



ゲージ重力対応における量子情報と時空の幾何

著者	山代 和志
発行年	2021-12
出版者	静岡大学
URL	http://doi.org/10.14945/00029018

THESIS

QUANTUM INFORMATION AND GEOMETRY OF SPACE-TIME
IN THE GAUGE/GRAVITY CORRESPONDENCE

ゲージ重力対応における
量子情報と時空の幾何

静岡大学創造科学技術大学院
自然科学系教育部 情報科学専攻

山代 和志

2021 年 12 月

概要

ゲージ重力対応の深い理解を得ることは、量子重力理論の時空創発の機構を解明するために重要だと考えられている。近年、量子情報理論からゲージ重力対応に関して重要な洞察を得られている。本学位論文では、2つの量子情報量に着目して量子情報と時空の幾何との関係を調べる。1つは、量子情報計量がどのように重力双対における時空の幾何によって記述されるかを研究する。ここで、場の量子論側は2つの理論の基底状態の差を測る量子情報計量を考える。その結果、重力側では余次元2の超曲面の体積におけるバックリアクションによって表現できることを示す。また、このような解釈を得るためには、背景の重力理論とその双対な場の量子論にポアンカレ対称性が必要であることを見る。もう1つは、ターゲット空間におけるエンタングルメントとバルク空間の幾何との関係について研究する。ここでは複素行列模型と Lin-Lunin-Maldacena によって発見されたバブリング AdS 幾何の対応関係に着目する。この場合、複素行列模型のターゲット空間は複素行列の固有値が分布する2次元面に相当し、固有値分布はバブリング AdS 幾何を決定する液滴配位と同一視することができる。その上で、いくつかの典型的な状態についてターゲット空間エンタングルメントエントロピーと、対応するバブリング AdS 幾何における部分領域の境界の面積(長さ)を計算する。これらが定性的に同じふるまいを示すことを示す。以上の2つの研究から、場の量子論の量子情報からバルク時空のダイナミクスを理解するための手掛かりを得る。

目次

第 1 章	背景と目的	3
1.1	背景	3
1.2	目的	5
1.3	構成	6
第 2 章	ゲージ重力対応	8
2.1	ゲージ重力対応	8
2.2	相関関数	9
2.3	ホログラフィックエンタングルメントエントロピー	11
第 3 章	バルク幾何に対する情報計量の解釈	13
3.1	量子情報計量	13
3.2	場の量子論における情報計量	14
3.3	オンシエル作用と情報計量	16
3.4	AdS 幾何へのバックリアクション	17
3.5	ベクトル場	21
3.6	テンソル場	23
第 4 章	ゲージ重力対応における量子情報計量の幾何学的解釈	27
4.1	ゲージ重力対応における情報計量	27
4.2	オンシエル作用とアインシュタイン方程式	28
第 5 章	複素行列模型におけるターゲット空間エンタングルメント	34
5.1	ターゲット空間エンタングルメントエントロピー	34
5.2	スレーター行列式で与えられる N フェルミオン系の量子力学	37

5.3	複素行列模型と 2 次元フェルミオン	39
5.4	2 次元調和振動子の N フェルミオン系に対するターゲット空間エンタングルメント . .	41
第 6 章	バブリング AdS 幾何におけるバルクエンタングルメント	48
6.1	バブリング AdS 幾何	48
6.2	バブリング AdS 幾何におけるエンタングル面の面積とターゲット空間エンタングルメントエントロピー	49
第 7 章	まとめと考察	54
	謝辞	57
付 録 A	リッチテンソルとスカラー曲率の計算	58
付 録 B	N 個のフェルミオンの非相対論的な量子力学におけるターゲット空間エンタングルメントエントロピー	61
付 録 C	(AdS) ジャイアントグラビトンのバブリング AdS 幾何に対する $\gamma_{\phi\phi}$	70

第1章 背景と目的

1.1 背景

自然界には電磁気力、弱い力、強い力、重力の4つの力が存在している。そのうちのうち、重力を除いた3つの力は標準模型によって記述されている。しかし、現在は重力を含んだ4つの力の統一理論は完成されていない。その最も有力な候補が超弦理論である。この理論は、開いた弦と閉じた弦の2つのオブジェクトで記述されている理論である。しかし、超弦理論は摂動論でしか定義されておらず、非摂動論的な定式化は最重要課題の一つである。これは、重力の量子論を解明するために重要な点である。具体的には、宇宙の誕生や始まり、ブラックホールの特異点などの重力相互作用が強くなるミクロスケールでの現象を説明できない。この問題は超弦理論の非摂動論的な定式化の必要である理由の一つである。

このような問題を克服するために、明らかにしなければならない重力の量子論的な性質の一つが時空の創発である。重力理論とは時空のダイナミクスを記述する理論であるため、時空そのものを量子化した際に、量子揺らぎから時空が生成される現象があると考えられる。これは宇宙の誕生などを説明するために重要な概念である。そのような時空の創発を具現化する例の一つが行列模型である。行列模型は超弦理論の非摂動論的な定式化の候補として知られている [1–3]。その特徴は、時間や空間の存在を仮定せずに、理論に存在する行列の自由度から時空が創発する点である。具体的には、10次元の超対称ヤンミルズ理論を時間のみの1次元の理論に次元還元した BFSS 行列模型を考える [1]。この模型には、時間のみ仮定されていて空間の自由度は存在しない。しかし、行列の固有値を空間の座標として解釈することによって、もともと理論に存在しない時空を仮定することができる。これは、行列模型のもつ時空創発の例の一つである。

また、行列模型とは別の観点から、時空の創発の例として盛んに研究されているのがゲージ重力対応である。これは、バルク時空の重力理論とその境界上の場の量子論の間に双対性がある、という予想である。つまり視点を変えると、重力を仮定しない場の量子論から、重力理論によって記述される1次元高い時空が創発したと見ることができる。特に、超弦理論から予想されるゲージ重力対応は現在でも盛んに研究されている [4–7]。最も典型的なゲージ重力対応の例として、境界の場の量子論側が4次元 $\mathcal{N} = 4$ 超対称ヤンミルズ理論 (SYM) で、バルク側の重力理論として $\text{AdS}_5 \times S^5$ 上の IIB 型超弦理論の対応関係が Maldacena によって提唱された [4]。このような、反ドジッター (AdS) 時空上の重力理論とその境界の共形場理論 (CFT) の双対性は、AdS/CFT 対応とも呼ばれる。ゲージ重力対応では、重力側の弦の効果を小さくする強結合極限と重力側の弦の量子論的な効果を小さくするラージ N 極限が存在する。この双対性はこの2つの極限操作の下で成り立つことがよく確かめられ

ているが、極限操作を取り除いたときにどこまで対応しているかは確立していない。

近年、ゲージ重力対応において、場の量子論の量子情報量が重要な役割を果たしていることが指摘されている。その証拠として、境界の場の量子論で計算されるエンタングルメントエントロピーと、重力双対におけるバルク幾何の最小曲面の面積が等価であることが示されている [8]。量子情報理論において、エンタングルメントエントロピーは量子エンタングルメントの度合いを測る量子情報量の一つである。この関係は、量子情報が双対なバルク時空の幾何の創発と関係していることを示す典型的な例である。

本学位論文では、ゲージ重力対応に基づいた量子情報とバルク時空の関係について、特に、量子情報計量とターゲット空間エンタングルメントという 2 つの情報量に着目する。

ゲージ重力対応の下で量子情報計量とバルク時空の幾何

ゲージ重力対応の下で情報量の一つである量子情報計量の研究がなされている [9–17]。量子情報計量は 2 つの量子状態の差を測る情報量で、エンタングルメントエントロピーとは違うバルク幾何の情報を持つと考えられている。[9] では、CFT と CFT からある演算子によって摂動された理論を考えて、この 2 つの理論の基底状態の間の距離を測るような情報計量を計算している。ここでは、上記 2 つの理論を合わせて得られる場の量子論の重力双対を調べ、量子情報計量が超曲面の体積で表せることを発見した。この方向での発展は [10–13] で研究されている。また [15–17] では別の方向性で量子情報計量の研究がなされている。

ターゲット空間エンタングルメントとバルク時空の幾何

近年、場の量子論における新しい情報量としてターゲット空間のエンタングルメントエントロピーが研究されている [18–23]。通常の平坦な時空上の場の量子論で考えられるようなエンタングルメントエントロピーは、場が存在する空間である基底空間に対して任意の部分領域と補空間に分割することによって定義される。一方、場の配位空間であるターゲット空間を任意の部分領域とその補空間に分割することでターゲット空間エンタングルメントエントロピーは定義される。特に、 $0+1$ 次元の場の量子論である量子力学では基底空間が存在しないため基底空間の分割によるエンタングルメントエントロピーは定義できないが、ターゲット空間エンタングルメントエントロピーは定義できる。例えば、ある 11 次元の量子重力理論を記述する行列量子力学では、行列の固有値が分布する空間がターゲット空間となり、物理的な時空と対応すると考えられる。また、第一量子化の弦理論では、時空の分割は弦の埋め込まれた座標の制限にあたる。これは、基底空間にあたる世界面の分割ではなく、ターゲット空間の分割に相当する。このように、ターゲット空間のエンタングルメントを考えることは、量子重力を記述する時空の量子論的な性質を理解する上で重要であると考えられる。

[19] では、 Dp ブレーンホログラフィーのもとで、場の量子論のターゲット空間に対するエンタングルメントエントロピーが、バルクエンタングルメントエントロピーと等価であると予想された。特

に、D0 ブレーンホログラフィーでは、境界の理論が行列量子力学で記述される [1]。そして、D0 ブレーン行列表量子力学におけるある部分領域のターゲット空間エンタングルメントエントロピーは、重力側のバルクにおける対応する部分領域の境界の面積に比例係数 $1/4G_N$ で比例すると予想される。

最近、量子力学におけるターゲット空間の部分領域の分割によるエンタングルメントエントロピーが定式化されてた [18]。量子力学系では空間方向を自由度のラベルとして扱わないため、場の量子論でよく行われているようにエンタングルメントエントロピーを定義することができない。一方で、空間方向そのものがターゲット空間にあたる。このターゲット空間に領域分割にあたる制限を与えることで、この制限に対して部分密度行列を定義し、フォンノイマンエントロピーを計算する。これがターゲット空間エンタングルメントエントロピーである。一般にターゲット空間の領域分割に対してヒルベルト空間はテンソル積であらわすことができない。ここでは代数的なアプローチでこのようなターゲット空間の制限に対する部分密度行列を定義している。[22] では、波動関数がスレーター行列式で書けるような N 個のフェルミオン系でのターゲット空間エンタングルメントエントロピーが定式化されている。

1.2 目的

ゲージ重力対応の下で量子情報計量とバルク時空の幾何

3 章と 4 章ではゲージ重力対応の下で量子情報計量とバルク時空の幾何の関係を調べる [28]。

本研究では、[9] と同じ 2 つの場の量子論で、それぞれ重力双対を考える。1 つは CFT に双対な AdS 時空、もう一つは CFT から摂動された場の量子論に双対な漸近的 AdS 時空である。後者の重力双対のバルク時空は AdS 時空からの摂動によって引き起こされるバックリアクションによって与えられる。ここで 2 つの場の量子論の基底状態の差を測る情報計量が、双対な時空における余次元 2 の超曲面の体積へのバックリアクションによって与えられることを発見した。これは、摂動がスカラー、ベクトル、テンソルのいずれの演算子で与えられても成立し、普遍的な公式である。

次に、3 章で見つけた量子情報計量と余次元 2 の体積との関係をより一般的な場合に拡張する。ここでは重力双対を持ち、CFT とは限らない任意の場の量子論でも関係式が満たされることを示す。ここで重力側では共変な形式で計算を行うことで、量子情報計量が余次元 2 の超曲面の体積へのバックリアクションの効果で表現されるために、双対な時空が満たすべき条件を導き出すことができる。この条件は、場の量子論がポアンカレ対称性を持つことを意味している。

ターゲット空間エンタングルメントとバルク時空の幾何

5 章と 6 章ではターゲット空間のエンタングルメントとバルク時空の幾何の関係を調べる。

本学位論文では、D3 ブレーンホログラフィーを考える。この時、場の量子論側は 4 次元 $\mathcal{N} = 4$ SYM で与えられ、原理的には、D3 ブレーンの位置を表す 6 個のスカラー場のターゲット空間に対して何ら

かの制限を加え、その制限に対する部分密度行列を計算することでターゲット空間エンタングルメントエントロピーを計算できると考えられる。しかし、場の量子論に対するターゲット空間エンタングルメントエントロピーの計算方法が知られていない現状でこれは非常に難しい問題である。そのため、考える自由度を6個のスカラー場のうちの2つのダイナミクスに限定した複素行列模型を考える。この時、ターゲット空間は行列の固有値が分布する2次元面として考えられる。この複素行列模型のホロモロフィックセクターを考えると、4次元 $\mathcal{N} = 4$ SYM の超対称性の半分を保持する (1/2BPS である) カイラルプライマリー演算子のダイナミクスを記述するのに十分な模型となっている [27]。特に、このような演算子に双対な重力理論の解として、 $R \times SO(4) \times SO(4)$ 対称性の下で不変な IIB 型超重力理論の 1/2BPS 解であるバブリング AdS 幾何 [26] が知られている。この時、バブリング AdS 幾何はある2次元平面の境界条件を与えることで解が一つ与えられる。そのような境界条件は2次元フェルミオンの液滴配位とみることができ、この液滴配位が複素行列模型の固有値の配位に対応している。この複素行列模型とバブリング AdS 幾何との対応の下で、ターゲット空間エンタングルメントエントロピーとバルク時空における余次元2の境界の面積(長さ)との関係を調べる。

まず、複素行列模型におけるホロモロフィックセクターを与える状態は、 N 個のフェルミオン系のスレーター行列式でかけることが知られている [27]。この時、スレーター行列内の一体系の波動関数は量子ホール効果における最低ランダウ準位の波動関数で与えられる。これより、このスレーター行列式に対するターゲット空間エンタングルメントエントロピーを考える。このとき、ターゲット空間の部分領域は原点を中心とした円とする。ここでは、 $AdS_5 \times S^5$ と AdS ジャイアントグラビトン、ジャイアントグラビトンに対応する状態についてターゲット空間エンタングルメントエントロピーを計算する。一方、重力側ではそれぞれの状態に対応するバブリング AdS 幾何の下で、ターゲット空間の部分領域に対応する2次元面の領域を考える。この部分領域の境界の面積(長さ)を計算すると、対応するターゲット空間エンタングルメントエントロピーと同じふるまいをすることがわかる。

1.3 構成

この論文は以下の様に構成されている。

- 2章では、ゲージ重力対応についての基本的な概念を簡単に説明する
- 3章では、AdS/CFT 対応の下で量子情報計量はバルクの幾何とどのように関係づくかを見る。
- 4章では、量子情報計量とバルク幾何との関係を一般のゲージ重力対応に拡張する。
- 5章では、複素行列模型におけるターゲット空間エンタングルメントエントロピーを計算する。
- 6章では、バブリング AdS 幾何におけるバルクエンタングルメントエントロピーを計算し、5章での結果と比較する。
- 7章では、まとめと考察を行う。

- 付録 A では、3 章と 4 章で扱うリッチテンソルの計算を行う。
- 付録 B では、5 章で得た N フェルミオン系のターゲット空間エンタングルメントエントロピーについて詳しい計算を行う。
- 付録 C では、6 章で用いた (AdS) ジャイアントグラビトンのバブリング AdS 幾何に対する内部計量の具体的な表式を示す。

第2章 ゲージ重力対応

ここではゲージ重力対応の基本的な概念についてレビューする。

2.1 節では超弦理論から導かれるゲージ重力対応を見る。2.2 節では、ゲージ重力対応の下で、境界の場の量子論の相関関数とバルクの重力理論の相関関数の間の関係を見る。特に、3 章や 4 章で用いる GKP-Witten の関係式について説明する。2.3 節では、ゲージ重力対応のもとで量子情報を考える発端となったホログラフィックエンタングルメントエントロピーについて簡単に説明する。

2.1 ゲージ重力対応

超弦理論では、最も基本的な物質として開弦と閉弦によって記述される。特に、低エネルギー極限で開弦はゲージ粒子、閉弦は重力子として見ることができる。ここで、10 次元 IIB 型超弦理論の D3 ブレーンが N 枚重なっているものを考えよう。まず、開弦の見方では、D3 ブレーンは開弦の端がつく部分空間として定義することができる。このとき、開弦の 1 ループを考える。この時、閉弦の見方では、閉弦はこの 10 次元の空間を伝搬し、D3 ブレーンと閉弦の相互作用と見ることができる。特に、D3 ブレーンは質量をもっているため、背景の時空は曲げられ、その中を閉弦が伝搬していると見られる。この 2 つの見方は開弦/閉弦対応と呼ばれ、ゲージ重力対応の超弦理論による説明である。

このとき、D3 ブレーンのホライズン近傍を見てみる。これは開弦の長さ $l_s \rightarrow 0$ に対応している。これより、開弦は D3 ブレーン上のゲージ場の励起と見るができるため $\mathcal{N} = 4$ 超対称ヤンミルズ理論 (SYM) で記述される。一方、D3 ブレーンがたくさん集まった配位は、時空が曲げられブラックホール解となる。そのときホライズン近傍は

$$dS^2 = R^2 \frac{dz^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{z^2} + R^2 d\Omega_5^2 \quad (2.1.1)$$

になることが知られている。これが $\text{AdS}_5 \times S^5$ の計量で、IIB 型超弦理論で記述される閉弦はこの時空を伝搬する。以上の 2 つの理論の対応が、Maldacena が提唱した AdS/CFT 対応 [4]

$$\begin{aligned} 4\text{D } \mathcal{N} = 4 \text{ SYM} & \leftrightarrow \text{AdS}_5 \times S^5 \text{ 上の IIB 型超弦理論} \\ g_{YM}^2 = 4\pi g_s & \quad \frac{R^4}{l_s^4} = g_{YM}^2 N \equiv \lambda \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

でゲージ重力対応の典型的な例である。ここで λ はゲージ理論を $1/N$ で展開したときの実質的な結合定数で t'Hooft 結合定数と呼ばれる。このとき、 λ を固定して D3 ブレーンの枚数が多い極限であるラージ N 極限をとると、IIB 型超弦理論のループ補正は $\mathcal{O}(1/N)$ と知られているため、ループ補

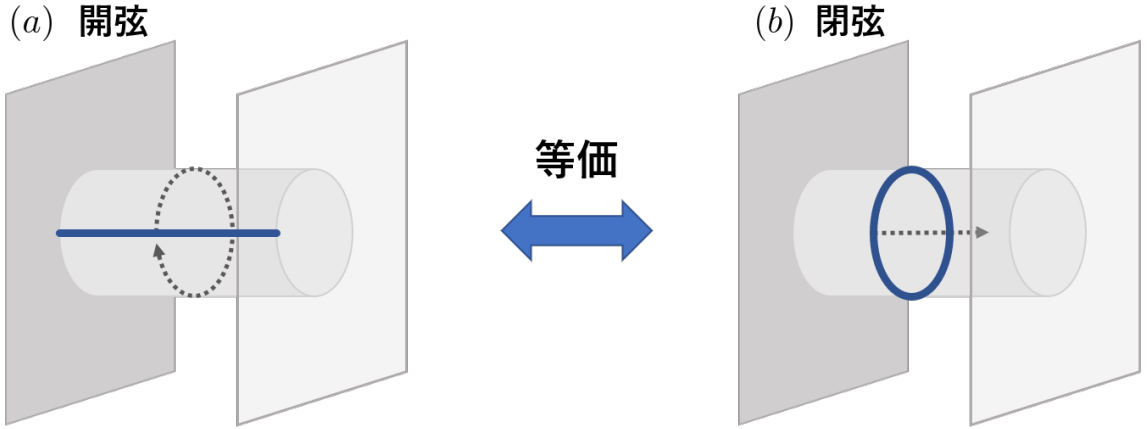


図 2.1: (a) の図は重なった D3 ブレーンについている開弦の 1 ループの世界面を表している。(b) の図は閉弦が D3 ブレーンと相互作用し、伝搬している。この伝搬による世界面を表している。(a) と (b) は、それぞれの弦の世界面だけを見れば互いに区別はできなく等価であることがわかる。これが弦理論の開弦/閉弦対応と呼ばれている。

正が無視でき古典的な弦で記述される。次にラージ N 極限のもとで λ を大きくする強結合極限をとる。これが、弦の効果を小さくする極限に対応している。したがって、これらの極限の下で、強結合の $\mathcal{N} = 4$ 超対称ヤンミルズ理論と AdS 時空上の IIB 型超弦理論の低エネルギー極限である IIB 型超重重力理論が等価になる。この双対性は 2 つの極限操作の下で成り立つよく確かめられているが、極限操作を取り除いたときにどこまで対応しているかは確立していない。また、 Dp ブレーンホログラフィーにおいて、 N 個の Dp ブレーンとそれらを結ぶ開弦の低エネルギー有効理論は $(p+1)$ 次元の超対称 Yang-Mills 理論 (SYM) によって記述される [5]。特に、SYM の $N \times N$ エルミート行列である $9-p$ 個のスカラー場の固有値はバルク上の Dp ブレーンの位置と解釈される。また、非対角要素は Dp ブレーンを結ぶ開弦として解釈される。このような固有値が表している空間は境界の理論においてはターゲット空間として解釈される。

2.2 相関関数

ゲージ重力対応において、境界の場の量子論の相関関数とバルクの重力理論の相関関数の間の関係を与えているのが GKP-Witten の関係式 [6, 7] である。特に、重力側の古典近似がよい場合は

$$\left\langle \exp \left(i \int \phi \mathcal{O} \right) \right\rangle = e^{i S_{on-shell}[\Phi]} \quad (2.2.1)$$

の様に与えられる。ここで左辺の演算子 \mathcal{O} は境界の理論の演算子を表しており、 ϕ はソースにあたる。つまり、左辺は演算子 \mathcal{O} の相関関数についての生成汎関数 $e^{-W[\phi]}$ である。一方、右辺の Φ は重力理論の \mathcal{O} に双対な場で、境界での値が ϕ に一致する。そして、右辺の $S_{on-shell}[\Phi]$ は重力場中の Φ の作用に運動方程式を代入したオンシェル作用にあたる。この関係式は重力双対が存在するような強

結合の場の量子論の解析に用いられる。通常の摂動論的な解析では強結合の場の量子論の相関関数を求めるのは困難である。しかし、その場の量子論に対する重力双対の存在を仮定することで、この関係式から古典的な重力理論の計算によって場の量子論の相関関数を求めることに用いられる。

ここでは、AdS/CFT 対応の下で境界の理論のプライマリ演算子 \mathcal{O} の 2 点関数が、双対なバルクの重力理論の計算によって求まることをみる。この時、境界のゲージ理論が d 次元の CFT で、対応するバルクの重力理論が $d+1$ 次元のユークリッド AdS 時空である。まずバルクの AdS_{d+1} について考える。ここで座標について次のような表記を用いる: $x^\mu = (x^0, x^i) = (\tau, \vec{x})$ で、ここで $\mu = 0, \dots, d-1$ 、 $i = 1, \dots, d-1$ 、 $z^M = (z, x^\mu)$ である。これより、ポアンカレ座標の AdS_{d+1} の計量を

$$ds^2 = G_{MN} dz^M dz^N = \frac{1}{z^2} (dz^2 + dx^\mu dx^\mu) \quad (2.2.2)$$

のような形でとることとする。 AdS_{d+1} 上の $z = \epsilon$ に境界の超曲面を定義する。ここで、 ϵ は UV カットオフである。 CFT_d はこの境界上で定義されている。

Φ についての重力側の作用は

$$S_M = \frac{1}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{G} (G^{MN} \partial_M \Phi \partial_N \Phi + m^2 \Phi^2) \quad (2.2.3)$$

で与えられる。ここで Φ の 2 次の項のみを保持し、質量はプライマリ演算子 \mathcal{O} のスケール次元 Δ を用いて

$$m^2 = \Delta(\Delta - d) \quad (2.2.4)$$

で与えられる。

Φ についての運動方程式は (2.2.3) から

$$-\frac{1}{\sqrt{G}} \partial_M (\sqrt{G} G^{MN} \partial_N \Phi) + m^2 \Phi = 0 \quad (2.2.5)$$

のように得ることができる。 Φ についての境界条件は

$$\Phi(z = \epsilon, x) = \epsilon^{d-\Delta} \phi(x) \quad (2.2.6)$$

で与える。このとき、 $\phi(x)$ が $\Phi(z, x)$ の境界での値であり、プライマリ演算子 \mathcal{O} のソースにあたる。境界条件 (2.2.6) を満たすような (2.2.5) の解 [7] は

$$\Phi(z, x) = \int d^d x' K(z, x - x') \phi(x') \quad (2.2.7)$$

と得ることができる。ここで K は境界バルクプロパゲーター (boundary to bulk propagator) と呼ばれているもので

$$K(z, x) = \frac{\alpha_\Delta z^\Delta}{(z^2 + x^2)^\Delta} \quad (2.2.8)$$

である。ここで

$$\alpha_\Delta = \frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\Delta - \frac{d}{2})} \quad (2.2.9)$$

で、 $\Gamma(x)$ はガンマ関数である。(2.2.3) にを代入することによって、 Φ のオンシェル作用は

$$\begin{aligned} S_{on-shell} &= \frac{1}{2} \int d^{d+1}x \partial_M \left(\sqrt{G} G^{MN} \Phi \partial_N \Phi \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{G} \Phi \left\{ \frac{1}{\sqrt{G}} \partial_M \left(\sqrt{G} G^{MN} \partial_N \Phi \right) - m^2 \Phi \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{z=\epsilon} d^d x \epsilon^{-d+1} \Phi \partial_z \Phi \\ &= -\Delta \alpha_\Delta \int d^d x d^d x' \frac{\phi(x) \phi(x')}{(\epsilon^2 + (x - x')^2)^\Delta} \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

と評価することができる。ここで3行目を得るために運動方程式 (2.2.5) を用いた。

スカラー演算子 \mathcal{O} の2点関数は双対なスカラー場 Φ のオンシェル作用 (2.2.10) より

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(x') \rangle &= -\frac{\delta^2 W[\phi_0]}{\delta \phi_0(x) \delta \phi_0(x')} \\ &= -\frac{\delta^2 S_{on-shell}[\Phi]}{\delta \phi_0(x) \delta \phi_0(x')} \\ &= \frac{\Delta \alpha_\Delta}{(x - x')^{2\Delta}} \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

となる。ここで $\epsilon \rightarrow 0$ とした。このように、GKP-Witten の関係式をもちいて CFT_d における演算子 \mathcal{O} の2点関数が与えられる。

2.3 ホログラフィックエンタングルメントエントロピー

量子多体系の量子エンタングルメントの度合いを測るエンタングルメントエントロピーが AdS/CFT 対応に適用できることが発見された [8]。そのエンタングルメントエントロピーと重力を結びつける関係式が笠・高柳公式である。

まず、AdS 空間の境界の領域を A と B に分けるとする。この時、境界の CFT の系全体のヒルベルト空間 \mathcal{H} は各領域のヒルベルト空間 \mathcal{H}_A と \mathcal{H}_B のテンソル積で $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ と書くことができる。そして、密度行列 ρ を部分領域 B のヒルベルト空間 \mathcal{H}_B について部分トレースをとることで、部分領域 A に制限した密度行列 ρ_A を

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho \quad (2.3.1)$$

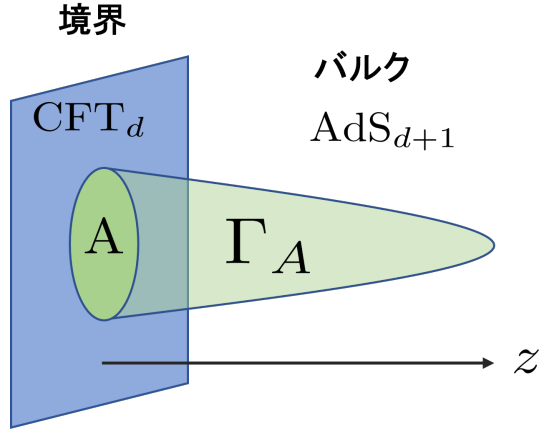


図 2.2: この図は、ホログラフィックエンタングルメントエントロピーにおける境界の部分領域 A と、その境界からバルク方向に伸びる最小曲面 Γ_A を表している。

と定義する。これをもちいて部分領域 A におけるエンタングルメントエントロピー S_A は

$$S_A = -\text{Tr} \rho_A \log \rho_A \quad (2.3.2)$$

と定義される。一方で、この領域 A の境界を ∂A とする。この ∂A を端に持つような AdS 空間の曲面を考え、そのなかで、特に面積が最小になる極小曲面を Γ_A と置く。この Γ_A の面積を $\text{Area}(\Gamma_A)$ としたときに、 AdS 空間の境界の CFT のエンタングルメントエントロピー S_A は

$$S_A = \frac{\text{Area}(\Gamma_A)}{4G_N} \quad (2.3.3)$$

で与えられることが知られている。ここで G_N はニュートンの重力定数である。この (2.3.3) 式が笠・高柳公式と呼ばれ、このようにして計算されたエンタングルメントエントロピーはホログラフィックエンタングルメントエントロピーと呼ばれる。(2.3.3) 式は、境界に住む量子多体系の量子情報であるエンタングルメントエントロピーが、バルクの重力理論の幾何に対応していることを示している。

このように、 AdS/CFT 対応の下で、 AdS 時空の境界の CFT が持つ量子論的な情報は、 AdS 時空のどの領域に存在するのかという問いに対して量子情報理論の観点から様々な研究がされている。

第3章 バルク幾何に対する情報計量の解釈

この章では、AdS/CFT 対応の下で、場の量子論から計算される量子情報計量がバルクの幾何に対してどのような解釈が得られるかを調べる。特に、量子情報計量とバルク幾何の関係式を導き、この関係式が普遍的なものになっていることを見る。

3.1 節では、量子情報計量の基本的な定義を確認する。3.2 節では量子情報理論で与えられていた量子情報計量を、場の量子論で扱えるよう経路積分によって再定義する。それより、量子情報計量が2点関数で与えられることを見る。3.3 節では、量子情報計量が2点関数で与えられることから、重力双対の場のオンシェル作用によって書き換えることができることを見る。3.4 節では、アインシュタイン方程式を解くことにより、そのオンシェル作用が余次元2の体積に対するバックリアクションによって与えられることを見る。ここまでの、3.2~3.4 節は重力双対の場がスカラー場の場合について計算し、量子情報計量とバックリアクションの関係を表す公式が得られる。以下 3.5 と 3.6 節では、重力双対の場がそれぞれベクトル場とテンソル場の場合について、公式が成り立つかを見る。

3.1 量子情報計量

物性や情報理論で用いられる量として fidelity が知られている。これは実際には、実験などで得られたノイズを含めた量子状態が、本来作りたかった量子状態とどれだけ異なるかの尺度の一つとして用いられる。一般的な2つの量子状態 A と B について密度行列がそれぞれ ρ_A と ρ_B と与えられるとする。この時、fidelity $F(\rho_A, \rho_B)$ は

$$F(\rho_A, \rho_B) = \text{tr} \sqrt{\rho_A^{1/2} \rho_B \rho_A^{1/2}} \quad (3.1.1)$$

の様に定義される。ここで、すべての量子状態に対するヒルベルト空間についてトレースをとっている。

量子状態 A と B が純粋状態であるとする。密度行列は $\rho_A = |\Psi_A\rangle \langle \Psi_A|$ と $\rho_B = |\Psi_B\rangle \langle \Psi_B|$ で与えられ、この時、fidelity は (3.1.1) より

$$F(\Psi_A, \Psi_B) = |\langle \Psi_A | \Psi_B \rangle| \quad (3.1.2)$$

となる。

今、量子状態が1つのパラメーター λ で与えられているとしよう。そのとき、量子状態 $|\Psi_\lambda\rangle$ とそ

これから微小な量だけずれた量子状態 $|\Psi_{\lambda+\delta\lambda}\rangle$ の間の fidelity は、 $\delta\lambda$ で展開すると

$$F(\Psi_\lambda, \Psi_{\lambda+\delta\lambda}) = 1 - g_{\lambda\lambda}\delta\lambda^2 + \mathcal{O}(\delta\lambda^3) \quad (3.1.3)$$

のように与えられる。この時、 $\delta\lambda^2$ の展開係数である $g_{\lambda\lambda}$ が量子情報計量として定義される。この一般化として、複数次元のパラメーター空間 $\lambda = \{\lambda^a\}$, $a = 1, \dots, N$ が存在する場合は

$$F(\Psi_\lambda, \Psi_{\lambda+\delta\lambda}) = 1 - \sum_{a,b=1}^N g_{ab}\delta\lambda^a\delta\lambda^b + \mathcal{O}(\delta\lambda^3) \quad (3.1.4)$$

と与えられ、量子情報計量 g_{ab} はパラメーター空間の計量として見ることができる。

3.2 場の量子論における情報計量

\mathbb{R}^d 上に定義された場の量子論を考える。ここで座標は (τ, \vec{x}) で、 τ はユークリッド時間で \vec{x} は $(d-1)$ 次元の空間座標である。この理論の基底状態 $|\Omega\rangle$ について、時間 $\tau = 0$ での場 $\psi(0, \vec{x})$ の値を $\tilde{\psi}(\vec{x})$ と固定した時の波動関数は、時間が $-\infty$ から 0 についての経路積分によって

$$\langle \tilde{\psi} | \Omega \rangle = \frac{1}{Z^{1/2}} \int_{\psi(0, \vec{x}) = \tilde{\psi}(\vec{x})} \mathcal{D}\psi \exp \left[- \int_{-\infty}^0 d\tau \int d^{d-1}x \mathcal{L} \right] \quad (3.2.1)$$

の様に与えられる。ここで場 Ψ の値は $\tau = 0$ で $\tilde{\psi}(\vec{x})$ に固定されていて、 Z はこの理論の分配関数である。また基底状態は

$$\langle \Omega | \Omega \rangle = 1 \quad (3.2.2)$$

の様に規格化されている。

次に同じ場で定義されているような2つの理論のラグランジアン \mathcal{L}_1 と \mathcal{L}_2 を考える。それぞれの理論の基底状態は $|\Omega_1\rangle$ と $|\Omega_2\rangle$ で書くことにする。その時、(3.2.1) で与えた基底状態についての波動関数をより合わせることによって、基底状態の間の内積を経路積分によって

$$\langle \Omega_2 | \Omega_1 \rangle = \frac{1}{(Z_1 Z_2)^{1/2}} \int \mathcal{D}\psi \exp \left[- \int d^{d-1}x \left(\int_{-\infty}^0 d\tau \mathcal{L}_1 + \int_0^\infty d\tau \mathcal{L}_2 \right) \right] \quad (3.2.3)$$

とあらわすことができる。ここで Z_1 と Z_2 はそれぞれの理論の分配関数である。

次に2つのラグランジアンの差を $\delta\mathcal{L}$ とすると、理論2のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L} \quad (3.2.4)$$

の様を得られる。この $\delta\mathcal{L}$ を用いて内積 (3.2.3) を書き直すと

$$\langle\Omega_2|\Omega_1\rangle = \frac{\langle\exp[-\int_0^\infty d\tau \int d^{d-1}x \delta\mathcal{L}]\rangle_1}{\langle\exp[-\int_{-\infty}^\infty d\tau \int d^{d-1}x \delta\mathcal{L}]\rangle_1^{1/2}} \quad (3.2.5)$$

のようになる。ここで $\langle\rangle_1$ は理論 1 による真空の期待値

$$\langle\mathcal{O}\rangle_1 = \frac{1}{Z_1} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{O} e^{-S_1} = \langle\Omega_1|\mathcal{O}|\Omega_1\rangle \quad (3.2.6)$$

を表している。[9] の様に (3.2.5) を $\delta\mathcal{L}$ について $\mathcal{O}(\delta\mathcal{L}^2)$ で展開すると内積は

$$\langle\Omega_2|\Omega_1\rangle = 1 - \frac{1}{2} \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^0 d\tau' \int d^{d-1}x \int d^{d-1}x' \langle\delta\mathcal{L}(\tau, \vec{x}) \delta\mathcal{L}(\tau', \vec{x}')\rangle_1 \quad (3.2.7)$$

となる。ここで $\delta\mathcal{L}$ の 1 点関数が消えること

$$\langle\delta\mathcal{L}(\tau, \vec{x})\rangle = 0 \quad (3.2.8)$$

と時間反転対称性

$$\langle\delta\mathcal{L}(\tau, \vec{x}) \delta\mathcal{L}(\tau', \vec{x}')\rangle = \langle\delta\mathcal{L}(-\tau, \vec{x}) \delta\mathcal{L}(-\tau', \vec{x}')\rangle \quad (3.2.9)$$

を仮定した。

さらに、 $\delta\mathcal{L}$ について

$$\delta\mathcal{L} = \phi(\vec{x}) \mathcal{O}(\tau, \vec{x}) \quad (3.2.10)$$

の様にとることを仮定する。ここで $\phi(\vec{x})$ は時間 τ によらないソースで $\mathcal{O}(\tau, \vec{x})$ は局所的な演算子である。その時、(3.2.7) と (3.2.10) を使って、情報計量 \mathcal{G} を

$$\mathcal{G} = \frac{1}{T} (1 - \langle\Omega_2|\Omega_1\rangle) = \int d^{d-1}x \int d^{d-1}x' \mathcal{G}_{\vec{x}, \vec{x}'} \phi(\vec{x}) \phi(\vec{x}') \quad (3.2.11)$$

$$\mathcal{G}_{\vec{x}, \vec{x}'} = \frac{1}{2T} \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^0 d\tau' \langle\mathcal{O}(\tau, \vec{x}) \mathcal{O}(\tau', \vec{x}')\rangle_1 \quad (3.2.12)$$

の様に導入する。ここで T は時間方向の体積で、後での計算でソースが時間によらないことから生じる定数因子を取り除くための規格化として導入している。 $\mathcal{G}_{\vec{x}, \vec{x}'}$ は (3.1.4) における g_{ab} に対応していて、 $\phi(\vec{x})$ が λ^a 、 \vec{x} がパラメーター λ^a のラベル a に、積分 $\int d^{d-1}x$ がラベル a の和に対応している。したがって、 \mathcal{G} は 2 つの理論の基底状態の間の微小な差を、無限次元の配位空間の微小距離として見ることができる。

3.3 オンシェル作用と情報計量

理論 1 が CFT で (3.2.10) の $\mathcal{O}(\tau, \vec{x})$ が CFT で共形次元 Δ のスカラーのプライマリー演算子を考える。したがって、理論 2 はスカラープライマリー演算子によって CFT を摂動した理論である。以下では理論 1 についてラベルを '1' から 'CFT' とて、理論 2 についてはラベルをつけない。つまり、ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{CFT} + \phi(\vec{x})\mathcal{O}(\tau, \vec{x}) \quad (3.3.1)$$

の様に書く。

プライマリー演算子 \mathcal{O} の一点関数は (3.2.8) を満たすように消えている。プライマリー演算子 \mathcal{O} の 2 点関数は

$$\langle \mathcal{O}(\tau, \vec{x}) \mathcal{O}(\tau', \vec{x}') \rangle_{CFT} = \frac{C_\Delta}{(\epsilon^2 + (\tau - \tau')^2 + (\vec{x} - \vec{x}')^2)^\Delta} \quad (3.3.2)$$

の様に与えられる。ここで、 C_Δ は規格化定数で (2.2.11) より

$$C_\Delta = \Delta \alpha_\Delta \quad (3.3.3)$$

と決まる。また、UV カットオフ ϵ である。また時間反転対称性 (3.2.9) を満たすことは (3.3.2) から見ることができる。

情報計量 (3.2.11) と (3.2.12) は

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \frac{1}{T} (1 - \langle \Omega | \Omega_{CFT} \rangle) \\ &= \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int d^{d-1}x \int d^{d-1}x' \frac{C_\Delta \phi(\vec{x}) \phi(\vec{x}')}{(\epsilon^2 + s^2 + (\vec{x} - \vec{x}')^2)^\Delta} \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

と得られる。

CFT が AdS 上で定義されている重力双対を持っているとする。特に、重力側は古典的な近似が十分な状況を考える。情報計量は 2 点関数の生成汎関数の形をしていることから、 \mathcal{O} に双対なバルクの場合 Φ についてのオンシェル作用で表すことができる。

したがって、2.2 節より、重力側のバルクの場合 Φ についてのオンシェル作用を考える¹。

Φ についての境界条件は

$$\Phi(z = \epsilon, \tau, \vec{x}) = \epsilon^{d-\Delta} \phi(\vec{x}) \quad (3.3.5)$$

¹ ここで座標について 2.2 節と同様に次のような表記を用いる: $x^\mu = (x^0, x^i) = (\tau, \vec{x})$ で、ここで $\mu = 0, \dots, d-1$, $i = 1, \dots, d-1$, $z^M = (z, x^\mu)$ である。

で与えられる、時間によらないことに注意する。境界条件 (3.3.5) を満たすような (2.2.5) の解 [7] は

$$\Phi(z, x) = \int d^d x' K(z, x - x') \phi(\vec{x}') \quad (3.3.6)$$

と得ることができる。ここで K は

$$K(z, x) = \frac{\alpha_\Delta z^\Delta}{(z^2 + x^2)^\Delta} \quad (3.3.7)$$

である。

Φ の作用 (2.2.3) にこれを代入することによって、 Φ のオンシェル作用は

$$\begin{aligned} S_{on-shell} &= -\frac{1}{2} \int_{z=\epsilon} d^d x \epsilon^{-d+1} \Phi \partial_z \Phi \\ &= -\Delta \alpha_\Delta \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^\infty ds \int d^{d-1} x d^{d-1} x' \frac{\phi(\vec{x}) \phi(\vec{x}')}{(\epsilon^2 + s^2 + (\vec{x} - \vec{x}')^2)^\Delta} \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

と評価することができる。その時、(3.3.4) と (3.3.8) を比較することによって

$$S_{on-shell} = -4T\mathcal{G} \quad (3.3.9)$$

と、バルク場のオンシェル作用と情報計量の関係を得ることができる。

3.4 AdS 幾何へのバックリアクション

プライマリー演算子によって CFT を摂動することで得られた理論 (3.3.1) は幾何が AdS 幾何にバックリアクションがあるような重力双対を得られると考えられる。このとき、バックリアクションは境界の理論の摂動として与えたソース $\phi(x)$ によって引き起こされる。以下では $\mathcal{O}(\phi^2)$ のバックリアクションについて扱う。

バックリアクションを持つような計量を

$$ds^2 = G_{MN} dz^M dz^N = \frac{1}{z^2} (dz^2 + g_{\mu\nu}(z, x) dx^\mu dx^\nu) \quad (3.4.1)$$

のように定義する。ここで

$$g_{\mu\nu}(z, x) = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(z, x) \quad (3.4.2)$$

で、 $h_{\mu\nu}$ は AdS 幾何へのバックリアクションを表しており $\mathcal{O}(\phi^2)$ の寄与を与えるとする。

重力作用は

$$S_G = \frac{1}{16\pi G_N} \left[\int d^{d+1} x \sqrt{G} (-R[G] + 2\Lambda) - \int_{z=\epsilon} d^d x \sqrt{\gamma} (2K + \lambda) \right] \quad (3.4.3)$$

で与えられる。ここで宇宙定数 Λ は $\Lambda = \frac{-d(d-1)}{2}$ 、境界の宇宙定数 λ は $\lambda = -2(d-1)$ 、 γ は境界の内部計量で K は外的曲率である。スカラー曲率 $R[G]$ は (A.8) で定義されている。このとき、第一項目はアインシュタイン・ヒルベルト作用である。第二項目はギボンズ・ホーキング項で、境界がある時空においてアインシュタイン方程式を求める際にアインシュタイン・ヒルベルト作用から生じる表面項を消去するための項である。

アインシュタイン方程式は (3.4.3) と (2.2.3) から

$$R[G]_{MN} + dG_{MN} = 8\pi G_N \mathcal{T}_{MN} \quad (3.4.4)$$

の様に得られる。ここでリッチテンソル $R[G]_{MN}$ は (A.7) で定義されていて、 \mathcal{T}_{MN} は

$$\mathcal{T}_{MN} \equiv T_{MN} - \frac{1}{d-1} G_{MN} G^{IJ} T_{IJ} \quad (3.4.5)$$

のように定義されている。エネルギー運動量テンソルは

$$T_{MN} = \partial_M \Phi \partial_N \Phi - \frac{1}{2} G_{MN} (\partial_L \Phi \partial^L \Phi + m^2 \Phi^2) \quad (3.4.6)$$

である。

アインシュタイン方程式 (3.4.4) の各成分は以下ようになる：

$$\text{Tr} g^{-1} g'' - \frac{1}{z} \text{Tr} g^{-1} g' - \frac{1}{2} \text{Tr} g^{-1} g' g^{-1} g' = -16\pi G_N \mathcal{T}_{zz} , \quad (3.4.7)$$

$$\nabla_\mu \text{Tr} g^{-1} g' - \nabla^\lambda g'_{\lambda\mu} = -16\pi G_N \mathcal{T}_{z\mu} , \quad (3.4.8)$$

$$\begin{aligned} g''_{\mu\nu} - g'_{\mu\lambda} g'^{\lambda\sigma} g'_{\sigma\nu} + \frac{1}{2} \text{Tr} (g^{-1} g') g'_{\mu\nu} - (d-1) \frac{1}{z} g'_{\mu\nu} - \frac{1}{z} \text{Tr} (g^{-1} g') g_{\mu\nu} - 2\text{Ric}_{\mu\nu}(g) \\ = -16\pi G_N \mathcal{T}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

で

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{zz} &= \partial_z \Phi \partial_z \Phi + \frac{m^2}{d-1} \frac{1}{z^2} \Phi^2 , \\ \mathcal{T}_{z\mu} &= \partial_z \Phi \partial_\mu \Phi , \\ \mathcal{T}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \frac{m^2}{d-1} \frac{1}{z^2} g_{\mu\nu} \Phi^2 , \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

である。ここで $A' = \frac{dA}{dz}$ について $'$ は z に対する微分を表して、 Tr は $\text{Tr} A = \delta^{\mu\nu} A_{\mu\nu}$ で定義されている。また、 ∇_μ は計量 $g_{\mu\nu}$ についての共変微分で、 $\text{Ric}_{\mu\nu}[g]$ は $g_{\mu\nu}$ についてのリッチテンソルである。

(3.4.7), (3.4.8) と (3.4.9) の右辺は $\mathcal{O}(\phi^2)$ であるため、 $\mathcal{O}(\phi^2)$ で $h_{\mu\nu}$ を評価するために運動方程式の左辺を $\mathcal{O}(h_{\mu\nu})$ で展開する。ここで、 Φ が τ に依存しないため、 $h_{\mu\nu}$ も τ に依存しない。また、 \vec{x} 方

向についての全微分項はこの後に全空間で積分するため無視することができる。その時、(3.4.7) は

$$\text{Tr}h'' - \frac{1}{z}\text{Tr}h' = -16\pi G_N \left(\partial_z \Phi \partial_z \Phi + \frac{m^2}{d-1} \frac{1}{z^2} \Phi^2 \right) \quad (3.4.11)$$

(3.4.9) は

$$h''_{\mu\nu} - (d-1)\frac{1}{z}h'_{\mu\nu} - \frac{1}{z}\text{Tr}h'\delta_{\mu\nu} = -16\pi G_N \left(\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \frac{m^2}{d-1} \frac{1}{z^2} \delta_{\mu\nu} \Phi^2 \right) \quad (3.4.12)$$

となる。(3.4.12) のトレースをとると

$$\text{Tr}h'' - (2d-1)\frac{1}{z}\text{Tr}h' = -16\pi G_N \left(\partial_\mu \Phi \partial_\mu \Phi + \frac{m^2}{d-1} \frac{d}{z^2} \Phi^2 \right) \quad (3.4.13)$$

となる。(3.4.12) の 00 成分は

$$h''_{00} - (d-1)\frac{1}{z}h'_{00} - \frac{1}{z}\text{Tr}h' = -16\pi G_N \frac{m^2}{d-1} \frac{1}{z^2} \Phi^2 \quad (3.4.14)$$

と得られる。

(3.4.11), (3.4.13) and (3.4.14) を適当な線形結合をとることによって、 $h_{\mu\nu}$ について

$$\text{tr}h'' - \frac{d-1}{z}\text{tr}h' = -8\pi G_N \left\{ \partial_z(\Phi \partial_z \Phi) - \frac{d-1}{z} \Phi \partial_z \Phi \right\} \quad (3.4.15)$$

と得られる。ここで $\text{tr}A = A_{ii} = \text{Tr}A - A_{00}$ で、(2.2.5) を用いた。(3.4.15) を z で積分すると

$$\text{tr}h' = -8\pi G_N \Phi \partial_z \Phi \quad (3.4.16)$$

が得られる。ここで、境界条件 $\lim_{z \rightarrow \infty} h_{\mu\nu} = 0$ を使った。

(2.2.10) の 3 行目と (3.4.16) を使うことによって、オンシェル作用は

$$S_{on-shell} = \frac{1}{16\pi G_N} \int_{z=\epsilon} d^d x \epsilon^{-d+1} \text{tr}h' \quad (3.4.17)$$

と得られる。ここで (3.4.16) の全微分項が無視できることがわかる。

(3.3.9) と (3.4.17) を比較することによって、関係式

$$\mathcal{G} = -\frac{1}{64\pi G_N} \int_{z=\epsilon} d^{d-1} x \epsilon^{-d+1} \text{tr}h' \quad (3.4.18)$$

が得られる。この公式は、境界の場の量子論の情報計量がバルクの AdS 幾何へのバックリアクションによって表せることを示している。(3.4.18) の右辺を幾何学的な解釈ができることを次で示す。

$z = \epsilon$ と $\tau = \text{const.}$ を満足する余次元 2 の超曲面 (図 3.1) を考える。静的ゲージで超曲面の内部計

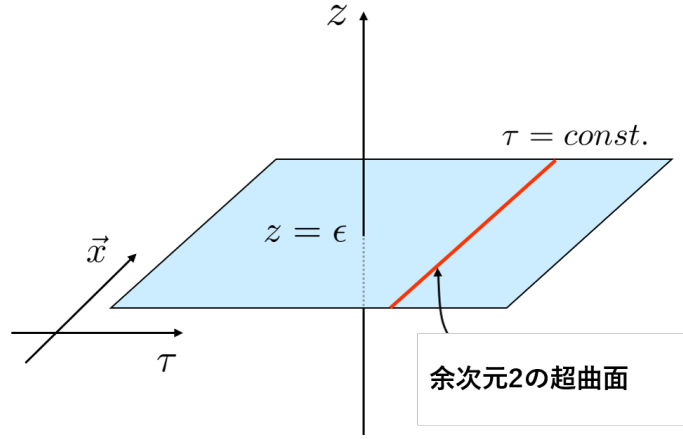


図 3.1: 赤線は余次元 2 の超曲面を表している。

量は

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} &= \frac{\partial z^M}{\partial x^i} \frac{\partial z^N}{\partial x^j} G_{MN} \\ &= \frac{1}{z^2} g_{ij}\end{aligned}\tag{3.4.19}$$

で与えられる。超曲面の体積は $\mathcal{O}(h_{ij})$ で評価すると

$$\begin{aligned}v &= \int_{z=\epsilon} d^{d-1}x \sqrt{\gamma} \\ &= \int_{z=\epsilon} d^{d-1}x z^{-d+1} \sqrt{\det g_{ij}} \\ &= \int_{z=\epsilon} d^{d-1}x z^{-d+1} \left(1 + \frac{1}{2} \text{tr} h\right)\end{aligned}\tag{3.4.20}$$

のようになる。ここから $h_{ij} = 0$ の AdS の場合の超曲面の体積を差っ引いたものを δv と書くと

$$\delta v = \frac{1}{2} \int_{z=\epsilon} d^{d-1}x z^{-d+1} \text{tr} h\tag{3.4.21}$$

が得られる。これを z で微分することによって、

$$\delta v' = \frac{1}{2} \int_{z=\epsilon} d^{d-1}x \left((-d+1) z^{-d} \text{tr} h + z^{-d+1} \text{tr} h' \right)\tag{3.4.22}$$

が得られる。(3.4.22) の 1 項目は体積のカノニカルなスケーリングを表している。2 項目は体積の非自明な h_{ij} によるスケーリングを表していて (3.4.18) の右辺と比例することがわかる。したがって、(3.4.18) は

$$\mathcal{G} = -\frac{1}{32\pi G_N} \delta v'_{\text{nontrivial}}\tag{3.4.23}$$

と書き直すことができる。ここで

$$\delta v'_{nontrivial} = \frac{1}{2} \int_{z=\epsilon} d^{d-1}x \, z^{-d+1} \text{tr} h' \quad (3.4.24)$$

である。

3.5 ベクトル場

この章では、関係式 (3.4.18) がベクトル場の場合でも成り立つことを確かめる。

まず、U(1) ベクトルカレント $\mathcal{J}^\mu(x)$ によって CFT を摂動することを考える。ラグランジアン (3.3.1) は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{CFT} + a_\mu(\vec{x}) \mathcal{J}^\mu(x) \quad (3.5.1)$$

で与えられる。ここでソース $a_\mu(\vec{x})$ は時間 τ に依存しなく、 $a_0 = 0$ である。 $\mathcal{J}^\mu(x)$ の 2 点関数は

$$\langle \mathcal{J}_\mu(\tau, \vec{x}) \mathcal{J}_\nu(\tau', \vec{x}') \rangle = \frac{C_V}{(\epsilon^2 + |\vec{x} - \vec{x}'|^2)^{d-1}} J_{\mu\nu}(\epsilon, \tau - \tau', \vec{x} - \vec{x}') \quad (3.5.2)$$

で与えられる。ここで

$$J_{\mu\nu}(\epsilon, \tau - \tau', \vec{x} - \vec{x}') = \delta_{\mu\nu} - \frac{2(x - x')_\mu (x - x')_\nu}{\epsilon^2 + |\vec{x} - \vec{x}'|^2} \quad (3.5.3)$$

で C_V は規格化定数である。ここで (3.2.8) と (3.2.9) を満たすことに注意する。

(3.3.4) に対応する情報計量は

$$\mathcal{G} = \frac{C_V}{8} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int d^{d-1}x \int d^{d-1}x' a^i(\vec{x}) a^j(\vec{x}') \frac{J_{ij}(\epsilon, s, \vec{x} - \vec{x}')}{(\epsilon^2 + s^2 + (\vec{x} - \vec{x}')^2)^{d-1}} \quad (3.5.4)$$

となる。

\mathcal{J}_μ に一致するバルクの場合は U(1) ゲージ場 A_M で、 A_M についての作用 S_A は

$$S_A = \frac{1}{4} \int d^{d+1}x \sqrt{G} F^{MN} F_{MN} , \quad (3.5.5)$$

で与えられる。ここで $F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M$ である。 A_M についての運動方程式は (3.5.5) より

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \partial_M (\sqrt{G} F^{MN}) = 0 \quad (3.5.6)$$

で与えられる。ゲージ $A_z = 0$ を保つようにかつ境界条件 $A_\mu(\epsilon, x) = a_\mu(\vec{x})$ を満たすように、AdS 計

量 (2.2.2) のもとでこれらの方程式を解くと

$$A_\mu(z, x) = \alpha_V \int d^d x' \frac{z^{d-2}}{(z^2 + |x - x'|^2)^{d-1}} J_\mu^i(z, \tau - \tau', \vec{x} - \vec{x}') a_i(\vec{x}') \quad (3.5.7)$$

が導き出せる。ここで

$$\alpha_V = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(d)}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2})} \quad (3.5.8)$$

である。 $A_\mu(z, x)$ は τ に依存しなく、 $A_0 = 0$ なことに注意する。

(3.5.5) に (3.5.7) を代入すると、オンシェル作用は

$$\begin{aligned} S_{A, on-shell} &= \frac{1}{2} \int d^{d+1} x \partial_M \left(\sqrt{G} G^{KM} G^{LN} A_N F_{KL} \right) - \frac{1}{2} \int d^{d+1} x A_N \partial_M (\sqrt{G} F^{MN}) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{z=\epsilon} d^d x z^{-d+3} A^i F_{zi} \\ &= -\frac{(d-2)\alpha_V}{2} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int d^{d-1} x d^{d-1} x' a_i(\vec{x}) \frac{J_{ij}(\epsilon, s, \vec{x} - \vec{x}')}{(\epsilon^2 + s^2 + |\vec{x} - \vec{x}'|^2)^{d-1}} a_j(\vec{x}') \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

の様に得られる。このオンシェル作用は (3.5.2) の 2 点関数の生成汎関数となっているため、規格化定数 C_V を $C_V = (d-2)\alpha_V$ のように決めることができる。さらに、(3.5.4) と (3.5.9) を比較することによって (3.3.9) を得ることができる。

次に、AdS 幾何へのバックリアクションを考えよう。バルクの作用は重力の部分が (3.4.3) でゲージ場の部分が (3.5.5) となっている。このバルク作用からアインシュタイン方程式は (3.4.7), (3.4.8) と (3.4.9) で、ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{zz} &= \frac{d-2}{d-1} z^2 g^{\mu\nu} F_{z\mu} F_{z\nu} - \frac{1}{2(d-1)} z^2 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} , \\ \mathcal{T}_{z\mu} &= z^2 g^{\alpha\beta} F_{z\alpha} F_{\mu\beta} , \\ \mathcal{T}_{\mu\nu} &= z^2 \left(F_{z\mu} F_{z\nu} - \frac{1}{d-1} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{z\alpha} F_{z\beta} + g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} - \frac{1}{2(d-1)} g_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

のものである。

再び、(3.4.2) のように AdS 計量周りで計量を展開すると、その時 (3.4.11) にあたるものは

$$\text{Tr} h'' - \frac{1}{z} \text{Tr} h' = -16\pi G_N \left(\frac{d-2}{d-1} z^2 \delta^{\mu\nu} F_{z\mu} F_{z\nu} - \frac{1}{2(d-1)} z^2 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \quad (3.5.11)$$

で、(3.4.12) にあたるものは

$$\begin{aligned} h''_{\mu\nu} - (d-1) \frac{1}{z} h'_{\mu\nu} - \frac{1}{z} \text{Tr} h' \delta_{\mu\nu} \\ = -16\pi G_N \left(F_{z\mu} F_{z\nu} - \frac{1}{d-1} \delta_{\mu\nu} \delta^{\alpha\beta} F_{z\alpha} F_{z\beta} + \delta^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} - \frac{1}{2(d-1)} \delta_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

となる。(3.5.12) のトレースは

$$\text{Tr}h'' - (2d-1)\frac{1}{z}\text{Tr}h' = -16\pi G_N z^2 \left(\frac{1}{1-d}\delta^{\mu\nu}F_{z\mu}F_{z\nu} + \frac{d-2}{2(d-1)}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \right) \quad (3.5.13)$$

で (3.5.12) の 00 成分は

$$\begin{aligned} h''_{00} - (d-1)\frac{1}{z}h'_{00} - \frac{1}{z}\text{Tr}h' \\ = -16\pi G_N \left(F_{z0}F_{z0} - \frac{1}{d-1}\delta^{\alpha\beta}F_{z\alpha}F_{z\beta} + \delta^{\alpha\beta}F_{0\alpha}F_{0\beta} - \frac{1}{2(d-1)}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \right) \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

となる。そして、(3.5.11), (3.5.13) と (3.5.14) の適当な線形結合をとり、運動方程式を使うことによって

$$\begin{aligned} \text{tr}h'' - \frac{d-1}{z}\text{tr}h' \\ = -16\pi G_N \left\{ \frac{1}{2}\partial_z(z^2 A^\alpha F_{z\alpha}) - \frac{d-1}{2}zA^\alpha F_{z\alpha} - \partial_z(z^2 A_0\partial_z A_0) + (d-1)zA_0\partial_z A_0 \right\} \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

を得ることができる。ここで \vec{x} についての全微分項は無視している。(3.5.15) を積分することで

$$\text{tr}h' = -8\pi G_N z^2 A^i F_{zi} \quad (3.5.16)$$

が得られる。ここで、境界条件 $\lim_{z \rightarrow \infty} h_{\mu\nu} = 0$ を用いている。

(3.5.9) と (3.5.16) から、関係式 (3.4.17) を得ることができる。したがって、(3.3.9) と (3.4.17) を得られたことから、スカラー場の場合と同じ関係式 (3.4.23) を得ることができる。

3.6 テンソル場

最後に、エネルギー運動量テンソルによって CFT を摂動した場合を考えよう。摂動されたラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{CFT} + \hat{h}_{\mu\nu}(\vec{x})T^{\mu\nu}(x) \quad (3.6.1)$$

である。ここでソースは時間に依存しなく、 $\hat{h}_{0\mu} = 0$ をみたす。 $T_{\mu\mu} = 0$ より、ソース $\hat{h}_{\mu\nu}$ が一般的に $\hat{h}_{\mu\mu} = 0$ を満たしていることを仮定できる。 $T_{\mu\nu}$ の 2 点関数は

$$\langle T_{\mu\nu}(\tau, \vec{x})T_{\rho\sigma}(\tau', \vec{x}') \rangle = \frac{C_T P_{\alpha\beta\rho\sigma}}{(\epsilon^2 + |\vec{x} - \vec{x}'|^2)^{d-1}} J_{\mu\alpha}(\epsilon, \tau - \tau', \vec{x} - \vec{x}') J_{\nu\beta}(\epsilon, \tau - \tau', \vec{x} - \vec{x}') \quad (3.6.2)$$

と得られる。ここで

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu}(\epsilon, \tau - \tau', \vec{x} - \vec{x}') &= \delta_{\mu\nu} - \frac{2(x - x')_\mu(x - x')_\nu}{\epsilon^2 + |x - x'|^2}, \\ P_{\alpha\beta\rho\sigma} &= \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\sigma} + \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\rho}) - \frac{1}{d}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\rho\sigma} \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

で、 C_T は規格化定数である。また (3.2.8) や (3.2.9) を満たしていることに注意する。

(3.3.4) に対応する情報計量は

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \frac{1}{2T} \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^0 d\tau' \int d^{d-1}x \int d^{d-1}x' \hat{h}^{ij}(\vec{x}) \langle T_{ij}(\tau, \vec{x}) T_{kl}(\tau', \vec{x}') \rangle \hat{h}^{kl}(\vec{x}') \\ &= \frac{C_T}{8} \int_{-\infty}^\infty ds \int d^{d-1}x \int d^{d-1}x' \hat{h}^{ij}(\vec{x}) \hat{h}^{kl}(\vec{x}') \frac{J_{i\alpha}(\epsilon, s, \vec{x} - \vec{x}') J_{j\beta}(\epsilon, s, \vec{x} - \vec{x}') P_{\alpha\beta kl}}{(\epsilon^2 + s^2 + (\vec{x} - \vec{x}')^2)^{d-1}} \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

となる。

$T_{\mu\nu}$ に一致するバルクの場合は (3.4.2) より $h_{\mu\nu}$ である。したがって、について重力作用 S_G (3.4.3) についてのアインシュタイン方程式を解く。この時、 $h_{\mu\nu}(\epsilon, x) = \hat{h}_{\mu\nu}(\vec{x})$ のような境界条件のもと、 $h_{\mu\nu}$ を

$$h_{\mu\nu} = h_{(1)\mu\nu} + h_{(2)\mu\nu} + \cdots \quad (3.6.5)$$

の様に展開する。ここで $h_{(1)\mu\nu}$ と $h_{(2)\mu\nu}$ は $\hat{h}_{\mu\nu}$ の 1 次の寄与と 2 次の寄与である。(3.4.7), (3.4.8) と (3.4.9) について $\mathcal{T}_{MN} = 0$ とおいたものがこの場合のアインシュタイン方程式である。

アインシュタイン方程式を $\mathcal{O}(h_{(1)\mu\nu})$ で展開することによって $h_{(1)\mu\nu}$ の方程式が次の様に得られる:(3.4.7) は

$$\text{Tr} h''_{(1)} - \frac{1}{z} \text{Tr} h'_{(1)} = 0 \quad (3.6.6)$$

で、(3.4.8) については

$$(\partial_\mu \text{Tr} h_{(1)} - \partial_\nu h_{(1)\mu}^\nu)' = 0 \quad (3.6.7)$$

で、(3.4.9) については

$$h''_{(1)\mu\nu} - (d-1) \frac{1}{z} h'_{(1)\mu\nu} - \frac{1}{z} \text{Tr} h'_{(1)} \delta_{\mu\nu} = \partial^\alpha (\partial_\mu h_{(1)\nu\alpha} + \partial_\nu h_{(1)\mu\alpha} - \partial_\alpha h_{(1)\mu\nu}) - \partial_\mu \partial_\nu \text{Tr} h_{(1)} \quad (3.6.8)$$

となる。これらの方程式の解が

$$\text{Tr} h'_{(1)} = 0, \quad \text{Tr} h_{(1)} = 0 \quad (3.6.9)$$

の様に得られる。

境界条件 $h_{(1)\mu\nu}(\epsilon, x) = \hat{h}_{\mu\nu}(\vec{x})$ を満たすような (3.6.9), (3.4.8) と (3.4.9) についての解は [29] に

よって

$$h_{(1)\mu\nu}(z, x) = \alpha_T \int d^d x' \frac{z^d}{(z^2 + |x - x'|^2)^d} J_{\mu\rho}(z, \tau - \tau', \vec{x} - \vec{x}') J_{\nu\sigma}(z, \tau - \tau', \vec{x} - \vec{x}') \\ \times P_{\rho\sigma ij} \hat{h}_{ij}(\vec{x}') \quad (3.6.10)$$

と得られる。ここで

$$\alpha_T = \frac{d+1}{d-1} \frac{\Gamma(d)}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2})} \quad (3.6.11)$$

である。この時、 $h_{\mu\nu}(z, x)$ は時間 τ に依存しなく、 $h_{0i} = 0$ に注意する。

(3.6.6) と (3.6.8) を使うことによって、重力場 $h_{(1)\mu\nu}$ についてのオンシェル作用は

$$S_{G,on-shell} = \frac{1}{16\pi G_N} \int_{z=\epsilon} d^d x z^{-d+1} \left\{ -\frac{1}{4} h_{(1)}^{ij} h_{(1)ij}' - \frac{1}{4} h_{(1)00} h_{(1)00}' \right\} \quad (3.6.12)$$

の様を得られる。(3.6.12) に (3.6.10) を代入することで

$$S_{G,on-shell} = -\frac{d\alpha_T T}{64\pi G_N} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int d^{d-1} x d^{d-1} x' \hat{h}_{ij}(\vec{x}) \frac{J_{i\alpha}(\epsilon, s, \vec{x} - \vec{x}') J_{j\beta}(\epsilon, s, \vec{x} - \vec{x}') P_{\alpha\beta kl} \hat{h}_{kl}(\vec{x}')}{(\epsilon^2 + s^2 + |\vec{x} - \vec{x}'|^2)^{d-1}} \quad (3.6.13)$$

が得られる。ここで $C_T = \frac{d\alpha_T}{32\pi G_N}$ であることが示される。以上からエネルギー運動量テンソルによる摂動でも、情報計量とオンシェル作用の同じ関係式が (3.3.9) と得られる。

次に、バックリアクション $h_{(2)}$ について考える。以下では \vec{x} についての全微分項は無視する。(3.4.7) は

$$\text{Tr} h_{(2)}'' - \frac{1}{z} \text{Tr} h_{(2)}' = h_{(1)}^{\mu\nu} h_{(1)\mu\nu}'' - \frac{1}{z} h_{(1)}^{\mu\nu} h_{(1)\mu\nu}' + \frac{1}{2} h_{(1)}^{\mu\nu} h_{(1)\mu\nu}' \quad (3.6.14)$$

となり、(3.4.9) は

$$h_{(2)\mu\nu}'' - (d-1) \frac{1}{z} h_{(2)\mu\nu}' - \frac{1}{z} \text{Tr} h_{(2)}' \delta_{\mu\nu} - 2\text{Ric}^{(1)}(h_{(2)})_{\mu\nu} \\ = h_{(1)\mu\alpha}' \delta^{\alpha\beta} h_{(1)\beta\nu}' - \frac{1}{z} h_{(1)}^{\alpha\beta} h_{(1)\alpha\beta}' \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \text{Tr} h_{(1)}' h_{\mu\nu}' + \frac{1}{z} \text{Tr} h_{(1)}' h_{\mu\nu} + 2\text{Ric}^{(2)}(h_{(1)})_{\mu\nu} \quad (3.6.15)$$

となる。(3.6.15) のトレースと 00 成分はそれぞれ

$$\text{Tr} h_{(2)}'' - (2d-1) \frac{1}{z} \text{Tr} h_{(2)}' = \frac{1}{2} h_{(1)}^{\mu\nu} h_{(1)\mu\nu}'' + h_{(1)}^{\mu\nu} h_{(1)\mu\nu}' - \frac{3d-1}{2z} h_{(1)}^{\mu\nu} h_{(1)\mu\nu}', \quad (3.6.16)$$

$$h_{(2)00}'' - (d-1) \frac{1}{z} h_{(2)00}' - \frac{1}{z} \text{Tr} h_{(2)}' = h_{(1)0}^{\alpha} h_{(1)0\alpha}'' + h_{(1)0}^{\alpha} h_{(1)0\alpha}' - \frac{d-1}{z} h_{(1)0}^{\alpha} h_{(1)0\alpha}' \\ - \frac{1}{z} h_{(1)}^{\mu\nu} h_{(1)\mu\nu} \quad (3.6.17)$$

となる。ここで (3.6.6), (3.6.7), (3.6.8) と (3.6.9) を用いた。(3.6.14), (3.6.16) と (3.6.17) について適当な線形結合をとることによって $\text{tr}h'_{(2)} = \delta^{ij}h'_{(2)ij}$ についての方程式が

$$\text{tr}h'_{(2)} = \frac{3}{4}h_{(1)}^{ij}h'_{(1)ij} - \frac{1}{4}h_{(1)00}h'_{(1)00} \quad (3.6.18)$$

と得ることができる。

3.6.18) をつかうことで、重力のオンシェル作用 (3.6.12) は

$$S_{G,on-shell} = \frac{1}{16\pi G_N} \int_{z=\epsilon} d^d x z^{-d+1} \left\{ \text{tr}h'_{(2)} - h_{(1)}^{ij}h'_{(1)ij} \right\} \quad (3.6.19)$$

の様に得られる。1 項目は S_{EH} から来ている (3.4.17) に対応するものである。

τ を z 固定した超曲面の内部計量は $\gamma_{ij} = z^{-2}(\delta_{ij} + h_{(1)ij} + h_{(2)ij})$ のように得られる。これより、超曲面の体積は

$$\begin{aligned} v &= \int d^{d-1}x \sqrt{\gamma} \\ &= \int d^{d-1}x z^{-d+1} \left(1 - \frac{1}{4}h_{(1)}^{ij}h_{(1)ij} + \frac{1}{2}\text{tr}h_{(2)} \right) \end{aligned} \quad (3.6.20)$$

と得られる。(3.4.22) に対応するものは

$$\delta v' = \frac{1}{2} \int d^{d-1}x \left\{ (-d+1)z^{-d}(\text{tr}h_{(2)} - \frac{1}{2}h_{(1)}^{ij}h_{(1)ij}) + z^{-d+1}(\text{tr}h'_{(2)} - h_{(1)}^{ij}h'_{(1)ij}) \right\} \quad (3.6.21)$$

の様に得られる。この時、(3.6.21) の 1 項目と 2 項目が体積のカノニカルなスケーリングを表している。3 項目と 4 項目が体積の非自明なスケーリングを表しており、(3.6.19) の右辺と比例する。したがって、(3.6.19) から、再び関係式 (3.4.23) を得ることができる。ここで 3.4.24) を

$$\delta v'_{nontrivial} = \frac{1}{2} \int_{z=\epsilon} d^{d-1}x z^{-d+1} (\text{tr}h'_{(2)} - h_{(1)}^{ij}h'_{(1)ij}) \quad (3.6.22)$$

に置き換えることに注意する。

第4章 ゲージ重力対応における量子情報計量の幾何学的解釈

前章で、AdS/CFT 対応の下で量子情報計量とバックリアクションの対応関係を与える公式を得た。それに基づいて、この章では、前章で得た公式がより一般的なゲージ重力対応の下で成り立つかをみる。ここでは、バルク時空はより一般的なものを扱うため、可能な限り共変な計算を行っていく。

まず、4.1 節では、ゲージ重力対応の下で GKP–Witten の関係式より、量子情報計量が重力双対の場のオンシェル作用で記述できることを確かめる。4.2 節で、アインシュタイン方程式を解くことにより、量子情報計量とバックリアクションの関係をつける。そこでは、前章で得られた公式と同様な幾何学的な解釈を得るためには、背景時空とその双対な場の量子論にポアンカレ対称性が必要であることを見る。

4.1 ゲージ重力対応における情報計量

今、ユークリッド時間と空間 $d-1$ 次元の場の量子論を考える。そのうえで、演算子 $\mathcal{O}(x)$ のソース項によって理論に摂動を加える。このとき、ソース $\phi(x)$ は理論の結合定数として繰り込み群によって流れ、また GKP-Witten の関係よりバルクの重力と結合するスカラー場としてバルクに伝搬する。この時、繰り込み群の流れに沿った方向はバルク幾何の余剰次元として解釈できる。この理論のラグランジアン密度 \mathcal{L} は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \phi_{(0)}(\vec{x})\mathcal{O}(x) \quad (4.1.1)$$

と定義する。

さて、この理論の量子状態について情報計量を導入する。 $\mathcal{L}, \mathcal{L}_0$ のそれぞれの理論の量子状態の基底状態を $|\Omega\rangle, |\Omega_0\rangle$ とする。ここでこの状態はラグランジアンが繰り込み群によって流れると共に基底状態も流れる。これらの異なった理論間の内積を $\langle\Omega|\Omega_0\rangle$ とし、それぞれの理論の分配関数を Z, Z_0 と定義する。この内積は経路積分によって

$$\langle\Omega|\Omega_0\rangle = (ZZ_0)^{-1/2} \int \mathcal{D}\phi \exp\left[-\int d^{d-1}x \left(\int_{-\infty}^0 d\tau \mathcal{L}_0 + \int_0^{\infty} d\tau \mathcal{L}\right)\right] \quad (4.1.2)$$

と書かれる。この時、演算子 $\mathcal{O}(\tau, \vec{x})$ の 2 点関数に対して、時間反転対称性 $\langle\mathcal{O}(\tau, \vec{x})\mathcal{O}(\tau', \vec{x}')\rangle =$

$\langle \mathcal{O}(-\tau, \vec{x}) \mathcal{O}(-\tau', \vec{x}') \rangle$ を課すと 2 次の摂動項は

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}(1 - \langle \Omega' | \Omega \rangle) &= \frac{1}{2T} \int_0^\infty d\tau \int_\infty^0 d\tau' \int d^{d-1}x \int d^{d-1}x' \langle \delta \mathcal{L}(\tau, x) \delta \mathcal{L}(\tau', x') \rangle_0 \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^\infty d\tau \int_\infty^0 d\tau' \int d^{d-1}x \int d^{d-1}x' \phi_{(0)}(\vec{x}) \langle \mathcal{O}(\tau, \vec{x}) \mathcal{O}(\tau', \vec{x}') \rangle_0 \phi_{(0)}(\vec{x}') \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

と得られる。ここで、 $\langle \mathcal{O}(\tau, \vec{x}) \mathcal{O}(\tau', \vec{x}') \rangle_0 = \langle \Omega_0 | \mathcal{O}(\tau, \vec{x}) \mathcal{O}(\tau', \vec{x}') | \Omega_0 \rangle$ のような d 次元の場の量子論 \mathcal{L}_0 の 2 点相関関数である。このとき、バルク時空の場の境界における相関関数とその場に双対な境界の演算子の相関関数の関係を表す GKP-Witten の関係が

$$\langle \int d^d x \phi_{(0)}(x) \mathcal{O}(x) \rangle = \exp\{-S_{\Phi_{onshell}}\} \quad (4.1.4)$$

と与えられるとする。ここで z は 2 点関数に正則化を与えるパラメーターである。この時、 $s = \tau - \tau'$ と変数変換すると (4.1.3) 式は

$$S_{\Phi_{onshell}} = 4TG \quad (4.1.5)$$

と与えられる。

4.2 オンシェル作用とアインシュタイン方程式

この章では、物質場のオンシェル作用がアインシュタイン方程式から導出されることを見る。

時空の足について、以下のような定義をとる： $x^\mu = (z, x^i)$ で、ここで $i, j, \dots = 0, \dots, d-1$ を、 $a, b, \dots = 1, \dots, d-1$ を走る添え字である。

時空の計量は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{zz} dz dz + g_{ij} dx^i dx^j \quad (4.2.1)$$

の漸近的 AdS 時空を考える。この時、 z 方向を境界の場の量子論のスケールとして見たいので $g_{zi} = 0, \partial_i g_{\mu\nu} = 0$ のゲージ条件を課す。また $g_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} + \tilde{g}_{\mu\nu}$ で展開され、 \hat{g} はバックグラウンドの計量で \tilde{g} はそこからの揺らぎである。特に、 $\tilde{g}_{z\mu} = 0$ のゲージをとる。

境界のある重力作用は、アインシュタイン-ヒルベルト作用にギボンス-ホーキング項を加えて

$$S_G = \frac{1}{16\pi G_N} \left[\int d^{d+1}x \sqrt{g} (-R[g] + 2\Lambda) - \int_{boundary} d^d x \sqrt{\gamma} (2K + \lambda) \right] \quad (4.2.2)$$

と与えられる。ここで、宇宙項 $\Lambda = \frac{-d(d-1)}{2}$ 、 K は外的曲率のトレース、境界の宇宙項 $\lambda = -2(d-1)$

で、 γ は境界の内部計量である。また、曲率 $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ は

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\lambda\rho} \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\sigma\rho} \quad (4.2.3)$$

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu} \quad (4.2.4)$$

と定義する。

物質場に関する作用は

$$S_M = \int d^{d+1}x \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + V(\Phi) + \frac{1}{2} \partial_\mu \Psi \partial^\mu \Psi + U(\Psi) \right) \quad (4.2.5)$$

で与えられる。この時、 Φ は背景時空 \hat{g} に作用するスカラー場で、 Ψ は境界の場の摂動に由来するスカラー場である。 $V(\Phi), U(\Psi)$ はそれぞれのポテンシャルである。

アインシュタイン方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu} \quad (4.2.6)$$

で与えられる。これについて、 g について展開し、エネルギー運動量テンソルについては $T_{\mu\nu} = \hat{T}_{\mu\nu} + \tilde{T}_{\mu\nu}$ で展開すると、背景時空は

$$\hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \hat{g}_{\mu\nu} \hat{R} + \Lambda \hat{g}_{\mu\nu} = 8\pi G_N \hat{T}_{\mu\nu} \quad (4.2.7)$$

によって決まっている。次に、バックリアクション \tilde{g} について

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{R} \tilde{g}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \hat{R} + \Lambda \tilde{g}_{\mu\nu} = 8\pi G_N \tilde{T}_{\mu\nu} \quad (4.2.8)$$

で与えられる。この時、

$$\hat{T}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{\Phi} \partial_\nu \hat{\Phi} - \hat{g}_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\rho \hat{\Phi} \partial^\rho \hat{\Phi} + V(\hat{\Phi}) \right) \quad (4.2.9)$$

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{\Psi} \partial_\nu \hat{\Psi} - \hat{g}_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\rho \hat{\Psi} \partial^\rho \hat{\Psi} + U(\hat{\Psi}) \right) - \tilde{g}_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\rho \hat{\Phi} \partial^\rho \hat{\Phi} + V(\hat{\Phi}) \right) \quad (4.2.10)$$

で与えられる。

ここで、空間方向に対する並進のキリングベクトル ξ^μ を導入する。このとき ξ^μ は

$$\hat{\nabla}^\mu \xi^\nu + \hat{\nabla}^\nu \xi^\mu = 0 \quad (4.2.11)$$

を満たす。

これを用いて、アインシュタイン方程式の縮約を取る。

$$\frac{\xi^\mu \xi^\nu}{\xi^2} \left(\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{R} \tilde{g}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \hat{R} + \Lambda \tilde{g}_{\mu\nu} \right) = 8\pi G_N \frac{\xi^\mu \xi^\nu}{\xi^2} \tilde{T}_{\mu\nu} \quad (4.2.12)$$

ここで、 $\xi^2 = \hat{g}_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu$ である。これを \tilde{g} について整理すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \hat{\nabla}_\rho \left\{ \frac{1}{\xi^2} \hat{\nabla}^\mu (\xi^2) \hat{g}^{\rho\sigma} \tilde{g}_{\mu\sigma} - \hat{\nabla}^\rho \left(\frac{\xi^\mu \xi^\nu}{\xi^2} \tilde{g}_{\mu\nu} \right) - \frac{\xi^\rho \xi^\sigma}{\xi^2} \hat{g}^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\sigma \tilde{g}_{\mu\nu} + \frac{2}{\xi^2} \hat{\nabla}^\rho (\xi^\mu \xi^\nu) \tilde{g}_{\mu\nu} \right. \\ & + \hat{\nabla}^\rho \left(\frac{2}{\xi^2} \right) \xi^\mu \xi^\nu \tilde{g}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \frac{1}{\xi^2} \hat{\nabla}^\rho (\xi^2) \hat{g}^{\mu\nu} \tilde{g}_{\mu\nu} \left. \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \hat{g}^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\rho \hat{\nabla}^\rho \tilde{g}_{\mu\nu} - \hat{g}^{\mu\nu} \hat{g}^{\rho\sigma} \hat{\nabla}_\rho \hat{\nabla}_\sigma \tilde{g}_{\mu\nu} \right\} \\ & - \frac{1}{2} \hat{\nabla}^\rho \left(\frac{1}{\xi^2} \right) \hat{\nabla}^\mu (\xi^2) \tilde{g}_{\mu\rho} - \hat{\nabla}^\rho \left(\frac{1}{\xi^2} \right) \hat{\nabla}_\rho (\xi^\mu \xi^\nu) \tilde{g}_{\mu\nu} + \hat{\nabla}_\rho \left(\frac{1}{\xi^2} \right) \hat{\nabla}^\rho \xi^2 \frac{\xi^\mu \xi^\nu}{\xi^2} \tilde{g}_{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{\xi^2} \hat{\nabla}_\rho \xi^\sigma \hat{\nabla}^\rho \xi_\sigma \frac{\xi^\mu \xi^\nu}{\xi^2} \tilde{g}_{\mu\nu} - \frac{2}{\xi^2} \hat{\nabla}_\rho \xi^\mu \hat{\nabla}^\rho \xi^\nu \tilde{g}_{\mu\nu} + \frac{1}{4} \left\{ \hat{\nabla}_\rho \left(\frac{1}{\xi^2} \right) \hat{\nabla}^\rho - \frac{2}{\xi^2} \hat{\nabla}_\rho \xi^\sigma \hat{\nabla}_\sigma \xi^\rho \right\} \hat{g}^{\mu\nu} \tilde{g}_{\mu\nu} \\ & = 8\pi G_N \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \Psi \partial^\mu \Psi + V(\Psi) \right) \quad (4.2.13) \end{aligned}$$

となる。この時、並進対称性のキリングベクトル ξ^μ についてのリー微分 \mathcal{L}_ξ に対して、 \tilde{g}, Φ, Ψ が

$$\mathcal{L}_\xi \tilde{g}_{\mu\nu} = 0, \mathcal{L}_\xi \Phi = \mathcal{L}_\xi \Psi = 0 \quad (4.2.14)$$

であることを仮定した。この (4.2.13) 式の右辺は Ψ の運動方程式を用いると表面項で書ける。

一方、左辺が表面項で与えられるためには

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \hat{\nabla}^\rho \left(\frac{1}{\xi^2} \right) \hat{\nabla}^\mu (\xi^2) \tilde{g}_{\mu\rho} - \hat{\nabla}^\rho \left(\frac{1}{\xi^2} \right) \hat{\nabla}_\rho (\xi^\mu \xi^\nu) \tilde{g}_{\mu\nu} + \hat{\nabla}_\rho \left(\frac{1}{\xi^2} \right) \hat{\nabla}^\rho \xi^2 \frac{\xi^\mu \xi^\nu}{\xi^2} \tilde{g}_{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{\xi^2} \hat{\nabla}_\rho \xi^\sigma \hat{\nabla}^\rho \xi_\sigma \frac{\xi^\mu \xi^\nu}{\xi^2} \tilde{g}_{\mu\nu} - \frac{2}{\xi^2} \hat{\nabla}_\rho \xi^\mu \hat{\nabla}^\rho \xi^\nu \tilde{g}_{\mu\nu} + \frac{1}{4} \left\{ \hat{\nabla}_\rho \left(\frac{1}{\xi^2} \right) \hat{\nabla}^\rho - \frac{2}{\xi^2} \hat{\nabla}_\rho \xi^\sigma \hat{\nabla}_\sigma \xi^\rho \right\} \hat{g}^{\mu\nu} \tilde{g}_{\mu\nu} = 0 \quad (4.2.15) \end{aligned}$$

を満たす必要がある。これを解くと $\hat{g}_{\mu\nu}$ は

$$\xi^\mu \partial_z \left(\frac{\hat{g}_{\mu\nu}}{\xi^2} \right) = 0 \quad (4.2.16)$$

満たす。よって (4.2.13) 式は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \hat{\nabla}_\rho \left\{ \frac{1}{\xi^2} \hat{\nabla}^\mu (\xi^2) \hat{g}^{\rho\sigma} \tilde{g}_{\mu\sigma} - \hat{\nabla}^\rho \left(\frac{\xi^\mu \xi^\nu}{\xi^2} \tilde{g}_{\mu\nu} \right) - \frac{\xi^\rho \xi^\sigma}{\xi^2} \hat{g}^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\sigma \tilde{g}_{\mu\nu} + \frac{2}{\xi^2} \hat{\nabla}^\rho (\xi^\mu \xi^\nu) \tilde{g}_{\mu\nu} \right. \\ & + \hat{\nabla}^\rho \left(\frac{2}{\xi^2} \right) \xi^\mu \xi^\nu \tilde{g}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \frac{1}{\xi^2} \hat{\nabla}^\rho (\xi^2) \hat{g}^{\mu\nu} \tilde{g}_{\mu\nu} + \hat{g}^{\mu\nu} \hat{\nabla}^\rho \tilde{g}_{\mu\nu} - \hat{g}^{\mu\nu} \hat{g}^{\rho\sigma} \hat{\nabla}_\rho \tilde{g}_{\mu\sigma} \left. \right\} \\ & = 8\pi G_N \left\{ \frac{1}{2} \hat{\nabla}_\mu \left(\Psi \hat{\nabla}^\mu \Psi \right) \right\} \quad (4.2.17) \end{aligned}$$

の様に両辺が表面項で与えられることがわかる。これを両辺積分すると表面項として、計量 (4.2.1)

より

$$\begin{aligned} \int d^d x \sqrt{\hat{g}} \left\{ \hat{g}^{zz} \partial_z \left(\left(\hat{g}^{ij} - \frac{\xi^i \xi^j}{\xi^2} \right) \tilde{g}_{ij} \right) - \frac{\hat{g}^{zz}}{2} \left(\partial_z \hat{g}^{ij} + \frac{1}{\xi^2} \partial_z \xi^2 \hat{g}^{ij} \right) \tilde{g}_{ij} \right\} \\ = 8\pi G_N \int d^d x \sqrt{\hat{g}} \hat{g}^{zz} \Psi \partial_z \Psi \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

となる。(4.2.18) 式の右辺は Ψ のオンシェル作用

$$S_{\Psi onshell} = -\frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{\hat{g}} \hat{g}^{zz} \Psi \partial_z \Psi \quad (4.2.19)$$

に比例しているため、(4.2.18) 式は

$$\begin{aligned} \int d^d x \sqrt{\hat{g}} \left\{ \hat{g}^{zz} \partial_z \left(\left(\hat{g}^{ij} - \frac{\xi^i \xi^j}{\xi^2} \right) \tilde{g}_{ij} \right) - \frac{\hat{g}^{zz}}{2} \left(\partial_z \hat{g}^{ij} + \frac{1}{\xi^2} \partial_z \xi^2 \hat{g}^{ij} \right) \tilde{g}_{ij} \right\} \\ = -16\pi G_N S_{\Psi onshell} \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

で与えられる。

ここで、(4.2.18) 式の左辺を考えるために、 x^i の空間について $dx^i = (\xi^j g_{ja} d\sigma^a, d\sigma^a)$ の様に、 ξ^j に垂直な空間と水平な空間 σ^a に ADM 分解する。ここで a, b, \dots は ξ^j に垂直な空間を走る $d-1$ 次元の足で、計量 g は

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N^2} & -\frac{N_b}{N^2} \\ -\frac{N_a}{N^2} & \gamma_{ab} + \frac{N_a N_b}{N^2} \end{pmatrix}, g^{ij} = \begin{pmatrix} N^2 + N^a N_a & N^b \\ N^a & \gamma^{ab} \end{pmatrix} \quad (4.2.21)$$

となる。この時、 γ_{ab} は空間 σ^a の誘導計量である。これを $N = \hat{N} + \tilde{N}$, $N_a = \hat{N}_a + \tilde{N}_a$, $\gamma_{ab} = \hat{\gamma}_{ab} + \tilde{\gamma}_{ab}$ で展開すると

$$\hat{g}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{N}^2} & -\frac{\hat{N}_b}{\hat{N}^2} \\ -\frac{\hat{N}_a}{\hat{N}^2} & \hat{\gamma}_{ab} + \frac{\hat{N}_a \hat{N}_b}{\hat{N}^2} \end{pmatrix}, \tilde{g}_{ij} = \begin{pmatrix} -2\frac{\tilde{N}}{\hat{N}^3} & 2\frac{\hat{N}_b \tilde{N}}{\hat{N}^3} - \frac{\tilde{N}_b}{\hat{N}^2} \\ 2\frac{\hat{N}_a \tilde{N}}{\hat{N}^3} - \frac{\tilde{N}_a}{\hat{N}^2} & \tilde{\gamma}_{ab} - 2\frac{\hat{N}_a \tilde{N}_b}{\hat{N}^2} \tilde{N} + \frac{\hat{N}_a \tilde{N}_b}{\hat{N}^2} + \frac{\tilde{N}_a \tilde{N}_b}{\hat{N}^2} \end{pmatrix} \quad (4.2.22)$$

となる。この時、

$$\xi^2 = \frac{1}{\hat{N}^2}, \quad \sqrt{\hat{g}} = \frac{\sqrt{\hat{N}^2 + \hat{N}^a \hat{N}_a}}{\hat{N}^2} \sqrt{g_{zz}} \sqrt{\hat{\gamma}} \quad (4.2.23)$$

で、また (4.2.14) 式は

$$\partial_z \hat{N}_a = 0 \quad (4.2.24)$$

に書き直される。これを (4.2.18) 式に代入すると

$$-16\pi G_N S_{\Psi_{onshell}} = \int d^d x \frac{\sqrt{\hat{N}^2 + \hat{N}^a \hat{N}_a}}{\hat{N}^2 \sqrt{\hat{g}_{zz}}} \sqrt{\hat{\gamma}} \left\{ \partial_z \left(\hat{\gamma}^{ab} \tilde{\gamma}_{ab} \right) - \frac{1}{2} \left(\partial_z \hat{\gamma}^{ab} - \frac{1}{\hat{N}^2} \partial_z \hat{N}^2 \hat{\gamma}^{ab} \right) \tilde{\gamma}_{ab} \right\} \quad (4.2.25)$$

となる。

今、 z 一定で ξ^i に垂直な空間の体積を計算する。この余次元 2 の超曲面の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int d^{d-1} x \sqrt{\hat{\gamma}} \\ &= \int d^{d-1} x \sqrt{\hat{\gamma}} \left(1 + \frac{1}{2} \hat{\gamma}^{ab} \tilde{\gamma}_{ab} \right) \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

で与えられる。ここから $\tilde{\gamma}$ の 0 次の寄与を引いたものを δV とし、 δV を z で微分すると

$$\begin{aligned} \delta V' &= \frac{1}{2} \int d^{d-1} x \partial_z (\sqrt{\hat{\gamma}}) \hat{\gamma}^{ab} \tilde{\gamma}_{ab} + \delta V'_{nontri}, \\ \delta V'_{nontri} &= \frac{1}{2} \int d^{d-1} x \sqrt{\hat{\gamma}} \partial_z \left(\hat{\gamma}^{ab} \tilde{\gamma}_{ab} \right) \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

が得られる。これより、(4.2.25) 式は

$$-8\pi G_N S_{\Psi_{onshell}} = \int d\tau \frac{\sqrt{\hat{N}^2 + \hat{N}^a \hat{N}_a}}{\hat{N}^2 \sqrt{\hat{g}_{zz}}} \left\{ \delta V'_{nontri} - \frac{1}{4} \int d^{d-1} x \sqrt{\hat{\gamma}} \left(\partial_z \hat{\gamma}^{ab} - \frac{1}{\hat{N}^2} \partial_z \hat{N}^2 \hat{\gamma}^{ab} \right) \tilde{\gamma}_{ab} \right\} \quad (4.2.28)$$

となる。ここで、(4.2.28) 式の右辺の第 2 項が 0 となることを仮定すると、 $\hat{\gamma}_{ab}$ は対称な定テンソル C_{ab} を用いて

$$\hat{\gamma}_{ab} = \frac{1}{\hat{N}^2} C_{ab} \quad (4.2.29)$$

が得られる。(4.2.24) より \hat{g}_{ij} は

$$\begin{aligned} \hat{g}_{ij} &= \frac{1}{\hat{N}^2} \begin{pmatrix} 1 & -\hat{N}_b \\ -\hat{N}_a & C_{ab} + \hat{N}_a \hat{N}_b \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\hat{N}^2} D_{ij} \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

の様に、定テンソル D_{ij} で書ける。そのため、 D_{ij} は対角化することができるので $\hat{N}_a = 0$ とおくことができる。したがって、以上から (4.2.28) 式は

$$S_{\Psi_{onshell}} = \frac{T}{8\pi G_N} \delta V'_{nontri} \quad (4.2.31)$$

が得られる。この時、

$$\frac{1}{\hat{N}} = \hat{g}_{\tau\tau} \sqrt{\hat{g}_{zz}} \quad (4.2.32)$$

$$T = \int d\tau \hat{g}_{\tau\tau} \quad (4.2.33)$$

を用いた。AdS 計量は (4.2.30) 式を満たす計量であるため、

$$\hat{g}_{zz} = \frac{1}{z^2}, \hat{N} = z, \hat{N}_a = 0, \hat{\gamma}_{ab} = \frac{1}{z^2} \delta_{ab} \quad (4.2.34)$$

とすると、[28] の結果を再現する。

(4.2.30) は ξ^μ を時間方向に対するキリングベクトルとすると、空間方向と時間方向が関係づくことを示しているため、この公式のもとで双対な境界の理論にポアンカレ対称性があることが重要になってくる。

また、この (4.2.30) を与える背景時空 $\hat{g}_{\mu\nu}$ とその物質場 $\Phi(z)$ は場の方程式

$$(d-1) \left(\frac{f''}{f} - \frac{f'^2}{f^2} + \frac{1}{z} \frac{f'}{f} \right) = -16\pi G_N \partial_z \Phi \partial_z \Phi \quad (4.2.35)$$

$$z^2 \Phi'' - (d-1) z \Phi' + \frac{d}{2} \frac{f'}{f} z^2 \Phi' = \frac{\partial V}{\partial \Phi} \quad (4.2.36)$$

の解として、ポテンシャル $V(\Phi)$ を指定したときに決まる。この時、 $' = \partial_z$ で、(4.2.30) を $\hat{g}_{zz} = \frac{1}{z^2}$ 、 $\frac{1}{\hat{N}^2} = \frac{f(z)}{z^2}$ と再定義した。具体的な解の例として、 $d=4$ の時、 $\mathcal{N} = 4\text{SYM}$ 理論から IR で $\mathcal{N} = 1\text{SYM}$ 理論への繰り込み群のフローに双対な重力解として、GPPZ flow [30] が知られている。これはスカラー場が non zero の VEV を持つような変形で、ポテンシャル $V(\Phi)$ が

$$V(\Phi) = -\frac{3}{32\pi G_N} \left[-5 + \left(\cosh \left(\frac{4\sqrt{\pi G_N}}{\sqrt{3}} \Phi \right) \right)^2 + \cosh \left(\frac{4\sqrt{\pi G_N}}{\sqrt{3}} \Phi \right) \right] \quad (4.2.37)$$

で与えられ、解が

$$\Phi = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{\pi G_N}} \log \frac{1+z}{1-z}, \quad f(z) = 1 - z^2 \quad (4.2.38)$$

であることが知られている。この解は、(4.2.35) 式と (4.2.36) 式を満たす解となっている。

第5章 複素行列模型におけるターゲット空間エンタングルメント

ホログラフィーの下で、ターゲット空間におけるエンタングルメントはバルクの時空を探るうえ重要であると考えられている。そこで、この章と次の章では、D3 プレーンホログラフィーの下で、複素行列模型とバブリング AdS 幾何の関係に着目する。この章では、複素行列模型におけるターゲット空間エンタングルメントエントロピーについて調べる。ここで、ターゲット空間は複素行列の固有値が存在している 2 次元面を表している。ここでは、

5.1 節では、ターゲット空間エンタングルメントエントロピーの代数的なアプローチによって定義する。5.2 節では、実際に、スレーター行列で与えられる N フェルミオン系に適応する。ここで、付録 B では N フェルミオン系でのターゲット空間エンタングルメントエントロピーの詳細な計算を行っている。5.3 節では、実際にターゲット空間エンタングルメントエントロピーとバルク幾何の関係をみるために、複素行列模型と 2 次元フェルミオン系の関係をみる。最後に、5.4 節で、 $AdS_5 \times S^5$ 、AdS ジャイアントグラビトン、ジャイアントグラビトンに対応する複素行列模型の状態について、ターゲット空間エンタングルメントエントロピーのふるまいをみる。

5.1 ターゲット空間エンタングルメントエントロピー

$(1+d)$ 次元の QFT について、場が存在する空間を部分領域 A とそれ以外に分けることを考えると、通常は全ヒルベルト空間 \mathcal{H} をテンソル積として $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}}$ に分解できることを仮定する。その時、部分領域 A についての部分密度行列 (Reduced density matrix, RDM) を $\mathcal{H}_{\bar{A}}$ についての部分トレースを取るによって定義する。よくあるこの手順は量子力学や $(1+0)$ 次元の QFT などの場のパラメータとしての空間が存在しない系に直接適応することはできない。この時、物理的な空間はターゲット空間であり、一般的にターゲット空間の分割に対してヒルベルト空間は $\mathcal{H} = \sum_i \mathcal{H}_{A_i} \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}_i}$ のようにテンソル積に分解されない。

そこで代数的なアプローチによって、単純なテンソル積に分解できない構造を持つ理論についてエンタングルメントの概念を定義する [18]。初めに、全ヒルベルト空間 \mathcal{H} をテンソル積として $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}}$ に分解できる場合について RDM を代数的アプローチで与えてみる。全ヒルベルト空間の密度行列を ρ とすると、部分領域 A の RDM はどのような演算子 $\mathcal{O}_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ に対して

$$\text{tr}_A(\rho_A \mathcal{O}_A) = \text{tr}[\rho(\mathcal{O}_A \otimes 1_{\bar{A}})] \quad (5.1.1)$$

を満たす。ここで $\mathcal{L}(V)$ はベクトル空間 V 上のすべての線形演算子の組である。これは演算子 $\rho_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ を

$$\rho_A = \rho_A \otimes \frac{1_{\bar{A}}}{\dim(\mathcal{H}_{\bar{A}})} \quad (5.1.2)$$

として導入したとき、部分代数 $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \otimes 1_{\bar{A}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ に含まれるどのような演算子 \mathcal{O}_A について $\text{tr}(\rho_A \mathcal{O}_A) = \text{tr}(\rho \mathcal{O}_A)$ が得られることを意味する。ここで部分代数 \mathcal{A} は $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ のサブセットで、演算子は以下の代数のもと閉じている:

$$\begin{aligned} 1_{\mathcal{H}} &\in \mathcal{A} \\ \forall x \in \mathbb{C}, \forall \mathcal{O}_A &\Rightarrow x \mathcal{O}_A \in \mathcal{A} \\ \forall \mathcal{O}_{A1}, \mathcal{O}_{A2} \in \mathcal{A} &\Rightarrow \mathcal{O}_{A1} + \mathcal{O}_{A2}, \mathcal{O}_{A1} \mathcal{O}_{A2} \in \mathcal{A} \\ \forall \mathcal{O}_A &\Rightarrow \mathcal{O}_A^\dagger \in \mathcal{A} \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

ここで $1_{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の単位演算子である。このような任意の部分代数 $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ が閉じる領域を抽象的な部分領域として定義することで、テンソル分解の部分領域の概念を一般化する。

一般的な部分代数 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ について考える。前の例の様に一般的に \mathcal{A} はテンソル分解できないが、 \mathcal{A} に対する全ヒルベルト空間はテンソル積の直和として

$$\mathcal{H} = \bigoplus_k \mathcal{H}_{A,k} \otimes \mathcal{H}_{\bar{A},k} \quad (5.1.4)$$

の様に分解できる。このとき、 \mathcal{A} は各セクター k のテンソル分解として

$$\mathcal{A} = \bigoplus_k \mathcal{L}(\mathcal{H}_{A,k}) \otimes 1_{\bar{A},k} \quad (5.1.5)$$

のように与えられる。

ここで、部分領域 \mathcal{A} の観測量にのみアクセスできるような代数 \mathcal{A} に対して、制限された密度行列 ρ_A を構成する。そのために、まず直和 (5.1.4) 式の任意のセクター $\mathcal{H}_{A,k} \otimes \mathcal{H}_{\bar{A},k}$ への射影演算子 Π_k を導入する。これを用いると、各セクターに対する確率分布と密度行列は

$$p_k \equiv \text{Tr}(\Pi_k \rho \Pi_k) \quad (5.1.6)$$

$$\rho_k \equiv \frac{1}{p_k} \Pi_k \rho \Pi_k \quad (5.1.7)$$

で与えられる。特に、 ρ_k に対する \bar{A}_k の部分トレースを取ることによって各セクターに対する RDM $\rho_{A,k}$ を

$$\rho_{A,k} \equiv \text{Tr}_{\bar{A},k} \rho_k \quad (5.1.8)$$

のように定義することで、制限された密度行列 ρ_A は

$$\rho_A = \sum_k p_k \rho_{A,k} \otimes \frac{1_{\mathcal{H}_{\bar{A},k}}}{\dim(\mathcal{H}_{\bar{A},k})} \quad (5.1.9)$$

のように与えられる。これは、どのような演算子 $\forall \mathcal{O}_A \in \mathcal{A}$ に対して

$$\text{Tr}(\rho_A \mathcal{O}_A) = \text{Tr}(\rho \mathcal{O}_A) \quad (5.1.10)$$

を満たす。

エンタングルメントエントロピーを考えるために、 ρ_A の各セクターをそれぞれ $\mathcal{H}_{\bar{A},k}$ に関して部分トレースをとったものを、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_A \equiv \oplus_k \mathcal{H}_{A,k}$ に対する RDM として

$$\rho_A = \bigoplus_k p_k \rho_{A,k} \quad (5.1.11)$$

と定義することができる。この ρ_A に対するフォンノイマンエントロピーを計算することで \mathcal{A} に対するエンタングルメントエントロピーを定義する。エンタングルメントエントロピーは

$$\begin{aligned} S(\rho, \mathcal{A}) &\equiv -\text{Tr}_{\mathcal{H}_A} \rho_A \log \rho_A \\ &= -\sum_k p_k \log p_k + \sum_k p_k S_{A,k}(\rho_k) \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

と定義する。ここが $S_{A,k}(\rho_k)$ は i 番目のセクターのヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{A_k} \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}_k}$ 上の密度行列 ρ_k にたいする部分系 \mathcal{H}_{A_k} のエンタングルメントエントロピーで

$$S_{A,k}(A, k) = -\text{Tr}_{A,k} \rho_{A,k} \log \rho_{A,k} \quad (5.1.13)$$

である。 $S(\rho, \mathcal{A})$ は古典的な部分と量子的な部分に分けることができる。第一項目は

$$S_{cl}(\rho, \mathcal{A}) = -\sum_k p_k \log p_k \quad (5.1.14)$$

は古典的な部分で、古典的な確率密度 $\{ p_k \}$ のシャノンエントロピーである。一方、第2項目は

$$S_q(\rho, \mathcal{A}) = \sum_k p_k S_{A,k}(\rho_{A,k}) \quad (5.1.15)$$

量子的な部分で、重みを p_k とした各セクターのエンタングルメントエントロピー $S_{A,k}(\rho_{A,k})$ の期待値である。

5.2 スレーター行列式で与えられる N フェルミオン系の量子力学

ここでは、非相対論的な N 個のフェルミオンの量子力学についてターゲット空間エンタングルメントを紹介する。特に、ハミルトニアンに各粒子の相互作用がない場合に波動関数はスレーター行列式で与えられる。その時、ターゲット空間エンタングルメントエントロピー [22] についてレビューする。

スレーター行列式は1つのフェルミオンの波動関数 $\chi(\vec{x})$ を用いて

$$\begin{aligned}\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) &= \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det(\chi_i(\vec{x}_j)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^\sigma \chi_1(\vec{x}_{\sigma(1)}) \cdots \chi_N(\vec{x}_{\sigma(N)})\end{aligned}\quad (5.2.16)$$

の様に与えることで、特定の n 粒子のフェルミオン系の波動関数を与える。この時、空間座標 $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ は各粒子の座標を表すようなターゲット空間 $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ と見ることができる。また、 $\chi_i(\vec{x})$ は

$$\int_M d^d x \chi_i(\vec{x}) \chi_j^*(\vec{x}) = \delta_{ij} \quad (5.2.17)$$

の様に規格化されている。

では、ターゲット空間 \mathbb{R}^d でのエンタングルメントエントロピーを考えるために、部分空間 A とその補空間 \bar{A} に分けることを考える。まず、 $N \times N$ のオーバーラップ行列 X_{ij} を

$$\begin{aligned}X_{ij} &\equiv \int_A d^d x \chi_i(\vec{x}) \chi_j^*(\vec{x}) \\ \bar{X}_{ij} &\equiv \int_{\bar{A}} d^d x \chi_i(\vec{x}) \chi_j^*(\vec{x}) = \delta_{ij} - X_{ij}\end{aligned}\quad (5.2.18)$$

を導入する。行列 X_{ij} はエルミート行列なので、一般的には X_{ij} は非対角成分も存在するが、任意のユニタリー行列 U で対角化することができる。この時、得られる対角化によって得られた行列の固有値を λ_i とすると

$$\lambda_i = \int_A |\tilde{\chi}_i(\vec{x})|^2 \quad (5.2.19)$$

で与えられて、1粒子の波動関数 $\tilde{\chi}_i(\vec{x}) = U_{ij} \chi_j(\vec{x})$ について部分領域 A で粒子が見つかる確率を表している。

この波動関数 $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N)$ についてエンタングルメントエントロピーを考えるために、まず

(5.1.7) 式で与えられる確率分布 $\{p_k\}$ は

$$\begin{aligned} p_k &= \binom{N}{k} \int_A d^k x \int_{\bar{A}} d^{N-k} y |\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{y}_{k+1}, \dots, \vec{y}_N)|^2 \\ &= \sum_{I \in F_k} \prod_{i \in I} \lambda_i \prod_{j \in \bar{I}} (1 - \lambda_j) \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

と計算することができる。ここで F_k は $1, N$ の整数のうち k 個選ぶすべての部分集合の集合である¹。
 p_k はそれぞれの粒子が部分領域 A に存在する確率が λ のとき、部分領域 A で k 個の粒子が観測される確率である。つまりエンタングルメントエントロピーの古典的な部分 (5.1.14) 式はこの確率分布 p_k のシャノンエントロピーである。

次に、量子論的な部分 S_q を得るために、 $\text{RMD}\{\rho_{A,i}\}$ の計算をする。座標基底での $\rho_{A,i}$ の行列要素は

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} | \rho_{k,A} | \vec{x}' \rangle &= \frac{\binom{N}{k}}{p_k} \int_{\bar{A}} d^{N-k} y \psi(\vec{x}, \vec{y}) \psi^*(\vec{x}', \vec{y}) \\ &= \frac{1}{p_k} \sum_{I \in F_k} \lambda_I \bar{\lambda}_I \psi_I(\vec{x}) \psi_I^*(\vec{x}') \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

の様に与えられる。ここで F_k のある部分集合 I に対して、 $\lambda_I \equiv \prod_{i \in I} \lambda_i$, $\bar{\lambda}_I \equiv \prod_{i \in I} (1 - \lambda_i)$ とおき k 個の粒子の波動関数を

$$\psi_I = \frac{1}{\sqrt{\lambda_I}} \sum_{\sigma \in S_k} \frac{(-1)^\sigma}{\sqrt{k!}} \tilde{\chi}_{i_{\sigma(1)}}(\vec{x}_1) \cdots \tilde{\chi}_{i_{\sigma(k)}}(\vec{x}_k) \quad (5.2.22)$$

を導入した。同様に

$$\langle \vec{x} | \rho_{A,k}^n | \vec{x}' \rangle = \frac{1}{p_k^n} \sum_{I \in F_k} (\lambda_I \bar{\lambda}_I)^n \psi_I(\vec{x}) \psi_I^*(\vec{x}') \quad (5.2.23)$$

が得られる。特に、 $\rho_{A,k}^n$ の行列要素が各部分集合 I について分離していることがわかる。

したがって、エンタングルメントエントロピーの量子論的な部分は

$$S_q = \sum_{k=0}^N p_k \log p_k - \sum_{k=0}^N \sum_{I \in F_k} \lambda_I \bar{\lambda}_I \log(\lambda_I \bar{\lambda}_I) \quad (5.2.24)$$

と計算することができる。

¹例えば、 $N=3, k=2$ ならば、 $F_2 = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ となる

以上から、全体のエンタングルメントエントロピー (5.1.13) 式は (5.2.21),(5.2.24) より

$$S(\rho; A) = S_{cl} + S_q = - \sum_{k=0}^N \sum_{I \in F_k} \lambda_I \bar{\lambda}_I \log(\lambda_I \bar{\lambda}_I) \quad (5.2.25)$$

で与えられ、 $H(\lambda) \equiv -\lambda \log \lambda - (1 - \lambda) \log(1 - \lambda)$ を導入することで

$$S(\rho; A) = \sum_{i=1}^N H(\lambda_i) \quad (5.2.26)$$

が得られる。ここで $H(\lambda)$ はベルヌーイ分布 $(\lambda, 1 - \lambda)$ に対するシャノンエントロピーであるため、スレーター行列式に対するエンタングルメントエントロピー $S(\rho; A)$ は、各粒子の波動関数の固有値 λ_i から得られるベルヌーイ分布のシャノンエントロピー $H(\lambda_i)$ の和で与えられることがわかる²。

一般に、“第一量子化”によって得られたターゲット空間エンタングルメントエントロピーは“第二量子化”の手順で得られた通常の基底空間のエンタングルメントエントロピーと等価であるとされている [18]。実際に、スレーター行列式によって与えられる状態から得られたターゲット空間エンタングルメントエントロピー (5.2.25) も、第二量子化によって得られた自由フェルミオンの N 粒子状態の通常のエンタングルメントエントロピーと等価であることがわかる。

また、ポテンシャルがなく相互作用がない 1 次元のフェルミオンに対して、 N 個の粒子に対する基底状態のエンタングルメントエントロピー (5.1.13) を考えた場合、 $S \sim \mathcal{O}(\log N)$ でふるまうことがわかる。これは、一般的に 1 次元の系におけるエンタングルメントエントロピーが $S \sim \log L$ のようにふるまうことを再現していることがわかる。ここで L は部分領域の長さである。

5.3 複素行列模型と 2 次元フェルミオン

まず、 $R \times SO(4) \times SO(4)$ 対称性の下で不変な IIB 型超重力理論の 1/2 BPS 解である LLM バブルリング幾何と $\mathcal{N} = 4$ SYM のカイラルプライマリー演算子のクラスを記述する複素行列模型のホロモロフィックセクターが関係づくことをレビューする [27]。ここでは $S^3 \times R$ 上の $\mathcal{N} = 4$ SYM の 1/2 BPS セクターに注目する。この時、カイラルプライマリー演算子は

$$\mathcal{O}^{J_1, J_2, \dots, J_p}(t) = \prod_{a=1}^p \text{Tr}(Z^{J_a}) \quad (5.3.1)$$

の様に与えられる。ここで、 t は $S^3 \times R$ の R の方向を表しており、 $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ で与えられ、 ϕ_1 と ϕ_2 は $\mathcal{N} = 4$ SYM の 6 個の実スカラー場のうちの 2 つである。また、この演算子は $U(N)$ 変換の下でシングレットであり、 Z のみにしかよらないホロモロフィックな性質をもつ。重力側での KK 重力子、ジャイアントグラビトンや AdS ジャイアントグラビトンをこの演算子の線形結合で表すこ

²物性理論では、量子ホール効果の文脈で‘実空間’のエンタングルメントエントロピーが、このように各粒子の固有値のシャノンエントロピーの和で計算されている [31]。

とできることが知られている。この演算子のダイナミクスは $\mathcal{N} = 4$ SYM を $Z(t)$ の自由パートに還元することによって計算することができる。還元された理論は

$$\begin{aligned} Z &= \int [dZ(t) dZ^\dagger(t)] e^{iS} \\ S &= \int dt \text{Tr}(\dot{Z}(t) \dot{Z}^\dagger(t) - Z(t) Z^\dagger(t)) = \int dt \sum_{i,j} (\dot{Z}(t)_{ij} \dot{Z}^*(t)_{ij} - Z(t)_{ij} Z^*(t)_{ij}) \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

によって定義される行列量子力学によって与えられる。ここで $Z(t)$ は $N \times N$ 複素行列で、経路積分測度は行列の配位空間のノルム

$$||dZ(t)||^2 = 2\text{Tr}(dZ(t) dZ^\dagger) = 2 \sum_{i,j} dZ(t)_{ij} dZ^*(t)_{ij} \quad (5.3.3)$$

によって定義される。作用のポテンシャル項は S^3 の曲率にコンフォーマルマターが結合することから生じる。また、時間や場は適切にリスケールされている。

次に、演算子 (5.3.1) の相関関数を複素行列模型から得ようとする、2次元の球対称なフェルミオンの調和振動子のホロモロフィックセクターを考えることで得られることを示す。以下で登場する2次元フェルミオンの波動関数の導出は次のサブセクションで詳しく導出する。

複素行列模型の作用 (5.3.2) から、2次元の単体系の調和振動子と同じアナロジーでカノニカルに量子化すると、量子化されたハミルトニアンは

$$\hat{H} = \sum_{i,j} \left(-\frac{\partial}{\partial Z_{ij} \partial Z_{ij}^* + Z_{ij} Z_{ij}^*} \right) \quad (5.3.4)$$

で与えられる。このハミルトニアンに対して、規格化された基底状態は

$$\chi_0 = \frac{1}{\pi^{\frac{N^2}{2}}} e^{-\text{Tr}(ZZ^\dagger)} = \frac{1}{\pi^{\frac{N^2}{2}}} e^{\sum_{i,j} Z_{ij} Z_{ij}^*} \quad (5.3.5)$$

で、励起状態の波動関数として

$$\chi^{(J_1, \dots, J_K)} = \left(\prod_{b=1}^K \text{Tr}(Z^{J_b}) \right) \chi_0 \quad (5.3.6)$$

が得られる。この波動関数は固有値 $N^2 + \sum_{b=1}^K J_b$ を持つような \hat{H} の固有関数であり、 $U(N)$ 変換の下でシングレットである。これより、波動関数 (5.3.6) の相関関数を計算することで (5.3.1) の相関関数を得ることができる。

複素行列 Z は一つのユニタリー行列 U と三角複素行列 T で $Z = UTU^\dagger$ とあらわすことができる。ここで $UU^\dagger = 1$ で、 T は $i > j$ について $T_{ij} = 0$ な上三角行列である。 Z の固有値は $z_i = T_{ii}$ ($i =$

$1, \dots, N$) である。この変換の下で波動関数 (5.3.6) は

$$\begin{aligned}\chi^{(J_1, \dots, J_K)} &= \left(\prod_{a=1}^K \sum_{i_a} z_{i_a}^{J_a} \right) \chi_0 \\ \chi_0 &= \frac{1}{\pi^{\frac{N^2}{2}}} e^{-\sum_i z_i z_i^* - \sum_{j < k} T_{jk} T_{jk}^*}\end{aligned}\quad (5.3.7)$$

と書き直すことができる。このとき、経路積分測度は

$$\int \prod dZ_{ij} dZ_{ij}^* \int \prod_{i > j} dH_{ij} dH_{ij}^* \prod_{k < l} dT_{kl} dT_{kl}^* \prod_m dz_m dz_m^* |\Delta(z)|^2 \quad (5.3.8)$$

である。ここで $\Delta(z) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)$ で、 $dH = -iU^\dagger dU$ である。これより、波動関数 χ を $\chi_F \equiv \Delta(z)\chi$ と再定義すると、最低ランダウレベルの波動関数 $\Phi_l(z_i, z_i^*)$ を用いることで $\chi_F^{(J_1, \dots, J_K)}$ は

$$\det(\Phi_{l_i}(z_i, z_i^*)) \times \prod_{j < k} \Phi_0(T_{ij}, T_{jk}^*) \quad (5.3.9)$$

の任意の線形結合で書き換えられる。これは 2 次元の N 個のフェルミオンと $\frac{1}{2}N(N-1)$ 個のボゾンであらわされる。特に、複素行列の固有値 (z_i, z_i^*) は N 個のフェルミオンの座標を表していることができて、このフェルミオンの全エネルギーは $\frac{1}{2}N(N+1) + \sum_{b=1}^K J_b$ である。これに対して、ボゾンの寄与として T_{ij} はフェルミオンと相互作用してなく、 $\chi_F^{(J_1, \dots, J_K)}$ において常に基底状態の寄与しかない。そのため、 T_{ij} はあらかじめ積分することができ、相関関数に対して全体の定数として寄与する。したがって、(5.3.9) においては $\Phi_l(z, z^*)$ のスレーター行列式として書かれている $\det(\Phi_{l_i}(z_i, z_i^*))$ の寄与について考えればよい。このように、演算子 (5.3.1) のダイナミクスを再現するような複素行列模型のシングレットなホロモロフィックセクターは 2 次元の調和振動子におけるフェルミオンに還元することができる。

5.4 2次元調和振動子の N フェルミオン系に対するターゲット空間エンタングルメント

この章では、D3 ブレーンホログラフィーの下で、4 次元 $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論の還元模型である複素行列模型のいくつかの低エネルギー状態におけるターゲット空間エンタングルメントエントロピーを計算する。複素行列模型における複素行列は SYM の 6 個のスカラー場のうち 2 つを複素に組んだものである。そのため、ターゲット空間は 2 次元複素座標で表されその複素行列の固有値分布は、バルク空間のある 2 次元面の領域と対応していると考えられる。

複素行列模型のシングレットホロモロフィックセクターは最低ランダウレベルのスレーター行列式の線形結合として書かれるため、ここではそのようなスレーター行列式におけるターゲット空間エンタングルメントエントロピーを計算する。

まず、2次元の球対称な調和振動子について考える。ハミルトニアンは複素座標 (z, z^*) を用いると

$$\hat{h} = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z^*} + zz^* = \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1 + \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_2 + 1 \quad (5.4.10)$$

で与えられる。ここで

$$\begin{aligned} \hat{c}_1 &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(z + \frac{\partial}{\partial z^*} \right), \hat{c}_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(z^* + \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \hat{c}_1^\dagger &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(z^* - \frac{\partial}{\partial z} \right), \hat{c}_2^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(z - \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

である³。交換関係は

$$[\hat{c}_i, \hat{c}_j^\dagger] = \delta_{ij}, [\hat{c}_i, \hat{c}_j] = [\hat{c}_i^\dagger, \hat{c}_j^\dagger] = 0 \quad (5.4.12)$$

より基底状態 $\Phi_{0,0}(z, z^*)$ は消滅演算子 $\hat{c}\Phi_{0,0} = 0$ より

$$\Phi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-zz^*} \quad (5.4.13)$$

である。したがって、励起状態の波動関数はこの基底状態に生成演算子 $\hat{c}_1^\dagger, \hat{c}_2^\dagger$ を作用させることによって

$$\Phi_{k,l}(z, z^*) = \frac{1}{\sqrt{k!l!}} (\hat{c}_1^\dagger)^k (\hat{c}_2^\dagger)^l \Phi_{0,0} \quad (5.4.14)$$

で与えられ、エネルギー固有値は $k + l + 1$ である。特に、 $\hat{c}_2^\dagger e^{-zz^*} = \sqrt{2} z e^{-zz^*}$ より、 \hat{c}_2^\dagger のみを作用させた励起状態 $\Phi_l(z, z^*) \equiv \Phi_{0,l}(z, z^*)$ は

$$\Phi_l(z, z^*) = \sqrt{\frac{2^l}{l!\pi}} z^l e^{-zz^*} \quad (5.4.15)$$

であたえられるホロモフィックな波動関数である。 $\Phi_l(z, z^*)$ は量子ホール効果の文脈で最低ランダウ準位の波動関数として得られ、(5.3.9) のスレーター行列式を与える一体系の波動関数は (5.4.15) で与えられる。また、この波動関数は半径 \sqrt{l} の円周上に局在していて、 r 方向に $1/\sqrt{2}$ 程度の広がりを持つ。したがって、有限の面積 $S = \pi r_0^2$ を考えた場合、このランダウ準位に属するフェルミオンの状態の個数は $N = S/\pi$ であり、 $r_0 = \sqrt{N}$ と関係づく。

次に、一体系の波動関数を任意の最低ランダウ準位の波動関数 (5.4.15) で与えた時のスレーター行列式 (5.2.16) におけるエンタングルメントエントロピーを考ていく。このとき、ターゲット空間の分割として部分空間を原点から半径 r の円 $A : 0 \leq r' \leq r$ ととる。このような部分空間 A に対して、

³通常の座標 $(q_1 = \sqrt{2}(z + z^*), q_2 = \sqrt{2}(z - z^*))$ ではハミルトニアンが $\hat{h} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial q_i^2} + q_i^2 \right) = \sum_{i=1}^2 \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + 1$ でよく見る調和振動子の形である。ここで $\hat{a}_i \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q_i + \frac{\partial}{\partial q_i} \right), \hat{a}_i^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q_i - \frac{\partial}{\partial q_i} \right), (i = 1, 2)$ の生成消滅演算子で交換関係は $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0$ である。

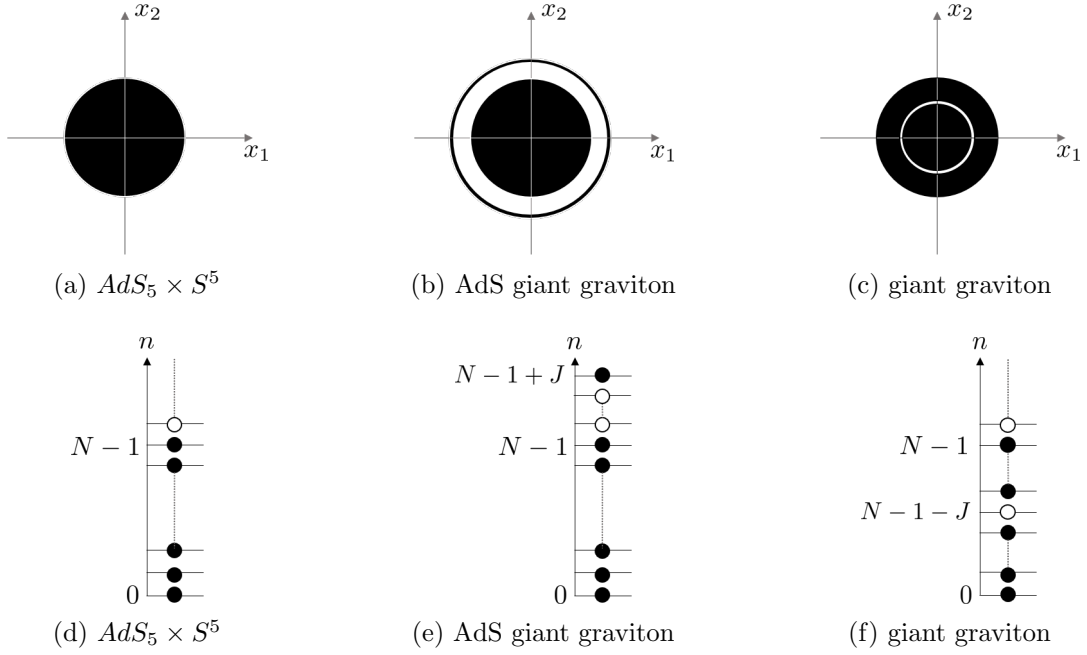


図 5.1: (5.1a), (5.1b), (5.1c) は固有値の配位を、(5.1d), (5.1e), (5.1f) は占有されたエネルギー準位をそれぞれの対応する状態について表している。

オーバーラップ行列 (5.2.18) は

$$\begin{aligned} X_{l,l'}(A) &= 2 \int_A dz dz^* \Phi_l(z, z^*) \Phi_{l'}(z, z^*) \\ &= \delta_{l,l'} a_l(r) \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

となる。この時、オーバーラップ行列は自然と対角化されているため固有値 λ_l は

$$\lambda_l = a_l(r) = \frac{\gamma[l+1, r^2]}{\Gamma[l+1]} \quad (5.4.17)$$

と与えられ、各粒子の部分領域 A の存在確立とみることができる。ここで、 $\Gamma[x]$ はガンマ関数で $\gamma[a, x]$ は不完全ガンマ関数で

$$\gamma[a, x] = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt \quad (5.4.18)$$

である。一般には、各体系の波動関数 χ_l が最低ランダウ準位の波動関数の線形結合で与えられるようなスレーター行列式でも、任意のユニタリー変換を行うことによって計算することができる。

したがって、この最低ランダウ準位で与えられる N フェルミオン系のターゲット空間エンタング

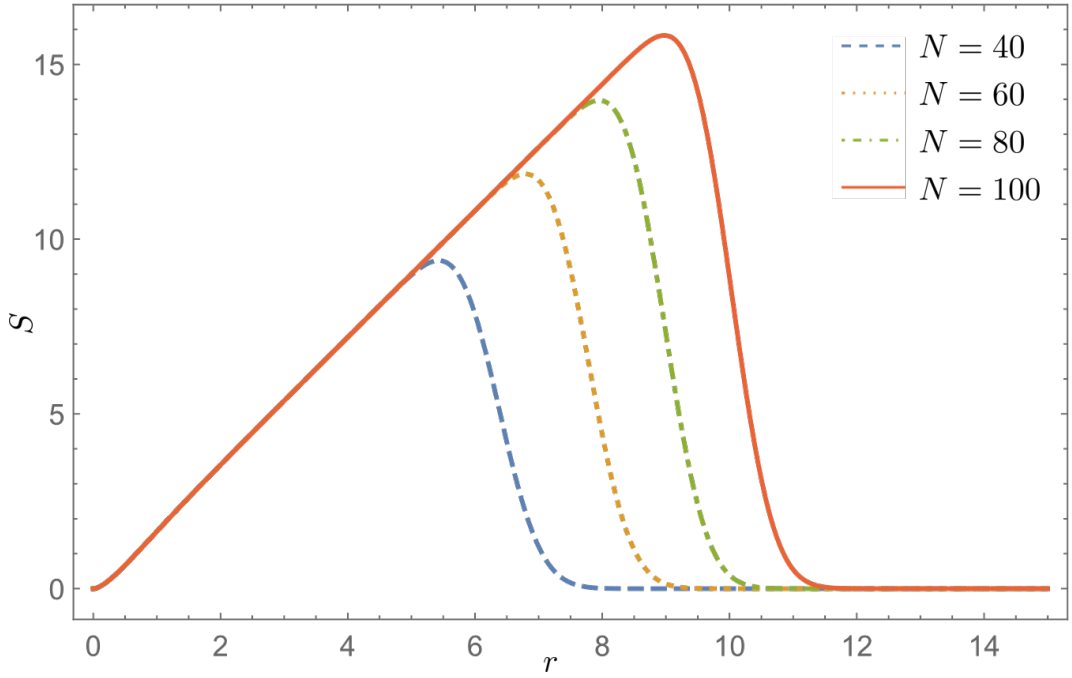


図 5.2: 基底状態のエンタングルメントエントロピー $S = S_0$ を $N = 40, 60, 80, 100$ について部分領域の半径 r でプロットした。

ルメントエントロピーは (5.2.25) より任意の準位の固有値 $a_{l(i)}(r)$ から

$$S(r, N) = \sum_{i=1}^N H(a_{l(i)}(r)), \quad H(a_{l(i)}(r)) = -a_{l(i)}(r) \log a_{l(i)}(r) - (1 - a_{l(i)}(r)) \log(1 - a_{l(i)}(r)) \quad (5.4.19)$$

と得られる。

具体的な例として、基底状態のターゲット空間エンタングルメントエントロピーを計算する。この N フェルミオン系の基底状態は、最低準位から順に準位が埋まっていくことから $0 \sim N-1$ 番目の準位に対するスレーター行列式で与えられる。(5.2.25) は

$$S_0(r, N) = \sum_{i=0}^{N-1} H(a_i(r)), \quad H(a_i(r)) = -a_i(r) \log a_i(r) - (1 - a_i(r)) \log(1 - a_i(r)) \quad (5.4.20)$$

(5.2) では、 $N = 40, 60, 80, 100$ についてエンタングルメントエントロピー S を部分領域の半径 r でプロットしたものである。そこでは、半径が $r < \sqrt{N}$ の領域では S が r に比例していることが分かる。この時、比例係数は $S \sim 1.81r$ である。これは、物性理論の分野で”ターゲット空間の”エンタングルメントエントロピーとは別の文脈で計算されているエンタングルメントエントロピー [31] は、ラージ N の解析の結果より $S = 2\sqrt{2}\pi r c_{\text{disc}} \sim 1.804$ で、この結果と非常に近いものとなっている。ここで $c_{\text{disc}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{2\pi} H(\frac{1}{2}\text{Erfc}(\mu)) \sim 0.203$ である。また $r > \sqrt{N}$ の領域で $S = 0$ となるのは、すべての

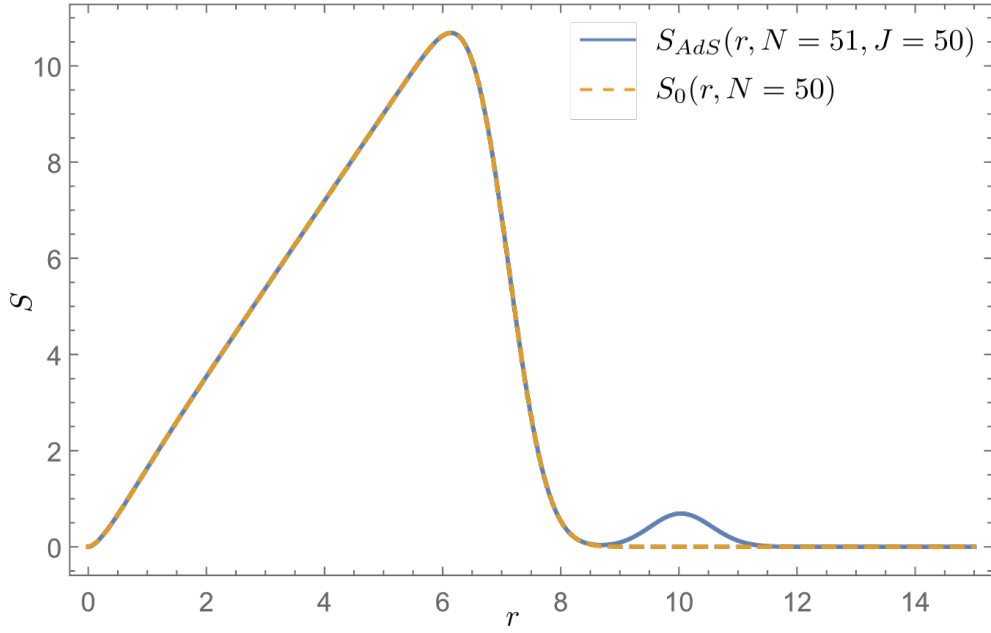


図 5.3: 線のグラフは AdS ジャイアントグラビトンに対応する状態のエンタングルメントエントロピー S_{AdS} を $N = 51, J = 50$ について部分領域の半径 r でプロットしたもので、破線のグラフは基底状態のエンタングルメントエントロピー S_0 を $N = 50$ について部分領域の半径 r でプロットしたものである。

N 個の粒子が部分領域 A に束縛されているため A の内部と外部でエンタングルメントしないことを表している。

次に、基底状態から N 個のうちの最高エネルギー準位である $N - 1$ 番目の粒子のみを $N - 1 + J$ 番目に励起させた状態のエンタングルメントエントロピーを計算する。これは、重力理論では AdS_5 上の S^3 に存在するようなジャイアントグラビトンに対応する状態である。(5.2.25) は

$$S_{AdS}(r, N, J) = \sum_{i=0}^{N-2} H(a_i(r)) + H(a_{N-1+J}(r)) \quad (5.4.21)$$

で計算される。(5.3) は、 $N = 51, J = 50$ についてエンタングルメントエントロピー S_{AdS} を部分領域の半径 r でプロットしたものである。また、(5.4) は、 $N = 51, J = 50$ について、 S_{AdS} と基底状態のエンタングルメントエントロピー S_0 ⁴ の差 $dS_{AdS} = S_{AdS}(r, 51, 50) - S_0(r, 50)$ を r でプロットしたものである。(5.4) で、 $r = \sqrt{N+J}$ の位置にピークが存在することから、エンタングルメントエントロピー S_{AdS} が AdS ジャイアントグラビトンの位置を示していることがわかる。

次に、基底状態から N 個のうちの $n = N - 1 - J$ 番目の粒子を N 番目に励起させた状態を考える。

⁴ここで、次のセクションの bubbling との対応から、 S_{AdS} や S_g とフェルミオンの個数 N が異なることに注意する。

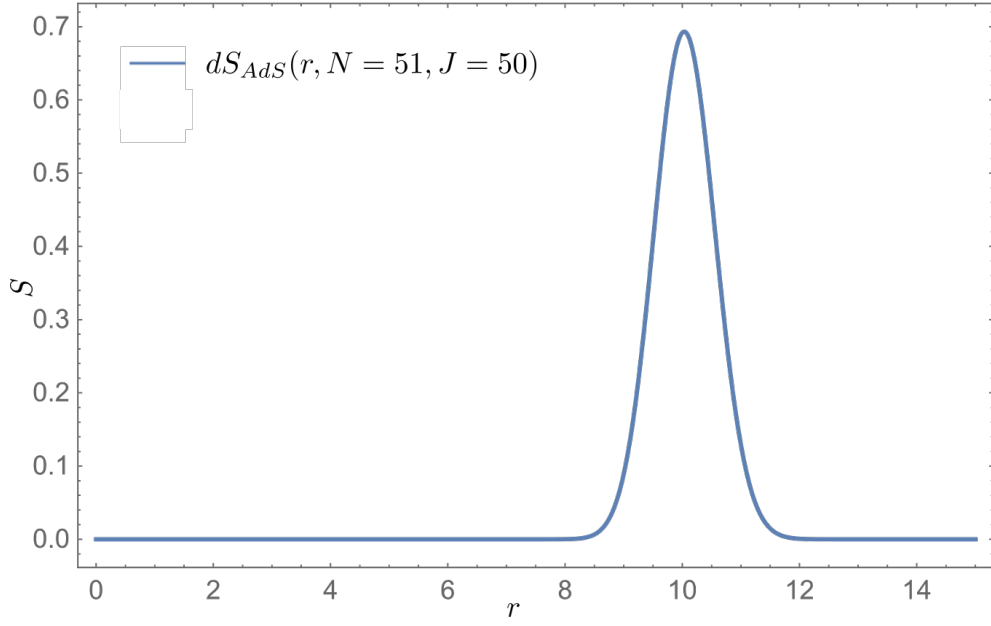


図 5.4: $N = 51, J = 50$ について AdS ジャイアントグラビトンに対応する状態のエンタングルメントエントロピー S_{AdS} と $N = 50$ について基底状態のエンタングルメントエントロピー S_0 の差 dS_{AdS} をプロットしたものである。

これは S^5 上の S^3 に存在するようなジャイアントグラビトンに対応するような状態である。(5.2.25) は

$$S_g(r, N, J) = \sum_{i=0}^{N-2-J} H(a_i(r)) + \sum_{j=N-J}^N H(a_j(r)) \quad (5.4.22)$$

で計算される。(5.5) は、 $N = 100, J = 49$ についてエンタングルメントエントロピー S_g を部分領域の半径 r でプロットしたものである。また、(5.6) は、 $N = 100, J = 49$ についての S_{AdS} と基底状態のエンタングルメントエントロピー S_0^{100} の差 $dS_g = S_g(r, 100, 49) - S_0(r, 100)$ を r でプロットしたものである。(5.6) より、 $r = \sqrt{N-J}$ の位置にピークが存在することから、エンタングルメントエントロピー S_g がジャイアントグラビトンの位置を示していることがわかる。

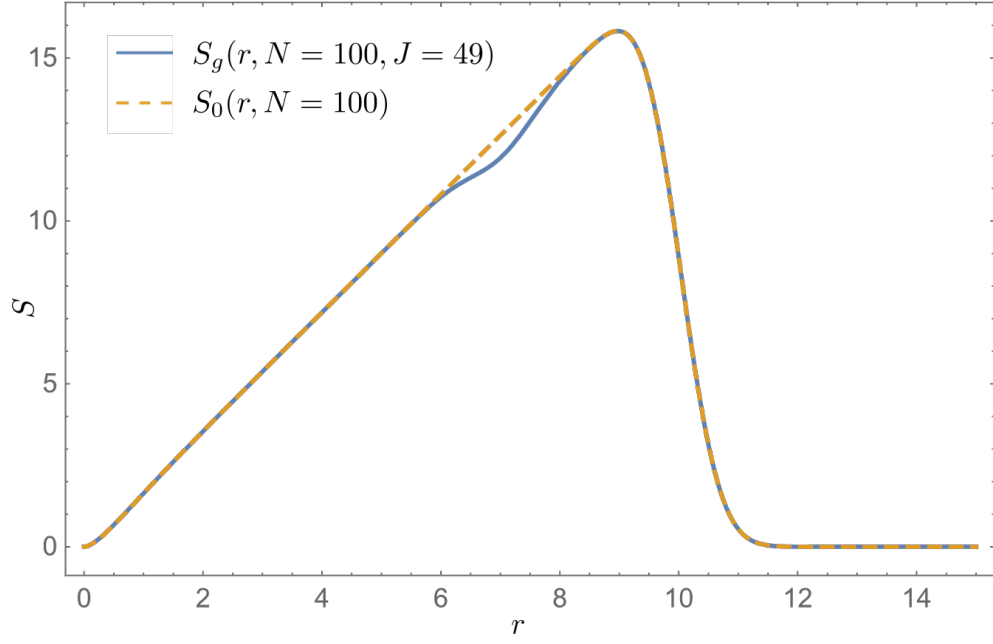


図 5.5: 線のグラフはジャイアントグラビトンに対応する状態のエンタングルメントエントロピー S_g を $N = 100, J = 49$ について部分領域の半径 r でプロットしたもので、破線のグラフは基底状態のエンタングルメントエントロピー S_0 を $N = 100$ について部分領域の半径 r でプロットしたものである。

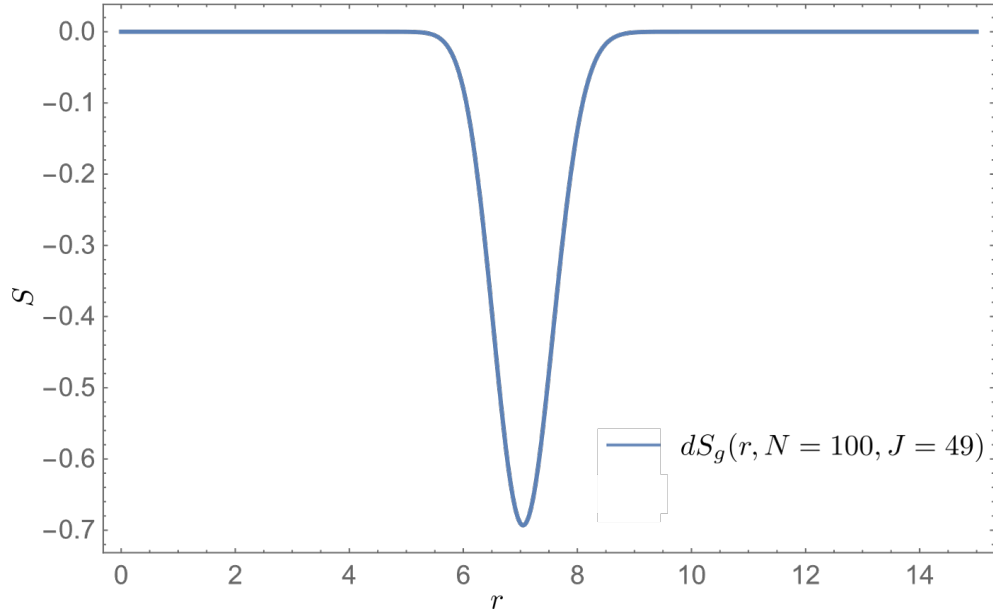


図 5.6: $N = 100, J = 49$ について AdS ジャイアントグラビトンに対応する状態のエンタングルメントエントロピー S_{AdS} と $N = 100$ について基底状態のエンタングルメントエントロピー S_0 の差 dS_{AdS} をプロットしたものである。

第6章 バブリング AdS 幾何におけるバルクエンタングルメント

前章では、場の量子論側にあたる複素行列模型のターゲット空間エンタングルメントエントロピーを計算したので、この章ではバルク時空にあたるバブリング AdS 幾何について見ていく。

6.1 節では、Lin, Lunin, Maldacena(LLM) らによって発見された IIB 型超重力理論の 1/2BPS 解 [26] についてレビューする。6.2 節で、前章で計算した複素行列模型のターゲット空間エンタングルメントエントロピーに対応するような、バブリング AdS 幾何におけるエンタングル面の面積を計算する。そして、比較することでターゲット空間エンタングルメントとバルク幾何の関係についての洞察を得る。

6.1 バブリング AdS 幾何

$R \times SO(4) \times SO(4)$ 対称性に不変な IIB 型超重力理論の 1/2BPS 解は以下のような計量

$$ds^2 = -h^{-2} \left[dt + \sum_{i=1}^2 V_i dx^i \right] + h^2 \left[dy^2 + \sum_{i=1}^2 dx^i dx^i \right] + ye^G d\Omega_3^2 + ye^{-G} d\tilde{\Omega}_3^2 \quad (6.1.1)$$

で与えられる。ここで h や G は 3 つの座標の関数 $z(x_1, x_2, y)$ と

$$h^{-2} = 2y \cosh G, \quad z = \frac{1}{2} \tanh G, \quad (6.1.2)$$

の様に関係づいていて、 V_i は

$$y\partial_y V_i = \epsilon_{ij}\partial_j z, \quad y(\partial_i V_j - \partial_j V_i) = \epsilon_{ij}\partial_y z \quad (6.1.3)$$

で決定される。また、この幾何は、自己双対 5-形式の場の強さ¹によってサポートされている。

¹自己双対 5-形式の場の強さは

$$\begin{aligned} F &= dB_t \wedge (dt + V) + B_t dV + d\hat{B}, \quad \tilde{F} = d\tilde{B}_t \wedge (dt + V) + \tilde{B}_t dV + d\tilde{\hat{B}}, \\ B_t &= \frac{1}{4}y^2 e^{2G}, \quad \tilde{B}_t = \frac{1}{4}y^2 e^{-2G}, \quad d\hat{B} = \frac{1}{4}y^3 *_3 d\left(\frac{z + \frac{1}{2}}{y^2}\right), \quad d\tilde{\hat{B}} = \frac{1}{4}y^3 *_3 d\left(\frac{z - \frac{1}{2}}{y^2}\right) \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

のように与えられている。

関数 z は微分方程式

$$\partial_i \partial_i z + y \partial_y \left(\frac{\partial_y z}{y} \right) = 0 \quad (6.1.5)$$

に従うような関数で、 $y \rightarrow 0$ で $z \rightarrow \pm 1/2$ となるような境界条件を一つ設定することで幾何 (6.1.1) が一つ決まる。ここで $z \rightarrow -1/2$ の領域は計量 $d\Omega_3^2$ の S^3 を示していて、 $z \rightarrow 1/2$ の領域は計量 $d\tilde{\Omega}_3^2$ の \tilde{S}^3 を示している。このような境界条件は $x_1 - x_2$ 平面での液滴の配位として (図) のような色分けをすることによってわかりやすくなる。ここで $y \rightarrow 0$ で $z = -1/2$ を黒で描いて、 $z = 1/2$ を白で書いている。

6.2 バブリング AdS 幾何におけるエンタングル面の面積とターゲット空間エンタングルメントエントロピー

まず、具体的に $AdS_5 \times S^5$ 幾何を与えるような液滴の配位を考える。ここで、 $x_1 - x_2$ 平面に極座標 (r, ϕ) を導入したとき、 $r < r_0$ で $z = -1/2$ 、 $r > r_0$ で $z = 1/2$ となるような境界条件の解は

$$\begin{aligned} \tilde{z}(r, y; r_0) &\equiv z - \frac{1}{2} = \frac{r^2 - r_0^2 + y^2}{2\sqrt{(r^2 + r_0^2 + y^2)^2 - 4r^2 r_0^2}} - \frac{1}{2} \\ V_\phi &= -\frac{1}{2} \left(\frac{r^2 + r_0^2 + y^2}{\sqrt{(r^2 + r_0^2 + y^2)^2 - 4r^2 r_0^2}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

で与えられる。この解は Fig.(5.1a) のような円形の液滴配位で与えられる。ここで、 r_0 は AdS 半径 R_{AdS}^2 と $r_0 = R_{AdS} = \sqrt{N}$ の様に関係づく。

この円形の液滴配位の解をもとにして、円対称な解を作ることができる。そのような解は

$$\tilde{z} = \sum_i (-1)^{i+1} \tilde{z}(r, y; r_i), V_\phi = \sum_i (-1)^{i+1} V_\phi(r, y; r_i) \quad (6.2.7)$$

で与えられる。この時、 r_1 は最も外側の円の半径で $\tilde{z}(r, y; r_1), V_\phi(r, y; r_2)$ が (6.2.6) で与えられ、 r_2 が次の半径で、Fig.(5.1b)(5.1c) の様に与えられる。特に Fig.(5.1c) の液滴配位の白いリングは S^5 上の \tilde{S}^3 に存在するようなジャイアントグラビトンを表しており、Fig.(5.1b) の液滴配位の黒いリングは AdS_5 上の S^3 存在するようなジャイアントグラビトンを表している。

前章で、複素行列模型の固有値がはる 2 次元平面を原点から半径 $r = \sqrt{N}$ の円で分けた内部を部分領域 A としてターゲット空間エンタングルメントエントロピー (5.2.25) を計算した。今、複素行列模型の固有値の配位が LLM 解をあたえる液滴の配位を再現することから、このような複素行列模型のターゲット空間にあたる 2 次元平面と LLM 解を与えるような 2 次元平面が同一視できると考えられる。したがって、バルクの理論として考えるエンタングルメント面は $y = 0$ の $x_1 - x_2$ 平面上の原点から半径 $r = \sqrt{N}$ の円周である。そのため、次にこの考察が正確かどうかを確かめるために、エンタングルメントに対する半径 $r = \sqrt{N}$ の円周の長さを計算する。具体的には 2 章で計算した固有値の

配位に対応する液滴配位 Fig.(5.1a), (5.1b), (5.1c) における半径 $r = \sqrt{N}$ の円周の長さのふるまいを見ていく。

まず、計量 (6.1.1) において静的な $x_1 - x_2$ 平面の内部計量 γ_{ij} は

$$\gamma_{rr} = h^2, \quad \gamma_{\phi\phi} = -h^{-2}V_\phi^2 + h^2r^2, \quad \gamma_{r\phi} = \gamma_{\phi r} = 0 \quad (6.2.8)$$

で与えられる。これより、 $x_1 - x_2$ 平面上の原点から半径 $r = \sqrt{N}$ の円周の長さ L は

$$L(r) = \int_0^{2\pi} d\phi \sqrt{\gamma_{\phi\phi}} = 2\pi \sqrt{-h^{-2}V_\phi^2 + h^2r^2} \quad (6.2.9)$$

を計算することとなる。ここで h や V_ϕ は (6.1.2) で定義されていて、任意の液滴配位に対応する $z(r, y; r_0)$ を決めることによって与えられる。

$AdS_5 \times S^5$

ここでは $AdS_5 \times S^5$ に対する bubbling AdS geometry で $y = 0$ の $x_1 - x_2$ 平面上の原点から半径 r の円周の長さのふるまいを見る。そして、対応するターゲット空間エンタングルメントエントロピーのふるまいと比較する。

まず $AdS_5 \times S^5$ に対応する液滴の配位 Fig.(5.1a) は (6.2.6) によって与えられる。したがって、 $\gamma_{\phi\phi}$ は $y \rightarrow 0$ で

$$\gamma_{\phi\phi} = \lim_{y \rightarrow 0} (-h^{-2}V_\phi^2 + h^2r^2) \sim \frac{r^2 + r_0^2 - |r^2 - r_0^2|}{2r_0} \quad (6.2.1)$$

となる。したがって、円周の長さは

$$L(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\gamma_{\phi\phi}} = \sqrt{2}\pi \sqrt{\frac{r^2 + r_0^2 - |r^2 - r_0^2|}{r_0}} \quad (6.2.2)$$

で与えられる。これは、 $r < r_0$ で $L(r) = \sqrt{\frac{2}{r_0}}\pi r$ のように r に比例するようにふるまい、 $r > r_0$ で $L(r) = \sqrt{2r_0}\pi$ の定数となる。

(AdS) ジャイアントグラビトン

次に、(AdS) ジャイアントグラビトンに対する円周の長さを $AdS_5 \times S^5$ と同様に考えていく。特に、 $AdS_5 \times S^5$ の幾何と比較することで (AdS) ジャイアントグラビトンの bubbling AdS geometry にあたえる効果を見ていく。

まず、Fig.(5.1b), (5.1c) の液滴配位の (AdS) ジャイアントグラビトンについての関数 z と V_ϕ は

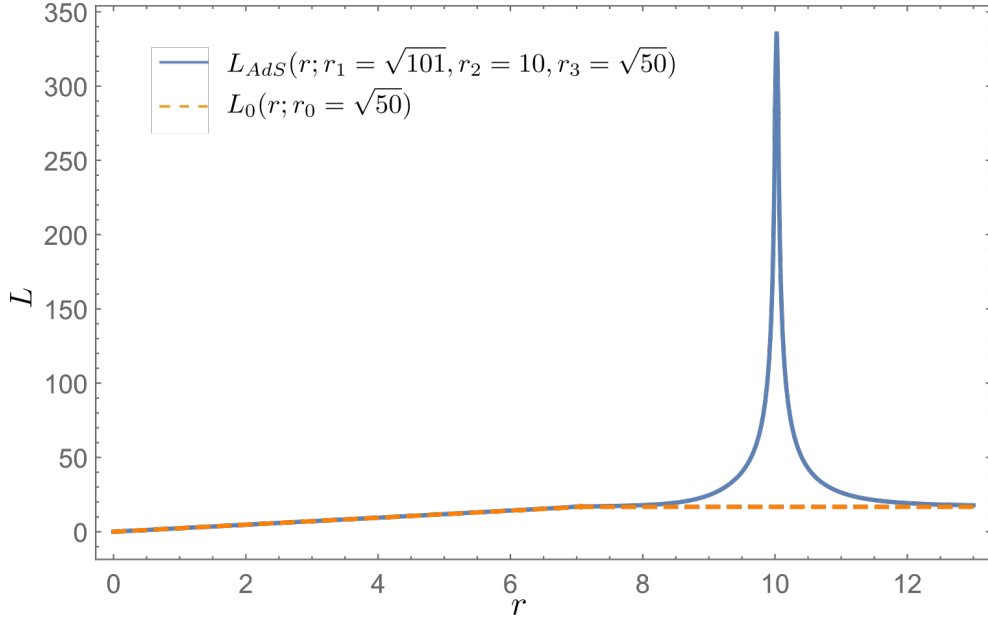


図 6.1: 線のグラフは AdS ジャイアントグラビトンに対応する液滴配位の円周の長さ L_{AdS} を $r_1 = \sqrt{101}, r_2 = 10, r_3 = \sqrt{50}$ について半径 r でプロットしたもので、破線のグラフは $AdS_5 \times S^5$ に対応する液滴配位の円周の長さ L_0 を $r_0 = \sqrt{50}$ について半径 r でプロットしたものである。

(6.2.6)(6.2.7) より

$$z = \tilde{z} + \frac{1}{2} = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+1} \tilde{z}(r, y; r_i) + \frac{1}{2}$$

$$V_\phi = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+1} V_\phi(r, y; r_i) \quad (6.2.1)$$

で与えられる。ここで $r_1 > r_2 > r_3$ である。したがって、Fig.(5.1b), (5.1c) のような $y \rightarrow 0$ での $z \rightarrow \pm 1/2$ を分ける円周が3つあるような液滴配位での円周の長さ $L(r)$ は (6.2.9), (6.2.8) より計算される。具体的な $\gamma_{\phi\phi}$ の計算は Appendix.A にある。

まず、Fig.(6.1) は、 $r_1 = \sqrt{101}, r_2 = 10, r_3 = \sqrt{50}$ について AdS ジャイアントグラビトンに対応する円周の長さ $L_{AdS}(r)$ と、 $r_0 = r_3$ について $AdS_5 \times S^5$ に対応する円周の長さ $L_0(r)$ を r についてプロットした。Fig.(6.2) は、 $dL_{AdS} = L_{AdS}(r) - L_0(r)$ を r についてプロットしたもので、AdS ジャイアントグラビトンの bubbling AdS geometry にあたえる効果を表している。これより、 dL_{AdS} は $r = r_1 = \sqrt{N}$ あたりにピークが来ていることがわかる。これは、Fig.(5.4) の様にふるまうターゲット空間エンタングルメントエントロピーの結果と定性的に一致している。

同様に、Fig.(5.1c) のジャイアントグラビトンについて計算する。(6.3) は $r_1 = \sqrt{101}, r_2 = \sqrt{51}, r_3 = \sqrt{50}$ についてジャイアントグラビトンに対応する幾何での円周の長さ $L_g(r)$ と、 $r_0 = r_1$ について $AdS_5 \times S^5$ に対応する円周の長さ $L_0(r)$ を r についてプロットした。Fig.(6.4) は、 $dL_g = L_g(r) - L_0(r)$

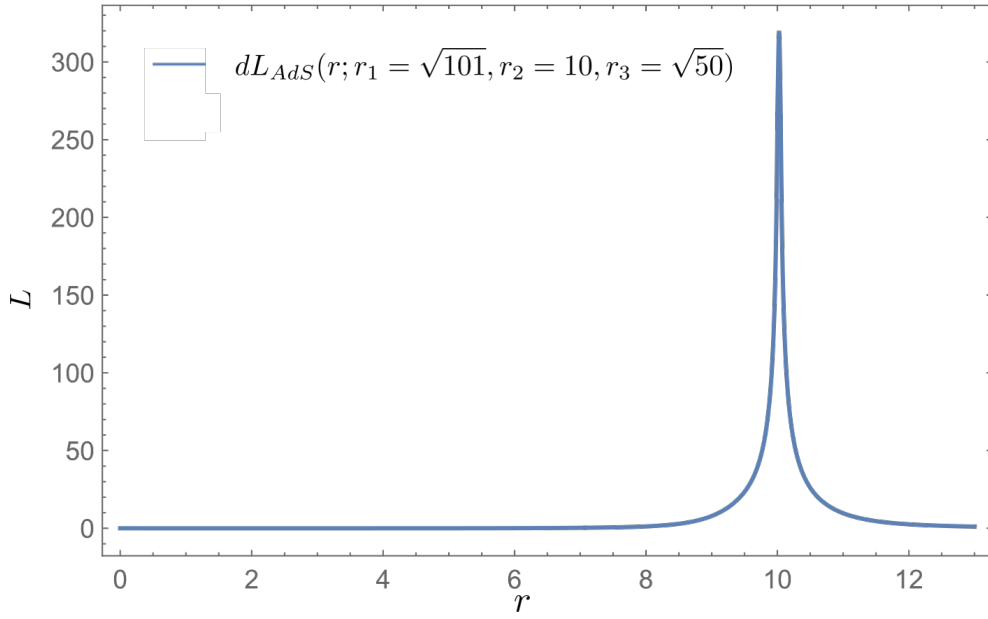


図 6.2: 線のグラフは $r_1 = \sqrt{101}, r_2 = 10, r_3 = \sqrt{50}$ について AdS ジャイアントグラビトンに対応する液滴配位の円周の長さ L_{AdS} と $r_0 = \sqrt{50}$ について $AdS_5 \times S^5$ に対応する液滴配位の円周の長さ L_0 の差 dL_{AdS} を半径 r でプロットしたものである。

を r についてプロットしたもので、ジャイアントグラビトンの bubbling AdS geometry にあたえる効果を表している。これより、 dL_{AdS} は $r = r_2 = \sqrt{N}$ あたりにピークが来ていることがわかる。これは、Fig.(5.6) の様にふるまうターゲット空間エンタングルメントエントロピーの結果と定性的に一致している。ただし、ジャイアントグラビトンの効果がエンタングルメントエントロピーを逆符号にピークが表れている。これは、エンタングルメントエントロピーのジャイアントグラビトンによる寄与は対応する位置のフェルミオンを取り除いたものを計算しているので負の符号でピークが出ているが、実際は取り除いたフェルミオンはホールとして見ることもできるので基底状態を取り換えることでホールの寄与として正の符号として現れると考えられる。

以上の様に、(AdS) ジャイアントグラビトンに対応する幾何への効果と複素行列模型におけるターゲット空間エンタングルメントエントロピーが同じふるまいをしていることがわかる。

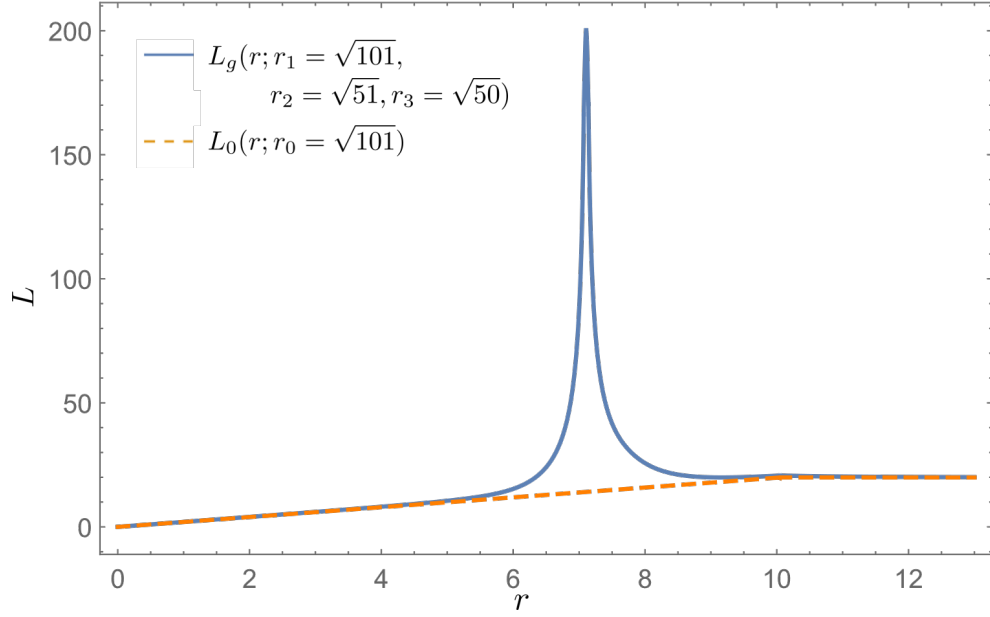


図 6.3: 線のグラフはジャイアントグラビトンに対応する液滴配位の円周の長さ L_{AdS} を $r_1 = \sqrt{101}, r_2 = \sqrt{51}, r_3 = \sqrt{50}$ について半径 r でプロットしたもので、破線のグラフは $AdS_5 \times S^5$ に対応する液滴配位の円周の長さ L_0 を $r_0 = \sqrt{101}$ について半径 r でプロットしたものである。

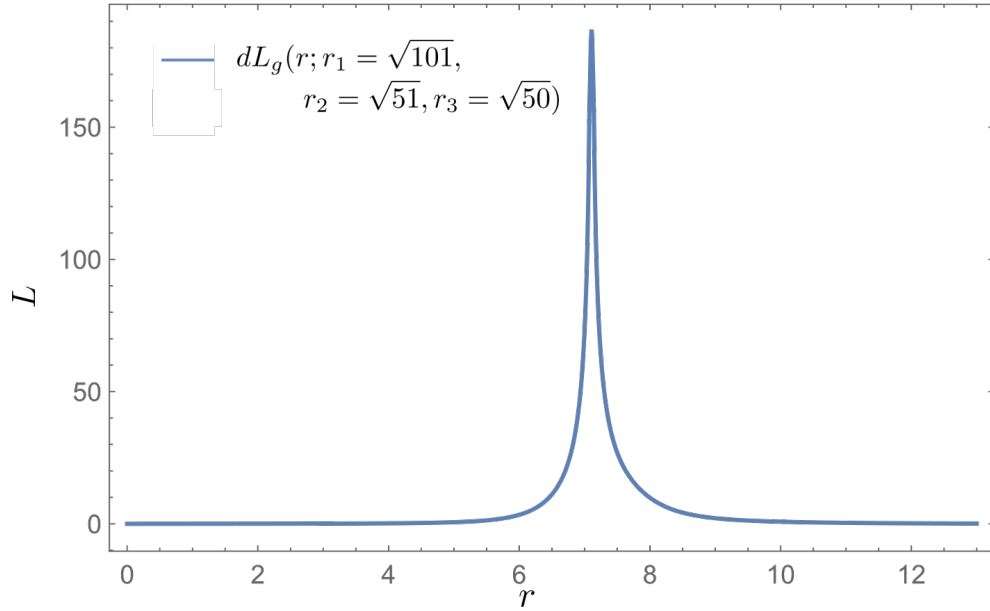


図 6.4: 線のグラフは $r_1 = \sqrt{101}, r_2 = \sqrt{51}, r_3 = \sqrt{50}$ について AdS ジャイアントグラビトンに対応する液滴配位の円周の長さ L_g と $r_0 = \sqrt{100}$ について $AdS_5 \times S^5$ に対応する液滴配位の円周の長さ L_0 の差 dL_g を半径 r でプロットしたものである。

第7章 まとめと考察

本学位論文では、ゲージ重力対応の下で量子情報と時空の幾何との関係を、量子情報計量とターゲット空間エンタングルメントエントロピーの2つの量子情報量に着目して調べた。それにより、場の量子論の量子情報からバルク時空のダイナミクスを再構成するための手掛かりを得ることができた。以下は、2つのアプローチに対するそれぞれのまとめと考察である。

量子情報理論とバルク時空の幾何

3章では、量子情報計量がどのようにバルクの幾何で記述されるかを調べた。ここでは、任意のCFTの基底状態とそのCFTの摂動から得られた理論の間の距離を測る量子情報計量を考えた。この時、摂動から得られるバルク幾何へのバックリアクションによって情報計量を表すことができた。そしてバルクの余次元2の超曲面の体積についてAdS時空の場合との差に情報計量が比例することがわかった。この公式は摂動がスカラー、ベクトル、テンソルの場合でも成り立つことから、他のすべての種類の場でも成り立つ普遍的な公式であると予想される。このように情報計量はバックリアクションによって記述されることから重力のダイナミクスと関連していると考えられる。

4章では、この公式を一般的なゲージ重力対応の下でどのように働くかを調べた。ここでは、CFTでなく任意の場の量子論とその理論から摂動した理論の間の量子情報計量を考えた。重力側では、場の量子論の摂動に対応するスカラー場のオンシェル作用がバルク時空に対するバックリアクションで表すことができる。ここで3章で得られた公式のように、量子情報計量がある余次元2の超曲面の体積におけるバックリアクションによって記述できるためには、背景時空にポアンカレ対称性を課す必要があることがわかった。それは摂動をかける前の場の量子論にポアンカレ対称性を要求することに等価である。

ここで情報計量と関係する超曲面は $z = \epsilon$ で $\tau = \text{const.}$ の余次元2の超曲面である。ここで ϵ は十分小さく、場の量子論側ではUVカットオフとして与えられる。したがって、場の量子論による情報計量から完全なバルク幾何を再構成するためには、繰り込み群を用いて z が任意の定数で指定されるような超曲面と関係づける必要がある。また、境界面の空間方向にあたる \vec{x} 方向にも局所的な情報計量とバルク幾何との関係を見つける必要がある。ポアンカレ対称性の存在は、重力側の幾何学的な解釈をシンプルにしている。もしポアンカレ対称性がない非相対論的な場の量子論の場合でも、量子情報計量についての公式がどのような解釈ができるか調べるたい。

最後に、重力の量子論を構築するために、弦の効果や量子論的な揺らぎに対してこの公式を適用で

きるように拡張したい。

バルクエンタングルメントとターゲット空間エンタングルメント

5章と6章では、複素行列模型とバブリング AdS 幾何の対応に着目し、ターゲット空間エンタングルメントとバルクの幾何の関係を調べた。

5章では複素行列模型におけるホロモロフィックセクターの状態に対してターゲット空間エンタングルメントを考えた。この状態は一体系の波動関数が最低ランダウ準位の波動関数であるスレーター行列式でかけるため、このようなスレーター行列式に対するターゲット空間エンタングルメントエントロピーを計算した。このとき、複素行列の固有値が存在する2次元面がターゲット空間にあたる。この2次元複素座標系で張られるターゲット空間を、原点を中心とする円で分割したとき、ターゲット空間エンタングルメントエントロピーは各準位のベルヌーイ分布のシャノンエントロピーの和によって与えられることがわかった。特に、基底状態と AdS ジャイアントグラビトン、ジャイアントグラビトンに対応する状態に関して具体的に計算した。

6章では、5章でのターゲット空間の部分領域の分割に対応すると考えられるバルク領域の境界の長さを計算した。具体的は、バブリング AdS 幾何の解を与える液滴配位が存在する2次元面上で原点を中心とした円周の長さを計算した。特に、 $AdS_5 \times S^5$ と AdS ジャイアントグラビトン、ジャイアントグラビトンに対応するバブリング AdS 幾何の下で計算した。得られた結果を、対応するターゲット空間エンタングルメントエントロピーと比較することで、これらは同じふるまいをすることを示した。

これらの結果はゲージ重力対応のもとで [19] の予想を示す一つの証拠となっている。ただし、定量的な整合性を確認することは次の課題である。重力側では、バブリング AdS 幾何の下で境界の面積(長さ)を計算した。実際にバルクエンタングルメントエントロピー計算するためには

$$S = \frac{A}{4G_N} \quad (7.0.1)$$

の様に重力定数 G_N を考慮する必要がある。ここで、 A は境界の面積(長さ)である。ただし、考えている空間は10次元中の時間を含めた3次元面である。そのため、10次元 IIB 型超重力理論をこの3次元の理論まで還元することで、対応する重力定数を得る必要がある。そのためには、直和空間になっていないような重力理論を還元する必要があると考えられる。また、カイラルプライマリー状態と液滴の関係をより精密なものにする必要があると考えられる。この場合、波動関数が1つのスレーター行列で記述できるとは限らない。

将来的には、10次元 IIB 型超重力理論と4次元 $\mathcal{N} = 4$ SYM の間のバルクエンタングルメントとターゲット空間エンタングルメントの関係を探る必要がある。このとき、場の量子論のターゲット空間は場の配位空間である。5章で与えたようなターゲット空間エンタングルメントエントロピーの表式は、第一量子化された粒子に対するものにあたる。そのため、場の量子論でも適用できるようにそれを拡張する必要があると考える。

また、超弦理論の非摂動論的な定式化である行列模型、BFSS 行列模型や IIB 型行列模型などでターゲット空間エンタングルメントを考えたい。特に、[20] では、BFSS 行列模型のような複数の行列をもつ行列模型のターゲット空間の分割方法を提案している。しかし、それ自体の計算が複雑なことや、そもそもそのような行列模型の波動関数を得ること自体が難しい。

以上から、ターゲット空間エンタングルメントとバルク時空の幾何の関係をより深く理解することにより、量子エンタングルメントによる時空の創発のメカニズムにさらに重要な知見が得られると考えられる。

謝辞

本博士論文を完成させるにあたって、協力して下さった皆様に心より感謝致します。特に、指導教員である土屋麻人先生には、常に丁寧に指導していただき、熱意をもって議論していただきました。さらに、このような大変興味深い研究を行うことができました。また、様々な場面でサポートして下さったことに深く感謝いたします。

今回、論文審査をしていただいた、審査委員長の三重野哲教授、審査委員の富田誠教授、森田健准教授に感謝いたします。特に、森田先生には研究の細部にわたるご指導をいただき、本研究の理解を深めることができました。

また、ゼミで共に学び、議論した研究室のメンバーにも感謝致します。

日常的な生活の面でサポートして下さった皆様にも心から感謝の言葉を申し上げます。

最後に、本研究は JSPS 科研費 (No. 20J13836) の助成を受けたものです。

付 録 A リッチテンソルとスカラー曲率の計算

この付録ではリッチテンソルやスカラー曲率の計算をする。クリストッフェル記号は

$$\Gamma_{zz}^z = -\frac{1}{z^2}, \quad (\text{A.1})$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^z = \frac{1}{z}g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g'_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.2})$$

$$\Gamma_{z\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g'_{\beta\gamma} - \frac{1}{z}\delta_\gamma^\alpha, \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha &= \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}(\partial_\beta g_{\gamma\delta} + \partial_\gamma g_{\beta\delta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}) \\ &= \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(g), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\Gamma_{\alpha z}^z = \Gamma_{zz}^\alpha = 0 \quad (\text{A.5})$$

で与えられる。

リーマン曲率、リッチテンソル、スカラー曲率は

$$R^I_{JKL}[G] = \partial_K \Gamma^I_{JL} - \partial_L \Gamma^I_{JK} + \Gamma^I_{MK} \Gamma^M_{LJ} - \Gamma^I_{ML} \Gamma^M_{KJ}, \quad (\text{A.6})$$

$$R_{MN}[G] = R^K_{MKN}[G], \quad (\text{A.7})$$

$$R[G] = G^{MN} R_{MN}[G], \quad (\text{A.8})$$

によって定義される。

リッチテンソルの成分は

$$R[G]_{zz} = -\frac{1}{2} \left(\text{Tr} g^{-1} g'' - \frac{1}{z} \text{Tr} g^{-1} g' - \frac{1}{2} \text{Tr} g^{-1} g' g^{-1} g' + \frac{2}{z^2} \right), \quad (\text{A.9})$$

$$R[G]_{z\mu} = \frac{1}{2} (\nabla^\alpha g'_{\alpha\mu} - \nabla_\mu \text{Tr} g^{-1} g'), \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} R[G]_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \left(-2\text{Ric}_{\mu\nu}(g) + g''_{\mu\nu} - g'_{\mu\lambda} g'^{\lambda\sigma} g'_{\sigma\nu} + \frac{1}{2} \text{Tr} (g^{-1} g') g'_{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. - (d-1) \frac{1}{z} g'_{\mu\nu} - \frac{1}{z} \text{Tr} (g^{-1} g') g_{\mu\nu} + \frac{2d}{z^2} g_{\mu\nu} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

の様に得られ、ここで

$$\text{Ric}(g)_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu}(g) - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\alpha}(g) + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}(g) \Gamma^\beta_{\nu\mu}(g) - \Gamma^\alpha_{\mu\beta}(g) \Gamma^\beta_{\nu\alpha}(g) \quad (\text{A.12})$$

スカラー曲率は

$$\begin{aligned} R[G] &= G^{MN} R[G]_{MN} = G^{zz} R[G]_{zz} + G^{\mu\nu} R[G]_{\mu\nu} \\ &= z^2 \left(-\text{Tr} g^{-1} g'' + \frac{3}{4} \text{Tr} g^{-1} g' g^{-1} g' + \frac{d}{z} \text{Tr} g^{-1} g' - \frac{1}{4} (\text{Tr} g^{-1} g')^2 - \frac{d^2 + d}{z^2} + R(g) \right), \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

の様に得られ、ここで $R(g) = g^{\mu\nu} \text{Ric}(g)_{\mu\nu}$ である。

$\text{Ric}(g)_{\mu\nu}$ を (3.4.2) の $h_{\mu\nu}$ で展開すると

$$\text{Ric}(g)_{\mu\nu} = \text{Ric}^{(1)}(h)_{\mu\nu} + \text{Ric}^{(2)}(h)_{\mu\nu} + \dots \quad (\text{A.14})$$

となり、ここで $h_{\mu\nu}$ の一次、 $\text{Ric}^{(1)}(h)_{\mu\nu}$ は

$$\text{Ric}^{(1)}(h)_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial^\alpha (\partial_\mu h_{\nu\alpha} + \partial_\nu h_{\mu\alpha} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu h^\alpha_\alpha \quad (\text{A.15})$$

となり、 $h_{\mu\nu}$ の2次 $\text{Ric}^{(2)}(h)_{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned} \text{Ric}^{(2)}(h)_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \partial_\alpha \left\{ h^{\alpha\beta} (\partial_\mu h_{\nu\beta} + \partial_\nu h_{\mu\beta} - \partial_\beta h_{\mu\nu}) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_\nu \left\{ h^{\alpha\beta} \partial_\mu h_{\alpha\beta} \right\} + \frac{1}{4} \partial^\beta h^\alpha_\alpha (\partial_\mu h_{\nu\beta} + \partial_\nu h_{\mu\beta} - \partial_\beta h_{\mu\nu}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\delta} (\partial_\mu h_{\beta\gamma} \partial_\nu h_{\alpha\delta} + \partial_\beta h_{\mu\gamma} \partial_\alpha h_{\nu\delta} \\ &\quad \quad - \partial_\beta h_{\mu\gamma} \partial_\delta h_{\nu\alpha} - \partial_\gamma h_{\mu\beta} \partial_\delta h_{\nu\alpha} + \partial_\gamma h_{\mu\beta} \partial_\delta h_{\mu\alpha}). \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

となる。その時、 $R(g)$ について $h_{\mu\nu}$ の2次は

$$\begin{aligned} R^{(2)}(h) &= \delta^{\mu\nu} \text{Ric}^{(2)}(h)_{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \text{Ric}^{(1)}(h)_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\alpha \left\{ h^{\alpha\beta} (2\partial^\mu h_{\mu\beta} - \partial_\beta h^\mu_\mu) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial^\mu \left\{ h^{\alpha\beta} \partial_\mu h_{\alpha\beta} \right\} + \frac{1}{4} \partial^\beta h^\alpha_\alpha (2\partial^\mu h_{\mu\beta} - \partial_\beta h^\mu_\mu) \\ &\quad - \frac{1}{4} (2\partial^\alpha h^{\mu\nu} \partial_\nu h_{\mu\alpha} - \partial_\alpha h^{\mu\nu} \partial_\nu h_{\mu\nu}) \\ &\quad - h^{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{2} \partial^\alpha (2\partial_\mu h_{\nu\alpha} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu h^\alpha_\alpha \right\}. \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

となる。

$\mathcal{O}(h^2)$ でアインシュタイン—ヒルベルト作用とギボンス—ホーキング項を展開すると

$$\begin{aligned}
S_{EH} &= \frac{1}{16\pi G_N} \int d^{d+1}x \sqrt{G} (-R[G] + 2\Lambda) \\
&= \frac{1}{16\pi G_N} \int d^{d+1}x z^{-d+1} \left\{ -\frac{2d}{z^2} + h''_\mu{}^\mu - \frac{d}{z} h'_\mu{}^\mu + \frac{d}{z^2} h_\mu{}^\mu \right. \\
&\quad - h^{\mu\nu} h''_{\mu\nu} - \frac{3}{4} h'^{\mu\nu} h'_{\mu\nu} + \frac{d}{z} h^{\mu\nu} h'_{\mu\nu} - \frac{d}{2z^2} h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + \frac{1}{4} \partial^\alpha h^{\mu\nu} \partial_\alpha h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial^\alpha h^{\mu\nu} \partial_\mu h_{\mu\alpha} \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} h_\mu{}^\mu h''_\nu{}^\nu + \frac{1}{4} (h'_\mu{}^\mu)^2 - \frac{d}{2z} h_\mu{}^\nu h'_\nu{}^\mu + \frac{d}{4z^2} (h_\mu{}^\mu)^2 + \frac{1}{2} \partial_\nu h^{\mu\nu} \partial_\mu h^\alpha{}_\alpha - \frac{1}{4} \partial^\alpha h_\mu{}^\mu \partial_\alpha h^\nu{}_\nu \right\} \quad (A.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{GH} &= -\frac{1}{16\pi G_N} \int_{z=\epsilon} d^d x \sqrt{\gamma} (2K + \lambda) \\
&= \frac{1}{16\pi G_N} \int_{z=\epsilon} d^d x z^{-d} \left\{ -2 - h_\mu{}^\mu - \frac{1}{4} (h_\mu{}^\mu)^2 + \frac{1}{2} h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - h^{\mu\nu} h'_{\mu\nu} + h'_\mu{}^\mu + \frac{1}{2} h_\mu{}^\mu h'_\nu{}^\nu \right\} \quad (A.19)
\end{aligned}$$

となる。

(3.6.7), (3.6.8) and (3.6.9) についてのアインシュタイン方程式を使うとアインシュタイン—ヒルベルト作用 S_{EH} は

$$S_{EH, on-shell} = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^{d+1}x \frac{d}{dz} \left\{ -\frac{3}{4} z^{-d+1} h^{\mu\nu} h'_{\mu\nu} + \frac{1}{2} z^{-d} h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - 2z^{-d} \right\} \quad (A.20)$$

と得られ。ギボンス—ホーキング項は S_{GH}

$$S_{GH, on-shell} = \frac{1}{16\pi G_N} \int_{z=\epsilon} d^d x z^{-d} \left\{ -z h^{\mu\nu} h'_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h_{(1)}^{\mu\nu} h_{(1)\mu\nu} - 2 \right\} \quad (A.21)$$

と得られる。したがって、(A.20) と (A.21) を使うことによって、境界が $z = \epsilon$ でのオンシェル作用 (3.6.12) が得られる。

付 録 B N 個のフェルミオンの非相対論的な量子力学におけるターゲット空間エンタングルメントエントロピー

この付録では、 N 個のフェルミオンの非相対論的な量子力学におけるターゲット空間エンタングルメントエントロピーについて考える。

実線 R 上を動く N 個のフェルミオン系におけるターゲット空間エンタングルメントエントロピーから始める。ここで、第一量子化の観点から R はターゲット空間にあたる。このターゲット空間の部分領域 $A \subset R$ におけるエンタングルメントエントロピーを計算したい。この時、 A は実数 a によって $x > a$ とする領域であり、 \bar{A} はその補空間である。このように、領域を A と \bar{A} に分けたとき、一つの粒子のヒルベルト空間 \mathcal{H}_1 は直積ではなく直和の構造が

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_{\bar{A}} \quad (\text{B.1})$$

の様に得られる。ここで、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_A &= \text{span}\{|x_1\rangle, x_1 \in A\} \\ \mathcal{H}_{\bar{A}} &= \text{span}\{|x_1\rangle, x_1 \in \bar{A}\} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

で与えられる。次に、ターゲット空間エンタングルメントエントロピーを得るために、2 個のフェルミオンのヒルベルト空間 \mathcal{H}_2 の議論から始めよう。2 個のフェルミオンの波動関数は一般的に

$$|\psi\rangle = \int dx_1 \int dx_2 \psi(x_1, x_2) |x_1, x_2\rangle_a = \int dx_1 \int dx_2 \psi_a(x_1, x_2) |x_1, x_2\rangle \quad (\text{B.3})$$

で与えられる。ここで

$$\begin{aligned} |x_1, x_2\rangle_a &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1\rangle \otimes |x_2\rangle - |x_2\rangle \otimes |x_1\rangle) \\ \psi_a(x_1, x_2) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi(x_1, x_2) - \psi(x_2, x_1)) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

で与えられ、 a の添え字は反対称性を表している。2 粒子のヒルベルト空間は自然に 3 つのセクター

$$\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_{2,0} + \mathcal{H}_{1,1} + \mathcal{H}_{0,2} \quad (\text{B.5})$$

に分けることができる。ここで

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{2,0} &= \text{span}\{|x_1, x_2\rangle_a, x_1, x_2 \in A\} \\ \mathcal{H}_{1,1} &= \text{span}\{|x_1, x_2\rangle_a, x_1 \in A, x_2 \in \bar{A}\} \\ \mathcal{H}_{0,2} &= \text{span}\{|x_1, x_2\rangle_a, x_1, x_2 \in \bar{A}\}\end{aligned}\tag{B.6}$$

である。 x_1, x_2 に対する積分の範囲をそれぞれの領域 A, \bar{A} に限定することで、それぞれのセクターへの波動関数が、例えば

$$|\psi\rangle_{1,1} = \int_A dx_1 \int_{\bar{A}} dx_2 \psi(x_1, x_2) |x_1, x_2\rangle_a \tag{B.7}$$

のように与えられる。これらは、(B.3) より射影演算子 $\Pi_{(p,q)} : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_{(p,q)}$ を

$$\begin{aligned}\Pi_{2,0} &= \frac{1}{2} \int_{A,A} dx_1 dx_2 |x_1, x_2\rangle_a {}_a \langle x_1, x_2| \\ \Pi_{1,1} &= \frac{1}{2} \left(\int_A dx_1 \int_{\bar{A}} dx_2 + \int_{\bar{A}} dx_1 \int_A dx_2 \right) |x_1, x_2\rangle_a {}_a \langle x_1, x_2| \\ \Pi_{0,2} &= \frac{1}{2} \int_{\bar{A}, \bar{A}} dx_1 dx_2 |x_1, x_2\rangle_a {}_a \langle x_1, x_2|\end{aligned}\tag{B.8}$$

と与えることで得られる。ここで

$${}_a \langle x_1, x_2 | \psi \rangle = \psi(x_1, x_2) \tag{B.9}$$

である。

これらを N 個のフェルミオン系に一般化しよう。ヒルベルト空間は

$$\mathcal{H}_N = \bigotimes_{p,q; p+q=N} \mathcal{H}_{p,q} \tag{B.10}$$

の様に分割する。ここで、 $\mathcal{H}_{p,q}$ は領域 A に p 個の粒子、 \bar{A} に q 個の粒子が存在するセクターを表している。これに対して、射影演算子 $\Pi_{(p,q)} (p+q=N) : \mathcal{H}_N \rightarrow \mathcal{H}_{(p,q)}$ を得られるだろ。

さらに、 R^d 上の N フェルミオンに上の議論を一般化できる。ターゲット空間の部分領域 A は $x^1 > a, x^2, \dots, x^d \in R$ で、補空間 \bar{A} は $\bar{A} = R^d - A$ で定義する。 N 粒子の座標を $\vec{x}_i, i = 1, 2, \dots, N$ とすると、 $\mathcal{H}_{p,q}$ に属する波動関数は

$$|\psi_{p,q}\rangle = \int_A \prod_{i=1}^p d^d x_i \int_{\bar{A}} \prod_{j=p+1}^N d^d x_j \psi(\{\vec{x}_i\}, \{\vec{x}_j\}) |\{\vec{x}_i\}, \{\vec{x}_j\}\rangle_a \tag{B.11}$$

で与えられる。ヒルベルト空間の分割は (B.10) と同様で、1次元の議論を d 次元の積分に置き換えることで簡単に拡張できる。

次に、全ヒルベルト空間の密度行列を ρ にたいして、部分領域 A における RDM を ρ_A を定義した

い。部分領域 A で測定できる観測量 \mathcal{O}_A にたいして、 $\text{tr}_A(\rho_A \mathcal{O}_A) = \text{tr}[\rho(\mathcal{O}_A \otimes 1_{\bar{A}})]$ を満たす様に定義される。

場の量子論で時空を分割した時の様に、ヒルベルト空間が $\mathcal{H} = H_A \otimes H_{\bar{A}}$ のようなテンソル積で与えられるとき、 $\rho_A = \text{Tr}_{H_{\bar{A}}} \rho$ と導かれる。

しかし、ターゲット空間の部分領域については、テンソル分解されない。上でみたように、1 粒子のヒルベルト空間は A と \bar{A} に関する直積ではなく直和で与えられる。これは N 粒子のヒルベルト空間についても同様である。 N 粒子のヒルベルト空間の各セクター $H_{p,q}$ は、それぞれ部分領域 A と \bar{A} に関する部分空間のテンソル積によって与えられる。

まず、 $\mathcal{H}_{1,1} \subset \mathcal{H}_2$ の場合を例にとって考えよう。セクター $\mathcal{H}_{1,1}$ は

$$\mathcal{H}_{1,1} = \mathcal{H}_A \wedge \mathcal{H}_{\bar{A}} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}} - \mathcal{H}_{\bar{A}} \otimes \mathcal{H}_A \quad (\text{B.12})$$

で与えられる。ここでこの章では、反対称性を明確にするため反対称のテンソル積 \wedge を導入した。

このようなヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{1,1}$ に対して演算子の代数を考える。 $\mathcal{H}_{1,1} \rightarrow \mathcal{H}_{1,1}$ の変換をする演算子は

$$\text{Span}\{|x, y\rangle_a \langle x', y'|, x, x' \in A, y, y' \in \bar{A}\} \quad (\text{B.13})$$

の形で与えられる。これらから、領域 A での観測量に一致する演算子 \mathcal{O}_A は $|y\rangle, y \in \bar{A}$ にどんな影響も与えず

$$\mathcal{O}_A |x, y\rangle_a = \int_A dx' \mathcal{O}(x, x') |x', y\rangle_a \quad (\text{B.14})$$

の性質をもつ必要がある。実際には、対応する演算子代数は (B.13) で $y = y'$ として y 座標を積分することによって得ることができる。これにより

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{1,1} &= \text{Span}\left\{\int_{\bar{A}} dy |x, y\rangle_a \langle x', y|, x, x' \in A\right\} \\ &= \text{Span}\{|x\rangle \langle x'| \otimes 1_{\bar{A}} + 1_{\bar{A}} \otimes |x\rangle \langle x'|, x, x' \in A\} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

が与えられる。ここで

$$1_{\bar{A}} \equiv \int_{\bar{A}} dy |y\rangle \langle y| \quad (\text{B.16})$$

である。この演算子代数は 2 乗に閉じていることは簡単に示すことができる。これより、(B.14) で定義した演算子 \mathcal{O}_A は (B.15) に書き直すと

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{1,1} \otimes 1_{\bar{A}} + 1_{\bar{A}} \otimes \mathcal{O}_{1,1} \quad (\text{B.17})$$

となる。ここで

$$\mathcal{O}_{1,1} \equiv \int_{A,A} dx dx' \mathcal{O}(x, x') |x\rangle \langle x'| \quad (\text{B.18})$$

と $x \in A$ について $1_{\bar{A}}|x\rangle = 0$ であることに注意する。

次に、密度行列について考える。2つのフェルミオン系のヒルベルト空間での一般で可能な状態は密度行列

$$\rho = \int dx_1 dx_2 \int dx'_1 dx'_2 \rho(x_1, x_2; x'_1, x'_2) |x_1, x_2\rangle_a \langle x'_1, x'_2| \quad (\text{B.19})$$

に関する部分空間のテンソル積によって与えられる。この ρ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{1,1}$ に射影したものは

$$\tilde{\rho}_{1,1} = \Pi_{1,1} \rho \Pi_{1,1} = \int_{A,\bar{A}} dx dy \int_{A,\bar{A}} dx' dy' \rho(x, y; x', y') |x, y\rangle_a \langle x', y'| \quad (\text{B.20})$$

で与えられる。これを $\mathcal{H}_{\bar{A}}$ について部分トレースを実行すると

$$\begin{aligned} \rho_{1,1} &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\bar{A}}} \Pi_{1,1} \rho \Pi_{1,1} \\ &= \int_{\bar{A}} dy_1 \langle y_1| \left(\int_{A,\bar{A}} dx dy \int_{A,\bar{A}} dx' dy' \rho(x, y; x', y') |x, y\rangle_a \langle x', y'| \right) \\ &= \int_{A,A} dx dx' \int_{\bar{A}} dy \rho(x, y; x', y) |x\rangle \langle x'| \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

となり、これより $\text{Tr}_{\mathcal{H}_2}(\rho \mathcal{O}_A) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_A}(\rho_{1,1} \mathcal{O}_{1,1})$ が得られる。ここで、LHS の演算子は2粒子の演算子であるのに対して、RHS の演算子は領域 A に対する (B.12) の1粒子の演算子である。

一般には、2粒子の議論を直接的に拡張すればよく、 N 個のフェルミオンのヒルベルト空間 \mathcal{H}_N を $p+q=N$ によってラベルされる $\mathcal{H}_{p,q}$ のセクターに分ける。それぞれの $\mathcal{H}_{p,q}$ では、部分領域 A と \bar{A} に関連する2つのヒルベルト空間でテンソル積による分解がなされる。すなわち

$$\mathcal{H}_{p,q} = \mathcal{H}_A^p \wedge \mathcal{H}_{\bar{A}}^q \quad (\text{B.22})$$

で与えられる。ここで $V^p \equiv V \wedge \dots \wedge V$ である。 \mathcal{H}_A^p は A に p このフェルミオンが存在していることを表している。定義から、 $\mathcal{H}_A^0 = |0\rangle_A = \mathcal{C}$ のような A に粒子が存在しない自明な空間であることを表す。(B.21) を一般化すると各セクターの RDM は

$$\rho_{p,q} = \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\bar{A}}^q} \Pi_{p,q} \rho \Pi_{p,q} \quad (\text{B.23})$$

で与えられることがわかる。これよりターゲット空間エンタングルメントエントロピーは得られてすべてのセクターについてのフォンノイマンエントロピーを足し上げることで

$$S_{EE} = - \sum_{p,q;p+q=N} \text{Tr}_{\mathcal{H}_A^p} \rho_{p,q} \log(\rho_{p,q}) \quad (\text{B.24})$$

で与えられる。

具体的な計算

以上のことを、より具体的なターゲット空間エンタングルメントエントロピーの計算を行っていく。
まず $N = 2$ の場合を考える。この場合それぞれのセクターは

$$\mathcal{H}_{2,0} = (\wedge^2 \mathcal{H}_A) \otimes \mathcal{C}, \quad \mathcal{H}_{1,1} = \mathcal{H}_A \wedge \mathcal{H}_{\bar{A}}, \quad \mathcal{H}_{2,0} = \mathcal{C} \otimes (\wedge^2 \mathcal{H}_{\bar{A}}) \quad (\text{B.25})$$

の様にテンソル分解で与えられる。ここで、一般的な 2 粒子状態は

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int dx_1 \int dx_2 \psi_a(x_1, x_2) |x_1, x_2\rangle_a \quad (\text{B.26})$$

で与えられる。これより、密度行列 ρ は

$$\begin{aligned} \rho &= |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 \int dx'_1 dx'_2 \psi_a(x_1, x_2) \psi_a^*(x'_1, x'_2) |x_1, x_2\rangle_a {}_a\langle x'_1, x'_2| \\ &= \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 \int dx'_1 dx'_2 \rho_a(x_1, x_2; x'_1, x'_2) |x_1, x_2\rangle_a {}_a\langle x'_1, x'_2| \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

と得られる。(2,0) セクターは \bar{A} についてのトレースは自明であり、積分の範囲を制限した射影演算子のみを作用させればよい。したがって、

$$\begin{aligned} \rho_{2,0} &= \text{Tr}_{\bar{A}}(\rho_{2,0}) = \rho_{2,0} \\ &= \frac{1}{2} \int_A dx_1 dx_2 \int_A dx'_1 dx'_2 \psi_a(x_1, x_2) \psi_a^*(x'_1, x'_2) |x_1, x_2\rangle_a {}_a\langle x'_1, x'_2| \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

が得られる。次に、(1,1) セクターでは、 $\mathcal{H}_{1,1}$ に制限するような射影演算子は

$$\Pi_{1,1} = \int_A dx_1 \int_{\bar{A}} dx_2 |x_1, x_2\rangle_a {}_a\langle x_1, x_2| \quad (\text{B.29})$$

で与えられる。まず、これを $|\psi\rangle$ に作用させると

$$\begin{aligned} \Pi_{1,1}|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_A dx_1 \int_{\bar{A}} dx_2 |x_1, x_2\rangle_a {}_a\langle x_1, x_2| \int dy_1 dy_2 \psi_a(y_1, y_2) |y_1, y_2\rangle_a \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_A dx_1 \int_{\bar{A}} dx_2 |x_1, x_2\rangle_a \int dy_1 dy_2 \psi_a(y_1, y_2) \\ &\quad \times (\delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2) - \delta(x_1 - y_2)\delta(x_2 - y_1)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_A dx_1 \int_{\bar{A}} dx_2 + \int_{\bar{A}} dx_1 \int_A dx_2 \right) \psi_a(x_1, x_2) |x_1, x_2\rangle_a \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

となる。ここで ${}_a\langle x_1, x_2 | y_1, y_2 \rangle_a = \delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2) - \delta(x_1 - y_2)\delta(x_2 - y_1)$ を用いた。したがって、制限された密度行列は

$$\tilde{\rho}_{1,1} = \Pi_{1,1} |\psi\rangle \langle \psi| \Pi_{1,1} = 2 \int_A dx_1 dx'_1 \int_{\bar{A}} dx_2 dx'_2 \psi_a(x_1, x_2) \psi_a^*(x'_1, x'_2) |x_1, x_2\rangle_a {}_a\langle x'_1, x'_2| \quad (\text{B.31})$$

となる。これを $\mathcal{H}_{\bar{A}}$ についてトレースをとると

$$\begin{aligned} \rho_{1,1} &= \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\bar{A}}}(\rho_{1,1}) = 2 \int_A dx_1 dx'_1 \int_{\bar{A}} dx_2 dx'_2 \psi_a(x_1, x_2) \psi_a^*(x'_1, x'_2) \\ &\quad \times \int_{\bar{A}} dz \langle z | (|x_1, x_2\rangle_a {}_a\langle x'_1, x'_2|) |z\rangle \\ &= 2 \int_A dx_1 dx'_1 \int_{\bar{A}} dx_2 dx'_2 \psi_a(x_1, x_2) \psi_a^*(x'_1, x'_2) |x_1\rangle \langle x'_1| \langle x_2 | x'_2\rangle \\ &= 2 \int_A dx_1 dx'_1 \int_{\bar{A}} dx_2 \psi_a(x_1, x_2) \psi_a^*(x'_1, x_2) |x_1\rangle \langle x'_1| \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

が得られる。最後に $(0, 2)$ セクターについて射影演算子は $\Pi_{0,2} = \frac{1}{2} \int_{\bar{A}} dx_1 \int_{\bar{A}} dx_2 |x_1, x_2\rangle_a {}_a\langle x_1, x_2|$ で与えられる。これより、RDM は

$$\rho_{0,2} = \text{Tr}_{\bar{A}}(\tilde{\rho}_{0,2}) = \frac{1}{2} \int_{\bar{A}} dx_1 dx_2 \psi_a(x_1, x_2) \psi_a^*(x_1, x_2) \quad (\text{B.33})$$

と得られる。

ここで、より具体的な例として、状態と波動関数が

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2!}} (|\chi_1, \chi_2\rangle - |\chi_2, \chi_1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2!}} \sum_{i_1, i_2=1}^2 \varepsilon_{i_1 i_2} |\chi_{i_1} \chi_{i_2}\rangle \\ \psi_a(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_1(x_1) \chi_2(x_2) - \chi_2(x_1) \chi_1(x_2)) \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

のようなスレーター行列で与えられるものを考える。ここで、 $|\chi_i\rangle = \int dx \chi_i(x) |x\rangle$ は1粒子の波動関数である。これらから、密度行列は

$$\begin{aligned} \rho &= |\psi\rangle \langle \psi| = \frac{1}{2!} (|\chi_1, \chi_2\rangle - |\chi_2, \chi_1\rangle) (\langle \chi_1, \chi_2| - \langle \chi_2, \chi_1|) \\ &= \frac{1}{2!} \sum_{i_1, i_2, j_1, j_2=1}^2 \varepsilon_{i_1 i_2} \varepsilon_{j_1 j_2} |\chi_{i_1} \chi_{i_2}\rangle \langle \chi_{j_1} \chi_{j_2}| \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

で与えられる。この状態について、(B.28) と (B.32),(B.33) はそれぞれ

$$\tilde{\rho}_{2,0} = \frac{1}{2!} (|\chi_1, \chi_2\rangle_{AA} - |\chi_2, \chi_1\rangle_{AA}) ({}_A\langle\chi_1, \chi_2| - {}_A\langle\chi_2, \chi_1|) \quad (\text{B.36})$$

$$\tilde{\rho}_{1,1} = \sum_{i's, j's=1}^2 \varepsilon_{i_1 i_2} \varepsilon_{j_1 j_2} |\chi_{i_1}\rangle_A {}_A\langle\chi_{j_1}| \langle\chi_{j_2}|\chi_{i_2}\rangle_{\bar{A}} = \begin{bmatrix} {}_A\langle\chi_1| & {}_A\langle\chi_2| \\ (1-p_2) & -q_{21\bar{A}} \\ -q_{12\bar{A}} & (1-p_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\chi_1\rangle_A \\ |\chi_2\rangle_A \end{bmatrix} \quad (\text{B.37})$$

$$\tilde{\rho}_{0,2} = \frac{1}{2!} \sum_{i_1, i_2, j_1, j_2=1}^2 \varepsilon_{i_1 i_2} \varepsilon_{j_1 j_2} \langle\chi_{j_1} \chi_{j_2} | \chi_{i_1} \chi_{i_2}\rangle_{\bar{A}} = (1-p_1)(1-p_2) - |q_{12\bar{A}}|^2 \quad (\text{B.38})$$

と得られる。ここで $|\chi_i, \chi_j\rangle_{AA} = |\chi_i\rangle_A |\chi_j\rangle_A$, $|\chi\rangle_A \equiv \int_A dx \chi(x) |x\rangle$, $\langle\chi_i | \chi_j\rangle_{\bar{A}} \equiv \int_{\bar{A}} dx \chi_i^*(x) \chi_j(x)$, $p_1 = \int_A dx |\chi_1(x)|^2$, $p_2 = \int_A dx |\chi_2(x)|^2$, $q_{12\bar{A}} = \int_{\bar{A}} dx \chi_1^*(x) \chi_2(x)$ である。

以上から、ターゲット空間のエンタングルメントエントロピーは

$$S = -\text{Tr}(\rho \log \rho) = -(\text{Tr}(\rho_{2,0} \log \rho_{2,0}) + \text{Tr}(\rho_{1,1} \log \rho_{1,1}) + \text{Tr}(\rho_{0,2} \log \rho_{0,2})) \quad (\text{B.39})$$

で与えられる。

次に、一般の N でターゲット空間エンタングルメントエントロピーを与える。一般的な N 個のフェルミオンの状態は

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int dx_1 \dots dx_N \psi_a(x_1, \dots, x_N) |x_1, \dots, x_N\rangle_a \quad (\text{B.40})$$

で与えられる。ここで、

$$\begin{aligned} \psi_a(x_1, \dots, x_N) &\equiv \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^\sigma \psi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}) \\ |x_1, \dots, x_N\rangle_a &\equiv \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^\sigma |x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

で定義されている。密度行列は

$$\begin{aligned} \rho &= |\psi\rangle \langle\psi| \\ &= \frac{1}{N!} \int dx_1 dx'_1 \dots dx_N dx'_N \psi_a(x_1, \dots, x_N) \psi_a^*(x'_1, \dots, x'_N) |x_1, \dots, x_N\rangle_a {}_a\langle x'_1, \dots, x'_N| \\ &= \frac{1}{N!} \int dx_1 dx'_1 \dots dx_N dx'_N \rho(x_1, \dots, x_N; x'_1, \dots, x'_N) |x_1, \dots, x_N\rangle_a {}_a\langle x'_1, \dots, x'_N| \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

で与えられる。 N 粒子状態について、 A に k 粒子存在し \bar{A} に $N - k$ 粒子存在するセクターが全部で

$N-1$ 存在する。その中でも $(k, N-k)$ 番のセクターについて、射影演算子は

$$\Pi_{k,N-k} = \frac{1}{N!} \binom{N}{k} \int_A dx_1 \dots dx_k \int_{\bar{A}} dx_{k+1} \dots dx_N |x_1, \dots, x_N\rangle_a {}_a \langle x_1, \dots, x_N| \quad (\text{B.43})$$

で与えられる。これに ψ を作用させると

$$\begin{aligned} \Pi_{k,N-k} |\psi\rangle &= \frac{1}{N!} \binom{N}{k} \int_A dx_1 \dots dx_k \int_{\bar{A}} dx_{k+1} \dots dx_N |x_1, \dots, x_N\rangle_a \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{N!}} \int dy_1 \dots dy_N \psi_a(y_1, \dots, y_N) {}_a \langle x_1, \dots, x_N | y_1, \dots, y_N \rangle_a \\ &= \frac{1}{N!} \binom{N}{k} \int_A dx_1 \dots dx_k \int_{\bar{A}} dx_{k+1} \dots dx_N \psi_a(x_1, \dots, x_N) |x_1, \dots, x_N\rangle_a \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

が得られる。最後の行では ${}_a \langle x_1, \dots, x_N | y_1, \dots, y_N \rangle_a$ を用いた。このセクターに制限された密度行列は

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{k,N-k} &= \Pi_{k,N-k} \rho \Pi_{k,N-k} = \int_A dx_1 dx'_1 \dots dx_k dx'_k \int_{\bar{A}} dx_{k+1} dx'_{k+1} \dots dx_N dx'_N \\ &\quad \times \frac{1}{N!} \binom{N}{k}^2 \psi_a(x_1, \dots, x_N) \psi_a^*(x'_1, \dots, x'_N) |x_1, \dots, x_N\rangle {}_a a \langle x_1, \dots, x_N| \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

となる。次に、 \bar{A} に存在する粒子についてトレースをとる必要がある。これは

$$\begin{aligned} \rho_{k,N-k} &= \text{Tr}_{\bar{A}}(\tilde{\rho}) = \frac{1}{(N-k)!} \int_{\bar{A}} dz_{k+1} \dots dz_N {}_a \langle z_{k+1} \dots z_N | \rho_{k,N-k} | z_{k+1} \dots z_N \rangle_a \\ &= \frac{1}{N!} \binom{N}{k}^2 \int_A dx_1 dx'_1 \dots dx_k dx'_k \int_{\bar{A}} dx_{k+1} dx'_{k+1} \dots dx_N dx'_N \psi_a(x_1, \dots, x_N) \\ &\quad \times \psi_a^*(x'_1, \dots, x'_N) |x_1, \dots, x_k\rangle {}_a a \langle x'_1, \dots, x'_k | {}_a \langle x_{k+1}, \dots, x_N | y_{k+1}, \dots, y_N \rangle_a \\ &= \frac{1}{k!} \binom{N}{k} \int_A dx_1 dy_1 \dots dx_k dy_k \int_{\bar{A}} dx_{k+1} \dots dx_N \psi_a(x_1, \dots, x_N) \psi_a^*(x'_1, \dots, x'_N) \\ &\quad \times |x_1, \dots, x_k\rangle {}_a a \langle x'_1, \dots, x'_k| \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(N-k)!} \int_{\bar{A}} dz_{k+1} \dots dz_N {}_a \langle z_{k+1} \dots z_N | x_{k+1}, \dots, x_N \rangle {}_a a \langle x'_{k+1}, \dots, x'_N | z_{k+1} \dots z_N \rangle_a \\ &= |x_1 \dots x_k\rangle {}_a a \langle x_1 \dots x_k | {}_a \langle y_{k+1} \dots y_N | x_{k+1}, \dots, x_N \rangle_a \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

を用いた。

より具体的に一粒子状態が $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N$ で与えられるようなスレーター行列式によって与えられ

る状態を考える。そのような状態と波動関数は

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{i's} \varepsilon_{i_1 \dots i_N} |\chi_{i_1} \dots \chi_{i_N}\rangle \\
\psi_a(x_1, \dots, x_N) &= \sum_{i's} \frac{1}{\sqrt{N!}} \varepsilon_{i_1 \dots i_N} \chi_{i_1}(x_1) \dots \chi_{i_N}(x_N)
\end{aligned} \tag{B.48}$$

で与えられる。それぞれの i は 1 から N の値をとる。したがって、 $(k, N-k)$ セクターの RDM は

$$\rho_{k, N-k} = \binom{N}{k} \frac{1}{N!} \sum_{i's, j's} \varepsilon_{i_1 \dots i_N} \varepsilon_{j_1 \dots j_N} |\chi_{i_1} \dots \chi_{i_k}\rangle_A {}_A \langle \chi_{j_1} \dots \chi_{j_k} | \prod_{n=k+1}^N \langle \chi_{j_n} | \chi_{i_n} \rangle_{\bar{A}} \tag{B.49}$$

で与えられる。

したがって、このような RDM をに対して一般的な形のエンタングルメントエントロピーが

$$S = -\text{Tr} \tilde{\rho} \log \tilde{\rho} = - \sum_k \text{Tr} \rho_{k, N-k} \log \rho_{k, N-k} \tag{B.50}$$

の様に与えられる。

付 録 C (AdS) ジャイアントグラビトンのバブリ ング AdS 幾何に対する $\gamma_{\phi\phi}$

$\gamma_{\phi\phi}$ は $y \rightarrow 0$ で r について (i) $r > r_1$, (ii) $r_1 > r > r_2$, (iii) $r_2 > r > r_3$, (iv) $r_3 > r$ で場合分けすると以下の様に与えられる;

(i) $r > r_1$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \gamma_{\phi\phi} = \frac{r_1^2(r^6 + r_2^2(r^4 + 3r_3r^2) - r_3^2(4r^4 + r_2^4)) - r^4(r^2 + r_2^2)(r_2^2 - r_3^2)}{(r^2 - r_1^2)(r^2 - r_2^2)^2(r^2 - r_3^2)} \sqrt{\frac{r_1^2}{(r^2 - r_1^2)^2} - \frac{r_2^2}{(r^2 - r_2^2)^2} + \frac{r_3^2}{(r^2 - r_3^2)^2}} \quad (\text{C.1})$$

(ii) $r_1 > r > r_2$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \gamma_{\phi\phi} = \frac{-r^2(r^2 + r_3^2)(r^2(r^2 - 4r_3^2) + r_1^2(r_2^2 - r_3^2) - r_2^2r_3^2)}{(r^2 - r_1^2)(r^2 - r_2^2)(r^2 - r_3^2)^2} \sqrt{\frac{r_1^2}{(r^2 - r_1^2)^2} + \frac{r_2^2}{(r^2 - r_2^2)^2} - \frac{r_3^2}{(r^2 - r_3^2)^2}} \quad (\text{C.2})$$

(iii) $r_2 > r > r_3$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \gamma_{\phi\phi} = \frac{r^2r_1^2(r^4 - r^2(r_2^2 + r_3^2) - 3r_2^2r_3^2) - r^6(r_2^2 + r_3^2) + 4r^4r_2^2r_3^2 - r_1^4(r_2^2r_3^2 + r^4)}{(r^2 - r_1^2)^2(r^2 - r_2^2)(r^2 - r_3^2)} \sqrt{-\frac{r_1^2}{(r^2 - r_1^2)^2} + \frac{r_2^2}{(r^2 - r_2^2)^2} + \frac{r_3^2}{(r^2 - r_3^2)^2}} \quad (\text{C.3})$$

(iv) $r_3 > r$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \gamma_{\phi\phi} = \frac{r^2(-r^6 + r^2r_2^2(3r^2 + r_3^2) + (r_2^2 - r_3^2)(r^2 + r_2^2) - r_2^4(4r^2 - r_3^2))}{(r^2 - r_1^2)(r^2 - r_2^2)^2(r^2 - r_3^2)} \sqrt{\frac{r_1^2}{(r^2 - r_1^2)^2} - \frac{r_2^2}{(r^2 - r_2^2)^2} + \frac{r_3^2}{(r^2 - r_3^2)^2}}. \quad (\text{C.4})$$

参考文献

- [1] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, Phys. Rev. D **55**, 5112-5128 (1997) [arXiv:hep-th/9610043 [hep-th]].
- [2] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, Nucl. Phys. B **498**, 467-491 (1997) doi:10.1016/S0550-3213(97)00290-3 [arXiv:hep-th/9612115 [hep-th]].
- [3] R. Dijkgraaf, E. P. Verlinde and H. L. Verlinde, Nucl. Phys. B **500**, 43-61 (1997) doi:10.1016/S0550-3213(97)00326-X [arXiv:hep-th/9703030 [hep-th]].
- [4] J. M. Maldacena, Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999) [Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998)] [hep-th/9711200].
- [5] E. Witten, Nucl. Phys. B **460** (1996), 335-350 doi:10.1016/0550-3213(95)00610-9 [arXiv:hep-th/9510135 [hep-th]].
- [6] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, Phys. Lett. B **428**, 105 (1998) [hep-th/9802109].
- [7] E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998) [hep-th/9802150].
- [8] S. Ryu and T. Takayanagi, Phys. Rev. Lett. **96**, 181602 (2006) [hep-th/0603001].
- [9] M. Miyaji, T. Numasawa, N. Shiba, T. Takayanagi and K. Watanabe, Phys. Rev. Lett. **115**, no. 26, 261602 (2015) [arXiv:1507.07555 [hep-th]].
- [10] D. Bak, Phys. Lett. B **756**, 200 (2016) [arXiv:1512.04735 [hep-th]].
- [11] A. Trivella, Class. Quant. Grav. **34**, no. 10, 105003 (2017) [arXiv:1607.06519 [hep-th]].
- [12] C. B. Chen, W. C. Gan, F. W. Shu and B. Xiong, Phys. Rev. D **98**, no. 4, 046008 (2018) [arXiv:1804.08358 [hep-th]].
- [13] S. Karar, R. Mishra and S. Gangopadhyay, Phys. Rev. D **100**, no. 2, 026006 (2019) [arXiv:1904.13090 [hep-th]].
- [14] M. Nozaki, S. Ryu and T. Takayanagi, JHEP **1210**, 193 (2012) [arXiv:1208.3469 [hep-th]].

- [15] N. Lashkari and M. Van Raamsdonk, JHEP **1604**, 153 (2016) [arXiv:1508.00897 [hep-th]].
- [16] S. Aoki and S. Yokoyama, PTEP **2018**, no. 3, 031B01 (2018) [arXiv:1707.03982 [hep-th]].
- [17] A. May and E. Hijano, JHEP **1810**, 036 (2018) [arXiv:1806.06077 [hep-th]].
- [18] E. A. Mazenc and D. Ranard, [arXiv:1910.07449 [hep-th]].
- [19] S. R. Das, A. Kaushal, G. Mandal and S. P. Trivedi, J. Phys. A **53**, no.44, 444002 (2020) [arXiv:2004.00613 [hep-th]].
- [20] S. R. Das, A. Kaushal, S. Liu, G. Mandal and S. P. Trivedi, JHEP **04**, 225 (2021) [arXiv:2011.13857 [hep-th]].
- [21] H. R. Hampapura, J. Harper and A. Lawrence, JHEP **10**, 231 (2021) [arXiv:2012.15683 [hep-th]].
- [22] S. Sugishita, JHEP **08**, 046 (2021) [arXiv:2105.13726 [hep-th]].
- [23] A. Frenkel and S. A. Hartnoll, [arXiv:2111.05967 [hep-th]].
- [24] S. Corley, A. Jevicki and S. Ramgoolam, Adv. Theor. Math. Phys. **5**, 809-839 (2002) [arXiv:hep-th/0111222 [hep-th]].
- [25] D. Berenstein, JHEP **07**, 018 (2004) [arXiv:hep-th/0403110 [hep-th]].
- [26] H. Lin, O. Lunin and J. M. Maldacena, JHEP **10**, 025 (2004) [arXiv:hep-th/0409174 [hep-th]].
- [27] Y. Takayama and A. Tsuchiya, JHEP **10**, 004 (2005) [arXiv:hep-th/0507070 [hep-th]].
- [28] A. Tsuchiya and K. Yamashiro, JHEP **06** (2020), 107 [arXiv:2002.11365 [hep-th]].
- [29] H. Liu and A. A. Tseytlin, Nucl. Phys. B **533**, 88 (1998) [hep-th/9804083].
- [30] L. Girardello, M. Petrini, M. Porrati and A. Zaffaroni, Nucl. Phys. B **569** (2000), 451-469 [arXiv:hep-th/9909047 [hep-th]].
- [31] I. D. Rodriguez and G. Sierra, Phys. Rev. B **80**, 153303 (2009) [arXiv:0811.2188 [cond-mat.mes-hall]].
- [32] A. Tsuchiya and K. Yamashiro, Phys. Lett. B **824**, 136830 (2022) [arXiv:2110.13429 [hep-th]].
- [33] A. Tsuchiya and K. Yamashiro, [arXiv:2201.06871 [hep-th]].