathbb{CP}^{d-1}$ z me-

² Temat jest na tyle gorący, że dyskutowano nawet, jak powinno się wymawiać „SIC”. Obecnie obowiązujący konsensus opowiada się za wymową „seek” zamiast początkowo używanej „sick”.

tryką Fubinię–Study’ego można utożsamić z grupą $PUA(d) = UA(d)/U(1)$ złożoną z klas równoważności odwzorowań unitarnych i antyunitarnych przestrzeni $\mathbb{C}^d$ określonych z dokładnością do czynnika fazowego. Klasy równoważności izometrii unitarnych $PU(d)$ stanowią podgrupę normalną $PUA(d)$ o indeksie 2. W dalszym ciągu skupimy się głównie na nich.

Definicja 2. Rozważmy dowolną grupę G . Mówimy, że SIC $\{f_j\}_{j=1}^{d^2} \subset S(\mathbb{C}^d)$ jest (rzutowo) G -kowariantny, jeżeli istnieje taka projektywnie unitarna reprezentacja G (czyli homomorfizm G w podgrupę $PU(d)$) dana przez $G \ni g \mapsto [U_g] \in PU(d)$ oraz taka surjekcja $\sigma : G \rightarrow \{1, \dots, d^2\}$, że $[U_g f_{\sigma(h)}] = [f_{\sigma(gh)}]$. Będziemy też w tej sytuacji mówić o kowariantności względem konkretnej reprezentacji.

Oczywiście $\{[U_g]\}_{g \in G}$ jest w tej sytuacji działającą tranzytywnie podgrupą grupy symetrii (izometrii własnych) $\{[f_j]\}_{j=1}^{d^2}$. Ogólnie, wektor $f \in S(\mathbb{C}^d)$, dla którego $\{U_g f\}_{g \in G}$ tworzy (z definicji G -kowariantny) SIC, nazywa się *wektorem generującym (fiducial vector)*.

Widać teraz, że poszukiwanie kowariantnych względem danej reprezentacji SIC jest dużo łatwiejsze niż poszukiwanie SIC w ogóle, gdyż musimy znaleźć jedynie odpowiedni pojedynczy wektor, nie zaś układ d^2 wektorów. Kwestią otwartą jest odpowiedni dobór grupy. Zarówno w pracy [32], jak i w rozprawie [41] zauważono, analizując przykłady SIC w niskich wymiarach, że (dyskretna) grupa Weyla–Heisenberga H_d , której prezentacja wygląda następująco:

$$\langle x, y, z | x^d, y^d, z^d, zx = xz, zy = yz, x^r y^s = z^{rs} y^s x^r, z = xyx^{-1}y^{-1} \rangle$$

jest naturalnym kandydatem do roli grupy symetrii SIC. Projektywnie unitarną reprezentację H_d w $\mathbb{C}^d$ otrzymujemy w następujący sposób. Dla $(e_1, \dots, e_d)$ – kanonicznej bazy ortonormalnej $\mathbb{C}^d$ – definiujemy operatory S (przesunięcia) oraz T (fazy lub zegara) wzorami $Se_r := e_{r \oplus 1 \pmod{d}}$, $Te_r := \omega^r e_r$ dla $r = 1, \dots, d$, przy czym $\omega := \exp(2\pi i/d)$ (konstrukcja ta pochodzi od Jamesa J. Sylwestera). Następnie definiujemy operatory $D_{\mathbf{p}}$ dla $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}_d^2$, nazywane *dyskretnymi operatorami Weyla* lub *uogólnionymi macierzami Pauliego*: $D_{\mathbf{p}} = D_{(p_1, p_2)} := \tau^{p_1 p_2} S^{p_1} T^{p_2}$, przy czym $\tau := -\exp(\pi i/d)$. Mamy wtedy $D_{\mathbf{p}}^* = D_{-\mathbf{p}}$ oraz $D_{\mathbf{p}} D_{\mathbf{q}} = \tau^{\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle} D_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$ dla $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{Z}_d^2$, przy czym $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle := p_2 q_1 - p_1 q_2$ jest formą symplektyczną. Operatory te mają ślad zero, są unitarne, ale hermitowskie jedynie dla $d = 2$. Ostatecznie otrzymujemy nieprzywiedlną unitarną reprezentację H_d :

$$h: H_d \rightarrow \{\omega^{p_3} S^{p_1} T^{p_2} | p \in \mathbb{Z}_d^3\}, \quad h(x) := S, \quad h(y) := T, \quad h(z) := \omega I,$$

reprezentację rzutową dostajemy zaś biorąc dla $p \in \mathbb{Z}_d^3$ klasy równoważności

$$[\omega^{p_3} S^{p_1} T^{p_2}] = [D_{(p_1, p_2)}].$$

Wówczas $\{[D_{\mathbf{p}}] : \mathbf{p} := (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}_d^2\}$ tworzą grupę będącą wierną reprezentacją rzutową grupy $\mathbb{Z}_d \otimes \mathbb{Z}_d$. W dalszym ciągu, pisząc o *WH-kowariantności*, będziemy mieć na myśli grupową kowariantność względem tej reprezentacji. Możemy teraz sformułować kluczowe, otwarte po dziś dzień, hipotezy dotyczące SIC.

Hipoteza 1 (Renes, Blume-Kohout, Scott, Caves, 2003). W każdym wymiarze d istnieje wektor generujący WH-kowariantny SIC.

Odnotujmy, że dla sprawdzenia, czy $f \in S(\mathbb{C}^d)$ jest takim wektorem wystarczy wykazać, że $|(D_{\mathbf{p}}f, f)|^2 = \frac{1}{d+1}$ dla każdego $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}_d^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, co bardzo upraszcza poszukiwanie SIC. Hipoteza Zaunera idzie o krok dalej, mówiąc mianowicie, gdzie należy szukać wektora generującego.

Hipoteza 2 (Zauner, 1999). W każdym wymiarze d istnieje wektor generujący WH-kowariantny SIC, który jest wektorem własnym operatora Z zdefiniowanego następująco:

$$(Ze_k, e_j) = \frac{1}{\sqrt{d}} e^{i\pi(d-1)/12} e^{i\pi(2jk+(d+1)k^2)/d}$$

dla $j, k = 1, \dots, d$.

Zauważmy, że operator Z jest unitarny oraz $Z^3 = I$. Ponadto $Z^{-1}SZ = T$ oraz $Z^{-1}TZ = e^{i\pi(d-1)/d} S^{-1}T^{-1}$, a zatem Z jest elementem normalizatora grupy Weyla–Heisenberga w $U(d)$ – grupy znanej pod nazwą *grupy Clifforda* $C(d)$ lub *grupy Jacobiego*. Nazywany jest on *operatorem unitarnym Zaunera*. Nietrudno wykazać (zob. [2, 16]), że jeśli mamy dany wektor f generujący WH-kowariantny SIC, to Uf jest również takim wektorem dla dowolnego $U \in C(d)$. W 2005 roku Marcus Appleby postawił w pracy [2] hipotezę, że w każdym wymiarze d istnieje wektor generujący WH-kowariantny SIC i *każdy* taki wektor jest wektorem własnym pewnego operatora unitarnego $U \in C(d)$ szczególnego typu, między innymi spełniającego warunek $U^3 = I$. Operatory te znane są pod nazwą *kanonicznych operatorów unitarnych rzędu 3* (*canonical order 3 unitaries*), a operator Z jest jednym z elementów tej klasy.

Zilustrujmy te rozważania analizując dokładniej przypadek $d = 2$ w reprezentacji Blocha. W tej reprezentacji klasom abstrakcji operatorów unitarnych z $PU(2)$ odpowiadają elementy grupy obrotów rzeczywistej przestrzeni trójwymiarowej $SO(3)$. Jak już wspominaliśmy, jedyne SIC w tym wymiarze to czworosciany foremne. Dla takiego czworoscianu zbiór klas abstrakcji operatorów

Weyla odpowiada identyczności i trzem obrotom o kąt π wokół prostopadłych osi łączących pary przeciwległych krawędzi czworościanu. Tworzy on tzw. grupę diedralną, izomorficzną z grupą czwórkową Kleina $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Ośmiu kanonicznym operatorom unitarnym rzędu 3 odpowiadają tu obroty o kąty $\pm 2\pi/3$ wokół osi przechodzących przez jeden z czterech wierzchołków czworościanu i środek przeciwległej ściany. W wyniku działania grupy Clifforda na SIC otrzymujemy oprócz niego dodatkowo drugi bliźniaczy czworościan (SIC), tworzący z nim ośmiościan gwiazdzisty (*stella octangula*), o tej samej grupie symetrii co wyjściowy. Wierzchołki obu czworościanów tworzą sześcián, którego 24-elementowa grupa obrotów może być utożsamiona z klasami równoważności elementów grupy Clifforda. Jest to tzw. chiralna grupa oktaedralna O , izomorficzna z S_4 .

Założenie WH-kowariantności połączone z hipotezą Zaunera (lub późniejszą hipotezą Appleby'ego) istotnie pomogło w poszukiwaniu rozwiązań – zarówno analitycznych, jak i numerycznych. W szczególności, w 2004 roku Grassl w wystąpieniu [16] wykazał po raz pierwszy istnienie SIC w wymiarze nie będącym potęgą liczby pierwszej. Od tej pory niemal co roku poszerzała się lista wymiarów, dla których hipoteza Zaunera okazywała się prawdziwa. W tabeli poniżej uwzględniono jedynie wyniki otrzymane przed 2009 rokiem.

Wymiar d	Autorzy	Rok
2	znane od dawna	–
3	Coxeter (zob. [10])	1940
8	Hoggar (zob. [21])	1981
3, 4, 5	Zauner (zob. [41])	1999
3, 4	Renes, Blume-Kohout, Scott, Caves (zob. [32])	2003
6	Grassl (zob. [16])	2004
7, 19	Appleby (zob. [2])	2005
8, 9, 10, 12	Grassl (zob. [17])	2005
11, 15	Grassl (zob. [18])	2006
14, 24, 35, 48	Scott, Grassl (zob. [35])	2009

Rozwiązania analityczne opierały się początkowo (dla mniejszych wymiarów) na rozwiązywaniu układu równań algebraicznych z zastosowaniem baz Gröbnera. Z kolei Scott i Grassl w pracach [34, 35] wskazali, jak można numeryczne poszukiwania wektorów generujących sprowadzić do rozwiązania pewnego problemu optymalizacyjnego, a Appleby, Tuan-Yow Chien, Steven Flammia i Shayne Waldron opracowali metodę przekształcania rozwiązań przy-

bliżonych w dokładne, którą przedstawili w artykule [5]. Do tej pory udało się potwierdzić istnienie SIC-POVM w wymiarach $d \leq 53$ oraz

$$\begin{aligned} d = & 57, 61, 62, 63, 65, 67, 73, 74, 76, 78, 79, 80, 84, 86, 91, 93, 95, 97, \\ & 98, 99, 103, 109, 111, 120, 122, 124, 127, 129, 133, 134, 139, 143, 146, \\ & 147, 151, 155, 157, 163, 168, 169, 172, 181, 182, 183, 193, 195, 199, 201, \\ & 228, 259, 292, 323, 327, 364, 399, 403, 487, 489, 725, 787, 844, 1299, 5799. \end{aligned}$$

Ponadto znane są przybliżone rozwiązania numeryczne dla wszystkich wymiarów $d \leq 193$ oraz dla kilku większych: $d = 204, 224, 255, 288, 528, 1155, 2208$.³ W sieci znajdują się trzy katalogi, w których zebrana jest większość powyższych rozwiązań, zarówno analitycznych jak i numerycznych (zob. [12, 19, 30]). Niemal wszystkie znane SIC są WH-kowariantne, a ich wektory generujące spełniają hipotezę Zaunera (z dokładnością do przekształcenia unitarnego). Jedynym do tej pory przypadkiem wykraczającym poza ten schemat są wspomniane wyżej proste Hoggara w wymiarze 8. Są one grupowo kowariantne względem grupy $H_2^{\otimes 3}$ zamiast H_8 , czyli ich grupa symetrii zawiera podgrupę izomorficzną z $(\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2)^{\otimes 3}$, nie zaś z $\mathbb{Z}_8 \otimes \mathbb{Z}_8$, niemniej jednak grupa Weyla–Heisenberga również jest, jak widać, w pewien sposób z ich symetrią powiązana. Warto podkreślić, że nie znamy żadnego SIC, który nie byłby grupowo kowariantny, aczkolwiek poszukiwania takich zbiorów zwykle zakładały grupową kowariantność (w szczególności Scott i Grassl rozważali również inne możliwe grupy). W 2010 roku Huangjun Zhu w pracy [43] opublikował następujący wiążący się z tym wynik.

Twierdzenie 3. *Jeśli d jest liczbą pierwszą, to z grupowej kowariantności SIC wynika WH-kowariantność.*

Sama G -kowariantność gwarantuje, że grupa symetrii SIC (która może być większa niż G) działa tranzytywnie na elementach SIC, a więc każdy grupowo kowariantny SIC jest zbiorem symetrycznym. Możemy jednak wyróżnić wśród nich zbiory *bardziej* symetryczne.

Definicja 3. Mówimy, że SIC jest *supersymetryczny*, jeśli jego pełna grupa symetrii działa na elementach SIC podwójnie tranzytywnie, tzn. każde dwa elementy można poprzez działanie tej grupy przekształcić na dowolne dwa inne.

³ Informację o aktualnych listach wymiarów, dla których istnieje zbiór prostych równokątnych o maksymalnej liczebności (w części wyniki te są jeszcze nieopublikowane), autorzy zawdzięczają Markusowi Grasslowi.

Przedrostek „super-” wiąże się z faktem, że działanie pełnej grupy symetrii SIC nie może być potrójnie tranzytywne. Co więcej, okazuje się, jak udowodnił Zhu w pracy [44], że nawet supersymetrycznych SIC nie ma wiele.

Twierdzenie 4. *Istnieją trzy (z dokładnością do rzutowej unitarno-antyunitarnej równoważności) supersymetryczne SIC:*

- $d = 2$ (czworoscian),
- $d = 3$ (konfiguracja Hessego),
- $d = 8$ (proste Hoggara).

Przypomnijmy, że są to pierwsze (i jednocześnie do 1999 roku jedyne) znane maksymalne zbiory zespolonych prostych równokątnych. Pierwsze, a jednocześnie nietypowe i dlatego zostały nazwane przez Blake’a C. Stacey’a w pracy [37] *sporadycznymi*. W 2015 roku w pracy [26] Jonathan Jedwab i Amy Wiebe zaproponowali pewną elementarną konstrukcję SIC w $\mathbb{C}^d$ wykorzystującą d -wymiarowe macierze *Hadamarda*, czyli macierze unitarne, w których wszystkie wyrazy mają ten sam moduł. Polega ona na braniu jako wektorów kolejnych d wierszy macierzy i zastępowaniu kolejno każdego z d wyrazów w takim wektorze przez ten wyraz pomnożony przez ustalony skalar. Otrzymać można w jej wyniku dokładnie powyższe trzy sporadyczne SIC, przy czym jest to niewątpliwie najprostszy znany sposób przedstawienia linii Hoggara.

Wspominaliśmy już, że rola SIC w *kwantowej teorii informacji* wynika z tego, że reprezentują one pewne obserwable i ich pomiar. Stany (czyste) układu kwantowego o d stopniach swobody możemy utożsamiać z elementami przestrzeni $\mathcal{P}(\mathbb{C}^d)$. Wówczas pomiar $\{\Pi_j\}_{j=1}^{d^2}$ reprezentowany przez SIC może dać d^2 różnych wyników. Jest to zjawisko losowe, a prawdopodobieństwo otrzymania k -tego wyniku ($k = 1, \dots, d^2$) opisywane jest wzorem *Borna* (od nazwiska Maxa Borna, noblisty z fizyki w 1954 roku) $p_k(P) := \text{tr}(\Pi_k P)$ dla $P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^d)$ reprezentującego stan przed pomiarem. Ponieważ pomiar SIC jest informacyjnie zupełny, możemy jednoznacznie odtworzyć stan P przed pomiarem na podstawie znajomości wektora prawdopodobieństw $p(P)$ leżącego w standardowym sympleksie $\Delta_{d^2} := \{p \in \mathbb{R}^{d^2} : \sum_{j=1}^{d^2} p_j = 1, p_k \geq 0, k = 1, \dots, d^2\}$, utożsamiając niejako stany kwantowe z pewnymi elementami Δ_{d^2} . To spostrzeżenie stało się punktem wyjścia dla współcześnie najmodniejszego z nowych podejść do podstaw mechaniki kwantowej nazywanego *KUBizmem* (*QBism*) (lub dawniej też *kwantowym bayesianizmem*, *Quantum Bayesianism* – stąd skrót) zaproponowanego w drugiej dekadzie XXI wieku przez Christophera A. Fuchsa oraz Ruedigera Schacka w pracy [15] i rozwijane-

go od tego czasu przez wielu autorów. Podzbiór Δ_{d^2} , będący otoczką wypukłą takich wektorów prawdopodobieństwa otrzymanych dla różnych elementów $\mathcal{P}(\mathbb{C}^d)$ nosi nazwę *kupleksu* (*qplex*) i ma piękną strukturę geometryczną oraz ciekawe własności algebraiczne przedstawione w pracach [6, 8, 36].

Istotną przeszkodę dla hipotetycznej „kubistycznej” rewizji podstaw mechaniki kwantowej i oparcia jej na pojęciu SIC stanowi fakt, że ich istnienie w dowolnym wymiarze wciąż stanowi problem otwarty. Chociaż znajdowane są, jak widzieliśmy, analityczne rozwiązania tego problemu w coraz to wyższych wymiarach, ich złożoność rośnie bardzo szybko (zob. [14]), być może nawet, co sugerują autorzy artykułu [27], jak d^4 . Obecnie zarysowują się dwie drogi prowadzące do dowodu istnienia SIC. Pierwsza zaczyna się od obserwacji, że z wyjątkiem $d = 3$ (ogół SIC w tym wymiarze został sklasyfikowany w pracy [25]), we wszystkich pozostałych wymiarach współrzędne (w bazie kanonicznej) wektorów generujących są liczbami algebraicznymi i – co więcej – wyrażają się przez pierwiastniki. Dalsze rozważania prowadzone metodami algebraicznej teorii liczb prowadzą do hipotezy, częściowo potwierdzonej numerycznie, że każdy SIC w wymiarze d ma swój odpowiednik w wymiarze $d(d - 2)$, zob. prace [1, 4]. Gdyby hipoteza ta była prawdziwa, pozwoliłaby na skonstruowanie nieskończonych „wież” wymiarów, w których istnienie SIC byłoby zagwarantowane, swoistej, jak to określił Ingemar Bengtsson w artykule [9], „drabiny do nieba”. Można byłoby też myśleć o wykorzystaniu rozmaitych równoważnych sformułowań problemu omówionych w pracy [3] w języku teorii grup, algebr Liego czy też algebr Jordana, a także w artykule [31] w terminach kanałów kwantowych łamiących splątanie. Drugie podejście, radykalnie odmienne, polegałoby na próbie zbudowania niekonstruktywnego dowodu istnienia SIC, co proponował już w 2010 roku wybitny amerykański informatyk Peter Shor. Autorzy artykułu wiedzą jednak tylko o jednej niedawnej próbie tego rodzaju – w pracy [27] zarysowano hipotetyczny szkic takiego dowodu.

Zapewne trudność i waga problemu istnienia SIC skłoniła Krajowe Centrum Informatyki Kwantowej⁴ do umieszczenia go na czele krótkiej listy pięciu ważnych problemów matematycznych z kwantowej teorii informacji. Za rozwiązanie każdego z nich oferowana jest międzynarodowa Złota Nagroda (*Golden Award*) wynosząca $N + 1$ euro, przy czym N oznacza rok, w którym problem zostanie rozstrzygnięty, zob. preprint [24]. Do otrzymania nagrody wystarczy jedynie rozwiązanie problemu dla nieskończonej liczby wymiarów, nie trzeba tego zrobić w dowolnym wymiarze, ani tym bardziej w formie podanej w hi-

⁴ Jest to wspólna jednostka badawcza z siedzibą w Sopocie, utworzona w 2007 roku przez PAN i siedem czołowych polskich uczelni, której misją jest tworzenie platformy dla interdyscyplinarnych badań w obszarze informacji kwantowej i podstaw fizyki.

potezie Zaunera. Nawet jednak w tej wersji udzielenie odpowiedzi na pytanie o maksymalną liczbę zespolonych prostych równokątnych wydaje się stanowić trudne wyzwanie zarówno dla fizyków, jak i matematyków.

Bibliografia

- [1] O. Andersson, I. Dumitru, *Aligned SICs and embedded tight frames in even dimensions*, J. Phys. A 52 (2019), 425302.
- [2] D. M. Appleby, *SIC-POVMs and the extended Clifford Group*, J. Math. Phys. 46 (2005), 052107.
- [3] M. Appleby, C. A. Fuchs, H. Zhu, *Group theoretic, Lie algebraic and Jordan algebraic formulations of the SIC existence problem*, Quantum Inf. Comput. 15 (2015), 61–94.
- [4] M. Appleby, I. Bengtsson, I. Dumitru, S. Flammia, *Dimension towers of SICs. I. Aligned SICs and embedded tight frames*, J. Math. Phys. 58 (2017), 112201.
- [5] M. Appleby, T.-Y. Chien, S. Flammia, S. Waldron, *Constructing exact symmetric informationally complete measurements from numerical solutions*, J. Phys. A 51 (2018), 165302.
- [6] D. M. Appleby, Å. Ericsson, C. A. Fuchs, *Properties of QBist state spaces*, Found. Phys. 41 (2011), 564–579.
- [7] M. Appleby, S. Flammia, G. McConnell, J. Yard, *Generating ray class fields of real quadratic fields via complex equiangular lines*, Acta Arith. 192 (2020), 211–233.
- [8] M. Appleby, C. A. Fuchs, B. C. Stacey, H. Zhu, *Introducing the Qplex: a novel arena for quantum theory*, Eur. Phys. J. D 71 (2017), 197.
- [9] I. Bengtsson, *SICs: Some Explanations*, Found. Phys. 50 (2020), 1794–1808.
- [10] H. S. M. Coxeter, *The polytope 221 whose twenty-seven vertices correspond to the lines to the general cubic surface*, Amer. J. Math. 62 (1940), 457–486.
- [11] P. Delsarte, J. Goethals, J. Seidel, *Bounds for systems of lines, and Jacobi polynomials*, Philips Res. Rep. 30 (1975), 91–105.
- [12] S. Flammia, *Exact SIC fiducial vectors*, <http://www.physics.usyd.edu.au/~sflammia/SIC/> (dostęp: 2020-12-20).
- [13] D. S. Freed, *On Wigner's theorem*, Geom. Topol. Monogr. 18 (2012), 83–89.
- [14] C. A. Fuchs, M. C. Hoang, B. C. Stacey, *The SIC Question: History and State of Play*, Axioms 6 (2017), 21.
- [15] C. A. Fuchs, R. Schack, *Quantum-Bayesian coherence*, Rev. Modern Phys. 85 (2013), 16931715.
- [16] M. Grassl, *On SIC-POVMs and MUBs in dimension 6*, Proceedings ERATO Conference on Quantum Information Science (EQIS 2004), Tokyo, 2004, 60–61.
- [17] M. Grassl, *Tomography of quantum states in small dimensions*, Electron. Notes Discrete Math. 20 (2005), 151–164.
- [18] M. Grassl, *Finding equiangular lines in complex space*, MAGMA 2006 Conference (Technische Universität Berlin, July, 2006), http://magma.maths.usyd.edu.au/conferences/Magma2006/talks/Grassl_Berlin.pdf (dostęp: 2020-12-12).

- [19] M. Grassl, SIC-POVMs, <http://sicpovm.markus-grassl.de/> (dostęp: 2020-12-20).
- [20] A. Grzesik, *Proste równokątne*, Wiad. Mat. 55 (2019), 377–381.
- [21] S. G. Hoggar, *Two quaternionic 4-polytopes*, [w:] *The Geometric Vein. The Coxeter Festschrift* (C. Davis, B. Grünbaum, F. A. Sherk, red.), Springer Verlag, New York 1981, 219–230.
- [22] S. G. Hoggar, *t-designs in projective spaces*, European J. Combin. 3 (1982), 233–254.
- [23] S. G. Hoggar, *64 Lines from a Quaternionic Polytope*, Geom. Dedicata 69 (1998), 287–289.
- [24] P. Horodecki, Ł. Rudnicki, K. Życzkowski, *Five open problems in quantum information*, przyjęte do druku w PRX Quantum.
- [25] L. P. Hughston, S. M. Salamon, *Surveying points in the complex projective plane*, Adv. Math. 286 (2016), 1017–1052.
- [26] J. Jedwab, A. Wiebe, *A simple construction of complex equiangular lines*, [w:] *Algebraic Design Theory and Hadamard Matrices. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics* (C. Colbourn, red.), Springer, Cham 2015, 159–169.
- [27] M. Magsino, D. G. Mixon, *Biangular Gabor frames and Zauner’s conjecture*, Proceedings SPIE 11138, Wavelets and Sparsity XVIII, 111381G (9 September 2019), arXiv:1908.02801 [math.MG].
- [28] J. Mann, *Equilateral dimension of Riemannian manifolds with bounded curvature*, Rose-Hulman Undergrad. Math. J. 14 (2013), 101–111.
- [29] A. Neumaier, *Combinatorial configurations in terms of distances*, Memorandum 81-09 (Dept. of Mathematics), Eindhoven University of Technology 1981.
- [30] QBism Group UMass Boston, <http://www.physics.umb.edu/Research/QBism/solutions.html> (dostęp: 2020-12-20).
- [31] S. K. Pandey, V. I. Paulsen, J. Prakash, M. Rahaman, *Entanglement breaking rank and the existence of SIC POVMs*, J. Math. Phys. 61 (2020), 042203.
- [32] J. M. Renes, R. Blume-Kohout, A. J. Scott, C. Caves, *Symmetric informationally complete quantum measurements*, J. Math. Phys. 45 (2004), 2171–2180.
- [33] K. Scharnhorst, *Angles in complex vector spaces*, Acta Appl. Math. 69 (2001), 95–103.
- [34] A. J. Scott, *SICs: Extending the list of solutions*, arXiv:1703.03993 [quant-ph].
- [35] A. J. Scott, M. Grassl, *SICs: A new computer study*, J. Math. Phys. 51 (2010), 042203.
- [36] W. Słomczyński, A. Szymusiak, *Morphophoric POVMs, generalised qplexes, and 2-designs*, Quantum 4 (2020), 338.
- [37] B. C. Stacey, *Sporadic SICs and the Normed Division Algebras*, Found. Phys. 47 (2017), 1060–1064.
- [38] A. Szymusiak, W. Słomczyński, *Informational power of the Hoggar symmetric informationally complete positive operator-valued measure*, Phys. Rev. A 94 (2016), 012122.
- [39] L. R. Welch, *Lower bounds on the maximum cross correlation of signals*, IEEE Trans. Inform. Theory 20 (1974), 397–399.
- [40] R. F. Werner, *Open quantum problems*, <https://oqp.iqoqi.univie.ac.at/> (dostęp: 2020-12-20).

- [41] G. Zauner, *Quantendesigns, Grundzüge einer nichtkommutativen Designtheorie*, Ph.D. thesis, Universität Wien 1999.
- [42] G. Zauner, *Quantum designs: foundations of a noncommutative design theory*, Int. J. Quantum Inf. 9 (2011), 445–507.
- [43] H. Zhu, *SIC-POVMs and Clifford groups in prime dimensions*, J. Phys. A 43 (2010), 305305.
- [44] H. Zhu, *Super-symmetric informationally complete measurements*, Ann. Physics 362 (2015), 311–326.

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński
wojciech.slomczynski@uj.edu.pl
anna.szymusiak@uj.edu.pl