

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Teoria de Gauge para Partículas de Spin Contínuo e Altos Spins

Felipe Manoel de Sousa Freitas

Orientador: Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles

Dissertação de mestrado apresentado no instituto de Física da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles (IFUSP)

Prof. Dr. Alysson Fábio Ferrari (UFABC)

Prof. Dr. Denis Dalmazi (UNESP)



São Paulo

2022

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Freitas, Felipe Manoel de Sousa

Teoria de gauge para partículas de spin contínuo e altos spins.
São Paulo, 2022.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Depto. de Física Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles

Área de Concentração: Física das Partículas Elementares e Campos

Unitermos: 1. Simetria; 2. Grupos de Lie; 3. Representação de grupos; 4. Partículas elementares

USP/IF/SBI-001/2022

University of São Paulo
Physics Institute

Gauge Theory for Continuous Spin Particles and High Spins

Felipe Manoel de Sousa Freitas

Supervisor: Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles

Dissertation submitted to the Physics Institute of the University of São Paulo in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science.

Examining Committee:

Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles (IFUSP)

Prof. Dr. Alysson Fábio Ferrari (UFABC)

Prof. Dr. Denis Dalmazi (UNESP)

São Paulo

2022

Dedico esta dissertação à minha querida tia Francisca Catarina (titia Chite, *in memoriam*).

Agradecimentos

Eu gostaria de começar agradecendo a Deus. Ele é a certeza de que, apesar de estar longe da minha família, eu nunca estarei sozinho. Sua presença me acompanhará por toda a minha vida.

Sem a oportunidade dada pelo meu orientador Victor Rivelles, eu não estaria concluindo uma dissertação sobre um assunto tão interessante. Durante esses anos no mestrado, com sua ajuda e paciência, eu fui capaz de fazer diversos cálculos os quais eu demoraria muito para concluí-los sem as suas inúmeras sugestões. Trabalhar ao seu lado tem sido um privilégio e deu-me uma experiência real sobre como é ser um físico teórico. Obrigado, professor!

Meus colegas do departamento de física matemática do instituto, sala 3058, Mikael Marcondes, James Milles e Fabian Ruiz, obrigado! Vocês foram e são exemplos para mim de dedicação e trabalho árduo que a Física e a Matemática requer; as inúmeras discussões que tivemos sobre os seus tópicos de trabalho me trouxeram um ânimo a mais durante esses anos. Eu gostaria de fazer um agradecimento especial ao Mikael. Suas sugestões em alguns cálculos me ajudaram bastante a chegar no resultado desejado com o rigor que a Física requer.

Eu devo à professora Suzana Salem um agradecimento especial pela oportunidade a mim confiada em trabalhar ao seu lado durante este período no mestrado como monitor nas disciplinas Eletricidade e Magnetismo I e II. Esta experiência certamente ficará marcada em minha memória e espero poder repeti-la num futuro próximo.

Durante minha graduação, eu conheci verdadeiros mestres da Física os quais eu tive o privilégio de participar em seus cursos. Dentre eles, eu gostaria de agradecer à Renata Funchal, Diego Trancanelli, João Barata e Victor Rivelles pelos seus cursos excelentes em Mecânica Quântica II, Eletromagnetismo I e II, Grupos e Tensores e Relatividade Geral, respectivamente. Estes cursos tiveram uma influência profunda nesta dissertação pelo conteúdo e pelo rigor matemático que estes assuntos foram tratados. Em adição, na pós-graduação eu fui abençoado com aulas de Mecânica Quântica I e II e Teoria Quântica de Campos I e II dadas pelos professores Antônio Piza, Matthew Luzum, Horatiu Nastase e Gustavo Burdman, respectivamente. Estas aulas me deram também grande suporte teórico na elaboração desta dissertação; a estes grandes mestres serei eternamente grato.

Quando eu estava fazendo engenharia no ITA (Instituto Tecnológico de Aeronáutica), eu tive um professor de física brilhante que me deu uma oportunidade em trabalhar com ele em um projeto sobre Mecânica Quântica. Obrigado professor Wayne de Paula! Aquele trabalho, eu acredito, foi o começo de todo o sonho em seguir carreira acadêmica na Física.

Aos meus queridos amigos no CRUSP (Conjunto Residencial da Universidade de São Paulo), Gabriel Carlos (Letras), Pedro Campos (Geografia), Claikson Benedito (Astronomia), Jean Michael (Física), Erik Ernani (Filosofia), Gustavo Salmazo (História), Fernanda Queiroz (Letras) e Juliana Oliveira (Oceanografia), deixo meus sinceros agradecimentos. O companheirismo de vocês foi muito importante para mim ao longo desses anos de muito estudo. Sair da rotina com vocês no apartamento 501-E ficará guardado em minhas memórias como os melhores momentos que passei na USP! Certamente, sem vocês, os últimos dois anos teriam sido muito mais difíceis.

Minha família é a razão pela qual eu pude hoje escolher uma carreira científica. Minha mãe Francisca Sousa, meu pai Raimundo Freitas e minha irmã Camila Priscila são minhas referências para a vida.

Por fim, eu gostaria também de agradecer ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo investimento a mim destinado que me auxiliou ao longo desses dois anos de trabalho neste projeto.

The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure, even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning.

Eugene Paul Wigner

...although the symmetries are hidden from us, we can sense that they are latent in nature, governing everything about us. That's the most exciting idea I know: that nature is much simpler than it looks. Nothing makes me more hopeful that our generation of human beings may actually hold the key to the universe in our hands-that perhaps in our lifetimes we may be able to tell why all of what we see in this immense universe of galaxies and particles is logically inevitable.

Steven Weinberg

Resumo

Nesta dissertação apresentamos um estudo sistemático sobre a Teoria das Partículas de Spin Contínuos (CSPs) e dos Táquions de Spin Contínuos (CSTs) pelo uso de métodos de Teoria de Grupos e Teoria de Campos. Para este fim, realizamos uma breve revisão sobre Teoria de Grupos, especializando-nos nos Grupos de Lorentz e Poincaré, no qual CSPs e CSTs aparecem como Representações Unitárias Irredutíveis (UIRs). Então, revisamos amplitudes de emissão *soft* para CSPs, onde pode-se discutir a possibilidade de que interações de longo alcance serem intermediadas por CSPs, ao invés de apenas partículas sem massa de baixa helicidade (fóton e gráviton). Depois, analisamos a teoria de campos para CSTs, em que é discutido simetrias globais e locais da ação e calculamos os autovalores dos operadores de Casimir quadrático e quártico. Depois, investigamos os graus de liberdade físicos propagados pelo campo e analisamos o vértice cúbico com um CST e duas partículas massivas escalares, em que exploramos uma corrente externa adequada que obedece uma lei de conservação generalizada. Finalizamos tomando o limite de massa zero deste vértice para obter o vértice cúbico para uma CSP e duas partículas escalares massivas, onde estudamos suas propriedades tanto no espaço de Minkowski quanto no espaço Euclidiano. Mostramos que o propagador obtido no espaço Euclidiano é similar ao encontrado no contexto da teoria de Partículas de Altos Spins (HSPs).

Palavras-chave:

Teoria de grupos, grupo de Poincaré, representações unitárias, táquions, partículas de spin contínuo, vértice.

Abstract

In this dissertation, we present a systematic study of the theory of Continuous Spin Particles (CSPs) and Continuous Spin Tachyons (CSTs) using both Group Theory and Field Theory approach. To do so, we make a brief review of Group Theory specializing ourselves on Lorentz and Poincaré Groups, where both CSPs and CSTs appear as Unitary Irreducible Representation (UIR). Then, we review soft amplitudes for CSPs, where one can discuss the possibility of long-range interactions intermediated by CSPs, instead of just massless low-helicity particles (photon and graviton). After that, we enter the realm of CST field theory, where is discussed global and local symmetries of the action and we compute the eigenvalues of the quadratic and quartic Casimir operators. Then, we investigate the physical degrees of freedom propagated by the field and analyze cubic vertices for one CST and two massive scalar particles, where we explore a suitable current that obeys a generalized conservation law. We end up by taking the massless limit of this vertex to get a CSP vertex for one CSP and two massive scalar particles, where it is studied its properties in both Lorentz and Euclidean signatures. We show that the propagator obtained in Euclidean space is closely related to the one encountered in the context of the theory of Higher Spin Particles (HSPs).

Keywords:

Group theory, Poincaré group, unitary representations, tachyons, continuous spin particles, soft amplitudes, vertex.

Sumário

Introdução	1
1 Teoria de Grupos	7
1.1 Conceitos Básicos	7
1.1.1 Classes de Equivalência, Cosets e Subgrupos Normais	7
1.1.2 Homomorfismo	8
1.1.3 Produto Direto e Semidireto	8
1.2 Representações de Grupos	9
1.2.1 Representações Irredutíveis	9
1.2.2 Representações Unitárias	10
1.3 Grupos de Lie e Álgebras de Lie	11
1.3.1 $SO(3)$	12
1.3.2 Spin	15
2 Grupos de Lorentz e Poincaré	19
2.1 Espaço de Minkowski	19
2.2 Grupo de Lorentz	20
2.2.1 Álgebra de Lorentz	22
2.3 Grupo de Poincaré	23
2.3.1 Álgebra de Poincaré	24
2.3.2 Operadores de Casimir	25
3 Representações Unitárias Irredutíveis do Grupo de Poincaré	27
3.1 O Método de Wigner	27
3.2 Álgebra do LG_k	28
3.3 Partículas Massivas	29
3.4 Partículas sem Massa	30
3.4.1 Estados de Helicidade: $\rho^2 = 0$	33
3.4.2 Estados de Spin Contínuo: $\rho^2 > 0$	34
3.5 Táquions	38
3.5.1 Táquions de Spin s : $\rho^2 = -m^2s(s+1)$, $s = 0, 1, 2, \dots$	40
3.5.2 Táquions de Spin Contínuo: $\rho^2 > 0$	41
4 Equações de Onda e Amplitudes de Emissão Soft para Partículas de Spin Contínuo	43
4.1 Equações de Onda	43
4.1.1 Solução Singular em $\eta \cdot p$	45
4.1.2 Solução Suave em $\eta \cdot p$	47
4.2 Matriz S e Regime Soft	48
4.2.1 Covariância da Matriz S	48

4.2.2	Fatores Soft	48
4.3	Fatores Soft para CSPs	50
4.3.1	Covariância	50
4.3.2	Invariância	51
5	Teoria de Campo Para Táquions de Spin Contínuo	53
5.1	Ação	53
5.2	Simetrias	54
5.2.1	Simetrias Globais	54
5.2.2	Simetrias Locais	56
5.3	Equação de Campo	58
5.4	Autovalores dos Operadores de Casimir	59
5.4.1	Autovalor do Operador de Casimir Quadrático	60
5.4.2	Autovalor do Operador de Casimir Quártico	60
5.5	Escolha de Gauge e Graus de Liberdade Físicos	63
5.5.1	Escolha de Gauge	63
5.5.2	Graus de Liberdade Físicos	64
5.6	Vértice Cúbico	67
5.6.1	Equação de Continuidade	68
5.6.2	Invariância de Gauge	68
5.6.3	Cálculo da Corrente	69
5.6.4	Vértice Cúbico para uma CSP e dois Campos Escalares Massivos	72
6	Análise do Vértice Cúbico com uma CSP	75
6.1	Vértice Cúbico no Espaço de Minkowski	75
6.2	Integrais no Espaço Auxiliar	78
6.2.1	Funções Geradoras no Espaço de Minkowski	78
6.2.2	Funções Geradoras no Espaço Euclidiano	81
6.3	Vértice Cúbico no Espaço Euclidiano	83
6.3.1	Aplicação: Cálculo do Vértice Cúbico (6.9) no Espaço Euclidiano	85
	Conclusões	87
A	Geradores do LG Massivo e Não-Massivo	89
A.1	Caso Massivo	89
A.2	Caso não-Massivo	91
A.3	"Vetores de Polarização" $\epsilon_{\pm}(k)$: a Questão da Covariância	92
B	Teorema de Weinberg	95
B.1	Eletrodinâmica: $j=1$	96
B.2	Gravitação: $j=2$	96

B.3	Alto Spin: $j > 2$	96
C	Algumas Identidades Úteis	97
D	Operadores de Casimir em Teoria de Campo	101
D.1	Operador de Casimir Quadrático	101
D.2	Operador de Casimir Quártico	101
E	Propriedades de $R\Psi$	105
E.1	Dinâmica	105
E.2	Simetrias	106
E.2.1	Simetria- χ	106
E.2.2	Simetria- ϵ	106
E.2.3	Reducibilidade	107
F	Coordenadas Esféricas	109
F.1	Área e Volume da Hiperesfera	109
F.2	A Integral da Função Delta	110

Introdução

Com os princípios da teoria quântica e da relatividade restrita juntos, podemos prever os tipos de partículas elementares que a natureza comporta. Por um lado, Eugene Wigner provou que qualquer transformação de simetria na mecânica quântica é implementada por *transformações unitárias e lineares* ou *anti-unitárias e anti-lineares* sobre vetores no espaço de Hilbert [1].¹ Por outro lado, a teoria da relatividade restrita é construída com base em dois axiomas:

- As leis físicas são as mesmas em todo *sistema de referência inercial*;
- A velocidade da luz no vácuo c é constante em todas as direções e em todos os sistemas de referência inerciais e independe da fonte.

Estes dois postulados implicam que o quadrado do intervalo infinitesimal entre dois eventos,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (0.1)$$

é *invariante*, isto é, independe do sistema de referência inercial. Dentre todas as transformações sobre quadritores do espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$ pelas quais (0.1) é invariante, nesta dissertação será analisada em detalhes a transformação caracterizada pelo par (Λ, b) tal que

$$x^\mu \xrightarrow{(\Lambda, b)} x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu, \quad (0.2)$$

em que $x^\mu \equiv (t, x, y, z)$,² $\mu = 0, \dots, 3$, $b^\mu \in \mathbb{R}^{1,3}$ é um quadritor constante e $\Lambda^\mu{}_\nu \equiv \partial x'^\mu / \partial x^\nu$ é uma matriz que satisfaz $g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu$, onde $g = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ é a métrica do espaço de Minkowski. Todos os pares de transformações (Λ, b) que agem sobre as coordenadas do espaço-tempo de acordo com (0.2) define o *grupo de Poincaré* e a análise de suas representações unitárias e irredutíveis (UIRs) constitui um passo importante no estudo das partículas elementares, como aquelas que são o tema principal desta dissertação.

No fim da década de 1930, Wigner, com o uso dos princípios da mecânica quântica e da relatividade restrita acima mencionados, classificou as UIRs do grupo de Poincaré mostrando que o estudo das características das partículas elementares pode ser feito através da perspectiva de teoria de grupos [4]. Segundo seu trabalho, pode-se rotular as UIRs do grupo de Poincaré com os autovalores dos *operadores de Casimir* deste grupo, a saber, o operador de Casimir *quadrático* $C_2 = P^2$, em que P é o operador momento, e o operador de Casimir *quártico* $C_4 = W^2$, em que $W^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu J_{\rho\sigma}$ é o vetor de Pauli-Lubanski e $J_{\mu\nu}$ é o operador momento angular total.³ A Tabela 1 mostra as possíveis UIRs do grupo de Poincaré para partículas sem massa. Nesta tabela, l rotula o vetor de estado correspondente a cada representação e h é o autovalor do *operador helicidade* $\hat{h} = \vec{S} \cdot \vec{P} / |\vec{P}|$, em que \vec{S} é o operador de spin e \vec{P} é a parte espacial do operador momento. Os autovalores de \hat{h} podem ser inteiros ou semi-inteiros. As *representações de helicidade h* , também chamadas *representações de spin discreto* ou de *spin finito*, são caracterizadas por $C_2 = C_4 = 0$ e possuem dois estados de polarização, implicando que estas representações são de *dimensão finita*. O *fóton* e o *gráviton* são exemplos de representações deste tipo com helicidade $h = \pm 1$

¹Veja [2], pp. 91-96, para uma revisão recente sobre este resultado. Também, há uma prova devido à Wick para o caso mais simples em [3], pp. 284-285, correspondente ao espaço de Hilbert de dimensão dois.

²Deste ponto em diante será utilizado o sistema de unidades naturais no qual $c = 1$.

³O operador de Casimir quártico aqui definido é válido apenas em dimensão $D = 4$. No Capítulo 5 utilizaremos os operadores de Casimir em dimensão D qualquer com base nos resultados do Apêndice D.

Representação	C_2	C_4	l
Partículas de helicidade h	0	0	$\pm h$
Bósons de spin contínuo	0	$-\rho^2$	$0, \pm 1, \pm 2, \dots$
Férmions de spin contínuo	0	$-\rho^2$	$\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \dots$

Tabela 1: UIRs de massa nula do grupo de Poincaré.

e $h = \pm 2$, respectivamente. Por outro lado, as *representações de spin contínuo* são caracterizadas por $C_2 = 0$ e $C_4 = -\rho^2 \neq 0$, em que $\rho \in \mathbb{R}$ é um parâmetro com dimensão de energia que pode ser associado ao spin s : no limite em que $C_2 = m^2 \rightarrow 0$ e $s \rightarrow \infty$, então $\rho \rightarrow ms$ é finito e diferente de zero [5]. Estas representações podem ser decompostas em uma soma infinita de estados de helicidade e abrangem infinitos estados de polarização. Devido à esta característica, Wigner as descartou como possíveis estados físicos que representam partículas sem massa que podem ser encontradas na natureza [6]. Ele argumentou que um gás composto por *partículas de spin contínuos* (CSPs) teria capacidade térmica infinita.⁴

A Tabela 2 mostra todas as possíveis representações massivas do grupo de Poincaré. Neste caso, os autovalores de C_2 são não-nulos e o autovalor de C_4 é rotulado pelo spin s , que pode ser inteiro ou semi-inteiro, ou pelo número real ρ . As *representações massivas de spin s* compõem, ao lado das representações de helicidade h discutidas anteriormente, o Modelo Padrão das partículas elementares. As *partículas taquiônicas*, por sua vez, não são encontradas livres na natureza. Estas partículas criam uma configuração instável que decai espontaneamente sem a presença de táquions no estado final. Isto é chamado de *condensação de táquions* e é o que acontece no mecanismo de Higgs.

Representação	C_2	C_4	l
Partículas massivas de spin s	m^2	$-m^2s(s+1)$	$-s, -s+1, \dots, s-1, s$
Táquion escalar	$-m^2$	0	0
Táquion de spin s	$-m^2$	$m^2s(s+1)$	$\pm(s+1), \pm(s+2), \dots$
Táquion bosônico de spin contínuo	$-m^2$	$-\rho^2$	$0, \pm 1, \pm 2, \dots$
Táquion fermiônico de spin contínuo	$-m^2$	$-\rho^2$	$\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \dots$

Tabela 2: UIRs massivos do grupo de Poincaré

É importante fazer um esclarecimento sobre a denominação "spin contínuo" dada às representações de dimensão infinita do grupo de Poincaré conforme feito pelos autores de [7]. A definição usual de spin corresponde ao maior valor possível de l e, conforme mostrado nas Tabelas 1 e 2, estes valores são discretos. Portanto, visto que CSPs e táquions (à exceção do táquion escalar) não possuem valor limite para o rótulo l , estas partículas foram definidas por Wigner como *partículas de spin infinito* [6]. Esta definição é mais precisa, tendo em vista que o autovalor de C_4 não é, rigorosamente, o spin. Entretanto, nesta dissertação será mantida a denominação "spin contínuo" às

⁴O princípio de equipartição da energia pode ser utilizado para explicar este resultado. Este princípio asserta que a cada grau de liberdade há uma contribuição correspondente à $\frac{1}{2}k_B$ para a capacidade térmica do sistema em estudo, onde k_B é a constante de Boltzmann.

representações de dimensão infinita porque esta é a mais utilizada na literatura.

A análise feita até este ponto sobre as representações unitárias do grupo de Poincaré pode ser estendida para dimensão D qualquer [8, 9]. Em $D = 3$ (duas dimensões espaciais e uma temporal), os autores de [10] mostraram que CSPs podem ser pensadas como generalizações de *anyons* sem massa.⁵ No contexto de teoria de cordas, as representações de spin contínuos surgem no limite de tensão nula [12–14] e como estado fundamental da teoria apresentada em [15].

A existência de amplitudes covariantes de emissão soft para CSPs [16] trouxe uma nova perspectiva sobre a possibilidade de interações de longo alcance serem intermediadas por estas partículas, ao invés de serem intermediadas por apenas partículas de helicidade baixa (fóton e gráviton), conforme asserta o teorema *no-go* de Weinberg [17, 18].⁶ Assim, obter uma teoria de campo para CSPs propondo uma ação e quantizando-a canonicamente seria o caminho natural para obter os detalhes sobre as possíveis interações intermediadas por CSPs. Entretanto, apenas equações de campo covariantes obtidas por Wigner e Bargmann eram conhecidas [22, 23] e, através destas e de outras equações covariantes, os autores de [24–28] procuraram construir uma formulação quântica das CSPs dentro e fora do esquema da teoria quântica de campos. No entanto, eles encontraram diversos problemas, dentre os quais, violação de causalidade e Hamiltoniana não-local.⁷

Os autores de [24–28] não atribuíram à teoria das CSPs uma característica fundamental compartilhada pelas teorias que descrevem partículas sem massa: a eletrodinâmica e a relatividade geral são **teorias de gauge**. Neste contexto, Bekaert & Mourad [33] obtiveram um progresso importante para obter uma teoria de campo para CSPs como uma teoria de gauge. Eles recuperaram as equações de Wigner [22] a partir das equações de campo derivadas da teoria de gauge para partículas massivas de altos spins [34, 35]⁸ através da relação entre o *grupo ortogonal* $SO(D - 1)$ e o *grupo Euclidiano* $ISO(D - 2)$, denominada contração de Inönü-Wigner [37] (veja também a análise feita em [5] e a breve discussão feita em [38], pp. 165-166).⁹ Assim, além da invariância de Lorentz, Bekaert & Mourad mostraram que as equações de Wigner contêm uma simetria de gauge, de sorte que a busca por uma teoria de gauge pela qual estas equações pudessem ser derivadas tornou-se importante na última década.

Em 2013, Natalia Toro & Philip Schuster propuseram a primeira ação que caracteriza uma teoria de gauge para as CSPs. A ação é dada por [39]:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x d^4\eta \delta'(\eta^2) \left[(\partial_x \Psi)^2 - \frac{1}{2} \eta^2 (\Delta \Psi)^2 \right], \quad (0.3)$$

onde $\Psi = \Psi(\eta, x)$ é um campo escalar, $x^\mu = (x^0, \dots, x^3)$ são as coordenadas do espaço-tempo usuais, $\eta^\mu = (\eta^0, \dots, \eta^3)$ são as coordenadas de um espaço auxiliar (cuja orientação está associada ao spin), $\Delta \equiv \partial_\eta \cdot \partial_x + \rho$ e δ' é a derivada da função delta com respeito ao seu argumento. A ação (0.3) é invariante sob a transformação de

⁵Anyons são (quasi)partículas em duas dimensões espaciais com estatística intermediária entre a estatística bosônica (**estatística de Bose-Einstein**) e a estatística fermiônica (**estatística de Fermi-Dirac**) [11].

⁶Para uma revisão sobre este e outros teoremas no-go, o leitor pode consultar as referências [19–21].

⁷A incorporação das representações de spin contínuo em uma teoria quântica de campos de um modo compatível com causalidade foi feita em [29, 30] onde seus autores, baseados nos resultados de [31], se valeram do uso da construção de campos localizados em cordas semi-infinitas do tipo espaço ("string-localized fields"), em alternativa à quantização problemática de campos locais pontuais ("point-localized fields") encontrada pelos autores acima citados. O leitor interessado pode encontrar comentários recentes sobre este tópico em [32].

⁸Para uma revisão mais recente sobre a teoria das partículas de altos spins, veja [36].

⁹Conforme será detalhado no Capítulo 3 para $D = 4$, os grupos $SO(D - 1)$ e $ISO(D - 2)$ são importantes na descrição das representações unitárias do grupo de Poincaré associadas às partículas massivas e sem massa, respectivamente.

gauge

$$\delta_\epsilon \Psi(\eta, x) = \left(\eta \cdot \partial_x - \frac{1}{2} \eta^2 \Delta \right) \epsilon(\eta, x) \quad (0.4)$$

onde $\epsilon(\eta, x)$ é uma função arbitrária. A seguir, destacamos algumas características importantes da teoria (0.3) que foram analisadas em [39].

A relação desta teoria com a de altos spins [34, 35] pode ser obtida como segue: primeiro, derive a equação de campo a partir da ação (0.3),

$$\left(-\square_x + (\omega \cdot \partial_x + i\rho) \partial_\omega \cdot \partial_x - \frac{1}{2} (\omega \cdot \partial_x + i\rho)^2 \square_\omega \right) \Psi(\omega, x) = 0, \quad (0.5)$$

em que $\Psi(\omega, x) = \int d^4\eta \, e^{i\eta \cdot \omega} \delta'(\eta^2) \Psi(\eta, x)$ é a transformada de Fourier de $\Psi(\eta, x)$ na coordenada η em $\eta^2 = 0$ e sua primeira vizinhança. Para $\rho = 0$, a solução polinomial de (0.5), $\Psi(\omega, x) = \phi(x) + \omega^\mu A_\mu(x) + \frac{1}{2} \omega^\mu \omega^\nu h_{\mu\nu}(x) + \dots$, recupera as equações de Fronsda para partículas de altos spins [34].

A quantização canônica de (0.3) pode ser efetuada com o uso método de Dirac [40], mostrando que, portanto, existe uma teoria de campo para CSPs que pode ser quantizada. Apesar destes resultados positivos, a ação (0.3) contém uma característica indesejável: o campo $\Psi(\eta, x)$ propaga um contínuo de CSPs, isto é, este campo carrega todos os possíveis valores do parâmetro ρ (veja a Tabela 1), tornando problemático o acoplamento deste campo a uma corrente externa no limite $\rho \rightarrow 0$.¹⁰ Para resolver este problema, Schuster & Toro propuseram uma outra ação [41],

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \, d^4\eta \, \delta'(\eta^2 + 1) \left[(\partial_x \Psi)^2 - \frac{1}{2} (\eta^2 + 1) (\Delta \Psi)^2 \right], \quad (0.6)$$

a qual é invariante sob as transformações

$$\delta_\epsilon \Psi(\eta, x) = \left(\eta \cdot \partial_x - \frac{1}{2} (\eta^2 + 1) \Delta \right) \epsilon(\eta, x), \quad (0.7a)$$

$$\delta_\chi \Psi(\eta, x) = (\eta^2 + 1)^2 \chi(\eta, x), \quad (0.7b)$$

onde $\epsilon(\eta, x)$ e $\chi(\eta, x)$ são funções arbitrárias. Schuster & Toro assumiram que o campo Ψ tem dependência analítica na coordenada η de modo que ele pode ser expandido em termos de tensores simétricos e sem traço como¹¹

$$\Psi(\eta, x) = \sum_n \frac{1}{n!} \eta^{\mu_1} \dots \eta^{\mu_n} \psi_{\mu_1 \dots \mu_n}(x). \quad (0.8)$$

A formulação da teoria para CSPs dada por (0.6)-(0.8) apresenta duas vantagens importantes em relação à formulação anteriormente descrita: (i) a teoria descreve uma única CSP e (ii) no limite $\rho \rightarrow 0$, (0.6) faz contato direto com a teoria de altos spins sem a necessidade de efetuar transformadas de Fourier para o campo Ψ . Em adição, a análise feita por Rivelles em [44, 45] mostrou que (i) os parâmetros $\epsilon(\eta, x)$ e $\chi(\eta, x)$ também possuem uma simetria local e (ii) $\Psi(\eta, x)$ propaga uma única CSP no hiperbolóide $\eta^2 + 1 = 0$ e sua primeira vizinhança.

O leitor pode encontrar na referência [7] mais comentários sobre a teoria das partículas de spin contínuo feitos recentemente e, em [46], a análise da teoria de campo que descreve férmions de spin contínuo.

¹⁰Mais especificamente, os autores de [39] obtiveram a Hamiltoniana

$$H_{\text{livre}} = \int \frac{d^3p}{|\vec{p}|} \frac{d\rho}{\rho} \frac{d\phi}{2\pi} |\vec{p}| a_{\vec{p}, \rho, \phi}^\dagger a_{\vec{p}, \rho, \phi},$$

onde $|\vec{p}, \phi\rangle = a_{\vec{p}, \rho, \phi}^\dagger |0\rangle$ define o operador de criação para o estado físico que representa a CSP com momento \vec{p} e parâmetro ϕ (que será apresentado em detalhes na Subseção 3.4.2). Esta Hamiltoniana caracteriza uma teoria para CSPs com todos os possíveis valores de $\rho \geq 0$.

¹¹Uma decomposição similar a (0.8) pode ser encontrada em [42, 43] no contexto da teoria de altos spins em espaços AdS.

O conteúdo desta dissertação é como segue: os dois primeiros capítulos trazem uma breve revisão sobre os principais ingredientes necessários aos capítulos subsequentes sobre a teoria de grupos e representações, com ênfase nos grupos de Lorentz e Poincaré. No Capítulo 3, é feita uma análise sistemática sobre as possíveis representações unitárias do grupo de Poincaré, dentre as quais, a representação de spin contínuo e taquiônica, temas centrais desta dissertação. Estes capítulos têm por base as referências [2, 3, 16, 38, 47–52] além das notas de aula [53]. O Capítulo 4 trata da descoberta feita por Schuster & Toro a respeito da existência de amplitudes de emissão soft para CSPs [16] construídas a partir de equações de onda covariantes. A teoria de campo para táquions de spin contínuo é introduzida no Capítulo 5, onde são analisadas as simetrias da ação apresentada e, com o cálculo dos autovalores dos operadores de Casimir *on-shell*, verifica-se que, de fato, a ação descreve táquions de spin contínuo. Em adição, estudamos os graus de liberdade físicos que o campo taquiônico carrega e, em seguida, discutimos o vértice cúbico com um táquion de spin contínuo e dois campos escalares massivos. No limite de massa nula, obtemos o vértice com uma CSP e dois campos escalares massivos obtidos pelos autores de [54] com o uso de correntes de Berends-Burgers-van Dam [55]. Por fim, no Capítulo 6 fazemos uma análise do vértice cúbico que contém uma CSP e verificamos suas propriedades no espaço de Minkowski e Euclideo. Terminamos com nossas conclusões e perspectivas futuras.

1 Teoria de Grupos

Neste capítulo apresentamos uma breve revisão sobre alguns tópicos de teoria de grupos que serão úteis em capítulos subsequentes, trazendo à luz principalmente a teoria dos grupos de Lie e álgebras de Lie.

1.1 Conceitos Básicos

Seja G um conjunto não vazio. Diz-se que G é um *grupo* se satisfaz as seguintes propriedades:

- Para quaisquer $x, y \in G$, $x \cdot y \in G$, ou seja, em G é definido um produto;
- Para quaisquer $x, y, z \in G$ tem-se $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, ou seja, o produto em G é *associativo*;
- G contém um elemento E , denominado *identidade* do grupo, tal que $E \cdot x = x \cdot E = x$, para qualquer $x \in G$;
- Para cada elemento $x \in G$, existe um único elemento $x^{-1} \in G$ tal que $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = E$. x^{-1} é denominado *inverso* de x .

Se para quaisquer $x, y \in G$, $x \cdot y = y \cdot x$, diz-se que G é um *grupo Abelian*. Caso contrário, G é um grupo não-Abelian.

Qualquer subconjunto de G que possui as propriedades acima listadas é dito ser um *subgrupo* de G .

1.1.1 Classes de Equivalência, Cosets e Subgrupos Normais

Seja A um conjunto não vazio. Define-se uma *relação de equivalência* em A a relação¹² que satisfaz as seguintes propriedades:

- $x \sim x$, $\forall x \in A$ (reflexividade);
- $\forall x, y \in A$, se $x \sim y$ então $y \sim x$ (simetria);
- $\forall x, y, z \in A$, se $x \sim y$ e $y \sim z$ então $x \sim z$ (transitiva).

Uma *classe de equivalência* em A é descrita por todos os elementos neste conjunto que são equivalentes a um dado elemento. Denota-se $[x] = \{y \in A; x \sim y, x \in A\}$. Dados x e y elementos de A , tem-se duas possibilidades: ou $x \sim y \Rightarrow [x] = [y]$ ou $x \not\sim y \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$, ou seja, o conjunto A pode ser "fatorado" em classes de equivalência mutuamente disjuntas. O conjunto de todas as classes de equivalência do conjunto A é denotado por $A/\sim = \{[x], x \in A\}$ e recebe o nome de *espaço quociente*.

Um exemplo importante de relação de equivalência que será útil em futuras discussões deste trabalho é a que define *cosets*. Seja G um grupo e H um subgrupo. A relação $g \sim g' \Leftrightarrow \forall g, g' \in G, \exists h \in H; g' = g \cdot h$ define em G uma relação de equivalência cuja classe de equivalência lê-se $[g] = \{g \cdot h; h \in H\} := g \cdot H$, denominada *coset à esquerda*, e cujo espaço quociente denota-se $(G/H)_l$. Analogamente, $[g] = \{h \cdot g; h \in H\} := H \cdot g$ define o *coset à direita* cujo espaço quociente é denotado por $(G/H)_r$. No que segue, introduz-se a noção de subgrupo normal (ou invariante) que servirá para relacionar cosets à direita e esquerda.

¹²Relação em um conjunto não vazio A é definido como um subconjunto de $A \times A = \{(x, y); x, y \in A\}$.

Seja G um grupo e H um subgrupo. Diz-se que H é um *subgrupo normal* (invariante) de G se, $\forall h \in H$, $g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$, $\forall g \in G$. Notação: $H \triangleleft G$ ou $G \triangleright H$. Uma importante consequência desta definição está na seguinte proposição: $(G/H)_l = (G/H)_r \equiv G/H$ se $H \triangleleft G$. A demonstração desta proposição pode ser encontrada, por exemplo, em [38]. Definindo o produto em G/H segundo $[a] \cdot [b] \equiv [a \cdot b]$, $\forall [a], [b] \in G/H$, o espaço quociente torna-se um grupo intitulado *grupo quociente*. Este grupo será importante quando for analisado o grupo de Lorentz e o grupo de Poincaré.

1.1.2 Homomorfismo

Seja G e H dois grupos. O mapa $\varphi : G \rightarrow H$ é um *homomorfismo* se $\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2)$, $\forall g_1, g_2 \in G$. Um homomorfismo que é *bijetivo* é chamado *isomorfismo* cuja inversa também é um isomorfismo. Este conceito permite que seja definido outra relação de equivalência em grupos: G e H são equivalentes se existe um isomorfismo φ entre eles. Neste caso, diz-se que G é *isomorfo* a H : $G \simeq H$.

1.1.3 Produto Direto e Semidireto

É recorrente que alguns grupos mais complexos possam ser decompostos em grupos com estrutura mais simples. Conforme será abordado em breve, o grupo Euclidiano e o grupo de Poincaré têm este perfil. Para entender como esta simplificação funciona, introduz-se, a seguir, a noção de produto direto e semidireto de grupos.

Seja G_1 e G_2 dois grupos com E_{G_1} e E_{G_2} seus elementos identidades, respectivamente. O conjunto $G = G_1 \times G_2 \equiv \{(g_1, g_2); g_1 \in G_1 \text{ e } g_2 \in G_2\}$ constitui um grupo cujo produto é definido como $(g_1, g_2) \cdot (g'_1, g'_2) = (g_1 \cdot g'_1, g_2 \cdot g'_2)$, designado *produto direto* de G_1 e G_2 . Este produto é associativo, o elemento identidade de G é $E_G = (E_{G_1}, E_{G_2})$ e cada elemento $(g_1, g_2) \in G$ tem uma inversa dada por $(g_1, g_2)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1})$.

Um importante resultado relacionado a esta definição e que será utilizado no Capítulo 3 é apresentado a seguir. Antes, porém, faz-se necessário o uso do seguinte Lema:

Lema 1.1. *Seja G e H grupos com elementos identidades E_G e E_H , respectivamente. Então, tem-se que $\tilde{H} = \{(E_G, h); h \in H\} \triangleleft G \times H$ e $\tilde{H} \simeq H$.*

Demonstração. Primeiramente, veja que \tilde{H} é um subgrupo de $G \times H$. Ademais, é um subgrupo normal, já que, $\forall (E_G, \tilde{h}) \in \tilde{H}$, tem-se $(g, h) \cdot (E_G, \tilde{h}) \cdot (g, h)^{-1} = (g \cdot E_G \cdot g^{-1}, h \cdot \tilde{h} \cdot h^{-1}) = (E_G, h \cdot \tilde{h} \cdot h^{-1}) \in \tilde{H}$, $\forall (g, h) \in G \times H$. Em adição, o mapa $f : \tilde{H} \rightarrow H$, $f((E_G, h)) = h$ define um isomorfismo entre H e \tilde{H} . ■

Teorema 1.1. *Seja G e H grupos em que seus elementos identidades são E_G e E_H , respectivamente. Se $\tilde{H} = \{(E_G, h); h \in H\}$, então $\frac{G \times H}{\tilde{H}} \simeq G$.*

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned} f : \frac{G \times H}{\tilde{H}} &\rightarrow \tilde{G} \simeq G \\ [(g, h)] &\xrightarrow{f} (g, E_H) \end{aligned} \quad (1.1)$$

(i) Em primeiro lugar, é preciso verificar se este mapa está bem definido. Supondo $[(g_1, h_1)] = [(g_2, h_2)]$, temos $(g_1, h_1) \sim (g_2, h_2) \Rightarrow \exists (E_G, \tilde{h}) \in \tilde{H}; (g_1, h_1) = (E_G, \tilde{h}) \cdot (g_2, h_2) = (g_2, \tilde{h} \cdot h_2) \Rightarrow g_1 = g_2$ e $h_1 = \tilde{h} \cdot h_2$. Logo, $f([(g_1, h_1)]) = (g_1, E_H) = (g_2, E_H) = f([(g_2, h_2)])$. (ii) f é um homomorfismo, porque

$f([(g_1, h_1)] \cdot [(g_2, h_2)]) = f([(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2)]) = f([(g_1 \cdot g_2, h_1 \cdot h_2)]) = (g_1 \cdot g_2, E_H) = (g_1, E_H) \cdot (g_2, E_H)$. (iii) Também, observe que f é um homomorfismo injetor. Para provar esta afirmação, suponha que $f([(g_1, h_1)]) = f([(g_2, h_2)])$. Então, $(g_1, E_H) = (g_2, E_H)$. Mas $(g_1, E_H) \sim (g_1, h_1)$ assim como $(g_2, E_H) \sim (g_2, h_2)$, porque $\exists (E_G, h) \in \tilde{H}; (g_i, h_i) = (E_G, h_i) \cdot (g_i, E_H), \forall i = 1, 2$. Portanto $(g_1, h_1) \sim (g_1, E_H) = (g_2, E_H) \sim (g_2, h_2)$, ou seja, $[(g_1, h_1)] = [(g_2, h_2)]$. (iv) Por fim, veja que f é um homomorfismo sobrejetor porque, se $(g, E_H) \in \tilde{G}$, então $\exists [(g, h)] \in G \times H/\tilde{H}$ dado por $[(g, h)] = [(g, E_H)]$ de modo que $f([(g, h)]) = (g, E_H)$. Logo, $\frac{G \times H}{\tilde{H}} \simeq \tilde{G} \simeq G \Rightarrow \frac{G \times H}{\tilde{H}} \simeq G$. ■

Seja G_1 e G_2 grupos com E_{G_1} e E_{G_2} seus respectivos elementos identidades. Então, $G = G_1 \circledast G_2 \equiv \{(g_1, g_2); g_1 \in G_1 \text{ e } g_2 \in G_2\}$ é um grupo cujo produto é definido por

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 \cdot \alpha_{g_1}(h_2)), \quad (1.2)$$

em que $\alpha_g : H \rightarrow H, g \in G$, é um *automorfismo*¹³ cuja inversa lê-se $\alpha_g^{-1}(\cdot) = \alpha_{g^{-1}}(\cdot)$. Neste caso, diz-se que G é o *produto semidireto* de G_1 e G_2 . Este produto é associativo, o elemento identidade de G é $E_G = (E_{G_1}, E_{G_2})$ e cada elemento $(g_1, g_2) \in G$ tem uma inversa dada por $(g_1, g_2)^{-1} = (g_1^{-1}, \alpha_{g_1^{-1}}(g_2^{-1}))$.

Os resultados apresentados no Lema 1.1 e Teorema 1.1 permanecem válidos para produtos semidiretos de grupos. A demonstração é bastante similar com a apresentada acima, portanto, não será feita aqui.

1.2 Representações de Grupos

Seja V um espaço vetorial¹⁴ no qual o operador $U \in \mathcal{L}(V) = \{\text{Conjunto de todos os operadores lineares inversíveis sobre } V\}$ ¹⁵ age e G um grupo. Diz-se que U é uma *representação* de G em V se o mapa

$$U : G \rightarrow \mathcal{L}(V) \quad (1.3a)$$

$$g \mapsto U(g) \quad (1.3b)$$

for um homomorfismo, isto é, $U(g_1 \cdot g_2) = U(g_1) \cdot U(g_2), \forall g_1, g_2 \in G$. A *dimensão* da representação é definida como a dimensão do espaço vetorial V e, se o homomorfismo for bijetivo, então a representação é dita ser *fiel*, caso contrário, é dita ser *degenerada*.

1.2.1 Representações Irredutíveis

Seja G um grupo e $U(g) \in \mathcal{L}(V), \forall g \in G$ uma representação de G sobre um espaço vetorial de dimensão finita V . Se $\{|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ é uma base em V , então

$$U(g) |e_i\rangle = |e_j\rangle D(g)^j_i, \quad (1.4)$$

onde $D(g)$ é denominado uma *representação matricial* de G em V .¹⁶ Suponha que V_1 seja um subespaço de V gerado por $\{|e_i\rangle, i = 1, \dots, n_1 < n\}$. Diz-se que V_1 é um *subespaço invariante* se $\forall |x\rangle = \alpha^i |e_i\rangle \in V_1$,

$$U(g) |x\rangle = \alpha^i |e_j\rangle D(g)^j_i \in V_1. \quad (1.5)$$

¹³Automorfismo é um isomorfismo de um grupo nele mesmo.

¹⁴A menos que seja dito o contrário, admite-se que o espaço vetorial seja definido sobre o corpo dos números complexos \mathbb{C} .

¹⁵Quando o espaço vetorial em questão é de dimensão *finita*, digamos de dimensão n , pode-se identificar $\mathcal{L}(V)$ como o conjunto das matrizes inversíveis de dimensão n com entradas complexas, denotado por $GL(\mathbb{C}, n)$ (*General Linear group*).

¹⁶Ao longo desta dissertação, será adotado a convenção de Einstein onde o símbolo de somatório é omitido.

Observe que (1.5) implica que $D(g)^j_i = 0, \forall j = n_1 + 1, \dots, n$, já que $V_1 = \text{span}\{|e_1\rangle, \dots, |e_{n_1}\rangle\}$. Portanto, pode-se escrever $D(g)$ como

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & D'(g) \\ \mathbf{0} & D_2(g) \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

em que $D_1(g)$ é a representação matricial de G que age apenas em V_1 de ordem $n_1 \times n_1$, enquanto que $D'(g)$ é de ordem $n_1 \times n - n_1$ e, $D_2(g)$, $n - n_1 \times n - n_1$. Assim, diz-se que $D(g)$ é *reduzível* devido à existência de um subespaço invariante não-trivial V_1 .¹⁷ Caso contrário, se não há subespaço invariantes não-triviais, a representação é dita ser *irreduzível*. Se o subespaço complementar $V \supset V_2 = \text{span}\{|e_{n_1+1}\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ é também um subespaço invariante, então $D'(g) = 0$, ou seja,

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Neste caso, se V_1 e V_2 não possuem subespaço invariante não-trivial, então $D(g)$ é dita ser *completamente reduzível* e pode ser escrita como o produto direto de duas representações irreduzíveis: $D(g) = D_1(g) \times D_2(g)$.

Para finalizar esta subseção, apresenta-se, a seguir, um importante resultado que será utilizado para classificar representações irreduzíveis de alguns grupos contínuos a serem estudados neste trabalho. Por ser um resultado conhecido, não será apresentada a demonstração dele. O leitor pode encontrar na referência [53], Capítulo 23, uma demonstração deste resultado.

Teorema 1.2 (Lema de Schur). *Sejam $U_1 : G \rightarrow \mathcal{L}(V_1)$ e $U_2 : G \rightarrow \mathcal{L}(V_2)$ duas representações irreduzíveis de um grupo G sobre os espaços vetoriais V_1 e V_2 , respectivamente. Se o mapa $A : V_1 \rightarrow V_2$ satisfaz $AU_1(g) = U_2(g)A, \forall g \in G$, então ou $A = 0$ ou A é bijetivo.*

Corolário 1.2.1. *Seja $U_1 : G \rightarrow \mathcal{L}(V_1)$ e $U_2 : G \rightarrow \mathcal{L}(V_2)$ duas representações irreduzíveis de um grupo G sobre os espaços vetoriais V_1 e V_2 , respectivamente. Se o mapa $A : V_1 \rightarrow V_2$ é bijetivo e $AU_1(g) = U_2(g)A, \forall g \in G$, então A é único, a menos de uma multiplicação por um escalar.*

Sob as hipóteses do Lema de Schur, vê-se, trivialmente, que o operador identidade $\mathbb{1}$ satisfaz $\mathbb{1}U_1(g) = U_2(g)\mathbb{1}, \forall g \in G$, logo, com o uso do Corolário 1.2.1, tem-se $A \propto \mathbb{1}$. **Operadores de Casimir**, usados para classificar representações irreduzíveis, têm esta propriedade.

1.2.2 Representações Unitárias

Seja G um grupo e $U : G \ni g \mapsto U(g) \in \mathcal{L}(V)$ uma representação de G sobre um espaço vetorial V dotado de um produto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Se $U(g)$ é unitário, ou seja

$$\langle x | U^\dagger(g)U(g) | y \rangle = \langle x | y \rangle, \forall g \in G, \forall |x\rangle, |y\rangle \in V, \quad (1.8)$$

então diz-se que $U : G \rightarrow \mathcal{L}(V)$ é uma *representação unitária*.

¹⁷Neste exemplo, o espaço vetorial V e o espaço vetorial constituído apenas por seu elemento nulo $\mathbf{0}$ ($v + \mathbf{0} = v$, qualquer que seja o vetor v) são denominados subespaços invariantes triviais de V .

1.3 Grupos de Lie e Álgebras de Lie

Grupos que são definidos através de parâmetros contínuos permitem o uso de noções de diferenciabilidade e continuidade assim como funções ordinárias. *Grupos de Lie* têm esta característica. No que segue, discutiremos suas principais propriedades.

Seja $G = \{E, U(\alpha)\}$ um grupo de Lie parametrizado por n parâmetros reais contínuos $\alpha \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $E \equiv U(0)$ seu elemento identidade. Dado $\epsilon = \lim_{N \rightarrow \infty} \alpha/N$, $U(\epsilon)$ pode ser escrito infinitesimalmente próximo à identidade E como

$$U(\epsilon) = E - i\epsilon^a T_a + O((\epsilon^a)^2), \quad 0 < \epsilon_a \ll 1, \quad \forall a = 1, \dots, n, \quad (1.9)$$

onde $i^2 = -1$ e cada T_a é denominado *gerador* do grupo. Observe que T_a , $1 \leq a \leq n$, são *operadores hermitianos* se $U(\epsilon)$ for unitário:

$$U^\dagger(\epsilon)U(\epsilon) = E + i\epsilon^a T_a^\dagger - i\epsilon^b T_b + O(\epsilon^a \epsilon^b) = E \Leftrightarrow T_a^\dagger = T_a, \quad \forall a = 1, \dots, n. \quad (1.10)$$

N transformações infinitesimais sucessivas são implementadas por $U(N\epsilon) = [U(\epsilon)]^N$, de modo que, no limite em que $N \rightarrow \infty$, qualquer transformação finita é implementada por

$$U(\alpha) = e^{-i\alpha^a T_a}. \quad (1.11)$$

Esta particular expressão para qualquer elemento de um grupo de Lie implica em um vínculo entre seus geradores. Para encontrá-lo, faz-se necessário o uso da **fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff**: se X e Y são operadores, então

$$\begin{aligned} e^X e^Y &= e^{X \star Y}, \\ X \star Y &\equiv X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

em que $[X, Y] = XY - YX$ e \dots indica termos envolvendo comutadores de alta ordem entre X e Y , por exemplo, $[X, [X, Y]]$ etc. Assim, tomando dois elementos arbitrários de G , o produto entre eles também está em G , de modo que

$$\begin{aligned} G \ni U(\gamma) = \exp\{-i\gamma^c T_c\} = U(\alpha)U(\beta) &= e^{-i\alpha^a T_a} e^{-i\beta^b T_b} \\ &= \exp\left\{-i\alpha^a T_a - i\beta^b T_b + \frac{1}{2}(-i)^2 \alpha^a \beta^b [T_a, T_b] + \dots\right\} \\ &\Leftrightarrow \alpha^a \beta^b [T_a, T_b] = 2i(\gamma^c - \alpha^c - \beta^c) T_c, \quad \forall \alpha^a, \beta^b, \gamma^c \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Reescrevendo $2(\gamma^c - \alpha^c - \beta^c) = f_{ab}^c \alpha^a \beta^b$, $f_{ab}^c \in \mathbb{R}$, obtém-se

$$[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c, \quad (1.14)$$

f_{ab}^c são denominadas *constantes de estrutura* e satisfazem a relação $f_{ab}^c + f_{ba}^c = 0$. Note que a operação $[\cdot, \cdot]$ define um produto sobre o espaço vetorial $(T_a, +, \mathbb{C})$, $1 \leq a \leq n$, com as seguintes propriedades:

- $[T_a + T_b, T_c] = [T_a, T_c] + [T_b, T_c]$
- $[T_a, T_b + T_c] = [T_a, T_b] + [T_a, T_c]$
- $\alpha [T_a, T_b] = [\alpha T_a, T_b] = [T_a, \alpha T_b]$

- $[T_a, T_b] = -[T_b, T_a]$
- $[[T_a, T_b], T_c] + [[T_c, T_a], T_b] + [[T_b, T_c], T_a] = 0$

$\forall a, b, c = 1, \dots, n$ e $\forall \alpha \in \mathbb{C}$. As três primeiras propriedades acima caracterizam uma *álgebra* sobre o espaço vetorial $(T_a, +, \mathbb{C})$. Em adição, as duas últimas propriedades caracterizam esta álgebra como uma *álgebra de Lie*, denotada por $(T_a, +, \mathbb{C}; [\cdot, \cdot])$, ou seja, um espaço vetorial dotado com o produto $[\cdot, \cdot]$.

No que segue, revisa-se um importante exemplo que será utilizado nesta dissertação.

1.3.1 SO(3)

Seja $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ cujas coordenadas são $(x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3)$ em um sistema de coordenadas S . Em um sistema de coordenadas S' , $\vec{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ que é obtido a partir de \vec{x} através da matriz R : $\vec{x}' = R\vec{x}$. Embora estes vetores tenham coordenadas diferentes, em ambos os sistemas S e S' seus comprimentos são iguais. Isto significa que a matriz R é uma matriz ortogonal:

$$|\vec{x}'|^2 = |\vec{x}|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{R^T R = R R^T = \mathbb{1}}, \quad (1.15)$$

em que R^T é a matriz transposta de R e $\mathbb{1} = \text{diag}(1, 1, 1)$ é a matriz identidade. O conjunto $O(3) = \{R \in GL(\mathbb{R}, 3); R^T R = R R^T = \mathbb{1}\}$ é um grupo, intitulado *grupo ortogonal*, cujo produto é a multiplicação usual de matrizes.

A relação (1.15) implica que $\det R = \pm 1$ de modo que pode-se dividir o grupo $O(3)$ em duas partes:

$$O(3) = \{R \in GL(\mathbb{R}, 3); R^T R = \mathbb{1} \text{ e } \det R = 1\} \cup \{R \in GL(\mathbb{R}, 3); R^T R = \mathbb{1} \text{ e } \det R = -1\}, \quad (1.16)$$

em que apenas o primeiro conjunto do lado direito da igualdade acima constitui um subgrupo de $O(3)$, chamado *grupo ortogonal especial* $SO(3)$ enquanto que o segundo conjunto não é, já que este não contém o elemento identidade do grupo $O(3)$.

Veja que a relação $R^T R = \mathbb{1}$ impõe seis equações algébricas independentes nas nove entradas de R . Isto significa que cada matriz $R \in SO(3)$ tem, no total, apenas três parâmetros independentes. Seja $\vec{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ os parâmetros contínuos de R . Porque R é um elemento do grupo de Lie $SO(3)$, pode-se escrever

$$R(\vec{\alpha}) = e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{L}} \quad (1.17)$$

em que $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$ é o gerador de $SO(3)$. Considerando $\vec{\alpha} = (0, 0, \alpha)$, tem-se que

$$SO(3) \ni [R_3(\alpha)]^T = \begin{pmatrix} R_{11}(\alpha) & R_{12}(\alpha) & 0 \\ R_{21}(\alpha) & R_{22}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \stackrel{(1.15)}{=} \begin{pmatrix} R_{22}(\alpha) & -R_{12}(\alpha) & 0 \\ -R_{21}(\alpha) & R_{11}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_3^{-1}(\alpha),$$

ou seja, $R_{11}(\alpha) = R_{22}(\alpha)$ e $R_{12}(\alpha) = -R_{21}(\alpha)$. Levando em conta $\det R(\alpha) = 1$, tem-se que $[R_{11}(\alpha)]^2 + [R_{12}(\alpha)]^2 = 1$, portanto, pode-se escolher $R_{11}(\alpha) = \cos \alpha$ e $R_{12}(\alpha) = -\sin \alpha$, de modo que

$$R_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

que é a matriz de rotação no plano xy pelo ângulo α . Tomando uma rotação infinitesimal, $\alpha \rightarrow \delta\alpha$, (1.18) pode ser escrita da seguinte forma

$$R_3(\delta\alpha) \approx \begin{pmatrix} 1 & -\delta\alpha & 0 \\ \delta\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - i\delta\alpha \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{1} - i\delta\alpha L_3,$$

em que

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

é o correspondente gerador. Usando $L_3^2 = \text{diag}(1, 1, 0)$, é possível verificar a validade de (1.17), ou seja, qualquer rotação finita ao longo do eixo z com ângulo α pode ser escrita através da exponenciação do gerador L_3 : $R_3(\alpha) = e^{-i\alpha L_3}$. Uma análise similar pode ser feita separadamente para rotações ao longo dos eixos x e y . Seguem os respectivos resultados:

$$\begin{aligned} R_1(\alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} & \leftrightarrow & L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\ R_2(\alpha) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} & \leftrightarrow & L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Estes geradores podem ser escritos de maneira compacta através do uso do símbolo de Levi-Civita:¹⁸

$$(L_k)_{jl} = -i\epsilon_{kjl}, \quad (1.21)$$

em que k rotula o gerador enquanto que, os outros dois índices, identificam as entradas da matriz. A partir desta relação, pode-se determinar diretamente a álgebra de Lie do grupo $\text{SO}(3)$:

$$\begin{aligned} [L_m, L_n]_{kl} &= \sum_{r=1}^3 (L_m)_{kr}(L_n)_{rl} - \sum_{r=1}^3 (L_n)_{kr}(L_m)_{rl} \stackrel{(1.21)}{=} (-1)(-i)^2 \sum_{r=1}^3 \epsilon_{mkr}\epsilon_{nlr} - (-1)(-i)^2 \sum_{r=1}^3 \epsilon_{nkr}\epsilon_{mlr} \\ &= (\delta_{mn}\delta_{kl} - \delta_{ml}\delta_{kn}) - (\delta_{nm}\delta_{kl} - \delta_{nl}\delta_{km}) \\ &= \delta_{nl}\delta_{km} - \delta_{ml}\delta_{kn} \\ &= \sum_{r=1}^3 \epsilon_{nmr}\epsilon_{lkr} \stackrel{(1.21)}{=} i \sum_{r=1}^3 \epsilon_{mnr}(L_r)_{kl} \\ \therefore [L_m, L_n] &= i \sum_{r=1}^3 \epsilon_{mnr} L_r, \end{aligned} \quad (1.22)$$

de modo que as constantes de estrutura da álgebra são (1.14) $f_{abc} = \epsilon_{abc}$. Duas importantes consequências da relação (1.22) merecem destaque. A primeira diz que cada L_i se transforma como um vetor sob rotações:

$$R(L_s)R^{-1} = (L_i)R^i_{\ s}, \quad (1.23)$$

¹⁸ $\epsilon_{ijk} = 1(-1)$, $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ se (i, j, k) é uma permutação par (ímpar) de $(1, 2, 3)$ ou $\epsilon_{ijk} = 0$ se dois ou mais índices forem iguais.

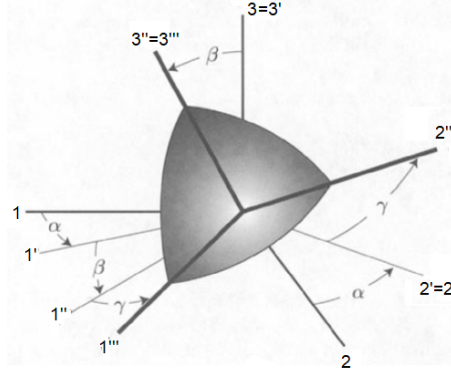


Figura 1.1: Os ângulos de Euler. Figura adaptada de [3], pp. 304.

por isso, $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$ é um *operador vetorial*. A segunda consequência define o **operador de Casimir** do grupo $SO(3)$:

$$[\vec{L}^2, L_j] = 0, \quad (1.24)$$

de modo que L^2 comuta com qualquer elemento de $SO(3)$. Assim, pelo Lema de Schur 1.2, L^2 é proporcional à identidade quando agir sobre representações irredutíveis do grupo $SO(3)$. Isto será confirmado em breve.

A maneira mais geral de parametrizar rotações é seguindo os seguintes passos: (i) especifique a direção pela qual a rotação será feita, digamos $\hat{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, em que θ e ϕ são os ângulos polar e azimutal, respectivamente, e (ii) explicita o ângulo de rotação, digamos ω .¹⁹ Assim, tem-se que

$$SO(3) \ni R_{\hat{n}}(\omega) = e^{-i\omega \hat{n} \cdot \vec{L}}. \quad (1.25)$$

Sob $SO(3)$, (1.25) se transforma de acordo com

$$R R_{\hat{n}}(\omega) R^{-1} = R_{\hat{n}'}(\omega), \quad \hat{n}' = R \hat{n}, \quad (1.26)$$

em que foi utilizado $R \exp \left\{ -i\omega \hat{n} \cdot \vec{L} \right\} R^{-1} = \exp \left\{ -i\omega \hat{n}' \cdot \left(R \vec{L} R^{-1} \right) \right\}$ e a propriedade (1.23).

Para descrever as representações unitárias e irredutíveis de $SO(3)$, é necessário introduzir outros três parâmetros, conhecidos como **ângulos de Euler**. A Figura 1.1 mostra como qualquer rotação pode ser descrita a partir destes três parâmetros: $(1, 2, 3) \xrightarrow{R_3(\alpha)} (1', 2', 3' = 3) \xrightarrow{R_{2'}(\beta)} (1'', 2'' = 2', 3'') \xrightarrow{R_{3''}(\gamma)} (1''', 2''' = 2'', 3''' = 3'')$:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_{3''}(\gamma) R_{2'}(\beta) R_3(\alpha),$$

de modo que, pelo uso da propriedade (1.26), obtém-se

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_3(\alpha) R_2(\beta) R_3(\gamma), \quad (1.27)$$

em que $\alpha \in [0, 2\pi)$ é o ângulo de precessão, $\beta \in [0, \pi)$ é o ângulo de nutação e $\gamma \in [0, 2\pi)$ é o ângulo de rotação intrínseca ("spin"), enquanto que $R_i(\cdot)$, $i = 1, 2, 3$ é o ângulo de rotação ao longo do i -ésimo eixo conforme (1.18) e (1.20).

O próximo passo é a construção do espaço vetorial onde uma dada representação do grupo $SO(3)$ age. Porque L^2 e L_3 são ambos hermitianos e compatíveis, escolhe-se os autovetores em comum a ambos como base deste

¹⁹Na descrição do grupo de Lorentz a ser feita no capítulo seguinte, faremos uso desta parametrização do grupo $SO(3)$.

espaço. Este é um procedimento bastante conhecido e, de certa forma, será utilizado no contexto das representações de dimensão infinita do grupo de Poincaré. Por isso, no que segue, serão apresentados apenas os resultados finais. O leitor interessado nos detalhes pode consultar, por exemplo, [3].

O espaço vetorial em questão é de dimensão finita e é rotulado por dois números: $|l, m\rangle$:

$$\begin{aligned} \tilde{L}^2 |l, m\rangle &= l(l+1) |l, m\rangle \\ L_3 |l, m\rangle &= m |l, m\rangle \\ L_{\pm} |l, m\rangle &= \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} |l, m \pm 1\rangle \end{aligned} \quad , \quad l = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \text{ e } m = -l, -l+1, \dots, l-1, l, \quad (1.28)$$

em que $L_{\pm} \equiv L_1 \pm iL_2$.

Seja $U(R(\alpha, \beta, \gamma))$ uma representação do grupo $SO(3)$ sobre $V = \{|l, m\rangle, l = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \text{ e } m = -l, -l+1, \dots, l-1, l\}$. Então, pelo uso das relações (1.4) e (1.27), obtém-se

$$U(R(\alpha, \beta, \gamma)) |l, m\rangle = \sum_{m'=-l}^l D^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma)_{mm'} |l, m'\rangle, \quad (1.29)$$

com

$$\begin{aligned} D^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma)_{mm'} &= \langle l, m' | U(R(\alpha, \beta, \gamma)) |l, m\rangle \stackrel{(1.27)}{=} \langle l, m' | U(R_3(\alpha)R_2(\beta)R_3(\gamma)) |l, m\rangle \\ &= \langle l, m' | U(R_3(\alpha)) U(R_2(\beta)) U(R_3(\gamma)) |l, m\rangle \\ &= \langle l, m' | e^{-i\alpha L_3} e^{-i\beta L_2} e^{-i\gamma L_3} |l, m\rangle \\ &\stackrel{(1.28)}{=} e^{-im'\alpha} d_{mm'}^{(l)}(\beta) e^{-im\gamma}, \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{aligned} D^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma)_{mm'} &= e^{-im'\alpha} d_{mm'}^{(l)}(\beta) e^{-im\gamma} \\ d_{mm'}^{(l)}(\beta) &= \langle l, m' | e^{-i\beta L_2} |l, m\rangle, \end{aligned} \quad (1.30)$$

o que leva a

$$U(R(\alpha, \beta, \gamma)) |l, m\rangle = e^{-im\gamma} \sum_{m'=-l}^l d_{mm'}^{(l)}(\beta) e^{-im'\alpha} |l, m'\rangle, \quad (1.31)$$

com

$$\begin{aligned} d_{mm'}^{(l)}(\beta) &= (-1)^{m-m'} \sqrt{\frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+m')!(l-m')!}} f(\beta) \\ f(\beta) &= \left(\cos \frac{1}{2}\beta\right)^{2l} \sum_a (-1)^a \binom{l+m'}{a} \binom{l-m'}{l-m-a} \left(\tan \frac{1}{2}\beta\right)^{m-m'+2a}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

1.3.2 Spin

Sobre o campo escalar $\langle \vec{x} | l, m \rangle = \psi_{lm}(\vec{x})$, $SO(3)$ age como: (no que segue, utiliza-se a definição de campo escalar $\psi'_{lm}(\vec{x}') = \psi_{lm}(\vec{x})$)

$$\psi_{lm}(\vec{x}) \rightarrow \psi'_{lm}(\vec{x}) = U(R_{\hat{n}}(\omega)) \psi_{lm}(\vec{x}) = \psi_{lm}(R_{\hat{n}}^{-1}(\omega) \vec{x}). \quad (1.33)$$

Tomando ω infinitesimal, (1.33) torna-se

$$\begin{aligned} U(R_{\hat{n}}(\delta\omega)) \psi_{lm}(\vec{x}) &\stackrel{(1.25)}{=} \left(1 - i\delta\omega \hat{n} \cdot \vec{L} + O(\delta\omega^2)\right) \psi_{lm}(\vec{x}) \stackrel{(1.33)}{=} \psi_{lm}(\vec{x} - \delta\omega \hat{n} \times \vec{x}) \\ &= [1 - i\delta\omega \hat{n} \cdot (\vec{x} \times \vec{p})] \psi_{lm}(\vec{x}), \quad \vec{p} \equiv -i\nabla, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}, \quad (1.34)$$

que é o conhecido **operador de momento angular orbital**. Em geral, no entanto, $\psi_{lm}(r, \theta, \phi)$ é incapaz de descrever por completo o estado físico de uma partícula. Assim, introduz-se $|s, m_s\rangle$, de modo que

$$\begin{aligned} [S_j, S_k] &= i \sum_l \epsilon_{jkl} S_l, \\ \vec{S}^2 |s, m_s\rangle &= s(s+1) |s, m_s\rangle, \\ S_3 |s, m_s\rangle &= m_s |s, m_s\rangle, \\ S_{\pm} |s, m_s\rangle &= \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)} |s, m_s \pm 1\rangle, \end{aligned} \quad (1.35)$$

com $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ e $m_s = -s, -s+1, \dots, s-1, s$. \vec{S} é denominado **operador de spin** e s é o *spin* da partícula. Assim, veja que há duas prescrições para o momento angular de uma partícula: \vec{L} , associado com o movimento orbital (1.34) e \vec{S} , um momento angular intrínseco, de modo que a descrição total da partícula é dada pelo estado $|l, m\rangle \otimes |s, m_s\rangle$.²⁰

O **operador de momento angular total** é dado por

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}. \quad (1.36)$$

Este operador satisfaz a mesma álgebra que \vec{L} e \vec{S} :

$$[J_k, J_l] = i \sum_{r=1}^3 \epsilon_{klr} J_r. \quad (1.37)$$

Em analogia ao que foi feito no fim da subseção anterior, pode-se construir, com base na relação (1.37), o espaço vetorial gerado pela base $|j, m_j\rangle$:

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 |j, m_j\rangle &= j(j+1) |j, m_j\rangle \\ J_3 |j, m_j\rangle &= m_j |j, m_j\rangle \\ J_{\pm} |j, m_j\rangle &= \sqrt{j(j+1) - m_j(m_j \pm 1)} |j, m_j \pm 1\rangle, \end{aligned} \quad (1.38)$$

em que,

$$|s-l| \leq j \leq s+l \text{ e } m_j = m_s + m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}. \quad (1.39)$$

Assim,

$$U(R(\alpha, \beta, \gamma)) |j, m_j\rangle = \sum_{m'_j=-j}^j D^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)_{m_j m'_j} |j, m'_j\rangle, \quad (1.40)$$

com

$$\begin{aligned} D^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)_{m_j m'_j} &= e^{-im'_j \alpha} d_{m_j m'_j}^{(j)}(\beta) e^{-im_j \gamma} \\ d_{m_j m'_j}^{(j)}(\beta) &= \langle j, m'_j | e^{-i\beta J_2} | j, m_j \rangle, \end{aligned} \quad (1.41)$$

²⁰Uma análise curta mas elucidativa sobre a origem do spin no contexto do estudo da estrutura fina de átomos hidrogenóides pode ser consultada em [56].

$$U(R(\alpha, \beta, \gamma)) |j, m_j\rangle = e^{-im_j\gamma} \sum_{m'_j=-j}^j d_{m_j m'_j}^{(j)}(\beta) e^{-im'_j\alpha} |j, m'_j\rangle, \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} d_{m_j m'_j}^{(j)}(\beta) &= (-j)^{m_j-m'_j} \sqrt{\frac{(j+m_j)!(j-m_j)!}{(j+m'_j)!(j-m'_j)!}} f(\beta) \\ f(\beta) &= \left(\cos \frac{1}{2}\beta\right)^{2j} \sum_a (-1)^a \binom{j+m'_j}{a} \binom{j-m'_j}{j-m_j-a} \left(\tan \frac{1}{2}\beta\right)^{m_j-m'_j+2a}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

As relações (1.42)-(1.43) serão utilizadas quando forem analisadas as representações massivas do grupo de Poincaré no Capítulo 3.

2 Grupos de Lorentz e Poincaré

Neste capítulo apresentamos uma breve revisão sobre os grupos de simetria do espaço-tempo com destaque para o grupo de Lorentz (ortócrono próprio) e Poincaré.

2.1 Espaço de Minkowski

Seja S um sistema de coordenadas onde cada ponto é definido por quatro números reais como

$$S \ni x^\mu = (t, \vec{x}) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (2.1)$$

em que $x^0 \equiv t$ define a coordenada temporal e $x^i \equiv (\vec{x})^i$, $i = 1, 2, 3$ são as coordenadas espaciais (índices latinos, por convenção, identificam coordenadas espaciais). Cada ponto $x^\mu \in S$ é dito ser um ponto do *espaço-tempo*.

A mudança do sistema de coordenadas $S \ni x^\mu$ para outro $S' \ni x'^\mu$ implica que o intervalo infinitesimal dx^μ em S se transforma no intervalo infinitesimal dx'^μ em S' como

$$dx^\mu \rightarrow dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu. \quad (2.2)$$

Para o operador diferencial $\partial/\partial x^\mu$ a transformação se dá como

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi(x) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \phi(x) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \phi(x), \quad (2.3)$$

em que ϕ é uma função escalar arbitrária. Quantidades que se transformam como em (2.2) são ditas *contravariantes* e aquelas que se transformam como em (2.3) são *covariantes*.

Produtos escalares são invariantes sob uma transformação genérica:

$$A \cdot B \rightarrow A' \cdot B' = A'^\mu B'_\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} A^\nu B_\sigma = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\nu} A^\nu B_\sigma = \delta^\sigma_\nu A^\nu B_\sigma = A^\sigma B_\sigma = A^\nu B_\nu = A \cdot B, \quad (2.4)$$

em que δ^μ_ν corresponde ao delta de Kronecker generalizado. No caso particular em que $A = B = dx$, define-se o elemento de linha infinitesimal ds do espaço-tempo como

$$ds^2 = dx \cdot dx = dx_\mu dx^\mu = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = g^{\mu\nu}(x) dx_\mu dx_\nu, \quad (2.5)$$

onde é introduzido o *tensor métrico* $g_{\mu\nu}(x)$ tal que $dx_\mu = g_{\mu\nu}(x) dx^\nu$. Desde que ds^2 é invariante, a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ do sistema de coordenadas S se relaciona com a métrica $g'_{\mu\nu}(x')$ do sistema de coordenadas S' como

$$\boxed{g'_{\mu\nu}(x') \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} = g_{\alpha\beta}(x).} \quad (2.6)$$

Na teoria da *Relatividade Especial* consideram-se transformações no espaço-tempo pelas quais

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.7)$$

é invariante. Neste caso, $g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ não depende das coordenadas do espaço-tempo e, espaços assim definidos, são denominados *espaços de Minkowski*. No contexto aqui tratado há uma dimensão relativa à cordenada temporal e três dimensões relativas às coordenadas espaciais. Portanto, o espaço de Minkowski será denotado por $\mathbb{R}^{1,3}$.

Assim, quais transformações no espaço-tempo deixam ds^2 (2.7) invariante e satisfazem (2.6) com uma métrica constante?

2.2 Grupo de Lorentz

Para responder à pergunta levantada no fim da seção anterior, basta tomar a derivada em ambos os membros de (2.6) e usar que $g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\xi} \left(g_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \right) &= g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\xi \partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} + g_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\xi \partial x^\beta} = 2g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\xi \partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \stackrel{(2.6)}{=} \frac{\partial}{\partial x^\xi} g_{\alpha\beta} = 0 \\ \Leftrightarrow g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\xi \partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} &= 0, \end{aligned}$$

em que no segundo termo da primeira igualdade da primeira linha foi trocado os índices μ e ν assim como α e β . Mas, porque $\det \left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \right) \neq 0$, já que a transformação inversa $x' \rightarrow x$ deve existir, a última relação implica que

$$\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\xi \partial x^\alpha} = 0,$$

ou seja, **a transformação é linear**:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu, \quad (2.8)$$

onde $\Lambda \equiv \frac{\partial x'}{\partial x}$ e b são parâmetros constantes. Λ é interpretado como uma rotação no espaço de Minkowski vinculado por (2.6)

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta} \quad \text{ou} \quad \Lambda^T g \Lambda = g, \quad (2.9)$$

o qual tem uma estrutura similar com o encontrado para matrizes ortogonais (veja (1.15)). O conjunto $O(1, 3) = \{ \Lambda \in GL(\mathbb{R}, 4); \Lambda^T g \Lambda = g \}$ é um grupo, denominado *grupo de Lorentz*, cujos elementos são chamados *transformações de Lorentz*. Neste grupo, o produto é a multiplicação usual de matrizes, $\mathbb{1} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ é a identidade do grupo e qualquer transformação de Lorentz tem uma inversa, visto que $O(1, 3) \subset GL(\mathbb{R}, 4)$.

Dois resultados importantes são derivados a partir da (2.9): (i) $\det \Lambda = \pm 1$ e

$$(ii) g_{00} = \left(\Lambda^0{}_0 \right)^2 - \delta_{ij} \Lambda^i{}_0 \Lambda^j{}_0 = 1 \Rightarrow \left(\Lambda^0{}_0 \right)^2 = 1 + \sum_i \left(\Lambda^i{}_0 \right)^2 \geq 1 \Leftrightarrow \Lambda^0{}_0 \geq 1 \text{ or } \Lambda^0{}_0 \leq -1. \quad (2.10)$$

Assim, pode-se escrever $O(1, 3)$ como a união de quatro setores diferentes conforme mostrado na Tabela 3. Apenas

Setor	$\det \Lambda$	$\Lambda^0{}_0$
\mathcal{L}_+^\uparrow	+1	$\geq +1$
\mathcal{L}_+^\downarrow	+1	≤ -1
\mathcal{L}_-^\uparrow	-1	$\geq +1$
\mathcal{L}_-^\downarrow	-1	≤ -1

Tabela 3: $O(1, 3) = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow$.

$\mathcal{L}_+^\uparrow \equiv SO(1, 3) \subset O(1, 3)$ é um subgrupo, intitulado *grupo de Lorentz ortócrono próprio* ou *grupo de Lorentz restrito* que é constituído por *transformações contínuas* no espaço-tempo que deixam (2.7) invariante. Outros subgrupos de $O(1, 3)$ são *transformações discretas* (paridade e inversão temporal) e não serão tratadas neste trabalho.

O grupo de Lorentz restrito $SO(1, 3)$ é um grupo de Lie e, para descrevê-lo, pode-se fazer uso dos mesmos passos que foram utilizados na caracterização do grupo ortogonal. O número de parâmetros, por exemplo, é

determinado pela restrição (2.9) que fornece dez diferentes equações algébricas sobre os dezesseis parâmetros da matriz Λ . Portanto, Λ tem seis parâmetros independentes. Destes, três descrevem rotações no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 (já descritas no capítulo anterior) e os outros três descrevem as chamadas *transformações de Lorentz especiais* ou *boosts*. Sob estas transformações coordenadas espaciais são misturadas com a coordenada temporal. Um exemplo de tal transformação é um boost na direção x implementada por

$$\Lambda(\xi_1) = \begin{pmatrix} \cosh \xi_1 & -\sinh \xi_1 & 0 & 0 \\ -\sinh \xi_1 & \cosh \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

em que o parâmetro ξ_1 pode ser qualquer valor real. Isto significa que o **grupo de Lorentz não é compacto**, implicando que todas as suas representações unitárias são de dimensão infinita.²¹

Considerando ξ_1 infinitesimal, pode-se expandir (2.11) como

$$\Lambda(\xi_1) \approx \begin{pmatrix} 1 & -\xi_1 & 0 & 0 \\ -\xi_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - i\xi_1 \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{1} - i\xi_1 K_1,$$

com

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

e, porque $K_1^2 = \text{diag}(-1, -1, 0, 0)$, pode-se verificar que $\Lambda(\xi_1) = e^{-i\xi_1 K_1}$. Uma análise similar pode ser efetuada para as outras duas direções $\vec{\xi}_2 \equiv (0, \xi_2, 0)$ e $\vec{\xi}_3 \equiv (0, 0, \xi_3)$, levando a

$$\Lambda(\xi_2) = \begin{pmatrix} \cosh \xi_2 & 0 & -\sinh \xi_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh \xi_2 & 0 & \cosh \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

$$\Lambda(\xi_3) = \begin{pmatrix} \cosh \xi_3 & 0 & 0 & -\sinh \xi_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \xi_3 & 0 & 0 & \cosh \xi_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Uma propriedade do grupo de Lorentz que será útil no capítulo seguinte é que qualquer transformação de Lorentz pode ser escrita como uma rotação seguida por um boost,

$$\boxed{SO(1, 3) \ni \Lambda = \mathcal{B}(\vec{\xi})\mathcal{R}(\vec{\theta})}, \quad (2.15)$$

²¹Em contraste, se o grupo for compacto (no sentido topológico), suas representações unitárias são de dimensão finita, como ocorre com o grupo ortogonal $SO(3)$. As demonstrações destas afirmações não serão feitas aqui por não fazerem parte do objetivo deste capítulo mas, para o leitor interessado, podem ser encontradas em [57].

em que $\mathcal{B}(\vec{\xi}) = \exp\{-i\vec{\xi} \cdot \vec{K}\}$ e $\mathcal{R}(\vec{\theta}) = \exp\{-i\vec{\theta} \cdot \vec{J}\}$. Os detalhes da demonstração desta afirmação podem ser encontradas em, por exemplo, [53].

2.2.1 Álgebra de Lorentz

Uma rotação infinitesimal no espaço-tempo transforma as coordenadas segundo $\delta_\omega x^\mu = g^{\mu\nu} \omega_{\nu\gamma} x^\gamma$, em que $0 < \omega_{\nu\gamma} \ll 1$, $\forall \nu, \gamma = 0, \dots, 3$. Assim, uma transformação de Lorentz infinitesimal pode ser escrita como $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$, de sorte que, devido à restrição (2.9), tem-se que a matriz ω é antissimétrica: $\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} = 0$. Isto significa que ω tem seis parâmetros independentes: três parâmetros de rotação ω_{ij} e três de boost ω_{0i} . Logo, qualquer transformação de Lorentz pode ser expressa de acordo com

$$\text{SO}(1, 3) \ni \Lambda(\omega) = e^{-\frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}}, \quad (2.16)$$

onde $J_{\mu\nu}$ compõe três geradores de boosts $J_{0i} = K_i$ e três geradores de rotação J_{ij} . Estes podem ser reescritos com o uso do símbolo de Levi-Civita:²²

$$J_{kl} = \sum_m \epsilon_{klm} J_m \quad \leftrightarrow \quad J_k = \frac{1}{2} \sum_{l,m} \epsilon_{klm} J_{lm} = -\frac{1}{2} \epsilon^{klm} J_{lm}. \quad (2.17)$$

(2.17) implica que

$$[J_{ij}, J_{kl}] = \sum_{p,q} \epsilon_{ijp} \epsilon_{klq} [J_p, J_q] \stackrel{(1.37)}{=} \sum_{p,q,m} i \epsilon_{ijp} \epsilon_{klq} \epsilon_{pqm} J_m \stackrel{(2.17)}{=} \sum_{p,q} i \epsilon_{ijp} \epsilon_{klq} J_{pq}. \quad (2.18)$$

Mas,

$$\epsilon_{ijp} \epsilon_{klq} = \det \begin{bmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} & \delta_{iq} \\ \delta_{jk} & \delta_{jl} & \delta_{jq} \\ \delta_{pk} & \delta_{pl} & \delta_{pq} \end{bmatrix} = \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{pq} - \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{pq} + \delta_{il} \delta_{jq} \delta_{pk} - \delta_{iq} \delta_{jl} \delta_{pk} + \delta_{iq} \delta_{jk} \delta_{pl} - \delta_{ik} \delta_{jq} \delta_{pl}$$

de modo que (2.18) se torna

$$\begin{aligned} [J_{ij}, J_{kl}] &= i \sum_{p,q} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{pq} - \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{pq} + \delta_{il} \delta_{jq} \delta_{pk} - \delta_{iq} \delta_{jl} \delta_{pk} + \delta_{iq} \delta_{jk} \delta_{pl} - \delta_{ik} \delta_{jq} \delta_{pl} \right) J_{pq} \\ &= i (\delta_{ik} \delta_{jl} J_{pp} - \delta_{il} \delta_{jk} J_{qq} + \delta_{il} J_{kj} - \delta_{jl} J_{ki} + \delta_{jk} J_{li} - \delta_{ik} J_{lj}) \\ &= i (g_{il} J_{jk} - g_{jl} J_{ik} + g_{jk} J_{il} - g_{ik} J_{jl}), \end{aligned}$$

em que, na segunda linha, fez-se $\delta_{ab} = -g_{ab}$ e $J_{ab} = -J_{ba}$. Assim, a *álgebra de Lorentz*, denotada por $\mathfrak{so}(1, 3)$, pode ser obtida diretamente a partir da relação anterior como:

$$\boxed{[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} J_{\mu\rho} + g_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} J_{\nu\sigma}).} \quad (2.19)$$

Portanto, além da relação (1.37), tem-se

$$\begin{aligned} [J_l, K_j] &\stackrel{(2.17)}{=} \frac{1}{2} \sum_{m,n} \epsilon_{lmn} [J_{mn}, J_{0j}] \stackrel{(2.19)}{=} \frac{i}{2} \sum_{m,n} \epsilon_{lmn} (g_{mj} J_{n0} - g_{nj} J_{m0} + g_{n0} J_{mj} - g_{m0} J_{nj}) \\ &= \frac{i}{2} \sum_{m,n} \epsilon_{lmn} (\delta_{mj} K_n - \delta_{nj} K_m) \\ &= i \sum_m \epsilon_{ljm} K_m \end{aligned}$$

²²Observe que $\epsilon_{ijk} = g_{i\alpha} g_{j\beta} g_{k\gamma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma 0} = g_{ii} g_{jj} g_{kk} \epsilon^{ijk0} = (-1)^3 \epsilon^{ijk0} = -\epsilon^{ijk}$.

e

$$[K_l, K_j] = [J_{0l}, J_{0j}] \stackrel{(2.19)}{=} i \left(g_{0j} J_{l0} - g_{lj} J_{00} + g_{l0} J_{0j} - g_{00} J_{lj} \right) \stackrel{(2.17)}{=} -i \sum_k \epsilon_{ljk} J_k,$$

de modo que (2.19) é equivalente a

$$\begin{aligned} [J_k, J_l] &= i \sum_m \epsilon_{klm} J_m \\ [J_k, K_l] &= i \sum_m \epsilon_{klm} K_m \\ [K_k, K_l] &= -i \sum_m \epsilon_{klm} J_m \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.3 Grupo de Poincaré

A transformação sobre quadrivetores $x \in \mathbb{R}^{1,3}$,

$$x \rightarrow T(b)x = x + b, \quad b \in \mathbb{R}^{1,3}, \quad (2.21)$$

define um grupo, chamado *grupo de translação* e será denotado por T_4 . O produto neste grupo é dado por $T(a) \cdot T(b) = T(a + b)$, o elemento identidade é $T(0) = 0^\mu = (0, 0, 0, 0)$ e, para cada $T(b) \in T_4$, seu inverso é $T^{-1}(b) = T(-b)$. Sobre campos escalares, elementos deste grupo agem como

$$\begin{aligned} U(T(b))\phi(x) &= \phi'(x) = \phi(T^{-1}(b)x) = \phi(x - b) \\ &= \phi(x) + (-1)b^\mu \partial_\mu \phi(x) + \frac{1}{2!}(-1)^2 b^\mu b^\nu \partial_\mu \partial_\nu \phi(x) + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b \cdot \partial)^k}{k!} \phi(x) = e^{ib^\mu P_\mu} \phi(x), \end{aligned}$$

em que

$$P_\mu = i\partial_\mu, \quad (2.22)$$

é o correspondente gerador de T_4 neste espaço identificado como *operador momento*. A álgebra de Lie é denotada por $\mathfrak{t}_4 = \text{span}\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ cuja relação de comutação canônica lê-se

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (2.23)$$

isto é, T_4 é um **grupo abeliano**.

A transformação (2.8) é formada por uma transformação de Lorentz $\Lambda \in \text{SO}(1, 3)$ seguida por uma translação, $T(b) \in T_4$, de modo que a ação do operador $g(\Lambda, b)$ sobre quadrivetores em $\mathbb{R}^{1,3}$ é definida como

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = g(\Lambda(\omega), b)x^\mu = \Lambda(\omega)^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu, \quad (2.24)$$

com

$$\begin{aligned} \Lambda(\omega) &= \exp\left(-\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}\right) \in \text{SO}(1,3) \\ b \leftrightarrow T(b) &= \exp\left(-ib^\mu P_\mu\right) \in T_4 \end{aligned} \quad (2.25)$$

O conjunto de todas as transformações $g(\Lambda(\omega), b)$ forma um grupo conhecido como *grupo de Poincaré* e será denotado por $\text{ISO}(1,3)$. O produto neste grupo pode ser inferido ao aplicar-se sucessivamente duas transformações de Poincaré sobre um quadrivetor genérico $x \in \mathbb{R}^{1,3}$. De fato, com o uso de (2.24), tem-se

$$x \rightarrow x' = g(\Lambda_2, b_2) \cdot g(\Lambda_1, b_1)x = (\Lambda_2 \Lambda_1)x + (b_2 + \Lambda_2 b_1),$$

$$\therefore \boxed{g(\Lambda_2, b_2) \cdot g(\Lambda_1, b_1) = g(\Lambda_2 \Lambda_1, b_2 + \Lambda_2 b_1)}. \quad (2.26)$$

Comparando (2.26) com (1.2), pode-se ver que o grupo de Poincaré é dado pelo produto semidireto entre o grupo de Lorentz ortócrono próprio e o grupo de translação descrito no início desta seção:

$$\text{ISO}(1, 3) = \text{SO}(1, 3) \ltimes \text{T}_4. \quad (2.27)$$

Dado a relação (2.26), pode-se dizer que qualquer transformação de Poincaré pode ser escrita como uma transformação de Lorentz seguida por uma translação:

$$g(\Lambda, b) = T(b)\Lambda, \quad T(b) \in \text{T}_4 \text{ e } \Lambda \in \text{SO}(3). \quad (2.28)$$

As relações (2.26) e (2.28) implicam que elementos do grupo de translação se transformam sob transformações de Lorentz como

$$T(b) \rightarrow \Lambda T(b) \Lambda^{-1} = T(\Lambda b), \quad (2.29)$$

de sorte que, se $g(\Lambda, a) \in \text{ISO}(1, 3)$, então

$$T(b) \rightarrow g(\Lambda, a)T(b)g^{-1}(\Lambda, a) = T(\Lambda b) \in \text{T}_4. \quad (2.30)$$

Isto significa que **T₄ é um subgrupo normal de ISO(1, 3)** e, pelo uso do Teorema 1.1 aplicado ao caso do produto semidireto, obtém-se o isomorfismo

$$\boxed{\frac{\text{ISO}(1, 3)}{\text{T}_4} \simeq \text{SO}(1, 3)}. \quad (2.31)$$

Este resultado será importante na discussão da classificação das representações de ISO(1, 3) no próximo capítulo.

2.3.1 Álgebra de Poincaré

A álgebra de Poincaré é denotada por $\mathfrak{iso}(1, 3) = \text{span}\{J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_0, P_1, P_2, P_3\}$, em que (2.19) e (2.23) são as relações de comutação para as subálgebras $\mathfrak{so}(1, 3)$ e \mathfrak{t}_4 , respectivamente. Assim, resta calcular $[P_\mu, J_{\rho\sigma}] \in \mathfrak{iso}(1, 3)$. Isto é feito observando que o operador P^μ se transforma como um quadrivetor sob uma transformação de Lorentz. De fato, notando que $\Lambda T(b) \Lambda^{-1} = \Lambda \exp(-ib \cdot P) \Lambda^{-1} = \exp(-ib \cdot \Lambda P \Lambda^{-1})$, vê-se que

$$P^\mu \rightarrow P'^\mu = \Lambda P^\mu \Lambda^{-1} = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu. \quad (2.32)$$

Assim, tomando uma transformação de Lorentz infinitesimal $\Lambda^\mu{}_\nu = 1 - \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} J_{\alpha\beta} + \text{O}(\omega^2)$, (2.32) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \Lambda P^\mu \Lambda^{-1} &= \left(1 - \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} J_{\alpha\beta}\right) P^\mu \left(1 + \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} J_{\alpha\beta}\right) = P^\mu - \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} (J_{\alpha\beta} P^\mu - P^\mu J_{\alpha\beta}) + \text{O}(\omega^2) \\ &\stackrel{(2.32)}{=} \left(1 - \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} J_{\alpha\beta}\right)^\mu{}_\nu P^\nu + \text{O}(\omega^2) \\ &\Leftrightarrow [J_{\alpha\beta}, P^\mu] = (J_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu P^\nu. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Mas, com o uso da transformação infinitesimal $\delta_\omega x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu$, tem-se

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \left(\delta^\mu_\nu - \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} (J_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu + \text{O}(\omega^2)\right) x^\nu = x^\mu - \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} (J_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu x^\nu$$

$$\therefore x'^{\mu} - x^{\mu} = \delta_{\omega} x^{\mu} = -\frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} (J_{\alpha\beta})^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = \omega^{\mu}_{\nu} x^{\nu},$$

ou seja,

$$(J_{\alpha\beta})^{\mu}_{\nu} = i(\delta_{\alpha}^{\mu} g_{\beta\nu} - \delta_{\beta}^{\mu} g_{\alpha\nu}). \quad (2.34)$$

Substituindo (2.34) em (2.33), obtém-se

$$[J_{\alpha\beta}, P^{\mu}] = -i(\delta_{\alpha}^{\mu} g_{\beta\nu} - \delta_{\beta}^{\mu} g_{\alpha\nu}) P^{\nu} = i(\delta_{\alpha}^{\mu} P_{\beta} - \delta_{\beta}^{\mu} P_{\alpha}),$$

de modo que a **álgebra de Lie do grupo de Poincaré** é dada por

$$\begin{array}{ll} [P_{\mu}, P_{\nu}] &= 0 \\ [P_{\mu}, J_{\alpha\beta}] &= i(g_{\beta\mu} P_{\alpha} - g_{\alpha\mu} P_{\beta}) \\ [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] &= i(g_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} J_{\mu\rho} + g_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} J_{\nu\sigma}) \end{array} \quad (2.35)$$

2.3.2 Operadores de Casimir

Para o grupo de Poincaré, há dois operadores de Casimir. São eles:

Operador de Casimir Quadrático: $C_2 = P^2$, em que P_{μ} é o gerado do grupo de translações T_4 (2.22). C_2 é um operador de Casimir porque (i) $[C_2, P_{\mu}] = 0$, $\forall \mu = 0, \dots, 3$, como consequência da primeira relação em (2.35) e (ii), porque produtos escalares são invariantes de Lorentz, depreende-se que $[C_2, J_{\mu\nu}] = 0$.

Operador de Casimir Quártico: $C_4 = W^2$, em que o *vetor de Pauli-Lubanski* W^{μ} é assim definido ²³

$$W^{\mu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_{\nu} J_{\rho\sigma}. \quad (2.36)$$

Porque W^2 é um escalar, pode-se escrever que $[C_4, J_{\mu\nu}] = 0$. Também, $P_{\mu} \in \mathfrak{iso}(1, 3)$, $\mu = 0, \dots, 3$ comutam com C_4 :

$$\begin{aligned} [C_4, P_{\alpha}] &= [W^{\mu} W_{\mu}, P_{\alpha}] \\ &= W^{\mu} [W_{\mu}, P_{\alpha}] + [W^{\mu}, P_{\alpha}] W_{\mu} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} W^{\mu} [P^{\nu} J^{\rho\sigma}, P_{\alpha}] + \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} [P_{\nu} J_{\rho\sigma}, P_{\alpha}] W_{\mu} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} W^{\mu} P^{\nu} [J^{\rho\sigma}, P_{\alpha}] + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} W^{\mu} [P^{\nu}, P_{\alpha}] J^{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_{\nu} [J_{\rho\sigma}, P_{\alpha}] W_{\mu} + \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} [P_{\nu}, P_{\alpha}] J_{\rho\sigma} W_{\mu} \\ &\stackrel{(2.35)}{=} -i \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} W^{\mu} P^{\nu} (P^{\rho} \delta_{\alpha}^{\sigma} - P^{\sigma} \delta_{\alpha}^{\rho}) - i \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_{\nu} (P_{\rho} g_{\sigma\alpha} - P_{\sigma} g_{\rho\alpha}) W_{\mu} \\ &= -\frac{i}{2} W^{\mu} \epsilon_{\mu\nu\rho\alpha} P^{\nu} P^{\rho} + \frac{i}{2} W^{\mu} \epsilon_{\mu\nu\alpha\sigma} P^{\nu} P^{\sigma} - \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho}_{\alpha} P_{\nu} P_{\rho} W_{\mu} + \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu}_{\alpha}{}^{\sigma} P_{\nu} P_{\sigma} W_{\mu} \\ &= 0, \end{aligned}$$

em que, na penúltima linha, todos os termos são nulos devido às contrações entre tensores simétrico e antissimétrico.

²³Esta quantidade foi primeiramente introduzido por Wolfgang Pauli e foi apresentada em [58].

3 Representações Unitárias Irredutíveis do Grupo de Poincaré

Considerando todos os conceitos e resultados mostrados nos dois primeiros capítulos, podemos, neste capítulo, investigar as Representações Unitárias Irredutíveis (UIRs) do grupo de Poincaré pelo uso do método de Wigner [4]. Dentre as possíveis representações deste grupo, destacamos as **representações de spin contínuo** que correspondem ao tópico principal desta dissertação.

3.1 O Método de Wigner

Conforme mostrado no capítulo anterior, o grupo de translações no espaço de Minkowski é um subgrupo normal/invariante do grupo de Poincaré. Isto sugere que autovetores do operador momento P_μ sejam escolhidos como base para o espaço vetorial em que uma dada representação do grupo de Poincaré age:

$$P_\mu |p, \sigma\rangle = p_\mu |p, \sigma\rangle, \quad (3.1)$$

em que p_μ é o quadrimomento e σ rotula outros graus de liberdade que o vetor $|p, \sigma\rangle$ comporta. Portanto, dado $b \leftrightarrow T(b) \in T_4$ (2.25), tem-se

$$U(T(b)) |p, \sigma\rangle = e^{-ib_\mu p^\mu} |p, \sigma\rangle, \quad (3.2)$$

onde $U(T(b))$ é uma representação do grupo de translação sobre o espaço vetorial gerado por $|p, \sigma\rangle$. Por outro lado, seja $U(\Lambda)$ a representação do grupo de Lorentz que age sobre estes vetores. Então, pelo uso da relação (2.29), vê-se que $U(\Lambda) |p, \sigma\rangle$ é autovetor de P com autovalor Λp :

$$P^\mu U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = U(\Lambda) U^{-1}(\Lambda) P^\mu U(\Lambda) |p, \sigma\rangle \stackrel{(2.29)}{=} U(\Lambda) \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu |p, \sigma\rangle \stackrel{(3.1)}{=} (\Lambda p)^\mu U(\Lambda) |p, \sigma\rangle,$$

de modo que $U(\Lambda) |p, \sigma\rangle \propto |\Lambda p, \sigma\rangle$:

$$U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma\sigma'}(\Lambda, p) |\Lambda p, \sigma'\rangle. \quad (3.3)$$

$C_{\sigma\sigma'}(\Lambda, p)$ é uma representação matricial do grupo de Lorentz porque, dado o homomorfismo $U(\Lambda_1)U(\Lambda_2) = U(\Lambda_1\Lambda_2)$, tem-se

$$\begin{aligned} U(\Lambda_1) \left[U(\Lambda_2) |p, \sigma\rangle \right] &= U(\Lambda_1) \sum_{\sigma'} C_{\sigma\sigma'}(\Lambda_2, p) |\Lambda_2 p, \sigma'\rangle = \sum_{\sigma'\sigma''} C_{\sigma\sigma'}(\Lambda_2, p) C_{\sigma'\sigma''}(\Lambda_1, p) |\Lambda_1 \Lambda_2 p, \sigma''\rangle \\ &= \sum_{\sigma''} C_{\sigma\sigma''}(\Lambda_1 \Lambda_2, p) |\Lambda_1 \Lambda_2 p, \sigma''\rangle \\ \Rightarrow C_{\sigma\sigma''}(\Lambda_1 \Lambda_2, p) &= \sum_{\sigma'} C_{\sigma\sigma'}(\Lambda_2, p) C_{\sigma'\sigma''}(\Lambda_1, p). \end{aligned}$$

Seja \mathcal{W} uma transformação de Lorentz e k^μ um quadrimomento de modo que

$$k^\mu \rightarrow \mathcal{W}^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu. \quad (3.4)$$

\mathcal{W} é dito pertencer ao *Little Group* (LG) do grupo de Lorentz $SO(1, 3)$ correspondente ao quadrimomento k^μ .

Notação: $\mathcal{W} \in LG_k \subset SO(1, 3)$. Uma possível escolha para \mathcal{W} é

$$\mathcal{W} = L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p), \quad (3.5)$$

em que $L(p)$ é uma transformação de Lorentz particular tal que

$$p^\mu = L(p)^\mu{}_\nu k^\nu \quad \leftrightarrow \quad k^\mu = L^{-1}(p)^\mu{}_\nu p^\nu, \quad (3.6)$$

e Λ é uma transformação de Lorentz qualquer. Assim, a partir do vetor $|k, \sigma\rangle$ pode-se gerar $|p, \sigma\rangle$ como

$$|p, \sigma\rangle = N(p)U(L(p))|k, \sigma\rangle, \quad (3.7)$$

onde $N(p)$ é uma constante de normalização. Portanto, sob uma transformação de Lorentz genérica $U(\Lambda)$ o vetor $|p, \sigma\rangle$ se transforma de acordo com:

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|p, \sigma\rangle &\stackrel{(3.7)}{=} N(p)U(\Lambda)U(L(p))|k, \sigma\rangle = N(p)U(\Lambda L(p))|k, \sigma\rangle \\ &= N(p)U(L(\Lambda p))U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))|k, \sigma\rangle \\ &\stackrel{(3.5)}{=} N(p)U(L(\Lambda p))[U(\mathcal{W})|k, \sigma\rangle] \\ &= N(p)\sum_{\sigma'} D_{\sigma\sigma'}(\mathcal{W})U(L(\Lambda p))|k, \sigma'\rangle \\ &\stackrel{(3.7)}{\Rightarrow} \boxed{U(\Lambda)|p, \sigma\rangle = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\sigma'} D_{\sigma\sigma'}(\mathcal{W})|\Lambda p, \sigma'\rangle}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

em que \mathcal{W} é dado por (3.5) e $D_{\sigma\sigma'}(\mathcal{W})$ é a representação matricial do LG_k sobre $\text{span}\{|k, \sigma\rangle\}$. Comparando as relações (3.3) e (3.8), tem-se que as representações do grupo de Lorentz são induzidas por aquelas do correspondente LG_k a menos do termo de normalização $N(p)/N(\Lambda p)$. O LG_k , por sua vez, é especificado com a escolha de um quadrivetor representativo do espaço de Minkowski $k \in \mathbb{R}^{1,3}$, o qual pode ser tipo espaço $k^2 < 0$, tipo luz $k^2 = 0$ ou tipo tempo $k^2 > 0$.²⁴ Será visto cada uma destas possibilidades no decorrer deste capítulo.

Perceba que $D_{\sigma\sigma'}$ é uma representação irredutível de $\text{SO}(1,3)$ sobre $V = \text{span}\{|p, \sigma\rangle\}$ porque todos os vetores $|p, \sigma\rangle$ são gerados a partir de um único vetor $|k, \sigma\rangle$ pela ação de $U(L(p)) \in \text{SO}(1,3)$ (3.7). Portanto, os únicos subespaços invariantes de V são os triviais.

Pode-se resumir o método de Wigner considerando os seguintes passos: (i) tome um quadrivetor padrão k sobre alguma região do espaço de Minkowski, a saber, $k^2 < 0$, $k^2 = 0$ ou $k^2 > 0$; (ii) construa uma transformação de Lorentz que, sobre k , deixa-o invariante (3.4) e (iii) as representações unitárias irredutíveis do grupo de Poincaré são aquelas correspondentes às do LG_k conforme é estabelecido em (3.8).

3.2 Álgebra do LG_k

Seja $\mathcal{W}(\Omega) = \exp\{-i\Omega \cdot G\} \in \text{LG}_k \subset \text{SO}(1,3)$ onde $G = (G_1, \dots, G_m)$ e $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_m)$ definem os geradores e parâmetros do LG_k , respectivamente. Uma condição suficiente para que a relação (3.4) seja satisfeita é

$$(G^m)^\alpha{}_\beta k^\beta = 0, \quad \forall m = 1, \dots, n, \quad (3.9)$$

pois na expansão $\mathcal{W}(\Omega)^\mu{}_\nu k^\nu = \exp\left(-i\Omega \cdot G\right)^\mu{}_\nu k^\nu$ apenas o primeiro termo é não-nulo. Porque $G \in \mathfrak{so}(1,3) = \text{span}\{J_{\mu\nu}\}$, tem-se que G pode ser escrito como uma combinação linear dos geradores de $\text{SO}(1,3)$ como

$$G = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}Y_{\mu\nu}J_{\rho\sigma}, \quad (3.10)$$

²⁴Há também o caso do quadrivetor nulo $k^\mu = (0, 0, 0, 0)$ que não será tratado neste trabalho.

em que $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ é o símbolo de Levi-Civita e $Y_{\mu\nu} = -Y_{\nu\mu} \in \mathbb{R}$. Dessa forma, a ação de G sobre k pode ser escrita como

$$(G)^\alpha{}_\beta k^\beta = \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} Y_{\mu\nu} (J_{\rho\sigma})^\alpha{}_\beta k^\beta \stackrel{(2.34)}{=} \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} Y_{\mu\nu} i (\delta_\rho^\alpha k_{\sigma\beta} - \delta_\sigma^\alpha k_{\rho\beta}) k^\beta = \frac{1}{2} i \epsilon^{\mu\nu\alpha\sigma} Y_{\mu\nu} k_\sigma \stackrel{(3.9)}{=} 0,$$

$$\Rightarrow Y_{\mu\nu} = y_\mu k_\nu - y_\nu k_\mu,$$

para qualquer quadrivetor y^μ . Substituindo esta equação em (3.10) obtém-se uma forma geral para os geradores G do LG_k :

$$G = \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (y_\mu k_\nu - y_\nu k_\mu) J_{\rho\sigma} = y_\mu w^\mu,$$

com

$$\boxed{w^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\nu J_{\rho\sigma}}, \quad (3.11)$$

e, porque $w \cdot k = 0$, existem três componentes independentes de w^μ . Veja que o vetor de Pauli-Lubanski (2.36) age sobre $|k, \sigma\rangle$ como

$$W^\mu |k, \sigma\rangle = w^\mu |k, \sigma\rangle, \quad (3.12)$$

de modo que a álgebra do LG_k é determinada pela relação de comutação $[W^\mu, W^\nu]$. Para determiná-la, observe que

$$[W^\mu, J_{\alpha\beta}] \stackrel{(2.34)}{=} i (\delta_\beta^\mu W_\alpha - \delta_\alpha^\mu W_\beta),$$

e

$$\begin{aligned} [W^\mu, P^\nu] &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} [P_\alpha J_{\beta\gamma}, P^\nu] = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \left(P_\alpha [J_{\beta\gamma}, P^\nu] + [P_\alpha, P^\nu] J_{\beta\gamma} \right) \stackrel{(2.35)}{=} -i \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} P_\alpha (\delta_\gamma^\nu P_\beta - \delta_\beta^\nu P_\gamma) \\ &= 0, \end{aligned}$$

em que a quarta igualdade é zero tendo em vista a contração entre os tensores simétrico e antisimétrico. Portanto,

$$\boxed{[W^\alpha, W^\beta] = -i \epsilon^{\alpha\beta\rho\mu} W_\rho P_\mu}. \quad (3.13)$$

Conforme será visto a seguir, esta relação será útil na identificação do LG_k .

3.3 Partículas Massivas

Considerando um sistema de referência em que a partícula está em repouso, seu quadrimomento pode ser escrito como

$$k^\mu = (m, 0, 0, 0), \quad m \in \mathbb{R}, \quad (3.14)$$

e com o uso da relação (3.11) as componentes de w^μ são dadas por

$$\begin{aligned} w^0 &= 0, \\ w^i &= m J^i. \end{aligned}$$

Com estas componentes a álgebra de Lie correspondente ao LG_k é calculada diretamente pelo uso da relação (3.13) em que, no que segue, faz-se a substituição do operador momento pelo seu valor quando age no vetor $|k, \sigma\rangle$ segundo (3.12):

$$[w^i, w^j] = i \epsilon^{ij\mu\nu} k_\mu w_\nu = i \epsilon^{ij0l} k_0 w_l = i \epsilon^{ijl} m J_l. \quad (3.15)$$

A menos da constante multiplicativa m , vê-se que esta álgebra corresponde à álgebra do grupo ortogonal $SO(3)$ (1.37) de modo que o vetor de estado físico pode ser escrito como $|p, j, m_j\rangle$, onde $p = L(p)k$ (3.6) e o par (j, m_j) são especificados nas relações (1.38)-(1.39) da Subseção 1.3.1. Portanto, dado que o espaço gerado por $|p, j, m_j\rangle$ é de dimensão finita, pode-se dizer que a representação do grupo de Poincaré sobre este espaço é de dimensão finita em consequência do LG_k ser um grupo de Lie compacto [57].

Os autovalores dos operadores de Casimir sobre os estados físicos $|p, j, m_j\rangle$ são:

$$\begin{aligned} C_2 |p, j, m_j\rangle &= P^2 |p, j, m_j\rangle = p^2 |p, j, m_j\rangle = k^2 |p, j, m_j\rangle = m^2 |p, j, m_j\rangle \\ C_4 |p, j, m_j\rangle &= W^2 |p, j, m_j\rangle = w^2 |p, j, m_j\rangle = -m^2 j^2 |p, j, m_j\rangle = -m^2 j(j+1) |p, j, m_j\rangle \end{aligned} \quad (3.16)$$

A partir do quadrimomento padrão (3.14), obtém-se $(K_3 k)^\mu = (m \cosh \xi_3, 0, 0, -m \sinh \xi_3)$ através de um boost na direção z (2.14) e, com duas rotações sucessivas $R(\theta, \phi) = R_3(\phi)R_2(\theta)$ (1.18)-(1.20), este quadrimomento é levado em $p^\mu = (m \cosh \xi_3, -m \sinh \xi_3 \sin \theta \cos \phi, -m \sinh \xi_3 \sin \theta \sin \phi, -m \sinh \xi_3 \cos \theta)$ de modo que a transformação de Lorentz

$$L(p) = R(\theta, \phi)K_3 \quad (3.17)$$

é tal que $p = L(p)k$. Finalmente, dado $U(T(b)) \in T_4$ e $U(\Lambda) \in SO(1, 3)$, tem-se:

$$\begin{aligned} U(T(b)) |p, j, m_j\rangle &= e^{-ip \cdot b} |p, j, m_j\rangle \\ U(\Lambda) |p, j, m_j\rangle &= \sum_{m'_j=-j}^j D_{m_j m'_j}^{(j)}(\mathcal{W}) |\Lambda p, j, m'_j\rangle \end{aligned} \quad (3.18)$$

com \mathcal{W} dado por (3.5), $L(p)$ dado por (3.17) e $D^{(j)}(\mathcal{W})$ é a representação de $SO(3)$ sobre o espaço vetorial gerado por $|p, j, m_j\rangle$ correspondente ao momento angular j (1.41)-(1.43).

A teoria de campo para partículas massivas de spin arbitrário inteiro foi formulado por Singh e Hagen em [59].

3.4 Partículas sem Massa

Com o quadrimomento padrão tipo luz

$$k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega), \quad (3.19)$$

pode-se calcular explicitamente as componentes de w^μ com o uso da relação (3.11):

$$w^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\nu J_{\rho\sigma} = \omega \frac{1}{2} \epsilon^{\mu 0 \rho \sigma} J_{\rho\sigma} - \omega \frac{1}{2} \epsilon^{\mu 3 \rho \sigma} J_{\rho\sigma}.$$

Os resultados são:

$$\begin{aligned} w^0 &= \omega J_{12} = \omega J_3, \\ w^1 &= \omega(-J_{23} - J_{02}) = -\omega(J_1 + K_2), \\ w^2 &= \omega(J_{31} - J_{01}) = \omega(J_2 - K_1), \\ w^3 &= \omega J_{12} = \omega J_3. \end{aligned}$$

Introduzindo

$$\epsilon_1^\mu = (0, 1, 0, 0) \quad \epsilon_2^\mu = (0, 0, 1, 0), \quad \epsilon_i \cdot \epsilon_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad (3.20)$$

w^μ pode ser escrito como

$$w^\mu = k^\mu J_3 + \epsilon_1^\mu [-\omega(J_1 + K_2)] + \epsilon_2^\mu [\omega(J_2 - K_1)], \quad (3.21)$$

em que, além de $w \cdot k = k^2 = 0$, tem-se $k \cdot \epsilon_1 = k \cdot \epsilon_2 = 0$, ou seja, $\epsilon_{1,2}$ caracterizam direções transversais ao quadrimomento no espaço de Minkowski. A relação (3.21) estabelece que há três transformações de Lorentz geradas por $w^0 = w^3$, w^1 e w^2 que, em ação sobre k^μ , deixa-o invariante. São elas: uma rotação $-R \equiv J_3 = w^0/\omega = w^3/\omega$ e duas translações $T_1 \equiv \omega(J_1 + K_2) = w^1$ e $T_2 \equiv \omega(J_2 - K_1) = w^2$,²⁵ de sorte que

$$w^\mu = -k^\mu R + \epsilon_1^\mu T_1 + \epsilon_2^\mu T_2. \quad (3.22)$$

A álgebra do LG_k neste caso é:

$$[T_1, T_2] = [w^1, w^2] = 0$$

e

$$[R, T_i] = -\frac{1}{\omega}[w^0, w^i] = -i\epsilon^{0ij3}w_j,$$

isto é,

$$\boxed{[R, T_{1,2}] = \pm iT_{2,1}, \quad [T_1, T_2] = 0,} \quad (3.23)$$

que é a álgebra correspondente ao *grupo de isometria* em duas dimensões $\text{ISO}(2)$. Definindo $T_\pm = T_1 \pm iT_2$, (3.23) pode ser reescrita como

$$\boxed{[R, T_\pm] = \pm T_\pm, \quad [T_\pm, T_\mp] = 0} \quad (3.24)$$

de modo que o operador de Casimir quártico é expresso como (para detalhes, veja o Apêndice A)

$$\boxed{C_4 = -T_+ T_-} \quad (3.25)$$

Da mesma forma que qualquer elemento do grupo de Poincaré é dado por uma transformação de Lorentz seguida de uma translação, conforme é estabelecido em (2.28), tem-se que $\mathcal{W} \in \text{ISO}(2)$ é dado por uma rotação $\mathcal{R} \in \text{SO}(2)$ seguida por uma translação $\mathcal{T} \in \text{T}_2$:

$$\mathcal{W}(\theta, \vec{b}) = \mathcal{T}(\vec{b})\mathcal{R}(\theta) \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^2, \theta \in [0, 2\pi) \quad (3.26)$$

com

$$\mathcal{R}(\theta) = \exp\{-i\theta R\} \quad (3.27)$$

e

$$\mathcal{T}(\vec{b}) = \exp\{-i\vec{b} \cdot \vec{T}\} = \exp\left\{\frac{i}{\sqrt{2}}(\beta^* T_+ + \beta T_-)\right\}, \quad (3.28)$$

em que $\beta \equiv -(b_1 + ib_2)/\sqrt{2}$. Em termos de $\epsilon_\pm(k) = (\epsilon_1 \pm i\epsilon_2)/\sqrt{2}$, pode-se mostrar que os geradores do LG_k são dados por (para detalhes, veja o Apêndice A):

$$R^\mu{}_\nu = \epsilon_-^\mu \epsilon_{+\nu} - \epsilon_+^\mu \epsilon_{-\nu} \quad (T_\pm)^\mu{}_\nu = \pm\sqrt{2}(\epsilon_\pm^\mu k_\nu - k^\mu \epsilon_{\pm\nu}). \quad (3.29)$$

²⁵Caracterizamos estas duas transformações como "translações" em decorrência do isomorfismo entre a álgebra do LG_k , equação (3.23) ou (3.24), e a álgebra do *grupo euclidiano* $\text{ISO}(2)$, definido pelo produto semidireto entre o grupo ortogonal especial em duas dimensões e o grupo de translação em duas dimensões: $\text{ISO}(2) = \text{SO}(2) \oplus \text{T}_2$.

Com o uso destas duas últimas expressões e das propriedades $\epsilon_{\pm}^2(k) = 0$ e $\epsilon_{\pm}(k) \cdot \epsilon_{\mp}(k) = -1$, tem-se

$$R^\mu{}_\nu \epsilon_+^\nu = \epsilon_-^\mu \epsilon_{+\nu} \epsilon_+^\nu - \epsilon_+^\mu \epsilon_{-\nu} \epsilon_+^\nu = \epsilon_+^\mu, \quad (3.30a)$$

$$R^\mu{}_\nu \epsilon_-^\nu = \epsilon_-^\mu \epsilon_{+\nu} \epsilon_-^\nu - \epsilon_+^\mu \epsilon_{-\nu} \epsilon_-^\nu = -\epsilon_-^\mu, \quad (3.30b)$$

$$(T_+)_\mu{}^\nu \epsilon_+^\nu = \sqrt{2}(\epsilon_+^\mu k_\nu \epsilon_+^\nu - k^\mu \epsilon_{+\nu} \epsilon_+^\nu) = 0, \quad (3.30c)$$

$$(T_+)_\mu{}^\nu \epsilon_-^\nu = \sqrt{2}(\epsilon_+^\mu k_\nu \epsilon_-^\nu - k^\mu \epsilon_{+\nu} \epsilon_-^\nu) = \sqrt{2}k^\mu, \quad (3.30d)$$

$$(T_-)_\mu{}^\nu \epsilon_+^\nu = -\sqrt{2}(\epsilon_-^\mu k_\nu \epsilon_+^\nu - k^\mu \epsilon_{-\nu} \epsilon_+^\nu) = -\sqrt{2}k^\mu, \quad (3.30e)$$

$$(T_-)_\mu{}^\nu \epsilon_-^\nu = -\sqrt{2}(\epsilon_-^\mu k_\nu \epsilon_-^\nu - k^\mu \epsilon_{-\nu} \epsilon_-^\nu) = 0, \quad (3.30f)$$

$$(T_-)^2 \epsilon_+ = -\sqrt{2}T_- k = -2T_+ T_- \epsilon_- = 0 \quad (3.30g)$$

$$(T_+)^2 \epsilon_- = 0. \quad (3.30h)$$

Assim, a ação de um elemento genérico do LG_k sobre as direções ϵ_{\pm} lê-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\theta, \beta) \epsilon_+(k) &\stackrel{(3.26)}{=} \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{2}} (\beta^* T_+ + \beta T_-) \right\} [\exp \{-i\theta R\} \epsilon_+(k)] \quad \leftarrow [T_{\pm}, T_{\mp}] = 0 \\ &\stackrel{(3.30a)}{=} e^{-i\theta} e^{\frac{i}{\sqrt{2}} \beta T_-} \left[e^{\frac{i}{\sqrt{2}} \beta^* T_+} \epsilon_+(k) \right] \\ &\stackrel{(3.30c)}{=} e^{-i\theta} e^{\frac{i}{\sqrt{2}} \beta T_-} \epsilon_+(k) \\ &\stackrel{(3.30g)}{=} e^{-i\theta} \left(\epsilon_+ + \frac{i}{\sqrt{2}} \beta T_- \epsilon_+(k) \right) \\ &\therefore \boxed{\mathcal{W}(\theta, \beta) \epsilon_+(k) = e^{-i\theta} (\epsilon_+(k) - i\beta k)}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Analogamente,

$$\boxed{\mathcal{W}(\theta, \beta) \epsilon_-(k) = e^{i\theta} (\epsilon_-(k) + i\beta^* k)}. \quad (3.32)$$

É importante destacar que os "quadrivetores"²⁶ ϵ_{\pm} são construídos como função do quadrimomento padrão k de modo que, se $k \rightarrow p = L(p)k$, tem-se $\epsilon_{\pm}(k) \rightarrow \epsilon_{\pm}(p) = L(p)\epsilon_{\pm}(k)$ e as propriedades de $\epsilon_{\pm}(k)$ continuam válidas para $\epsilon_{\pm}(p)$:

$$\boxed{\epsilon_{\pm}^*(p) = \epsilon_{\mp}(p), \quad \epsilon_{\pm}(p) \cdot \epsilon_{\mp}(p) = -1, \quad p \cdot \epsilon_{\pm}(p) = 0, \quad \forall p \in \mathbb{R}^{1,3}.} \quad (3.33)$$

Representações de Helicidade e Spin Contínuo

O método de Wigner nos ensina que as UIRs do grupo $ISO(1, 3)$ correspondente ao caso $k^2 = 0$ são obtidas a partir das UIRs do LG_k e, pelo já discutido acima, $LG_k = ISO(2) = SO(2) \oplus T_2$ cuja álgebra de Lie é denotada por $\mathfrak{iso}(2)$. O operador de Casimir deste grupo é dado por $C = -T_+ T_- = C_4$ que, em conjunto com o autovalor de $C_2 = P^2$, define uma base para o espaço vetorial onde elementos de $ISO(1, 3)$ agirão:

$$\begin{aligned} C_2 |k, \rho, \sigma\rangle &= P^2 |k, \rho, \sigma\rangle = k^2 |k, \rho, \sigma\rangle = 0 \\ C_4 |k, \rho, \sigma\rangle &= -T_+ T_- |k, \rho\rangle = -\rho^2 |k, \rho, \sigma\rangle \end{aligned} \quad (3.34)$$

²⁶Conforme é demonstrado no Apêndice A, ϵ_{\pm} não são quadrivetores porque não se transformam como um quadrivector genérico sob uma transformação de Lorentz: $\mathbb{R}^{1,3} \ni v^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu v^\nu$.

onde ρ e σ são números reais. Dado $\mathcal{W}(\theta, 0) = \mathcal{R}(\theta) = e^{-i\theta\hat{h}} \in \text{SO}(2) \simeq \text{ISO}(2)/\text{T}_2$, pode-se identificar σ como o autovalor do operador helicidade \hat{h} sobre os vetores de estado:

$$\begin{aligned} \hat{h} |k, \rho, h\rangle &= h |k, \rho, h\rangle \\ \mathcal{W}(\theta, 0) |k, \rho, h\rangle &= e^{-i\theta h} |k, \rho, h\rangle \end{aligned} \quad (3.35)$$

Com a álgebra de Lie $\mathfrak{iso}(2)$ (3.24),

$$[\hat{h}, T_{\pm}] = \pm T_{\pm}, \quad (3.36)$$

vê-se que a ação dos operadores T_{\pm} sobre $|k, \rho, h\rangle$ é dada por:

$$\hat{h} T_{\pm} |k, \rho, h\rangle = (h \pm 1) T_{\pm} |k, \rho, h\rangle,$$

implicando que $T_{\pm} |k, \rho, h\rangle$ é autovetor de \hat{h} com autovalor $h \pm 1$, ou seja, $T_{\pm} |k, \rho, h\rangle \propto |k, \rho, h \pm 1\rangle$. Assim, a partir de um vetor de estado normalizado $|k, \rho, h\rangle$ ($\langle k, \rho, h' | k, \rho, h \rangle = \delta_{hh'}$) e definindo a constante de proporcionalidade $\kappa \in \mathbb{C}$, tem-se

$$\begin{aligned} T_{\pm} |k, \rho, h\rangle &= \kappa |k, \rho, h \pm 1\rangle \Rightarrow \langle k, \rho, h | T_{\mp} T_{\pm} |k, \rho, h\rangle = \rho^2 = |\kappa|^2 \\ \therefore \kappa &= \pm i\rho, \quad \rho^2 \geq 0, \end{aligned}$$

em que escolhe-se $\arg(\kappa) = \pm \pi/2$.²⁷ Assim,

$$T_{\pm} |k, \rho, h\rangle = \pm i\rho |k, \rho, h \pm 1\rangle. \quad (3.37)$$

No que segue, estuda-se os possíveis valores de ρ^2 :

3.4.1 Estados de Helicidade: $\rho^2 = 0$

O espaço gerado por $|k, \rho = 0, h\rangle \equiv |k, h\rangle$ é constituído por apenas um vetor para cada h conforme a relação (3.37) estabelece, ou seja, este espaço é unidimensional. Partículas sem massa que são observadas na natureza são descritas por estes estados de helicidade. O fóton, por exemplo, tem helicidade $h = \pm 1$.

Sobre estes estados de helicidade, pode-se determinar a ação dos elementos do grupo de Poincaré. De fato, translações agem neste espaço como

$$T(b) |p, h\rangle = e^{-ib \cdot p} |p, h\rangle, \quad p = L(p)k, \quad (3.38)$$

em que $L(p)$ é definido em (3.17). Rotações no espaço de Minkowski, por sua vez, agem sobre $|k, h\rangle$ como

$$U(\Lambda) |p, h\rangle \stackrel{(3.8)}{=} \sum_{h'} D_{hh'}(\mathcal{W}) |\Lambda p, h'\rangle, \quad \text{ISO}(2) \ni \mathcal{W} = L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p) = \mathcal{T}(\beta) \mathcal{R}(\theta) \quad (3.39)$$

com

$$\begin{aligned} D_{hh'}(\mathcal{W}) = \langle k, h' | \mathcal{W} | k, h \rangle &= \langle k, h' | \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{2}} (\beta T_- + \beta^* T_+) \right\} \exp \{-i\theta \hat{h}\} | k, h \rangle \\ &\stackrel{(3.35), (3.37)}{=} e^{-i\theta h} \delta_{hh'}, \end{aligned}$$

de modo que

$$U(\Lambda) |p, h\rangle = e^{-ih\theta(\Lambda, p)} |\Lambda p, h\rangle. \quad (3.40)$$

²⁷ $\arg(z)$ denota o argumento do número complexo z .

Nesta equação, $\theta = \theta(\Lambda, p)$ é solução de

$$\langle k, h | L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p) | k, h \rangle = \langle k, h | \mathcal{T}(\beta) \mathcal{R}(\theta) | k, h \rangle = e^{-i\theta h}.$$

A teoria de campo para partículas sem massa de spin arbitrários inteiro e semi-inteiro foram formuladas por Fang e Fronsdal em [34, 35] (para uma revisão recente deste formalismo o leitor pode consultar [21, 36, 60]).

3.4.2 Estados de Spin Contínuo: $\rho^2 > 0$

Neste caso há duas maneiras de descrever os vetores de estado físico: através da helicidade h da partícula conforme visto anteriormente ou pelo uso de um rótulo contínuo ϕ a ser definido nesta subseção. No primeiro caso a base de estados físicos é denominada *base de spin* e, no segundo, *base de ondas planas*. Será visto nesta subseção que estas duas bases são relacionadas por uma transformada de Fourier.

(a) Base de Spin

Levando-se em conta a relação (3.37), vê-se que para cada $\rho \neq 0$ o espaço vetorial $V = \text{span}\{|k, \rho, h\rangle, |k, \rho, h \pm 1\rangle, |k, \rho, h \pm 2\rangle, \dots\}$ é de **dimensão infinita**. Isto implica que a representação do grupo de Poincaré sobre este espaço é de dimensão infinita.

Elementos do grupo de translação T_4 agem sobre $|p, \rho, h\rangle$ como

$$\boxed{U(T(b)) |p, \rho, h\rangle = e^{-ib \cdot p} |p, \rho, h\rangle, \quad p = L(p)k,} \quad (3.41)$$

em que $L(p)$ é dado por (3.17). Por outro lado, rotações no espaço de Minkowski $U(\Lambda) \in \text{SO}(1, 3)$ atuam sobre $|p, \rho, h\rangle$ como (3.8):

$$U(\Lambda) |p, \rho, h\rangle = \sum_{h'} D_{hh'}(\mathcal{W}) |\Lambda p, \rho, h'\rangle, \quad \text{LG}_k \ni \mathcal{W} = L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p) = \mathcal{T}(\beta) \mathcal{R}(\theta), \quad (3.42)$$

com

$$D_{hh'}(\mathcal{W}) = \langle k, \rho, h' | \mathcal{W} | k, \rho, h \rangle, \quad (3.43)$$

e

$$\mathcal{W}(\theta, \beta) = \mathcal{T}(\beta) \mathcal{R}(\theta) = \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{2}} (\beta^* T_+ + \beta T_-) \right\} \exp \{-i\theta \hat{h}\}. \quad (3.44)$$

Os elementos de matriz (3.43) podem ser calculados com o uso de:

$$\langle k, \rho, h' | \mathcal{R}(\theta) | k, \rho, h \rangle = e^{-i\theta h} \delta_{hh'} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \langle k, \rho, h' | \mathcal{T}(\beta) | k, \rho, h \rangle &= \langle k, \rho, h' | \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{2}} (\beta^* T_+ + \beta T_-) \right\} | k, \rho, h \rangle \\ &\stackrel{(3.24)}{=} \langle k, \rho, h' | \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{2}} \beta^* T_+ \right\} \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{2}} \beta T_- \right\} | k, \rho, h \rangle \\ &= \sum_{l,j} \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \right)^{l+j} \frac{(\beta^*)^l \beta^j}{l!j!} \langle k, \rho, h' | (T_-)^j (T_+)^l | k, \rho, h \rangle \\ &\stackrel{(3.37)}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{\rho}{\sqrt{2}} \right)^{l+j} (-1)^j \frac{(\beta^*)^l \beta^j}{l!j!} \Big|_{j-l=h-h'}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Redefinindo o índice j como $n - l$, $n \in \mathbb{Z}$, e levando em conta que $j - l = h - h'$, tem-se

$$\begin{cases} j + l = n \\ j - l = h - h' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} j = \frac{1}{2}(n + h - h') \\ l = \frac{1}{2}(n - h + h') \end{cases} \quad (3.47)$$

de modo que (3.46) é simplificada a:

$$\begin{aligned} \langle k, \rho, h' | \mathcal{T}(\beta) | k, \rho, h \rangle &= \sum_{n=|h-h'|}^{\infty} \left(-\frac{\rho}{\sqrt{2}} \right)^n (-1)^{\frac{1}{2}(n+h-h')} \frac{(\beta^*)^{\frac{1}{2}(n-h+h')} \beta^{\frac{1}{2}(n+h-h')}}{[\frac{1}{2}(n-h+h')]! [\frac{1}{2}(n+h-h')]!} \\ &= \left(-\frac{\beta}{\beta^*} \right)^{\frac{h-h'}{2}} \sum_{n=h-h'}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{(\rho|\beta|/\sqrt{2})^n}{[\frac{1}{2}(n-h+h')]! [\frac{1}{2}(n+h-h')]!} \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta^*} \right)^{\frac{h-h'}{2}} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!(t+h-h')!} \left(\frac{\rho\sqrt{2}|\beta|}{2} \right)^{2t+h-h'} \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta^*} \right)^{\frac{h-h'}{2}} J_{h-h'}(\rho\sqrt{2}|\beta|) \\ &= e^{i(h-h')\alpha} J_{h-h'}(\rho|\vec{b}|), \end{aligned} \quad (3.48)$$

em que na primeira linha foi assumido sem perda de generalidade que $h > h'$, na segunda linha o índice de soma n foi redefinido como $t \equiv \frac{1}{2}(n - h + h')$, na terceira linha foi utilizado a definição da função de Bessel de primeira espécie [61]:

$$J_\nu(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t! \Gamma(t + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2t+\nu}, \quad \Gamma(z) = (z-1)!, \quad z \in \mathbb{Z}_+ : \text{Função Gama},$$

e na quarta linha o parâmetro β foi reescrito como $\beta = -\frac{b_1+ib_2}{\sqrt{2}}$ com $\vec{b} = (b_1, b_2) = (|\vec{b}| \cos \alpha, |\vec{b}| \sin \alpha)$. Assim, com (3.45) e (3.48) pode-se calcular os elementos de matriz (3.43):

$$\begin{aligned} D_{hh'}(\mathcal{W}(\theta, \vec{b})) &= \langle k, \rho, h' | \mathcal{W}(\theta, \vec{b}) | k, \rho, h \rangle \\ &= \langle k, \rho, h' | \mathcal{T}(\vec{b}) \mathcal{R}(\theta) | k, \rho, h \rangle \\ &= \sum_{h''} \langle k, \rho, h' | \mathcal{T}(\vec{b}) | k, \rho, h'' \rangle \langle k, \rho, h'' | \mathcal{R}(\theta) | k, \rho, h \rangle \\ &= e^{-i\theta h} \langle k, \rho, h' | \mathcal{T}(\vec{b}) | k, \rho, h \rangle \\ \therefore D_{hh'}(\mathcal{W}(\theta, \vec{b})) &= e^{-i\theta h} e^{i(h-h')\alpha} J_{h-h'}(\rho|\vec{b}|). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Finalmente, substituindo esta relação em (3.42), obtém-se

$$U(\Lambda) |p, \rho, h\rangle = e^{-i\theta h} \sum_{h'} e^{i(h-h')\alpha} J_{h-h'}(\rho|\vec{b}|) |\Lambda p, \rho, h'\rangle, \quad (3.50)$$

em que $\theta = \theta(\Lambda, p)$ e $\vec{b} = \vec{b}(\Lambda, p)$ são parâmetros do LG_k dados por

$$D_{hh'}(\mathcal{W}) = \langle k, \rho, h' | \mathcal{W}(\theta, \vec{b}) | k, \rho, h \rangle = \langle k, \rho, h' | L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p) | k, \rho, h \rangle. \quad (3.51)$$

No limite $\rho \rightarrow 0$, obtém-se

$$J_{h-h'}(\rho|\vec{b}|) \rightarrow \delta_{hh'},$$

de modo que (3.50) se torna

$$U(\Lambda) |p, 0, h\rangle = e^{-i\theta h} |\Lambda p, 0, h\rangle,$$

que é precisamente o resultado obtido para os estados de helicidade (3.40). Isto sugere uma maneira de definir as representações de spin contínuo: sob boosts, elas se tornam uma superposição de todos os possíveis estados de helicidade se $\rho \neq 0$ e, no limite $\rho \rightarrow 0$, os estados de spin contínuo se tornam estados de helicidade.

Unitariedade

No que segue vamos verificar se a representação dada por (3.50) é unitária. Com a escolha $\langle p', h' | p, h \rangle = \delta_{hh'} 2p^0 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$, tem-se

$$\begin{aligned}
& \langle p_2, h_2 | U^\dagger(\Lambda) U(\Lambda) | p_1, h_1 \rangle \\
&= e^{-i\theta(h_1-h_2)} \sum_{h'_1 h'_2} e^{i(h_1-h'_1)\alpha} e^{-i(h_2-h'_2)\alpha} J_{h_1-h'_1}(\rho|\vec{b}|) J_{h_2-h'_2}(\rho|\vec{b}|) \langle \Lambda p_2, h'_2 | \Lambda p_1, h'_1 \rangle \\
&= e^{-i\theta(h_1-h_2)} \langle \Lambda p_2 | \Lambda p_1 \rangle \sum_{h'_1 h'_2} e^{i(h_1-h'_1)\alpha} e^{-i(h_2-h'_2)\alpha} J_{h_1-h'_1}(\rho|\vec{b}|) J_{h_2-h'_2}(\rho|\vec{b}|) \langle h'_2 | h'_1 \rangle \\
&= 2p_1^0 \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) e^{-i\theta(h_1-h_2)} \sum_{h'_1} e^{i(h_1-h'_1)\alpha} e^{-i(h_2-h'_1)\alpha} J_{h_1-h'_1}(\rho|\vec{b}|) J_{h_2-h'_1}(\rho|\vec{b}|) \\
&= 2p_1^0 \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) e^{-i\theta(h_1-h_2)} e^{i(h_1-h_2)\alpha} \sum_n J_{h_1-h_2-n}(\rho|\vec{b}|) J_n(-\rho|\vec{b}|) \\
&= p_1^0 \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) e^{-i(\theta-\alpha)(h_1-h_2)} J_{h_1-h_2}(0) \\
&= p_1^0 \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \delta_{h_1 h_2},
\end{aligned}$$

em que na terceira linha foi usado $\langle \Lambda p_2 | \Lambda p_1 \rangle = \langle p_2 | p_1 \rangle$, $\forall \Lambda \in \text{SO}(1, 3)$ e $\langle h'_2 | h'_1 \rangle = \delta_{h'_1 h'_2}$, na quarta linha o índice de soma foi redefinido como $n \equiv h'_1 - h_2$ e foi utilizado a propriedade $J_n(z) = J_{-n}(-z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ e, na quinta linha, fez-se uso do teorema de adição das funções de Bessel

$$J_m(x+y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) J_{m-n}(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{C}, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}. \quad (3.52)$$

Portanto, pode-se concluir que $U^\dagger(\Lambda) U(\Lambda) = \mathbb{1}$.

(b) Base de Ondas Planas

Neste caso os autovetores dos geradores de translação $\vec{T} \in \text{iso}(2)$, denominados estados de onda plana, são utilizados para definir o espaço vetorial sob o qual a representação do grupo de Poincaré age. Estes vetores são denotados por $|k, \rho, \vec{t}\rangle$ e a ação de \vec{T} sobre eles é dada por

$$\vec{T} |k, \rho, \vec{t}\rangle = \vec{t} |k, \rho, \vec{t}\rangle, \quad \vec{t} = (t_1, t_2)$$

de modo que a ação dos operadores T_\pm e C_4 sobre estes vetores lê-se

$$\begin{aligned}
T_\pm |k, \rho, \vec{t}\rangle &= (t_1 \pm it_2) |k, \rho, \vec{t}\rangle \\
\Rightarrow C_4 |k, \rho, \vec{t}\rangle &\stackrel{(3.25)}{=} -|\vec{t}|^2 |k, \rho, \vec{t}\rangle.
\end{aligned}$$

Este resultado sugere parametrizar \vec{t} com coordenadas polares (ρ, ϕ) :

$$\vec{t}_\phi = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi),$$

de sorte que $C_4 = -\rho^2$ como esperado (3.34). Desta forma, os estados de spin contínuo são identificados com o parâmetro contínuo ϕ no qual

$$T_\pm |k, \rho, \vec{t}_\phi\rangle = \rho e^{\pm i\phi} |k, \rho, \vec{t}_\phi\rangle.$$

Assim, $\mathcal{T}(\beta) \in \text{ISO}(2)$ age sobre $|k, \rho, \vec{t}_\phi\rangle$ segundo:

$$\mathcal{T}(\beta) |k, \rho, \vec{t}_\phi\rangle = \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{2}} (\beta^* T_+ + \beta T_-) \right\} |k, \rho, \vec{t}_\phi\rangle = \exp \left\{ i\rho\sqrt{2} \text{Re} \left[\beta e^{-i\phi} \right] \right\} |k, \rho, \vec{t}_\phi\rangle, \quad (3.53)$$

onde $\text{Re}[z]$ é a parte real do número complexo z .

O efeito de rotações $\mathcal{R}(\theta) \in \text{ISO}(2)$ sobre $|k, \rho, \vec{t}_\phi\rangle$ pode ser obtido ao calcular-se o autovalor de T^i , $i = 1, 2$, sobre $\mathcal{R}(\theta) |k, \rho, \vec{t}_\phi\rangle$:

$$T^i \mathcal{R} |k, \rho, \vec{t}_\phi\rangle = \mathcal{R} [\mathcal{R}^{-1} T^i \mathcal{R}] |k, \rho, \vec{t}_\phi\rangle = \mathcal{R} \left(\mathcal{R}^i_j T^j \right) |k, \rho, \vec{t}_\phi\rangle = \left(\mathcal{R}^i_j t_\phi^j \right) \mathcal{R} |k, \rho, \vec{t}_\phi\rangle, \quad (3.54)$$

ou seja, $\mathcal{R} |k, \rho, \vec{t}_\phi\rangle$ é autovetor de \vec{T} com autovalor $\mathcal{R} \vec{t}_\phi$.²⁸ Isto é possível se

$$\mathcal{R}(\theta) |k, \rho, \vec{t}_\phi\rangle = |k, \rho, \mathcal{R}(\theta) \vec{t}_\phi\rangle = |k, \rho, \vec{t}_{\phi+\theta}\rangle. \quad (3.55)$$

Assim, vê-se que a ação de $\mathcal{R}(\theta)$ sobre $|k, \rho, \vec{t}_\phi\rangle \leftrightarrow |k, \rho, \phi\rangle$ é uma rotação: $\vec{t}_\phi \xrightarrow{\mathcal{R}(\theta)} \vec{t}_{\phi+\theta}$.

Com os resultados (3.53) e (3.55), tem-se que a ação de $\mathcal{W}(\theta, \beta) \in \text{LG}_k$ sobre a base $|k, \rho, \phi\rangle$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\theta, \beta) |k, \rho, \phi\rangle &= \exp \left\{ i\rho\sqrt{2} \text{Re} \left[\beta e^{-i(\phi+\theta)} \right] \right\} |k, \rho, \phi + \theta\rangle \\ &= \int \frac{d\phi'}{2\pi} 2\pi \exp \left\{ i\rho\sqrt{2} \text{Re} \left[\beta e^{-i\phi'} \right] \right\} \delta(\phi' - \phi - \theta) |k, \rho, \phi'\rangle \\ \therefore \mathcal{W}(\theta, \beta) |k, \rho, \phi\rangle &= \int \frac{d\phi'}{2\pi} D_{\phi\phi'}[\theta, \beta] |k, \rho, \phi'\rangle, \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde

$$D_{\phi\phi'}[\theta, \beta] = \langle k, \rho, \phi' | \mathcal{W}(\theta, \beta) |k, \rho, \phi\rangle = 2\pi \exp \left\{ i\rho\sqrt{2} \text{Re} \left[\beta e^{-i\phi'} \right] \right\} \delta(\phi' - \phi - \theta). \quad (3.57)$$

Na primeira linha de (3.56) foi utilizado a relação de completudeza $\int \frac{d\phi'}{2\pi} |k, \rho, \phi'\rangle \langle k, \rho, \phi'| = \mathbb{1}$.

Unitariedade

Com a escolha $\langle k, \rho, \phi | k, \rho, \phi' \rangle = 2\pi \delta(\phi - \phi')$ e com o resultado (3.57), pode-se verificar diretamente que

$$\langle k, \rho, \phi | \mathcal{W}^\dagger(\theta, \beta) \mathcal{W}(\theta, \beta) |k, \rho, \phi'\rangle = 2\pi \delta(\phi - \phi'),$$

ou seja, \mathcal{W} é um operador unitário:

$$\mathcal{W}^\dagger(\theta, \beta) \mathcal{W}(\theta, \beta) = \mathbb{1}. \quad (3.58)$$

(c) Relação entre as bases de spin e onda plana

Porque ambas as bases são constituídas por autovetores de operadores hermitianos, uma é a transformada de Fourier da outra. Para verificar esta afirmação, defina

$$|k, \rho, \tilde{h}\rangle = \int \frac{d\phi}{2\pi} e^{ih\phi} |k, \rho, \phi\rangle. \quad (3.59)$$

Este vetor é autovetor de $\mathcal{R}(\theta)$:

$$\mathcal{R}(\theta) |k, \rho, \tilde{h}\rangle \stackrel{(3.55)}{=} \int \frac{d\phi}{2\pi} e^{ih\phi} |k, \rho, \phi + \theta\rangle = e^{-ih\theta} \int \frac{d\phi'}{2\pi} e^{ih\phi'} |k, \rho, \phi'\rangle = e^{-ih\theta} |k, \rho, \tilde{h}\rangle,$$

²⁸A rigor, é preciso diferenciar a ação do operador $\mathcal{R}(\theta)$ sobre quadritvetores $t^\mu \in \mathbb{R}^{1,3}$ e sobre vetores de estado físico $|k, \rho, \vec{t}_\phi\rangle$, mas, para simplificar a notação, isto não é feito aqui.

ou seja, $|k, \rho, \tilde{h}\rangle$ é proporcional a $|k, \rho, h\rangle$ (veja (3.45)). Com a escolha $|k, \rho, h\rangle = i^{-h} |k, \rho, \tilde{h}\rangle$, (3.59) se torna

$$\boxed{|k, \rho, h\rangle = \int \frac{d\phi}{2\pi} e^{ih(\phi + \frac{\pi}{2})} |k, \rho, \phi\rangle.} \quad (3.60)$$

Veja que com este vetor e a relação (3.57), pode-se obter a representação matricial sobre os estados de spin (3.49).

De fato,

$$\begin{aligned} D_{hh'}(\theta, \beta) &= \langle k, \rho, h' | \mathcal{W}(\theta, \beta) | k, \rho, h \rangle \\ &= \int \frac{d\phi d\phi'}{(2\pi)^2} \langle k, \rho, h' | k, \rho, \phi' \rangle \langle k, \rho, \phi' | \mathcal{W}(\theta, \beta) | k, \rho, \phi \rangle \langle k, \rho, \phi | k, \rho, h \rangle \\ &\stackrel{(3.60)}{=} \int \frac{d\phi d\phi'}{(2\pi)^2} e^{i(h\phi - h'\phi')} e^{i\frac{\pi}{2}(h-h')} \langle k, \rho, \phi' | \mathcal{W}(\theta, \beta) | k, \rho, \phi \rangle \\ &\stackrel{(3.57)}{=} \int \frac{d\phi d\phi'}{(2\pi)^2} 2\pi \exp \left\{ i\rho\sqrt{2} \operatorname{Re} \left[\beta e^{-i\phi'} \right] \right\} \delta(\phi' - \phi - \theta) e^{i(h\phi - h'\phi')} e^{i\frac{\pi}{2}(h-h')} \\ &= e^{-i\theta h'} \int \frac{d\phi}{2\pi} \exp \left\{ i\rho\sqrt{2} \operatorname{Re} \left[\beta e^{-i(\theta+\phi)} \right] \right\} e^{i(h-h')(\phi + \frac{\pi}{2})}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Mas, porque $\beta \equiv -(b_1 + ib_2)/\sqrt{2} = |\vec{b}|e^{i\alpha}/\sqrt{2}$, com $\vec{b} = (b_1, b_2) = (|\vec{b}| \cos \alpha, |\vec{b}| \sin \alpha)$, tem-se

$$\exp \left\{ i\rho\sqrt{2} \operatorname{Re} \left[\beta e^{-i(\theta+\phi)} \right] \right\} = \exp \left\{ i\rho\sqrt{2} \operatorname{Re} \left[-\frac{|\vec{b}|}{\sqrt{2}} e^{-i(\phi+\theta-\alpha)} \right] \right\} = e^{-i\rho|\vec{b}| \cos(\alpha-\phi-\theta)}$$

de modo que (3.61) se torna

$$\begin{aligned} D_{hh'}(\theta, \beta) &= e^{-i\theta h'} \int \frac{d\phi}{2\pi} e^{-i\rho|\vec{b}| \cos(\alpha-\phi-\theta)} e^{i(h-h')(\phi + \frac{\pi}{2})} \\ &= e^{-i\theta h'} \int \frac{d\Psi}{2\pi} e^{-i\rho|\vec{b}| \cos(\frac{\pi}{2}-\Psi)} e^{i(h-h')(\Psi+\alpha-\theta)} \\ &= e^{-i\theta h'} e^{i(h-h')(\alpha-\theta)} \int \frac{d\Psi}{2\pi} e^{-i\rho|\vec{b}| \sin \Psi} e^{i(h-h')\Psi} \\ \therefore D_{hh'}(\theta, \beta) &= e^{-i\theta h'} e^{i\alpha(h-h')} J_{h-h'}(\rho|\vec{b}|), \end{aligned} \quad (3.62)$$

em que na primeira linha fez-se a mudança de variável $\alpha - \phi - \theta = \frac{\pi}{2} - \Psi$ e, na terceira linha, foi utilizado a representação integral das funções de Bessel de primeira espécie

$$J_n(z) = \int \frac{d\psi}{2\pi} e^{in\psi - iz \sin \psi}.$$

A teoria de campo para partículas sem massa bosônica de spin contínuo foi formuladas por Schuster e Toro em [41], enquanto que para partículas fermiônicas sem massa de spin contínuo foi formulada por Bekaert, Najafizadeh e Setare em [46].

3.5 Táquions

Com a escolha

$$k^\mu = (0, 0, 0, m), \quad (3.63)$$

calcula-se explicitamente as componentes de w^μ com o uso da relação (3.11):

$$\begin{aligned} w^0 &= mJ_3, \\ w^i &= -m\epsilon^{i30j} J_{0j}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\therefore w^1 = mK_2, \quad w^2 = -mK_1 \quad \text{e} \quad w^3 = 0. \quad (3.65)$$

Os valores de w^μ acima especificados identificam o LG_k correspondente a $k^2 = -m^2 < 0$ como boosts ao longo das direções x e y além de uma rotação do plano formado por estes eixos ao longo da direção z . Logo, tem-se que $\text{LG}_k = \text{SO}(1, 2)$ é o grupo de Lorentz em uma dimensão temporal e duas dimensões espaciais cuja álgebra de Lie é denotada por $\mathfrak{so}(1, 2)$ e a relação de comutação (3.13) é dada por:

$$[w^\mu, w^\nu] = -im\epsilon^{\mu\nu 3\sigma} w_\sigma, \quad (3.66)$$

com

$$\begin{cases} [K_1, K_2] &= -iJ_3 \\ [J_3, K_1] &= iK_2 \\ [J_3, K_2] &= -iK_1 \end{cases}. \quad (3.67)$$

Qualquer elemento de $\text{SO}(1, 2)$ pode ser escrito como o produto de uma rotação $\mathcal{R}_3(\theta)$ com um boost $\mathcal{B}(\vec{\zeta})$ (2.15):

$$\text{SO}(1, 2) \ni \mathcal{W}(\theta, \vec{\zeta}) = \mathcal{B}(\vec{\zeta})\mathcal{R}_3(\theta), \quad (3.68)$$

com

$$\mathcal{R}_3(\theta) = \exp\{-i\theta J_3\} \quad (3.69)$$

e

$$\mathcal{B}(\vec{\zeta}) = \exp\left\{-i\vec{\zeta} \cdot \vec{K}\right\} = \exp\left\{\frac{i}{\sqrt{2}}(\zeta^* K_+ + \zeta K_-)\right\}, \quad (3.70)$$

em que $\zeta \equiv -(\xi^1 + i\xi^2)/\sqrt{2}$ e $K_\pm = K_1 \pm iK_2$. As relações de comutação (3.67) podem ser reescritas em função destes operadores como

$$[K_\pm, K_\mp] = \mp 2J_3, \quad (3.71a)$$

$$[J_3, K_\pm] = \pm K_\pm, \quad (3.71b)$$

e, porque $K_\mp K_\pm \stackrel{(3.67)}{=} K_1^2 + K_2^2 \pm J_3$, o operador de Casimir quártico pode ser escrito da seguinte forma:

$$C_4 = w^2 = -m^2(K_1^2 + K_2^2 - J_3^2) = -m^2(K_\mp K_\pm \mp J_3 - J_3^2). \quad (3.72)$$

O próximo passo é construir uma base de estados físicos que representam as partículas taquiônicas.²⁹ Sejam λ e $-\rho^2$ os autovalores de J_3 e C_4 , respectivamente:

$$J_3 |k, \rho, \lambda\rangle = \lambda |k, \rho, \lambda\rangle, \quad \lambda \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad (3.73)$$

$$C_4 |k, \rho, \lambda\rangle = -\rho^2 |k, \rho, \lambda\rangle. \quad (3.74)$$

Pelo uso da equação (3.71b), tem-se

$$J_3 K_\pm |k, \rho, \lambda\rangle = (\lambda \pm 1) K_\pm |k, \rho, \lambda\rangle, \quad (3.75)$$

²⁹As partículas taquiônicas são conhecidas (teoricamente) por violarem causalidade: porque possuem quadrimomento tipo luz, a velocidade dessas partículas é maior que a velocidade da luz no vácuo.

ou seja, $K_{\pm} |k, \rho, \lambda\rangle$ é um autovetor de J_3 com autovalor $\lambda \pm 1$. Isto é possível se $K_{\pm} |k, \rho, \lambda\rangle \propto |k, \rho, \lambda \pm 1\rangle$:

$$K_{\pm} |k, \rho, \lambda\rangle = \kappa |k, \rho, \lambda \pm 1\rangle, \quad \kappa = \kappa(\rho, \lambda) \in \mathbb{C}. \quad (3.76)$$

Assim, dado (3.74) e a escolha $\langle k, \rho, \lambda | k, \rho, \lambda' \rangle = \delta_{\lambda\lambda'}$, pode-se obter o valor de κ em função dos parâmetros λ e ρ :

$$\langle k, \rho, \lambda | K_{\mp} K_{\pm} |k, \rho, \lambda\rangle = |\kappa(\rho, \lambda)|^2 \stackrel{(3.72)}{=} \langle k, \rho, \lambda | \left(-\frac{1}{m^2} C_4 \pm J_3 + J_3^2 \right) |k, \rho, \lambda\rangle = \frac{\rho^2}{m^2} \pm \lambda + \lambda^2 \geq 0,$$

isto é,

$$\kappa(\rho, \lambda) = \sqrt{\frac{\rho^2}{m^2} + \lambda(\lambda \pm 1)}, \quad (3.77)$$

em que escolhe-se $\arg(\kappa) = 0$. Substituindo a relação (3.77) em (3.76), pode-se gerar toda a base de estados físicos $|k, \rho, \lambda\rangle$ para cada ρ pela aplicação de K_{\pm} :

$$\boxed{\begin{aligned} J_3 |k, \rho, \lambda\rangle &= \lambda |k, \rho, \lambda\rangle \\ K_{\pm} |k, \rho, \lambda\rangle &= \sqrt{\frac{\rho^2}{m^2} + \lambda(\lambda \pm 1)} |k, \rho, \lambda \pm 1\rangle \end{aligned}} \quad (3.78)$$

com

$$\mathbb{R} \ni \rho^2 \geq -m^2 \lambda(\lambda \pm 1) \quad \text{e} \quad \lambda \in \mathbb{Z}. \quad (3.79)$$

Os possíveis valores de ρ determinam duas possibilidades de representação taquiónica:

3.5.1 Táquions de Spin s : $\rho^2 = -m^2 s(s+1)$, $s = 0, 1, 2, \dots$

Neste caso, a condição (3.79) leva à seguinte condição sobre os valores de λ :

$$\begin{cases} -s(s+1) + \lambda(\lambda+1) \geq 0 \\ -s(s+1) + \lambda(\lambda-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in \{0, \pm(s+1), \pm(s+2), \dots, \pm\infty\}. \quad (3.80)$$

Se $s = \lambda = 0$, (3.78) implica que $K_{\pm} |k, \rho = 0, \lambda = 0\rangle = 0$. Assim, há apenas um vetor de estado físico que representa a partícula taquiónica, denominada *táquion escalar*. Esta é uma **representação unidimensional de $\text{SO}(1, 2)$** que, por ser de dimensão finita, também é unitária tendo em vista que o setor não-compacto do grupo $\text{SO}(1, 2)$ age trivialmente sobre $|k, \rho = 0, \lambda = 0\rangle$:

$$\mathcal{B}(\zeta) |k, \rho = 0, \lambda = 0\rangle = |k, \rho = 0, \lambda = 0\rangle. \quad (3.81)$$

Sob uma translação $U(T(b)) \in \text{T}_4$ o vetor $|p, \rho = 0, \lambda = 0\rangle \equiv |p, 0\rangle$ se transforma como

$$\boxed{U(T(b)) |p, 0\rangle = e^{-ib \cdot p} |p, 0\rangle, \quad p = L(p)k,} \quad (3.82)$$

com $L(p) = R_3(\phi)K_1(\xi)K_3(\chi)$. Sob uma transformação de Lorentz $U(\Lambda) \in \text{SO}(1, 3)$, $|p, 0\rangle$ se transforma como (3.8),

$$U(\Lambda) |p, 0\rangle = \sum_{\lambda'} D_{0\lambda'}^{(0)}(\mathcal{W}) |\Lambda p, \lambda'\rangle, \quad \text{SO}(1, 2) \ni \mathcal{W} = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) = \mathcal{B}(\zeta)\mathcal{R}(\theta) \quad (3.83)$$

com

$$D_{0\lambda'}^{(0)} = \langle p, \lambda' | \mathcal{W}(\zeta, \theta) |p, 0\rangle = \langle p, \lambda' | \mathcal{B}(\zeta) \exp\{-i\theta J_3\} |p, 0\rangle = e^{-i\theta \lambda'} \delta_{\lambda'0}, \quad (3.84)$$

de modo que

$$\boxed{U(\Lambda) |p, 0\rangle = |\Lambda p, 0\rangle .} \quad (3.85)$$

Se $s \neq 0$ e $\lambda \neq 0$, obtém-se uma representação de dimensão infinita e unitária do grupo $\text{SO}(1, 2)$:

$$\boxed{\begin{aligned} U(T(b)) |p, s, \lambda\rangle &= e^{-ib \cdot p} |p, s, \lambda\rangle \\ U(\Lambda) |p, s, \lambda\rangle &= \sum_{\lambda'} D_{\lambda\lambda'}^{(s)}(\mathcal{W}) |p, s, \lambda'\rangle \end{aligned}} \quad (3.86)$$

com $\lambda' \in \mathbb{Z}$ (3.80) e $D_{\lambda\lambda'}^{(s)}$ a representação matricial de $\text{SO}(1, 2)$.

3.5.2 Táquions de Spin Contínuo: $\rho^2 > 0$

Neste caso a condição em (3.79) permite que $\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, assim, tem-se uma representação unitária de dimensão infinita de $\text{SO}(1, 2)$

$$\boxed{\begin{aligned} U(T(b)) |p, \rho, \lambda\rangle &= e^{-ib \cdot p} |p, \rho, \lambda\rangle \\ U(\Lambda) |p, \rho, \lambda\rangle &= \sum_{\lambda'} D_{\lambda\lambda'}^{(\rho)}(\mathcal{W}) |p, \rho, \lambda'\rangle \end{aligned}} \quad (3.87)$$

com $p^2 = k^2 = -m^2$, $\text{SO}(1, 2) \ni \mathcal{W} = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) = \mathcal{B}(\zeta)\mathcal{R}(\theta)$ e $D_{\lambda\lambda'}^{(\rho)}$ sendo a representação matricial de $\text{SO}(1, 2)$.

A teoria de campo para partículas taquiônicas de spin contínuo pode ser encontrada em [62, 63] e no Capítulo 5 desta dissertação.

4 Equações de Onda e Amplitudes de Emissão Soft para Partículas de Spin Contínuo

Neste capítulo exploramos funções de onda para Partículas de Spin Contínuo (CSPs) com o uso de uma variável auxiliar (além da variável habitual x do espaço-tempo) associada ao spin. Em seguida impomos covariância de Lorentz e obtemos equações de onda que serão úteis na descrição das *amplitudes de emissão soft* para CSPs. Estas amplitudes foram encontradas por Shuster e Toro [16] e sugerem a possibilidade de interações de longo alcance serem intermediadas por CSPs, não apenas por partículas de baixa helicidade conforme o teorema no-go de Weinberg asserta [17] (veja o Apêndice B para uma breve revisão sobre o teorema de Weinberg).

Seja $\psi(k, a, l)$ a função de onda que representa uma partícula com quadrimomento k , onde a e l são rótulos associados ao LG_k e ao grupo de Lorentz, respectivamente. Sob uma transformação de Lorentz $U(\Lambda)$, $\psi(k, a, l)$ é covariante se satisfaz a seguinte condição:

$$U(\Lambda)\psi(k, a, l) = \sum_{a'} D_{aa'}[\mathcal{W}(\Lambda, k)]\psi(\Lambda k, a', l) = \sum_{\bar{l}} D_{l\bar{l}}^{-1}[\Lambda]\psi(k, a, \bar{l}), \quad (4.1)$$

em que $D_{aa'}[\mathcal{W}(\Lambda, k)]$ é a representação matricial do $\text{LG}_k \ni \mathcal{W}(\Lambda, k)$ e $D_{l\bar{l}}[\Lambda]$ é a representação matricial do grupo de Lorentz.³⁰ Se ψ representa uma CSP, o rótulo a pode ser identificado como a variável contínua ϕ utilizada para descrever a representação de spin contínuo na base de ondas planas (veja a relação (3.56)). O rótulo l , por sua vez, é escrito em termos de um quadrivetor auxiliar do espaço de Minkowski $\eta \in \mathbb{R}^{1,3}$, de sorte que o campo ψ seja escalar em η . Com base nestas definições, a relação (4.1) pode ser reescrita como:

$$U(\Lambda)\psi(k, \phi, \eta) = \int \frac{d\phi'}{2\pi} D_{\phi\phi'}[\mathcal{W}(\Lambda, k)]\psi(\Lambda k, \phi', \eta) = \psi(k, \phi, \Lambda^{-1}\eta), \quad \forall \Lambda \in \text{SO}(1, 3). \quad (4.2)$$

Esta relação é o ponto de partida na construção das funções de onda para as CSPs conforme será analisado a seguir.

4.1 Equações de Onda

A condição (4.2) origina três equações diferenciais ao escolher-se Λ como transformações infinitesimais do $\text{LG}_k = \text{ISO}(2)$ expressas pelas relações (3.27) e (3.28), a saber, $\Lambda_1(\beta) \equiv \exp\{i\beta T_-/\sqrt{2}\} = \mathbb{1} + \frac{i}{\sqrt{2}}\beta T_- + \mathcal{O}(\beta^2)$, $\Lambda_2(\beta^*) \equiv \exp\{i\beta^* T_+/\sqrt{2}\} = \mathbb{1} + \frac{i}{\sqrt{2}}\beta^* T_+ + \mathcal{O}(\beta^{*2})$ e $\Lambda_3(\theta) \equiv \exp\{-i\theta R\} = \mathbb{1} - i\theta R + \mathcal{O}(\theta^2)$. Sob a transformação de Lorentz $U(\Lambda_1)$ o campo ψ se transforma como (denote por E o elemento identidade do LG_k):

$$\begin{aligned} U(\Lambda_1)\psi(k, \phi, \eta) &= \left(U(E) - i\frac{\beta}{\sqrt{2}}U(T_-) \right) \psi(k, \phi, \eta) \stackrel{(4.2)}{=} \psi\left(k, \phi, \eta - i\frac{\beta}{\sqrt{2}}T_- \eta\right) \\ &= \psi(k, \phi, \eta) - i\frac{\beta}{\sqrt{2}}T_- \eta \cdot \partial_\eta \psi(k, \phi, \eta), \end{aligned} \quad (4.3)$$

ou seja,

$$U(T_-)\psi(k, \phi, \eta) = (T_- \eta) \cdot \partial_\eta \psi(k, \phi, \eta) \stackrel{(3.29)}{=} -\sqrt{2} [(\eta \cdot \epsilon_-)(k \cdot \partial_\eta) - (\eta \cdot k)(\epsilon_- \cdot \partial_\eta)] \psi(k, \phi, \eta), \quad (4.4)$$

³⁰Originalmente Wigner e Barmann construíram funções de onda para CSPs e, por conseguinte, equações de onda, postulando princípios de covariância semelhantes à relação (4.1) [22, 23]. Este procedimento é diferente do que é utilizado atualmente o qual postula uma ação e, a partir dela, deriva-se as equações de campo com o uso das equações de Euler-Lagrange. O leitor interessado pode encontrar em [2], capítulo cinco, uma discussão recente sobre este assunto no contexto das representações de helicidade.

em que $\epsilon_{\pm} = \epsilon_{\pm}(k)$. Analogamente,

$$\begin{aligned} U(T_+) \psi(k, \phi, \eta) &= +\sqrt{2} [(\eta \cdot \epsilon_+)(k \cdot \partial_\eta) - (\eta \cdot k)(\epsilon_+ \cdot \partial_\eta)] \psi(k, \phi, \eta) \\ U(\Lambda_3(\theta)) \psi(k, \phi, \eta) &= \psi(k, \phi, \eta) - i\theta [(\eta \cdot \epsilon_-)(\epsilon_+ \cdot \partial_\eta) - (\eta \cdot \epsilon_+)(\epsilon_- \cdot \partial_\eta)] \psi(k, \phi, \eta) \end{aligned} \quad (4.5)$$

A transformação de Lorentz $L(p)$ é definida segundo $p = L(p)k$ de modo que $\epsilon_{\pm}(k) \rightarrow \epsilon_{\pm}(p)$. Como as relações (4.4)-(4.5) são escritas de forma covariante, elas continuam válidas para $\psi(p, \phi, \eta)$.

A ação das transformações $U(T_{\pm})$ e $U(\Lambda_3(\theta))$ sobre o campo $\psi(p, \phi, \eta)$ pode ser inferida com base nas relações (3.53) e (3.55) do capítulo anterior:

$$\begin{aligned} U(T_{\pm}) \psi(p, \phi, \eta) &= \rho e^{\pm i\phi} \psi(p, \phi, \eta) \\ U(\Lambda_3(\theta)) \psi(p, \phi, \eta) &= \psi(p, \phi + \theta, \eta) \end{aligned} \quad (4.6)$$

que em conjunto com as relações (4.4)-(4.5) obtém-se o sistema de três equações diferenciais para o campo $\psi(p, \phi, \eta)$:

$$\begin{aligned} [(\eta \cdot \epsilon_-)(p \cdot \partial_\eta) - (\eta \cdot p)(\epsilon_- \cdot \partial_\eta)] \psi(p, \phi, \eta) &= -\frac{\rho}{\sqrt{2}} e^{-i\phi} \psi(p, \phi, \eta) \\ [(\eta \cdot \epsilon_+)(p \cdot \partial_\eta) - (\eta \cdot p)(\epsilon_+ \cdot \partial_\eta)] \psi(p, \phi, \eta) &= \frac{\rho}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \psi(p, \phi, \eta) \\ [(\eta \cdot \epsilon_-)(\epsilon_+ \cdot \partial_\eta) - (\eta \cdot \epsilon_+)(\epsilon_- \cdot \partial_\eta)] \psi(p, \phi, \eta) &= i\partial_\phi \psi(p, \phi, \eta) \end{aligned} \quad (4.7)$$

em que foi utilizado $\psi(p, \phi + \theta, \eta) = \psi(p, \phi, \eta) + \theta \partial_\phi \psi(p, \phi, \eta) + O(\theta^2)$. O operador de Casimir quártico é dado por $U(C_4) = -U(T_+)U(T_-)$ e pode ser calculado com o uso das relações (4.4)-(4.5) e (4.6) e das propriedades $\epsilon_{\pm}(p) \cdot \epsilon_{\mp}(p) = -1$ e $p \cdot \epsilon_{\pm}(p) = 0 = p^2$. O resultado é:

$$\begin{aligned} U(C_4) \psi &= 2\{(\epsilon_+ \cdot \eta)(\epsilon_- \cdot \eta)(p \cdot \partial_\eta)^2 - (\eta \cdot p)(p \cdot \partial_\eta)[(\epsilon_+ \cdot \eta)(\epsilon_- \cdot \partial_\eta) + (\epsilon_- \cdot \eta)(\epsilon_+ \cdot \partial_\eta)] \\ &\quad + (\eta \cdot p)^2(\epsilon_+ \cdot \partial_\eta)(\epsilon_- \cdot \partial_\eta) + (\eta \cdot p)(p \cdot \partial_\eta)\} \psi = -\rho^2 \psi \end{aligned} \quad (4.8)$$

O primeiro passo para resolver o sistema de equações diferenciais (4.7) é notar que o autovalor de $U(R) = (\eta \cdot \epsilon_-)(\epsilon_+ \cdot \partial_\eta) - (\eta \cdot \epsilon_+)(\epsilon_- \cdot \partial_\eta)$ é nulo sobre η^2 , $\eta \cdot p$ e $\eta \cdot q$, onde $q^2 = 0$ e $q \cdot \epsilon_{\pm} = 0$. Em adição,

$$U(R) \eta \cdot \epsilon_{\pm} = \pm \eta \cdot \epsilon_{\pm}.$$

Com estas considerações pode-se escrever a solução geral da terceira equação em (4.7) como

$$\psi(p, \phi, \eta) = g(z, z^*, a, b, c), \quad z \equiv \eta \cdot \epsilon_+ e^{-i\phi}, \quad a \equiv \frac{\eta \cdot q}{p \cdot q}, \quad p \cdot q \neq 0, \quad b \equiv \eta \cdot p \quad \text{e} \quad c \equiv \eta^2, \quad (4.9)$$

onde g é uma função arbitrária. Em termos destes parâmetros as duas primeiras relações em (4.7) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} (z \partial_a + b \partial_{z^*} - b z \partial_c) g(z, z^*, a, b, c) &= \frac{\rho}{\sqrt{2}} g(z, z^*, a, b, c) \\ (z^* \partial_a + b \partial_z - b z^* \partial_c) g(z, z^*, a, b, c) &= -\frac{\rho}{\sqrt{2}} g(z, z^*, a, b, c) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Há duas classes de solução em (4.10): aquela que é singular em $b = \eta \cdot p$ e aquela que têm dependência suave em $b = \eta \cdot p$. A seguir serão exploradas ambas as possibilidades.

4.1.1 Solução Singular em $\eta \cdot p$

Se $b = 0$ as equações em (4.10) implicam que

$$z\partial_a g = \frac{\rho}{\sqrt{2}}g = -z^*\partial_a g \Leftrightarrow (z + z^*)\partial_a g = 0, \forall g, \quad (4.11)$$

ou seja, g está localizada em $z + z^* = 0$: $g \sim \delta(z + z^*)$. Também, a primeira igualdade em (4.11) implica que $g \propto e^{\frac{\rho}{\sqrt{2}}\frac{a}{z}}$, de sorte que a solução geral de (4.10) para o caso em que $g \propto \delta(b)$ é dada por

$$g(z, z^*, a, b, c) = \delta(b)f(c)h(z)e^{\frac{\rho}{\sqrt{2}}\frac{a}{z}}\delta(z + z^*),$$

em que f e h são funções arbitrárias. Voltando às variáveis originais, obtém-se:

$$\psi(p, \phi, \eta) = \delta(\eta \cdot p)\delta\left(\eta \cdot \epsilon_+ e^{-i\phi} + \eta \cdot \epsilon_- e^{i\phi}\right) \exp\left\{\frac{\rho}{\sqrt{2}}\frac{\eta \cdot q}{(\eta \cdot \epsilon_+)(p \cdot q)}e^{i\phi}\right\} f(\eta^2)h\left(\eta \cdot \epsilon_+ e^{-i\phi}\right). \quad (4.12)$$

No suporte $z + z^* = 0$, obtém-se $|z|^2 = -z^2$ enquanto que se $\eta \cdot p = 0 = \tilde{\eta} \cdot k$, obtém-se $\tilde{\eta}^0 = \tilde{\eta}^3$ dado que $k = (\omega, 0, 0, \omega) = L^{-1}(p)p$ (3.6) é o quadrimomento padrão e $\tilde{\eta} = L^{-1}(p)\eta$. Com o uso de $\tilde{\eta} \cdot \epsilon(k) = \eta \cdot \epsilon(p)$ e $z = \eta \cdot \epsilon_+(p)e^{-i\phi}$, pode-se demonstrar que

$$\eta^2 = 2z^2,$$

de sorte que a função de onda (4.12) pode ser reescrita como:

$$\boxed{\psi(p, \phi, \eta) = \delta(\eta \cdot p)\delta\left(\eta \cdot \epsilon_+ e^{-i\phi} + \eta \cdot \epsilon_- e^{i\phi}\right) \exp\left\{\frac{\rho}{\sqrt{2}}\frac{\eta \cdot q}{(\eta \cdot \epsilon_+)(p \cdot q)}e^{i\phi}\right\} \bar{f}\left(\eta \cdot \epsilon_+ e^{-i\phi}\right),} \quad (4.13)$$

com

$$\bar{f}\left(\eta \cdot \epsilon_+ e^{-i\phi}\right) = \bar{f}(z) \equiv f(2z^2)h(z).$$

No suporte $\eta \cdot p = 0$ e com as relações $\eta^2/2 = z^2 = -|z|^2 = z^*z = (\eta \cdot \epsilon_+)(\eta \cdot \epsilon_-)$, a expressão para o operador de Casimir quártico $U(C_4)$ (4.8) é simplificada a:

$$\boxed{U(C_4)\psi = -\eta^2(p \cdot \partial_\eta)^2\psi = -\rho^2\psi.} \quad (4.14)$$

A partir da função de onda (4.13) pode-se obter equações de onda covariantes conhecidas como **equações de Wigner** [22]. Por exemplo, a equação

$$\eta \cdot p\psi = 0 \quad (4.15)$$

é consequência da propriedade da função delta de Dirac $x\delta(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Outra equação pode ser obtida ao aplicar-se o operador $p \cdot \partial_\eta$ sobre a função de onda (4.13) mas, devido à $\epsilon_\pm(p) \cdot p = 0 = p^2$, tem-se que a ação de $p \cdot \partial_\eta$ tem efeito apenas no terceiro termo do lado direito em (4.13):

$$p \cdot \partial_\eta \exp\left\{\frac{\rho}{\sqrt{2}}\frac{\eta \cdot q}{(\eta \cdot \epsilon_+)(p \cdot q)}e^{i\phi}\right\} = \exp\left\{\frac{\rho}{\sqrt{2}}\frac{\eta \cdot q}{(\eta \cdot \epsilon_+)(p \cdot q)}e^{i\phi}\right\} \frac{\rho}{\sqrt{2}}\frac{e^{i\phi}}{\eta \cdot \epsilon_+}.$$

Portanto,

$$p \cdot \partial_\eta \psi = \rho\psi \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}\eta \cdot \epsilon_+} = \rho\psi \frac{1}{\sqrt{2}z} = \rho\psi \frac{1}{i\sqrt{-\eta^2}}$$

$$\therefore \left(i\sqrt{-\eta^2} p \cdot \partial_\eta - \rho \right) \psi = 0, \quad (4.16)$$

em que na primeira linha de (4.16) foi utilizado $z = \eta \cdot \epsilon_+ e^{-i\phi}$ e $\eta^2 = 2z^2 = -2|z|^2$. Em consequência da relação (4.16) e porque $\left[p \cdot \partial_\eta, \sqrt{-\eta^2} \right] \psi \propto \eta \cdot p \psi = 0$, tem-se

$$\left(i\sqrt{-\eta^2} p \cdot \partial_\eta - \rho \right)^2 \psi = \left[\eta^2 (p \cdot \partial_\eta)^2 - \rho^2 \right] \psi = 0,$$

que é a ação do operador de Casimir quártico obtida anteriormente (4.14). Em adição, (4.15)-(4.16) implica que

$$\begin{aligned} \left(i\sqrt{-\eta^2} p \cdot \partial_\eta - \rho \right) (\eta \cdot p \psi) &= i\sqrt{-\eta^2} [p^2 \psi + (\eta \cdot p) p \cdot \partial_\eta \psi] = 0 \\ \therefore p^2 \psi &= 0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

que é consistente com $p^2 = 0$, ou seja, o campo ψ representa uma partícula sem massa. Na linha anterior à (4.17), foi utilizado que $p \cdot \partial_\eta \psi \propto \psi$ e $\eta \cdot p \psi = 0$.

Escolhendo em (4.13)

$$\bar{f}(z) = f(2z^2)h(z) = f(\eta^2)h\left(\eta \cdot \epsilon_+ e^{-i\phi}\right) = \delta(\eta^2 + 1)h\left(\eta \cdot \epsilon_+ e^{-i\phi}\right), \quad (4.18)$$

tem-se

$$(\eta^2 + 1)\psi = 0. \quad (4.19)$$

Com as relações

$$\begin{aligned} \eta \cdot \partial_\eta \delta(\eta \cdot p) &= -\delta(\eta \cdot p) \\ \eta \cdot \partial_\eta \delta\left(\eta \cdot \epsilon_+ e^{-i\phi} + \eta \cdot \epsilon_- e^{i\phi}\right) &= -\delta\left(\eta \cdot \epsilon_+ e^{-i\phi} + \eta \cdot \epsilon_- e^{i\phi}\right), \\ \eta \cdot \partial_\eta \exp\left\{\frac{\rho}{\sqrt{2}} \frac{\eta \cdot q}{(\eta \cdot \epsilon_+)(p \cdot q)} e^{i\phi}\right\} &= 0 \end{aligned}$$

obtém-se

$$\eta \cdot \partial_\eta \psi = 0, \quad (4.20)$$

desde que h seja solução de

$$\eta \cdot \partial_\eta \left[\delta(\eta^2 + 1)h\left(\eta \cdot \epsilon_+ e^{-i\phi}\right) \right] = 2\delta(\eta^2 + 1)h\left(\eta \cdot \epsilon_+ e^{-i\phi}\right). \quad (4.21)$$

Um exemplo (trivial) de solução da equação (4.21) é

$$h(z) = 1 + 2z^2, \quad 2z^2 = \eta^2. \quad (4.22)$$

Com todos os resultados apresentados até aqui nesta subseção, pode-se escrever o seguinte conjunto de **equações de onda covariantes para CSPs** [22]:

$$\begin{aligned} p^2 \psi &= 0 \\ \eta \cdot p \psi &= 0 \\ \left(-i\sqrt{-\eta^2} p \cdot \partial_\eta + \rho \right) \psi &= 0, \\ (\eta^2 + 1)\psi &= 0 \\ \eta \cdot \partial_\eta \psi &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde todas as equações acima são tomadas no suporte $\eta \cdot p = 0$ e as duas últimas são consequência da escolha de \bar{f} (relações (4.18) e (4.21)-(4.22)).

4.1.2 Solução Suave em $\eta \cdot p$

Multiplicando a primeira equação em (4.10) por z , a segunda por z^* e em seguida tomando a diferença entre elas, obtém-se:

$$(z^* \partial_{z^*} - z \partial_z) g(z, z^*, a, b, c) = \frac{\rho}{\sqrt{2}b} (z + z^*) g(z, z^*, a, b, c),$$

cujas soluções são dadas por

$$g(z, z^*, a, b, c) = h(a, b, c, |z|^2) \exp \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}b} (z^* - z) \right), \quad (4.24)$$

onde h é uma função arbitrária. Com o uso de

$$\partial_{z^*} g = \exp \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}b} (z^* - z) \right) \left(z \frac{\partial h}{\partial |z|^2} + \frac{\rho}{\sqrt{2}b} h \right), \quad (4.25)$$

tem-se que a primeira equação em (4.10) pode ser reescrita como:

$$z \frac{\partial h}{\partial a} + bz \frac{\partial h}{\partial |z|^2} - bz \frac{\partial h}{\partial c} = 0. \quad (4.26)$$

Escolhendo h de modo que $\frac{\partial h}{\partial |z|^2} = \frac{\partial h}{\partial c} = \text{constante}$, tem-se que $|z|^2 = c = \eta^2$ de modo que a relação (4.26) pode ser reescrita como

$$z \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad (4.27)$$

com $f(a, b, c) \equiv h(a, b, c, |z|^2 = c)$. Portanto, no suporte $z \neq 0$, $f = f(b, c) = f(\eta \cdot p, \eta^2)$ e a solução suave de (4.10) é dada por

$$g(z, z^*, b, c) = f(b, c) \exp \left(-\frac{\rho}{\sqrt{2}b} (z - z^*) \right)$$

ou, em termos das variáveis originais,

$$\boxed{\psi(p, \phi, \eta) = f(\eta \cdot p, \eta^2) \exp \left\{ -i\sqrt{2}\rho \operatorname{Im} \left[\frac{\eta \cdot \epsilon_+}{\eta \cdot p} e^{-i\phi} \right] \right\}.} \quad (4.28)$$

Com o uso da função de onda (4.28) pode-se derivar duas equações de onda covariantes, a saber:

$$p \cdot \partial_\eta \psi = 0 \quad (4.29)$$

se

$$(\eta \cdot p) \frac{\partial f}{\partial \eta^2} = 0, \quad (4.30)$$

e

$$\eta \cdot \partial_\eta \psi = n\psi,$$

se

$$(\eta \cdot p) \frac{\partial f}{\partial (\eta \cdot p)} + 2\eta^2 \frac{\partial f}{\partial \eta^2} - nf = 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.31)$$

As relações (4.30) e (4.31) fixam completamente a dependência de f em seus parâmetros. Com todos os resultados apresentados até aqui nesta subseção, pode-se escrever o seguinte conjunto de equações de onda covariantes para CSPs:

$$\begin{aligned} p^2 \psi &= 0 \\ p \cdot \partial_\eta \psi &= 0 \\ \eta \cdot \partial_\eta \psi &= n\psi \\ \left(-(\eta \cdot p)^2 \partial_\eta^2 + \rho^2 \right) \psi &= 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

em que a última equação é obtida com o uso de $p \cdot \partial_\eta \psi = 0$ em (4.8). As equações em (4.32) foram obtidas recentemente pelos autores de [16].

4.2 Matriz S e Regime Soft

O objetivo principal desta seção é descrever amplitudes de emissão soft covariantes para CSPs com o uso da função de onda (4.28). A existência destas amplitudes é uma característica importante das CSPs porque estabelece a possibilidade de interações de longo alcance serem intermediadas não apenas por partículas de baixa helicidade, conforme estabelece o Teorema de Weinberg [17],³¹ mas também por CSPs. Neste contexto, ao desenvolver-se uma teoria de campos completa para CSPs, as amplitudes calculadas nesta seção podem ser obtidas a partir das amplitudes da teoria completa no *regime soft* a ser definido na Subseção 4.2.2.

4.2.1 Covariância da Matriz S

Seja $S_{\beta\alpha} = \langle \beta | S | \alpha \rangle$, $S^\dagger S = S S^\dagger = \mathbb{1}$, o elemento de matriz que descreve a reação $|\alpha\rangle \longrightarrow |\beta\rangle$ tal que

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \prod_{i=1}^u |p_i, a_i\rangle \\ |\beta\rangle &= \prod_{i=1}^v |p'_i, a'_i\rangle \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde u (v) é o número de partículas antes (depois) da reação, $u + v = n$ é o número total de partículas que participam da reação e p_i, a_i (p'_i, a'_i) são o momento e o parâmetro do LG da i -ésima partícula antes (depois) da reação, respectivamente. No que segue, assume-se que S é invariante sob transformações de Lorentz, isto é,

$$S \rightarrow U^\dagger(\Lambda) S U(\Lambda) = S. \quad (4.34)$$

Sob a transformação de Lorentz $U(\Lambda)$ a amplitude do processo $|\alpha\rangle \longrightarrow |\beta\rangle$ se transforma como:

$$\begin{aligned} A(\{p_1 a_1, \dots, p_u a_u\} \rightarrow \{p'_1 a'_1, \dots, p'_v a'_v\}) &\equiv S_{\beta\alpha} = \langle \beta | S | \alpha \rangle \\ &\stackrel{(4.34)}{=} \prod_{i=1}^u \prod_{j=1}^v \langle p'_j, a'_j | U^\dagger(\Lambda) S U(\Lambda) | p_i, a_i \rangle \\ &\stackrel{(3.8)}{=} \prod_{i=1}^u \prod_{j=1}^v \sum_{\vec{a}'_j} \sum_{\vec{a}_i} D_{\vec{a}'_j \vec{a}_i}^* [\mathcal{W}(\Lambda, p'_j)] D_{\vec{a}_i \vec{a}_i} [\mathcal{W}(\Lambda, p_i)] \langle \Lambda p'_j, \vec{a}'_j | S | \Lambda p_i, \vec{a}_i \rangle \\ \therefore \quad &\boxed{A(\{p_1 a_1, \dots, p_u a_u\} \rightarrow \{p'_1 a'_1, \dots, p'_v a'_v\})} \\ &= \left(\prod_{i=1}^u \sum_{\vec{a}_i} D_{\vec{a}_i \vec{a}_i} [\mathcal{W}(\Lambda, p_i)] \right) \left(\prod_{j=1}^v \sum_{\vec{a}'_j} D_{\vec{a}'_j \vec{a}'_j}^* [\mathcal{W}(\Lambda, p'_j)] \right) A(\{\Lambda p_i \vec{a}_i\} \rightarrow \{\Lambda p'_j \vec{a}'_j\}) \end{aligned} \quad (4.35)$$

em que $D[\mathcal{W}(\Lambda, p_i)]$ é a representação matricial do LG_{p_i} , $\mathcal{W}(\Lambda, p_i) \in \text{LG}_{p_i}$ e, na segunda linha, utilizou-se a decomposição do operador U como $U(\Lambda) = \prod_i U_i(\Lambda_i)$. A lei de transformação (4.35) é similar à dada para a função de onda (4.2) (com a substituição $a \rightarrow \phi$ e $\sum_a \rightarrow \int d\phi/2\pi$) de sorte que pode-se usar (4.28) para a construção de amplitudes de espalhamento que envolvam processos com CSPs. Isto é feito a seguir.

4.2.2 Fatores Soft

Considere um processo onde há n partículas massivas (u partículas massivas iniciais e v partículas massivas finais, $u + v = n$) cada qual com quadrimomento p_i , $p_i^2 = m_i^2$, $i = 1, \dots, n$, e uma partícula sem massa com

³¹Veja o Apêndice B para uma breve revisão do Teorema de Weinberg.

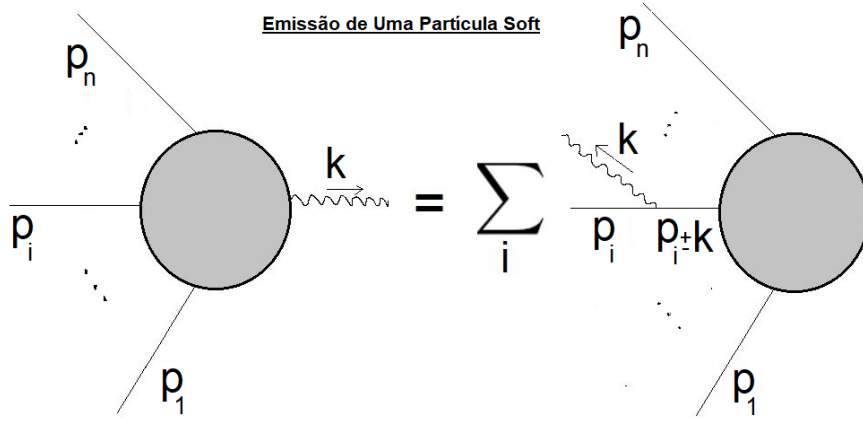


Figura 4.1: Amplitude para um processo envolvendo u partículas massivas reagindo dando v outras, $u + v = n$, com a emissão de uma partícula sem massa em regime soft com momento k . Neste diagrama, $p_i + k$ é o quadrimomento da i -ésima partícula massiva saindo e $p_i - k$ é o quadrimomento da i -ésima partícula massiva entrando.

quadrimomento k em regime *soft*, isto é, $k \cdot p_i \ll p_i \cdot p_j$, $\forall i, j = 1, \dots, n$ (veja Figura 4.1). A amplitude associada a este processo pode ser escrita como

$$A(\{k, a\}, p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n A(p_1, \dots, p_i \pm k, \dots, p_n) \frac{g_i}{(p_i \pm k)^2 - m_i^2 + i\epsilon} s_i(\{k, a\}, p_i), \quad 0 < \epsilon \ll 1, \quad (4.36)$$

em que g_i e s_i são a constante de acoplamento e o *fator soft* associados à i -ésima partícula massiva, respectivamente. Em consonância com a notação da subseção precedente, o leitor pode observar que: $(p_1, \dots, p_u, p'_1, \dots, p'_v) \equiv (p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)$, ou seja, $p'_1 \equiv p_{u+1}, \dots, p'_v \equiv p_{u+v} = p_n$.

No limite em que $k \cdot p_i \ll p_i \cdot p_j$, $\forall i, j = 1, \dots, n$, tem-se

$$\begin{aligned} A(p_1, \dots, p_i \pm k, \dots, p_n) &\rightarrow A(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n) + O(|k^0|) \\ \frac{1}{(p_i \pm k)^2 - m_i^2 + i\epsilon} &\rightarrow \frac{1}{\pm 2p_i \cdot k + i\epsilon} \end{aligned}, \quad (4.37)$$

em que fez-se uso de $p_i^2 = m_i^2$. Assim, a expressão (4.36) é simplificada a

$$A(\{k, a\}, p_1, \dots, p_n) = A(p_1, \dots, p_n) f(\{k, a\}, p_1, \dots, p_n) + O(|k^0|), \quad (4.38a)$$

com

$$f(\{k, a\}, p_1, \dots, p_n) \equiv \sum_{i=1}^n \frac{g_i}{\pm 2p_i \cdot k + i\epsilon} s_i(\{k, a\}, p_i). \quad (4.38b)$$

A relação (4.38a) é a maior contribuição para a amplitude em regime soft.

Em consequência da relação (4.35) vê-se que f , dada por (4.38b), satisfaz uma condição semelhante à dada para a função de onda ψ (4.1). De fato, analogamente ao feito na obtenção de (4.35), pode-se demonstrar que

$$\begin{aligned} &A(\{k, a\}; p_1, a_1; \dots; p_n, a_n) \\ &= \left(\prod_{i=1}^u \sum_{\bar{a}_i} D_{a_i \bar{a}_i}[\mathcal{W}(\Lambda, p_i)] \right) \left(\prod_{j=u+1}^n \sum_{\bar{a}_j} D_{a_j \bar{a}_j}^*[\mathcal{W}(\Lambda, p_j)] \right) A(\{\Lambda p_i, \bar{a}_i\} \rightarrow \{\Lambda p_j, \bar{a}_j\}) \\ &\quad \times \sum_{\bar{a}} D_{a \bar{a}}^*[\mathcal{W}(\Lambda, k)] f(\{\Lambda k, \bar{a}\}, \Lambda p_1, \dots, \Lambda p_n). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Mas,

$$\begin{aligned}
& A(\{k, a\}; p_1, a_1; \dots; p_n, a_n) \stackrel{(4.38a)}{=} A(p_1, a_1; \dots; p_n, a_n) f(\{k, a\}, p_1, \dots, p_n) \\
& \stackrel{(4.35)}{=} \left\{ \left(\prod_{i=1}^u \sum_{\bar{a}_i} D_{a_i \bar{a}_i}[\mathcal{W}(\Lambda, p_i)] \right) \left(\prod_{j=u+1}^n \sum_{\bar{a}_j} D_{\bar{a}_j \bar{a}_j}^*[\mathcal{W}(\Lambda, p_j)] \right) A(\{\Lambda p_i \bar{a}_i\} \rightarrow \{\Lambda p_j \bar{a}_j\}) \right\} \\
& \times f(\{k, a\}, p_1, \dots, p_n).
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Portanto, comparando (4.39) e (4.40), obtém-se:

$$f(\{k, a\}, p_1, \dots, p_n) = \sum_{\bar{a}} D_{a\bar{a}}^*[\mathcal{W}(\Lambda, k)] f(\{\Lambda k, \bar{a}\}, \Lambda p_1, \dots, \Lambda p_n). \tag{4.41}$$

Isto implica que o fator soft dado em (4.38b) satisfaz a seguinte relação:

$$s_i(\{k, a\}, p_i) = \sum_{\bar{a}} D_{a\bar{a}}^*[\mathcal{W}(\Lambda, k)] s_i(\{\Lambda k, \bar{a}\}, \Lambda p_i) \quad \forall i = 1, \dots, n. \tag{4.42}$$

4.3 Fatores Soft para CSPs

O resultado (4.42) sugere que a função de onda (4.28) calculada em $\eta^\mu = p_i^\mu$ seja escolhida como fator soft:

$$s_i(\{k, \phi\}, p_i)_\pm = f_i^\pm(k \cdot p_i, m_i^2) e^{\pm i \rho \frac{\epsilon(k, \phi) \cdot p_i}{k \cdot p_i}} = f_i^\pm(k \cdot p_i, m_i^2) e^{\mp i \rho \sqrt{2} \operatorname{Im} \left[e^{-i \phi} \frac{\epsilon_+ \cdot p_i}{k \cdot p_i} \right]}, \tag{4.43}$$

em que o sinal de mais (menos) da relação anterior significa fator de emissão (absorção) soft. Com esta escolha a relação (4.42) é satisfeita ao fazer-se $\phi \rightarrow \bar{a}$ e $\int d\phi/2\pi \rightarrow \sum_{\bar{a}}$ em (4.2). Esta afirmação será verificada na Subseção 4.3.1.

Pelo uso da representação integral da função de Bessel,

$$J_n(z) = \int \frac{d\Psi}{2\pi} e^{in\Psi - iz \sin \Psi}, \tag{4.44}$$

pode-se obter o fator soft na base de spin. De fato, com o uso da relação (3.59) a transformada de Fourier correspondente a $s_i(\{k, \phi\}, p_i)_\pm$ é dada por:

$$s_i(\{k, n\}, p_i)_\pm = \int \frac{d\phi}{2\pi} e^{\pm in\phi} s_i(\{k, \phi\}, p_i)_\pm = f_i^\pm(k \cdot p_i, m_i^2) \int \frac{d\phi}{2\pi} e^{\pm in\phi} e^{\mp i \rho \sqrt{2} \operatorname{Im} \left[e^{-i \phi} \frac{\epsilon_+ \cdot p_i}{k \cdot p_i} \right]}. \tag{4.45}$$

Mas, porque $z = |z| \exp \{i \arg(z)\}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, obtém-se:

$$\operatorname{Im} \left[e^{-i \phi} \frac{\epsilon_+ \cdot p_i}{k \cdot p_i} \right] = \left| \frac{\epsilon_+ \cdot p_i}{k \cdot p_i} \right| \sin \left[\arg \left(\frac{\epsilon_+ \cdot p_i}{k \cdot p_i} \right) - \phi \right],$$

de modo que substituindo esta expressão em (4.45) e com o uso de (4.44) e da propriedade da função de Bessel $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$, obtém-se

$$\therefore s_i(\{k, n\}, p_i)_\pm = f_i^\pm(k \cdot p_i, m_i^2) (-1)^n \exp \left\{ \pm in \arg \left(\frac{\epsilon_+ \cdot p_i}{k \cdot p_i} \right) \right\} J_n \left(\rho \sqrt{2} \left| \frac{\epsilon_+ \cdot p_i}{k \cdot p_i} \right| \right), \tag{4.46}$$

4.3.1 Covariância

Por completeza, verifica-se, a seguir, se o fator soft (4.43) satisfaz a lei de transformação dada por (4.42) que garante a covariância da amplitude de espalhamento deduzida anteriormente. De fato, na base correspondente ao parâmetro

ϕ do LG, os fatores soft s_i satisfazem a equação de covariância (4.42):

$$\begin{aligned} s_i(\{k, \phi\}, p_i) &\stackrel{(2.4)}{=} f_i^-(\Lambda k \cdot \Lambda p_i, m_i^2) \exp \left\{ -i\rho \frac{\Lambda \epsilon(k, \phi) \cdot \Lambda p_i}{\Lambda k \cdot \Lambda p_i} \right\} \\ &\stackrel{(A.28)}{=} f_i^-(\Lambda k \cdot \Lambda p_i, m_i^2) \exp \left\{ -i\rho \frac{[\epsilon(\Lambda k, \phi + \theta) + a\Lambda k] \cdot \Lambda p_i}{\Lambda k \cdot \Lambda p_i} \right\} \\ &= \int \frac{d\phi'}{2\pi} D_{\phi\phi'}^*[\theta, \beta] s_i(\{\Lambda k, \phi'\}, \Lambda p_i)_{-}, \end{aligned}$$

em que na segunda linha foi utilizado que $a = \sqrt{2}\text{Re} \left[\beta e^{-i(\phi+\theta)} \right]$ (veja o Apêndice A.3). Assim, a amplitude construída a partir do fator soft (4.43) satisfaz a lei de covariância (4.35) segundo

$$A(\{k, \phi\}, p_1, \dots, p_n) \xrightarrow{\Lambda} \int \frac{d\phi'}{2\pi} D_{\phi\phi'}^*[\theta, \beta] A(\{\Lambda k, \phi'\}, \Lambda p_1, \dots, \Lambda p_n). \quad (4.47)$$

Analogamente, na base de spin (4.46) pode-se verificar que a amplitude satisfaz também a lei de covariância (4.35) segundo

$$A(\{k, n\}, p_1, \dots, p_n) = \sum_{n'} D_{nn'}^*[\mathcal{W}(\Lambda, k)] A(\{\Lambda k, n'\}, \Lambda p_1, \dots, \Lambda p_n). \quad (4.48)$$

4.3.2 Invariância

A amplitude para um processo que envolva a emissão de uma CSP soft é calculada pelo uso da relação (4.43)

$$\begin{aligned} A(\{k, \phi\}, p_1, \dots, p_n) &= A(p_1, \dots, p_n) \sum_{i=1}^n g_i \frac{1}{2p_i \cdot k + i\epsilon} f_i(k \cdot p_i, m_i^2) \exp \left\{ i\rho \frac{\epsilon(k, \phi) \cdot p_i}{k \cdot p_i} \right\} \\ &= A(p_1, \dots, p_n) \sum_{i=1}^n g_i \frac{1}{2p_i \cdot k + i\epsilon} f_i(k \cdot p_i, m_i^2) \exp \left\{ -i\rho \sqrt{2} \text{Im} \left[e^{-i\phi} \frac{\epsilon_+(k) \cdot p_i}{k \cdot p_i} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.49)$$

ou pela relação (4.46)

$$A(\{k, h\}, p_1, \dots, p_n) = A(p_1, \dots, p_n) \sum_{i=1}^n g_i \frac{1}{2p_i \cdot k + i\epsilon} f_i(k \cdot p_i, m_i^2) \tilde{J}_h \left(\rho \sqrt{2} \left| \frac{\epsilon_+(k) \cdot p_i}{k \cdot p_i} \right| \right), \quad (4.50)$$

em que $\tilde{J}_h \equiv (-1)^h \exp \left\{ \pm i h \arg \left(\frac{\epsilon_+(k) \cdot p_i}{k \cdot p_i} \right) \right\} J_h$. Estas amplitudes não são invariantes de Lorentz mas a seção de choque $\sigma \propto \int d\phi |A(\phi)|^2$ ou $\sigma \propto \sum_n |A(n)|^2$ é. Ao considerar-se por exemplo a amplitude em termos do parâmetro ϕ (4.49), tem-se

$$\begin{aligned} |A(\{k, \phi\}, p_1, \dots)|^2 &\propto \sum_{i,j} \exp \left\{ -i\rho \sqrt{2} \text{Im} \left[e^{-i\phi} \frac{\epsilon_+(k) \cdot p_i}{k \cdot p_i} \right] + i\rho \sqrt{2} \text{Im} \left[e^{-i\phi} \frac{\epsilon_+(k) \cdot p_j}{k \cdot p_j} \right] \right\} \\ &\stackrel{(2.4)}{=} \sum_{i,j} \exp \left\{ -i\rho \sqrt{2} \text{Im} \left[e^{-i\phi} \frac{(\Lambda \epsilon_+(k) \cdot \Lambda p_i)(\Lambda k \cdot \Lambda p_j) - (\Lambda \epsilon_+(k) \cdot \Lambda p_j)(\Lambda k \cdot \Lambda p_i)}{(\Lambda k \cdot \Lambda p_i)(\Lambda k \cdot \Lambda p_j)} \right] \right\} \\ &\stackrel{(A.26)}{=} \sum_{i,j} \exp \left\{ -i\rho \sqrt{2} \text{Im} \left[e^{-i(\phi+\theta)} \frac{[\epsilon_+(\Lambda k) + i\beta^* \Lambda k] \cdot \Lambda p_i (\Lambda k \cdot \Lambda p_j)}{(\Lambda k \cdot \Lambda p_i)(\Lambda k \cdot \Lambda p_j)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{-i(\phi+\theta)} \frac{[\epsilon_+(\Lambda k) + i\beta^* \Lambda k] \cdot \Lambda p_j (\Lambda k \cdot \Lambda p_i)}{(\Lambda k \cdot \Lambda p_i)(\Lambda k \cdot \Lambda p_j)} \right] \right\} \\ &\stackrel{(4.49)}{\propto} |A(\{\Lambda k, \phi + \theta\}, \Lambda p_1, \dots)|^2. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Por outro lado, ao considerar-se a amplitude em termos do parâmetro h (4.49), $|A(h)|^2$ não é invariante mas $\sigma \propto \sum_h |A(h)|^2$ é: (no que segue, redefine-se o argumento da função de Bessel como $z_i \equiv \sqrt{2}\epsilon_+ \cdot p_i / (k \cdot p_i)$):

$$\begin{aligned} & \sum_{h=-\infty}^{+\infty} |A(\{k, h\}), p_1, \dots|^2 \\ &= |A(p_1, \dots, p_n)|^2 \sum_{i,j} g_i g_j \frac{1}{(2p_i \cdot k + i\epsilon)(2p_j \cdot k + i\epsilon)} f_i f_j \sum_{h=-\infty}^{+\infty} J_h(\rho|z_i|) J_h^*(\rho|z_j|). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Mas o último termo desta expressão é invariante:

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} J_h(\rho|z_i|) J_h^*(\rho|z_j|) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} J_h(\rho|z_i|) J_h(\rho|z_j|) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} J_h(\rho|z_i|) J_{-h}(-\rho|z_j|) = J_0(\rho|z_i - z_j|) = 1,$$

em que na segunda igualdade foi utilizado a propriedade $J_n(x) = J_{-n}(-x)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{C}$, na terceira igualdade foi utilizado o teorema de adição das funções de Bessel (3.52) e, na última igualdade, $J_0(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{C}$.

Todos os resultados deste capítulo apresentados até aqui estabelecem uma característica importante sobre a teoria de interação para CSPs: a existência de amplitudes covariantes de emissão/absorção soft. Com estas amplitudes, os autores de [64] encontraram que sob a escala de energia $E \gg \rho$, os fatores soft para partículas escalares, fótons e grávitons são recuperadas. Assim, se existe uma teoria de campo completa para CSPs, no limite de baixa energia para a CSP emitida/absorvida, deve-se recuperar as amplitudes (4.49)-(4.50).

5 Teoria de Campo Para Táquions de Spin Contínuo

Neste capítulo analisamos uma teoria de campo para táquions de spin contínuo (CSTs) propondo uma ação, verificando suas simetrias e, com a equação de campo, verificamos que o campo carrega a representação do grupo de Poincaré correspondente ao táquion de spin contínuo através do cálculo dos autovalores dos operadores de Casimir deste grupo. Após esta certificação, estudamos os graus de liberdade físicos do campo e, por fim, estudamos um vértice cúbico similar ao proposto por Rivelles em [62] que, no limite de massa nula, obtemos o vértice cúbico para CSPs que os autores de [54] obtiveram com o uso de correntes de Berends-Burgers-van Dam (BBvD) [55].

5.1 Ação

Seja $\Psi = \Psi(\eta, \xi, x)$ um campo escalar complexo que representa o CST, em que $x^\mu = (x^0, \dots, x^{D-1})$ são as coordenadas usuais do espaço-tempo e $\eta^\mu = (\eta^0, \dots, \eta^{D-1})$ e ξ são as coordenadas de um espaço auxiliar (à semelhança das coordenadas η^μ que caracterizam a função de onda da CSP estudada no capítulo anterior). A teoria do CST é em dimensão D com a métrica $g = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$ e a ação é dada por

$$S_0[\Psi, \Psi^*] = \frac{1}{2} \int d\eta d\xi dx \Psi^* \left\{ \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) [\square_x - m^2 - (\eta \cdot \partial_x - im\xi)(\Delta - im\partial_\xi)] - \frac{1}{2} \delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) (\Delta - im\partial_\xi)^2 \right\} \Psi, \quad (5.1)$$

em que m é a massa do CST, $\Delta \equiv \partial_\eta \cdot \partial_x + \rho$, $\rho \in \mathbb{R}$, δ' é a derivada da função delta com respeito ao seu argumento e μ é um parâmetro real que pode ser fixado igual a um com a reescala $\eta \rightarrow \mu\eta$, $\xi \rightarrow \mu\xi$ e $\rho \rightarrow \rho/\mu$. Devido à presença da derivada da função delta na ação acima, a dinâmica do campo taquiônico Ψ é localizada no hiperbolóide $\eta^2 + \xi^2 + \mu^2 = 0$ e em sua primeira vizinhança assim como os autovalores dos operadores de Casimir do grupo de Poincaré. Estas afirmações serão verificadas nas Seções 5.3 e 5.4, respectivamente.

Há outras duas maneiras em que a ação (5.1) pode ser escrita. Em verdade, escrevendo S_0 como

$$S_0[\Psi, \Psi^*] = S_0^{(1)}[\Psi, \Psi^*] + S_0^{(2)}[\Psi, \Psi^*] + S_0^{(3)}[\Psi, \Psi^*], \quad (5.2)$$

com

$$\begin{aligned} S_0^{(1)}[\Psi, \Psi^*] &= \frac{1}{2} \int d\eta d\xi dx \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \Psi^* (\square_x - m^2) \Psi, \\ S_0^{(2)}[\Psi, \Psi^*] &= -\frac{1}{2} \int d\eta d\xi dx \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \Psi^* (\eta \cdot \partial_x - im\xi)(\Delta - im\partial_\xi) \Psi, \\ S_0^{(3)}[\Psi, \Psi^*] &= -\frac{1}{4} \int d\eta d\xi dx \delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \Psi^* (\Delta - im\partial_\xi)^2 \Psi \end{aligned} \quad (5.3)$$

$S_0^{(1)}[\Psi, \Psi^*]$ pode ser reescrita ao fazer-se uso de integração por partes

$$S_0^{(1)}[\Psi, \Psi^*] = -\frac{1}{2} \int d\eta d\xi dx \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \left(|\partial_x \Psi|^2 + m^2 |\Psi|^2 \right) + \text{t. s.} \quad (5.4)$$

em que t. s. significa termo de superfície. Também, dado $f = f(\eta, \xi, x)$ e $g = g(\eta, \xi, x)$, tem-se por integração por partes que

$$\begin{aligned} &\int d\eta dx \delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) f (\partial_\eta \cdot \partial_x g) \\ &= \int d\eta dx \left[2\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \eta \cdot \partial_x f + \delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \partial_x \cdot \partial_\eta f \right] g + \text{t. s.} \end{aligned} \quad (5.5)$$

e

$$\int d\tilde{\xi} \delta(\eta^2 + \tilde{\xi}^2 + \mu^2) f (\partial_{\tilde{\xi}} g) = - \int d\tilde{\xi} \left[2\tilde{\xi} \delta'(\eta^2 + \tilde{\xi}^2 + \mu^2) f + \delta(\eta^2 + \tilde{\xi}^2 + \mu^2) \partial_{\tilde{\xi}} f \right] g + \text{t. s.}, \quad (5.6)$$

de sorte que, fazendo $f \equiv \Psi^*$ e $g \equiv (\Delta - im\partial_{\tilde{\xi}})\Psi$, $S_0^{(3)}[\Psi, \Psi^*]$ lê-se

$$S_0^{(3)}[\Psi, \Psi^*] \stackrel{(5.3)}{=} -\frac{1}{4} \int d\eta d\tilde{\xi} dx \delta(\eta^2 + \tilde{\xi}^2 + \mu^2) [(\Delta + im\partial_{\tilde{\xi}})\Psi^*] (\Delta - im\partial_{\tilde{\xi}})\Psi - S_0^{(2)}[\Psi, \Psi^*] + \text{t. s.},$$

ou seja,

$$S_0^{(3)}[\Psi, \Psi^*] + S_0^{(2)}[\Psi, \Psi^*] = -\frac{1}{4} \int d\eta d\tilde{\xi} dx \delta(\eta^2 + \tilde{\xi}^2 + \mu^2) |(\Delta - im\partial_{\tilde{\xi}})\Psi|^2. \quad (5.7)$$

Finalmente, somando os resultados (5.4) e (5.7) obtém-se,³² a menos de termos de superfície,

$$S_0[\Psi, \Psi^*] = -\frac{1}{2} \int d\eta d\tilde{\xi} dx \left\{ \delta'(\eta^2 + \tilde{\xi}^2 + \mu^2) \left(|\partial_x \Psi|^2 + m^2 |\Psi|^2 \right) + \frac{1}{2} \delta(\eta^2 + \tilde{\xi}^2 + \mu^2) |(\Delta - im\partial_{\tilde{\xi}})\Psi|^2 \right\}, \quad (5.8)$$

ou, com o uso da primeira linha em (5.3),

$$S_0[\Psi, \Psi^*] = \frac{1}{2} \int d\eta d\tilde{\xi} dx \left\{ \delta'(\eta^2 + \tilde{\xi}^2 + \mu^2) \Psi^* (\square_x - m^2) \Psi - \frac{1}{2} \delta(\eta^2 + \tilde{\xi}^2 + \mu^2) |(\Delta - im\partial_{\tilde{\xi}})\Psi|^2 \right\}. \quad (5.9)$$

Esta forma será explorada na próxima seção.

5.2 Simetrias

Nesta seção serão investigadas as simetrias locais e algumas simetrias globais que a ação (5.9) apresenta. Conforme será visto na Seção 5.5, uma das simetrias locais é uma simetria de gauge e será usada para a análise dos graus de liberdade físicos que o campo Ψ comporta. Dentre as simetrias globais, será demonstrado que a ação é invariante sob transformações de Lorentz no espaço-tempo e no espaço auxiliar, além de translações no espaço-tempo.³³ Os geradores destas transformações são $J_{\mu\nu} = ix_{[\mu} \partial_{x\nu]} + i\eta_{[\mu} \partial_{\eta\nu]}$ ³⁴ e $P_\mu = i\partial_{x\mu}$, respectivamente, os quais serão utilizados na construção dos operadores de Casimir no Apêndice D.

5.2.1 Simetrias Globais

a) Simetria de Translação

Uma translação infinitesimal sobre as coordenadas do espaço-tempo pode ser escrita como:

$$x'^\mu - x^\mu \equiv \delta_\epsilon x^\mu = \epsilon^\mu, \quad 0 < \epsilon^\mu \ll 1, \quad \forall \mu = 0, \dots, D-1. \quad (5.10)$$

A transformação acima implica na transformação do campo taquiônico como

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = \Psi(x) + \delta_\epsilon \Psi(x). \quad (5.11)$$

³²Uma ação similar à (5.8) foi apresentada em [62].

³³Além das simetrias globais descritas neste parágrafo, a ação (5.9) é invariante sob a transformação $\delta x^\mu = \omega^{\mu\nu} \eta_\nu$, onde $\omega^{\mu\nu}$ é antissimétrico [45].

³⁴Notação: $A_{[\mu} B_{\nu]} = A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu$.

(Por simplicidade será omitida a dependência em η e ξ de Ψ no estudo desta simetria.) Portanto, dado que o campo taquiônico é um campo escalar, tem-se

$$\delta_\epsilon \Psi(x) = i\epsilon^\mu P_\mu \Psi(x), \quad (5.12)$$

onde

$$\boxed{P_\mu = i\partial_{x\mu}} \quad (5.13)$$

define os geradores de translação sobre o campo Ψ (2.22). O complexo conjugado de (5.12) define a variação do campo Ψ^* com a transformação (5.10) como

$$\delta_\epsilon \Psi^*(x) = i\epsilon^\mu P_\mu \Psi^*(x). \quad (5.14)$$

Portanto, a transformação (5.10) implica que a ação (5.9) se transforma como:

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon S_0 &= \frac{1}{2} \int d\eta d\xi dx \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \left[\delta_\epsilon \Psi^*(\square_x - m^2) \Psi + \Psi^*(\square_x - m^2) \delta_\epsilon \Psi \right] \\ &\quad - \frac{1}{4} \int d\eta d\xi dx \delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \left[(\Delta + im\partial_\xi) \Psi^*(\Delta - im\partial_\xi) \delta_\epsilon \Psi + (\Delta + im\partial_\xi) \delta_\epsilon \Psi^*(\Delta - im\partial_\xi) \Psi \right], \end{aligned}$$

em que a primeira integral é dada por

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int dx \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \left[(-\epsilon^\mu \partial_{x\mu} \Psi^*)(\square_x - m^2) \Psi + \Psi^*(\square_x - m^2) (-\epsilon^\mu \partial_{x\mu} \Psi) \right] \\ &= -\epsilon^\mu \frac{1}{2} \int dx \partial_{x\mu} \left[\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \Psi^*(\square_x - m^2) \Psi \right] = \text{t. s.} \end{aligned}$$

Similarmente, porque $[\partial_{x\mu}, \Delta \pm im\partial_\xi] = 0$, pode-se escrever que a segunda integral em $\delta_\epsilon S_0$ também é um termo de superfície. Logo, S_0 é invariante sob a transformação (5.10).

b) Simetria de Lorentz

Uma transformação de Lorentz infinitesimal sobre ambas as coordenadas x^μ e η^μ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} x'^\mu - x^\mu &\equiv \delta x^\mu = \omega^{\mu\nu} x_\nu, \\ \eta'^\mu - \eta^\mu &\equiv \delta \eta^\mu = \omega^{\mu\nu} \eta_\nu, \end{aligned} \quad 0 < \omega^{\mu\nu} \ll 1, \quad \forall \mu, \nu = 0, \dots, D-1. \quad (5.15)$$

As transformações acima implicam que campo taquiônico se transforma como

$$\Psi(x, \eta) \rightarrow \Psi'(x, \eta) = \Psi(x, \eta) + \delta_\omega \Psi(x, \eta). \quad (5.16)$$

(Por simplicidade será omitida a dependência em ξ de Ψ no estudo desta simetria.) Portanto, dado que

$$\begin{aligned} \Psi(x, \eta) = \Psi'(x + \omega x, \eta + \omega \eta) &= \Psi'(x, \eta) + \omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_{x\mu} \Psi(x, \eta) + \omega^{\mu\nu} \eta_\nu \partial_{\eta\mu} \Psi(x, \eta) + O(\omega^2) \\ &= \Psi'(x, \eta) + \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu} \Psi(x, \eta) + O(\omega^2), \end{aligned} \quad (5.17)$$

tem-se

$$\delta_\omega \Psi(x, \eta) = -\frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu} \Psi(x, \eta) \quad (5.18)$$

onde

$$\boxed{J_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_{x\nu} - x_\nu \partial_{x\mu}) + i(\eta_\mu \partial_{\eta\nu} - \eta_\nu \partial_{\eta\mu})} \quad (5.19)$$

define os geradores de rotação. Na segunda linha de (5.17) foi escrita apenas a componente antissimétrica de $x_\nu \partial_{x\mu}$ e $\eta_\nu \partial_{\eta\mu}$ visto que a componente simétrica quando contraída com $\omega^{\mu\nu}$ é zero (recorde-se que ω é um tensor antissimétrico no começo da Subseção 2.2.1). Observe que

$$\mathcal{L} = \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \Psi^* (\square_x - m^2) \Psi - \frac{1}{2} \delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) |(\Delta - im\partial_\xi) \Psi|^2, \quad (5.20)$$

é um escalar sob transformações de Lorentz. Portanto, pode-se demonstrar que com as transformações (5.15) a Lagrangiana (5.20) se transforma como:

$$\delta \mathcal{L} = \omega^{\mu\nu} (x_\nu \partial_{x\mu} + \eta_\nu \partial_{\eta\mu}) \mathcal{L}.$$

O primeiro termo do lado direito desta relação pode ser escrito como

$$\omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_{x\mu} \mathcal{L} = \partial_{x\mu} (\omega^{\mu\nu} x_\nu \mathcal{L}) - \omega^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \mathcal{L} = \partial_{x\mu} (\omega^{\mu\nu} x_\nu \mathcal{L}).$$

Analogamente,

$$\omega^{\mu\nu} \eta_\nu \partial_{\eta\mu} \mathcal{L} = \partial_{\eta\mu} (\omega^{\mu\nu} \eta_\nu \mathcal{L}).$$

Portanto,

$$\delta S_0 = \int d\eta d\xi dx \delta \mathcal{L} = \omega^{\mu\nu} \int d\eta d\xi dx \partial_{x\mu} (\omega^{\mu\nu} x_\nu \mathcal{L}) + \omega^{\mu\nu} \int d\eta d\xi dx \partial_{\eta\mu} (\omega^{\mu\nu} \eta_\nu \mathcal{L}) = \text{t. s.},$$

isto é, S_0 é invariante sob as transformações em (5.15).

5.2.2 Simetrias Locais

Nesta subseção serão exploradas simetrias da ação (5.9) através de duas transformações locais sobre o campo Ψ , denominadas *simetria- ϵ* e *simetria- χ* . Porque os parâmetros destas transformações são funções das coordenadas, estas simetrias são denominadas *simetrias locais* e, conforme será apresentado na Seção 5.5, a simetria- ϵ será útil na análise dos graus de liberdade físicos carregados pelo campo taquiónico Ψ enquanto que a simetria- χ será utilizada na expansão deste campo em torno do hiperbolóide $\eta^2 + \xi^2 + \mu^2 = 0$ e sua primeira vizinhança.

a) Simetria- ϵ

A ação (5.9) é invariante sob a transformação

$$\delta_\epsilon \Psi = \left[\eta \cdot \partial_x - im\xi - \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_\xi) \right] \epsilon, \quad (5.21)$$

onde $\epsilon = \epsilon(\eta, \xi, x)$ é uma função arbitrária.³⁵ De fato, a variação da ação (5.9) com a transformação (5.21) pode ser escrita como

$$\delta_\epsilon S_0 = \int d\eta d\xi dx \delta_\epsilon \mathcal{L}, \quad (5.22)$$

em que, definindo $\mathcal{L}^{(1)} \equiv \frac{1}{2} \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \Psi^* (\square_x - m^2) \Psi$ e $\mathcal{L}^{(2)} \equiv -\frac{1}{4} \delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) [(\Delta + im\partial_\xi) \Psi^*] (\Delta - im\partial_\xi) \Psi$, tem-se que a variação total de $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)}$ pela transformação (5.21) é dada por

$$\delta_\epsilon \mathcal{L} = \delta_\epsilon \mathcal{L}^{(1)} + \delta_\epsilon \mathcal{L}^{(2)}, \quad (5.23)$$

³⁵Uma análise similar ao desenvolvida para o campo Ψ pode ser feita com o campo complexo-conjugado Ψ^* , a saber, a ação (5.9) é invariante sob a transformação

$$\delta_{\epsilon^*} \Psi^* = \left[\eta \cdot \partial_x + im\xi - \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta + im\partial_\xi) \right] \epsilon^*,$$

onde $\epsilon^* = \epsilon^*(\eta, \xi, x)$ é uma função arbitrária.

onde

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon \mathcal{L}^{(1)} &\equiv \frac{1}{2} \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \Psi^* (\square_x - m^2) \delta_\epsilon \Psi \\ \delta_\epsilon \mathcal{L}^{(2)} &\equiv -\frac{1}{4} \delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) [(\Delta + im\partial_{\bar{\xi}}) \Psi^*] (\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) \delta_\epsilon \Psi.\end{aligned}\quad (5.24)$$

Com o uso das relações de comutação (C.1) e (C.2) do Apêndice C, pode-se reescrever a segunda relação em (5.24) como:

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon \mathcal{L}^{(2)} &= -\frac{1}{4} \delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) [(\Delta + im\partial_{\bar{\xi}}) \Psi^*] \left[(\square_x - m^2) + (\eta \cdot \partial_x - im\xi)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} 2(\eta \cdot \partial_x - im\xi)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) - \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})^2 \right] \epsilon \\ &= -\frac{1}{4} \delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) [(\Delta + im\partial_{\bar{\xi}}) \Psi^*] \epsilon',\end{aligned}\quad (5.25)$$

em que $\epsilon' \equiv (\square_x - m^2)\epsilon$ e a propriedade $x\delta(x) = 0$, $\forall x$ foi utilizada. Integrando a relação (5.25), obtém-se

$$\begin{aligned}\int d\eta d\bar{\xi} dx \delta_\epsilon \mathcal{L}^{(2)} &= -\frac{1}{4} \int d\eta d\bar{\xi} dx \delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) [(\Delta + im\partial_{\bar{\xi}}) \Psi^*] \epsilon' \\ &= -\frac{1}{4} \int d\eta d\bar{\xi} dx \delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \Psi^* [(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) \epsilon'] \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d\eta d\bar{\xi} dx \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) [(\eta \cdot \partial_x - im\xi) \epsilon'] \Psi^* \\ &= -\frac{1}{2} \int d\eta d\bar{\xi} dx \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \Psi^* (\square_x - m^2) \delta_\epsilon \Psi \\ &\stackrel{(5.24)}{=} - \int d\eta d\bar{\xi} dx \delta_\epsilon \mathcal{L}^{(1)},\end{aligned}\quad (5.26)$$

ou seja,

$$\boxed{\delta_\epsilon S_0 = \int d\eta d\bar{\xi} dx \left(\delta_\epsilon \mathcal{L}^{(1)} + \delta_\epsilon \mathcal{L}^{(2)} \right) = 0.}\quad (5.27)$$

A segunda igualdade em (5.26) é resultado de integrações por partes.

b) Simetria- χ

A ação (5.9) é invariante sob a transformação

$$\delta_\chi \Psi = \frac{1}{4} (\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)^2 \chi, \quad (5.28)$$

onde $\chi = \chi(\eta, \bar{\xi}, x)$ é uma função arbitrária.³⁶ De fato, a variação da ação (5.9) com a transformação (5.28) pode ser escrita como

$$\delta_\chi S_0 = \int d\eta d\bar{\xi} dx \delta_\chi \mathcal{L}, \quad (5.29)$$

em que

$$\delta_\chi \mathcal{L} = \delta_\chi \mathcal{L}^{(1)} + \delta_\chi \mathcal{L}^{(2)},$$

onde

$$\begin{aligned}\delta_\chi \mathcal{L}^{(1)} &\equiv \frac{1}{2} \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \Psi^* (\square_x - m^2) \delta_\chi \Psi \\ &= \frac{1}{2} \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \Psi^* (\square_x - m^2) \left[\frac{1}{4} (\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)^2 \chi \right] = 0,\end{aligned}$$

³⁶Uma análise similar ao desenvolvida para o campo Ψ pode ser feita com o campo complexo-conjugado Ψ^* , a saber, a ação (5.9) é invariante sob a transformação

$$\delta_{\chi^*} \Psi^* = \frac{1}{4} (\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)^2 \chi^*$$

onde $\chi^* = \chi^*(\eta, \bar{\xi}, x)$ é uma função arbitrária.

visto que $[\eta^2 + \xi^2 + \mu^2, \square_x - m^2] = 0$ e $x\delta(x) = 0, \forall x$, e

$$\begin{aligned}
\delta_\chi \mathcal{L}^{(2)} &\equiv -\frac{1}{4}\delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) [(\Delta + im\partial_\xi)\Psi^*] (\Delta - im\partial_\xi)\delta_\chi \Psi \\
&= -\frac{1}{4}\delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) [(\Delta + im\partial_\xi)\Psi^*] (\Delta - im\partial_\xi) \left[\frac{1}{4}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)^2 \chi \right] \\
&\stackrel{(C.1)}{=} -\frac{1}{16}\delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \left[2(\eta \cdot \partial_x - im\xi) + (\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_\xi) \right] (\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)\chi \\
&\quad \times [(\Delta + im\partial_\xi)\Psi^*] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

visto que $[\eta \cdot \partial_x - im\xi, \eta^2 + \xi^2 + \mu^2] = 0$ e, outra vez, $x\delta(x) = 0, \forall x$. Assim, pode-se concluir que

$$\boxed{\delta_\chi S_0 = \int d\eta d\xi dx \delta_\chi \mathcal{L} = \int d\eta d\chi dx \left(\delta_\chi \mathcal{L}^{(1)} + \delta_\chi \mathcal{L}^{(2)} \right) = 0.} \quad (5.30)$$

c) Reducibilidade

As simetrias (5.21) e (5.28) são redutíveis, isto é, ao fazer-se a variação dos parâmetros locais ϵ e χ como

$$\begin{aligned}
\delta_\Lambda \epsilon &= \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)\Lambda \\
\delta_\Lambda \chi &= (\Delta - im\partial_\xi)\Lambda
\end{aligned} \quad (5.31)$$

em que $\Lambda = \Lambda(\eta, \xi, x)$ é uma função arbitrária, então

$$\delta_{\epsilon, \chi} \Psi = \left[\eta \cdot \partial_x - im\xi - \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_\xi) \right] \epsilon + \frac{1}{4}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)^2 \chi \quad (5.32)$$

é invariante. De fato,

$$\begin{aligned}
\delta_\Lambda (\delta_{\epsilon, \chi} \Psi) &= \left[\eta \cdot \partial_x - im\xi - \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_\xi) \right] \delta_\Lambda \epsilon + \frac{1}{4}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)^2 \delta_\Lambda \chi \\
&\stackrel{(5.31)}{=} \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\eta \cdot \partial_x - im\xi)\Lambda - \frac{1}{4}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_\xi) \left[(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)\Lambda \right] \\
&\quad + \frac{1}{4}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)^2 (\Delta - im\partial_\xi)\Lambda.
\end{aligned} \quad (5.33)$$

O terceiro termo do segundo membro em (5.33) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \left[(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_\xi)\Lambda \right] \\
&\stackrel{(C.1)}{=} \frac{1}{4}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \left[(\Delta - im\partial_\xi) \left((\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)\Lambda \right) - 2(\eta \cdot \partial_x - im\xi)\Lambda \right],
\end{aligned}$$

que corresponde aos dois primeiros termos do segundo membro em (5.33) com sinal oposto. Portanto, pode-se concluir que

$$\boxed{\delta_\Lambda (\delta_{\epsilon, \chi} \Psi) = 0.} \quad (5.34)$$

5.3 Equação de Campo

As equações de Euler-Lagrange derivadas da ação (5.9) lêem-se

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} - \partial_\xi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\xi \Psi)} + \partial_\eta \cdot \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\eta \cdot \partial_x \Psi)} + \square_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\square_x \Psi)} = 0, \quad (5.35a)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^*} - \partial_{\xi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\xi} \Psi^*)} + \partial_{\eta} \cdot \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\eta} \cdot \partial_x \Psi^*)} = 0, \quad (5.35b)$$

em que a Lagrangiana \mathcal{L} é dada por (5.20). Com esta Lagrangiana pode-se calcular as derivadas em (5.35b). O resultado é a equação de campo para Ψ :

$$\left[\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \left[(\square_x - m^2) - (\eta \cdot \partial_x - im\xi)(\Delta - im\partial_{\xi}) + \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\xi})^2 \right] \Psi = 0. \right] \quad (5.36)$$

É importante destacar que esta equação de campo está restrita ao hiperbolóide $\eta^2 + \xi^2 + \mu^2 = 0$ e sua primeira vizinhança. Isto pode ser verificado como segue: definindo $A(\eta, \xi, x) \equiv [(\square_x - m^2) - (\eta \cdot \partial_x - im\xi)(\Delta - im\partial_{\xi}) + \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\xi})^2] \Psi(\eta, \xi, x)$, tem-se que (5.36) lê-se

$$\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) A(\eta, \xi, x) = 0. \quad (5.37a)$$

Multiplicando ambos os membros desta equação por $\eta^2 + \xi^2 + \mu^2$, obtém-se:

$$\delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) A(\eta, \xi, x) = 0. \quad (5.37b)$$

Esta equação implica que $A(\eta, \xi, x)$ calculado no hiperbolóide $\eta^2 + \xi^2 + \mu^2 = 0$ vale zero, porque, ao integrar (5.37b) em $\eta^2 + \xi^2 + \mu^2$, obtém-se

$$\int d(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) A(\eta, \xi, x) = 0 \quad \Rightarrow \quad A(\eta, \xi, x) \Big|_{\eta^2 + \xi^2 + \mu^2 = 0} = 0.$$

Analogamente, integrando (5.37a) em $\eta^2 + \xi^2 + \mu^2$, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial (\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)} A(\eta, \xi, x) \Big|_{\eta^2 + \xi^2 + \mu^2 = 0} = 0.$$

Estes dois resultados significam que a equação $A(\eta, \xi, x) = 0$ está localizada no hiperbolóide $\eta^2 + \xi^2 + \mu^2 = 0$ e sua primeira vizinhança.

Na próxima seção verifica-se se o campo Ψ carrega a representação taquiônica de spin contínuo do grupo de Poincaré com o uso da equação de campo (5.36).

5.4 Autovalores dos Operadores de Casimir

Nesta seção é verificado se o campo Ψ carrega a representação taquiônica do grupo de Poincaré (veja a Seção 3.5) através do cálculo dos autovalores dos operadores de Casimir deste grupo com o uso da equação de campo (5.36). As expressões destes operadores em dimensão D foram desenvolvidas no Apêndice D, relações (D.1) e (D.14). De acordo com o mostrado na Tabela 2 e ao analisado na Subseção 3.5, espera-se encontrar que os autovalores dos operadores de Casimir quadrático e quártico são $-m^2$ e $-\rho^2$ (para $\mu = 1$), respectivamente. Dado que a equação de campo (5.36) é localizada no hiperbolóide $\eta^2 + \xi^2 + \mu^2 = 0$ e sua primeira vizinhança, será demonstrado que os autovalores dos operadores de Casimir são os esperados para a representação taquiônica de spin contínuo neste hiperbolóide e sua primeira vizinhança, a menos de uma transformação de gauge e de um rearranjo das componentes do campo Ψ . Estas componentes serão definidas na análise dos graus de liberdade físicos feita na Subseção 5.5.2 (relação (5.76)).

5.4.1 Autovalor do Operador de Casimir Quadrático

Com o uso da equação de campo (5.36) pode-se escrever que

$$\begin{aligned} \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)\square_x \Psi &= \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)m^2\Psi \\ &+ \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \left[\eta \cdot \partial_x - im\xi - \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) \right] (\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})\Psi, \end{aligned}$$

de modo que o autovalor de $C_2 = -\square_x$ sobre Ψ no hiperbolóide $\eta^2 + \xi^2 + \mu^2 = 0$ e sua primeira vizinhança é dado por

$$\boxed{\begin{aligned} \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)C_2\Psi &= \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) (-m^2\Psi + \delta_\epsilon\Psi) \\ \epsilon &\equiv -(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})\Psi \end{aligned}}, \quad (5.38)$$

com $\delta_\epsilon\Psi$ dado por (5.21). Assim, a menos de uma transformação de gauge, o autovalor de C_2 sobre o campo Ψ no hiperbolóide $\eta^2 + \xi^2 + \mu^2 = 0$ e sua primeira vizinhança é dado por $-m^2 < 0$, ou seja, Ψ é um campo escalar complexo taquiônico. Para concluir que Ψ carrega a representação taquiônica de spin contínuo do grupo de Poincaré, é preciso determinar o autovalor do operador de Casimir quártico sobre este campo. Isto é feito a seguir.

5.4.2 Autovalor do Operador de Casimir quártico

O autovalor do operador de Casimir quártico C_4 sobre Ψ no hiperbolóide $\eta^2 + \xi^2 + \mu^2 = 0$ e sua primeira vizinhança pode ser escrito como

$$\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)C_4\Psi = C_4\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)\Psi + \left[\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2), C_4 \right] \Psi. \quad (5.39)$$

Com o uso da equação de campo (5.36) e da expressão para C_4 derivada no Apêndice D, relação (D.14), pode-se reescrever o primeiro termo do lado direito em (5.39) como

$$\begin{aligned} C_4\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)\Psi &= (\eta \cdot \partial_\eta - \eta^2\square_\eta)(D - 3 + \eta \cdot \partial_\eta)\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)[(\square_x - m^2)\Psi + m^2\Psi] \\ &- 2(\eta \cdot \partial_\eta)(\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x)\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)\Psi + (\eta \cdot \partial_x)^2\square_\eta\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)\Psi \\ &- (D - 4)(\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x)\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)\Psi + \eta^2(\partial_\eta \cdot \partial_x)^2\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)\Psi \\ &= \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \\ &\times \left[\left((\eta \cdot \partial_\eta)(D - 3 + \eta \cdot \partial_\eta) - \eta^2\square_\eta \right) \left((\eta \cdot \partial_x - im\xi)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) - \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})^2 \right) \right. \\ &- 2(\eta \cdot \partial_\eta)(\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x) + (\eta \cdot \partial_x)^2\square_\eta - (D - 4)(\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x) + \eta^2(\partial_\eta \cdot \partial_x)^2 \left. \right] \Psi \\ &+ m^2 \left((\eta \cdot \partial_\eta)(D - 3 + \eta \cdot \partial_\eta) - \eta^2\square_\eta \right) \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)\Psi \\ &+ \left[(\eta \cdot \partial_\eta)(D - 3 + \eta \cdot \partial_\eta) - \eta^2\square_\eta, \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \right] \\ &\times \left((\eta \cdot \partial_x - im\xi)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) - \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})^2 \right) \Psi \\ &+ \left\{ \left[-2(\eta \cdot \partial_\eta)(\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x), \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \right] + \left[(\eta \cdot \partial_x)^2\square_\eta, \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \right] \right. \\ &\left. + \left[-(D - 4)(\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x), \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \right] + \left[\eta^2(\partial_\eta \cdot \partial_x)^2, \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \right] \right\} \Psi, \quad (5.40) \end{aligned}$$

em que o termo $\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\square_x - m^2)$ na primeira linha foi substituído pelos correspondentes termos da equação de campo (5.36) e a segunda igualdade foi obtida com o uso dos comutadores entre δ' e os operadores $(\eta \cdot \partial_\eta)(D - 3 + \eta \cdot \partial_\eta) - \eta^2 \square_\eta$, $-2(\eta \cdot \partial_\eta)(\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x)$, $(\eta \cdot \partial_x)^2 \square_\eta$, $-(D - 4)(\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x)$ e $\eta^2(\partial_\eta \cdot \partial_x)^2$. O termo entre parênteses em (5.40) pode ser escrito como

$$-\left[\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2), C_4\right]\Psi + \left[\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2), (\eta \cdot \partial_\eta)(D - 3 + \eta \cdot \partial_\eta) - \eta^2 \square_\eta\right]\square_x \Psi,$$

de sorte que (5.40) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & C_4 \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \Psi \\ &= \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \\ & \times \left[\left((\eta \cdot \partial_\eta)(D - 3 + \eta \cdot \partial_\eta) - \eta^2 \square_\eta \right) \left((\eta \cdot \partial_x - im\xi)(\Delta - im\partial_\xi) - \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_\xi)^2 \right) \right. \\ & \quad \left. - 2(\eta \cdot \partial_\eta)(\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x) + (\eta \cdot \partial_x)^2 \square_\eta - (D - 4)(\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x) + \eta^2(\partial_\eta \cdot \partial_x)^2 \right] \Psi \\ & + m^2 \left((\eta \cdot \partial_\eta)(D - 3 + \eta \cdot \partial_\eta) - \eta^2 \square_\eta \right) \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \Psi - \left[\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2), C_4 \right] \Psi \\ & + \left[(\eta \cdot \partial_\eta)(D - 3 + \eta \cdot \partial_\eta) - \eta^2 \square_\eta, \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \right] \left(-\square_x + (\eta \cdot \partial_x - im\xi)(\Delta - im\partial_\xi) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_\xi)^2 \right) \Psi. \end{aligned} \tag{5.41}$$

O último termo em (5.41) pode ser simplificado com o uso da equação de campo (5.36), visto que o comutador entre δ' e o operador diferencial $(\eta \cdot \partial_\eta)(D - 3 + \eta \cdot \partial_\eta) - \eta^2 \square_\eta$ é proporcional a δ' :

$$\begin{aligned} & \left[(\eta \cdot \partial_\eta)(D - 3 + \eta \cdot \partial_\eta) - \eta^2 \square_\eta, \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \right] \left(-\square_x + (\eta \cdot \partial_x - im\xi)(\Delta - im\partial_\xi) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_\xi)^2 \right) \Psi \\ & \stackrel{(5.36)}{=} -m^2 \left[(\eta \cdot \partial_\eta)(D - 3 + \eta \cdot \partial_\eta) - \eta^2 \square_\eta, \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \right] \Psi, \end{aligned}$$

Substituindo esta relação em (5.41) e levando $[\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2), C_4]$ para o primeiro membro desta relação, obtém-se

$$\begin{aligned} & C_4 \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \Psi + \left[\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2), C_4 \right] \stackrel{(5.39)}{=} \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) C_4 \Psi \\ &= \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \left[\left((\eta \cdot \partial_\eta)(D - 3 + \eta \cdot \partial_\eta) - \eta^2 \square_\eta \right) \left((\eta \cdot \partial_x - im\xi)(\Delta - im\partial_\xi) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_\xi)^2 + m^2 \right) - 2(\eta \cdot \partial_\eta)(\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x) + (\eta \cdot \partial_x)^2 \square_\eta \right. \\ & \quad \left. - (D - 4)(\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x) + \eta^2(\partial_\eta \cdot \partial_x)^2 \right] \Psi, \end{aligned} \tag{5.42}$$

que é o que se objetiva calcular. Com um rearranjo adequado de termos nesta última equação pode-se obter uma simetria local do tipo ϵ (5.21) segundo a qual o autovalor de C_4 no hiperbolóide $\eta^2 + \xi^2 + \mu^2 = 0$ e sua primeira vizinhança é expresso. Isto é feito reescrevendo em (5.42) os operadores $\partial_\eta \cdot \partial_x \rightarrow (\Delta - im\partial_\xi) + im\partial_\xi - \rho$ e $\eta \cdot \partial_x \rightarrow (\eta \cdot \partial_x - im\xi) + im\xi$ e com o uso dos comutadores (C.8)-(C.11) de modo a levar $\eta \cdot \partial_x - im\xi$ e

$\eta^2 + \xi^2 + \mu^2$ para a esquerda do segundo membro de (5.42). O resultado após um trabalho algébrico é:

$$\begin{aligned} \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)C_4\Psi = & \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)\delta_\epsilon\Psi + \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)\left\{\frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_\xi) \right. \\ & \times \left[\eta \cdot \partial_\eta(D - 3 + \eta \cdot \partial_\eta)(\Delta - im\partial_\xi) + [\eta \cdot \partial_x + im\xi - \eta^2(\Delta - im\partial_\xi)]\square_\eta \right. \\ & + (\rho - im\partial_\xi)(2\eta \cdot \partial_\eta + D - 2) \left. \right] - \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\eta \cdot \partial_\eta)^2(\Delta - im\partial_\xi)^2 \\ & - \frac{D-3}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\eta \cdot \partial_\eta)(\Delta - im\partial_\xi)^2 + \frac{1}{2}\eta^2(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)\square_\eta(\Delta - im\partial_\xi)^2 + 2m^2(\eta \cdot \partial_\eta)\xi\partial_\xi \\ & + m^2(D-2)\xi\partial_\xi + 2\rho im\xi(\eta \cdot \partial_\eta) + \rho(D-2)im\xi + \rho^2\eta^2 - 2\rho\eta^2 im\partial_\xi - m^2\eta^2\partial_\xi^2 - m^2(\xi^2 + \eta^2)\square_\eta \\ & \left. + m^2\eta \cdot \partial_\eta(D - 3 + \eta \cdot \partial_\eta) \right\}\Psi, \end{aligned} \quad (5.43)$$

onde $\delta_\epsilon\Psi$ é dado por (5.21) com

$$\begin{aligned} \epsilon = & \left\{ \eta \cdot \partial_\eta(D - 3 + \eta \cdot \partial_\eta)(\Delta - im\partial_\xi) + [\eta \cdot \partial_x + im\xi - \eta^2(\Delta - im\partial_\xi)]\square_\eta \right. \\ & \left. + (\rho - im\partial_\xi)(2\eta \cdot \partial_\eta + D - 2) \right\}\Psi. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Para finalizar, no segundo termo do lado direito da igualdade (5.43),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_\xi) \left[\eta \cdot \partial_\eta(D - 3 + \eta \cdot \partial_\eta)(\Delta - im\partial_\xi) \right. \\ & \left. + [\eta \cdot \partial_x + im\xi - \eta^2(\Delta - im\partial_\xi)]\square_\eta + (\rho - im\partial_\xi)(2\eta \cdot \partial_\eta + D - 2) \right] \Psi, \end{aligned} \quad (5.45)$$

leva-se o operador $\Delta - im\partial_\xi$ exterior aos colchetes para a direita com o uso dos comutadores (C.12)-(C.15). Ao escrever o resultado do comutador (C.14) na relação (5.45), pode-se fazer uso da equação de campo (5.36) de modo a escrever o operador \square_x em termos de $\eta \cdot \partial_x - im\xi$, $\Delta - im\partial_\xi$ e $\eta^2 + \xi^2 + \mu^2$ para obter-se mais simplificações no autovalor de C_4 . O resultado final é:

$$\boxed{\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)C_4\Psi = \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)\left(-\mu^2\rho^2\Psi + \delta_\epsilon\Psi + R\Psi\right)}, \quad (5.46)$$

com ϵ dado por (5.44) e

$$\boxed{R\Psi \equiv \left[-\rho^2\xi^2 + m^2(\xi^2 + \mu^2)\partial_\xi^2 + m^2\mu^2\square_\eta + 2\rho(\xi^2 + \mu^2)im\partial_\xi + 2m^2(\eta \cdot \partial_\eta)\xi\partial_\xi \right. \\ \left. + m^2(D-2)\xi\partial_\xi + 2\rho im\xi(\eta \cdot \partial_\eta) + \rho(D-2)im\xi + m^2(D-3)\eta \cdot \partial_\eta \right. \\ \left. + m^2(\eta \cdot \partial_\eta)^2 \right]\Psi}. \quad (5.47)$$

O operador R não possui derivadas em x . Isso significa que se considerarmos as componentes de Ψ segundo a expansão $\Psi(\eta, \xi, x) = \sum_n \eta^{\mu_1} \cdots \eta^{\mu_n} \psi_{\mu_1 \cdots \mu_n}(x)$, então $R\Psi$ é apenas um rearranjo das componentes $\psi_\mu(x)$, $\psi_{\mu\nu}(x), \dots$. Por isso esse termo não pode ser reescrito como uma transformação de gauge de Ψ . Portanto, $\delta'C_4\Psi = -\delta'\mu^2\rho^2\Psi$ a menos de uma transformação de gauge e de um rearranjo das componentes de Ψ . Para que isto seja verdade é necessário que $R\Psi$ tenha as mesmas propriedades de Ψ , a saber, satisfaça a mesma equação de campo e tenha as mesmas simetrias locais. Isto é demonstrado no Apêndice E.

5.5 Escolha de Gauge e Graus de Liberdade Físicos

5.5.1 Escolha de Gauge

Com o *gauge*

$$(\Delta - im\partial_{\xi})\Psi = 0, \quad (5.48)$$

a equação de campo (5.36) é simplificada a

$$\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\square_x - m^2)\Psi = 0. \quad (5.49)$$

Resolvendo a condição imposta pela função delta nesta equação, tem-se

$$(\square_x - m^2)\Psi = \frac{1}{4}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)^2\omega, \quad (5.50)$$

onde $\omega = \omega(\eta, \xi, x)$ é uma função arbitrária. A simetria- χ (5.28) pode ser utilizada em (5.50) para eliminar ω . De fato, se $(\square_x - m^2)\chi = \omega$, então (5.50) pode ser reescrita como $(\square_x - m^2)\Psi = 0$. A equação para χ não o determina completamente porque há uma simetria residual χ_R pela qual $(\Delta - im\partial_{\xi})\delta_{\chi_R}\Psi = 0 = (\square_x - m^2)\delta_{\chi_R}\Psi$, isto é,

$$\left[\eta \cdot \partial_x - im\xi + \frac{1}{4}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\xi}) \right] \chi_R = 0, \quad (5.51a)$$

$$(\square_x - m^2)\chi_R = 0. \quad (5.51b)$$

Por outro lado, levando em conta a simetria- ϵ (5.21), o gauge (5.48) em conjunto com $(\square_x - m^2)\Psi = 0$ implicam que $(\Delta - im\partial_{\xi})\delta_{\epsilon}\Psi = 0 = (\square_x - m^2)\delta_{\epsilon}\Psi$, isto é,

$$\left[\square_x - m^2 - \frac{1}{2}(\eta^2 + \mu^2 + \xi^2)(\Delta - im\partial_{\xi})^2 \right] \epsilon = 0, \quad (5.52a)$$

$$\left[\eta \cdot \partial_x - im\xi - \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\xi}) \right] (\square_x - m^2)\epsilon = 0. \quad (5.52b)$$

A primeira transformação em (5.31) pode ser utilizada neste ponto ao fazer-se a escolha do seguinte gauge para o parâmetro ϵ :

$$(\Delta - im\partial_{\xi})\epsilon = 0. \quad (5.53)$$

Com esta escolha, a equação (5.52a) é simplificada a

$$(\square_x - m^2)\epsilon = 0, \quad (5.54)$$

que, é claro, é compatível com a equação (5.52b). O gauge (5.53) fixa parcialmente o parâmetro Λ em (5.31) porque há uma simetria residual Λ_R pela qual $(\Delta - im\partial_{\xi})\delta_{\Lambda_R}\epsilon = 0 = (\square_x - m^2)\delta_{\Lambda_R}\epsilon$, isto é,

$$\left[(\eta \cdot \partial_x - im\xi) + \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\xi}) \right] \Lambda_R = 0, \quad (5.55a)$$

$$(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\square_x - m^2)\Lambda_R = 0. \quad (5.55b)$$

Sumarizando todos os resultados desta subseção, tem-se:

$$(\square_x - m^2)\Psi = (\Delta - im\partial_{\xi})\Psi = 0, \quad (5.56a)$$

$$\delta_{\epsilon, \chi_R}\Psi = (\eta \cdot \partial_x - im\tilde{\xi})\epsilon + \frac{1}{4}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)^2\chi_R, \quad (5.56b)$$

$$(\square_x - m^2)\epsilon = (\Delta - im\partial_{\xi})\epsilon = 0, \quad (5.56c)$$

$$\delta_{\Lambda_R}\epsilon = \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)\Lambda_R, \quad (5.56d)$$

$$\delta_{\Lambda_R}\chi_R = (\Delta - im\partial_{\xi})\Lambda_R, \quad (5.56e)$$

em que o parâmetro χ_R satisfaz (5.51b) e (5.51a), enquanto que Λ_R satisfaz (5.55a) e (5.55b).

5.5.2 Graus de Liberdade Físicos

Nesta subseção é investigado como a escolha do gauge (5.48) pode ser utilizada no estudo dos graus de liberdade físicos carregados pelo campo Ψ . Isto é feito considerando a transformada de Fourier do campo Ψ na coordenada x :

$$\Psi(\eta, \xi, x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \Psi(\eta, \xi, k) e^{ik \cdot x}.$$

Em seguida, faz-se a escolha de um sistema de referência inercial pelo qual o momento k_μ tem apenas uma componente espacial diferente de zero:

$$k_\mu = (0, \dots, 0, m).$$

Neste caso, os operadores em (5.56a)-(5.56e) podem ser reescritos no espaço dos momentos como

$$\begin{aligned} \square_x \Psi(\eta, \xi, x) &\rightarrow -k^2 \Psi(\eta, \xi, k) \\ \Delta \Psi(\eta, \xi, x) &\rightarrow (-ik \cdot \partial_\eta + \rho) \Psi(\eta, \xi, k) , \\ \eta \cdot \partial_x \Psi(\eta, \xi, x) &\rightarrow -ik \cdot \eta \Psi(\eta, \xi, k) \end{aligned} \quad (5.57)$$

onde as flechas indicam a passagem do espaço das posições ao espaço dos momentos. Definindo

$$\begin{aligned} \xi^\pm &= \xi \pm \eta^{D-1} \\ \tilde{\xi}_\pm &= \tilde{\xi} \pm \eta_{D-1} \end{aligned} \quad (5.58)$$

tem-se $\Psi = \Psi(\eta_\alpha, \xi_+, \tilde{\xi}_-, k)$, $\alpha = 0, \dots, D-2$, de modo que, com o uso da segunda linha em (5.57), a segunda igualdade em (5.56a) no espaço dos momentos lê-se:

$$[im\partial_{\eta(D-1)} + \rho - im\partial_{\tilde{\xi}}]\Psi \stackrel{(5.58)}{=} -2im\frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}^-}\Psi + \rho\Psi = 0.$$

A solução desta equação é dada por

$$\Psi(\eta_\alpha, \xi^+, \tilde{\xi}^-, k) = e^{-\frac{i\rho \tilde{\xi}^-}{2m}} \psi(\eta_\alpha, \xi^+, k) \quad (5.59)$$

em que $\psi(\eta_\alpha, \xi^-, k)$ é uma função arbitrária. Analogamente, dado que $\epsilon(\eta, \xi, k)$ é a transformada de Fourier na coordenada x de $\epsilon(\eta, \xi, x)$, tem-se que a segunda igualdade em (5.56c) no espaço dos momentos lê-se

$$-2im\frac{\partial \epsilon}{\partial \tilde{\xi}^-} + \rho\epsilon = 0, \quad (5.60)$$

cujas solução é:

$$\epsilon(\eta_\alpha, \xi^+, \tilde{\xi}^-, k) = e^{-\frac{i\rho \tilde{\xi}^-}{2m}} \epsilon(\eta_\alpha, \xi^+, k) \quad (5.61)$$

em que $\varepsilon(\eta_\alpha, \xi_-, k)$ é uma função arbitrária. A simetria- ε em (5.56b) no espaço dos momentos é dada por

$$\delta_\varepsilon \Psi(\eta_\alpha, \xi_+, \xi_-, k) \stackrel{(5.57)}{=} (im\eta_{D-1} - im\xi)\varepsilon(\eta_\alpha, \xi_+, \xi_-, k) = -im\xi_- \varepsilon(\eta_\alpha, \xi_+, \xi_-, k),$$

de modo que

$$\delta_\varepsilon \psi(\eta_\alpha, \xi_-, k) = -im\xi_- \varepsilon(\eta_\alpha, \xi_-, k), \quad (5.62)$$

a qual pode ser utilizada para eliminar a dependência em ξ_- de ψ . Isto é possível apenas se ε satisfazer a condição $\partial_{\xi_-} \delta_\varepsilon \psi = 0$.³⁷ Portanto,

$$\Psi(\eta_\alpha, \xi_+, k) = e^{-\frac{i\rho\xi_+}{2m}} \psi(\eta_\alpha, k). \quad (5.63)$$

O próximo passo é expandir o campo taquiônico em torno do hiperbolóide $\eta^2 + \xi^2 + \mu^2 = 0$. Isto é feito introduzindo variáveis que identificam hiperbolóides diferentes e pontos sobre eles. Redefinindo as coordenadas do espaço auxiliar como

$$\begin{aligned} \eta^\mu &\rightarrow \hat{\eta}^\mu = \frac{\eta^\mu}{|\eta|}, \\ \xi &\rightarrow \hat{\xi} = \frac{\xi}{|\eta|}, \end{aligned} \quad |\eta| \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad (5.64)$$

as quais satisfazem a equação

$$\hat{\eta}^2 + \hat{\xi}^2 = -1, \quad (5.65)$$

vê-se que $|\eta|$ caracteriza hiperbolóides diferentes, visto que ao inserir (5.64) em (5.65), tem-se

$$\eta^2 + \xi^2 + |\eta|^2 = 0. \quad (5.66)$$

Por outro lado, $\hat{\eta}^\mu$ e $\hat{\xi}$ parametrizam pontos sobre o hiperbolóide (5.66). Com estas definições, a expansão do campo taquiônico em torno do hiperbolóide $\eta^2 + \xi^2 + \mu^2 = 0$ é dada por

$$\Psi(\eta, \xi, k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mu^2 - |\eta|^2)^n \frac{\partial^n \Psi}{\partial (\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)^n} (\hat{\eta}, \hat{\xi}, k). \quad (5.67)$$

Definindo

$$\Psi_{\chi_R}(\eta, \xi, k) \equiv \Psi(\hat{\eta}, \hat{\xi}, k) + (\mu^2 - |\eta|^2) \frac{\partial \Psi}{\partial (\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)} (\hat{\eta}, \hat{\xi}, k), \quad (5.68)$$

tem-se que a expansão (5.67) pode ser reescrita como

$$\Psi(\eta, \xi, k) = \Psi_{\chi_R}(\eta, \xi, k) + \delta_{\chi_R} \Psi(\eta, \xi, k),$$

onde $\delta_{\chi_R} \Psi$ é a simetria- χ_R em (5.56b) com

$$\chi_R(\eta, \xi, k) \equiv 4 \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!} (\mu^2 - |\eta|^2)^{n-2} \frac{\partial \Psi}{\partial (\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)} (\hat{\eta}, \hat{\xi}, k). \quad (5.69)$$

Os dois termos do segundo membro em (5.68) são

$$\Psi(\hat{\eta}, \hat{\xi}, k) = e^{-\frac{i\rho\hat{\xi}}{2m}} \psi(\hat{\eta}_\alpha, k), \quad (5.70)$$

dado que com (5.64) pode-se definir $\hat{\xi}_\pm = \xi_\pm / |\eta|$, e

$$\frac{\partial \Psi}{\partial (\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)} (\hat{\eta}, \hat{\xi}, k) = \psi(\hat{\eta}_\alpha, k) \frac{\partial}{\partial (\mu^2 - |\eta|^2)} e^{-\frac{i\rho\hat{\xi}_+}{2m}} + e^{-\frac{i\rho\hat{\xi}_-}{2m}} \frac{\partial}{\partial (\mu^2 - |\eta|^2)} \psi(\hat{\eta}_\alpha, k).$$

³⁷Um exemplo (trivial) de $\varepsilon(\eta_\alpha, \xi_-, k)$ que satisfaça esta condição é $\varepsilon(\eta_\alpha, \xi_-, k) = f(\eta_\alpha, k) / \xi_-$, onde $f(\eta_\alpha, k)$ é uma função arbitrária.

Assim, visto que as derivadas desta última igualdade resultam em,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial(\mu^2 - |\eta|^2)} e^{-\frac{i\rho\hat{\xi}_+}{2m}} \right] &= \frac{i\rho}{4m\mu} e^{-\frac{i\rho\hat{\xi}_+}{2m}} \hat{\xi}_+ \\ \frac{\partial}{\partial(\mu^2 - |\eta|^2)} \psi(\hat{\eta}_\alpha, k) &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial \psi}{\partial |\eta|}(\hat{\eta}_\alpha, k) \end{aligned} ,$$

e, em conjunto com o resultado (5.70), a expressão para o campo Ψ_{χ_R} (5.68) se torna:

$$\Psi_{\chi_R}(\eta_\alpha, \hat{\xi}_+, k) = e^{-\frac{i\rho\hat{\xi}_+}{2m}} \left[1 + (\mu^2 - |\eta|^2) \frac{i\rho\hat{\xi}_+}{4\mu m} \right] \psi(\hat{\eta}_\alpha, k) - \frac{1}{2\mu} (\mu^2 - |\eta|^2) e^{-\frac{i\rho\hat{\xi}_+}{2m}} \frac{\partial \psi}{\partial |\eta|}(\hat{\eta}_\alpha, k). \quad (5.71)$$

Deste ponto em diante será explorado a analiticidade de $\psi(\hat{\eta}_\alpha, k)$ na coordenada $\hat{\eta}_\alpha$. Com esta hipótese, pode-se expandir o campo $\psi(\hat{\eta}_\alpha, k)$ em termos de suas componentes como:

$$\psi(\hat{\eta}_\alpha, k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{\eta}^{\alpha_1} \dots \hat{\eta}^{\alpha_n} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(k), \quad \alpha_i = 0, \dots, D-2, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (5.72)$$

em que $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(k)$ é um tensor completamente simétrico. A expansão (5.72) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \psi(\hat{\eta}_\alpha, k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{\eta}^{\alpha_1} \dots \hat{\eta}^{\alpha_i} \dots \hat{\eta}^{\alpha_j} \dots \hat{\eta}^{\alpha_n} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_j \dots \alpha_n}(k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{\eta}^{\alpha_1} \dots \hat{\eta}^{\alpha_i} \dots \hat{\eta}^{\alpha_i} \dots \hat{\eta}^{\alpha_n} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_i \dots \alpha_n}(k) \quad , \quad \forall i, j = 1, \dots, n. \quad (5.73) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{\eta}^{\alpha_1} \dots \hat{\eta}^{\alpha_i} \dots \hat{\eta}^{\alpha_j} \dots \hat{\eta}^{\alpha_n} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_j \dots \alpha_n}(k) \Big|_{\alpha_i \neq \alpha_j} \end{aligned}$$

Veja que na primeira somatória da segunda igualdade em (5.73) há o termo $\hat{\eta}_{\alpha_i} \hat{\eta}^{\alpha_i} = (\hat{\eta}^0)^2 - (\hat{\eta}^1)^2 - \dots - (\hat{\eta}^{D-2})^2 \stackrel{(5.65)}{=} -1 - \hat{\xi}_+ \hat{\xi}_-$, para cada $i = 1, \dots, n$. Portanto, o segundo membro da equação (5.73) tem dependência em $\hat{\xi}_+$, $\hat{\xi}_-$ e $\hat{\eta}_\alpha$, contradizendo o primeiro membro que tem dependência apenas em $\hat{\eta}_\alpha$. Esta inconsistência é resolvida se o tensor $\psi_{\mu_1 \dots \mu_n}$ tiver todos os traços nulos, ou seja, $g^{\mu_i \mu_j} \psi_{\mu_1 \dots \mu_i \dots \mu_j \dots \mu_n}(k) = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, n$. Neste caso, a equação (5.72) é reescrita como

$$\psi(\hat{\eta}_\alpha, k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{\eta}^{\alpha_1} \dots \hat{\eta}^{\alpha_n} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^T(k), \quad (5.74)$$

em que o sobrescrito $'T'$ indica que o tensor $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ é sem traço.

O último passo para analisar os graus de liberdade físicos carregados pelo campo Ψ é substituir (5.74) em (5.71). Para calcular $\partial \psi / \partial |\eta|$ é conveniente voltar às variáveis originais η_α :

$$\begin{aligned} \psi(\eta_\alpha, k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\eta|^{-n}}{n!} \eta^{\alpha_1} \dots \eta^{\alpha_n} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^T(k), \\ \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial |\eta|}(\hat{\eta}_\alpha, k) \Big|_{|\eta|=\mu} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-n)|\eta|^{-(n+1)}}{n!} \eta^{\alpha_1} \dots \eta^{\alpha_n} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^T(k) \Big|_{|\eta|=\mu} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} \frac{\hat{\eta}^{\alpha_1} \dots \hat{\eta}^{\alpha_n}}{\mu} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^T(k). \end{aligned} \quad (5.75)$$

Substituindo (5.74) e (5.75) em (5.71), obtém-se

$$\Psi_{\chi_R}(\hat{\eta}_\alpha, \hat{\xi}_+, k) = e^{-\frac{i\rho\hat{\xi}_+}{2m}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{\eta}^{\alpha_1} \dots \hat{\eta}^{\alpha_n} \left[1 + \frac{1}{2\mu} (\mu^2 - |\eta|^2) \left(\frac{n}{\mu} + \frac{i\rho\hat{\xi}_+}{2m} \right) \right] \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^T(k). \quad (5.76)$$

Com base nesta relação, investiga-se, a seguir, os graus de liberdade físicos que Ψ carrega de acordo com os valores possíveis de $-\mu^2 \rho^2$:

(i) **Táquion de spin s :** $\rho^2 = -\frac{m^2}{\mu^2}s(D-3+s) \leq 0$

Escrevendo (5.76) como duas somas, tem-se

$$\Psi_{\chi_R}(\hat{\eta}_\alpha, \hat{\xi}_+, k) = e^{-\frac{i\mu\rho\hat{\xi}_+}{2m}} \left(\sum_{n=0}^s + \sum_{n=s+1}^{\infty} \right) \frac{1}{n!} \hat{\eta}^{\alpha_1} \cdots \hat{\eta}^{\alpha_n} \left[1 + \frac{1}{2\mu}(\mu^2 - |\eta|^2) \left(\frac{n}{\mu} + \frac{i\rho\hat{\xi}_+}{2m} \right) \right] \psi_{\alpha_1 \cdots \alpha_n}^T(k). \quad (5.77)$$

Esta equação implica que Ψ_{χ_R} tem duas componentes: uma de dimensão finita correspondente à primeira soma com $s+1$ tensores de ordem crescente de 0 a s , e a componente de dimensão infinita descrita pela segunda soma. Se $s=0$, então $\rho=0$, implicando que $C_4=0$. Neste caso, apenas a componente de dimensão finita (unidimensional) é unitária porque representa o **táquion escalar** onde o setor não-compacto do grupo $SO(1, D-2)$ (o LG da representação taquiônica conforme analisado na Seção 3.5 para $D=4$) age. Por outro lado, se $s \neq 0$ a componente infinita de Ψ_{χ_R} é o **táquion de spin s** com tensores de ordem $s+1, s+2, \dots$. Esta componente caracteriza a representação unitária do grupo $SO(1, D-2)$ porque é de dimensão infinita. Neste caso, a componente de dimensão finita é não-unitária.

(ii) **Táquions de spin contínuo:** $\rho^2 > 0$

Neste caso (5.76) caracteriza a representação de dimensão infinita do grupo $SO(1, D-2)$, portanto, unitária. Os tensores em (5.76) são de todas as ordens.

5.6 Vértice Cúbico

Seja

$$S[\Psi, \Psi^*, J, J^*] = S_0[\Psi, \Psi^*] + S_c[\Psi, \Psi^*, J, J^*] \quad (5.78)$$

em que S_0 é dada por (5.1), (5.8) ou (5.9) e

$$S_c[\Psi, \Psi^*, J, J^*] = -g \int d\eta d\xi dx \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) (\Psi^* J + \Psi J^*) \quad (5.79)$$

é o *vértice cúbico* composto pelo campo taquiônico Ψ e pela corrente $J = J(\eta, \xi, x)$ além de seus respectivos complexos conjugados que, conforme será analisado na Subseção 5.6.3, depende de dois campos escalares massivos e suas derivadas.³⁸ Neste vértice, g é uma constante de acoplamento.

Devido à presença da derivada da função delta, S_c é invariante sob as transformações

$$\begin{aligned} \delta_\Theta J &= \frac{1}{4}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)^2 \Theta \\ \delta_\chi \Psi &= \frac{1}{4}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)^2 \chi \end{aligned} \quad (5.80)$$

em que $\Theta = \Theta(\eta, \xi, x)$ e $\chi = \chi(\eta, \xi, x)$ são funções arbitrárias.

³⁸Nas referências [65,66] o leitor pode encontrar uma lista com todos os possíveis vértices cúbicos que são invariantes sob transformação de paridade, dentre os quais, o estudado neste seção. Nestas referências, o autor expressa os vértices cúbicos em termos das coordenadas no cone de luz; portanto, tais vértices não são covariantes.

5.6.1 Equação de Continuidade

A equação de campo derivada da ação (5.78) é dada por

$$\frac{\delta S}{\delta \Psi^*} = 0 \Rightarrow \delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(Q\Psi - gJ) = 0, \quad (5.81)$$

em que $Q \equiv (\square_x - m^2) - (\eta \cdot \partial_x - im\xi)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) + \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})^2$. Multiplicando ambos os membros da equação (5.81) por $\eta^2 + \xi^2 + \mu^2$ e em seguida aplicando o operador $(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})$, obtém-se

$$\begin{aligned} & (\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})\delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(Q\Psi - gJ) \\ &= \delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})(Q\Psi - gJ) + 2(\eta \cdot \partial_x - im\xi)\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(Q\Psi - gJ) = 0 \\ &\therefore g\delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})J = \delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})Q\Psi, \end{aligned} \quad (5.82)$$

em que na primeira igualdade em (5.82) foi utilizada a relação de comutação $[\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}, \delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)] = 2(\eta \cdot \partial_x - im\xi)\delta'(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)$ e a equação de campo (5.81). Com o uso das relações de comutação (C.1) e (C.2), o comutador $[\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}, Q]$ é dado por

$$[\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}, Q] = -(\square_x - m^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) + (\eta \cdot \partial_x - im\xi)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})^2,$$

de modo que (5.82) lê-se

$$\begin{aligned} & g\delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})J \\ &= \delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \left[Q(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) - (\square_x - m^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) + (\eta \cdot \partial_x - im\xi)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})^2 \right] \Psi = 0 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{\delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})J = 0}, \quad (5.83)$$

que é uma **equação de continuidade** restrita ao hiperbolóide $\eta^2 + \xi^2 + \mu^2 = 0$ para a corrente J .

Resolvendo o vínculo imposto pela função delta em (5.83), tem-se

$$(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})J = \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)\omega, \quad (5.84)$$

em que $\omega = \omega(\eta, \xi, x)$ é uma função arbitrária que pode ser eliminada com o uso da primeira transformação em (5.80). De fato, fazendo $J \rightarrow J + \delta_{\Theta}J$ em (5.84), tem-se que

$$\boxed{(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})J = 0}, \quad (5.85)$$

se, e somente se, $(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})\delta_{\Theta}J = \omega$, ou seja,

$$\left[\eta \cdot \partial_x - im\xi + \frac{1}{4}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) \right] \Theta = \frac{1}{2}\omega.$$

5.6.2 Invariância de Gauge

Com a transformação (5.21) a ação (5.78) se transforma como $\delta_{\epsilon}S = \delta_{\epsilon}S_0 + \delta_{\epsilon}S_c$ onde, conforme já demonstrado na Subseção 5.2.2, tem-se $\delta_{\epsilon}S_0 = 0$ a menos de um termo de superfície. Por outro lado, $\delta_{\epsilon}S_c$ pode ser escrito como

$$\delta_{\epsilon}S_c = \delta_{\epsilon}S_c^{(1)} + \delta_{\epsilon}S_c^{(2)}, \quad (5.86)$$

com

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon S_c^{(1)} &\equiv -g \int d\eta d\zeta dx \delta'(\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2) [(\eta \cdot \partial_x - im\zeta) \epsilon] J^* \\ &= g \int d\eta d\zeta dx \delta'(\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2) \epsilon (\eta \cdot \partial_x + im\zeta) J^* + \text{t.s.}\end{aligned}\quad (5.87)$$

e

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon S_c^{(2)} &\equiv -\frac{g}{2} \int d\eta d\zeta dx \delta(\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2) [(\partial_\eta \cdot \partial_x - im\partial_\zeta + \rho) \epsilon] J^* \\ &= -\delta_\epsilon S_c^{(1)} - \frac{g}{2} \int d\eta d\zeta dx \epsilon \delta(\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2) (\Delta + im\partial_\zeta) J^* + \text{t.s.},\end{aligned}\quad (5.88)$$

em que na primeira linha em ambas as equações (5.87) e (5.88) foi efetuado integrações por partes. Assim,

$$\delta_\epsilon S_c = -\frac{g}{2} \int d\eta d\zeta dx \epsilon \delta(\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2) (\Delta + im\partial_\zeta) J^* + \text{t.s.}\quad (5.89)$$

O complexo conjugado da equação de continuidade (5.83) é

$$\delta(\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2) (\Delta + im\partial_\zeta) J^* = 0, \quad (5.90)$$

portanto, pode-se concluir que a variação (5.89) é nula:

$$\boxed{\delta_\epsilon S_c = 0.} \quad (5.91)$$

Assim, vê-se que a equação de continuidade dada por (5.90) é uma condição necessária para que a teoria (5.78) seja invariante sob a transformação de gauge (5.21).

5.6.3 Cálculo da Corrente

Com o uso da primeira transformação em (5.80), pode-se expandir a corrente J em torno do hiperbolóide $\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2 = 0$ e de sua primeira vizinhança de maneira análoga a feita para o campo Ψ na Subseção 5.5.2. De fato, com as variáveis $\hat{\eta}^\mu = \eta^\mu / |\eta|$ e $\hat{\xi} = \zeta / |\eta|$, $|\eta| \in \mathbb{R}$, que parametrizam pontos sobre cada hiperbolóide $\eta^2 + \zeta^2 + |\eta|^2 = 0$ e são vinculadas por $\hat{\eta}^2 + \hat{\xi}^2 = -1$, tem-se

$$\begin{aligned}J(\eta, \zeta, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\eta|^2 - \mu^2)^n}{n!} \frac{\partial^n J}{\partial(\eta^2 + \zeta^2 + |\eta|^2)^n}(\hat{\eta}, \hat{\xi}, x) \Big|_{|\eta|=\mu} \\ &= J_\Theta(\eta, \zeta, x) + \delta_\Theta J(\eta, \zeta, x)\end{aligned}\quad (5.92)$$

em que

$$J_\Theta(\eta, \zeta, x) \equiv \left\{ J(\hat{\eta}, \hat{\xi}, x) + (\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2) \frac{\partial J}{\partial(\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2)}(\hat{\eta}, \hat{\xi}, x) \right\} \Big|_{\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2 = 0} \quad (5.93)$$

e $\delta_\Theta J$ é a primeira relação em (5.80) com

$$\Theta(\eta, \zeta, x) \equiv 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2)^{n-2}}{n!} \frac{\partial^n J}{\partial(\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2)^n}(\hat{\eta}, \hat{\xi}, x) \Big|_{\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2 = 0}. \quad (5.94)$$

Definindo os termos em (5.93) como

$$\begin{aligned}J_0(\eta, \zeta, x) &\equiv \frac{\partial J}{\partial(\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2)}(\hat{\eta}, \hat{\xi}, x) \Big|_{\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2 = 0}, \\ J_1(\eta, \zeta, x) &\equiv J(\hat{\eta}, \hat{\xi}, x) \Big|_{\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2 = 0},\end{aligned}$$

obtém-se

$$J_{\Theta}(\eta, \xi, x) = J_1(\eta, \xi, x) + (\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)J_0(\eta, \xi, x). \quad (5.95)$$

Aplicando a equação de continuidade (5.83) à corrente (5.92), tem-se

$$\begin{aligned} \delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})J &= \delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})J_{\Theta} + \underbrace{\delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})\delta_{\Theta}J}_{=0} \\ &= \delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) \left[J_1 + (\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)J_0 \right] \\ &\stackrel{(C.1)}{=} \delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})J_1 + \delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \left[(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) + 2(\eta \cdot \partial_x - im\xi) \right] J_0 \\ &= \delta(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \left[(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})J_1 + 2(\eta \cdot \partial_x - im\xi)J_0 \right] \stackrel{(5.83)}{=} 0, \end{aligned}$$

que, por conta da restrição imposta pela função delta, tem-se

$$(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})J_1 + 2(\eta \cdot \partial_x - im\xi)J_0 = \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)\alpha,$$

onde $\alpha = \alpha(\eta, \xi, x)$ é uma função arbitrária. Escolhendo $\alpha = 0$, obtém-se uma relação entre as duas primeiras componentes de J :

$$\boxed{(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})J_1 + 2(\eta \cdot \partial_x - im\xi)J_0 = 0.} \quad (5.96)$$

Com uma expressão adequada para J_1 esta equação permite o cálculo de J_0 e, por conseguinte, J_{Θ} (5.95).

A corrente J_1 , assim como J_0 , é função de dois campos escalares massivos $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$,

$$(\square_x + M_i^2)\phi_i(x) = O(g) \quad i = 1, 2, \quad (5.97)$$

e de suas derivadas. Levando em conta invariância de Lorentz, as derivadas mais simples que podem estar presentes na corrente J_1 são \square_x e $\eta \cdot \partial_x$. Descarta-se \square_x porque a relação (5.97) implica que $\square_x\phi_i \propto \phi_i$. Assim, um *ansatz* para que a equação (5.96) seja satisfeita é a escolha

$$\boxed{J_1(\eta, \xi, x) = (\eta \cdot \partial_x - im\xi)^{n_0} \left(f_{\lambda_1}^{n_1} \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2} \phi_2 \right),} \quad (5.98)$$

em que os operadores

$$f_{\lambda_i}^{n_i} = e^{\lambda_i(\eta \cdot \partial_x - im\xi)} (\eta \cdot \partial_x - im\xi)^{n_i}, \quad i = 1, 2 \quad (5.99)$$

agem apenas no primeiro campo em sua frente.³⁹ Nestas duas últimas expressões, $n_0, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Aplicando o operador $\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}$ em (5.98) e com o uso da relação de comutação (C.3), tem-se

$$\begin{aligned} (\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})J_1 &= (\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) \left[(\eta \cdot \partial_x - im\xi)^{n_0} \left(f_{\lambda_1}^{n_1} \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2} \phi_2 \right) \right] \\ &= n_0(\eta \cdot \partial_x - im\xi)^{n_0-1} (\square_x - m^2) \left(f_{\lambda_1}^{n_1} \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2} \phi_2 \right) + (\eta \cdot \partial_x - im\xi)^{n_0} (\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) \left(f_{\lambda_1}^{n_1} \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2} \phi_2 \right). \end{aligned} \quad (5.100)$$

No primeiro termo do segundo membro em (5.100), tem-se

$$(\square_x - m^2) \left(f_{\lambda_1}^{n_1} \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2} \phi_2 \right) = -(M_1^2 + M_2^2 + m^2) f_{\lambda_1}^{n_1} \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2} \phi_2 + 2 \left(f_{\lambda_1}^{n_1} \partial_x \phi_1 \right) \cdot \left(f_{\lambda_2}^{n_2} \partial_x \phi_2 \right), \quad (5.101)$$

³⁹Em [62] há uma corrente similar a (5.98).

em que foram utilizados $[\partial_x, f_{\lambda_i}^{n_i}] = 0$ e $\square_x \phi_i = -M_i^2 \phi_i$, $i = 1, 2$. No segundo termo do segundo membro em (5.100), tem-se

$$(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) [f_{\lambda_1}^{n_1} f_{\lambda_2}^{n_2} \phi_2] = [(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) f_{\lambda_1}^{n_1} \phi_1] f_{\lambda_2}^{n_2} \phi_2 + f_{\lambda_1}^{n_1} \phi_1 [(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) f_{\lambda_2}^{n_2} \phi_2] + [\partial_{(x} f_{\lambda_1}^{n_1} \phi_1] \cdot [\partial_{\eta)} f_{\lambda_2}^{n_2} \phi_2] - \rho f_{\lambda_1}^{n_1} \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2} \phi_2 \quad , \quad (5.102)$$

em que foi utilizado o resultado (C.44). Nos dois primeiros termos em (5.102), tem-se

$$\begin{aligned} (\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) f_{\lambda_i}^{n_i} \phi_i &= (\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) e^{\lambda_i(\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})} (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{n_i} \phi_i \\ &= (\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^k}{k!} (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{n_i+k} \phi_i \\ &\stackrel{(C.3)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^k}{k!} (n_i + k) (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{n_i+k-1} (\square_x - m^2) \phi_i + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^k}{k!} (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{n_i+k} (\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) \phi_i \\ &= -(M_i^2 + m^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^k}{k!} (n_i + k) (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{n_i+k-1} \phi_i + \rho \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^k}{k!} (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{n_i+k} \phi_i \\ &= -n_i (M_i^2 + m^2) (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{n_i-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^k}{k!} (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^k \phi_i \\ &\quad - \lambda_i (M_i^2 + m^2) (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{n_i} \sum_{k=1=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^{k-1}}{(k-1)!} (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{k-1} \phi_i \\ &\quad + \rho \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^k}{k!} (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{n_i+k} \phi_i \\ &= -n_i (M_i^2 + m^2) (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{n_i-1} e^{\lambda_i(\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})} \phi_i \\ &\quad - \lambda_i (M_i^2 + m^2) (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{n_i} e^{\lambda_i(\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})} \phi_i + \rho (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{n_i} e^{\lambda_i(\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})} \phi_i \\ &= -n_i (M_i^2 + m^2) f_{\lambda_i}^{n_i-1} \phi_i - \lambda_i (M_i^2 + m^2) f_{\lambda_i}^{n_i} \phi_i + \rho f_{\lambda_i}^{n_i} \phi_i, \end{aligned} \quad (5.103)$$

onde $i = 1, 2$. Com o uso do comutador C.7, tem-se que

$$\begin{aligned} (\partial_x f_{\lambda_1}^{n_1} \phi_1) \cdot (\partial_{\eta} f_{\lambda_2}^{n_2} \phi_2) &= (\partial_x^{\mu} f_{\lambda_1}^{n_1} \phi_1) \partial_{\eta\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k}{k!} (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{n_2+k} \phi_2 \\ &= f_{\lambda_1}^{n_1} (\partial_x^{\mu} \phi_1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k}{k!} (n_2 + k) (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{n_2+k-1} \partial_{x\mu} \phi_2 \\ &= n_2 f_{\lambda_1}^{n_1} (\partial_x^{\mu} \phi_1) (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{n_2-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k}{k!} (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^k \partial_{x\mu} \phi_2 \\ &\quad + \lambda_2 f_{\lambda_1}^{n_1} (\partial_x^{\mu} \phi_1) (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{n_2} \sum_{k=1=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^{k-1}}{(k-1)!} (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{k-1} \partial_{x\mu} \phi_2 \\ &= n_2 f_{\lambda_1}^{n_1} (\partial_x^{\mu} \phi_1(x)) (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{n_2-1} e^{\lambda_2(\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})} \partial_{x\mu} \phi_2 \\ &\quad + \lambda_2 f_{\lambda_1}^{n_1} (\partial_x^{\mu} \phi_1) (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{n_2} e^{\lambda_2(\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})} \partial_{x\mu} \phi_2 \\ &= n_2 f_{\lambda_1}^{n_1} (\partial_x^{\mu} \phi_1) f_{\lambda_2}^{n_2-1} \partial_{x\mu} \phi_2 + \lambda_2 f_{\lambda_1}^{n_1} (\partial_x^{\mu} \phi_1) f_{\lambda_2}^{n_2} \partial_{x\mu} \phi_2. \end{aligned} \quad (5.104)$$

Analogamente,

$$(\partial_{\eta} f_{\lambda_1}^{n_1} \phi_1) \cdot (\partial_x f_{\lambda_2}^{n_2} \phi_2) = n_1 f_{\lambda_1}^{n_1-1} (\partial_x^{\mu} \phi_1) f_{\lambda_2}^{n_2} \partial_{x\mu} \phi_2 + \lambda_1 f_{\lambda_1}^{n_1} (\partial_x^{\mu} \phi_1) f_{\lambda_2}^{n_2} \partial_{x\mu} \phi_2. \quad (5.105)$$

Substituindo (5.103), (5.104) e (5.105) em (5.102), obtém-se

$$\begin{aligned}
(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) \left(f_{\lambda_1}^{n_1} \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2} \phi_2 \right) = & -n_1(M_1^2 + m^2) f_{\lambda_1}^{n_1-1} \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2} \phi_2 \\
& -n_2(M_2^2 + m^2) f_{\lambda_1}^{n_1} \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2-1} \phi_2 + \left(\lambda_1 f_{\lambda_1}^{n_1} + n_1 f_{\lambda_1}^{n_1-1} \right) \partial_x^\mu \phi_1(x) f_{\lambda_2}^{n_2} \partial_{x\mu} \phi_2 \\
& + f_{\lambda_1}^{n_1} \partial_{x\mu} \phi_1 \left(\lambda_2 f_{\lambda_2}^{n_2} + n_2 f_{\lambda_2}^{n_2-1} \right) \partial_x^\mu \phi_2 + [\rho - \lambda_1(M_1^2 + m^2) - \lambda_2(M_2^2 + m^2)] f_{\lambda_1}^{n_1} \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2} \phi_2
\end{aligned} \quad (5.106)$$

Assim, substituindo este resultado com

$$\boxed{\rho = \lambda_1(M_1^2 + m^2) + \lambda_2(M_2^2 + m^2) \neq 0,} \quad (5.107)$$

e o resultado (5.101) em (5.100), obtém-se

$$\begin{aligned}
(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) J_1 = & n_0(\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{n_0-1} \left[-(M_1^2 + M_2^2 + m^2) f_{\lambda_1}^{n_1} \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2} \phi_2 + 2f_{\lambda_1}^{n_1} \partial_x^\mu \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2} \partial_{x\mu} \phi_2 \right] \\
& + (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{n_0} \left[-n_1(M_1^2 + m^2) f_{\lambda_1}^{n_1-1} \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2} \phi_2 - n_2(M_2^2 + m^2) f_{\lambda_1}^{n_1} \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2-1} \phi_2 \right. \\
& \left. + \left(\lambda_1 f_{\lambda_1}^{n_1} + n_1 f_{\lambda_1}^{n_1-1} \right) \partial_x^\mu \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2} \partial_{x\mu} \phi_2 + f_{\lambda_1}^{n_1} \partial_{x\mu} \phi_1 \left(\lambda_2 f_{\lambda_2}^{n_2} + n_2 f_{\lambda_2}^{n_2-1} \right) \partial_x^\mu \phi_2 \right].
\end{aligned} \quad (5.108)$$

Finalmente, resolvendo (5.96) para J_0 com o uso de (5.108), obtém-se

$$\boxed{
\begin{aligned}
J_0 = & \frac{1}{2} n_0 (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{n_0-2} \left[(M_1^2 + M_2^2 + m^2) f_{\lambda_1}^{n_1} \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2} \phi_2 \right. \\
& \left. - 2f_{\lambda_1}^{n_1} \partial_x^\mu \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2} \partial_{x\mu} \phi_2 \right] + \frac{1}{2} (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})^{n_0-1} \left[n_1(M_1^2 + m^2) f_{\lambda_1}^{n_1-1} \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2} \phi_2 \right. \\
& + n_2(M_2^2 + m^2) f_{\lambda_1}^{n_1} \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2-1} \phi_2 + \left(\lambda_1 f_{\lambda_1}^{n_1} + n_1 f_{\lambda_1}^{n_1-1} \right) \partial_x^\mu \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2} \partial_{x\mu} \phi_2 \\
& \left. + f_{\lambda_1}^{n_1} \partial_{x\mu} \phi_1 \left(\lambda_2 f_{\lambda_2}^{n_2} + n_2 f_{\lambda_2}^{n_2-1} \right) \partial_x^\mu \phi_2 \right]
\end{aligned}
} \quad (5.109)$$

Considerando que esta corrente seja local, tem-se duas possibilidades: $n_0 \geq 2$, $n_1 \geq 0$ e $n_2 \geq 0$ ou $n_0 = n_1 = n_2 = 0$ e $\lambda_1 = -\lambda_2 \equiv \lambda$. Neste último caso,

$$\boxed{
\begin{aligned}
J_0 &= 0 \\
J_1 &= \left[e^{\lambda(\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})} \phi_1 \right] \left[e^{-\lambda(\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})} \phi_2 \right] \\
J_\Theta &= J_1 \\
\rho &= \lambda (M_1^2 - M_2^2) \neq 0
\end{aligned}
} \quad (5.110)$$

5.6.4 Vértice Cúbico para uma CSP e dois Campos Escalares Massivos

A teoria livre para a CSP é descrita pela ação de Shuster & Toro [41]:

$$S_0[\Psi] = \frac{1}{2} \int d\eta dx \delta'(\eta^2 + \mu^2) \left[(\partial_x \Psi)^2 - \frac{1}{2}(\eta^2 + \mu^2)(\Delta \Psi)^2 \right], \quad (5.111)$$

onde $\Psi = \Psi(\eta, x)$ é um campo escalar real que representa a CSP. O acoplamento deste campo à corrente $J = J(\eta, x)$ caracteriza o vértice cúbico dado por

$$S_c[\Psi, J] = -g \int d\eta dx \delta'(\eta^2 + \mu^2) \Psi J. \quad (5.112)$$

Veja que todos os resultados obtidos nas Subseções 5.6.1-5.6.3 se aplicam no presente contexto com a remoção da integral em ξ e com $m = \xi = 0$. As correntes são:

$$\begin{aligned}
J_1 &= (\eta \cdot \partial_x)^{n_0} (f_{\lambda_1}^{n_1} \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2} \phi_2) \\
J_0 &= \frac{1}{2} n_0 (\eta \cdot \partial_x)^{n_0-2} \left[(M_1^2 + M_2^2) f_{\lambda_1}^{n_1} \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2} \phi_2 - 2 f_{\lambda_1}^{n_1} \partial_x^\mu \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2} \partial_{x\mu} \phi_2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} (\eta \cdot \partial_x)^{n_0-1} \left[n_1 M_1^2 f_{\lambda_1}^{n_1-1} \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2} \phi_2 + n_2 M_2^2 f_{\lambda_1}^{n_1} \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2-1} \phi_2 \right. \\
&\quad \left. + (\lambda_1 f_{\lambda_1}^{n_1} + n_1 f_{\lambda_1}^{n_1-1}) \partial_x^\mu \phi_1 f_{\lambda_2}^{n_2} \partial_{x\mu} \phi_2 \right. \\
&\quad \left. + f_{\lambda_1}^{n_1} \partial_{x\mu} \phi_1 (\lambda_2 f_{\lambda_2}^{n_2} + n_2 f_{\lambda_2}^{n_2-1}) \partial_x^\mu \phi_2 \right] \\
J_\Theta &= J_1 + (\eta^2 + \mu^2) J_0 \\
\rho &= \lambda_1 M_1^2 + \lambda_2 M_2^2 \neq 0,
\end{aligned} \tag{5.113}$$

onde $(\square_x + M_i^2) \phi_i(x) = O(g)$, $\forall i = 1, 2$, e

$$f_{\lambda_i}^{n_i} = e^{\lambda_i \eta \cdot \partial_x} (\eta \cdot \partial_x)^{n_i}, n_i \in \mathbb{N} \text{ e } \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2 \tag{5.114}$$

são operadores que agem no primeiro campo em sua frente. No caso mais simples em que $n_0 = n_1 = n_2 = 0$ e $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$, tem-se

$$J_0 = 0, \tag{5.115}$$

$$\rho = \lambda(M_1^2 - M_2^2), M_1 \neq M_2, \tag{5.116}$$

e

$$\begin{aligned}
J_1(\eta, x) = e^{\lambda(\eta \cdot \partial_x)} \phi_1(x) e^{-\lambda(\eta \cdot \partial_x)} \phi_2(x) &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\lambda \eta \cdot \partial_x)^k \phi_1(x) \right] \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (-\lambda \eta \cdot \partial_x)^l \phi_2(x) \right] \\
&= \phi_1(X^+) \phi_2(X^-),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$J(X^\pm) = \phi_1(X^+) \phi_2(X^-), \tag{5.117}$$

onde $X^\pm \equiv x \pm \lambda \eta$. Esta corrente é precisamente aquela encontrada pelos autores de [54] os quais se valeram do uso do formalismo das correntes BBvD [55]. No próximo capítulo será apresentada uma análise mais detalhada do vértice cúbico (5.112) com o estudo de suas propriedades.

6 Análise do Vértice Cúbico com uma CSP

Neste capítulo analisamos as propriedades do vértice cúbico que envolve uma CSP discutido no fim do capítulo anterior. Todos os resultados apresentados neste capítulo foram obtidos pelos autores de [54].

6.1 Vértice Cúbico no Espaço de Minkowski

A partir da ação

$$S[\Psi, J] = S_0[\Psi] + S_c[\Psi, J], \quad (6.1)$$

onde S_0 e S_c são dados por (5.111) e (5.112), respectivamente, pode-se derivar a equação de campo:

$$\delta'(\eta^2 + \sigma) \left[\left(-\square_x + \eta \cdot \partial_x \Delta - \frac{1}{2}(\eta^2 + \sigma)\Delta^2 \right) \Psi - J \right] = 0, \quad (6.2)$$

em que $\sigma \equiv \mu^2$ é definido por conveniência para deixar a notação mais simples nesta e nas seções seguintes. (Na Seção 6.2, por exemplo, as integrais serão tomadas como função do parâmetro σ e de derivadas em relação a este parâmetro.) O operador Δ corresponde àquele já definido no capítulo anterior. O leitor pode observar que a ação (6.1) corresponde à teoria taquiônica (5.78) ao fazer-se $\Psi = \Psi^*$, $m = 0 = \xi$ e com a eliminação da integração na variável ξ , portanto, os resultados obtidos no capítulo anterior podem ser aplicados no presente contexto com estas considerações. De fato, a corrente J satisfaz a seguinte **equação de continuidade**:

$$\delta(\eta^2 + \sigma)\Delta J(\eta, x) = 0. \quad (6.3)$$

Devido à presença da derivada da função delta, a ação (6.1) é invariante sob a transformação

$$\delta_\chi \Psi(\eta, x) = \frac{1}{4} (\eta^2 + \sigma)^2 \chi(\eta, x), \quad (6.4a)$$

em que $\chi(\eta, x)$ é uma função arbitrária. Em adição, levando em conta a equação de continuidade (6.3), tem-se que a ação (6.1) é invariante sob a transformação de gauge

$$\delta_\epsilon \Psi(\eta, x) = \left[\eta \cdot \partial_x - \frac{1}{2} (\eta^2 + \sigma) \Delta \right] \epsilon(\eta, x), \quad (6.4b)$$

onde $\epsilon(\eta, x)$ também é uma função arbitrária.

Resolvendo o vínculo imposto pela função delta em (6.2), tem-se

$$\left[-\square_x + (\eta \cdot \partial_x) \Delta - \frac{1}{2}(\eta^2 + \sigma)\Delta^2 \right] \Psi - J = \frac{1}{4}(\eta^2 + \sigma)^2 \omega, \quad (6.5)$$

em que $\omega = \omega(\eta, x)$ é uma função qualquer. Observe que o segundo membro desta equação está sob a forma da transformação (6.4a) e, em adição à transformação de gauge (6.4b), (6.5) pode ser reescrita como

$$-\square_x \Psi = J + \delta_\epsilon \Psi + \delta_\omega \Psi$$

com $\epsilon = -\Delta \Psi$. Com o uso da transformada de Fourier na coordenada x , $\Psi(\eta, x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \Psi(\eta, p) e^{ip \cdot x}$, esta equação pode ser reescrita como

$$\Psi(\eta, p) = \frac{1}{p^2} J(\eta, p) + \frac{1}{p^2} (\delta_\epsilon \Psi + \delta_\omega \Psi)(\eta, p). \quad (6.6)$$

Porém, o último termo do segundo membro não contribui para o vértice S_c no espaço dos momentos, denotado por \tilde{S}_c , porque

$$\int d^D \eta \, d^D p \, \delta'(\eta^2 + \sigma) J(\eta, p) \frac{1}{p^2} \delta_\omega \Psi(\eta, p) = 0$$

e, devido à integrações por partes e à equação de continuidade (6.3) no espaço dos momentos,

$$\delta(\eta^2 + \sigma) (-ip \cdot \partial_\eta + \rho) J(\eta, p) = 0, \quad (6.7)$$

tem-se

$$\int d^D \eta \, d^D p \, \delta'(\eta^2 + \sigma) J(\eta, p) \frac{1}{p^2} \delta_\epsilon \Psi(\eta, p) = \int d^D \eta \, d^D p \, \frac{1}{p^2} \epsilon(\eta, p) \delta(\eta^2 + \sigma) (-ip \cdot \partial_\eta + \rho) J(\eta, p) \stackrel{(6.7)}{=} 0, \quad (6.8)$$

(O leitor pode verificar diretamente a validade do resultado (6.8) com o uso dos desenvolvimentos que foram feitos nas relações (5.86)-(5.91) no espaço dos momentos, eliminando a integração na variável ξ e fazendo $m = 0 = \xi$.)

Portanto, substituindo (6.6) no vértice cúbico no espaço dos momentos

$$\tilde{S}_c[\Psi, J] = \int d^D \eta \, d^D p \, \Psi(\eta, p) J(\eta, p),$$

obtém-se

$$\tilde{S}_c[J] = - \int d^D p \, d^D \eta \, \delta'(\eta^2 + \sigma) J(\eta, -p) \frac{1}{p^2} J(\eta, p). \quad (6.9)$$

Resolvendo a restrição imposta pela função delta em (6.7), tem-se

$$(-ip \cdot \partial_\eta + \rho) J(\eta, p) = (\eta^2 + \sigma) \alpha(\eta, p), \quad (6.10)$$

onde $\alpha(\eta, p)$ é uma função arbitrária. Para que a solução desta equação seja a mais simples, faz-se a escolha $\alpha(\eta, p) = 0$. Em adição, com um sistema de referência pelo qual o quadrimomento p , expresso em coordenadas do cone-de-luz $(p^1, \dots, p^{D-2}, p^\pm = \frac{p^0 \pm p^{D-1}}{\sqrt{2}})$, tenha apenas a componente p^+ não-nula, a (6.10) pode ser reescrita como

$$\left(p^+ \frac{\partial}{\partial \eta^+} + i\rho \right) J(\eta, p) = 0. \quad (6.11)$$

A solução desta equação é dada por

$$J(\eta, p) = j(\eta, p) \exp \left(-i \frac{\rho}{p^+} \eta^+ \right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta^+} j(\eta, p) = 0, \quad (6.12)$$

que, substituindo em (6.9), obtém-se

$$\tilde{S}_c[j] = - \int d^D p \, d^D \eta \, \delta'(\eta^2 + \sigma) j(\eta, -p) \frac{1}{p^2} j(\eta, p). \quad (6.13)$$

Definindo

$$f(\eta, p) \equiv j(\eta, -p) \frac{1}{p^2} j(\eta, p), \quad \frac{\partial f}{\partial \eta^+} = 0, \quad (6.14)$$

tem-se

$$\tilde{S}_c[j] = - \frac{d}{d\sigma} \int d^D p \, d^D \eta \, \delta(\eta^2 + \sigma) f(\eta, p) = - \int d^D p \, I(\sigma, p), \quad (6.15)$$

com

$$I(\sigma, p) \equiv \frac{d}{d\sigma} \int d^D \eta \, \delta(\eta^2 + \sigma) f(\eta, p). \quad (6.16)$$

(Até o final desta seção e na seção seguinte será omitida a dependência em p da função f para simplificar a notação. Na Seção 6.3, a dependência em p de f será retomada.) Com a mudança de variáveis $\eta \rightarrow \tilde{\eta} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\eta$, esta integral pode ser reescrita como

$$I(\sigma) = \frac{d}{d\sigma} \left[\sigma^{\frac{D}{2}-1} \int d^D \tilde{\eta} \delta(\tilde{\eta}^2 + 1) f(\sqrt{\sigma} \tilde{\eta}) \right] = \sigma^{\frac{D}{2}-2} \int d^D \tilde{\eta} \delta(\tilde{\eta}^2 + 1) \left[\left(\frac{D}{2} - 1 \right) + \frac{1}{2} \tilde{\eta}^\mu \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}^\mu} \right] f(\sqrt{\sigma} \tilde{\eta}). \quad (6.17)$$

Escolhendo $\sigma = 1$,⁴⁰ tem-se $\eta = \tilde{\eta}$ e o último termo da segunda igualdade em (6.17) pode ser reescrito como

$$\frac{1}{2} \int d^D \eta \delta(\eta^2 + 1) \eta^\mu \frac{\partial}{\partial \eta^\mu} f(\eta) = \frac{1}{2} \int d^D \eta \delta(\eta^2 + 1) \left(\eta^- \frac{\partial}{\partial \eta^-} + \eta^i \frac{\partial}{\partial \eta^i} \right) f(\eta), \quad (6.18)$$

com $i = 1, \dots, D-2$, visto que $\partial_{\eta^+} f = 0$. Portanto,

$$\frac{1}{2} \int d^D \eta \delta(\eta^2 + 1) \eta^\mu \frac{\partial}{\partial \eta^\mu} f(\eta) = \frac{1}{2} \int d^D \eta \delta(\eta^2 + 1) \left[\eta^- \frac{\partial}{\partial \eta^-} f(\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta^i} (\eta^i f(\eta)) - (D-2) f(\eta) \right],$$

de modo que ao trazer-se o último termo do segundo membro desta igualdade para o primeiro membro, obtém-se a integral original (6.17):

$$I(1) = \frac{1}{2} \int d^D \eta \delta(\eta^2 + 1) \left[\eta^- \frac{\partial}{\partial \eta^-} f(\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta^i} (\eta^i f(\eta)) \right]. \quad (6.19)$$

Em coordenadas de cone-de-luz, $\eta^2 = 2\eta^+ \eta^- + \eta_i \eta^i$ e, com o uso da propriedade da função delta $\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, tem-se que

$$\delta(\eta^2 + 1) = \frac{1}{2|\eta^-|} \delta \left(\eta^+ + \frac{1}{2\eta^-} (\eta^i \eta_i + 1) \right). \quad (6.20)$$

Substituindo (6.20) em (6.19), obtém-se:

$$\begin{aligned} I(1) &= \frac{1}{2} \int d\eta^- d^{D-2} \eta^i d\eta^+ \frac{1}{2|\eta^-|} \delta \left(\eta^+ + \frac{1}{2|\eta^-|} (\eta^i \eta_i + 1) \right) \left[\eta^- \frac{\partial}{\partial \eta^-} f(\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta^i} (\eta^i f(\eta)) \right] \\ &= \frac{1}{4} \int d^{D-2} \eta^i \left[\int_{-\infty}^0 d\eta^- (-1) \frac{\partial}{\partial \eta^-} f(\eta) + \int_0^{+\infty} d\eta^- (+1) \frac{\partial}{\partial \eta^-} f(\eta) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^{D-2} \eta^i f(\eta^- = 0, \eta^i), \end{aligned} \quad (6.21)$$

de modo que o vértice cúbico (6.9) resulta em

$$S_c = \frac{1}{2} \int d^D p d^{D-2} \eta^i j(\eta^- = 0, \eta^i, -p) \frac{1}{p^2} j(\eta^- = 0, \eta^i, p). \quad (6.22)$$

Na primeira linha de (6.21) foi efetuado a integração em η^+ ; na segunda, a integral da divergência nas coordenadas transversais η^i é zero porque assume-se que os campos vão a zero suficientemente rápido no infinito.

O resultado (6.22) mostra que o vértice (6.2) não propaga uma *única* CSP mas sim um *contínuo* de CSPs porque a única restrição à coordenada η extraída de (6.22) é $\eta^2|_{\eta^-=0} = -\sum_i (\eta^i)^2 < 0$ em vez de $\eta^2|_{\eta^-=0} = -\sum_i (\eta^i)^2 = -\sigma = -1$ imposta pela equação de Wigner $(\eta^2 + \sigma)\Psi = 0$ que descreve uma CSP [22, 23] (veja a Subseção 4.1.1, equação (4.23)). Porém, pode-se estudar características deste vértice cúbico que apresentam similaridades no contexto das partículas de alto spin. Para fazer este estudo, é necessário desenvolver o formalismo das funções geradoras. Isto é feito a seguir.

⁴⁰Veja que este parâmetro sempre pode ser escolhido igual a um através das seguntes redefinições $\eta \rightarrow \sqrt{\sigma}\eta$ e $p \rightarrow p/\sqrt{\sigma}$.

6.2 Integrais no Espaço Auxiliar

A função geradora de grau l é dada pela seguinte expressão:

$$G^{(l)}(\omega; \sigma) \equiv \int d^D \eta \delta^{(l)}(\eta^2 + \sigma) e^{-i\eta \cdot \omega} = \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \right)^l G^{(0)}(\omega; \sigma), \quad (6.23)$$

onde $\delta^{(l)}$ é a l -ésima derivada da função delta com respeito à σ e $\omega \in \mathbb{R}^{1,D-1}$, que é o espaço de Minkowski de dimensão D . Nesta dissertação, apenas os casos $l = 0, 1$ serão utilizados. Com esta definição, integrais como (6.16) podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \int d^D \eta \delta^{(l)}(\eta^2 + \sigma) f(\eta) &= \int d^D \eta \delta^{(l)}(\eta^2 + \sigma) \left[f(i\partial_\omega) e^{-i\eta \cdot \omega} \right] \Big|_{\omega=0} = \left[f(i\partial_\omega) G^{(l)}(\omega; \sigma) \right] \Big|_{\omega=0} \\ &= \left[G^{(l)}(i\partial_\eta; \sigma) f(\eta) \right] \Big|_{\eta=0} \end{aligned} \quad (6.24)$$

Vê-se, portanto, que para calcular esta integral basta conhecer a correspondente função geradora. Esta seção objetiva desenvolver o cálculo de funções geradoras no espaço de Minkowski e no espaço Euclideano.

Se $\omega = 0$, (6.23) resulta ser infinita porque é calculada no hiperbolóide $\eta^2 + \sigma = 0$, que é um espaço de Anti-de Sitter não-compacto. Neste caso, a estratégia é manter nesta integral os termos que resultam ser regulares em $\omega = 0$ e ignorar aqueles que não são. Por outro lado, a integral (6.23) no espaço Euclideano (com métrica $g = -\text{diag}(1, \dots, 1)$) resulta ser finita em $\omega = 0$ porque é calculada na hipersfera $\eta^2 + \sigma = 0$, que é um espaço de de Sitter compacto. Nesta seção serão investigadas ambas as possibilidades.

6.2.1 Funções Geradoras no Espaço de Minkowski

Para $l = 0$ a integral (6.23) é calculada levando-se em conta se ω é do tipo tempo ou do tipo espaço:

Tipo Tempo: $\omega^2 > 0$. Neste caso faz-se a escolha $\omega = (\omega^0, 0, \dots, 0)$ sem perda de generalidade porque o resultado final será escrito sob uma forma covariante. Neste caso, a integral (6.23) para $l = 0$ pode ser calculada como:

$$\begin{aligned} G^{(0)}(\omega; \sigma) &= \int d^D \eta \delta(\eta^2 + \sigma) e^{-i\eta^0 \omega_0} \\ &= \sigma^{\frac{D-2}{2}} \int d\eta^0 d^{D-1} \vec{\eta} \delta\left((\eta^0)^2 - (\vec{\eta}^2 - 1)\right) e^{-i\sqrt{\sigma} \eta^0 \omega_0} \\ &= \sigma^{\frac{D-2}{2}} \int_{\vec{\eta}^2 > 1} d^{D-1} \vec{\eta} \frac{1}{\sqrt{\eta^2 - 1}} \cos\left(\sqrt{\sigma(\eta^2 - 1)} \omega_0\right), \end{aligned} \quad (6.25)$$

em que na primeira linha a variável de integração η foi redefinida como $\eta \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \eta$, na segunda linha foi utilizado a propriedade da função delta $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} (\delta(x - a) + \delta(x + a))$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$ e, na terceira linha, foi efetuado a integração na coordenada η^0 . Ao fazer-se $t = \sqrt{\eta^2 - 1}$ e com o uso dos resultados mostrados no Apêndice F, tem-se

$$\begin{aligned} R^2 &\equiv \eta^2 = 1 + t^2 \\ d^{D-1} \vec{\eta} &= dV_{D-1} = S_{D-1}(R) dR \stackrel{(F.10)}{=} \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} R^{D-2} dR. \end{aligned}$$

Substituindo estes resultados em (A.1), obtém-se

$$G^{(0)}(\omega; \sigma) = \sigma^{\frac{D-2}{2}} \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} \int_0^\infty dt (1+t^2)^{\frac{D-3}{2}} \cos\left(t\sqrt{\sigma\omega^2}\right). \quad (6.26)$$

Com o uso da função esférica de Bessel modificada de segunda espécie [61],

$$K_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{z}\right)^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \int_0^\infty dt \frac{\cos(tz)}{(1+t^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}, \quad z > 0 \quad \text{e} \quad \text{Re}(\nu) > -\frac{1}{2},$$

(6.26) pode ser reescrita ao fazer-se $\nu = 1 - D/2$ e $z = \sqrt{\sigma\omega^2}$:

$$G^{(0)}(\omega; \sigma) = 2 \cos\left(\frac{D-2}{2}\pi\right) \left(\frac{\sqrt{\omega^2}}{2\pi\sqrt{\sigma}}\right)^{\frac{D-2}{2}} K_{\frac{D-2}{2}}\left(\sqrt{\sigma\omega^2}\right), \quad D \leq 2, \quad (6.27)$$

em que a propriedade da função gama de Euler,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi / \sin(\pi z), \quad z \notin \mathbb{Z}, \quad (6.28)$$

foi utilizada.

Tipo Espaço: $\omega^2 < 0$. Neste caso faz-se a escolha $\omega = (0, \omega^1, \dots, \omega^{D-1}) = (0, \vec{\omega})$ sem perda de generalidade, porque o resultado final será escrito sob uma forma covariante. Neste caso, a integral (6.23) pode ser calculada de maneira similar à feita em (A.1). O resultado é:

$$G^{(0)}(\omega; \sigma) = \int d^D \eta \delta(\eta^2 + \sigma) e^{i\vec{\eta} \cdot \vec{\omega}} = \sigma^{\frac{D-2}{2}} \int_{\vec{\eta}^2 > 1} d^{D-1} \vec{\eta} \frac{1}{\sqrt{\vec{\eta}^2 - 1}} e^{i\vec{\eta} \cdot \vec{\omega}}.$$

Esta integral pode ser efetuada em coordenadas esféricas (F.1) com $n = D - 1$ onde a coordenada radial é definida como $R = |\vec{\eta}|$ e a primeira coordenada angular ϕ_1 é dada por $\cos \phi_1 = \vec{\eta} \cdot \vec{\omega} / |\vec{\eta}| |\vec{\omega}|$, de modo que

$$G^{(0)}(\omega; \sigma) = \sigma^{\frac{D-2}{2}} \int_1^\infty d|\vec{\eta}| |\vec{\eta}|^{D-2} \frac{1}{\sqrt{|\vec{\eta}|^2 - 1}} \int_0^\pi d\phi_1 (\sin \phi_1)^{D-3} e^{i\sqrt{\sigma} |\vec{\eta}| |\vec{\omega}| \cos(\phi_1)} \times \int_0^\pi d\phi_2 (\sin \phi_2)^{D-4} \dots \int_0^\pi d\phi_{D-3} \sin \phi_{D-3} \int_0^{2\pi} d\phi_{D-2}. \quad (6.29)$$

Com o uso da forma integral da função de Bessel de primeira espécie [61],

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi d\theta (\sin \theta)^{2\nu} e^{\pm iz \cos \theta}, \quad \text{Re}(\nu) > -\frac{1}{2},$$

a segunda integral em (6.29) pode ser reescrita ao fazer-se $z = \sqrt{\sigma} |\vec{\eta}| |\vec{\omega}|$ e $\nu = \frac{D-3}{2}$:

$$\int_0^\pi d\phi_1 \sin^{D-3}(\phi_1) e^{i\sqrt{\sigma} |\vec{\eta}| |\vec{\omega}| \cos(\phi_1)} = \left(\frac{1}{2} \sqrt{\sigma} |\vec{\eta}| |\vec{\omega}|\right)^{-\frac{D-3}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right) J_{\frac{D-3}{2}}(\sqrt{\sigma} |\vec{\eta}| |\vec{\omega}|). \quad (6.30)$$

Em adição, com o uso da função beta [53]

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta (\cos \theta)^{2p-1} (\sin \theta)^{2q-1}, \quad \text{Re}(p) > 0 \quad \text{e} \quad \text{Re}(q) > 0,$$

a qual está associada com a função gama como

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad (6.31)$$

pode-se escrever que

$$\int_0^\pi d\phi_i (\sin \phi_i)^{D-i-2} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi_i (\sin \phi_i)^{D-i-2} = B\left(\frac{1}{2}, \frac{D-i-1}{2}\right), \quad i = 2, \dots, D-3.$$

Portanto,

$$\prod_{i=2}^{D-3} \int_0^\pi d\phi_i (\sin \phi_i)^{D-i-2} = \prod_{i=2}^{D-3} B\left(\frac{1}{2}, \frac{D-i-1}{2}\right) \stackrel{(6.31)}{=} \prod_{i=2}^{D-3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D-i-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D-i}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{D-4}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right)}. \quad (6.32)$$

Trazendo os resultados (6.30) e (6.32) à (6.29), tem-se

$$G^{(0)}(\omega; \sigma) = 2 (\pi \sqrt{\sigma})^{\frac{D-1}{2}} \left(\frac{2}{|\vec{\omega}|}\right)^{\frac{D-3}{2}} \int_1^\infty d|\vec{\eta}| \frac{|\vec{\eta}|^{\frac{D-1}{2}}}{\sqrt{|\vec{\eta}|^2 - 1}} J_{\frac{D-3}{2}}(\sqrt{\sigma} |\vec{\eta}| |\vec{\omega}|). \quad (6.33)$$

Por fim, reescrevendo esta expressão como

$$G^{(0)}(\omega; \sigma) = 2 (\pi \sqrt{\sigma})^{\frac{D-1}{2}} \left(\frac{2}{|\vec{\omega}|}\right)^{\frac{D-3}{2}} \lim_{b \rightarrow 0} \int_1^\infty d|\vec{\eta}| \frac{|\vec{\eta}|^{\frac{D-1}{2}}}{\sqrt{|\vec{\eta}|^2 - 1}} \exp\left[-b(|\vec{\eta}|^2 - 1)\right] J_{\frac{D-3}{2}}(\sqrt{\sigma} |\vec{\eta}| |\vec{\omega}|),$$

pode-se fazer uso da relação entre a função de Bessel de primeira espécie J_ν e a função de Bessel de segunda espécie Y_ν [67],

$$\begin{aligned} & \int_a^\infty dx \frac{x^{\nu+1}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \exp\left[-b(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\right] J_\nu(xy) \\ &= -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a^{\nu+\frac{1}{2}} y^\nu (y^2 + b^2)^{-\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}} Y_{\nu+\frac{1}{2}}\left(a(y^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}\right), \quad a, b > 0, \quad \text{Re}(\nu) > -1, \end{aligned} \quad (6.34)$$

de modo que definindo os parâmetros nesta expressão como $x = |\vec{\eta}|$, $a = 1$, $y = \sqrt{\sigma} |\omega|$ e $\nu = \frac{D-3}{2}$, a função geradora de grau zero se torna:

$$\boxed{G^{(0)}(\omega; \sigma) = -\pi \left(\frac{2\pi\sqrt{\sigma}}{\sqrt{-\omega^2}}\right)^{\frac{D-2}{2}} Y_{\frac{D-2}{2}}\left(\sqrt{-\sigma\omega^2}\right), \quad D \geq 2.} \quad (6.35)$$

Funções Geradoras no Espaço de Minkowski. Com os resultados (6.27) e (6.35) em (6.23) e, com o uso da identidade [61]

$$\partial_z [z^\nu \mathcal{L}_\nu(z)] = z^\nu \mathcal{L}_{\nu-1}(z), \quad (6.36)$$

onde \mathcal{L}_ν denota J_ν , $e^{i\pi\nu} K_\nu$ ou Y_ν , as funções geradores de grau l no espaço de Minkowski podem ser calculadas. O resultado é:

$$G^{(l)}(\omega; \sigma) = \begin{cases} 2\pi^l \cos\left(\frac{2-D}{2}\pi + \pi l\right) \left(\frac{\sqrt{\omega^2}}{2\pi\sqrt{\sigma}}\right)^{\frac{2-D}{2}+l} K_{l+\frac{2-D}{2}}\left(\sqrt{\sigma\omega^2}\right), & \omega^2 > 0 \text{ e } D \leq 2(l+1) \\ -\pi^{1+l} \left(\frac{2\pi\sqrt{\sigma}}{\sqrt{-\omega^2}}\right)^{\frac{D-2}{2}-l} Y_{\frac{D-2}{2}-l}\left(\sqrt{-\sigma\omega^2}\right), & \omega^2 < 0 \text{ e } D \geq 2(l+1) \end{cases}. \quad (6.37)$$

As funções K_ν e Y_ν têm o seguinte comportamento assintótico [61]:

$$z \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} Y_\nu(z) \rightarrow -\frac{1}{\pi} \Gamma(\nu) \left(\frac{1}{2}z\right)^{-\nu} \\ K_\nu(z) \rightarrow \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left(\frac{1}{2}z\right)^{-\nu} \end{cases}, \quad \text{Re}(\nu) > 0, \quad (6.38)$$

de modo que no limite $\omega \rightarrow 0$, (6.37) lê-se

$$G^{(l)}(\omega; \sigma) = \begin{cases} \pi^l \cos\left(\frac{2-D}{2}\pi + \pi l\right) \left(\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}}\right)^{2(l+1)-D} \Gamma\left(\frac{2-D}{2} + l\right), & \omega \rightarrow 0^+ \text{ e } D \leq 2(l+1) \\ \pi^{1+l} \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{-\omega^2}}\right)^{D-2(l+1)} \Gamma\left(\frac{D-2}{2} - l\right), & \omega \rightarrow 0^- \text{ e } D \geq 2(l+1) \end{cases} \quad (6.39)$$

A primeira relação em (6.39) é regular na origem $\omega = 0$ mas, se D é ímpar, então esta função geradora é zero devido ao cosseno e, se D é par, ela diverge porque a função gama não é definida para inteiros negativos. Vê-se, assim, que no caso $\omega^2 > 0$ não há características relevantes quando $\omega \rightarrow 0^+$. Por outro lado, a segunda relação em (6.39) é irregular na origem. Porém, pode-se extrair a parte regular desta função geradora ao escrever a função de Bessel de segunda espécie em termos da função de Bessel de primeira espécie com o uso da função de Hankel $H_\nu(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z)$:

$$G^{(l)}(\omega; \sigma) = i\pi^{1+l} \left(\frac{2\pi\sqrt{\sigma}}{\sqrt{-\omega^2}}\right)^{\frac{D-2}{2}-l} \left[H_{\frac{D-2}{2}-l}(\sqrt{-\sigma\omega^2}) - J_{\frac{D-2}{2}-l}(\sqrt{-\sigma\omega^2}) \right], \quad D \geq 2(l+1),$$

e, portanto, a parte regular na origem $\omega = 0$ desta função geradora é dada por

$$G_R^{(l)}(\omega; \sigma) = -i\pi^{1+l} \left(\frac{2\pi\sqrt{\sigma}}{\sqrt{-\omega^2}}\right)^{\frac{D-2}{2}-l} J_{\frac{D-2}{2}-l}(\sqrt{-\sigma\omega^2}), \quad D \geq 2(l+1), \quad (6.40)$$

porque, no limite $\omega \rightarrow 0$, tem-se

$$G_R^{(l)}(\omega; \sigma) \rightarrow -i\pi^{\frac{D}{2}} \frac{\sigma^{\frac{D-2}{2}-l}}{\Gamma(\frac{D}{2}-l)} < \infty, \quad 0 < -\omega^2 \ll \frac{D-2l}{2\sigma} \text{ e } D \geq 2(l+1). \quad (6.41)$$

Para obter esta relação, foi utilizado o comportamento assintótico da função de Bessel de primeira espécie [61], qual seja,

$$z \rightarrow 0 \Rightarrow J_\alpha(z) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\alpha \quad \alpha \notin \{-1, -2, \dots\} \text{ e } 0 < z \ll \sqrt{\alpha+1}. \quad (6.42)$$

As irregularidades discutidas neste subseção podem ser evitadas uma vez que a integral (6.23) seja calculada sobre uma superfície compacta [41, 68]. Isto será feito na próxima subseção em que o resultado (6.41) será recuperado no espaço Euclidiano.

6.2.2 Funções Geradoras no Espaço Euclidiano

Definindo

$$\begin{aligned} \bar{\eta}^\mu &\equiv (i\eta^0, \eta^1, \dots, \eta^{D-1}), \\ \bar{\omega}^\mu &\equiv (i\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{D-1}), \end{aligned}$$

tem-se

$$\eta^2 = \bar{\eta}^2 \equiv \eta_{\mu\nu} \bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu,$$

onde $\eta_{\mu\nu} \equiv -\text{diag}(1, \dots, 1) = -\delta_{\mu\nu}$ define uma métrica no espaço Euclidiano e

$$\eta \cdot \omega = \bar{\eta} \cdot \bar{\omega} \equiv \eta_{\mu\nu} \bar{\eta}^\mu \bar{\omega}^\nu$$

caracteriza um produto interno no espaço Euclidiano. Com estas relações, pode-se escrever a função geradora de grau zero no espaço de Minkowski em termos da função geradora de grau zero no espaço Euclidiano como

$$G^{(0)}(\omega; \sigma) = -iG_E^{(0)}(\bar{\omega}; \sigma), \quad (6.43)$$

onde,

$$G_E^{(0)}(\bar{\omega}; \sigma) = \int d^D \bar{\eta} \delta(\bar{\eta}^2 + \sigma) e^{-i\bar{\eta} \cdot \bar{\omega}} \quad (6.44)$$

é a função geradora no espaço Euclidiano. Para simplificar a notação, as barras sobre as variáveis serão omitidas a partir deste ponto. Observe que a integral (6.44) é calculada no suporte compacto correspondente à esfera $(\eta^0)^2 + \dots + (\eta^{D-1})^2 = \sigma$, portanto, espera-se que ela seja finita na origem $\omega = 0$. Para verificar esta afirmação, veja que a função geradora (6.44) satisfaz a equação

$$(\partial_\omega^2 - \sigma) G_E^{(0)}(\omega; \sigma) = 0. \quad (6.45)$$

Assumindo que $G_E^{(0)}$ seja rotacionalmente simétrica, tem-se que esta função depende de ω como $r = \sqrt{-\omega^2}$. Com esta hipótese, a equação (6.45) pode ser reescrita como

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{D-1}{r} \frac{d}{dr} + \sigma \right) G_E^{(0)}(\omega; \sigma) \Big|_{r=\sqrt{-\omega^2}} = 0.$$

A mudança da variável r para $r' = \sqrt{\sigma}r$ leva esta última igualdade à equação de Bessel

$$\left(\frac{d^2}{dr'^2} + \frac{D-1}{r'} \frac{d}{dr'} + 1 \right) G_E^{(0)}(\omega; \sigma) = 0, \quad (6.46)$$

cujas soluções gerais são dadas por

$$G_E^{(0)}(\omega; \sigma) = (\sqrt{\sigma}r)^{1-\frac{D}{2}} \left[C_1 J_{\frac{D}{2}-1}(\sqrt{\sigma}r) + C_2 Y_{\frac{D}{2}-1}(\sqrt{\sigma}r) \right] \Big|_{r=\sqrt{-\omega^2}},$$

onde C_1 e C_2 são constantes. Escolhe-se $C_2 = 0$ para que $G_E^{(0)}$ seja regular na origem $\omega = 0$. Assim,

$$G_E^{(0)}(\omega; \sigma) = C_1 r^{1-\frac{D}{2}} J_{\frac{D}{2}-1}(\sqrt{\sigma}r) \Big|_{r=\sqrt{-\omega^2}}$$

Com o resultado (F.12) e fazendo uso do comportamento assintótico da função de Bessel de primeira espécie (6.42), pode-se calcular o valor de C_1 . O resultado é

$$C_1 = \pi^{\frac{D}{2}} (2\sqrt{\sigma})^{\frac{D}{2}-1},$$

o qual implica que

$$G_E^{(0)}(\omega; \sigma) = \pi \left(\frac{2\pi\sqrt{\sigma}}{r} \right)^{\frac{D}{2}-1} J_{\frac{D}{2}-1}(\sqrt{\sigma}r) \Big|_{r=\sqrt{-\omega^2}}. \quad (6.47)$$

Levando este resultado à última igualdade de (6.23) e, com o uso da relação de recorrência (6.36), pode-se calcular a função geradora de grau l no espaço Euclidiano. O resultado é:

$$G_E^{(l)}(\omega; \sigma) = \pi^{1+l} \left(\frac{2\pi\sqrt{\sigma}}{r} \right)^{\frac{D}{2}-1-l} J_{\frac{D}{2}-1-l}(\sqrt{\sigma}r) \Big|_{r=\sqrt{-\omega^2}}. \quad (6.48)$$

No limite $r \rightarrow 0$ esta relação é reescrita com o uso de (6.42):

$$\boxed{G_E^{(l)}(\omega \rightarrow 0; \sigma) \rightarrow \frac{\pi^{\frac{D}{2}} (\sqrt{\sigma})^{D-2(l+1)}}{\Gamma(\frac{D}{2}-l)},} \quad (6.49)$$

que é a relação encontrada para a função geradora no espaço de Minkowski (6.41) a menos do fator $-i$ (veja a relação (6.43)).

6.3 Vértice Cúbico no Espaço Euclidiano

Com os resultados desenvolvidos na seção precedente, analisa-se, a seguir, a integral (6.24) no espaço Euclidiano.

Definindo em (6.24) $f(\eta, p) \equiv F_1(\eta, p)F_2(\eta, p)$ e com o uso do resultado (6.48) para $l = 1$, obtém-se

$$I_E(\sigma) = G_E^{(1)}(i\partial_\eta; \sigma) F_1(\eta, p) F_2(\eta, p) \Big|_{\eta=0} = \pi^{\frac{D}{2}} \left(\frac{2\sqrt{\sigma}}{r} \right)^{\frac{D-4}{2}} J_{\frac{D-4}{2}}(\sqrt{\sigma}r) F_1(\eta, p) F_2(\eta, p) \Big|_{\eta=0}, \quad (6.50)$$

em que $r \equiv \sqrt{-\omega^2} = \sqrt{\partial_\eta \cdot \partial_\eta}$ cujas derivadas são calculadas em $\eta = 0$.⁴¹ A relação (6.50) pode ser reescrita como

$$I(\sigma) = G_E^{(1)}(i(\partial_{\eta_1} + \partial_{\eta_2}); \sigma) F_1(\eta_1) F_2(\eta_2) \Big|_{\eta_1=0=\eta_2} = \pi^{\frac{D}{2}} \left(\frac{2\sqrt{\sigma}}{\hat{r}} \right)^{\frac{D-4}{2}} J_{\frac{D-4}{2}}(\sqrt{\sigma}\hat{r}) F_1(\eta_1) F_2(\eta_2) \Big|_{\eta_1=0=\eta_2} \quad (6.51)$$

em que $\hat{r} \equiv \sqrt{-(\omega_1 + \omega_2)^2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_{12}}$, $r_i \equiv \sqrt{-\omega_i^2} = \sqrt{\partial_{\eta_i} \cdot \partial_{\eta_i}}$, $i = 1, 2$ e $r_{12} \equiv \omega_1 \cdot \omega_2 = -\partial_{\eta_1} \cdot \partial_{\eta_2}$. A relação (6.51) pode ser reescrita com o uso do teorema de adição de Gegenbauer para as funções de Bessel [69]:

$$\frac{J_\nu(\omega)}{\omega^\nu} = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{k=0}^{\infty} (\nu + k) C_k^\nu(z) \frac{J_{\nu+k}(x)}{x^\nu} \frac{J_{\nu+k}(y)}{y^\nu}, \quad (6.52)$$

com $\omega^2 = x^2 + y^2 - 2xyz$ e

$$C_k^\nu(z) = \sum_{n=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(\nu + k - n)}{\Gamma(\nu)(k - 2n)!} (2z)^{k-2n}, \quad \nu > -\frac{1}{2} \text{ e } \nu \neq 0, \quad (6.53)$$

onde $\lfloor x \rfloor$ denota o maior número inteiro menor ou igual ao número real x . De fato, definindo os parâmetros de (6.52)-(6.53) como $\omega = \sqrt{\sigma}\hat{r}$, $x = \sqrt{\sigma}r_1$, $y = \sqrt{\sigma}r_2$, $z = r_{12}/(r_1 r_2)$ e $\nu = (D - 4)/2$, tem-se

$$\begin{aligned} I(\sigma) &= \pi^{\frac{D}{2}} (2\sigma)^{\frac{D-4}{2}} \left[\frac{J_{\frac{D-4}{2}}(\sqrt{\sigma}\hat{r})}{(\sqrt{\sigma}\hat{r})^{\frac{D-4}{2}}} \right] F_1(\eta_1) F_2(\eta_2) \\ &= \pi^{\frac{D}{2}} 2^{D-4} \Gamma\left(\frac{D-4}{2}\right) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{D-4}{2} + k \right) C_k^{\frac{D-4}{2}} \left(\frac{r_{12}}{r_1 r_2} \right) \frac{J_{\frac{D-4}{2}+k}(\sqrt{\sigma}r_1) J_{\frac{D-4}{2}+k}(\sqrt{\sigma}r_2)}{(r_1 r_2)^{\frac{D-4}{2}}} \right] F_1(\eta_1) F_2(\eta_2), \end{aligned} \quad (6.54)$$

calculado em $\eta_1 = 0 = \eta_2$. Com o uso da identidade entre a função hipergeométrica ${}_0F_1$ e a função de Bessel de primeira espécie J [61],

$${}_0F_1(\nu + 1; -z^2/4) = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{(z/2)^\nu} J_\nu(z),$$

⁴¹Porque em (6.50) o argumento da função de Bessel de primeira espécie é um operador pseudo-diferencial, esta igualdade é definida em termos da expansão em série de potências [61]:

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \nu + 1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2m + \nu}.$$

onde

$${}_0F_1(\nu; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad (\nu)_n \equiv \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ e } \nu \in \mathbb{R} \text{ (símbolo de Pochhammer),}$$

pode-se reescrever a relação (6.54) com $\nu = (D-4)/2$ e $z_i = \sqrt{\sigma} r_i$, $i = 1, 2$. O resultado é:

$$I(\sigma) = \sigma^{\frac{D-4}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{2^{2k}} \frac{\Gamma(\frac{D-4}{2}) \Gamma(\frac{D-4}{2} + k)}{[\Gamma(\frac{D-2}{2} + k)]^2} C_k^{\frac{D-4}{2}} \left(\frac{\partial_{\eta_1} \cdot \partial_{\eta_2}}{(\partial_{\eta_1} \cdot \partial_{\eta_1})^{1/2} (\partial_{\eta_2} \cdot \partial_{\eta_2})^{1/2}} \right) (\partial_{\eta_1} \cdot \partial_{\eta_1})^{k/2} \\ \times (\partial_{\eta_2} \cdot \partial_{\eta_2})^{k/2} \tilde{F}_1(\frac{D-4}{2}, k)(\eta_1; \sigma) \tilde{F}_2(\frac{D-4}{2}, k)(\eta_2; \sigma) \Big|_{\eta_1=0=\eta_2}, \quad (6.55)$$

em que a propriedade $C_k^\nu(-z) = (-1)^k C_k^\nu(z)$ foi utilizada e foram feitas as seguintes definições:

$$\tilde{F}_{i(\nu, k)}(\eta_i, p; \sigma) \equiv \sigma^{k/2} {}_0F_1\left(1 + \nu + k; -\frac{\sigma}{4} \partial_{\eta_i} \cdot \partial_{\eta_i}\right) F_i(\eta_i, p) \quad i = 1, 2.$$

Observe que

$$\frac{\Gamma\left(\frac{D-4}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D-4}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{D-2}{2} + k\right)} = \frac{\Gamma(\nu)(\nu + k)}{\Gamma(\nu + 1 + k)} = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu + k)} = \frac{1}{(\nu)_k}, \quad (6.56)$$

onde a propriedade da função gama $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$ foi utilizada. Em adição, o termo em (6.55),

$$C_k^{\frac{D-4}{2}} \left(\frac{\partial_{\eta_1} \cdot \partial_{\eta_2}}{(\partial_{\eta_1} \cdot \partial_{\eta_1})^{1/2} (\partial_{\eta_2} \cdot \partial_{\eta_2})^{1/2}} \right) (\partial_{\eta_1} \cdot \partial_{\eta_1})^{k/2} (\partial_{\eta_2} \cdot \partial_{\eta_2})^{k/2} \tilde{F}_1(\frac{D-4}{2}, k)(\eta_1; \sigma) \tilde{F}_2(\frac{D-4}{2}, k)(\eta_2; \sigma) \Big|_{\eta_1=0=\eta_2} \quad (6.57)$$

pode ser reescrito de forma mais simétrica como

$$\tilde{F}_1(\frac{D-4}{2}, k)(\eta_1; \sigma) (\overleftarrow{\partial}_{\eta_1} \cdot \overleftarrow{\partial}_{\eta_1})^{k/2} C_k^{\frac{D-4}{2}} \left(\frac{\overleftarrow{\partial}_{\eta_1} \cdot \overrightarrow{\partial}_{\eta_2}}{(\overleftarrow{\partial}_{\eta_1} \cdot \overleftarrow{\partial}_{\eta_1})^{1/2} (\overrightarrow{\partial}_{\eta_2} \cdot \overrightarrow{\partial}_{\eta_2})^{1/2}} \right) (\overrightarrow{\partial}_{\eta_2} \cdot \overrightarrow{\partial}_{\eta_2})^{k/2} \tilde{F}_2(\frac{D-4}{2}, k)(\eta_2; \sigma), \quad (6.58)$$

em que o operador $\overrightarrow{\partial}_\eta$ age apenas na função à direita ao passo que $\overleftarrow{\partial}_\eta$ age apenas na função à esquerda. Com esta notação em mente, pode-se retomar à variável original $\eta_1, \eta_2 \rightarrow \eta$ de modo que substituindo (6.56) e (6.58) em (6.55), obtém-se

$$I(\sigma) = \sigma^{\frac{D-4}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} A_{(\frac{D-4}{2}, k)} \left[\tilde{F}_1(\frac{D-4}{2}, k)(\eta; \sigma) \right] \mathbb{P}_{\frac{D-4}{2}}^{(k)} \left(\overleftarrow{\partial}_\eta, \overrightarrow{\partial}_\eta \right) \left[\tilde{F}_2(\frac{D-4}{2}, k)(\eta; \sigma) \right] \Big|_{\eta=0}, \quad (6.59)$$

com

$$A_{(\nu, k)} \equiv (-1)^k \frac{\pi^{D/2}}{k! 2^k \Gamma(1 + \nu + k)} \quad (6.60)$$

e

$$\mathbb{P}_\nu^{(k)} \left(\overleftarrow{\partial}_\eta, \overrightarrow{\partial}_\eta \right) \equiv \frac{k!}{2^k (\nu)_k} (\overleftarrow{\partial}_\eta \cdot \overleftarrow{\partial}_\eta)^{k/2} C_k^\nu \left(\frac{\overleftarrow{\partial}_\eta \cdot \overrightarrow{\partial}_\eta}{(\overleftarrow{\partial}_\eta \cdot \overleftarrow{\partial}_\eta)^{1/2} (\overrightarrow{\partial}_\eta \cdot \overrightarrow{\partial}_\eta)^{1/2}} \right) (\overrightarrow{\partial}_\eta \cdot \overrightarrow{\partial}_\eta)^{k/2},$$

o qual é chamado *operador corrente de troca de spin k* [54]. Com o uso da definição de C_k^ν (6.53) e notando que

$$\frac{\Gamma(\nu + k - n)}{\Gamma(\nu)(\nu)_k} = \frac{\Gamma(\nu + k - n)}{\Gamma(\nu + k)} \stackrel{(6.28)}{=} \frac{\Gamma(1 - \nu - k)}{\Gamma(1 - \nu - k + n)} \frac{\sin(\pi(\nu + k))}{\sin(\pi(\nu + k - n))} = \frac{(-1)^n}{(1 - \nu - k)_n},$$

o operador de troca pode ser simplificado a:

$$\mathbb{P}_\nu^{(k)} \left(\overleftarrow{\partial}_\eta, \overrightarrow{\partial}_\eta \right) = \sum_{n=0}^{[k/2]} \frac{1}{2^{2n} (1 - \nu - k)_n} \frac{k!}{n! (k - 2n)!} \left(\overleftarrow{\partial}_\eta \cdot \overleftarrow{\partial}_\eta \right)^n \left(\overleftarrow{\partial}_\eta \cdot \overrightarrow{\partial}_\eta \right)^{k-2n} \left(\overrightarrow{\partial}_\eta \cdot \overrightarrow{\partial}_\eta \right)^n. \quad (6.61)$$

Assim, a expressão final de (6.50) é:

$$I(\sigma) = \sigma^{\frac{D-4}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} A_{(\frac{D-4}{2}, k)} \frac{1}{2^{2n} \left(3 - \frac{D}{2} - s\right)_n} \frac{s!}{n!(s-2n)!} \times \left[\tilde{F}_{1(\frac{D-4}{2}, s)}(\eta; \sigma) \right] \left(\overleftarrow{\partial}_\eta \cdot \overleftarrow{\partial}_\eta \right)^n \left(\overleftarrow{\partial}_\eta \cdot \overrightarrow{\partial}_\eta \right)^{s-2n} \left(\overrightarrow{\partial}_\eta \cdot \overrightarrow{\partial}_\eta \right)^n \left[\tilde{F}_{2(\frac{D-4}{2}, s)}(\eta; \sigma) \right] \Big|_{\eta=0}. \quad (6.62)$$

6.3.1 Aplicação: Cálculo do Vértice Cúbico (6.9) no Espaço Euclidiano

Definindo

$$\begin{aligned} F_1(\eta, p) &\equiv J(\eta, -p) \\ F_2(\eta, p) &\equiv -\frac{1}{p^2} J(\eta, p) \end{aligned}$$

o vértice cúbico (6.9) no espaço Euclidiano é, com o uso do resultado (6.59):

$$S_c^{(E)} = -\sigma^{\frac{D-4}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \int d^D p A_{(\frac{D-4}{2}, k)} \left[\mathcal{J}_{(\frac{D-4}{2}, k)}(\eta, -p; \sigma) \right] \frac{\mathbb{P}_{\frac{D-4}{2}}^{(k)}(\overleftarrow{\partial}_\eta, \overrightarrow{\partial}_\eta)}{p^2} \left[\mathcal{J}_{(\frac{D-4}{2}, k)}(\eta, p; \sigma) \right] \Big|_{\eta=0}, \quad (6.63)$$

onde o operador \mathbb{P} é dado por (6.61) e

$$\mathcal{J}_{(\nu, k)}(\eta, p; \sigma) \equiv \sigma^{k/2} {}_0F_1 \left(1 + \nu + k; -\frac{\sigma}{4} \partial_\eta \cdot \partial_\eta \right) J(\eta, p). \quad (6.64)$$

Assumindo que a corrente \mathcal{J} seja uma função analítica em η , então pode-se expandi-la como (para simplificar a análise que segue, faz-se $\sigma = 1$):

$$\mathcal{J}(\eta, p) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \eta^{\mu_1} \dots \eta^{\mu_r} \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_r}^{(r)}(p),$$

tal que

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{J}(\eta, -p) \right] \mathbb{P}_{\frac{D-4}{2}}^{(s)}(\overleftarrow{\partial}_\eta, \overrightarrow{\partial}_\eta) \left[\mathcal{J}(\eta, p) \right] \Big|_{\eta=0} &= \sum_{n=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} \frac{1}{2^{2n} \left(3 - \frac{D}{2} - s\right)_n} \frac{s!}{n!(s-2n)!} \\ &\times \left\{ \left[\sum_{u=0}^{\infty} \frac{1}{u!} \eta^{\mu_1} \dots \eta^{\mu_u} \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_u}^{(u)}(-p) \right] \left(\overleftarrow{\partial}_\eta \cdot \overleftarrow{\partial}_\eta \right)^n \left(\overleftarrow{\partial}_\eta \cdot \overrightarrow{\partial}_\eta \right)^{s-2n} \left(\overrightarrow{\partial}_\eta \cdot \overrightarrow{\partial}_\eta \right)^n \right. \\ &\times \left. \left[\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} \eta^{\mu_1} \dots \eta^{\mu_v} \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_v}^{(v)}(p) \right] \right\} \Big|_{\eta=0}. \quad (6.65) \end{aligned}$$

Para que esta relação seja diferente de zero, é necessário que os tensores $\mathcal{J}^{(u)}$ e $\mathcal{J}^{(v)}$ sejam de ordem s porque, efetivamente, há s derivadas à esquerda e s derivadas à direita em (6.65), de modo que se $u > s$ ou $v > s$, a relação (6.65) se anula, visto que as derivadas nesta relação são calculadas na origem $\eta = 0$. Em adição, observe que

$$\begin{aligned} (\partial_\eta \cdot \partial_\eta) \eta^{\mu_1} \dots \eta^{\mu_s} \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_s}^{(s)}(p) &= \eta^{\mu_3} \dots \eta^{\mu_s} \mathcal{J}_{\mu_3 \dots \mu_s}^{(s-2)}(p) + \eta^{\mu_2} \eta^{\mu_5} \dots \eta^{\mu_s} \mathcal{J}_{\mu_2 \mu_5 \dots \mu_s}^{(s-2)}(p) \\ &+ \dots + \eta^{\mu_1} \dots \eta^{\mu_{s-2}} \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_{s-2}}^{(s-2)}(p), \end{aligned}$$

onde cada tensor $\mathcal{J}^{(s-2)}$ do segundo membro desta equação é obtido tomando um traço do tensor $\mathcal{J}^{(s)}$ como em

$$\mathcal{J}_{\mu_3 \dots \mu_s}^{(s-2)}(p) = \mathcal{J}^{\mu_2}_{\mu_3 \dots \mu_s} \mathcal{J}_{\mu_2 \mu_3 \dots \mu_{s-1} \mu_s}^{(s)}(p).$$

Assim, pode-se inferir que o efeito do operador $(\partial_\eta \cdot \partial_\eta)^n$ sobre $\mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_s}^{(s)}$ é

$$\mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_s}^{(s)}(p) \xrightarrow{(\partial_\eta \cdot \partial_\eta)^n} \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_{s-2n}}^{(s-2n)}[n](p),$$

em que $[n]$, $n < s/2$, denota todos os possíveis n traços do tensor $\mathcal{J}^{(s)}$. Analogamente, o efeito do operador $(\overleftarrow{\partial}_\eta \cdot \overrightarrow{\partial}_\eta)^{s-2n}$ sobre a expressão remanescente de (6.65) é:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{(s-2n)!} \eta^{\mu_1} \dots \eta^{\mu_{s-2n}} \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_{s-2n}}^{(s-2n)}[n](-p) \right] (\overleftarrow{\partial}_\eta \cdot \overrightarrow{\partial}_\eta)^{s-2n} \\ & \times \left[\frac{1}{(s-2n)!} \eta^{\mu'_1} \dots \eta^{\mu'_{s-2n}} \mathcal{J}_{\mu'_1 \dots \mu'_{s-2n}}^{(s-2n)}[n](p) \right] \\ & = \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_{s-2n}}^{(s-2n)}[n](-p) \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_{s-2n}}^{(s-2n)}[n](p) \equiv \mathcal{J}^{(s-2n)}[n](-p) \cdot \mathcal{J}^{(s-2n)}[n](p), \end{aligned}$$

o qual substituindo em (6.65), obtém-se

$$\begin{aligned} & [\mathcal{J}(\eta, -p)] \mathbb{P}_{\frac{D-4}{2}}^{(s)} (\overleftarrow{\partial}_\eta, \overrightarrow{\partial}_\eta) [\mathcal{J}(\eta, p)] \Big|_{\eta=0} \\ & = \sum_{n=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} \frac{1}{2^{2n} \left(3 - \frac{D}{2} - s\right)_n} \frac{s!}{n!(s-2n)!} \mathcal{J}^{(s-2n)}[n](-p) \cdot \mathcal{J}^{(s-2n)}[n](p). \end{aligned} \quad (6.66)$$

Finalmente, substituindo (6.66) em (6.63), obtém-se

$$S_c^{(E)} = \sigma^{\frac{D-4}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} A_{\left(\frac{D-4}{2}, s\right)} \sum_{n=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} \frac{1}{2^{2n} \left(3 - \frac{D}{2} - s\right)_n} \frac{s!}{n!(s-2n)!} \int d^D p \mathcal{J}^{(s-2n)}[n](-p) \cdot \mathcal{J}^{(s-2n)}[n](p). \quad (6.67)$$

Para cada s , este vértice é precisamente aquele encontrado pelos autores de [70] no contexto da teoria das partículas de altos spins não vinculadas.

Conclusões

Nesta dissertação apresentamos um estudo sistemático sobre a teoria das CSPs e CSTs com ênfase em sua descrição por meio de teoria de grupos, conforme feito originalmente por Wigner em [4], e por uma teoria de campo. Nos dois primeiros capítulos apresentamos os ingredientes básicos necessários em teoria de grupos, com destaque aos grupos de Lorentz e Poincaré, para que, no Capítulo 3, as representações de spin contínuo e táquions de spin contínuo deste grupo fossem completamente caracterizadas. Em seguida a esta análise, obtivemos, no Capítulo 4, equações de onda que descrevem as representações de spin contínuo cuja solução foi utilizada na construção de amplitudes de emissão/absorção soft. O Capítulo 5 foi destinado ao estudo de uma teoria de campo para um CST, onde uma ação foi apresentada com a análise de suas simetrias globais e locais. O cálculo explícito dos autovalores dos operadores de Casimir do grupo de Poincaré permitiu que pudéssimos verificar que, de fato, a ação apresentada propaga um único CST. Em seguida, a escolha de um *gauge* permitiu que, na expansão do campo taquiônico em tensores completamente simétricos e de todas as ordens, as componentes com traços nulos fossem eliminadas. Finalizamos este capítulo acoplando ao CST uma corrente externa escolhida como função de dois campos escalares massivos. Verificamos que ela satisfaz uma equação de continuidade e obtivemos explicitamente uma expressão local para ela. No limite de massa nula, o vértice cúbico com uma CSP e dois campos escalares massivos obtidos pelos autores de [54] foi recuperado. Por fim, no Capítulo 6 apresentamos uma análise sistemática do vértice cúbico com uma CSP, mostrando que, no espaço de Minkowski, este vértice não comporta os graus de liberdade físicos compatíveis com uma CSP. No espaço Euclideano, por sua vez, mostramos que este vértice apresenta uma similaridade com aquele encontrado pelos autores de [70] no contexto da teoria das partículas de altos spins não-vinculadas, característica essa que, a nosso ver, necessita ser melhor esclarecida em trabalhos futuros.

A existência de amplitudes de emissão/absorção soft covariantes para CSPs demonstra que interações de longo alcance podem ser intermediadas por estas partículas, de modo que a teoria das CSPs pode oferecer novos ingredientes na descrição da eletrodinâmica e da teoria da gravidade. De fato, em [64], Schuster & Toro demonstraram que as amplitudes de emissão soft de uma CSP se aproximam muito bem àquelas correspondentes ao fóton e ao gráviton no regime de altas energias $E \gg \rho$. Por um lado, esta correspondência é adequada para resolver o problema levantado por Wigner [6] sobre a capacidade térmica infinita de um sistema térmico constituído por CSPs porque, fenomenologicamente, apenas as suas três primeiras componentes (veja a expansão dada pela (0.8)) têm relevância no regime de altas energias (mundo real) $E \gg \rho$ para a capacidade térmica deste sistema térmico. Por outro lado, as amplitudes de emissão/absorção soft para CSPs não correspondem àquelas da teoria de altos spins no limite de massa nula e spin arbitrariamente alto [64]. Isto significa que através deste limite não é possível obter uma teoria com interações de CSPs a partir da teoria de partículas massivas de altos spins, em contrapartida à análise cinemática feita em [5, 33]. Portanto, a busca por uma teoria de campo completa onde as amplitudes de emissão/absorção de uma CSP soft possam ser recuperadas, a nosso ver, constitui o problema central sobre a teoria das CSPs. A ação de Schuster & Toro [41], embora descreva adequadamente a CSP livre, não parece ser um bom começo em resolver este problema porque o acoplamento da CSP a uma corrente externa não propaga os graus de liberdade físicos corretos [54].

Alguns pontos sobre a teoria dos CSTs não foram discutidos nesta dissertação e, a nosso ver, merecem destaque em estudos futuros: a extração do propagador a partir da ação apresentada no Capítulo 5 e verificação se o mesmo

propaga os graus de liberdade físicos corretos correspondente à representação taquiônica de spin contínuo.

Generalizar a formulação Lagrangiana dado por Schuster & Toro [41] e pelos autores de [46] à espaços de (Anti-)de Sitter constitui um caminho natural no estudo das representações de spin contínuo. Isto foi feito por Metsaev [63,71] com a extensão do formalismo dado às partículas de altos spins massivas [72,73] às CSPs bosônicas e fermiônicas.⁴² Neste contexto, destacamos dois resultados importantes obtidos por Metsaev: representações de spin contínuo unitárias em espaços de de Sitter inexistem e, em espaços de Anti-de Sitter, as soluções unitárias não foram ainda identificadas com as representações unitárias do grupo de Anti-de Sitter; este constitui um problema em aberto. Estes resultados foram obtidos também pelos autores de [76] com o uso do formalismo do tipo *frame* às CSPs (veja também [77] para mais discussões sobre este formalismo aplicado às CSPs).

⁴²Veja também [74] onde o autor obtém a ação de Metsaev a partir da ação que descreve partículas massivas de altos spins [73,75] através do limite $m \rightarrow 0$ e $s \rightarrow \infty$, onde m é a massa da partícula e s é o spin.

A Geradores do LG Massivo e Não-Massivo

Seja k^μ um quadrivetor tipo tempo ($k^2 = m^2 > 0$) e q^μ um quadrivetor tipo luz ($q^2 = 0$) de modo que $k \cdot q \neq 0$.

Então, o quadrivetor

$$k_b^\mu = k^\mu - \frac{M^2}{2k \cdot q} q^\mu. \quad (\text{A.1})$$

é do tipo luz e, para a escolha $k_b = (k_b, 0, 0, k_b)$, define-se os vetores de polarização ϵ_\pm como

$$\epsilon_\pm(k_b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_1 \pm i\epsilon_2), \quad (\text{A.2})$$

com $\epsilon_{1,2}$ dados por (3.20). Veja que $\epsilon_\pm = \epsilon_\pm(k_b)$ são funções do quadrimomento k_b^μ de modo que se $L(p)$ é uma transformação de Lorentz tal que se $k_b \xrightarrow{L(p)} p$, então $\epsilon_\pm(k_b) \longrightarrow \epsilon_\pm(p)$. Com o uso das propriedades

- $\epsilon_\pm^* = \epsilon_\mp$;
- $\epsilon_\pm^2 = 0$;
- $\epsilon_\pm \cdot \epsilon_\mp = -1$;
- $\epsilon_\pm(k_b) \cdot k = \epsilon_\pm(k_b) \cdot k_b = \epsilon_\pm(k_b) \cdot q = 0$;
- $k_b \cdot q = k \cdot q \neq 0$,

pode-se demonstrar que ϵ_\pm, k_b e q são linearmente independentes e podem ser utilizados para escrever a métrica $g^{\mu\nu}$ e o símbolo de Levi-Civita $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ da seguinte forma:

$$g^{\mu\nu} = -(\epsilon_+^\mu \epsilon_-^\nu + \epsilon_-^\mu \epsilon_+^\nu) + \frac{1}{k_b \cdot q} (k_b^\mu q^\nu + k_b^\nu q^\mu) \quad (\text{A.3})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\frac{i}{k_b \cdot q} (\epsilon_+^\mu \epsilon_-^\nu k_b^\rho q^\sigma \pm \text{perms}), \quad (\text{A.4})$$

em que 'perms' significa todas as possíveis permutações dos índices μ, ν, ρ e σ em $\epsilon_+^\mu \epsilon_-^\nu k_b^\rho q^\sigma$.

O "quadrivetor"

$$\epsilon_0^\mu = \frac{1}{m} \left(k^\mu - \frac{m^2}{k \cdot q} q^\mu \right) = \frac{1}{m} \left(k_b^\mu - \frac{m^2}{2k_b \cdot q} q^\mu \right) \quad (\text{A.5})$$

satisfaz $\epsilon_0 \cdot (k, \epsilon_\pm) = 0$, $\epsilon_0 \cdot k_b = -m/2$ e $\epsilon_0^2 = -1$. Veja que quando $m \rightarrow 0$, tem-se $\epsilon_0 m \rightarrow k_b$. Este limite será utilizado na Seção A.2.

A.1 Caso Massivo

Neste caso $k^2 = m^2$ e as componentes w^μ (3.11) podem ser escritas em termos de ϵ_0 como:

$$\begin{aligned} w_0 = w \cdot \epsilon_0 &= \frac{1}{M} w \cdot \left(k - \frac{M^2}{k \cdot q} q \right) \stackrel{(\text{A.4})}{=} -\frac{M}{k \cdot q} q_\mu \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\nu J_{\rho\sigma} \\ &= -\frac{M}{2k \cdot q} \left[-\frac{i}{k \cdot q} (\epsilon_+^\mu \epsilon_-^\nu k_b^\rho q^\sigma \pm \text{perms}) \right] q_\mu k_\nu J_{\rho\sigma} \\ &= i \frac{M}{2(k \cdot q)^2} \left(\epsilon_+^\rho \epsilon_-^\sigma k_b^\mu q^\nu - \epsilon_+^\sigma \epsilon_-^\rho k_b^\mu q^\nu \right) q_\mu k_\nu J_{\rho\sigma} \\ &= i \frac{M}{(k \cdot q)^2} \epsilon_+^\rho \epsilon_-^\sigma \underbrace{(k_b \cdot q)(q \cdot k)}_{=k \cdot q} J_{\rho\sigma} \\ &= i M \epsilon_+^\rho \epsilon_-^\sigma J_{\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

em que na terceira linha eliminou-se todos os termos que são contrações entre ϵ_{\pm} e os quadrimomentos k_b e q . Portanto,

$$(w_0)^\mu{}_\nu = iM\epsilon_+^\rho\epsilon_-^\sigma(J_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu \stackrel{(2.34)}{=} i^2M\epsilon_+^\rho\epsilon_-^\sigma(\delta_\rho^\mu g_{\sigma\nu} - \delta_\sigma^\mu g_{\rho\nu}) = M(\epsilon_{+\nu}\epsilon_-^\mu - \epsilon_+^\mu\epsilon_{-\nu}). \quad (\text{A.7})$$

As outras duas componentes w_{\pm} podem ser calculadas de maneira análoga:

$$\begin{aligned} w_+ = \sqrt{2}w \cdot \epsilon_+ &= \sqrt{2}\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}k_\nu J_{\rho\sigma}\epsilon_{+\mu} \\ &= -\sqrt{2}\frac{i}{2k \cdot q}(\epsilon_+^\mu\epsilon_-^\nu k_b^\rho q^\sigma \pm \text{perms})k_\nu J_{\rho\sigma}\epsilon_{+\mu} \\ &= -\sqrt{2}\frac{i}{2k \cdot q}(\epsilon_+^\rho\epsilon_-^\mu k_b^\nu q^\sigma - \epsilon_+^\sigma\epsilon_-^\mu k_b^\nu q^\rho + \epsilon_+^\sigma\epsilon_-^\mu k_b^\rho q^\nu - \epsilon_+^\rho\epsilon_-^\mu k_b^\sigma q^\nu)k_\nu J_{\rho\sigma}\epsilon_{+\mu} \\ &= -\sqrt{2}\frac{i}{k \cdot q}\left[\underbrace{(\epsilon_- \cdot \epsilon_+)}_{=-1}(k_b \cdot k)\epsilon_+^\rho q^\sigma + (q \cdot k)\underbrace{(\epsilon_- \cdot \epsilon_+)}_{=-1}\epsilon_+^\sigma k_b^\rho\right]J_{\rho\sigma} \\ &= i\sqrt{2}\left[\frac{k_b \cdot k}{k \cdot q}\epsilon_+^\rho q^\sigma + \epsilon_+^\sigma k_b^\rho\right]J_{\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

em que foi utilizado $\epsilon_- \cdot \epsilon_+ = -1$. A partir da definição (A.1), pode-se calcular $k_b \cdot k$:

$$k_b \cdot k = k^2 - \frac{M^2}{2} = M^2 - \frac{M^2}{2} = \frac{M^2}{2}, \quad (\text{A.9})$$

de modo que

$$\begin{aligned} w_+ = i\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}\frac{M^2}{k \cdot q}\epsilon_+^\rho q^\sigma + \epsilon_+^\sigma k_b^\rho\right]J_{\rho\sigma} &= i\sqrt{2}\epsilon_+^\rho\left(\frac{1}{2}\frac{M^2}{k \cdot q}q^\sigma - k_b^\sigma\right)J_{\rho\sigma} \stackrel{(A.5)}{=} i\sqrt{2}\epsilon_+^\rho(-M\epsilon_0^\sigma)J_{\rho\sigma} \\ &= i\sqrt{2}M\epsilon_0^\rho\epsilon_+^\sigma J_{\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Analogamente,

$$w_- = -i\sqrt{2}M\epsilon_0^\rho\epsilon_-^\sigma J_{\rho\sigma}. \quad (\text{A.11})$$

Com o uso da relação (2.34), pode-se calcular as entradas de w_{\pm} :

$$\begin{aligned} (w_{\pm})^\mu{}_\nu &= \pm i\sqrt{2}M\epsilon_{\pm}^\sigma\epsilon_0^\rho(J_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = \pm i^2\sqrt{2}M\epsilon_{\pm}^\sigma\epsilon_0^\rho(\delta_\rho^\mu g_{\sigma\nu} - \delta_\sigma^\mu g_{\rho\nu}) = \mp\sqrt{2}M(\epsilon_{\pm\nu}\epsilon_0^\mu - \epsilon_{\pm}^\mu\epsilon_{0\nu}) \\ &= \pm\sqrt{2}M(\epsilon_{\pm}^\mu\epsilon_{0\nu} - \epsilon_{\pm\nu}\epsilon_0^\mu). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

As relações de comutação canônica neste caso são dadas por

$$\begin{aligned} [w_0, w_{\pm}] &= \pm\sqrt{2}(iM)^2(\epsilon_+^\mu\epsilon_-^\nu)(\epsilon_0^\rho\epsilon_{\pm}^\sigma)[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] \\ &\stackrel{(2.35)}{=} \pm\sqrt{2}(-i)(iM)^2(\epsilon_+^\mu\epsilon_-^\nu\epsilon_0^\rho\epsilon_{\pm}^\sigma)(g_{\mu\sigma}J_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma}J_{\rho\mu} + g_{\nu\rho}J_{\sigma\mu} - g_{\mu\rho}J_{\sigma\nu}) \\ &= \pm\sqrt{2}(-i)(iM)^2\left[(\epsilon_{+\sigma}\epsilon_{\pm}^\sigma)(\epsilon_-^\nu\epsilon_0^\rho J_{\rho\nu}) - (\epsilon_{-\sigma}\epsilon_{\pm}^\sigma)(\epsilon_+^\mu\epsilon_0^\rho J_{\rho\mu}) + (\epsilon_{-\rho}\epsilon_0^\rho)(\epsilon_+^\mu\epsilon_{\pm}^\sigma J_{\sigma\mu}) \right. \\ &\quad \left. - (\epsilon_{+\rho}\epsilon_0^\rho)(\epsilon_-^\nu\epsilon_{\pm}^\sigma J_{\sigma\nu})\right], \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
[w_0, w_+] &= +(-i)\sqrt{2}(iM)^2 \left[\underbrace{(\epsilon_{+\sigma}\epsilon_+^\sigma)}_{=0} (\epsilon_-^\nu \epsilon_0^\rho J_{\rho\nu}) - \underbrace{(\epsilon_{-\sigma}\epsilon_+^\sigma)}_{=-1} (\epsilon_+^\mu \epsilon_0^\rho J_{\rho\mu}) + \underbrace{(\epsilon_{-\rho}\epsilon_0^\rho)}_{=0} (\epsilon_+^\mu \epsilon_+^\sigma J_{\sigma\mu}) \right. \\
&\quad \left. - \underbrace{(\epsilon_{+\rho}\epsilon_0^\rho)}_{=0} (\epsilon_-^\nu \epsilon_+^\sigma J_{\sigma\nu}) \right] \\
&= -i(iM)[i\sqrt{2}M\epsilon_0^\rho \epsilon_+^\mu J_{\rho\mu}] \\
&= Mw_+.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$[w_0, w_-] = -Mw_-.$$

Em adio,

$$\begin{aligned}
[w_+, w_-] &= -2(iM)^2 (\epsilon_0^\mu \epsilon_+^\nu \epsilon_0^\rho \epsilon_-^\sigma) [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] \\
&\stackrel{(2.35)}{=} -2(-i)(iM)^2 (\epsilon_0^\mu \epsilon_+^\nu \epsilon_0^\rho \epsilon_-^\sigma) (g_{\mu\sigma} J_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma} J_{\rho\mu} + g_{\nu\rho} J_{\sigma\mu} - g_{\mu\rho} J_{\sigma\nu}) \\
&= 2i(iM)^2 \left[\underbrace{(\epsilon_{0\sigma}\epsilon_-^\sigma)}_{=0} (\epsilon_+^\nu \epsilon_0^\rho J_{\rho\nu}) - (\epsilon_{+\sigma}\epsilon_-^\sigma) \underbrace{(\epsilon_0^\mu \epsilon_0^\rho J_{\rho\mu})}_{=0} + \underbrace{(\epsilon_{+\rho}\epsilon_0^\rho)}_{=0} (\epsilon_-^\sigma \epsilon_0^\mu J_{\sigma\mu}) - \underbrace{(\epsilon_{0\rho}\epsilon_0^\rho)}_{=-1} (\epsilon_+^\nu \epsilon_-^\sigma J_{\sigma\nu}) \right] \\
&= 2i(iM)(iM\epsilon_+^\nu \epsilon_-^\sigma \underbrace{J_{\sigma\nu}}_{=-J_{\nu\sigma}}) \\
&\stackrel{(A.6)}{=} 2Mw_0.
\end{aligned}$$

Assim, vê-se que w_\pm, w_0 caracteriza a lgebra de $SO(3)$. Em termos destas três componentes, obtém-se

$$w^\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\epsilon_-^\mu w^+ + \epsilon_+^\mu w^- \right) - \epsilon_0^\mu w^0, \quad (A.13)$$

de modo que o operador de Casimir quártico  dado por:

$$\begin{aligned}
C_4 = w^2 &= \frac{1}{2} (\epsilon_- w^+ + \epsilon_+ w^-)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\epsilon_-^\mu w^+ + \epsilon_+^\mu w^- \right) \cdot (\epsilon_0 w^0) + (\epsilon_0 w^0)^2 \\
&= \frac{1}{2} [(\epsilon_- \cdot \epsilon_+) w^+ w^- + (\epsilon_+ \cdot \epsilon_-) w^- w^+] + (\epsilon_0)^2 (w^0)^2 \\
&\therefore \boxed{C_4 = -\frac{1}{2} (w^+ w^- + w^- w^+) - (w^0)^2}. \quad (A.14)
\end{aligned}$$

A.2 Caso não-Massivo

No limite em que m  zero, tem-se que $M\epsilon_0 \rightarrow k$ conforme a definio (A.5) estabelece. De acordo com (A.10)-(A.11), w_\pm são finitos e não-nulos; denote-os por T_\pm :

$$m \rightarrow 0 \Rightarrow m\epsilon_0 \rightarrow k \Rightarrow w_\pm \rightarrow T_\pm \equiv \pm i\sqrt{2}k^\rho \epsilon_\pm^\sigma J_{\rho\sigma}, \quad (A.15)$$

com

$$(T_\pm)^\mu{}_\nu = \pm i\sqrt{2}k^\rho \epsilon_\pm^\sigma (J_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu \stackrel{(2.34)}{=} \pm i^2\sqrt{2}k^\rho \epsilon_\pm^\sigma \left(\delta_\rho^\mu g_{\sigma\nu} - \delta_\sigma^\mu g_{\rho\nu} \right) = \pm\sqrt{2} \left(\epsilon_\pm^\mu k_\nu - k^\mu \epsilon_{\pm\nu} \right). \quad (A.16)$$

Por outro lado, $w_0 \rightarrow 0$ à medida que $m \rightarrow 0$ conforme a relação (A.6) estabelece. Mas, com o uso da relação (A.1), tem-se que

$$w \cdot q = -(\epsilon_0 \cdot q)w^0 = -\frac{1}{m} \left(k \cdot q - \frac{m^2}{k \cdot q} q^2 \right) w^0 = -(k \cdot q) \frac{w_0}{m}, \quad (\text{A.17})$$

que é finito à medida que $m \rightarrow 0$. Isto sugere a seguinte definição:

$$R \equiv -\frac{w \cdot q}{k \cdot q} = \frac{w_0}{m} = i\epsilon_+^\rho \epsilon_-^\sigma J_{\rho\sigma}, \quad (\text{A.18})$$

com

$$R^\mu{}_\nu = i\epsilon_+^\rho \epsilon_-^\sigma (J_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu \stackrel{(2.34)}{=} i^2 \epsilon_+^\rho \epsilon_-^\sigma \left(\delta_\rho^\mu g_{\nu\sigma} - \delta_\sigma^\mu g_{\nu\rho} \right) = - \left(\epsilon_+^\mu \epsilon_{-\nu} - \epsilon_{+\nu} \epsilon_-^\mu \right) = \epsilon_-^\mu \epsilon_{+\nu} - \epsilon_+^\mu \epsilon_{-\nu}. \quad (\text{A.19})$$

Em termos de T_\pm e R , pode-se escrever (A.13) notando que quando $m \rightarrow 0$, obtém-se $\epsilon_0^\mu w^0 = (\epsilon_0^\mu M)R \rightarrow k^\mu R$:

$$\boxed{w^\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\epsilon_-^\mu T^+ + \epsilon_+^\mu T^- \right) - k^\mu R}, \quad (\text{A.20})$$

e a álgebra de Lie corresponde àquela encontrada para o grupo ISO(2) (3.24)

$$\boxed{[T_\pm, T_\mp] = 0, \quad [R, T_\pm] = \pm T_\pm}. \quad (\text{A.21})$$

O operador de Casimir quártico é obtido diretamente a partir da relação (A.14) com $w_0 = 0$ e $w_+ w_- = w_- w_+ = T_+ T_-$:

$$\boxed{C_4 = -T_+ T_-}. \quad (\text{A.22})$$

A.3 "Vetores de Polarização" $\epsilon_\pm(k)$: a Questão da Covariância

Para finalizar este tópico, vamos verificar se $\epsilon_\pm(k)$ e

$$\epsilon(k, \phi) = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\epsilon_+(k) e^{-i\phi} - \epsilon_-(k) e^{i\phi} \right) = -\sqrt{2} \operatorname{Im} \left[\epsilon_+(k) e^{-i\phi} \right], \quad (\text{A.23})$$

onde $\operatorname{Im}(z)$ denota a parte imaginária do número complexo z , se transformam como quadrivetores. Pelo uso das relações (3.31)-(3.32), pode-se calcular a ação de $\mathcal{W} \in \text{LG}_k$ sobre $\epsilon(k)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\theta, \beta) \epsilon(k, \phi) &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\phi} \mathcal{W}(\theta, \beta) \epsilon_+(k) - e^{i\phi} \mathcal{W}(\theta, \beta) \epsilon_-(k) \right) \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left[e^{-i\phi} e^{-i\theta} (\epsilon_+(k) - i\beta k) - e^{i\phi} e^{i\theta} (\epsilon_-(k) + i\beta^* k) \right] \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\epsilon_+(k) e^{-i(\phi+\theta)} - \epsilon_-(k) e^{i(\phi+\theta)} \right) + \frac{k}{\sqrt{2}} \left(\beta e^{-i(\theta+\phi)} + \beta^* e^{i(\theta+\phi)} \right) \\ &= \epsilon(k, \theta + \phi) + \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[\beta e^{-i(\phi+\theta)} \right] k \\ &= \epsilon' + ak, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

com $\epsilon' \equiv \epsilon(k, \theta + \phi)$ e $a \equiv \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[\beta e^{-i(\phi+\theta)} \right]$. Com as relações

$$\begin{aligned} \text{LG}_k \ni \mathcal{W}(\theta, \beta) &= L^{-1}(\Lambda p) \Lambda L(p) & \Leftrightarrow & \quad \Lambda = L(\Lambda p) \mathcal{W}(\theta, \beta) L^{-1}(p) \\ p &= L(p)k, \quad \epsilon_\pm(p) = L(p) \epsilon_\pm(k) & \Leftrightarrow & \quad k = L^{-1}(p)p, \quad \epsilon_\pm(k) = L^{-1}(p) \epsilon_\pm(p) \end{aligned}, \quad (\text{A.25})$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
\Lambda \epsilon_+(p) &= L(\Lambda p) \mathcal{W}(\theta, \beta) \left[L^{-1}(p) \epsilon_+(p) \right] \stackrel{(3.31)}{=} L(\Lambda p) [\mathcal{W}(\theta, \beta) \epsilon_+(k)] \\
&= L(\Lambda p) e^{-i\theta} [\epsilon_+(k) - i\beta k] \\
&= e^{-i\theta} [\epsilon_+(\Lambda p) - i\beta \Lambda p]. \tag{A.26}
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\Lambda \epsilon_-(p) = e^{i\theta} [\epsilon_-(\Lambda p) + i\beta^* \Lambda p]. \tag{A.27}$$

Em adição,

$$\begin{aligned}
\Lambda \epsilon(p, \phi) &= L(\Lambda p) \mathcal{W}(\theta, \beta) \left[L^{-1}(p) \epsilon(p, \phi) \right] = L(\Lambda p) [\mathcal{W}(\theta, \beta) \epsilon(k, \phi)] \\
&\stackrel{(A.24)}{=} L(\Lambda p) \epsilon(k, \phi + \theta) + a L(\Lambda p) k \\
&= \epsilon(\Lambda p, \phi + \theta) + a \Lambda p. \tag{A.28}
\end{aligned}$$

Portanto, pode-se concluir que $\epsilon_\pm(p)$ e $\epsilon(p, \phi)$ não são quadrivetores em virtude dos termos $i\beta \Lambda p$, $i\beta^* \Lambda p$ e $a \Lambda p$ em (A.26)-(A.28). Esta característica sobre $\epsilon_\pm(k)$ e $\epsilon(k, \phi)$ é o ponto de partida tomado por Weinberg na discussão de seu teorema no-go [17].

B Teorema de Weinberg

Steven Weinberg mostrou [17]⁴³ uma consequência interessante da condição de covariância (4.35). Considere um processo genérico envolvendo n partículas cada qual rotuladas pelo seu quadrimomento p_i e pelo parâmetro do LG a_i , com $i = 1, \dots, n$. Considere que neste processo ocorra a emissão de uma partícula sem massa com helicidade $\pm j$ e quadrimomento k . Em símbolos, a reação é dada por:

$$\prod_{\otimes i} |p_i, a_i\rangle \rightarrow \prod_{\otimes i} |p'_i, a'_i\rangle \otimes |k, \pm h\rangle. \quad (\text{B.1})$$

Weinberg demonstrou que sempre é possível escrever a amplitude do processo acima como o produto escalar entre j 'vetores' de polarização $\epsilon_{\pm}(k)$ e um tensor completamente simétrico de ordem j $M_{\mu_1 \dots \mu_j}(k, p_1, \dots, p_n)$ ortogonal ao quadrimomento da partícula sem massa k , $k^{\mu_i} M_{\mu_1 \dots \mu_j}(k, p) = 0$ para algum $i \in \{1, \dots, j\}$, de modo a preservar a condição de covariância (4.35):

$$\begin{aligned} A(k, \pm j, p_1, \dots, p_n) &\propto \epsilon_{\pm}^{*\mu_1}(k) \dots \epsilon_{\pm}^{*\mu_j}(k) M_{\mu_1 \dots \mu_j}(\{k, \pm j\}, p_1, \dots, p_n) \\ k^{\mu_i} M_{\mu_1 \dots \mu_j}(\{k, \pm j\}, p_1, \dots, p_n) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

As duas condições em (B.2) leva a uma consequência importante no que tange a teorias de interações intermediadas por partículas sem massa, a saber, apenas partículas com helicidade menor ou igual a dois podem intermediar interações de longo alcance. Isto pode ser provado notando que

$$f(\{k, \pm h\}, p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n g_i \frac{1}{2p_i \cdot k + i\epsilon} s_i(\{k, \pm j\}, p_i) \stackrel{!}{=} \epsilon_{\pm}^{*\mu_1}(k) \dots \epsilon_{\pm}^{*\mu_j}(k) M_{\mu_1 \dots \mu_j}(\{k, \pm j\}, p_1, \dots, p_n). \quad (\text{B.3})$$

Resolvendo esta última igualdade para a função M com o uso da propriedade $\epsilon_{\pm}(k) \cdot \epsilon_{\mp}(k) = \epsilon_{\pm}(k) \cdot \epsilon_{\pm}^*(k) = -1$, tem-se

$$M_{\mu_1 \dots \mu_j}(\{k, \pm j\}, p_1, \dots, p_n) = (-1)^j \epsilon_{\pm \mu_1}(k) \dots \epsilon_{\pm \mu_j}(k) \sum_{i=1}^n g_i \frac{1}{2p_i \cdot k + i\epsilon} s_i(\{k, \pm h\}, p_i). \quad (\text{B.4})$$

Veja que o fator soft s_i depende de cada quadrimomento p_i e do quadrimomento da partícula sem massa k . Também, o lado esquerdo da relação (B.4) é um tensor simétrico, então a única possibilidade para o fator soft é que haja uma dependência polinomial em cada p_i , $\forall i = 1, \dots, n$ como

$$s_i(\{k, \pm j\}, p_i) = \epsilon_{\pm}^{*\mu_1}(k) \dots \epsilon_{\pm}^{*\mu_j}(k) p_{i\mu_1} \dots p_{i\mu_j} = (\epsilon_{\pm}^*(k) \cdot p_i)^j \quad (\text{B.5})$$

que, substituindo nas relações (B.3)-(B.4), obtém-se

$$\begin{aligned} f(\{k, \pm j\}, p_1, \dots, p_n) &= \sum_{i=1}^n g_i \frac{1}{2p_i \cdot k + i\epsilon} (\epsilon_{\pm}^*(k) \cdot p_i)^j \\ M_{\mu_1 \dots \mu_j}(\{k, \pm j\}, p_1, \dots, p_n) &= \sum_{i=1}^n g_i \frac{1}{2p_i \cdot k + i\epsilon} p_{i\mu_1} \dots p_{i\mu_j} \quad \cdot \\ k^{\mu_i} M_{\mu_1 \dots \mu_j} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Vejamos, a seguir, as consequências das relações em (B.6):

⁴³A Seção 13.1 de [2] e o Apêndice G de [78] fazem uma explanação didática sobre o teorema de Weinberg.

B.1 Eletrodinâmica: j=1

Neste caso, (B.6) leva a

$$\begin{aligned}
 M_{\mu_1}(\{k, \pm j\}, p_1, \dots, p_n) &= \sum_{i=1}^n g_i \frac{1}{2p_i \cdot k + i\epsilon} p_{i_{\mu_1}} \\
 \Rightarrow k^{\mu_1} M_{\mu_1}(\{k, \pm j\}, p_1, \dots, p_n) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n g_i = 0 \\
 \therefore \sum_{i=1}^n g_i = 0 &\rightarrow \text{Conservação de Carga.}
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

B.2 Gravitação: j=2

Neste caso, (B.6) leva a

$$\begin{aligned}
 M_{\mu_1 \mu_2}(\{k, \pm j\}, p_1, \dots, p_n) &= \sum_{i=1}^n g_i \frac{1}{2p_i \cdot k + i\epsilon} p_{i_{\mu_1}} p_{i_{\mu_2}} \\
 \Rightarrow k^{\mu_1} M_{\mu_1 \mu_2}(\{k, \pm j\}, p_1, \dots, p_n) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n g_i p_{i_{\mu_2}} = 0 \\
 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n g_i p_{i_{\mu_2}} = 0, \forall \mu_2 = 0, 1, 2, 3.
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Uma possível solução de (B.8) é dada por

$$g_i = g, \text{ universal} \rightarrow \text{Princípio de Equivalência} \tag{B.9}$$

o qual torna a relação (B.8) uma sentença verdadeira, dado que $\sum_i p_i = 0$ é uma lei da natureza.

B.3 Alto Spin: j>2

Neste caso não há solução geral para as condições em (B.6). Por exemplo, se $j = 3$, tem-se

$$\sum_{i=1}^n g_i p_{i_{\mu_1}} p_{i_{\mu_2}} = 0, \forall \mu_1, \mu_2 = 1, \dots, 4, \tag{B.10}$$

o qual pode estar relacionado à conservação da energia cinética do conjunto de partículas se $g_i \propto 1/2m_i$, onde m_i é a massa de cada partícula que participa do processo (exceto àquelas que não têm massa). Assim, o processo seria elástico e torna a condição (B.10) restrita. Contudo, conforme Weinberg concluiu [17]:

"Estes resultados não significam que partículas de spin três ou mais não existam, apenas que elas não podem gerar campos macroscópicos."

C Algumas Identidades Úteis

Neste apêndice são apresentadas diversas relações de comutação e uma identidade para o operador $\Delta - im\partial_{\xi}$ que são úteis para o texto principal e para os próximos dois apêndices desta dissertação.

As relações de comutação são:

$$\left[\Delta - im\partial_{\xi}, \eta^2 + \xi^2 + \mu^2 \right] = 2(\eta \cdot \partial_x - im\tilde{\xi}), \quad (C.1)$$

$$\left[\Delta - im\partial_{\xi}, \eta \cdot \partial_x - im\tilde{\xi} \right] = \square_x - m^2, \quad (C.2)$$

$$\left[\Delta - im\partial_{\xi}, (\eta \cdot \partial_x - im\tilde{\xi})^N \right] = N(\eta \cdot \partial_x - im\tilde{\xi})^{N-1}(\square_x - m^2), \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad (C.3)$$

$$\left[\partial_{\eta} \cdot \partial_x, \eta \cdot \partial_x - im\tilde{\xi} \right] = \square_x, \quad (C.4)$$

$$\left[\partial_{\eta} \cdot \partial_x, (\eta \cdot \partial_x - im\tilde{\xi})^N \right] = N(\eta \cdot \partial_x - im\tilde{\xi})^{N-1} \square_x, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad (C.5)$$

$$\left[\partial_{\eta\mu}, \eta \cdot \partial_x - im\tilde{\xi} \right] = \partial_{x\mu}, \quad (C.6)$$

$$\left[\partial_{\eta\mu}, (\eta \cdot \partial_x - im\tilde{\xi})^N \right] = N(\eta \cdot \partial_x - im\tilde{\xi})^{N-1} \partial_{x\mu}, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad (C.7)$$

$$\left[(\eta \cdot \partial_{\eta})(D - 3 + \eta \cdot \partial_{\eta}), \eta^2 + \xi^2 + \mu^2 \right] = 2(D - 1)\eta^2 + 4\eta^2(\eta \cdot \partial_{\eta}), \quad (C.8)$$

$$\left[\square_{\eta}, \eta \cdot \partial_x - im\tilde{\xi} \right] = 2\partial_{\eta} \cdot \partial_x, \quad (C.9)$$

$$\left[\square_{\eta}, \eta^2 + \xi^2 + \mu^2 \right] = 2D + 4(\eta \cdot \partial_{\eta}), \quad (C.10)$$

$$\left[(\eta \cdot \partial_{\eta})(D - 3 + \eta \cdot \partial_{\eta}), \eta \cdot \partial_x - im\tilde{\xi} \right] = (\eta \cdot \partial_x)[2(\eta \cdot \partial_{\eta}) + D - 2], \quad (C.11)$$

$$\left[\Delta - im\partial_{\xi}, \eta \cdot \partial_{\eta}(D - 3 + \eta \cdot \partial_{\eta}) \right] = (2\eta \cdot \partial_{\eta} + D - 2)(\partial_{\eta} \cdot \partial_x), \quad (C.12)$$

$$\left[\Delta - im\partial_{\xi}, D - 2 + 2\eta \cdot \partial_{\eta} \right] = 2\partial_{\eta} \cdot \partial_x, \quad (C.13)$$

$$\left[\Delta - im\partial_{\xi}, \eta \cdot \partial_x + im\tilde{\xi} \right] = \square_x + m^2, \quad (C.14)$$

$$\left[\Delta - im\partial_{\xi}, \eta^2 \right] = 2\eta \cdot \partial_x, \quad (C.15)$$

$$\left[\partial_x^{\rho}, x^{\mu} \partial_x^{\sigma} \partial_{x\alpha} \right] = g^{\mu\rho} \partial_x^{\sigma} \partial_{x\alpha}, \quad (C.16)$$

$$\left[\partial_{x\mu} \partial_x^{\rho}, x^{\alpha} \partial_x^{\beta} \partial_{x\gamma} \right] = g^{\alpha\rho} \partial_{x\mu} \partial_x^{\beta} \partial_{x\gamma} + \delta_{\mu}^{\alpha} \partial_x^{\rho} \partial_x^{\beta} \partial_{x\gamma}, \quad (C.17)$$

$$\left[\square_x, x^{\alpha} \partial_x^{\beta} \partial_{x\gamma} \right] = 2\partial_x^{\alpha} \partial_x^{\beta} \partial_{x\gamma}, \quad (C.18)$$

$$\left[\Delta - im\partial_{\xi}, -\rho^2 \xi^2 \right] = 2\rho^2 im\tilde{\xi}, \quad (C.19)$$

$$\left[\Delta - im\partial_{\xi}, m^2(\xi^2 + \mu^2) \partial_{\xi}^2 \right] = -2m^2(im\tilde{\xi}) \partial_{\xi}^2, \quad (C.20)$$

$$\left[\Delta - im\partial_{\xi}, 2\rho(\xi^2 + \mu^2) im\partial_{\xi} \right] = 4\rho m^2 \xi \partial_{\xi}, \quad (C.21)$$

$$\begin{aligned} \left[\Delta - im\partial_{\xi}, 2m^2(\eta \cdot \partial_{\eta})\xi\partial_{\bar{\xi}} \right] &= 2m^2(\xi\partial_{\bar{\xi}})(\Delta - im\partial_{\xi}) + 2m^2(im\xi)\partial_{\bar{\xi}}^2 - 2\rho m^2\xi\partial_{\bar{\xi}} \\ &\quad - 2m^2(\eta \cdot \partial_{\eta})im\partial_{\bar{\xi}}, \end{aligned} \quad (C.22)$$

$$\left[\Delta - im\partial_{\xi}, m^2(D-2)\xi\partial_{\bar{\xi}} \right] = -m^2(D-2)im\partial_{\bar{\xi}}, \quad (C.23)$$

$$\begin{aligned} \left[\Delta - im\partial_{\xi}, 2\rho im\xi(\eta \cdot \partial_{\eta}) \right] &= 2\rho(im\xi)(\Delta - im\partial_{\xi}) - 2\rho m^2\xi\partial_{\bar{\xi}} - 2\rho^2(im\xi) \\ &\quad + 2\rho m^2(\eta \cdot \partial_{\eta}), \end{aligned} \quad (C.24)$$

$$\left[\Delta - im\partial_{\xi}, \rho(D-2)im\xi \right] = \rho(D-2)m^2, \quad (C.25)$$

$$\left[\Delta - im\partial_{\xi}, m^2(D-3)\eta \cdot \partial_{\eta} \right] = m^2(D-3)(\Delta - im\partial_{\xi}) + m^2(D-3)im\partial_{\bar{\xi}} - m^2(D-3)\rho, \quad (C.26)$$

$$\begin{aligned} \left[\Delta - im\partial_{\xi}, m^2(\eta \cdot \partial_{\eta})^2 \right] &= 2m^2(\eta \cdot \partial_{\eta})(\Delta - im\partial_{\xi}) + m^2(\Delta - im\partial_{\xi}) + 2m^2(\eta \cdot \partial_{\eta})im\partial_{\bar{\xi}} \\ &\quad + m^2im\partial_{\bar{\xi}} - 2m^2\rho(\eta \cdot \partial_{\eta}) - \rho m^2, \end{aligned} \quad (C.27)$$

$$\left[\eta \cdot \partial_x - im\xi, m^2(\xi^2 + \mu^2)\partial_{\bar{\xi}}^2 \right] = 2m^2(\xi^2 + \mu^2)im\partial_{\bar{\xi}}, \quad (C.28)$$

$$\left[\eta \cdot \partial_x - im\xi, m^2\mu^2\Box_{\eta} \right] = -2m^2\mu^2(\Delta - im\partial_{\xi}) - 2m^2\mu^2(im\partial_{\bar{\xi}}) + 2\rho m^2\mu^2, \quad (C.29)$$

$$\left[\eta \cdot \partial_x - im\xi, 2\rho(\xi^2 + \mu^2)im\partial_{\bar{\xi}} \right] = -2\rho m^2(\xi^2 + \mu^2), \quad (C.30)$$

$$\begin{aligned} \left[\eta \cdot \partial_x - im\xi, 2m^2(\eta \cdot \partial_{\eta})\xi\partial_{\bar{\xi}} \right] &= -2m^2\xi\partial_{\bar{\xi}}(\eta \cdot \partial_x - im\xi) - 2m^2(im\xi)\xi\partial_{\bar{\xi}} - 2m^2(im\xi) \\ &\quad + 2m^2(im\xi)(\eta \cdot \partial_{\eta}), \end{aligned} \quad (C.31)$$

$$\left[\eta \cdot \partial_x - im\xi, m^2(D-2)\xi\partial_{\bar{\xi}} \right] = m^2(D-2)im\xi, \quad (C.32)$$

$$\left[\eta \cdot \partial_x - im\xi, 2\rho im\xi(\eta \cdot \partial_{\eta}) \right] = -2\rho(im\xi)(\eta \cdot \partial_x - im\xi) + 2\rho m^2\xi^2, \quad (C.33)$$

$$\left[\eta \cdot \partial_x - im\xi, m^2(D-3)\eta \cdot \partial_{\eta} \right] = -m^2(D-3)(\eta \cdot \partial_x - im\xi) - m^2(D-3)im\xi, \quad (C.34)$$

$$\begin{aligned} \left[\eta \cdot \partial_x - im\xi, m^2(\eta \cdot \partial_{\eta})^2 \right] &= -2m^2(\eta \cdot \partial_{\eta})(\eta \cdot \partial_x - im\xi) + m^2(\eta \cdot \partial_x - im\xi) \\ &\quad - 2m^2(im\xi)\eta \cdot \partial_{\eta} + m^2(im\xi), \end{aligned} \quad (C.35)$$

$$\left[\eta^2 + \xi^2 + \mu^2, m^2(\xi^2 + \mu^2)\partial_{\bar{\xi}}^2 \right] = -4m^2(\xi^2 + \mu^2)\xi\partial_{\bar{\xi}} - 2m^2(\xi^2 + \mu^2), \quad (C.36)$$

$$\left[\eta^2 + \xi^2 + \mu^2, m^2\mu^2\Box_{\eta} \right] = -2Dm^2\mu^2 - 4m^2\mu^2\eta \cdot \partial_{\eta}, \quad (C.37)$$

$$\left[\eta^2 + \xi^2 + \mu^2, 2\rho(\xi^2 + \mu^2)im\partial_{\bar{\xi}} \right] = -4\rho(\xi^2 + \mu^2)im\xi, \quad (C.38)$$

$$\left[\eta^2 + \xi^2 + \mu^2, 2m^2(\eta \cdot \partial_{\eta})\xi\partial_{\bar{\xi}} \right] = -4m^2\eta^2\xi\partial_{\bar{\xi}} - 4m^2\xi^2\eta \cdot \partial_{\eta}, \quad (C.39)$$

$$\left[\eta^2 + \xi^2 + \mu^2, m^2(D-2)\xi\partial_{\bar{\xi}} \right] = -2m^2(D-2)\xi^2, \quad (C.40)$$

$$\left[\eta^2 + \xi^2 + \mu^2, 2\rho im\xi(\eta \cdot \partial_{\eta}) \right] = -4\rho im\xi\eta^2, \quad (C.41)$$

$$\left[\eta^2 + \xi^2 + \mu^2, m^2(D-3)\eta \cdot \partial_{\eta} \right] = -2m^2(D-3)\eta^2, \quad (C.42)$$

$$\left[\eta^2 + \xi^2 + \mu^2, m^2(\eta \cdot \partial_{\eta})^2 \right] = -4m^2\eta^2 - 4m^2\eta^2(\eta \cdot \partial_{\eta}). \quad (C.43)$$

Seja $f = f(\eta, \xi, x)$ e $g = g(\eta, \xi, x)$. Então a regra de Leibniz para o operador $\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}$, útil no contexto do cálculo dos parâmetros do vértice cúbico para táquions de spin contínuo feito na Subseção 5.6.3, é dada por:

$$(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})(fg) = [(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})f]g + f(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})g + \partial_{(x}f \cdot \partial_{\eta)}g - \rho fg, \quad (C.44)$$

em que $\partial_{(x}f \cdot \partial_{\eta)}g \equiv \partial_x f \cdot \partial_{\eta}g + \partial_{\eta}f \cdot \partial_x g$.

D Operadores de Casimir em Teoria de Campo

D.1 Operador de Casimir Quadrático

Visto que o operador momento é dado por $P_\mu = i\partial_{x\mu}$, o operador de Casimir quadrático é:

$$C_2 = P^2 = -\square_x. \quad (D.1)$$

D.2 Operador de Casimir Quártico

Seja $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$ a métrica do espaço de Minkowski em dimensão D . O operador de Casimir quártico é dado por [8, 9]

$$C_4 = -\frac{1}{2}P^2 J_{\mu\nu} J^{\mu\nu} + J_{\mu\rho} P^\rho J^{\mu\sigma} P_\sigma. \quad (D.2)$$

Com o uso das relações (5.13) e (5.19), efetua-se, a seguir, o cálculo explícito de C_4 em termos de operadores diferenciais. De fato, o termo J^2 é dado por

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} J^{\mu\nu} = & -(x_\mu \partial_{x\nu} - x_\nu \partial_{x\mu})(x^\mu \partial_x^\nu - x^\nu \partial_x^\mu) - (x_\mu \partial_{x\nu} - x_\nu \partial_{x\mu})(\eta^\mu \partial_\eta^\nu - \eta^\nu \partial_\eta^\mu) \\ & - (\eta_\mu \partial_{\eta\nu} - \eta_\nu \partial_{\eta\mu})(x^\mu \partial_x^\nu - x^\nu \partial_x^\mu) - (\eta_\mu \partial_{\eta\nu} - \eta_\nu \partial_{\eta\mu})(\eta^\mu \partial_\eta^\nu - \eta^\nu \partial_\eta^\mu), \end{aligned} \quad (D.3)$$

em que

$$\begin{aligned} & -(x_\mu \partial_{x\nu} - x_\nu \partial_{x\mu})(x^\mu \partial_x^\nu - x^\nu \partial_x^\mu) = -x_\mu \partial_{x\nu} (x^\mu \partial_x^\nu) + x_\mu \partial_{x\nu} (x^\nu \partial_x^\mu) + x_\nu \partial_{x\mu} (x^\mu \partial_x^\nu) - x_\nu \partial_{x\mu} (x^\nu \partial_x^\mu) \\ & = - (x_\mu \partial_x^\mu + x_\mu x^\mu \partial_{x\nu} \partial_x^\nu) + (D x_\mu \partial_x^\mu + x_\mu x^\nu \partial_x^\mu \partial_{x\nu}) + (D x_\mu \partial_x^\mu + x_\mu x^\nu \partial_x^\mu \partial_{x\nu}) - (x_\mu \partial_x^\mu + x_\mu x^\mu \partial_{x\nu} \partial_x^\nu) \\ & = 2(D-1)x_\mu \partial_x^\mu - 2x_\mu x^\mu \partial_{x\nu} \partial_x^\nu + 2x_\mu x^\nu \partial_x^\mu \partial_{x\nu}, \end{aligned} \quad (D.4)$$

em que as relações de comutação $[x_\mu \partial_{x\nu}, x^\mu \partial_x^\nu] = x_\mu \partial_x^\mu$ e $[x_\mu \partial_{x\nu}, x^\nu \partial_x^\mu] = D x_\mu \partial_x^\mu$ foram utilizadas. Analogamente,

$$-(\eta_\mu \partial_{\eta\nu} - \eta_\nu \partial_{\eta\mu})(\eta^\mu \partial_\eta^\nu - \eta^\nu \partial_\eta^\mu) = 2(D-1)\eta_\mu \partial_\eta^\mu - 2\eta_\mu \eta^\mu \partial_{\eta\nu} \partial_\eta^\nu + 2\eta_\mu \eta^\nu \partial_\eta^\mu \partial_{\eta\nu}. \quad (D.5)$$

O segundo termo do segundo membro em (D.3) é igual ao terceiro e é dado por

$$\begin{aligned} & -(x_\mu \partial_{x\nu} - x_\nu \partial_{x\mu})(\eta^\mu \partial_\eta^\nu - \eta^\nu \partial_\eta^\mu) = -x_\mu \eta^\mu \partial_{x\nu} \partial_\eta^\nu + x_\mu \eta^\nu \partial_{x\nu} \partial_\eta^\mu + x_\nu \eta^\mu \partial_{x\mu} \partial_\eta^\nu - x_\nu \eta^\nu \partial_{x\mu} \partial_\eta^\mu \\ & = -2x_\mu \eta^\mu \partial_{x\nu} \partial_\eta^\nu + 2x_\mu \eta^\nu \partial_{x\nu} \partial_\eta^\mu. \end{aligned} \quad (D.6)$$

Aplicando $P^2 = -\square_x$ em (D.4)-(D.6), tem-se

$$-(-\square_x) \left[(x_\mu \partial_{x\nu} - x_\nu \partial_{x\mu})(x^\mu \partial_x^\nu - x^\nu \partial_x^\mu) \right] = 2 \left(-(D-1)x \cdot \partial_x + x^2 \square_x - (x \cdot \partial_x)^2 \right) \square_x, \quad (D.7)$$

com $(x \cdot \partial_x)^2 \equiv x_\mu x^\nu \partial_{x\nu} \partial_x^\mu$,

$$-(-\square_x) \left[(\eta_\mu \partial_{\eta\nu} - \eta_\nu \partial_{\eta\mu})(\eta^\mu \partial_\eta^\nu - \eta^\nu \partial_\eta^\mu) \right] = 2 \left(-(D-1)\eta \cdot \partial_\eta + \eta^2 \square_\eta - (\eta \cdot \partial_\eta)^2 \right) \square_x, \quad (D.8)$$

com $(\eta \cdot \partial_\eta)^2 \equiv \eta_\mu \eta^\nu \partial_{\eta\nu} \partial_\eta^\mu$ e

$$-(-\square_x) \left[(x_\mu \partial_{x\nu} - x_\nu \partial_{x\mu})(\eta^\mu \partial_\eta^\nu - \eta^\nu \partial_\eta^\mu) \right] = 2 \left((x \cdot \eta)(\partial_x \cdot \partial_\eta) - (x \cdot \partial_\eta)(\eta \cdot \partial_x) \right) \square_x, \quad (D.9)$$

com $(x \cdot \partial_\eta)(\eta \cdot \partial_x) \equiv x_\mu \eta^\nu \partial_\eta^\mu \partial_{x\nu}$.⁴⁴ Assim, o primeiro termo em (D.2) é dado por

$$-\frac{1}{2}P^2 J_{\mu\nu} J^{\mu\nu} = \left((D-1)x \cdot \partial_x - x^2 \square_x + (x \cdot \partial_x)^2 \right) \square_x + \left((D-1)\eta \cdot \partial_\eta - \eta^2 \square_\eta + (\eta \cdot \partial_\eta)^2 \right) \square_x - 2 \left((x \cdot \eta)(\partial_x \cdot \partial_\eta) - (x \cdot \partial_\eta)(\eta \cdot \partial_x) \right) \square_x. \quad (D.10)$$

Por outro lado, com o uso de

$$J_{\mu\rho} P^\rho = -x_\mu \partial_{x\rho} \partial_x^\rho + x_\rho \partial_{x\mu} \partial_x^\rho - \eta_\mu \partial_{\eta\rho} \partial_x^\rho + \eta_\rho \partial_{\eta\mu} \partial_x^\rho,$$

o segundo termo em (D.2) pode ser calculado como

$$\begin{aligned} J_{\mu\rho} P^\rho J^{\mu\sigma} P_\sigma &= x_\mu \partial_{x\rho} \partial_x^\rho (x^\mu \partial_x^\sigma \partial_{x\sigma}) - x_\mu \partial_{x\rho} \partial_x^\rho (x^\sigma \partial_x^\mu \partial_{x\sigma}) + x_\mu \partial_{x\rho} \partial_x^\rho (\eta^\mu \partial_\eta^\sigma \partial_{x\sigma}) - x_\mu \partial_{x\rho} \partial_x^\rho (\eta^\sigma \partial_\eta^\mu \partial_{x\sigma}) \\ &\quad - x_\rho \partial_{x\mu} \partial_x^\rho (x^\mu \partial_x^\sigma \partial_{x\sigma}) + x_\rho \partial_{x\mu} \partial_x^\rho (x^\sigma \partial_x^\mu \partial_{x\sigma}) - x_\rho \partial_{x\mu} \partial_x^\rho (\eta^\mu \partial_\eta^\sigma \partial_{x\sigma}) + x_\rho \partial_{x\mu} \partial_x^\rho (\eta^\sigma \partial_\eta^\mu \partial_{x\sigma}) \quad (D.11) \\ &\quad + \eta_\mu \partial_{\eta\rho} \partial_x^\rho (x^\mu \partial_x^\sigma \partial_{x\sigma}) - \eta_\mu \partial_{\eta\rho} \partial_x^\rho (x^\sigma \partial_x^\mu \partial_{x\sigma}) + \eta_\mu \partial_{\eta\rho} \partial_x^\rho (\eta^\mu \partial_\eta^\sigma \partial_{x\sigma}) - \eta_\mu \partial_{\eta\rho} \partial_x^\rho (\eta^\sigma \partial_\eta^\mu \partial_{x\sigma}) \\ &\quad - \eta_\rho \partial_{\eta\mu} \partial_x^\rho (x^\mu \partial_x^\sigma \partial_{x\sigma}) + \eta_\rho \partial_{\eta\mu} \partial_x^\rho (x^\sigma \partial_x^\mu \partial_{x\sigma}) - \eta_\rho \partial_{\eta\mu} \partial_x^\rho (\eta^\mu \partial_\eta^\sigma \partial_{x\sigma}) + \eta_\rho \partial_{\eta\mu} \partial_x^\rho (\eta^\sigma \partial_\eta^\mu \partial_{x\sigma}) \end{aligned}$$

Com as relações de comutação dadas em (C.16)-(C.18) cada termo em (D.11) pode ser calculado diretamente. Os resultados são:

$$x_\mu \partial_{x\rho} \partial_x^\rho (x^\mu \partial_x^\sigma \partial_{x\sigma}) = (x \cdot \partial_x) \square_x + x^2 \square_x^2, \quad (D.12a)$$

$$x_\mu \partial_{x\rho} \partial_x^\rho (x^\sigma \partial_x^\mu \partial_{x\sigma}) = 2(x \cdot \partial_x) \square_x + (x \cdot \partial_x)^2 \square_x, \quad (D.12b)$$

$$x_\mu \partial_{x\rho} \partial_x^\rho (\eta^\mu \partial_\eta^\sigma \partial_{x\sigma}) = (x \cdot \eta)(\partial_\eta \cdot \partial_x) \square_x, \quad (D.12c)$$

$$x_\mu \partial_{x\rho} \partial_x^\rho (\eta^\sigma \partial_\eta^\mu \partial_{x\sigma}) = (x \cdot \partial_\eta)(\eta \cdot \partial_x) \square_x, \quad (D.12d)$$

$$x_\rho \partial_{x\mu} \partial_x^\rho (x^\mu \partial_x^\sigma \partial_{x\sigma}) = (D+1)(x \cdot \partial_x) \square_x + (x \cdot \partial_x)^2 \square_x, \quad (D.12e)$$

$$x_\rho \partial_{x\mu} \partial_x^\rho (x^\sigma \partial_x^\mu \partial_{x\sigma}) = 2(x \cdot \partial_x) \square_x + (x \cdot \partial_x)^2 \square_x, \quad (D.12f)$$

$$x_\rho \partial_{x\mu} \partial_x^\rho (\eta^\mu \partial_\eta^\sigma \partial_{x\sigma}) = (x \cdot \partial_x)(\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x), \quad (D.12g)$$

$$x_\rho \partial_{x\mu} \partial_x^\rho (\eta^\sigma \partial_\eta^\mu \partial_{x\sigma}) = (x \cdot \partial_x)(\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x), \quad (D.12h)$$

$$\eta_\mu \partial_{\eta\rho} \partial_x^\rho (x^\mu \partial_x^\sigma \partial_{x\sigma}) = (\eta \cdot \partial_\eta) \square_x + (\eta \cdot x)(\partial_\eta \cdot \partial_x) \square_x, \quad (D.12i)$$

$$\eta_\mu \partial_{\eta\rho} \partial_x^\rho (x^\sigma \partial_x^\mu \partial_{x\sigma}) = (\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x) + (x \cdot \partial_x)(\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x), \quad (D.12j)$$

$$\eta_\mu \partial_{\eta\rho} \partial_x^\rho (\eta^\mu \partial_\eta^\sigma \partial_{x\sigma}) = (\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x) + \eta^2 (\partial_\eta \cdot \partial_x)^2, \quad (D.12k)$$

$$\eta_\mu \partial_{\eta\rho} \partial_x^\rho (\eta^\sigma \partial_\eta^\mu \partial_{x\sigma}) = (\eta \cdot \partial_\eta) \square_x + (\eta \cdot \partial_x)(\eta \cdot \partial_\eta)(\partial_\eta \cdot \partial_x), \quad (D.12l)$$

$$\eta_\rho \partial_{\eta\mu} \partial_x^\rho (x^\mu \partial_x^\sigma \partial_{x\sigma}) = (\eta \cdot \partial_\eta) \square_x + (\eta \cdot \partial_x)(x \cdot \partial_\eta) \square_x, \quad (D.12m)$$

$$\eta_\rho \partial_{\eta\mu} \partial_x^\rho (x^\sigma \partial_x^\mu \partial_{x\sigma}) = (\eta \cdot \partial_\eta) \square_x + (x \cdot \partial_\eta)(\eta \cdot \partial_x) \square_x, \quad (D.12n)$$

$$\eta_\rho \partial_{\eta\mu} \partial_x^\rho (x^\sigma \partial_x^\mu \partial_{x\sigma}) = (\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x) + (x \cdot \partial_x)(\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x), \quad (D.12o)$$

$$\eta_\rho \partial_{\eta\mu} \partial_x^\rho (\eta^\mu \partial_\eta^\sigma \partial_{x\sigma}) = D(\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x) + (\eta \cdot \partial_x)(\eta \cdot \partial_\eta)(\partial_\eta \cdot \partial_x), \quad (D.12p)$$

$$\eta_\rho \partial_{\eta\mu} \partial_x^\rho (\eta^\sigma \partial_\eta^\mu \partial_{x\sigma}) = (\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x) + (\eta \cdot \partial_x)^2 \square_\eta. \quad (D.12q)$$

⁴⁴É importante observar a diferença entre os operadores $(x \cdot \partial_x)^2$ e $(x \cdot \partial_x)^2 = (x^\mu \partial_{x\mu})(x^\nu \partial_{x\nu})$, $(\eta \cdot \partial_\eta)^2$ e $(\eta \cdot \partial_\eta)^2 = (\eta^\mu \partial_{\eta\mu})(\eta^\nu \partial_{\eta\nu})$ e $(x \cdot \partial_\eta)(\eta \cdot \partial_x)$ e $(x \cdot \partial_\eta)(\eta \cdot \partial_x) = (x^\mu \partial_{\eta\mu})(\eta^\nu \partial_{x\nu})$.

Substituindo estas expressões em (D.11), obtém-se

$$\begin{aligned}
J_{\mu\rho} P^\rho J^{\mu\sigma} P_\sigma &= x^2 \square_x^2 - (D-1)(x \cdot \partial_x) \square_x - (x \cdot \bar{\partial}_x)^2 \square_x + 2(x \cdot \eta)(\partial_\eta \cdot \partial_x) \square_x \\
&\quad - 2(x \cdot \partial_\eta)(\eta \cdot \partial_x) \square_x - (\eta \cdot \partial_\eta) \square_x - 2(\eta \cdot \partial_x)(\eta \cdot \partial_\eta)(\partial_\eta \cdot \partial_x) - (D-2)(\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x) \\
&\quad + (\eta \cdot \partial_x)^2 \square_\eta + \eta^2 (\partial_\eta \cdot \partial_x)^2.
\end{aligned}$$

Substituindo este resultado e (D.10) em (D.2), obtém-se

$$\begin{aligned}
C_4 &= (D-2)(\eta \cdot \partial_\eta) \square_x + (\eta \cdot \bar{\partial}_\eta)^2 \square_x - \eta^2 \square_\eta \square_x + (\eta \cdot \partial_x)^2 \square_\eta - 2(\eta \cdot \partial_x)(\eta \cdot \partial_\eta)(\partial_\eta \cdot \partial_x) \\
&\quad - (D-2)(\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x) + \eta^2 (\partial_\eta \cdot \partial_x)^2.
\end{aligned} \tag{D.13}$$

O operador $(\eta \cdot \bar{\partial}_\eta)^2$ pode ser escrito em termos de $(\eta \cdot \partial_\eta)^2$ como $(\eta \cdot \bar{\partial}_\eta)^2 = (\eta \cdot \partial_\eta)^2 - \eta \cdot \partial_\eta$. Substituindo esta expressão em (D.13) e levando em conta a relação de comutação $[\eta \cdot \partial_x, \eta \cdot \partial_\eta] = -\eta \cdot \partial_x$ para o quinto termo do segundo membro em (D.13), tem-se que a expressão final para o operador de Casimir quártico é dada por:

$$\begin{aligned}
C_4 &= (\eta \cdot \partial_\eta)(D-3+\eta \cdot \partial_\eta) \square_x - \eta^2 \square_\eta \square_x - 2(\eta \cdot \partial_\eta)(\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x) + (\eta \cdot \partial_x)^2 \square_\eta \\
&\quad - (D-4)(\eta \cdot \partial_x)(\partial_\eta \cdot \partial_x) + \eta^2 (\partial_\eta \cdot \partial_x)^2
\end{aligned}$$

(D.14)

E Propriedades de $R\Psi$

Este apêndice objetiva verificar que o campo $R\Psi$ definido em (5.47) tem as mesmas propriedades do campo taquiônico Ψ estudado no Capítulo 5.

E.1 Dinâmica

A seguir demonstra-se que o campo $R\Psi$ satisfaz a equação de campo (5.36). Isto é feito calculando o comutador entre o operador R e cada um dos operadores presentes em (5.36). O primeiro comutador é trivial:

$$\left[\square_x - m^2, R \right] = 0. \quad (\text{E.1})$$

Com o uso dos comutadores (C.19)-(C.27), obtém-se

$$\begin{aligned} \left[\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}, R \right] &= \left(2m^2\bar{\xi}\partial_{\bar{\xi}} + 2m^2(\eta \cdot \partial_{\eta}) + 2\rho im\bar{\xi} + m^2(D-2) \right) (\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) \\ \Rightarrow \left[(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})^2, R \right] &= \left(4m^2\bar{\xi}\partial_{\bar{\xi}} + 4m^2(\eta \cdot \partial_{\eta}) + 2m^2(D-1) + 4\rho(im\bar{\xi}) \right) (\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})^2. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Com o uso dos comutadores (C.28)-(C.35), obtém-se

$$\begin{aligned} \left[\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi}, R \right] &= -2m^2\mu^2(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) - \left(m^2(D-4) + 2m^2\bar{\xi}\partial_{\bar{\xi}} + 2\rho(im\bar{\xi}) \right. \\ &\quad \left. + 2m^2(\eta \cdot \partial_{\eta}) \right) (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi}) \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Com o uso dos comutadores (C.36)-(C.43), obtém-se

$$\left[\eta^2 + \bar{\xi}^2 + \mu^2, R \right] = -4m^2\mu^2 - 4m^2(\eta^2 + \bar{\xi}^2 + \mu^2) \left(\bar{\xi}\partial_{\bar{\xi}} + \eta \cdot \partial_{\eta} + 4\rho im\bar{\xi} + 2(D-1)m^2 \right). \quad (\text{E.4})$$

Assim, com os resultados (E.1)-(E.4), obtém-se

$$\left[\square_x - m^2 - (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) + \frac{1}{2}(\eta^2 + \bar{\xi}^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})^2, R \right] = 0. \quad (\text{E.5})$$

Definindo

$$Q \equiv \square_x - m^2 - (\eta \cdot \partial_x - im\bar{\xi})(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}}) + \frac{1}{2}(\eta^2 + \bar{\xi}^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\xi}})^2, \quad (\text{E.6})$$

a equação de campo (5.36) é dada por

$$\delta'(\eta^2 + \bar{\xi}^2 + \mu^2)Q\Psi = 0. \quad (\text{E.7})$$

Com o uso do resultado (E.5), vê-se que $R\Psi$ é solução desta equação:

$$\begin{aligned} \delta'(\eta^2 + \bar{\xi}^2 + \mu^2)QR\Psi &= \delta'(\eta^2 + \bar{\xi}^2 + \mu^2)RQ\Psi + \delta'(\eta^2 + \bar{\xi}^2 + \mu^2) \left[G, R \right] \Psi \\ &\stackrel{(\text{E.5})}{=} \underbrace{R \delta'(\eta^2 + \bar{\xi}^2 + \mu^2)Q\Psi}_{=0, \text{ on-shell}} + \underbrace{\left[\delta'(\eta^2 + \bar{\xi}^2 + \mu^2), R \right] Q\Psi}_{\propto \delta'(\eta^2 + \bar{\xi}^2 + \mu^2) = 0, \text{ on-shell}} = 0, \\ \therefore \quad &\boxed{\delta'(\eta^2 + \bar{\xi}^2 + \mu^2)QR\Psi = 0.} \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

E.2 Simetrias

A variação de Ψ através das transformações locais (5.21) + (5.28),

$$\Psi \rightarrow \Psi + \delta_{\epsilon, \chi} \Psi, \quad (\text{E.9})$$

implica que o campo $R\Psi$ se transforma como

$$R\Psi \rightarrow R(\Psi + \delta_{\epsilon, \chi} \Psi) = R\Psi + R\delta_{\epsilon, \chi} \Psi. \quad (\text{E.10})$$

A seguir será demonstrado que $R\delta_{\epsilon, \chi} \Psi$ pode ser escrito como (5.21) + (5.28), ou seja, $R\delta_{\epsilon, \chi} \Psi = \delta_{\bar{\epsilon}, \bar{\chi}} R\Psi$, onde $\bar{\epsilon}$ e $\bar{\chi}$ são funções de ϵ e χ , respectivamente. Esta demonstração é feita considerando separadamente a Simetria- χ e a Simetria- ϵ :

E.2.1 Simetria- χ

Veja que

$$R\delta_{\chi} \Psi = R\left(\frac{1}{4}(\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2)^2 \chi\right) = \frac{1}{4} \left\{ (\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2)^2 R + \left[R, (\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2)^2 \right] \right\} \chi. \quad (\text{E.11})$$

Com o uso da relação de comutação (E.4), pode-se obter que

$$\left[R, (\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2)^2 \right] = 4(\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2)^2 \left(2m^2(\zeta \partial_{\bar{\zeta}} + \eta \cdot \partial_{\eta}) + 2\rho im\zeta + (D+1)m^2 \right). \quad (\text{E.12})$$

Portanto, substituindo esta relação em (E.11), obtém-se

$$\boxed{\delta_{\bar{\chi}} R\Psi \equiv R\delta_{\chi} \Psi(\eta, \zeta, x) = \frac{1}{4}(\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2)^2 \bar{\chi},} \quad (\text{E.13})$$

onde

$$\bar{\chi}(\eta, \zeta, x) = \left(R + 8m^2(\eta \cdot \partial_{\eta} + \zeta \partial_{\bar{\zeta}}) + 8\rho im\zeta + 4(D+1)m^2 \right) \chi(\eta, \zeta, x). \quad (\text{E.14})$$

E.2.2 Simetria- ϵ

Veja que

$$\begin{aligned} R\delta_{\epsilon} \Psi &= R\left(\eta \cdot \partial_x - im\zeta - \frac{1}{2}(\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\zeta}}) \right) \epsilon \\ &= \left\{ \left(\eta \cdot \partial_x - im\zeta - \frac{1}{2}(\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\zeta}}) \right) R \right. \\ &\quad \left. + \left[R, \eta \cdot \partial_x - im\zeta - \frac{1}{2}(\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\zeta}}) \right] \right\} \epsilon \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Com o uso das relações de comutação (E.2)-(E.4), obtém-se

$$\begin{aligned} &\left[\eta \cdot \partial_x - im\zeta - \frac{1}{2}(\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\zeta}}), R \right] \\ &= - \left(\eta \cdot \partial_x - im\zeta - \frac{1}{2}(\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\zeta}}) \right) \\ &\quad \times \left(m^2(D-2) + 2m^2(\eta \cdot \partial_{\eta} + \zeta \partial_{\bar{\zeta}}) + 2\rho(im\zeta) \right) \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Portanto, substituindo (E.16) em (E.15), obtém-se:

$$\boxed{\delta_{\bar{\epsilon}} R\Psi \equiv R\delta_{\epsilon} \Psi = \left[\eta \cdot \partial_x - im\zeta - \frac{1}{2}(\eta^2 + \zeta^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_{\bar{\zeta}}) \right] \bar{\epsilon},} \quad (\text{E.17})$$

com

$$\bar{\epsilon}(\eta, \xi, x) = \left[R + m^2(D-2) + 2m^2(\eta \cdot \partial_\eta + \xi \partial_\xi) + 2\rho(im\xi) \right] \epsilon(\eta, \xi, x). \quad (\text{E.18})$$

Juntando os resultados (E.13) e (E.17), vê-se que o campo $R\Psi$ se transforma da mesma forma que Ψ (5.21)+(5.28):

$$\boxed{R\Psi \rightarrow R\Psi + \delta_{\bar{\epsilon}, \bar{\chi}} R\Psi,} \quad (\text{E.19})$$

em que os parâmetros locais $(\bar{\epsilon}, \bar{\chi})$ são dados em termos de (ϵ, χ) conforme (E.14) e (E.18).

E.2.3 Reducibilidade

Verifica-se a seguir se os parâmetros $(\bar{\epsilon} \text{ e } \bar{\chi})$ se transformam da mesma maneira que ϵ e χ (5.31) de modo que

$$\delta_{\bar{\epsilon}, \bar{\chi}} R\Psi \left[\eta \cdot \partial_x - im\xi - \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)(\Delta - im\partial_\xi) \right] \bar{\epsilon} + \frac{1}{4}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2)^2 \bar{\chi} \quad (\text{E.20})$$

seja invariante. De fato, ao fazer $\chi \rightarrow \chi + \delta_\Lambda \chi$ em (E.14), obtém-se

$$\begin{aligned} \delta \bar{\chi} &= \left[R + 8m^2(\eta \cdot \partial_\eta + \xi \partial_\xi) + 8\rho im\xi + 4(D+1)m^2 \right] \delta_\Lambda \chi \\ &= \left[R + 8m^2(\eta \cdot \partial_\eta + \xi \partial_\xi) + 8\rho im\xi + 4(D+1)m^2 \right] (\Delta - im\partial_\xi) \Lambda \\ &= (\Delta - im\partial_\xi) \left[R + 6m^2(\eta \cdot \partial_\eta + \xi \partial_\xi) + 6\rho im\xi + 3Dm^2 \right] \Lambda, \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

em que foram utilizadas as relações de comutação (E.2), (C.23), (C.25) e (C.26). Por outro lado, ao fazer $\epsilon \rightarrow \epsilon + \delta_\Lambda \epsilon$ em (E.18), obtém-se

$$\begin{aligned} \delta \bar{\epsilon} &= \left[R + m^2(D-2) + 2m^2(\eta \cdot \partial_\eta + \xi \partial_\xi) + 2\rho(im\xi) \right] \delta_\Lambda \epsilon \\ &= \left[R + m^2(D-2) + 2m^2(\eta \cdot \partial_\eta + \xi \partial_\xi) + 2\rho(im\xi) \right] \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \Lambda \\ &= \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \left[R + 6m^2(\eta \cdot \partial_\eta + \xi \partial_\xi) + 6\rho im\xi + 3Dm^2 \right] \Lambda, \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

em que foram utilizadas as relações de comutação (E.4), (C.40) e (C.42). Portanto, definindo

$$\bar{\Lambda}(\eta, \xi, x) = \left[R + 6m^2(\eta \cdot \partial_\eta + \xi \partial_\xi) + 6\rho im\xi + 3Dm^2 \right] \Lambda(\eta, \xi, x), \quad (\text{E.23})$$

vê-se que $\bar{\epsilon}$ e $\bar{\chi}$, de fato, transformam-se da mesma forma que ϵ e χ :

$$\boxed{\begin{aligned} \delta_{\bar{\Lambda}} \bar{\chi}(\eta, \xi, x) &= (\Delta - im\partial_\xi) \bar{\Lambda}(\eta, \xi, x) \\ \delta_{\bar{\Lambda}} \bar{\epsilon}(\eta, \xi, x) &= \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2 + \mu^2) \bar{\Lambda}(\eta, \xi, x) \end{aligned}} \quad (\text{E.24})$$

e, sob estas transformações, (E.20) é invariante.

F Coordenadas Esféricas

Parte dos métodos revisados neste apêndice tiveram como fonte os Apêndices A.2 e A.4 de [79].

Sejam x_1, \dots, x_n coordenadas cartesianas. As coordenadas esféricas são denotadas por $R, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}$, de modo que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & R \cos(\phi_1) \\ x_2 & = & R \sin(\phi_1) \cos(\phi_2) \\ x_3 & = & R \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) \cos(\phi_3) \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ x_{n-1} & = & R \sin(\phi_1) \cdots \sin(\phi_{n-2}) \cos(\phi_{n-1}) \\ x_n & = & R \sin(\phi_1) \cdots \sin(\phi_{n-2}) \sin(\phi_{n-1}) \end{array} \right. , \quad (\text{F.1})$$

com $\phi_1, \dots, \phi_{n-2} \in [0, \pi)$, $\phi_{n-1} \in [0, 2\pi)$ e $R = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Portanto, o volume infinitesimal em coordenadas esféricas é dado por:

$$dV_n = dx_1 \cdots dx_n = R^{n-1} \sin^{n-2}(\phi_1) \sin^{n-3}(\phi_2) \cdots \sin(\phi_{n-2}) dR d\phi_1 \cdots d\phi_{n-1}. \quad (\text{F.2})$$

F.1 Área e Volume da Hiperesfera

A conhecida integral

$$I_0(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} a > 0, \quad (\text{F.3})$$

tem sua generalização dada por

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n e^{-ax^2} = \frac{1}{2} a^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right), \quad (\text{F.4})$$

em que

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} dx x^n e^{-x},$$

é a função gama de Euler. Assim, pode-se escrever a seguinte integral em, pelo menos, duas maneiras diferentes:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2}\right)^n \stackrel{(\text{F.3})}{=} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}n} \quad (\text{F.5})$$

ou

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2}\right)^n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 e^{-ax_1^2} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n e^{-ax_n^2} \stackrel{(\text{F.2})}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dV_n e^{-aR^2}, \quad (\text{F.6})$$

Em termos de coordenadas esféricas, pode-se expressar o volume infinitesimal dV_n como o volume de uma coroa hipersférica de espessura dR :

$$dV_n = S_n(R) dR, \quad (\text{F.7})$$

em que S_n é a área da hiperesfera de dimensão n e raio R . Dado que $V_n \propto R^n$, ou seja, $V_n = A_n R^n$, com A_n um parâmetro que depende apenas da dimensionalidade n , vê-se que $dV_n = n A_n R^{n-1} dR \stackrel{(\text{F.7})}{\Rightarrow} S_n(R) = n A_n R^{n-1}$.

Portanto, a integral (F.6) é dada por:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2}\right)^n = \int_0^{\infty} dR n A_n R^{n-1} e^{-aR^2} \stackrel{(\text{F.4})}{=} n A_n \frac{1}{2} a^{-\frac{(n-1)+1}{2}} \Gamma\left(\frac{(n-1)+1}{2}\right) = A_n \frac{n}{2} a^{-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

a qual, levando em conta o resultado (F.5), tem-se

$$A_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad (\text{F.8})$$

implicando que

$$S_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} R^{n-1} \quad (\text{F.9})$$

e

$$dV_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} R^{n-1} dR \Rightarrow V_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} R^n. \quad (\text{F.10})$$

F.2 A Integral da Função Delta

A integral

$$G_E^{(0)}(0; \sigma) = \int d^D \eta \delta(\eta^2 + \sigma) \quad (\text{F.11})$$

pode ser calculada com o uso dos resultados da subseção anterior. De fato, definindo

$$R^2 \equiv -\eta^2 = (\eta^0)^2 + \dots + (\eta^{D-1})^2 = -A(\eta) + \sigma,$$

tem-se

$$dR = \frac{1}{\frac{dA}{dR}} dA = -\frac{1}{2\sqrt{\sigma - A(\eta)}} dA$$

de modo que

$$\begin{aligned} G_E^{(0)}(0; \sigma) &= \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \int_0^\infty dR R^{D-1} \delta(-R^2 + \sigma) \\ &= \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \int_\sigma^{-\infty} dA \frac{1}{(-2)\sqrt{\sigma - A}} (\sigma - A)^{\frac{D-1}{2}} \delta(A) \\ &= \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \int_{-\infty}^\sigma dA (\sigma - A)^{\frac{D-2}{2}} \delta(A) \\ &\Rightarrow \boxed{G_E^{(0)}(0; \sigma) = \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \sigma^{\frac{D-2}{2}}.} \quad (\text{F.12}) \end{aligned}$$

Referências

- [1] E. P. Wigner, “Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra,” 1931.
- [2] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields: Foundations*, vol. 1. Cambridge University Press, 2005.
- [3] K. Gottfried and T.-M. Yan, *Quantum mechanics: fundamentals*. Springer Science, second ed., 2003.
- [4] E. Wigner, “On unitary representations of the inhomogeneous lorentz group,” *Annals Math.*, vol. 40, no. 1, pp. 149–204, 1939.
- [5] A. M. Khan and P. Ramond, “Continuous spin representations from group contraction,” *J. Math. Phys.*, vol. 46, p. 079901, 2005 [arXiv:hep-th/041010].
- [6] E. P. Wigner, “Invariant Quantum Mechanical Equations of Motion,” in *Theoretical Physics*, (Vienna), pp. 59–82, IAEA, 1963.
- [7] X. Bekaert and E. D. Skvortsov, “Elementary particles with continuous spin,” *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 32, no. 23n24, p. 1730019, 2017, [arXiv:1708.01030 [hep-th]].
- [8] L. Brink, A. M. Khan, P. Ramond, and X.-z. Xiong, “Continuous spin representations of the Poincare and superPoincare groups,” *J. Math. Phys.*, vol. 43, p. 6279, 2002.
- [9] X. Bekaert and N. Boulanger, “The unitary representations of the poincaré group in any spacetime dimension,” arXiv: hep-th/0611263, 2006.
- [10] P. Schuster and N. Toro, “A new class of particle in $2 + 1$ dimensions,” *Phys. Lett. B*, vol. 743, pp. 224–227, 2015, [arXiv:1404.1076 [hep-th]].
- [11] J. M. Leinaas and J. Myrheim, “On the theory of identical particles,” *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, vol. 37, no. 1, pp. 1–23, 1977.
- [12] G. K. Savvidy, “Tensionless strings: Physical Fock space and higher spin fields,” *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 19, pp. 3171–3194, 2004, [arXiv:hep-th/0310085].
- [13] J. Mourad, “Continuous spin particles from a tensionless string theory,” *AIP Conf. Proc.*, vol. 861, no. 1, pp. 436–443, 2006.
- [14] J. Mourad, “Continuous spin and tensionless strings,” arXiv: hep-th/0410009, 2004.
- [15] J. Mourad, “Continuous spin particles from a string theory,” arXiv: hep-th/0504118, 2005.
- [16] P. Schuster and N. Toro, “On the Theory of Continuous-Spin Particles: Wavefunctions and Soft-Factor Scattering Amplitudes,” *JHEP*, vol. 09, p. 104, 2013 [arXiv:1302.1198 [hep-th]].
- [17] S. Weinberg, “Photons and gravitons in s -matrix theory: Derivation of charge conservation and equality of gravitational and inertial mass,” *Phys. Rev.*, vol. 135, pp. B1049–B1056, Aug 1964.
- [18] S. Weinberg, “Photons and gravitons in perturbation theory: Derivation of maxwell’s and einstein’s equations,” *Phys. Rev.*, vol. 138, no. 4B, pp. B988–B1002, 1965.

- [19] X. Bekaert, N. Boulanger, and P. Sundell, “How higher-spin gravity surpasses the spin two barrier: no-go theorems versus yes-go examples,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 84, pp. 987–1009, 2012, [arXiv:1007.0435 [hep-th]].
- [20] M. Porrati, “Old and New No Go Theorems on Interacting Massless Particles in Flat Space,” in *17th International Seminar on High Energy Physics*, 9 2012 [arXiv:1209.4876 [hep-th]].
- [21] R. Rahman, “Higher Spin Theory - Part I,” *PoS*, vol. ModaveVIII, p. 004, 2012, [arXiv:1307.3199 [hep-th]].
- [22] E. P. Wigner, “Relativistische wellengleichungen,” *Z. Physik*, vol. 124, no. 665, 1947.
- [23] V. Bargmann and E. P. Wigner, “Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations,” *Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 34, p. 211, 1948.
- [24] J. Yngvason, “Zero-mass infinite spin representations of the poincare group and quantum field theory,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 18, pp. 195–203, 1970.
- [25] G. J. Iverson and G. Mack, “Quantum fields and interactions of massless particles: The continuous spin case,” *Annals Phys.*, vol. 64, no. 1, pp. 211–253, 1971.
- [26] A. Chakrabarti, “Remarks on lightlike continuous spin and spacelike representations of the poincaré group,” *J. Math. Phys.*, vol. 12, no. 9, pp. 1813–1822, 1971.
- [27] L. F. Abbott, “Massless Particles with Continuous Spin Indices,” *Phys. Rev. D*, vol. 13, p. 2291, 1976.
- [28] K. Hirata, “Quantization of massless fields with continuous spin,” *Progr. Theor. Phys.*, vol. 58, no. 2, pp. 652–666, 1977.
- [29] J. Mund, B. Schroer, and J. Yngvason, “String localized quantum fields from Wigner representations,” *Phys. Lett. B*, vol. 596, pp. 156–162, 2004, [arXiv:math-ph/0402043].
- [30] J. Mund, B. Schroer, and J. Yngvason, “String-localized quantum fields and modular localization,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 268, pp. 621–672, 2006, [arXiv:math-ph/0511042].
- [31] R. Brunetti, D. Guido, and R. Longo, “Modular localization and Wigner particles,” *Rev. Math. Phys.*, vol. 14, pp. 759–786, 2002, [arXiv:math-ph/0203021].
- [32] B. Schroer, “Wigner’s infinite spin representations and inert matter,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 77, no. 6, p. 362, 2017, [arXiv:1601.02477 [physics.gen-ph]].
- [33] X. Bekaert and J. Mourad, “The Continuous spin limit of higher spin field equations,” *JHEP*, vol. 01, p. 115, 2006 [arXiv:hep-th/0509092].
- [34] C. Fronsdal, “Massless Fields with Integer Spin,” *Phys. Rev. D*, vol. 18, p. 3624, 1978.
- [35] J. Fang and C. Fronsdal, “Massless Fields with Half Integral Spin,” *Phys. Rev. D*, vol. 18, p. 3630, 1978.
- [36] D. Sorokin, “Introduction to the classical theory of higher spins,” *AIP Conf. Proc.*, vol. 767, no. 1, pp. 172–202, 2005, [arXiv:hep-th/0405069 [hep-th]].

- [37] E. Inonu and E. P. Wigner, “On the contraction of groups and their representations,” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 39, no. 6, pp. 510–524, 1953.
- [38] W.-K. Tung, *Group theory in physics: an introduction to symmetry principles, group representations, and special functions in classical and quantum physics*. World Scientific Publishing Company, 1985.
- [39] P. Schuster and N. Toro, “A Gauge Field Theory of Continuous-Spin Particles,” *JHEP*, vol. 10, p. 061, 2013 [arXiv:1302.3225 [hep-th]].
- [40] P. A. M. Dirac, “Lectures on quantum mechanics,” 1964.
- [41] P. Schuster and N. Toro, “Continuous-spin particle field theory with helicity correspondence,” *Phys. Rev. D*, vol. 91, no. 2, p. 025023, 2015 [arXiv:1404.0675 [hep-th]].
- [42] M. Vasiliev, “Consistent equations for interacting gauge fields of all spins in 3+1 dimensions,” *Phys. Lett. B*, vol. 243, no. 4, pp. 378 – 382, 1990.
- [43] M. A. Vasiliev, “Nonlinear equations for symmetric massless higher spin fields in (A)dS(d),” *Phys. Lett. B*, vol. 567, pp. 139–151, 2003 [arXiv:hep-th/0304049].
- [44] V. O. Rivelles, “Gauge Theory Formulations for Continuous and Higher Spin Fields,” *Phys. Rev. D*, vol. 91, no. 12, p. 125035, 2015 [arXiv:1408.3576 [hep-th]].
- [45] V. O. Rivelles, “Remarks on a Gauge Theory for Continuous Spin Particles,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 77, no. 7, p. 433, 2017 [arXiv:1607.01316 [hep-th]].
- [46] X. Bekaert, M. Najafizadeh, and M. R. Setare, “A gauge field theory of fermionic Continuous-Spin Particles,” *Phys. Lett. B*, vol. 760, pp. 320–323, 2016, [arXiv:1506.00973 [hep-th]].
- [47] M. Kaku, *Quantum field theory: a modern introduction*. Oxford Univ. Press, 1993.
- [48] A. F. R. D. T. Piza, *Mecânica Quântica*. Edusp, second ed., 2009.
- [49] J. B. Neto, *Teoria de Campos e a Natureza: Parte Quântica*. Livraria da Física, first ed., 2017.
- [50] S. Weinberg, *Lectures on quantum mechanics*. Cambridge University Press, second ed., 2015.
- [51] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*. CRC press, second ed., 2003.
- [52] H. Năstase, *Classical field theory*. Cambridge University Press, 2019.
- [53] J. C. A. Barata, “Curso de física-matemática.” available in: http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/capitulos.html, accessed in: 02 february 2021.
- [54] X. Bekaert, J. Mourad, and M. Najafizadeh, “Continuous-spin field propagator and interaction with matter,” *JHEP*, vol. 11, p. 113, 2017, [arXiv:1710.05788[hep-th]].
- [55] F. A. Berends, G. J. H. Burgers, and H. van Dam, “Explicit Construction of Conserved Currents for Massless Fields of Arbitrary Spin,” *Nucl. Phys. B*, vol. 271, pp. 429–441, 1986.

- [56] G. E. Uhlenbeck and S. Goudsmit, “Spinning electrons and the structure of spectra,” *Nature*, vol. 117, no. 2938, pp. 264–265, 1926.
- [57] R. Raczka and A. O. Barut, *Theory of group representations and applications*. World Scientific Publishing Company, 1986.
- [58] J. Lubański, “Sur la theorie des particules élémentaires de spin quelconque. i,” *Physica*, vol. 9, no. 3, pp. 310–324, 1942.
- [59] L. P. S. Singh and C. R. Hagen, “Lagrangian formulation for arbitrary spin. 1. The boson case,” *Phys. Rev. D*, vol. 9, pp. 898–909, 1974.
- [60] I. Vuković, “Higher spin theory,” Master’s thesis, Rijeka U., 9 2017.
- [61] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, vol. 55. US Government printing office, 1964.
- [62] V. O. Rivelles, “A gauge field theory for continuous spin tachyons,” arXiv:1807.01812, 2018.
- [63] R. R. Metsaev, “Continuous spin gauge field in (A)dS space,” *Phys. Lett. B*, vol. 767, pp. 458–464, 2017, [arXiv:1610.00657 [hep-th]].
- [64] P. Schuster and N. Toro, “On the Theory of Continuous-Spin Particles: Helicity Correspondence in Radiation and Forces,” *JHEP*, vol. 09, p. 105, 2013 [arXiv:1302.1577 [hep-th]].
- [65] R. R. Metsaev, “Cubic interaction vertices for continuous-spin fields and arbitrary spin massive fields,” *JHEP*, vol. 11, p. 197, 2017 [arXiv:1709.08596 [hep-th]].
- [66] R. R. Metsaev, “Cubic interaction vertices for massive/massless continuous-spin fields and arbitrary spin fields,” *JHEP*, vol. 12, p. 055, 2018 [arXiv:1809.09075 [hep-th]].
- [67] H. Bateman, “Tables of integral transforms,” vol. 2, p. 35, 1954.
- [68] A. Y. Segal, “Conformal higher spin theory,” *Nucl. Phys. B*, vol. 664, pp. 59–130, 2003, [arXiv:hep-th/0207212].
- [69] N. I. Vilenkin, *Special functions and the theory of group representations*, vol. 22. American Mathematical Soc., 1978.
- [70] D. Francia, J. Mourad, and A. Sagnotti, “Current Exchanges and Unconstrained Higher Spins,” *Nucl. Phys. B*, vol. 773, pp. 203–237, 2007, [arXiv:hep-th/0701163].
- [71] R. R. Metsaev, “Fermionic continuous spin gauge field in (A)dS space,” *Phys. Lett. B*, vol. 773, pp. 135–141, 2017, [arXiv:1703.05780 [hep-th]].
- [72] Y. M. Zinoviev, “On massive high spin particles in AdS,” 8, arXiv:hep-th/0108192, 2001.
- [73] R. R. Metsaev, “Gauge invariant formulation of massive totally symmetric fermionic fields in (A)dS space,” *Phys. Lett. B*, vol. 643, pp. 205–212, 2006, [arXiv:hep-th/0609029].

- [74] M. Najafizadeh, “Modified Wigner equations and continuous spin gauge field,” *Phys. Rev. D*, vol. 97, no. 6, p. 065009, 2018, [arXiv:1708.00827 [hep-th]].
- [75] R. R. Metsaev, “Shadows, currents and AdS,” *Phys. Rev. D*, vol. 78, p. 106010, 2008, [arXiv:0805.3472 [hep-th]].
- [76] M. V. Khabarov and Y. M. Zinoviev, “Infinite (continuous) spin fields in the frame-like formalism,” *Nucl. Phys. B*, vol. 928, pp. 182–216, 2018, [arXiv:1711.08223 [hep-th]].
- [77] Y. M. Zinoviev, “Infinite spin fields in $d = 3$ and beyond,” *Universe*, vol. 3, no. 3, p. 63, 2017 [arXiv:1707.08832 [hep-th]].
- [78] M. Blagojevic, *Gravitation and gauge symmetries*. CRC Press, 2001.
- [79] S. R. Salinas, *Introdução à Física Estatística*. Edusp, 2005.