Dirac spectrum in dense two-color QCD

金澤拓也[a], Tilo Wettig[b], 山本直希[a]
[a]東京大学大学院理学系研究科物理学専攻
[b]Department of Physics, University of Regensburg

1 はじめに

有限温度（T）・有限密度[1]（μ）における量子色力学（QCD）の相構造は相対論的重イオン衝突や初期宇宙、中性子星の構造などとの繋がりの中で活発に研究されている。有限温度・ゼロ密度では格子 QCD シミュレーションにより第一原理からの理解が得られつつあるのに対し、有限密度ではいわゆる負符号問題により効率的なモンテカルロ計算が困難となり、今も完全な理解にはほど遠い。ただし、高密度極限（$\mu \gg \Lambda_{\mathrm{QCD}}$）では漸近的自由により弱結合となり、解析的計算によって、たとえばクォークが Cooper 対を形成しカラー超伝導状態になること、特に 3 フレーバーの場合はカラーとフレーバーの対称性が互いに lock した相（CFL 相）が実現され、ゼロ密度の時と全く同様にカイラル対称性が自発的に破れていること等が明らかにされている。

さて、ゼロ密度においては、カイラル対称性の自発的破れに Dirac 演算子のスペクトルが深く関わっている事が知られている。これは Banks-Casher 関係式、すなわち「カイラル対称性の破れ＝ゼロ固有値の堆積」という描像に端的に示されている。1992 年、Leutwyler と Smilga は Dirac 演算子のスペクトルのさらに詳しい性質が QCD の有限体積における低エネルギー有効理論から導かれることを示し、固有値分布がカイラル凝縮により支配されていることを示した [1]。その後、Verbaarschot らによって QCD と同じ対称性を持ったカイラルランダム行列理論の枠組みで Dirac 演算子の固有値分布に関する詳細な情報が次々と明らかにされてきた。

論文 [2] において、我々の２人（山本と金澤）は、Leutwyler-Smilga と同様の解析を QCD の高密度極限（CFL 相）においても行えることを指摘し、スペクトル和則や Lee-Yang zero 等に関する厳密な結果を得た。[2]本研究では上記の解析手法をゲージ群が SU(2) でフレーバー数（N_f）が偶数の QCD-like な理論（以下、2-color QCD）に適用した。2-color QCD は、ある一定の条件を満たす場合には有限密度でも格子シミュレーションが可能であることから、現実の QCD に対するいわばトイ・モデルとして盛んに研究されている。我々は、(i)2-color QCD の高密度における低エネルギー有効理論を導き、(ii) 有限体積における“ε-regime”を定義し、有限体積分配関数のクォーク質量依存性を exact に決定し、さらに (iii)Dirac 演算子のスペクトル和則を導出して、零点付近の Dirac 固有値の分布が（通常のカイラル凝縮ではなく）BCS メカニズムにより生成されたフェルミオン・ギャップに支配されていることを明らかにした。これらの予言は原理的に将来の格子シミュレーションで検証可能であり、また、ギャップの値が Dirac 固有値から計算できる可能性は本研究で初めて指摘されたものである。これらの詳細については文献 [3] を参考にされたい。

2 低エネルギー有効理論

まず始めに高密度の 2-color QCD の低エネルギー有効理論を導こう。

One-gluon exchange などから、クォーク間にはカラー反対称なチャンネル（$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}$ の $\mathbf{1}$）に引力が働くため Cooper 不安定性によりフェルミ面は Cooper 対の生成に対して不安定となり、

[1]本稿では、単に密度というときはバリオン数密度のことを指す。
[2]本研究会における山本直希氏の報告参照。

スペクトラムにはギャップ（Δ）が生じる。スカラーのCooper対を仮定すると、Pauli原理によりCooper対はフレーバーの足について反対称となり、大局的対称性は次のように破れる：

$$\mathrm{SU}(N_f)_L \times \mathrm{SU}(N_f)_R \times \mathrm{U}(1)_B \times \mathrm{U}(1)_A \to \mathrm{Sp}(N_f)_L \times \mathrm{Sp}(N_f)_R . \tag{1}$$

ただし高密度ではアノマリーが抑制されることを用いた。Cooper対がカラーシングレットであるためカラー対称性は破れない点が2-color QCDの特徴である。また(1)は、低密度領域でのカイラル対称性の破れかた[4] $\mathrm{SU}(2N_f) \to \mathrm{Sp}(2N_f)$とは大きく異なる（したがってカイラル・ラグランジアンも当然異なる）点に注意する。(1)の対称性の破れに伴うNambu-Goldstone（NG）場はカイラル極限でギャップレスであり、フェルミ面上の低エネルギーの物理を支配する。NG場を

$$\Sigma_L \in \mathrm{SU}(N_f)_L/\mathrm{Sp}(N_f)_L, \quad \Sigma_R \in \mathrm{SU}(N_f)_R/\mathrm{Sp}(N_f)_R, \quad V \in \mathrm{U}(1)_B, \quad A \in \mathrm{U}(1)_A \tag{2}$$

とおく。$N_f = 2$の場合、$\mathrm{SU}(2) = \mathrm{Sp}(2)$であるから$\Sigma_{L,R}$は存在しない。以下では$N_f \geq 4$の場合を扱うことにする。クォークのカレント質量$M$（$N_f \times N_f$行列）によるカイラル対称性のあらわな破れも考えると、V以外のNG場は小さいがノンゼロの質量を得る。対称性から、Mの2次までのオーダーで許される組み合わせは$A^2 \mathrm{tr}\,(M\Sigma_R M^T \Sigma_L^\dagger)$と決まるから、結局$\Delta$以下のエネルギースケールで有効なカイラル・ラグランジアンは次で与えられる：

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{f_H^2}{2}\left\{|\partial_0 V|^2 - v_H^2|\partial_i V|^2\right\} + \frac{N_f f_{\eta'}^2}{2}\left\{|\partial_0 A|^2 - v_{\eta'}^2|\partial_i A|^2\right\} \\ + \frac{f_\pi^2}{2}\mathrm{tr}\left\{|\partial_0 \Sigma_L|^2 - v_\pi^2|\partial_i \Sigma_L|^2 + (L \leftrightarrow R)\right\} - \frac{3\Delta^2}{4\pi^2}\left\{A^2 \mathrm{tr}\,(M\Sigma_R M^T \Sigma_L^\dagger) + \mathrm{c.c.}\right\}.\end{aligned} \tag{3}$$

f_H, $f_{\eta'}$, f_πは各NG場の崩壊定数である。（対称性だけでは導けない係数$\dfrac{3\Delta^2}{4\pi^2}$の導出は[3]参照。）$O(M)$の項がないことは高密度で$\langle \bar{q}q \rangle = 0$となっていることを反映している。また$V$とグルーオン場はその他のNG場と相互作用しないため、以下の議論では無視する。

3　有限体積の分配関数

次に、文献[5]で定義された“ε-regime”が高密度においても定義できることを示そう。虚時間形式に移り、4次元ユークリッド空間の大きさ$L^4\,(\equiv V_4)$の箱に入った2-color QCDを考える。クォークの質量Mから生じるNG場の質量をm_{NG}で表す。このとき、不等式

$$\frac{1}{\Delta} \ll L \ll \frac{1}{m_{\mathrm{NG}}} \tag{4}$$

が満たされていれば、系は以下の意味で単純化される。(i) まず(4)の第一の不等式から、分配関数Zに対するNG場以外の場（クォークなど）の寄与は十分小さいことがわかる：$\mathrm{e}^{-\Delta L} \ll 1$。(ii) 次に、第二の不等式より、箱の大きさ$L$に比べてNG場のCompton長の方が十分大きいので、NG場の運動量ゼロのセクターのみが分配関数に寄与すると近似できる。よって、ε-regimeにおける分配関数は

$$Z(M) = \int_{\mathrm{U}(1)_A} dA \int_{\mathrm{SU}(N_f)_L/\mathrm{Sp}(N_f)_L} d\Sigma_L \int_{\mathrm{SU}(N_f)_R/\mathrm{Sp}(N_f)_R} d\Sigma_R \,\exp\left[V_4 \frac{3\Delta^2}{4\pi^2}\left\{A^2 \mathrm{tr}\,(M\Sigma_R M^T \Sigma_L^\dagger) + \mathrm{c.c.}\right\}\right] \tag{5}$$

で与えられ、無限次元の経路積分が有限次元の積分に落ちることが分かる（$Z(0) = 1$に規格化）。特にMが単位行列に比例する場合（$M = m\mathbf{1}_{N_f}$）には積分が実行でき、パフィアンで書かれた美しい表式が得られる[3]。

4 Dirac 演算子のスペクトル和則

Dirac 演算子 $\not{D} \equiv \gamma_\nu(\partial_\nu - igA_\nu) + \mu\gamma_0$ の固有値（$\mu \neq 0$ では一般に複素数）を $\{i\lambda_n\}_n$ とする。低エネルギー有効理論ではなく QCD の microscopic な表式から出発すると、分配関数は

$$Z(M) = \int[\mathcal{D}A]\det\left[\not{D} + \frac{1+\gamma_5}{2}M + \frac{1-\gamma_5}{2}M^\dagger\right]\mathrm{e}^{-S_g}\Big/\int[\mathcal{D}A]\det{}^{N_f}\not{D}\,\mathrm{e}^{-S_g} \tag{6}$$

$$\equiv \left\langle {\prod_n}' \det\left(1 + \frac{M^\dagger M}{\lambda_n^2}\right)\right\rangle, \tag{7}$$

と書ける。ただし $S_g \equiv \int d^4x\, F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}/4$ であり、$\langle\dots\rangle$ はカイラル極限の QCD の作用でとった期待値を表し、$\prod_n'$（および $\sum_n'$）は実部が正の固有値に関する積（および和）を表す。アノマリーを無視しているのでゼロ固有値は存在しないと仮定してよい。(5) および (7) を等置して $O(M^2)$ と $O(M^4)$ の係数を比較することにより次のスペクトル和則を得る：

$$\left\langle {\sum_n}' \frac{1}{\lambda_n^2}\right\rangle = \left\langle {\sum_{m<n}}' \frac{1}{\lambda_m^2\lambda_n^2}\right\rangle = \left\langle {\sum_n}' \frac{1}{\lambda_n^6}\right\rangle = 0, \qquad \left\langle {\sum_n}' \frac{1}{\lambda_n^4}\right\rangle = \frac{9}{4\pi^4(N_f-1)^2}(V_4\Delta^2)^2. \tag{8}$$

このように多くのスペクトル和が 0 になることはゼロ密度でのスペクトル和則 [1] には見られない顕著な特徴である。また、Spectral density $\rho(\lambda)$ と Microscopic spectral density $\rho_s(\lambda)$ を

$$\rho(\lambda) \equiv \left\langle \sum_n \delta^2(\lambda - \lambda_n)\right\rangle, \quad \rho_s(z) \equiv \frac{\pi^2}{3\Delta^2 V_4}\,\rho\left(\frac{\pi z}{\sqrt{3\Delta^2 V_4}}\right) \tag{9}$$

で定義すると、上の第二のスペクトル和則は

$$\int_{\mathrm{Re}\,z>0} d^2z\,\frac{\rho_s(z)}{z^4} = \frac{1}{4(N_f-1)^2} \tag{10}$$

となる。ゆえに ρ_s には非自明な熱力学極限が存在することが強く示唆され、そこから、$\not{D}$ の最小固有値は $O(1/\sqrt{V_4})$ のスケールであること、そのスケールでの固有値分布が Δ によって支配されていることが読み取れる。ゼロ密度では ρ_s は QCD のミクロな相互作用な形によらず対称性の自発的破れのパターンのみから決定される universal な関数であることが知られているので、高密度でも同じことが期待される。高密度の 2-color QCD に対応するランダム行列理論の構築と ρ_s の関数形の決定は今後の課題である。

参考文献

[1] H. Leutwyler and A. V. Smilga, *Phys. Rev.* **D46** (1992) 5607–5632.

[2] N. Yamamoto and T. Kanazawa, *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 032001, [arXiv:0902.4533].

[3] T. Kanazawa, T. Wettig, and N. Yamamoto, *JHEP* **08** (2009) 003, [arXiv:0906.3579].

[4] J. B. Kogut, M. A. Stephanov, D. Toublan, J. J. M. Verbaarschot, and A. Zhitnitsky, *Nucl. Phys.* **B582** (2000) 477–513, [hep-ph/0001171].

[5] J. Gasser and H. Leutwyler, *Phys. Lett.* **B188** (1987) 477.