

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Quebra dinâmica de simetria, simetria BRST e finitude em modelos supersimétricos em $(2+1)D$

Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante

Orientador: Prof. Dr. Adilson José da Silva

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Adilson José da Silva - (IFUSP)
Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles - (IFUSP)
Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho - (IFUSP)
Prof. Dr. Nelson Ricardo de Freitas Braga - (UFRJ)
Prof. Dr. Dionizio Bazeia Filho - (UFPB)

São Paulo
2012

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Cavalcante, Roberto Vinhaes Maluf

Quebra dinâmica de simetria, simetria BRST e finitude em
modelos supersimétricos. São Paulo, 2013.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo.
Instituto de Física – Depto. de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Adilson José da Silva

Área de Concentração: Teoria Geral de Partículas e
Campos

Unitemos: 1.Física; 2. Teoria de campos e ondas; 3.Teoria
de campos; 4.Teoria quântica de campo; 5.Supersimetria.

USP/IF/SBI-003/2013

Dedicatória

Em memória das minhas
queridas tias *Beli* e *Celina*.

AGRADECIMENTOS

- Ao professor Adilson José da Silva pelos anos de orientação e amizade. Agradeço sinceramente por sua paciência e disposição nos momentos que estive em sua sala tentando sanar minhas dúvidas e falhas.
- Ao professor Marcelo Otávio Caminha Gomes pelo apoio e ensinamentos constantes. Suas disciplinas e seminários foram de suma importância na minha formação de físico teórico.
- Ao professor Alysson Fábio Ferrari por desenvolver e disponibilizar o software SusyMath, fundamental para a confecção desta tese.
- Aos amigos e colaboradores científicos Enrique Alberto Gallegos Collado e Bruno André Charneski pelo convívio e amizade ao longo desse trabalho.
- Aos amigos de pós-graduação do Departamento de Física Matemática, em especial cito: Pedro Accioly, Juliano Neves, Cedrick Miranda, André Luiz, Miguel Barnabé, Pedro Gomes, Denny Oliveira, Fabrício Marques e aqueles que provavelmente esqueci de mencionar (me desculpem). Vocês tornaram minha estadia aqui na USP muito mais agradável.
- Aos funcionários do Departamento em especial a Cecília, Simone e Amélia, pelo atenção e disposição em sempre ajudar.
- Ao IF-USP pela infraestrutura e ao CNPq pelo suporte financeiro.
- Ao amigo Hiroshi Kimura pela camaradagem e apoio quando sempre precisei.
- Ao professor Carlos Alberto Santos de Almeida pelos conselhos e pela amizade firmada ao longo dessa jornada. Sou grato por sempre deixar o Departamento de Física da UFC de portas abertas.
- À minha mãe Ismaria, e irmãos Ricardo e Denize, que sempre apoiaram minhas escolhas e souberam perdoar-me por esses anos de ausência, derrotando a distância e a saudade com muito amor e carinho.
- À minha esposa Clênia Trindade Lucena Cavalcante, pelo amor em nossas vidas, apoio e compreensão sempre que precisei. Muito em mim é resultado de você.
- Agradeço especialmente as minhas tias Beli e Celina (*in memorian*) pelo exemplo, educação e amor, sem os quais eu nunca conseguiria chegar até aqui!

*Ó mar salgado, quanto do teu sal
São lágrimas de Portugal!
Por te cruzarmos, quantas mães choraram,
Quantos filhos em vão rezaram!
Quantas noivas ficaram por casar
Para que fosses nosso, ó mar!*

*Valeu a pena? Tudo vale a pena
Se a alma não é pequena.
Quem quer passar além do Bojador
Tem que passar além da dor.
Deus ao mar o perigo e o abismo deu,
Mas nele é que espelhou o céu.*

Fernando Pessoa

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	1
1 Supersimetria em um espaço-tempo com $2 + 1$ dimensões	5
1.1 Notações e definições	5
1.2 Álgebra de Grassmann	7
1.3 Superespaço e supercampos em $(2 + 1) D$	9
1.4 Multipletos escalares	11
1.5 Multipletos vetoriais	13
1.6 Superespaço Quântico	15
2 Teoria quântica de campos não comutativa: O formalismo de Weyl-Moyal	19
2.1 A correspondência Weyl-Moyal	19
2.2 Quantização e regras de Feynman para teorias de campos não comutativas	23
2.3 O mecanismo de mistura UV/IR	25
2.4 Não comutatividade em teorias de calibre	29
3 Potencial efetivo a dois laços para o modelo de Wess-Zumino em $2 + 1$ dimensões	33
3.1 Quebra dinâmica de (super)simetria em $2 + 1$ dimensões	33
3.2 Apresentação do modelo	35
3.3 Cálculo do potencial efetivo	36
3.3.1 Correção a um laço	38
3.3.2 Correção a dois laços	39
3.4 O vácuo supersimétrico	43
4 Identidades de Slavnov-Taylor para a QED não comutativa supersimétrica em $(2 + 1)D$	47

4.1	Supersimetria, simetria BRST e não comutatividade	47
4.2	Ação clássica em supercampos e a quantização no superespaço	49
4.2.1	Apresentação do modelo	49
4.2.2	Regras de Feynman	51
4.3	Identidades de Slavnov-Taylor para a ação efetiva: formulação em supercampos	54
4.3.1	Simetria BRST	54
4.3.2	Identidades de Slavnov-Taylor	57
4.4	Divergência superficial e finitude perturbativa	61
4.5	Prova explícita das identidades de ST: Transversalidade da polarização do vácuo.	68
4.6	Identidade de ST: Vértice triplo de calibre	80
4.7	Identidade de ST: Vértice matéria-calibre	81
4.8	Cálculos explícitos a nível de árvore	82
5	A teoria de Yang-Mills-Chern-Simons supersimétrica em $D = 2 + 1$ dimensões	93
5.1	Apresentação do modelo	93
5.2	Correções radiativas	95
5.3	Grau de divergência superficial e renormalizabilidade do modelo	96
5.4	Correções em dois laços: função de dois pontos do supercampo de calibre	98
	Conclusões	101
	Apêndices	102
A	O método da função zeta $\zeta(s)$	103
B	Integrais básicas a dois laços	107
C	Bolhas de vácuo no modelo de Wess-Zumino	109
D	Integrais divergentes no modelo SYMCSM a dois laços	111
	Referências Bibliográficas	117

Resumo

Neste trabalho estudamos três diferentes aspectos envolvendo a supersimetria no contexto da teoria de campos em $(2 + 1)$ dimensões do espaço-tempo. Consideramos primeiramente a possibilidade da quebra dinâmica de supersimetria no modelo de Wess-Zumino, calculando o potencial efetivo até a aproximação de dois laços. Verificamos que o estado de vácuo permanece supersimétrico e que indução de massa e a correspondente quebra de simetria discreta não são perturbativamente consistentes. Em seguida, voltamos nossa atenção para a análise das identidades de Slavnov-Taylor na eletrodinâmica não comutativa supersimétrica. A transversalidade da polarização do vácuo é verificada explicitamente na aproximação de um laço e com a conclusão de que nenhuma anomalia é introduzida pela não comutatividade ou pelo esquema de regularização adotado no formalismo de supercampos. Por fim, o comportamento ultravioleta para a teoria de Yang-Mills-Chern-Simons supersimétrica acoplada minimamente com supercampos de matéria é investigado. Verificamos que o modelo é superrenormalizável e que os termos divergentes persistem somente nas funções 1PI de dois pontos para o supercampo de calibre até a ordem de dois laços.

Abstract

In this work we study three different aspects involving supersymmetry in the context of quantum field theory in $(2 + 1)$ space-time dimensions. We consider first the possibility of dynamical supersymmetry breaking in the Wess-Zumino model, calculating the effective potential up to two loops. We found that the vacuum state remains supersymmetric and the dynamical generation of mass together with the discrete symmetry breaking are not perturbatively consistent. Next, we turn our attention to the analysis of the Slavnov-Taylor identities in the noncommutative supersymmetric electrodynamics. The transversality of the vacuum polarization is verified explicitly in the one loop approximation with the conclusion that no anomaly is introduced by the noncommutativity or the regularization scheme adopted in the superfields formalism. Finally, the ultraviolet behavior for supersymmetric Yang-Mills-Chern-Simons theory minimally coupled to matter superfields is investigated. We verify that the model is superrenormalizable and that the divergent terms persist only in the gauge superfield self-energy diagrams up to two-loop.

Introdução

O estudo das simetrias presentes na natureza têm se revelado fundamental para a compreensão dos mais diversos fenômenos físicos. Em particular, no Modelo Padrão das partículas elementares (MP), as simetrias do grupo de calibre $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ permitiram classificar todo o espectro das partículas observáveis até a presente data. Simetrias de calibre em geral, são consideradas simetrias internas pois as transformações dos campos e partículas não ocorrem no espaço-tempo real. Em contraste, existem as simetrias ligadas as transformações sobre o espaço-tempo que incluem por exemplo o grupo de Poincaré, isto é, o grupo das translações, rotações e “boosts” ¹.

No início dos anos 60, os físicos acreditavam que era possível encontrar um grupo de simetria que combinasse de modo não trivial o grupo de Poincaré com algum grupo de simetria interna. Contudo, após inúmeras tentativas, mostrou-se que tal objetivo era impossível dentro do contexto de grupos de Lie usual. De fato, os chamados teoremas “no-go” de Coleman e Mandula [1] provaram que se assumirmos algumas hipóteses plausíveis como localidade, causalidade, positividade de energia, finitude do número de partículas e outras suposições mais técnicas, então qualquer grupo de Lie que contém o grupo de Poincaré e um grupo compacto (interno) deve ser escrito como um produto direto de tais grupos, levando a uma álgebra trivial para os seus geradores ².

É claro que as limitações impostas pelos teoremas “no-go” são fortemente relacionadas com as hipóteses requeridas para prová-los. Uma delas repousa sobre a definição de grupo de Lie e de sua álgebra, que é composta por relações de comutação entre os geradores do grupo. No início dos anos 70, foi idealizado por Gelfand e Likhtman [2] e desenvolvido posteriormente por Wess e Zumino [3] que permitindo também relações de anticomutação para os geradores das transformações, chegava-se a uma extensão não-trivial do grupo de Poincaré que passava a relacionar bósons e férmons através de uma nova transformação de simetria, chamada de supersimetria (ou simplesmente SUSY). Em 1975, Haag, Lopuszanski e Sohnius [4] finalmente forneceram uma prova rigorosa de que a supersimetria era a única extensão possível para as simetrias do

¹Outras simetrias ligadas ao espaço-tempo são as simetrias discretas C, P e T.

²Uma discussão detalhada da prova do teorema de Coleman-Mandula pode ser encontrada no livro: *The Quantum Theory of Fields, Volume 3: Supersymmetry*, S. Weinberg, Cambridge University Press, 2005.

espaço-tempo admitida pela S-matriz no contexto de uma teoria de campos relativística³.

A supersimetria surge então como uma simetria que combina bósons e férmiões na mesma representação (ou no mesmo multiplet) de um supergrupo, tal que os geradores das transformações de supersimetria Q são espinores que satisfazem relações de anticomutação na forma $\{Q, Q\} \sim P$, com

$$Q | \text{Bóson} \rangle = | \text{Férmião} \rangle, \quad Q | \text{Férmião} \rangle = | \text{Bóson} \rangle, \quad (1)$$

onde P é o gerador das translações do grupo de Poincaré. Como consequência direta, toda partícula bosônica deve ter uma parceira fermiônica e vice versa. Contudo, tal espectro de novas partícula não foi observado até o momento. Assim, para que a supersimetria seja viável como teoria física, ela deve estar quebrada nas escalas de energias acessíveis atualmente.

Do ponto de vista puramente teórico, existem várias razões que motivam o estudo da supersimetria. Talvez, a principal delas esteja ligada ao fato de que correções radiativas tendem a ser menos divergentes em teorias supersimétricas, devido ao cancelamento das contribuições quânticas entre férmiões e bósons. Tal mecanismo de cancelamento fornece a possibilidade de construirmos teorias cujo comportamento no ultravioleta é sensivelmente melhorado; alguns modelos, em particular a teoria de super-Yang-Mills com $\mathcal{N} = 4$ em quatro dimensões são finitas em todas as ordens de perturbação [5]. Podemos destacar ainda a importância da supersimetria no contexto das teorias de grande unificação (GUT) tais como a teoria das supercordas, juntamente com a supergravidade (a extensão local da supersimetria).

O problema das divergências ultravioletas há muito preocupa os físicos teóricos e está diretamente relacionado com o produto dos operadores de campos no mesmo ponto, que em princípio não está bem definido. Na tentativa de contornar esse problema, Heisenberg [6] propôs a existência de uma comprimento mínimo, que implicava num princípio de incerteza para medidas de comprimento e eliminava assim o conceito de ponto ($\Delta x^\mu \Delta x^\nu = \Theta^{\mu\nu}$). Essas ideias deram origem ao conceito de espaço-tempo não comutativo no qual as coordenadas passam a obedecer a relação de comutação

$$[x^\mu, x^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}, \quad (2)$$

e foram primeiramente utilizadas por Snyder [7] como forma de amenizar o comportamento ultravioleta em teoria quântica de campos. Contudo, tais ideias foram postas de lado por um longo período em virtude do enorme sucesso do programa de renor-

³Um boa revisão histórica sobre o nascimento da supersimetria pode ser encontrada no livro: *The Supersymmetric World*, ed. by G. Kane, M. Shifman, World Scientific, 2000.

malização.

No final dos anos 90, o interesse pela não comutatividade foi retomado com grande impulso devido a descoberta de que uma teoria de Yang-Mills não comutativa poderia ser obtida como um limite de baixas energias da teoria de cordas na presença de um campo magnético de fundo [8]. Outra razão para considerarmos a ideia da quantização do espaço-tempo pode ser extraída de simples argumentos heurísticos envolvendo a teoria da relatividade geral. Quando consideramos distâncias comparáveis ao comprimento de Planck $l_p = \sqrt{G\hbar/c^3} \cong 10^{-33} \text{ cm}$, o campo gravitacional se torna tão intenso que nem a luz ou outro sinal são capazes de transmitir informação de modo que medidas de coordenadas perdem o significado [28].

Apesar do sucesso inicial motivado pela relação entre a não comutatividade e a teoria das cordas, alguns aspectos não familiares envolvendo o comportamento ultra-violeta dos diagramas de Feynman na presença da não comutatividade logo chamaram atenção. O exemplo mais importante é conhecido como “mistura UV/IR” que consiste na conversão de parte das divergências ultravioletas (UV) da teoria comutativa em singularidades infravermelhas (IR) que podem impossibilitar o tratamento perturbativo usual [10, 11, 12]. Outro ponto de destaque é a violação da unitariedade em modelos envolvendo a não comutatividade entre espaço e tempo [13].

Lembrando que teorias supersimétricas apresentam um melhor comportamento divergente é natural esperar que os termos não renormalizáveis em teorias não comutativas possam ser suavizados pela presença da supersimetria. Nesse contexto, vários modelos com supersimetria e/ou não comutatividade tem sido extensamente investigados por nosso grupo de pesquisa ao longo dos últimos anos [14].

Neste trabalho, estamos particularmente interessados em estudar três diferentes questões envolvendo as correções radiativas sobre modelos supersimétricos com $\mathcal{N} = 1$ em $D = 2 + 1$ dimensões: o mecanismo de quebra dinâmica de supersimetria aplicada ao modelo de Wess-Zumino (WZ), as identidades de Slavnov-Taylor para a eletrodinâmica supersimétrica não comutativa (NCSQED) e finalmente a questão envolvendo o cancelamento das divergências UV na teoria de super-Yang-Mills-Chern-Simons (SYMCS). Em toda nossa abordagem utilizamos o formalismo de supercampos, que permite preservar explicitamente a supersimetria em todas as etapas dos cálculos.

A seguir, apresentamos como este texto está dividido. No capítulo 1, apresentamos o formalismo adotado para implementar a supersimetria em um espaço-tempo $(2 + 1)D$, introduzindo os conceitos e as definições sobre álgebra supersimétrica, superespaço e supercampos, além de nossa notação. No capítulo 2, faremos uma breve revisão sobre teoria de campos não comutativas e discutiremos em mais detalhes o fenômeno da mistura UV/IR. No capítulo 3, estudaremos a possibilidade de quebra dinâmica de (super)simetria no modelo de WZ. No capítulo 4, apresentamos nosso

estudo inicial sobre as identidades de Slavnov-Taylor para a NCSQED, provando explicitamente que a transversalidade da polarização do vácuo não é afetada pela não comutatividade ou pelo particular mecanismo de regularização utilizada para preservar a supersimetria explicitamente. No capítulo 5, discutimos a finitude do modelo SYMCS na presença de campo de matéria e apresentamos um valor para o parâmetro de calibre no qual as divergências são todas eliminadas, em todas as ordens de perturbação. Por fim, no capítulo 5.4, apresentamos nossas conclusões e discutimos algumas perspectivas para este trabalho.

Capítulo 1

Supersimetria em um espaço-tempo com $2 + 1$ dimensões

Embora seja bastante extensa a literatura existente sobre supersimetria e de sua formulação no superespaço¹, não existe um padrão universalmente adotado referente as notações e convenções sobre este assunto. Por isso, julgamos conveniente apresentar o formalismo e as convenções utilizadas para descrever a supersimetria em $(2+1) D$ e fornecer as informações necessárias para o desenvolvimento do nosso estudo nos próximos capítulos. Todavia, não pretendemos ser auto-contido e sugerimos as referências [18, 19] para maiores detalhes.

1.1 Notações e definições

Neste texto adotaremos o sistema natural de unidades, onde $\hbar = c = 1$. Nosso espaço-tempo tridimensional possui assinatura Lorentziana dada pela métrica $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1)$ e o tensor completamente anti-simétrico ϵ^{abc} é definido por $\epsilon^{012} = 1$, onde índices latinos representam as coordenadas do espaço-tempo, assumindo os valores $(0, 1, 2)$.

O grupo de Lorentz em três dimensões é realizado na representação vetorial dada pelo grupo $SO(1, 2)$ ou na representação espinorial pelo grupo $SL(2, \mathbb{R})$. Neste último, a representação fundamental tem dimensão dois e atua sobre espinores reais de Majorana $\psi^\alpha = (\psi^1, \psi^2)$, definidos como variáveis de Grassmann (anticomutantes).

Seguindo [18], adotaremos a notação espinorial para todas as representações de Lorentz. Os índices espinoriais serão denotados por letras gregas α, β, \dots , com valores

¹Como referência básica, podemos citar os textos clássicos em [15, 16, 17].

(1,2) e serão abaixados ou levantados pelo tensor anti-simétrico definido por

$$C_{\alpha\beta} = -C_{\beta\alpha} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

com a convenção de soma “noroeste-sudeste”, ou seja, $\psi^\alpha = C^{\alpha\beta}\psi_\beta$ e $\psi_\alpha = \psi^\beta C_{\beta\alpha}$, tal que,

$$C^{\alpha\beta}C_{\alpha\mu}C_{\beta\nu} = C_{\mu\nu} \rightarrow C^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -C_{\alpha\beta}. \quad (1.2)$$

A partir dessa convenção, observamos que para ψ^α real, ψ_α é imaginário e suas componentes se relacionam por

$$\psi_\alpha \equiv (\psi_1, \psi_2) = \psi^\beta C_{\beta\alpha} = (i\psi^2, -i\psi^1). \quad (1.3)$$

O “quadrado” de um espinor é definido por:

$$(\psi)^2 \equiv \frac{1}{2}\psi^\alpha\psi_\alpha = i\psi^1\psi^2, \quad (1.4)$$

que combinado com a definição usual de conjugação complexa $(AB)^* \equiv B^*A^*$, resulta ser hermitiano

$$((\psi)^2)^* = -i(\psi^2)^*(\psi^1)^* = -i\psi^2\psi^1 = i\psi^1\psi^2 = (\psi)^2. \quad (1.5)$$

Algumas consequências imediatas das definições acima são:

$$C^{\alpha\beta}C_{\lambda\beta} = \delta_\lambda^\alpha, \quad C^{\lambda\beta}C_{\beta\alpha} = -\delta_\alpha^\lambda, \quad (1.6)$$

$$C_{\alpha\beta}C^{\gamma\delta} = \delta_\alpha^\gamma\delta_\beta^\delta - \delta_\beta^\gamma\delta_\alpha^\delta, \quad (1.7)$$

$$\psi^\alpha\psi_\alpha = C^{\alpha\beta}\psi_\beta\psi_\alpha = -\psi_\beta C^{\beta\alpha}\psi_\alpha = -\psi_\beta\psi^\beta, \quad (1.8)$$

$$\psi^\alpha\psi^\beta = C^{\beta\alpha}\psi^2, \quad \psi_\alpha\psi_\beta = C_{\beta\alpha}\psi^2. \quad (1.9)$$

A escolha de utilizar a notação espinorial para todas as representações de Lorentz implica que um vetor (representação tridimensional) será descrito por um bi-espinor simétrico $V^{\alpha\beta} = (V^{11}, V^{12}, V^{22})$ ou um bi-espinor de traço nulo V^α_β , definido por meio das matrizes de Dirac como

$$V^{\alpha\beta} \equiv (\gamma^a)^{\alpha\beta}v_a = \begin{pmatrix} v_0 + v_1 & v_2 \\ v_2 & v_0 - v_1 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

$$V^\alpha_\beta = V^{\alpha\delta} C_{\delta\beta} = (\gamma^a)^\alpha_\beta v_a = \begin{pmatrix} iv_2 & -i(v_0 + v_1) \\ i(v_0 - v_1) & -iv_2 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

onde escolhemos

$$(\gamma^0)^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\gamma^1)^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\gamma^2)^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

de tal modo que um bi-espinor se comporta como um objeto comutante. Algumas relações úteis que as matrizes de Dirac em (1.12) satisfazem e que podem ser facilmente verificadas seguem abaixo:

$$\begin{aligned} (\gamma^a)^{\alpha\beta}(\gamma^b)_{\beta\gamma} + (\gamma^b)^{\alpha\beta}(\gamma^a)_{\beta\gamma} &= 2\eta^{ab}\delta_\gamma^\alpha, \\ (\gamma^a)^{\alpha\beta}(\gamma^b)_{\beta\gamma} - (\gamma^b)^{\alpha\beta}(\gamma^a)_{\beta\gamma} &= 2i\epsilon^{abc}(\gamma_c)^\alpha_\gamma, \\ (\gamma^a)^{\alpha\beta}(\gamma^b)_{\beta\alpha} &= 2\eta^{ab}, \\ (\gamma^a)^{\alpha\beta}(\gamma_a)_{\gamma\delta} &= \delta_\gamma^\alpha\delta_\delta^\beta + \delta_\delta^\alpha\delta_\gamma^\beta, \\ \epsilon^{abc}\epsilon^{a'b'c'}\eta_{cc'} &= -(\eta^{aa'}\eta^{bb'} - \eta^{ab'}\eta^{ba'}). \end{aligned} \quad (1.13)$$

1.2 Álgebra de Grassmann

Na seção anterior, foi dito que os espinores ψ^α são variáveis de Grassmann, isto é, que anticomutam. Vamos agora formalizar esta definição e apresentar as principais operações que tais objetos satisfazem.

Sejam θ^α os geradores de uma n -dimensional álgebra de Grassmann, definida pela relação

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} \equiv \theta^\alpha\theta^\beta + \theta^\beta\theta^\alpha = 0, \quad (1.14)$$

onde $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$. Em particular², $(\theta^\alpha)^2 = 0$. Podemos utilizar este fato para concluir que a expansão em Taylor de uma função arbitrária definida nessas variáveis somente conterá um número finito de termos; por exemplo, para um álgebra bidimensional (nossa caso de interesse) temos

$$f(\theta) = a_0 + a_{1\alpha}\theta^\alpha + a_2\theta^2 \quad (1.15)$$

com a_0 e a_2 números ordinários (reais ou complexos) e $a_{1\alpha}$ é um espinor de duas componentes.

A operação de diferenciação é definida pela relação,

²Não confundir com θ^2 que é evidentemente diferente de zero.

$$\partial_\alpha \theta^\beta \equiv \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \theta^\beta \equiv \delta_\alpha^\beta, \quad (1.16)$$

de modo que

$$\partial^\alpha \theta_\beta = C^{\alpha\mu} \partial_\mu \theta^\nu C_{\nu\beta} = (\delta_\nu^\alpha \delta_\beta^\mu - \delta_\beta^\alpha \delta_\nu^\mu) \delta_\mu^\nu = -\delta_\beta^\alpha, \quad (1.17)$$

$$\partial_\alpha \theta^2 = \frac{1}{2} \partial_\alpha \theta^\beta \theta_\beta = \frac{1}{2} (\delta_\alpha^\beta \theta_\beta - \theta^\beta \partial_\alpha \theta_\beta) = \theta_\alpha. \quad (1.18)$$

Precisaremos também do operador Laplaciano, definido por

$$\partial^2 \equiv \frac{1}{2} \partial^\alpha \partial_\alpha, \quad (1.19)$$

e que produz imediatamente as seguintes igualdades

$$\partial^2 \theta^\alpha = 0, \quad (1.20)$$

$$\partial^2 \theta^2 = -1. \quad (1.21)$$

Para introduzir a operação de integração sobre as variáveis de Grassmann, adotamos a convenção de Berezin [20], definida por

$$\int d\theta_\alpha \theta^\beta \equiv \delta_\alpha^\beta, \quad \int d\theta_\alpha \equiv 0, \quad (1.22)$$

de modo a deixar a integração de qualquer função nas variáveis de grassmann invariante por translação: $\theta^\alpha \rightarrow \theta^\alpha + \eta^\alpha$. Por exemplo, em uma dimensão temos:

$$\begin{aligned} \int d\theta f(\theta + \eta) &= \int d\theta (a_0 + \theta a_1 + \eta a_1) \\ &= a_0 \int d\theta + a_1 \int d\theta \theta - a_1 \eta \int d\theta \\ &= a_1 \\ &= \int d\theta f(\theta). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Formalmente, observamos que a integração é uma operação equivalente à diferenciação, $\int d\theta_\alpha \theta^\beta = \delta_\alpha^\beta = \partial_\alpha \theta^\beta$. Definindo o elemento de medida em duas dimensões por

$$d\theta^2 \equiv \frac{1}{2} d\theta^\alpha d\theta_\alpha, \quad (1.24)$$

obtemos a integral dupla

$$\int d^2\theta \theta^2 = \partial^2 \theta^2 = -1, \quad (1.25)$$

que permite definir a função delta satisfazendo as condições usuais:

$$\delta^2(\theta) = -\theta^2 = -\frac{1}{2}\theta^\alpha\theta_\alpha, \quad (1.26)$$

$$\int d^2\theta \delta^2(\theta - \theta') f(\theta) = f(\theta'). \quad (1.27)$$

1.3 Superespaço e supercampos em $(2+1)D$

Uma forma compacta e muito útil de se trabalhar com supersimetria, inventada por A. Salam e J. Strathdee [21], é considerar sua formulação no superespaço. Na sua forma mais simples ($\mathcal{N} = 1$, sem cargas centrais), o superespaço 5-dimensional é uma variedade diferenciável parametrizada por três coordenadas bosônicas $x^{\alpha\beta}$ e duas coordenadas fermiônicas θ^α , denotadas compactamente por $z^M = (x^{\alpha\beta}, \theta^\alpha)$, de modo que $(z^M)^\dagger = z^M$.

A diferenciação e integração sobre as coordenadas fermiônicas já foram definidas na seção anterior. De forma análoga, a derivada para as coordenadas bosônicas é definida por

$$\partial_{\mu\nu} = (\gamma^\alpha)_{\mu\nu}\partial_\alpha, \quad (1.28)$$

$$\partial_{\mu\nu}x^{\sigma\tau} \equiv \frac{1}{2}\delta_{(\mu}^\sigma\delta_{\nu)}^\tau \equiv \frac{1}{2}(\delta_\mu^\sigma\delta_\nu^\tau + \delta_\nu^\sigma\delta_\mu^\tau), \quad (1.29)$$

de tal modo que a divergência $\partial_{\mu\nu}x^{\mu\nu} = 3$ e os índices são levantados com auxílio da métrica espinorial: $\partial^{\mu\nu} = C^{\mu\alpha}C^{\nu\beta}\partial_{\alpha\beta}$. Outro operador que precisamos definir é o *D'Alambertiano*:

$$\square \equiv \frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}. \quad (1.30)$$

Todas as outras operações que envolvem as coordenadas bosônicas são definidas de modo usual.

Uma função arbitrária $\Phi_{...}(x, \theta)$ definida no superespaço é chamada de supercampo. Aqui, os pontos indicam outros índices de simetria que possam estar associados ao supercampo, como simetrias internas ou do espaço-tempo. Um supercampo transforma-se de modo usual em relação as transformações do grupo de Poincaré, com os geradores $P_{\alpha\beta}$ (translações) e $M_{\alpha\beta\rho\sigma}$ (rotações e boosts) definidos na notação espinorial e satisfazendo as álgebra de Lie do grupo.

A álgebra supersimétrica é realizada quando adicionamos à álgebra de Poincaré relações de anticomutação envolvendo geradores espinoriais. Essa álgebra de Lie estendida é denominada super-álgebra ou álgebra “graduada” e é dada por

$$[P_{\mu\nu}, P_{\rho\sigma}] = 0, \quad (1.31)$$

$$\{Q_\mu, Q_\nu\} = 2P_{\mu\nu}, \quad (1.32)$$

$$[Q_\mu, P_{\nu\rho}] = 0, \quad (1.33)$$

além das relações de comutação envolvendo $M_{\alpha\beta\rho\sigma}$. Uma realização dessa álgebra no superespaço é obtida definindo os geradores em termos de derivadas por

$$P_{\mu\nu} = i\partial_{\mu\nu}, \quad (1.34)$$

$$Q_\mu = i(\partial_\mu - \theta^\nu i\partial_{\nu\mu}). \quad (1.35)$$

Podemos avaliar o efeito de uma transformação supersimétrica por meio do operador $\exp\{-i(\xi^{\mu\nu}P_{\mu\nu} + \epsilon^\alpha Q_\alpha)\}$ atuando sobre um supercampo arbitrário, com $\xi^{\mu\nu}$ e ϵ^α parâmetros reais e *constantes*. Assim,

$$\begin{aligned} \Phi(x', \theta') &= \exp[-i(\xi^{\lambda\rho}P_{\lambda\rho} + \epsilon^\lambda Q_\lambda)]\Phi(x, \theta) \\ &= [1 + \xi^{\lambda\rho}\partial_{\lambda\rho} + \epsilon^\lambda(\partial_\lambda - i\theta^\rho\partial_{\lambda\rho})]\Phi(x, \theta) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \Phi(x, \theta) + \epsilon^\lambda\partial_\lambda\Phi + (\xi^{\lambda\rho} - \frac{i}{2}\epsilon^{(\lambda}\theta^{\rho)})\partial_{\lambda\rho}\Phi, \end{aligned} \quad (1.36)$$

e corresponde a uma translação $(x, \theta) \rightarrow (x', \theta')$ no superespaço, com

$$\begin{aligned} x'^{\lambda\rho} &= x^{\lambda\rho} + \xi^{\lambda\rho} - \frac{i}{2}\epsilon^{(\lambda}\theta^{\rho)}, \\ \theta'^\lambda &= \theta^\lambda + \epsilon^\lambda. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Deve-se observar que uma translação nas coordenadas fermiônicas necessariamente implicará em uma translação nas coordenadas bosônicas, mas o contrário não se verifica. Além do mais, se Φ é um supercampo (transformando-se segundo (1.36)), $\partial_{\mu\nu}\Phi$ também é, desde que

$$\begin{aligned} \partial_{\mu\nu}\Phi(x', \theta') &= \partial_{\mu\nu}\left(\exp[-i(\xi^{\lambda\rho}P_{\lambda\rho} + \epsilon^\lambda Q_\lambda)]\Phi(x, \theta)\right) \\ &= [1 + \xi^{\lambda\rho}\partial_{\lambda\rho} + \epsilon^\lambda(\partial_\lambda - i\theta^\rho\partial_{\lambda\rho})]\partial_{\mu\nu}\Phi(x, \theta), \end{aligned} \quad (1.38)$$

onde utilizamos o fato que derivadas espaço-temporais comportam-se como bósons. O mesmo não acontece com derivadas espinoriais $\partial_\mu\Phi$, mas pode-se definir derivadas covariantes por transformação de supersimetria como

$$D_\mu = \partial_\mu + i\theta^\nu\partial_{\nu\mu}, \quad (1.39)$$

obedecendo as seguintes relações de comutação e anticomutação com os geradores

$$[D_\mu, P_{\nu\lambda}] = 0, \quad (1.40)$$

$$\{D_\mu, Q_\nu\} = 0. \quad (1.41)$$

Abaixo, segue algumas identidades que as derivadas $\partial_{\mu\nu}$ e D_μ satisfazem e serão bastante úteis nos cálculos seguintes.

$$\{D_\mu, D_\nu\} = 2iD_{\mu\nu}, \quad (1.42)$$

$$[D_\mu, D_\nu] = 2C_{\nu\mu}D^2, \quad (1.43)$$

$$D_\mu D_\nu = i\partial_{\mu\nu} + C_{\nu\mu}D^2, \quad (1.44)$$

$$D^2 D_\mu = -D_\mu D^2 = i\partial_{\mu\nu}D^\nu, \quad (1.45)$$

$$D^\nu D^\gamma D_\nu = 0, \quad (1.46)$$

$$D^\beta D^\gamma D_\alpha = D_\alpha D^\gamma D^\beta, \quad (1.47)$$

$$(D^2)^2 = \square. \quad (1.48)$$

As derivadas também obedecem a regra de Leibnitz e podem ser integradas por partes quando inseridas numa integral em $d^3x d^2\theta$. Outra identidade útil é

$$\int d^3x d^2\theta \Phi(x, \theta) = \int d^3x \partial^2 \Phi(x, \theta) = \int d^3x (D^2 \Phi(x, \theta)) |_{\theta=0}. \quad (1.49)$$

1.4 Multipletos escalares

Seja $\Phi_{\alpha\beta\dots}(x, \theta)$ um supercampo arbitrário. Devido a (1.14), uma expansão geral em série de potências de θ será sempre finita e pode ser expressa como

$$\Phi_{\alpha\beta\dots}(x, \theta) = A_{\alpha\beta\dots}(x) + \theta^\mu \lambda_{\mu\alpha\beta\dots}(x) - \theta^2 F_{\alpha\beta\dots}(x), \quad (1.50)$$

onde A, B, e F são chamados de campos componentes de Φ .

A representação mais simples de supersimetria é dada por um supercampo escalar real, chamado também de multipletos escalares, que escrito em termos de componentes assume a forma

$$\Phi(x, \theta) = A(x) + \theta^\mu \psi_\mu(x) - \theta^2 F(x), \quad (1.51)$$

com $A(x)$ e $F(x)$ funções escalares de x e $\psi_\mu(x)$ um espinor de duas componentes. Essas componentes podem ser rapidamente obtidas por projeções do supercampo no espaço-tempo ordinário como segue

$$\begin{aligned} A(x) &= \Phi(x, \theta)|, \\ \psi_\alpha(x) &= D_\alpha \Phi(x, \theta)|, \\ F(x) &= D^2 \Phi(x, \theta)|, \end{aligned} \quad (1.52)$$

com a barra vertical $|$ indicando que após a operação correspondente ter sido efetuada no supercampo, devemos tomar $\theta = 0$.

As transformações de supersimetria para os campos componentes são obtidas a partir de (1.36), tomando-se $\tilde{\epsilon}^{\alpha\beta} = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \delta\Phi(x, \theta) &= \epsilon^\lambda (\partial_\lambda - i\theta^\rho \partial_{\lambda\rho}) \Phi(x, \theta) \\ &= \epsilon^\lambda \psi_\lambda + \theta^\rho (\epsilon^\lambda i\partial_{\lambda\rho} A + \epsilon^\lambda C_{\rho\lambda} F) - \theta^2 \epsilon^\lambda C^{\sigma\rho} i\partial_{\lambda\rho} \psi_\sigma \\ &\equiv \delta A + \theta^\rho \delta \psi_\rho - \theta^2 \delta F, \end{aligned} \quad (1.53)$$

resultando em

$$\begin{aligned} \delta A &= \epsilon^\lambda \psi_\lambda, \\ \delta \psi_\rho &= \epsilon^\lambda i\partial_{\lambda\rho} A + \epsilon^\lambda C_{\rho\lambda} F, \\ \delta F &= \epsilon^\lambda C^{\sigma\rho} i\partial_{\lambda\rho} \psi_\sigma. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Pode-se notar que a transformação de supersimetria mistura as componentes bosônicas com fermiônicas e que o comutador de duas transformações sucessivas produz uma translação no espaço-tempo

$$[\delta_1, \delta_2](comp.) = -2\epsilon_1^\lambda \epsilon_2^\alpha i\partial_{\lambda\alpha}(comp.). \quad (1.55)$$

Para ilustrar o formalismo, vamos tomar como exemplo a ação da teoria $\lambda\Phi^3$:

$$S = \int d^3x d^2\theta \left[-\frac{1}{2} (D_\alpha \Phi)^2 + \frac{1}{2} m \Phi^2 + \frac{\lambda}{6} \Phi^3 \right]. \quad (1.56)$$

Usando $\int d^3x d^2\theta f(\Phi, D_\alpha \Phi) = \int d^3x D^2 f(\Phi, D_\alpha \Phi)|$, a parte cinética de (1.56) em ter-

mos das componentes fica

$$\begin{aligned}
S_{kin} &= -\frac{1}{2} \int d^3x d^2\theta \frac{1}{2} D^\alpha \Phi D_\alpha \Phi \\
&= \frac{1}{2} \int d^3x d^2\theta \Phi D^2 \Phi \\
&= \frac{1}{2} \int d^3x D^2 [\Phi D^2 \Phi] | \\
&= \frac{1}{2} \int d^3x (D^2 \Phi D^2 \Phi + D^\alpha \Phi D_\alpha D^2 \Phi + \Phi (D^2)^2 \Phi) | \\
&= \frac{1}{2} \int d^3x (F^2 + \psi^\alpha i \partial_\alpha^\beta \psi_\beta + A \square A) .
\end{aligned} \tag{1.57}$$

Os termos de massa e interação resultam em

$$\begin{aligned}
S_{mass+int} &= \int d^3x d^2\theta \left[\frac{1}{2} m \Phi^2 + \frac{\lambda}{6} \Phi^3 \right] \\
&= \int d^3x D^2 \left[\frac{1}{2} m \Phi^2 + \frac{\lambda}{6} \Phi^3 \right] | \\
&= \int d^3x \frac{1}{2} D^\beta [m \Phi D_\beta \Phi + \frac{\lambda}{2} \Phi^2 D_\beta \Phi] | \\
&= \int d^3x [m(\psi^2 + AF) + \lambda(A\psi^2 + \frac{1}{2} A^2 F)] .
\end{aligned} \tag{1.58}$$

1.5 Multipletos vetoriais

Teorias de calibre usuais no espaço-tempo de Minkowski são construídas ao se impor que a ação do modelo seja invariante por alguma transformação de simetria representada por algum grupo de Lie unitário, com álgebra Lie dada por

$$[T_m, T_n] = i f_{mn}^l T_l, \quad T_m = (T_m)^\dagger, \tag{1.59}$$

e com os elementos do grupo escritos na forma exponencial

$$g = \exp(i\alpha^m T_m), \tag{1.60}$$

definidos com parâmetros reais $(\alpha^m)^* = \alpha^m$. Os campos do modelo devem pertencer a uma dada representação do grupo e transformam-se de acordo com

$$U(g_1)U(g_2) = U(g_1 \circ g_2), \quad U(g)U^\dagger(g) = \mathbb{I}. \tag{1.61}$$

A extensão para supercampos pode ser feita de modo análogo. Consideremos por simplicidade o caso *abeliano* de uma rotação de fase *constante*. Para um supercampo

escalar complexo,

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Phi_1(z) + i\Phi_2(z)], \quad (1.62)$$

onde Φ_1 e Φ_2 são supercampos escalares reais, a lei de transformação é dada por

$$\begin{aligned} \Phi(z) \longrightarrow \Phi'(z) &= e^{iK}\Phi, \\ \bar{\Phi}(z) \longrightarrow \bar{\Phi}'(z) &= \bar{\Phi}e^{-iK}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

A Lagrangiana livre $|D\Phi|^2$ é invariante por esta transformação. Para estender essa simetria para uma fase local, isto é, com $K = K(x, \theta)$ um supercampo escalar real definido por

$$K(x, \theta) = \omega(x) + \theta^\alpha \zeta_\alpha(x) - \theta^2 \tau(x), \quad (1.64)$$

precisamos definir uma derivada covariante de calibre que atuando sobre Φ e $\bar{\Phi}$ mantenha $\mathcal{L}_{cin} = D^\alpha \bar{\Phi} D_\alpha \Phi$ invariante. Isto é obtido por meio de

$$D_\alpha \rightarrow \nabla_\alpha = D_\alpha - iA_\alpha, \quad (1.65)$$

com A_α um supercampo espinorial real, chamado de conexão de calibre espinorial. Sua lei de transformação é obtida impondo-se que $(\nabla\Phi)' = e^{iK}(\nabla\Phi)$, implicando diretamente em

$$\nabla'_\alpha = e^{iK}\nabla e^{-iK}, \quad (1.66)$$

tal que

$$A'_\alpha = e^{iK}(A_\alpha + D_\alpha K)e^{-iK}. \quad (1.67)$$

A expansão em série de Taylor de A_α na variável θ revela seu conteúdo em termos de campos componentes e pode ser escrita como

$$A_\alpha(x, \theta) = \chi_\alpha(x) - \theta_\alpha H(x) + i\theta^\beta V_{\beta\alpha}(x) - \theta^2(i\partial_{\alpha\beta}\chi^\beta(x) + 2\lambda_\alpha(x)), \quad (1.68)$$

onde χ_α e λ_α são espinores reais, $V_{\alpha\beta}$ é um biespinor real e simétrico e $H(x)$ um escalar. Tais componentes, são determinadas imediatamente pelas seguintes projeções do supercampo A_α :

$$\begin{aligned} \chi_\alpha &= A_\alpha|_{\theta=0}, \\ H &= \frac{1}{2}D^\alpha A_\alpha|_{\theta=0}, \\ V_{\alpha\beta} &= -\frac{i}{2}(D_\alpha A_\beta + D_\beta A_\alpha)|_{\theta=0}, \\ \lambda_\alpha &= \frac{1}{2}D^\beta D_\alpha A_\beta|_{\theta=0}. \end{aligned} \quad (1.69)$$

A partir de A_α , podemos construir o supercampo

$$W_\alpha = \frac{1}{2} D^\beta D_\alpha A_\beta, \quad (1.70)$$

que é invariante sob transformação de calibre e devido a (1.45), satisfaz a identidade $D^\alpha W_\alpha = 0$. Como veremos a seguir, W_α é o análogo supersimétrico ao tensor intensidade de campo $F^{\mu\nu}$ da teoria eletromagnética. Sua expansão em componentes pode ser escrita como

$$W_\alpha = a_\alpha(x) - \theta_\alpha b(x) + \theta^\beta f_{\alpha\beta}(x) - \theta^2 d_\alpha, \quad (1.71)$$

e se relacionam com as componentes de A_α por meio das seguintes projeções:

$$\begin{aligned} a_\alpha &= W_\alpha| = \lambda_\alpha, \\ b &= D^\alpha W_\alpha| = 0, \\ f_{\alpha\beta} &= D_\alpha W_\beta| = -\frac{1}{2}(\partial_\alpha^\mu V_{\mu\beta} + \partial_\beta^\mu V_{\mu\alpha}), \\ d_\alpha &= D^2 W_\alpha| = -\frac{i}{2}\partial_{\alpha\beta}\lambda^\beta. \end{aligned} \quad (1.72)$$

O conteúdo físico de W^α é revelado se construirmos a seguinte ação invariante de calibre

$$S = \int d^5 z W^2 = \int d^3 x d^2 \theta \frac{1}{2} W^\alpha W_\alpha, \quad (1.73)$$

que após a integração em $d^2\theta$ assume a forma

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int d^3 x D^2 (W^\alpha W_\alpha)|, \\ &= \frac{1}{4} \int d^3 x D^\beta D_\beta (W^\alpha W_\alpha)|, \\ &= \int d^3 x \left(W^\alpha D^2 W_\alpha - \frac{1}{2} D^\beta W^\alpha D_\beta W_\alpha \right)|, \\ &= \int d^3 x \left(-\frac{1}{2} \lambda^\alpha i \partial_{\alpha\beta} \lambda^\beta - \frac{1}{2} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right), \end{aligned} \quad (1.74)$$

sendo constituída do termo de Maxwell na representação espinorial e um termo cinético de Dirac para a componente λ_α .

1.6 Superespaço Quântico

Teorias supersimétricas podem ser quantizadas estendendo-se o formalismo das integrais de trajetórias para o superespaço, em completa analogia com a formulação para o espaço-tempo usual. A grande vantagem de se trabalhar com a teoria formulada

no superespaço é poder manipular em “blocos” os campos componentes em um dado multiplet, mantendo a supersimetria manifesta em todas as etapas dos cálculos. Na formulação em termos de campos componentes, os cálculos dos efeitos quânticos são muito mais extensos do ponto de vista computacional e em geral, as duas abordagens produzem os mesmos resultados físicos.

Para ilustrar o formalismo, consideremos o gerador funcional de um supercampo escalar real massivo com auto-interação arbitrária:

$$Z(J) = \exp[iS_{int}(\frac{\delta}{\delta J})] \int \mathcal{D}\Phi \exp[i \int \frac{1}{2}\Phi(D^2 + m)\Phi + J\Phi]. \quad (1.75)$$

Completando-se os quadrados da parte livre, obtemos

$$Z(J) = \exp[iS_{int}(\frac{\delta}{\delta J})] \exp[-i \int d^3x d^2\theta \frac{1}{2} J \frac{1}{D^2 + m} J]. \quad (1.76)$$

No espaço dos momentos, as regras de Feynman são obtidas por:

- Propagadores:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(p, \theta)} \cdot \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(-p, \theta')} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} d^2\theta (-i) \left\{ \frac{1}{2} J(k, \theta) \frac{1}{D^2 + m} J(-k, \theta) \right\} \\ = -i \frac{(D^2 - m)}{p^2 + m^2} \delta^2(\theta - \theta'), \end{aligned} \quad (1.77)$$

onde usamos $\frac{1}{D^2 + m} = \frac{D^2 - m}{\square - m^2}$.

- Vértices: Um termo de interação é do tipo $\int d^3x d^2\theta \Phi D^\alpha \Phi D^\beta \Phi D^2 \Phi \dots$. Assim, cada vértice possui Φ linhas saindo, com os operadores D^α , D^β , etc, atuando sobre cada linha correspondente, e ainda uma integral sobre $d^2\theta$.

Para cálculos perturbativos, assim como na teoria quântica de campos usual, é conveniente determinar a ação efetiva:

$$\begin{aligned} \Gamma(\Phi) = \sum \frac{-i}{n!} \int \frac{d^3p_1 \dots d^3p_n}{(2\pi)^{3n}} d^2\theta_1 \dots d^2\theta_n \Phi(p_1, \theta_1) \dots \Phi(p_n, \theta_n) \\ \times (2\pi)^3 \delta(\sum_n p_i) \prod_L \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \prod_{VI} \int d^2\theta \prod_P \prod_V, \end{aligned} \quad (1.78)$$

onde L , VI , P e V representam o número de laços, vértices internos, propagadores e vértices, respectivamente.

Podemos manipular as integrações nos θ 's para reduzir a ação efetiva ao produtos de todos os supercampos Φ 's calculados em uma única variável θ .

Isso é possível utilizando as seguintes regras:

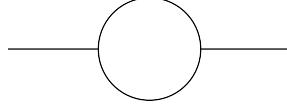


Figura 1.1: Correção à auto-energia do supercampo Φ com interação $\lambda\Phi^3$.

$$D_\alpha(\theta_i, k)\delta(\theta_i - \theta_{i+1}) = -D_\alpha(\theta_{i+1}, -k)\delta(\theta_i - \theta_{i+1}),$$

$$\delta^2(\theta_1 - \theta_2)\delta^2(\theta_2 - \theta_1) = 0,$$

$$\delta^2(\theta_1 - \theta_2)D^\alpha\delta^2(\theta_2 - \theta_1) = 0,$$

$$\delta^2(\theta_1 - \theta_2)D^2\delta^2(\theta_2 - \theta_1) = \delta^2(\theta_1 - \theta_2). \quad (1.79)$$

A aplicação sucessiva dessas regras reduz a ação efetiva à forma

$$\begin{aligned} \Gamma(\Phi) &= \int \frac{d^3 p_1 \cdots d^3 p_n}{(2\pi)^{3n}} d^2 \theta \\ &\times G(p_1, \dots, p_n) \Phi(p_1, \theta) \cdots D^\alpha \Phi(p_i, \theta) \cdots D^2 \Phi(p_j, \theta) \cdots, \end{aligned} \quad (1.80)$$

onde G é obtida por integração nos momentos dos “loops” internos.

No modelo $\lambda\Phi^3$ sem massa, a correção de auto-energia é representada pelo supergráfico de Feynman da Figura (1.1).

$$\Gamma_2 = \frac{i\lambda^2}{4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \Phi(p, \theta_1) \Phi(-p, \theta_2) \left[\frac{D_1^2 \delta_{12}}{k^2} \right] \left[\frac{D_2^2 \delta_{21}}{(k-p)^2} \right],$$

tal que $\delta_{12} = \delta(\theta_1 - \theta_2)$. Por conveniência, podemos selecionar a parte dependente de θ escrevendo

$$\Gamma_2(p) = \frac{i\lambda^2}{4} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 (k-p)^2} \Theta(p, \theta),$$

com

$$\Theta(p, \theta) = \int d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \left[D_1^2 \delta_{12} \right] \left[D_2^2 \delta_{21} \right] \Phi(p, \theta_1) \Phi(-p, \theta_2).$$

Os termos envolvendo θ podem ser manipulados, utilizando integração por partes:

$$\begin{aligned}
 & \Phi(-p, \theta_2)[D_1^2\delta_{12}][D_2^2\delta_{21}]\Phi(p, \theta_1) = \\
 & = \Phi_2(-p) \left(-\frac{1}{2} \right) D_1^\alpha \delta_{12} \left[D_{1\alpha} \left[(D_2^2\delta_{21})\Phi_1(p) \right] \right] \\
 & = \Phi_2(-p) \delta_{12} \frac{1}{2} D_1^\alpha \left[D_{1\alpha} \left[(D_2^2\delta_{21})\Phi_1(p) \right] \right] \\
 & \Phi_2 \delta_{12} \left[(D_1^2 D_2^2 \delta_{21})\Phi_1 + (D_1^\alpha D_2^2 \delta_{21}) D_{1\alpha} \Phi_1 + (D_2^2 \delta_{21})(D_1^2 \Phi_1) \right], \quad (1.81)
 \end{aligned}$$

e de acordo com as regras (1.79) em adição com $(D^2)^2 = -k^2$ e $D^\alpha D^2 = k^{\alpha\beta} D_\beta$, obtemos

$$\Gamma_2(p) = \frac{i\lambda^2}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2(k-p)^2} \int d^2\theta \Phi(-p, \theta) D^2 \Phi(p, \theta),$$

reduzindo a ação efetiva ao produto dos supercampos calculados em uma única variável θ .

Capítulo 2

Teoria quântica de campos não comutativa: O formalismo de Weyl-Moyal

Este capítulo é dedicado a fornecer uma breve revisão sobre a não comutatividade em teoria quântica de campos baseada na correspondência Weyl-Moyal. Como exemplo, vamos aplicar o formalismo no modelo particular $\lambda\phi^4$ em quatro dimensões. Após obter as regras de Feynman modificadas pelo produto Moyal, discutiremos o mecanismo de mistura UV/IR calculando explicitamente a correção radiativa para a função de dois pontos na aproximação de um laço. Embora o assunto seja vasto e já bastante explorado na literatura, julgamos necessário explicitar os principais resultados e definições matemáticas sobre o tema antes de dar prosseguimento ao nosso estudo. Mais detalhes podem ser encontrados nos textos de revisão [22].

2.1 A correspondência Weyl-Moyal

Na mecânica quântica usual, as variáveis clássicas de posição (x) e momento (p) são reinterpretadas como operadores Hermitianos que atuam sobre um espaço de Hilbert e satisfazem as seguintes regras de comutação

$$\begin{aligned} [\hat{x}^i, \hat{p}^j] &= i\hbar\delta^{ij}, \\ [\hat{x}^i, \hat{x}^j] &= [\hat{p}^i, \hat{p}^j] = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Contudo, podemos pensar que essas relações são apenas um caso particular quando estamos trabalhando no limite de baixas energias. Para regiões do espaço envolvendo distâncias muito curtas (ou altas energias) podemos supor que as coordenadas não

mais comutem e passem a obedecer a seguinte relação¹

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}, \quad (2.2)$$

onde θ_{ij} é uma matriz constante de dimensão do quadrado do comprimento. A generalização para o caso relativístico envolvendo o espaço-tempo de Minkowski D dimensional é obtida tomando

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}, \quad \text{com } \mu = 0, 1, \dots, D-1. \quad (2.3)$$

A primeira observação a ser feita é que esse tipo de relação viola explicitamente a invariância de Lorentz (mas ainda preserva a invariância por translações), que passa a ser considerada válida apenas no caso limite de $\Theta \rightarrow 0$.

A formulação perturbativa para a versão não comutativa de uma dada teoria de campos satisfazendo (2.3) apresenta algumas dificuldades. Em geral, estamos interessados em calcular as amplitudes de espalhamento envolvendo operadores de campo que dependam da coordenadas do espaço-tempo e atuam sobre vetores pertencentes a um espaço de Fock. Ao quantizarmos o espaço-tempo impondo a relação de comutação (2.3) as coordenadas são promovidas a operadores associados a uma álgebra não comutativa e não está claro como extrair as amplitudes de transição. Mostrou-se mais conveniente associar os operadores de campos $\hat{\Phi}(\hat{x})$ a funções $\Phi(x)$ definidas em um espaço comutativo mas que obedecem a uma lei de multiplicação não comutativa. Tal procedimento é conhecido como correspondência Weyl-Moyal [24] e implica em

$$\hat{\Phi}(\hat{x}) \longleftrightarrow \Phi(x), \quad (2.4)$$

tal que o operador $\hat{\Phi}(\hat{x})$ definido no espaço-tempo não comutativo pode ser escrito como uma integral de Fourier

$$\hat{\Phi}(\hat{x}) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} T(k) \phi(k), \quad (2.5)$$

onde definimos o operador

$$T(k) \equiv e^{ik_\mu \hat{x}^\mu}, \quad (2.6)$$

com k_μ sendo c-números e $\phi(k)$ representando a transformada de Fourier do campo clássico $\Phi(x)$,

$$\phi(k) = \int d^D x e^{ik_\mu x^\mu} \Phi(x). \quad (2.7)$$

¹Recentemente, outros tipos de não comutatividade tem sido considerada no contexto da Mecânica Quântica. Veja por exemplo [23].

É simples mostrar que o operador $T(k)$ satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} T^\dagger(k) &= T(-k), \quad (\hat{x}^\dagger = \hat{x}) \\ \text{Tr}T(k) &= \int d^D x \left\langle x \left| e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} \right| x \right\rangle = \int d^D x e^{ik_\mu x^\mu} = (2\pi)^D \delta^{(D)}(k), \\ T(k)T(q) &= T(k+q) e^{-\frac{i}{2} k_\mu q_\nu \Theta^{\mu\nu}}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde na última linha utilizamos a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff: $e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$ em adição a $[\hat{x}^\mu, \Theta^{\nu\rho}] = 0$. O mapeamento $\hat{\Phi} \rightarrow \Phi$ pode ser facilmente invertido com ajuda de (2.8) levando a

$$\Phi(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik_\mu x^\mu} \text{Tr} \left[\hat{\Phi}(\hat{x}) T^\dagger(k) \right]. \quad (2.9)$$

O produto dos operadores $\hat{\Phi}(\hat{x})$ pode ser determinado com ajuda das Eqs. (2.5) e (2.8), como segue:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_1(\hat{x}) \hat{\Phi}_2(\hat{x}) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} T(k) T(q) \phi_1(k) \phi_2(q) \\ &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} T(k+q) e^{-\frac{i}{2} k_\mu \Theta^{\mu\nu} q_\nu} \phi_1(k) \phi_2(q). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Para relacionar o resultado acima com o produto dos campos clássico $\Phi(x)$, vamos proceder como em (2.9). Multiplicando a expressão anterior, pela direita por $T^\dagger(p)$

$$\hat{\Phi}_1(\hat{x}) \hat{\Phi}_2(\hat{x}) T^\dagger(p) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} T(k+q-p) e^{\frac{i}{2}(k+q)_\mu \Theta^{\mu\nu} p_\nu} e^{-\frac{i}{2} k_\mu \Theta^{\mu\nu} q_\nu} \phi_1(k) \phi_2(q), \quad (2.11)$$

e tomindo o traço Tr juntamente com (2.8), obtemos como resultado

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[\hat{\Phi}_1(\hat{x}) \hat{\Phi}_2(\hat{x}) T^\dagger(p) \right] &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^{(D)}(k+q-p) e^{-\frac{i}{2} k_\mu \Theta^{\mu\nu} q_\nu} \phi_1(k) \phi_2(q) \\ &= \int d^D y \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{i(k+q-p)_\mu y^\mu} e^{-\frac{i}{2} k_\mu \Theta^{\mu\nu} q_\nu} \phi_1(k) \phi_2(q) \\ &= \int d^D y \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{i p_\mu y^\mu} \phi_1(k) e^{-i k_\mu y^\mu} e^{-\frac{i}{2} k_\mu \Theta^{\mu\nu} q_\nu} e^{-i q_\mu y^\mu} \phi_2(q), \end{aligned} \quad (2.12)$$

que pode ser facilmente invertido resultando em

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-ip_\mu x^\mu} \text{Tr} \left[\hat{\Phi}_1(\hat{x}) \hat{\Phi}_2(\hat{x}) T^\dagger(p) \right] = \\
 & \int d^D y \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{-ip_\mu(x-y)^\mu} \phi_1(k) e^{-ik_\mu y^\mu} e^{-\frac{i}{2} k_\mu \Theta^{\mu\nu} q_\nu} e^{-iq_\mu y^\mu} \phi_2(q) = \\
 & \int d^D y \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \delta^{(D)}(x-y) \phi_1(k) e^{-ik_\mu y^\mu} e^{-\frac{i}{2} k_\mu \Theta^{\mu\nu} q_\nu} e^{-iq_\mu y^\mu} \phi_2(q) = \\
 & \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \phi_1(k) e^{-ik_\mu x^\mu} \underbrace{e^{-\frac{i}{2} k_\mu \Theta^{\mu\nu} q_\nu}}_{\left(1 + \frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \Theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu + \dots\right)} e^{-iq_\mu x^\mu} \phi_2(q) = \\
 & \Phi_1(x) \exp \left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \Theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu \right) \Phi_2(x), \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

o que nos permite definir o produto Moyal (ou estrela) por

$$\begin{aligned}
 & \Phi_1(x) \star \Phi_2(x) \equiv \\
 & \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik_\mu x^\mu} \text{Tr} \left[\hat{\Phi}_1(\hat{x}) \hat{\Phi}_2(\hat{x}) T^\dagger(k) \right] = \\
 & \Phi_1(x) \exp \left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \Theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu \right) \Phi_2(x) = \\
 & \Phi_1(x) \Phi_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2} \right)^n \frac{1}{n!} [\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \Phi_1(x)] \Theta^{\mu_1 \nu_1} \dots \Theta^{\mu_n \nu_1} [\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_n} \Phi_2(x)]. \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

O produto estrela (2.14) é associativo mas não comutativo e reduz-se ao produto ordinário de funções para $\Theta = 0$. Note que integrando em x e usando $T^\dagger(0) = \mathbb{I}$, podemos expressar sua relação com o produto dos operadores $\hat{\Phi}_i(\hat{x})$ por meio de

$$\begin{aligned}
 \int d^D x \Phi_1(x) \star \Phi_2(x) &= \int d^D x \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik_\mu x^\mu} \text{Tr} \left[\hat{\Phi}_1(\hat{x}) \hat{\Phi}_2(\hat{x}) T^\dagger(k) \right] \\
 &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^{(D)}(k) \text{Tr} \left[\hat{\Phi}_1(\hat{x}) \hat{\Phi}_2(\hat{x}) T^\dagger(k) \right] \\
 &= \text{Tr} [\hat{\Phi}_1(\hat{x}) \hat{\Phi}_2(\hat{x})], \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

ou em geral

$$\int d^D x \Phi_1(x) \star \Phi_2(x) \star \dots \star \Phi_n(x) = \text{Tr} [\hat{\Phi}_1(\hat{x}) \hat{\Phi}_2(\hat{x}) \dots \hat{\Phi}_n(\hat{x})], \quad (2.16)$$

tal que a propriedade de ciclicidade do traço garante que a integral acima é invariante por permutações cíclicas. Além disso, pode-se mostrar que $(\Phi_1 \star \Phi_2)^\dagger = \Phi_2^\dagger \star \Phi_1^\dagger$.

Um resultado particularmente importante que decorre diretamente de (2.10) e (2.15) é obtido quando consideramos o produto estrela entre *dois campos*:

$$\begin{aligned}
 \int d^D x \Phi_1(x) \star \Phi_2(x) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \text{Tr} [T(k+q)] e^{-\frac{i}{2} k_\mu \Theta^{\mu\nu} q_\nu} \phi_1(k) \phi_2(q) \\
 &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^{(D)}(k+q) e^{-\frac{i}{2} k_\mu \Theta^{\mu\nu} q_\nu} 4\phi_1(k) \phi_2(q) \\
 &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \phi_1(k) \phi_2(-k) \\
 &= \int d^D x \Phi_1(x) \Phi_2(x),
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

implicando que a parte quadrática de uma ação qualquer que defina uma teoria não comutativa, seja equivalente ao caso ordinário.

Finalmente, podemos checar que o comutador estrela, definido abaixo, resulta exatamente na relação dada em (2.3),

$$[x^\mu, x^\nu]_\star = x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu = i\Theta^{\mu\nu}. \tag{2.18}$$

Por conseguinte, a álgebra realizada pelo produto ordinário de operadores definidos sobre um espaço-tempo não comutativo é equivalente a álgebra de funções clássicas deformadas pelo produto Moyal. A seguir, vamos considerar os efeitos dessa modificação na determinação das regras de Feynman.

2.2 Quantização e regras de Feynman para teorias de campos não comutativas

Como vimos na seção anterior, a forma de tratar as teorias não comutativas é substituir o produto usual de campos pelo produto estrela². Vamos considerar como exemplo a teoria definida pelo campo escalar real $\lambda\Phi^4$. A versão não comutativa para a ação que define o modelo é dada por

$$S[\Phi] = \int d^4 x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \star \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi \star \Phi - \frac{\lambda}{4!} \Phi \star \Phi \star \Phi \star \Phi \right]. \tag{2.19}$$

Em vista da Eq. (2.17), a teoria livre não é modificada e possui o mesmo propagador de Feynman do caso usual

$$\Delta_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \tag{2.20}$$

²Para o caso envolvendo teorias de calibre, precisamos também modificar a estrutura do grupo de simetria, como discutiremos a seguir.

A única alteração provocada pelo produto estrela está codificada no termo de interação. De acordo com as Eqs. (2.5) e (2.16), podemos escrever no espaço dos momentos, a parte da ação correspondente a interação na forma

$$\begin{aligned} S_{int} &= -\frac{\lambda}{4!} \int d^4x \Phi \star \Phi \star \Phi \star \Phi \\ &= -\frac{\lambda}{4!} \int \left[\prod_{i=1}^4 \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \right] \text{Tr} [T(k_1)T(k_2)T(k_3)T(k_4)] \\ &\quad \times \phi(k_1)\phi(k_2)\phi(k_3)\phi(k_4). \end{aligned} \quad (2.21)$$

A operação do traço pode ser facilmente realizada empregando-se as propriedades dos operadores $T(k_i)$ descritas em (2.8). Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Tr} [T(k_1)T(k_2)T(k_3)T(k_4)] &= \text{Tr} [T(k_1 + k_2)T(k_3 + k_4)] e^{-i(k_1 \wedge k_2 + k_3 \wedge k_4)} \\ &= \text{Tr} [T(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)] e^{-i[k_1 \wedge k_2 + k_3 \wedge k_4 + (k_1 + k_2) \wedge (k_3 + k_4)]} \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{i=1}^4 k_i \right) e^{-i[k_1 \wedge (k_2 + k_3 + k_4) + k_2 \wedge (k_3 + k_4) + k_3 \wedge k_4]}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde introduzimos a forma bilinear antissimétrica

$$k_i \wedge k_j = \frac{1}{2} k_{i\mu} k_{j\nu} \Theta^{\mu\nu} = -k_j \wedge k_i. \quad (2.23)$$

A generalização dos resultados acima para o produto de n campos é direta e corresponde a

$$\begin{aligned} \int d^D x \Phi_1(x) \star \Phi_2(x) \star \dots \star \Phi_n(x) &= \\ \int \left[\prod_{i=1}^n \frac{d^D k_i}{(2\pi)^D} \right] (2\pi)^D \delta^{(D)} \left(\sum_{i=1}^n k_i \right) V(k_1, k_2, \dots, k_n) \phi_1(k_1) \phi_2(k_2) \dots \phi_n(k_n), \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde

$$V(k_1, k_2, \dots, k_n) = \exp \left(-i \sum_{i < j=1}^n k_i \wedge k_j \right). \quad (2.25)$$

Como resultado, podemos concluir que o principal efeito da não comutatividade em teoria de campos é modificar a estrutura da parte de interação, introduzindo um fator de fase dependente dos momentos que correm nos vértices. Tal fato reflete diretamente a natureza não local do produto Moyal expressa em (2.14). Em particular, devido a esses fatores oscilatórios, poderíamos esperar uma melhora no comportamento ultravioleta da teoria. Contudo, veremos a seguir que os diagramas de Feynman podem ser separados em duas partes: planar e não planar. A parte planar é semelhante

ao caso comutativo e não possui fator de fase, já a parte não planar fica multiplicada pelo fator de fase. Em todo caso, os gráficos correspondentes a parte planar possuem propriedades de renormalização semelhantes aquelas advindas da versão comutativa da teoria. O comportamento da parte não planar dos diagramas de Feynman é bem mais complicado e apresenta novos efeitos que podem inviabilizar o tratamento perturbativo do modelo em questão [10, 11, 12].

2.3 O mecanismo de mistura UV/IR

Nesta seção, ilustraremos algumas das propriedades singulares exibidas pela não comutatividade no contexto de altas energias. Como exemplo, vamos realizar o cálculo detalhado da renormalização da massa no modelo $\lambda\phi^4$ na aproximação de um laço. Para este fim, precisamos determinar a correção da função de dois pontos 1PI,

$$\Gamma^{(2)}(p) = p^2 - m^2 - \Sigma(p), \quad (2.26)$$

tal que nessa ordem, $-i\Sigma(p)$ correspondente ao diagrama de Feynman ilustrado na Fig. 2.1.

Mostraremos a seguir, que a principal consequência da não comutatividade é modificar a estrutura das integrais de momentos internos, que passam a exibir divergências infravermelhas, mesmo a teoria sendo massiva. Tal fenômeno é conhecido como mistura UV/IR e é uma característica geral em teoria de campos não comutativas [25].

O mecanismo UV/IR pode ser entendido de maneira bastante intuitiva por meio dos comutadores $[\hat{x}, \hat{y}] = i\theta$ e $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$. Da Mecânica Quântica usual, a relação de incerteza generalizada entre dois operadores Hermitianos quaisquer, \hat{A} e \hat{B} é dada por [26]

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2, \quad (2.27)$$

onde $\sigma_A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$ é o desvio padrão associado ao operador \hat{A} . Usando a relação de comutação (2.2), segue imediatamente que

$$\sigma_x \sigma_y \geq \frac{1}{2} \theta, \quad (2.28)$$

representa a relação de incerteza para as coordenadas x e y devido a presença da não comutatividade espacial. Então, qualquer acréscimo na precisão da medida em x ($\sigma_x \rightarrow 0$, $\sigma_{p_x} \rightarrow \infty$) implica numa piora na medida em y ($\sigma_y \rightarrow \infty$, $\sigma_{p_y} \rightarrow 0$).

Voltando ao cálculo da correção da massa, a função de Green conexa relacionada com o diagrama da Fig. 2.1 tem como expressão analítica

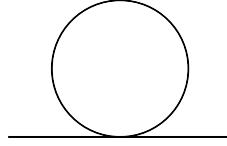


Figura 2.1: Diagrama de Feynman para a correção da massa à um laço na teoria não comutativa $\lambda\phi^4$.

$$G^{(2)}(p_1, p_2) = -\frac{i\lambda}{4!} \int \left[\prod_{i=1}^4 \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \right] (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\ \times V(k_1, k_2, k_3, k_4) \langle : \phi(p_1) \phi(p_2) \phi(k_1) \phi(k_2) \phi(k_3) \phi(k_4) : \rangle, \quad (2.29)$$

em que as contrações de Wick são agora modificadas pela presença da função $V(k_i)$ definida em (2.25). Dessa forma, as 12 contrações possíveis não são mais equivalentes entre si e resultam em

$$\langle : \phi(p_1) \phi(p_2) \phi(k_1) \phi(k_2) \phi(k_3) \phi(k_4) : \rangle V(k_1, k_2, k_3, k_4) = \\ \overbrace{\phi(p_1) \phi(k_1) \phi(p_2) \phi(k_2) \phi(k_3) \phi(k_4)} V(-p_1, -p_2, k_3, -k_3) + \\ =1 \\ \overbrace{\phi(p_1) \phi(k_1) \phi(p_2) \phi(k_3) \phi(k_2) \phi(k_4)} V(-p_1, k_2, -p_2, -k_2) + \\ =\exp(2ik_2 \wedge p_2) \\ \overbrace{\phi(p_1) \phi(k_1) \phi(p_2) \phi(k_4) \phi(k_2) \phi(k_3)} V(-p_1, k_2, -k_2, -p_2) + \\ =1 \\ 9 \text{ contrações para } (k_1 \leftrightarrow k_{2,3,4}). \quad (2.30)$$

Como resultado, podemos separar $G^{(2)}(p_1, p_2)$ em duas partes: a parte planar (PL) é independente de Θ e possui fator de simetria $(1/3)$, enquanto que a parte não planar (NPL) depende da fase $\exp(2ik \wedge p)$, com fator de simetria igual a $(1/6)$,

$$G^{(2)}(p_1, p_2) = G_{\text{PL}}^{(2)}(p_1, p_2) + G_{\text{NPL}}^{(2)}(p_1, p_2) \\ = -\frac{i\lambda}{3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2) \Delta_F(p_1) \Delta_F(p_2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 - i\epsilon} \\ - \frac{i\lambda}{6} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2) \Delta_F(p_1) \Delta_F(p_2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{2ik \wedge p_1}}{k^2 - m^2 - i\epsilon}. \quad (2.31)$$

A função 1PI correspondente é obtida como de costume, removendo-se os propagadores

dores externos juntamente com a delta de conservação energia-momento, tal que

$$-i\Sigma(p) = -\frac{i\lambda}{3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 - i\epsilon} - \frac{i\lambda}{6} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{2ik\wedge p}}{k^2 - m^2 - i\epsilon}. \quad (2.32)$$

A contribuição planar em (2.32) é proporcional a correção usual da teoria comutativa ϕ^4 , que por contagem de potência é quadraticamente divergente no limite UV. Usando regularização dimensional, podemos escrevê-la na forma

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{PL}}(p) &= \frac{\lambda\mu^{4-D}}{3} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{\lambda m^2}{48\pi^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^{\varepsilon/2} \Gamma \left(-1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= -\frac{\lambda m^2}{48\pi^2} \left[\frac{2}{\varepsilon} + 1 - \gamma - \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right], \end{aligned} \quad (2.33)$$

com $\varepsilon = 4 - D$, μ um parâmetro com dimensão de massa introduzido no processo de regularização e $\gamma = 0.577$ é a constante de Euler-Mascheroni.

A contribuição não planar também apresenta contagem de potência quadrática, mas a presença do fator de fase dependente do momento interno modifica drasticamente a integral de Feynman. Para calculá-la, vamos empregar a parametrização de Schwinger

$$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \int_0^\infty d\alpha e^{i\alpha(k^2 - m^2 + i\epsilon)}, \quad (2.34)$$

que substituída em (2.32), implica

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{NPL}}(p) &= \frac{\lambda\mu^{4-D}}{6} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{ie^{2ik\wedge p}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{\lambda\mu^{4-D}}{6} \int_0^\infty d\alpha e^{i\alpha(-m^2 + i\epsilon)} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} e^{i\alpha k^2 + 2ik\wedge p}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

A integração sobre k passa a ser tipo Gaussiana e para efetuá-la, vamos completar o quadrado no expoente:

$$\begin{aligned} \text{expoente} &= i\alpha \left[k_\mu k^\mu + \frac{1}{\alpha} k_\mu \Theta^{\mu\nu} p_\nu + \left(\frac{1}{2\alpha} \Theta^{\mu\nu} p_\nu \right)^2 - \left(\frac{1}{2\alpha} \Theta^{\mu\nu} p_\nu \right)^2 \right] \\ &= i\alpha \left[\left(k^\mu + \frac{1}{2\alpha} \Theta^{\mu\nu} p_\nu \right)^2 + \frac{1}{4\alpha^2} p \circ p \right], \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde definimos $p \circ p = p_\mu \Theta^{\mu\alpha} \Theta_{\alpha\nu} p^\nu$. Agora, podemos resolver explicitamente a inte-

gral no momento fazendo $k \rightarrow k - \frac{1}{2\alpha} \Theta^{\mu\nu} p_\nu$,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{i\alpha k^2 + 2ik \wedge p} &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{i\alpha [k^2 + \frac{1}{4\alpha^2} p \circ p]} \\
 &= e^{\frac{i}{4\alpha} p \circ p} \int \frac{dk_0}{(2\pi)} e^{i\alpha k_0^2} \int \frac{d^{D-1} k}{(2\pi)^{D-1}} e^{-i\alpha k^2} \\
 &= \frac{e^{\frac{i}{4\alpha} p \circ p}}{(2\pi)^D} \sqrt{\frac{i\pi}{\alpha}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{i\alpha}} \right)^{D-1} \\
 &= \frac{i^{1-D/2}}{2^D \pi^{D/2} \alpha^{D/2}} e^{\frac{i}{4\alpha} p \circ p}.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Inserindo o resultado acima em (2.35), obtemos

$$\Sigma_{\text{NPL}}(p) = \frac{\lambda \mu^{4-D}}{6} \frac{i^{1-D/2}}{2^D \pi^{D/2}} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{-D/2} e^{i\alpha(-m^2 + i\epsilon) + \frac{i}{4\alpha} p \circ p}. \tag{2.38}$$

A integral em α pode ser regularizada fazendo $\frac{p \circ p}{4} \rightarrow \frac{p \circ p}{4} + i\frac{\delta}{4}$ e ao final tomamos o limite $\epsilon, \delta \rightarrow 0$. Para o caso $D = 4$, essa integral é calculada usando o resultado conhecido [27]

$$\int_0^\infty dz z^{-2} e^{iaz + \frac{ib}{\alpha}} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b}} K_1 \left(-2i\sqrt{a}\sqrt{b} \right), \text{ para } \text{Im}[a] > 0 \text{ e } \text{Im}[b] > 0, \tag{2.39}$$

sendo K_1 a função de Bessel modificada de ordem um. Após algumas simplificações, segue que

$$\Sigma_{\text{NPL}}(p) = \frac{\lambda m^2}{24\pi^2} \frac{K_1 \left(\sqrt{m^2 p \circ p} \right)}{\sqrt{m^2 p \circ p}}. \tag{2.40}$$

Notemos que na região do ultravioleta para o momento externo $p \rightarrow \infty$, a contribuição Σ_{NPL} permanece finita devido ao resultado

$$\lim_{z \rightarrow \infty} K_1(z) = 0. \tag{2.41}$$

Substituindo (2.33) e (2.40) em (2.26), a renormalização da massa absorve a divergência UV presente em Σ_{PL} e resulta na seguinte função de dois pontos 1PI renormalizada

$$\Gamma_R^{(2)} = p^2 - m_R^2 - \frac{\lambda m_R^2}{24\pi^2} \frac{K_1 \left(\sqrt{m_R^2 p \circ p} \right)}{\sqrt{m_R^2 p \circ p}}, \tag{2.42}$$

com

$$m_R^2 = m^2 \left\{ 1 - \frac{\lambda}{48\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma - \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right] \right\}. \tag{2.43}$$

Vamos agora considerar o comportamento de (2.42) na região infravermelha quando

$p \rightarrow 0$. Para pequenos argumentos, K_1 pode ser expandida em série de Laurent na forma

$$\frac{K_1 \left(\sqrt{m_R^2 p \circ p} \right)}{\sqrt{m_R^2 p \circ p}} \xrightarrow{p \rightarrow 0} \frac{1}{m_R^2 p \circ p} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{m_R^2 p \circ p}}{2} \right), \quad (2.44)$$

indicando a presença de divergências infravermelhas do tipo quadrática e logarítmica, ausentes no caso comutativo³. Essa substituição, de divergências ultravioletas comutativas por singularidades infravermelhas devido a não comutatividade, é o que denominamos de mistura UV/IR. Como consequência, o limite $\Theta \rightarrow 0$ não é suave e não podemos mais recuperar a teoria comutativa quando levamos em conta as correções quânticas.

Outra questão envolvendo a não comutatividade diz respeito a conservação da unitariedade [13]. A madeira mais simples de evitar problemas relacionados a violação da unitariedade consiste em considerar somente a não comutatividade entre as coordenadas espaciais, tomando sempre $\Theta_{0i} = 0$. Tal procedimento não é único e formas mais elaboradas para tratar esse problema são discutidas nas Refs. [28, 29, 30].

2.4 Não comutatividade em teorias de calibre

Teorias de calibre não comutativas são particularmente importantes devido a sua conexão com teorias de cordas. Seiberg e Witten [8] mostraram que a dinâmica de cordas bosônicas abertas conectadas a Dp -branas, na presença de um campo de fundo B_{ij} constante, descrita pela ação

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\zeta \left[g_{ij} \partial_a x^i \partial^a x^j - 2\pi i \alpha' B_{ij} \epsilon^{ab} \partial_a x^i \partial_b x^j \right], \quad (2.45)$$

pode ser relacionada, num certo limite, a uma teoria de calibre definida sobre um espaço não comutativo.

A promoção de uma teoria de calibre usual para o espaço-tempo não comutativo é similar a nossa descrição anterior, envolvendo apenas campos escalares. Contudo, algumas peculiaridades na extensão não comutativa dos grupos de Lie devem ser levados em consideração agora.

Como exemplo, vamos considerar o caso de uma teoria definida sobre o grupo de simetria $U(N)$ na representação fundamental. O campo de calibre associado $A_\mu(x)$ pode ser expandido em termos dos geradores (Hermitianos) da álgebra de Lie do grupo;

³No caso comutativo, divergências infravermelhas são esperadas normalmente em teorias envolvendo partículas sem massa, já que o propagador passa a ter um pôlo em $p = 0$. As singularidades infravermelhas encontradas em (2.44) são originadas exclusivamente da não comutatividade e não devem ser confundidas com o caso ordinário.

$A_\mu(x) \equiv A_\mu^a t^a$, com $\text{tr}_N(t^a t^b) = \delta^{ab}$, $a, b = 1, \dots, N^2$ e $[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c$. A versão não comutativa desta teoria é obtida via correspondência Weyl-Moyal, isto é, o produto usual de matrizes é substituído pelo produto estrela definido em (2.14). Dessa forma, um elemento qualquer do grupo $U_*(N)$ passa a ser escrito como

$$U(x) = e^{\star i\lambda^a(x)t^a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\lambda^a(x)t^a)_*^n. \quad (2.46)$$

A ação de Yang-Mills $U_*(N)$ não comutativa é definida então por

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \text{tr}_N [F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu}], \quad (2.47)$$

sendo tr_N o traço ordinário de matrizes e com o tensor intensidade de campo representado na forma

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu]_* \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu] + \frac{g}{2} \Theta^{\alpha\beta} (\partial_\alpha A_\mu \partial_\beta A_\nu - \partial_\alpha A_\nu \partial_\beta A_\mu) + \mathcal{O}(\Theta^2). \end{aligned} \quad (2.48)$$

A lei de transformação de calibre para campo A_μ também é modificada pela correspondência Weyl-Moyal, e passa a ser definida como sendo

$$A_\mu \longrightarrow U \star A_\mu \star U^\dagger + \frac{i}{g} U \star \partial_\mu U^\dagger. \quad (2.49)$$

A invariância da ação de Yang-Mills não comutativa (2.47) sob a transformação (2.49) segue diretamente da ciclicidade tanto do produto estrela quanto da operação de traço das matrizes $U(x)$, e implica na seguinte regra de transformação para o campo $F_{\mu\nu}$,

$$F_{\mu\nu} \rightarrow U \star F_{\mu\nu} \star U^\dagger. \quad (2.50)$$

É importante notar que a teoria de calibre não comutativa definida pela ação (2.47) apresenta interações não triviais já no caso abeliano para $N = 1$. Isso decorre diretamente do produto estrela, pois agora o comutador $[A_\mu, A_\nu]_*$ é diferente de zero mesmo quando temos $f^{abc} = 0$, e somente para $\Theta = 0$ coincide com o setor de Maxwell da eletrodinâmica usual.

A quantização perturbativa e a determinação das regras de Feynman são obtidas como de costume via formalismo funcional, adicionando-se os campos fantasmas de Faddeev-Popov e o termo de fixação de calibre associado. Os termos bilineares (propagadores), assim como no caso escalar, não são afetados pela não comutatividade. Mas

os vértices de interação são acompanhados de funções polinomiais que dependem do momento, acarretando um caráter altamente não linear a teoria.

Devemos destacar ainda que nossa escolha pelo grupo de simetria $U(N)$ não é arbitrária. A generalização não comutativa para outros grupos é fortemente restringida pela natureza do produto Moyal [31]. O ponto importante é que as transformações de calibre modificadas pelo produto estrela dependem do anticomutador $\{t^a, t^b\}$, em adição a relação de comutação $[t^a, t^b]$ que define a álgebra de Lie do grupo ⁴. Em geral, o anticomutador de dois geradores pertence a álgebra de Lie apenas no caso do grupo $U(N)$, na representação fundamental. Assim, outros grupos como $SU(N)$, $SO(N)$ ou $Sp(N)$ não possuem uma extensão não comutativa e devem ser descartados a princípio.

⁴Em particular, devemos garantir que

$$[A_\mu^a t^a, \lambda^b t^b]_\star = \frac{1}{2} (A_\mu^a \star \lambda^b + \lambda^b \star A_\mu^a) [t^a, t^b] + \frac{1}{2} (A_\mu^a \star \lambda^b - \lambda^b \star A_\mu^a) \{t^a, t^b\},$$

possa ser escrito como uma combinação linear dos geradores t^a .

Capítulo 3

Potencial efetivo a dois laços para o modelo de Wess-Zumino em $2 + 1$ dimensões

Neste capítulo, o potencial efetivo para o modelo de Wess-Zumino com $\mathcal{N} = 1$ em $2 + 1$ dimensões será calculado no formalismo de supercampos até a aproximação de dois laços. Mostraremos que a supersimetria não é quebrada por correções radioativas, e a aparente geração dinâmica de massa não é perturbativamente consistente. Além disso, o estudo detalhado da renormalização do modelo será realizado, e de posse dos contratermos necessários para renormalizar a teoria, determinaremos as funções β_g e γ_Φ do grupo de renormalização. A partir desses cálculos, mostraremos que o modelo é infravermelho livre e que o comportamento clássico referente ao escalonamento dos momentos externos é alterado por correções radioativas. Nossos resultados corrigem alguns equívocos presentes na literatura.

3.1 Quebra dinâmica de (super)simetria em $2 + 1$ dimensões

Embora a supersimetria (SUSY) seja um conceito chave na física de partículas elementares e campos, ela não é corroborada (até a presente data) por evidências experimentais. Então, qualquer modelo realístico envolvendo a SUSY deve incluir algum mecanismo de quebra desta simetria. Muitos mecanismos diferentes foram propostos na literatura; por exemplo, o Modelo Padrão Minimamente Supersimétrico contém operadores que quebram explicitamente a supersimetria e foi sugerido na tentativa de resolver o problema da hierarquia [32].

A violação de SUSY devido a soluções tipo instantons [33], sua conexão com a R -

simetria [34] e com o índice de Witten [35, 36] também foram intensamente investigados durante os últimos anos. Várias variações ou extensões dos modelos de O’Raifeartaigh e Fayet-Iliopoulos [37], que apresentam quebra espontânea de SUSY e mais recentemente, teorias que exibem um vácuo meta instável com SUSY quebrada [38] também tem sido propostas.

Uma questão interessante é se um mecanismo puramente perturbativo, isto é, uma quebra de simetria dinâmica induzida por correções radiativas pode ser obtida em modelos classicamente supersimétricos. Tal interesse reside no fato de que uma escala de massa poderia ser gerada dinamicamente.

Contudo, em 3 + 1 dimensões do espaço-tempo essa possibilidade deve ser descartada devido aos teoremas de não-renormalização [39, 40]. Tais teoremas asseguram que se a SUSY não for espontaneamente quebrada na aproximação clássica, então ela não poderá ser violada por correções perturbativas. Por outro lado, em 2 + 1 dimensões essas restrições (ao menos para $\mathcal{N} = 1$) não existem [41, 42]. Tal possibilidade abre caminho para investigarmos perturbativamente a estrutura do vácuo nessas teorias via o cálculo do potencial efetivo [43]. Recentemente, o potencial efetivo para o modelo de Wess-Zumino (WZ) em três dimensões com $\mathcal{N} = 2$ foi calculado até a aproximação de dois laços na Ref. [44]. Para o caso com $\mathcal{N} = 1$, o potencial efetivo foi primeiramente calculado em [45] para os modelos de WZ e da eletrodinâmica sem massa. Em ambos os modelos, o autor mostrou que nem a SUSY e nem a invariância de calibre são quebradas por correções radioativas até a aproximação de um laço; no entanto, em 2 + 1 dimensões os termos envolvendo logarítmicos dos campos clássicos aparecem somente na aproximação de dois ou mais laços. Desde que estas contribuições logarítmicas tem um papel crucial na quebra dinâmica de simetria, os cálculos devem ser ampliados pelo menos até a ordem de dois laços.

No formalismo de campos componentes, o potencial efetivo até dois laços para o modelo de WZ foi calculado “off-shell” e “on-shell” nas Refs. [46] e [47], respectivamente. Na Ref. [46] é reportado um problema concernente à renormalização do potencial efetivo: um termo divergente que não pode ser absorvido pelo reescalonamento da Lagrangiana clássica aparece. Por sua vez, na Ref. [47] tais dificuldades com a renormalização não foram encontradas, mas é relatado que a SUSY é quebrada, acompanhada de uma geração dinâmica de massa. Nesse trabalho, contudo, o cálculo do potencial efetivo não leva em conta correções radioativas para equação de movimento do campo auxiliar [48]. Esses fatos nos levam a concluir que a renormalização e a estrutura de vácuo do modelo de WZ tridimensional são questões ainda não satisfatoriamente respondidas.

Neste capítulo, temos por objetivo calcular o potencial efetivo de WZ até a aproximação de dois laços diretamente na formulação de supercampo. Mostraremos que

a renormalização do potencial efetivo é obtida de modo usual. Além disso, verificaremos que a supersimetria não é quebrada e que a geração dinâmica de massa não é perturbativamente consistente. Calcularemos ainda a função β_g associada com a auto-interação quârtica e função γ_Φ que caracteriza a dimensão anômala do supercampo. Esse capítulo é organizado como segue.

Na seção 3.2, o modelo é definido e o potencial clássico é analisado para diferentes configurações das constantes de acoplamento. Na seção 3.3, os cálculos na ordem de um e dois laços são efetuados e a análise da renormalização do modelo é apresentada. Na seção 3.4, a possibilidade da quebra dinâmica de (super)simetria para o caso particular de interesse no qual a teoria é classicamente invariante de escala é investigada e mostramos explicitamente que as simetrias são preservadas até essa ordem. A função β_g da constante de acoplamento também é calculada, mostrando-se que o modelo exibe um polo de Landau no limite do ultravioleta.

3.2 Apresentação do modelo

A ação renormalizável mais geral para o modelo de WZ com $\mathcal{N} = 1$, contendo um único supercampo escalar real em $2 + 1$ dimensões é dada por:

$$S[\Phi] = \int d^5z \left\{ -\frac{1}{4} D^\alpha \Phi D_\alpha \Phi + W(\Phi) + \mathcal{L}_{CT} \right\}, \quad (3.1)$$

onde $W(\Phi) = a\Phi + \frac{1}{2}m\Phi^2 + \frac{\lambda}{3!}\Phi^3 + \frac{g}{4!}\Phi^4$ é o superpotencial, $\Phi(x, \theta) = \phi(x) + \theta^\alpha \psi_\alpha(x) - F(x)\theta^2$ é um supercampo escalar, $d^5z \equiv d^3x d^2\theta$ é o elemento de volume no superespaço e \mathcal{L}_{CT} é a Lagrangiana de contratermos. As dimensões de massa do supercampo escalar e das constantes de acoplamento são: $[\Phi] = 1/2$, $[\lambda] = 1/2$, $[g] = 0$, $[a] = 3/2$. Quando $\lambda = a = 0$, a ação clássica é invariante sob a transformação de simetria discreta $\Phi \rightarrow -\Phi$ e se além disso, $m = 0$, o modelo é também classicamente invariante de escala.

O conteúdo em campos componentes da Eq. (3.1) é facilmente revelado após a integração na coordenada grasmiana θ :

$$\begin{aligned} S = & \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}(\phi \square \phi + \psi^\alpha i \partial_\alpha^\beta \psi_\beta + F^2) + m(\psi^2 + \phi F) \right. \\ & \left. + \lambda(\phi \psi^2 + \frac{1}{2}\phi^2 F) + \frac{g}{6}\phi^3 F + \frac{g}{2}\phi^2 \psi^2 + aF + \mathcal{L}_{CT} \right\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

A ação acima é invariante sob as seguintes transformações de SUSY:

$$\begin{aligned}\delta\phi &= -\epsilon^\alpha\psi_\alpha, \\ \delta\psi_\alpha &= -\epsilon^\beta(C_{\alpha\beta}F + i\partial_{\alpha\beta}\phi), \\ \delta F &= -\epsilon^\alpha i\partial_\alpha^\beta\psi_\beta,\end{aligned}\tag{3.3}$$

onde ϵ^α é um parâmetro fermiônico constante.

O potencial clássico “off-shell” é obtido diretamente da Eq. (3.2):

$$V^{(0)}(\phi, F) = -\frac{1}{2}F^2 - FS(\phi),\tag{3.4}$$

onde $S(\phi) \equiv W'(\phi) = (a + m\phi + \frac{\lambda}{2}\phi^2 + \frac{g}{6}\phi^3)$. Eliminando-se o campo auxiliar F por meio de sua equação de movimento $\partial V^{(0)}/\partial F = 0$, isto é, $F = S(\phi)$, o potencial clássico torna-se função somente do campo físico ϕ , tal que

$$V^{(0)}(\phi) = \frac{1}{2}(S(\phi))^2 \geq 0.\tag{3.5}$$

É bem conhecido que em qualquer teoria com supersimetria exata, o estado de vácuo deve corresponder a um mínimo global do potencial efetivo com $S(\phi_{min}) = 0$ e $V(\phi_{min}) = 0$ [40]. Para $g \neq 0$ o modelo (em nível de árvore) tem uma fase com SUSY preservada, desde que $S(\phi_{min}) = 0$ sempre tem ao menos uma solução real para ϕ_{min} . Neste caso, se $a = \lambda = 0$ então temos um mínimo em $\phi_{min} = 0$ e se além disso, temos também $-6m/g > 0$, então existe duas outras soluções: $\phi_{min} = \pm\sqrt{-6m/g}$ que quebram espontaneamente a simetria $\phi \rightarrow -\phi$. De qualquer modo, para $g \neq 0$ a SUSY é classicamente preservada.

Outra possibilidade ocorre quando $g = 0$ e $\lambda \neq 0$. Se $2a\lambda \leq m^2$, a equação $F = 0$ tem duas soluções reais $\phi_{min} = -\frac{m}{\lambda} \pm (\frac{m^2}{\lambda^2} - \frac{2a}{\lambda})^{1/2}$ e a SUSY é preservada. Se em vez disso, $2a\lambda > m^2$, o ponto de mínimo para $V^{(0)}(\phi)$ ocorre em $\phi_{min} = -\frac{m}{\lambda}$ (solução de $dV^{(0)}/d\phi = 0$, para qual $F = \frac{m^2}{2\lambda} - a \neq 0$) e implica em $V(\phi_{min}) = \frac{1}{8\lambda^2}(2\lambda a - m^2)^2 > 0$, revelando uma quebra espontânea de SUSY em nível clássico. O potencial clássico é desenhado na Fig. 3.1 como uma função do campo físico ϕ para alguns valores dos parâmetros a , m , λ e g .

3.3 Cálculo do potencial efetivo

Há vários métodos para o cálculo do potencial efetivo em teoria de campos ordinária. Iremos empregar o método funcional devido à Jackiw [49], cuja extensão para o superespaço é direta. O método é baseado na seguinte prescrição: primeiramente de-

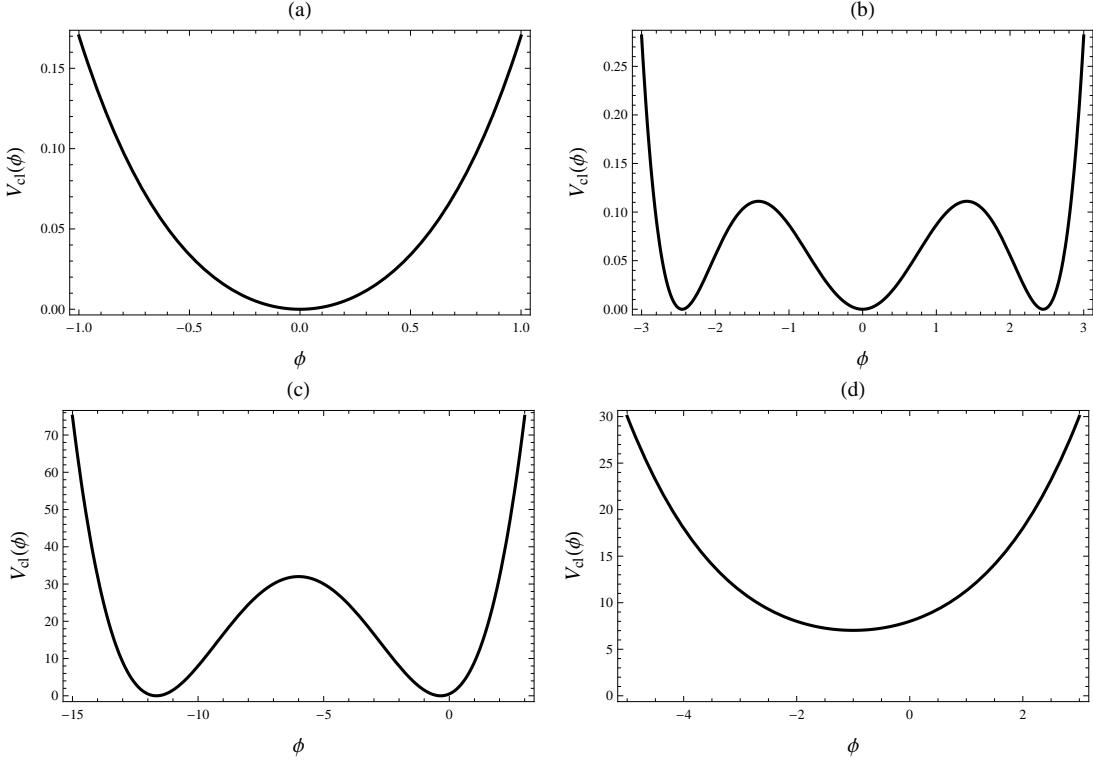


Figura 3.1: Potencial Clássico: (a) - $a = \lambda = 0$ e $g = m = 1/2$, (b) - $a = \lambda = 0$ e $g = -m = 1/2$, (c) - $a = 1$, $\lambda = 1/2$, $m = 3$ e $g = 0$, (d) - $a = 4$, $\lambda = m = 1/2$ e $g = 0$.

vemos deslocar o supercampo quântico Φ por um supercampo clássico ϕ_{cl} e considerar a ação

$$\hat{S}[\Phi, \phi_{cl}] \equiv S[\Phi + \phi_{cl}] - S[\phi_{cl}] - \int d^5z \Phi \frac{\delta S}{\delta \Phi} \Big|_{\Phi=\phi_{cl}}, \quad (3.6)$$

onde $\phi_{cl}(\theta) = \sigma_1 - \theta^2 \sigma_2$, com $\sigma_1 = \langle \phi \rangle$ e $\sigma_2 = \langle F \rangle$ sendo os valores esperados no vácuo x -constantes dos campos componentes escalares (a invariância de Lorentz do vácuo requer que $\langle \psi^\alpha \rangle = 0$). A ação \hat{S} assume a forma

$$\begin{aligned} \hat{S}[\Phi, \phi_{cl}] &= \int d^5z \left[\frac{1}{2} \Phi \left(D^2 + m + \lambda \phi_{cl} + \frac{g}{2} \phi_{cl}^2 \right) \Phi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3!} (\lambda + g \phi_{cl}) \Phi^3 + \frac{g}{4!} \Phi^4 \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

O potencial efetivo pode ser escrito numa forma manifestamente supercovariante como

$$V_{eff}(\sigma_1, \sigma_2) = V^{(0)}(\sigma_1, \sigma_2) - \frac{i}{2\Omega} \ln \text{Det} \left[i\Delta_F^{-1}(z, z') \right] + \frac{i}{\Omega} \left\langle 0 \left| T \exp i \int d^5z \hat{\mathcal{L}}_{int}(\Phi, \phi_{cl}) \right| 0 \right\rangle. \quad (3.8)$$

O primeiro termo em Eq. (3.8) é o potencial clássico como dado em (3.4), com $\phi \rightarrow \sigma_1$

e $F \rightarrow \sigma_2$. O segundo termo é a correção em um laço, onde

$$i\Delta_F^{-1}(z, z') = \frac{\delta^2 S[\Phi]}{\delta \Phi_z \delta \Phi_{z'}} \Big|_{\Phi=\phi_{cl}} = \left(D^2 + m + \lambda \phi_{cl} + \frac{g}{2} \phi_{cl}^2 \right) \delta^5(z - z'), \quad (3.9)$$

e $\Omega \equiv \int d^3x$ é o volume do espaço-tempo. O terceiro termo codifica as correções de ordem mais alta na expansão de laços: a soma dos “one-particle-irreducible” superdiagramas de vácuo com dois ou mais laços calculados a partir da ação deslocada (3.7). Notemos que o potencial efetivo é função somente dos campos constantes σ_1 e σ_2 . A abordagem em supercampos adotada aqui garante que após toda as manipulações da D -álgebra, somente uma única θ -integração permaneça para ser feita. Isso nos permite escrever o potencial efetivo numa forma equivalente a (3.4).

3.3.1 Correção a um laço

A contribuição a um laço $V^{(1)}$ para o potencial efetivo é expressa pelo determinante funcional em (3.8). Tal determinante pode ser calculado pelo método da função zeta (ζ -function method) como descrito na Ref. [45]. Seguindo os cálculos delineados no apêndice A, podemos escrever $V^{(1)}$ como

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= -\frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln \left[\frac{k^2 + M^2}{k^2 + \mu_1^2} \right] \\ &= \frac{1}{12\pi} \left[\left(\mu_1^2 \right)^{3/2} - \left(M^2 \right)^{3/2} \right], \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde usamos regularização dimensional e subtração mínima para realizar a integral no momento. O parâmetro $M^2 = \mu_1^2 - \mu_2^2$ é o quadrado da massa bosônica, $\mu_1 = m + \lambda\sigma_1 + \frac{g}{2}\sigma_1^2$ é a massa fermiônica e $\mu_2^2 = \lambda\sigma_2 + g\sigma_1\sigma_2$ (notemos que μ_2^2 é encarado apenas como uma notação simplificada, podendo assumir valores negativos). Observamos o cálculo perturbativo é válido somente para M^2 positivo, para $M^2 < 0$ o potencial efetivo assume valores complexos.

Por conseguinte, até a ordem de um laço, o potencial efetivo é finito e dado por

$$\begin{aligned} V_{eff}(\sigma_1, \sigma_2) &= V^{(0)} + V^{(1)} \\ &= -\frac{1}{2}\sigma_2^2 - \sigma_2 S + \frac{2}{3}\alpha \left[\left(S'^2 \right)^{3/2} - \left(S'^2 - \sigma_2 S'' \right)^{3/2} \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

tal que $\mu_1 = S'$, $\mu_2^2 = \sigma_2 S''$ e $M = (S'^2 - \sigma_2 S'')^{1/2}$ e $\alpha = 1/8\pi$.

Vamos agora investigar a possibilidade de quebra da SUSY. Os pontos estacionários

de V_{eff} são determinados a partir das condições

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial \sigma_2} = 0 = -\sigma_2 - S + \alpha S''(S'^2 - \sigma_2 S'')^{1/2}, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial \sigma_1} = 0 = -\sigma_2 S' + \alpha \left[2S' S''(S'^2)^{1/2} - (2S' S'' - g\sigma_2)(S'^2 - \sigma_2 S'')^{1/2} \right]. \quad (3.13)$$

Se a SUSY é exata, o mínimo do potencial efetivo ocorre em $V_{eff} = 0$, com $\sigma_2 = 0$. A partir das expressões anteriores, quando $\sigma_2 = 0$ temos que a Eq. (3.11) é identicamente nula, assim como a Eq. (3.13). Assim, a condição de SUSY exata equivale a Eq. (3.12) ter uma solução real para $\sigma_2 = 0$, isto é,

$$S - \alpha S''|S'| = 0, \quad (3.14)$$

ter uma solução real $\sigma_1 = \bar{\sigma}_1$. Nesse caso, a configuração $(\sigma_1 = \bar{\sigma}_1, \sigma_2 = 0)$ é um ponto estacionário e também um zero de V_{eff} . Se em vez disso, a Eq. (3.14) não têm solução, então $\sigma_2 = 0$ não é solução da Eq. (3.12) e a SUSY é quebrada.

Da definição de S , para $g \neq 0$ é fácil ver que a Eq. (3.14) sempre possui ao menos uma solução real, já que neste caso temos uma equação polinomial de terceiro grau em σ_1 . No caso particular $a = \lambda = m = 0$, temos $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ como um mínimo absoluto e a simetria discreta juntamente com a simetria de escala são ambas preservadas. Nossos cálculos concordam com os resultados da Ref. [45].

Se considerarmos $g = 0$ e $\lambda > 0$, temos soluções reais para σ_1 se $m^2 + \alpha^2 \lambda^4 \geq 2a\lambda$, significando que a SUSY é preservada neste caso também.

3.3.2 Correção a dois laços

Como é bem sabido, para que a quebra de simetria ocorra por correções radioativas é necessário a indução de termos da forma $h(\sigma_1, \sigma_2) \ln f(\sigma_1, \sigma_2)$. Em 2 + 1 dimensões, isto ocorre somente em dois (ou mais) laços. Para estudar essa possibilidade e fazer uma análise detalhada dos contratermos UV necessários para renormalizar o potencial efetivo, iremos considerar o caso geral em que todos os parâmetros na Eq. (3.1) sejam não nulos.

Vamos iniciar nosso cálculo estabelecendo as regras de Feynman para a teoria deslocada (3.7). O propagador livre satisfaz a equação de Green:

$$\hat{\mathcal{O}}_z \Delta_F(z - z') = i\delta^5(z - z'), \quad (3.15)$$

onde $\hat{\mathcal{O}}_z = D_z^2 + \mu_1 - \mu_2^2 \theta^2$ com μ_1 e μ_2^2 definidos como antes.

Para inverter o operador $\hat{\mathcal{O}}$, faremos uso do método dos operadores de projeção,

desenvolvido nas Refs. [50, 51]. Uma base para o espaço dos operadores escalares é formado pelo conjunto de seis operadores linearmente independentes:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = D^2, \quad P_2 = \theta^2, \quad P_3 = \theta^\alpha D_\alpha, \quad P_4 = \theta^2 D^2, \quad P_5 = i\partial_{\alpha\beta}\theta^\alpha D^\beta,$$

que satisfazem a tabela de multiplicação 3.1:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	\square	$-P_0 + P_3 + P_4$	$2P_1 + P_5$	$-P_1 + \square P_2 - P_5$	$\square(-2P_0 + P_3)$
P_2	P_4	0	0	0	0
P_3	$-P_5$	$2P_2$	$P_3 - 2P_4$	$2P_4$	$2\square P_2 + P_5$
P_4	$\square P_2$	$-P_2$	$2P_4$	$-P_4$	$-2\square P_2$
P_5	$-\square P_3$	0	$-2\square P_2 + P_5$	0	$\square(P_3 + 2P_4)$

Tabela 3.1: Tabela de multiplicação empregada na inversão de \hat{O} . Além disso, temos as relações triviais: $P_0 P_i = P_i P_0 = P_i$, com $i = 0, \dots, 5$.

Após uma álgebra direta, o superpropagador no espaço dos momentos pode ser escrito como

$$\Delta_F(k; \theta - \theta') = i \left(\sum_{i=0}^5 c_i P_i \right) \delta^2(\theta - \theta'), \quad (3.16)$$

onde:

$$c_0 = \frac{\mu_1}{k^2 + M^2}, \quad c_1 = -\frac{1}{k^2 + M^2}, \quad c_2 = -\frac{(k^2 - \mu_1^2)\mu_2^2}{(k^2 + \mu_1^2)(k^2 + M^2)}, \quad c_3 = -\frac{\mu_1\mu_2^2}{(k^2 + \mu_1^2)(k^2 + M^2)},$$

$$c_4 = -\frac{2\mu_1\mu_2^2}{(k^2 + \mu_1^2)(k^2 + M^2)}, \quad c_5 = -\frac{\mu_2^2}{(k^2 + \mu_1^2)(k^2 + M^2)}.$$

Os vértice de interação são lidos diretamente da Eq. (3.7) e os fatores de simetria são determinados pelo teorema de Wick de modo usual.

Os superdiagramas em dois laços para o potencial efetivo estão desenhados na Fig. 3.2. As expressões analíticas associadas são mostradas no apêndice C e as integrais de momento a dois laços que resultam da D -álgebra são calculadas via regularização dimensional por meio das fórmulas apresentadas no apêndice B.

A contribuição do diagrama (a), denotada por $V_a^{(2)}$, resulta ser finita, desde que ela é constituída pelo produto de integrais de momento a um laço sem “overlapping”. Por sua vez, o diagrama (b) tem divergências proporcionais a todos os termos presentes no potencial clássico $V^{(0)}$, o que comprova que a renormalização do modelo é obtida de modo usual. Em resumo, temos os seguintes resultados:

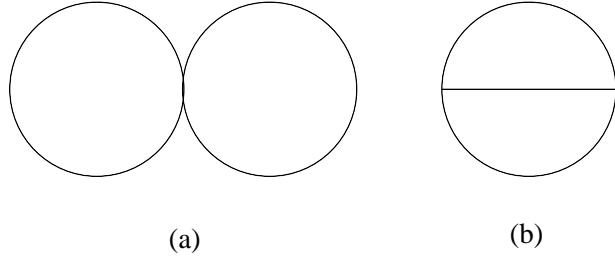


Figura 3.2: Bolhas de vácuo em dois laços para $V_a^{(2)}$ e $V_b^{(2)}$, respectivamente.

$$\begin{aligned}
 V_a^{(2)} &= -\frac{g}{32\pi^2} \frac{M\mu_1\mu_2^2}{(M+\mu_1)}, \\
 V_b^{(2)} &= \frac{(\lambda+g\sigma_1)^2}{64\pi^2} \left[\frac{\mu_2^2}{2} I_{div} - 6\mu_1^2 \ln \left(\frac{2M+\mu_1}{\mu} \right) + (M^2 + 5\mu_1^2) \ln \left(\frac{3M}{\mu} \right) \right] \\
 &+ \frac{(\lambda+g\sigma_1)^2}{64\pi^2} \left[-M^2 \ln \left(\frac{M}{\mu} \right) + \frac{M^2}{3} \left\{ 1 + \ln \left(\frac{M+2\mu_1}{27\mu} \right) \right\} - \frac{2}{3}M\mu_1 \right. \\
 &+ \left. \frac{\mu_1^2}{3} \left\{ 1 - 6 \ln \left(\frac{3M}{\mu} \right) - 10 \ln \left(\frac{M+2\mu_1}{\mu} \right) \right\} + \frac{2}{3}(M^2 + 8\mu_1^2) \ln \left(\frac{2M+\mu_1}{\mu} \right) \right] \\
 &+ \frac{g\sigma_2}{64\pi^2} \left[\left\{ I_{div} - 2 \ln \left(\frac{3M}{\mu} \right) \right\} \left(\lambda\mu_1 + g\mu_1\sigma_1 - \frac{g}{6}\sigma_2 \right) \right], \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

onde $I_{div} = \frac{1}{\epsilon} + \ln[4\pi e^{(1-\gamma_E)}]$ e μ é um parâmetro arbitrário de massa introduzido via regularização dimensional.

O potencial efetivo renormalizado até a ordem de dois laços é dado por

$$V_{eff} = V^{(0)} + V^{(1)} + V_a^{(2)} + V_b^{(2)} + V_{CT}, \tag{3.18}$$

tal que V_{CT} representa os contratermos obtidos por reescalonamento do potencial clássico

$$V_{CT} = - \left[\frac{1}{2} \delta Z \sigma_2^2 + \delta m \sigma_1 \sigma_2 + \frac{\delta \lambda}{2} \sigma_1^2 \sigma_2 + \frac{\delta g}{6} \sigma_1^3 \sigma_2 + \delta a \sigma_2 \right], \tag{3.19}$$

como pode ser lido diretamente da Lagrangiana clássica em (3.4); δZ é o contratermo devido a renormalização da função de onda e os outros contratermos são claramente indicados. As partes divergentes de $V^{(2)}$ podem ser colecionadas em

$$V_{div}^{(2)} = \frac{I_{div}}{128\pi^2} \left[-\frac{1}{3}g^2\sigma_2^2 + (2g^2m + 5g\lambda^2)\sigma_1\sigma_2 + 6g^2\lambda\sigma_1^2\sigma_2 + 2g^3\sigma_1^3\sigma_2 + (2gm\lambda + \lambda^3)\sigma_2 \right]. \tag{3.20}$$

A partir dessa equação, concluímos que a renormalização do potencial efetivo ne-

cessita de todos os contratermos presentes em Eq. (3.19):

$$\begin{aligned}
 \delta Z &= -\frac{1}{3}\hat{g}^2 I_{div} + \delta Z_{fin} \\
 \delta a &= \frac{1}{2}(2m\hat{g}\hat{\lambda} + \lambda\hat{\lambda}^2)I_{div} + \delta a_{fin} \\
 \delta m &= \frac{1}{2}(2m\hat{g}^2 + 5g\hat{\lambda}^2)I_{div} + \delta m_{fin} \\
 \delta \lambda &= 6\hat{g}^2\lambda I_{div} + \delta \lambda_{fin} \\
 \delta g &= 6g\hat{g}^2I_{div} + \delta g_{fin}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

onde definimos $\hat{g} = g/8\pi$ e $\hat{\lambda} = \lambda/8\pi$.

Agora, vamos comparar o resultado anterior com outros encontrados na literatura. Em [44] o potencial efetivo para o modelo de WZ com $\mathcal{N} = 2$ em $2 + 1 D$ foi estudado na aproximação de dois laços. Os autores concluem que somente a renormalização da função de onda é necessária. Tal fato não é inesperado; a formulação do superespaço com supersimetria $\mathcal{N} = 2$ em $2 + 1 D$ pode ser obtida a partir da formulação com $\mathcal{N} = 1$ do superespaço em $3 + 1 D$ por meio do mecanismo de redução dimensional [52] e então, os teoremas em $3 + 1 D$ de não-renormalização são esperados funcionarem também com $\mathcal{N} = 2$ em $2 + 1 D$. Entretanto, nosso resultado reflete o fato que para $\mathcal{N} = 1$ em $2 + 1 D$ os teoremas de não-renormalização não se aplicam e a renormalização de todos os parâmetros presentes no modelo é necessária.

Notemos ainda que a Eq. (3.17) contém três diferentes argumentos nos termos induzidos envolvendo logaritmos, enquanto que as expressões obtidas em [44] possuem somente um tipo de argumento. Essa diferença é provavelmente resultado da aproximação adotada em [44], tal que as derivadas espinoriais $D_\alpha\Phi$ e $D^2\Phi$ (além do caso espacial usual $\partial\Phi/\partial x^\mu$) são desprezadas. Nossos resultados também contradizem aqueles obtidos em [46] para um modelo similar com $\mathcal{N} = 1$, no qual um contratermo da forma σ_1^6 , que não está presente na Lagrangiana clássica, foi necessário para cancelar as divergências obtidas nos cálculos dos diagramas em dois laços, no formalismo de campos componentes.

Para o caso com $g \neq 0$ e $\lambda \neq 0$ a renormalização também requer que δa e δm sejam não nulos. O sub-caso com somente $g \neq 0$ é renormalizável, requerendo a renormalização de g em adição a de Z . Se $g = 0$ e $\lambda \neq 0$ (onde o modelo torna-se super-renormalizável) o cancelamento das divergências UV em dois laços também requer que $\delta a \neq 0$.

3.4 O vácuo supersimétrico

Vamos investigar agora em mais detalhes o submodelo com $g \neq 0$ e $m = \lambda = a = 0$, que é de particular interesse por ser classicamente invariante de escala. Como discutido na seção prévia, o modelo requer somente os contratermos δZ e δg . O potencial efetivo renormalizado V_{eff} assume a forma

$$\begin{aligned} V_{eff} = & -\frac{1 + \delta Z_{fin}}{2} \sigma_2^2 - \frac{g + \delta g_{fin}}{6} \sigma_1^3 \sigma_2 + \frac{1}{12\pi} (\mu_1^3 - M^3) \\ & + \frac{g}{32\pi^2} \left[\frac{1}{3} \mu_1 (\mu_1 - M) (\mu_1 - 4M) - \frac{2}{3} \mu_1 (\mu_1^2 - M^2) \ln \frac{2M + \mu_1}{\mu} \right. \\ & \left. - \frac{1}{3} \mu_1 (10\mu_1^2 - M^2) \ln \frac{M + 2\mu_1}{\mu} + \left(\mu_1 (2\mu_1^2 + M^2) + \frac{g}{6} \sigma_2^2 \right) \ln \frac{3M}{\mu} \right], \quad (3.22) \end{aligned}$$

onde $\mu_1 = g\sigma_1^2/2$, $\mu_2^2 = g\sigma_1\sigma_2$ e $M = (\mu_1^2 - \mu_2^2)^{1/2}$. Observe que V_{eff} é real somente para M real, isto é, se $(g\sigma_1^4 - 4\sigma_1\sigma_2) > 0$.

A singularidade em $\sigma_1 = 0$ para $\sigma_2 \neq 0$, no último termo de V_{eff} , é remanescente da divergência IR produzida pela ausência do termo de massa na ação clássica. Assim, $\sigma_1 = 0$ não é um ponto conveniente para impor as condições de renormalização. O ponto $\sigma_1^2 = \mu$, onde μ é o parâmetro de massa introduzido via regularização dimensional constitui uma escolha mais natural. Para ver esse fato, vamos expandir a expressão do potencial efetivo em potências de σ_2 .

O resultado pode ser posto na forma

$$\begin{aligned} V_{eff} = & \sigma_2 \sigma_1^3 \left[-\frac{g}{6} + \left(-\frac{\delta g_{fin}}{6} + \frac{1}{2} g \hat{g} - \frac{3}{2} g \hat{g}^2 - 2g \hat{g}^2 \ln \frac{3g}{2} \right) - 2g \hat{g}^2 \ln \frac{\sigma_1^2}{\mu} \right] \\ & + \sigma_2^2 \left[-\frac{1}{2} + \left(-\frac{\delta Z_{fin}}{2} - \frac{1}{2} \hat{g} + \frac{29}{18} \hat{g}^2 + \frac{1}{3} \hat{g}^2 \ln \frac{3g}{2} \right) + \frac{1}{3} \hat{g}^2 \ln \frac{\sigma_1^2}{\mu} \right] + \sigma_2^3 \mathcal{F}(\sigma_1), \quad (3.23) \end{aligned}$$

onde, como antes, $\hat{g} = g/8\pi$. Para fixar δg_{fin} e δZ_{fin} , vamos impor que todos os termos dentro dos parenteses sejam nulos. Essa escolha implica que no ponto $\sigma_1^2 = \mu$, os coeficientes dos dois monômios ($\sigma_2 \sigma_1^3$ e σ_2^2) são os mesmos do potencial clássico $V_{class} = -(g/6)\sigma_2 \sigma_1^3 - (1/2)\sigma_2^2$. A primeira condição fixa a constante de acoplamento e a segunda implica que o coeficiente do termo cinético da Lagrangiana efetiva renormalizada em $\sigma_1 = \mu$ seja um.

Na forma expandida, o potencial renormalizado resulta em

$$\begin{aligned} V_{eff} &= \sigma_2 \sigma_1^3 \left(-\frac{g}{6} - 2g\hat{g}^2 \ln \frac{\sigma_1^2}{\mu} \right) \\ &+ \sigma_2^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\hat{g}^2 \ln \frac{\sigma_1^2}{\mu} \right) + \sigma_2^3 \mathcal{F}(\sigma_1). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Agora, vamos investigar a possibilidade da quebra de supersimetria. É fácil verificar que $V_{eff}(\sigma_1, \sigma_2 = 0) = 0$, assim como $\partial V_{eff}/\partial \sigma_1|_{\sigma_2=0} \equiv 0$. A condição $\partial V_{eff}/\partial \sigma_2|_{\sigma_2=0} = 0$, implica na seguinte equação de “gap” para σ_1 :

$$\sigma_1^3 \left(1 + 12\hat{g}^2 \ln \frac{\sigma_1^2}{\mu} \right) = 0. \quad (3.25)$$

Essa equação tem um solução trivial em $\sigma_1^{min} = 0$, o que assegura que a SUSY, assim como a simetria discreta $\Phi \rightarrow -\Phi$ são ambas preservadas pelas correções radioativas. Considerando o termo entre parenteses, uma possível solução não nula $\sigma_1^{min} \neq 0$ seria dada por

$$g^2 \ln \frac{(\sigma_1^{min})^2}{\mu} = -\frac{16\pi^2}{3}. \quad (3.26)$$

Contudo, seguindo o argumento de Coleman e Weinberg [43], correções de ordem mais alta são esperadas introduzir potências mais altas de $g^2 \ln \frac{\sigma_1^2}{\mu} \gg 1$ (em valores absolutos) e assim, levar este novo mínimo para uma região muito afastada do intervalo de validade da aproximação de dois laços.

Concluímos que nenhum vácuo não trivial é induzido por correções radiativas e que nem a SUSY e nem a geração dinâmica de massa ocorrem. Nossos resultados contradizem os obtidos na Ref. [47], onde é relatado que as correções de dois laços são capazes de induzir uma quebra de supersimetria, seguida por uma geração dinâmica de massa.

Por outro lado, uma conclusão similar à nossa foi obtido em [53], para o modelo O(N) WZ na aproximação $1/N$. De fato, como discutido em [43], a quebra espontânea de simetria e a geração de massa através de correções radiativas são possíveis somente em modelos com mais de uma constante de acoplamento e necessitam de um ajuste fino entre estas constantes para garantir a validade da expansão perturbativa.

Para encerrar esse capítulo, vamos determinar as funções β_g e γ_Φ do grupo de renormalização para o caso particular com $g \neq 0$ e $m = \lambda = a = 0$. Podemos relacionar o supercampo e a constante de acoplamento não renormalizados Φ_0 e g_0 em termos de

Φ e g renormalizados por meio das definições

$$\Phi_0 = Z_\Phi^{\frac{1}{2}}\Phi = (1 + \delta Z)^{\frac{1}{2}}\Phi, \quad (3.27)$$

$$g_0 = \mu^\epsilon g Z_g = \mu^\epsilon g \left[\frac{1 + g^{-1}\delta g}{Z_\Phi^2} \right], \quad (3.28)$$

e escrevendo explicitamente os contratermos a partir da Eq. (3.21) como

$$\delta Z = -\frac{g^2}{192\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \text{termos finitos}, \quad (3.29)$$

$$\delta g = \frac{3g^3}{32\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \text{termos finitos}, \quad (3.30)$$

obtemos a função beta na ordem principal

$$\begin{aligned} \beta_g &= \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = \frac{5g^3}{24\pi^2} - \epsilon g \\ &= \frac{5g^3}{24\pi^2} \quad (\text{para } \epsilon \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Esse resultado está de acordo com o obtido na Ref. [54] pelo cálculo direto das partes divergentes das várias funções de vértice no formalismo de campos componentes. A solução da Eq. (3.31) é dada por

$$\bar{g}^2 = \frac{g^2}{1 - \frac{5}{12\pi^2} g^2 \ln \frac{\bar{\mu}}{\mu}}. \quad (3.32)$$

Partindo com um $g^2 \ll 1$ na escala de energia definida por μ , vemos que a constante de acoplamento efetiva \bar{g}^2 cresce quando a escala $\bar{\mu}$ é aumentada. Então, a curtas distâncias, os resultados acima não são factíveis: correções de mais laços tornam-se cada vez maiores quando comparadas com as de segunda ordem. Se em vez disso temos $\bar{\mu} \rightarrow 0$, obtemos $\bar{g}^2 \rightarrow 0$, revelando um limite IR livre.

Uma dimensão anômala para o modelo também é induzida, como pode ser vista pelo cálculo da função γ_Φ :

$$\gamma_\Phi = \frac{1}{2} \mu \frac{d \ln Z_\Phi}{d \mu}. \quad (3.33)$$

A partir de (3.27), podemos escrever (3.33) na forma

$$2(1 + \delta Z) \gamma_\Phi = \mu \frac{\partial \delta Z}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial \mu}. \quad (3.34)$$

Substituindo (3.29) e (3.31) em (3.34), obtemos

$$2 \left(1 - \frac{g^2}{192\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \right) \gamma_\Phi = \frac{g^2}{96\pi^2} - \frac{5g^4}{24 \cdot 96\pi^4} \frac{1}{\varepsilon}, \quad (3.35)$$

que implica em

$$\gamma_\Phi = \frac{g^2}{192\pi^2}. \quad (3.36)$$

Capítulo 4

Identidades de Slavnov-Taylor para a QED não comutativa supersimétrica em $(2+1)D$

Apresentaremos neste capítulo o estudo das identidades de Slavnov-Taylor para a eletrodinâmica quântica não comutativa supersimétrica em $2+1$ dimensões. O acoplamento com matéria é realizado por supercampos escalares complexos na representação fundamental.

4.1 Supersimetria, simetria BRST e não comutatividade

Um dos principais problemas na formulação de teorias de calibre no superespaço é a ausência de um mecanismo de regularização que preserve explicitamente ambas as simetrias; de calibre e a supersimetria. Em geral, a ação efetiva renormalizada obtida a partir de um particular esquema de regularização, como por exemplo regularização dimensional (ou DReG), pode não a priori satisfazer explicitamente as identidades de Ward e manter a supersimetria manifesta, quando formulada no superespaço [55].

Para ver o porquê desse problema, imaginemos uma teoria de calibre usual, formulada no superespaço com $\mathcal{N} = 1$ em $3+1$ dimensões do espaço-tempo. Seguindo o procedimento bem estabelecido por Grisaru et al. [18] para a determinação da ação efetiva diretamente no superespaço, o mecanismo de regularização que permite isolar as divergências, renormalizar a teoria e manter a supersimetria manifesta em todas as etapas dos cálculos é a regularização por redução dimensional (ou DReD) [56]. Neste particular esquema, toda a D -álgebra envolvendo os superdiagramas de Feynman, que na formulação em componentes corresponde a manipulação dos traços, contrações, etc, das matrizes de Dirac, é realizada com a dimensão fixada em $D = 4$. Somente ao final,

quando a ação efetiva é transformada numa função local nas coordenadas grasmanianas, tomamos $D = 4 - \epsilon$ e resolvemos as integrais de momento escalares resultantes. Como o número de graus de liberdade bosônicos e fermiônicos, agrupados de forma condensada nos multipletos formados pelos supercampos, são mantidos inalterados em todas as etapas, então podemos garantir que esse método preserva a supersimetria explicitamente. Contudo, tal fato não garante que a simetria de calibre seja preservada, pois alguma componente do campo de calibre em $4 - D$ pode sofrer uma transformação de calibre diferente das outras componentes mantidas fixas em $D = 4$. Por essa razão, a DReD não preserva a invariância de calibre em todos os estágios e corre o risco de violar as identidades de Ward, embora preserve a supersimetria explicitamente. Tal fato constitui uma inconsistência da DReD e foi primeiramente descrito em [57]. Por outro lado, na formulação em campos componentes, podemos aplicar a DReG desde o início e, como é bem sabido, ela preserva explicitamente a simetria de calibre ao tratar todos os campos do modelo em questão como objetos D -dimensionais [58]. Infelizmente, como a supersimetria é manifesta somente em $D = 4$, a DReG não garante a preservação de tal simetria no modelo.

Outro aspecto que pode contribuir para a violação das simetrias de calibre é o efeito da mistura ultravioleta/infravermelha (UV/IR), peculiar em teoria de campos não comutativas. Tal fenômeno é capaz de transformar termos com divergências ultravioletas em divergências infravermelhas e tecnicamente pode ser visto como decorrente da separação dos diagramas de Feynman em partes planar e não planar. Esse fato pode inviabilizar a expansão perturbativa, tornando um modelo comutativo que ordinariamente é renormalizável em uma teoria com termos infravermelhos singulares que não podem ser eliminados pelo processo de renormalização [10, 11, 12]. Entretanto, o cancelamento das divergências devido as contribuições bosônicas e fermiônicas em teorias supersimétricas, pode ajudar a amortizar o efeito da mistura UV/IR.

No situação usual sabe-se que as identidades de Ward-Takahashi (WT) produzem vínculos diagramáticos entre as diferentes funções de Green, como consequência da simetria de calibre original. Tais identidades são fundamentais para relacionar os diferentes contratermos e tornar viável o programa de renormalização em todas as ordens de perturbação. Por conseguinte, uma verificação explícita das identidades de WT fornece um modo de garantir que a simetria de calibre não foi violada por nenhuma possível anomalia introduzida através de um esquema de regularização ou pela presença da não comutatividade.

Em particular, para o caso da eletrodinâmica quântica supersimétrica não comutativa em $2 + 1$ dimensões (NCSQED_3) foi provada sua finitude e ausência de singularidades UV/IR não integráveis até a ordem de uma laço [59]. Contudo, a importante questão envolvendo a preservação ou não da simetria de calibre, devido a introdução

da não comutatividade e/ou DRGe, não foi estudada até o presente momento. Neste capítulo, apresentaremos uma análise preliminar das identidades de WT generalizadas (ou identidades de Slavnov-Taylor (ST)) para a NCSQED₃.

Na seção 4.2, definiremos o modelo que descreve a NCSQED₃ utilizando o formalismo de supercampos. Também incluiremos a interação com matéria, permitindo o acoplamento do supercampo de calibre com um supercampo escalar complexo na representação fundamental. A quantização da teoria é realizada de maneira canônica, com a introdução de um termo fixador de calibre e dos correspondentes campos fantasmas de Faddeev–Popov. Na seção 4.3, definiremos as transformações de BRST e faremos a verificação explícita da invariância da ação clássica sob esse conjunto de transformações. No que segue, derivaremos as identidades de ST via formalismo funcional, diretamente no superespaço. Na seção 4.4, determinaremos uma expressão geral para o grau de divergência superficial da teoria, indicando que o modelo é superrenormalizável. Finalmente, na seção 4.5, calcularemos a ação efetiva correspondente a função de dois pontos para o supercampo de calibre na aproximação de um laço e mostraremos explicitamente que a mesma satisfaz a identidade de ST.

4.2 Ação clássica em supercampos e a quantização no superespaço

4.2.1 Apresentação do modelo

A NCSQED₃ com $\mathcal{N} = 1$ é definida no superespaço pela ação clássica [59]

$$S_G = \frac{1}{2} \int d^5z W^\alpha \star W_\alpha, \quad (4.1)$$

onde o elemento de integração é representado por $d^5z \equiv d^3x d^2\theta$ e o produto Moyal é o mesmo que em (2.14) e só afeta as coordenadas do espaço-tempo x^μ . O supercampo espinorial W^α que representa a intensidade de campo eletromagnética é construído a partir do supercampo espinorial de calibre A^α por meio da relação

$$W_\alpha = \frac{1}{2} D^\beta D_\alpha A_\beta - \frac{ig}{2} [A^\beta, D_\beta A_\alpha]_\star - \frac{g^2}{6} [A^\beta, \{A_\beta, A_\alpha\}]_\star, \quad (4.2)$$

tal que o símbolo “ \star ” indica que todos os campos no interior do comutadores e anticomutadores são multiplicados via produto Moyal. Notemos que a não comutatividade induz um comportamento não-abeliano na teoria, mesmo que o grupo de simetria seja o $\mathcal{U}(1)_\star$. Do termo bilinear, podemos extrair a dimensão do supercampo em unidades de massa $[A_\alpha] = 0$, tal que a constante de acoplamento possui dimensão $[g] = 1/2$.

Deve-se notar que ao tomar $g \rightarrow 0$, obtemos a versão usual da eletrodinâmica supersimétrica tridimensional [18]. Além disso, estamos considerando a não comutatividade apenas nas coordenadas espaciais ($\Theta^{0i} = 0$) a fim de evitar problemas de unitariedade [60].

A ação definida por S_G é invariante sob a transformação de calibre não comutativa

$$\delta_G A_\alpha(z) \equiv \frac{1}{g} \nabla_\alpha K(z) = \frac{1}{g} (D_\alpha K - ig [A_\alpha, K]_\star), \quad (4.3)$$

onde $\nabla_\alpha = D_\alpha - ig[A_\alpha,]_\star$ é a derivada covariante espinorial e $K(z)$ é um supercampo escalar real arbitrário, tal que W_α se transforma covariantemente por $(W_\alpha)' = e^{iK} \star W_\alpha \star e^{-iK}$. Para prosseguir com a quantização da teoria, devemos fixar o calibre acrescentando uma novo termo a S_G na forma

$$S_{GF} = -\frac{1}{4\alpha} \int d^5z (D^\alpha A_\alpha) D^2 (D^\beta A_\beta). \quad (4.4)$$

onde α é um parâmetro adimensional que fixa a escolha do calibre. Deve-se observar que o termo acima quebra a invariância de calibre da teoria, mas mantém a supersimetria manifesta. Para completar a quantização, seguimos o procedimento de Faddeev-Popov adicionando a ação clássica a contribuição dos campos fantasmas na forma

$$\begin{aligned} S_{FP} &= \frac{1}{2} \int d^5z c' \star D^\alpha \nabla_\alpha c \\ &= \frac{1}{2} \int d^5z c' \star D^\alpha (D_\alpha c - ig \{A_\alpha, c\}_\star), \end{aligned} \quad (4.5)$$

tal que $c(z)$ e $c'(z)$ são supercampos escalares anticomutantes real e imaginário, respectivamente. Tal que a condição de hermiticidade da Lagrangiana dos supercampos fantasmas seja preservada. Note que em (4.5), a derivada supercovariante é composta por um anticomutador entre A_α e c , em contraste com (4.3). Dessa forma, estamos assumindo que os campos fantasmas comportam-se como supercampos fermiônicos sob a álgebra da supersimetria e estão na representação adjunta do grupo de calibre $\mathcal{U}(1)_\star$.

Para completar nosso modelo, vamos admitir que o supercampo de calibre acopla minimamente com a matéria por meio da ação

$$\begin{aligned} S_M &= \int d^5z \left[-\frac{1}{2} \overline{\nabla^\alpha \Phi} \star \nabla_\alpha \Phi + M \bar{\Phi} \Phi \right] \\ &= \int d^5z \left[-\frac{1}{2} (D^\alpha \bar{\Phi} + ig \bar{\Phi} A^\alpha) \star (D_\alpha \Phi - ig A_\alpha \Phi) + M \bar{\Phi} \Phi \right], \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde Φ é um supercampo escalar complexo pertencente a representação fundamental

do grupo de $\mathcal{U}(1)_*$, com dimensão em unidades de massa $[\Phi] = 1/2$. Observamos que a derivada covariante atuando sobre um supercampo bosônico na representação fundamental assume a forma $\nabla = D_\alpha - igA_\alpha$.

A ação definida em (4.6) é invariante sob a transformação de calibre (4.3), em adição com as seguintes transformações para os campos Φ e $\bar{\Phi}$:

$$\begin{aligned}\delta_G \Phi &= iK \star \Phi, \\ \delta_G \bar{\Phi} &= -i\bar{\Phi} \star K.\end{aligned}\tag{4.7}$$

4.2.2 Regras de Feynman

As regras de Feynman para os supercampos da NCSQED₃; A_α , c , c' , Φ e $\bar{\Phi}$, podem ser obtidas diretamente das Lagrangianas em (4.1), (4.4), (4.5) e (4.6). Os propagadores são definidos pelos termos quadráticos e os vértices pelos termos de interação. Como visto na seção 1.6, o procedimento para determinar os propagadores segue o caso no caso usual, tal que alguns passos intermediários serão omitidos.

A ação quadrática para o campo de calibre é dada por:

$$\begin{aligned}S_{A^2} &= \frac{1}{2} \int d^5z \left[\frac{1}{4} D^\beta D^\sigma A_\beta D^\alpha D_\sigma A_\alpha - \frac{1}{2\alpha} D^\beta A_\beta D^2 D^\alpha A_\alpha \right] \\ &= \frac{1}{2} \int d^5z A_\beta \left[-\frac{1}{4} D^\sigma D^\beta D^\alpha D_\sigma - \frac{1}{2\alpha} D^\beta D^2 D^\alpha \right] A_\alpha,\end{aligned}\tag{4.8}$$

onde utilizamos integração por partes. Com o auxílio das identidades supersimétricas $D^\beta D^\alpha D_\sigma = D_\sigma D^\alpha D^\beta$, $D^\beta D^2 = -D^2 D^\beta$ e $D^\alpha D^\beta = i\partial^{\alpha\beta} - C^{\alpha\beta} D^2$, podemos reescrever (4.8) na forma

$$\begin{aligned}S_{A^2} &= \frac{1}{2} \int d^5z A_\beta \left[-\frac{1}{2} D^2 D^\alpha D^\beta + \frac{1}{2\alpha} D^2 D^\beta D^\alpha \right] A_\alpha \\ &= \frac{1}{2} \int d^5z A_\beta \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) C^{\alpha\beta} \square + \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{1}{\alpha} \right) i\partial^{\alpha\beta} D^2 \right] A_\alpha.\end{aligned}\tag{4.9}$$

O propagador de Feynman é obtido completando os quadrados no gerador funcional para o supercampo de calibre e realizando a integração Gaussiana sobre A_α . Isto é equivalente a inversão do termo entre colchetes na Eq. (4.9), deste modo o propagador de Feynman $\Delta_{F\alpha\beta}(z_1 - z_2)$ satisfaz a seguinte equação de Green:

$$\left[-\frac{1}{2} D^2 D^\mu D^\alpha + \frac{1}{2\alpha} D^2 D^\alpha D^\mu \right]_{z_1} \Delta_{F\mu\beta}(z_1 - z_2) = i\delta_\beta^\alpha \delta^5(z_1 - z_2),\tag{4.10}$$

a qual, é possível verificar que no espaço dos momentos assume a forma

$$\begin{aligned}\Delta_{F\alpha\beta}(p; \theta_1 - \theta_2) &= \langle A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_2) \rangle \\ &= \frac{i}{2p^4} \left[D^2 D_\beta D_\alpha - \alpha D^2 D_\alpha D_\beta \right] \delta^2(\theta_1 - \theta_2), \\ &= \frac{i}{2} \left[C_{\beta\alpha} \frac{1}{p^2} (\alpha + 1) - \frac{1}{p^4} (\alpha - 1) p_{\alpha\beta} D^2 \right] \delta^2(\theta_1 - \theta_2),\end{aligned}\quad (4.11)$$

Note que a escolha mais conveniente para o parâmetro fixador de calibre é $\alpha = 1$ (calibre de Feynman), implicando no propagador simplificado

$$\langle A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_2) \rangle_{\alpha=1} = i C_{\beta\alpha} \frac{1}{p^2} \delta^2(\theta_1 - \theta_2). \quad (4.12)$$

As partes quadráticas associadas aos supercampos fantasmas de Faddeev-Popov e de matéria são dadas por

$$S_{c^2} = \int d^5 z c' D^2 c, \quad (4.13)$$

$$S_{\Phi^2} = \int d^5 z \bar{\Phi} (D^2 + M) \Phi. \quad (4.14)$$

Os propagadores correspondentes podem ser obtidos de forma similar, resultando em:

$$G_F(p, \theta_1 - \theta_2) = \langle c'(p, \theta_1) c(-p, \theta_2) \rangle = i \frac{D^2}{p^2} \delta^2(\theta_1 - \theta_2), \quad (4.15)$$

$$\Delta_F(p, \theta_1 - \theta_2) = \langle \Phi(p, \theta_1) \bar{\Phi}(-p, \theta_2) \rangle = -i \frac{D^2 - M}{p^2 + M^2} \delta^2(\theta_1 - \theta_2). \quad (4.16)$$

Os termos de interação da ação clássica dos setores de calibre puro, dos campos fantasmas e de matéria são obtidos de 4.1, 4.2, 4.5 e 4.6, sendo respectivamente

$$\begin{aligned}S_{G(\text{int})} &= \int d^5 z \left[-\frac{ig}{4} D^\beta D^\alpha A_\beta \star [A^\sigma, D_\sigma A_\alpha] - \frac{g^2}{8} [A^\beta, D_\beta A^\alpha] \star [A^\sigma, D_\sigma A_\alpha] \right. \\ &\quad - \frac{g^2}{12} D^\beta D^\alpha A_\beta \star [A^\sigma, \{A_\sigma, A_\alpha\}] + \frac{ig^3}{12} [A^\beta, D_\beta A^\alpha] \star [A^\sigma, \{A_\sigma, A_\alpha\}] \\ &\quad \left. + \frac{g^4}{72} [A^\beta, \{A_\beta, A^\alpha\}] \star [A^\sigma, \{A_\sigma, A_\alpha\}] \right],\end{aligned}\quad (4.17)$$

$$S_{FP(\text{int})} = -\frac{ig}{2} \int d^5 z [c' \star D^\alpha A_\alpha \star c + c' \star A^\alpha \star D_\alpha c + c' \star D^\alpha c \star A_\alpha - c' \star c \star D^\alpha A_\alpha], \quad (4.18)$$

$$S_M(\text{int}) = \int d^5z \left[\frac{ig}{2} (D^\alpha \bar{\Phi} \star A_\alpha \star \Phi - \bar{\Phi} \star A^\alpha \star D_\alpha \Phi) - \frac{g^2}{2} \bar{\Phi} \star A^\alpha \star A_\alpha \star \Phi \right], \quad (4.19)$$

onde o produto Moyal nos (anti)comutadores está subtendido.

Os vértices representados no espaço dos momentos podem ser escritos na forma

- Setor de calibre:

$$V_{A^3} = \left(\frac{g}{2}\right) \int d^2\theta \prod_{i=1}^3 \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\sum_{j=1}^3 k_j) D_\sigma A_{1\alpha} D^\beta D^\alpha A_{2\beta} A_3^\sigma \sin(k_1 \wedge k_3), \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} V_{A^4}^{(1)} = & \left(\frac{g^2}{2}\right) \int d^2\theta \prod_{i=1}^4 \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\sum_{j=1}^4 k_j) A_1^\beta D_\beta A_2^\alpha A_3^\sigma D_\sigma A_{4\alpha} \\ & \sin [k_1 \wedge (k_3 + k_4)] \sin(k_4 \wedge k_3), \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} V_{A^4}^{(2)} = & \left(\frac{g^2}{3}\right) \int d^2\theta \prod_{i=1}^4 \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\sum_{j=1}^4 k_j) D^\beta D^\alpha A_{1\beta} A_2^\alpha A_3^\sigma A_{4\sigma} \\ & \sin [k_2 \wedge (k_3 + k_4)] \sin(k_3 \wedge k_4), \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} V_{A^5} = & \left(-\frac{2g^3}{3}\right) \int d^2\theta \prod_{i=1}^5 \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta(\sum_{j=1}^5 k_j) A_1^\gamma D_\gamma A_2^\alpha A_3^\beta A_{4\beta} A_{5\alpha} \\ & \sin [(k_1 + k_2 + k_3) \wedge k_4] \sin [(k_1 + k_2) \wedge k_3] \sin(k_1 \wedge k_2), \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} V_{A^6} = & \left(-\frac{2g^4}{9}\right) \int d^2\theta \prod_{i=1}^6 \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta(\sum_{j=1}^6 k_j) A_1^\gamma A_{2\gamma} A_3^\alpha A_5^\beta A_{6\beta} A_{4\alpha} \\ & \sin [(k_1 + k_2 + k_3 + k_5) \wedge k_4] \sin [(k_1 + k_2 + k_3) \wedge k_5] \\ & \sin [k_1 \wedge (k_2 + k_3)] \sin(k_2 \wedge k_3). \end{aligned} \quad (4.24)$$

- Campos fantasmas

$$V_{Ac^2} = (-g) \int d^2\theta \prod_{i=1}^3 \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\sum_{j=1}^3 k_j) D^\alpha c'_1 c_2 A_{3\alpha} \sin(k_2 \wedge k_3). \quad (4.25)$$

- Setor de matéria

$$V_{\Phi^2 A}^{(1)} = \left(\frac{ig}{2}\right) \int d^2\theta \prod_{i=1}^3 \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\sum_{j=1}^3 k_j) D^\alpha \bar{\Phi}_1 A_{2\alpha} \Phi_3 e^{-ik_2 \wedge k_3}, \quad (4.26)$$

$$V_{\Phi^2 A}^{(2)} = \left(-\frac{ig}{2}\right) \int d^2\theta \prod_{i=1}^3 \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{j=1}^3 k_j\right) \bar{\Phi}_1 A_2^\alpha D_\alpha \Phi_3 e^{-ik_2 \wedge k_3}, \quad (4.27)$$

$$V_{\Phi^2 A^2} = \left(-\frac{g^2}{2}\right) \int d^2\theta \prod_{i=1}^4 \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{j=1}^4 k_j\right) \bar{\Phi}_1 A_2^\alpha A_{3\alpha} \Phi_4 e^{-i[k_2 \wedge (k_3+k_4) + k_3 \wedge k_4]}, \quad (4.28)$$

onde adotamos a notação simplificada $A_{i\alpha} \equiv A_\alpha(k_i, \theta)$, $c_i = c(k_i, \theta)$ e $\Phi_i \equiv \Phi(k_i, \theta)$.

4.3 Identidades de Slavnov-Taylor para a ação efetiva: formulação em supercampos

4.3.1 Simetria BRST

Como vimos anteriormente, a Lagrangiana total para a NCSQED₃ é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Tot} = & \frac{1}{2} W^\alpha \star W_\alpha - \frac{1}{2} \bar{\nabla}^\alpha \Phi \star \nabla_\alpha \Phi + M \bar{\Phi} \star \Phi \\ & - \frac{1}{4\alpha} (D^\alpha A_\alpha) D^2 (D^\beta A_\beta) + \frac{1}{2} c' \star D^\alpha \nabla_\alpha c, \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde somente os três primeiros termos são invariantes de calibre.

No processo de quantização, a simetria de calibre foi quebrada com a introdução do parâmetro α e, por conseguinte, a Lagrangiana definida em (4.29) não é mais invariante de calibre. Contudo, existe ainda uma simetria adicional, que está diretamente relacionada com os supercampos fantasmas e recebe o nome de simetria BRST (Becchi, Rouet, Stora e Tyutin [61]). A simetria BRST é uma simetria global que envolve um parâmetro escalar fermiônico, mas diferentemente das transformações de supersimetria, cujo parâmetro é um espinor por transformações de Lorentz, aqui ele se comporta como um escalar.

A importância das transformações de BRST reside no fato de que elas permitem derivar identidades de Ward, neste caso chamadas de Slavnov-Taylor [62], as quais relacionam as funções de vértices de n -pontos e os contratermos necessários para a renormalização.

As transformações de BRST para o modelo são definidas como segue

$$\begin{aligned}
 sA_\alpha &= -\epsilon\nabla_\alpha c, \\
 sc &= ig\epsilon c \star c, \\
 sc' &= \epsilon \frac{1}{\alpha} D^2 D^\alpha A_\alpha, \\
 s\Phi &= ig\epsilon c \star \Phi, \\
 s\bar{\Phi} &= -ig\epsilon \bar{\Phi} \star c,
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

onde ϵ é um parâmetro fermiônico constante e imaginário. Antes de demonstrar a invariância de (4.29) sob (4.30), convém demonstrar as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 s(D^\alpha A_\alpha) &= 0, \\
 s(\nabla_\alpha c) &= 0, \\
 s(c \star c) &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

De fato, a primeira identidade acima resulta de

$$s(D^\alpha A_\alpha) = D^\alpha(sA_\alpha) = D^\alpha(-\epsilon\nabla_\alpha c) = \epsilon D^\alpha \nabla_\alpha c = 0, \tag{4.32}$$

onde no último passo usamos a equação de movimento para o supercampo fantasma c , obtida por meio de $\frac{\delta S_{FP}}{\delta c'} = 0$. Similarmente, obtemos

$$\begin{aligned}
 s(\nabla_\alpha c) &= s(D_\alpha c - ig\{A_\alpha, c\}_\star) \\
 &= D_\alpha(sc) - ig\{sA_\alpha, c\}_\star - ig\{A_\alpha, sc\}_\star \\
 &= \nabla_\alpha(sc) - ig\{sA_\alpha, c\}_\star \\
 &= \nabla_\alpha(ig\epsilon c \star c) - ig\{-\epsilon\nabla_\alpha c, c\}_\star \\
 &= -ig\epsilon(\nabla_\alpha c \star c - c \star \nabla_\alpha c) \\
 &\quad + ig(\epsilon\nabla_\alpha c \star c + c \star (\epsilon\nabla_\alpha c)) \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

e finalmente

$$\begin{aligned}
 s(c \star c) &= sc \star c + c \star sc \\
 &= (ig\epsilon c \star c) \star c + c \star (ig\epsilon c \star c) \\
 &= ig\epsilon(c \star c \star c - c \star c \star c) \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

onde usamos o fato do produto Moyal ser associativo e também a regra de Leibniz $\nabla_\alpha(f \star g) = \nabla_\alpha f \star g \pm f \star \nabla_\alpha g$, onde o sinal depende se f é bóson (+) ou férmion (-).

A invariância da teoria sob (4.30) é simplificada se notarmos que a transformação para A_α pode ser considerada uma transformação de calibre infinitesimal quando identificamos $K(z) = g\epsilon c(z)$, tal que

$$\delta_G A_\alpha(z) \equiv \frac{1}{g} \nabla_\alpha K(z) = \frac{1}{g} \nabla_\alpha g \epsilon c(z) = -\epsilon \nabla_\alpha c = s A_\alpha, \quad (4.35)$$

e de forma análoga para os supercampos de matéria. Notemos que $K^\dagger = g c^\dagger \epsilon^\dagger = -g c \epsilon = g \epsilon c = K$. Desse modo, precisamos mostrar apenas que as partes envolvendo os supercampos fantasmas e o fixador de calibre são invariantes por BRST, *a menos de termos de superfície*. De Fato,

$$\begin{aligned} s(S_{GF} + S_{FP}) &= -\frac{1}{4\alpha} \int d^5 z \left(D^\beta s A_\beta D^2 D^\alpha A_\alpha + D^\beta A_\beta D^2 D^\alpha s A_\alpha \right) \\ &+ \frac{1}{2} \int d^5 z (sc' D^\alpha \nabla_\alpha c + c' D^\alpha s \nabla_\alpha c) \\ &= -\frac{1}{2\alpha} \int d^5 z D^2 D^\beta A_\beta D^\alpha s A_\alpha + \frac{1}{2} \int d^5 z s c' D^\alpha \nabla_\alpha c \\ &= \frac{\epsilon}{2\alpha} \int d^5 z \left[-D^2 D^\beta A_\beta D^\alpha \nabla_\alpha c + D^2 D^\beta A_\beta D^\alpha \nabla_\alpha c \right] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.36)$$

tal que a ação $S_{Tot} = \int d^5 z \mathcal{L}_{Tot}$ é invariante. Na derivação acima, integramos por partes duas vezes na primeira linha e usamos (4.30) e (4.31).

Uma importante característica das transformações de BRST é a nilpotência, isto é, o resultado de duas operações sucessivas será sempre nulo:

$$s_1(s_2\phi) = 0. \quad (4.37)$$

A prova da nilpotência para A_α , c' e c , segue diretamente de (4.31). Por exemplo, para o supercampo A_α , temos

$$s_1(s_2 A_\alpha) = s_1(-\epsilon_2 \nabla_\alpha c) = -\epsilon_2(s_1 \nabla_\alpha c) = 0. \quad (4.38)$$

Para os supercampos de matéria a prova também é direta e segue abaixo

$$\begin{aligned} s_1(s_2 \Phi) &= s_1(i g \epsilon_2 c \star \Phi) \\ &= i g \epsilon_2 (s_1 c \star \Phi + c \star s_1 \Phi) \\ &= i^2 g^2 \epsilon_2 \epsilon_1 (c \star c \star \Phi - c \star c \star \Phi) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.39)$$

de modo análogo para $\bar{\Phi}$.

4.3.2 Identidades de Slavnov-Taylor

Como vimos anteriormente, a simetria de calibre presente na ação clássica se manifesta, após o procedimento de quantização, por meio da simetria BRST. Como consequência, as funções de Green podem ser mutuamente relacionadas. Tais vínculos podem ser expressos através das identidades Slavnov-Taylor. A seguir, deduziremos essas relações diretamente no superespaço, aplicando o procedimento padrão adotado nas teorias de calibre [63].

Considerando o gerador funcional

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c' \mathcal{D}c \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Phi} \exp \left\{ i \int d^5z (\mathcal{L}_{Tot} + \mathcal{L}_{Fontes}) \right\}, \quad (4.40)$$

onde \mathcal{L}_{Tot} é definida em (4.29) e os termos de fontes são dados por

$$\mathcal{L}_{Fontes} = J^\alpha \star A_\alpha + \eta \star c + c' \star \eta' + \bar{\chi} \star \Phi + \bar{\Phi} \star \chi. \quad (4.41)$$

Sabendo que $\int d^5z \mathcal{L}_{Tot}$ é invariante por (4.30) e que as fontes não se transformam, podemos realizar a seguinte mudança de variáveis para representar as transformações de BRST.

$$A \rightarrow \tilde{A}, \quad c' \rightarrow \tilde{c}', \quad c \rightarrow \tilde{c}, \quad \Phi \rightarrow \tilde{\Phi}, \quad \bar{\Phi} \rightarrow \tilde{\bar{\Phi}}. \quad (4.42)$$

Substituindo (4.42) em (4.40), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{Z}}[J] = & \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c' \mathcal{D}c \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Phi} \exp \left\{ i \int d^5z (\mathcal{L}_{Tot} + J^\alpha \star \tilde{A}_\alpha \right. \\ & \left. + \eta \star \tilde{c} + \tilde{c}' \star \eta' + \bar{\chi} \star \tilde{\Phi} + \tilde{\bar{\Phi}} \star \chi) \right\}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

onde consideramos que o elemento de integração funcional também é invariante, tendo em vista que (4.42) são “shifts” nos supercampos produzidos por transformações unitárias.

Sabendo que a Eq. (4.42) consiste simplesmente em uma mudança de variáveis, então (4.40) e (4.43) devem ser iguais. Isso significa que as funções de Green geradas por $\mathcal{Z}[J]$ devem ser as mesmas que aquelas obtidas por $\tilde{\mathcal{Z}}[J]$:

$$\langle 0 | T [A_\alpha(z) \dots] | 0 \rangle = \langle 0 | T [\tilde{A}_\alpha(z) \dots] | 0 \rangle, \quad (4.44)$$

implicando em

$$s \langle 0 | T [A_\alpha(z) \dots] | 0 \rangle = 0, \quad (4.45)$$

A Eq. (4.45) pode ser reescrita na forma de vínculos sobre o gerador funcional. Empregando a forma infinitesimal $\tilde{A} = A + sA$, $\tilde{c} = c + sc$, etc, e expandindo a exponencial em (4.43) até primeira ordem, chegamos em

$$\int \mathcal{D}A \mathcal{D}c' \mathcal{D}c \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Phi} \int d^5z (J^\alpha \star sA_\alpha + \eta \star sc + sc' \star \eta' + \bar{\chi} \star s\Phi + s\bar{\Phi} \star \chi) \times \exp \left\{ i \int d^5z (\mathcal{L}_{Tot} + J^\alpha \star A_\alpha + \eta \star c + c' \star \eta' + \bar{\chi} \star \Phi + \bar{\Phi} \star \chi) \right\} = 0. \quad (4.46)$$

Substituindo as transformações de BRST e reescrevendo a expressão resultante na forma de derivadas funcionais de \mathcal{Z} com respeito as fontes, obtemos equações de vínculo não lineares sobre o gerador funcional. Esta expressão é inconveniente pois ela contém derivadas funcionais aplicadas sobre termos envolvendo o produto de supercampos.

Com o propósito de linearizar as equações de vínculo representadas em (4.46), vamos introduzir fontes adicionais para os supercampos compostos, representados pelas transformações de BRST não lineares: $sA \sim \nabla c$, $sc \sim c \star c$, $s\Phi \sim c \star \Phi$ e $s\bar{\Phi} \sim \bar{\Phi} \star c$. Desse modo, a Lagrangiana (4.41) é substituída por

$$\begin{aligned} \Sigma \equiv & J^\alpha \star A_\alpha + \eta \star c + c' \star \eta' + \bar{\chi} \star \Phi + \bar{\Phi} \star \chi \\ & - K^\alpha \star \nabla_\alpha c + ig\bar{\zeta} \star c \star \Phi - ig\bar{\Phi} \star c \star \zeta + ig\lambda \star c \star c, \end{aligned} \quad (4.47)$$

onde K^α , $\bar{\zeta}$, ζ e λ são as novas fontes associadas aos supercampos $\nabla_\alpha c$, $c \star \Phi$, $\bar{\Phi} \star c$ e $c \star c$, respectivamente. Note, quanto a estatística, que essas são fontes

Bosônicas: $\{\bar{\chi}, \chi, K^\alpha, \lambda\}$,

Fermiônicas: $\{J^\alpha, \eta, \eta', \bar{\zeta}, \zeta\}$.

Agora, podemos utilizar a propriedade de nilpotência para reescrever a Eq. (4.46) na forma

$$\int \mathcal{D}A \mathcal{D}c' \mathcal{D}c \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Phi} \int d^5z (s\Sigma) \exp \left\{ i \int d^5z (\mathcal{L}_{Tot} + \Sigma) \right\} = 0, \quad (4.48)$$

sendo

$$\begin{aligned} s\Sigma &= J^\alpha \star sA_\alpha + \eta \star sc + sc' \star \eta' + \bar{\chi} \star s\Phi + s\bar{\Phi} \star \chi \\ &= \epsilon \left(J^\alpha \star \nabla_\alpha c - ig\eta \star c \star c + \frac{1}{\alpha} D^2 D^\beta A_\beta \star \eta' + ig\bar{\chi} \star c \star \Phi - ig\bar{\Phi} \star c \star \chi \right), \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde consideramos que os termos de fontes são invariantes por BRST.

A partir da definição do gerador funcional em (4.40) e da adição dos termos de fontes para os supercampos compostos em (4.47), as seguintes identificações podem ser estabelecidas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta K^\alpha} &= \langle -\nabla_\alpha c \rangle, \\ \frac{1}{i} \frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta \bar{\zeta}} &= \langle igc \star \Phi \rangle, \\ \frac{1}{i} \frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta \zeta} &= \langle ig\bar{\Phi} \star c \rangle, \\ \frac{1}{i} \frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta \lambda} &= \langle igc \star c \rangle, \\ \frac{1}{i} \frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta J^\alpha} &= \langle A_\alpha \rangle, \end{aligned} \quad (4.50)$$

tal que a expressão genérica $\langle \phi \rangle$ é definida por

$$\langle \phi \rangle = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c' \mathcal{D}c \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Phi} \phi e^{i \int d^5z (\mathcal{L}_{Tot} + \Sigma)}. \quad (4.51)$$

Substituindo (4.50) em (4.48) e lembrando que o parâmetro ϵ é arbitrário, obtemos a identidade de Slavnov-Taylor para o gerador das funções de Green \mathcal{Z} :

$$\int d^5z \left\{ -J^\alpha \star \frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta K^\alpha} - \eta \star \frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta \lambda} + \frac{1}{\alpha} D^2 D^\beta \frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta J^\beta} \star \eta' + \bar{\chi} \star \frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta \bar{\zeta}} - \frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta \zeta} \star \chi \right\} = 0. \quad (4.52)$$

Podemos escrever o resultado acima em termos de $W[J, \eta, \eta', \chi, \bar{\chi}; K, \lambda, \zeta, \bar{\zeta}]$ através da relação $W = i \ln \mathcal{Z}$:

$$\int d^5z \left\{ -J^\alpha \star \frac{\delta W}{\delta K^\alpha} - \eta \star \frac{\delta W}{\delta \lambda} + \frac{1}{\alpha} D^2 D^\beta \frac{\delta W}{\delta J^\beta} \star \eta' + \bar{\chi} \star \frac{\delta W}{\delta \bar{\zeta}} - \frac{\delta W}{\delta \zeta} \star \chi \right\} = 0. \quad (4.53)$$

Diferenciando a Eq. (4.53) com respeito as fontes e tomando-as iguais a zero, obtemos as identidades que relacionam as diferentes funções de Green conexas da teoria. Esse é o significado formal da Eq. (4.45) previamente obtida. Dessa forma, a simetria BRST é de importância fundamental no estudo da renormalizabilidade das teorias de calibre, tendo em vista que pode estabelecer relações entre os contratermos necessários para o cancelamento das divergências, além de garantir a independência de calibre para os observáveis físicos.

Como visto no capítulo 1, o formalismo de supercampos adotado nesse trabalho permite calcular diretamente a ação efetiva Γ , que representa o gerador funcional das funções de Green próprias (1PI). É conveniente portanto, expressar a identidade de ST em termos de $\Gamma[A, c, c', \Phi, \bar{\Phi}; K, \lambda, \zeta, \bar{\zeta}]$, com o auxílio da transformada de Legendre

definida por

$$\begin{aligned}\Gamma[A, c, c', \Phi, \bar{\Phi}; K, \lambda, \zeta, \bar{\zeta}] &= -W[J, \eta, \eta', \chi, \bar{\chi}; K, \lambda, \zeta, \bar{\zeta}] \\ &\quad - \int d^5z (J^\alpha \star A_\alpha + \eta \star c + c' \star \eta' + \bar{\chi} \star \Phi + \bar{\Phi} \star \chi),\end{aligned}\quad (4.54)$$

tal que a ação efetiva é função das fontes dos supercampos compostos de BRST.

Usando a Eq. (4.54), podemos verificar as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma}{\delta A^{\alpha c}} &= -J_\alpha, & \frac{\delta W}{\delta J^\alpha} &= -A_\alpha^c, \\ \frac{\delta\Gamma}{\delta c^c} &= +\eta, & \frac{\delta W}{\delta \eta} &= -c^c, \\ \frac{\delta\Gamma}{\delta c'^c} &= -\eta', & \frac{\delta W}{\delta \eta'} &= +c'^c, \\ \frac{\delta\Gamma}{\delta \Phi^c} &= -\bar{\chi}, & \frac{\delta W}{\delta \bar{\chi}} &= -\Phi^c, \\ \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{\Phi}^c} &= -\chi, & \frac{\delta W}{\delta \chi} &= -\bar{\Phi}^c,\end{aligned}\quad (4.55)$$

onde o sobrescrito ϕ^c indica que estamos tratando de supercampos clássicos no sentido de

$$-\frac{\delta W}{\delta J} = \langle \phi \rangle_J \equiv \phi^c, \quad (4.56)$$

sendo assim, será omitido por simplicidade. Além disso, temos ainda

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta K^\alpha} = -\frac{\delta W}{\delta K^\alpha}; \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{\zeta}} = -\frac{\delta W}{\delta \bar{\zeta}}; \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta \zeta} = -\frac{\delta W}{\delta \zeta}; \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta \lambda} = -\frac{\delta W}{\delta \lambda}. \quad (4.57)$$

Por meio das Eqs. (4.55) e (4.57), podemos reescrever a Eq. (4.53) na forma

$$\int d^5z \left\{ -C^{\alpha\beta} \frac{\delta\Gamma}{\delta A^\beta} \star \frac{\delta\Gamma}{\delta K^\alpha} + \frac{\delta\Gamma}{\delta c} \star \frac{\delta\Gamma}{\delta \lambda} + \frac{1}{\alpha} D^2 D^\beta A_\beta \star \frac{\delta\Gamma}{\delta c'} + \frac{\delta\Gamma}{\delta \Phi} \star \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{\zeta}} - \frac{\delta\Gamma}{\delta \zeta} \star \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{\Phi}} \right\} = 0, \quad (4.58)$$

a qual representa a identidade de ST para a ação efetiva.

Uma identidade adicional é gerada por meio da equação de movimento funcional para o supercampo fantasma c . Para obtê-la, vamos separar os termos envolvendo c' em $\mathcal{L}_{Tot} + \Sigma$

$$\mathcal{L}_{Tot} + \Sigma = \frac{1}{2} c' \star D^\alpha \nabla_\alpha c + c' \star \eta' + (\text{demais termos}), \quad (4.59)$$

tal que $\frac{\delta}{\delta c'} \int d^5z (\mathcal{L}_{Tot} + \Sigma) = \frac{1}{2} D^\alpha \nabla_\alpha c + \eta'$. Como $\mathcal{Z}[J]$ só depende das fontes, então a derivada funcional com respeito a c' é nula e resulta em

$$\frac{1}{i} \frac{\delta \mathcal{Z}[J]}{\delta c'} = \frac{1}{2} D^\alpha \langle \nabla_\alpha c \rangle + \eta' \mathcal{Z}[J] = 0. \quad (4.60)$$

Com o auxílio de (4.50), podemos reescrever o resultado acima como

$$\frac{1}{2}D^\alpha \left(\frac{\delta W}{\delta K^\alpha} \right) + \eta' = 0. \quad (4.61)$$

Em termos da ação efetiva teremos

$$\frac{1}{2}D^\alpha \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta K^\alpha} \right) + \frac{\delta \Gamma}{\delta c'} = 0. \quad (4.62)$$

Inserindo a Eq. (4.62) em (4.58) e integrando por partes, obtemos

$$\int d^5z \left\{ \left(-C^{\alpha\beta} \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\beta} + \frac{1}{2\alpha} D^\alpha D^2 D^\beta A_\beta \right) \star \frac{\delta \Gamma}{\delta K^\alpha} + \frac{\delta \Gamma}{\delta c} \star \frac{\delta \Gamma}{\delta \lambda} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \Phi} \star \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\zeta}} - \frac{\delta \Gamma}{\delta \zeta} \star \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\Phi}} \right\} = 0, \quad (4.63)$$

Podemos simplificar a Eq. (4.63) redefinindo a ação efetiva como

$$\Gamma' = \Gamma + \frac{1}{4\alpha} \int d^5z D^\alpha A_\alpha D^2 D^\beta A_\beta, \quad (4.64)$$

tal que

$$-C^{\alpha\beta} \frac{\delta \Gamma'}{\delta A^\beta} = -C^{\alpha\beta} \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\beta} + \frac{1}{2\alpha} D^\alpha D^2 D^\beta A_\beta, \quad \frac{\delta \Gamma'}{\delta c} = \frac{\delta \Gamma}{\delta c}, \text{ etc.} \quad (4.65)$$

Assim, finalmente obtemos a identidade de ST para a ação efetiva Γ' tal como no caso comutativo usual [63],

$$\int d^5z \left\{ -C^{\alpha\beta} \frac{\delta \Gamma'}{\delta A^\beta} \star \frac{\delta \Gamma'}{\delta K^\alpha} + \frac{\delta \Gamma'}{\delta c} \star \frac{\delta \Gamma'}{\delta \lambda} + \frac{\delta \Gamma'}{\delta \Phi} \star \frac{\delta \Gamma'}{\delta \bar{\zeta}} - \frac{\delta \Gamma'}{\delta \zeta} \star \frac{\delta \Gamma'}{\delta \bar{\Phi}} \right\} = 0. \quad (4.66)$$

Devemos apontar aqui que as identidades de ST derivadas anteriormente envolvem quantidades não renormalizadas e, por conseguinte, um mecanismo de regularização que permita isolar as quantidades divergentes sem violar a invariância de BRST da teoria quantizada deve ser adotado. Nossa objetivo é verificar explicitamente, até a aproximação de um laço, se a regularização por redução dimensional e/ou a não comutatividade podem violar as identidades deduzidas formalmente nessa seção.

4.4 Divergência superficial e finitude perturbativa

Vimos anteriormente que para estudar a invariância BRST quanticamente, introduzimos superfícies externas acopladas aos supercampos das transformações não lineares. Dessa forma, a ação efetiva em nível de árvore passa a ser

$$\Gamma^{(0)}[A, c, c', \Phi, \bar{\Phi}; K, \lambda, \zeta, \bar{\zeta}] = S_G + S_M + S_{GF} + S_{FP} + S_{ES}, \quad (4.67)$$

onde a ação envolvendo as superfontes de BRST é dada por

$$S_{ES} = \int d^5z \left[-K^\alpha \star \nabla_\alpha c + ig\bar{\zeta} \star c \star \Phi - ig\bar{\Phi} \star c \star \zeta + ig\lambda \star c \star c \right]. \quad (4.68)$$

Na ação representada pela Eq. (4.67), devemos levar em conta os vértices de interação devido a Eq. (4.68) nos cálculos envolvendo os diagramas de Feynman. É importante salientar que as superfontes de BRST são campos não propagantes, e as regras de Feynman deduzidas em 4.2.2 continuam válidas, sofrendo apenas o acréscimo dos novos vértices em (4.68).

Nosso objetivo agora será determinar quais os diagramas 1PI que contribuem para a ação efetiva até a ordem de um laço e que são superficialmente divergentes. Assim como no caso usual, devemos determinar o grau de divergência superficial $\omega(G)$ associado a um supergráfico genérico. A contagem de potências para teorias não comutativas segue análoga ao caso comutativo. Consistindo basicamente na diferença entre as potências de momento interno que aparecem nos numeradores e denominadores em um dado diagrama. Contudo, além dos momentos internos provenientes dos elementos de integração e dos propagadores, teremos contribuições devido as derivadas covariantes D_α que aparecem nos propagadores e/ou vértices. Dessa forma, o grau de divergência superficial ω pode ser escrito genericamente por

$$\omega(G) = 3L - 4P_A - 2(P_\Phi + P_c) + (\text{k's devido as } D's), \quad (4.69)$$

onde

L = número de laços,

P_A = número de superpropagadores internos de calibre,

P_Φ = número de superpropagadores internos de matéria,

P_c = número de superpropagadores internos fantasmas.

Na fórmula acima, cada laço contribui com um elemento de integração nos momentos internos $\int d^3k_i \approx k^3$ e os fatores numéricos que acompanham os propagadores são devido aos momentos que aparecem explicitamente em cada um deles: $\langle AA \rangle \sim D^4/k^4$, $\langle \bar{\Phi}\Phi \rangle \sim D^2/k^2$ e $\langle c'c \rangle \sim D^2/k^2$. Todas as derivadas espinoriais covariantes D 's provenientes dos propagadores ou dos vértices podem gerar potências de momento por meio da relação $\{D_\alpha, D_\beta\} \sim k_{\alpha\beta}$. No que diz respeito à parte de interação, vamos

adotar a seguinte notação para facilitar a identificação dos vértices:

- Setor de calibre:

V_{A^3} : número de vértices puros de calibre com três derivadas espinoriais;
 V_{A^4} : número de vértices puros de calibre com duas derivadas espinoriais;
 V_{A^5} : número de vértices puros de calibre com uma derivada espinorial;
 V_{A^6} : número de vértices puros de calibre com nenhuma derivada espinorial;
 V_{Ac^2} : número de vértices calibre/fantasma com uma derivada espinorial;

- Setor de matéria:

$V_{A\Phi^2}$: número de vértices calibre/matéria com uma derivada espinorial;
 $V_{A^2\Phi^2}$: número de vértices calibre/matéria com nenhuma derivada espinorial;

- Setor das superfontes de BRST:

V_{Kc} : número de vértices misto K/c uma derivada espinorial;
 V_{KAc} : número de vértices misto $K/A/c$ com nenhuma derivada espinorial;
 $V_{\zeta\Phi c}$: número de vértices misto $\zeta/\Phi/c$ com nenhuma derivada espinorial;
 $V_{\lambda c^2}$: número de vértices misto $\lambda/c/c$ com nenhuma derivada espinorial.

Para referência futura, vamos escrever abaixo as expressões dos vértices mistos, contendo as fontes de BRST, já no espaço dos momentos.

$$V_{Kc} = \int d^2\theta \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} (2\pi)^2 \delta^3(k_1 + k_2) [-K_1^\alpha D_\alpha c_2], \quad (4.70)$$

$$V_{KAc} = (2g) \int d^2\theta \prod_{i=1}^3 \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\sum_{j=1}^3 k_j) K_1^\alpha A_{\alpha 2} c_3 \sin(k_2 \wedge k_3), \quad (4.71)$$

$$V_{\lambda c^2} = (g) \int d^2\theta \prod_{i=1}^3 \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\sum_{j=1}^3 k_j) \lambda_1 c_2 c_3 \sin(k_2 \wedge k_3), \quad (4.72)$$

$$V_{\zeta\Phi c} = (ig) \int d^2\theta \prod_{i=1}^3 \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\sum_{j=1}^3 k_j) [\bar{\zeta}_1 c_2 \Phi_3 - \bar{\Phi}_1 c_2 \zeta_2] e^{ik_3 \wedge k_2}. \quad (4.73)$$

Desse modo, o número inicial de derivadas D_α é dado por:

$$n^\circ \text{ total de } D's = \underbrace{4P_A + 2(P_\Phi + P_c)}_{D's \text{ dos propagadores}} + \underbrace{3V_{A^3} + 2V_{A^4} + V_{A^5} + V_{Ac^2} + V_{A\Phi^2}}_{D's \text{ dos vértices}}, \quad (4.74)$$

onde notamos que o vértice $V_{Kc} \sim K^\alpha D_\alpha c$ não é levado em conta na contagem das D' s, pois o mesmo não pode formar nenhum diagrama 1PI.

No cálculo da D -álgebra, cada propagador contribui com uma delta de Dirac grasmiana $\delta^2(\theta_1 - \theta_2)$ e podemos usar $V - 1$ integrações em $d^2\theta$ para eliminá-las, restando

$$n^\circ \text{ total de } \delta' \text{s apóis a } D\text{-álgebra} = P - V + 1, \quad (4.75)$$

onde P e V representam a soma de todos os propagadores e vértices, respectivamente. As δ' s restantes são eliminadas pelas derivadas D_α por meio da relação $D^2\delta_{12}^2 \sim 1$. Assim, o número final de D' s disponíveis para se converterem em momento é igual a

$$\begin{aligned} n^\circ \text{ final de } D' \text{s} &= 4P_A + 2(P_\Phi + P_c) + 3V_{A^3} + 2V_{A^4} + V_{A^5} + V_{Ac^2} + V_{A\Phi^2} \\ &\quad - 2(P - V + 1) \\ &= -2 + 2P_A + 5V_{A^3} + 4V_{A^4} + 3(V_{A^5} + V_{Ac^2} + V_{A\Phi^2}) \\ &\quad + 2(V_{A^6} + V_{A^2\Phi^2} + V_{KAc} + V_{\zeta\Phi c} + V_{\lambda c^2}). \end{aligned} \quad (4.76)$$

Sabendo que a cada dois D' s podemos gerar um k , então

$$\omega(G) = 3L - 2P_A - 2P + \frac{n^\circ \text{ final de } D' \text{s}}{2} - \frac{N_D}{2}, \quad (4.77)$$

onde N_D representa as derivadas aplicadas aos supercampos externos, as quais não se transformaram em momento. Podemos eliminar o termo que contém L aplicando a relação topológica

$$L + V - P = 1, \quad (4.78)$$

de modo que $\omega(G)$ assume a forma

$$\begin{aligned} \omega(G) &= 2 + P_\Phi + P_c - \frac{1}{2}V_{A^3} - V_{A^4} - \frac{3}{2}(V_{A^5} + V_{Ac^2} + V_{A\Phi^2}) \\ &\quad - 2(V_{A^6} + V_{A^2\Phi^2} + V_{KAc} + V_{\zeta\Phi c} + V_{\lambda c^2}). \end{aligned} \quad (4.79)$$

Além disso, P_Φ e P_c obedecem as identidades que relacionam as linhas externas (E_Φ , E_c) com os propagadores e vértices, tal que

$$P_\Phi = \frac{2V_{A\Phi^2} + 2V_{A^2\Phi^2} + V_{\zeta\Phi c} - E_\Phi}{2}, \quad (4.80)$$

$$P_c = \frac{2V_{Ac^2} + V_{KAc} + V_{\zeta\Phi c} + 2V_{\lambda c^2} - E_c}{2} \quad (4.81)$$

Substituindo as relações (4.80) e (4.81) em (4.79), finalmente obtemos

$$\begin{aligned}
 \omega(G) = & 2 - \frac{1}{2}V_{A^3} - V_{A^4} - \frac{3}{2}V_{A^5} - 2V_{A^6} - \frac{1}{2}V_{Ac^2} \\
 & - \frac{1}{2}V_{A\Phi^2} - V_{A^2\Phi^2} - \frac{3}{2}V_{KA_c} - V_{\zeta\Phi_c} - V_{\lambda c^2} \\
 & - \frac{1}{2}E_c - \frac{1}{2}E_\Phi - \frac{1}{2}N_D.
 \end{aligned} \tag{4.82}$$

A partir da expressão acima, podemos concluir que:

1. O modelo é super-renormalizável, isto é, existe apenas um número finito de diagramas superficialmente divergentes (com $\omega \geq 0$);
2. Os diagramas divergentes persistem até a ordem de dois laços;
3. Existem três tipos de divergências ultravioletas; $\omega = 0$, $0 \leq \omega < 1$ e $\omega = 1$;
4. Não há diagramas superficialmente divergentes com supercampos fantasmas c e c' ou com fontes K_α , ζ , $\bar{\zeta}$ e λ como linhas externas;
5. Em um laço, temos diagramas divergentes com dois, três e quatro A_α como linha externa, assim como diagramas com $\Phi\bar{\Phi}$ e $A\Phi\bar{\Phi}$;
6. Em dois laços, temos apenas divergências logarítmicas nos diagramas com dois A_α nas linhas externas.

As conclusões acima estão resumidas na Tabela 4.1 e os diagramas 1PI, superficialmente divergentes na aproximação de um laço, são mostrados nas Figs. 4.1 à 4.5.

1 laço	2 laços	$\omega(G)$
$AAAA; \Phi\bar{\Phi}$	AA	$\omega = 0$
$AAA; A\Phi\bar{\Phi}$		$0 \leq \omega < 1$
AA		$\omega = 1$

Tabela 4.1: Contagem de potência para os diagramas 1PI.

Como vimos acima, as correções radiativas para a ação efetiva exibem no máximo divergências lineares. Devido ao efeito da mistura UV/IR, tais divergências podem inviabilizar o mecanismo de renormalização, uma vez que singularidades não integráveis UV/IR não podem ser canceladas pelos métodos usuais. No entanto, em [59] foi provado que o modelo é livre de divergências lineares UV/IR e que é finito até a aproximação de um laço.

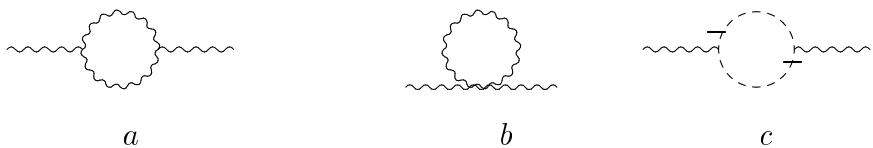


Figura 4.1: Diagramas linearmente divergentes para a função de dois pontos do supercampo de calibre.

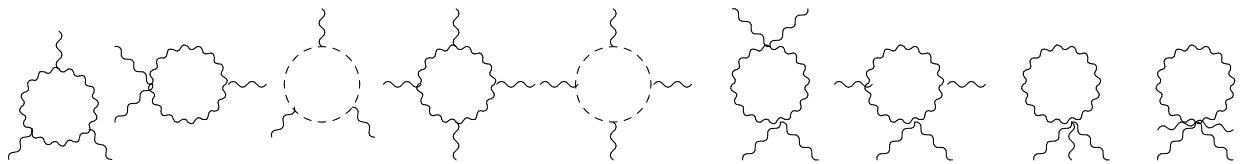


Figura 4.2: Outras contribuições superficialmente divergentes.

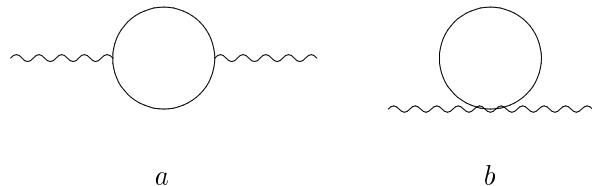


Figura 4.3: Correções a um laço linearmente divergentes para a auto-energia do supercampo espinorial de calibre no setor de matéria.

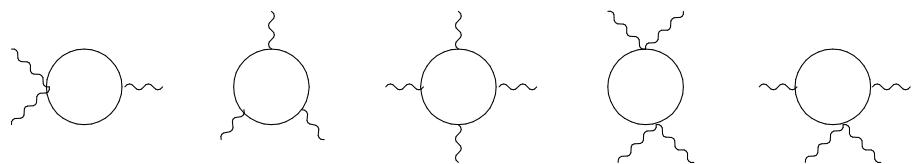


Figura 4.4: Contribuições das funções de três e quatro pontos do supercampo de calibre.



Figura 4.5: Correções a um laço para a auto-energia do supercampo Φ .

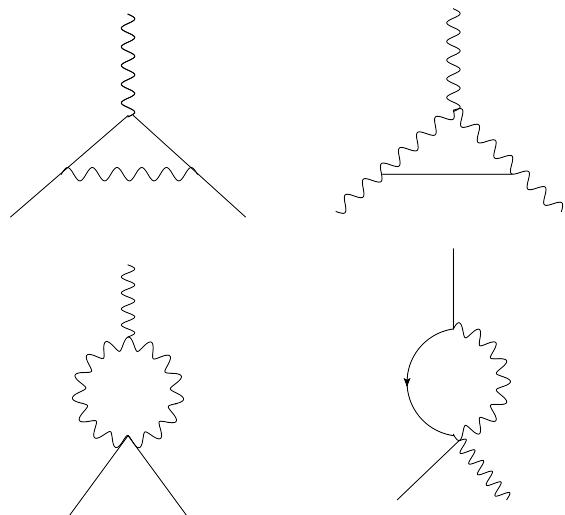


Figura 4.6: Correções para os vértices mistos calibre-matéria.

4.5 Prova explícita das identidades de ST: Transversalidade da polarização do vácuo.

Assim como na eletrodinâmica quântica ordinária, podemos esperar que a simetria de BRST implique na transversalidade da polarização do vácuo. Para traduzir tal propriedade na linguagem de supercampos, vamos nos restringir inicialmente ao setor de calibre puro da teoria, a extensão para o setor de matéria é direta.

Considere as identidades (4.58) e (4.62), escritas no espaço dos momentos:

$$\int d^2\theta \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[C^{\beta\alpha} \frac{\delta\Gamma}{\delta A^\beta(p, \theta)} \frac{\delta\Gamma}{\delta K^\alpha(-p, \theta)} + \frac{\delta\Gamma}{\delta c(p, \theta)} \frac{\delta\Gamma}{\delta \lambda(-p, \theta)} + \frac{1}{\alpha} D^2 D^\beta A_\beta(p, \theta) \frac{\delta\Gamma}{\delta c'(-p, \theta)} \right] = 0, \quad (4.83)$$

$$\frac{1}{2} D^\alpha \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta K^\alpha(p, \theta)} + \frac{\delta\Gamma^{(0)}}{\delta c'(-p, \theta)} = 0. \quad (4.84)$$

Vamos aplicar o operador $\frac{\delta^2}{\delta c(q, \omega) \delta A^\mu(l, \sigma)}$ e *tomar os campos iguais a zero*. Assim, temos sucessivamente

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^2}{\delta c(q, \omega) \delta A^\mu(l, \sigma)} \left(C^{\beta\alpha} \frac{\delta\Gamma}{\delta A^\beta(p, \theta)} \frac{\delta\Gamma}{\delta K^\alpha(-p, \theta)} \right) \Big|_{=0} = \\ & C^{\beta\alpha} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^\mu(l, \sigma) \delta A^\beta(p, \theta)} \Big|_{=0} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta c(q, \omega) \delta K^\alpha(-p, \theta)} \Big|_{=0}, \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\frac{\delta^2}{\delta c(q, \omega) \delta A^\mu(l, \sigma)} \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta c(p, \theta)} \frac{\delta\Gamma}{\delta \lambda(-p, \theta)} \right) \Big|_{=0} = 0, \quad (4.86)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^2}{\delta c(q, \omega) \delta A^\mu(l, \sigma)} \left(\frac{1}{\alpha} D^2 D^\beta A_\beta(p, \theta) \frac{\delta\Gamma}{\delta c'(-p, \theta)} \right) \Big|_{=0} = \\ & -\frac{1}{\alpha} D^2 D_\mu (2\pi)^3 \delta^3(p+l) \delta^2(\theta - \sigma) \frac{\delta\Gamma}{\delta c(q, \omega) \delta c'(-p, \theta)} \Big|_{=0}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Substituindo as Eqs. (4.85), (4.86) e (4.87) em (4.83), integrando por partes e lembrando que as derivadas espinoriais assumem a configuração de momento dos termos

sobre os quais elas atuam, obtemos:

$$\int d^2\theta \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[C^{\beta\alpha} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^\mu(l, \sigma) \delta A^\beta(p, \theta)} \Big|_{=0} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta c(q, \omega) \delta K^\alpha(-p, \theta)} \Big|_{=0} \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha} D_\mu D^2(l, \sigma) \frac{\delta\Gamma}{\delta c(q, \omega) \delta c'(l, \sigma)} \Big|_{=0} \right] = 0. \quad (4.88)$$

Para demonstrar que a polarização do vácuo é transversal, precisamos ainda da Eq. (4.84). Aplicando o operador $\frac{\delta}{\delta c(q, \omega)}$, temos como resultado:

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta c(q, \omega) \delta c'(l, \sigma)} \Big|_{=0} = \frac{1}{2} D^\alpha(l, \sigma) \frac{\delta^2\Gamma}{\delta c(q, \omega) \delta K^\alpha(l, \sigma)} \Big|_{=0}, \quad (4.89)$$

e substituindo (4.89) em (4.88), chegamos em

$$\int d^2\theta \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[C^{\beta\alpha} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^\mu(l, \sigma) \delta A^\beta(p, \theta)} \Big|_{=0} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta c(q, \omega) \delta K^\alpha(-p, \theta)} \Big|_{=0} \right. \\ \left. + \frac{1}{2\alpha} D_\mu D^2 D^\alpha \frac{\delta^2\Gamma}{\delta c(q, \omega) \delta K^\alpha(l, \sigma)} \Big|_{=0} \right] = 0. \quad (4.90)$$

Devido aos efeitos da não comutatividade, as correções radiativas podem em princípio, modificar os coeficientes dos termos em (4.9), além de introduzir uma nova estrutura tensorial. Sendo assim, podemos supor o seguinte ansatz para a função de dois pontos do supercampo de calibre

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^\mu(l, \sigma) \delta A^\beta(p, \theta)} \Big|_{=0} = \left[-\frac{1}{2}(a) D^2 D_\mu D_\beta + \frac{1}{2\alpha}(b) D^2 D_\beta D_\mu \right. \\ \left. + (c) D^2 D_\mu D^\gamma \frac{\tilde{p}_{\gamma\beta}}{\sqrt{\tilde{p}^2}} + (d) D^2 D_\beta D^\gamma \frac{\tilde{p}_{\gamma\mu}}{\sqrt{\tilde{p}^2}} \right] (2\pi)^3 \delta^3(p + l) \delta^2(\theta - \sigma), \quad (4.91)$$

onde (a), (b), (c) e (d) representam as correções quânticas e os dois últimos termos envolvendo $\tilde{p}_{\alpha\beta} = \Theta_{nm} p^n (\gamma^m)_{\alpha\beta}$ a modificação na estrutura tensorial devido a presença de Θ^{nm} . Substituindo (4.91) em (4.90) e integrando por partes, obtemos

$$\left[-\frac{1}{2}(a) D^\alpha D_\mu D^2 + \frac{1}{2\alpha}(b) D_\mu D^\alpha D^2 \right. \\ \left. + (c) D^\gamma D_\mu D^2 \frac{\tilde{p}_\gamma^\alpha}{\sqrt{\tilde{p}^2}} + (d) D^\gamma D^\alpha D^2 \frac{\tilde{p}_{\gamma\mu}}{\sqrt{\tilde{p}^2}} \right. \\ \left. + \frac{1}{2\alpha} D_\mu D^2 D^\alpha \right] \frac{\delta^2\Gamma}{\delta c(q, \omega) K^\alpha(l, \sigma)} \Big|_{=0} = 0. \quad (4.92)$$

Aplicando $D^\mu(l, \sigma)$ em (4.92) e lembrando que $D^\mu D^\sigma D_\mu = 0$, $D^2 D_\mu = -D_\mu D^2$, $D^4 = -l^2$, podemos reescrever o resultado anterior na forma

$$\left[[(b) - 1] \frac{l^2}{\alpha} D^\alpha + (d) D^\mu D^\gamma D^\alpha D^2 \frac{\tilde{p}_{\gamma\mu}}{\sqrt{\tilde{p}^2}} \right] \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta c(q, \omega) K^\alpha(l, \sigma)} \Big|_{=0} = 0. \quad (4.93)$$

O último termo entre colchetes é identicamente nulo, pois

$$\begin{aligned} D^\mu D^\gamma \tilde{p}_{\gamma\mu} &= \frac{1}{2} \{D^\mu, D^\gamma\} \tilde{p}_{\gamma\mu} \\ &= p^{\mu\gamma} \tilde{p}_{\gamma\mu} \\ &= p_a (\gamma^a)^{\mu\gamma} \Theta^{mn} p_m (\gamma_n)_{\gamma\mu} \\ &= p_a p_m \Theta^{mn} \text{tr}(\gamma^a \gamma^n) \\ &= 2p_m p_n \Theta^{mn} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Assim, finalmente obtemos como resultado

$$[(b) - 1] \frac{l^2}{\alpha} D^\alpha \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta c(q, \omega) K^\alpha(l, \sigma)} \Big|_{=0} = 0, \quad (4.95)$$

que implica em $(b) = 1$. Consequentemente, a parte longitudinal do propagador do supercampo de calibre é protegida pela simetria BRST e não pode receber correções radiativas. No que segue, mostraremos explicitamente que $(b) = 0$ na aproximação de um laço.

Setor de calibre puro: Função de 2-pontos do campo A_α

A ação efetiva Γ_{AA} correspondente a função de 2-pontos para o supercampo A_α recebe três contribuições a uma laço, como pode ser visto na Fig. 4.1.

O diagrama (a), cuja expressão analítica é dada por

$$\Gamma_{AA}^{(a)} = -\frac{i}{2!} \left\langle : \frac{i^2}{2!} (V_{A^3})^2 : \right\rangle, \quad (4.96)$$

a qual, no espaço dos momentos, assume a forma

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA}^{(a)} &= \frac{ig^2}{16} \int d^2 \theta_k d^2 \theta_q \prod_{i=1}^3 \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) (2\pi)^3 \delta^3(q_1 + q_2 + q_3) \\ &\quad \sin(k_1 \wedge k_3) \sin(q_1 \wedge q_3) \left\langle : D_\sigma A_\alpha(k_1, \theta_k) D^\beta D^\alpha A_\beta(k_2, \theta_k) A^\sigma(k_3, \theta_k) \right. \\ &\quad \left. D_\mu A_\nu(q_1, \theta_q) D^\gamma D^\nu A_\gamma(q_2, \theta_q) A^\mu(q_3, \theta_q) : \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Após realizar as contrações dos supercampos e substituir os propagadores de ca-libre dado em (4.11), utilizamos o pacote SusyMath [65] para efetuar a D -álgebra. O resultado obtido pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned}\Gamma_{AA}^{(a)} = & \int d^2\theta \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sin^2(k \wedge p) \left[a_1 D^2 A^\alpha(-p, \theta) A_\alpha(p, \theta) + a_{2\alpha\beta} D^2 A^\alpha(-p, \theta) A^\beta(p, \theta) \right. \\ & \left. + a_{3\alpha\beta} A^\alpha(-p, \theta) A^\beta(p, \theta) + a_4 A^\alpha(-p, \theta) A_\alpha(p, \theta) \right],\end{aligned}\quad (4.98)$$

onde os coeficientes a_1 , $a_{2\alpha\beta}$, $a_{3\alpha\beta}$ e a_4 são dados por

$$a_1 = \left(-\frac{ig^2(-1+\alpha)^2 C^{\beta,\gamma} ((k)_{\gamma,\delta}(-k+p)_{\beta,\epsilon} - (k)_{\beta,\delta}(-k+p)_{\gamma,\epsilon}) (p)^{\delta,\epsilon}}{32(k)^2 ((-k+p)^2)^2} \right), \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned}a_{2\alpha\beta} = & \left(-\frac{ig^2(1+\alpha)^2 (4(k)_{\alpha,\beta} + 3(p)_{\alpha,\beta})}{16(k)^2 (-k+p)^2} + \frac{ig^2(1-\alpha)(1+\alpha)}{32((k)^2)^2 ((-k+p)^2)^2} \right. \\ & \times \left((4p.(-k+p)((k)_{\alpha,\beta} - (p)_{\alpha,\beta} + (-k+p)_{\alpha,\beta}) + (-k)_{\beta,\gamma}(-k+p)_{\alpha,\delta} + 2(-k+p)_{\alpha,\gamma}(-k+p)_{\beta,\delta}) (p)^{\gamma,\delta} \right. \\ & + C_{\alpha,\gamma} C_{\beta,\delta} \left(4(-k+p)_{\epsilon,\zeta} (k)^{\gamma,\epsilon} \left((k)^{\delta,\zeta} - (p)^{\delta,\zeta} \right) + 2(k)_{\epsilon,\zeta} (p)^{\delta,\zeta} (-k+p)^{\gamma,\epsilon} - (p)_{\epsilon,\zeta} (k)^{\delta,\epsilon} (-k+p)^{\gamma,\zeta} \right) (k)^2 \\ & + 2 \left(2k.(-k+p) ((p)_{\alpha,\beta} - (-k+p)_{\alpha,\beta}) + (k)_{\alpha,\gamma} (k)_{\beta,\delta} (p)^{\gamma,\delta} - 4 ((k)_{\alpha,\beta} + (p)_{\alpha,\beta}) (k)^2 \right) (-k+p)^2 \\ & + \frac{ig^2(1-\alpha)^2}{64((k)^2)^2 ((-k+p)^2)^2} \left(-C_{\beta,\gamma} C^{\delta,\epsilon} (k)_{\alpha,\zeta} (p)_{\epsilon,\eta} (-k+p)_{\delta,\theta} (p)^{\gamma,\theta} (-k+p)^{\zeta,\eta} \right. \\ & + 2(k)^2 \left((-k+p)_{\alpha,\delta} ((p)_{\beta,\gamma} (k)^{\gamma,\delta} - 2(k)_{\beta,\gamma} (p)^{\gamma,\delta}) + (k)_{\alpha,\gamma} (p)_{\beta,\delta} (-k+p)^{\gamma,\delta} + 2(-k+p)_{\alpha,\beta} ((k)^2 + (p)^2) \right) \\ & + \left((k)_{\gamma,\beta} (-k+p)_{\alpha,\delta} (p)^{\gamma,\delta} + (-k+p)_{\beta,\delta} ((2(p)_{\alpha,\gamma} + 3(-k+p)_{\alpha,\gamma}) (k)^{\gamma,\delta} - 2(k)_{\alpha,\gamma} (p)^{\gamma,\delta}) \right) (-k+p)^2 \\ & + \left((k)_{\gamma,\beta} (p)_{\alpha,\delta} (-k+p)^{\gamma,\delta} + 2C_{\beta,\gamma} C^{\delta,\epsilon} (k)_{\epsilon,\zeta} ((p)_{\alpha,\delta} (p)^{\gamma,\zeta} + (-k+p)_{\alpha,\delta} (-k+p)^{\gamma,\zeta}) \right) \\ & + 4(k)_{\alpha,\beta} (p)^2 - 2(k)_{\beta,\alpha} (p)^2 \right) (-k+p)^2 + 2 ((k)_{\alpha,\beta} - (k)_{\beta,\alpha}) ((-k+p)^2)^2 \\ & + 4k.(-k+p) \left((k)_{\alpha,\beta} (2(k)^2 + (p)^2) + (2(p)_{\alpha,\beta} - 3(-k+p)_{\alpha,\beta}) (-k+p)^2 \right) \\ & + C_{\alpha,\gamma} \left(-C^{\delta,\epsilon} (k)_{\delta,\zeta} (-k+p)_{\beta,\eta} (-k+p)_{\epsilon,\theta} (p)^{\gamma,\zeta} (p)^{\eta,\theta} \right. \\ & + C_{\beta,\delta} \left(4k.(-k+p) (k)_{\epsilon,\zeta} (p)^{\gamma,\epsilon} (p)^{\delta,\zeta} + (k)_{\epsilon,\zeta} (p)_{\eta,\theta} (p)^{\gamma,\epsilon} (-k+p)^{\delta,\theta} (-k+p)^{\zeta,\eta} \right) \\ & + 2 \left((k)_{\epsilon,\zeta} \left((p)^{\delta,\zeta} (-k+p)^{\gamma,\epsilon} + 2(p)^{\delta,\epsilon} (-k+p)^{\gamma,\zeta} \right) - 2(p)_{\epsilon,\zeta} (k)^{\gamma,\epsilon} (-k+p)^{\delta,\zeta} \right) (k)^2 \\ & + (-k+p)_{\epsilon,\zeta} \left((-k+p)_{\eta,\theta} (k)^{\gamma,\eta} (p)^{\delta,\epsilon} (p)^{\zeta,\theta} + 2 \left(2(-2(k)^{\gamma,\zeta} + (p)^{\gamma,\zeta}) (p)^{\delta,\epsilon} + (k)^{\gamma,\epsilon} (2(k)^{\delta,\zeta} - (p)^{\delta,\zeta}) \right) (k)^2 \right) \\ & - \left(C_{\delta,\beta} (k)^{\delta,\epsilon} \left((-k+p)_{\epsilon,\zeta} (p)^{\gamma,\zeta} + (p)_{\epsilon,\zeta} (-k+p)^{\gamma,\zeta} \right) + C^{\delta,\epsilon} \left((-k)_{\delta,\zeta} (-k+p)_{\beta,\epsilon} (2(p)^{\gamma,\zeta} + (-k+p)^{\gamma,\zeta}) \right) \right. \\ & + 2(k)_{\epsilon,\zeta} \left((-k+p)_{\delta,\beta} (p)^{\gamma,\zeta} + (p)_{\delta,\beta} (-k+p)^{\gamma,\zeta} \right) + 2C_{\beta,\delta} \left((-k+p)_{\epsilon,\zeta} (k)^{\gamma,\zeta} (p)^{\delta,\epsilon} \right. \\ & \left. \left. + (p)_{\epsilon,\zeta} (k)^{\gamma,\zeta} (-k+p)^{\delta,\epsilon} + (k)_{\epsilon,\zeta} \left(2(p)^{\gamma,\zeta} (p)^{\delta,\epsilon} - (p)^{\gamma,\epsilon} (-k+p)^{\delta,\zeta} \right) \right) \right) (-k+p)^2 \right),\end{aligned}\quad (4.100)$$

$$\begin{aligned}
a_4 = & \left(\frac{ig^2(1+\alpha)^2 (2k.p - 3(p)^2 - 2(-k+p)^2)}{16(k)^2(-k+p)^2} \right. \\
& + \frac{ig^2(1-\alpha)^2}{32((k)^2)^2((-k+p)^2)^2} \left((k)_{\beta,\gamma}(-k+p)_{\delta,\epsilon} \left((p)^{\beta,\epsilon}(p)^{\gamma,\delta} + (p)^{\beta,\delta}(p)^{\gamma,\epsilon} \right) (k)^2 - 4p.(-k+p) \left((k)^2 \right)^2 \right. \\
& + 2(-k+p)^2 \left(k.p(-k+p)^2 - 2k.(-k+p) \left((p)^2 + (-k+p)^2 \right) \right) \\
& - \frac{ig^2(1-\alpha)(1+\alpha)}{16((k)^2)^2((-k+p)^2)^2} \left(2p.(-k+p)(k)^2 \left((k)^2 + (p)^2 - (-k+p)^2 \right) \right. \\
& \left. \left. \left. + (-k+p)^2 \left(2k.(-k+p) \left((p)^2 + (-k+p)^2 \right) + (k)^2 \left(-3k.p + 2(-k+p)^2 \right) \right) \right) \right). \tag{4.102}
\end{aligned}$$

Pode-se observar que $\Gamma_{AA}^{(a)}$ possui termos com divergências lineares e logarítmicas, além de vários termos finitos. As divergências lineares são as mais perigosas pois são acompanhadas de termos proporcionais a $A^\alpha A_\alpha$, induzindo massa para o supercampo de calibre e violando a simetria BRST. Para isolar as divergências lineares, vamos expandir os coeficientes acima em torno do momento externo $p_{\alpha\beta} = 0$, tal que

$$a_1(p=0) = a_{3\alpha\beta}(p=0) = 0, \tag{4.103}$$

$$\begin{aligned}
a_{2\alpha\beta}(p=0) = & -\frac{ig^2(1+\alpha)^2(k)_{\alpha,\beta}}{4((k)^2)^2} \\
& - \frac{ig^2(1-\alpha)(1+\alpha) \left(C_{\alpha,\gamma}C_{\beta,\delta}(k)_{\epsilon,\zeta}(k)^{\gamma,\epsilon}(k)^{\delta,\zeta} + 3(k)_{\alpha,\beta}(k)^2 \right)}{8((k)^2)^3} \\
& + \frac{ig^2(1-\alpha)^2}{64((k)^2)^3} \left[3(k)_{\alpha,\gamma}(k)_{\beta,\delta}(k)^{\gamma,\delta} \right. \\
& + C_{\alpha,\gamma} \left(C^{\delta,\epsilon}(k)_{\beta,\epsilon}(k)_{\delta,\zeta}(k)^{\gamma,\zeta} - 4C_{\beta,\delta}(k)_{\epsilon,\zeta}(k)^{\gamma,\epsilon}(k)^{\delta,\zeta} \right) \\
& \left. + 2 \left(C_{\beta,\gamma}C^{\delta,\epsilon}(k)_{\alpha,\delta}(k)_{\epsilon,\zeta}(k)^{\gamma,\zeta} - 7(k)_{\alpha,\beta}(k)^2 - (k)_{\beta,\alpha}(k)^2 \right) \right], \tag{4.104}
\end{aligned}$$

$$a_4(p=0) = \left(-\frac{ig^2\alpha}{2(k)^2} \right). \tag{4.105}$$

Podemos ver facilmente que o único termo linearmente divergente está em a_4 . Mostraremos posteriormente que essa divergência é cancelada quando somamos todas as contribuições devido aos demais diagramas. Entretanto, a prova da identidade de ST para os demais termos num calibre arbitrário é deveras volumosa. Escolhendo o calibre de Feynman ($\alpha = 1$) as funções $a_{1,2,3,4}$ se reduzem a

$$a_1(\alpha = 1) = 0, \tag{4.106}$$

$$a_{2\alpha\beta}(\alpha = 1) = \left(-\frac{ig^2 (4(k)_{\alpha,\beta} + 3(p)_{\alpha,\beta})}{4(k)^2(-k+p)^2} \right), \tag{4.107}$$

$$a_{3\alpha\beta}(\alpha = 1) = \frac{ig^2 (C^{\gamma,\delta} (2(k)_{\beta,\gamma}(p)_{\alpha,\delta} + (k)_{\alpha,\gamma}(p)_{\beta,\delta}) + (-5C_{\beta,\gamma}(k)_{\alpha,\delta} + 4C_{\alpha,\gamma}(k)_{\beta,\delta}) (p)^{\gamma,\delta})}{8(k)^2(-k+p)^2}, \quad (4.108)$$

$$a_4(\alpha = 1) = -\frac{ig^2}{2(k)^2} + \frac{ig^2 k \cdot p}{2(k)^2(-k+p)^2} - \frac{3ig^2(p)^2}{4(k)^2(-k+p)^2}, \quad (4.109)$$

o que acarreta numa grande simplificação. Dessa forma, iremos nos limitar a provar a transversalidade da polarização do vácuo no calibre de Feynman $\alpha = 1$.

A segunda contribuição para a ação efetiva Γ_{AA} é devido ao diagrama (b) da Fig. 4.1, cuja expressão analítica é dada por

$$\Gamma_{AA}^{(b)} = -\frac{i}{2!} \left\langle :i(V_{A^4}^{(1)} + V_{A^4}^{(2)}) :\right\rangle \equiv \Gamma_{AA}^{(b1)} + \Gamma_{AA}^{(b2)}. \quad (4.110)$$

Com ajuda das Eqs. (4.21) e (4.22), o resultado acima assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA}^{(b1)} &= \frac{g^2}{4} \int d^2\theta \prod_{i=1}^4 \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \sin[k_1 \wedge (k_3 + k_4)] \sin(k_4 \wedge k_3) \\ &\quad \left\langle :A^\beta(k_1, \theta) D_\beta A^\alpha(k_2, \theta) A^\sigma(k_3, \theta) D_\sigma A_\alpha(k_4, \theta) :\right\rangle, \end{aligned} \quad (4.111)$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA}^{(b2)} &= \frac{g^2}{6} \int d^2\theta \prod_{i=1}^4 \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \sin[k_2 \wedge (k_3 + k_4)] \sin(k_3 \wedge k_4) \\ &\quad \left\langle :D^\beta D^\alpha A_\beta(k_1, \theta) A^\sigma(k_2, \theta) A_\alpha(k_3, \theta) A_\sigma(k_4, \theta) :\right\rangle. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Seguindo o procedimento descrito anteriormente, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA}^{(b)} &= \int d^2\theta \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sin^2(k \wedge p) \left[b_{1\alpha\beta} D^2 A^\alpha(-p, \theta) A^\beta(p, \theta) \right. \\ &\quad + b_{2\gamma\beta} D^\gamma D^\beta A^\alpha(-p, \theta) A_\alpha(p, \theta) \\ &\quad \left. + b_{3\alpha\beta} A^\alpha(-p, \theta) A^\beta(p, \theta) + b_4 A^\alpha(-p, \theta) A_\alpha(p, \theta) \right], \end{aligned} \quad (4.113)$$

tal que

$$b_{1\alpha\beta} = \frac{ig^2(1-\alpha)(k)_{\alpha\beta}}{6((k)^2)^2}, \quad (4.114)$$

$$b_{2\gamma\beta} = \left(-\frac{ig^2(1-\alpha)(k)_{\beta\gamma}}{4((k)^2)^2} \right), \quad (4.115)$$

$$b_{3\alpha\beta} = \frac{ig^2(1-\alpha)C_{\alpha\gamma}(k)_{\beta\delta}(p)^{\gamma\delta}}{6((k)^2)^2}, \quad (4.116)$$

$$b_4 = \left(-\frac{ig^2(1-\alpha)}{2(k)^2} \right). \quad (4.117)$$

Note que os termos envolvendo os coeficientes $b_{1\alpha\beta}$, $b_{2\gamma\beta}$ e $b_{3\alpha\beta}$ possuem apenas divergências logarítmicas. O único termo linearmente divergente está contido em b_4 . Além disso, a contribuição desse diagrama se anula completamente no calibre de Feynman $\alpha = 1$, isto é, $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$.

Por último, vamos determinar a contribuição relativa ao gráfico (c) na Fig. 4.1, devido aos supercampos fantasma de Faddev-Popov. A expressão analítica para esse diagrama é dada por

$$\Gamma_{AA}^{(c)} = -\frac{i}{2!} \left\langle : \frac{t^2}{2!} (V_{Ac^2})^2 : \right\rangle. \quad (4.118)$$

Usando a Eq. (4.25), podemos reescrever (4.118) no espaço dos momentos

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA}^{(c)} = & \frac{ig^2}{4} \int d^2\theta_k d^2\theta_q \prod_{i=1}^3 \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{d^3q_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) (2\pi)^3 \delta^3(q_1 + q_2 + q_3) \\ & \sin(k_2 \wedge k_3) \sin(q_2 \wedge q_3) \\ & \times \left\langle : D^\alpha c'(k_1, \theta_k) c(k_2, \theta_k) A_\alpha(k_3, \theta_k) D^\beta c'(q_1, \theta_q) c(q_2, \theta_q) A_\alpha(q_3, \theta_q) : \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.119)$$

Utilizando o propagador dado por (4.15), o resultado para esse diagrama será

$$\Gamma_{AA}^{(c)} = \int d^2\theta \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sin^2(k \wedge p) \left[c_{1\alpha\beta} A^\alpha(-p, \theta) A^\beta(p, \theta) + c_2 A^\alpha(-p, \theta) A_\alpha(p, \theta) \right] \quad (4.120)$$

onde

$$c_{1\alpha\beta} = \frac{ig^2 (C_{\alpha,\gamma}(-k+p)_{\beta,\delta}(p)^{\gamma,\delta} - C_{\beta,\gamma}(p)_{\alpha,\delta}(-k+p)^{\gamma,\delta})}{4(k)^2(-k+p)^2}, \quad (4.121)$$

$$c_2 = \frac{ig^2}{2(k)^2}. \quad (4.122)$$

Observe que as contribuições acima não dependem do calibre, já que as linhas internas são propagadores do supercampo fantasma. O termo envolvendo $c_{1\alpha\beta}$ possui divergência logarítmica, enquanto que o termo correspondente a c_2 é linearmente divergente.

Agora estamos em condição de mostrar que a possível violação da simetria BRST por uma termo de massa para o supercampo de calibre, induzido por correções radiativas, é cancelada na aproximação de um laço.

Somando apenas as contribuições linearmente divergentes nas Eqs. (4.105), (4.117) e (4.122), podemos ver que estes fatores cancelam-se mutuamente:

$$a_4 + b_4 + c_2 = -\frac{ig^2\alpha}{2(k)^2} - \frac{ig^2(1-\alpha)}{2(k)^2} + \frac{ig^2}{2(k)^2} = 0, \quad (4.123)$$

garantindo que nenhuma renormalização para a massa seja necessária. Note que esse resultado é independente do calibre adotado e está de acordo com a Ref. [59]. Além disso, naquele trabalho foi relatado que as divergências logarítmicas são também ausentes e, por conseguinte, a função de dois pontos para o supercampo A_α é finita na aproximação de um laço. Examinaremos a seguir se a estrutura dessas correções finitas realmente garantem a transversalidade da polarização do vácuo.

Adicionando (4.98), (4.113) e (4.120), no calibre $\alpha = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{AA}(\alpha = 1) = & \int d^2\theta \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sin^2(k \wedge p) \\
 & \times \left[\left(-\frac{ig^2 (4(k)_{\alpha,\beta} + 3(p)_{\alpha,\beta})}{4(k)^2(-k+p)^2} \right) D^2 A^\alpha(-p, \theta) A^\beta(p, \theta) \right. \\
 & + \left(\frac{ig^2 (C^{\gamma,\delta} (2(k)_{\beta,\gamma}(p)_{\alpha,\delta} + (k)_{\alpha,\gamma}(p)_{\beta,\delta}) + (-5C_{\beta,\gamma}(k)_{\alpha,\delta} + 4C_{\alpha,\gamma}(k)_{\beta,\delta}) (p)^{\gamma,\delta})}{8(k)^2(-k+p)^2} \right. \\
 & + \left. \frac{ig^2 (C_{\alpha,\gamma}(-k+p)_{\beta,\delta}(p)^{\gamma,\delta} - C_{\beta,\gamma}(p)_{\alpha,\delta}(-k+p)^{\gamma,\delta})}{4(k)^2(-k+p)^2} \right) A^\alpha(-p, \theta) A^\beta(p, \theta) \\
 & \left. + \left(\frac{ig^2 (2k.p - 3(p)^2)}{4(k)^2(-k+p)^2} \right) A^\alpha(-p, \theta) A_\alpha(p, \theta) \right]. \tag{4.124}
 \end{aligned}$$

Com o auxílio da identidade $p^2 C_{\alpha\beta} = p_{\alpha\delta} p^\delta_\beta$, podemos simplificar o resultado acima, tal que

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{AA}(\alpha = 1) = & \int d^2\theta \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sin^2(k \wedge p) \\
 & \times \left[\left(-\frac{ig^2 (4(k)_{\alpha,\beta} - 3(p)_{\alpha,\beta})}{4(k)^2(k+p)^2} \right) D^2 A^\alpha(p, \theta) A^\beta(-p, \theta) \right. \\
 & + \left(\frac{ig^2 ((p)_{\alpha,\delta}(k)^\delta_\beta + 3(p)_{\beta,\delta}(k)^\delta_\alpha)}{4(k)^2(k+p)^2} \right) A^\alpha(p, \theta) A^\beta(-p, \theta) \\
 & \left. + \left(-\frac{ig^2 (2k.p + 5(p)^2)}{4(k)^2(k+p)^2} \right) A^\alpha(p, \theta) A_\alpha(-p, \theta) \right], \tag{4.125}
 \end{aligned}$$

onde fizemos $p \rightarrow -p$. Para isolar a parte correspondente ao termo longitudinal em (4.125), vamos separar as integrais de momento interno em k e reescrevê-las como segue

$$I_{1\alpha\beta} = -\frac{ig^2}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sin^2(k \wedge p) \frac{(4(k)_{\alpha\beta} - 3(p)_{\alpha\beta})}{4(k)^2(k+p)^2}, \quad (4.126)$$

$$I_{2\alpha\beta} = \frac{ig^2}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sin^2(k \wedge p) \frac{((p)_{\alpha\delta}(k)^\delta_\beta + 3(p)_{\beta\delta}(k)^\delta_\alpha)}{(k)^2(k+p)^2}, \quad (4.127)$$

$$I_3 = -\frac{ig^2}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sin^2(k \wedge p) \frac{(2k.p + 5(p)^2)}{(k)^2(k+p)^2}. \quad (4.128)$$

Empregando a parametrização de Feynman

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2}$$

e efetuando a mudança de momento $k \rightarrow l + xp$, a integral $I_{1\alpha\beta}$ assume a forma

$$\begin{aligned} I_{1\alpha\beta} &= -\frac{ig^2}{4} \int_0^1 dx \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \sin^2(l \wedge p) \frac{(4l_{\alpha\beta} - (4x+3)p_{\alpha\beta})}{4(k)^2(k+p)^2} \\ &= \frac{ig^2}{4} \int_0^1 dx (4x+3)p_{\alpha\beta} \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(l \wedge p)}{[l^2 + x(1-x)p^2]^2}, \end{aligned} \quad (4.129)$$

sendo que o termo envolvendo $l_{\alpha\beta}$ é nula por paridade.

As demais integrais seguem de forma análoga:

$$I_{2\alpha\beta} = \frac{ig^2}{4} \int_0^1 dx 2xp^2 C_{\alpha\beta} G(p^2, x), \quad (4.130)$$

$$I_3 = \frac{ig^2}{4} \int_0^1 dx (2x-5)p^2 G(p^2, x), \quad (4.131)$$

onde definimos a função

$$G(p^2, x) = \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(l \wedge p)}{[l^2 + x(1-x)p^2]^2}. \quad (4.132)$$

Substituindo as Eqs. (4.129), (4.130) e (4.131) em (4.125), podemos reescrever a ação efetiva para a função de dois pontos de A_α na forma

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA} &= \left(-\frac{ig^2}{4} \right) \int d^2\theta \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \\ &\times \int_0^1 dx G(p^2, x) A^\alpha(p, \theta) \left[(2x+4)D_\beta D_\alpha D^2 + (2x-1)D_\alpha D_\beta D^2 \right] A^\beta(-p, \theta), \end{aligned} \quad (4.133)$$

onde empregamos as identidades $\{D_\alpha, D_\beta\} = 2p_{\alpha\beta}$, $D^4 = -p^2$ e $[D_\alpha, D_\beta] = -2C_{\alpha\beta}$.

Conforme enunciado anteriormente, as divergências logarítmicas foram cancela-

das, restando apenas correções finitas envolvendo a função $G(p^2, x)$. Essa expressão pode ser comparada com a Eq. (4.91). Aplicando o operador $\frac{\delta^2}{\delta A^\mu(q, \omega) \delta A^\beta(p, \theta)}$ sobre (4.133), identificamos a correção da parte longitudinal do propagador de calibre como sendo proporcional a integral

$$\begin{aligned} \text{Longitudinal} &= \int_0^1 dx (2x - 1) G(p^2, x) \\ &= \int_0^1 dx (2x - 1) \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(l \wedge p)}{[l^2 + x(1-x)p^2]^2}. \end{aligned} \quad (4.134)$$

Fazendo a seguinte mudança de variável; $x \rightarrow y + \frac{1}{2}$, podemos escrever a Eq. (4.134) na forma

$$\begin{aligned} \text{Longitudinal} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy 2y \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(l \wedge p)}{[l^2 + (\frac{1}{4} - y^2)p^2]^2} \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} dy 2y G(p^2, y^2) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.135)$$

Concluímos que a correção de um laço para a parte longitudinal do propagador do supercampo de calibre é nula, corroborando para a preservação da simetria BRST no setor de calibre puro do modelo. Embora esse resultado tenha sido calculado em um calibre particular ($\alpha = 1$), acreditamos que a parte longitudinal não sofre correções quânticas. Em um calibre arbitrário, esperamos apenas que o coeficiente da parte transversal possa depender de α . A seguir, voltaremos nossa atenção para as contribuições devido ao acoplamento com a matéria.

Setor de matéria: Função de 2-pontos do campo A_α

A primeira contribuição para a ação efetiva é representada na Fig. 4.3 pelo diagrama (a). Sua expressão analítica é construída por meio dos vértices (4.26) e (4.27), tal que

$$\begin{aligned} \Gamma^{(a)} &= -\frac{i}{2!} \left\langle : \frac{i^2}{2!} (V_{\Phi^2 A}^{(1)} + V_{\Phi^2 A}^{(2)})^2 : \right\rangle \\ &= \frac{i}{4} \left\langle : V_{\Phi^2 A}^{(1)} V_{\Phi^2 A}^{(1)} + 2V_{\Phi^2 A}^{(1)} V_{\Phi^2 A}^{(2)} + V_{\Phi^2 A}^{(2)} V_{\Phi^2 A}^{(2)} : \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.136)$$

e produz como resultado final,

$$\begin{aligned}\Gamma_{AA}^{(a)} &= ig^2 \int d^2\theta \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(p, M) \left[\left(\frac{M}{4} p_{\alpha\beta} + \frac{p^2}{8} C_{\beta\alpha} \right) A^\alpha(p, \theta) A^\beta(-p, \theta) \right. \\ &+ \left. \left(\frac{M}{4} C_{\beta\alpha} - \frac{1}{4} (k + p)_{\alpha\beta} \right) D^2 A^\alpha(p, \theta) A^\beta(-p, \theta) \right] \\ &- ig^2 \int d^2\theta \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2(k^2 + M^2)} A^\alpha(p, \theta) A_\alpha(-p, \theta),\end{aligned}\quad (4.137)$$

onde

$$\begin{aligned}f(p, M) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + M^2) [(k + p)^2 + M^2]} \\ &= \frac{i}{4\pi\sqrt{p^2}} \arctan \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{p^2}{M^2}} \right),\end{aligned}\quad (4.138)$$

e seu comportamento assintótico é dado por

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow 0} f(p, M) &= \frac{i}{8\pi\sqrt{M^2}}, \\ \lim_{p \rightarrow \infty} f(p, M) &= \frac{i}{8\sqrt{p^2}}.\end{aligned}\quad (4.139)$$

Podemos observar no resultado acima a ausência dos fatores trigonométricos envolvendo o parâmetro não comutativo Θ , sendo análogo a versão supersimétrica comutativa. Tal fato é consequência direta do supercampo de matéria Φ pertencer a representação fundamental o grupo de calibre $\mathcal{U}(1)_*$. Além disso, destacamos a presença de um termo de massa linearmente divergente, o qual em princípio violaria a simetria BRST.

A segunda contribuição para a ação efetiva é proveniente do diagrama (b) na Fig. 4.3, e pode ser escrita como

$$\Gamma^{(b)} = -\frac{i}{2!} \langle : iV_{\Phi^2 A^2} : \rangle, \quad (4.140)$$

com $V_{\Phi^2 A^2}$ dado por (4.28). Após a D -álgebra obtemos

$$\Gamma^{(b)} = ig^2 \int d^2\theta \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2(k^2 + M^2)} A^\alpha(p, \theta) A_\alpha(-p, \theta), \quad (4.141)$$

o qual somando ao termo de massa em (4.137), cancelam-se mutuamente. Após algumas simplificações algébricas, podemos escrever o resultado para $\Gamma^{(a)} + \Gamma^{(b)}$ na se-

guinte forma

$$\Gamma_{AA}^{Mat} = ig^2 \int d^2\theta \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(p, M) A^\alpha(p, \theta) \left[-\frac{M}{4} D_\beta D_\alpha + \frac{1}{8} D_\beta D_\alpha D^2 \right] A^\beta(-p, \theta). \quad (4.142)$$

Assim, as correções radiativas para o setor de matéria são finitas e induzem um termo tipo Chern-Simons na ação efetiva. Contudo, a transversalidade do propagador de calibre continua preservada.

4.6 Identidade de ST: Vértice triplo de calibre

Para obter a identidade de ST que envolve a função de vértice triplo de calibre, isto é, a parte própria de $\langle 0 | T (A_\alpha A_\beta A_\sigma) | 0 \rangle$, vamos primeiramente diferenciar a Eq. (4.83) com respeito aos campos clássicos $c(k, \lambda)$, $A^\mu(q, \omega)$ e $A^\nu(l, \sigma)$ e tomar ao final todos os campos iguais a zero. Dessa forma, obtemos os seguintes resultados

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3}{\delta c(k, \lambda) \delta A^\mu(q, \omega) \delta A^\nu(l, \sigma)} \left(C^{\beta\alpha} \frac{\delta\Gamma}{\delta A^\beta(p, \theta)} \frac{\delta\Gamma}{\delta K^\alpha(-p, \theta)} \right) &= \\ C^{\alpha\beta} \frac{\delta^3\Gamma}{\delta A^\mu(q, \omega) \delta A^\nu(l, \sigma) \delta A^\beta(p, \theta)} \Big| \frac{\delta^2\Gamma}{\delta c(k, \lambda) \delta K^\alpha(-p, \theta)} &- \\ C^{\alpha\beta} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^\nu(l, \sigma) \delta A^\beta(p, \theta)} \Big| \frac{\delta^3\Gamma}{\delta c(k, \lambda) \delta A^\mu(q, \omega) \delta K^\alpha(-p, \theta)} &+ \\ C^{\alpha\beta} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^\mu(q, \omega) \delta A^\beta(p, \theta)} \Big| \frac{\delta^3\Gamma}{\delta c(k, \lambda) \delta A^\nu(l, \sigma) \delta K^\alpha(-p, \theta)} &, \end{aligned} \quad (4.143)$$

$$\frac{\delta^3}{\delta c(k, \lambda) \delta A^\mu(q, \omega) \delta A^\nu(l, \sigma)} \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta c(p, \theta)} \frac{\delta\Gamma}{\delta \lambda(-p, \theta)} \right) \Big| = 0, \quad (4.144)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3}{\delta c(k, \lambda) \delta A^\mu(q, \omega) \delta A^\nu(l, \sigma)} \left(\frac{1}{\alpha} D^2 D^\beta A_\beta(p, \theta) \frac{\delta\Gamma}{\delta c'(-p, \theta)} \right) &= \\ \frac{1}{\alpha} D^2 D_\nu \delta^2(\theta - \sigma) (2\pi)^3 \delta^3(p + l) \frac{\delta^3\Gamma}{\delta c(k, \lambda) \delta A^\mu(q, \omega) \delta c'(-p, \theta)} &- \\ \frac{1}{\alpha} D^2 D_\mu \delta^2(\theta - \omega) (2\pi)^3 \delta^3(p + q) \frac{\delta^3\Gamma}{\delta c(k, \lambda) \delta A^\nu(l, \sigma) \delta c'(-p, \theta)} &, \end{aligned} \quad (4.145)$$

onde, por conveniência, introduzimos a notação simplificada $\mathcal{O}|$ para indicar que o objeto \mathcal{O} deve ser determinado tomando-se todos os campos iguais a zero ao final dos cálculos.

As funções de vértices $\frac{\delta^3\Gamma}{\delta c\delta A\delta K}$ e $\frac{\delta^3\Gamma}{\delta c\delta A\delta c'}$ podem ser relacionadas por meio da identidade (4.84), mediante a aplicação do operador $\frac{\delta^2}{\delta c(k,\lambda)\delta A(q,\omega)}$. Assim, temos a identidade adicional:

$$\left. \frac{\delta^3\Gamma}{\delta c(k,\lambda)\delta A^\mu(q,\omega)\delta c'(-p,\theta)} \right| = -\frac{1}{2} D^\alpha \left(\frac{\delta^3\Gamma}{\delta c(k,\lambda)\delta A^\mu(q,\omega)\delta K^\alpha(-p,\theta)} \right) \Big| . \quad (4.146)$$

Substituindo as relações (4.143), (4.144) e (4.145) em (4.83) e levando em conta a Eq. (4.146), podemos escrever a identidade envolvendo o vértice triplo de calibre na forma:

$$\begin{aligned} & \int d^2\theta \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ C^{\alpha\beta} \frac{\delta^3\Gamma}{\delta A^\mu(q,\omega)\delta A^\nu(l,\sigma)\delta A^\beta(p,\theta)} \Big| \frac{\delta^2\Gamma}{\delta c(k,\lambda)\delta K^\alpha(-p,\theta)} \Big| + \right. \\ & \left[-C^{\alpha\beta} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^\nu(l,\sigma)\delta A^\beta(p,\theta)} \Big| - \frac{1}{2\alpha} D^\alpha D^2 D_\nu \delta^2(\theta - \sigma) (2\pi)^3 \delta^3(p+l) \right] \frac{\delta^3\Gamma}{\delta c(k,\lambda)\delta A^\mu(q,\omega)\delta K^\alpha(-p,\theta)} \Big| + \\ & \left. \left[C^{\alpha\beta} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^\mu(q,\omega)\delta A^\beta(p,\theta)} \Big| + \frac{1}{2\alpha} D^\alpha D^2 D_\mu \delta^2(\theta - \omega) (2\pi)^3 \delta^3(p+q) \right] \frac{\delta^3\Gamma}{\delta c(k,\lambda)\delta A^\nu(l,\sigma)\delta K^\alpha(-p,\theta)} \Big| \right\} = 0, \end{aligned} \quad (4.147)$$

onde integramos por partes nas duas últimas linhas acima.

As identidades funcionais obtidas em (4.146) e (4.147) representam vínculos não triviais, decorrentes da simetria BRST, envolvendo as diferentes funções de vértices $\frac{\delta^3\Gamma}{\delta A\delta A\delta A}$, $\frac{\delta^2\Gamma}{\delta c\delta K}$, $\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A\delta A}$, $\frac{\delta^3\Gamma}{\delta c\delta A\delta K}$ e $\frac{\delta^3\Gamma}{\delta c\delta A\delta c'}$. Como veremos a seguir, tais vínculos restringem o número de diferentes contratermos necessários para controlar o comportamento ultra-violeta do modelo em questão. Mas antes, vamos deduzir uma última identidade de interesse, envolvendo os setores de matéria e calibre.

4.7 Identidade de ST: Vértice matéria-calibre

A identidade de ST para o vértice espinorial matéria-calibre, a parte própria de $\langle 0 | T(\Phi\bar{\Phi}A^\alpha) | 0 \rangle$, pode ser derivada por meio da Eq. (4.58) com todos os campos iguais a zero após diferenciarmos com respeito a $c(k,\lambda)$, $\bar{\Phi}(q,\omega)$ e $\Phi(l,\sigma)$. As derivadas funcionais resultam em

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\delta^3}{\delta c(k,\lambda)\delta\bar{\Phi}(q,\omega)\delta\Phi(l,\sigma)} \left(C^{\beta\alpha} \frac{\delta\Gamma}{\delta A^\beta(p,\theta)} \frac{\delta\Gamma}{\delta K^\alpha(-p,\theta)} \right) \right| = \\ & C^{\alpha\beta} \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{\Phi}(q,\omega)\delta\Phi(l,\sigma)\delta A^\beta(p,\theta)} \Big| \frac{\delta^2\Gamma}{\delta c(k,\lambda)\delta K^\alpha(-p,\theta)} \Big| , \end{aligned} \quad (4.148)$$

$$\left. \frac{\delta^3}{\delta c(k,\lambda)\delta\bar{\Phi}(q,\omega)\delta\Phi(l,\sigma)} \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta c(p,\theta)} \frac{\delta\Gamma}{\delta\lambda(-p,\theta)} \right) \right| = 0, \quad (4.149)$$

$$\frac{\delta^3}{\delta c(k, \lambda) \delta \bar{\Phi}(q, \omega) \delta \Phi(l, \sigma)} \left(\frac{1}{\alpha} D^2 D^\beta A_\beta(p, \theta) \frac{\delta \Gamma}{\delta c'(-p, \theta)} \right) \Big| = 0, \quad (4.150)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^3}{\delta c(k, \lambda) \delta \bar{\Phi}(q, \omega) \delta \Phi(l, \sigma)} \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta \Phi(p, \theta)} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\zeta}(-p, \theta)} \right) \Big| = \\ & \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\Phi}(q, \omega) \delta \Phi(p, \theta)} \Big| \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta c(k, \lambda) \delta \Phi(l, \sigma) \delta \bar{\zeta}(-p, \theta)} \Big| \quad , \end{aligned} \quad (4.151)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^3}{\delta c(k, \lambda) \delta \bar{\Phi}(q, \omega) \delta \Phi(l, \sigma)} \left(- \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\zeta}(p, \theta)} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\Phi}(-p, \theta)} \right) \Big| = \\ & - \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta c(k, \lambda) \delta \bar{\Phi}(q, \omega) \delta \zeta(p, \theta)} \Big| \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \Phi(l, \sigma) \delta \bar{\Phi}(-p, \theta)} \Big| \quad . \end{aligned} \quad (4.152)$$

Assim, com as Eqs. (4.148), (4.149), (4.150), (4.151) e (4.152) chegaremos à seguinte identidade de ST envolvendo a função de vértice matéria-calibre:

$$\begin{aligned} & \int d^2 \theta \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ C^{\alpha\beta} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \bar{\Phi}(q, \omega) \delta \Phi(l, \sigma) \delta A^\beta(p, \theta)} \Big| \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta c(k, \lambda) \delta K^\alpha(-p, \theta)} \Big| \right. \\ & + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\Phi}(q, \omega) \delta \Phi(p, \theta)} \Big| \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta c(k, \lambda) \delta \Phi(l, \sigma) \delta \bar{\zeta}(-p, \theta)} \Big| \\ & \left. - \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta c(k, \lambda) \delta \bar{\Phi}(q, \omega) \delta \zeta(p, \theta)} \Big| \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \Phi(l, \sigma) \delta \bar{\Phi}(-p, \theta)} \Big| \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.153)$$

4.8 Cálculos explícitos a nível de árvore

Ação renormalizada

As identidades de ST derivadas previamente são válidas somente de modo formal, desde que as correções radiativas contêm divergências, sejam elas ultravioletas usuais ou originadas do mecanismo de mistura UV/IR. Para eliminar essas divergências, contratermos devem ser introduzidos por reparametrização da Lagrangiana original que representa o modelo em questão. No nosso caso, vamos redefinir os campos A_α , Φ (ou $\bar{\Phi}$), c (ou c'), os parâmetros g , M , α e também as fontes associadas as transfor-

mações de BRST não-lineares; K^α , λ , ζ e $\bar{\zeta}$, na forma:

$$\begin{aligned} A^\alpha &= Z_1^{1/2} A_r^\alpha, & \Phi &= Z_2^{1/2} \Phi_r, & c &= \tilde{Z}_3^{1/2} c_r, \\ g &= Z_g g_r, & M &= Z_M M_r, & \alpha &= Z_1 \alpha_r, \end{aligned} \quad (4.154)$$

em conjunto com

$$\begin{aligned} K^\alpha &= Z_K K_r^\alpha, & \lambda &= Z_\lambda \lambda_r, \\ \zeta &= Z_\zeta \zeta_r, & \bar{\zeta} &= Z_{\bar{\zeta}} \bar{\zeta}_r, \end{aligned} \quad (4.155)$$

tal que o subscrito “*r*” indica quantidades renormalizadas.

A ação (4.67) escrita em termos dos campos, parâmetros e fontes renormalizadas passa a ser representada por:

- Termos bilineares

$$S_{A_r^2} = \frac{1}{2} \int d^5 z A_{r\beta} \left[-\frac{Z_1}{4} D^\sigma D^\beta D^\alpha D_\sigma - \frac{1}{2\alpha} D^\beta D^2 D^\alpha \right] A_{r\alpha}, \quad (4.156)$$

$$S_{\Phi_r^2} = \int d^5 z \bar{\Phi}_r \left(Z_2 D^2 + Z_2 Z_M M_r \right) \Phi_r, \quad (4.157)$$

$$S_{c_r^2} = \tilde{Z}_3 \int d^5 z c'_r D^2 c_r, \quad (4.158)$$

onde devemos observar que a constante de renormalização para o parâmetro α foi escolhida de modo a manter o termo de fixação de calibre inalterado pelas redefinições acima. A razão para isso foi mostrada na seção 4.5, quando provamos que tal termo não sofre correções radiativas.

- Termos de interação dos setores de calibre e calibre/matéria

$$V_{A^3} \rightarrow \underbrace{Z_g Z_1^{3/2}}_{=Z_4} V_{A_r^3}, \quad V_{A^4} \rightarrow \underbrace{Z_g^2 Z_1^2}_{=Z_5} V_{A_r^4}, \quad V_{A^5} \rightarrow \underbrace{Z_g^3 Z_1^{5/2}}_{=Z_6} V_{A_r^5}, \quad V_{A^6} \rightarrow \underbrace{Z_g^4 Z_1^3}_{=Z_7} V_{A_r^6}, \quad (4.159)$$

$$V_{A c^2} \rightarrow \underbrace{Z_g Z_1^{1/2} \tilde{Z}_3}_{=\tilde{Z}_1} V_{A_r c_r^2}, \quad V_{\Phi^2 A}^{(1,2)} \rightarrow \underbrace{Z_g Z_2 Z_1^{1/2}}_{=Z_{1M}} V_{\Phi_r^2 A_r}, \quad V_{\Phi^2 A^2} \rightarrow \underbrace{Z_g^2 Z_2 Z_1}_{=Z_{2M}} V_{\Phi_r^2 A_r^2}. \quad (4.160)$$

- Termos de interação com as fontes de BRST

$$V_K \rightarrow \underbrace{Z_K \tilde{Z}_3^{1/2}}_{=Z_8} V_{K_r} = Z_8 \int d^5 z [-K_r^\alpha \nabla_\alpha c_r], \quad (4.161)$$

e

$$V_{\bar{\zeta}} \rightarrow \underbrace{Z_{\bar{\zeta}} Z_g \tilde{Z}_3^{1/2} Z_2^{1/2}}_{=Z_9} V_{\bar{\zeta}r}, \quad V_{\zeta} \rightarrow \underbrace{Z_{\zeta} Z_g \tilde{Z}_3^{1/2} Z_2^{1/2}}_{=Z_{10}} V_{\zeta r}, \quad V_{\lambda} \rightarrow \underbrace{Z_{\lambda} Z_g \tilde{Z}_3}_{=Z_{11}} V_{\lambda r}, \quad (4.162)$$

onde assumimos que $\nabla_{\alpha} = D_{\alpha} - i \left(Z_g Z_1^{1/2} \right) g_r \{ A_{r\alpha}, \}$.

Assim como no caso usual, as constantes de renormalização Z_1 , Z_2 , etc, são determinadas de modo a cancelar as divergências que aparecem na ação efetiva quando levamos em conta as correções devido aos diagramas de Feynman. Lembramos ainda que a parte finita dos contratermos necessita de convenientes condições de renormalização para serem fixados de modo único.

Uma consequência muito importante da simetria BRST diz respeito a renormalização da constante de acoplamento g . Notemos que a constante de renormalização Z_g aparece em todos os sete termos das Eqs. (4.159) e (4.160), de modo que se o valor de Z_g for o mesmo em todos eles, então as outras constantes de renormalização não são independentes entre si e satisfazem o seguinte vínculo,

$$Z_g Z_1^{1/2} = \frac{Z_4}{Z_1} = \frac{Z_5}{Z_4} = \frac{Z_6}{Z_5} = \frac{Z_7}{Z_6} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{Z_{1M}}{Z_2} = \frac{Z_{2M}}{Z_{1M}}. \quad (4.163)$$

Relações como as determinadas em (4.163) são muito importantes na prova da renormalização das teorias de calibre em todas as ordens de perturbação. Uma vez que estabelecemos sua validade, podemos aplicar um dado esquema de subtração, como por exemplo o método BPHZ¹ e verificar por indução a renormalizabilidade ordem a ordem [64].

A seguir, nos limitaremos a mostrar em nível de árvore que as relações contidas em (4.163), assim como aquelas envolvendo as constantes de renormalização em (4.161) e (4.162), podem ser extraídas das identidades de ST dadas em (4.89), (4.146), (4.147) e (4.153).

Auto-energia dos campos fantasma

A identidade que envolve a função de dois pontos do campo fantasma é dada pela Eq. (4.89). A nível de árvore, os termos da ação efetiva que contribuem são dados por (escritos no espaço dos momentos):

¹Originalmente desenvolvido por Bogoliubov e Parasiuk e complementado posteriormente por Hepp e Zimmermann [63].

$$V_{Kc} = -Z_8 \int d^2\theta' \prod_{i=1}^2 \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2) K_1^\alpha D_\alpha c_2, \quad (4.164)$$

$$S_{c^2} = \tilde{Z}_3 \int d^2\theta' \prod_{i=1}^2 \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2) c'_1 D^2 c_2, \quad (4.165)$$

tal que por simplicidade de notação, omitiremos o subscrito “*r*” nas quantidades renormalizados daqui por diante.

As derivadas funcionais de interesse resultam em:

$$\left. \frac{\delta^2 V_{Kc}}{\delta c(k, \lambda) \delta K^\alpha(-p, \theta)} \right| = Z_8 (2\pi)^3 \delta^3(-p + k) D_\alpha \delta^2(\theta - \lambda), \quad (4.166)$$

$$\left. \frac{\delta^2 S_{c^2}}{\delta c(k, \lambda) \delta c'(-p, \theta)} \right| = \tilde{Z}_3 (2\pi)^3 \delta^3(-p + k) D^2 \delta^2(\theta - \lambda). \quad (4.167)$$

Substituindo (4.166) e (4.167) em (4.89), temos

$$[Z_8 - \tilde{Z}_3] D^2 \delta^2(\theta - \lambda) (2\pi)^3 \delta^3(-p + k) = 0, \quad (4.168)$$

e segue então que

$$Z_8 = \tilde{Z}_3. \quad (4.169)$$

Função de vértice fantasma-calibre

Vamos considerar agora a identidade representada pela Eq. (4.146). Usando (4.25) e a expressão para o vértice envolvendo o produto da fonte K^α com os campos A_α , c , dada por

$$V_{KAc} = \left(Z_8 Z_g Z_1^{1/2} \right) (2g) \int d^2\theta' \prod_{i=1}^3 \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\sum_{j=1}^3 k_j) K_1^\alpha A_{\alpha 2} c_3 \sin(k_2 \wedge k_3), \quad (4.170)$$

podemos facilmente verificar que

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^2 V_{Ac^2}}{\delta c(k, \lambda) \delta A^\mu(q, \omega) \delta c'(-p, \theta)} \right| &= -\tilde{Z}_1(g) (2\pi)^3 \delta^3(p - q - k) \sin(k \wedge q) \\ &\times \int d^2\theta' D_\mu \delta^2(\theta' - \theta) \delta^2(\theta' - \omega) \delta^2(\theta' - \lambda), \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\delta^2 V_{KAc}}{\delta c(k, \lambda) \delta A^\mu(q, \omega) \delta K^\alpha(-p, \theta)} \right| = Z_8 Z_g Z_1^{1/2} (2g) C_{\alpha\mu} (2\pi)^3 \delta^3(p - q - k) \sin(k \wedge q) \times \int d^2\theta' \delta^2(\theta' - \theta) \delta^2(\theta' - \omega) \delta^2(\theta' - \lambda).$$

Vemos daí que

$$\left[-\tilde{Z}_1 + Z_8 Z_g Z_1^{1/2} \right] (g) (2\pi)^3 \delta^3(p - q - k) \sin(k \wedge q) \times \int d^2\theta' D_\mu \delta^2(\theta' - \theta) \delta^2(\theta' - \omega) \delta^2(\theta' - \lambda) = 0,$$

implicando em

$$Z_g Z_1^{1/2} = \frac{\tilde{Z}_1}{Z_8} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3}. \quad (4.171)$$

Função de vértice triplo de calibre

Antes de iniciar nossa discussão sobre a implicação da identidade (4.147) na relação entre as constantes de renormalização, vamos adotar as seguintes definições para simplificar nosso problema:

$$(a) \equiv \int d^2\theta \frac{d^3p}{(2\pi)^3} C^{\alpha\beta} \frac{\delta^3\Gamma}{\delta A^\mu(q, \omega) \delta A^\nu(l, \sigma) \delta A^\beta(p, \theta)} \left| \frac{\delta^2\Gamma}{\delta c(k, \lambda) \delta K^\alpha(-p, \theta)} \right|, \quad (4.172)$$

$$(b) \equiv \int d^2\theta \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[-C^{\alpha\beta} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^\nu(l, \sigma) \delta A^\beta(p, \theta)} \left| -\frac{1}{2\alpha} D^\alpha D^2 D_\nu \delta^2(\theta - \sigma) (2\pi)^3 \delta^3(p + l) \right. \right. \times \left. \left. \frac{\delta^3\Gamma}{\delta c(k, \lambda) \delta A^\mu(q, \omega) \delta K^\alpha(-p, \theta)} \right| \right], \quad (4.173)$$

$$(c) \equiv \int d^2\theta \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[C^{\alpha\beta} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^\mu(q, \omega) \delta A^\beta(p, \theta)} \left| + \frac{1}{2\alpha} D^\alpha D^2 D_\mu \delta^2(\theta - \omega) (2\pi)^3 \delta^3(p + q) \right. \right. \times \left. \left. \frac{\delta^3\Gamma}{\delta c(k, \lambda) \delta A^\nu(l, \sigma) \delta K^\alpha(-p, \theta)} \right| \right]. \quad (4.174)$$

Usando essas expressões, a Eq. (4.147) assume a forma $(a) + (b) + (c) = 0$. Assim, vamos determinar primeiramente os termos (b) e (c) na aproximação de árvore. Considerando as Eqs. (4.156) e (4.170), as derivadas de interesse correspondem a

$$\begin{aligned} -C^{\alpha\beta} \frac{\delta^2 S_{A^2}}{\delta A^\nu(l, \sigma) \delta A^\beta(p, \theta)} \left| &= \left[\frac{Z_1}{2} D^2 D_\nu D^\alpha + \frac{1}{2\alpha} D^\alpha D^2 D_\nu \right] \delta^2(\theta - \sigma) (2\pi)^3 \delta^3(p + l), \right. \\ C^{\alpha\beta} \frac{\delta^2 S_{A^2}}{\delta A^\mu(q, \omega) \delta A^\beta(p, \theta)} \left| &= \left[-\frac{Z_1}{2} D^2 D_\mu D^\alpha + \frac{1}{2\alpha} D^\alpha D^2 D_\mu \right] \delta^2(\theta - \omega) (2\pi)^3 \delta^3(p + q), \end{aligned} \quad (4.175)$$

e ainda

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^3 V_K}{\delta c(k, \lambda) \delta A^\mu(q, \omega) \delta K^\alpha(-p, \theta)} \right| &= (2\tilde{Z}_1 g) C_{\alpha\mu} \sin(k \wedge q) (2\pi)^3 \delta^3(p - q - k) \delta^2(\theta - \omega) \delta^2(\theta - \lambda), \\ \left. \frac{\delta^3 V_K}{\delta c(k, \lambda) \delta A^\nu(l, \sigma) \delta K^\alpha(-p, \theta)} \right| &= (2\tilde{Z}_1 g) C_{\alpha\nu} \sin(k \wedge l) (2\pi)^3 \delta^3(p - l - k) \delta^2(\theta - \sigma) \delta^2(\theta - \lambda), \end{aligned} \quad (4.176)$$

na qual empregamos o resultado $Z_8 Z_g Z_1^{1/2} = \tilde{Z}_1$.

Aplicando os resultados acima em (b) e (c), nós integramos no momento p e então obtemos

$$\begin{aligned} (b) + (c) &= (-Z_1 \tilde{Z}_1 g) (2\pi)^3 \delta^3(k + q + l) \sin(k \wedge l) \\ &\times \int d^2\theta [D^2 D_\nu D_\mu \delta^2(\theta - \sigma) \delta^2(\theta - \omega) + D^2 D_\mu D_\nu \delta^2(\theta - \omega) \delta^2(\theta - \sigma)] \delta^2(\theta - \lambda). \end{aligned} \quad (4.177)$$

Agora, vamos voltar nossa atenção para o termo (a). Empregando (4.20), podemos mostrar que

$$\begin{aligned} &C^{\alpha\beta} \frac{\delta^3 V_{A^3}}{\delta A^\mu(q, \omega) \delta A^\nu(l, \sigma) \delta A^\beta(p, \theta)} \\ &= \left(\frac{Z_4 g}{2} \right) (2\pi)^3 \delta^3(p + l + q) \sin(p \wedge l) \\ &\times \left\{ -D_\mu \left[D_\nu D^\alpha \delta^2(\theta - \sigma) \delta^2(\theta - \omega) \right] - D_\nu \left[D_\mu D^\alpha \delta^2(\theta - \omega) \delta^2(\theta - \sigma) \right] \right. \\ &\quad - D_\nu D^\alpha \left[D_\mu \delta^2(\theta - \sigma) \delta^2(\theta - \omega) \right] - D_\mu D^\alpha \left[D_\nu \delta^2(\theta - \omega) \delta^2(\theta - \sigma) \right] \\ &\quad \left. + D^\alpha \delta^2(\theta - \sigma) D_\mu D_\nu \delta^2(\theta - \omega) + D^\alpha \delta^2(\theta - \omega) D_\nu D_\mu \delta^2(\theta - \sigma) \right\}. \end{aligned} \quad (4.178)$$

De acordo com essa expressão, juntamente com (4.166), segue então que

$$\begin{aligned} (a) &= \left(\frac{Z_8 Z_4 g}{2} \right) \int d^2\theta \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (2\pi)^6 \delta^3(p + l + q) \delta^3(-p + k) \sin(p \wedge l) \\ &\times \left\{ -D_\mu \left[D_\nu D^\alpha \delta^2(\theta - \sigma) \delta^2(\theta - \omega) \right] - D_\nu \left[D_\mu D^\alpha \delta^2(\theta - \omega) \delta^2(\theta - \sigma) \right] \right. \\ &\quad - D_\nu D^\alpha \left[D_\mu \delta^2(\theta - \sigma) \delta^2(\theta - \omega) \right] - D_\mu D^\alpha \left[D_\nu \delta^2(\theta - \omega) \delta^2(\theta - \sigma) \right] \\ &\quad \left. + D^\alpha \delta^2(\theta - \sigma) D_\mu D_\nu \delta^2(\theta - \omega) + D^\alpha \delta^2(\theta - \omega) D_\nu D_\mu \delta^2(\theta - \sigma) \right\} D_\alpha \delta^2(\theta - \lambda). \end{aligned} \quad (4.179)$$

Vamos agora integrar por partes o resultado anterior para liberar a $\delta^2(\theta - \lambda)$ e com o auxílio das identidades $D_\alpha D_\nu D^\alpha = 0$ e $D_\mu D_\nu D^\alpha = D^\alpha D_\nu D_\mu$, obtemos o seguinte

resultado

$$\begin{aligned}
 (a) &= \left(\frac{Z_8 Z_4 g}{2} \right) (2\pi)^3 \delta^3(k + l + q) \sin(k \wedge l) \int d^2\theta \\
 &\times \left\{ 2D^2 D_\nu D_\mu \delta^2(\theta - \sigma) \delta^2(\theta - \omega) + 2D^2 D_\mu D_\nu \delta^2(\theta - \omega) \delta^2(\theta - \sigma) \right. \\
 &- D_\nu D^\alpha \delta^2(\theta - \sigma) D_\alpha D_\mu \delta^2(\theta - \omega) - D_\mu D^\alpha \delta^2(\theta - \omega) D_\alpha D_\nu \delta^2(\theta - \sigma) \\
 &\left. - 2D^2 \delta^2(\theta - \sigma) D_\mu D_\nu \delta^2(\theta - \omega) - 2D^2 \delta^2(\theta - \omega) D_\nu D_\mu \delta^2(\theta - \sigma) \right\} \delta^2(\theta - \lambda).
 \end{aligned} \tag{4.180}$$

Notemos que os dois primeiros termos em (4.180) já estão numa forma conveniente para serem relacionados com aqueles obtidos em Eq. (4.177). Nos resta agora, mostrar que os demais termos cancelam-se mutuamente. Para ver como isso pode ser feito, vamos considerar o quarto termo em (4.180), representado por $(a_4) \equiv -D_\mu D^\alpha \delta^2(\theta - \omega) D_\alpha D_\nu \delta^2(\theta - \sigma)$. Empregando a relação de comutação $[D_\mu, D_\nu] = 2C_{\nu\mu} D^2$ em adição com $C_\beta^\alpha = -\delta_\beta^\alpha$, podemos reescrever (a_4) como segue:

$$\begin{aligned}
 (a_4) &= C^{\alpha\beta} D_\beta D_\nu \delta^2(\theta - \sigma) D_\mu D_\alpha \delta^2(\theta - \omega) \\
 &= \left[D_\nu D^\alpha \delta^2(\theta - \sigma) D_\alpha D_\mu \delta^2(\theta - \omega) + 2D^2 \delta^2(\theta - \sigma) D_\nu D_\mu \delta^2(\theta - \omega) \right. \\
 &\quad \left. + 2D^2 \delta^2(\theta - \omega) D_\nu D_\mu \delta^2(\theta - \sigma) + 4C_{\nu\mu} D^2 \delta^2(\theta - \sigma) D^2 \delta^2(\theta - \omega) \right],
 \end{aligned}$$

e aplicando mais uma vez a relação $D_\nu D_\mu = D_\mu D_\nu + 2C_{\mu\nu} D^2$, finalmente temos que

$$\begin{aligned}
 (a_4) &= \left[D_\nu D^\alpha \delta^2(\theta - \sigma) D_\alpha D_\mu \delta^2(\theta - \omega) + 2D^2 \delta^2(\theta - \sigma) D_\mu D_\nu \delta^2(\theta - \omega) \right. \\
 &\quad \left. + 2D^2 \delta^2(\theta - \omega) D_\nu D_\mu \delta^2(\theta - \sigma) \right].
 \end{aligned} \tag{4.181}$$

De (4.180) e (4.181), é fácil ver que a forma final de (a) é dada por

$$\begin{aligned}
 (a) &= (Z_8 Z_4 g) (2\pi)^3 \delta^3(k + l + q) \sin(k \wedge l) \int d^2\theta \delta^2(\theta - \lambda) \\
 &\times \left[D^2 D_\nu D_\mu \delta^2(\theta - \sigma) \delta^2(\theta - \omega) + D^2 D_\mu D_\nu \delta^2(\theta - \omega) \delta^2(\theta - \sigma) \right],
 \end{aligned} \tag{4.182}$$

e, portanto, $(a) + (b) + (c) = 0$ implica em

$$\begin{aligned}
 &[Z_8 Z_4 - Z_1 \tilde{Z}_1] (2\pi)^3 \delta^3(k + l + q) g \sin(k \wedge l) \int d^2\theta \delta^2(\theta - \lambda) \\
 &\times \left[D^2 D_\nu D_\mu \delta^2(\theta - \sigma) \delta^2(\theta - \omega) + D^2 D_\mu D_\nu \delta^2(\theta - \omega) \delta^2(\theta - \sigma) \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{4.183}$$

Daí segue o resultado final

$$\frac{Z_4}{Z_1} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3}, \quad (4.184)$$

mostrando que a identidade (4.147) reduz o número de constantes de renormalização independentes, vinculadas pela renormalização de g , como tínhamos mencionado anteriormente.

Função de vértice matéria-calibre

Para finalizar, vamos determinar agora, quais relações entre as constantes de renormalização são obtidas por meio da identidade (4.153). Procedendo de maneira análoga ao caso anterior, consideremos a notação

$$(a_M) \equiv \int d^2\theta \frac{d^3p}{(2\pi)^3} C^{\alpha\beta} \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{\Phi}(q, \omega)\delta\Phi(l, \sigma)\delta A^\beta(p, \theta)} \left| \frac{\delta^2\Gamma}{\delta c(k, \lambda)\delta K^\alpha(-p, \theta)} \right|, \quad (4.185)$$

$$(b_M) \equiv \int d^2\theta \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\Phi}(q, \omega)\delta\Phi(p, \theta)} \left| \frac{\delta^3\Gamma}{\delta c(k, \lambda)\delta\Phi(l, \sigma)\delta\tilde{\zeta}(-p, \theta)} \right|, \quad (4.186)$$

$$(c_M) \equiv - \int d^2\theta \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\delta^3\Gamma}{\delta c(k, \lambda)\delta\bar{\Phi}(q, \omega)\delta\zeta(p, \theta)} \left| \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\Phi(l, \sigma)\delta\bar{\Phi}(-p, \theta)} \right|, \quad (4.187)$$

tal que $(a_M) + (b_M) + (c_M) = 0$ representa a Eq. (4.153).

Na aproximação de árvore, o termo (a_M) recebe contribuição do vértice

$$\begin{aligned} V_{\Phi^2 A}^{(1,2)} &= Z_{1M} \left(\frac{ig}{2} \right) \int d^2\theta' \prod_{i=1}^3 \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\sum_{j=1}^3 k_j) e^{-ik_2 \wedge k_3} \\ &\times [D^\alpha \bar{\Phi}_1 A_{2\alpha} \Phi_3 - \bar{\Phi}_1 A_2^\alpha D_\alpha \Phi_3], \end{aligned} \quad (4.188)$$

que resulta em

$$\begin{aligned} &C^{\alpha\beta} \frac{\delta^3 V_{\Phi^2 A}^{(1,2)}}{\delta\bar{\Phi}(q, \omega)\delta\Phi(l, \sigma)\delta A^\beta(p, \theta)} \\ &= Z_{1M} \left(\frac{ig}{2} \right) (2\pi)^3 \delta^3(p + l + q) \left[e^{-ip \wedge l} D^\alpha \delta^2(\theta - \omega) \delta^2(\theta - \sigma) \right. \\ &\quad \left. - e^{ip \wedge q} D^\alpha \delta^2(\theta - \sigma) \delta^2(\theta - \omega) \right], \end{aligned} \quad (4.189)$$

e também da Eq. (4.166). Integrando no momento p , então

$$(a_M) = Z_{1M}Z_8 \left(\frac{ig}{2} \right) (2\pi)^3 \delta^3(k + l + q) e^{iq \wedge l} \int d^2\theta \\ \times \left[D^\alpha \delta^2(\theta - \omega) D_\alpha \delta^2(\theta - \lambda) \delta^2(\theta - \sigma) - D^\alpha \delta^2(\theta - \sigma) D_\alpha \delta^2(\theta - \lambda) \delta^2(\theta - \omega) \right]. \quad (4.190)$$

Por outro lado, os termos (b_M) e (c_M) recebem contribuições de

$$\frac{\delta^2 V_{\Phi^2}}{\delta \bar{\Phi}(q, \omega) \delta \Phi(p, \theta)} = (2\pi)^3 \delta^3(p + q) \left[Z_2 D^2 + Z_2 Z_M M \right] \delta^2(\theta - \omega), \quad (4.191)$$

$$\frac{\delta^2 V_{\Phi^2}}{\Phi(l, \sigma) \delta \bar{\Phi}(-p, \theta)} = (2\pi)^3 \delta^3(-p + l) \left[Z_2 D^2 + Z_2 Z_M M \right] \delta^2(\theta - \sigma), \quad (4.192)$$

$$\frac{\delta^3 V_{\bar{\zeta}}}{\delta c(k, \lambda) \delta \Phi(l, \sigma) \delta \bar{\zeta}(-p, \theta)} = Z_9 (ig) (2\pi)^3 \delta^3(-p + l + k) e^{-ip \wedge l} \delta^2(\theta - \sigma) \delta^2(\theta - \lambda), \quad (4.193)$$

$$\frac{\delta^3 V_{\bar{\zeta}}}{\delta c(k, \lambda) \delta \bar{\Phi}(q, \omega) \delta \zeta(p, \theta)} = Z_{10} (ig) (2\pi)^3 \delta^3(p + q + k) e^{-ip \wedge q} \delta^2(\theta - \omega) \delta^2(\theta - \lambda), \quad (4.194)$$

que resultam em

$$(b_M) = (ig) \int d^2\theta \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (2\pi)^6 \delta^2(p + q) \delta^2(-p + l + k) e^{-ip \wedge l} \\ \times \left[Z_2 Z_9 D^2 \delta^2(\theta - \omega) + Z_2 Z_9 Z_M M \delta^2(\theta - \omega) \right] \delta^2(\theta - \sigma) \delta^2(\theta - \lambda), \quad (4.195)$$

$$(c_M) = -(ig) \int d^2\theta \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (2\pi)^6 \delta^2(-p + l) \delta^2(p + q + k) e^{-ip \wedge q} \\ \times \left[Z_2 Z_{10} D^2 \delta^2(\theta - \sigma) + Z_2 Z_{10} Z_M M \delta^2(\theta - \sigma) \right] \delta^2(\theta - \omega) \delta^2(\theta - \lambda). \quad (4.196)$$

Notemos primeiramente que os termos contendo a massa renormalizada M podem ser agrupados de forma independente dos demais e, portanto, teremos

$$[Z_9 - Z_{10}] Z_2 Z_M (igM) (2\pi)^3 \delta^3(k + l + q) e^{iq \wedge l} \int d^2\theta \delta^2(\theta - \sigma) \delta^2(\theta - \omega) \delta^2(\theta - \lambda) = 0, \quad (4.197)$$

e, assim,

$$Z_9 = Z_{10}. \quad (4.198)$$

Considerando os demais termos em $(b_M) + (c_M)$, uma última integração por partes nos permite escrever

$$\begin{aligned} (b_M) + (c_M) &= -Z_2 Z_9 \left(\frac{ig}{2} \right) (2\pi)^3 \delta^3(k+l+q) e^{iq \wedge l} \int d^2\theta \\ &\times \left[D^\alpha \delta^2(\theta - \omega) D_\alpha \delta^2(\theta - \lambda) \delta^2(\theta - \sigma) - D^\alpha \delta^2(\theta - \sigma) D_\alpha \delta^2(\theta - \lambda) \delta^2(\theta - \omega) \right], \end{aligned} \quad (4.199)$$

de modo que $(a_M) + (b_M) + (c_M) = 0$ implica em

$$\frac{Z_{1M}}{Z_2} = \frac{Z_9}{Z_8}. \quad (4.200)$$

Para um estudo mais completo das identidades de ST devemos verificar as relações anteriores para as funções de vértices superficialmente divergentes, que envolve o cálculo dos diagramas com três e quatro pernas externas. Mesmo na aproximação de um laço, essa tarefa é bem mais trabalhosa e deverá ser concluída posteriormente.

Capítulo 5

A teoria de Yang-Mills-Chern-Simons supersimétrica em $D = 2 + 1$ dimensões

Uma característica fundamental da teoria quântica de campos é o aparecimento de quantidades infinitas quando se tenta calcular, por exemplo, amplitudes de esplamento além do nível da árvore. Fisicamente, modelos aceitáveis devem ser finitos (mas ficamos então restritos a uma pequena classe de tais modelos) ou tratáveis por algum mecanismo consistente de renormalização. Como é bem conhecido na literatura, a inclusão da supersimetria melhora o comportamento ultravioleta de tais modelos. Nesse espírito, vários trabalhos têm sido publicados nos últimos anos, e seguindo o artigo publicado por nosso grupo de pesquisa sobre a finitude da eletrodinâmica quântica supersimétrica em $D = 2 + 1$ dimensões [66], nada mais natural que a extensão destes estudos para o caso da teoria da não-abeliana. Assim, neste capítulo, apresentaremos um estudo sobre a finitude, em todas as ordens de perturbação, da teoria da super-Yang-Mills-Chern-Simons acoplada minimamente à matéria em três dimensões do espaço-tempo (SYMCSM). Em nossa abordagem utilizamos o formalismo de supercampos, que permite estabelecer a finitude do modelo em um calibre particular, através do estudo das correções radiativas da função de dois pontos na aproximação de dois laços.

5.1 Apresentação do modelo

O modelo proposto é descrito por uma ação que contém supercampos de Yang-Mills-Chern-Simons com $\mathcal{N} = 1$, acoplados a um supercampo escalar de matéria [18]

$$S = S_{SYM} + S_{SCS} + S_{mat}, \quad (5.1)$$

com

$$S_{SYM} = \frac{1}{2g^2} \text{tr} \int d^5z W^\alpha W_\alpha, \quad (5.2)$$

$$S_{SCS} = \frac{1}{g^2} \text{tr} \int d^5z \frac{1}{2} m \left(A^\alpha W_\alpha + \frac{i}{6} \{ A^\alpha, A^\beta \} D_\beta A_\alpha + \frac{1}{12} \{ A^\alpha, A^\beta \} \{ A_\alpha, A_\beta \} \right), \quad (5.3)$$

$$S_{mat} = \int d^5z \left(\bar{\Phi} \nabla^2 \Phi + M \bar{\Phi} \Phi \right), \quad (5.4)$$

onde $\nabla_\alpha = D_\alpha - iA_\alpha$ é a derivada supercovariante de calibre, Φ é o supercampo escalar complexo de matéria e

$$W_\alpha = \frac{1}{2} D^\beta D_\alpha A_\beta - \frac{i}{2} [A^\beta, D_\beta A_\alpha] - \frac{1}{6} [A^\beta, \{A_\beta, A_\alpha\}], \quad (5.5)$$

é o espinor intensidade de campo covariante, construído a partir do supercampo de calibre A_α . Deve-se notar que A_α e W_α assumem valores na álgebra de Lie de $SU(N)$, tal que

$$A_\alpha = A_\alpha^a T_a, \quad W_\alpha = W_\alpha^a T_a, \quad (5.6)$$

onde os geradores do grupo $\{T_a\}$ na representação fundamental, com $a = 1, \dots, N^2 - 1$, são matrizes $N \times N$ hermitianas e satisfazem a álgebra de Lie e as relações abaixo :

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c, \quad (f_{abc} \text{ são as constantes de estrutura}) \quad (5.7)$$

$$\text{tr} (T_a T_b) = T_R \delta_{ab}, \quad (5.8)$$

$$T_{ij}^a T_{kl}^a = T_R \left(\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \right), \quad (5.9)$$

$$f_{acd} f_{bcd} = 2 T_R N \delta_{ab}, \quad (5.10)$$

$$f_{alm} f_{bmn} f_{cnl} = T_R N f_{abc}. \quad (5.11)$$

Além disso, o supercampo de matéria pertencente a representação fundamental carrega o índice de simetria do grupo, sendo denotado por Φ_a .

Para seguir com o tratamento perturbativo no formalismo das integrais de trajetórias, fazemos uso do procedimento de Faddeev-Popov, que consiste em adicionar à densidade Lagrangiana (5.1) um termo fixador de calibre e os respectivos campos fantasmas associados,

$$S_{GF} + S_{FP} = \frac{1}{g^2} \text{tr} \int d^5z \left[-\frac{1}{4\alpha} D^\alpha A_\alpha D^2 D^\beta A_\beta \right] + \text{tr} \int d^5z \left[\frac{1}{2} \bar{c} D^\alpha \nabla_\alpha c \right]. \quad (5.12)$$

Invertendo-se a parte quadrática da ação total dada por $S_{SYM} + S_{SCS} + S_{mat} + S_{GF} + S_{FP}$ determinamos os propagadores do campo de calibre, matéria e fantasma, que no

espaço dos momentos são dados respectivamente por:

$$\langle A_{\alpha a}(k, \theta) A_{\beta b}(-k, \theta') \rangle = \frac{-i\delta_{ab}}{T_R} \left[\frac{\alpha}{2} \frac{D^2 D_\alpha D_\beta}{(k^2)^2} - \frac{1}{2} \frac{(D^2 - m) D_\beta D_\alpha}{k^2 (k^2 + m^2)} \right] \delta^2(\theta - \theta') \quad (5.13)$$

$$\langle \Phi_m(k, \theta) \bar{\Phi}_n(-k, \theta') \rangle = -i\delta_{mn} \frac{(D^2 - M)}{k^2 + M^2} \delta^2(\theta - \theta'), \quad (5.14)$$

$$\langle c_a(k, \theta) \bar{c}_b(-k, \theta') \rangle = \frac{-i\delta_{ab}}{T_R} \frac{D^2}{k^2} \delta^2(\theta - \theta'). \quad (5.15)$$

Os vértices do modelo são determinados a partir dos termos de interação S_I da ação total e são dados por:

$$\begin{aligned} S_I = & \int d^5 z \left[-\frac{ig}{2} (T_a)_{ij} D_\alpha \bar{\Phi}_i A^{\alpha a} \Phi_j - \frac{ig}{2} (T_a)_{ij} \bar{\Phi}_i A^{\alpha a} D_\alpha \Phi_j \right. \\ & + \frac{g T_R}{4} f_{abc} D^\alpha D^\beta A_\alpha^a A^\gamma_b D_\gamma A_\beta^c + \frac{mg T_R}{6} f_{abc} A^{\alpha a} A^{\beta b} D_\beta A_\alpha^c \\ & + \frac{g T_R}{2} f_{abc} D^\alpha \bar{c}^a A_\alpha^b c^c - \frac{g^2}{2} (T^a T^b)_{ij} A^{\alpha a} A_\alpha^b \bar{\Phi}_i \Phi_j \\ & + \frac{g^2 T_R}{12} f_{abef} f_{ecd} D^\alpha D^\beta A_\alpha^a A^\gamma_b A_\gamma^c A_\beta^d + \frac{g^2 T_R}{8} f_{abef} f_{ecd} A^{\alpha a} D_\alpha A^{\beta b} A^\gamma_c D_\gamma A_\beta^d \\ & + \frac{mg^2 T_R}{24} f_{abef} f_{ecd} A^{\alpha a} A^{\beta b} A_\alpha^c A_\beta^d + \frac{g^3 T_R}{12} f_{abm} f_{mcn} f_{nde} A^{\alpha a} D_\alpha A^{\beta b} A^\gamma_c A_\gamma^d A_\beta^e \\ & \left. + \frac{g^4 T_R}{72} f_{abm} f_{mcn} f_{ndl} f_{lef} A^{\alpha a} A^{\beta b} A_\alpha^c A^\gamma_d A_\gamma^e A_\beta^f \right]. \quad (5.16) \end{aligned}$$

5.2 Correções radiativas

Para provar a finitude UV de SYMCSM, vamos seguir a seguinte estratégia:

1. Calcular o grau de divergência superficial;
2. Discutir sobre a aparência das divergências lineares e logarítmicas, comentando sobre seu cancelamento em um laço;
3. Avaliar explicitamente os diagramas de dois laços com divergências logarítmicas, onde realizamos a D -álgebra com o auxílio do pacote SusyMath [65] para o programa *Mathematica*®, mostrando que as divergências se cancelam, ao menos para um calibre específico.

5.3 Grau de divergência superficial e renormalizabilidade do modelo

Nosso objetivo nessa seção é obter uma expressão algébrica para o grau de divergência superficial $\omega(G)$ em termos dos elementos topológicos característicos, e assim, poder determinar os tipos de divergências e em quais gráficos elas aparecem.

Seja G um supergráfico com L laços, V vértices e P propagadores tal que:

- Vértices

$V_{A^3}^3$: número de vértices puros de campo de calibre com três derivadas espinoriais;

$V_{A^4}^2$: número de vértices puros de campo de calibre com duas derivadas espinoriais;

$V_{A^3}^1 + V_{A^5}^1$: número de vértices puros de campo de calibre com uma derivada espinorial;

$V_{A^6}^0 + V_{A^4}^0$: número de vértices puros de campo de calibre com nenhuma derivada espinorial;

$V_{A\Phi^2}^1$: número de vértices mistos (escalar-calibre) com uma derivada espinorial;

$V_{A^2\Phi^2}^0$: número de vértices mistos com zero derivada espinorial;

V_{Ac^2} : número de vértices com os campos fantasma e calibre;

- Propagadores

P_Φ : número de propagadores do campo escalar $\langle \Phi_a \Phi_b \rangle \sim D^2/k^2$;

P_A : número de propagadores do campo de calibre $\langle A_a^\alpha A_b^\beta \rangle \sim D^4/k^4$;

P_c : número de propagadores do campo fantasma $\langle \bar{c}c \rangle \sim D^2/k^2$;

Além disso, temos ainda que definir:

E_Φ : linhas externas escalares;

E_A : linhas externas do supercampo de calibre;

E_c : linhas externas dos campos fantasma¹;

N_D : derivadas espinoriais aplicadas nas linhas externas.

¹Para o caso de existir um processo espalhamento maior contendo subgráficos divergentes com campos fantasma nas linhas externas.

Num gráfico genérico, as potências de momento aparecem explicitamente nos elementos de integração dos momentos relacionados com o número de laços independentes e também nos propagadores. Além disso, as derivadas espinoriais covariantes podem transformar-se em momento através da relação $\{D, D\} \sim k$. Cada laço contribui com uma integral d^3k e cada propagador com o fator $1/k^2$ (campo escalar e fantasma) ou $1/k^4$ (campo de calibre). Deste modo,

$$\omega(G) = 3L - 4P_A - 2P_\Phi - 2P_c + (\text{k's devido as D's}). \quad (5.17)$$

As derivadas espinoriais têm origem nos propagadores e vértices, e seu número total é $4P_A + 2P_\Phi + 2P_c + 3V_{A^3}^3 + V_{A^3}^1 + V_{\Phi^2 A}^1 + V_{A^2 c}^1 + 2V_{A^4}^2 + V_{A^5}^1$. No cálculo das funções de correlação, cada propagador contribui com uma $\delta^2(\theta - \theta')$ e podemos usar $V - 1$ integrações em $d^2\theta$ para eliminar essas δ' s, restando $P_\Phi + P_A + P_c - V + 1$ que por sua vez são eliminadas pelas derivadas covariantes através da relação $D^2\delta^2(\theta) \sim 1$. Dessa forma, o número total de D 's disponíveis para se converterem em momento é igual a

$$2P_A + 5V_{A^3}^3 + 4V_{A^4}^2 + 3(V_{A^3}^1 + V_{A^5}^1 + V_{\Phi^2 A}^1 + V_{A^2 c}^1) + 2(V_{A^6}^0 + V_{\Phi^2 A^2}^0 + V_{A^4}^0) - 2 - N_D.$$

Como a cada dois D 's temos um k , a equação (5.17) assume a forma

$$\begin{aligned} \omega(G) &= 3L - 4P_A - 2P_\Phi - 2P_c \\ &+ \frac{2P_A + 5V_{A^3}^3 + 4V_{A^4}^2 + 3(V_{A^3}^1 + V_{A^5}^1 + V_{\Phi^2 A}^1 + V_{A^2 c}^1)}{2} \\ &+ \frac{2(V_{A^6}^0 + V_{\Phi^2 A^2}^0 + V_{A^4}^0) - 2 - N_D}{2} \\ &= 2 + P_\Phi + P_c - \frac{1}{2}V_{A^3}^3 - \frac{3}{2}(V_{A^3}^1 + V_{A^5}^1 + V_{\Phi^2 A}^1 + V_{A^2 c}^1) \\ &- 2(V_{A^6}^0 + V_{\Phi^2 A^2}^0 + V_{A^4}^0) - V_{A^4}^2 - \frac{N_D}{2}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde a relação topológica $L + V - P = 1$ foi utilizada na última igualdade acima.

As linhas externas são relacionadas com os propagadores e vértices pelas identida-

des topológicas:

$$\begin{aligned} P_A &= \frac{(6V_{A^6}^0 + 5V_{A^5}^1 + 4V_{A^4}^0 + 4V_{A^4}^2 + 3V_{A^3}^1 + 3V_{A^3}^3 + 2V_{\Phi^2 A^2}^0 + V_{\Phi^2 A}^1 + V_{A^c^2}^1 - E_A)}{2}, \\ P_\Phi &= \frac{(2V_{\Phi^2 A}^1 + 2V_{\Phi^2 A^2}^0 + -E_\Phi)}{2}, \\ P_c &= \frac{(2V_{A^c^2}^1 - E_c)}{2}, \end{aligned}$$

cuja substituição em (5.18), possibilita expressar o grau de divergência superficial como

$$\begin{aligned} \omega(G) &= 2 - \frac{1}{2} (V_{\Phi^2 A}^1 + V_{A^3}^3 + V_{A^c^2}^1) - \frac{3}{2} (V_{A^3}^1 + V_{A^5}^1) \\ &\quad - V_{A^4}^2 - V_{\Phi^2 A^2}^0 - 2 (V_{A^6}^0 + V_{A^4}^0) - \frac{E_\Phi}{2} - \frac{E_c}{2} - \frac{N_D}{2}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

A parti da equação (5.19) podemos proceder com a análise e seleção dos gráficos de interesse. Nossa atenção está concentrada apenas nos diagramas divergentes, pois desejamos verificar se é possível eliminar toda a parte infinita das funções de correlação por meio de uma escolha adequada do parâmetro de calibra α . Os diagramas com $E_\Phi = 2$ ou $E_c = 2$ possuem divergência superficial logarítmica $\omega = 0$ apenas na aproximação de um laço. Mas devido ao método de regularização adotado, todas as contribuições com diagramas de um laço são finitas, apesar de superficialmente divergentes por contagem de potência. Diagramas com $E_A > 2$ são superficialmente divergentes apenas em um laço e convergentes em dois ou mais laços. Para $E_A = 2$, encontramos diagramas com $\omega = 0 - N_D/2$ na aproximação de dois laços.

Dessa forma, as divergências logarítmicas que devemos realmente nos preocupar estão presentes nos diagramas de dois laços da função de dois pontos do supercampo de calibre A_α e estão desenhados nas Figs. 5.1, 5.2 e 5.3.

5.4 Correções em dois laços: função de dois pontos do supercampo de calibre

Da análise anterior, as únicas funções de vértice com divergências logarítmicas, são aquelas com dois supercampos de calibre externos e sem nenhuma derivada covariante D_α atuando sobre eles. Os diagramas correspondentes são mostrados na Fig. 5.1 (envolvendo somente acoplamento de calibre), 5.2 (aqueles envolvendo o acoplamento com os supercampos fantasma) e 5.3 (aqueles envolvendo o acoplamento com matéria). A correspondente contribuição divergente para a função de vértice está localizada

nos termos de mais baixa ordem numa expansão em torno do momento externo $p = 0$, e assume a forma

$$\Gamma_{AA(mass)} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \Gamma_{AA} A^{\alpha a} (p, \theta) A_\alpha^a (-p, \theta), \quad (5.20)$$

tal que

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA} = & \Gamma_{AA(1a)} + \Gamma_{AA(1b)} + \Gamma_{AA(1c)} + \Gamma_{AA(1d)} + \Gamma_{AA(1e)} + \Gamma_{AA(1f)} \\ & + \Gamma_{AA(1g)} + \Gamma_{AA(1h)} + \Gamma_{AA(2a)} + \Gamma_{AA(2b)} + \Gamma_{AA(2c)} + \Gamma_{AA(2d)} \\ & + \Gamma_{AA(2e)} + \Gamma_{AA(2f)} + \Gamma_{AA(3a)} + \Gamma_{AA(3b)} + \Gamma_{AA(3c)} + \Gamma_{AA(3d)} + \Gamma_{AA(3e)}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

e os números entre parêntesis indicam cada diagrama individualmente, nas Figs. 5.1, 5.2, e 5.3.

De acordo com as regras de Feynman determinadas na seção 5.1, o resultado *preliminar* para as partes divergentes de Γ_{AA} , juntamente com alguns detalhes sobre os cálculos estão indicados no apêndice D. A análise provisória desses resultados, indica que o esperado cancelamento mútuo entre as divergências logarítmicas não é completo e que um termo de massa para A_α é gerado por correções radiativas. Consequentemente, a simetria BRST é quebrada na aproximação de dois laços. Um fenômeno similar para o modelo da QED_3 supersimétrica foi relatado em [66], no qual o cancelamento das divergências é obtido apenas em um calibre particular. Atualmente, os resultados apresentados aqui estão em discussão e a aplicação do método das identidades de Slavnov-Taylor, desenvolvido em detalhe no capítulo 4, segue em curso.

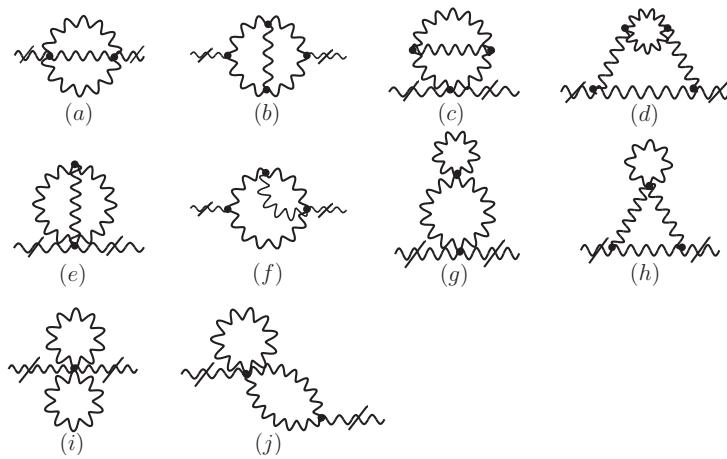


Figura 5.1: Diagramas de dois pontos para A^α contendo somente vértices puros de calibre.

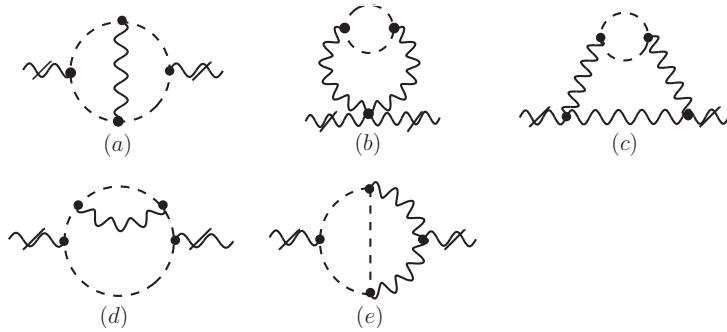


Figura 5.2: Diagramas de dois pontos para A^α com vértices do tipo fantasmas-calibre.

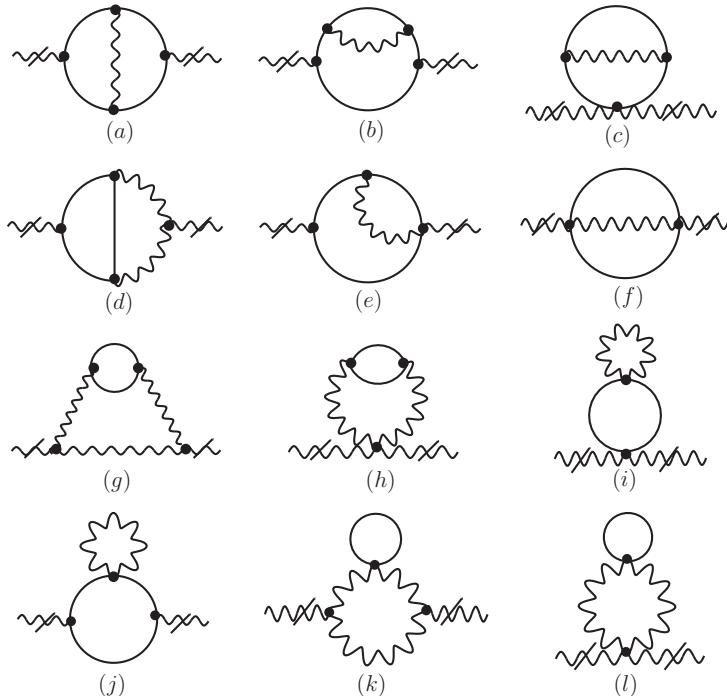


Figura 5.3: Contribuições para a função de dois pontos do supercampo de calibre A_α em dois laços e com vértices mistos (escalar-calibre).

Conclusões

No presente trabalho, focamos nossa atenção em três modelos da teoria quântica de campos supersimétrica em $2 + 1$ dimensões do espaço-tempo, onde analisamos três questões bastante distintas mas de grande importância do ponto de vista teórico, a saber: a quebra dinâmica de supersimetria, o comportamento ultravioleta e simetria BRST.

Na primeira situação, analisada no capítulo 3, calculamos o potencial efetivo para o modelo de Wess-Zumino com supersimetria $\mathcal{N} = 1$. Um análise detalhada da renormalização e da estrutura de vácuo do modelo foi apresentada, até a ordem de dois laços. Um dos principais resultados é que a renormalização da teoria requer, além de contratermo para a função de onda, também contratermos de massa e de constante de acoplamento. Esse resultado difere do relatado em [46], onde a renormalização do modelo requer um contratermo extra σ_1^6 que não pode ser obtido por reparametrização da Lagrangiana original. Paralelamente, verificamos que o estado de vácuo preserva a supersimetria e a simetria discreta $\Phi \rightarrow -\Phi$ da teoria clássica, ao contrário do que foi indicado em [47]. Esses resultados deram origem ao trabalho [68].

O capítulo 4 desta tese trata da prova explícita das identidades de Slavnov-Taylor no modelo da eletrodinâmica supersimétrica não comutativa. Especial atenção foi dada a função de vértice de dois pontos do supercampo A_α . Verificamos explicitamente, na ordem de um laço, que as divergências lineares presentes no termo induzido de massa se cancelam mutuamente, e que a parte longitudinal do propagador de calibre não sofre nenhuma correção radiativa. Para completar nosso estudo, devemos estender as identidades diagramáticas para outras funções de vértices envolvendo três e quatro campos externos. Esse cálculo ainda está em progresso.

O quinto capítulo é dedicado ao estudo da finitude do modelo super-Yang-Mills-Chern-Simons acoplado com matéria. Utilizando a formulação em supercampos e a regularização por redução dimensional, fomos capazes de determinar a estrutura das divergências UV. Como resultado preliminar, nós verificamos que o esquema de regularização adotado (DReD), implica na quebra da simetria BRST por um termo de massa induzido que não se anula em um calibre arbitrário. Esses resultados estão atualmente em fase de discussão.

Finalmente, gostaria de ressaltar minha participação em três outros trabalhos realizados durante meu doutoramento [69, 70, 71], e que por tratassem de tópicos distintos dos aqui abordados, não foram incluídos na apresentação desta tese.

Apêndice A

O método da função zeta $\zeta(s)$

Neste apêndice, iremos calcular a contribuição a um laço $V^{(1)}$ para o potencial efetivo do modelo de Wess-Zumino pelo método da função zeta, como descrito na Ref. [45]. Em geral, o determinante funcional $\text{Det}\hat{\mathcal{O}}$ deve ser entendido como o produto dos autovalores do operador $\hat{\mathcal{O}}$ escrito em alguma base conveniente. No nosso caso, é óbvio que o elemento de matriz $i\Delta_F^{-1}(z, z')$ dado por (3.9) representa o operador diferencial $\hat{\mathcal{O}}_z = D^2 + m + \lambda\hat{\phi} + \frac{g}{2}\hat{\phi}^2$ na representação coordenada no superespaço. Assumindo formalmente uma equação de autovalor para $\hat{\mathcal{O}}_z$ dada por

$$\int d^5z' \hat{\mathcal{O}}_z(z, z') f_n(z') = \alpha_n f_n(z), \quad (\text{A.1})$$

e definindo a função zeta ζ associada ao operador na base coordenada $\hat{\mathcal{O}}(z, z') \equiv \hat{\mathcal{O}}_z \delta^5(z - z')$ por

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{\alpha_n^s}, \quad (\text{A.2})$$

então, o determinante funcional de $\hat{\mathcal{O}}_z$ pode ser escrito na forma

$$\text{Det}\hat{\mathcal{O}}_z \equiv \prod_n \alpha_n = \exp [-\zeta'(0)]. \quad (\text{A.3})$$

Assim, o cálculo do determinante funcional se reduz ao problema de se obter uma representação analítica para a função $\zeta(s)$. O poder desse método reside no fato de que em muitos casos de interesse é possível obter tal representação. Para este fim, vamos introduzir uma função definida no superespaço $G(z, z'; \tau)$ que obedece uma equação tipo calor:

$$\hat{\mathcal{O}}_z G(z, z'; \tau) + \frac{\partial G}{\partial \tau} = 0, \quad (\text{A.4})$$

com a condição inicial $G(x, \theta; x', \theta'; \tau = 0) = \delta^3(x - x')\delta^2(\theta - \theta')$.

Podemos verificar diretamente que a função $\zeta(s)$ pode ser escrita como uma trans-

formada integral de Mellin da função $G(z, z'; \tau)$ na forma

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \int d^3x d^2\theta G(x = x', \theta = \theta'; \tau), \quad (\text{A.5})$$

para $G(z, z'; \tau) \equiv \sum_n \exp[-\alpha_n \tau] f_n(z) f_n^*(z')$.

Agora, nossa tarefa é determinar uma solução explícita de $G(z, z'; \tau)$ satisfazendo a Eq. (A.4) e sujeita a condição inicial acima. Para este objetivo, assumiremos que esta função é invariante por translações no espaço-tempo, tal que uma representação de Fourier exista e seja dada por:

$$G(x, \theta; x', \theta'; \tau) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} g(k, \theta, \theta'; \tau) \exp[-ik(x - x')], \quad (\text{A.6})$$

com o seguinte “ansatz” para $g(k, \theta, \theta'; \tau)$:

$$g(k, \theta, \theta'; \tau) = A(k, \tau) + \theta^\alpha \theta'^\beta k_{\alpha\beta} B(k, \tau) + \theta^\alpha \theta'_\alpha C(k, \tau) + \theta^2 D(k, \tau) + \theta'^2 E(k, \tau) + \theta^2 \theta'^2 H(k, \tau). \quad (\text{A.7})$$

Para determinar os coeficientes A, B, C, D, E e H , nós devemos usar a forma explícita de \hat{O}_z obtida de (3.15) e inserir (A.7) em (A.4). Esta equação resulta em um sistema diferencial linear de seis equações e seis incógnitas, sujeito as condições iniciais:

$$\begin{aligned} A(k, 0) &= 0 & B(k, 0) &= 0 & C(k, 0) &= 1 \\ D(k, 0) &= -1 & E(k, 0) &= -1 & H(k, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

As soluções desse sistema são facilmente obtidas com a ajuda do software *Mathematica*® e são dadas por

$$\begin{aligned} A(k, \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{-k^2 + \mu_2^2}} \left[e^{-\tau(\mu_1 + \sqrt{-k^2 + \mu_2^2})} - e^{-\tau(\mu_1 - \sqrt{-k^2 + \mu_2^2})} \right], \\ B(k, \tau) &= -\frac{1}{2\sqrt{-k^2}} \left[e^{-\tau(\mu_1 + \sqrt{-k^2})} - e^{-\tau(\mu_1 - \sqrt{-k^2})} \right], \\ C(k, \tau) &= \frac{1}{2} \left[e^{-\tau(\mu_1 + \sqrt{-k^2})} + e^{-\tau(\mu_1 - \sqrt{-k^2})} \right], \\ D(k, \tau) &= -\frac{1}{2} \left[e^{-\tau(\mu_1 + \sqrt{-k^2 + \mu_2^2})} + e^{-\tau(\mu_1 - \sqrt{-k^2 + \mu_2^2})} \right], \\ E(k, \tau) &= -\frac{1}{2} \left[e^{-\tau(\mu_1 + \sqrt{-k^2 + \mu_2^2})} + e^{-\tau(\mu_1 - \sqrt{-k^2 + \mu_2^2})} \right], \\ F(k, \tau) &= \frac{\sqrt{-k^2 + \mu_2^2}}{2} \left[e^{-\tau(\mu_1 + \sqrt{-k^2 + \mu_2^2})} - e^{-\tau(\mu_1 - \sqrt{-k^2 + \mu_2^2})} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

onde $\mu_1 = m + \lambda\sigma_1 + \frac{g}{2}\sigma_1^2$ e $\mu_2^2 = \lambda\sigma_2 + g\sigma_1\sigma_2$. A partir desses resultados, somos capazes de construir a função $\zeta(s)$ como prescrito na Eq. (3.7) e integrando em θ obtemos

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \int d^3x d^2\theta \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[A(k, \tau) + 2\theta^2 (C(k, \tau) + D(k, \tau)) \right] \\ &= \frac{\Omega}{\Gamma(s)} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} (-2) [C(k, \tau) + D(k, \tau)].\end{aligned}\quad (\text{A.10})$$

A integração em τ é direta e com a ajuda da relação $V^{(1)} = -(i/2\Omega) \ln \text{Det} \hat{O} = (i/2\Omega)\zeta'(0)$, chegamos ao resultado desejado para a contribuição de um laço do potencial efetivo:

$$V^{(1)} = -\frac{i}{2\Omega} (-\zeta'(0)) = -\frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln \left[\frac{k^2 + M^2}{k^2 + \mu_1^2} \right], \quad (\text{A.11})$$

onde $M^2 = \mu_1^2 - \mu_2^2$. Finalmente, a integral de momento poder ser realizada por regularização dimensional de modo usual.

Apêndice B

Integrais básicas a dois laços

Todas as integrais escalares a dois laços que aparecem nesse trabalho podem ser escritas como combinações das seguintes integrais básicas [67] (no espaço Euclidiano):

$$\begin{aligned} I(m_1, m_2, m_3) &= \int \frac{dk^D}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + m_1^2)(q^2 + m_2^2)[(k+q)^2 + m_3^2]} \\ &= \frac{\mu^{-2\epsilon}}{32\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + 1 - \ln \left(\frac{(m_1 + m_2 + m_3)^2}{4\pi\mu^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} K_1(m_1, m_2, m_3) &= \int \frac{dk^D}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{k^2 q^2}{(k^2 + m_1^2)(q^2 + m_2^2)[(k+q)^2 + m_3^2]} \\ &= -\frac{\mu^{-2\epsilon}}{16\pi^2} (m_1^3 + m_2^3) m_3 + m_1^2 m_2^2 I(m_1, m_2, m_3), \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} K_2(m_1, m_2, m_3) &= \int \frac{dk^D}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(k \cdot q)^2}{(k^2 + m_1^2)(q^2 + m_2^2)[(k+q)^2 + m_3^2]} \\ &= \frac{\mu^{-2\epsilon}}{64\pi^2} \left\{ m_3^2 (m_1 m_3 + m_2 m_3 - m_1 m_2) - m_3 (3m_1^3 + 3m_2^3 + m_1^2 m_2 + m_1 m_2^2) \right. \\ &\quad \left. + (m_1^2 + m_2^2) m_1 m_2 + \frac{1}{4} (m_1^2 + m_2^2 - m_3^2)^2 I(m_1, m_2, m_3) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} K_3(m_1, m_2, m_3) &= \int \frac{dk^D}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{k \cdot q}{(k^2 + m_1^2)(q^2 + m_2^2)[(k+q)^2 + m_3^2]} \\ &= \frac{\mu^{-2\epsilon}}{32\pi^2} (m_1 m_2 - m_2 m_3 - m_1 m_3) + \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2 - m_3^2) I(m_1, m_2, m_3), \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Aqui $\epsilon = 3 - D$, $\gamma \approx 0.5772$ é a constante de Euler e μ é um parâmetro com dimensão de massa introduzido no processo de regularização dimensional. Outras formulas úteis no cálculo das integrais no espaço dos momentos são:

$$\frac{1}{(k^2 + m_1^2)(k^2 + m_2^2)} = \frac{1}{m_2^2 - m_1^2} \left[\frac{1}{k^2 + m_1^2} - \frac{1}{k^2 + m_2^2} \right], \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{1}{(k^2 + m^2)^2} = -\frac{1}{2m} \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{1}{k^2 + m^2} \right]. \quad (\text{B.6})$$

Apêndice C

Bolhas de vácuo no modelo de Wess-Zumino

As expressões analíticas para as bolhas de vácuo a dois laços, que contribuem para o potencial efetivo, desenhadas na Fig. 3.2 são dadas por ($d^D k \equiv \mu^\varepsilon d^{3-\varepsilon} k$):

$$\begin{aligned} V_a^{(2)} &= -\frac{g}{8} \int \frac{d^D k d^D q}{(2\pi)^{2D}} d^2\theta \Delta_F(k; \theta - \theta_1)|_{\theta=\theta_1} \Delta_F(q; \theta - \theta_2)|_{\theta=\theta_2} \\ &= -\frac{g}{2} \int \frac{d^D k d^D q}{(2\pi)^{2D}} \left[\frac{\mu_1 \mu_2^2}{(k^2 + M^2)(q^2 + \mu_1^2)(q^2 + M^2)} \right], \end{aligned} \quad (C.1)$$

e

$$V_b^{(2)} = -3i \int \frac{d^D k d^D q}{(2\pi)^{2D}} d^2\theta_1 d^2\theta_2 \mathcal{I}(\theta_1^2, \theta_2^2) \Delta_F(k; \theta_1 - \theta_2) \Delta_F(q; \theta_1 - \theta_2) \Delta_F(-k - q; \theta_1 - \theta_2), \quad (C.2)$$

onde

$$\mathcal{I}(\theta_1^2, \theta_2^2) = \frac{1}{36} \left[(\lambda + g\sigma_1)^2 - (\lambda g\sigma_2 + g^2\sigma_1\sigma_2)(\theta_1^2 + \theta_2^2) + g^2\sigma_2^2\theta_1^2\theta_2^2 \right]. \quad (C.3)$$

Após realizar a D -álgebra e fazer a integração remanescente em θ , obtemos as seguintes integrais de momento em dois laços para $V_b^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
V_b^{(2)} &= \int \frac{d^D k d^D q}{(2\pi)^{2D}} \frac{-\mu_2^2(\lambda + g\sigma_1)^2}{12(k^2 + M^2)(q^2 + M^2)(k^2 + \mu_1^2)(q^2 + \mu_1^2) [(k+q)^2 + M^2] [(k+q)^2 + \mu_1^2]} \\
&\times \left\{ k^4(q^2 + \mu_1^2) + 2k \cdot q \left[(k^2 + \mu_1^2)(q^2 + \mu_1^2) - (k^2 + q^2 - (k+q)^2 + \mu_1^2)\mu_2^2 \right] \right. \\
&+ \mu_1^2 \left[q^4 - 15\mu_1^4 - 4q^2 \left[(k+q)^2 + 2\mu_1^2 \right] + 6\mu_1^2\mu_2^2 + 2(k+q)^2(-5\mu_1^2 + \mu_2^2) \right] \\
&+ k^2q^4 - 4k^2\mu_1^2 \left[(k+q)^2 + 2\mu_1^2 \right] + k^2q^2 \left[2(k+q)^2 - \mu_1^2 - 4\mu_2^2 \right] \left. \right\} \\
&+ \int \frac{d^D k d^D q}{(2\pi)^{2D}} \frac{-6g\mu_1(\lambda + g\sigma_1)\sigma_2 + g^2\sigma_2^2}{12(k^2 + M^2)(q^2 + M^2) [(k+q)^2 + M^2]}.
\end{aligned} \tag{C.4}$$

Todas as integrais acima são realizadas no esquema de regularização por redução dimensional, usando as fórmulas apresentadas no apêndice B. Os resultados finais são dispostos em (3.17).

Apêndice D

Integrais divergentes no modelo SYMCSM a dois laços

Neste apêndice, apresentamos alguns detalhes sobre os cálculos das partes log divergentes das funções de dois pontos do supercampo de calibre A_α . Por contagem de potencia em (5.19), essas divergências aparecem somente nos termos sem nenhuma derivada covariante D aplicada nas pernas externas dos diagramas correspondentes.

Vamos iniciar com os diagramas mostrados na Fig. 5.1, que envolve somente os vértices de calibre puro. O diagrama 5.1(a) corresponde a expressão

$$\begin{aligned} \Gamma_{(5.1a)} = & -g^4 (T_R)^2 \langle : \int d^5 x \frac{1}{12} f_{abe} f_{ecd} \left(D^\alpha D^\beta A_\alpha^a A^\gamma b A_\gamma^c A_\beta^d + \frac{1}{8} A^{\alpha a} D_\alpha A^{\beta b} A^{\gamma c} D_\gamma A_\beta^d \right) (x) : \\ & : \int d^5 y \frac{1}{12} f_{a'b'e'} f_{c'd'} \left(D^\alpha D^\beta A_\alpha^{a'} A^{\gamma b'} A_\gamma^{c'} A_\beta^{d'} + \frac{1}{8} A^{\alpha a'} D_\alpha A^{\beta b'} A^{\gamma c'} D_\gamma A_\beta^{d'} \right) (y) : \rangle , \end{aligned}$$

a qual após as contrações dos campos, a manipulação da D -álgebra e a seleção dos termos divergentes na forma da Eq. 5.20, resulta em

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA(5.1a)} = & g^4 N^2 T_R \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m^2)(q^2 + m^2)[(k \cdot q)^2 + m^2]} \\ & \left[-\frac{(66\alpha^3 + 77\alpha^2 + 491\alpha + 176)}{1536} + \frac{(12\alpha^3 - 47\alpha^2 + 270\alpha - 253)(k \cdot q)^2}{384q^2(k - q)^2} \right. \\ & - \frac{(14\alpha^3 - 31\alpha^2 + 24\alpha - 1)(k \cdot q)^2}{128k^2(k - q)^2} - \frac{(18\alpha^3 - 49\alpha^2 + 102\alpha + 109)k \cdot q}{256(k - q)^2} \\ & + \frac{(60\alpha^3 - 739\alpha^2 + 38\alpha - 253)k \cdot q}{768q^2} - \frac{(84\alpha^3 - 170\alpha^2 + 249\alpha - 103)k \cdot q}{768k^2} \\ & \left. + \frac{(\alpha - 1)^3(k \cdot q)^3}{8k^2q^2(k - q)^2} + \frac{(\alpha - 1)^2(5\alpha - 3)(k \cdot q)^2}{32k^2q^2} \right]. \end{aligned} \quad (D.1)$$

As integrais escalares nos momentos internos k e q são regularizadas por redução

dimensional e calculadas com o auxílio das formulas apresentadas no apêndice B. Coletionando apenas as partes divergentes de $\Gamma_{AA(5.1a)}$, podemos escrever o resultado

$$\Gamma_{AA(5.1a)} = -\frac{(255\alpha^2 + 320\alpha - 191) g^4 N^2 T_R}{16384\pi^2\epsilon} + \text{termos finitos.} \quad (\text{D.2})$$

Procedendo de modo similar para os outros diagramas na Fig. 5.1, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA(5.1b)} &= g^4 N^2 T_R \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m^2)(q^2 + m^2)[(k+q)^2 + m^2]} \\ &\quad \left[-\frac{3\alpha^3(k \cdot q)^2}{16(k^2 + m^2)q^2} + \frac{\alpha^2(k \cdot q)^3}{8(k^2 + m^2)q^2[(k+q)^2 + m^2]} + \frac{\alpha(36\alpha^2 + 47\alpha + 23)}{512} \right. \\ &\quad + \frac{\alpha(-13\alpha^2 + 35\alpha + 6)(k \cdot q)^2}{256q^2[(k+q)^2 + m^2]} - \frac{3\alpha(\alpha^2 + \alpha + 2)k \cdot q}{512q^2} + \frac{\alpha(7\alpha + 1)k \cdot q}{256(k^2 + m^2)} \\ &\quad - \frac{\alpha(5\alpha^2 + 57\alpha + 36)k \cdot q}{512[(k+q)^2 + m^2]} + \frac{\alpha(\alpha + 1)(k \cdot q)^3}{32(k^2 + m^2)(k+q)^2[(k+q)^2 + m^2]} \\ &\quad \left. + \frac{\alpha(10\alpha - 1)(k \cdot q)^2}{128(k+q)^2[(k+q)^2 + m^2]} + \frac{\alpha(31\alpha - 3)(k \cdot q)^2}{128(k^2 + m^2)[(k+q)^2 + m^2]} \right] \\ &= \frac{\alpha^2 g^4 N^2 T_R}{512\pi^2\epsilon} + \text{termos finitos,} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA(5.1c)} &= g^4 N^2 T_R \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m^2)(q^2 + m^2)[(k-q)^2 + m^2]} \\ &\quad \left[\frac{(\alpha^2 + \alpha + 1)}{4} + \frac{[\alpha(9\alpha^2 + 3\alpha - 4) + 8](k \cdot q)^2}{24(k^2 + m^2)(k-q)^2} - \frac{\alpha(\alpha - 1)k \cdot q}{4q^2} \right. \\ &\quad - \frac{[\alpha(9\alpha^2 + 3\alpha - 10) + 14]k \cdot q}{48(k-q)^2} - \frac{(\alpha - 1)^2(k \cdot q)^2}{4q^2(k-q)^2} + \frac{(\alpha - 1)(k \cdot q)^2}{4(k^2 + m^2)q^2} \\ &\quad \left. - \frac{[\alpha(-9\alpha^2 + 33\alpha + 22) - 14]k \cdot q}{48(k^2 + m^2)} \right] \\ &= -\frac{(\alpha^2 - 3)g^4 N^2 T_R}{256\pi^2\epsilon} + \text{termos finitos,} \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA(5.1d)} &= g^4 N^2 T_R \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m^2)(q^2 + m^2)[(k - q)^2 + m^2]} \\
&\quad \left[-\frac{\alpha^2(k \cdot q)^3}{8(k^2 + m^2)^2(k - q)^2} - \frac{\alpha^2(k \cdot q)^2}{8(k^2 + m^2)^2} - \frac{\alpha(\alpha - 1)(k \cdot q)^2}{4(k^2 + m^2)q^2} - \frac{\alpha(2\alpha + 1)}{4} \right. \\
&\quad - \frac{\alpha[2\alpha(5\alpha - 3) + 11](k \cdot q)^2}{32(k^2 + m^2)(k - q)^2} - \frac{\alpha[2\alpha(5\alpha - 39) + 19]k \cdot q}{64(k^2 + m^2)} + \frac{\alpha^2(\alpha - 1)k \cdot q}{4q^2} \\
&\quad \left. + \frac{\alpha(\alpha - 1)^2(k \cdot q)^2}{4q^2(k - q)^2} + \frac{\alpha[2\alpha(5\alpha - 6) + 19]k \cdot q}{64(k - q)^2} \right] \\
&= \frac{\alpha(\alpha - 3)g^4 N^2 T_R}{256\pi^2\epsilon} + \text{termos finitos,} \tag{D.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA(5.1e)} &= g^4 N^2 T_R \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m^2)(q^2 + m^2)[(k + q)^2 + m^2]} \\
&\quad \left[\frac{(5\alpha^2 - 14\alpha - 1)}{12} + \frac{(\alpha - 1)^2(k \cdot q)^2}{12k^2q^2} + \frac{7(\alpha - 1)^2(k \cdot q)^2}{24k^2(k + q)^2} \right. \\
&\quad + \frac{3(\alpha - 1)^2(k \cdot q)^2}{8q^2(k + q)^2} + \frac{\alpha(\alpha - 1)k \cdot q}{6q^2} + \frac{\alpha(2\alpha + 3)k \cdot q}{6(k + q)^2} + \frac{\alpha(5\alpha + 3)k \cdot q}{12k^2} \\
&= -3 \frac{(\alpha + 1)g^4 N^2 T_R}{256\pi^2\epsilon} + \text{termos finitos,} \tag{D.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA(5.1f)} &= g^4 T_R N^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m^2)(q^2 + m^2)[(k - q)^2 + m^2]} \\
&\quad \left[-\frac{\alpha(\alpha - 1)^2(k \cdot q)^4}{16k^2(k^2 + m^2)q^2(k - q)^2} + \frac{(\alpha^2 + 1)(k \cdot q)^3}{8k^2(k^2 + m^2)(k - q)^2} - \frac{\alpha(2\alpha^2 - 3\alpha + 1)(k \cdot q)^3}{32k^2(k^2 + m^2)q^2} \right. \\
&\quad - \frac{\alpha(11\alpha^2 - 18\alpha + 7)(k \cdot q)^3}{32(k^2 + m^2)q^2(k - q)^2} + \frac{(2\alpha^3 + 6\alpha^2 - 19\alpha + 7)(k \cdot q)^3}{32k^2(k^2 + m^2)(k - q)^2} + \frac{\alpha(\alpha - 3)}{12} \\
&\quad + \frac{\alpha(\alpha - 1)(k \cdot q)^2}{4(k^2 + m^2)q^2} - \frac{(\alpha^2 - 2\alpha - 1)(k \cdot q)^2}{16k^2(k^2 + m^2)} + \frac{(3\alpha^2 - 28\alpha - 1)(k \cdot q)^2}{16(k^2 + m^2)(k - q)^2} \\
&\quad - \frac{\alpha(11\alpha^2 - 35\alpha + 24)(k \cdot q)^2}{64(k^2 + m^2)q^2} - \frac{(\alpha - 1)(18\alpha^2 - 22\alpha - 1)(k \cdot q)^2}{64q^2(k - q)^2} \\
&\quad + \frac{(5\alpha^3 + 22\alpha^2 - 36\alpha + 7)(k \cdot q)^2}{64k^2(k^2 + m^2)} + \frac{(28\alpha^3 - 27\alpha^2 + 27\alpha - 9)(k \cdot q)^2}{64(k^2 + m^2)(k - q)^2} \\
&\quad - \frac{\alpha(\alpha - 1)k \cdot q}{3q^2} + \frac{\alpha(7\alpha + 10)k \cdot q}{12(k - q)^2} + \frac{\alpha(17\alpha - 1)k \cdot q}{16(k^2 + m^2)} + \frac{(29\alpha^3 - 153\alpha^2 + 6\alpha + 3)k \cdot q}{128(k - q)^2} \\
&\quad \left. + \frac{(32\alpha^3 - 4\alpha^2 + 43\alpha - 2)k \cdot q}{128(k^2 + m^2)} - \frac{(54\alpha^3 - 124\alpha^2 + 41\alpha + 1)k \cdot q}{128(k^2 + m^2)q^2} \right] \\
&= -\frac{\alpha(11\alpha^2 - 115\alpha - 36)g^4 N^2 T_R}{4096\pi^2\epsilon} + \text{termos finitos.} \tag{D.7}
\end{aligned}$$

Os diagramas envolvendo o acoplamento entre o supercampo de calibre e os supercampos fantasmas são descritos na Fig. 5.2. Suas contribuições divergentes para Γ_{AA} são dada por

$$\begin{aligned}\Gamma_{AA(5.2a)} &= \frac{\alpha g^4 N^2 T_R}{8} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 (k+q)^2 (q^2 + m^2)} \\ &= -\frac{\alpha g^4 N^2 T_R}{256\pi^2\epsilon} + \text{termos finitos},\end{aligned}\quad (\text{D.8})$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{AA(5.2b)} &= -\frac{(\alpha^2 - 1) g^4 N^2 T_R}{4} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{k^2 - k \cdot q}{q^2 (k^2 + m^2)^2 (k+q)^2} \\ &= -\frac{(\alpha^2 - 1) g^4 N^2 T_R}{256\pi^2\epsilon} + \text{termos finitos},\end{aligned}\quad (\text{D.9})$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{AA(5.2c)} &= \frac{\alpha(\alpha - 1) g^4 N^2 T_R}{4} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{k \cdot q}{q^2 (k^2 + m^2)^2 (k-q)^2} \\ &= \frac{\alpha(\alpha - 1) g^4 N^2 T_R}{256\pi^2\epsilon} + \text{termos finitos},\end{aligned}\quad (\text{D.10})$$

$$\Gamma_{AA(5.2d)} = \Gamma_{AA(5.2e)} = 0. \quad (\text{D.11})$$

Somando-se todas as contribuições do setor de calibre puro, temos como resultado a Eq. (??) .

Os diagramas envolvendo os supercampos de matéria são descritos na Fig. 5.3. Seguindo o procedimento delineado acima, os resultados para as contribuições divergentes resultam em

$$\begin{aligned}\Gamma_{AA(5.3a)} &= \frac{\alpha g^4 T_R}{N} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{k \cdot q}{(k^2 + M^2) (q^2 + m^2) [(k+q)^2 + M^2]^2} \\ &= \alpha \frac{g^4 T_R}{2N} \frac{1}{32\pi^2\epsilon} + \text{termos finitos},\end{aligned}\quad (\text{D.12})$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{AA(5.3b)} &= \frac{g^4 (N^2 - 1) T_R}{N} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[\frac{(\alpha - 2) q^2 - 2(\alpha - 1) k \cdot q}{(k^2 + M^2) q^2 (q^2 + m^2) [(k-q)^2 + M^2]} \right] \\ &= -\frac{(N^2 - 1) g^4 T_R}{N} \frac{1}{32\pi^2\epsilon} + \text{termos finitos},\end{aligned}\quad (\text{D.13})$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA(5.3c)} &= \frac{g^4 (N^2 - 1) T_R}{2N} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{2(\alpha - 1)k \cdot q - (\alpha - 2)q^2}{(k^2 + M^2) q^2 (q^2 + m^2) [(k - q)^2 + M^2]} \\
&= \frac{(N^2 - 1)g^4 T_R}{2N} \frac{1}{32\pi^2\epsilon} + \text{termos finitos} ,
\end{aligned} \tag{D.14}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA(5.3d)} &= -\alpha g^4 N T_R \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{q^2 + k \cdot q}{(k^2 + M^2) q^2 (q^2 + m^2) [(k + q)^2 + M^2]} \\
&= -\alpha N \frac{g^4 T_R}{2} \frac{1}{32\pi^2\epsilon} + \text{termos finitos} ,
\end{aligned} \tag{D.15}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA(5.3e)} &= \frac{g^4 (N^2 - 2) T_R}{2N} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{(\alpha + 1)}{(k^2 + M^2) (q^2 + M^2) [(k - q)^2 + m^2]} \\
&= (\alpha + 1) \frac{(N^2 - 2)g^4 T_R}{2N} \frac{1}{32\pi^2\epsilon} + \text{termos finitos} ,
\end{aligned} \tag{D.16}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA(5.3f)} &= -\frac{g^4(\alpha + 1) (N^2 - 2) T_R}{4N} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + M^2) (q^2 + M^2) [(k + q)^2 + m^2]} \\
&= -(\alpha + 1) \frac{(N^2 - 2)g^4 T_R}{4N} \frac{1}{32\pi^2\epsilon} + \text{termos finitos} ,
\end{aligned} \tag{D.17}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA(5.3g)} &= -\frac{g^4 N T_R}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\alpha k \cdot q}{(k^2 + m^2)^2 (q^2 + M^2) [(k - q)^2 + M^2]} \\
&= -\alpha \frac{N g^4 T_R}{4} \frac{1}{32\pi^2\epsilon} + \text{termos finitos} ,
\end{aligned} \tag{D.18}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA(5.3h)} &= -\frac{g^4 N T_R}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{k \cdot q}{(k^2 + m^2)^2 (q^2 + M^2) [(k + q)^2 + M^2]} \\
&= \frac{N g^4 T_R}{4} \frac{1}{32\pi^2\epsilon} + \text{termos finitos} .
\end{aligned} \tag{D.19}$$

Referências Bibliográficas

- [1] S. Coleman and J. Mandula, *All possible symmetries of the s-matrix*, Phys. Rev. 159, 1251 (1967).
- [2] Y. A. Golfand, E. S. Lichtman, JETP Lett. 13, 323 (1971).
- [3] J. Wess, B. Zumino, *A Lagrangian model invariante under supergauge transformations*, Phys. Lett. 49B, 52 (1974); J. Wess, B. Zumino, *Supergauge transformations in four dimensions*, Nucl. Phys. B70, 39 (1974).
- [4] R. Haag, J. T. Lopuszanski, M. F. Sohnius, *All possible generators of supersymmetries of the S-Matrix*, Nucl. Phys. B88, 257 (1975).
- [5] M. F. Sohnius, P. C West, *Conformal invariance in $N = 4$ supersymmetric Yang-Mills theory*, Phys. Lett.B 100, 245 (1981); P. S. Howe, K. S. Stelle, P. K. Townsend, *Miraculous ultraviolet cancellations in supersymmetry made manifest*, Nucl. Phys. B236, 125 (1984); L. Brink, O. Lindgren, B.E.W. Nilsson, *The ultraviolet finiteness of the $N = 4$ Yang-Mills theory*, Phys. Lett. B123, 323 (1983).
- [6] W. Heisenberg, *The universal length appearing in the theory of elementary particles*, Ann. Phys. Ser5,32, 20-33, (1938).
- [7] H. Snyder, *Quantized space-time*, Phys. Rev. 72, 68 (1947); H. Snyder, *The electromagnetic field in quantized space-time*, Phys. Rev. 72, 68 (1947).
- [8] N. Seiberg, E. Witten, *String theory and noncommutatividade geometry*, JHEP9909, 032 (1999), hep-th/9908142.
- [9] S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. B. Roberts, *The Quantum Structure of the Spacetime at the Planck Scale and Quantum Fields*, Commun. Math. Phys. 172, 187 (1995), hep-th/0303037.
- [10] B. A. Campbell, K. Kaminsky, *Noncommutative linear sigma models*, Nucl. Phys. B606, 613 (2001), hep-th/0102022.

- [11] F. J. Petriello, *The Higgs mechanism in non-commutative gauge theories*, Nucl. Phys. B601, 169 (2001), hep-th/0101109.
- [12] E. T. Akhmedov, P. DeBoer, G. W. Semenoff, *Non-commutative Gross-Neveu model at large N*, JHEP06, 009 (2001), hep-th/0103199; E. T. Akhmedov, P. DeBoer, G. W. Semenoff, *Running couplings and triviality of field theories on noncommutative spaces*, Phys. Rev. D 64, 065005 (2001), hep-th/0010003.
- [13] J. Gomis, T. Meheh, *Space-time noncommutative field theories and unitarity*, Nucl. Phys. B591, 265 (2000), het-th/0005129.
- [14] H. O. Girotti, M. Gomes, V. O. Rivelles, A. J. da Silva, *A Consistent Noncommutative Field Theory: the Wess-Zumino Model*, Nucl.Phys. B587, 299 (2000), hep-th/0005272; A. F. Ferrari, H. O. Girotti, M. Gomes, A. Yu. Petrov, A. A. Ribeiro, A. J. da Silva, *On the consistency of the three-dimensional noncommutative supersymmetric Yang-Mills theory*, Phys.Lett. B601, 88 (2004), hep-th/0407064; A. F. Ferrari, M. Gomes, A. Yu. Petrov, A. J. da Silva, *Supersymmetric non-Abelian noncommutative Chern-Simons theory*, Phys. Lett. B 638, 275 (2006), hep-th/0511059; B. Charneski, A. F. Ferrari, M. Gomes, *The three-dimensional noncommutative Gross-Neveu model*, J. Phys. A40, 3633 (2007), hep-th/0605239; A. F. Ferrari, A. C. Lehum, A. J. da Silva, F. Teixeira, *The supersymmetric $(2+1)D$ noncommutative $CP^{(N-1)}$ model in the fundamental representation*, J. Phys. A40, 7803 (2007), hep-th/0612223; A. F. Ferrari, M. Gomes, A. C. Lehum, A. Yu. Petrov, A. J. da Silva, *Perturbative finiteness of the three-dimensional Susy QED to all orders*, Phys. Rev. D77, 065005 (2008), hep-th/0709.3501; B. Charneski, M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento, A. J. da Silva, *The Slavnov-Taylor identities for the $2+1$ dimensional noncommutative $CP^{(N-1)}$ model*, Phys. Rev. D82, 105029 (2010), hep-th/1007.1645.
- [15] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and supergravity*, Princeton, USA: Univ. Pr, 1992.
- [16] P. C. West, *Introduction to supersymmetry and supergravity*, World Scientific Pub Co Inc, 1990.
- [17] I. L Buchbinder, S. M. Kuzenko, *Ideas and methods of supersymmetry and supergravity, or, A walk through superspace*, Taylor & Francis, 1998.
- [18] S. J. Gates, Marcus T. Grisaru, M. Rocek, W. Siegel, *Superspace Or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry*, Front.Phys. 58 (1983), hep-th/0108200.
- [19] F.R. Ruiz, P. van Nieuwenhuizen, *Lectures on supersymmetry and supergravity in $(2+1)$ -dimensions and regularization of supersymmetric gauge theories*, Recent Developments in Gravitation and Mathematical Physics, Science Network Publishing, 1998.

- [20] F.A. Berezin, N. Mugibayashi, A. Jeffrey. *The method of second quantization*, Academic press New York, 1966.
- [21] A. Salam, J. A. Strathdee, *Supergauge transformations*, Nucl. Phys.B76, 477 (1974).
- [22] M. R. Douglas, N. A. Nekrasov, *Noncommutative field theory*, Rev. Mod. Phys. 73, 977 (2001), hep-th/0106048; R. J. Szabo, *Quantum field theories on noncommutative spaces*, Phys. Rep. 378, 207 (2003), hep-th/0109162; M. Gomes, *Renormalization in noncommutative field theory*, Proceedings of the XI Jorge André Swieca Summer School, Particles and Fields, edited by G. A. Alves, O. J. P. Éboli e V. O. Rivelles, World Scientific Singapore, (2002); H. O. Girotti, *Noncommutative quantum field theories*, American Journal of Phys. 2004 Volume 72 pp. 608, hep-th/0301237.
- [23] M. Gomes, V.G. Kupriyanov, *Position-dependent noncommutativity in quantum mechanics*, Phys.Rev. D79, 125011 (2009) , math-ph/0902.3252; M. Gomes, V.G. Kupriyanov, A.J. da Silva, *Noncommutativity due to spin*, Phys.Rev. D81, 085024 (2010), hep-th/1002.4173; H. Falomir, J. Gamboa, J. Lopez-Sarrion, F. Mendez, P. A. G. Pisan, *Magnetic-Dipole Spin Effects in Noncommutative Quantum Mechanics*, Phys.Lett. B680, 384 (2009), hep-th/0905.0157.
- [24] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover, New York, 1931.
- [25] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk and N. Seiberg, *Noncommutative Perturbative Dynamics*, JHEP0002, 020 (2000), hep-th/9912072.
- [26] David J. Griffiths, *Introduction to quantum mechanics*, 2nd ed., Person education, 2005.
- [27] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, 7th Edition, Academic Press, New York, 2007.
- [28] S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts, *The quantum structure of spacetime at Plank scale and quantum fields*, Commun. Math. Phys.172, 187 (1995), hep-th/0303037.
- [29] D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen, G. Piacitelli, *On the unitarity problem in space-time noncommutative theories*, Phys. Lett.B533, 178 (2002), hep-th/0201222.
- [30] Y. Liao, K. Sibold, *Time-ordered perturbation theory on noncommutative space-time 2. Unitarity*, Eur. Phys. J.C25, 469 (2002), hep-th/0206011.
- [31] L.Bonora, M.Salizzoni, *Renormalization of noncommutative U(N) gauge theories*, Phys. Lett. B504, 80 (2001), hep-th/0011088; J. Madore, S. Schraml, P. Schupp, J.

- Wess, *Gauge Theory on Noncommutative Spaces*, Eur. Phys. J.C16, 161 (2000), hep-th/0001203; K. Matsubara, *Restrictions on Gauge Groups in Noncommutative Gauge Theory*, Phys. Lett. B482, 417 (2000), hep-th/0003294.
- [32] S. Dimopoulos, H. Georgi, *Softly broken supersymmetry and $SU(5)$* , Nucl. Phys. B 193, 150 (1981); S. Dimopoulos, S. Raby, F. Wilczek, *Supersymmetry and the scale of unification*, Phys. Rev. D24, 1681 (1981).
- [33] I. Affleck, M. Dine, N. Seiberg, *Supersymmetry Breaking by Instantons*, Phys. Rev. Lett. 51, 1026 (1983); I. Affleck, M. Dine, N. Seiberg, *Dynamical supersymmetry breaking in supersymmetric QCD*, Nucl. Phys. B 241, 493 (1984); I. Affleck, M. Dine, N. Seiberg, *Dynamical supersymmetry breaking in four dimensions and its phenomenological implications*, Nucl. Phys. B 256, 557 (1985).
- [34] Ann E. Nelson, N. Seiberg, *R-symmetry breaking versus supersymmetry breaking*, Nucl. Phys. B 416, 46 (1994), hep-ph/9309299.
- [35] E. Witten, *Constraints on supersymmetry breaking*, Nucl. Phys. B 202, 253 (1982).
- [36] A. V. Smilga, *Witten index in supersymmetric 3d theories revisited*, JHEP01, 086 (2010), hep-th/09100803.
- [37] L. O'Raifeartaigh, *Spontaneous symmetry breaking for chirals scalar superfields*, Nucl. Phys. B 96, 331 (1975); P. Fayet, J. Iliopoulos, *Spontaneously broken supergauge symmetries and goldstone spinors*, Phys. Lett. B 51, 461 (1974).
- [38] S. Ray, *Some properties of meta-stable supersymmetry-breaking vacua in Wess-Zumino models*, Phys. Lett. B 642, 137 (2006), hep-th/0607172; K. Intriligator, N. Seiberg, D. Shih, *Supersymmetry breaking, R-symmetry breaking and metastable vacua*, JHEP0707, 017 (2007), hep-th/0703281.
- [39] M. Grisaru, M. Rocek, W. Siegel, *Improved methods for supergraphs*, Nucl. Phys. B 159, 429 (1979).
- [40] M. Drees, R. Godbole, P. Roy, *Theory and phenomenology of sparticles*, World Scientific Publishing, Singapore, 2004.
- [41] L. Alvarez-Gaume, D. Z. Freedman, M. T. Grisaru, *Spontaneous breakdown of supersymmetry in two-dimensions*, HUTMP 81/B111.
- [42] A. F. Ferrari, E. A. Gallegos, M. Gomes, A. C. Lehum, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, A. J. da Silva, *Coleman-Weinberg mechanism in a three-dimensional supersymmetric Chern-Simons-matter model*, Phys. Rev. D 82, 025002 (2010), hep-th/10040982.

- [43] S. Coleman, E. Weinberg, *Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking*, Phys. Rev. D 7, 1888 (1973).
- [44] I.L. Buchbinder, B.S. Merzlikin, I.B. Samsonov, *Two-loop effective potentials in general $N = 3, d = 3$ chiral superfield model* Nucl. Phys. B 860, 87 (2012), [het-th/12015579](#).
- [45] C. P. Burgess, *Supersymmetry breaking in three dimensions*, Nucl. Phys. B 216 , 459 (1983).
- [46] D.G.C. McKeon and K. Nguyen, *Yukawa coupling in three dimensions. II*, Phys. Rev. D 60, 085009 (1999).
- [47] A.C. Lehman, *Dynamical generation of mass in the $D=(2+1)$ Wess-Zumino model*, Phys. Rev. D. 77, 067701 (2008), [het-th/08010411](#).
- [48] G. Fogelman, K. Viswanathan, *Effective potential for chiral supersymmetric models*, Phys. Rev. D 30, 1364 (1984).
- [49] R. Jackiw, *Functional evaluation of the effective potential*, Phys. Rev. D 9, 1686 (1974).
- [50] J. L. Boldo, L. P. Colatto, M. A. De Andrade, O. M. Del Cima, J. A. Helayël-Neto, *Superpropagators for explicitly broken 3D-supersymmetric theories*, Phys. Lett. B 468, 96 (1999), [hep-th/9908190](#).
- [51] E. A. Gallegos, A. J. da Silva, *Supergraph techniques for $D=3, N=1$ broken supersymmetric theories*, Phys. Rev. D 84, 065009 (2011), [hep-th/11021989](#).
- [52] W. Siegel, *Unextended superfields in extended supersymmetry*, Nucl. Phys. B 156, 135 (1979).
- [53] A.C. Lehman, *$D=(2+1)$ $O(N)$ Wess-Zumino model in a large N limit*, Phys. Rev. D. 84, 107701 (2011), [het-th/11103332](#).
- [54] F. A. Dilkes, D. G. C. McKeon, K. Nguyen, *The yukawa coupling in three dimensions*, Phys. Rev. D 57, 1159 (1998), [hep-th/9705198](#).
- [55] F. Ruiz Ruiz, P. van Nieuwenhuizen, *BRS symmetry versus supersymmetry in Yang-Mills Chern-Simons theory*, Nucl.Phys. B486, 443 (1997), [hep-th/9609074](#).
- [56] W. Siegel, *Supersymmetric Dimensional Regularization via Dimensional Reduction*, Phys.Lett. B84, 193 (1979).
- [57] W. Siegel, *Inconsistency of Supersymmetric Dimensional Regularization*, Phys.Lett. B94, 37 (1980).

- [58] G. 't Hooft, M. Veltman, *Regularization and renormalization of gauge fields*, Nucl. Phys. B44, 189 (1972).
- [59] A. F. Ferrari, H. O. Girotti, M. Gomes, A. A. Ribeiro, A. Yu. Petrov, A.J. da Silva, *On the finiteness of noncommutative supersymmetric QED\$_3\$ in the covariant superfield formulation*, Phys. Lett. B577, 83 (2003), hep-th/0309193.
- [60] J. Gomis, T. Meheh, *Spacetime noncommutative field theories and unitarity*, Nucl. Phys. B591, 265 (2000), het-th/0005129.
- [61] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, *Renormalization of gauge theories*, Ann. Phys. 98, 287 (1976); M. Z. Iofa, I. V. Tyutin, *Gauge invariance of spontaneously broken non-Abelian theories in the Bogolyubov-Parasyuk-Hepp-Zimmermann method*, Theor. Math. Phys. 27, 316 (1976).
- [62] A. A. Slavnov, *Ward identities in gauge theories*, Theor. Math. Phys. 10, 99 (1973); J. C. Taylor, *Ward identities and charge renormalization of the Yang-Mills field*, Nucl. Phys. B33, 436 (1971).
- [63] T. Muta, *Foundations of quantum chromodynamics*, 3rd edition, World Scientific Publishing (2010).
- [64] Marcelo Otavio Caminha Gomes, *Teoria quântica dos campos*, Edusp (2002).
- [65] A. F. Ferrari, *SusyMath: A Mathematica package for quantum superfield calculations*, Comput. Phys. Commun. 176, 334 (2007).
- [66] A. C. Lehum, A. F. Ferrari, M. Gomes, A. J. da Silva, *Perturbative finiteness of the three-dimensional Susy QED to all orders* Phys. Rev. D77, 065005 (2008), hep-th/07093501.
- [67] P N Tan, B. Tekin, Y. Hosatani, *Spontaneous symmetry breaking at two loop in 3-d massless scalar electrodynamics*, Phys. Lett. B 388, 611 (1996), hep-th/9607233; P N Tan, B. Tekin, Y. Hosatani, *Maxwell-Chern-Simons Scalar Electrodynamics at Two Loop*, Nucl. Phys. B 502, 483 (1997), hep-th/9703121.
- [68] R. V. Maluf, A. J. da Silva, *Two-loop effective potential for the Wess-Zumino model in 2+1 dimensions*, hep-th/12071706.
- [69] R. V. Maluf, *Noncommutative Space Corrections on the Klein-Gordon and Dirac Oscillators Spectra*, Int. J. Mod. Phys. A, Vol. 26, No. 29, 4991 (2011), hep-th/11012801.
- [70] B. Charneski, M. Gomes, R. V. Maluf, A. J. da Silva, *Lorentz violation bounds on Bhabha scattering*, Phys. Rev. D86, 045003 (2012), hep-ph/12040755.

- [71] R. Casana, M. M. Ferreira Jr., R. V. Maluf, F. E. P. dos Santos, *Effects of a CPT-even and Lorentz-violating nonminimal coupling on the electron-positron scattering*, Phys. Rev. D86, 125033 (2012), hep-th/12126230.