



Università degli Studi di Firenze  
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

# Il Modello dell'Ottica Lineare di DAΦNE

Tesi di Laurea in Fisica

*laureando:*  
Gabriele Benedetti

*relatore:*  
Dott.sa Caterina Biscari

*correlatore:*  
Prof. Mario Calvetti

Firenze, 24 Aprile 2001  
Anno Accademico 1999-2000



# Presentazione

Questa tesi è dedicata all'ottica lineare dei due Anelli Principali della  $\phi$ -factory Dafne dei Laboratori Nazionali di Frascati. Riporto in questo lavoro lo studio e l'attività svolta da me all'interno della Divisione Acceleratori dei Laboratori.

Il mio compito è stato quello di migliorare l'accuratezza del modello teorico che descrive l'ottica dei due anelli di accumulazione per individuare ed eventualmente correggere le cause dell'accoppiamento residuo dei moti di betatrone, una delle possibili cause di limite di luminosità dell'acceleratore.

A tal fine ho svolto attività sperimentale nella sala controllo di Dafne, partecipando ai turni dedicati allo studio di macchina, particolarmente alle misure di orbita, funzioni ottiche, frequenze di betatrone, emittanze.

In seguito ho elaborato tali misure per determinare un modello degli anelli tramite la scelta dei parametri fisici che descrivono la struttura magnetica dell'acceleratore.



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Ottica lineare</b>	<b>1</b>
2.1	Equazioni di moto . . . . .	3
2.2	Accoppiamento di betatron . . . . .	19
<b>3</b>	<b>La <math>\Phi</math>-factory Dafne</b>	<b>25</b>
3.1	La luminosità . . . . .	27
3.2	I parametri del <i>Collider</i> . . . . .	29
3.3	Struttura degli Anelli Principali . . . . .	32
3.4	Le Regioni di Interazione . . . . .	35
3.5	Caratteristiche degli elementi magnetici . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Misure dell'ottica di Dafne</b>	<b>50</b>
4.1	Misure di orbite . . . . .	50
4.2	Misure delle funzioni ottiche . . . . .	55
4.3	Misure di emittanza . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Il modello dell'ottica lineare con MAD</b>	<b>63</b>

5.1	Descrizione degli elementi fisici per MAD . . . . .	64
5.2	Il modello di MAD . . . . .	70
5.3	Necessità di un modello più accurato . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Ottimizzazione del modello con LOCO</b>	<b>76</b>
6.1	Modello dalle Matrici di Risposta . . . . .	77
6.2	Analisi degli errori . . . . .	82
6.3	Risultati . . . . .	87
<b>7</b>	<b>Il sestupolo nel Correttore “C”</b>	<b>101</b>
7.1	Richiamo delle misure magnetiche . . . . .	103
7.2	Il sestupolo nel Magnete Correttore “C” . . . . .	105
7.3	Spostamento dell’orbita e frequenze di betatron . . . . .	106
<b>Conclusioni</b>		<b>110</b>
<b>A</b>	<b>Matrici di trasporto degli elementi magnetici</b>	<b>112</b>
<b>B</b>	<b>Scomposizione in Valori Singolari</b>	<b>118</b>
<b>Bibliografia</b>		<b>121</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

In un anello di accumulazione le particelle, guidate dalla struttura magnetica dell'acceleratore, eseguono moti di oscillazione trasversi al piano dell'orbita di equilibrio, detti oscillazioni di betatrone. I campi magnetici guida dei dipoli e dei quadrupoli sono lineari rispetto alla posizione delle particelle nei piani trasversi e determinano le grandezze fisiche che descrivono l'ottica del fascio: gli invarianti (emittanze) e le ampiezze dei moti (funzioni di betatrone e dispersione) che forniscono le dimensioni del fascio punto per punto dell'anello, e le frequenze di betatrone. Nel Capitolo 1 di questa tesi introduco le equazioni di moto e il formalismo dell'ottica lineare con particolare attenzione all'accoppiamento dei moti di betatrone che determina le dimensioni verticali e l'orientazione del profilo trasverso del fascio e ricopre particolare importanza a Dafne per ottimizzare la luminosità geometrica.

Per progettare e controllare l'ottica lineare di un anello è necessario un modello matematico con il quale calcolare sia le emittanze, le frequenze di betatrone e le funzioni ottiche punto per punto della macchina fissata una certa struttura magnetica, sia le

variazioni da imporre ai campi o ai gradienti magnetici di ciascun elemento (tramite le correnti di alimentazione) per modificare i valori delle emittanze, delle frequenze o delle funzioni ottiche in punti determinati. Nella fase di progetto e installazione il campo e la lunghezza di ogni elemento magnetico di Dafne sono stati misurati e il campo magnetico caratteristico è stato calibrato rispetto alle correnti di alimentazione.

Sulla base di queste misure è stato messo a punto dal gruppo di Dafne un primo modello dei due anelli di accumulazione utilizzando MAD (*Methodical Accelerator Design*), il programma di simulazione di acceleratori più diffuso sviluppato al CERN di Ginevra.

Oltre ai campi lineari dei dipoli e dei quadrupoli sono presenti anche elementi magnetici non lineari, come i sestupoli, e termini magnetici di ordine superiore. I contributi di questi elementi nel modello della macchina possono dipendere anche dalle condizioni operative, in particolare dall'orbita di riferimento. Nel caso di Dafne vanno considerati gli effetti foceggianti dei campi di bordo dei dipoli curvanti che dipendono dagli angoli con cui entra e esce il fascio rispetto alle facce laterale dei magneti, i termini di quadrupolo efficace dovuti alla traiettoria ondulata in presenza di un sestupolo nei magneti *wiggler*<sup>1</sup>, le calibrazioni dei quadrupoli delle Regioni di Interazione dove a causa della separazione dei fasci le traiettorie passano alcuni centimetri fuori dall'asse magnetico e infine le sorgenti di accoppiamento residuo dovuto a disallineamenti dei magneti o a spostamenti dell'orbita reale rispetto all'orbita di progetto in presenza di termini magnetici sestupolari.

Nel Capitolo 2 spiego le caratteristiche particolari della  $\phi$ -factory Dafne e la funzione degli elementi magnetici degli Anelli Principali. Questo capitolo, basato sulle Note Tecniche di Dafne sulle misure magnetiche, aggiunge un contributo di considerazioni

---

<sup>1</sup>Con il termine *wiggler* si indica un tipo di magnete dipolare “ondulatore” utilizzato in Dafne per diminuire i tempi di smorzamento e aumentare l'emittanza del fascio.

utili per la comprensione dei limiti e dei punti critici del modello. Per ciascun tipo di elemento riporto le caratteristiche magnetiche cercando di dare un'interpretazione fisica alle correzioni da apportare ad alcuni dei parametri del modello.

Quindi nel Capitolo 3 descrivo la strumentazione e il sistema di acquisizione delle misure delle orbite, della dispersione, delle frequenze e delle funzioni di betatrone, delle emittanze e dell'accoppiamento di betatrone.

In seguito nel Capitolo 4 descrivo come ciascun elemento viene modellizzato in MAD e come il modello è stato aggiustato variando i parametri con un fit delle misure delle funzioni di betatrone e di dispersione che ho eseguito utilizzando alcuni comandi dello stesso programma MAD. Il limite di questo modello è che il numero di parametri da variare è circa uguale al numero di misure da riprodurre e quindi ha bisogno di ulteriori verifiche su misure indipendenti da quelle del fit. Per ridurre il numero dei parametri liberi, tutti gli elementi magnetici appartenenti a una stessa famiglia sono descritti dagli stessi parametri e non si tiene conto di eventuali differenze tra di essi. Inoltre la precisione delle misure delle funzioni di betatrone usate per questo modello è tale che non è possibile ricavare da esse informazioni per individuare piccole sorgenti di accoppiamento dei moti di betatrone.

Misure molto più accurate dell'ottica sono costituite invece delle cosiddette matrici di risposta dell'orbita degli anelli. Queste sono date dalla differenza di orbita del fascio ottenuta imprimendo una piccola variazione al campo di ciascun dipolo correttore. Ciascuna matrice di risposta contiene migliaia di dati misurati che dipendono dalla struttura magnetica di tutto l'anello.

Si è quindi rivelato particolarmente efficace l'uso del programma LOCO (*Linear Optics from Closed Orbit*) che illustro nel Capitolo 5. Dati i campi magnetici e i gradienti dei magneti di un anello di accumulazione, dalle equazioni di moto di una particella è

possibile calcolare la matrice di risposta. L’analisi di LOCO rovescia questo processo e calcola la struttura magnetica di un anello, cioè i parametri del modello che lo descrive, data la matrice di risposta. Per fare ciò i parametri descrittivi del nostro modello per MAD vengono variati da LOCO fino a che le orbite della matrice calcolata convergono a quelle della matrice misurata. Le misure delle orbite di risposta sono sensibili anche a piccole sorgenti di accoppiamento e inoltre l’elevato numero di dati misurati forniti dalla matrice di risposta di un anello permette di variare indipendentemente i parametri di ogni singolo elemento appartenente a una stessa famiglia di magneti.

Dall’analisi delle matrici di risposta relative a diverse configurazioni sia dell’anello degli elettroni che di quello dei positroni ho ottenuto informazioni molto accurate sui quadrupoli, i dipoli e i *wiggler* che ho confrontato con le misure magnetiche che erano state eseguite su questi elementi magnetici. Particolarmenete utile è stata la scoperta di una sorgente non trascurabile di accoppiamento nei cosiddetti dipoli correttori “C”, dovuta al passaggio fuori asse in presenza di un termine di sestupolo.

Nel Capitolo 6 infine mi soffermo sul sestupolo dei magneti “C”, confrontando ulteriori misure magnetiche e ottiche che confermano il risultato di LOCO e indicano che il contributo sestupolare dei “C” è importante sia per l’accoppiamento sia per lo studio delle nonlinearità.

# Capitolo 2

## Ottica lineare

In questo capitolo presento i principi dell'ottica lineare degli anelli di accumulazione di elettroni con lo scopo di introdurre il formalismo e le funzione fisiche necessarie alla comprensione delle caratteristiche dell'ottica di Dafne e del modello a cui mi sono dedicato.

### Anelli di accumulazione di elettroni

In un acceleratore circolare gli elettroni iniettati nella camera da vuoto sono guidati da un campo magnetico guida con proprietà di focaggio che mantengono gli elettroni intorno a un'orbita chiusa e li inducono a eseguire *oscillazioni di betatrone* (trasverse: radiali e verticali) intorno ad essa.

In un anello a *funzioni separate* la funzione di curvare le particelle e quella di focalizzarle è svolta da elementi magnetici distinti: i dipoli curvanti e i quadrupoli.

Durante il moto di rivoluzione gli elettroni perdono una (piccola) frazione della loro

energia per *radiazione di sincrotrone*. Questa è emessa in avanti entro un angolo di circa  $1/\gamma = m_e c^2/E$ . L'impulso è quindi diminuito sia nella direzione longitudinale al moto che trasversa.

Per gli elettroni accumulati questa perdita è compensata dall'energia fornita da una *Cavità a Radio-Frequenza* che accelera imprimendo impulso solo nella direzione longitudinale, provocando il restringimento delle dimensioni trasverse del fascio. Il campo elettrico periodico accelerante accumula gli elettroni in pacchetti dentro ai quali ciascuna particella carica oscilla in posizione longitudinale e in *energia relativa* a un'ideale particella di riferimento sincrona con la radio-frequenza.

La perdita di energia per radiazione di sincrotrone insieme al guadagno di energia dalla cavità a radio-frequenza danno luogo a uno *smorzamento di radiazione* di tutte le ampiezze di oscillazione (betatrone e sincrotrone): la traiettoria di ogni elettrone si avvicina via via a quella di una particella ideale di riferimento al centro del pacchetto che si muove con energia e velocità costante lungo l'orbita di progetto.

Lo smorzamento comunque si arresta a causa di una continua eccitazione delle oscillazioni dovuta alle *fluttuazioni quantistiche* della perdita di energia, cioè al fatto che la radiazione di sincrotrone non è emessa in modo continuo ma in fotoni di energia discreta.

Si raggiunge quindi un equilibrio tra eccitazione quantistica e smorzamento di radiazione, ottenendo una distribuzione statisticamente stazionaria delle ampiezze e fasi di oscillazione degli elettroni in un pacchetto. Il pacchetto assume cioè la stessa distribuzione trasversa ad ogni successivo passaggio in qualsiasi punto fissato.

Fino qui gli *effetti di singola particella* (elettroni non interagenti fra loro), che sono i responsabili principali delle proprietà di un fascio di elettroni accumulato.

L'ottica lineare, di cui richiameremo i principi nel seguito dell'introduzione, riguarda

specificamente le proprietà foceggianti dell'acceleratore. L'argomento di questa tesi tratta questo ambito nel caso di Dafne<sup>1</sup>.

## 2.1 Equazioni di moto

### Sistema di coordinate e approssimazione lineare

Considereremo sempre *elettroni ultrarelativistici*<sup>2</sup>, per i quali  $E = cp$ .

L'*orbita ideale di progetto* in un anello di accumulazione è una traiettoria *chiusa giacente sul piano orizzontale* composta da una sequenza di tratti diritti e archi di cerchio, corrispondenti alle sezioni rette e ai magneti curvanti della macchina. I magneti sono alimentati in modo che un elettrone con energia nominale  $E_0 = ecB_0\rho$  - essendo  $B_0$  il campo diretto perpendicolarmente al piano dell'orbita e  $\rho$  il raggio di curvatura dell'orbita di progetto<sup>3</sup> - una volta partito con le condizioni iniziali opportune si muove sempre lungo l'orbita ideale.

La posizione di questa speciale particella è parametrizzata dalla *coordinata curvilinea (azimutale) s* che la individua lungo l'orbita di progetto.

Tutte le altre particelle si muovono sotto l'azione del campo su traiettorie stabili (quasi chiuse) vicino all'orbita ideale. La loro posizione è descritta in un sistema di *coordinate cartesiane locali* ( $x, y$ ) (radiale e verticale) relative all'orbita ideale (Figura 2.1). Le coordinate  $x$  e  $y$  delle particelle dovranno essere molto minori del raggio locale di curvatu-

---

<sup>1</sup>Per una trattazione più dettagliata sull'ottica lineare degli acceleratori si può fare riferimento ai testi [13, 14, 27, 33] in bibliografia.

<sup>2</sup>Una trattazione del tutto identica vale ovviamente anche per i positroni con il segno opportuno per la carica elettrica.

<sup>3</sup>La quantità  $B_0\rho$  è detta *rigidità magnetica* della particella ed è usata spesso come fattore di normalizzazione dei campi magnetici di un acceleratore. Per Dafne  $B_0\rho = E_0/ec = 1.70 \text{ Tm}$ .

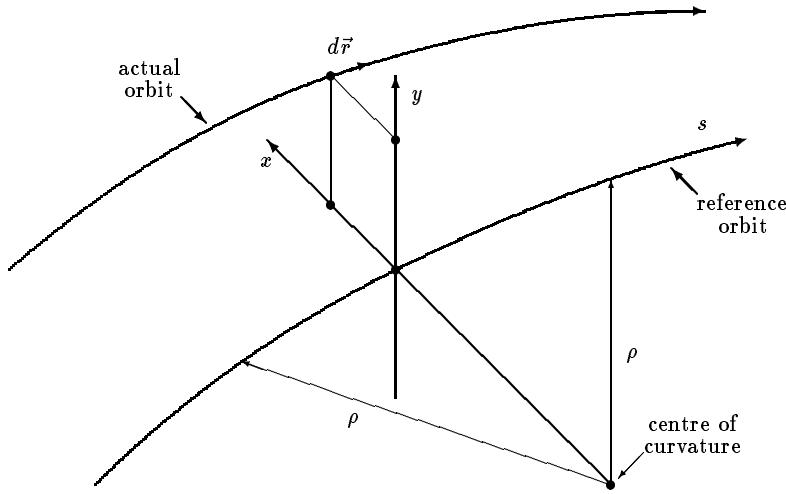


Figura 2.1: Sistema di riferimento locale.

ra  $\rho$  della traiettoria, in modo che considerando le variazioni del campo magnetico vicino all'orbita ideale, si possano prendere solo i termini lineari in  $x$  e  $y$  (*approssimazione lineare*).

## Equazioni di moto

Poiché l'orbita di progetto è assunta piana e orizzontale, il campo magnetico  $B_0$  deve essere puramente *verticale lungo tutta l'orbita*. Si assume inoltre che il campo sia sempre *trasverso* (si trascurano tutti gli effetti di bordo dei magneti) e *simmetrico rispetto al piano orizzontale*. In queste ipotesi dalle equazioni di Maxwell si ha:  $\partial B_x / \partial x = -\partial B_y / \partial y = 0$  e  $\partial B_y / \partial x = \partial B_x / \partial y$ ; di conseguenza considerando le componenti del campo magnetico agenti su un elettrone nella posizione  $(s, x, y)$  si trovano

le equazioni di moto nel piano trasverso [14, 27]:

$$x'' + k_x(s)x = \frac{1}{\rho} \frac{\delta E}{E_0} \quad \text{e :} \quad (2.1)$$

$$y'' + k_y(s)y = 0 \quad (2.2)$$

dove con l'apice ('') si intende la derivazione rispetto alla coordinata  $s$ ,  $\rho$  è il raggio di curvatura locale dell'orbita ideale cioè  $\rho(s) = E_0/qcB_0(s)$  e  $\delta E/E_0$  è lo spostamento relativo di energia rispetto all'energia nominale, mentre:

$$k_x(s) = \frac{1}{\rho^2} + \frac{qc}{E_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad \text{e :} \quad (2.3)$$

$$k_y(s) = -\frac{qc}{E_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad (2.4)$$

Notiamo che nella nostra approssimazione lineare *i moti in x e y sono indipendenti.*

Un'altra importante proprietà viene dal fatto che nei quadrupoli le costanti per il moto radiale  $k_x$  e per quello verticale  $k_y$  hanno sempre segno opposto. Quindi un quadrupolo F (foceggiante nel piano orizzontale) sarà defoceggiante nel piano verticale e viceversa.

## Separazione dei moti radiali: funzione di dispersione

L'equazione *radiale* (2.1) in  $x$  è un'equazione differenziale lineare non omogenea, la soluzione sarà la composizione di due moti:

$$x(s) = x_\epsilon(s) + x_\beta(s) \quad (2.5)$$

Come soluzione particolare  $x_\epsilon(s)$  si sceglie una curva *chiusa* spostata che è l'orbita di equilibrio per gli elettroni di *energia spostata*,  $x_\beta(s)$  (soluzione dell'omogenea associata) descrive dunque le *oscillazioni libere di betatrone* intorno a questa orbita.  $x(s)$  è quindi soluzione se sono soddisfatte entrambe:

$$x_\epsilon'' + k_x(s)x_\epsilon = \frac{1}{\rho} \frac{\delta E}{E_0} \quad \text{e :} \quad (2.6)$$

$$x_\beta'' + k_x(s)x_\beta = 0 \quad (2.7)$$

Lo spostamento  $x_\epsilon$  è proporzionale alla deviazione di energia  $\delta E$ , quindi:

$$x_\epsilon(s) = \eta(s) \frac{\delta E}{E_0} \quad (2.8)$$

La funzione  $\eta(s)$  è detta *funzione di dispersione* e soddisfa:

$$\eta'' + k_x(s)\eta = \frac{1}{\rho} \quad (2.9)$$

La funzione di dispersione ha le dimensioni di una lunghezza, è *periodica* con periodo pari alla lunghezza  $L$  dell'anello ( $\eta(s+L) = \eta(s)$ ,  $\eta'(s+L) = \eta'(s)$ ) ed è caratteristica della struttura magnetica dell'intero anello. La dispersione entra in gioco anche nella compensazione tra smorzamento di sincrotrone e eccitazione quantistica dei moti di betatrone, determinando le dimensioni trasverse del fascio.

Per quanto riguarda il moto *verticale*, l'equazione (2.2) in  $y$  invece avrà solo una soluzione del tipo (2.7) e *dispersione nulla* avendo supposto l'orbita di progetto piana.

## Oscillazioni di betatrone

Le equazioni omogenee (2.2) e (2.7) possono essere genericamente scritte entrambe come:

$$z'' + k(s)z = 0 \quad (\text{Equazione di Hill}) \quad (2.10)$$

$k(s)$  è una funzione periodica, che descrive l'intensità di focaggio lungo l'orbita. La soluzione generale dell'equazione di Hill *non è in generale periodica* in  $s$  ed è del tipo<sup>4</sup>:

$$z(s) = A\sqrt{\beta(s)} \cos(\mu(s) + \mu_0) \quad (2.11)$$

e la derivata prima:

$$z'(s) = -\frac{A}{\sqrt{\beta(s)}}[\alpha(s) \cos(\mu(s) + \mu_0) + \sin(\mu(s) + \mu_0)] \quad (2.12)$$

---

<sup>4</sup>Assumiamo il caso di strutture magnetiche con soluzioni stabili, altrimenti la funzione di betatrone della macchina non è definita.

dove  $\beta(s)$  è detta *funzione di betatron* (“funzione beta”), ha le dimensioni di una lunghezza, è periodica con periodo  $L$ , dipende dalla configurazione totale dell’anello e si dimostra [14] che deve soddisfare :

$$2\beta\beta'' - \beta'^2 + 4k\beta^2 - 4 = 0 \quad (2.13)$$

$\alpha(s)$  è definita:

$$\alpha(s) = -\frac{1}{2}\beta'(s) \quad (2.14)$$

e  $\mu(s)$  è l’*avanzamento di fase* di betatrone:

$$\mu(s) = \int_0^s \frac{d\bar{s}}{\beta(\bar{s})} \quad (2.15)$$

La soluzione generale dell’equazione di Hill è dunque un’oscillazione pseudo-armonica; ampiezza e lunghezza d’onda dipendono dalla coordinata  $s$  e sono entrambe date in termini della funzione beta:

$$\text{ampiezza} \propto \sqrt{\beta(s)} ; \lambda(s) = 2\pi\beta(s) \quad (2.16)$$

Si può ragionevolmente intuire, e lo studio dell’andamento qualitativo dell’equazione (2.13) lo conferma, che la funzione beta orizzontale sarà massima nei quadrupoli F (foceggianti nel piano orizzontale) e minima nei quadrupoli D (defoceggianti). Riportiamo come esempio in Figura 2.2 le funzioni di betatrone orizzontale e verticale  $\beta_x$  e  $\beta_y$  nell’anello degli elettroni di Dafne.

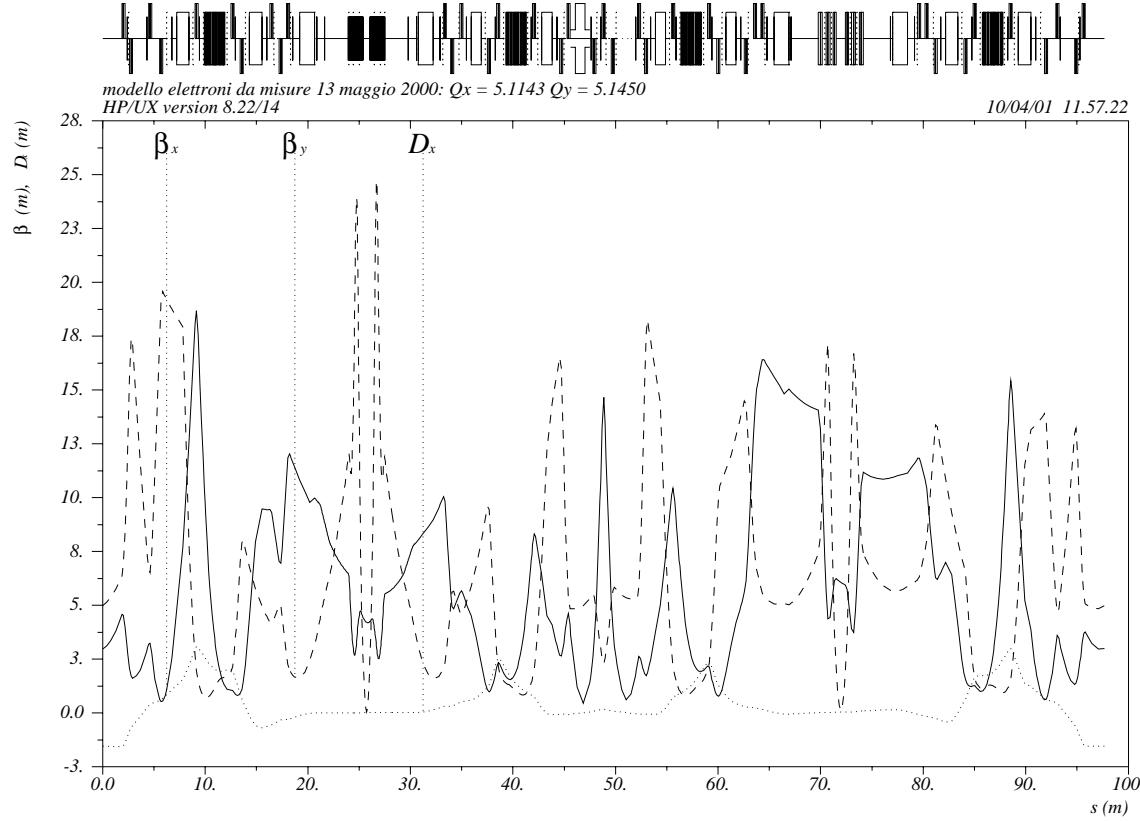


Figura 2.2: Un esempio delle funzioni beta orizzontale e verticale e della dispersione calcolate per l’anello di elettroni di Dafne

## Numero di betatron $Q$ : risonanze e punto di lavoro

Si definisce il *numero di betatrone*  $Q$  come il numero di oscillazioni compiute da una particella in un giro completo dell’anello. L’avanzamento di fase di un elettrone in una rivoluzione completa dell’anello sarà  $\mu = 2\pi Q$ , quindi:

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_{s_0}^{s_0+L} \frac{ds}{\beta(s)} \quad (2.17)$$

Poiché  $\beta(s)$  è periodica, questo integrale è lo stesso per ogni  $s_0$ . Il numero di betatrone

è dunque un parametro descrittivo della struttura dell'intero anello e in generale per i moti radiali e orizzontali  $Q_x$  e  $Q_y$  saranno diversi.

L'importanza maggiore dei due numeri di betatrone  $Q_x$  e  $Q_y$  è legata all'esistenza di risonanze che modificano la dinamica delle particelle. Per esempio se  $Q$  è un intero, il periodo di oscillazione di betatrone è un multiplo del periodo di rivoluzione, e la minima imperfezione nel campo magnetico eccita una risonanza delle oscillazioni con una crescita esponenziale dell'ampiezza.

Le risonanze devono ovviamente essere evitate in entrambe le oscillazioni di betatrone, radiali e verticali. Si trova che compaiono risonanze quando  $Q_x$  e  $Q_y$  soddisfano:

$$mQ_x + nQ_y = r \quad (2.18)$$

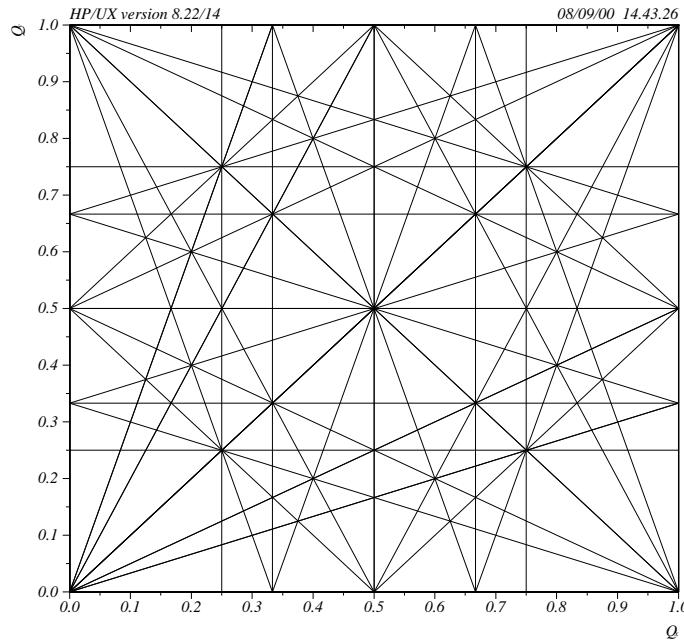


Figura 2.3: Griglia delle risonanze per Dafne fino al quarto ordine sul diagramma  $Q_x$ ,  $Q_y$ .

dove  $m$ ,  $n$  e  $r$  sono interi e  $|m| + |n| = N$  è l'*ordine di risonanza*. Gli effetti più significativi sono dati dalle risonanze di ordine più basso. Il *punto di lavoro* dell'anello di accumulazione è specificato fissando  $Q_x$  e  $Q_y$ , che devono essere scelti in modo da evitare importanti risonanze. Nella Figura 2.3 sono indicate le linee delle risonanze di ordine più basso.

## Errori di campo e Orbite chiuse

Se in un breve intervallo azimutale  $\Delta s$  intorno al punto  $s_0$  (un tratto in cui l'avanzamento di fase di betatrone sia trascurabile) il campo magnetico subisce una variazione di una quantità  $\delta B_0$ , lo spostamento di orbita chiusa di equilibrio che si ricava dalla soluzione di un'equazione di moto del tipo (2.1) è [14, 27]:

$$z(s) = \frac{\theta_0 \sqrt{\beta_0 \beta(s)}}{2 \sin(\pi Q)} \cos(\mu(s) - \mu_0 - \pi Q) \quad (2.19)$$

dove  $\theta_0 = (ec \delta B_0 \Delta s)/E_0$  è la deflessione impressa alla traiettoria nel punto  $s_0$  dalla variazione di campo  $\delta B_0$ . L'orbita chiusa dipende quindi dall'intera struttura dell'anello tramite la funzione beta e l'avanzamento di fase.

È questo l'effetto che ad esempio dà un magnete correttore (§ 3.5).

Per una distribuzione arbitraria di errori di campo  $\delta B(s)$  lungo tutto un anello, ad ogni azimuth  $s$  si somma la differenza di orbita chiusa causata dagli errori a tutte le altre posizioni:

$$z(s) = \frac{ec\sqrt{\beta(s)}}{2E_0 \sin(\pi Q)} \oint \delta B_0(\bar{s}) \sqrt{\beta(\bar{s})} \cos(\mu(s) - \mu(\bar{s}) - \pi Q) d\bar{s} \quad (2.20)$$

In un acceleratore ci sono sempre errori di campo distribuiti lungo tutto l'anello dovuti a imperfezioni dei magneti, a campi dispersi, a errori di allineamento degli elementi magnetici... per cui l'orbita reale di equilibrio si scosta sempre dall'orbita ideale di progetto. L'orbita risultante viene corretta con un'opportuna combinazione dei magneti correttori disposti lungo l'anello. Per ottimizzare l'orbita, oltre a ridurre lo scarto rispetto all'orbita nominale di progetto, si deve trovare un compromesso con una serie di effetti come il flusso di particelle di fondo nei rivelatori sperimentali, gli effetti non-lineari dei campi magnetici, l'accoppiamento di betatron... che si presentano a causa di inevitabili disallineamenti e imperfezioni dell'acceleratore. A Dafne si è osservata inoltre una sensibile dipendenza della struttura ottica della macchina (frequenze di betatrone, dispersione...) anche dalla scelta dell'orbita che determina sia gli angoli di incidenza del fascio all'entrata e all'uscita dei magneti e quindi le loro proprietà focegianti. Nel caso di Dafne l'orbita di equilibrio scelta si scosta dall'orbita nominale di progetto mediamente di 1 mm.

## Invarianti ed emittanza

Poiché nell'equazione di Hill non compaiono termini dissipativi, l'energia delle oscillazioni di betatrone si conserva; questo corrisponde all'esistenza di un invariante del moto rappresentato dalla costante di integrazione  $A$  della (2.11), infatti si trova [14] che:

$$A^2 = \gamma(s)z^2(s) + 2\alpha(s)z(s)z'(s) + \beta(s)z'^2(s) \quad (2.21)$$

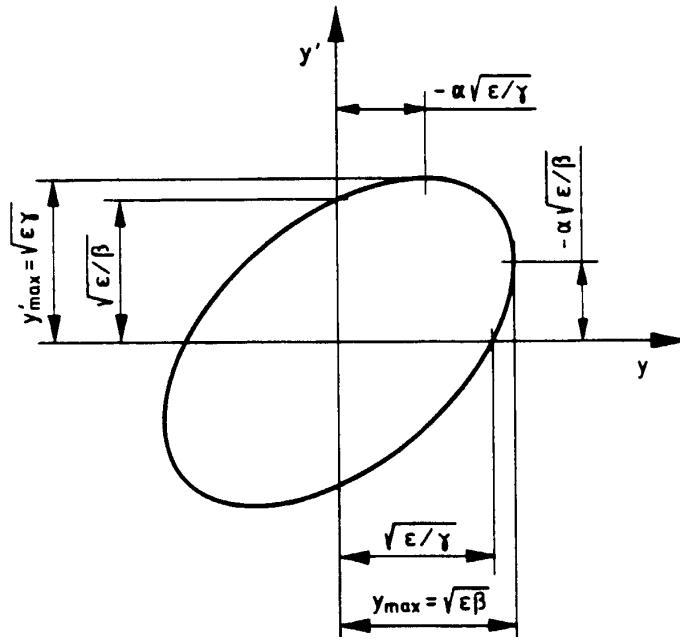


Figura 2.4: L'ellisse dell'Eq. 2.21 in termini dei parametri  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\varepsilon = A^2$ .

dove  $\beta$  e  $\alpha$  sono quelle definite nelle (2.13)-(2.14) e:

$$\gamma(s) = \frac{1 + \alpha^2(s)}{\beta(s)} \quad (2.22)$$

$A$  è chiamato *invariante di Courant-Snyder*<sup>5</sup>,  $\beta(s)$ ,  $\alpha(s)$  e  $\gamma(s)$  sono anche dette *funzioni di Twiss* e descrivono tutte le proprietà dell'ottica dell'anello.

Nota la struttura magnetica dell'anello (e quindi le funzioni ottiche  $\beta(s)$ ,  $\alpha(s)$  e  $\gamma(s)$ ), se si conoscono le coordinate  $z_0$  e  $z'_0$  di un elettrone in un qualsiasi punto  $s = s_0$ , l'invariante  $A$  è fissato e, tramite la (2.11), si conosce la traiettoria giro dopo giro in tutto l'anello. Inoltre fissato un azimuth  $s$ , giro dopo giro le coordinate nello spazio

---

<sup>5</sup>L'esistenza dell'invariante di Courant-Snyder è la conseguenza del *Teorema di Liouville* che afferma [17] che per un sistema di particelle sottoposte a campi di forze conservativi, la densità di particelle nello spazio delle fasi è costante.

delle fasi  $(z, z')$ <sup>6</sup> della particella giacciono sempre su un ellisse di area  $\pi A^2$  (Figura 2.4) definito dalla (2.21).

Si può dimostrare che è possibile definire l'*emittanza*  $\epsilon$  di un fascio di elettroni come l'area dello spazio delle fasi  $(z, z')$  che comprende le traiettorie nello spazio delle fasi contenute entro *una* deviazione standard della funzione di distribuzione delle ampiezze<sup>7</sup>.

La traiettoria di una particella può essere scritta come:

$$z(s) = A\sqrt{\beta(s)} \cos(\mu(s) + \mu_0) \quad (2.23)$$

quindi la massima posizione trasversa di è:

$$z_{max}(s) = A\sqrt{\beta(s)} \quad (2.24)$$

Poichè ogni particella ha una diversa fase  $\mu_0$ , è facile vedere che la dimensione dell'inviluppo che contiene le particelle entro una deviazione standard della distribuzione delle ampiezze è:

$$\sigma_\beta = \sqrt{\epsilon\beta(s)} \quad (2.25)$$

Le varie traiettorie delle particelle hanno in aggiunta la componente del moto dovuta alla dispersione dell'energia del fascio. Statisticamente si deve sommare la dimensione  $\sigma_\beta$  dovuta alle oscillazioni di betatrone in quadratura con la dimensione dovuta alla

<sup>6</sup>Generalmente si considerano la pendenza  $z' = dz/ds$  piuttosto che la variabile canonica  $p_z$  per la quale nel nostro caso vale:  $p_z = m\beta\gamma c z'$  ( $\beta$  e  $\gamma$  di Lorentz).

<sup>7</sup>Generalmente l'emittanza di un fascio di elettroni è definita a meno di un fattore  $\pi$ : *area ellisse* =  $\pi\epsilon$  ed  $\epsilon$  si misura in  $mm \cdot mrad$ .

dispersione (2.8):

$$\sigma_{tot} = \sqrt{\beta \epsilon + \left( \eta \frac{\Delta E}{E_0} \right)^2} \quad (2.26)$$

dove  $\Delta E/E_0$  è la dispersione naturale di energia del fascio.

Questa trattazione vale tanto per il moto radiale che verticale. Nel caso di orbita piana però, non è presente nessuna dispersione verticale e di conseguenza in un fascio di elettroni l'eccitazione quantistica darebbe un contributo bassissimo all'emittanza verticale di equilibrio. Tuttavia è sempre presente un piccolo accoppiamento tra il moto di betatroncione verticale e orizzontale che allarga l'emittanza verticale.

È possibile fare uso del trattamento per moto accoppiato e trovare gli invarianti per le coordinate dei modi normali del sistema come indicato nel § 2.2.

## Le matrici di trasporto

La soluzione generale della 2.1 può anche essere scritta nella forma:

$$x(s) = C(s)x_0 + S(s)x'_0 + D(s)\frac{\delta E}{E_0} \quad (2.27)$$

Le funzioni C e S sono funzioni di tipo coseno e seno, soluzioni dell'equazione omogenea (2.7) con condizioni iniziali:

$$C(0) = 1, \quad C'(0) = 0; \quad S(0) = 0, \quad S'(0) = 1 \quad (2.28)$$

e  $D$  è una soluzione particolare della (6) con  $\delta E/E_0 = 1$  e condizioni iniziali:

$$D(0) = D'(0) = 0 \quad (2.29)$$

La pendenza di questa traiettoria è data da:

$$x'(s) = C'(s)x_0 + S'(s)x'_0 + D'(s)\frac{\delta E}{E_0} \quad (2.30)$$

e le equazioni della traiettoria per  $x$ ,  $x'$ , e  $\delta E/E_0$  possono essere scritte in forma matriciale come:

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ \frac{\delta E(s)}{E_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s) & S(s) & D(s) \\ C'(s) & C'(s) & D'(s) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ \frac{\delta E_0}{E_0} \end{pmatrix}^8. \quad (2.31)$$

Se si trascurano le deviazioni di energia si può studiare la soluzione del moto, per le coordinate  $x$ ,  $x'$ , dovuta unicamente alle oscillazioni di betatrone.

L'invariante  $A$  e la costante di integrazione  $\mu_0$  nella soluzione dell'equazione di Hill (2.11) e (2.12) dipendono dalle condizioni iniziali  $z(s_0) = z_0$ ,  $z'(s_0) = z'_0$ . La soluzione

<sup>8</sup>La funzione  $\eta(s)$  e  $\eta'$  della (2.9) possono essere viste come le componenti dell'autovettore della matrice di trasferimento  $3 \times 3$  corrispondente all'autovalore  $+1$  con  $\frac{\delta E}{E_0} = 1$ , cioè come l'orbita di equilibrio dovuta alla deviazione relativa di energia unitaria:

$$\begin{pmatrix} C & S & D \\ C' & C' & D' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Intorno a questa avvengono le oscillazioni di betatrone. La matrice  $3 \times 3$  è utile quando si conoscono il momento e le coordinate iniziali di una particella e si vuole sapere come si propagano lungo l'anello.

dell'equazione di Hill può quindi essere scritta nella forma:

$$\begin{pmatrix} z(s) \\ z'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}(s, s_0) & m_{12}(s, s_0) \\ m_{21}(s, s_0) & m_{22}(s, s_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z'_0 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

ovvero:

$$\underline{z}(s) = M(s, s_0) \underline{z}_0 \quad (2.33)$$

dove  $M(s, s_0)$  rappresenta la *matrice di trasferimento* del tratto da  $s_0$  a  $s$ .  $M(s, s_0)$  ha determinante unitario (o antiunitario) ed è simplettica<sup>9</sup>.

Considerando la matrice di trasporto per un giro completo dell'anello:

$$M(s + L, s) = T(s) = \begin{pmatrix} m_{11}(s) & m_{12}(s) \\ m_{21}(s) & m_{22}(s) \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

si trova che la condizione di stabilità per il moto è:

$$|Tr(T)| < 2 \quad (2.35)$$

---

<sup>9</sup>Si definisce matrice simplettica  $2 \times 2$  una matrice  $M$  per cui vale:

$$M^t S M = S$$

con:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le trasformazioni simplettiche conservano i volumi nello spazio delle fasi. La definizione si estende analogamente a matrici  $2n \times 2n$ .

e che quindi la matrice  $T$  può essere sempre scritta nella forma:

$$T(s) = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha(s) \sin \mu & \beta(s) \sin \mu \\ -\gamma(s) \sin \mu & \cos \mu - \alpha(s) \sin \mu \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

dove  $\beta$ ,  $\alpha$  e  $\gamma$  sono ancora i parametri di Twiss, mentre  $\mu$  è l'avanzamento di fase di betatron lungo l'intero anello:

$$\mu = 2\pi Q = \int_{s_0}^{s_0+L} \frac{ds}{\beta(s)} \quad (2.37)$$

mentre la matrice di trasporto da  $s_0$  a  $s$  della (2.32) può essere espressa solo in termini delle funzioni ottiche iniziali e finali<sup>10</sup>:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_0}} [\cos \phi(s) + \alpha_0 \sin \phi(s)] & \sqrt{\beta(s)\beta_0} \sin \phi(s) \\ \frac{(\alpha(s)-\alpha_0) \cos \phi(s) - (1+\alpha_0\alpha(s)) \sin \phi(s)}{\sqrt{\beta(s)\beta_0}} & \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_0}} [\cos \phi(s) - \alpha(s) \sin \phi(s)] \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

con  $\phi(s) = \mu(s) - \mu_0$  avanzamento di fase tra le due posizioni.

---

<sup>10</sup>Dalla definizione (2.21) dell'invariante di Courant-Snyder si trova inoltre che i parametri di Twiss si trasformano da  $s$  a  $s_0$  secondo:

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{11}m_{21} & m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21} & -m_{12}m_{22} \\ m_{21}^2 & -2m_{21}m_{22} & m_{22}^2 \end{pmatrix}_{s,s_0} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}_{s_0}$$

è importante quindi notare che il problema del calcolo dei parametri di Twiss e il problema del calcolo delle matrici di trasporto della traiettoria di una particella sono equivalenti.

## 2.2 Accoppiamento di betatrone

### Moto accoppiato

Nelle precedenti sezioni abbiamo considerato equazioni di moto che possono essere trattate come casi separati per le due coordinate  $x$  e  $y$ . Questo significa che nel piano trasverso la matrice di trasporto è diagonale a blocchi:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}_{s,s_0} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_{s_0} \quad (2.39)$$

con  $M$  e  $N$  matrici  $2 \times 2$  del tipo (2.36) che trasportano i moti orizzontali e verticali. Se nella struttura magnetica si inseriscono elementi (quadrupoli ruotati, solenoidi...) che accoppiano le due componenti del moto, la matrice di trasferimento  $T$   $4 \times 4$  assume la forma:

$$T = \begin{pmatrix} M & m \\ n & N \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

con  $M$ ,  $m$ ,  $n$  e  $N$  matrici  $2 \times 2$  non nulle, e le equazioni del moto di betatrone (2.7) e (2.2) si modificano:

$$\begin{aligned} x'' + k_x^2 x &= -b y' - k y \\ y'' + k_y^2 y &= b x' - k x \end{aligned} \quad (2.41)$$

dove:

$$k = \frac{qc}{E_0} \frac{\partial B_x}{\partial x} = -\frac{qc}{E_0} \frac{\partial B_y}{\partial y} \quad \text{e} \quad b = \frac{qc}{E_0} B_{solen} \quad (2.42)$$

Per capire quale effetto produce la presenza di una sorgente di accoppiamento, consideriamo un elemento di lunghezza  $s$  sottile (cioè lungo cui l'avanzamento di fase sia trascurabile) e vediamo ad esempio come viene trasferito parte del moto orizzontale alla componente verticale nel passaggio attraverso tale elemento.

Per un quadrupolo ruotato di  $45^\circ$  (*skew*) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ks & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -ks & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ -ksx \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

la divergenza  $y'$  del moto verticale viene variata, producendo un allargamento o restringimento delle dimensioni verticali del fascio all'uscita dallo *skew*. A causa delle oscillazioni di betatrone, nei punti dell'anello in *quadratura di fase* con lo *skew* non avremo invece nessuna variazione di  $y'$  ma uno spostamento verticale  $y$ , ottenendo quindi una *rotazione* del fascio nel piano trasverso. Analogamente per un solenoide sottile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & bs & 0 \\ 0 & 1 & 0 & bs \\ -bs & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -bs & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -bsx \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

viene quindi trasmesso uno spostamento verticale alla particella. Questo porta a una rotazione del fascio nel piano  $x, y$  all'uscita dal solenoide e ad un'allargamento invece nei punti in quadratura di fase. È dunque importante riuscire a controllare opportunamente l'accoppiamento di betatrone sia per avere buona sovrapposizione dei fasci nei punti di interazione, ottimizzarando così la luminosità, sia per avere una vita media dei fasci dovuta all'effetto Touschek (vedi pagina 30) sufficientemente lunga.

### La matrice $C$ di accoppiamento

Per la matrice  $T$  di trasferimento per un giro in presenza di accoppiamento è sempre possibile trovare una trasformazione  $V$  di coordinate dallo spazio delle fasi  $X \equiv (x, x'; y, y')$  alle nuove coordinate  $W \equiv (a, a'; b, b')$  dei *modi normali* del sistema:

$$W = V^{-1}X \quad (2.45)$$

che cambia la matrice  $T$  in una nuova matrice  $U$  diagonale a blocchi, e ricondursi al caso di moti disaccoppiati.  $T$  allora sarà:

$$T = VUV^{-1} \quad (2.46)$$

dove:

$$U = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

con  $A$  matrici di trasporto del primo modo normale del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \mu_a + \alpha_a \sin \mu_a & \beta_a \sin \mu_a \\ -\gamma_a \sin \mu_a & \cos \mu_a - \alpha_a \sin \mu_a \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

e analogamente  $B$ .  $V$  è la “rotazione simplettica” (trasformazione canonica), per passare dalle coordinate  $X$  dello spazio delle fasi del laboratorio alle coordinate dei modi normali  $W$ . Seguendo Sagan e Rubin [26]:

$$V = \begin{pmatrix} \gamma I & C \\ -C^+ & \gamma I \end{pmatrix}^{11} \quad (2.49)$$

con:

$$\gamma^2 + \det C = 1 \quad (2.50)$$

Il parametro  $\gamma$  (da non confondere con  $\gamma$  di Twiss) dà l'accoppiamento complessivo e varia, come la matrice  $T$ , punto per punto dell'anello ( $0 < \gamma^2 \leq 1$ ); mentre la matrice  $C$   $2 \times 2$ :

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

---

<sup>11</sup> $C^+$  indica la simplettica coniugata  $C^+ \equiv SC^tS^t$ :

$$C^+ = \begin{pmatrix} c_{22} & -c_{12} \\ -c_{21} & c_{11} \end{pmatrix}$$

dà lo specifico modo di accoppiamento. Per esempio nei punti con  $\alpha_a = \alpha_b = 0$ ,  $c_{11}$  e  $c_{22}$  sono gli angoli di cui sono ruotati i modi normali  $a$  e  $b$  rispetto agli assi del laboratorio  $x$  e  $y$  [1, 6, 22], mentre  $c_{12}$  dà la frazione delle ampiezze di  $x$  e  $y$  accoppiata con quelle di  $a'$  e  $b'$  [22] e di conseguenza si associa all'allargamento della sezione del fascio nello spazio reale.

### Le emittanze $\epsilon_x$ e $\epsilon_y$

Nel caso di moto accoppiato si ha l'esistenza di due invarianti  $A_a$  e  $A_b$  [16] del tipo di Courant-Snyder (2.21) per i *modi normali* (vedi pagina 21) che permettono di definire le due emittanze  $\epsilon_x$  e  $\epsilon_y$ . Queste si ottengono mediando  $A_a^2$  e  $A_b^2$  lungo tutto l'anello e su tutte le particelle [30].

Se l'anello non presenta accoppiamento si ha  $\gamma = 1$  ovunque e quindi:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \epsilon_0 \\ \epsilon_y &= 0\end{aligned}\tag{2.52}$$

altrimenti:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \overline{\gamma^2} \epsilon_0 \\ \epsilon_y &= (1 - \overline{\gamma^2}) \epsilon_0\end{aligned}\tag{2.53}$$

come accade nei casi reali. Quindi:

$$\epsilon_x + \epsilon_y = \epsilon_0\tag{2.54}$$

$\epsilon_0$  è l'emittanza naturale del fascio e si conserva.

Il rapporto fra le emittanze  $k = \epsilon_y/\epsilon_x$ , importante in Dafne per ottenere la luminosità di progetto (Equazione (3.4)), si identifica con:

$$k = \frac{1}{\gamma^2} - 1 \quad (2.55)$$

ed è un parametro caratteristico dell'intera struttura dell'anello.

# Capitolo 3

## La $\Phi$ -factory Dafne

Il *collider* elettroni-positroni DAFNE (*Double Annular  $\Phi$ -factory for Nice Experiments*), in funzione dal 1998 presso i Laboratori Nazionali di Frascati, è un acceleratore ad alta luminosità [31, 32] ottimizzato all’energia di risonanza del mesone  $\Phi$  (1.020 *Gev* c.m.).

L’elevata produzione delle  $\Phi$  permette principalmente di studiare il sistema dei mesoni  $K$ . In particolare con l’esperimento KLOE (*K Long Experiment*) si vuole ottenere una misura del parametro  $\Re(\frac{\epsilon'}{\epsilon})$ , che caratterizza la violazione diretta della simmetria CP nel sistema dei  $K$  neutri, con un’accuratezza pari a  $10^{-4}$ , superiore a quella ottenuta negli esperimenti svolti in altri laboratori fino ad oggi.

In questo capitolo, partendo dalle prestazioni per cui è stato progettato Dafne, riporto le caratteristiche degli Anelli Principali e le proprietà magnetiche degli elementi istallati che ho raccolto per comprendere e ottimizzare il modello dell’ottica lineare.

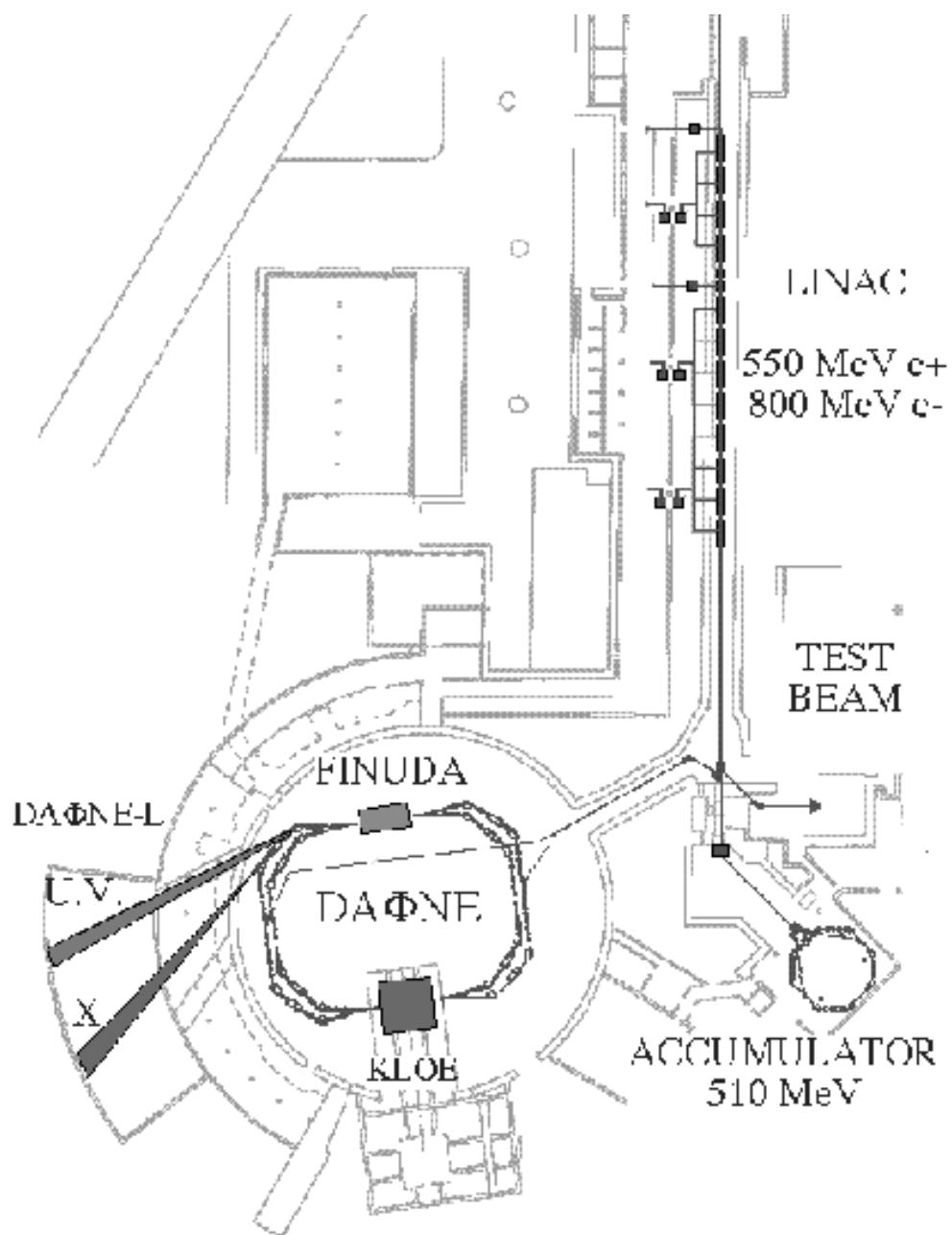


Figura 3.1: Il complesso della  $\Phi$ -factory Dafne a Frascati.

### 3.1 La luminosità

Nei *collider* elettrone-positrone i due fasci sono immagazzinati in due anelli distinti o in un singolo anello e circolano con velocità opposte. Le particelle sono raggruppate in pacchetti e la frequenza di interazione in ciascun punto di incrocio è proporzionale al numero di pacchetti.

La luminosità<sup>1</sup> in ciascun punto di interazione per due fasci con gli stessi parametri caratteristici è data da:

$$L = h f_{riv} \frac{N^2}{4\pi\sigma_x^*\sigma_y^*} \quad (3.1)$$

dove  $h$  è il numero dei pacchetti,  $f_{riv}$  la frequenza di rivoluzione,  $N$  il numero di particelle per pacchetto,  $\sigma_x^*$  e  $\sigma_y^*$  le dimensioni quadratiche medie orizzontali e verticali nel punto di interazione di un fascio gaussiano.

Quando due pacchetti sono in collisione le particelle di un fascio sentono la forza elettromagnetica dell'altro fascio e i due fasci si focheggiano reciprocamente causando uno spostamento (positivo) delle frequenze di betatron  $\Delta Q_{x,y}$  (*beam-beam tune shift*). La parte lineare di questa forza focheggiante è descritta dal parametro (adimensionale) di *tune shift lineare*  $\xi_{x,y}$  dato da:

$$\xi_{x,y} = \frac{r_e N \beta_{x,y}^*}{2\pi\gamma\sigma_{x,y}^*(\sigma_x^* + \sigma_y^*)} \quad (3.2)$$

---

<sup>1</sup>Sia  $\sigma$  la sezione d'urto di un processo che può avvenire nella collisione fra particelle appartenenti ai due fasci, il tasso di conteggi  $R$  per quel dato processo è dato da:

$$R = L \cdot \sigma$$

dove  $L$  è la luminosità della macchina, cioè il tasso di conteggi in unità di sezione d'urto.

dove  $\gamma$  è l'energia dell'elettrone in unità della sua massa a riposo,  $r_e$  il raggio classico dell'elettrone,  $\beta_{x,y}^*$  il valore della funzione di betatrone orizzontale (verticale) nel punto di interazione.

Se il *collider* ha più punti di incrocio gli effetti dovuti all'interazione fascio-fascio si sommano.

È noto per esperienza che in ogni *collider* elettron-positrone,  $\xi$  non può superare un valore massimo  $\xi_{max}$  oltre il quale la perturbazione dovuta a un fascio sull'altro è così forte da cambiare in modo significativo la distribuzione di equilibrio delle particelle, provocando una saturazione della luminosità con la corrente accumulata o una vita media del fascio troppo breve o un flusso di particelle di fondo nei rivelatori degli esperimenti non tollerabile.

Nella scelta dei parametri di un *collider* si può imporre ottimizzare il *beam-beam tune shift* nei due piani contemporaneamente con:

$$\xi_x = \xi_y = \xi \quad (3.3)$$

Tale condizione si ottiene scegliendo:

$$k = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = \frac{\beta_y^*}{\beta_x^*} = \frac{\sigma_y^*}{\sigma_x^*} \quad (3.4)$$

dove  $k$  è il *coefficiente di accoppiamento*, che può assumere valori tra 0 e 1, e  $\epsilon_{x,y}$  sono le emittanze del fascio.

Dalle relazioni precedenti la luminosità può essere scritta nella forma:

$$L = \pi \left( \frac{\gamma}{r_e} \right)^2 \frac{h f_{riv} \xi^2 \epsilon_0 (1 + k)}{\beta_y^*} \quad (3.5)$$

e il parametro di *tune shift*:

$$\xi = \frac{r_e N}{2\pi\gamma\epsilon_0} \quad (3.6)$$

dove  $\epsilon_0 = \epsilon_x + \epsilon_y$  è l'emittanza naturale del fascio.

Il massimo valore di  $\xi$  sostenibile dalla macchina non può essere calcolato dalla teoria. Tuttavia da un confronto con i *collider*  $e^+/e^-$  esistenti è ragionevole per Dafne assumere  $\xi_{max} \approx 0.04$ . *Questo fissa un limite empirico al rapporto tra il numero di particelle  $N$  e l'emittanza del fascio  $\epsilon_0$*  (Equazione (3.6)), cioè *un limite alla densità trasversale del fascio*. Poichè  $N$  e  $\epsilon_0$  non possono crescere indefinitamente a causa dei limiti di instabilità e dell'apertura fisica degli anelli,  $\xi_{max}$  stabilisce un limite sulla luminosità.

## 3.2 I parametri del *Collider*

L'equazione (3.5) mostra che per aumentare la luminosità si può agire diminuendo  $\beta_y^*$  (e  $\beta_x^*$  di conseguenza) e aumentando il numero  $h$  di pacchetti accumulati per fascio.

Per potere aumentare la frequenza di collisione senza aumentare il numero di punti di incrocio, si è scelto di fare circolare *gli elettroni e i positroni in due anelli separati* con due regioni di interazione in comune, dove le traiettorie dei due fasci si incrociano con un angolo nel piano orizzontale 12.5 *mrad* rispetto all'asse della camera, in modo da evitare collisioni parassite fuori del punto di interazione. Con questa soluzione è possibile accumulare un numero di pacchetti pari al numero armonico della cavità a

radio-frequenza ( $\omega_{rf} = h\omega_{rivoluzione}$ ).

Per quanto riguarda la funzione beta verticale nel punto di interazione<sup>2</sup>, questa non può essere minore della lunghezza del pacchetto  $\sigma_z^*$ . Inoltre per ottenere  $\beta_y^*$  molto basso, occorre un focaggio molto forte che si può ottenere soltanto mettendo un quadrupolo molto forte vicino all'IP, che inevitabilmente va inserito all'interno del rivelatore sperimentale (vedi § 3.4).

Il focaggio forte ha lo svantaggio di aumentare il cromatismo dell'anello (la dipendenza delle frequenze di betatron dall'energia della particella) che deve essere corretto installando nell'anello anche dei forti sestupoli che riducono però l'apertura dinamica<sup>3</sup>.

Di conseguenza il valore di  $\beta_y^*$  non può essere arbitrariamente basso e la scelta fatta è:

$$\beta_y^* = 4.5 \text{ cm} \quad \text{con : } \sigma_z^* = 3 \text{ cm}$$

Resta infine da scegliere il valore del rapporto fra le emittanze  $k = \epsilon_y/\epsilon_x$ .

Per questa scelta è importante tenere conto della vita media del fascio. Per anelli a energia relativamente bassa (510 MeV per Dafne), con pacchetti con alta densità di carica, in corrette condizioni di lavoro, la principale causa di decadimento del fascio è la diffusione coulombiana fra particelle del fascio stesso (*effetto Touschek*) [27]. Il tasso di decadimento del fascio in questo caso è inversamente proporzionale alla densità

<sup>2</sup>Intorno a un minimo la funzione beta varia secondo:

$$\beta(s - s_0) = \beta^* + \frac{(s - s_0)^2}{\beta^*}$$

e volendo  $\beta$  costante lungo tutta lunghezza in cui i due pacchetti si sovrappongono nella collisione, deve essere  $\sigma_z^* < \beta^*$ .  $\sigma_z^*$  dipende dalla tensione della cavità a radio-frequenza, dalla corrente del pacchetto e dall'impedenza della struttura della camera da vuoto.

<sup>3</sup>Si definisce *apertura dinamica* bidimensionale la regione dello spazio fisico ( $x, y$ ) in cui il moto di betatrone di una particella è stabile

di particelle nel pacchetti. Pertanto è stato scelto il coefficiente di accoppiamento:

$$k = 0.01$$

come compromesso tra un'elevata luminosità e una vita media Touschek accettabile ( $\tau_{Touschek} \approx 3 \div 4$  ore).

Con questi parametri di progetto, con un'emittanza  $\epsilon = 1 \text{ mm} \cdot \text{mrad}$ , compatibile con l'apertura fisica e dinamica della macchina e con il massimo numero di particelle immagazzinabili nel fascio ( $N \approx 8.9 \cdot 10^{10}$  particelle/pacchetto) e con 120 pacchetti si vuole ottenere una luminosità  $L \approx 10^{32} \text{ cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ . I parametri di progetto di Dafne sono riportati nella tabella 3.1.

Energia del fascio	$E$	510.0	<i>MeV</i>
Circonferenza degli anelli	$L$	97.68	<i>m</i>
Funzione beta all'IP	$\beta_x^*/\beta_y^*$	4.5/0.045	<i>m</i>
Dimensioni trasverse del fascio all'IP	$\sigma_x^*/\sigma_y^*$	2.0/ 0.02	<i>mm</i>
Emittanza trasversa	$\epsilon_x/\epsilon_y$	1/0.01	<i>mm · mrad</i>
<i>Linear beam-beam tune-shift</i>	$\xi$	0.04	
Frequenza RF	$f_{RF}$	368.263	<i>MHz</i>
Numero armonico	$h$	120	
Frequenza di rivoluzione	$f_{riv}$	3.0688	<i>MHz</i>
Corrente media per pacchetto	$I_0$	43.7	<i>mA</i>
Particelle per pacchetto	$N$	$9.0 \cdot 10^{10}$	
Dispersione naturale di energia	$\sigma_\varepsilon/E$	$3.96 \cdot 10^{-4}$	
Lunghezza del pacchetto	$\sigma_s$	2.0 $\div$ 3.0	<i>cm</i>
Radiazione di sincrotrone emessa	$U_0$	9.3	<i>keV/giro</i>
Tempo di smorzamento	$\tau_\varepsilon/\tau_x$	17.8 / 36.0	<i>ms</i>
Tensione RF	$V_{RF}$	100 $\div$ 250	<i>kV</i>
Luminosità massima	$L_{max}$	$5.3 \cdot 10^{32}$	$\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$

Tabella 3.1: Parametri di Dafne

### 3.3 Struttura degli Anelli Principali

La pianta degli anelli principali di Dafne è mostrata nella figura 3.2: due anelli uguali, uno per i positroni e uno per gli elettroni, lunghi 97 metri con due regioni di interazione lunghe circa 10 metri in comune in cui i fasci attraversano la stessa camera da vuoto. Ciascun anello è costituito da una sezione più esterna, detta *Long*, e una più interna, *Short*. Le quattro sezioni si uniscono ai limiti delle regioni di interazione attraverso quattro magneti, gli *splitter*, ciascuno con due camere con campo opposto.

La struttura di ogni anello consiste di quattro *archi acromatici*<sup>4</sup> (Figura 3.3, ciascuno dei quali è delimitato da due magneti curvanti e alloggia tre quadrupoli, un magnete *wiggler* di  $1.8\ T \times 2\ m$  e due sestupoli per correggere il cromatismo dell'anello. Questa disposizione permette di annullare la dispersione nei due punti di interazione e nella cavità a radio-frequenza. Uno dei due dipoli per arco è di tipo rettangolare<sup>5</sup> cioè ha le facce laterali parallele in modo da fornire focaggio verticale utile per avere funzioni beta orizzontale e verticale con valori ben separati nei sestupoli.

I *wiggler* sono stati introdotti per poter raddoppiare l'emissione di radiazione di sincrotrone e ridurre quindi i tempi caratteristici di smorzamento. La loro presenza inoltre costituisce un importante contributo all'emittanza naturale del fascio  $\epsilon_0$  che permette di ottenere un'alta luminosità (Equazione (3.5)). Variando con i quadrupoli le funzioni ottiche nei *wiggler* è possibile modulare il valore di  $\epsilon_0$ .

I *kicker* e il setto di iniezione e la cavità a radio-frequenza sono alloggiati nelle sezioni diritte ortogonali alle Regioni di Interazione.

<sup>4</sup>Si dice *acromatica* una cella della macchina in cui la dispersione e la sua derivata sono entrambe nulle ai limiti. È una configurazione che si può ottenere combinando opportunamente i magneti curvanti e i quadrupoli.

<sup>5</sup>Vedi l'Appendice A per le proprietà foceggianti dei dipoli.

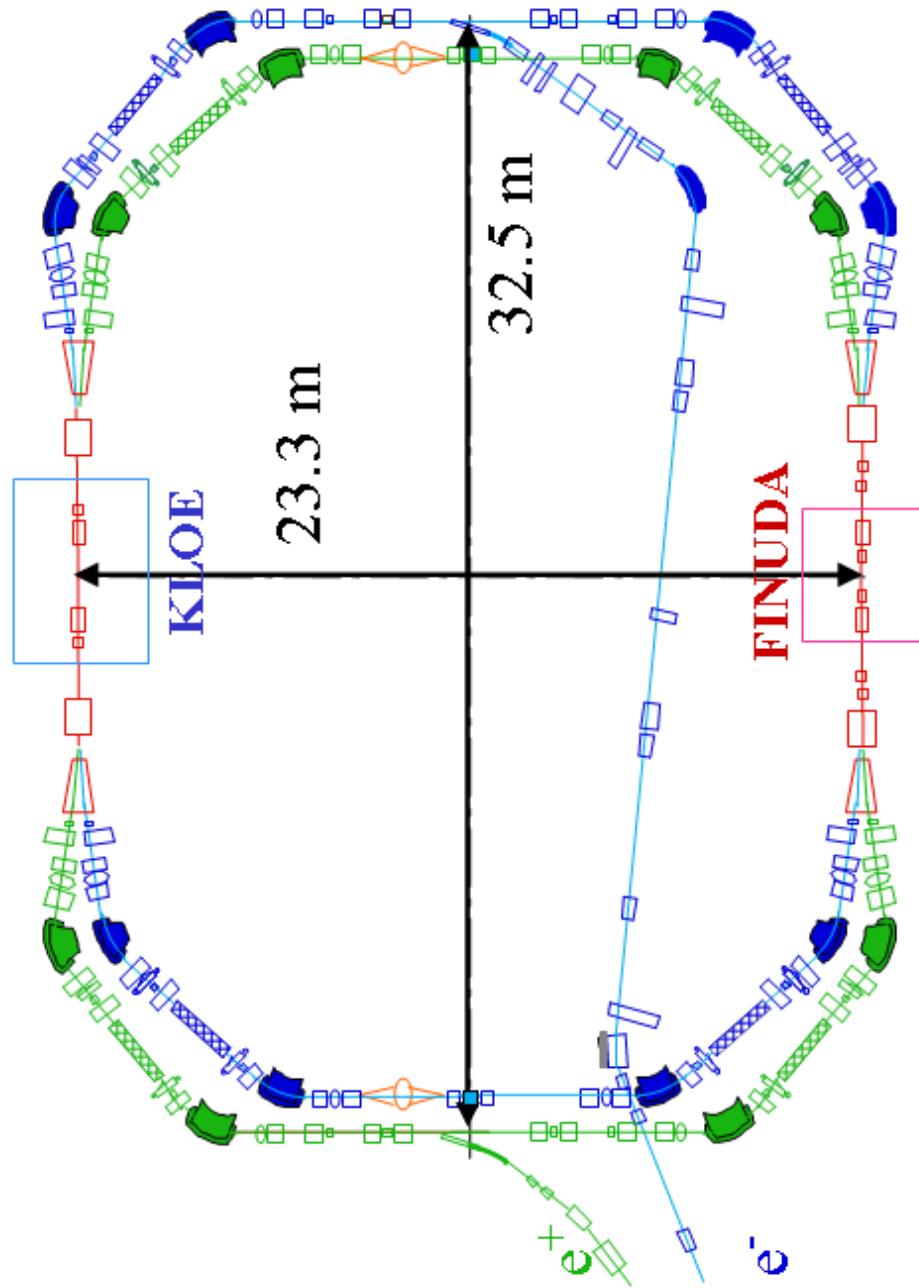


Figura 3.2: I due Anelli Principali di Dafne.



Figura 3.3: Un arco acromatico di una delle sezioni Short di Dafne durante la fase di installazione.

Fuori dagli archi sono presenti 8 sestupoli, per correggere la variazione della frequenza di betatrone con l'ampiezza di oscillazione e con l'impulso, e 8 quadrupoli ruotati di  $45^\circ$  (*Skew*) sono installati in ogni anello per correggere o controllare l'accoppiamento. È da mettere in risalto l'*assenza di qualsiasi simmetria* all'interno della struttura del-

l’anello (nemmeno le due zone di interazione sono uguali fra loro): le funzioni ottiche quindi non hanno altra periodicità che quella pari alla lunghezza dell’intero anello<sup>6</sup>, anche se nella sezione *Long* e *Short* sono state progettate quanto più simili possibile.

Per avere la massima flessibilità nella scelta dell’ottica degli anelli e dato che non si possono sfruttare proprietà di simmetria, ogni quadrupolo è alimentato individualmente.

La deviazione dall’orbita di progetto è controllata tramite 47 monitor della posizione del fascio e variata e corretta con 31 magneti correttori in ogni anello. Un altro strumento di diagnostica del fascio sono i monitor per la luce di sincrotrone: uno per ciascun anello, mostrano il profilo trasverso del fascio al centro di un magnete curvante.

Nel § 3.5 sono riportate le caratteristiche degli elementi magnetici e nel Capitolo 4 sono descritti la diagnostica e il sistema di acquisizione delle misure studiate in questa tesi.

## 3.4 Le Regioni di Interazione

Dafne ha due Regioni di Interazione (IR1 e IR2) lunghe circa 10 m, delimitate dagli *splitter*, con struttura magnetica e funzioni ottiche simmetriche rispetto ai Punti di Interazione (IP1 e IP2).

I due fasci passano fuori asse nelle IR, con un angolo di incrocio nel piano orizzontale di  $\pm 12.5 \text{ mrad}$  e una separazione orizzontale relativa di 12 cm ai limiti (Figura 3.4).

Per ottenere un valore basso della funzione beta verticale (§ 3.2) nei Punti di Interazione ( $\beta_y^* = 4.5 \text{ cm}$  mentre nel resto della macchina oscilla fra 1 e 20 metri circa) si usano due tripletti di quadrupoli molto intensi simmetrici rispetto all’IP, con una sequenza

---

<sup>6</sup>Generalmente negli acceleratori la gran parte della struttura è costituita da un certo numero di celle consecutive una uguale all’altra. È molto utile sfruttare queste proprietà di periodicità quando esistono perchè diminuiscono il numero di parametri liberi da cambiare negli elementi magnetici quando si vogliono variare le funzioni ottiche.

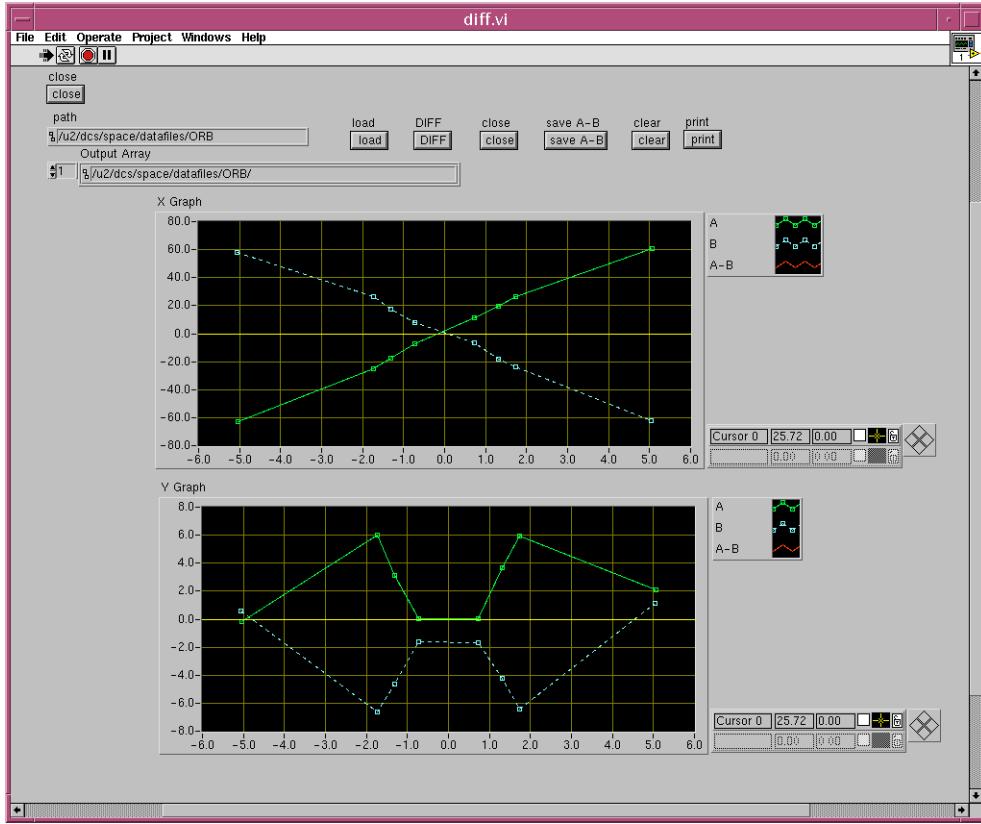


Figura 3.4: Le misure di posizione ai monitor orizzontali (in alto) e verticali (in basso) del fascio dei positroni (unite dalla linea continua) e del fascio degli elettronni (unite dalla linea tratteggiata) nella Regione di Interazione di Kloe, mostrate dal sistema di controllo di Dafne.

di focheggiamento FDF, che costituiscono le cosiddette Inserzioni *Low-Beta* [13].

Nella IR2 è attualmente presente l'esperimento Dear che però, date le ridotte dimensioni del suo apparato, non interferisce con l'ottica del fascio, né impone limitazioni meccaniche agli elementi dell'acceleratore.

Nella IR1 è installato dal 1999 il rivelatore di Kloe con un magnete solenoidale superconduttore da  $0.6\text{ Tesla} \times 4\text{ metri}$ .

I primi quadrupoli rispetto all'IP1 devono essere distanti solo 45 cm, quindi i tripletti sono necessariamente alloggiati all'interno di Kloe, lasciando libero per il rivelatore un angolo solido del 99 %. L'unica possibilità per inserirli in uno spazio così ristretto è

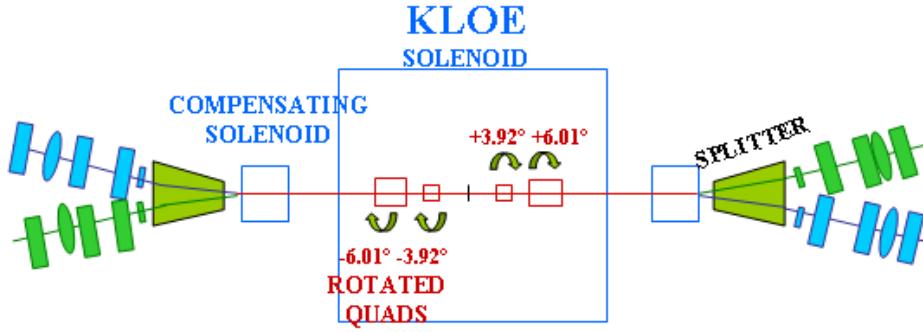


Figura 3.5: Lo schema di rotazione dei tripletti nella Regione di Interazione di Kloe.

quello di usare quadrupoli magnetici permanenti.

Il campo magnetico di Kloe costituisce una forte perturbazione per il fascio. Infatti il campo integrato del solenoide, pari a  $2.4 \text{ T m}$ , è dell'ordine di grandezza della rigidità magnetica<sup>7</sup> di  $1.7 \text{ T m}$  di un elettrone con energia di  $510 \text{ MeV}$ . L'effetto del magnete solenoidale è quello di focheggiare e accoppiare i moti di betatrone ruotando il fascio nel piano trasverso di un angolo proporzionale all'integrale del campo lungo la traiettoria del fascio stesso (circa  $40^\circ$ ):

$$\theta_{rot} = \frac{ec}{2E_0} \int_{Solen} B_z(s) ds \quad (3.7)$$

La rotazione del fascio dovuta ai campi solenoidali è annullata nel Punto di Interazione e fuori della Regione di Interazione compensando il magnete dell'esperimento mediante due magneti solenoidali (*Compensatori*) con campo opposto a quello di Kloe ( $1.2 \text{ T} \times 1 \text{ m}$ ) posti simmetricamente fra il rivelatore e gli *splitter*. Ogni quadrupolo del tripletto deve inoltre essere ruotato intorno al proprio asse longitudinale esattamente di un

---

<sup>7</sup>Vedi nota a pagina 3.

angolo (figura 3.5):

$$\theta(s) = \frac{ec}{2E_0} \int_{s_0}^s B_z(\bar{s}) d\bar{s} \quad (3.8)$$

essendo  $s_0$  un punto dove il campo è nullo e  $s$  la posizione longitudinale del quadrupolo. Poiché i quadrupoli hanno lunghezza finita ogni quadrupolo dovrebbe essere ruotato come un'elica. Praticamente si ruota ogni quadrupolo di un angolo corrispondente al proprio centro longitudinale. L'accoppiamento residuo si può correggere con l'uso dei quadrupoli *skew* installati negli anelli e con aggiustamenti del campo del magnete di Kloe e dei magneti compensatori.

### 3.5 Caratteristiche degli elementi magnetici

Su tutti gli elementi magnetici degli anelli di Dafne sono state eseguite misure magnetiche prima della loro installazione. I risultati sono riportati nelle Note Tecniche citate e riassumo di seguito quelli utili allo sviluppo del modello.

#### Quadrupoli, sestupoli e solenoidi

Il campo dei quadrupoli, dei sestupoli, del solenoide di Kloe, dei due solenoidi compensatori e dei sei quadrupoli permanenti della Regione di Interazione di Kloe è stato misurato lungo l'asse longitudinale di ciascun elemento. Per i quadrupoli i sestupoli e magneti solenoidali è stata verificata la dipendenza lineare con la corrente di alimen-

tazione nell'intervallo di utilizzo.

Le caratteristiche del campo di tali elementi ricavate dalle misure non presentano difficoltà di interpretazione e sono state introdotte facilmente nel modello dell'ottica lineare (Capitolo 5).

## Magneti Correttori

I magneti correttori sono 31 dipoli di piccola intensità [20] (il campo magnetico integrato dei correttori più forti con le correnti di alimentazione generalmente usate è dell'ordine di  $0.01 \text{ T} \cdot \text{m}$ ) distribuiti lungo ciascuno degli anelli. Sono usati per reggere le orbite chiuse o spostare la traiettoria del fascio in determinate regioni (ad esempio separare i fasci nelle regioni di interazione), sia nel piano verticale che in quello orizzontale. Ciascun correttore possiede due avvolgimenti intorno a due ferromagneti distinti; il primo ferromagnete (*Correttore Orizzontale*: CH) crea un campo dipolare verticale e deflette il fascio nel piano orizzontale, il secondo ferromagnete (*Correttore Verticale*: CV) crea un campo dipolare orizzontale e deflette nel piano verticale.

## Dipoli: Curvanti, *Splitter* e *Wiggler*

I dipoli presentano maggiori difficoltà ad essere caratterizzati nel modello, in particolare riguardo agli effetti foceggianti dovuti agli angoli di entrata e uscita tra la traiettoria del fascio e le facce dei dipoli e agli effetti lineari dovuti a *offset* della traiettoria in presenza di contributi sestupolari.

Dalle Note citate nel seguito è nota la componente verticale del campo dei magneti

misurata a passi fissi lungo la traiettoria nominale (definita come un arco di cerchio di lunghezza  $L_{mag}$  e raggio di curvatura nominale, e due segmenti diritti tangenti che si allungano per tutta l'estensione dei campi di bordo) e lungo più traiettorie parallele a questa. Con questa griglia di punti misurati si può interpolare e ottenere il campo in ogni punto e si possono stimare le componenti multipolari dei magneti<sup>8</sup>.

È stato inoltre misurata per tutti i magneti la dipendenza dell'intensità del campo con le correnti di alimentazione intorno al punto di utilizzo.

### Dipoli Curvanti e *Splitter*

I principali parametri di progetto<sup>9</sup> [10, 9, 5, 11] delle quattro famiglie di dipoli curvanti, due del tipo a settore e due del tipo rettangolare, e degli *splitter* sono riportati nella tabella 3.2. Nelle figure 3.6-3.7 sono riportati i gradienti trasversi lungo le traiettorie nominali ricavati dalle misure magnetiche con la corrente nominale di alimentazione. Il segno positivo corrisponde ad una azione focheggiante orizzontale. I magneti di tipo

<sup>8</sup>Se si hanno  $n$  punti trasversi per ogni posizione azimutale lungo la traiettoria nominale, si possono trovare i coefficienti polinomiali dell'espansione del campo fino all'ordine  $n - 1$  in  $x$ . Per esempio l'espansione della componente verticale del campo lungo l'asse longitudinale  $z$  rispetto alla coordinata trasversa  $x$  è:

$$B_y(x, 0, z) = B_0(z) + B_1(z)x + B_2(z)x^2 + \dots$$

dove  $B_0(z)$  corrisponde al valore del campo dipolare  $B_y$  lungo la traiettoria nominale,  $B_1(z)$  al termine di quadrupolo  $\partial B_y / \partial x$ ,  $B_2(z)$  al termine di sestupolo  $\frac{1}{2} \partial^2 B_y / \partial x^2$  e così via.. Inoltre una volta noto il campo in tutto il magnete si può calcolare la traiettoria reale attraverso il magnete integrando l'equazione di moto delle particelle cariche nel campo misurato.

<sup>9</sup>Definiamo la Lunghezza Magnetica  $L_{mag}$  di un magnete dalla relazione:

$$B_0 \cdot L_{mag} = \int_{-\infty}^{+\infty} B(s) ds$$

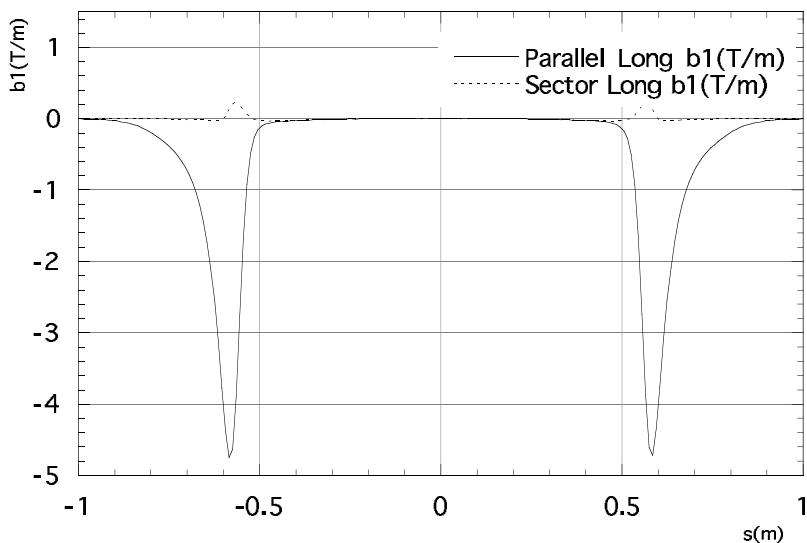
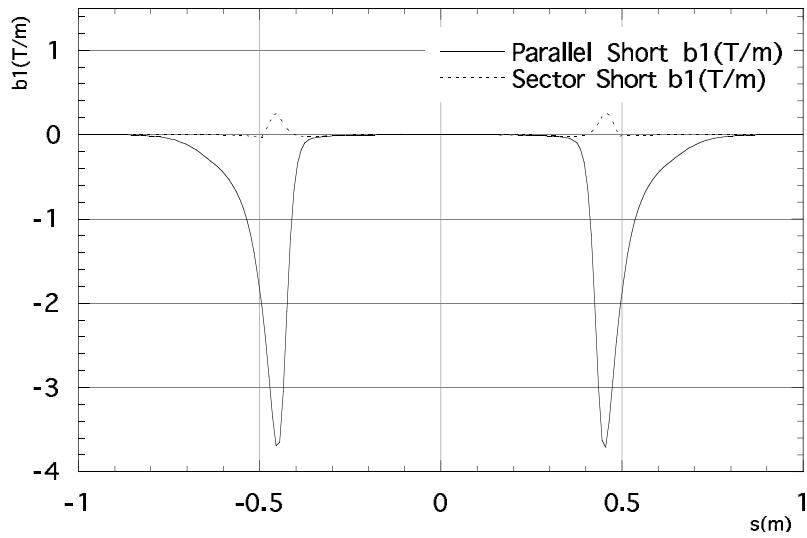


Figura 3.6: Primo termine dell'espansione trasversa del campo intorno alla traiettoria nominale nei dipoli curvanti di tipo a settore e di tipo rettangolare della sezione *Short*.

Figura 3.7: Primo termine dell'espansione trasversa del campo intorno alla traiettoria nominale nei dipoli curvanti di tipo a settore e di tipo rettangolare della sezione *Long*.

Tipo	I (A)	$B_0$ (T)	$\alpha$ ( $^{\circ}$ )	$L_{des}$ (m)	$L_{mag}$ (m)
Settore Short	266.20	1.207	40.50	0.990	1.002
Rettangolare Short	266.20	1.221	40.50	0.990	0.988
Settore Long	266.20	1.214	49.50	1.210	1.217
Rettangolare Long	266.20	1.230	49.50	1.210	1.200
Splitter	436.00	0.1768	8.75	1.450	1.470

Tabella 3.2: Parametri dei dipoli curvanti e degli *splitter*.  $I$  è la corrente nominale corrispondente a un’energia del fascio di 510 MeV,  $B_0$  è il campo misurato al centro del magnete,  $\alpha$  è l’angolo di deflessione,  $L_{des}$  è la lunghezza magnetica di progetto,  $L_{mag}$  è la lunghezza magnetica misurata. I nomi *Short* e *Long* con cui distinguiamo le famiglie di magneti indicano la sezione dell’anello in cui sono alloggiati.

rettangolare hanno due grandi picchi nelle regioni di bordo dovuti all’angolo di entrata della traiettoria (metà dell’angolo totale di curvatura). Il loro valore integrato ( $-0.77$  T nello *Short*,  $-0.96$  T nel *Long*) è minore del valore teorico per un magnete rettangolare ideale ( $-0.86$  T e  $-1.05$  T). Questo può essere spiegato come un’asimmetria destra-sinistra della struttura rispetto alla traiettoria nominale. Tale effetto è presente in misura minore anche nei dipoli a settore dove compaiono due picchi più piccoli ( $0.026$  T e  $0.010$  T).

Sono stati misurati anche i gradienti sestupolari dei campi di bordo, il valore massimo integrato è circa  $0.30$  T/m per la famiglia dei Dipoli a settore Short, il contributo all’accoppiamento è trascurabile se l’orbita verticale viene corretta entro 1–2 mm dall’asse<sup>10</sup>.

---

<sup>10</sup>Il campo magnetico in un sestupolo ha una dipendenza del secondo ordine con le coordinate trasverse:

$$B_x = mxy \quad B_y = \frac{1}{2}m(x^2 - y^2)$$

ma in presenza di uno spostamento della traiettoria dall’asse del magnete, il sestupolo può dare un contributo lineare all’ottica. Infatti se si ha uno spostamento orizzontale  $\Delta x$  della traiettoria compaiono i gradienti quadrupolari *normali*:

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial x} = m\Delta x$$

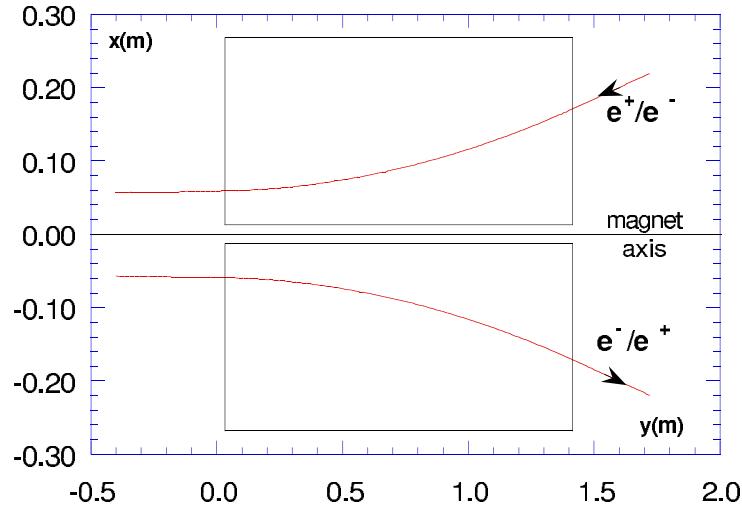


Figura 3.8: Le traiettorie nominali dei fasci nello splitter. I rettangoli mostrano l’apertura libera nei traferri tra gli avvolgimenti. (Con  $y$  è indicata la coordinata longitudinale che nel testo è indicata sempre con  $z$ .)

Gli *splitter* di Dafne sono degli speciali magneti posti ai limiti delle Regioni di Interazione, costituiti da due dipoli adiacenti con avvolgimenti distinti, che generano un campo opposto nelle due regioni adiacenti. I due traferri sono divisi da un setto che separa la camera da vuoto dei positroni da quella degli elettroni. Ciascuno dei due fasci entra (o esce, a seconda del verso del moto) nello *splitter* con un angolo di  $-0.25^\circ$  ed esce con un angolo di  $9^\circ$  (Figura 3.8) rispetto alla direzione normale alla faccia del magnete.

Le misure magnetiche (con corrente di alimentazione di  $440.38\text{ A}$ ) hanno messo in evi-

---

e in presenza di uno spostamento verticale  $\Delta y$  della traiettoria compaiono i gradienti quadrupolari *skew*:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = m \Delta y \quad \frac{\partial B_y}{\partial y} = -m \Delta y$$

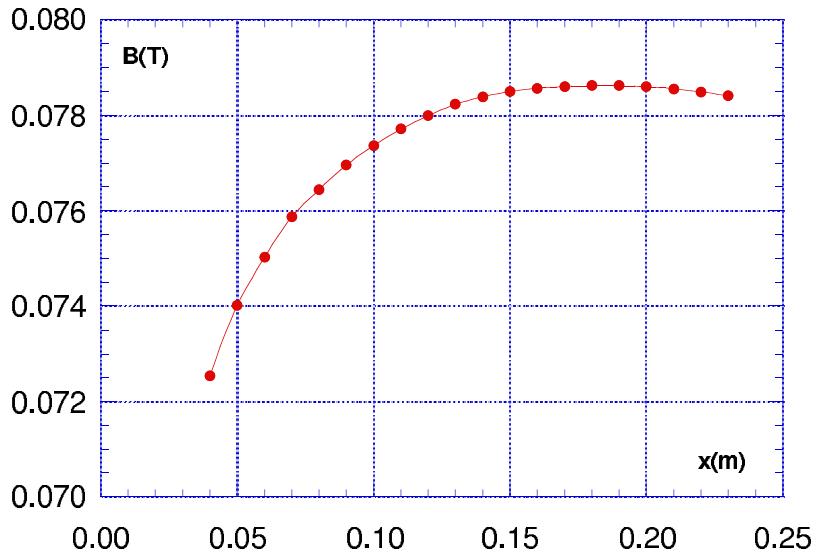


Figura 3.9: Componente verticale del campo vicino al bordo del magnete ( $y = -4.5$  mm nella Figura 3.8).

denza una dipendenza della componente verticale del campo dalla posizione orizzontale nella regione del campo di bordo. Come si vede dalla figura 3.9 dal lato del magnete in cui la traiettoria passa a circa 6 cm dall'asse dello *splitter* il fascio sentirà un gradiente trasverso, mentre dall'altro lato in cui la traiettoria passa a circa 18 cm la dipendenza del campo è invece quasi piatta.

È stata inoltre messa in evidenza l'influenza di un avvolgimento sul traferro adiacente alimentando un solo avvolgimento e misurando il campo nell'altro traferro. L'effetto è non trascurabile vicino alle facce laterali dalla parte interna del traferro.

Riporto in Figura 3.10 il termine del primo ordine dell'espansione trasversa del campo lungo la traiettoria nominale. Il picco pronunciato all'entrata dello *splitter*, che in un magnete rettangolare ideale con angolo di entrata di  $-0.25^\circ$  dovrebbe essere trascurabile, è dovuto al gradiente trasverso vicino all'avvolgimento interno nella regione dei campi di bordo (vedi Figura 3.10), mentre il picco all'uscita è dovuto principalmente

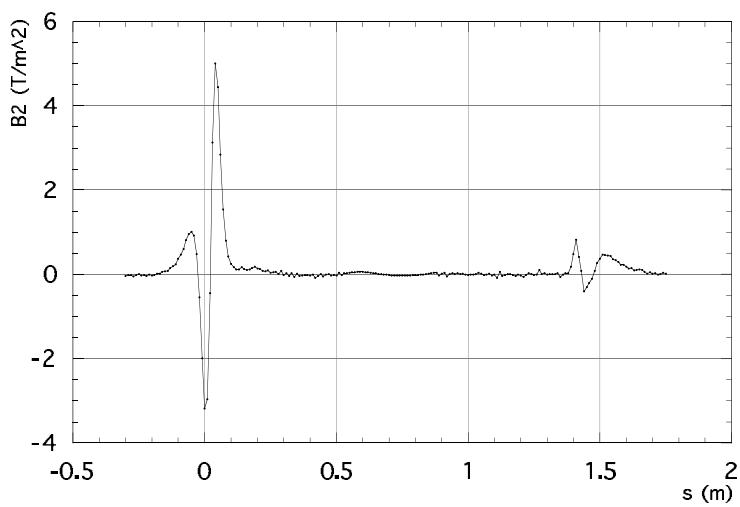
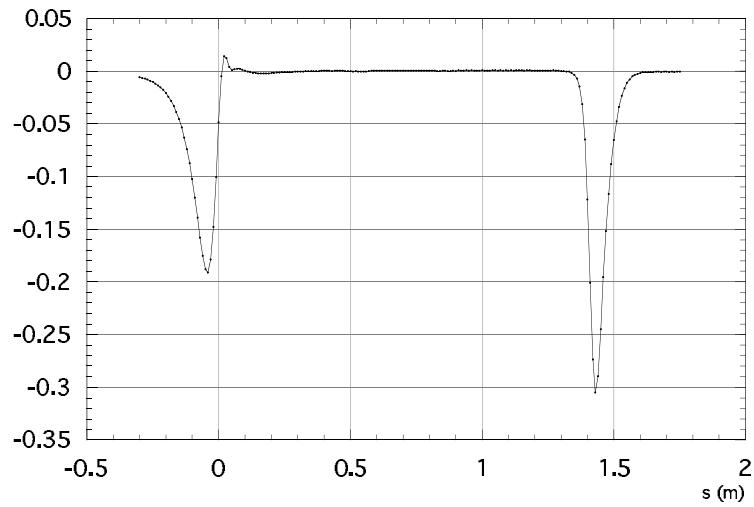


Figura 3.10: Termine del primo ordine dell'espansione trasversa del campo dello *splitter* intorno alla traiettoria nominale.

Figura 3.11: Termine del secondo ordine dell'espansione trasversa del campo dello *splitter* intorno alla traiettoria nominale.

all’angolo di  $9^\circ$  tra la faccia del polo e la traiettoria del fascio (Figura 3.8)).

Infine in Figura 3.11 è riportato il termine del secondo ordine dell’espansione trasversa.

Il contributo sestopolare integrato del campo di bordo all’entrata, dove la traiettoria passa a  $6\text{ cm}$  dal setto, è molto maggiore ( $0.17\text{ T/m}$ ) di quello all’uscita, dove passa a  $18\text{ cm}$  ( $0.06\text{ T/m}$ ).

A causa della separazione verticale dei fasci nelle Regioni di Interazione, la traiettoria entra nello *splitter* con uno spostamento verticale di alcuni millimetri (Figura 3.4) e il fascio sente un contributo quadrupolare *skew* efficace dovuto al sestupolo che dà un debole accoppiamento di betatron<sup>11</sup>.

### *Wiggler*

I quattro *wiggler* di Dafne [2, 12] sono costituiti da 5 poli centrali di tipo rettangolare, lunghi  $32\text{ cm}$ , con polarità alternata e due “semipoli” terminali (poli più corti,  $20\text{ cm}$  e meno intensi) ai lati sempre di tipo rettangolare, con un campo massimo di  $1.8\text{ T}$  e una lunghezza totale di  $2\text{ m}$ . I poli centrali di tutti i *wiggler* sono alimentati in serie, mentre ogni coppia terminale è alimentata in modo indipendente, così cambiando il campo nei semipoli si può aggiustare opportunamente l’integrale del campo lungo la traiettoria.

In Figura 3.12 è riportato il valore del campo lungo il *wiggler* alimentato con le correnti nominali di  $712.8\text{ A}$  nei poli centrali e  $562.1\text{ A}$  nei poli terminali.

La traiettoria all’interno del *wiggler* segue un’andamento ondulato nel piano orizzontale con uno spostamento massimo di circa  $2.5\text{ cm}$  (Figura 3.13).

---

<sup>11</sup>Vedi Nota pagina 43.

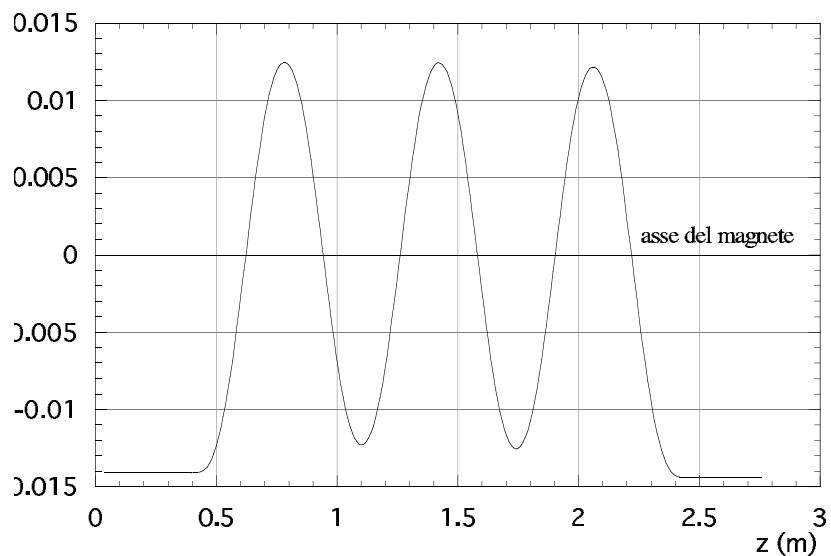
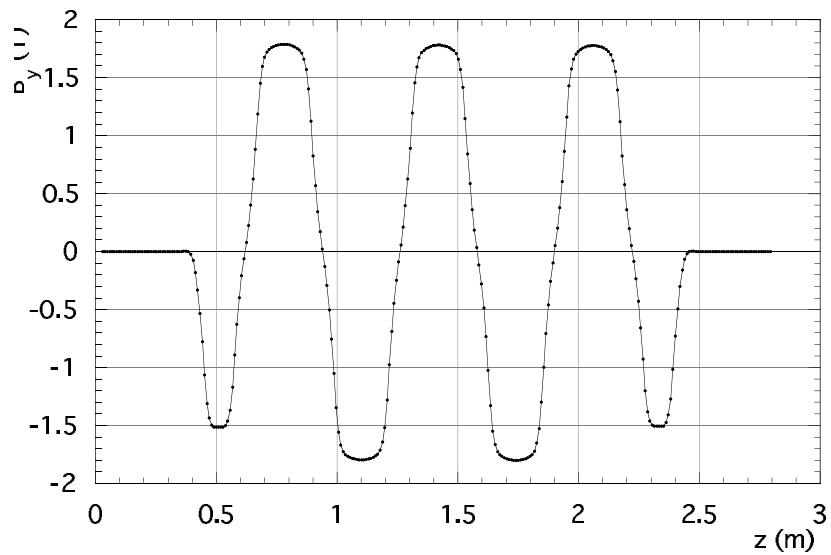


Figura 3.12: La componente verticale del campo misurata lungo l'asse del *wiggler*.

Figura 3.13: La traiettoria del fascio calcolata all'interno del *wiggler*. L'asse del *wiggler* è spostato di 1.4 cm rispetto all'asse della camera da vuoto.

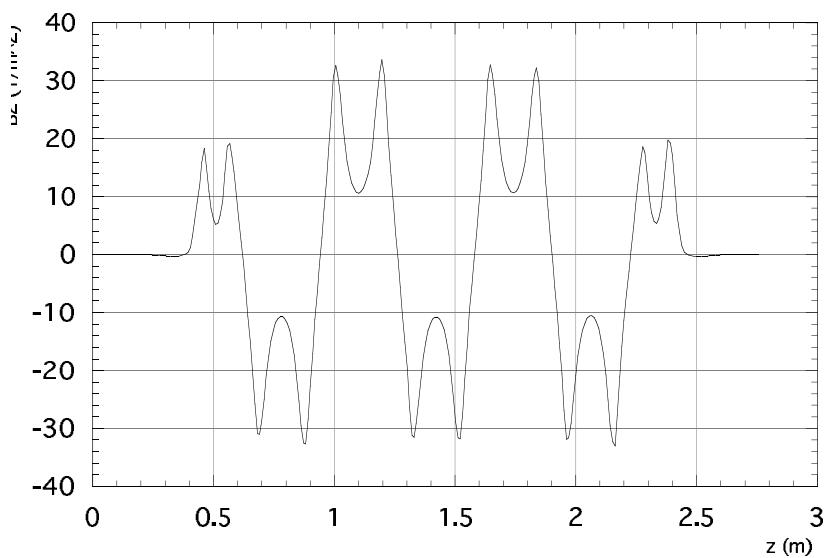
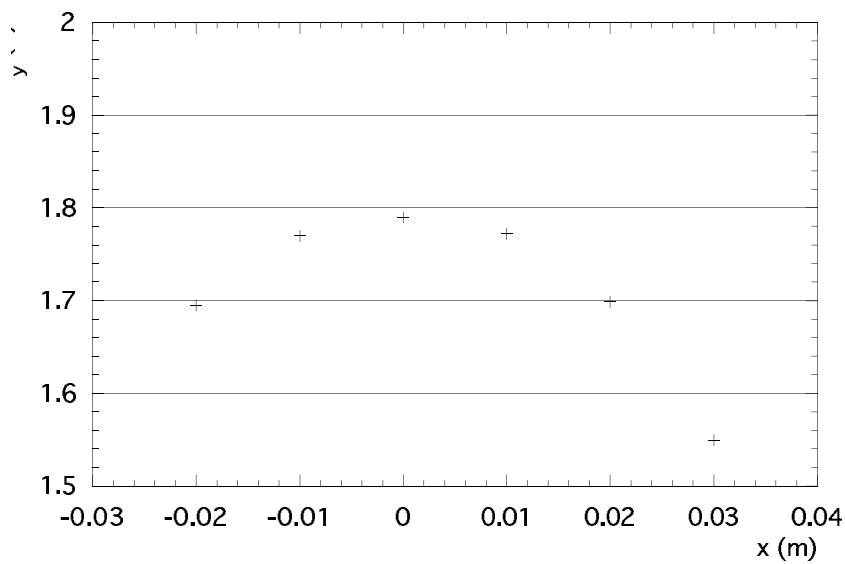


Figura 3.14: Componente verticale del campo misurata lungo  $x$  all'interno del *wiggler* ( $z = 0.68$  m).

Figura 3.15: Termine del secondo ordine dell'espansione trasversa del campo del *wiggler* lungo l'asse longitudinale.

Le misure magnetiche hanno messo in evidenza un andamento parabolico della componente verticale del campo lungo la direzione trasversa  $x$  (Figura 3.14) che corrisponde alla presenza di un termine sestupolare. In Figura 3.15 è riportato l'andamento di tale termine lungo l'asse del *wiggler*.

I termini sestupolari danno quadrupoli efficaci normali (non *skew*) efficaci in presenza di spostamenti orizzontali della traiettoria<sup>12</sup> che si aggiungono al focheggiamento dovuto ai campi di bordo dei poli del *wiggler*.

Per potere avere integrale di campo nullo lungo la traiettoria e soprattutto perché il fascio attraversi la regione migliore del campo [2], l'asse del *wiggler* è stato spostato di 1.4 cm in orizzontale rispetto all'asse della camera da vuoto (Figura 3.13).

---

<sup>12</sup>Vedi Nota pagina 43.

# Capitolo 4

## Misure dell'ottica di Dafne

### 4.1 Misure di orbite

#### Monitor di Posizione del Fascio

Per misurare l'orbita di equilibrio del fascio accumulato, in ciascuno dei due anelli di Dafne sono installati 41 monitor di posizione del fascio (*Beam Position Monitor: BPM*) del tipo elettrostatico a bottone e 8 in ciascuna Regione di interazione. Sono state realizzate varie configurazioni dei monitor adatte alle dimensioni e la forma della camera da vuoto lungo gli anelli. La posizione del fascio è calcolata a partire dalle tensioni indotte sugli elettrodi dei BPM. Ad esempio per il monitor schematizzato in

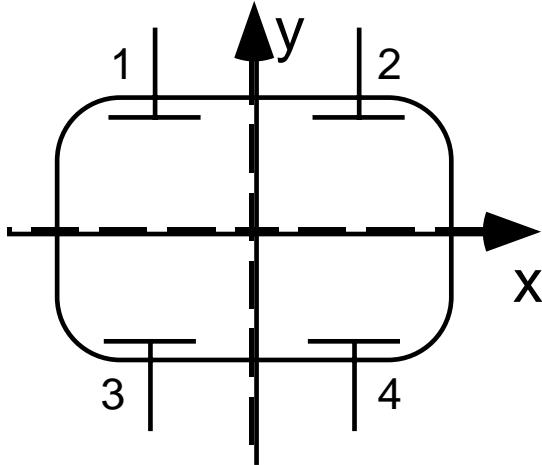


Figura 4.1: Profilo schematico di un monitor di posizione del fascio di tipo rettangolare. Dalle tensioni  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ ,  $V_4$  indotte sui quattro elettrodi si ricava la posizione traversa del fascio.

figura 4.1 si ricavano le informazioni sulle coordinate trasverse:

$$\begin{aligned} U &= \frac{V_2 + V_4 - V_1 - V_3}{V_2 + V_4 + V_1 + V_3} \\ V &= \frac{V_1 + V_2 - V_3 - V_4}{V_2 + V_4 + V_1 + V_3} \end{aligned} \quad (4.1)$$

A causa della risposta non lineare del monitor, le pseudo posizioni  $U$ ,  $V$  devono essere corrette usando una funzione nonlineare che riproduce accuratamente la posizione del fascio:

$$\begin{aligned} x &= g_x(U, V) \\ y &= g_y(U, V) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Le funzioni  $g(U, V)$  sono dei polinomi i cui coefficienti (per ogni diverso tipo di BPM) sono stati ottenuti da un fit ai minimi quadrati dei dati delle misure di calibrazione dei monitor [28].

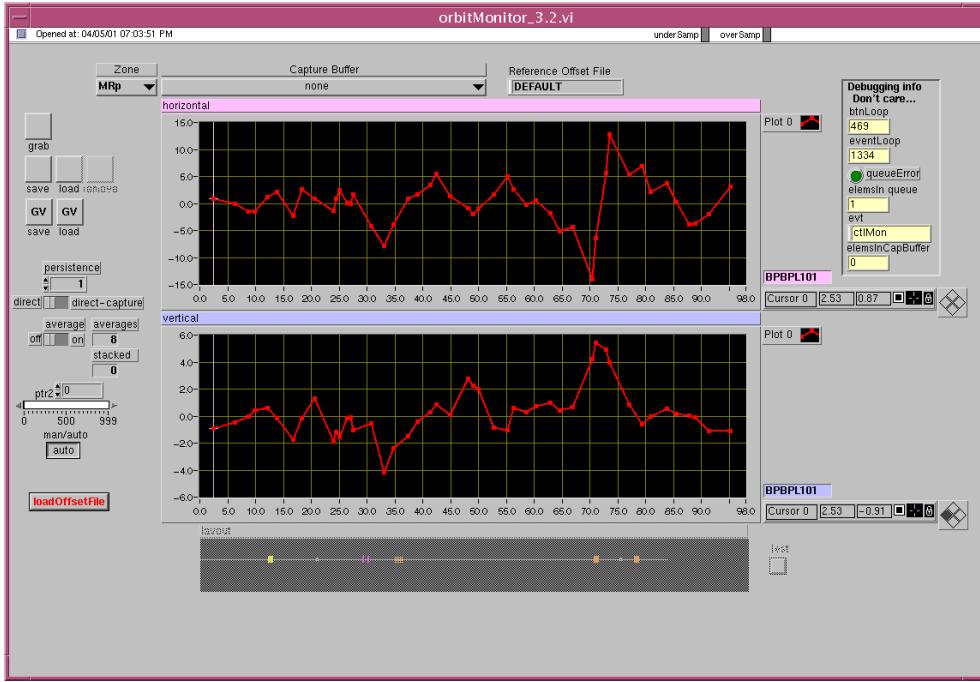


Figura 4.2: La finestra del programma del sistema di controllo di Dafne per l’acquisizione delle orbite degli Anelli Principali.

L’elettronica di rivelazione è stata sviluppata dalla Bergoz Beam Instrumentation System per Dafne [18]: consiste di un ricevitore *superheterodyne* che converte la 240-esima frequenza armonica (il doppio della radio-frequenza accelerante) del segnale indotto dal fascio in una frequenza intermedia di  $21.4\text{ MHz}$  prima della rivelazione dell’ampiezza. All’uscita del circuito sono fornite due tensioni  $U, V$  che vengono processate dal software per ottenere le posizioni verticali e orizzontali  $x, y$ .

Il sistema di acquisizione è stato sviluppato nello standard VME. I segnali sono misurati con un Multiplexer FET HP E1352A e un Multimetro Digitale HP E1326B controllati da appositi processori.

Il sistema di controllo di secondo livello di Dafne raccoglie i dati sulle posizioni da queste unità periferiche che vengono usati dal sistema di terzo livello per la ricostruzione dell’intera orbita e per i programmi di analisi. L’intera orbita di un anello è acquisita

con una frequenza di 5 Hz. Nella figura 4.2 è riportata la finestra del programma di acquisizione dell'orbita di Dafne.

L'errore sulla misura di posizione misurata rispetto all'orbita ideale di riferimento che passa al centro dei magneti dipende dagli errori di allineamento dei magneti rispetto alla camera da vuoto che sono generalmente noti, dalle tolleranze meccaniche con cui sono montati i monitor, da errori di calibrazione (trascurabili intorno al centro della camera da vuoto) e infine dal rumore termico dell'elettronica di aquisizione.

Nelle misure di differenza tra due orbite resta solo l'errore dovuto al rumore termico dell'elettronica (eventualmente anche un contributo dovuto alle calibrazioni se l'orbita si sposta di diversi millimetri dal centro del camera da vuoto) e si raggiunge un'incertezza di 5 – 10  $\mu m$  generalmente acquisendo la media su 20-30 misure [29].

## Matrici di Risposta dell'Orbita

Se si hanno  $n$  monitor di posizione e  $m$  magneti correttori orizzontali e verticali, la matrice di correlazione  $R$  dell'orbita è definita da:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} \\ R_{yx} & R_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1^x \\ \vdots \\ \theta_m^x \\ \theta_1^y \\ \vdots \\ \theta_m^y \end{pmatrix} \quad (4.3)$$



Figura 4.3: Finestra del programma del sistema di controllo per la lettura delle matrici di risposta dell'orbita.

dove  $\theta_j^{x,y} = \frac{ec}{E_0} \int_0^{L_{corr}} \Delta B_{y,x}^{corr} ds$  è la variazione di intensità del campo integrato del j-esimo correttore orizzontale o verticale (pari alla variazione impressa all'angolo  $x'$  o  $y'$  all'uscita del correttore) e  $(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n)$  è la variazione di orbita risultante misurata agli  $n$  monitor di posizione.

Le matrici di correlazione sono utilizzate ad esempio dagli algoritmi di correzione locale o globale dell'orbita, che calcolano l'opportuna combinazione delle intensità  $\theta_j^{x,y}$  dei correttori per ottenere le variazioni di orbita volute [25].

La *matrice di risposta*  $M$  dell'orbita di un anello è definita come:

$$M = \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} \\ R_{yx} & R_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1^x & & \\ & \ddots & \\ & & \theta_m^y \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

La j-esima colonna della matrice  $M$  corrisponde all'orbita di risposta  $(x_{1j} \cdots x_{nj}, y_{1j} \cdots y_{nj})$  del tipo dell'equazione (2.19), misurata variando il j-esimo magnete correttore. I blocchi incrociati  $M_{xy}$  e  $M_{yx}$  danno i termini di accoppiamento, cioè le variazioni di orbita verticale  $y_i$  cambiando un correttore orizzontale  $\theta_j^x$  e le variazioni orizzontali  $x_i$  con un correttore verticale  $\theta_j^y$ .

Poiché ciascun elemento della matrice di risposta tramite la frequenza, la funzione e la fase di betatron dipende dalla configurazione dell'intero anello, le matrici di risposta possono essere usate per ottenere informazioni sulla struttura magnetica degli anelli.

Questo argomento è trattato nel Capitolo 6.

## 4.2 Misure delle funzioni ottiche

### Misure di Dispersione

La misura della funzione di dispersione è ricavata dall'orbita indotta da uno spostamento della radio-frequenza. Una variazione della frequenza  $\Delta f_{RF}$  cambia l'energia del

fascio della quantità<sup>1</sup>:

$$\frac{\Delta E}{E_0} = -\frac{1}{\alpha_c} \frac{\Delta f_{RF}}{f_{RF}}. \quad (4.5)$$

Combinando le equazioni (2.8) e (4.5), si può ricavare la dispersione alle posizioni dei monitor di posizione del fascio dalla differenza di orbita misurata  $x_\epsilon(s)$ :

$$\eta(s) = -\alpha_c \frac{x_\epsilon(s)}{\Delta f_{RF}/f_{RF}}. \quad (4.6)$$

La radio-frequenza  $f_{RF} = 368.259 \text{ MHz}$  viene variata generalmente di  $\Delta f_{RF} = 0.010 \text{ MHz}$  ed è nota con un incertezza dell'ordine di  $1 \text{ Hz}$ . La differenza di orbita  $x_\epsilon$  corrispondente varia lungo l'anello da alcuni micron a  $1 - 2 \text{ mm}$  con un'errore dell'ordine di  $5 - 10 \mu\text{m}$ .

Il valore del fattore di dilatazione viene ricavato dalla relazione [13]:

$$\alpha_c = \frac{f_{sin}^2}{f_{riv}^2} \frac{2\pi E_0}{h e V_{cav} \cos \phi_{sin}} \quad (4.7)$$

dove  $f_{sin}$  è la frequenza di sincrotrone (un tipico valore è intorno a  $30 \text{ KHz}$ ) che si misura con l'analizzatore di spettro con un errore dell'ordine di  $0.1 \text{ KHz}$ ,  $f_{riv}$  è la frequenza di rivoluzione che è nota con un'incertezza dell'ordine di  $1 \text{ Hz}$ ,  $h = 120$

<sup>1</sup>Le oscillazioni di betatrone intorno all'orbita di riferimento non producono al primo ordine in  $x$  e in  $y$  una variazione della lunghezza delle traiettorie. Invece la traiettoria data dalla funzione di dispersione  $\eta(s)$ , dovuta ad una deviazione dell'energia (vedi la (2.9)) cambia la lunghezza dell'orbita di equilibrio.

È utile quindi definire il fattore di dilatazione  $\alpha_c = \frac{\Delta L/L}{\Delta E/E_0}$ , chiamato generalmente *momentum compaction*, e si trova:

$$\alpha_c = \frac{\Delta L/L}{\Delta E/E_0} = \frac{1}{L} \oint \frac{\eta(s)}{\rho(s)} ds .$$

La lunghezza dell'orbita è  $L = c \frac{h}{f_{RF}}$ , quindi  $\Delta L/L = -\Delta f_{RF}/f_{RF}$ .

è il numero armonico,  $V_{cav} \cos \phi_{sin}$  la pendenza della tensione della cavità vista dalla particella sincrona nota con un errore del 5 % che dà quindi il contributo prevalente all'errore su  $\alpha_c$ . Una tipica misura del fattore di dilatazione in uno degli anelli di Dafne può dare  $\alpha_c = 0.020 \pm 0.001$ .

Nella propagazione degli errori sulla misura della dispersione il contributo dovuto a  $f_{RF}$  è trascurabile quindi l'errore su  $\eta$  è:

$$\delta(\eta) = \left| \frac{x_\epsilon}{\Delta f_{RF}/f_{RF}} \right| \delta(\alpha_c) + \left| \frac{\alpha_c}{\Delta f_{RF}/f_{RF}} \right| \delta(x_\epsilon) \quad (4.8)$$

il primo termine è pari al 5% della dispersione (vale da pochi millimetri nei punti di dispersione più bassa a 5 – 10 cm nei punti più alti), il secondo vale circa 7 mm.

## Numero di betatron $Q$

La parte frazionaria del numero di betatrone orizzontale  $Q_x$  e verticale  $Q_y$  è misurata dando al fascio un'eccitazione elettromagnetica a radio-frequenza con due *kickers* a *stripline* trasversi e misurando la risposta del fascio nel piano di eccitazione con un monitor a bottone elettrostatico in tutto simile a quelli usati per i monitor di posizione già descritti.

Il fascio viene eccitato a tutte le frequenze con un generatore di rumore bianco e risponde solo alle frequenze proprie di oscillazione. Il segnale di oscillazione viene estratto tramite degli elettrodi a bottone a banda ampia e inviato a un Analizzatore di Spettro (sistema HP 70000). L'uscita a frequenza intermedia dell'Analizzatore è processata da un analizzatore FFT in tempo reale HP 3587S.

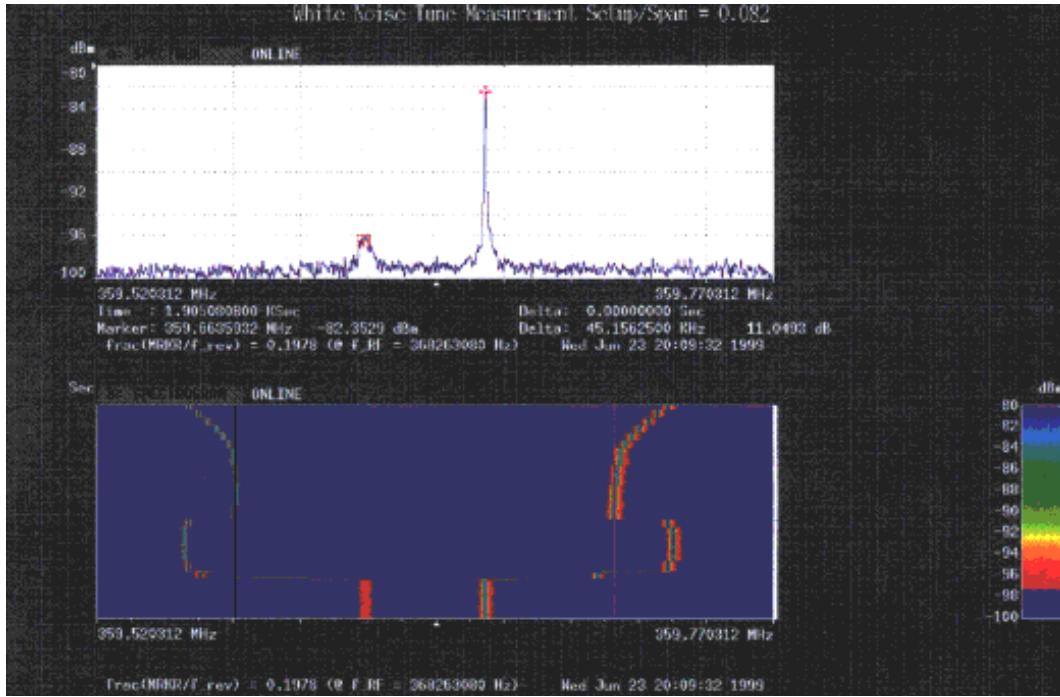


Figura 4.4: Nella finestra in alto è mostrato un esempio dello spettro delle frequenze del fascio come viene mostrato dall’analizzatore di spettro: i due picchi corrispondono alle frequenze di betatroncione orizzontale e verticale. Nella finestra sottostante è mostrato lo spettrogramma durante le misure delle funzioni beta: si vedono chiaramente gli spostamenti delle frequenze di betatroncione ottenuti variando l’intensità dei quadrupoli.

In figura 4.4 è riportata la rappresentazione dello spettro del fascio. La risoluzione della misura di  $Q$  è  $1 \cdot 10^{-4}$ .

## Misure delle funzioni Beta

La misura della funzione di betatroncione si ricava dallo spostamento della frequenza di betatroncione quando viene variato il gradiente di un singolo quadrupolo.

Nell’approssimazione per lente sottile una variazione  $\Delta k$  del gradiente di un quadrupolo

produce uno spostamento delle frequenze  $Q_{x,y}$  [27, 14, 34] proporzionale alla funzione beta alla posizione del quadrupolo stesso secondo la relazione:

$$\Delta Q_{x,y} = \pm \frac{1}{4\pi} \Delta kL \beta_{x,y} \quad (4.9)$$

dove  $L$  è la lunghezza magnetica del quadrupolo e i segni  $\pm$  corrispondono rispettivamente alla funzione beta orizzontale e verticale che vogliamo misurare alla posizione del quadrupolo.

Questa relazione vale se si approssima il quadrupolo con una lente sottile, per piccole variazioni di  $Q$  ( $2\pi Q \ll 1$ ) e lontano dalle risonanze con  $Q$  interi o seminteri.

Gli spostamenti  $\Delta Q$  vengono misurati variando prima di una quantità  $+\Delta I$  e poi  $-\Delta I$  la corrente di alimentazione del quadrupolo e prendendo poi come misura della funzione beta la media fra i valori ottenuti dalle due variazioni:

$$\beta = \frac{1}{2}(\beta^+ + \beta^-) . \quad (4.10)$$

$\Delta K$  viene cambiato variando la corrente di alimentazione in modo da avere  $\Delta Q$  dell'ordine di 0.001-0.010 entro cui lo spostamento della frequenza di betatron è lineare con la variazione di corrente di alimentazione  $\Delta I$ . La quantità  $\Delta kL$  viene calcolata dalle calibrazioni dei gradienti integrati dei quadrupoli [20] e ha un'incertezza relativa di 0.1%.  $\Delta Q$  viene misurato con l'analizzatore di spettro con un incertezza assoluta pari a  $1 \cdot 10^{-4}$ .

Il contributo maggiore all'incertezza sulla misura della funzione beta in un quadrupolo viene quindi dall'approssimazione per lente sottile. Per stimare tale incertezza si può simulare la procedura di misura con il modello di MAD calcolando la differenza tra i

valori della funzione beta così ottenuti e quelli della macchina in perturbata. Si trova che un valore affidabile dell'errore assoluto sulle funzioni beta misurate è 1  $m$  in tutti i quadrupoli. Quindi le funzioni beta nei punti di minimo, dove valgono 1 – 2  $m$ , sono misurate con un errore relativo molto più alto che nei punti di massimo dove valgono 10 – 20  $m$ .

### 4.3 Misure di emittanza

#### Monitor per Luce di Sincrotrone

Il Monitor per Luce di Sincrotrone (SLM) è usato per misurare le dimensioni trasverse del fascio alla posizione del monitor.

La radiazione visibile di sincrotrone emessa dal fascio al passaggio in un magnete curvante è estratta dalla camera da vuoto, tramite uno specchio raffreddato di alluminio che assorbe la radiazione  $X$ , attraverso una finestra di silicio fuso. L'immagine del profilo trasverso del fascio, dopo avere attraversato un'iride e un sistema di lenti, è messa a fuoco su una camera a CCD PHILIPS VCM6250 e processata da un analizzatore di immagine SPIRICON LBA-100A.

Le emittanze trasverse del fascio sono valutate direttamente dalle dimensioni orizzontale e verticali, inoltre dall'immagine del profilo del fascio si può misurare la rotazione della sezione trasversa del fascio nella posizione del magnete.

Nella figura 4.5 è riportata un'immagine del profilo trasverso del fascio dei positroni.

## Misure di emittanza

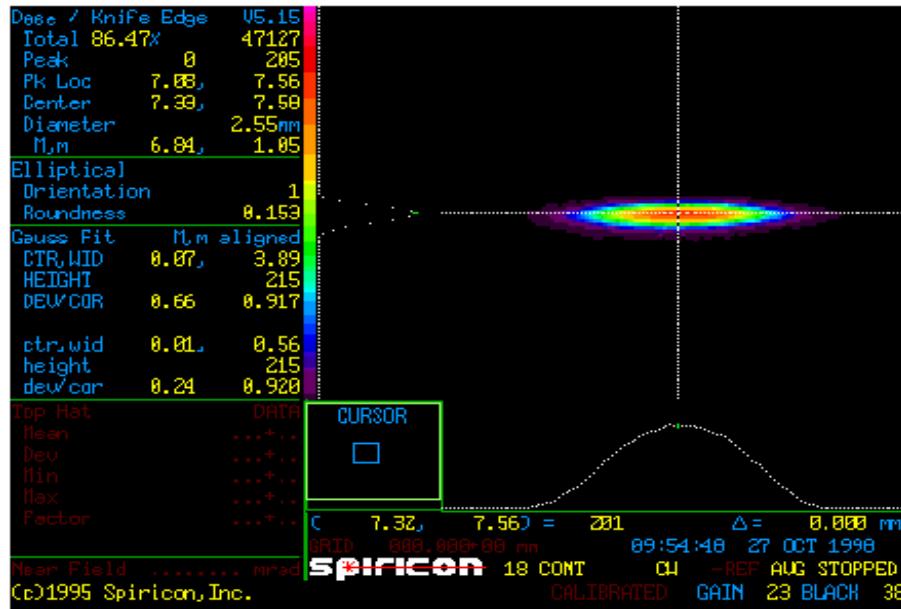
È noto dalla relazione (2.26) che le dimensioni trasverse di un fascio in un punto dell'anello dipendono dalle funzioni ottiche e dalla dispersione di energia del fascio:

$$\sigma_x = \sqrt{\beta_x \epsilon_x + \left( \eta_x \frac{\Delta E}{E_0} \right)^2} \quad (4.11)$$

Nel posizione del SLM il termine proveniente dalla dispersione è trascurabile rispetto a quello dovuto al moto di betatrone.

Dal SLM abbiamo la misura della dimensione orizzontale  $\sigma_x$  (a seconda della struttura ottica può essere circa 2 mm con un errore tipico di 0.05 mm dovuto prevalentemente

Figura 4.5: Il profilo trasverso del fascio dei positroni come viene mostrato nello schermo dell'analizzatore di immagine SPIRICON.



al numero dei pixel) e del rapporto  $R = \sigma_y/\sigma_x$  (valori tipici sono dell'ordine di 0.1 con un incertezza pari a 0.005).

Poiché  $\epsilon_x = \epsilon_0/(1 + k)$  dalla (4.11) si ricavano:

$$\epsilon_0 = (1 + k) \frac{\sigma_x^2}{\beta_x} \quad (4.12)$$

$$R = \sqrt{k \frac{\beta_y}{\beta_x}} \quad (4.13)$$

e quindi:

$$k = R^2 \left( \frac{\beta_x}{\beta_y} \right) \quad (4.14)$$

Le funzioni  $\beta_x$  e  $\beta_y$  nella posizione del SLM si ricavano dalle misure delle funzioni beta nei due quadrupoli più vicini (l'andamento delle funzioni beta intorno al dipolo dove è installato il SLM è lineare entro l'approssimazione con cui sono misurate).

$k$  per gli anelli di Dafne è inferiore a 0.01, con un'incertezza dovuta prevalentemente alle funzioni beta pari a 0.001. Per un'emittanza tipica di circa  $1.0 \text{ mm} \cdot \text{mrad}$  l'incertezza sulla misura di  $\epsilon_0$  dovuta ai vari contributi è circa  $0.1 \text{ mm} \cdot \text{mrad}$ , quindi nella (4.12) il termine dovuto al parametro  $k$  può essere trascurato.

# Capitolo 5

## Il modello dell'ottica lineare con MAD

Il modello per l'ottica degli Anelli Principali di Dafne è stato sviluppato dal gruppo di Dafne [4] usando il programma di simulazione MAD (*Methodical Accelerator Design* [19, 21]) sviluppato presso il CERN di Ginevra. MAD può descrivere l'ottica per particelle cariche in acceleratori a gradiente alternato, può risolvere differenti tipi di problemi: calcolo dei parametri di una struttura magnetica lineare (funzioni di betatron, dispersione, parametri di accoppiamento...), raccordo (*matching*) di strutture lineari, raccordo di matrici di trasferimento, calcolo di orbite chiuse...

*In MAD un anello viene rappresentato da sequenza di elementi fisici - magnetici (dipoli, quadrupoli, multipoli, solenoidi...) e non (sezioni di deriva, cavità RF, monitor...) - ciascuno dei quali è descritto da una opportuna matrice di trasporto* (Appendice A). Ogni elemento deve essere definito dai parametri fisici opportuni (la lunghezza, l'intensità del campo...). Il problema fisico di questa tesi è la determinazione dei parametri

che descrivono tutti gli effetti magnetici lineari per potere predire le frequenze e le funzioni di betatrone, la dispersione, l'emittanza, il coefficiente di accoppiamento e tutte le informazioni utili a migliorare la conoscenza e l'uso degli Anelli Principali. Indico nel paragrafo seguente come viene caratterizzato ciascun elemento di Dafne per la modellizzazione con MAD.

## 5.1 Descrizione degli elementi fisici per MAD

Su ogni elemento magnetico di Dafne sono state eseguite misure in laboratorio e il campo magnetico caratteristico è stato calibrato rispetto alla corrente di alimentazione [20]. Il modello per MAD si basa su queste misure.

### Quadrupoli e Sestupoli

I 14 Quadrupoli Grandi per anello usati negli archi acromatici e nella sezione Short adiacente alla Regione di Interazione di Kloe hanno lunghezza magnetica<sup>1</sup> nominale di 29.0 cm. La dipendenza del gradiente normalizzato del quadrupolo al centro del quadrupolo  $k_{quad}^2 = \frac{ec}{E_0} \left| \frac{\partial B_y}{\partial x} \right|$ , dalle correnti di alimentazione è lineare entro i valori delle correnti con cui sono generalmente alimentati [20]:

$$k_{quad}^2 (m^{-2}) = (16.963 \cdot |I| (A) + 5.62) / E_0 (MeV); \quad I < 123 A. \quad (5.1)$$

---

<sup>1</sup>Definiamo la Lunghezza Magnetica  $L_{mag}$  di un quadrupolo dalla relazione:

$$k_{quad}^2 \cdot L_{mag} = \frac{ec}{E_0} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial B_y}{\partial x} ds \right| .$$

Gli altri 25 Quadrupoli Piccoli installati nel resto dell'anello hanno lunghezza magnetica nominale di 30.0 cm. E il gradiente normalizzato dipende dalla corrente di alimentazione secondo:

$$k_{quad}^2 (m^{-2}) = (9.1277 \cdot |I| (A) + 4.53)/E_0 (MeV); \quad I < 304 A. \quad (5.2)$$

Tutti quadrupoli sono alimentati con valori di corrente nel regime lineare ad eccezione di quelli molto più intensi della inserzione *low-beta* di Dear, i quali tuttavia vengono rappresentati nel modello in maniera differente come è descritto nel seguito.

I 16 sestupoli per anello hanno gradiente sestupolare integrato<sup>2</sup> lineare con le correnti di alimentazione [20]:

$$|k_{sxp}| \cdot L_{mag} (m^{-2}) = (51.177|I|(A) + 49.34)/E_0(MeV); \quad I < 150 A. \quad (5.3)$$

Il gradiente quadrupolare o sestupolare lungo l'asse longitudinale di tali elementi è rappresentato da MAD con il modello rettangolare (gradiente costante per tutta la lunghezza magnetica dell'elemento e zero fuori). La matrice di trasporto di un quadrupolo è la (A.8) dell'Appendice A.

I sestupoli nel modello degli anelli non danno contributo all'ottica lineare, nel caso reale però compaiano (deboli) termini di quadrupolo nel caso in cui l'orbita passi fuori dall'asse dei magneti<sup>3</sup>. Per questo si ha cura di correggere l'orbita nei sestupoli quando vengono accesi.

---

<sup>2</sup>Definito come:

$$k_{sxp} \cdot L_{mag} = \frac{ec}{E_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} ds .$$

<sup>3</sup>Vedi Nota pagina 43.

## Dipoli Curvanti e *Splitter*

I parametri nominali con cui i dipoli curvanti e gli *splitter* sono definiti in MAD sono riportati nella tabella 5.1.

Tipo	$L_{des}$ (m)	gap (cm)	$\alpha$ ( $^{\circ}$ )	$\rho$ (m)	$e_1/ e_2$ ( $^{\circ}$ )	fint
Settore Short	0.990	7.56	40.50	1.401	0.00/0.00	1.2
Rettangolare Short	0.990	7.56	40.50	1.401	20.25/20.25	1.2
Settore Long	1.210	7.56	49.50	1.401	0.00/0.00	1.2
Rettangolare Long	1.210	7.56	49.50	1.401	24.75/24.75	1.2
Splitter	1.450	7.53	9.00	9.495	-0.25/9.00	1.5

Tabella 5.1: Parametri nominali dei dipoli degli Anelli Principali con cui devono essere definiti in MAD.  $L$  è la lunghezza magnetica di progetto,  $gap$  è l'ampiezza del traferro,  $\alpha$  è l'angolo di deflessione impresso dal magnete,  $\rho$  è il raggio di curvatura della traiettoria nel magnete,  $e_1/e_2$  sono gli angoli nel piano orizzontale con cui la traiettoria nominale del fascio entra/esce rispetto alla normale della faccia laterale del magnete (Figura A.1), fint è l'integrale primo del campo normalizzato definito dalla (A.5).

Tuttavia nelle condizioni operative di Dafne alcuni dei parametri che descrivono realmente la struttura degli anelli si scostano dai valori teorici. Una asimmetria destra-sinistra nella struttura di un magnete (§ 3.5), una divergenza locale della traiettoria, una differenza tra la lunghezza magnetica e la lunghezza della traiettoria reale, possono tutte essere cause di effetti focheggiatori aggiuntivi nei vari magneti.

Nei parametri  $e_1$  e  $e_2$  e nella correzione del focaggio verticale fint, definiti per un dipolo ideale in § A, si possono però inglobare tutti questi effetti localizzati nelle regioni dei campi di bordo e rappresentarli su ciascuna delle facce laterali dei magneti tramite una lente sottile (Equazione A.6).

Nel paragrafo § 3.5 abbiamo descritto come i gradienti integrati dei magneti curvanti e degli *splitter*, a causa di asimmetrie, siano diversi da quelli teorici e che in tutti i quattro tipi di dipoli curvanti la differenza è nel verso di dare contributo foceggiante

orizzontale .

Inoltre dalle misure magnetiche è noto che la lunghezza magnetica misurata dei dipoli curvanti differisce da quella di progetto di circa 1 cm (vedi Tabella 3.2), nel verso di aumentare il focheggiamento orizzontale nei dipoli rettangolari e di diminuirlo nei dipoli a settore<sup>4</sup> (l'ordine di grandezza di tale contributo è di un ordine di grandezza inferiore rispetto a quello delle asimmetrie di campo).

Nella tabella 5.2 sono riportate le correzioni agli angoli dovuti alle asimmetrie di campo e alle differenze di lunghezza magnetica.

Tipo	$e_1/e_2$ (rad)	$\Delta e_1/\Delta e_2$ (rad)	$\Delta e_{1,2}$ (rad)
Settore Short	0.00/0.00	-0.015/-0.015	0.004
Rettangolare Short	0.353/0.353	-0.043/-0.043	-0.001
Settore Long	0.00/0.00	-0.007/-0.007	0.002
Rettangolare Long	0.432/0.432	-0.042/-0.042	-0.002
Splitter	-0.004/0.157	0.120/-0.023	0.001

Tabella 5.2: Gli angoli nominali di entrata/uscita  $e_1/e_2$ , le correzioni  $\Delta e_1/\Delta e_2$  dovute alle asimmetrie del campo e le ulteriori correzioni  $\Delta e_{1,2}$  dovute alla differenza tra la lunghezza magnetica misurata e quella di progetto.

*Riguardo invece a scostamenti del valore degli angoli di entrata della traiettoria nei magneti dovuti all'orbita (la traiettoria di equilibrio chiusa che dipende dalla struttura magnetica di tutto l'anello) non si può avere nessuna misura diretta* in quanto occorrerebbero due monitor di posizione consecutivi tra ogni dipolo e il successivo elemento magnetico. Inoltre i campi di bordo dei dipoli possono far cambiare localmente la divergenza della traiettoria anche di 10–20 mrad, sufficienti quindi a dare una correzione al focheggiamento paragonabile con quella delle asimmetrie del campo.

---

<sup>4</sup>Dalle A.6-A.7 dell'Appendice A una differenza  $\Delta L = L_{mag} - L_{des}$  equivale, nell'elemento di matrice  $M_{21}^{bend}$  che dà il termine focheggiante, a una variazione  $\Delta e_1 = \Delta e_2 \approx \frac{\Delta L}{2L}$ .

## ***Wiggler***

Il campo di ogni polo del *wiggler* è descritto in MAD con un modello a gradini (figura 5.1). In MAD ogni polo è rappresentato tramite tre dipoli, quelli laterali con campo e lunghezza magnetica la metà di quello centrale.

Ogni dipolo è definito come un magnete a settore inserito tra due *lenti sottili* che riproducono il focaggio verticale e orizzontale. La correzione al focaggio verticale dovuta all'integrale primo del campo *fint* è usata solo nei dipoli centrali di ogni polo dove la curvatura è maggiore.

Il valore dei due parametri  $e_1$   $e_2$  è la metà dell'angolo di curvatura di ciascuno dei dipoli rettangolari in cui abbiamo ripartito il *wiggler*. A tale valore viene sommato il

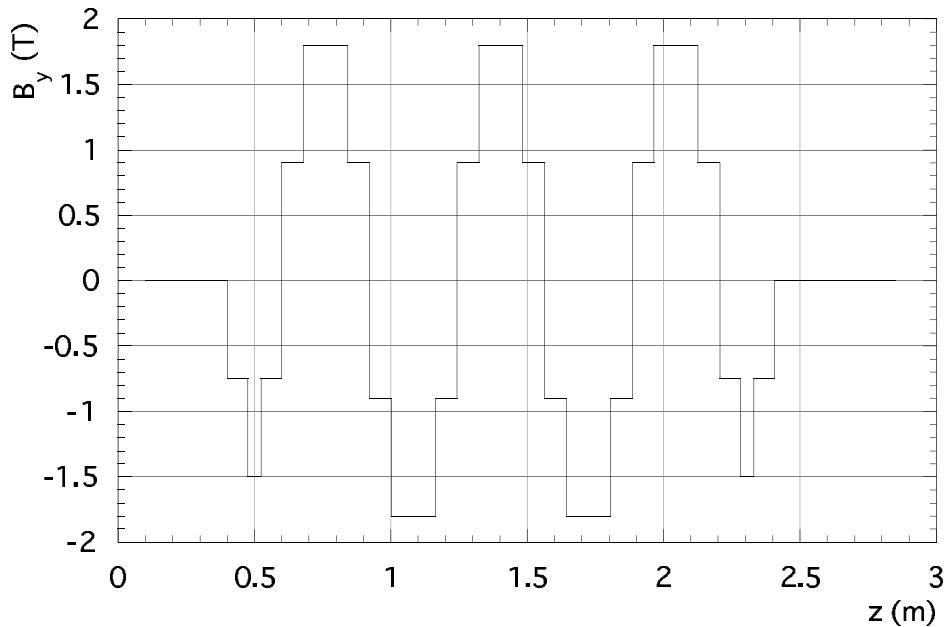


Figura 5.1: Il modello del campo del *wiggler*.

contributo quadrupolare efficace  $\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}x$  dovuta al passaggio fuori asse della traiettoria ondulata in presenza di termini sestupolari<sup>5</sup>. Questo ha segno costante lungo il *wiggler* (Figura 5.2) nel verso di aumentare il focheggiamento verticale. Il valore integrato (0.58 T) di tale contributo quadrupolare ripartito polo per polo viene distribuito su ciascuna delle lenti sottili all’entrata e all’uscita dei singoli poli aumentando i valori di  $e_1$ ,  $e_2$  del 25% [12]. Infine come nei magneti curvanti anche nei *wiggler* si deve tenere conto di correzioni ai termini focheggianti dovuti allo scostamento dell’orbita del fascio dalla traiettoria nominale.

## Solenoide di KLOE e Compensatori

Nel modello di MAD ciascun magnete solenoidale è ripartito in sezioni di 3 cm di lunghezza, con campo longitudinale che varia secondo le misure del campo magnetico solenoidale lungo l’asse. La matrice con cui è rappresentata ogni sezione è la (A.12) nell’Appendice.

## Quadrupoli Permanenti in IR1

I due tripletti di quadrupoli della Regione di Interazione di Kloe sono immersi nel campo solenoidale del rivelatore. Ciascun quadrupolo ruotato è rappresentato in MAD come una sequenza di lenti sottili, alternate con le sezioni lunghe 3 cm del magnete solenoidale di Kloe. Ciascuna lente ha un’intensità che varia secondo il gradiente misurato lungo l’asse di ciascuno dei tre tipi di quadrupoli.

---

<sup>5</sup>Vedi Nota pagina 43.

## I Quadrupoli in IR2

I sei quadrupoli della seconda Regione di Interazione sono di due tipi: due piccoli e quattro con apertura larga. Il passaggio fuori dall'asse dei quadrupoli, dovuto all'angolo di incrocio tra le traiettorie dei due fasci, porta alla presenza di termini dipolari. In MAD quindi questi quadrupoli vengono rappresentati come magneti dipolari con un termine di quadrupolo. La matrice di trasporto della IR2 è stata prima calcolata integrando la traiettoria fuori asse e considerando anche i campi di bordo ricavati dalle misure magnetiche [4]. Il valore del campo e del gradiente inseriti nel modello sono quelli che meglio riproducono la matrice di trasferimento così ottenuta.

## 5.2 Il modello di MAD

La modellizzazione degli anelli di Dafne si basa sulle misure magnetiche eseguite sugli elementi. I parametri che non si possono conoscere da queste o altre misure dirette si devono ricavare indirettamente dalle misure ottiche.

Nel modello i valori degli angoli di entrata e di uscita nei dipoli curvanti, negli *splitter* e nei *wiggler* vengono aggiustati con un fit delle misure della dispersione e delle funzioni di betatron, che può essere eseguito usando alcuni comandi di MAD. Riporto di seguito il procedimento con cui ho sviluppato un modello che riproducesse l'ottica dell'anello degli elettroni del 13 maggio 2000.

Il precedente modello era stato calcolato per riprodurre una diverso punto di lavoro con una diversa orbita di riferimento. Utilizzava calibrazioni dei quadrupoli diverse da

<i>Modello MAD elettroni 13 maggio 2000</i>		
Parametri del fit	valore nominale	valore MAD
QUAI1K01/6	1.000	0.985
QUAI1K02/5	1.000	1.001
QUAI1K03/4	1.000	1.035
QUAI2001/7	1.000	0.971
QUAI2002/6	1.000	0.978
QUAI2003/5	1.000	0.939
$\Delta E_{1,2}$ SLS ( <i>rad</i> )	-0.010	0.046
$\Delta E_{1,2}$ PES ( <i>rad</i> )	-0.044	-0.032
$\Delta E_{1,2}$ SLL ( <i>rad</i> )	-0.004	0.022
$\Delta E_{1,2}$ PEL ( <i>rad</i> )	-0.022	-0.041
Fint SLS	1.05	1.04
Fint PES	1.15	0.45
Fint SLL	1.09	0.48
Fint PEL	1.18	0.48
$\Delta E_1$ SPLI1001 ( <i>rad</i> )	0.000	-0.076
$\Delta E_1$ SPLI1002 ( <i>rad</i> )	0.000	-0.015
$\Delta E_1$ SPLI2001 ( <i>rad</i> )	0.000	-0.007
$\Delta E_1$ SPLI2002 ( <i>rad</i> )	0.000	-0.057
Poli Int. Wiggler	1.00	1.087
Poli Term. Wiggler	1.00	0.622
Fint Wiggler	0.00	0.004

Tabella 5.3: I parametri ricavati dal fit delle misure del 13 maggio 2000 delle funzioni e delle frequenze di betatratrone e della dispersione dell'anello degli elettroni. Le calibrazioni dei quadrupoli degli archi non sono state variate. QUAI1K01-6 indicano le calibrazioni dei magneti permanenti della IR1, QUAI2001-7 indicano le calibrazioni dei magneti della IR2,  $\Delta E_{1,2}$  SLS etc. e Fint SLS etc. le correzioni aggiuntive agli angoli di entrata/uscita e i *fint* dei dipoli curvanti *Sector-Like/Parallel-End Short* e *Long*,  $\Delta E_1$  SPLI1001-2002 le correzioni agli angoli di entrata degli *splitter* Poli Int. e Poli Term. le calibrazioni dei termini di quadrupolo lente sottile nei poli interni e nei poli terminali dei *wiggler*.

quelle delle misure magnetiche, ottenute da un fit delle funzioni ottiche.

Ho invece scelto di usare come punto di partenza un modello che utilizzasse le calibrazioni dei quadrupoli, i valori degli angoli di entrata e di uscita nei dipoli curvanti e nei *wiggler* uguali a quelli ricavati dalle misure magnetiche che ho discusso in § 3.5. Magneti distinti della stessa famiglia sono descritti come identici.

Con i valori iniziali dei parametri ottenevo funzioni ottiche non verosimili fisicamente. Con i parametri riportati nella tabella 5.3 ho quindi eseguito un fit delle misure delle funzioni beta nei punti di massimo (in cui le misure hanno errore relativo più basso) e della dispersione nei intorno ai Punti di Interazione (dove la dispersione è bassa e l'errore è minore) eseguite sull'anello degli elettroni il 13 maggio 2000. Le funzioni di betatrone e la dispersione riprodotte dal modello dopo il fit di MAD sono riportate e messe a confronto con quelle predette dopo il fit di LOCO nel capitolo successivo.

### 5.3 Necessità di un modello più accurato

L'accuratezza del modello così calcolato dipende dalle incertezze sulle misure da cui lo abbiamo ricavato, e le misure delle funzioni di betatrone hanno errori relativi non inferiori al 5-10%. Un insieme di misure di beta e dispersione corrispondenti a una struttura può essere facilmente riprodotta da un fit con MAD. Poiché il numero di parametri è uguale o spesso maggiore del numero di misure è sempre possibile ottenere un buon accordo con l'insieme di misure scelte. Questo non significa però che i parametri trovati corrispondano agli elementi reali degli Anelli. Se ad esempio non si aggiungono come vincolo del fit i numeri di betatrone misurati, questi non sono gene-

ralmente ben riprodotti dal modello così ottenuto.

Per verificare quanto i parametri del modello siano in accordo con le caratteristiche magnetiche reali degli anelli si può testare il modello trovato su diversi insiemi di misure corrispondenti a altri punti di lavoro e configurazioni.

Generalmente è necessario iterare la procedura di fit usando diversi insiemi di misure fino a trovare dei valori “medi” dei parametri che riproducono abbastanza bene tutte le configurazioni [4].

L’utilità di un modello “medio” è quello di avere un unico strumento per trattare punti di lavoro e configurazioni abbastanza differenti. Il prezzo è che nella semplificazione con cui abbiamo descritto gli Anelli si perdono informazioni importanti come ad esempio la dipendenza dell’ottica dall’orbita di riferimento scelta. Inoltre descrivendo con parametri identici tutti gli elementi di una stessa famiglia di magneti non si ha la possibilità di considerare differenze sensibili che possono essere presenti fra di essi.

Infine poichè l’accoppiamento è stato corretto entro o meglio dei valori di progetto, le perturbazioni dovute alle deboli sorgenti residue di accoppiamento sulle funzioni ottiche dei due modi disaccoppiati sono molto piccole. Il fit delle funzioni di betatron e della dispersione non può quindi riprodurre accuratamente l’accoppiamento e non si possono individuare le sorgenti se non dall’analisi delle matrici di risposta dell’orbita (§ 4.1) ciascuna delle quali contiene migliaia di dati sull’intera struttura magnetica dell’anello con un’accuratezza molto maggiore di quella delle misure delle funzioni beta. L’analisi delle matrici di risposta è stata eseguita con il programma LOCO ed è descritta nel capitolo seguente.

Prima però di procedere all’utilizzo di LOCO ho portato alcuni miglioramenti nella descrizione dei *wiggler* e degli *splitter* nel modello di MAD.

## *Wiggler*

Nel modello già utilizzato gli angoli di entrata e uscita in ciascuno dei dipoli in cui è stato ripartito ogni polo del *wiggler* sono la metà dell'angolo di deflessione del dipolo. In realtà la traiettoria entra ed esce in ogni dipolo con due angoli differenti: ad esempio entra nel primo dipolo terminale perpendicolarmente alla faccia laterale ( $e_1 = 0$ ) ed esce con un angolo pari alla deflessione del dipolo, entra nel secondo dipolo con un angolo negativo ed esce con un angolo positivo pari alla deflessione totale dei primi due dipoli e così via.

;-

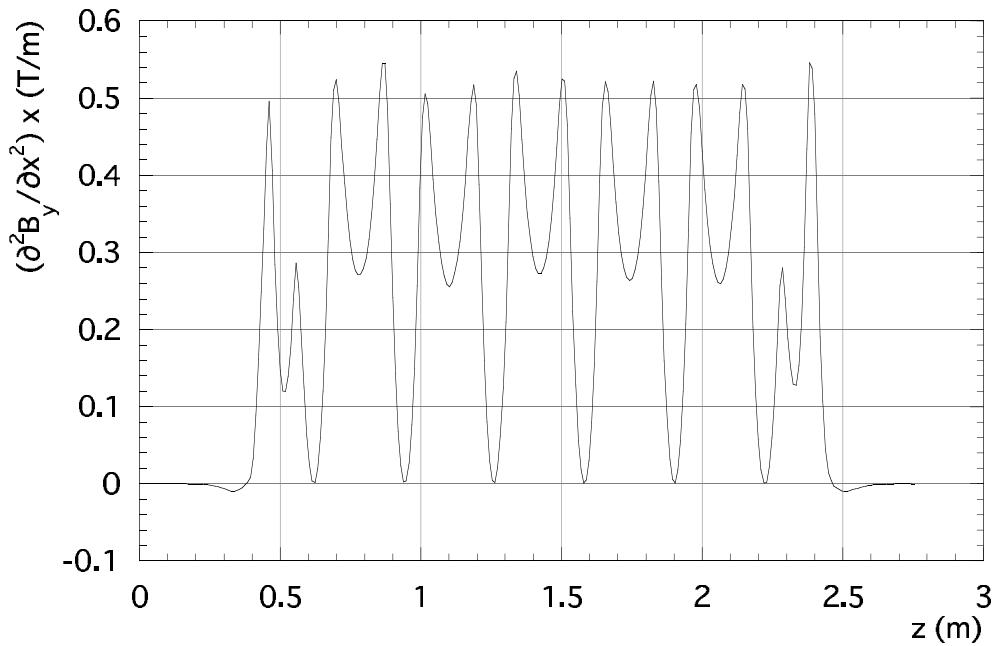


Figura 5.2: Termine quadrupolare efficace lungo la traiettoria all'interno del *wiggler* (Figura 3.13) dovuto al termine sestupolare lungo l'asse (Figura 3.15). Dà un contributo focheggiante verticale in tutti i poli.

to aumentando il focheggiamento dei campi di bordo di ciascun dipolo. In realtà il contributo di quadrupolo è distribuito abbastanza uniformemente anche all'interno di ciascun dipolo (Figura 5.2).

Tenendo conto di queste due caratteristiche, ho disegnato un nuovo modello dei *wiggler* con gli angoli di entrata e uscita nominali della traiettoria calcolati per ciascun dipolo. Il contributo del quadrupolo efficace è invece descritto nei dipoli centrali di ciascun polo come un gradiente uniforme,  $\frac{\partial B_y}{\partial x} \cdot L_{dip} = \int_{dip} B_1(z) dz$ , e il valore del quadrupolo efficace integrato sui dipoli più corti è introdotto con due lenti sottili poste sui picchi di figura 5.2. Nei “semipoli” terminali ho messo semplicemente due lenti sottili nella posizione dei due picchi.

La calibrazione del quadrupolo efficace nei poli negativi, nei poli positivi e nei poli terminali è descritta da tre parametri indipendenti per tenere meglio conto delle variazioni con gli spostamenti della traiettoria.

## *Splitter*

Ho corretto i valori degli angoli  $e_{1,2}$  secondo la tabella 5.2. I vecchi angoli erano dedotti dalle caratteristiche geometriche della traiettoria negli *splitter* (Figura 3.8) mentre quelli nuovi tengono conto delle misure del gradiente trasverso dovuto all'avvolgimento vicino nella regione dei campi di bordo.

Ho tenuto conto della presenza del termine di sestupolo in questi magneti, introducendo un quadrupolo *skew* lente sottile di intensità pari al sestupolo integrato per lo spostamento verticale della traiettorie nello *splitter*:  $\frac{\partial B_y}{\partial y} \cdot L = (\int 2 B_2 dz) \cdot \Delta y$ . Questo termine è una piccola sorgente di accoppiamento.

# Capitolo 6

## Ottimizzazione del modello con LOCO

La misura delle matrici di risposta delle orbite (Capitolo 4) può essere utile per calibrare in modo accurato l'ottica lineare di un acceleratore circolare. Nel 2000 è stato introdotto l'uso di LOCO a Dafne (*Linear Optics from Closed Orbit*) [24]: un codice *fortran* sviluppato da James Safranek presso lo NSLS *X-Ray Ring* di Brookhaven per determinare i campi e i gradienti degli elementi magnetici, e la calibrazione e le rotazioni intorno alla direzione longitudinale del fascio dei correttori e dei monitor di posizione del fascio (BPM).

Il lavoro di *debugging* del codice è stato svolto da Catia Milardi. Con lei ho in seguito collaborato per adattare il programma al modello di Dafne.

La matrice di risposta per ciascuno dei due anelli di Dafne è data dallo spostamento di orbita misurato in 33 monitor orizzontali e 33 verticali per ciascuno dei 31 magneti correttori orizzontali e 31 verticali: 4092 punti misurati con un'accuratezza inferiore ai

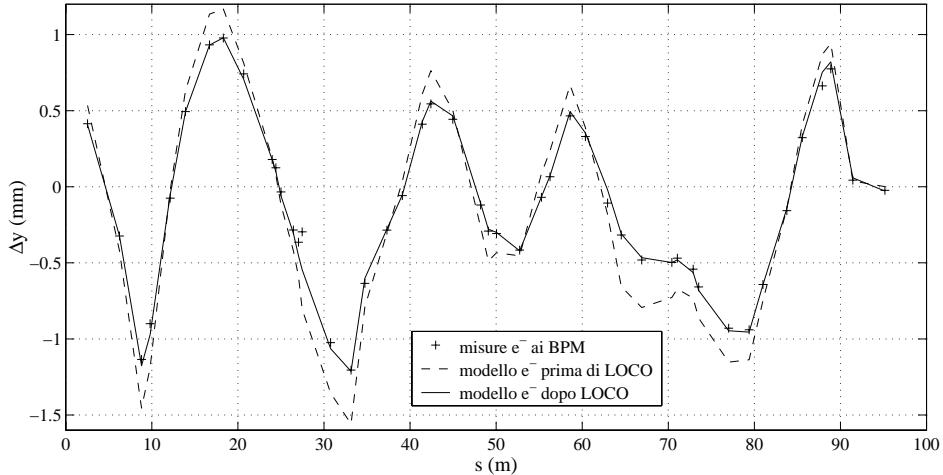


Figura 6.1: Un esempio di convergenza ottenuta con LOCO dell’orbita verticale dovuta al correttore verticale CVVES101 dell’anello degli elettronni. Gli errori sulle misure sono inferiori a  $10 \mu\text{m}$  come detto in § 4.1.

$10 \mu\text{m}$  che dipendono dalla struttura magnetica dell’intero anello.

Le misure nei monitor delle due Regioni di Interazione non sono state considerate per il fit poichè, a causa del passaggio del fascio fuori dall’asse della camera da vuoto, la nonlinearità della risposta dei monitor è maggiore e quindi la calibrazione con cui è misurata la posizione è meno precisa.

Per questa tesi ho analizzato misure acquisite fra marzo e ottobre 2000.

## 6.1 Modello dalle Matrici di Risposta

Dati i campi magnetici e i gradienti dei magneti di un anello di accumulazione, è possibile calcolare la matrice di risposta dalle equazioni (2.19) e (4.4). L’analisi di LOCO rovescia questo processo e calcola la struttura magnetica di un anello data la matrice

di risposta. Per fare ciò i parametri descrittivi del nostro modello per MAD vengono variati da LOCO fino a che le orbite della matrice calcolata riproducono con ragionevole accuratezza quelle della matrice misurata. La figura 6.1 mostra ad esempio la convergenza ottenuta per l'orbita dovuta a uno dei correttori.

*Prima di parlare della convergenza ottenuta è importante dire che l'accuratezza con cui sono misurate le orbite eccede di gran lunga l'accuratezza con cui un modello per l'ottica lineare di Dafne deve riuscire a riprodurla.*

La presenza di componenti magnetiche nonlineari lungo gli anelli alcune delle quali non del tutto note, il campo dei dipoli correttori e l'eventuale passaggio dell'orbita di riferimento fuori dall'asse dei quadrupoli, l'influenza dei campi dispersi dei magneti della linea di trasferimento degli elettroni o di un anello rispetto all'altro, sono effetti non compresi nel modello che danno sicuramente contributi sulle orbite di risposta misurate dell'ordine di alcuni micron<sup>1</sup>.

Osservando come si distribuiscono gli scarti tra il modello e le misure si può fare una stima ragionevole sulla propagazione degli errori sistematici sui parametri del modello come è riportato nel seguito.

*L'utilità del modello non deve essere quello di calcolare le orbite di risposta. Esso deve costituire uno strumento utile per la messa a punto dell'ottica e per la ricerca di nuovi punti di lavoro della macchina.*

I parametri del modello di MAD sono variati in maniera da minimizzare la deviazione  $\chi^2$

---

<sup>1</sup>Per valutare l'ordine di grandezza del contributo che tutti questi effetti possono dare alle orbite di risposta, si possono ad esempio confrontare più orbite di risposta acquisite intorno a orbite di riferimento diverse, oppure calcolare con MAD le orbite di risposta simulando la presenza di nonlinearità magnetiche e di errori di campo distribuiti casualmente.

tra la matrice di risposta misurata e quella del modello ( $M_{mis}$  e  $M_{mod}$ ).

$$\chi^2 = \sum_{i,j} \frac{(M_{ij}^{mod} - M_{ij}^{mis})^2}{\sigma_i^2} := \sum_k B_k^2 ; \quad (6.1)$$

dove la somma è sui 31 correttori orizzontali e verticali di Dafne e sui 41 monitor di posizione orizzontali e verticali;  $\sigma_i$  sono gli errori casuali dovuti al rumore dell'elettronica di acquisizione misurati per ciascun monitor (§ 4.1).

Il vettore  $B_k$ , con  $k = 1, 2, \dots, 2n \times 2m$  che ordina tutti gli elementi di  $M_{ij}$ , ha 4092 punti, uno per ogni elemento della matrice di risposta. Minimizzare  $\chi^2$  è equivalente a minimizzare il modulo del vettore  $B_k$ . Si parte da dei valori iniziali dei parametri del modello,  $X_N$ , che danno il vettore iniziale  $B_{k0}$ ; LOCO trova le variazioni  $\Delta X_N$  che azzerano meglio l'equazione  $B_{k0} + \Delta B_k = 0$ . Assumendo piccole variazioni dei parametri,  $B_k$  può essere presa come una funzione lineare in  $X_N$ ,  $\Delta B_k = \frac{\partial B_k}{\partial X_N} \Delta X_N$ . Il sistema di equazioni da risolvere per minimizzare  $\chi^2$  è dunque:

$$B_k + \sum_N \frac{\partial B_k}{\partial X_N} \Delta X_N = 0 . \quad (6.2)$$

Si tratta quindi di risolvere un problema lineare di minimi quadrati con un numero elevato di parametri da calcolare. LOCO usa il metodo di minimizzazione della scomposizione in valori singolari (*Singular Value Decomposition*<sup>2</sup>: SVD).

Poiché la dipendenza delle orbite dai gradienti dei quadrupoli e dagli altri parametri non sarà generalmente lineare, LOCO deve essere iterato più volte fino a che non converge ai migliori parametri  $X_N$  per il modello.

Per minimizzare le incertezze sui parametri calcolati, il numero di gradienti incogniti da

---

<sup>2</sup>Vedi Appendice B.

calcolare dovrebbe essere minimizzato. Errori di gradiente possono provenire da errori nei quadrupoli o da spostamenti dell'orbita chiusa nei sestupoli. *Le misure analizzate sono quindi state acquisite con i sestupoli e i quadrupoli skew spenti.*

Per gli anelli di Dafne i parametri del fit che ho variato con LOCO sono i gradienti normali di ciascuno dei quadrupoli, gli angoli di entrata e uscita della traiettoria rispetto alle facce laterali dei magneti curvanti, i gradienti efficaci dei *wiggler*, le calibrazioni dei solenoidi di Kloe e dei compensatori, le calibrazioni dei BPM e dei magneti correttori, gli errori di rotazione dei BPM e dei correttori.

A questi si possono aggiungere gli errori di rotazione dei quadrupoli che però non davano un contributo significativo alla convergenza del fit per Dafne e finivano spesso per aumentare la degenerazione delle soluzioni. Perciò non ho considerato le rotazioni dei quadrupoli, ad eccezione degli *offset* di rotazione dei due tripletti di quadrupoli permanenti dentro Kloe che sappiamo essere non trascurabili.

Inoltre, analogamente all'*X-Ray Ring* di Brookhaven [24] per cui è stato sviluppato LOCO, ho osservato che le orbite di risposta dei magneti correttori vicino ad altro materiale ferromagnetico erano quelle con il fit peggiore. Nel caso di Dafne corrispondevano in genere ai correttori adiacenti ai dipoli curvanti e agli *splitter*. Questi correttori hanno campi di bordo molto allungati che facilmente vengono catturati dai ferromagneti dei dipoli. L'effetto è quello di aumentare l'intesità dei correttori e di spostarne il centro magnetico dal centro meccanico. Ho perciò preso in considerazione questo fenomeno variando anche la posizione dei centri magnetici dei correttori.

Tutti questi parametri non erano però sufficienti a riprodurre i termini di accoppiamento delle matrici risposta. Sapevamo infatti che l'accoppiamento osservato a Dafne non era originato solo dalle rotazioni dei tripletti dei quadrupoli dentro Kloe e dai solenoidi della IR1. Variando la posizione verticale del fascio o intorno a IR1 o intorno a IR2 si

è più volte osservato una variazione dell'accoppiamento analoga nelle due Regioni di Interazione sia per i positroni sia per gli elettroni [15]. Questa osservazione suggeriva la presenza di sorgenti di accoppiamento presenti in entrambe le Regioni di Interazione o vicino ad esse.

Gli elementi magnetici comuni alla struttura delle due Regioni sono solo gli *splitter*, che hanno un termine sestupolare noto, come già accenato nel capitolo 3, ma non sufficiente a giustificare le nostre misure.

L'ipotesi fatta da me è stata che potessero essere i magneti correttori "C" la sorgente di accoppiamento. Questi magneti posizionati di seguito agli *splitter* fuori dalle Regioni di Interazione sono utilizzati per aggiustare l'incrocio orizzontale dei fasci e la separazione intorno ai Punti di Interazione.

Introducendo come parametri del modello un quadrupolo *skew* nella posizione dei magneti "C", le orbite accoppiate venivano molto ben riprodotte dal fit di LOCO.

In seguito ho trovato che questo termine quadrupolare *skew* efficace è dovuto al passaggio del fascio fuori dall'asse di tali magneti in presenza di un termine di sestupolo non trascurabile. Nel Capitolo 7 è descritta dettagliatamente questa sorgente di accoppiamento nei cosiddetti correttori "C".

Complessivamente sono stati variati 251 parametri (tabella 6.1) per riprodurre 4092 elementi di ciascuna matrice di risposta dei due anelli di Dafne.

Nei seguenti paragrafi è discussa l'accordo fra i modelli per i due anelli e i dati misurati, e entro quali limiti le calibrazioni, le rotazioni e gli altri parametri calcolati corrispondono ai valori reali degli elementi di Dafne.

Parametro variato	numero
Calibrazioni Gradienti Quadrupoli archi	39
Calibrazioni Gradienti Quadrupoli IR	6
Rotazioni Tripletti IR1	2
Guadagni BPM	33
Rotazioni BPM	33
Calibrazioni Magneti Correttori	31
Rotazioni Magneti Correttori	31
Centri Longitudinali Magneti Correttori	31
Angoli entrata/uscita Dipoli e <i>Splitter</i>	12
Fint Dipoli e <i>Wiggler</i>	13
Gradienti efficaci <i>Wiggler</i>	3
Calibrazioni Solenoidi Kloe e Compensatori	3
Quadrupoli normali efficaci “C”	4
Quadrupoli <i>skew</i> efficaci “C”	4
Totale parametri variati	251

Tabella 6.1: I parametri del fit di LOCO.

## 6.2 Analisi degli errori

Gli errori casuali sui dati misurati, come il rumore casuale sulle misure delle matrici di risposta, si propagano in modo noto sull’incertezza dei parametri calcolati dal fit e si possono ad esempio calcolare analiticamente come fa il programma LOCO utilizzando la relazione (B.5). Gli errori sistematici invece — e in un sistema complesso come un anello di accumulazione di Dafne è impossibile eliminarli tutti — influenzano il fit in maniera non prevedibile a priori, cosicché può essere difficile valutare il grado di incertezza dei parametri calcolati.

## Errori casuali e scomposizione in valori singolari

Il numero di punti dati, 4092, è molto maggiore del numero di parametri del modello, 251, ma questo non basta per essere sicuri dell'unicità della soluzione trovata.

Un criterio per valutare l'unicità si ricava dai cosiddetti valori singolari con cui è costruita la soluzione del sistema lineare (6.2). Il metodo di scomposizione in valori singolari (Appendice B), costruisce la soluzione come somma di tante combinazioni lineari ortogonali fra loro dei valori dei parametri del fit, una per ogni valore singolare dell'equazione (B.2). La presenza di autovalori molto piccoli è indice di degenerazione nella soluzione del sistema. Ho dovuto quindi stabilire una soglia per il mio problema sotto la quale scartare i contributi alla soluzione che introdurrebbero errori di approssimazione.

Una singolarità della matrice  $\partial B_k / \partial X_n$  è nota a priori e corrisponde al fatto che se le calibrazioni dei correttori sono moltiplicate per un fattore costante e i guadagni dei BPM sono scalati in modo inverso si ottiene la stessa matrice di risposta. L'autovalore corrispondente a tale singolarità è ben riconoscibile in questo caso, essendo quasi 10 ordini di grandezza minore del successivo autovalore più piccolo. Eliminando solo questo valore singolare, LOCO trovava soluzioni non verosimili fisicamente, segno della presenza di ulteriori degenerazioni più difficili da individuare. Per stabilire la soglia sotto cui scartare i valori singolari sono partito da un valore molto basso ( $sogliaSVD \equiv autoval_{min}/autoval_{max} = 10^{-4}$ ) e la ho via via alzata dopo varie prove fino ad ottenere una buona convergenza del modello con valori dei parametri verosimili fisicamente e che dessero soluzioni delle funzioni ottiche (funzioni beta, dispersione, frequenze di betatron) in accordo con quelle misurate ( $sogliaSVD = 10^{-2}$ ).

Ho ottenuto che gli autovalori da scartare erano circa 40. L'interpretazione che ho dato per giustificare la presenza di tali degerazioni nella matrice  $\partial B_k / \partial X_n$  è che cor-

rispondano al fatto che quando tra un BPM e il successivo sono inseriti più di un elemento magnetico (quadrupoli o dipoli), possono esistere più combinazioni dei relativi parametri del fit che generano proprietà focheggianti molto simili. Per esempio aumentare l'intensità di un quadrupolo defocheggiante o l'angolo di entrata della traiettoria in un dipolo poco distante, può avere effetti molto simili sull'ottica dell'anello. A conferma che è la presenza di tali parametri a creare degenerazioni nella soluzione, ho osservato che lasciando un solo parametro da variare tra un BPM e il successivo, non si trovano queste degenerazioni (si ha però una convergenza leggermente peggiore, come mi potevo attendere).

## Errori sistematici

La valutazione degli errori sistematici presenta problemi più complessi. Una fonte nota di errori sistematici nelle misure è la nonlinearità della risposta dei BPM. Aumentando le variazioni dei correttori per ottenere orbite della matrice di risposta più ampie, si migliora il rapporto tra segnale e rumore delle misure. Dall'altra parte però si introducono maggiori errori sistematici dalla nonlinearità dei BPM e si aumentano tutti gli effetti non descritti dal modello dell'ottica lineare citati in § 6.1. Facendo alcune prove e confronti si trova il compromesso migliore con orbite di risposta di ampiezza 2 mm: con queste orbite le nonlinearità dei BPM sono trascurabili rispetto al livello medio del rumore delle misure di circa 0.010 mm.

Prima del fit lo scarto quadratico medio tra  $M_{mod}$  e  $M_{mis}$  per entrambi gli anelli era circa 0.15 mm con  $\chi^2$  iniziale dell'ordine di  $10^6$ , dopo il fit si converge sia per i positroni che per gli elettroni a uno scarto quadratico medio di circa 0.020 mm corrispondente

a  $\chi^2 \approx 25000$  per 3841 gradi di libertà.

Questo significa che gli errori sistematici nella descrizione ottenuta dal modello danno un contributo sui parametri del fit confrontabile con quello degli errori casuali.

Per dare una valutazione degli errori complessivi sui parametri del fit dovuti alla propagazione degli errori casuali e sistematici, ho osservato che gli scarti tra modello e misure sono distribuiti in maniera uniforme sia per i monitor che per i correttori: nella figura 6.2 è riportata la media dei residui per ciascun monitor di posizione di

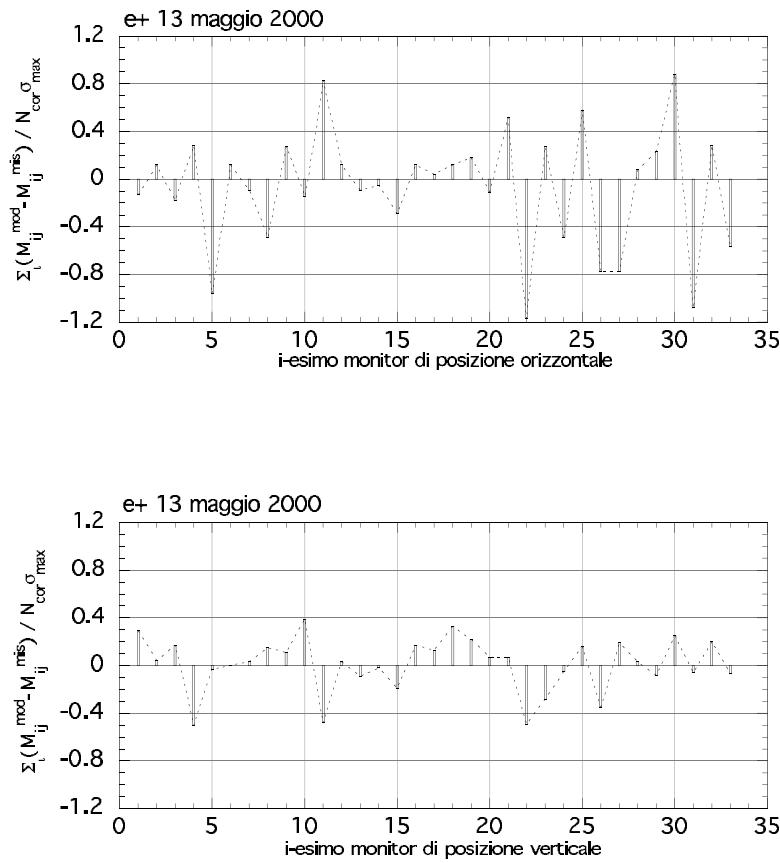


Figura 6.2: La media dei residui del fit di LOCO nel caso dei positroni del 13 maggio 2000 per ciascuno dei 33 monitor di posizione orizzontali e verticali.

una delle matrici di risposta analizzate. Questo confermerebbe che gli effetti trascurati nel modello dell'ottica lineare di Dafne sono distribuiti in maniera piuttosto uniforme lungo gli anelli.

Una stima degli errori dei parametri si può ottenere aumentando gli errori casuali  $\sigma_i$  nell'equazione (6.1) di un fattore di scala  $S$  definito come:

$$S = \sqrt{\chi^2/(N - M)} \quad (6.3)$$

con  $N$  numero di dati, 4092,  $M$  numero di parametri del modello, 251, e calcolando nuovamente la propagazione degli errori sui parametri del modello. Le incertezze così stimate per ciascun tipo di parametro sono riassunte nella tabella 6.2.

Parametro	Variazione
Gradienti Quadrupoli archi	0.05 %
Gradienti Quadrupoli IR	0.5 %
Rotazioni Quadrupoli IR1	2 mrad
Angoli entrata/uscita Dipoli	1 mrad
Angoli entrata/uscita <i>Splitter</i>	3 mrad
Gradienti efficaci <i>Wiggler</i>	1 %
Fint Dipoli <i>Splitter</i> e <i>Wiggler</i>	5 %
Solenoide Kloe	0.2 %
Solenoidi Compensatori	0.4 %
Guadagni BPM	1 %
Rotazioni BPM	4 mrad
Calibrazioni Magneti Correttori	1 %
Rotazioni Magneti Correttori	5 mrad
Centri Longitudinali Magneti Correttori	1 cm

Tabella 6.2: Errori quadratici medi dei parametri del fit per i positroni e per gli elettroni dovuti sia al rumore casuale delle misure sia agli errori sistematici del modello.

Le due analisi della matrice dei positroni e di quella degli elettroni si confermano fra loro, infatti forniscono gli stessi valori per i parametri relativi agli elementi in comune

fra i due anelli (solenoidi e i tripletti dei quadrupoli delle due Regioni di Interazione) con scarti dell'ordine degli errori calcolati analiticamente e danno risultati analoghi per il resto dei due anelli.

Infine un criterio per valutare se, nonostante non si possano eliminare tutte le cause di errori sistematici nel modello, i risultati dell'analisi delle matrici di risposta corrispondono realmente agli anelli di Dafne, è quello di confrontarli con misure indipendenti da quelle delle orbite da cui sono stati ricavati: misure magnetiche, funzioni e numero di betatron, dispersione, emittanze e accoppiamento, confermano che i parametri del fit sono consistenti. Queste misure sono discusse nel paragrafo seguente.

## 6.3 Risultati

Per Dafne ho analizzato due diverse matrici di risposta per ciascuno dei due anelli degli elettroni e dei positroni misurate su differenti punti di lavoro della macchina e intorno a diverse orbite di riferimento.

I parametri degli anelli di Dafne che riproducono meglio le matrici di risposta, predicono accuratamente anche l'emittanza, il coefficiente di accoppiamento, la dispersione, le funzioni e le frequenze di betatrone misurate.

Le frequenze di betatrone sono generalmente riprodotte entro uno scarto di 0.005, migliorando di un ordine di grandezza la precisione con cui sono riprodotte dal fit delle funzioni beta e della dispersione che si può fare con MAD [4].

L'emittanza e il coefficiente di accoppiamento sono predetti entro gli errori di misura. Nelle pagine seguenti sono riportate le distribuzioni dei residui del modello per le quattro matrici di risposta analizzate. Tali distribuzioni sono ben riprodotte dalla

Anello elettroni 13 maggio 2000			
punto di lavoro	misure	modello iniziale	modello LOCO
$Q_x$	5.1143	5.1185	5.1176
$Q_y$	5.1450	5.1492	5.1468
$\epsilon_0$	$0.80 \pm 8$	0.85	0.81
k	$0.003 \pm 1$	0.0004	0.0025
$\chi^2 / gdl$ matrici risposta			23725 / 3841
$\chi^2 / gdl$ beta x			20.6 / 45
$\chi^2 / gdl$ beta y			28.6 / 45
$\chi^2 / gdl$ dispersione			43.3 / 47

Tabella 6.3: Numeri di betatron, emittanza e accoppiamento dell'anello degli elettroni del 13 maggio 2000.

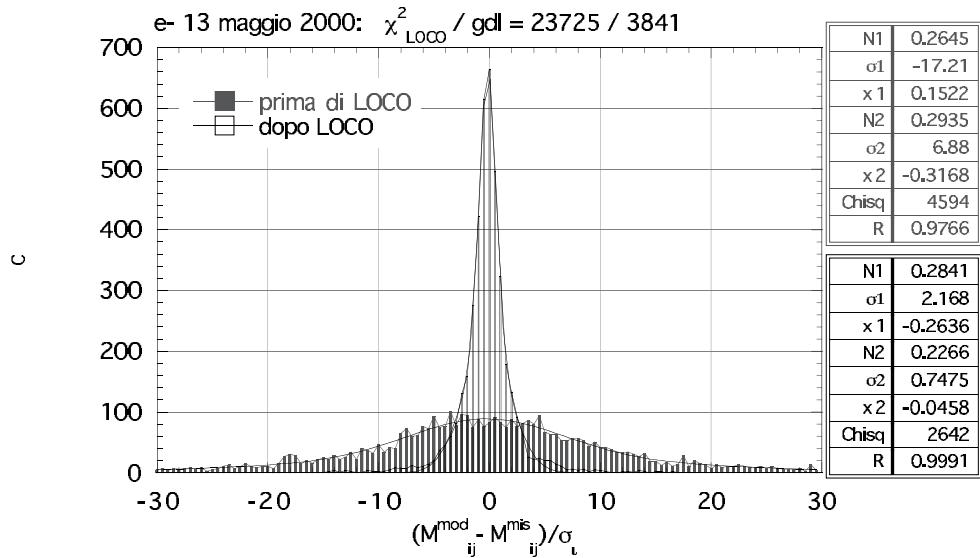


Figura 6.3: La distribuzione dei residui prima e dopo il fit della matrice di risposta degli elettroni del 13 maggio 2000.

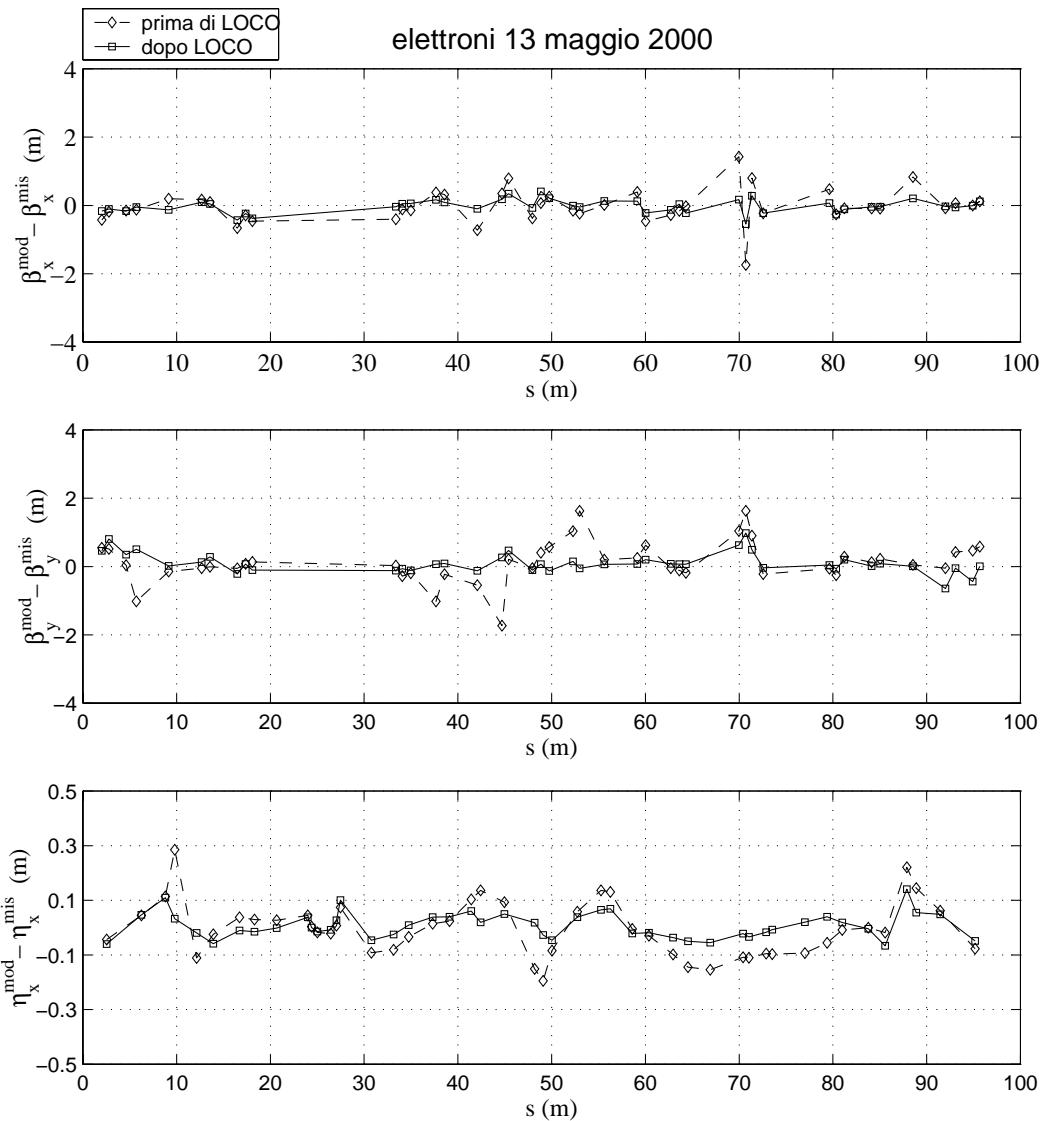


Figura 6.4: Gli scarti fra le funzioni di betatrone e la dispersione misurate e quelle calcolate dal modello, prima e dopo la convergenza di LOCO.

Anello elettroni 27 marzo 2000			
punto di lavoro	misure	modello iniziale	modello LOCO
$Q_x$	5.1500	5.1320	5.1520
$Q_y$	5.2140	5.2203	5.2097
$\epsilon_0$	$0.80 \pm 8$	0.87	0.79
k	$0.010 \pm 2$	0.0004	0.008
$\chi^2 / gdl$ matrici risposta			27363 / 3841
$\chi^2 / gdl$ beta x			23.1 / 45
$\chi^2 / gdl$ beta y			35.7 / 45
$\chi^2 / gdl$ dispersione			46.6 / 47

Tabella 6.4: Numeri di betatron, emittanza e accoppiamento dell'anello degli elettroni del 27 marzo 2000 dell'anello degli elettronni.

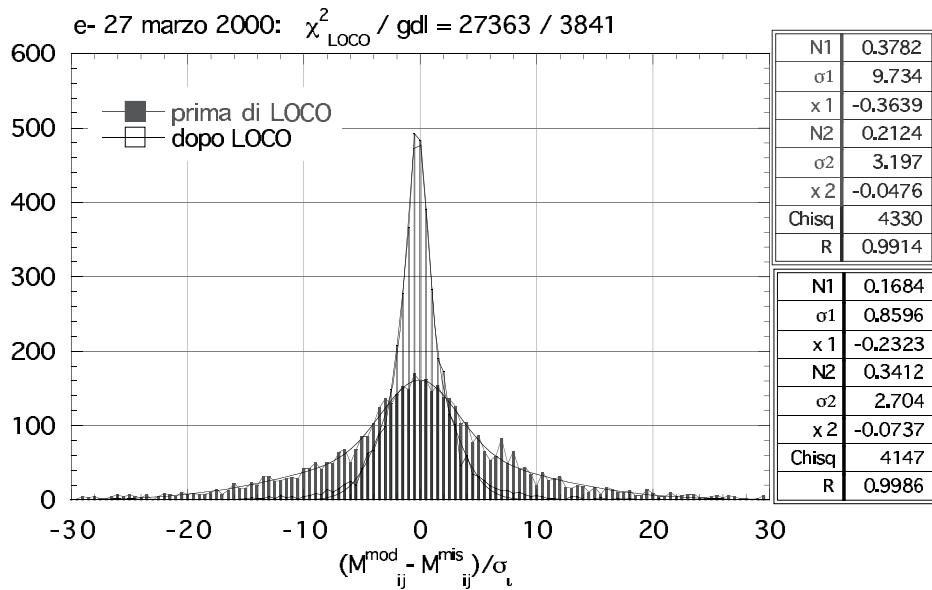


Figura 6.5: La distribuzione dei residui prima e dopo il fit della matrice di risposta degli elettronni del 27 marzo 2000.

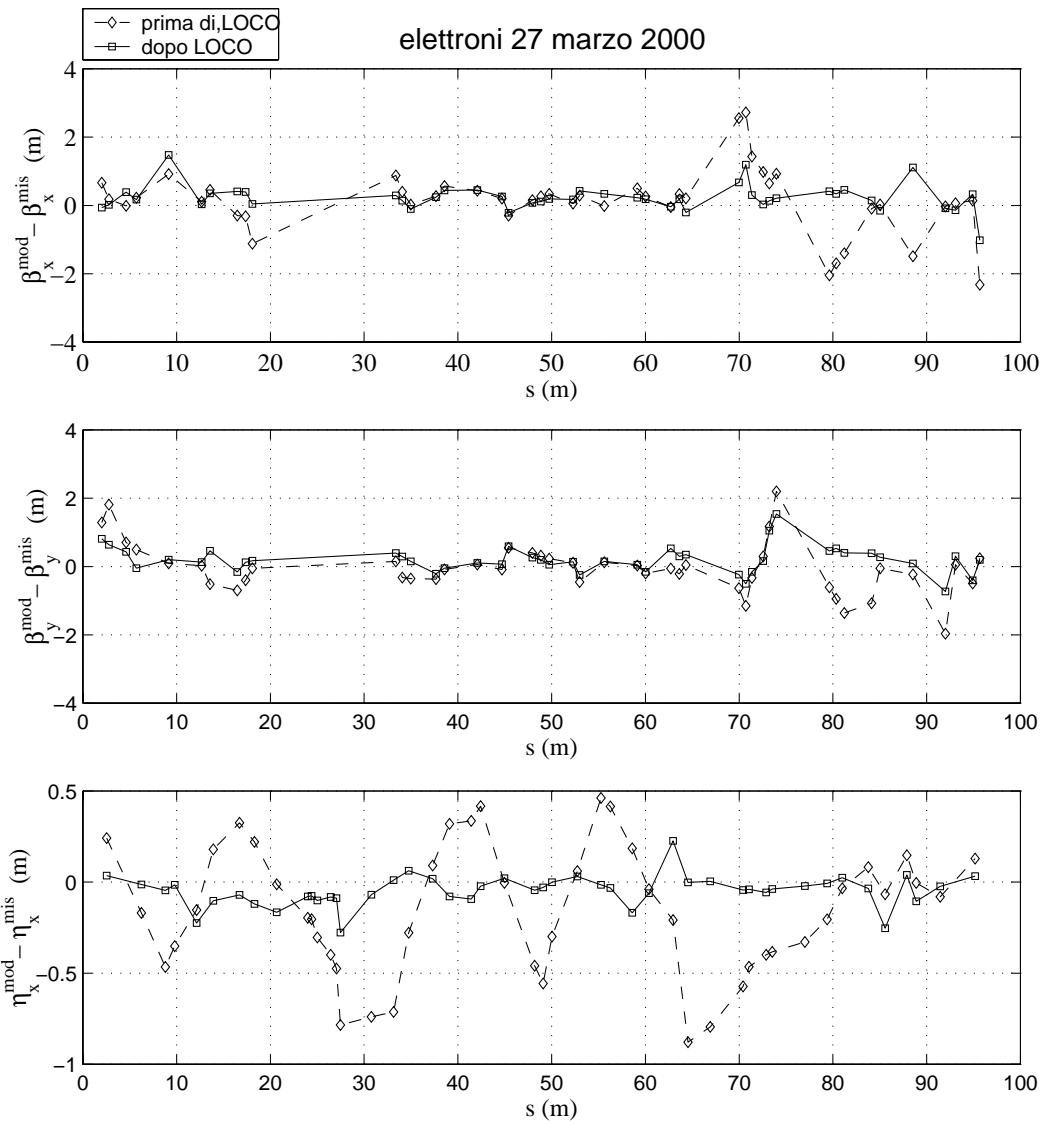


Figura 6.6: Gli scarti fra le funzioni di betatrone e la dispersione misurate e quelle calcolate dal modello, prima e dopo la convergenza di LOCO.

Anello positroni 13 maggio 2000			
punto di lavoro	misure	modello iniziale	modello LOCO
$Q_x$	5.1564	5.1416	5.1660
$Q_y$	5.2078	5.2113	5.2101
$\epsilon_0$	$1.00 \pm 10$	0.92	0.95
k	$0.002 \pm 1$	0.0004	0.0026
$\chi^2 / gdl$ matrici risposta			21870 / 3841
$\chi^2 / gdl$ beta x			53.2 / 45
$\chi^2 / gdl$ beta y			19.7 / 45
$\chi^2 / gdl$ dispersione			21.6 / 47

Tabella 6.5: Numeri di betatron, emittanza e accoppiamento dell'anello degli positroni del 13 maggio 2000.

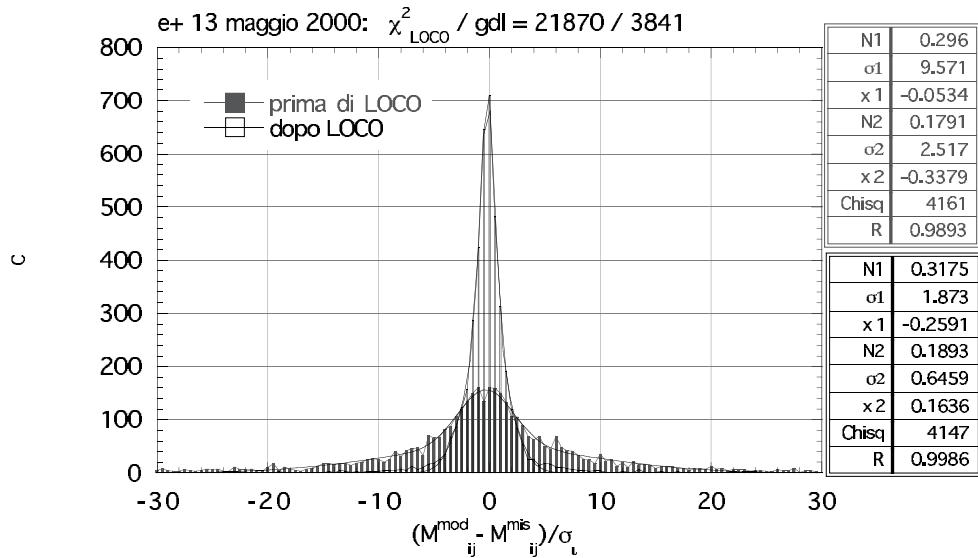


Figura 6.7: La distribuzione dei residui prima e dopo il fit della matrice di risposta dei positroni del 13 maggio 2000.

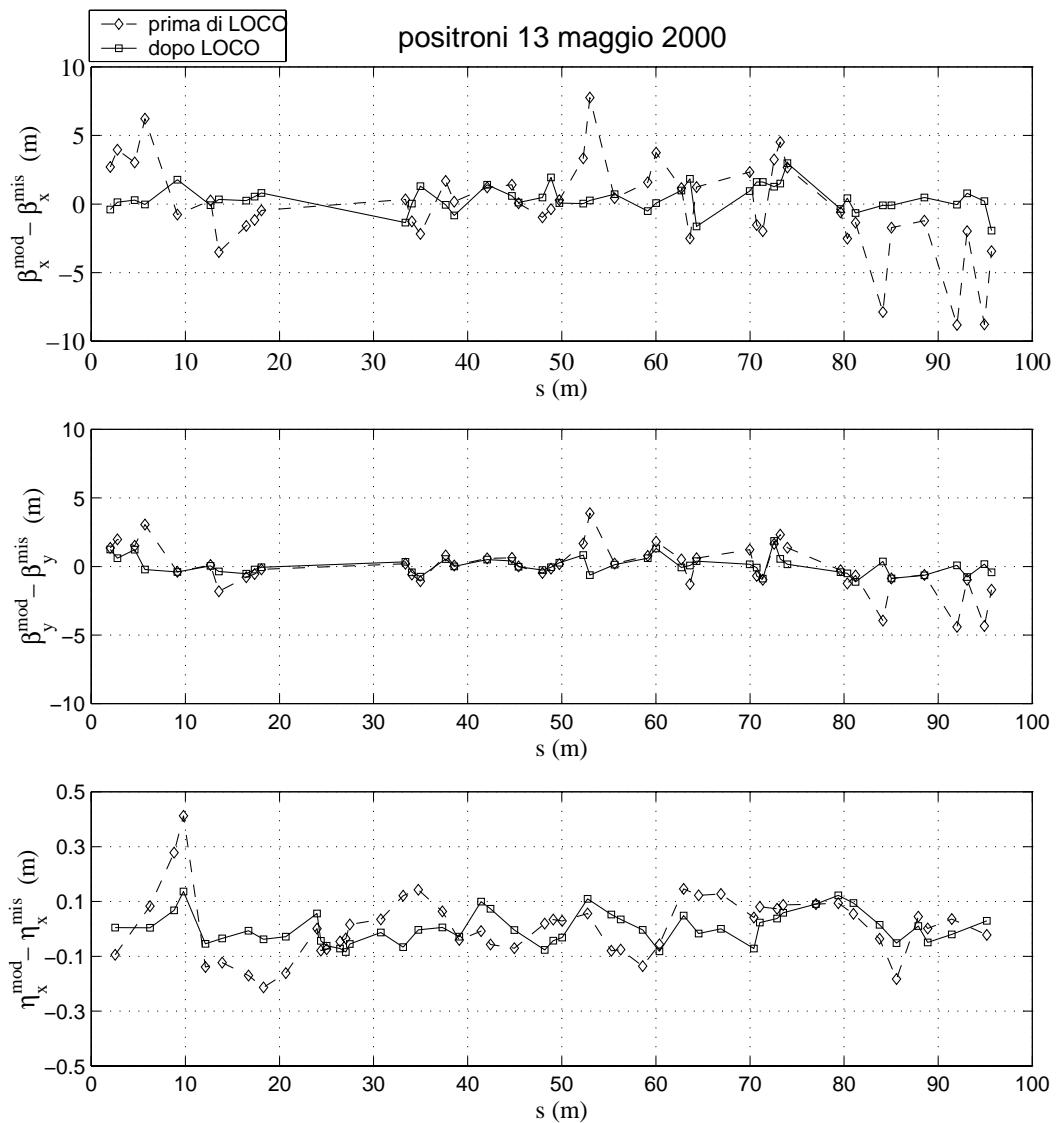


Figura 6.8: Gli scarti fra le funzioni di betatrone e la dispersione misurata e quelle calcolate dal modello, prima e dopo la convergenza di LOCO.

Anello positroni 23 settembre 2000			
punto di lavoro	misure	modello iniziale	modello LOCO
$Q_x$	5.1517	5.1410	5.1580
$Q_y$	5.2167	5.2268	5.2155
$\epsilon_0$	$1.00 \pm 10$	0.92	0.95
k	$0.002 \pm 1$	0.0004	0.0024
$\chi^2 / gdl$ matrici risposta			27688 / 3841
$\chi^2 / gdl$ beta x			35.1 / 45
$\chi^2 / gdl$ beta y			42.8 / 45
$\chi^2 / gdl$ dispersione			28.9 / 47

Tabella 6.6: Numeri di betatron, emittanza e accoppiamento dell’anello degli positroni del 23 settembre 2000.

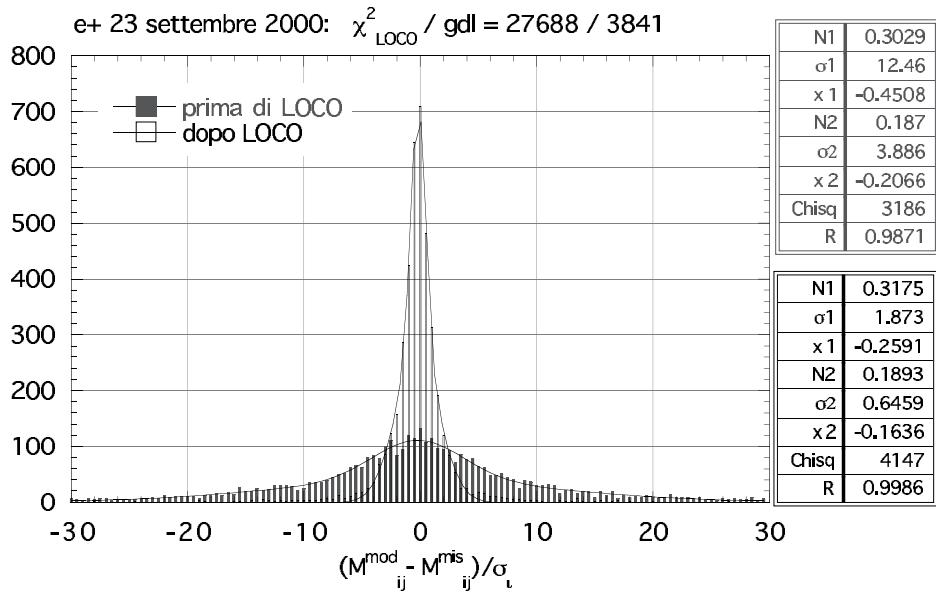


Figura 6.9: La distribuzione dei residui prima e dopo il fit della matrice di risposta dei positroni del 23 settembre 2000.

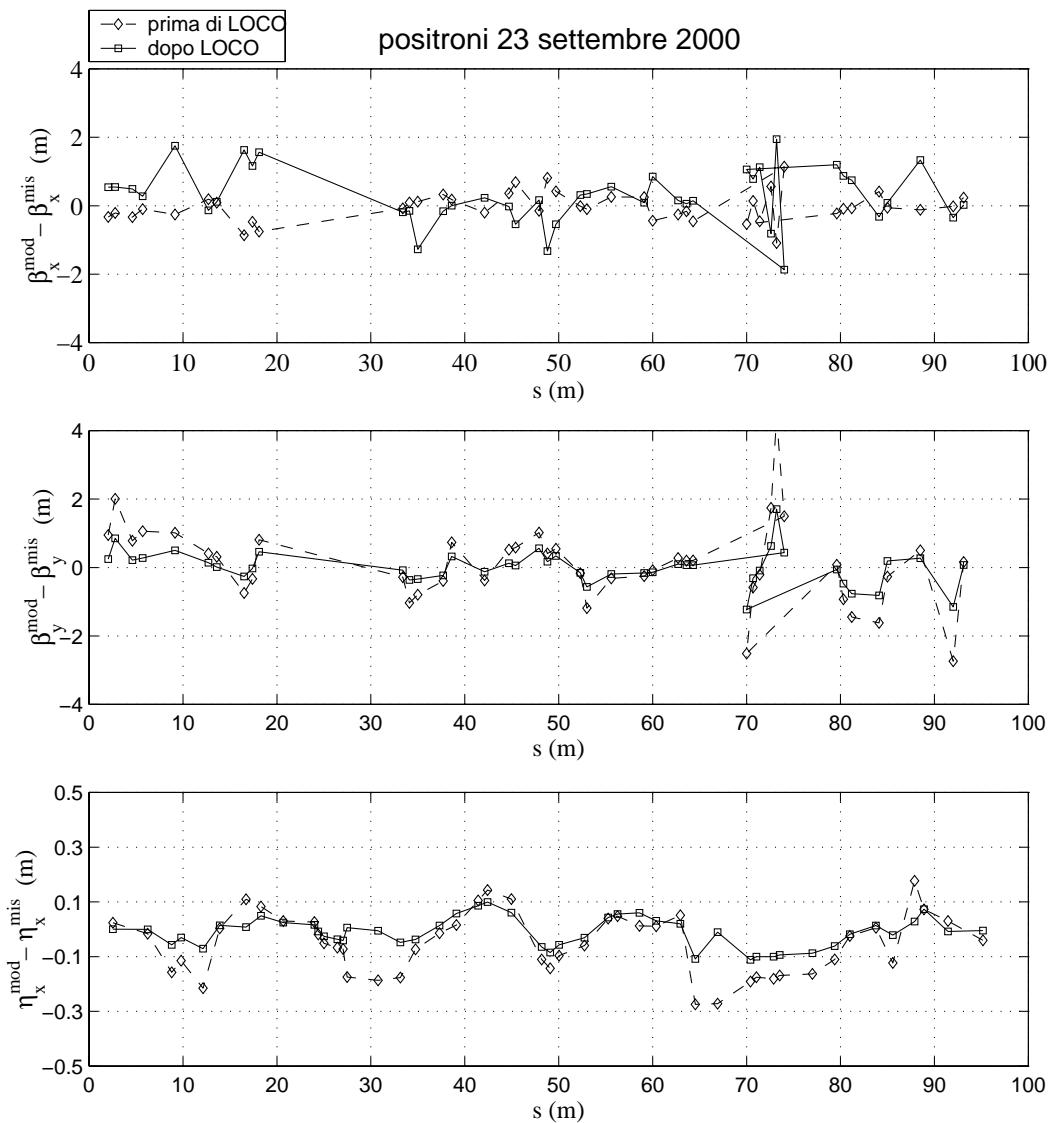


Figura 6.10: Gli scarti fra le funzioni di betatrone e la dispersione misurata e quelle calcolate dal modello, prima e dopo la convergenza di LOCO.

somma di due gaussiane:

$$x = 3841 \left( N_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-(x-x_1)^2/2\sigma_1^2} + N_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-(x-x_2)^2/2\sigma_2^2} \right) \quad (6.4)$$

come mostrano le figure 6.3, 6.5, 6.7, 6.9.

Dal confronto degli scarti fra le funzioni di betatron e la dispersione misurate e quelle predette dal modello prima e dopo l'analisi di LOCO riportato nelle figure 6.4, 6.6, 6.8, 6.10, è evidente il miglioramento della accuratezza del modello stesso.

## Gli elementi magnetici degli anelli

I parametri descrittivi degli elementi magnetici dei due anelli trovati dai quattro fit sono riportati nella tabella 6.7. I risultati sono analoghi per i due anelli ma con differenze apprezzabili fra i diversi punti di lavoro analizzati dovute principalmente alla dipendenza dall'orbita di riferimento.

Per molti parametri è possibile fare un confronto con le misure magnetiche delle caratteristiche degli elementi di Dafne fatte in laboratorio.

Le calibrazioni dei gradienti dei quadrupoli degli archi dei due anelli ricavate dalle misure magnetiche sono confermate dall'analisi di LOCO, infatti tutte le variazioni delle calibrazioni dei gradienti ricavate dal fit sono inferiori all'accuratezza (0.1 %) con cui erano note dalle misure magnetiche. È anche probabile che la degenerazione del sistema (6.2) di cui abbiamo parlato, riduca la sensibilità del nostro fit agli errori di calibrazione dei quadrupoli, comunque si deve pensare che tali errori devono dare effetti inferiori a quelli associati ai campi di bordo dei dipoli, determinanti invece per la convergenza del modello.

Parametri del modello	valore nominale	elettroni		positroni	
		13.5.2000	27.3.2000	13.5.2000	23.9.2000
QUAI1K01/6	1.000	1.010	1.008	0.986	0.992
QUAI1K02/5	1.000	0.997	0.995	0.999	0.990
QUAI1K03/4	1.000	1.015	1.021	1.036	1.022
QUAI2001/7	1.000	0.940	0.948	0.974	0.971
QUAI2002/6	1.000	0.978	0.976	0.973	0.972
QUAI2003/5	1.000	0.989	0.980	0.960	0.950
$\Delta E_{1,2}$ SLS1 (rad)	-0.010	0.029	0.032	0.032	0.037
$\Delta E_{1,2}$ SLS2 (rad)	-0.010	0.037	0.040	0.047	0.045
$\Delta E_{1,2}$ PES1 (rad)	-0.044	-0.035	-0.035	-0.035	-0.031
$\Delta E_{1,2}$ PES2 (rad)	-0.044	-0.033	-0.032	-0.033	-0.033
$\Delta E_{1,2}$ SLL1 (rad)	-0.004	0.019	0.019	0.018	0.018
$\Delta E_{1,2}$ SLL2 (rad)	-0.004	0.019	0.022	0.019	0.018
$\Delta E_{1,2}$ PEL1 (rad)	-0.022	-0.039	-0.044	-0.053	-0.053
$\Delta E_{1,2}$ PEL2 (rad)	-0.022	-0.038	-0.034	-0.052	-0.052
Fint SLS1	1.05	0.91	0.88	1.08	1.04
Fint SLS2	1.05	1.02	0.95	1.20	1.25
Fint PES1	1.15	0.35	0.33	0.39	0.42
Fint PES2	1.15	0.34	0.33	0.37	0.37
Fint SLL1	1.09	0.44	0.44	0.32	0.29
Fint SLL2	1.09	0.44	0.44	0.41	0.41
Fint PEL1	1.18	0.48	0.47	0.44	0.42
Fint PEL2	1.18	0.45	0.45	0.39	0.39
$\Delta E_1$ SPLI1001 (rad)	0.000	0.025	0.024	0.001	0.003
$\Delta E_1$ SPLI1002 (rad)	0.000	-0.041	-0.037	0.012	0.015
$\Delta E_1$ SPLI2001 (rad)	0.000	0.007	0.007	-0.017	-0.020
$\Delta E_1$ SPLI2002 (rad)	0.000	-0.004	-0.012	-0.018	-0.021
Grad. Wig. poli positivi	1.000	1.056	1.035	1.027	0.998
Grad. Wig. poli negativi	1.000	1.207	1.173	1.064	1.073
Grad. Wig. poli terminali	1.000	1.004	1.003	0.993	0.989
Fint Wiggler	0.00	0.004	0.004	0.004	0.004
Calib. Kloe.	1.000	1.002	1.001	1.000	1.001
Calib. Comp1	1.000	0.999	1.000	0.998	0.998
Calib. Comp2	1.000	0.995	0.996	1.002	1.000
Rot. IR1 Tripl. Short	0.018	0.024	0.026	0.024	0.023
Rot. IR1 Tripl. Long	-0.013	-0.021	-0.018	-0.019	-0.019

Tabella 6.7: I parametri del modello per mad calcolati da LOCO per i quattro punti di lavoro analizzati dei due anelli. Le calibrazioni dei quadrupoli degli archi non sono cambiate. QUAI1K01-6 indicano le calibrazioni relative dei magneti permanenti della IR1, QUAI2001-7 indicano le calibrazioni relative dei magneti della IR2,  $\Delta E_{1,2}$  SLS etc. e Fint SLS etc. le correzioni aggiuntive agli angoli di entrata/uscita e i fint dei dipoli curvanti *Sector-Like/Parallel-End Short* e *Long*,  $\Delta E_1$  SPLI1001-2002 le correzioni agli angoli di entrata degli *splitter*.

Per i quadrupoli delle due Regioni di Interazione invece si trovano con LOCO delle calibrazioni diverse da quelle nominali come già era stato trovato con MAD. Queste sono da attribuire al passaggio fuori asse della traiettoria dei due fasci. I gradienti dei quadrupoli della IR2 non sono da confrontare con le misure magnetiche poiché nel modello (Capitolo 5) sono stati descritti con i valori calcolati teoricamente che meglio riproducevano la traiettoria reale dei fasci nella zona di interazione.

Gli altri parametri importanti per l'ottica lineare sono gli angoli di entrata e uscita della traiettoria e gli integrali primi  *fint* del campo nei vari tipi di dipoli.

Per i magneti della stessa famiglia si ottengono gli stessi valori degli angoli e dei  *fint*. Solo fra i due dipoli curvanti a settore Short e fra i due a settore Long dell'anello dei positroni LOCO trova due valori distinti degli angoli di entrata e uscita e dei  *fint*. Questo è in accordo proprio con le misure magnetiche [7] che hanno trovato termini sestupolari diversi solo fra i due magneti di queste due famiglie e quindi ci si può aspettare una diversa sensibilità agli effetti dovuti alla traiettoria.

Il modello con cui ho descritto i *wiggler* è confermato da LOCO. L'accordo fra i quadrupoli efficaci trovati dal fit e quelli ricavati dalle misure magnetiche è molto buono.

## Previsioni sull'accoppiamento

Le rotazioni dei BPM, dei correttori e dei quadrupoli, le componenti *skew* dei correttori “C”, le calibrazioni dei solenoidi della IR1, sono calcolate da LOCO cercando di riprodurre i blocchi accoppiati  $M_{xy}$  e  $M_{yx}$  della matrice di risposta della (4.4). Queste variazioni di orbita hanno ampiezza dell'ordine dei  $100 \mu m$  con la solita incertezza di  $10 \mu m$ , pertanto i parametri calcolati dall'analisi accoppiata avranno certamente una

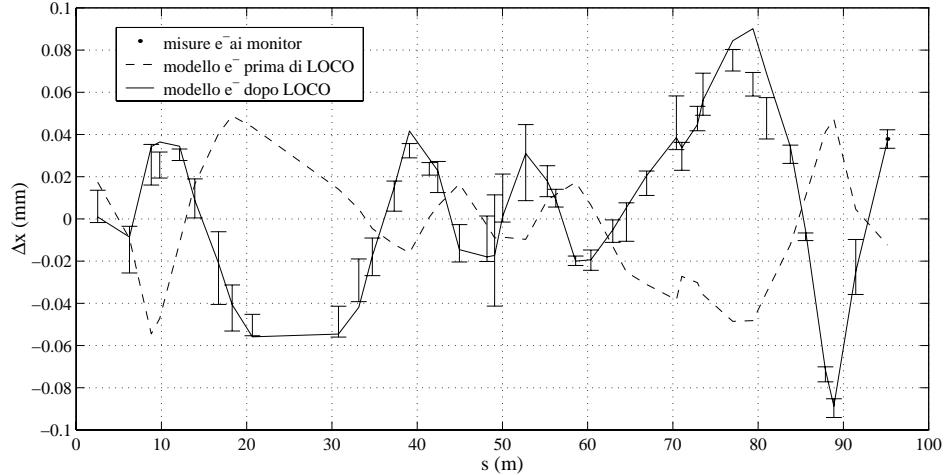


Figura 6.11: Un esempio di convergenza ottenuta con LOCO dell’orbita orizzontale dovuta al correttore verticale CVVES101 dell’anello degli elettronni. Gli errori sulle misure sono inferiori a  $10 \mu\text{m}$  come detto in § 4.1.

precisione inferiore a quelli normali. Prima della nostra analisi il basso accoppiamento residuo osservato negli anelli non poteva essere riprodotto bene dal modello, con LOCO si ottiene una buona convergenza anche per le orbite accoppiate (Figura 6.11).

La tabella 6.8 contiene il valore quadratico medio delle rotazioni dei BPM e dei correttori, i valori massimi trovati da LOCO e la risoluzione del fit.

Le rotazioni calcolate da LOCO nella maggioranza dei casi sono inferiori o dello stesso ordine di grandezza della sensibilità delle misure meccaniche di allineamento effettuate (5 mrad per i BPM e 10 mrad per i correttori). Per quelle maggiori si potranno fare nuove misure meccaniche per confermare i risultati trovati.

Rotazioni da LOCO	media	massimo	risoluzione
BPM	8 mrad	21 mrad	4 mrad
Magneti correttori	11 mrad	29 mrad	5 mrad

Tabella 6.8: Rotazioni quadratiche medie degli 66 BPM di Dafne (33 per ciascun anello) e dei 62 correttori (31 per anello), i valori massimi trovati, la risoluzione del fit.

	misure (mrad)	LOCO (mrad)
$\delta\theta_{short}$	$17 \pm 4$	$24 \pm 2$
$\delta\theta_{long}$	$13 \pm 4$	$19 \pm 2$

Tabella 6.9: Gli *offset* di rotazioni  $\delta\theta$  dei due tripletti della IR1 (“short” e “long” sono riferiti alle sezioni vicine dell’anello degli elettroni). Sono riportate l’incertezza della misure e lo scarto massimo tra i parametri ottenuti da quattro diversi fit per i positroni e per gli elettroni.

Le rotazioni calcolate per i tripletti della IR1 e le calibrazioni del solenoide di Kloe e dei due compensatori sono le stesse sia nella analisi dei positroni che degli elettroni.

Riporto nella tabella 6.9 gli offset di rotazione dei due tripletti della regione di interazione di Kloe. Ciascun tripotto è costituito da tre quadrupoli permanenti solidali fra loro tramite una sbarra di sostegno. Nel 1999 era stato trovato da misure di controllo che i tripletti si erano spostati nel verso di diminuire la rotazione dei quadrupoli. LOCO conferma la presenza di tali *offset* di rotazione, nel verso delle misure del 1999, ma di entità maggiore. Si potrebbe in seguito verificare con misure dirette se veramente nel corso del 2000 siano aumentati gli spostamenti.

Inoltre le componenti quadrupolari *skew* dei “C” calcolate da LOCO sono in accordo con il valore dedotto dalle misure misure magnetiche e dagli spostamenti dell’orbita nella loro posizione, tuttavia la conferma migliore che sono questi magneti la sorgente dell’accoppiamento residuo osservato viene dall’analisi delle misure delle frequenze di betatron in funzione dello spostamento verticale dell’orbita nelle Regioni di Interazione che descrivo dettagliatamente nel capitolo 7.

Infine si può dire che l’analisi di LOCO fatta sulle due matrici di risposta dei positroni e degli elettroni conferma che il maggior contributo all’accoppiamento di betatron viene dalle Regioni di Interazione e che eventuali errori di rotazione di quadrupoli o altri termini sestupolari nel resto degli anelli devono dare effetti molto minori.

# Capitolo 7

## Il sestupolo nel Correttore “C”

I quattro dipoli correttori “C” sono installati simmetricamente vicino agli *splitter* e vengono utilizzati per aggiustare l’incrocio orizzontale e la separazione verticale dei due fasci nelle Regioni di Interazione.

Ho detto nel precedente capitolo che le matrici di risposta sono ben riprodotte introducendo una sorgente di accoppiamento nella posizione dei magneti correttori “C”. L’effetto osservato sulle orbite è quello dato da un quadrupolo *skew* di piccola intensità. Seguendo questa indicazione ho controllato le misure magnetiche eseguite su questi correttori, trovando che il termine sestupolare presente non era trascurabile e in presenza di spostamenti della traiettoria dal centro dei magneti dà contributi quadrupolari efficaci.

Ho così scoperto che la variazione del coefficiente di accoppiamento  $k$ , dell’orientazione del profilo trasverso del fascio al monitor di luce di sincrotrone e delle frequenze di

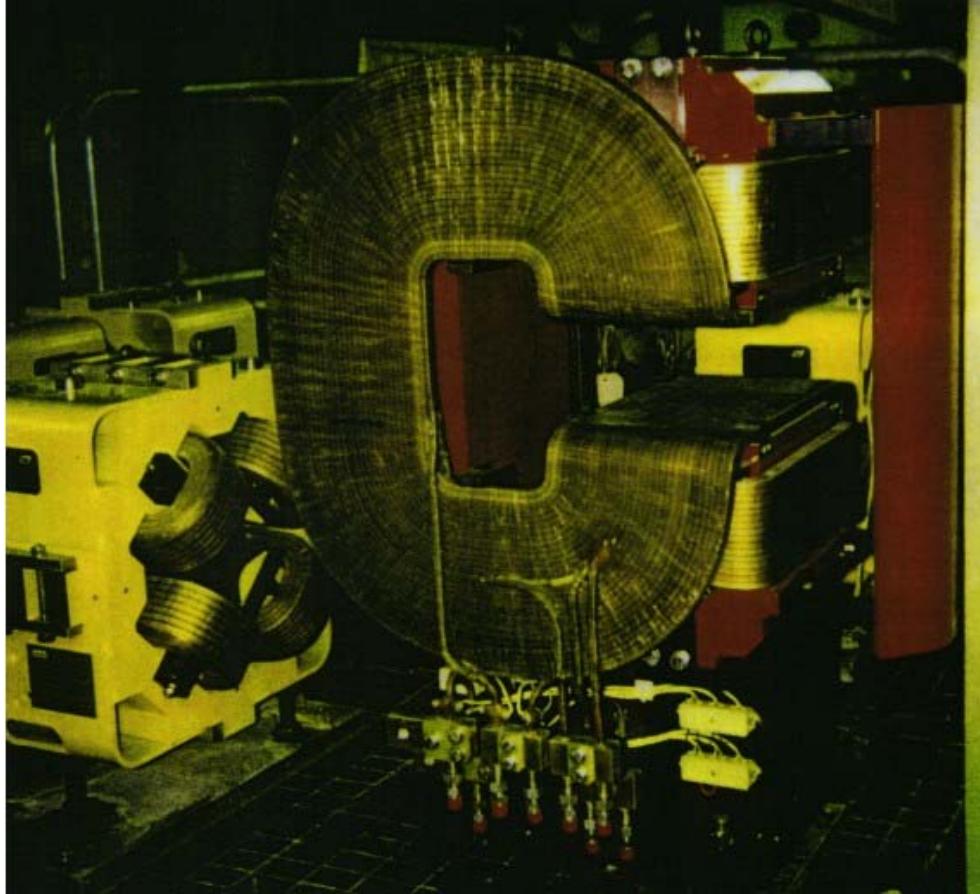


Figura 7.1: Il magnete correttore “C”.

betatron più volte osservata facendo un *bump* verticale chiuso<sup>1</sup> di orbita intorno alle Regioni di Interazione era dovuta agli stessi correttori “C” che adoperiamo insieme ai primi due correttori vicini per spostare la traiettoria. Le misure delle variazioni delle frequenze di betatrone sono molto accurate e hanno confermato molto bene la dipendenza dal sestupolo presente nei “C”.

Su questa scoperta ho scritto anche una Nota Tecnica per Dafne [3] che ho allegato alla tesi.

---

<sup>1</sup>Si chiama generalmente *bump* (bozzo) chiuso di orbita uno spostamento locale della posizione del fascio che lascia invariata l’orbita nel resto dell’anello.

## 7.1 Richiamo delle misure magnetiche

Nelle figure 7.2-7.3 sono mostrate le serie delle misure lungo la direzione orizzontale e verticale del campo magnetico eseguite sui correttori “C” orizzontali (CH) e verticali (CV).

Facendo un fit delle curve nelle figure 7.2-7.3 con un polinomio, sono stati ricavati i termini sestupolari integrati presenti nei “C” [8]. Il correttore orizzontale ha un gradiente sestupolare *normale* integrato:

$$S_{CH} (T/m) = \int (\partial^2 B_y / \partial x^2) dz = 4.36 \cdot 10^{-3} \cdot I (A) \quad (7.1)$$

mentre il correttore verticale ha un gradiente sestupolare *skew* integrato:

$$S_{CV} (T/m) = \int (\partial^2 B_x / \partial y^2) dz = 1.35 \cdot 10^{-2} \cdot I (A) \quad (7.2)$$

Posso confrontare l’ordine di grandezza del sestupolo integrato di un correttore “C” alimentato a una corrente tipica con i gradienti sestupolari dei sestupoli installati negli archi di Dafne e di altri elementi magnetici degli anelli:

“C” CH @ 50 A → 0.22 T/m

“C” CV @ 50 A → 0.67 T/m

Sestupolo Grande @ 10 A → 1.90 T/m

Quindi il sestupolo presente nel “C” non è trascurabile ed è confrontabile anche con i sestupoli usati abitualmente per la correzione del cromatismo. Ovviamente l’effetto del sestupolo dei “C” dipende anche dalle funzioni beta nella sua posizione e il suo contributo lineare dipende dallo spostamento della traiettoria del fascio dall’asse ma-

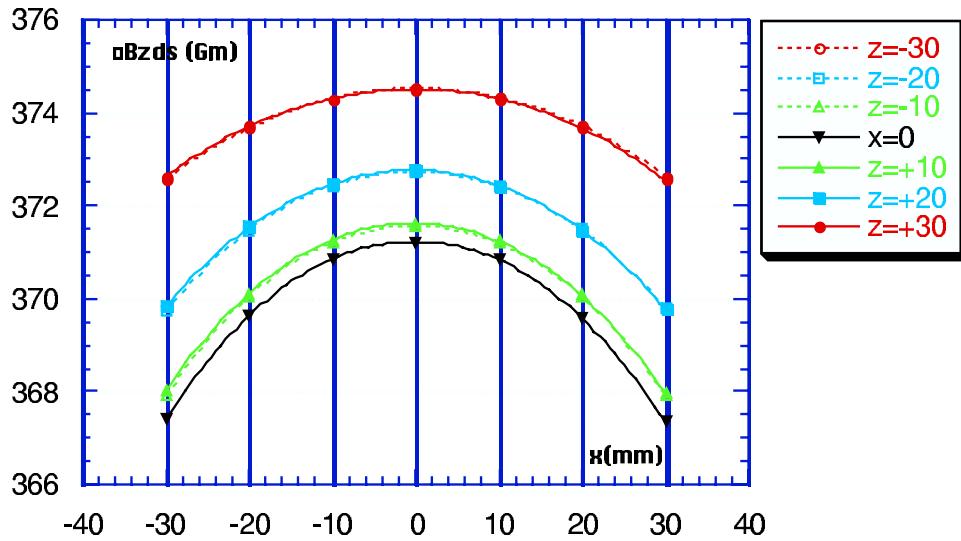


Figura 7.2: Serie di misure lungo la direzione orizzontale  $x$  della componente verticale integrata del campo del magnete “C” a diverse posizioni verticali  $z$  mm (la coordinata verticale  $z$  nel testo è indicata con  $y$ ) con CH 171 A, CV spento (da [8]).

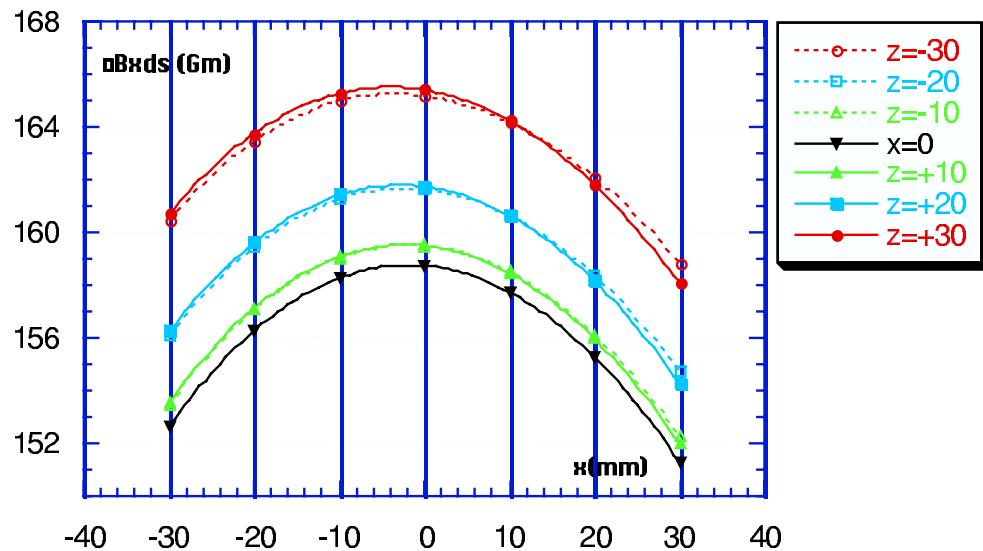


Figura 7.3: Serie di misure lungo la direzione orizzontale  $x$  della componente orizzontale integrata del campo del magnete “C” a diverse posizioni verticali  $z$  mm (la coordinata verticale  $z$  nel testo è indicata con  $y$ ) con CV 109 A, CH spento (da [8]).

gnetico del magnete come spiego di seguito.

## 7.2 Il sestupolo nel Magnete Correttore “C”

Il correttore orizzontale CH ha un termine sestupolare *normale* nel campo magnetico che ha quindi andamento:

$$\begin{aligned} B_x &= -s_{CH}xy \\ B_y &= -\frac{1}{2}s_{CH}(x^2 - y^2) \end{aligned} \tag{7.3}$$

che in presenza di uno spostamento orizzontale  $\Delta x$  della traiettoria, dà i gradienti quadrupolari *normali*:

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial y} = -s_{CH}\Delta x \tag{7.4}$$

e per uno spostamento verticale  $\Delta y$ , dà i gradienti quadrupolari *skew*:

$$\frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\partial B_x}{\partial x} = s_{CH}\Delta y \tag{7.5}$$

Il correttore verticale CV ha invece un termine sestupolare *skew* nel campo magnetico che ha quindi andamento:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{1}{2}s_{CV}(x^2 - y^2) \\ B_y &= -s_{CV}xy \end{aligned} \tag{7.6}$$

che in presenza di uno spostamento orizzontale  $\Delta x$  dà i gradienti quadrupolari *skew*:

$$\frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\partial B_x}{\partial x} = -s_{CV}\Delta x \quad (7.7)$$

e per uno spostamento verticale  $\Delta y$  i gradienti quadrupolari *normali*:

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial y} = -s_{CV}\Delta y \quad (7.8)$$

Queste equazioni mostrano che spostamenti orizzontali e verticali  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  della traiettoria del fascio nei correttori “C” danno luogo a termini quadrupolari che si aggiungono alla struttura magnetica degli anelli, *cambiando le frequenze di betatrone* (termini quadrupolari normali) *e accoppiando i moti di betatrone* (termini quadrupolari skew).

### 7.3 Spostamento dell’orbita e frequenze di betatrone

Nel *bump* verticale del fascio degli elettroni intorno alla seconda Regione di Interazione mostrato nella figura 7.4 lo spostamento dell’orbita nella posizione dei “C” è proporzionale allo spostamento verticale nel Punto di Interazione:

$$\Delta y @ "C" \propto \Delta y @ IP \quad (7.9)$$

quindi dalla equazione (7.8) si ottiene la variazione del gradiente quadrupolare inte-

grato fornito dal magnete correttore:

$$\Delta k_{CV} \cdot L_{mag} = \frac{1}{B_0 \rho} S_{CV} \cdot \Delta y \quad (7.10)$$

che dà la variazione delle frequenze di betatrone secondo la relazione 4.9:

$$\Delta Q_{x,y} = \pm \frac{1}{4\pi} (\Delta k_{CV} \cdot L_{mag}) \beta_{x,y} \quad (7.11)$$

Da questa relazione si vede bene che  $Q_{x,y}$  in presenza di un sestupolo devono variare linearmente con  $\Delta y$  (per avere un andamento parabolico si deve avere un ottupolo). Tutto ciò se il sestupolo  $S_{CV}$  è indipendente dallo spostamento.

Ma nel nostro caso per cambiare la posizione della traiettoria si deve variare pro-

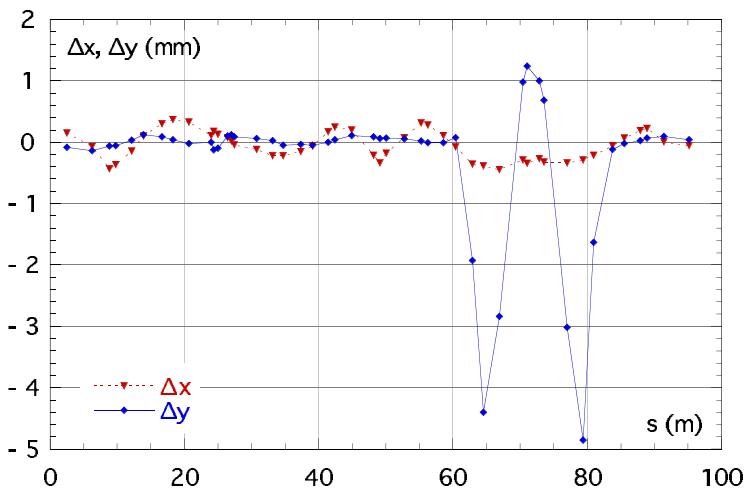


Figura 7.4: *Bump* verticale di +1 mm nel Punto di Interazione 2 (linea continua). I correttori “C” si trovano vicino ai due picchi negativi. La linea tratteggiata è la corrispondente variazione di orbita orizzontale.

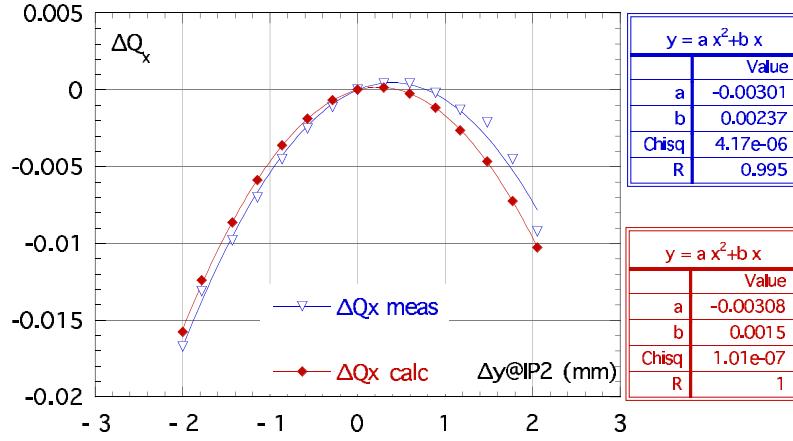


Figura 7.5: La variazione delle frequenze orizzontali di betatrone degli elettroni in funzione dello spostamento verticale in IP2.

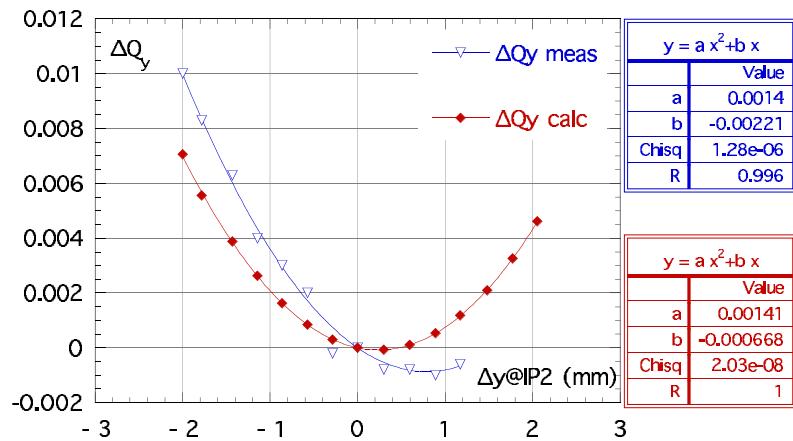


Figura 7.6: La variazione delle frequenze verticali di betatrone degli elettroni in funzione dello spostamento verticale in IP2.

porzionalmente la corrente di alimentazione nei correttori “C”, a sua volta il sestupolo  $S_{CV}$  è proporzionale alla corrente di alimentazione (Eq. 7.1) e quindi a  $\Delta y$ . Di conseguenza l’andamento della variazione delle frequenze di betatrone diviene quadratico con  $\Delta y$ .

Riporto nella tabella 7.1 i dati delle misure fatte sulla seconda Regione di Interazione per il fascio degli elettroni con il confronto fra gli spostamenti  $\Delta Q_{x,y}$  misurati direttamente e quelli calcolati dal sestupolo delle misure magnetiche della equazione 7.11, in funzione dello spostamento verticale. I risultati sono mostrati nelle figure 7.5-7.6.

Calcolando un fit ai minimi quadrati con una parabola, i coefficienti del termine quadratico delle due curve sono in accordo, il coefficiente del termine lineare invece dipende probabilmente dallo spostamento orizzontale nei sestupoli normali presenti

$\Delta y@IP2$ (mm)	$\Delta y@”C”$ (mm)	I@cdves201 (A)	I@cdvel201 (A)	$\Delta Q_x$ mis	$\Delta Q_y$ mis	$\Delta Q_x$ calc	$\Delta Q_y$ calc
-2.00	9.00	-101.70	-92.50	-0.0167	0.0100	-0.0155	0.0071
-1.78	8.01	-90.17	-81.35	-0.0131	0.0083	-0.0122	0.0056
-1.43	6.44	-78.64	-70.20	-0.0098	0.0063	-0.0085	0.0039
-1.14	5.15	-67.11	-59.05	-0.0070	0.0040	-0.0058	0.0026
-0.86	3.87	-55.59	-47.90	-0.0045	0.0030	-0.0035	0.0016
-0.57	2.57	-44.06	-36.75	-0.0025	0.0020	-0.0018	0.0008
-0.28	1.28	-32.53	-25.60	-0.0011	0.0002	-0.0007	0.0003
0.00	0.00	-21.00	-14.45	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.30	-1.35	-9.47	-3.30	0.0004	-0.0008	0.0002	-0.0001
0.60	-2.68	2.06	7.85	0.0004	-0.0008	-0.0002	0.0001
0.89	-4.01	13.59	19.00	-0.0002	-0.0010	-0.0012	0.0005
1.17	-5.29	25.11	30.15	-0.0013	-0.0006	-0.0026	0.0012
1.48	-6.66	36.64	41.30	-0.0021		-0.0046	0.0021
1.77	-7.99	48.17	52.45	-0.0045		-0.0071	0.0033
2.05	-9.25	59.70	63.60	-0.0092		-0.0101	0.0046

Tabella 7.1: I dati del *bump* eseguito con i due “C” intorno a IR2. Le funzioni beta nella posizione dei due correttori sono: per CDVES201  $\beta_x = 15.5$   $\beta_y = 6.4$  e per CDVEL201  $\beta_x = 13.1$   $\beta_y = 6.3$ .

nei dipoli curvanti e negli *splitter* dato che il *bump* verticale genera anche una variazione di orbita orizzontale lungo tutto l’anello come mostrato in figura 7.4.

Considerando inoltre l’approssimazione per lente sottile contenuta nella 7.11 e la variazione dell’accoppiamento dei moti che abbiamo trascurato nel calcolo, l’accordo è molto buono e la dipendenza delle frequenze di betatron dallo spostamento verticale nei Punti di Interazione è ben spiegato dal termine sestupolare del correttore verticale ”C”.

Misure analoghe sono state eseguite anche intorno alla Regione di Interazione di Kloe sia per gli elettroni che per i positroni confermando l’influenza del sestupolo di questi magneti.

# Conclusioni

L’analisi delle matrici di risposta misurate ha fornito molte informazioni sull’ottica degli anelli di Dafne e si sta dimostrando utile nella attuale messa a punto del *collider* per l’incremento della luminosità.

LOCO ha permesso di individuare le sorgenti di accoppiamento vicino alle Regioni di Interazione osservato negli Anelli Principali di Dafne. Una nuova struttura magnetica applicata agli anelli con i magneti correttori “C” spenti mostra che non ci sono ulteriori importanti sorgenti di accoppiamento da individuare: il coefficiente di accoppiamento misurato ai monitor di luce di sincrotrone è inferiore allo 0.2 % per entrambi gli anelli e i blocchi accoppiati delle matrici di risposta misurate degli anelli sono praticamente nulli.

La conoscenza dei gradienti e degli effetti lineari focheggianti dovuti ai dipoli curvanti, ai *wiggler* e agli *splitter* permette di avere un modello lineare che può essere uno strumento più esatto sia per calcolare aggiustamenti dell’ottica degli anelli sia per introdurre nel modello i termini magnetici non lineari che sono sempre oggetto di studio per il miglioramento della vita media e per l’allargamento dell’apertura dinamica del fascio.

Il confronto dei risultati ottenuti dalle quattro matrici analizzate con LOCO prova come previsto che il modello dipende sensibilmente dal punto di lavoro e dall’orbita di riferimento del fascio. Questo vuole dire che per lo studio preliminare e la messa a punto di nuovi punti di lavoro della macchina è più utile usare un modello “medio” per le prime simulazioni e raffinarlo in seguito quando sono disponibili misure delle matrici di risposta e delle funzioni ottiche da analizzare.

# Appendice A

## Matrici di trasporto degli elementi magnetici

Fisicamente una particella con vettore posizione noto  $(x_0, x'_0; y_0, y'_0)$  ad un certo azimuth  $s_0$ , attraversa una sequenza di elementi magnetici fino all'azimuth  $s$ ; il passaggio attraverso ogni elemento magnetico può essere descritto tramite una matrice  $4 \times 4$ , che trasforma il vettore posizione prima dell'elemento nel vettore dopo di esso.

La matrice di trasporto da  $s_0$  a  $s$  sarà quindi il prodotto delle matrici dei singoli elementi:

$$M(s, s_0) = M(s, s_n)M(s_n, s_{n-1}) \cdots M(s_1, s_0) \quad (\text{A.1})$$

Descriviamo di seguito la forma delle matrici rappresentative dei vari tipi di elementi magnetici [13, 21]; queste sono ottenute calcolando la soluzione dell'equazione di Hill (2.10).

**Sezione di deriva** di lunghezza  $L$ :

$$M_{drift} = \begin{pmatrix} 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

lascia cioè invariata pendenza  $z'$  e aumenta lo spostamento  $z$  di  $z'L$ .

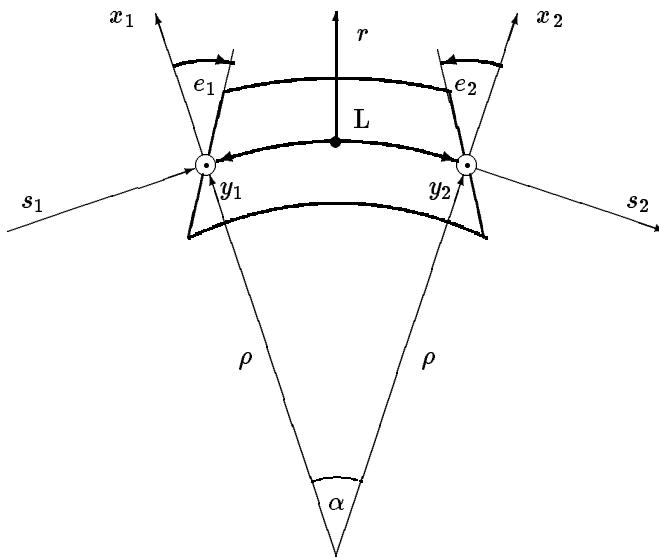


Figura A.1: Sistema di riferimento per un Magnete Curvante.

**Dipoli:** nel caso di un dipolo si devono considerare anche il contributo della dispersione dovuto alle deviazioni di energia di una particella definito nella matrice di trasferimento della (2.31). Riportiamo quindi la matrice  $5 \times 5$  che trasferisce il vettore  $(x, x'; y, y'; \delta E/E_0)$ .

La matrice di trasferimento di un dipolo curvante è composta di tre termini, il campo di bordo (*fringing*) all'entrata del magnete  $F_1$ , il corpo del dipolo  $B$  e il campo di bordo

all'uscita del magnete  $F_2$ :

$$M_{bend} = F_1 B F_2 \quad (\text{A.3})$$

Gli angoli di rotazione rispetto alle facce dei poli all'entrata e all'uscita determinano gli effetti focheggianti dei bordi e li indichiamo con  $e_1$  e  $e_2$  rispettivamente (Figura A.1).

Per un dipolo a settore si avrà  $e_1 = e_2 = 0$ , mentre per un dipolo rettangolare si tiene conto della diversa geometria ponendo  $e_1 = e_2 = \alpha/2$ .

Se i campi di bordo hanno estensione finita l'angolo di foceggiamento verticale viene cambiato:

$$\bar{e}_i = e_i - hgI_1(1 + \sin^2 e_i) \quad (\text{A.4})$$

dove  $h$  è la curvatura dell'orbita di riferimento nel dipolo,  $g$  è l'ampiezza del traferro, e  $I_1$  è l'integrale primo del campo di bordo (spesso detto  *fint*):

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_y(s)(B_0 - B_y(s))}{g \cdot B_0^2} ds \quad (\text{A.5})$$

Per l'entrata e per l'uscita la matrice di trasferimento è:

$$F_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h \tan e_i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h \tan \bar{e}_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

che corrisponde a una lente sottile di lunghezza focale  $f = \rho \cot e_i$  con foceggiamento

opposto nei due piani.

Il corpo del dipolo a settore di raggio e angolo di curvatura  $\rho$  e  $\alpha$  con campo uniforme ha matrice di trasporto:

$$B = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \rho \sin \alpha & 0 & 0 & \rho(1 - \cos \alpha) \\ -\frac{1}{\rho} \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & \rho \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Nel piano in cui curva dà un contributo focheggianto dovuto ad un effetto puramente geometrico del magnete: le traiettorie che entrano più vicine al centro di curvatura attraversano un tratto più breve del magnete e quindi vengono curvate meno e viceversa.

Nell'altro piano agisce come una sezione di deriva di lunghezza  $\rho \alpha$ .

**Quadrupolo F** (focheggianti orizzontalmente) di intensità  $k^2 = \frac{ec}{E_0} \frac{\partial B_y}{\partial x}$  e lunghezza  $L$ :

$$M_{F,D} = \begin{pmatrix} \cos(kL) & \frac{1}{k} \sin(kL) & 0 & 0 \\ -k \sin(kL) & \cos(kL) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(kL) & \frac{1}{k} \sinh(kL) \\ 0 & 0 & -k \sinh(kL) & \cosh(kL) \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

se invece  $\frac{\partial B_y}{\partial x}$  è negativo il quadrupolo è di tipo di D: defoceggia nel piano orizzontale e foceggia in quello verticale, e nella matrice le funzioni trigonometriche e quelle iperboliche sono scambiate.

Nell'approssimazione per *lente sottile* ( $kL \ll 1$  con  $L \rightarrow 0$  e  $k^2 L$  costante) la matrice

si riduce a:

$$M_{F,D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mp k^2 L & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm k^2 L & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mp \frac{1}{f} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

dove  $f$  è la *lunghezza focale* della lente.

Se il quadrupolo è ruotato di un angolo  $\theta$  intorno all'asse longitudinale:

$$M_{quad}(\theta) = R(\theta) M_{quad} R^{-1}(\theta) \quad (\text{A.10})$$

dove  $M_{quad}$  è la matrice di un quadrupolo normale e  $R(\theta)$  è una rotazione nel piano  $x$ ,  $y$  e  $x'$ ,  $y'$  di un angolo  $\theta$ :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

**Solenoide** di intensità  $k_s = \frac{1}{2} \frac{ec}{E_0} B_s$  e lunghezza  $L$ :

$$M_{sol} = \begin{pmatrix} \cos(k_s L)Q & \sin(k_s L)Q \\ -\sin(k_s L)Q & \cos(k_s L)Q \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

dove  $Q$  è una matrice  $2 \times 2$  del tipo di un quadrupolo focheggiante:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(k_s L) & \frac{1}{k_s} \sin(k_s L) \\ -k_s \sin(k_s L) & \cos(k_s L) \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Il solenoide agisce cioè focheggiando in entrambi i piani e ruotando di un angolo  $k_s L$ .

## Appendice B

### Scomposizione in Valori Singolari

Il metodo della scomposizione in valori singolari (*Singular Value Decomposition*: SVD) è usato per risolvere problemi lineari di minimi quadrati con molti parametri.

Consideriamo il caso in cui si debba risolvere un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite:

$$A \cdot x = b \quad (\text{B.1})$$

con  $A$  matrice  $m \times n$  e  $x$  vettore degli  $n$  parametri da calcolare.

Se  $m \geq n$  la matrice  $A$  può essere scomposta come [23]:

$$A = U \cdot \begin{pmatrix} w_1 & & \\ & w_2 & \\ & & \ddots \\ & & & w_n \end{pmatrix} \cdot V^t \quad (\text{B.2})$$

I valori  $w_i$  sono detti *valori singolari* della matrice  $A$ . Le colonne della matrice  $U$   $m \times n$  e quelle della matrice  $V$   $n \times n$  sono ortonormali:

$$\begin{aligned} U \cdot U^t &= I_n \\ V \cdot V^t &= I_n \end{aligned} \tag{B.3}$$

con  $I_n$  la matrice unitaria  $n \times n$ . Se la matrice  $A$  è singolare (ha rango minore di  $n$ ) si troveranno alcuni valori  $w_i = 0$ .

Se  $A$  non è singolare e il sistema ha una soluzione, questa ha in generale la forma:

$$x = V \cdot \begin{pmatrix} 1/w_1 & & & \\ & 1/w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/w_n \end{pmatrix} \cdot U^t \cdot b \tag{B.4}$$

Nel caso in cui  $A$  è singolare e si hanno uno o più  $w_i = 0$ , non esiste più un'unica soluzione, tuttavia sostituendo per questi valori singolari  $1/w_i$  con zero nella (B.4) si dimostra che la soluzione che si ottiene è quella con modulo  $|x|$  minore.

Se il sistema non ha una soluzione esatta, il vettore  $x$  calcolato con la SVD è una “soluzione” del sistema nel senso dei minimi quadrati, cioè quella che minimizza il residuo  $r = |A \cdot x - b|$ .

Nei casi pratici i valori singolari non saranno esattamente zero, ma si potranno trovare alcuni  $w_i$  che sono molto più piccoli degli altri. Usare questi valori singolari nel calcolo della soluzione potrebbe portare ad un vettore soluzione  $x$  con componenti ampie che si cancellano algebricamente quando si moltiplica  $x$  per la matrice  $A$ , ma che riproducono con una scarsa approssimazione il vettore  $b$ . In questi casi il vettore  $x$  ottenuto

ponendo a zero  $1/w_i$  corrispondenti ai valori singolari  $w_i$  più piccoli dà la soluzione migliore nel senso dei minimi quadrati.

La SVD deve essere applicata con una certa discrezione. Problema per problema si deve capire l'origine dei valori singolari più piccoli e si deve stabilire la soglia al di sotto della quale trascurare i  $w_i$ .

Nel caso della minimizzazione di LOCO, la matrice  $A$  e il vettore  $b$  si identificano con la matrice  $\frac{\partial B_k}{\partial X_N}$  e con il vettore dei dati  $B_k$  della (6.2). Come mostra la (B.4) il vettore dei parametri del fit  $X_N$  sarà una combinazione lineare delle colonne di  $V$  con coefficienti ottenuti dal prodotto scalare tra le colonne di  $U$  e il vettore  $B_k$  pesato con i valori singolari  $w_i$ .

Si può dimostrare che anche gli errori standard  $\sigma^2(X_j)$  sui parametri del fit sono combinazioni lineari delle colonne di  $V$  secondo la relazione [23]:

$$\sigma^2(X_j) = \sum_{i=1}^M \left( \frac{V_{ij}}{w_i} \right)^2 \quad (\text{B.5})$$

che viene utilizzata da LOCO per calcolare la propagazione degli errori sui parametri del modello dell'ottica lineare di Dafne.

# Bibliografia

- [1] P. Bagley, D. Rubin. *Correction of transverse Coupling in a Storage Ring.* Proceedings of the 1989 Particle Accelerator Conference, Chicago, pag.874-876. IEEE, 1989.
- [2] M. Bassetti et al. *Optical characteristics of the DAFNE wiggler.* Dafne Technical Note G-27, 1994.
- [3] G. Benedetti. *Sextupole in the "C" Corrector Magnet.* Dafne Technical Note BM-5, 2001.
- [4] C. Biscari. *Linear Optics Model for DAFNE Main Rings.* Dafne Technical Note L-33, 2001.
- [5] C. Biscari et al. *Measurements on TESLA splitter prototype for the DAFNE Main Rings.* Dafne Technical Note MM-20, 1996.
- [6] C. Biscari et al. *Coupling in DAFNE.* Dafne Technical Note L-30, 2000.
- [7] B. Bolli et al. *The Dipoles of the DAFNE Main Ring Achromats.* Dafne Technical Note MM-26, 1996.
- [8] B. Bolli et al. *Measurements on TESLA "C" correctors prototype for the DAFNE Main Rings.* Dafne Technical Note MM-17, 1996.
- [9] B. Bolli et al. *The "long" dipoles of the DAFNE Main Rings achromats.* Dafne Technical Note MM-25, 1996.
- [10] B. Bolli et al. *The "short" dipoles of the DAFNE Main Rings achromats.* Dafne Technical Note MM-19, 1996.
- [11] B. Bolli et al. *Magnetic measurements on the four splitters prototype of the DAFNE interaction regions.* Dafne Technical Note MM-28, 1997.

- [12] B. Bolli et al. *Magnetic measurements on the series production wigglers of the DAFNE achromats.* Dafne Technical Note MM-29, 1997.
- [13] M. Conte, W.W. MacKay. *Physics of Particle Accelerators.* World Scientific, 1991.
- [14] E.D. Courant, H.S. Snyder. *Theory of the Alternating-Gradient Syncrotron.* Annals of Physics 3, Vol. 1, 1958.
- [15] Gruppo Dafne. *Registro di DAFNE, 24-25 marzo 2001.* LNF-INFN.
- [16] D. Edwards, L. Teng. *Parametrisation of Linear Coupled Motion in Periodic Systems.* IEEE Trans. Nucl. Sci., Vol. NS-20, pag. 885-888, 1973.
- [17] A. Fasano, S. Marmi. *Meccanica Analitica.* Bollati Boringhieri, 1994.
- [18] A. Ghigo et al. *DAFNE Beam Instrumentation.* Beam Instrumentation Workshop, Stanford 1998, pag. 183-190. AIP, 1998.
- [19] H. Grote, F.C. Iselin. *The MAD Program, User's Reference Manual.* CERN/SL/90-13(AP), 1996.
- [20] S. Guiducci, M. Preger. *Calibration constants and nominal set points for the Day-One lattice of the DAFNE Main Rings.* Dafne Technical Note C-18, 1997.
- [21] F.C. Iselin. *The MAD Program, Physical Methods Manual.* CERN/SL/92(AP), 1994.
- [22] S. Peggs. *Coupling and Decoupling in Storage Rings.* IEEE Trans. Nucl. Sci., Vol. NS-30, pag. 2460-2462, 1983.
- [23] W.H. Press et al. *Numerical Recipes (Fortran).* Cambridge, 1989.
- [24] J. Safranek. *Experimental determination of storage ring optics using orbit response measurements.* Nucl. Instr. & Methods in Phys. Research A 338, pag. 27-36, 1997.
- [25] J. Safranek. *Closed Orbit Control.* Proceedings of the 1998 Joint US-CERN-Japan-Russia School on Particles Accelerators, Montreux, pag. 277-297. World Scientific, 1999.
- [26] D.L. Sagan, D. Rubin. *Linear analysis of coupled lattices.* Phys. Review Special Topics - Accelerators and Beams, Vol. 2, 1999.
- [27] M. Sands. *The Physics of Electron Storage Rings.* SLAC Report 121, 1970.
- [28] A. Stella. *Analysis of the DAFNE Beam Position Monitors with a boundary elements method.* Dafne Technical Note CD-10, 1997.

- [29] A. Stella et al. *Beam Position Monitor System of DAFNE*. Beam Instrumentation Workshop, Stanford 1998,pag. 378-386. AIP, 1998.
- [30] L. Teng. *Global and Local horizontal-vertical Decoupling*. Proceedings of the 1996 Particle Accelerator Conference, Dallas. IEEE, 1998.
- [31] G. Vignola et al. *The  $\Phi$ -Factory Storage Rings*. pag. 325-364. LNF-90/031(R), 1990.
- [32] G. Vignola et al. *DAFNE, Design Criteria and Project Overview*. Workshop on Physics and Detectors for DAFNE, Frascati, pag. 11-27. LNF-INFN, 1991.
- [33] H. Wiedemann. *Particle Accelerator Physics*. Springer-Verlag, 1995.
- [34] F. Zimmermann. *Measurements and Correction of Accelerator Optics*. Proceedings of the 1998 Joint US-CERN-Japan-Russia School on Particles Accelerators, Montreux, pag. 17-20. World Scientific, 1999.



## **Ringraziamenti**

Il mio primo rigraziamento e la mia stima vanno a Caterina Biscari e Catia Milardi che mi hanno seguito con disponibilità costante durante tutta la mia attività a Frascati.

Ringrazio David Alesini e Simone Di Mitri per l'amicizia, la fatica e le discussioni che abbiamo condiviso.

Grazie anche ai ricercatori di Dafne, da cui ho ricevuto incoraggiamento e utili consigli, e particolarmente a Gaetano Vignola e Sergio Bertolucci per avermi introdotto e guidato nella mia collaborazione con la Divisione Acceleratori.

La mia riconoscenza e la mia stima vanno anche al professor Mario Calvetti per i suoi consigli e per la solidarietà e la fiducia che mi ha sempre dimostrato.

Grazie anche a Pina Possanza e a Guglielma Simonetti per la pazienza e la disponibilità straordinaria.

Infine sono profondamente grato a tutti gli amici che non mi hanno fatto mancare il loro incoraggiamento, alla mia famiglia per avermi sostenuto negli studi e a mio zio Giorgio Lombardo per la lunga e generosa ospitalità a Roma.

Dedico il lungo e paziente lavoro di questa tesi a mio padre e a mia madre.