LES INTERACTIONS FAIBLES : UNE INTRODUCTION

J. LEITE LOPES

Centre de Recherches Nucléaires et
Université Louis Pasteur
Strasbourg, France

Ces notes reproduisent le cours que j'ai fait à l'Ecole d'Eté de Physique des Particules Elémentaires de Gif-sur-Yvette, 1974. J'ai profité de l'occasion pour écrire un cours un peu plus complet que ce que je devais prononcer à Gif-sur-Yvette.

J'adresse mes remerciements à mon élève D. Spehler pour l'aide dans la rédaction du manuscript et à Mme Françoise Ohlmann pour la frappe du texte.

J.L.L.

INTRODUCTION

A - L'idéal philosophique des physiciens a toujours été celui de réduire *la variété des corps matériels à des configurations d'un petit nombre* d'objets fondamentaux - atomes pour les Grecs, particules élémentaires pour les physiciens de nos jours.

Les 92 éléments de Mendelejeff furent expliqués à partir de trois particules, l'électron, le proton et le neutron ; celles-ci ainsi que les photons, responsables de transferts d'énergie et d'impulsion entre les atomes, étaient les objets primordiaux des physiciens de l'année 1934.

La découverte postérieure des pions, postulés par Yukawa en 1935 pour expliquer les interactions nucléaires, du muon et des neutrinos, des kaons et surtout des hypérons et des résonances semblait montrer que la réalité sous-jacente des objets fondamentaux est peut-être trop riche pour être réduite à un petit nombre d'entités.

Aujourd'hui nous savons que les particules élémentaires se classifient en <u>bosons</u> (particules à spin entier et qui obéissent à la statistique de Bose-Einstein) et <u>fermions</u> (particules à spin demi-entier et qui obéissent au principe de Pauli).

Les bosons sont indiqués dans la table I.

TABLE I

BOSONS

	intervient dans les interactions	Spin	Charge	Existence
<u>Graviton</u> (m=0)	<u>gravitationnelles</u>	2	0	pas de détect.exp.
<u>Mésons leptiques</u> W^+, W^-, Z	<u>faibles</u>	1	+,-,0	pas de détect.exp.
<u>Photon</u> (m=0) γ	<u>électromagnétiques</u>	1	0	
<u>Mésons hadroniques</u> pions, kaons, éta, ρ, K^*, etc (voir table Particle Data Group)	<u>fortes</u>	0,1,2	+,-,0	

Les fermions sont indiqués dans la table II.

TABLE II

FERMIONS

	subissent des interactions	Spin
Leptons e^-, ν_e μ^-, ν_μ	faibles et électromagnétiques	1/2
Fermions hadroniques nucléons, hypérons, résonances etc.	faibles électromagnétiques et fortes	1/2, 3/2, ...

On essaie aujourd'hui de décrire les fermions et les bosons hadroniques comme des systèmes composés de 3 objets fondamentaux ou 3 triplets (ou 3 quadruplets) d'objets fondamentaux – les quarks. Les leptons n'ont pas encore été incorporés d'une manière satisfaisante dans de tels modèles et l'existence du muon et de son neutrino n'est pas comprise théoriquement. En dehors du monde des quarks il y aurait non seulement les leptons, mais aussi les photons (souvenons-nous de la tentative de De Broglie de les considérer comme un système neutrino-antineutrino), les mésons leptiques, s'ils existent, W^+, W^-, Z, les gravitons, s'ils existent. Il n'est pas impossible que d'autres leptons, farouches, à grande masse peut-être, ayant échappé jusqu'ici à l'observation soient découverts et qu'alors une certaine loi de symétrie permette de les comprendre ainsi que le muon et son neutrino.

Peut-être ne doit-on pas chercher la simplicité dans des objets fondamentaux qui, s'ils exercent des interactions fortes entre eux, donnent naissance à des structures qui peuvent de manière équivalente être considérées à leur tour comme des objets fondamentaux. Ainsi le pion de Yukawa était une particule élémentaire émise ou absorbée par un nucléon se transformant en un autre nucléon :

$$p \to n + \pi^+$$

Le pion de Yang et Fermi, qui lui est clairement équivalent, était d'autre part conçu comme un système composé d'une paire nucléon-antinucléon primordiaux :

$$\pi^+ \sim (p\bar{n})$$

On devra peut-être chercher une simplicité plus profonde dans la classification des interactions fondamentales indiquées dans la table III.

TABLE III

INTERACTIONS

	Qui les subit	Source	Constante Caractéristique
Gravitation	toutes les particules : la matière et l'énergie	tenseur énergie-impulsion	$G_{grav.} \frac{m_e^2}{e^2} \simeq 0.2 \times 10^{-42}$
Faibles	Leptons et hadrons	courants faibles	$G_F \frac{m_p^2 c^2}{\hbar^3} \simeq 1.01 \times 10^{-5}$
Electromagnétiques	Particules douées d'un moment multi-polaire charge ou moment magnétique	courant électro-magnétique	$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \cong \frac{1}{137} \sim 10^{-2}$
Fortes	matière hadronique		$\frac{g^2}{4\pi\hbar c} \simeq 15$

B - Cet exposé est consacré à une introduction à l'étude des interactions faibles et doit servir de préparation aux exposés postérieurs ayant pour but le modèle des champs de jauge unifiés - tentative de description des interactions faibles par une théorie quantique de champs de jauges, renormalisable, contenant en même temps la théorie des interactions électromagnétiques.

Cette unification des interactions faibles et électromagnétiques - initiée par Weinberg et Salam - sera un évènement important, si la théorie est définitivement confirmée par l'expérience.

L'unification de concepts que l'on jugeait indépendants, la synthèse de théories apparemment sans aucun rapport mutuel, répond à l'idéal d'unité des physiciens.

Voici une esquisse des grands moments dans l'histoire de la physique, quand ces unifications ont été conçues :

TABLE IV

NEWTON (1686)	La force exercée sur une pierre par la Terre est identique à la force entre la Terre et la Lune : universalité de la force gravitationnelle.
MAXWELL (1855)	Le champ électrique et le champ magnétique sont partiesdu champ électromagnétique, couplé aux courants et densités de charge. Les ondes de lumière sont des ondes électromagnétiques de certaines fréquences. L'optique est un chapitre de l'électrodynamique.
EINSTEIN, LORENTZ, POINCARE (1905)	L'espace et le temps sont des sous-espaces de l'espace de Minkowski. Impulsion et énergie, courant et densité de charge sont des composantes d'un seul objet et se transforment les une dans les autres sous l'action du groupe de Lorentz. Matière et énergie sont équivalentes.
EINSTEIN (1915)	Le champ de gravitation est le tenseur de métrique d'un espace de Riemann à quatre dimensions. Théorie relativiste de la gravitation.
DE BROGLIE (1924)	La dualité onde-corpuscule est vraie non seulement pour la lumière, mais aussi pour toute forme d'énergie ou de matière.
SCHRÖDINGER, HEISENBERG (1925)	Naissance de la mécanique quantique. Tous les systèmes atomiques doivent être décrits par les vecteurs d'état qui obéissent à l'équation de Schrödinger.
PAULI (1925, 1940)	Le principe d'exclusion et l'explication de la structure électronique des atomes. Statistique et spin.
HEISENBERG, PAULI (1929) DIRAC	Naissance de la théorie quantique des champs.
FERMI (1934)	Théorie des interactions faibles.

TABLE IV (suite)

WEINBERG, SALAM, 't HOOFT, (1967, 1971)	Le modèle des champs de jauge unifiés - unification des interactions faibles et électromagnétiques et sa renormalisation.
't HOOFT, FAD'EV, POPOV, VELTMAN, B.W. LEE, BOLLINI, GIAMBIAGI et al. (1967, 1972, 1974)	Quantification des champs de jauge et régularisation dimensionnelle.

C - La notion de propagation des interactions physiques par un champ, héritage de Maxwell et Lorentz, s'est édifiée en théorie relativiste de champ avec et après Einstein. La construction de la théorie relativiste de la gravitation - peut-être le plus bel achèvement de la physique théorique - a élevé au maximum le pouvoir de description et d'unification du concept de champ, le champ gravitationnel étant identifié avec le tenseur de la métrique d'un espace-temps Riemannien.

A chaque particule, les physiciens ont ensuite appris à associer un champ. Le très grand nombre des particules élémentaires de nos jours a découragé grand nombre de physiciens dans la croyance du pouvoir unificateur de la théorie des champs. Les efforts d'Einstein pour découvrir une théorie unitaire du champ de gravitation et du champ électromagnétique paraissaient à beaucoup d'entre eux, voués à l'échec étant donné la diversité d'autres champs à être pris en considération.

C'est dans le domaine des interactions fortes que la théorie des champs n'a pas pu réussir jusqu'à présent.

Les efforts actuels dans la poursuite d'une théorie unitaire des interactions électromagnétiques et des interactions faibles - comme l'ont proposé Weinberg, Salam et Ward - constituent une victoire pour la philosophie de la théorie des champs. Ils peuvent ouvrir la voie à une compréhension globale et plus approfondie de la nature des forces d'interaction et des particules élémentaires, les interactions fortes comprises.

Dans ce qui suit, le premier chapitre sera un exposé des interactions électromagnétiques de champs complexes, scalaire, vectoriel et spinoriel. On y montrera que le champ électromagnétique peut être regardé comme un

champ de jauge – un champ introduit dans la théorie pour que celle-ci soit invariante p[illegible]
espèce. Ce [illegible] ne conduit à la construction précise des interactions électromagnétiques.

Le deuxième chapitre ex[illegible] les champs de Yang-Mills et la théorie des champs invariante par rapport au groupe des transformations de jauge non-abéliennes. On y montre également la construction, grâce à ce principe d'invariance, des courants d'isospin conservés qui sont associés aux champs de jauge.

Les chapitres suivants, par contre, feront un résumé historique du développement de la théorie des interactions faibles, construite initialement pour décrire les processus de désintégration bêta et par analogie avec l'électrodynamique. On y verra la découverte extraite, pas à pas, de l'expérience, de principes et règles – et de violation de principes comme ceux de l'invariance par rapport à la réflexion spatiale et par rapport à la conjugaison de charge – jusqu'à la formulation du lagrangien effectif courant – courant et à l'étude de la structure des courants faibles.

Le mérite de Weinberg et de Salam – Ward fut de montrer qu'il est possible de construire cette théorie à partir de l'introduction de champs de jauge et de la notion de rupture spontanée de la symétrie. Ce sera le but des exposés postérieurs de MM. Cabbibo et Iliopoulos.

CHAPITRE I

LE CHAMP ELECTROMAGNETIQUE COMME UN CHAMP DE JAUGE

Le but de ce chapitre est de montrer que le postulat d'invariance de jauge locale (ou de deuxième espèce) des théories de champs décrits par des fonctions complexes (opérateurs non hermitiques) conduit à l'introduction d'un champ vectoriel sans masse - un champ de jauge - qui est le champ électromagnétique. Ce principe permet donc la construction de la forme exacte du lagrangien d'interaction minimale entre le champ électromagnétique et le champ complexe considéré. Les termes de Pauli, importants pour la discussion de particules sans charge mais douées d'un moment magnétique, découlent de ce principe et du fait qu'on peut additionner au lagrangien une divergence de la forme $f\partial^{\mu}(\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\partial^{\nu}\psi)$. Nous ne les discuterons pas dans ce chapitre. Ce sont des termes phénoménologiques et la description de moments anormaux doit résulter de la prise en considération d'autres interactions.

I - THEORIE DU CHAMP SCALAIRE INVARIANTE DE JAUGE : ELECTRODYNAMIQUE SCALAIRE

Le lagrangien d'un champ scalaire complexe libre de masse m est donné par :

$$L_o = \partial^{\mu}\varphi^{+}\partial_{\mu}\varphi - m^2\varphi^{+}\varphi \tag{I,1}$$

Ce lagrangien est invariant par rapport à une transformation de jauge de première espèce :

$$\begin{cases} \varphi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\ \varphi(x) \\ \varphi^{+}(x) \rightarrow e^{-i\alpha}\ \varphi^{+}(x) \end{cases} \tag{I,2}$$

où α est une constante.

Par contre pour une transformation de jauge locale (α est remplacée par une fonction ponctuelle, $e\Lambda(x)$, e étant une constante) ou transformation de jauge de deuxième espèce, le lagrangien L_o n'est pas invariant. En effet la transformation

$$\begin{cases} \varphi(x) \rightarrow e^{ie\Lambda(x)}\ \varphi(x) \\ \varphi^{+}(x) \rightarrow e^{-ie\Lambda(x)}\ \varphi^{+}(x) \end{cases} \tag{I,3}$$

est le lagrangien complet, invariant de jauge, pour un champ scalaire complexe ; il décrit le système consitué par ce champ et le champ électromagnétique (qui est le champ de jauge) en interaction mutuelle.

En effet, l'expression explicite de L est donnée par :

$$L = L_\varphi + L_\gamma + L_{\varphi\gamma}$$

où
$$\begin{cases} L_\varphi = \partial^\mu\varphi^+\partial_\mu\varphi - m^2\varphi^+\varphi \\ L_\gamma = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ L_{\varphi\gamma} = ie\, A^\mu \left\{\varphi\partial_\mu\varphi^+ - \varphi^+\partial_\mu\varphi\right\} + e^2\, (A^\mu A_\mu)\varphi^+\varphi \end{cases}$$

$L_{\varphi\gamma}$ est le lagrangien d'interaction électromagnétique d'un champ scalaire.

On obtient les équations du mouvement (I,16)

$$\text{(I,16)} \quad \partial^\mu\partial_\mu\varphi + m^2\varphi + ie\left\{A^\mu\partial_\mu\varphi + \partial_\mu(A^\mu\varphi)\right\} - e^2\,(A^\mu A_\mu)\varphi = 0$$

à partir des équations de Euler-Lagrange :

$$\partial^\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu\varphi^+)} - \frac{\partial L}{\partial\varphi^+} = 0$$

et

$$\text{(I,17)} \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$$

avec $j^\mu = ie\left\{\varphi^+\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^+\right\} - 2e^2A^\mu\varphi^+\varphi$

(qui est le courant électromagnétique du champ φ) à partir des équations :

$$\partial^\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} - \frac{\partial L}{\partial A^\nu} = 0$$

On pourra à présent mettre ce courant sous la forme suivante :

$$\text{(I,18)} \quad j^\mu(x) = ie\left\{\varphi^+D^\mu\varphi - (D^\mu\varphi)^+\varphi\right\}$$

D^μ étant donnée par la formule (I,10).
L'expression (I,18) montre que le courant $j^\mu(x)$ est un invariant de jauge.

Les équations pour φ s'écriront par conséquent :

$$\text{(I,19)} \quad D^\mu D_\mu\varphi + m^2\varphi = 0$$

c'est-à-dire :

$$(\partial^\mu + ie\, A^\mu)\,(\partial_\mu + ie\, A_\mu)\,\varphi + m^2\varphi = 0$$

Il vient donc en conclusion :

$$\text{(I,20)} \quad \begin{aligned} &\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu(x) \\ &j^\mu(x) = ie\ \ \varphi^+D^\mu\varphi - \varphi\ (D^\mu\varphi)^+ \\ &D^\mu D_\mu\varphi + m^2\varphi = 0 \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'opérateur :

$$(I,25)\quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est la représentation de la troisième composante du moment angulaire dans un espace à 3 dimensions.

Nous rappelons

$$(I,26)\quad L_3^{\,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_3^{\,3} = L_3 .$$

d'où on tire

$$(I,27)\quad e^{ie\Lambda(x)L_3} = I - ie\Lambda(x)L_3 + \frac{(-i)^2}{2\,!}\left(e\Lambda(x)\right)^2 L_3^{\,2} + \ldots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - i(e\Lambda)\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\,!}(e\Lambda)^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{(i)^3}{3\,!}(e\Lambda)^3 \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \cos(e\Lambda)\, L_3^{\,2} - i\,\sin(e\Lambda) L_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(e\Lambda) & -\sin(e\Lambda) & 0 \\ \sin(e\Lambda) & \cos(e\Lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est pourquoi on pourra écrire la transformat[illegible] de jauge sous la forme (I,28) :

$$(I,28)\quad \boxed{\begin{cases} \phi'(x) = e^{-ie\Lambda(x)L_3}\,\phi(x) \\ A^{\mu\prime}(x) = A^{\mu} - \partial^{\mu}\Lambda(x) \end{cases}}$$

et le lagrangien invariant de jauge :

$$(I,29)\quad L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_3^{\ \mu}\phi)^{+}(D_{\mu 3}\phi) - \frac{1}{2}m^2\,\phi^{+}\phi$$

et

$$(I,35) \quad \frac{1}{2}\phi^+\phi = \varphi^+\varphi + \frac{1}{2}\varphi_3{}^2$$

L'expression du courant est :

$$(I,36) \quad \boxed{j^{\mu} = \frac{ie}{2}\ \{(D_3{}^{\mu}\phi)^+ L_3\,\phi - \phi^+ L_3\,(D_3{}^{\mu}\phi)\}}$$

Les équations du mouvement sont

$$(I,37) \quad \begin{array}{ll} a) & \partial_{\nu} F^{\mu\nu} = j^{\mu} \\ b) & (D_3{}^{\mu}D_{\mu 3} + m^2)\ \phi = 0 \end{array}$$

(I,37) a) donne :

$$(I,38) \quad \begin{array}{l} \Box\varphi_1 + m^2\varphi_1 - eA^{\mu}\partial_{\mu}\varphi_2 - e\partial^{\mu}(A_{\mu}\varphi_2) - e^2A^{\mu}A_{\mu}\varphi_1 = 0 \\ \Box\varphi_2 + m^2\varphi_2 + eA^{\mu}\partial_{\mu}\varphi_1 + e\partial^{\mu}(A_{\mu}\varphi_1) - e^2A^{\mu}A_{\mu}\varphi_2 = 0 \\ \Box\varphi_3 + m^2\varphi_3 = 0 \end{array}$$

III - THEORIE D'UN CHAMP VECTORIEL DE PROCA INVARIANTE DE JAUGE

Soit

$$(I,39) \quad \mathcal{G}_o{}^{\mu\nu} = \partial^{\nu}\phi^{\mu} - \partial^{\mu}\phi^{\nu}$$

satisfaisant à l'équation de Proca :

$$(I,40) \quad \partial_{\nu}\mathcal{G}_o{}^{\mu\nu} + m^2\phi^{\mu} = 0$$

Le lagrangien est donné par l'expression (I,41) suivante

$$(I,41) \quad L_o = \frac{1}{2}\,\mathcal{G}_o{}^{\mu\nu+}\,\mathcal{G}_{o\,\mu\nu} - m^2\phi^{\mu+}\phi_{\mu}$$

Considérons la transformation (I,42) :

$$(I,42) \quad \begin{cases} \phi^{\mu}(x) \to e^{ie\Lambda(x)}\ \phi^{\mu}(x) \\ A^{\mu}(x) \to A^{\mu}(x) - \partial^{\mu}\Lambda(x) \end{cases}$$

On définit

$$(I,43) \quad G^{\mu\nu} = D^{\nu}\phi^{\mu} - D^{\mu}\phi^{\nu}$$
$$\text{ou } D^{\nu} = \partial^{\nu} + ie\,A^{\nu}$$

et par conséquent :

$$G^{\mu\nu} = (\partial^{\nu} + ie\,A^{\nu})\,\phi^{\mu} - (\partial^{\mu} + ie\,A^{\mu})\,\phi^{\nu} =$$

$$(I,44) \quad \boxed{G^{\mu\nu} = \mathcal{G}_o{}^{\mu\nu} + ie\,(A^{\nu}\phi^{\mu} - A^{\mu}\phi^{\nu})}$$

On obtient par conséquent :

$$(I,49)\quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu(x)$$

avec

$$j^\mu(x) = ie\,(\mathcal{G}_o^{\mu\nu+}\,\phi_\nu - \phi_\nu^{\ +}\,\mathcal{G}_o^{\mu\nu}) + e^2\left\{(A^\nu\phi^{\mu+} - A^\mu\phi^{\nu+})\phi_\nu + (A^\nu\phi^\mu - A^\mu\phi^\nu)\,\phi_\nu^{\ +}\right\}$$

En conclusion, on a donc

$$(I,50)\quad \boxed{\begin{aligned} &\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu(x) \\ &j^\mu(x) = ie\left\{G^{\mu\nu+}\phi_\nu - \phi_\nu^{\ +}G^{\mu\nu}\right\} \end{aligned}}$$

L'expression (I,50) est explicitement invariante de jauge.

L'équation de Proca est à présent :

$$(I,51)\qquad D_\nu\, G^{\mu\nu} + m^2\phi^\mu = 0$$

IV - <u>THEORIE D'UN CHAMP DE PROCA ISOVECTEUR INVARIANTE DE JAUGE</u>

Considérons à présent un triplet de champs de Proca réels :

$$(I,52)\quad \left\{\phi_a^{\ \mu}(x)\right\} = \begin{pmatrix} \phi_1^{\ \mu}(x) \\ \phi_2^{\ \mu}(x) \\ \phi_3^{\ \mu}(x) \end{pmatrix} = \vec{\Phi}\,(x)$$

Nous construisons le champ vectoriel complexe $\phi^\mu(x)$ avec les deux premières composantes du champ $\vec{\Phi}$:

$$(I,53)\quad \begin{cases} \phi^\mu(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1^{\ \mu}(x) + i\,\phi_2^{\ \mu}(x)\right) \\[2ex] \phi^{\mu+}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1^{\ \mu}(x) - i\,\phi_2^{\ \mu}(x)\right) \end{cases}$$

et nous voulons que :

$$(I,54)\quad \begin{cases} \phi^\mu(x) \to e^{ie\Lambda(x)}\ \phi^\mu(x) \\ \phi^{\mu+}(x) \to e^{-ie\Lambda(x)}\ \phi^\mu(x)^+ \\ \phi_3^{\ \mu}(x) \to \phi_3^{\ \mu}(x) \end{cases}$$

Alors, comme pour un champ scalaire isovecteur

$$(I,55)\quad \begin{aligned} &\phi_a^\mu(x) \to \left(e^{-ie\Lambda(x)\ L_3}\right)_{ab}\ \phi_b^\mu(x) \\ &A^\mu(x) \to A^\mu(x) - \partial^\mu\,\Lambda(x) \end{aligned}$$

$$(I,63) \quad \begin{cases} \partial_\nu \mathcal{G}_1^{\mu\nu} - e A_\nu \mathcal{G}_2^{\mu\nu} + m^2 \phi_1{}^\mu = 0 \\ \partial_\nu \mathcal{G}_2^{\mu\nu} + e A_\nu \mathcal{G}_1^{\mu\nu} + m^2 \phi_2{}^\mu = 0 \\ \partial_\nu \mathcal{G}_3^{\mu\nu} \qquad\qquad\quad + m^2 \phi_3{}^\mu = 0 \end{cases}$$

ou

$$(\partial_\nu + ie A_\nu)\,(\mathcal{G}_1^{\mu\nu} + i\,\mathcal{G}_2^{\mu\nu}) + m^2(\phi_1{}^\mu + i\phi_2{}^\mu) = 0$$

$$(I,64) \quad D_\nu\, G^{\mu\nu} + m^2 \phi^\mu = 0$$

En conclusion

$$(I,65) \quad \boxed{\begin{aligned} &\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu \\ &\text{avec } j^\mu(x) = -\frac{ie}{2}\left\{\mathcal{G}^{\mu\nu}_a\,(L_3\phi_\nu)_a - \phi_{\nu a}(L_3\mathcal{G}^{\mu\nu})_a\right\} \end{aligned}}$$

En effet nous savons grâce à l'expression (I,50) que le courant $j^\mu(x)$ est :

$$j^\mu(x) = ie\left\{G^{\mu\nu +}\phi_\nu - \phi_\nu{}^+ G^{\mu\nu}\right\} = \frac{ie}{2}\left\{(\mathcal{G}_1^{\mu\nu} - i\,\mathcal{G}_2^{\mu\nu})\,(\phi_{\nu_1} + i\phi_{\nu_2}) - \right.$$

$$\left. - (\phi_{\nu_1} - i\phi_{\nu_2})\,(\mathcal{G}_1^{\mu\nu} + i\,\mathcal{G}_2^{\mu\nu})\right\}$$

$$= e\left\{\mathcal{G}_2^{\mu\nu}\,\phi_{\nu_1} - \mathcal{G}_1^{\mu\nu}\,\phi_{\nu_2}\right\}$$

Mais d'autre part de l'expression (I,65) on tire

$$j^\mu(x) = -\frac{ie}{2}\left\{\mathcal{G}^{\mu\nu}_a\,(L_3\phi_\nu)_a - \phi_{\nu_a}(L_3\mathcal{G}^{\mu\nu})_a\right\} =$$

$$= -\frac{ie}{2}\left\{\mathcal{G}_1^{\mu\nu}(-i)\,\phi_{\nu_2} + \mathcal{G}_2^{\mu\nu}(i)\,\phi_{\nu_1} - \phi_{\nu_1}(-i)\,\mathcal{G}_2^{\mu\nu} - \phi_{\nu_2}(i)\,\mathcal{G}_1^{\mu\nu}\right\} =$$

$$= -e\left\{\mathcal{G}_1^{\mu\nu}\,\phi_{\nu_2} - \mathcal{G}_2^{\mu\nu}\,\phi_{\nu_1}\right\}$$

Nous constatons par conséquent que l'on obtient la même expression pour le courant $j^\mu(x)$ que celle qu'on obtient grâce aux formes (I,50) ou (I,65)

V - THEORIE DE DIRAC INVARIANTE DE JAUGE

Le lagrangien invariant de jauge est donné par l'expression :

$$(I,66) \quad L = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \overline{\psi}\left\{i\gamma^\mu D_\mu - m\right\}\psi$$

avec $D^\mu = \partial^\mu + ie A^\mu$

CHAPITRE II

LE CHAMP DE JAUGE DE YANG-MILLS

Dans ce chapitre on esquissera le principe d'invariance de jauge de YANG-MILLS-le facteur de phase contient non seulement des fonctions de point de l'espace mais aussi des opérateurs qui en général ne commutent pas. On introduit ainsi un champ vectoriel isovecteur de masse nulle et on obtient la forme précise de l'interaction entre ce champ et les courants d'isospin.

I - THEORIE D'UN CHAMP SPINORIEL ISOSPINEUR INVARIANTE DE JAUGE DE YANG-MILLS

Considérons un spineur de l'espace de SU(2)

(II,1) $$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

ψ peut être par exemple le doublet proton-neutron :

$$\psi = \begin{pmatrix}p\\ n\end{pmatrix}$$

ou le doublet électron-neutrino :

$$\psi = \begin{pmatrix}\nu\\ e\end{pmatrix}$$

Nous exigeons que ψ_1 et ψ_2 aient même masse.

Alors le lagrangien libre

(II,2) $$L_o = \overline{\psi}_1\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi_1 + \overline{\psi}_2\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi_2$$

pourra s'écrire :

(II,3) $$L_o = \overline{\psi}\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi$$

et est invariant par la transformation :

(II,4) $$\begin{cases}\psi(x) \rightarrow e^{i\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}}\,\psi(x)\\ \overline{\psi}(x) \rightarrow \overline{\psi}(x)\,e^{-i\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}}\end{cases}$$

Nous obtenons alors pour l'expression (II,11)

$$(II,13)\quad \mathscr{D}^{\mu'}\psi'(x) = \left(I + ig\vec{\Lambda}.\frac{\vec{\tau}}{2}\right)\partial^{\mu}\psi + ig\vec{\mathscr{A}}^{\mu}.\frac{\vec{\tau}}{2}\left(I + ig\vec{\Lambda}.\frac{\vec{\tau}}{2}\right)\psi + g^2\left(\partial^{\mu}\vec{\Lambda}.\frac{\vec{\tau}}{2}\right)\left(\vec{\Lambda}.\frac{\vec{\tau}}{2}\right)\psi$$

Nous négligerons le dernier terme du second ordre, dans l'expression (II,13) et nous voudrions obtenir ce faisant une équation du type :

$$(II,14)\qquad \mathscr{D}^{\mu'}\psi'(x) = \left(I + ig\vec{\Lambda}.\frac{\vec{\tau}}{2}\right)\mathscr{D}^{\mu}\psi$$

Remarquons d'autre part que

$$(II,15)\qquad ig\,\mathscr{A}_a^{\mu}\,\frac{\tau_a}{2}\,ig\Lambda_b\frac{\tau_b}{2}\psi = -g^2\Lambda_b\frac{\tau_b}{2}\mathscr{A}_a^{\mu}\,\frac{\tau_a}{2}\psi - g^2\Lambda_b\,\mathscr{A}_a^{\mu}\,[\frac{\tau_a}{2},\frac{\tau_b}{2}]\psi$$

On obtient par conséquent pour (II,13)

$$(II,16)\quad \mathscr{D}^{\mu'}\psi'(x) = \left(I + ig\vec{\Lambda}.\frac{\vec{\tau}}{2}\right)\mathscr{D}^{\mu}\psi - g^2\mathscr{A}_a^{\mu}\Lambda_b\,[\frac{\tau_a}{2},\frac{\tau_b}{2}]\psi$$

Il est clair que la transformation (II,12) pour $\mathscr{A}^{\mu}$ ne peut être exacte : $\mathscr{A}^{\mu}$ est un isovecteur et donc devra se transformer, par rotation dans l'espace de l'isospin, comme tel.

Posons :

$$(II,17)\qquad \mathscr{A}_a^{\mu'}(x) = \mathscr{A}_a^{\mu}(x) - \partial^{\mu}\Lambda_a(x) - gf_a^{\;k\ell}\Lambda_k\mathscr{A}_{\ell}^{\mu}$$

et nous obtenons à présent pour (II,13), en négligeant les termes du second ordre :

$$(II,18)\quad \mathscr{D}^{\mu'}\psi'(x) = \left(I + ig\vec{\Lambda}.\frac{\vec{\tau}}{2}\right)\mathscr{D}^{\mu}\psi - g^2\mathscr{A}_a^{\mu}\Lambda_b[\frac{\tau_a}{2},\frac{\tau_b}{2}]\psi - ig^2f_a^{\;k\ell}\Lambda_k\mathscr{A}_{\ell}^{\mu}\,\frac{\tau_a}{2}\psi$$

Remarquons que si nous posons :

$$(II,19)\qquad [\frac{\tau_a}{2},\frac{\tau_b}{2}] = if_k^{ab}\,\frac{\tau_k}{2}$$

avec

$$f_k^{\;ab} = -f_k^{\;ba}$$

le terme comprenant le commutateur dans (II,18) deviendra

$$(II,20)\qquad -ig^2\mathscr{A}_a^{\mu}\Lambda_b f_k^{ab}\,\frac{\tau_k}{2}\psi = ig^2 f_a^{\;k\ell}\Lambda_k\mathscr{A}_{\ell}^{\mu}\,\frac{\tau_a}{2}\psi$$

L'expression (II,20) annulera exactement le dernier terme de $\mathscr{D}^{\mu'}\psi'(x)$ dans (II,18). Les coefficients f_k^{ab} sont les constantes de structure de l'algèbre des τ_k et dans le cas particulier de SU(2) nous avons :

$$(II,21)\qquad [\frac{\tau_a}{2},\frac{\tau_b}{2}] = i\varepsilon_{abc}\,\frac{\tau_c}{2}$$

de sorte que en identifiant (II,19) et (II,21)

$$(II,22)\qquad f_c^{\;ab} = \varepsilon_{abc}$$

Nous avons

$$(II,23)\qquad L = \bar{\psi}(i\gamma^{\alpha}\,\mathscr{D}_{\alpha} - m)\psi + L_f$$

Nous avons :

(II,28)
$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{G}_a^{\mu\nu'} &= \mathcal{G}_a^{\mu\nu} - g\varepsilon_{abc}\Lambda_b\,\mathcal{G}_c^{\mu\nu} \\ j_a^{\mu'} &= j_a^{\mu} - g\varepsilon_{abc}\left\{\Lambda_b j_c^{\mu} + \partial_\nu\Lambda_b \;\; g_c^{\mu\nu}\right\} \end{aligned}}$$

II - THEORIE D'UN CHAMP SCALAIRE ISOVECTEUR INVARIANTE DE JAUGE DE YANG-MILLS

Considérons l'isovecteur de champ scalaire $\phi(x)$ envisagé en (I,22)

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \varphi_3(x) \end{pmatrix}$$

pour lequel le lagrangien libre s'écrit

(II,29) $$L_o = \frac{1}{2}\left(\partial^\mu\vec{\phi}^+\partial_\mu\vec{\phi} - m^2\vec{\phi}^+\vec{\phi}\right)$$

ou de manière équivalente puisque ϕ est réel par construction

(II,29 bis) $$L_o = \frac{1}{2}\left(\partial^\mu\vec{\phi}.\partial_\mu\vec{\phi} - m^2\vec{\phi}.\vec{\phi}\right)$$

Au lieu de la transformation de jauge électromagnétique, infinitésimale (II,24) bis dont nous rappelons la forme

$$\phi(x) \to \left(1 - ie\,\Lambda(x)L_3\right)\phi(x)$$

considérons la suivante :

(II,30) $$\phi_a(x) \to \left(\delta_{ab} + ig(L_k)_{ab}\Lambda_k(x)\right)\phi_b(x)$$

Dans l'espace à 3 dimensions, il vient :

(II,31) $$(L_k)_{ab} = i\varepsilon_{akb} \qquad k = 1,2,3$$

et donc pour (II,30)

(II,32) $$\boxed{\vec{\phi}(x) \to \vec{\phi}'(x) = \vec{\phi}(x) - g\vec{\Lambda}(x)\wedge\vec{\phi}(x)}$$

Nous constatons que

(II,33) $$\partial^\mu\vec{\phi}(x) \to \partial^\mu\vec{\phi}(x) - g(\partial^\mu\vec{\Lambda})\wedge\vec{\phi} - g\vec{\Lambda}\wedge\partial^\mu\vec{\phi}$$

Introduisons un champ de jauge et définissons la dérivée covariante :

(II,34) $$\boxed{\mathcal{D}^\mu\phi_a = \left(\partial^\mu\delta_{ab} + ig(L_k)_{ab}\mathcal{A}_k^\mu\right)\phi_b(x)}$$

et d'après les règles de commutation on aura par conséquent dans (II,42) et grâce à (II,43) :

$$ig(L_n)_{ac}\ ig(L_m)_{kn}\Lambda_n \mathscr{A}_k^\mu \phi_c + ig(L_n)_{ab}\ ig(L_m)_{nk}\Lambda_m \mathscr{A}_k^\mu \phi_b = 0$$

(II,42) s'écrit alors

$$\mathscr{D}^{\mu\prime}\phi_a{}' = \left(\delta_{ac} + ig(L_m)_{ac}\Lambda_m\right)\partial^\mu\phi_c + ig(L_k)_{ab}\mathscr{A}_k^\mu\phi_b +$$

$$+ ig(L_m)_{ab}\Lambda_m\ ig(L_k)_{bc}\mathscr{A}_k^\mu\phi_c + \mathscr{O}\left(\Lambda^2, \Lambda\partial^\mu\Lambda\right)$$

$$= \left(\delta_{ab} + ig(L_m)_{ab}\Lambda_m\right)\left(\partial^\mu\delta_{bc} + ig(L_k)_{bc}\mathscr{A}_k^\mu\right)\phi_c$$

ce qui donne en conclusion :

(II,44) $$\mathscr{D}^{\mu\prime}\phi_a{}' = \left(\delta_{ab} + ig(L_m)_{ab}\Lambda_m\right)\mathscr{D}^\mu\phi_b$$

ce qu'on voulait en (II,38).

Avec $\mathscr{D}^\mu\vec{\phi} = \partial^\mu\vec{\phi} - g\vec{\mathscr{A}}^\mu \wedge \vec{\phi}$

on en déduit clairement le lagrangien invariant de jauge :

(II,45) $$L = -\frac{1}{4}\vec{\mathscr{G}}^{\mu\nu}\cdot\vec{\mathscr{G}}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mathscr{D}^\mu\vec{\phi}\cdot\mathscr{D}_\mu\vec{\phi} - \frac{1}{2}m^2\vec{\phi}\cdot\vec{\phi} - \frac{\lambda}{4}(\vec{\phi}^2)^2$$

avec

$$\mathscr{G}_a^{\mu\nu} = \left(\partial^\nu\delta_{ab} + \frac{i}{2}g(L_k)_{ab}\mathscr{A}_k^\nu\right)\mathscr{A}_b^\mu - \left(\partial^\mu\delta_{ab} + \frac{i}{2}g(L_k)_{ab}\mathscr{A}_k^\mu\right)\mathscr{A}_b^\nu$$

ou encore

(II,46) $$\vec{\mathscr{G}}^{\mu\nu} = \partial^\nu\vec{\phi}^\mu - \partial^\mu\vec{\phi}^\nu - g\vec{\mathscr{A}}^\nu \wedge \vec{\mathscr{A}}^\mu$$

comme vu précédemment.

Les équations du mouvement sont :

(II,47) $$\frac{\partial L}{\partial\, \partial_\nu \mathscr{A}_{a\mu}} = -\mathscr{G}_a^{\mu\nu}\ ;\ \frac{\partial L}{\partial \mathscr{A}_{a\mu}} = ig\mathscr{D}^\mu\phi_k(L_a)_{k\ell}\phi_\ell + g\mathscr{G}_k^{\mu\nu}(L_a)_{k\ell}\mathscr{A}_{\nu\ell}$$

d'où on tire

(II,48) $$\partial_\nu\mathscr{G}_a^{\mu\nu} = -ig\left\{\mathscr{D}^\mu\phi_k(L_a)_{k\ell}\phi_\ell + \mathscr{G}_k^{\mu\nu}(L_a)_{k\ell}\mathscr{A}_{\nu\ell}\right\}$$

Posons

(II,49a) $$j_a^\mu = -ig\left\{\left(\mathscr{D}^\mu\phi_k\right)(L_a)_{k\ell}\phi_\ell + \mathscr{G}_k^{\mu\nu}(L_a)_{k\ell}\mathscr{A}_{\nu\ell}\right\}$$

ou de manière équivalente

(II,49b) $$\vec{j}^\mu(x) = -g\left\{\left(\mathscr{D}^\mu\vec{\phi}\right)\wedge\vec{\phi} + \vec{\mathscr{G}}^{\mu\nu}\wedge\vec{\mathscr{A}}_\nu\right\}$$

$$D^\mu D_\mu\phi_a + m^2\phi_a + \lambda(\vec{\phi}^2)\phi_a = 0$$

(III,8) $L = \sum_a G_a(\overline{\psi}_p(x)\ \Gamma^a \psi_n(x)\ \ (\overline{\psi}_e \Gamma_a \psi_\nu(x))$

où

$\Gamma^a = I\ ;\quad ;\ \frac{i}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\ ;\ \gamma^\mu\gamma^5\ ;\ i\gamma^5\ ;\ \ \mu,\nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

La découverte d'autres particules et d'autres réactions faibles a conduit vers 1949 à la conclusion que ces réactions pouvaient être décrites par un lagrangien similaire au lagrangien (III,8) et que les constantes de couplage G_β pour la désintégration β du neutron

(III,9) $n \to p + e + \overline{\nu}_e$

G_μ, pour la désintégration du muon :

(III,10) $\overline{\mu} \to \nu_\mu + \overline{e} + \overline{\nu}_e$

e $G_{\mu n}$ pour la capture du muon par les noyaux :

(III,11) $\overline{\mu} + p \to n + \nu_\mu$

étaient toutes, en première approximation, égales

(III,12) $G_\beta \cong G_\mu \cong G_{\mu n}$

La table annexe, due à Lee et Wu, donne une liste des réactions faibles. En 1956 on a découvert que les réactions faibles violaient la parité et la conjugaison de charge.

De nos jours toutes ces réactions sont décrites par un lagrangien effectif de la forme suivante(pour des transferts d'impulsion ≲ 1 à 2 GeV) :

(III,13) $L = \frac{G}{\sqrt{2}}\ \{J^{\mu^+}(x) J_\mu(x)\}$

où $J^\mu(x)$ est un courant qui change la charge, donnée par :

(III,14) $J^\mu(x) = \ell^\mu(x) + h^\mu(x)$

Le courant $\ell^\mu(x)$ est le courant leptonique :

(III,15) $\ell^\mu(x) = \overline{\psi}_{\nu_e}(x)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi_e(x) + \overline{\psi}_{\nu_\mu}(x)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi_\mu(x)$

T A B L E   III

SEMILEPTONIQUES AVEC CHANGEMENT D'ETRANGETE $\Delta S = 1$

	τ	
$\Lambda \to p + e^- + \bar{\nu}_e$		$\frac{\Lambda \to p+e^-+\bar{\nu}_e}{(\Lambda\to p+\pi^-)+(\Lambda\to n+\pi^0)} = (0.83\pm0.05).10^{-3}$
$\to p + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$		$\frac{\Lambda\to p+\mu^-+\bar{\nu}_\mu}{(\Lambda\to p+\pi^-)+(\Lambda\to n+\pi^0)} = (0.14\pm0.06).10^{-3}$
$\Sigma^- \to n + e^- + \bar{\nu}_e$		$\frac{(\Sigma^-\to n+e^-+\bar{\nu}_e)}{(\Sigma^-\to n+\pi^-)} = (1.3\pm0.2).10^{-3}$
$\to n + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$		$\frac{(\Sigma^-\to n+\mu^-+\bar{\nu}_\mu)}{(\Sigma^-\to n+\pi^-)} = (0.66\pm0.15).10^{-3}$
$\Sigma^+ \to n + e^+ + \nu_e$ (interdites par la		$\frac{(\Sigma^+\to n+e^++\nu_e)}{(\Sigma^+\to n+\pi^+)+(\Sigma^+\to p+\pi^0)} < 10^{-4}$
$\to n + \mu^+ + \nu_\mu$ règle $\Delta Q = \Delta S$)		$\frac{(\Sigma\to n+\mu^++\nu_\mu)}{(\Sigma^+\to n+\pi^+)+(\Sigma^+\to p+\pi^0)} < 10^{-4}$
$\Xi^- \to \Lambda + e^- + \bar{\nu}_e$		
$\to \Sigma^0 + e^- + \bar{\nu}_e$		
$K^+ \to \mu^+ + \nu$	1.224×10^{-8}	
$K^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu_e$		
$\to \pi^0 + \mu^+ + \nu_\mu$		
$\to \pi^+ + \pi^- + e^+ + \nu_e$		
$\to \pi^+ + \pi^- + \mu^+ + \nu_\mu$		
$K_{20} \to \pi^- + e^+ + \nu_e$		
$K_{20} \to \pi^- + \mu^+ + \nu_\mu$		
$K_{SO} \to \mu^+ + \mu^-$	$< 0.3 \times 10^{-6}$	
$e^+ + e^-$	$< 35 \times 10^{-5}$	
$\gamma + \gamma$	$< 0.4 \times 10^{-3}$	

(III,17) $h_o^{\mu}(x) = V_o^{\mu}(x) - A_o^{\mu}(x)$,

(III,18) $h_I^{\mu}(x) = V_I^{\mu}(x) - A_I^{\mu}(x)$,

$h_o^{\mu}(x)$ est associé aux réactions dans lesquelles les hadrons ne changent pas d'étrangeté tandis que $h_I^{\mu}(x)$ est associé à celles où les hadrons changent d'étrangeté

θ_c est l'angle de Cabibbo. $\theta_c \sim 0,22$.

II - PROPRIETES DU LAGRANGIEN FAIBLE POUR QUATRE SPINEURS

Considérons les cinq covariants de Dirac, hermitiques quand les deux champs ψ_1 et ψ_2 coïncident :

(III,19)
$$
\begin{array}{llll}
a) & S = \bar{\psi}_1(x)\psi_2(x) & S^+ = \bar{\psi}_2(x)\psi_1(x) & \\
b) & V^{\mu} = \bar{\psi}_1\gamma^{\mu}\psi_2 & V^{\mu +} = \bar{\psi}_2(x)\gamma^{\mu}\psi_1(x) & \\
c) & T^{\mu\nu} = \bar{\psi}_1(x)\sigma^{\mu\nu}\psi_2(x) & T^{\mu\nu +} = \bar{\psi}_2(x)\sigma^{\mu\nu}\psi_1(x) \; ; & \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}] \\
d) & A^{\mu} = \bar{\psi}_1(x)\gamma^{\mu}\gamma^5\psi_2(x) & A^{\mu +} = \bar{\psi}_2(x)\gamma^{\mu}\gamma^5\psi_1(x) & \\
e) & P = i\bar{\psi}_1(x)\gamma^5\psi_2(x) & P^+ = i\bar{\psi}_2(x)\gamma^5\psi_1(x) &
\end{array}
$$

et prenons le lagrangien suivant pour l'interaction entre quatre leptons $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$, $\psi_4(x)$:

(III,20)
$$
\begin{aligned}
L = & :\sum_a [\bar{\psi}_1(x)\Omega_a\psi_2(x)]\,[\bar{\psi}_3(x)\Omega_a(C_a + C'_a\gamma^5)\psi_4(x)] : + \text{h.c.} \\
= & :[\bar{\psi}_1(x)\psi_2(x)]\,[\bar{\psi}_3(x)\,(C_S + C'_S\gamma^5)\psi_4(x)] + \\
& + [\bar{\psi}_1(x)\gamma^{\mu}\psi_2(x)]\,[\bar{\psi}_3(x)\gamma_{\mu}(C_V + C'_V\gamma^5)\psi_4(x)] + \\
& + \frac{1}{2}[\bar{\psi}_1(x)\sigma^{\mu\nu}\psi_2(x)]\,[\bar{\psi}_3(x)\sigma_{\mu\nu}(C_T + C'_T\gamma^5)\psi_4(x)] + \\
& + [\bar{\psi}_1(x)\gamma^{\mu}\gamma^5\psi_2(x)]\,[\bar{\psi}_3(x)\gamma_{\mu}\gamma^5(C_A + C'_A\gamma^5)\psi_4(x)] + \\
& + [\bar{\psi}_1(x)i\gamma^5\psi_2(x)]\,[\bar{\psi}_3(x)i\gamma^5(C_P + C'_P\gamma^5)\psi_4(x)] : + \text{h.c.}
\end{aligned}
$$

REFLEXION SPATIALE

A) L'opérateur de réflexion spatiale donne lieu à :

(III,21)
$$
\begin{aligned}
PLP^{-1} = \eta : \{ & [\bar{\psi}_1(x')\psi_2(x')]\,[\bar{\psi}_3(x')\,(C_S - C'_S\gamma^5)\psi_4(x')] + \\
& + [\bar{\psi}_1(x')\gamma^{\mu}\psi_2(x')]\,[\bar{\psi}_3(x')\gamma_{\mu}(C_V - C'_V\gamma^5)\psi_4(x')] + \\
& + \frac{1}{2}[\bar{\psi}_1(x')\sigma^{\mu\nu}\psi_2(x')]\,[\bar{\psi}_3\sigma_{\mu\nu}(C_T - C'_T\gamma^5)\psi_4(x')] + \\
& + [\bar{\psi}_1(x')\gamma^{\mu}\gamma^5\psi_2(x')]\,[\bar{\psi}_3(x)\gamma_{\mu}\gamma^5(C_A - C'_A\gamma^5)\psi_4(x')] +
\end{aligned}
$$

$$+ [\overline{\psi}_2\gamma^\mu\psi_1]\,[\overline{\psi}_4\gamma_\mu(C_V - C'_V\gamma^5)\psi_3] +$$

$$+ \frac{1}{2}\,[\overline{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1]\,[\overline{\psi}_4\sigma_{\mu\nu}(C_T + C'_T\gamma^5)\psi_3] +$$

$$+ [\overline{\psi}_2\gamma^\mu\gamma^5\psi_1]\,[\overline{\psi}_4\gamma_\mu\gamma^5(C_A - C'_A\gamma^5)\psi_3] +$$

$$+ [\overline{\psi}_2\gamma^\mu\gamma^5\psi_1]\,[\overline{\psi}_4\gamma_\mu\gamma 5(C_A - C'_A\gamma^5)\psi_3] +$$

$$+ [\overline{\psi}_2 i\gamma^5\psi_1]\,[\overline{\psi}_4 i\gamma^\nu(C_P + C'_P\gamma^5)]\}: + \text{h.C.}$$

Mais l'hermitique conjugué de la première partie du lagrangien L es donnée par :

$$:[\overline{\psi}_2\psi_1]\,[\overline{\psi}_4(C_S^* - C'^*_S\gamma^5)\psi_3] +$$

$$+ [\overline{\psi}_2\gamma^\mu\psi_1]\,[\overline{\psi}_4\gamma_\mu(C_V^* + C'^*_V\gamma^5)\psi_3] +$$

$$+ \frac{1}{2}\,[\overline{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1]\,[\overline{\psi}_4\sigma_{\mu\nu}(C^*_T - C'^*_T\gamma^5)\psi_3] +$$

$$+ [\overline{\psi}_2\gamma^\mu\gamma^5\psi_1]\,[\overline{\psi}_4\gamma_\mu\gamma_5(C_A^* + C'^*_A\gamma^5)\psi_3] +$$

$$+ [\overline{\psi}_2 i\gamma^5\psi_1]\,[\overline{\psi}_4 i\gamma^5(C_P^* - C'^*_P\gamma^5)\psi_3]:$$

C'est à dire que

(III,27) $CL\,(x, C_a; C_a')\,C^{-1} = L\,(x; \epsilon\, C_a^*; -\epsilon^* C'^*_a)$

où $\epsilon = \epsilon_1^*\epsilon_2\epsilon_3^*\epsilon_4$

Pour avoir invariance de L sous C on devrait avoir si on pose $\epsilon = 1$

(III,28) $C_a = C^*_a\,,\quad C'_a = -\,C'^*_a$

C- Renversement du temps

Quant à l'opération de renversement du temps on sait que si le transformé de l'élement de matrice

(III,29a) $\langle\Psi|F(\Gamma)|\phi\rangle$

est :

(III,29b) $\langle\phi^*|F'(\Gamma)|\Psi^*\rangle$

et si :

(III,30a) $F(\Gamma) = \overline{\psi}_2(x_2)\Gamma\psi_1(x_1)$

alors

(III,30b) $F'(\Gamma) = \overline{\psi}_1(x'_1)\ {}^t(B^{-1}\Gamma B)\psi_2(x'_2)$

où $B^{-1}\gamma^\mu B = {}^t(\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0)$

$B^{-1}\gamma^5 B = -{}^t\gamma^5$

Or on a :

(III,32) $M'_o = \langle Tb|T\bar{\psi}_1(o)\psi_2(o)T^{-1}|Ta\rangle\langle Td|T\bar{\psi}_3(o)(C_S+C'_S\gamma^5)\psi_4(o)T^{-1}|Tc\rangle$

Comme il résulte de la définition de l'opération T :

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle^* = \langle T\psi_1|T\psi_2\rangle$$

Par conséquent, si le lagrangien est invariant sous l'action de P :

$$T\bar{\psi}_1(o)\psi_2(o)P^{-1} = \bar{\psi}_1(o)\psi_2(o) \quad \text{etc}$$

alors

$$M'_o = \langle Tb|\bar{\psi}_1(o)\psi_2(o)|Ta\rangle\langle Td|\bar{\psi}_3(o)(C_S+C'_S\gamma^5)\psi_4(o)|Tc\rangle =$$

(III,33)
$$= \varepsilon\{\bar{u}(p_a)u(p_b)\}\{C_S\,\bar{u}(p_c)u(p_d)+C'^*_S\,\bar{u}(p_c)\gamma^5u(p_d)\}$$

et on conclut de (III,32) que :

$$C_S = C_S^* \quad C'_a = C'^*_a \qquad \text{si } \varepsilon = 1$$

Ainsi l'invariance par rapport à l'inversion du temps implique :

(III,34)
$$\begin{cases} \varepsilon = 1 \\ C_a = C_a^* \ , \ C'_a = C'^*_a \end{cases}$$

D) Invariance CP

Le théorème CPT établit que si une théorie locale de champs est invariante par rapport au groupe propre et orthochrone de Poincaré alors elle sera automatiquement invariante par rapport au produit d'opérations CPT, même si la théorie n'est pas invariante par rapport à C, à P ou à T, ou à CP etc.

On admet que la théorie phénoménologique des interactions faibles obéit à ce théorème.

Rappelons les définitons des transformés d'opérateurs et de vecteurs d'état dans un espace de Hilbert.

Soit $|a\rangle$ un vecteur d'état associé à un système physique dans un certain référentiel S et soit $\Omega(x)$ un opérateur dans ce même référentiel, le physicien qui prend un autre référentiel S' attribuera au système physique en question : soit le même vecteur d'état $|a\rangle$ et des opérateurs transformés $\Omega'(x)$; soit un nouveau vecteur d'état $|a'\rangle$ et des opérateurs inchangés $\Omega(x)$. Les deux alternatives - la transformation de Heisenberg et la transformation de Schrödinger - doivent être équivalentes, c'est-à-dire, les probabilités de transition entre deux états provoqués par un opérateur doivent être les mêmes dans les deux cas :

(III,35) $\quad |\langle b|\Omega'|a\rangle|^2 = |\langle b'|\Omega|a'\rangle|^2$

chargée p dans un champ électromagnétique la valeur absolue de sa charge, de son moment magnétique et en général de ses facteurs de forme électromagnétiques est égale à celle des grandeurs correspondantes de son antiparticule dans le même champ.

Posons :

$$\mathcal{S} = CPT$$

Comme CP est un opérateur unitaire et $T = \mathcal{U}K$, où $\mathcal{U}$ est unitaire on peut écrire :

$$\mathcal{S} = WK$$

Par conséquent :

$$\Omega' = \mathcal{S}^{-1}\Omega\,\mathcal{S} = KW^{-1}\Omega WK = (W^{-1}\Omega W)^* \tag{III,46}$$

$$\text{puisque} \quad \langle b|\Omega'|a\rangle = \langle b'|\Omega|a'\rangle^* = \langle Kb|W^+\,\Omega W|Ka\rangle^* = \langle b^*|W^{-1}\Omega W|a^*\rangle^*$$

Le transformé de $\langle b|\Omega|a\rangle$ est donc

$$\langle b|\Omega|a\rangle \rightarrow \langle b|\Omega'|a\rangle = \langle b|(W^{-1}\Omega W)^*|a\rangle \tag{III,47}$$

Mais l'opération C, et donc CP, transforme un opérateur en son conjugué hermitique dans l'espace de Hilbert (exemples : scalaire $\varphi(x) \rightarrow \varphi^+(x)$, spineur $\psi(x) \rightarrow C^t\bar{\psi}(x)$ où le transposé se réfère à l'espace spinoriel).

On peut ainsi écrire :

$$W^{-1}\Omega W = \mathcal{U}^{-1}\Omega^+\mathcal{U} \tag{III.48}$$

ou :

$$\Omega' = (W^{-1}\Omega W)^* = (\mathcal{U}^{-1}\Omega^+\mathcal{U})^* = M^{-1}\Omega^H M$$

où M est un opérateur unitaire et Ω^H est l'opérateur transposé de Ω dans l'espace de Hilbert.

Ainsi

$$\begin{aligned}\langle b|\Omega'|a\rangle \rightarrow \langle b|M^{-1}\Omega^H M|a\rangle &= \langle b|(M^H\Omega(M^{-1})^H)^H|a\rangle \\ &= \langle b|(M^H\Omega(M^{-1})^H)^{+*}|a\rangle = \langle b^*|(M^H\Omega(M^{-1})^H)^+|a^*\rangle^* \\ &= \langle a^*|M^H\Omega(M^{-1})^H|b^*\rangle = \langle a^*|(M^{-1})^*\Omega M^*|b^*\rangle\end{aligned} \tag{III,49}$$

Quand l'opérateur Ω est composé du produit d'autres opérateurs la règle est

$$\langle b|\Omega_1\Omega_2|a\rangle \rightarrow \langle a^*|(M^{-1})^*\Omega_2\Omega_1 M^*|b^*\rangle \tag{III.56}$$

Faisons $|b\rangle \equiv |a\rangle$ et appelons $M^*|a^*\rangle = |\bar{a}\rangle$

Alors :

$$\langle a|\Omega_1\Omega_2|a\rangle \rightarrow \langle\bar{a}|\Omega_2\Omega_1|\bar{a}\rangle \tag{III,50}$$

Comment distinguer K^o de $\overline{K}^o$? Si $K^o \to \pi^+ + \pi^-$ alors $\overline{K}^o \to \pi^- + \pi^+$

$\to \pi^o + \pi^o$ $\qquad\qquad \to \pi^o + \pi^o$

Admettons l'invariance CP. Définissons

$$\text{(III,58)} \quad \begin{aligned} &a) \quad |K_1^o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^o\rangle + CP|K^o\rangle\right) \\ &b) \quad |K_2^o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^o\rangle - CP|K^o\rangle\right) \end{aligned}$$

Comme

$$\text{(III,59)} \quad CP|K^o\rangle = \eta|\overline{K}^o\rangle \quad \text{où} \quad \eta^*\eta = 1$$

Si l'on choisit $\eta = 1$ on a donc :

$$\text{(III,60)} \quad \begin{aligned} &a) \quad |K_1^o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^o\rangle + |\overline{K}^o\rangle\right) \\ &b) \quad |K_2^o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^o\rangle - |\overline{K}^o\rangle\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\text{(III,61)} \quad \begin{aligned} &a) \quad |K^o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K_1^o\rangle + |K_2^o\rangle\right) \\ &b) \quad |\overline{K}^o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K_1^o\rangle - |K_2^o\rangle\right) \end{aligned}$$

Nous voyons que si S est l'opérateur d'étrangeté :

$$\text{(III,62)} \quad S|K^o\rangle = |K^o\rangle \ , \ S|\overline{K}^o\rangle = -|\overline{K}^o\rangle$$

tandis que $|K_1^o\rangle$ et $|K_2^o\rangle$ ne sont pas des vecteurs propres de S. Par contre

$$\text{(III,63)} \quad CP|K_1^o\rangle = |K_1^o\rangle \quad , \quad CP|K_2^o\rangle = -|K_2^o\rangle$$

mais $|K^o\rangle$ et $|\overline{K}^o\rangle$ ne sont pas des vecteurs propres de CP.

Comme les kaons sont produits en vertu de réactions à interaction forte, qui conserve S, un kaon neutre produit est soit un K^o soit un $\overline{K}^o$. Ainsi quand un K^o est créé il y a création d'un mélange de K_1^o et K_2^o, dans la proportion de cinquante pour cent de chacun d'entre eux avec une certaine relation de phase.

Ce K^o va se désintégrer.

Si CP se conserve, un état $\pi^+ + \pi^-$ est pair par rapport à CP ; en effet la fonction d'onde doit être paire par rapport à un échange des deux particules (statistique de Bose) ce qui se réalise par échange des coordonnées et ensuite des charges. Mais cette opération est exactement CP. Par conséquent :

$$\text{(III,64)} \quad CP|\pi^+\pi^-\rangle = |\pi^+\pi^-\rangle$$

Ainsi on a trouvé :

$$(III,70)\quad K_1^{o} \to \pi^+ + \pi^- \qquad \tau = (0.87\pm0.02).10^{-10}\text{sec}$$
$$\qquad\qquad \pi^o + \pi^o$$

et

$$(III,71)\quad K_2^{o} \to \pi^+ + \pi^- + \pi^o \qquad \tau = (0.54\pm0.05).10^{-7}\text{sec}$$
$$\to \pi^o + \pi^o + \pi^o$$
$$\to e^+ + \nu_e + \pi^-$$
$$\to \mu^+ + \nu_\mu + \pi^-$$

On peut aussi voir un effet de production d'un K^o qui est associé à un hypéron :

$$(III,72)\quad \pi^- + p \to \Lambda^o + K^o$$

et qui par conséquent ne peut, par interaction forte, donner lieu qu'à des antihypérons :

$$(III,73)\quad K^o + \bar{p} \to \bar{\Lambda}_o + \pi^-$$

Néanmoins si l'on produit des K_o, cela veut dire qu'il y aura production d'un mélange 50 % - 50 % de K_1^o et K_2^o. Or le K_1^o se désintègre vite ($\tau \sim 10^{-10}$sec), le K_2^o vit plus longtemps.
Donc à une distance grande on ne verra que des K_2^o. Mais les K_2^o sont un mélange de K_o et $\bar{K}_o$. Si on lui impose une interaction forte le $\bar{K}_o$ pourra bien sûr créer des hypérons :

$$(III,74)\quad \bar{K}^o + p \to \Lambda^o + \pi^+$$

Donc le faisceau initial K^o ne peut pas produire des Λ_o, le faisceau final (en attendant longtemps) pourra créer des Λ_o, puisqu'il contiendra des K^o et des $\bar{K}_o$.

Comment change avec le temps un faisceau de kaons produit initialement avec des K^o uniquement ?

Soit :

$$(III,75)\quad |\psi(o)\rangle = |K^o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |K_1^o\rangle + |K_2^o\rangle \right\}$$

Au temps t nous avons :

$$(III,76)\quad |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |K_1^o\rangle\, e^{-iE_1 t} + |K_2^o\rangle\, e^{-iE_2 t} \right\}$$

Maintenant pour des particules avec probabilités de désintégration par seconde λ_1, λ_2 et masses m_1, m_2 a

$$\text{(III,77)}\quad \begin{array}{ll} a) & E_1 = m_1 - i\lambda_1/2 \\ b) & E_2 = m_2 - i\lambda_2/2 \end{array}$$

donc :

$$\text{(III,78)}\quad |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{ |K_1^o\rangle e^{-im_1t} e^{-\lambda_1 t/2} + |K_2^o\rangle e^{-im_2t} e^{-\lambda_2 t/2} \right\}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ nous l'avons vu ; $m_1 \neq m_2$, provient de ce que les interactions faibles soient distinctes pour K_1^o et K_2^o et donc les énergies propres sont différentes.

La probabilité pour qu'on trouve un K^o en observant ce faisceau à l'instant t est donc :

$$\text{(III,79)}\quad |\langle K^o|\psi(t)\rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} e^{-im_1t} e^{-\lambda_1 t/2} + \frac{1}{2} e^{-im_2t} e^{-\lambda_2 t/2} \right|^2 =$$
$$= \frac{1}{4}\left\{ e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} + 2 \exp\left(\frac{-\lambda_1 t - \lambda_2 t}{2}\right) \cos(m_1 - m_2)t \right\}$$

La probabilité pour trouver $\overline{K^o}$ sera :

$$|\langle \overline{K^o}|\psi(t)\rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} e^{-im_1t} e^{-\lambda_1 t/2} - \frac{1}{2} e^{-im_2t} e^{-\lambda_2 t/2} \right|^2 =$$
$$\text{(III,}\quad = \frac{1}{4}\left\{ e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - 2 \exp\left(\frac{-\lambda_1 t - \lambda_2 t}{2}\right) \cos(m_1 - m_2)t \right\}$$

Si $|m_1 - m_2|$ est grand par rapport à λ_1 et il y aura une oscillation rapide entre K^o et $\overline{K^o}$.

Pour $t = 0$ il est clair que $|\langle K^o|\psi(o)\rangle|^2 = 1$

$$|\langle \overline{K^o}|\psi(o)\rangle|^2 = 0$$

Pour $m_1 - m_2 = 0$

on aurait :

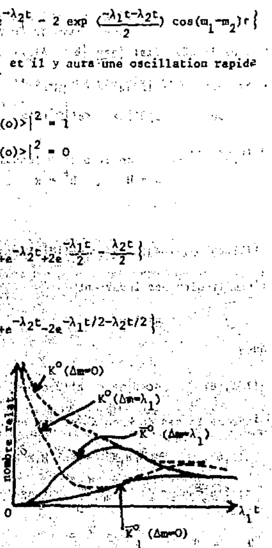
$$|\langle K^o|\psi(t)\rangle|^2_{\Delta m=0} = \frac{1}{4}\left\{ e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} + 2e^{-\frac{\lambda_1 t}{2} - \frac{\lambda_2 t}{2}} \right\}$$

$$|\langle \overline{K^o}|\psi(t)\rangle|^2_{\Delta m=0} = \frac{1}{4}\left\{ e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - 2e^{-\lambda_1 t/2 - \lambda_2 t/2} \right\}$$

Pour $m_1 - m_2 = \lambda_1$

$|\langle K^o|\psi(t)\rangle|^2$ (voir fig.)

$|\langle \overline{K^o}|\psi(t)\rangle|^2$ (voir fig.)



Mais pour une différence m_1-m_2 grande par rapport à λ_1, $\cos(m_1-m_2)t$ aurait des oscillations pour t petit, le terme en cos serait petit par rapport aux autres et on trouverait $\overline{K}^o$ et K^o près de $t = 0$.
Le fait qu'on ne voit pas des $\overline{K}^o$ près du point de production des K^o indique que m_1-m_2 ne peut pas être très grand. Expérimentalement on a trouvé que

$$(III,81) \qquad |m_1-m_2| = \Delta m = \lambda_1 = \frac{1}{\tau}$$

avec

$$\frac{\Delta mc^2}{\hbar} = \frac{1}{\tau_1}$$

$$\Delta mc^2 = \frac{\hbar}{\tau_1} = \frac{6.582}{0.87} \times 10^{-22} \text{MeV sec. } 10^{10} \text{sec}^{-1} =$$

$$\cong 7 \times 10^{-12} \text{ MeV}$$

Donc :

$$(III,82) \qquad \boxed{m_1-m_2 \cong 7 \times 10^{-12} \text{ MeV}}$$

Considérons l'équation :

$$(III,83) \qquad \langle b|\Omega'|a\rangle = \langle b'|\Omega|a'\rangle^*$$

admettons le même état $|a\rangle = |b\rangle$. Alors

$$(III,84) \qquad \langle a|\Omega'|a\rangle = \langle a'|\Omega|a'\rangle^*$$

$$\text{ou :} \qquad \langle a|\Omega'|a\rangle = \langle a'|\Omega^+|a'\rangle$$

Dans le cas où

$$\Omega = H \quad , \quad H^+ = H$$

on a :

$$(III,85) \qquad \langle a|H'|a\rangle = \langle a'|H|a'\rangle$$

Si l'hamiltonien est invariant

$$H' = H$$

on aura

$$(III,86) \qquad \langle a|H|a\rangle = \langle a'|H|a'\rangle$$

Considérons le cas du kaon K^o et son antiparticule $\overline{K}^o$. On aura

$$(III,87) \qquad \langle K^o|H|K^o\rangle = \langle \overline{K}^o|H|\overline{K}^o\rangle$$

et donc les masses de K^o et $\overline{K}^o$ sont égales.

Avec cette découverte, nous pouvons maintenant lui dire de prendre du Co^{60} et de définir la direction du champ magnétique de telle façon que les électrons sortiront préférablement en sens opposé (cela ne vaut plus si notre correspondant prend de l'anti-cobalt).

La violation de la parité montre que le lagrangien n'est plus invariant par rapport à la réflexion spatiale. Les physiciens ont donc pris comme lagrangien pour la désintégration du neutron une expression de la forme :

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{a=1}^{5} (\bar{\psi}_p(x)\Omega_a\psi_n(x))\ (\bar{\psi}_e(x)\Omega_a(C_a+C'_a\gamma^5)\psi_\nu(x)) + \tag{III,92}$$

$$+ \text{ hermitique conjugué}$$

la partie hermitique conjuguée décrivant la réaction

$$p \to n + e^+ + \nu_e$$

Ici

$$\Omega_1 = I \ ; \ \Omega_2 = \gamma^\lambda \ ; \ \Omega_3 = \gamma^\lambda\gamma^5 \ ;$$

$$\Omega_4 = \frac{\sigma^{\mu\nu}}{\sqrt{2}} = \frac{i}{2\sqrt{2}}[\gamma^\mu,\gamma^\nu],\ \Omega_5 = i\gamma^5 \tag{III.93}$$

Les transferts d'impulsion sont de l'ordre de quelques MeV.

Par conséquent :

(IV,6) $\quad |\vec{p}_e+\vec{p}_{\bar\nu}|\cdot R \ll 1$ c'est-à-dire $\dfrac{R}{\frac{\hbar}{mc}} \sim 10^{-2}$

et l'approximation

(IV,7) $\quad e^{-i(\vec{p}_e+\vec{p}_{\bar\nu})\cdot\vec{x}} \simeq 1$

est en général bonne.

En plus, les nucléons ont un mouvement non relativiste dans les noyaux. On peut donc prendre la limite non-relativiste pour les amplitudes $<N_f|\bar{p}(x)\Omega_a n(x)|N_i>$. On aura ainsi :

a) $S \equiv \int d^3x <N_f|\bar{p}(x)\Omega_1 n(x)|N_i> \rightarrow \int d^3x <N_f|p^+(\vec{x})n(\vec{x})|N_i> \equiv <I>$

b) $V \equiv \int d^3x <N_f|\bar{p}(\vec{x})\Omega_2 n(\vec{x})|N_i> \rightarrow \begin{cases} \int d^3x <N_f|p^+(\vec{x})n(\vec{x})|N_i> \equiv <I> \\ \int d^3x <N_f|\bar{p}(x)\gamma^k n(\vec{x})|N_i> \simeq 0 \end{cases}$ (IV,8)

c) $A \equiv \int d^3x <N_f|\bar{p}(\vec{x})\Omega_3 n(\vec{x})|N_i> \rightarrow \begin{cases} \int d^3x <N_f|p^+(x)\vec{\sigma} n(\vec{x})|N_i> \equiv <\vec{\sigma}> \\ \int d^3x <N_f|\bar{p}(x)\gamma^o\gamma^5 n(\vec{x})|N_i> \cong 0 \end{cases}$

$\boxed{\text{puisque } \gamma^1\gamma^5 = i\gamma^1\gamma^o\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^o\sigma^1}$

d) $T \equiv \int d^3x <N_f|\bar{p}(\vec{x})\Omega_4 n(\vec{x})|N_i> \rightarrow \begin{cases} \int d^3x <N_f|\bar{p}(x)\dfrac{\sigma^{ij}}{\sqrt{2}} n(x)|N_i> \equiv \dfrac{<\vec{\sigma}>}{\sqrt{2}} \\ \int d^3x\ N_f\ \bar{p}(x)\dfrac{\sigma^{oi}}{\sqrt{2}} n(\vec{x})|N_i> \cong 0 \end{cases}$

puisque $\dfrac{\sigma^{ij}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^{ijk}\sigma^k \quad ; \quad \dfrac{\sigma^{oi}}{\sqrt{2}} \sim 0$

e) $P \equiv \int d^3x <N_f|\bar{p}(\vec{x})\Omega_5 n(\vec{x})|N_i> \rightarrow 0$

D'après le théorème de Wigner-Eckart, étant donné un opérateur tensoriel irréductible $T^{(\lambda)}_\mu$ d'ordre λ, μ étant une de ses composantes, l'élément de matrice $<\tau JM|T^{(\lambda)}_\mu|\tau' J'M'>$ dans une représentation J^2, J_z est égale au produit du coefficient de Clebsch-Gordan $<J'\lambda M'\mu|JM>$ par une amplitude indépendante de M, M' et μ.

(IV,9) $\quad <\tau JM|T^{(\lambda)}_\mu|\tau' J'M'> \dfrac{1}{\sqrt{2J+1}} <\tau J|T^{(\lambda)}|\tau' J'> <J'\lambda M'\mu|JM>$

Par conséquent, comme pour ces coefficients de Clebsch-Gordan on doit avoir $M'+\mu = M$, $|J'-J|\leq\lambda\leq J'+J$, l'élément de matrice considérée est nul sauf si

Amplitude de Fermi : $\Delta J=0$, pas de changement de parité

Amplitude de Gamow-Teller : $\Delta J = 0,\pm 1$, $(0 \not\to 0)$ pas de changement de parité

La transition $J_i=0 \to J=0$ est interdite puisque si $\vec{\sigma}$ est un opérateur vectoriel on a :

(IV,15) $\qquad |J_f-J_i| \leq 1 \leq J_f+J_i$

Pour isoler une transition de Fermi pure il faut regarder une transition $J_i=0 \to J_f=0$ (pas de changement de parité), par exemple :

(IV.16) $\qquad O^{14} \to N^{14} + e^{+} + \nu_e \qquad\qquad (0 \to 0)$

(seulement interaction S et V) (Fermi pure)

Pour étudier une amplitude de Gamow-Teller il faut regarder une transition $\Delta J = 1$ (pas de changement de parité) telle que :

(IV,17) $\qquad He^{6} \to Li^{6} + \bar{e} + \bar{\nu}_e \qquad\qquad (J_i = 0 \to J_f = 1)$

(seulement T et A interaction) (Gamow-Teller pure)

Il y a naturellement des transitions qui sont un mélange Fermi-Gamow-Teller, par exemple :

(IV,18)

a) $n \to p + \bar{e} + \bar{\nu}_e$

b) $H_1^{3} \to He_2^{3} + \bar{e} + \bar{\nu}_e$

Dans l'approximation permise on a posé :

$$e^{-(\vec{p}_e+\vec{p}_\nu).\vec{X}} \sim 1$$

Or

(IV,19) $$e^{ik.X} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} P_\ell(\cos\theta) j_\ell(kv)$$

par conséquent dans cette approximation les leptons sont émis avec moment angulaire orbital zéro.

Donc dans une transition Fermi (pour les interactions S et V)

$$J_i=0 \to J_f=0$$

les deux leptons seront émis dans un état singulet tandis que dans une transition Gamow-Teller (interaction A et T)

$$\Delta J = 0,\pm 1$$

les deux leptons seront émis dans un état triplet.

$$\frac{dn}{dE} = \frac{p^2(E_{max}-E_e)^2 dp}{(2\pi)^6 \hbar^6 c} V^2 d\Omega_e d\Omega_\nu$$

Quand on considère que $S = -2\pi i\,\delta(E_f-E_i-E_e-E_{\bar{\nu}})M$ $|S|^2$ donnera un facteur $(2\pi)^2$ ce qui explique le facteur $\frac{1}{(2\pi)^4}$ dans $d\Lambda(p,\theta)$. Le facteur V^2 s'élimine avec le facteur de normalisation des fonctions d'onde de l'électron et du neutrino : $\psi_e = \frac{1}{\sqrt{V}} u(p_e)e^{-ip_e x}$

(IV,20) $$d\Lambda(p,\theta) = \frac{p^2(E_{max}-E_e)^2}{(2\pi)^4} dp d\Omega\left(A+B\ \frac{2m}{E_e} + C\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{p}_{\bar{\nu}}}{E_e E_{\bar{\nu}}}\right)$$

où $\vec{p}$ est l'impulsion de l'électron, $\vec{p}_{\bar{\nu}}$ celle de l'antineutrino, θ l'angle entre $\vec{p}$ et $\vec{p}_\nu$, E est l'énergie de l'électron, $E_e = (\vec{p}^2+m^2)^{1/2}$, de masse m E_{max} est l'énergie maximale de l'électron qui est égale à $E(N_f)-E(N_i)$, la différence entre les énergies des noyaux final et initial.

Les quantités A, B, C dépendent des constantes d'interaction et des amplitudes de Fermi et de Gamow-Teller :

a) $A = (|C_S|^2+|C'_S|^2+|C_V|^2+|C'_V|^2)\ |\langle I\rangle|^2\ +$

$+ (|C_T|^2+|C'_T|^2+|C_A|^2+|C'_A|^2)\ |\langle\vec{\sigma}\rangle|^2$

b) $B = \mathrm{Re}\ (C_S C_V^* + C'_S C'^*_V)\ |\langle I\rangle|^2 +$

(IV,21) $\mathrm{Re}\ (C_T C_A^* + C'_T C'^*_A)\ |\langle\vec{\sigma}\rangle|^2$

c) $C = (|C_V|^2+|C'_V|^2 - |C_S|^2 - |C'_S|^2)\ |\langle I\rangle|^2 +$

$+ \frac{1}{3}\ (|C_T|^2 + |C'_T|^2 - |C_A|^2 - |C'_A|^2)\ |\langle\vec{\sigma}\rangle|^2$

Si l'on intègre sur toutes les directions d'émission de l'antineutrino le terme en C disparaît et on obtient

(IV,22) $$d\Lambda(p) = \frac{4\pi p^2(E_{max}-E_e)^2}{(2\pi)^4} dp(A+B\ \frac{2m}{E_e})$$

Remarquons que

$$P(p) \equiv \frac{d\Lambda(p)}{dp} = p^2(E_{max}-E_e)^2\ \text{const.}$$

et que donc $P(p)$ tend vers $p = 0$ paraboliquement puisque

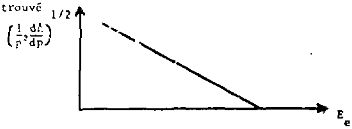
$$p^2(E_{max}-E_e)^2 = p^2\ (\sqrt{m^2+\vec{p}^2_{max}} - \sqrt{m^2+\vec{p}^2})^2$$

et que quand $p \to 0$ l'expression entre parenthèse est une constante.

avec E_e :

la courbe s'appelle le <u>Kurie plot</u>.

On a trouvé



Cette dépendance linéaire est d'accord avec le terme en A uniquement. Le terme en B doit être nul.

En fait : B = - 0.02 ± 0.09 (Fermi)

= -0.007 ± 0.010

On doit avoir :

$$\text{(IV,25)}\quad \begin{aligned} &a)\ \mathrm{Re}\ \{C_S C_V^* + C'_S C'^*_V\} = 0, \\ &b)\ \mathrm{Re}\ \{C_T C_A^* + C'_T C'^*_A\} = 0 \end{aligned}$$

Cette condition indique donc que si on pose

$$\text{(IV,26)}\quad \begin{aligned} &C_S = \alpha_S + i\beta_S,\ C'_S = \alpha'_S + i\beta'_S \\ &C_V = \alpha_V + i\beta_V,\ C'_V = \alpha'_V + i\beta'_V \end{aligned}$$

on aura :

$$\text{(IV,27)}\quad \begin{aligned} &\alpha_S\alpha_V + \beta_S\beta_V + \alpha'_S\alpha'_V + \beta'_S\beta'_V = 0 \\ &\alpha_T\alpha_A + \beta_T\beta_A + \alpha'_T\alpha'_A + \beta'_T\beta'_A = 0 \end{aligned}$$

<u>Une autre observation : si $m_\nu \neq 0$</u> alors

$$E_{max} = E_e + E_\nu = \sqrt{m^2+p^2}\ \ \sqrt{m_\nu^2+p_\nu^2}$$

donc :

$$(E_{max}-E_e)^2 = p_\nu^2 + m_\nu^2$$

$$p_\nu^2 = (E_{max}-E_e)^2 - m_\nu^2$$

Par conséquent on aurait pour $d\Lambda(p)$:

$$\text{(IV,28)}\quad d\Lambda(p) = \frac{4\pi A}{(2\pi)^4}\, p^2 \left((E_{max}-E_e)^2 - m_\nu^2\right) dp$$

ou :

$$\text{(IV,29)}\quad \frac{d\Lambda(E)}{dE} = \frac{4\pi A'}{(2\ )^4}\ \sqrt{E}\ \left\{(E_{max}-E_e)^2 - m_\nu^2\right\}$$

avec $\vec{P}_i = 0$ on obtient $\vec{p}_{\bar{\nu}}$

Maintenant si l'on observe une désintégration qui ne fait intervenir qu'une transition de Fermi, donc telle que un noyau avec $J_i = 0$ se transforme en un noyau avec $J_f = 0$ alors on aura pour le terme entre parenthèse de la formule (IV,31) ci-dessus :

$$1 + \frac{|C_V|^2 + |C'_V|^2 - |C_S|^2 - |C'_S|^2}{|C_V|^2 + |C'_V|^2 + |C_S|^2 + |C'_S|^2} \frac{v}{c} \cos\theta$$

Pour la réaction :

(IV,33) $\boxed{A^{35} \to C\ell^{35} + \ell^+ + \nu_e \quad \text{prédominance Fermi}}$

on a trouvé :

(IV,34) $\boxed{\frac{C}{A} = 0.97 \quad 0.14}$

ce qui indique que l'interaction dominante est V.

On peut poser $C_S = C'_S = 0$.

Ensuite si on étudie une transition Gamow-Teller pure on aura

$$1 + \frac{C}{A} \frac{\vec{p}\cdot\vec{p}_{\bar{\nu}}}{E_e E_{\bar{\nu}}} = 1 + \frac{1}{3} \frac{|C_T|^2 + |C'_T|^2 - |C_A|^2 - |C'_A|^2}{|C_T|^2 + |C'_T|^2 + |C_A|^2 + |C'_A|^2} \frac{v}{c} \cos\theta$$

On a trouvé pour

(IV,35)
$$\boxed{\begin{array}{l} He^6 \to Li^6 + \bar{e} + \bar{\nu}_e \\ J=0 \quad J=1 \\ \\ \frac{C}{A} = -0.35 \pm 0.003 \end{array}}$$

ce qui montre que l'interaction dominante est A.

On peut donc poser $C_T = C'_T = 0$

Les mêmes indications résultent d'autres réactions telles que

(IV,36) $Ne^{19} \to F^{19} + e^+ + \nu_e$ (Fermi + Gamow-Teller)

Observons que de la forme du coefficient $\frac{C}{A}$ dans le cas d'une transition Fermi, si on fait $C_V = C'_V = 0$ on aura uniquement interaction S et le rapport $\frac{C}{A} \approx -1$ Par conséquent le plus grand nombre de paires électron- antineutrino sortira avec $\theta > \frac{\pi}{2}$.

$$(IV,39) \quad P = \pm \frac{v}{c} \frac{2\mathrm{Re}\,[C_S C'^*_S - C_V C'^*_V]|\langle I\rangle|^2 + [C_T C'^*_T - C_A C'^*_A]|\langle\vec{\sigma}\rangle|^2}{[|C_S|^2+|C'_S|^2+|C_V|^2+|C'_V|^2]|\langle I\rangle|^2+[|C_T|^2+|C'_T|^2+|C_A|^2+|C'_A|^2]|\langle\vec{\sigma}\rangle|^2}$$

le signe $\pm$ correspondant à $e^{\pm}$ dans cet ordre respectivement .

L'expérience indique

(IV,40)

a) $P_{exp} \cong \mp v/c$ pour émission de $e^{\pm}$

b) $\frac{P_{e^-}}{v} = -1.001 \pm 0.008$

Ces résultats exigeraient : les interactions

S et T : avec $C'_S = C_S$, $C'_T = C_T$

par conséquent dans l'interaction S et T pour les leptons on aurait

$\bar{u}(p_e)C_S(1+\gamma^5)v(q_{\bar{\nu}})$ et

$\bar{u}(p_e)\sigma(1+\gamma^5)v(q_{\bar{\nu}})$

donc on aurait un $\bar{\nu}_L$ et un ν_R comme on verra dans le chapitre V.

ou V et A avec $C'_V = -C_V$, $C'_A = -C_A$

et donc un $\bar{\nu}_R$, ν_L

Cette expérience confirme donc la nature du neutrino à deux composantes mais ne fixe pas son hélicité.

V - LA DISTRIBUTION ANGULAIRE D'ELECTRONS EMIS PAR DES NOYAUX POLARISES

comme dans l'expérience :

$$(IV,41) \qquad \underset{J=5}{Co^{60}} \rightarrow \underset{J=4}{Ni^{60}} + \bar{e} + \bar{\nu}_e$$

est une pure transition Gamow-Teller. La distribution angulaire est de la forme :

$$(IV,42) \qquad W(\theta) = 1 + \alpha\cos\theta, \qquad \cos\theta = \frac{\vec{p}_e\cdot\langle\vec{J}\rangle}{|\vec{p}_e|J}$$

et

$$(IV,43) \qquad \alpha = \frac{-2\mathrm{Re}\{C_T C'^*_T - C_A C'^*_A\}}{|C_T|^2+|C'_T|^2+|C_A|^2+|C'_A|^2} \; \frac{|\vec{p}_e|}{E} \, P$$

On a obtenu $\alpha = -0.4$, où P est la polarisation du noyau.

On doit donc avoir

$$\text{(IV,44)}\quad \begin{array}{ll} \text{Soit} & \boxed{C'_T = + C_T, \quad C_A = C'_A = 0} \ \ \underline{\text{donc } \nu_R, \bar{\nu}_L} \ \underline{\text{(voir chapitre V)}} \\ \text{ou} & \boxed{C'_A = - C_A, \quad C_T = C'_T = 0} \ \ \underline{\text{donc } \nu_L, \bar{\nu}_R} \end{array}$$

Les deux expériences ci-mentionnées – mesure de la polarisation longitudinale des électrons émis par des noyaux non-polarisés et mesure de la distribution angulaire des électrons émis par des noyaux polarisés – indiquent donc que l'interaction faible est composée soit des couplages S et T soit des interactions A et V.

<u>Dans un cas le neutrino est polarisé à droite dans l'autre il est polarisé à gauche</u>.

Bien que l'étude de la corrélation angulaire électron-antineutrino nous amène à la conclusion que les interactions dominantes sont V et A il serait évidemment important de mesurer l'hélicité du neutrino.

Cela a été fait dans une ingénieuse expérience de Goldhaber, Grodzins et Sunyar.

Dans la réaction :

$$\text{(IV,45)}\quad \underset{(0^-)}{Eu^{152}} + e^- \to \underset{(1^-)}{Sm^{152*}} + \nu_e \to Sm^{152} + \gamma + \nu_e$$

il y a capture K d'un électron par le noyau de Eu^{152}. Le noyau de Sm^* et le ν_e sont émis en directions opposées (en négligeant l'impulsion initiale de l'électron). Comme le moment angulaire de l'état initial est $J_i = 1/2$ (spin de $Eu^{152} = 0$, moment angulaire de l'électron $K = 1/2$) l'état final $Sm^{152*} + \nu_e$ aura pour moment angulaire $J_f = 1/2$ et donc des deux états finals possibles

$$1 + 1/2, \quad 1 - 1/2$$

c'est le <u>deuxième qui est réalisé</u>. <u>Par conséquent les spins de Sm^{152*} et de ν_e sont en direction opposée</u>.

On a donc :

$$\vec{p}^{\,*} = \vec{p}_{Sm^*} \xleftarrow{\quad Sm^{152*} \quad} \qquad \xrightarrow{\quad \nu_e \quad} \vec{p}_{\nu e}$$

$$\underset{1}{\Longleftarrow} \qquad \underset{1/2}{\Longrightarrow}$$

ou

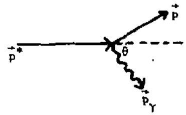
$$\underset{1}{\Longleftarrow} \qquad \underset{1/2}{\Longrightarrow}$$

Cela veut dire que le <u>noyau Sm^{152*}</u> et le ν_e <u>ont la même hélicité</u>.

Ensuite le noyau Sm^{152*} émet un rayon γ :

(IV,46) $\quad Sm^{152*}_{1^-} \rightarrow Sm^{152}_{0^+} + \gamma$

La cinématique est ici la suivante :



On a :

$$\text{(IV,47)} \qquad \begin{aligned} \vec{p}^{\,*} &= \vec{p} + \vec{p}_\gamma \\ E^* &= E + E_\gamma \end{aligned}$$

où
$$\begin{aligned} E^* &= (\vec{p}^{\,*2} + M^{*2})^{1/2} \\ E &= (\vec{p}^{\,2} + M^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\text{(IV,48)} \qquad E_\gamma = E^* - E \cong M^* - M + \frac{\vec{p}^{\,*2}}{2M^*} - \frac{\vec{p}^{\,2}}{2M} \cong \Delta M + \frac{1}{2M^*}(\vec{p}^{\,*2} - \vec{p}^{\,2})$$

On a encore :

$$\text{(IV,49)} \qquad \vec{p}^{\,2} = \vec{p}^{\,*2} + E_\gamma^{\,2} - 2p^* E_\gamma \cos\theta$$

Ainsi :

$$\text{(IV,50)} \qquad \begin{aligned} E_\gamma &\cong \Delta M + \frac{2p^* E_\gamma \cos\theta}{2M^*} - \frac{E_\gamma^{\,2}}{2M^*} \\ &\cong \Delta M + \frac{\Delta M p^* \cos\theta}{M^*} - \frac{(\Delta M)^2}{M^*} \end{aligned}$$

On fait incider le rayon γ sur une cible de Sm^{152} **au repos ; il y aura absorption résonante pour** <u>**les γ émis de Sm^* dans la même direction de mouvement du noyau Sm^***</u>**. Dans ce cas $\theta = 0$ et alors $p^2 = p^{*2} + E_\gamma^{\,2} - 2p^* E_\gamma =$**
$= (p^* - E_\gamma)^2$

$$p = p^* - E_\gamma$$

c'est-à-dire d'après (IV,48) $p^* = p + E_\gamma \cong \Delta M$

Ces γ ont la direction de mouvement de Sm^* et le même spin puisque le spin de Sm est 0. Donc l'hélicité de γ sera égale à celle du Sm^* et donc à celle du ν_e.

On a trouvé une hélicité négative pour γ et donc pour ν_e

$$\nu_e = (\nu_e)_L$$

CHAPITRE V

THEORIE DU NEUTRINO A DEUX COMPOSANTES

L'équation de Dirac pour une particule libre est :

(V,1) a) $(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi(x) = 0$

ou b) $(\vec{\alpha}.\vec{p}+\beta m)\psi(x) = E\psi(x)$ $\quad p = -i\vec{\nabla},\ E = i\frac{\partial}{\partial t}$

Maintenant on sait que :

$$\vec{\gamma} = \beta\vec{\alpha}\ , \qquad \sigma_1 = i\gamma^2\gamma^3 = i\beta\alpha_2\beta\alpha_3 = -i\alpha_2\alpha_3\ ,$$

$$\gamma^5 = i\gamma^o\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

donc : $\gamma^5\sigma_1 = -\gamma^o\gamma^1\gamma^2\gamma^3(\gamma^2\gamma^3) = \gamma^o\gamma^1 = \alpha_1$

Par conséquent

$$\gamma^5\vec{\sigma} = \vec{\alpha} = \vec{\sigma}\gamma^5$$

et l'équation de Dirac (V,1) ci-dessus s'écrit :

(V,2) $\left(\gamma^5(\vec{\sigma}.\vec{p})+\beta m\right)\psi(x) = E\psi(x)$

d'où l'on déduit :

(V,3) $$\begin{aligned}\left((\vec{\sigma}.\vec{p}) - \beta\gamma^5 m\right)\psi(x) &= E\gamma^5\psi(x)\\ \left((\vec{\sigma}.\vec{p})\gamma^5+\beta m\right)\psi(x) &= E\psi(x)\end{aligned}$$

Si l'on *introduit les définitions* (V,4) *suivantes* :

(V,4) a) $\psi_L(x) = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi(x)$

b) $\psi_R(x) = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi(x)$

on obtient les équations coupîées :

(V,5) a) $(\vec{\sigma}.\vec{p})\psi_L(x) - \beta m\psi_R(x) = - E\psi_L(x)$

b) $(\vec{\sigma}.\vec{p})\psi_R(x)+\beta m\psi_L(x) = E\psi_R(x)$

On voit donc que :

$\frac{1-\gamma^5}{2}\, v(p) = v_-$ définit un antineutrino à hélicité positive

$\frac{1-\gamma^5}{2}\, u(p) = u_L(p)$ est un neutrino à hélicité négative

Comme en général

(V,15) $\psi = \psi_L + \psi_R$

Si l'on choisit la représentation des γ^μ qui donne pour γ^5 :

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

alors on voit que

$$\text{a)}\ \psi_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(V,16)

$$\text{b)}\ \psi_R = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

et donc ψ_L et ψ_R ont chacun deux composantes et je peux écrire $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$

Des deux équations :

$$\text{a)}\ (\vec{\sigma}.\vec{p})\psi_L = -E\psi_L\ , \qquad m = 0,$$

(V,17)

$$\text{b)}\ (\vec{\sigma}.\vec{p})\psi_R = E\psi_R$$

la deuxième se déduit de la première et on obtient

(V,18) $\psi_R(x) = \sigma_2 \psi_L^{\,*}(x)$

Ainsi une particule à masse zéro décrite par $\psi_L(x) = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi(x)$ est soit une particule gauche (à hélicité négative) soit une antiparticule droite (hélicité positive). ψ L) correspond à la représentation $\left(\frac{1}{2},0\right)$ du groupe de Lorentz homogène ; ψ_R à la représentation $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

On appelle souvent le champ $\psi_L(x)$ à deux composantes qui satisfait à l'équation (V,17a) un champ de Weyl. Le champ $\psi_R = \sigma_2\psi_L^*$ décrit une particule droite et une antiparticule gauche.

Naturellement si on considère l'équation pour $\psi_L(x)$, $m = 0$, elle n'est pas invariante par rapport à la réflexion spatiale puisque

$$(\vec{\sigma}.\vec{p})\psi_L(x) = -E\psi_L(x) \ \rightarrow\ (\vec{\sigma}.\vec{p})\ P\ \psi_L(-\vec{x},x^0) = E\ P\ \psi_L(-\vec{x},x^0)$$

On pourrait poser

$$\psi_R(x) = P\psi_L(x') \tag{V,19}$$

et donc la théorie pour être invariante par rapport au groupe de Lorentz qui contient l'inversion spatiale a besoin de $\psi_R(x)$. Une théorie avec uniquement ψ_L à deux composantes, n'est pas invariante par réflexion spatiale.
On peut aussi écrire :

$$P\psi_L(x') = \eta\sigma_2\psi_L^*(x) \tag{V,20}$$

On voit dans ce cas que l'opération d'inversion spatiale transforme une particule en une antiparticule.

Ainsi il y a deux alternatives : ou bien on peut construire une théorie avec neutrinos à deux composantes et d'autres leptons de masse $\neq 0$ et admettre que l'opération d'inversion spatiale est l'habituelle : $\psi(x) \to \psi'(x') = \eta\gamma^0\psi(x)$ pour les derniers mais la transformation ci-dessus pour les neutrinos. Dans ce cas le nombre leptonique ne se conserve pas mais la théorie est invariante par réflexion spatiale ou bien on admet que comme pour les neutrinos à deux composantes l'inversion spatiale des autres champs implique l'échange particules $\leftrightarrow$ antiparticules, alors le nombre leptonique se conserve et la théorie est invariante sous CP et pas sous l'opération P conventionnelle.

On aperçoit que <u>la théorie à deux composantes du neutrino est équivalente à la théorie de Majorana</u> où le champ $M(x)$ est tel que

$$M(x) = \pm M_c(x) = \pm C^t\overline{M}(x). \tag{V,21}$$

On peut choisir une représentation telle que

$$M(x) = \begin{pmatrix} M_I(x) \\ i\sigma M_2^*(x) \end{pmatrix} \tag{V,22}$$

On voit que l'on peut faire la correspondance $\psi_L \to M_I(x)$.

En plus on a :

$$M(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2p^0} \sum_s \left[a(ps)u(p,s)e^{-ipx} + a^+(ps)v_e(ps)e^{ipx}\right] \tag{V,23}$$

où $v_c = C^t\overline{u}$

On voit que :

$$M_I(x) = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)M(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2p^0} \left[a(ps=-1)u_L(p)e^{-ipx} + a^+(p,s=+1)(v_c)_R(p)e^{ipx}\right] \tag{V,24}$$

Le champ de Majorama $M_I(x)$ à deux composantes peut donc soit annihiler un

CHAPITRE VI

LES CONSTANTES C_V ET C_A

Expérimentalement, on sait encore que la polarisation des électrons émis est $-\frac{v}{c}$.

L'élément de matrice pour les désintégrations $-\beta$ de noyaux est, comme on a vu

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ C_V \langle I \rangle \left(\bar{u}(p_e)\gamma^o(1-\gamma^5)v(q_{\bar{\nu}}) \right) - C_A \langle \vec{\sigma} \rangle . \left(\bar{u}(p_e)\vec{\sigma}\gamma^o(1-\gamma^5)v(q_{\bar{\nu}}) \right) \right\} \quad \text{(VI,1)}$$

Maintenant les deux courants leptoniques ci-dessus peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \left(\bar{u}(p_e)\gamma^o(1-\gamma^5)v(q_{\bar{\nu}})\right) &= \left(\bar{u}(p_e)\gamma^o\tfrac{1}{2}(1-\gamma^5)^2 v(q_{\bar{\nu}})\right) = \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\bar{u}(p_e)(1+\gamma^5)\gamma^o(1-\gamma^5)v(q_{\bar{\nu}})\right) = \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\left[u^+(p_e)(1-\gamma^5)\right]\gamma^o\gamma^o(1-\gamma^5)v_{\bar{\nu}}\right) \end{aligned} \quad \text{(VI,2)}$$

Par conséquent on peut prendre comme fonction d'onde de l'électron $(1-\gamma^5)u(p_e)$.

La valeur moyenne de la polarisation de l'électron est donc

$$\begin{aligned} \frac{\langle \vec{\sigma}.\vec{p} \rangle}{|\vec{p}|} &= \frac{\sum_s u^+(p,s)(1-\gamma^5)\frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{|\vec{p}|}(1-\gamma^5)u(ps)}{\sum_s u^+(ps)(1-\gamma^5)(1-\gamma^5)u(p,s)} = \\ &= \frac{\mathrm{Tr}\left\{(\not p+m)\gamma^o(1-\gamma^5)\frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{|\vec{p}|}(1-\gamma^5)\right\}}{2\,\mathrm{Tr}\left\{(\not p+m)\gamma^o(1-\gamma^5)\right\}} = -\frac{|\vec{p}|c}{E} = -\frac{v}{c} \end{aligned} \quad \text{(VI,3)}$$

Il faut à présent déterminer C_V et C_A. On trouve $|C_V|^2$ et $|C_A|^2$ à partir de la probabilité totale de désintégration de plusieurs noyaux. En négligeant toujours les corrections dues à l'interaction électromagnétique de l'électron et du noyau on trouve

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi^3}\left\{|C_V|^2|\langle I\rangle|^2+|C_A|^2|\langle\vec{\sigma}\rangle|^2\right\}\int_0^{p_{max}} p^2dp(E_{max}-E)^2 \quad \text{(VI,4)}$$

Dans le cas de transitions Fermi pures

$$\langle\vec{\sigma}\rangle = 0 \quad \text{(Fermi pure)} \quad \text{(VI,5)}$$

et on montrera que

(VI,6) $\quad |<I>|^2 = 2$

On trouve alors ; pour une telle transition

(VI,7) $\quad O^{14} \rightarrow N^{14^*} + e^+ + \nu_e$

(VI,8) $$\boxed{|C_V| = (1.4032 \pm 0.0026).10^{-49} \mathrm{erg.cm}^3 = \cong \frac{10^{-5}}{m_p^2}}$$

Dans le cas de la <u>désintégration du neutron libre</u>

(VI,9) $\quad |<I>|^2 = 1, \quad |<\vec{\sigma}>|^2 = 3$

On peut déterminer

(VI,10) $\quad |C_V|^2 + 3|C_A|^2$

On trouve :

(VI,11) $$\boxed{\left|\frac{C_V}{C_A}\right| = 1.23 \pm 0.02}$$

La phase de $\frac{C_V}{C_A}$ est déterminée en mesurant la distribution angulaire des électrons émis dans la désintégration de neutrons libres polarisés relative à la direction du spin du neutron.

(VI,12) $\quad dA : 1 + a\,\vec{S}_n \cdot \frac{\vec{V}}{C}$

où $\vec{S}_n$ est la direction de polarisation du neutron

et

(VI,13) $$a = -\frac{2\,\{(C_A)^2 + \mathrm{Re}(C_V C_A^*)\}}{|C_V|^2 + 3|C_A|^2}$$

ou encore

(VI,13bis) $$a = -\frac{2\,\left\{\left|\frac{C_A}{C_V}\right|^2 + \mathrm{Re}\left(\frac{C_A^*}{C_V^*}\right)\right\}}{1 + 3\left|\frac{C_A}{C_V}\right|^2}$$

Si

(VI,14) $$\frac{C_A}{C_V} = \left|\frac{C_A}{C_V}\right| e^{i\varphi}$$

on a

(VI,15) $$a = -2\,\frac{\left|\frac{C_A}{C_V}\right|^2 + \left|\frac{C_A}{C_V}\right|\cos\phi}{1 + 3\left|\frac{C_A}{C_V}\right|^2}$$

$$d = 0.002 \pm 0.014$$

et de $\frac{C_A}{C_V} = \left|\frac{C_A}{C_V}\right| e^{i\phi}$ on tire $d = -2 \dfrac{\left|\frac{C_A}{C_V}\right|\sin\phi}{1+3\left|\frac{C_A}{C_V}\right|^2}$

d'où : $\phi = \pi \pm 1.6^o$

Ainsi il n'y a pas d'évidence pour violation de T en β-decay et $\frac{C_A}{C_V} < 0$:

$$C_S = C'_S = C_T = C'_T = 0 \; ; \; C'_V = -C_V \; , \; C'_A = -C_A \; ,$$

(VI,20) $\quad \frac{C_A}{C_V} = -1.23 \pm 0.02 \; ,$

$$|C_V| \cong \frac{10^{-5}}{m_p^2}$$

Mais il peut toujours y avoir une très faible violation de T.

<u>Nous arrivons à la conclusion que l'amplitude pour la réaction</u>

(VI,21) $\quad n \to p + e + \bar{\nu}_e$

<u>est donc la forme</u> :

(VI,22) $\quad S = -(2\pi)^4 i\delta^4(P_n - P_p - P_e - P_{\bar\nu})M.$

(VI,23) $\quad \boxed{M = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left(\bar{u}(P_p)(C_V\gamma^\lambda + C_A\gamma^\lambda\gamma^5)u(P_n)\right)\left(\bar{u}(P_e)\gamma_\lambda(1-\gamma^5)v(P_{\bar\nu})\right) \right\}}$

avec :

$$|C_V| m_p^2 \cong 10^{-5}$$

$$\boxed{\frac{C_A}{C_V} \cong -1.23 \pm 0.02}$$

précédemment est correct puisqu'il se réfère à des amplitudes, des éléments de matrice entre hadrons dans des états asymptotiques initial et final.

Voyons alors la relation entre le lagrangien (VII,2) et l'amplitude M (VI, 23).

Pour la désintégration - β du neutron l'amplitude S de la réaction en ordre plus bas est, en admettant le lagrangien (VII,2) (et $c_o = 1$) :

(VII,5) $$S_{(\beta)} = - i\int d^4x \frac{\mathscr{G}}{\sqrt{2}} \langle p_p p_e p_{\bar{\nu}}|h_o^\lambda(x)\ell_\lambda^+(x)p_n\rangle =$$

$$= - i\int d^4x \frac{\mathscr{G}}{\sqrt{2}} \langle p_p p_e p_{\bar{\nu}}|e^{iPx}h_o^\lambda(o)e^{-iPx}e^{iPx}\ell_\lambda^+(o)e^{-iPx}|p_n\rangle$$

puisque l'invariance de la théorie par rapport au groupe des translations permet d'écrire pour tout opérateur $\Omega(x)$:

(VII,6)
$$\Omega(x) = e^{iPx}\Omega(o)e^{-iPx}$$
$$[P^\mu,\Omega(x)] = - i \frac{\partial\Omega(x)}{\partial x_\mu}$$

Par conséquent :

(VII,7)
$$S_{(\beta)} = -i\int d^4x \frac{\mathscr{G}}{\sqrt{2}} e^{i(P_p-P_n+P_e+P_{\bar{\nu}})}\langle P_p|h_o^\lambda(o)|P_n\rangle \langle p_e p_{\bar{\nu}}|\ell_\lambda^+(o)|0\rangle =$$
$$= -(2\pi)_i^4\, \delta^\mu(P_p-P_n+P_e+P_{\bar{\nu}})\, M_{(\beta)}$$

où :

(VII,8) $$M_{(\beta)} = \frac{\mathscr{G}}{\sqrt{2}} \langle P_p|h_o^\lambda(o)|P_n\rangle \left(\bar{u}(p_e)\gamma_\lambda(1-\gamma_5)v(p_{\bar{\nu}})\right)$$

Maintenant considérons l'élément de matrice :

$$\langle P_p|h_o^\lambda(o)|P_n\rangle$$

Comme :

$$h_o^\lambda(o) = V_o^\lambda(o) - A_o^\lambda(o)$$

prenons la partie <u>vectorielle</u> du courant h_o^λ :

$$\langle P_p|V_o^\lambda(o)|P_n\rangle$$

Comme il s'agit d'un vecteur, on peut avec un proton final libre et un neutron initial libre construire cinq vecteurs :

1) $\bar{u}(P_p)\gamma^\lambda u(P_n)$;

2) $\bar{u}(P_p)\sigma^{\mu\nu}q_\nu{}^\mu(P_n)$, $q_\nu = (P_p-P_n)_\nu$;

$$(VII,12) \quad \begin{cases} (\not p - m)u(p) = 0 \\ \bar{u}(p')(\not p' - m) = 0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$a_\mu \bar{u}(p') \left\{ (p^\mu + p'^\mu) + i\sigma^{\mu\nu}(p'_\nu - p_\nu) \right\} u(p) =$$

$$= a_\mu \bar{u}(p') \left\{ (p^\mu + p'^\mu) + 2m\gamma^\mu - (p'^\mu + p^\mu) \right\} u(p)$$

d'où :

$$(VII,13) \quad \boxed{\begin{aligned} &\frac{i}{2m} \bar{u}(p')\sigma^{\mu\nu}(p'_\nu - p_\nu)u(p) = \\ &= \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) - \frac{p^\mu + p'^\mu}{2m} \bar{u}(p')u(p) \end{aligned}}$$

ou :

$$(VIII,14) \quad \boxed{\frac{Q^\mu}{2m} \bar{u}(p')u(p) = \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) - \frac{i}{2m} \bar{u}(p')\sigma^{\mu\nu} q_\nu u(p)}$$

D'autre part de la relation :

$$\not a \not p - \not p' \not a = a_\alpha(p^\alpha - p'^\alpha) - i\sigma^{\mu\nu} a_\mu (p_\nu + p'_\nu)$$

et de :

$$0 = \bar{u}(p')(-\not p' + m)\not a u(p) + \bar{u}(p')\not a(\not p - m)u(p) =$$

$$= \bar{u}(p') \left\{ a_\alpha(p^\alpha - p'^\alpha) - i\sigma^{\mu\nu} a_\mu (p_\nu + p'_\nu) \right\} u(p)$$

il vient :

$$(VII,15) \quad \boxed{\frac{i}{2m} \bar{u}(p')\sigma^{\mu\nu} Q_\nu u(p) = \frac{q^\mu}{2m} \bar{u}(p')u(p)}$$

On peut donc choisir <u>les trois vecteurs indépendants</u>

(VII,16)

1a) $\bar{u}(P_p)\gamma^\mu u(P_n)$

2a) $\bar{u}(P_p) i\sigma^{\mu\nu} q_\nu u(P_n)$

3a) $\bar{u}(P_p)u(P_n)\, q^\mu$

avec :

$$q^\mu = P_p^{\ \mu} - P_n^{\ \mu}$$

Nous pouvons ainsi écrire :

$$(VII,17) \quad \boxed{\begin{aligned} \mathcal{G} \langle P_p | V_a^{\ \lambda}(o) | P_n \rangle &= \bar{u}(P_p) \left\{ g_V^{(1)}(q^2)\gamma^\lambda + g_V^{(2)}(q^2) i\sigma^{\lambda\eta} q_\eta + \right. \\ &\left. + g_V^{(3)}(q^2)\, q^\lambda \right\} u(P_n) \end{aligned}}$$

où les coefficients de chaque terme sont des fonctions de l'invariant q^2 (le transfert d'impulsion carré) - <u>les facteurs de forme</u>.

On peut voir que si la théorie <u>est invariante par rapport à l'inversion du temps ces facteurs de forme doivent être des fonctions réelles.</u>

Nous ferons la démonstration pour le premier facteur de forme, $g_V^{(1)}(q^2)$, mais elle s'étend aux autres fonctions. Soit alors :

$$<P|V^\lambda|N> = g_V^{(1)}(q^2)\bar{u}_p\gamma^\lambda u_N$$

et la contribution de cet élément à l'amplitude de la réaction $N \to P + e + \bar{\nu}_e$ est alors

$$<P|V^\lambda|N><e|\ell_\lambda^+|\nu_e> = g_V^{(1)}(q^2)(\bar{u}_p\gamma^\lambda u_N)\left(\bar{u}_e\gamma_\lambda(1-\gamma^5)v_\nu\right)$$

Pour la réaction $P \to N + e^+ + \nu_e$ la contribution correspondante sera :

$$\begin{aligned} M_1 &= <N|V^{\lambda+}|P><\nu_e|\ell_\lambda|e> = \\ &= <P|V^\lambda|N>^*<e|\ell_\lambda^+|\nu_e>^* = \\ &= g_V^{(1)*}(q^2)(\bar{u}_N\gamma^\lambda u_p)\left(\bar{v}_\nu\gamma_\lambda(1-\gamma^5)u_e\right) \end{aligned}$$

Maintenant on peut écrire (si on se rappelle que $<\psi_1|\psi_2>^* = <T\psi_1|T\psi_2>$) =

$$<N|V^{\lambda+}|P> = <P|V^\lambda|N>^* = <TP|TV^\lambda T^{-1}|TN>$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} M_1 &= <TP|TV^\lambda T^{-1}|TN> <Te|T\ell_\lambda^+T^{-1}|T\nu> = \\ &= <TPTe|TV^\lambda\ell_\lambda^+T^{-1}|TNT\nu_e> \end{aligned}$$

L'invariance par rapport à l'inversion du temps implique donc :

$$\begin{aligned} M_1 &= <TP|V^\lambda|TN> <Te|\ell_\lambda^+|T\nu_e> = \\ &= g_V^{(1)}(q^2)\ (\bar{u}_{TP}\gamma^\lambda u_{TN})\left(\bar{u}_{Te}\gamma_\lambda(1-\gamma^5)v_{T\nu}\right) \\ &= g_V^{(1)}(q^2)\ (\bar{u}_N\gamma^o\gamma^\lambda\gamma^o u_p)\left(\bar{v}_\nu\gamma^o\gamma_\lambda\gamma^o(1-\gamma^5)u_e\right) \qquad \text{(VII,18)} \\ &= g_V^{(1)}(q^2)\ (\bar{u}_N\gamma^\lambda u_p)\left(\bar{v}_\nu\gamma_\lambda(1-\gamma^5)u_e\right) \end{aligned}$$

On a ainsi : $g_V^{(1)}(q^2) = g_V^{(1)*}(q^2)$

Par conséquent si la théorie est invariante par inversion du temps on doit avoir, pour un facteur de phase = 1

$$g_V^{(1)*} = g_V^{(1)}\ ;\ g_V^{(2)*}\ \ g_V^{(2)}\ ;\ g_V^{(3)*} = g_V^{(3)} \qquad \text{(VII,19)}$$

On a donc, pour une théorie invariante : us T :

$$\mathcal{G}\langle P_p|V_o^{\lambda}(o)|P_n\rangle = \bar{u}(P_p)\left\{ g_v^{(1)}(q^2)\gamma^{\lambda}+g_v^{(2)}(q^2)\sigma^{\lambda\eta}q_{\eta}+\right.$$

(VII,20)

$$\left.+\ g_v^{(3)}(q^2)q^{\lambda}\right\} u(P_n)$$

où les facteurs de forme $g^{(1)}(q^2)$ sont des functions réelles de q^2.

Considérons maintenant la partie axiale de h_o^{λ} :

$$\langle P_p|A_o(o)|P_n\rangle$$

Un proton final et un neutron initial libres permettent la construction de cinq vecteurs axiaux à savoir :

1) $\bar{u}(P_p)\gamma^{\lambda}\gamma^5 u(P_n)$

2) $\bar{u}(P_p)\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}\gamma^5 u(P_n)$

(VII,21) 3) $\bar{u}(P_p)\sigma^{\mu\nu}Q_{\nu}\gamma^5 u(P_n)$

4) $\bar{u}(P_p)\gamma^5 u(P_n)q^{\mu}$

5) $\bar{u}(P_p)\gamma^5 u(P_n)Q^{\mu}$

De ces cinq vecteurs axiaux trois seulement sont indépendants. En effet, on a l'équation :

$$\bar{u}(p')(\not{p}'-m)\not{a}\gamma^5 u(p)+\bar{u}(p')\gamma^5\not{a}(\not{p}-m)u(p) = 0$$

$$= \bar{u}(p')(\not{p}'\not{a}\gamma^5+\gamma^5\not{a}\not{p})u(p) =$$

$$= \bar{u}(p')\left\{ p'^{\mu}+p^{\mu}-i\sigma^{\mu\nu}(p'_{\nu}-p_{\nu})\right\}\gamma^5 u(p)a_{\mu}$$

d'où, par un vecteur a^{α} arbitraire :

(VII,22) $$\boxed{\frac{Q^{\mu}}{2M}\,\bar{u}(p')\gamma^5 u(p) = \frac{i}{2M}\,\bar{u}(p')\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}\gamma^5 u(p)}$$

De même

$$\bar{u}(p')(\not{p}'-m)\not{a}\gamma^5 u(p)+\bar{u}(p')\not{a}\gamma^5(\not{p}-m)u(p) = 0 =$$

$$= -2m\,\bar{u}(p')\not{a}\gamma^5 u(p)+\bar{u}(p')a_{\alpha}\ \ p'^{\alpha}-p^{\alpha}-i\sigma^{\alpha\beta}(p'_{\beta}+p_{\beta})\ \ \gamma^5(p)$$

par conséquent :

(VII,23) $$\boxed{\frac{i}{2m}\,\bar{u}(p')\sigma^{\mu\nu}\gamma^5 Q_{\nu}u(p) = \frac{q^{\mu}}{2m}\,\bar{u}(p')\gamma^5 u(p)-\bar{u}(p')\gamma^{\mu}\gamma^5 u(p)}$$

On peut donc écrire :

(VII,24) $$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{G}\langle P_p|A_o^{\lambda}(o)|P_n\rangle = \bar{u}(P_p)\ \{ g_A^{(1)}(q^2)\gamma^{\lambda}\gamma^5+g_A^{(2)}(q^2)\sigma^{\lambda\eta}\ \ {}^5 +\\ + g_A^{(3)}(q^2)q^{\lambda}\gamma^5\}\ u(P_n)\end{aligned}}$$

A présent, étant donné un pion d'impulsion p^{λ} *il est impossible de construire* avec cette seule grandeur un vecteur axial.

On aura donc :

$$\text{(VIII,7)}\qquad \begin{array}{l} a)\ \langle 0|V^{\lambda}(o)|\pi^-(p)\rangle = 0\ , \\ b)\ \langle 0|A^{\lambda}(o)|\pi^-(p)\rangle = if_{\pi}(p^{\lambda})p^{\lambda}. \end{array}$$

f_{π} est en réalité une constante et s'appelle la constante d'interaction pour la désintégration du pion : $f_{\pi} \equiv f_{\pi}(p^2) = f_{\pi}(m_{\pi}^2)$

On aura donc :

$$\text{(VIII,8)}\qquad M_{\pi 2} = \frac{i\,\mathcal{G} f_{\pi}}{\sqrt{2}}\, p^{\lambda}\Big(\bar{u}(p_{\ell})\gamma_{\lambda}(1-\gamma^5)v(p_{\nu_{\ell}})\Big)$$

De la fonction delta en $S_{\pi 2}$ il résulte que :

$$\text{(VIII,9)}\qquad p_{\pi} = p_{\ell} + p_{\bar{\nu}_{\ell}}$$

et comme les leptons finals asymptotiques sont libres :

$$\text{(VIII,10)}\qquad \begin{array}{l} \bar{u}(p_{\ell})\ (\not{p}_{\ell}-m_{\ell}) = 0 \\ \not{p}_{\nu_{\ell}} v(p_{\nu_{\ell}}) = 0 \end{array}$$

on obtient

$$\text{(VIII,11)}\qquad \boxed{M_{\pi 2} = \frac{i\,\mathcal{G} f_{\pi}}{\sqrt{2}}\ m_{\ell}\ \bar{u}(p_{\ell})\ (1-\gamma^5)v(p_{\bar{\nu}_{\ell}})}$$

La probabilité de désintégration sera :

$$\text{(VIII,12)}\qquad \Lambda_{\pi 2} = \frac{1}{\tau_{\pi 2}} = \frac{\mathcal{G}^2 |f_{\pi}|^2}{8\pi}\ m_{\pi}^3 \left(\frac{m_{\ell}}{m_{\pi}}\right)^2 \left(1 - \frac{m_{\ell}^2}{m_{\pi}^2}\right)$$

A partir du résultat expérimental

$$\text{(VIII,13)}\qquad \tau_{\pi 2} = (2.55 \pm 0.02).10^{-8}\text{sec}$$

et si l'on identifie $\mathcal{G}$ avec G_V on détermine $|f_{\pi}|$:

$$\text{(VIII,14)}\qquad |f_{\pi}| = 0.97\ m_{\pi} \cong m_{\pi}$$

Le rapport entre les probabilités pour les désintégrations en μ et en électron est d'après cette théorie :

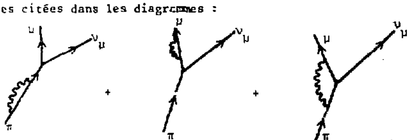
$$\text{(VIII.15)} \qquad R = \frac{\Lambda(\pi\to e+\nu_e)}{\Lambda(\pi\to\mu+\nu_\mu)} = \left(\frac{m_\ell}{m_\mu}\right)^2 \left(\frac{1-\frac{m_\ell^2}{m_\pi^2}}{1-\frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}}\right)^2 \simeq 1.2 \times 10^{-4}$$

et a été trouvée par Ruderman et Finkelstein.

Expérimentalement on trouve :

$$R_{exp} = (1.247 \pm 0.028)\times 10^{-4}$$

La valeur de R ci-dessus doit subir des corrections électromagnétiques telles que celles citées dans les diagrammes :



et que nous ne développerons pas. On obtient $R_{th} = 0.965\ R \simeq 1.23\times 10^{-4}$.

La théorie est en excellent accord avec <u>l'universalité (e - μ)</u> qui affirme que la théorie est invariante par rapport aux échanges

$$e \leftrightarrow \mu$$
$$\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$$
$$m_\ell \leftrightarrow m_\mu$$

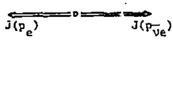
On peut comprendre intuitivement, d'après la théorie V-A, pour quelle raison R a une valeur aussi faible. Si la masse de l'électron était nulle, ce serait une particule gauche tandis que le $\bar{\nu}_e$ est une particule droite Donc on devrait avoir :

$$\text{(VIII.16)} \quad \pi^- \to e^- + \bar{\nu}_e \qquad \text{à la limite } m_\ell = 0$$

droite(hélicité + 1)

gauche(hélicité - 1)

Mais en vertu des conservations de l'impulsion et du moment angulaire on aurait pour un pion au repos



C H A P I T R E IX

COURANTS ET CHARGES GENERALISES

I - LES COURANTS FAIBLES

Nous avons développé les arguments historiques qui ont abouti à la théorie des interactions faibles basée sur l'hypothèse d'un lagrangien effectif proportionnel au produit scalaire d'un courant avec son adjoint

$$L = \frac{\mathcal{G}}{\sqrt{2}} \left\{ J^{\mu +}(x) J_{\mu}(x) + h.C \right\} \tag{IX,1}$$

le courant - le courant faible - étant la somme de deux termes :

$$J^{\mu}(x) = \ell^{\mu}(x) + h^{\mu}(x) \tag{IX,2}$$

le courant leptonique :

$$\ell^{\mu}(x) = \ell^{\mu}_{V}(x) - \ell^{\mu}_{A}(x) = \tag{IX,3}$$

$$= \sum_{\ell=e} \left\{ \overline{\psi}_{\nu_\ell}(x)\gamma^{\mu}\psi_{\ell}(x) - \overline{\psi}_{\nu_\ell}(x)\gamma^{\mu}\gamma^{5}\psi_{\ell}(x) \right\}$$

et le courant hadronique $h^{\mu}(x)$, qui ne pouvant pas être écrit en terme d'opérateur de champs qui représenteraient des hadrons, est aussi une différence de deux termes l'un vectoriel et l'autre axial :

$$h^{\mu}(x) = h^{\mu}_{V}(x) - h^{\mu}_{A}(x) \tag{IX,4}$$

L'expérience a conduit à postuler que le courant hadronique se compose de deux parties, un courant qui conserve l'étrangeté des hadrons, $h^{\mu}_{(o)}(x)$, $\Delta S=0$ et un courant qui produit un changement d'étrangeté des hadrons, $h^{\mu}_{(1)}(x)$, $\Delta S=1$. Et l'on a (comme on verra au Chap.XIII, équation (XIII,52)) :

(IX,5)

$$\text{a) } h^{\mu}_{V}(x) = h^{\mu}_{V(o)}(x)\cos\theta_c + h^{\mu}_{V(1)}(x)\sin\theta_c$$

$$\text{b) } h^{\mu}_{A}(x) - h^{\mu}_{A(o)}(x)\cos\theta_c + h^{\mu}_{A(1)}(x)\sin\theta_c$$

Il s'agit maintenant d'étudier les propriétés du courant $J^{\lambda}(x)$. Comme l'on connaît la forme explicite du courant leptonique $\ell^{\mu}(x)$, le problème central de la théorie, est de découvrir les propriétés du courant hadronique, en se basant sur les propriétés du courant leptonique qui peuvent être généralisées au courant hadronique (c'est-à-dire, les propriétés du courant leptonique qui ne sont pas modifiées par les interactions fortes) (l'algèbre des courants) et sur certains modèles tel que les modèles des quarks.

Ce sera le but des chapitres suivants de rappeler et d'étudier les propriétés théoriques et phénoménologiques des courants et du lagrangien. Mais auparavant nous allons établir la notion de courant et de charge dans le formalisme lagrangien et le théorème de Noether.

II - COURANTS ET CHARGES. THEOREME DE NOETHER

Etant donné un ensemble de champs $\{\varphi(x)\}$, le lagrangien est une certaine fonction de cet ensemble et de celui de ses dérivées premières $\{\partial^\mu\varphi(x)\}$

$$L = L\left(\{\varphi(x)\}, \{\partial^\mu\varphi(x)\}\right) \tag{IX,6}$$

et le principe d'action établit les équations du champ $\varphi_a(x)$:

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_a(x)\right)} - \frac{\partial L}{\partial\varphi_a(x)} = 0 \tag{IX,7}$$

Si l'on définit les moments canoniques conjugués $\pi_a(x)$ au moyen de l'équation :

$$\pi_a(x) = \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_o\varphi_a(x)\right)} \tag{IX,8}$$

La théorie quantique se base sur les opérateurs $\varphi_a(x)$ et $\pi_a(x)$ qui satisfont à l'algèbre ($\pm$ désignent commutateur ou anticommutateur) :

$$\begin{aligned} &[\varphi_a(x), \varphi_b(x')]^{\pm}_{t=t'} = 0 \ ; \quad [\pi_a(x), \pi_b(x')]^{\pm}_{t=t'} = 0 \\ &[\varphi_a(x), \pi_b(x')]^{\pm}_{t=t'} = i\delta_{ab}\delta^{(3)}(x-x') \end{aligned} \tag{IX,9}$$

La définition de courants et de charges, introduite par Gell-Mann et Lévy se base sur la transformation du lagrangien induite par une transformation de jauge sur les champs $\varphi(x)$:

Soit $\Lambda^\alpha(x)$ un ensemble de fonctions de jauge données ; considérons la transformation de jauge :

$$\varphi_a(x) \to \varphi'_a(x) = \varphi_a(x) + i\Lambda_\alpha(x)F^\alpha_a\left(\{\varphi\}\right) \tag{IX,10}$$

où $F^\alpha_a\left(\{\varphi\}\right)$ dépend du champ φ et de certaines constantes de structure de la transformation.

Si l'on appel

$$\delta\varphi_a = \varphi'_a(x) - \varphi_a(x) = +i\Lambda_\alpha(x)F^\alpha_a\left(\{\varphi\}\right) \tag{IX,11}$$

le changement correspondant de L est :

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \varphi_a}\,\delta\varphi_a + \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \varphi_a)}\,\partial^\mu \delta\varphi_a =$$

(IX,12)

$$= + i\,\frac{\partial L}{\partial \varphi_a}\,\Lambda_\alpha(x) F_a^\alpha\left(\{\varphi\}\right) + i\,\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \varphi_a)}\;\partial^\mu\left(\Lambda_\alpha(x) F_a^\alpha(\{\varphi\})\right)$$

ou encore

(IX,12bis)
$$\delta L = + i\left(\partial^\mu\,\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \varphi_a)}\right)\Lambda_\alpha(x) F_a^\alpha \quad \varphi \quad + i\,\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \varphi_a)}\,\partial^\mu\left(\Lambda_\alpha(x) F_a^\alpha\right)$$

puisque

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_a} = \partial^\mu\,\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \varphi_a)}$$

Ainsi, en fonction de $\Lambda_\alpha(x)$ et $\partial^\mu \Lambda_\alpha(x)$ on obtient :

$$\delta L = \Lambda_\alpha(x)\left\{+ i\,\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \varphi_a)}\,\partial^\mu F_a^\alpha(x) + i\left(\partial^\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \varphi_a)}\right) F_a^\alpha\right\}$$

$$+ \partial^\mu \Lambda_\alpha(x)\left(+i\,\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \varphi_a)}\,F_a^\alpha\right)$$

(IX,13)

$$= \Lambda_\alpha(x)\;\partial^\mu\left\{+i\,\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \varphi_a)}\,F_a^\alpha\left(\{\varphi\}\right)\right\} +$$

$$+ \partial^\mu \Lambda_\alpha(x)\quad\left\{+i\,\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \varphi_a)}\,F_a^\alpha\left(\{\varphi\}\right)\right\}$$

Si l'on définit le courant par

(IX,14)
$$\boxed{j_\mu^\alpha(x) = -i\,\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \varphi_a)}\,F_a^\alpha\left(\{\varphi\}\right)}$$

on aura :

$$\delta L = -\Lambda_\alpha(x)\partial^\mu j_\mu^\alpha(x) - \partial^\mu \Lambda_\alpha(x)\,.\,j_\mu^\alpha(x)$$

(IX,15)

$$= -\partial^\mu\left\{\Lambda_\alpha(x) j_\mu^\alpha(x)\right\}$$

On voit que

$$\partial^\mu j_\mu^\alpha(x) = -i\left(\partial^\mu\,\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \varphi_a)}\right) F_a^\alpha - i\,\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu \varphi_a)}\quad \partial^\mu F_a^\alpha$$

D'après la formule

(IX,23) $$j^{\mu}_{\alpha}(x) = -\frac{\partial}{\partial(\partial_{\mu}\Lambda_{\alpha})}(\delta L)$$

on obtient ici :

(IX,24) $$j^{\mu}(x) = ie[\varphi^{+}\partial^{\mu}\varphi-\varphi\partial^{\mu}\varphi^{+}] - 2e^{2}(\partial^{\mu}\Lambda)\varphi^{+}\varphi$$

Quelle signification donner dans ce cas au terme en $\partial^{\mu}\Lambda$? Dans le cas de Λ constante, la formule à appliquer pour $j^{\mu}_{\alpha}(x)$ n'est pas (IX 23) mais plutôt :

(IX,25) $$j^{\mu}_{\alpha}(x) = -i\,\frac{\partial L}{\partial(\partial^{\mu}\varphi_{a})}\,F^{\alpha}_{a}\left(\{\varphi\}\right)$$

qui dans notre cas doit s'écrire :

(IX,26) $$j^{\mu}(x) = -\,\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_{a})}\,F\,\cdot\,i\,\frac{\partial}{\partial\,\partial_{\mu}\varphi^{+})}\,F^{*}$$

et donne :

(IX,27) $$j^{\mu}(x) = ie\left\{\varphi^{+}\partial^{\mu}\varphi-\varphi\partial^{\mu}\varphi^{+}\right\}$$

puisque, pour Λ constante on a $F = e\varphi$

Il est facile de montrer, dans le cas où la théorie est invariante de jauge, comment construire le courant.

Prenons par exemple :

(IX,28) $$L' = (\mathscr{D}^{\mu'}\varphi')^{+}(\mathscr{D}'\varphi')-m^{2}\varphi'^{+}\varphi'$$

où :

$$\mathscr{D}^{\mu} = \partial^{\mu} + ieA^{\mu}$$

et donc :

$$\mathscr{D}^{\mu'} = \partial^{\mu}+ieA^{\mu'}$$

$$A^{\mu'} = A^{\mu}-\partial^{\mu}\Lambda(x)$$

$$\varphi' = e^{ie\Lambda(x)}\varphi(x)$$

Nous avons vu que :

$$L' = L$$

Maintenant posons :

(IX,29) $$A^{\mu'}(x) = 0$$

c'est-à-dire qu'on fait un choix spécial de jauge :

(IX,29bis) $$\partial^{\mu}\Lambda(x) = A^{\mu}(x)$$

Dans ces conditions L' ci-dessus devient et si L est invariant de jauge il ne peut pas dépendre de Λ_α :

$$\frac{\partial L}{\partial \Lambda_\alpha(x)} = 0 \quad \Rightarrow \partial_\mu j^\mu_\alpha(x) = 0$$

III - L'ALGEBRE DE LIE DES CHARGES

Les transformations usuelles sont :

(IX,35) $$\varphi_a(x) \to \varphi'_a(x) = \varphi_a(x) + i\Lambda_b(x) F^b_a\left(\{\varphi\}\right)$$

où les F sont des combinaisons linéaires des φ :

(IX,36) $$F^b\left(\{\varphi\}\right) = (f^b)_{ac}\varphi_c(x)$$

où $(f^b)_{ac}$ sont des constantes : $\varphi'_a = \varphi_a(x) + ig(f^b)_{ac}\Lambda_b\varphi_c(x)$

Dans ce cas l'expression du courant devient

(IX,37) $$j^\mu_a(x) = -i \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu \varphi_b(x)\right)} F^a_b\left(\{\varphi\}\right)$$

(IX,37bis) $$j^\mu_a(x) = -i \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu \varphi_b(x)\right)} (f^a)_{bd}\, \varphi_d(x)$$

La charge $Q_a(t)$ est :

(IX,38) $$Q_a(t) = \int j^o_a(x) d^3x = -i \int \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_o \varphi_b(x)\right)} (f^a)_{bd}\varphi_d(x) d^3x$$

Mais

$$\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_o \varphi_b(x)\right)} = \pi_b(x)$$

donc :

(IX,39) $$\boxed{Q_a(t) = -i\ (f^a)_{bd} \int \pi_b(x)\varphi_d(x) d^3x}$$

Comme on connaît les commutateurs des φ et π on obtient :

(IX,40) $$[Q_a(t), \varphi_b(\vec{x},t)] = -(f^a)_{bc\ c}(\vec{x},t)$$

$Q_a(t)$ sont les générateurs du groupe de jauge de 1ère espèce. Car si on pose :

(IX,41) $$\mathscr{U} = e^{ig\epsilon_\alpha \mathscr{G}_\alpha} \qquad \text{où } \epsilon_\alpha = \Lambda_\alpha \text{constante}$$

on a :

(IX,42) $$\varphi'_a(x) = e^{-ig\epsilon_\alpha \mathscr{G}_\alpha}\, \varphi_a(x)\, e^{ig\epsilon_\alpha \mathscr{G}_\alpha}$$

Notons que

$$[Q_a(t),Q_b(t)] = -\ (f^a_{cd})\ (f^b_{c'd'}) \iint d^3\ d^3x'\ [\pi_c(x)\varphi_d(x),\pi_{c'}(x')\varphi_{d'}(x')]_{t=t'}$$

Mais

$$[\qquad]_{t=t'} = \pi_c(x)\ [\varphi_d(x),\ \pi_{c'}(x')\ \varphi_{d'}(x')]_{t=t'} +$$

$$+ [\pi_c(x),\ \pi_{c'}(x')\ \varphi_{d'}(x')]_{t=t'}\ \varphi_d(x) =$$

$$= i\delta_{dc'}\delta^{(3)}(x-x')\ \pi_c(\vec{x},t)\varphi_{d'}(\vec{x}',t) - i\ \delta^{(3)}_{cd'}(x-x')\pi_{c'}(x't)\varphi_d(\vec{x}t)$$

$$[Q_a(t),\ Q_b(t)] = -\ i\ (f^a_{cd})\ (f^b_{c'd'}) \int \Big\{ \delta_{dc'}\pi_c(\vec{x},t)\varphi_{d'}(\vec{x},t) -$$

$$- \delta_{cd'}\pi_{c'}(\vec{x},t)\varphi_d(\vec{x},t) \Big\}\ d^3x =$$

$$= -\ i\ \Big\{(f^a_{cd})\ (f^b_{dd'}) \int \Big\} \pi_c(\vec{x}t)\ \varphi_{d'}(\vec{x}t)d^3x -$$

$$- (f^a_{d'd})\ (f^b_{c'd'}) \int \pi_{c'}(\vec{x}t)\ \varphi_d(\vec{x}t)d^3x \Big\} =$$

$$= -\ i\ \Big\{(f^a_{cd})\ (f^b_{dd'}) - (f^b_{cd})\ (f^a_{dd'})\Big\} \int \pi_c(\vec{x}t)\ \varphi_{d'}(\vec{x}t)d^3x$$

pour une transformation de Heisenberg. On a donc pour ϵ_α infinitésimal :

$$\text{(IX,43)}\qquad \begin{aligned} \varphi'_a(x) &= (1-ig\epsilon_\alpha\mathcal{G}_\alpha)\ \varphi_a(x)\ (1+ig\epsilon_\beta\ \ _\beta) \\ \varphi'_a(x) &\ \ \varphi_a(x) - i\epsilon_\alpha g[\mathcal{G}_\alpha,\ \varphi_a(x)] \end{aligned}$$

et comme

$$\varphi'_a(x) = \varphi_a(x) + i\ \epsilon_b(f^b)_{ac}\ \varphi_c(x)$$

on obtient :

$$-\ i\ \epsilon_\alpha g\ [\mathcal{G}_\alpha,\ \varphi_a(x)] = i\ \epsilon_b(f^b)_{ac}\ \varphi_c(x)$$

c'est-à-dire :

$$\text{(IX,44)}\qquad \boxed{[g\mathcal{G}_a,\ \varphi_b(x)] = -\ (f^a)_{bc}\ \varphi_c(x)}$$

d'où Q_a est égale à $g\mathcal{G}_a$ où $\mathcal{G}_a$ sont les générateurs.

A partir de l'expression (IX,39) pour la charge $Q_a(t)$ et des règles de commutation entre les φ et les π on obtient (voir note à la page antérieure) :

$$\text{(IX,45)}\qquad [Q_a(t),\ Q_b(t)] = -\ i\ (f^a_{cd}\ f^b_{dh} - f^b_{cd}\ f^a_{dh}) \int \pi_c(x)\ \varphi_h(x)d^3x$$

On voit que si (et seulement si) les constantes satisfont à une relation de la forme :

CHAPITRE X

LE LAGRANGIEN LEPTONIQUE ET L'ALGEBRE DES CHARGES LEPTONIQUES

Le lagrangien complet pour les leptons est :

(X,1) a) $L = L_o + L_{(\gamma)} + L_{(W)}$

avec :

b) $L_o = \frac{1}{2}\left\{\overline{\mu}(i\gamma^\alpha\partial_\alpha - m_\mu)\mu + \overline{e}(i\gamma^\alpha\partial_\alpha - m_e)e\right\} +$

$+ \frac{1}{2}\left\{\overline{\nu}_\mu i\gamma^\alpha\partial_\alpha \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\nu_\mu + \overline{\nu}_e i\gamma^\alpha\partial_\alpha \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\nu_e\right\} + \text{h.C.}$

c) $L_{(\gamma)} = e\ell^\lambda_{(\gamma)}(x)\ A_\lambda(x)$

d) $L_{(W)} = \dfrac{\mathcal{G}}{\sqrt{2}}\ \ell^{+\lambda}_{(W)}(x)\ \ell_{\lambda(W)}(x)$

où :

(X,2) $\ell^\lambda_{(\gamma)}(x) = \overline{e}\gamma^\lambda e + \overline{\mu}\gamma^\lambda\mu$

est le courant électromagnétique et

(X,3) $\ell^\lambda_{(W)}(x) = \overline{\nu}_e\gamma^\lambda(1-\gamma^5)\ e + \overline{\nu}_\mu\gamma^\lambda(1-\gamma^5)\mu$

est le courant faible.

L'introduction de

(X,4) $\psi_L(x) = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi(x),\ \psi_R(x) = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi(x)$

conduit à écrire :

a) $L_o = \frac{1}{2}\left\{\overline{\mu}_L i\gamma^\alpha\partial_\alpha\mu_L + \overline{\mu}_R i\gamma^\alpha\partial_\alpha\mu_R +\right.$

$\left. + \overline{e}_L i\gamma^\alpha\partial_\mu e_L + \overline{e}_R i\gamma^\alpha\partial_\alpha e_R\right\} -$

(X,5)

$- \frac{1}{2}\left\{m_\mu(\overline{\mu}_L\mu_R + \overline{\mu}_R\mu_L) + m_e(\overline{e}_L e_R + \overline{e}_R e_L)\right\} +$

$+ \frac{1}{2}\left\{\overline{\nu}_{\mu L} i\gamma^\alpha\partial_\alpha\nu_{\mu L} + \overline{\nu}_{eL} i\gamma^\alpha\partial_\alpha\nu_{eL}\right\} + \text{h.C.}$

et :

$$b)\ \mathcal{L}_{(\gamma)} = e\,\ell^{\lambda}_{(\gamma)}\, A_{\lambda}$$

$$c)\ \mathcal{L}_{(W)} = \frac{\mathscr{G}}{2\sqrt{2}}\, \ell^{+\lambda}_{(W)}\, \ell_{(W)\lambda} + \text{h.C.}$$

où :

$$\ell^{\lambda}_{(\gamma)} = \bar{e}_L\gamma^{\lambda}e_L + \bar{e}_R\gamma^{\lambda}e_R + \bar{\mu}_L\gamma^{\lambda}\mu_L + \bar{\mu}_R\gamma^{\lambda}\mu_R$$

$$\ell^{\lambda}_{(W)} = 2\left\{\bar{\nu}_{eL}\gamma^{\lambda}e_L + \bar{\nu}_{\mu L}\gamma^{\lambda}\mu_L\right\}$$

PROPRIETES DU LAGRANGIEN LEPTONIQUE :

1) Le lagrangien est invariant par transformation de chiralité

$$(X,6)\qquad \begin{cases} \nu_e(x) \to -\gamma^5\nu_e(x) \\ \nu_\mu(x) \to -\gamma^5\nu_\mu(x) \end{cases}$$

puisqu'il ne contient que les opérateurs $\nu_{eL}(x)$ et $\nu_{\mu L}(x)$ pour lesquels :

$$(X,7)\qquad \begin{aligned} \gamma^5\nu_L &= -\nu_L \\ \bar{\nu}_L\gamma^5 &= \bar{\nu}_L \end{aligned}$$

et donc : $\nu_L \to -\gamma^5\nu_L = \nu_L$

$\bar{\nu}_L \to \bar{\nu}_L\gamma^5 = \bar{\nu}_L$

On traduit cela en disant que le lagrangien ne contient pas ν_R et donc les neutrinos ont deux composantes.

Ils n'ont aucune interaction avec le champ électromagnétique puisque ces neutrinos sont équivalents à ceux de Majorana.

En effet, pour un champ de Majorana $M(x)$ on a identiquement :

$$(X,8)\qquad \begin{aligned} &:\overline{M(x)}\gamma^{\mu}M(x): = 0 \\ &:\bar{M}\sigma^{\mu\nu}M(x): = 0 \end{aligned}$$

En effet de

$$\mathscr{C}M(x)\mathscr{C}^{-1} = M_c(x) = C\,{}^t\bar{M}(x) =$$

$$= \pm M(x)$$

$$\mathscr{C}\bar{M}(x)\mathscr{C}^{-1} = (\bar{M}(x))_c = -\,{}^tM(x)C^{-1}$$

$$= \pm \bar{M}(x)$$

on tire (avec $C^{-1}\gamma^{\mu}C = -{}^t\gamma^{\mu}$, $C^{-1}\sigma^{\mu\nu}C = -{}^t\sigma^{\mu\nu}$)

$$\mathscr{C} : \bar{M}(x)\gamma^{\mu}M(x) : \mathscr{C}^{-1} = - : {}^tM(x)C^{-1}\gamma^{\mu}C\,{}^t\bar{M}(x) :$$

$$= + : {}^tM\,{}^t\gamma^{\mu}\,{}^t\bar{M} : =$$

$$= + : M_{\alpha}\,\gamma^{\mu}_{\beta\alpha}\,\bar{M}_{\beta} : =$$

$$= - : \bar{M}\,\gamma^{\mu}\,M :$$

Mais puisque $M(x)_c = \pm M$ on a

$$\mathscr{C} : \bar{M}\gamma^{\mu}M : \mathscr{C}^{-1} = : \mathscr{C}\bar{M}(x)\mathscr{C}^{-1}\gamma^{\mu}\mathscr{C}M\mathscr{C}^{-1} =$$

$$= : \bar{M}_c(x)\gamma^{\mu}M_c : = : \bar{M}(x)\gamma^{\mu}M :$$

et donc $\quad : \bar{M}\gamma^{\mu}M : = 0.$

Par contre on a

$$: \bar{M}\gamma^{\lambda}\partial_{\lambda}M : \to - : \partial_{\lambda}\bar{M}\gamma^{\lambda}M : \qquad (X,9)$$

comme on le veut pour la partie cinématique.

2) <u>Si l'on fait $m_e = m_{\mu} = 0$, le lagrangien est invariant par rapport au groupe unitaire leptonique $\mathscr{U}_1 \times \mathscr{U}_2$:</u>

$$\begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \end{pmatrix} \to \mathscr{U}_1 \begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \end{pmatrix} \to \mathscr{U}_1 \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \end{pmatrix}$$

(X,10)

$$\begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \end{pmatrix} \to \mathscr{U}_2 \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \end{pmatrix}$$

où $\mathscr{U}_1$ et $\mathscr{U}_2$ sont deux matrices unitaires arbitraires.

3) <u>Universalité $\mu \rightleftarrows e$ sauf pour les termes de masse</u>. C'est une conséquence de l'invariance 2) pour

$$\mathscr{U}_1 = \mathscr{U}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (X,11)$$

4) <u>Conservation des nombres leptoniques</u>

Avec les termes de masse, L est invariant par le groupe spécial :

$$\mathscr{U}_1 = \mathscr{U}_2 = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix} \qquad (X,12)$$

Cela veut dire que l'on fait les transformations de jauge du type :

$$e_L \to e^{i\theta_1} e_L$$

$$(X,13)\qquad \begin{aligned} \nu_{eL} &\to e^{i\theta_1}\, \nu_{eL} \\ e_R &\to e^{i\theta_1}\, e_R \\ \\ \mu_L &\to e^{i\theta_2}\, \mu_L \\ \nu_{\mu L} &\to e^{i\theta_2}\, \nu_{\mu L} \\ \mu_R &\to e^{i\theta_2}\, \mu_R \end{aligned}$$

Les courants conservés sont ici

$$(X,14)\qquad \begin{aligned} \ell^{\lambda}_{(e)}(x) &= \bar{e}_L\gamma^{\lambda}e_L+\bar{e}_R\gamma^{\lambda}e_R+\bar{\nu}_{eL}\gamma^{\lambda}\nu_{eL} \\ \ell^{\lambda}_{(\mu)}(x) &= \bar{\mu}_L\gamma^{\lambda}\mu_L+\bar{\mu}_R\gamma\mu_R+\bar{\nu}_{\mu L}\gamma^{\lambda}\nu_{\mu L} \end{aligned}$$

et les charges correspondantes sont les nombres leptoniques

$$(X,15)\qquad \begin{aligned} N_e &= \int \ell^{o}_{(\ell)}(x)\,d^3x \\ N_\mu &= \int \ell^{o}_{(\mu)}(x)\,d^3x \end{aligned}$$

La conservation de ces deux nombres séparément interdit la réaction

$$(X,16)\qquad \mu \to e + \gamma$$

qui serait possible par une interaction magnétique de Pauli $f\ \bar{e}(x)\sigma^{\mu\nu}\mu(x)\ \ F_{\mu\nu}(x)$ si on avait $N_e = N_\mu$.

Formalisme de l'isospin

Si on veut introduire un isospineur pour décrire l'électron et le neutrino il y a une difficulté pour les termes de masse. A la limite :

$$m_e = m_\mu = 0$$

on pourra définir un isospineur pour chaque lepton :

$$(X,17)\qquad \begin{aligned} &a)\ L_e(x) = \begin{pmatrix} \nu_{eL}(x) \\ e_L\ (x) \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}\,(1-\gamma^5) \begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ e\ (x) \end{pmatrix} \\ &b)\ L_\mu(x) = \begin{pmatrix} \nu_{\mu L}(x) \\ \mu_L(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,(1-\gamma^5) \begin{pmatrix} \nu_\mu(x) \\ \mu\ (x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et un isoscalaire :

$$(X,18)\qquad \begin{aligned} &a)\ R_e(x) = \frac{1}{2}\,(1+\gamma^5)e(x) = e_R(x) \\ &b)\ R_\mu(x) = \frac{1}{2}\,(1+\gamma^5)\mu(x) = \mu_R(x) \end{aligned}$$

Alors on peut écrire

$$L(m_e=m_\mu=0) = \frac{1}{2}\left\{\bar{L}_e(x)i\gamma^\alpha\partial_\alpha L_e(x)+\bar{L}_\mu(x)i\gamma^\alpha\partial_\alpha L_\mu(x)\right\}$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\bar{R}_e(x)i\gamma^\alpha\partial_\alpha R_e(x)+\bar{R}_\mu(x)i\gamma^\alpha\partial_\alpha R_\mu(x)\right\}$$

$$+ \text{h.C.} \tag{X,19}$$

$$+ e\left\{\bar{L}_e(x)\gamma^\lambda \frac{1-\tau_3}{2} L_e(x)+\bar{L}_\mu(x)\gamma^\lambda\frac{1-\tau_3}{2} L_\mu(x)\right\}A_\lambda(x) +$$

$$+ e\left\{\bar{R}_e(x)\gamma^\lambda R_e(x)+\bar{R}_\mu(x)\gamma^\lambda R_\mu(x)\right\}A_\lambda(x)$$

$$+ \frac{\mathcal{G}}{\sqrt{2}}\left\{\bar{L}_e(x)\gamma^\lambda\tau_+L_e(x)+\bar{L}_\mu(x)\gamma^\lambda\tau_+L_\mu(x)\right\}^+ .$$

$$\cdot\left\{\bar{L}_e(x)\gamma_\lambda\tau_+L_e(x)+\bar{L}_\mu(x)\gamma_\lambda\tau_+L_\mu(x)\right\}$$

où :

$$\tau_+ = \frac{\tau_1+i\tau_2}{2} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \tau_- = \frac{\tau_1-i\tau_2}{2} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

On y voit la symétrie $e \rightleftarrows \mu$

Les courants sont :

$$\boxed{\begin{aligned}\ell^\lambda_{(\gamma)}(x) = {} & \bar{L}_e(x)\gamma^\lambda\frac{1-\tau_3}{2}L_e(x) + \bar{L}_\mu(x)\gamma^\lambda\frac{1-\tau_3}{2}L_\mu(x) + \\ & + \bar{R}_e(x)\gamma^\lambda R_e(x)+\bar{R}_\mu(x)\gamma^\lambda R_\mu(x),\end{aligned}} \tag{X,20}$$

$$\boxed{\ell^\lambda_{(W)}(x) = 2\left\{\bar{L}_e(x)\gamma^\lambda\tau_+L_e(x)+\bar{L}_\mu\gamma^\lambda\tau_+L_\mu(x)\right\}} \tag{X,21}$$

La forme de ces courants montre que $L\ (m_e = m_\mu = 0)$ n'est pas invariant par rapport à une rotation dans l'espace de l'isospin :

$$\begin{aligned}R(x) &\to R(x)\\ L(x) &\to e^{i\vec{\alpha}\frac{\vec{\tau}}{2}}L(x)\end{aligned} \tag{X,22}$$

puisque les courants donnent un rôle privilégié aux axes (3ème pour $\ell^\lambda_{(\gamma)}$, 1er et 2ème pour $\ell^\lambda_{(W)}$) d'isospin.

Pour obtenir les termes de masse on peut le faire en introduisanc un spineur constant de la forme

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

et écrire :

$$m_e \left\{ \bar{L}_e(x)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} R_e(x)+\bar{R}_e(x)\ (0\ 1)\ L_e(x)\right\} + m_\mu \left\{ \bar{L}_\mu(x)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} R_\mu(x) + \right.$$

(X,23)

$$\left. + \bar{R}_\mu(x)\ (0\ 1)\ L_\mu(x)\right\}$$

$$= m_e \left\{ \bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L \right\} + m_\mu \left\{ \bar{\mu}_L \mu_R + \bar{\mu}_R \mu_L \right\}$$

Ce terme n'est évidemment pas invariant sous la rotation (X,22)

Par conséquent le lagrangien complet pour les leptons s'écrira :

(X.24) a) $L = L_o + L_{(\gamma)} + L_{(W)}$

b) $L_o = \frac{1}{2}\left\{ \bar{L}_e(x) i\gamma^\alpha \partial_\alpha L_e(x) + \bar{L}_\mu(x) i\gamma^\alpha \partial_\alpha L_\mu(x) + \bar{R}_e(x) i\gamma^\alpha \partial_\alpha R_e(x) + \right.$

$\left. + \bar{R}_\mu(x) i\gamma^\alpha \partial_\alpha R_\mu(x) \right\} + \text{h.C.}$

$- \frac{1}{2}\left\{ m_e \bar{L}_e \Omega R_e + m_\mu \bar{L}_\mu \Omega R_\mu \right\} + \text{h.C.}$

c) $L_{(\gamma)} = e\ell^\lambda_{(\gamma)}(x)\ A_\lambda(x)$

d) $L_{(W)} = \frac{\mathcal{G}}{\sqrt{2}}\ \ell^{\lambda+}_{(W)}(x)\ \ell_{\lambda(W)}(x)$

où :

$$L_e(x) = \frac{1}{2}\ (1-\gamma^5)\begin{pmatrix}\nu_e(x)\\ e(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\nu_{eL}(x)\\ e_L(x)\end{pmatrix},$$

$$L_\mu(x) = \begin{pmatrix}\nu_{\mu L}(x)\\ \mu_L(x)\end{pmatrix},$$

$$R_e(x) = \frac{1}{2}\ (1+\gamma^5)e(x),$$

$$R_\mu(x) = \frac{1}{2}\ (1+\gamma^5)\mu(x),$$

$$\Omega = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

cou ant électromagnétique

(X,25)

$$\boxed{\begin{aligned}\ell^\lambda_{(\gamma)}(x) &= \bar{L}_e(x)\gamma^\lambda \frac{1-\tau_3}{2} L_e(x) + \bar{R}_e(x)\gamma^\lambda R_e(x) + \\ &+ \bar{L}_\mu(x)\gamma^\lambda \frac{1-\gamma_3}{2} L_\mu(x, \quad {}_\mu \quad ,\gamma^\lambda R_\mu,\end{aligned}}$$

et le courant est :

$$\ell^{\lambda}_{(a)}(x) = \bar{L}_e \gamma^{\lambda} \frac{\tau a}{2} L_e + \bar{L}_{\mu} \gamma^{\lambda} \frac{\tau a}{2} L_{\mu}$$

(X,34)

$$\text{d'où} \quad \ell^{\lambda}_{W}(x) = 2\left(\ell^{\lambda}_{(1)} + i\ell^{\lambda}_{(2)}\right)$$

Considérons le courant leptonique faible

$$\ell^{\lambda}_{(W)}(x) = 2(\ell^{\lambda}_{(1)} + i\ell^{\lambda}_{(2)}) = 2\left\{\bar{L}_e \gamma^{\lambda} \tau_+ L_e + \bar{L}_{\mu} \gamma^{\lambda} \tau_+ L_{\mu}\right\}$$

(X,35)

$$\tau_+ = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2)$$

et définissons la charge leptonique faible :

$$Q_{(W)}(t) = \int d^3x \ell^{o}_{(W)}(x) = 2 \int d^3x \left\{\bar{L}_e \gamma^{o} \tau_+ L_e + \bar{L}_{\mu} \gamma^{o} \tau_+ L_{\mu}\right\}$$

(X,36)

$$= \int d^3x \left\{\nu_e^+ (1-\gamma^5) e + \nu_{\mu}^+ (1-\gamma^5) \mu\right\}$$

Son adjoint est :

$$Q^+_{(W)}(t) = \int d^3x \, \ell^{o+}_{(W)} = 2 \int d^3x \left\{\bar{L}_e \gamma^{o} \tau_- L_e + \bar{L}_{\mu} \gamma^{o} \tau_- L_{\mu}\right\} =$$

(X,37)

$$= \int d^3x \left\{e^+ (1-\gamma^5) \nu_e + \mu^+ (1-\gamma^5) \nu_{\mu}\right\}$$

Le commutateur $[Q,Q^+]$ introduit une nouvelle grandeur

$$Q_{(W)3}(t) = \int d^3x \left(\nu_e^{\,+} (1-\gamma^5) \nu_e - e^+ (1-\gamma^5) e + \nu_{\mu}^{\,+} (1-\gamma^5) \nu_{\mu}\right.$$

(X,38)

$$\left. - \mu^+ (1-\gamma^5) \mu\right) = 4 \int d^3x \ell^{o}_{3}(x)$$

puisque :

$$[Q_W(t), Q^+_W(t)] = 2\, Q_{W3}(t)$$

Si on pose

$$\text{(X,39)} \quad \begin{cases} Q_{(W)}(t) = 2\, K_+ \\ Q^+_{(W)}(t) = 2K_- = 2\, K_+^{\,+} \\ Q_{(W)3}(t) = 4\, K_3 \end{cases}$$

il vient :

$$\text{(X,40)} \quad \begin{cases} [K_+, K_-] = 2\, K_3 \\ [K_3, K_+] = K_+ \\ [K_3, K_-] = -\, K_- \end{cases}$$

$$a, b = 1, 2, 3$$

qui définissent bien l'algèbre SU(2) x SU(2)

Ainsi donc les charges faibles $Q_W^{(\ell)}$, $Q_W^{(\ell)+}$, $Q_{W3}^{(\ell)}$ se transforment comme $2K_+$, $2K_-$, $4K_3$ respectivement. Pour voir les propriétés analogues de la charge électrique, définissons les nombres leptoniques

$$N_\ell = \int d^3x\, \psi_\ell^+ \psi_\ell \,, \qquad \ell = e, \mu$$

La charge $Q_{(Y)}^{(\ell)}$ s'écrit :

$$Q_{(Y)}^{(\ell)} = - \int d^3x \sum_\ell \psi_\ell^+ \psi_\ell^+ \frac{1-\tau_3}{2} \psi_\ell \,,$$

c'est-à-dire

$$\text{(X.44)} \qquad Q_{(Y)}^{(\ell)} = K_3^V - \frac{1}{2} \sum_\ell N_\ell$$

Comme on le sait, l'expérience suggère que les nombres leptoniques N_ℓ se conservent. Par conséquent les N_ℓ doivent commuter avec les opérateurs qui décrivent des variables physiques. Sinon, on déduirait de l'hypothèse (Ω étant un observable) :

$$[N_\ell, \Omega] \neq 0$$

que

$$\langle \ell | [N_\ell, \Omega] | \ell' \rangle \neq 0$$

où ℓ est un état propre de l'opérateur N_ℓ avec valeur propre n_ℓ

$$(n_\ell - n_{\ell'}) \langle \ell | \Omega | \ell' \rangle \neq 0$$

Par conséquent, si $n_\ell \neq n_{\ell'}$, on aurait $\langle \ell | \Omega | \ell' \rangle \neq 0$ et l'on pourrait produire une transition de l'état ℓ à l'état ℓ' ce qui est impossible si l'on admet la règle de super-sélection pour les nombres leptoniques. On déduit de la propriété de N_ℓ que ces opérateurs sont des multiples de l'identité, que la charge $Q_{(Y)}^{(\ell)}$ commute de la manière suivante avec K_+, K_-, K_3 :

$$[Q_{(Y)}^{(\ell)}, K_+] = [K_3^V, K_+] =$$

$$= [K_3 + L_3, K_+] =$$

$$= [K_3, K_+] =$$

$$= K_+$$

$$[Q^{(\ell)}_{(Y)}\ ,\ K_-] = -\ K_-$$

$$[Q^{(\ell)}_{(Y)}\ ,\ K_3] = 0$$

On en conclut que $Q^{(\ell)}_{(Y)}$ est de la forme :

$$Q^{(\ell)}_{(Y)} = K_o + K_3$$

où K_o est un opérateur qui commute avec K_1, K_2, K_3

$$[K_o, K_a] = 0 \quad , \qquad a = 1, 2, 3$$

et K_o, K_1, K_2, K_3 engendrent l'algèbre $U(1) \times SU(2)$

En effet de l'expression (IX,95) de $Q^{(\ell)}_{(Y)}$ on peut déduire

$$Q^{(\ell)}_{(Y)} = L_3 + K_3 - \frac{1}{2} \sum_{\ell} N_{\ell}$$

d'où

$$K_o = L_3 - \frac{1}{2} \sum_{\ell} N_{\ell}$$

L'algèbre des charges leptoniques servira de modèle pour l'étude de l'algèbre des charges et courants hadroniques.

CHAPITRE XI

LA DESINTEGRATION DU MUON ET LA CONSERVATION DES NOMBRES LEPTONIQUES

Le lagrangien purement leptonique décrira des réactions faibles où n'interviennent que des leptons, par exemple, la désintégration du muon.

La mesure de l'hélicité du muon provenant de la désintégration du pion :

(XI,1) $\pi \to \mu + \nu_\mu$

montre que ν_μ a la même hélicité que ν_e :

(XI,2) $s(\nu_\mu) = s(\nu_e) = -1$

Nous pouvons donc admettre que les deux neutrinos de la désintégration du muon

(XI,3) $\mu^- \to \nu_\mu + e^- + \overline{\nu}_e$

sont décrits par la théorie à deux composantes. On écrira donc :

(XI,4) $$L(\mu \to e) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{a=1}^{5} \frac{C_a^{(\mu)}}{2} \left(\overline{\nu}_\mu(1+\gamma^5)\Omega_a \mu\right)\left(\overline{e}\Omega_a(1-\gamma^5)\nu_e\right)$$

Le théorème de Fierz dit que, étant donné quatre spineurs arbitraires ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, on a la relation :

(XI,5) $$\sum_{a=1}^{5} C_a^{(\mu)} (\overline{\psi}_1\Omega_a\psi_2)\ (\overline{\psi}_3\Omega_a\psi_4) = \sum_{a=1}^{5} D_a\ (\overline{\psi}_1\Omega_a\psi_4)\ (\overline{\psi}_3\Omega_a\psi_2)$$

où

(XI,6) $$\begin{pmatrix} C_S \\ C_V \\ C_T \\ C_A \\ C_P \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & +1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & +4 & -6 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_S \\ D_V \\ D_T \\ D_A \\ D_P \end{pmatrix}$$

Rappelons que $\Omega_S = I$; $\Omega_V = \gamma^\lambda$; $\Omega_T = \sigma^{\mu\nu}$, $\Omega_A = \gamma^\lambda\gamma^5$, $\Omega_P = i\gamma^5$.

Nous pouvons donc écrire

(XI,7) $$L(\mu\to e) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{a=1}^{5} \frac{D_a}{2} \left(\overline{\nu}_\mu(1+\gamma^5)\Omega_a(1-\gamma^5)\nu_e\right) (\overline{e}\Omega_a\mu)$$

Ainsi la théorie à deux composantes pour ν_e et ν_μ implique les couplages S et P et V et A

Comme l'hélicité de l'électron est $-\frac{v}{c}$ sa fonction d'onde doit être $(1-\gamma^5)e$ et donc $\bar{e}\,(1+\gamma^5)$. Par conséquent

(XI,12) $$s(e^-) = -\frac{v}{c} \Rightarrow C_S = C_P = 0$$

et on obtient donc :

(XI,13) $$\boxed{L(\mu\to e) = \frac{C_V^{(\mu)}}{\sqrt{2}}\left(\bar{\nu}_\mu\gamma^\lambda(1-\gamma^5)\mu\right)\left(\bar{e}\gamma_\lambda(1-\gamma^5)\nu_e\right)}$$

Historiquement on a admis une superposition des cinq formes covariantes de la forme :

(XI,14)
$$\begin{aligned} L(\mu\to e) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big\{ & \left(\bar{\nu}_\mu(x)\mu(x)\right)\left(\bar{e}(x)(C_S+C'_S\gamma^5)\nu_e(x)\right) + \\ & + \left(\bar{\nu}_\mu(x)\gamma^\lambda\mu(x)\right)\left(\bar{e}(x)\gamma_\lambda(C_V+C'_V\gamma^5)\nu_e(x)\right) + \\ & + \frac{1}{2}\left(\bar{\nu}_\mu(x)\sigma^{\mu\nu}\mu(x)\right)\left(\bar{e}(x)\sigma_{\mu\nu}(C_T+C'_T\gamma^5)\nu_e(x)\right) + \\ & + \left(\bar{\nu}_\mu(x)\gamma^\lambda\gamma^5\mu(x)\right)\left(\bar{e}(x)\gamma_\lambda\gamma^5(C_A+C'_A\gamma^5)\nu_e(x)\right) + \\ & + \left(\bar{\nu}_\mu(x)i\gamma^5\mu(x)\right)\left(\bar{e}(x)i\gamma^5(C_P+C'_P\gamma^5)\nu_e(x)\right)\Big\} \end{aligned}$$

Avec ce lagrangien on obtient la matrice S pour la désintégration du muon :

(XI,15) $$S = (2\pi)^4\,\delta^4\,(P_\mu - p_e - k_{\nu e} - \bar{k}_{\nu\mu})\,M.$$

(XI,16)
$$\begin{aligned} M = -\frac{i}{\sqrt{2}} \Big\{ & \left(\bar{u}(k_{\nu\mu})u(P_\mu)\right)\left(\bar{u}(p_e)(C_S+C'_S\gamma^5)v(\bar{k}_{\nu e})\right) + \\ & + \left(\bar{u}(k_{\nu\mu})\gamma^\lambda u(P_\mu)\right)\left(\bar{u}(p_e)\gamma_\lambda(C_V+C'_V\gamma^5)v(\bar{k}_{\nu e})\right) \\ & + \frac{1}{2}\left(\bar{u}(k_{\nu\mu})\sigma^{\lambda\eta}\,u(P_\mu)\right)\left(\bar{u}(p_e)\sigma_{\lambda\eta}(C_T+C'_T\gamma^5)v(\bar{k}_{\nu e})\right) \\ & + \left(\bar{u}(k_{\nu\mu})\gamma^\lambda\gamma^5(P_\mu)\right)\left(\bar{u}(p_e)\gamma_\lambda\gamma^5(C_A+C'_A\gamma^5)v(\bar{k}_{\nu e})\right) + \\ & + \left(\bar{u}(k_{\nu\mu})i\gamma^5u(P_\mu)\right)\left(\bar{u}(P_e)i\gamma^5(C_P+C'_P\gamma^5)v(\bar{k}_{\nu e})\right)\Big\} \end{aligned}$$

où les spineurs sont normalisés de telle sorte que :

(XI,17) $$u(p) = \frac{\mathcal{U}(p)}{\sqrt{2E_pV}}\,,\quad \mathcal{U}^+(p)\,\mathcal{U}(p) = 2E_p$$

Pour obtenir la probabilité de transition par unité de temps nous devons : a) obtenir $|S|^2$; b) diviser par VT ou $(2\pi)^4\delta^4(o)$; c) multiplier

$$a' = C_S C'^*_P + C'_S C^*_P + C^*_S C'_P + C'^*_S C_P ,$$

$$-b' = C_V C'^*_A + C'_V C^*_A + C^*_V C'_A + C'^*_V C_A ,$$

$$c' = C_T C'^*_T + C^*_T C'_T ,$$

$$\alpha' = C_S C'^*_P + C'_S C^*_P - C^*_S C'_P - C'^*_S C_P ,$$

$$\beta' = C_V C'^*_A + C'_V C^*_A - C^*_V C'_A - C'^*_V C_A ,$$

(XI,24) $$\boxed{\xi = \frac{-3a'-4b'+14c'}{a+4b+6c}} ,$$

(XI,25) $$\boxed{\delta = \frac{3b'-6c'}{3a'+4b'-14c'}}$$

L'équation (XI,19) est la probabilité de désintégration d'un muon polarisé pour émettre un électron avec impulsion comprise entre $\vec{p}_e$ et $\vec{p}_e + d\vec{p}_e$. Elle dépend de cinq paramètres A, ρ, η, ξ, δ. Le paramètre ρ est le paramètre de Michel qui détermine essentiellement la forme du spectre de l'électron émis. η est très difficile à mesurer ; il faut prendre $E_e \ll E_{max}$ en vertu du facteur $\frac{m_e}{m_\mu} \ll 1$. ξ détermine l'asymétrie de la réaction et δ, la forme de la dépendance en E_e du terme en $\cos\theta$.

On voit que dans l'hypothèse de la théorie à deux composantes pour les deux neutrinos et si l'hélicité du ν_μ est égale à celle du ν_e on aura :

(XI,26) $$C_S = C'_S = C_T = C'_T = C_P = C'_P = 0$$
et
$$C_V = - C'_V ,\ C_A = - C'_A \text{ et } C_A = - C_V$$

On obtient alors :

(XI,27) $$\rho = \frac{3}{4} = \delta \quad , \quad \xi = 1$$

L'existence de deux neutrinos différents ν_μ et ν_e, qui sont décrits par la théorie à deux composantes, a été démontrée par l'expérience.

On prend le faisceau de neutrinos provenant de la désintégration du pion positif

(XI,28) $$\pi^+ \to \nu_\mu + \mu$$

et on lui fait bombarder des noyaux atomiques. Si ce neutrino était identique à ν_e on devrait avoir production d'électrons avant le seuil de la production des muons :

(XI,29) $$\nu_\mu \equiv \nu_e \quad \Rightarrow \quad \nu_\mu + N_Z \to N'_{Z+1} + e^-$$

Et le fait que l'on n'observe pas les réactions

$$\mu^{+} \not\rightarrow e^{\pm} + \gamma$$

et

$$\mu^{\pm} \not\rightarrow e^{+} + e^{-} + e^{\pm}$$

montre que le nombre leptonique de μ et ν_μ, d'une part, et <u>le nombre leptonique de e et ν_e d'autre part se conservent séparément.</u>

On pourrait avoir une loi de conservation de nombre leptonique différente. Au lieu d'imposer

1) L_e conservé, L_μ conservé dans toutes les réactions

on pourrait imposer

2) <u>$L_e + L_\mu$, conservé</u>, <u>signal de $(-1)^{L_e}$ conservé</u> dans toutes les réactions.

Les réactions :

$$\nu_\mu + p \rightarrow p + e^{-} + \mu^{+} + \nu_e$$

$$\nu_\mu + p \rightarrow p + e^{+} + \mu^{-} + \bar{\nu}_e$$

sont interdites par le principe 1) mais sont permises par le principe 2).

où $\tau_+ = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2)$, $\Psi_i(\vec{x},\sigma_3,\tau_3)$, $\Psi_f(x,\sigma_3,\tau_3)$ sont les fonctions d'onde des noyaux initial et final ; $\tau^{(\lambda)}$ agit sur les variables d'isospin du nucléon λ du noyau.

L'approximation d'impulse nous donne alors :

$$G_V \langle I\rangle = G_V \langle \Psi_f | T_+ | \Psi_i\rangle \tag{XII,7}$$

où T_+ est l'opérateur d'isospin total $T_+ = \frac{1}{2}(T_1 + iT_2)$.

Pour la réaction

$$O^{14} \to N^{14*} + e^+ + \nu_e \qquad (x) \tag{XII,8}$$

O^{14} et N^{14*} font partie d'un multiplet $T = 1$ et donc en rappelant que :

$$\langle T, T_Z - 1 | T_- | T, T_Z\rangle = \sqrt{(T+T_Z)(T-T_Z+1)} \tag{XII,9}$$

$T = 1$ et que $T_Z = 0$ pour N^{14} et $T_Z = 1$ pour O^{14} on a

$$\langle I\rangle = \sqrt{2}$$

Ainsi on obtient la valeur de G_V à partir de $\frac{1}{\tau_F}$:

$$\boxed{G_V \cong 1.408 \times 10^{-49} \text{erg.cm}^3} \tag{XII,10}$$

Le fait que G_V est presque égal à $\mathcal{G} = G_{(\mu)}$ est important et a conduit en 1949 à l'énoncé du principe de l'universalité des interactions faibles.

En fait cette presque égalité entre $G_V^{(\beta)}$ et $\mathcal{G} = G_\mu$ est surprenante, puisque, en plus de l'interaction faible entre nucléons et électron-neutrino, d'une part, et l'interaction faible entre muons et électron-neutrino, d'autre part, les nucléons ont des interactions fortes. En absence de ces dernières on pourrait en effet écrire un lagrangien de la forme :

$$L = \frac{\mathcal{G}}{\sqrt{2}} \left\{ \left(\bar{P}\gamma^\lambda(1-\gamma^5)N\right) + \left(\bar{\nu}_\mu\gamma^\lambda(1-\gamma^5)\mu\right)\right\} \left(\bar{e}\gamma_\lambda(1-\gamma^5)\nu_e\right) \tag{XII,11}$$

qui postulerait une égalité exacte non seulement entre les constantes d'interaction $G_V^{(\beta)}$ et $G_V^{(\mu)}$ mais aussi entre $G_V^{(\beta)}$ et $G_A^{(\beta)}$.

En réalité on a (voir VII,27)

$$\text{(XII,12)} \quad \begin{aligned} L_{\mu e} &= \frac{G\mu}{\sqrt{2}} \left\{ \left(\bar{\nu}_\mu\gamma^\lambda(1-\gamma^5)\mu\right)\right\} \left(\bar{e}\gamma_\lambda(1-\gamma^5)\nu_e\right) \\ L_{ne} &= \frac{GV}{\sqrt{2}} \left\{ \left(\bar{p}\gamma^\lambda(1-\frac{G_A}{G_V}\gamma^5)N\right)\right\} \left(\bar{e}\gamma_\lambda(1-\gamma^5)\nu_e\right) \end{aligned}$$

où $\vec{P}$ est l'opérateur d'impulsion.

Par conséquent :

(XII,17) $\langle p|j^{o}_{(\gamma)}(o)\ |p\rangle = 2p^{o}e_{p}$

D'autre part si l'on divise $j^{\lambda}_{(\gamma)}(x)$ par e_o on a pour les facteurs de forme électromagnétique

$$\frac{1}{e_o}\langle p'|j^{\lambda}_{(\gamma)}(o)|p\rangle = \bar{u}(p')\left\{\gamma^{\lambda}F_1{}^{P}(q^2) + \frac{i\sigma^{\lambda\eta}}{2m_N}q_{\eta}F_2{}^{P}(q^2)\right\}u(p)$$

donc :

(XII,18) $\langle p|j^{o}_{(\gamma)}(o)|p\rangle = e_o\ u^{+}(p)u(p)F_1{}^{P}(o)$

avec $u^{+}(p)u(p) = 2p^{o}$, $F_1{}^{P}(o) = 1$.

On a ainsi :

$$e_p = e_o = |e_e|$$

La charge de la particule en interaction forte est égale à la charge de la particule sans interaction forte :
Par conséquent si les charges "nues" $|e^{o}_{p}|$ et $|e^{o}_{e}|$ du proton et de l'électron sont égales en valeur absolue alors on aura toujours $|e_p| = |e_e|$ grâce à la conservation du courant.

Comme les interactions fortes sont invariantes <u>sous le groupe de rotations SU(2) dans l'espace d'isospin</u>, il y a trois générateurs T_a, qui satisfont aux commutateurs du type (IX,49), où

$$C^{ab}_{\ell} = i\varepsilon_{ab\ell}\ ,$$

(XII,19) $[T_a,T_b] = i\varepsilon_{abc}T_c$

Considérons alors le courant d'isospin qui conserve l'étrangeté (ou l'hypercharge Y), $V^{\mu}_{(o)a}(x)$.

On aura :

(XII,20) $T_a = \int V^{o}_{(o)a}(x)\ d^3\tau$

et T_a ne dépend pas du temps si $V^{\mu}_{(o)a}(x)$ est conservé.

Définissons le courant :

(XII,21) $V^{\mu}_{(o)+} = V^{\mu}_{1} + i\ V^{\mu}_{2}$

La charge électrique est donnée par la formule de Gell-Mann - Nishijima :

(XII,22) $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$

D'autre part :

$$<N^{14*}(p')\ |\int V^{o}_{(o)-}(x)d^3x\ |\ O^{14}(p)> =$$

(XII,31)

$$= (2\pi)^3\delta^3(p-p')\ <\ N^{14*}(p')\ |\ V^{o}_{(o)-}\ |\ O^{14}(p)>$$

$$= (2\pi)^3\ \delta^3(p-p')\ \sqrt{2}\ f_+(o)P^o,\quad P^o = p^o + p'^o$$

Mais :

(XII,32)

$$<N^{14*}(p')\ |\int V^{o}_{(o)-}\ (x)d^3x\ |\ O^{14}(p)> = <N^{14*}(p')\ |\ T_-\ |\ O^{14}(p)>$$

$$= <p'\ p>\ <T\ T_Z-1|T_-|T\ T_Z> = \sqrt{2}\ (2\pi)^3\ 2p^o\delta^3(p'-p)$$

par conséquent :

$$f_+(o) = 1$$

Ainsi à la limite de symétrie exacte de isospin on connaît l'élément de matrice de la réaction

$$O^{14} \rightarrow N^{14*} + e^+ + \nu_e$$

et le fait que $f_+(o) = 1$ indique que cette amplitude est la même que s'il n'y avait pas des interactions fortes.

On a donc :

(XII,33) $\qquad <I> = \sqrt{2}$

un résultat qui ne dépend pas des détails de physique nucléaire.

Ainsi $G_V = G_{(\mu)}$: les interactions fortes ne changent pas l'égalité des constantes admises dans le lagrangien. Les forces électromagnétiques détruisent la symétrie d'isospin et donc ces résultats sont valables en approximation. D'autre part, le courant axial ne se conserve pas et donc la constante d'interaction correspondante change par renormalisation.

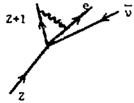
On trouve :

(XII,34)

$$\frac{G^2_{(\mu)} - G_V^2}{G^2_{(\mu)}} \cong 0.044$$

En réalité d'après Cabibbo on a :

Il doit y avoir des corrections dues aux interactions électromagnétiques du type mais la table montre que



ces corrections sont petites, de l'ordre de $Z^2\alpha^2$.

2) Magnétisme faible

Ecrivons d'après (XII,35)

(XII,38) $$V^{\mu}_{(o)}(x) = \frac{G_V}{\mathcal{G}} V^{\mu}_{(o)+}(x)$$

De la relation de commutation :

$$[V^{\lambda}_{(o)3}(x), T_+] = V^{\lambda}_{(o)+}(x)$$

Il vient :

$$\mathcal{G}\langle p' ; \tau_3 = \tfrac{1}{2} |V^{\lambda}_{(o)}(o)|p;\tau_3 = -\tfrac{1}{2}\rangle =$$

(XII,39) $$= G_V \langle p';\tau_3 = \tfrac{1}{2} |V^{\lambda}_{(o)+}(o)|p; \tau_3 = -\tfrac{1}{2}\rangle =$$

$$= G_V \langle p';\tau_3 = \tfrac{1}{2} |[V^{\lambda}_3(o), T_+]|p; \tau_3 = -\tfrac{1}{2}\rangle$$

Comme l'hypercharge commute avec T_+ (voir XII,23) on aura, si j^{λ}_Y désigne le courant d'hypercharge

(XII,40) $$G_V\langle p';\tau_3 = \tfrac{1}{2} |[V^{\lambda}_{(o)3}(o) + \tfrac{1}{2} j^{\lambda}_Y(o) , T_+]|p;\tau_3 = -\tfrac{1}{2}\rangle$$

et d'après l'équation (XII,22) il vient

(XII,41) $$G_V\langle p';\tau_3 = \tfrac{1}{2} |[j^{\lambda}_{(\gamma)}(o), T_+]|p;\tau_3 = -\tfrac{1}{2}\rangle$$

où $j^{\lambda}_{(\gamma)}(o)$ est le courant électromagnétique.

On obtient donc :

$$\mathcal{G}\langle p (P') |V^{\lambda}_{(o)}(o)|n(P)\rangle =$$

$$= G_V \langle p(P')|[j^{\lambda}_{(\gamma)}(o),T_+]|n(P)\rangle =$$

(XII,42) $$= G_V \{\langle p(P')|j^{\lambda}_{(\gamma)}(o)|p(P)\rangle - \langle n(P')|j^{\lambda}_{(\gamma)}(o)|n(P)\rangle\}$$

puisque

et par conséquent :

$$\text{(XII,47)} \qquad \boxed{\begin{aligned} g_V^{(1)}(q^2) &= G_V F_1{}^V(q^2) \\ g_V^{(2)}(q^2) &= G_V F_2{}^V(q^2) \end{aligned}}$$

Nous voyons que :

$$j^\lambda_{(\gamma)}(x) = j_S^\lambda + j_V^\lambda$$

où :

$$\text{(XII,48)} \qquad \boxed{\begin{aligned} &<P'|j_S^\lambda(o)|P> = \bar{u}(P') \left\{ \frac{1}{2} F_1{}^S(q^2)\gamma^\lambda + \frac{1}{2} F_2{}^S(q^2) \frac{i\sigma^{\lambda\eta}}{2m_N} q_\eta \right\} u(P) \\ &<P'|j_V^\lambda(o)|P> = \bar{u}(P') \left\{ F_1{}^V(q^2)\gamma^\lambda + F_2{}^V(q^2) \frac{i\sigma^{\lambda\eta}}{2m_N} q_\eta \right\} \frac{\tau_3}{2} u(P) \end{aligned}}$$

tandis que :

$$\text{(XII,49)} \qquad \boxed{\mathcal{G} <P'|V^\lambda_{(o)+}(o)|P> = \bar{u}(P') \left\{ g_V^{(1)}(q^2)\gamma^\lambda + g_V^{(2)}(q^2) \frac{i\sigma^{\lambda\eta}}{2m_N} q_\eta \right\} \tau_+ u(P)}$$

On voit que $j_V^\lambda(x)$, la partie isovectorielle de $j^\lambda_{(\gamma)}(x)$, et $V^\lambda_{(o)+}(x)$ sont partie d'un triplet (voir (XII,47)).

On a encore :

$$\text{(XII,50)} \qquad \begin{aligned} \frac{g_V^{(1)}(o)}{G_V} &= 1 \\ \frac{g_V^{(2)}(o)}{G_V} &= \mu_p - \mu_n \end{aligned}$$

Cette dernière relation est connue comme le terme de **magnétisme faible** (Gell-Mann)

Ainsi :

$$\text{(XII,51)} \qquad \begin{aligned} <P'|j^\lambda_{(\gamma)}(o)|P> = \bar{u}(P') \Big\{ &\left(\frac{F_1{}^S(q^2)}{2} + F_1{}^V(q^2) \frac{\tau_3}{2} \right)\gamma^\lambda + \\ &+ \left(\frac{F_2{}^S(q^2)}{2} + F_2{}^V(q^2) \frac{\tau_3}{2} \right) \frac{i\sigma^{\lambda\eta} q_\eta}{2m_N} \Big\} u(P') \end{aligned}$$

$$\frac{\mathcal{G}}{G_V} <P'|V^\lambda_{(o)+}(o)|P> = \bar{u}(P') \left\{ F_1{}^V(q^2) \frac{\tau_1 + i\tau_2}{2} \gamma^\lambda + F_2{}^V(q^2) \frac{\tau_1 + i\tau_2}{2} \frac{i\sigma^{\lambda\eta} q_\eta}{2m_N} \right\} u(P')$$

$$= \frac{G_V}{\mathcal{G}} <\pi^o|[T_-,j_{(\gamma)}^{\lambda}(o)]|\pi^+> =$$

$$= \frac{G_V\sqrt{2}}{\mathcal{G}} <\pi^+|j_{(\gamma)}^{\lambda}(o)|\pi^+> \quad (\text{puisque } <\pi^o|j_{(\gamma)}^{\lambda}(o)|\pi^o> = 0$$

et

$$<\pi^+_{(p')}|j_{(\gamma)}^{\lambda}(o)|\pi^+_{(p)}> = (p'+p)^{\lambda}F_{\pi}(q^2)$$

$F_{\pi}(q^2)$ est le facteur de forme électromagnétique du pion chargé. $F_{\pi}(o) = 1$ si $j_{(\gamma)}^{\lambda}(o)$ ne contient pas e_o. Comme dans la réaction ci-dessus q^2 est très petit on y fera $F_{\pi}(q^2) \cong 1$.

Le résultat théorique est

$$(XII,55) \quad R_{th} = \frac{\Lambda(\pi^+\to\pi^o+e^++\nu_e)}{\Lambda(\pi^+\to\mu^++\nu_{\mu})} \cong 1{,}05 \times 10^{-8}$$

et le résultat expérimental $R_{exp} = (1.03\pm0.07)\times10^{-8}$

4) Désintégration beta de Σ^+, Σ^-

$$(XII,56) \quad \begin{array}{l} \Sigma^+ \to \Lambda+e^++\nu_e \ , \\ \Sigma^- \to \Lambda+e^-+\bar{\nu}_e \end{array}$$

Le courant vectoriel contribue avec un élément de matrice, d'après (XII,44) et (XII,47)

$$(XII,57) \quad \mathcal{G}<\Lambda|V_{(o)}^{\lambda}(o)|\Sigma> = G_V\bar{u}_{\Lambda}(P')\left\{F_1^V(q^2)\gamma^{\lambda} + \frac{i\sigma^{\lambda\eta}}{2m_{\Lambda}}q_{\eta}F_2^V(q^2) + g_V^{(3)}(q^2)\frac{q^{\lambda}}{2m_{\Lambda}}\right\}u_{\Sigma^-}(P)$$

Dans le cas de la transition $n \to p$, à la limite de la symétrie SU(2), $m_n = m_p$, la conservation de $V_{(o)}^{\lambda}$ entraîne $g_V^{(3)}(q^2) = 0$. Ici, pourtant, $m_{\Lambda} \neq m_{\Sigma}$ à la limite de SU(2) et donc :

$$(XII,58) \quad \mathcal{G}<\Lambda|q_{\lambda}V_{(o)}^{\lambda}(o)|\Sigma> = G\bar{u}_{\Lambda}(P')\left\{(m_{\Lambda}-m_{\Sigma})F_1^V(q^2) + g_V^{(3)}(q^2)\frac{q^2}{2m_{\Lambda}}\right\}u_{\Sigma^-}(P)$$

Si la fonction $g_V^{(3)}(q^2)$ n'est pas singulière pour $q^2 \to 0$ alors

$$(XII,59) \quad \lim_{q^2\to0} q^2 g_V^{(3)}(q^2) = 0$$

par conséquent :

$$(XII,60) \quad \mathcal{G}<\Lambda|q_{\lambda}V_{(o)}^{\lambda}|\Sigma> = 0 \quad \text{entraîne } F_1^V(o) = 0$$

la contribution vectorielle permise est donc nulle

CHAPITRE XIII

LE MODELE DES QUARKS ET L'ANGLE DE CABIBBO

I - LE GROUPE SU(3) ET LE MODELE DES QUARKS

En vertu de l'existence de processus de désintégration avec changement d'étrangeté tels que :

$$\text{(XIII,1)} \quad \begin{array}{l} \Lambda \to p + e^- + \bar{\nu}_e \\ K^o \to \pi^- + e^+ + \nu_e \end{array}$$

il faut admettre l'existence d'un courant faible hadronique avec changement d'étrangeté. L'expérience a confirmé que sa structure est similaire à celle de $h^\lambda_{(1)}(x)$, à savoir :

$$\text{(XIII,2)} \quad h^\lambda_{(1)}(x) = V^\lambda_{(1)}(x) - A^\lambda_{(1)}(x)$$

Ce courant a aussi une forme V-A.

On est alors amené à se poser la question suivante : le courant vectoriel $V^\lambda_{(1)}(x)$ se conserve-t-il et est-il dans ces conditions, en rapport avec les générateurs d'un groupe de symétrie ?

Nous savons que si un lagrangien est invariant par rapport à SU(2) il y a trois courants conservés qui commutent avec l'hypercharge Y. Ces courants conservés ne peuvent donc pas changer l'étrangeté. Ainsi il faut un groupe de symétrie plus large que SU(2) s'il y en a un en rapport avec l'éventuelle conservation de $V^\lambda_{(1)}(x)$.

Ce groupe est le groupe SU(3) - le groupe des transformations unimodulaires et unitaires dans un espace complexe à trois dimensions. Une telle transformation s'écrit en général :

$$\text{(XIII,3)} \quad \mathcal{U} = e^{i\varepsilon_a F_a}$$

où

$$\text{(XIII,4)} \quad [F_a, F_b] = i f_{abc} F_c$$

les F_a sont huit opérateurs hermitiques et sans trace - les générateurs des transformations infinitésimales du groupe SU(3).

$$d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{888} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$d_{146} = d_{157} = -d_{247} = d_{256} = d_{344} =$$

$$= d_{355} = -d_{366} = d_{377} = \frac{1}{2}$$

les autres f et d étant nuls .

Le modèle des quarks introduit un vecteur à trois composantes, chaque composante étant un spineur de Dirac

(XIII,6) $$q = \begin{pmatrix} p \\ n \\ \lambda \end{pmatrix}$$

le champ des quarks. Et le modèle admet que les hadrons sont des tenseurs dans des espaces de certaines représentations de SU(3) construites à partir des deux représentations fondamentales non-équivalentes 3 et 3^*.

Si q^k représentent les composantes contravariantes d'un vecteur dans l'espace complexe à trois dimensions, elles se transforment sous SU(3) d'après l'équation :

(XIII,7) $$\boxed{q'^k = \mathscr{U}^k_\ell \, q^\ell} , \qquad k = 1, 2, 3.$$

(somme sur $\ell = 1,2,3$) $(\mathscr{U}^k_\ell)$ est une matrice unimodulaire et unitaire et l'ensemble de ces matrices constitue une représentation - <u>la représentation fondamentale</u> - du groupe SU(3). Une autre représentation, non équivalente, <u>la représentation conjuguée</u> - s'obtient à partir de la loi de transformation des composantes covariantes ainsi définie :

On a :

(XIII,8) $$\boxed{\begin{aligned} q_k &= (q^k)^* \\ q'_k &= (\mathscr{U}^k_\ell)^* (q^\ell)^* = (\mathscr{U}^+)^\ell_k \, q_\ell \end{aligned}}$$

La non-équivalence des deux représentations provient de ce qu'il n'existe aucune matrice à 3 dimensions S telle que :

(XII,9) $$\mathscr{U}^* = S \mathscr{U} S^{-1}$$

(tandis que, dans le cas du groupe SU(2), une telle relation d'équivalence existe, $S = 1_2$)

Si $\mathscr{U}$ s'écrit sous la forme de l'équation (XIII,3) alors

(XIII,10) $$\mathscr{U}^* = e^{-i\varepsilon_\alpha F_\alpha^*}$$

c'est-à-dire sera le nombre d'éléments indépendants d'un tenseur symétrique à m indices supérieurs et n indices inférieurs moins le nombre de conditions qui leur sont imposées pour que le tenseur soit sans trace :

$$\text{(XIII,11)}\quad \dim(m,n) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}\ \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{m(m+1)}{2}\ \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,(n+1)(m+1)(n+m+2)$$

Ainsi :

Représentation	nom	Dimension
(0,0) = identique	singulet	1
(1,0) = 3 (0,1) = 3^*	triplet	3

Représentation	nom	Dimension	
(1,1) = 8	octet	8	
(2,0) = 6 (0,2) = 6^*	sextet	6	
(2,1) = 15 (1,2) = 15^*	15	15	(XIII,12)
(2,2)	27	27	
(3,0) = 10 (0,3) = 10^*	décuplet	10	

etc

On voit que l'on représente (m,n) par le nombre dim(m,n) si m > n et par $\dim(m,n)^*$ si m < n.

On décrit une représentation (m,n) par un diagramme de tableaux de Young :

$$\text{(XIII,12a)}\qquad (m,n) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots\cdots & m+n \\ \hline & & & \cdots\cdots & n & \\ \cline{1-5}\end{array}$$

la première ligne contient m+n carrés et correspond à des états symétriques
la deuxième ligne contient n carrés

Ainsi :

ou : (XIII,16) $\qquad 3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^*$

Etant donné les nombres quantiques des quarks :

(XIII,17)

	T	$T_3 = \frac{\lambda_3}{2}$	$Y = \frac{2}{\sqrt{2}} \lambda_8$	B	$Q = T_3 + \frac{Y}{2}$
p	1/2	1/2	1/3	1/3	2/3
n	1/2	-1/2	1/3	1/3	-1/3
λ	0	0	-2/3	1/3	-1/3

on voit que la configuration $\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix} = 3^*$ a les mêmes nombres quantiques que les antiquarks :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (pn-np) \quad \sim \quad \bar{\lambda}$$

(XIII,18) $$\frac{1}{\sqrt{2}} (p\lambda-\lambda p) \quad \sim \quad \bar{n}$$

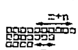
$$\frac{1}{\sqrt{2}} (n\lambda-\lambda n) \quad \sim \quad \bar{p}$$

Ainsi $\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}$ représente aussi bien les états antisymétriques de deux quarks que le triplet antiquark.

Par conséquent on peut écrire pour un système quark-antiquark :

(XIII,19) $$\boxed{3 \otimes 3^* = \square \otimes \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix} = 1 \oplus 8}$$

La configuration $\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}$ a les nombres quantiques du vide, $Y = 0$, $T = 0$ (sauf $B = 1$) ; on peut donc l'oublier et représenter les tableaux :



simplement par la configuration (XIII,12a)

Considérons maintenant le système à trois quarks

(XIII,20) $\qquad 3 \otimes 3 \otimes 3 \equiv \square \otimes \square \otimes \square$

La valeur maximale de l'hypercharge est $Y = 1$ pour trois quarks et la configuration symétrique aura $T = \frac{3}{2}$, un <u>quartet</u> donc.

Pour $Y = 0$ on aura deux quarks (p,p) ou (pn) ou (nn) et un λ sa partie symétrique correspondra à $T = 1$, un <u>triplet</u>. Pour $Y = -1$ on aura 1 quark

Si nous changeons $\frac{1}{\sqrt{2}}(pn-np)p \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(pn-np)\lambda$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(pn-np)n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(pn-np)\lambda$$

on aura une configuration avec $Y = 0$ et $T = 0$.

Si nous changeons $\frac{1}{\sqrt{2}}(p_1n_2-p_2n_1)p_3 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1\lambda_2-p_2\lambda_1)p_3$

on aura des configurations avec $T = 0$ et $T = 1$. La dernière partie $T = 0$ est déjà contenue dans la première.

On a donc dans l'octet : deux états $Y = 1$, $T = 1/2$
trois états $Y = 0$, $T = 1$
un état $Y = 0$, $T = 0$
deux états $Y = -1$, $T = 1/2$

Cette composition montre qu'elle est adaptée pour s'identifier avec l'octet des baryons stables

TABLE DE L'OCTET BARYONIQUE

(XIII,22)

	T	Y	Composition des quarks
P	1/2	1	ppn
N	1/2	1	pnn
Σ^+	1	0	$pp\lambda$
Σ^0	1	0	$pn\lambda$
Σ^-	1	0	$nn\lambda$
Λ	0	0	$pn\lambda$
Ξ^0	1/2	-1	$p\lambda\lambda$
Ξ^-	1/2	-1	$n\lambda\lambda$

$Y = 1$, $T = 1/2$ deux nucléons
$Y = 0$, $T = 0$ lambda
$Y = 0$, $T = 1$ les trois sigma
$Y = -1$, $T = 1/2$ les csi.

Aussi d'après la formule (XIII,19) on voit que l'octet des mesons constitués par le eta, les trois pions, les deux doublets de kaons peut s'identifier à la configuration 8 provenant du produit $3 \otimes 3^*$ (voir par

(XIII,25) $$M = \begin{pmatrix} m_p & 0 & 0 \\ 0 & m_n & 0 \\ 0 & 0 & m_\lambda \end{pmatrix}$$

La transformation de jauge de 1ère espèce

$$q \to e^{i\varepsilon} q$$

produit, comme on le sait, le courant (baryonique) :

$$B_\mu(x) = \bar{q}(x)\, \gamma^\mu\, q(x)$$

qui se conserve. La charge correspondante (le nombre baryonique)

$$B = \int B^o(x) d^3x = N_q - N_{\bar{q}}$$

se conserve. On a :

$$q(x) \to e^{-i\varepsilon B}\, q(x) e^{i\varepsilon B} = e^{i\varepsilon}\, q(x)$$

qui donne lieu à :

$$[B, q_k(x)] = -\, q_k(q)$$

La symétrie de L_o sous le groupe SU(3) exige l'égalité des masses

$$m_p = m_n = m_\lambda$$

En effet sous la transformation :

(XIII,26) $$q(x) \to e^{i\varepsilon_\alpha \frac{1}{2}\lambda_\alpha}\, q(x) \simeq (I + i\varepsilon_\alpha \tfrac{1}{2}\lambda_\alpha) q(x)$$

le terme en la masse de L_o se transforme ainsi :

$$\bar{q}(x) M(x) q(x) = \bar{q}_i M_{ik} q_k + \bar{q}_i (I - i\varepsilon_\alpha \tfrac{1}{2}\lambda_\alpha)_{ij} M_{jk} (I + i\varepsilon_\alpha \tfrac{1}{2}\lambda_\alpha)_{kn} q_n =$$

(XIII,27) $$= \bar{q}_i M_{ij} q_j + i\varepsilon_\alpha \left\{ \bar{q}_j M_{jk} \tfrac{1}{2}(\lambda_\alpha)_{kn} q_n - \bar{q}_i \tfrac{1}{2}(\lambda_\alpha)_{ij}\, M_{jk}\, q_k \right\}$$

$$= \bar{q}_i M_{ij} q_j + i\varepsilon_\alpha \bar{q}_i (m_i - m_k) \tfrac{1}{2} (\lambda_\alpha)_{ik} q_k$$

et donc L_o n'est invariant que si $m_i = m_k$, $i,k = p,n,\lambda$.

Dans ce cas il y aura huit courants conservés :

$$\boxed{V_a^\mu(x) = \bar{q}(x) \gamma^\mu\, \tfrac{1}{2}\, \lambda_a\, q(x)}$$

(XIII,28) et :

$$\partial_\mu\, V_a^\mu(x) = 0 \qquad \text{si } m_p = m_n = m_\lambda$$

Les générateurs de SU(3) sont les F_a tels que :

$$e^{-i\varepsilon_a F_a}\, q(x)\, e^{i\varepsilon_a F_a} = e^{i\varepsilon_a \frac{1}{2}\lambda_a} q(x)$$

Les courants axiaux sont :

(XIII,35) $$\boxed{A_a^\mu(x) = \bar{q}(x)\gamma^\mu\gamma^5 \tfrac{1}{2} \lambda_a q(x)}$$

et les générateurs $F_a^{\,5}$ sont :

(XIII,36) $$\boxed{F_a^{\,5} = \int d^3x \, A_a^0(x) = F_a^{\,5}(t)}$$

Les courants axiaux ne se conserveraient que si les masses de tous les quarks étaient nulles :

(XIII,37) $$\boxed{\partial_\mu A_a^\mu(x) = i \, \bar{q}_\ell(x)\gamma^5(m_\ell + m_k) \, (\tfrac{1}{2}\lambda_a)_{\ell k} q_k(x)}$$

Les générateurs F_a ne forment pas une algèbre fermée. L'ensemble des 16 générateurs F_a, $\bar{F}_a$ forme une algèbre fermée puisque :

(XIII,38)
$$\begin{aligned}
&[F_a(t), F_b(t)] = i\, f_{abc} F_c(t) \ , \\
&[F_a^{\,5}(t), F_b^{\,5}(t)] = i\, f_{abc} F_c(t) \ , \\
&[F_a^{\,5}(t), F_b(t)] = i\, f_{abc} F_c^{\,5}(t)
\end{aligned}$$

C'est une algèbre SU(3) x SU(3), ce qu'on voit en définissant les charges chirales gauche et droite :

(XIII,39)
$$\begin{aligned}
F_a^{\,L}(t) &= \tfrac{1}{2} \, [F_a(t) - F_a^{\,5}(t)] \ , \\
F_a^{\,R}(t) &= \tfrac{1}{2} \, [F_a(t) + F_a^{\,5}(t)] \ .
\end{aligned}$$

On a alors :

(XIII,40)
$$\begin{aligned}
&[F_a^{\,L}(t), F_b^{\,L}(t)] = i \, f_{abc} F_c^{\,L}(t) \ , \\
&[F_a^{\,R}(t), F_b^{\,R}(t)] = i \, f_{abc} F_c^{\,R}(t) \ , \\
&[F_a^{\,R}(t), \, F_a^{\,L}(t)] = 0
\end{aligned}$$

Les courants chirales associés à $F_L^{\,5}$ et $F_R^{\,5}$ sont :

(XIII,41)
$$\begin{aligned}
j_a^{L\mu}(x) &= \bar{q}(x)\gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \, \frac{1}{2} \, \lambda_a q(x) \\
j_a^{R\mu}(x) &= \bar{q}(x)\gamma^\mu \, \frac{1+\gamma^5}{2} \, \frac{1}{2} \, \lambda_a q(x)
\end{aligned}$$

__Les courants__ $\underline{V_a^\mu(x)}$ *__et__* $\underline{A_a^\mu(x)}$ *se transforment sous SU(3) comme un* opérateur tenseur qui __appartient à la représentation 8__ :

(XIII,42)
$$\begin{aligned}
&[F_a(t), \, V_b^\mu(x)] = i \, f_{abc} V_c^\mu(x) \\
&[F_a(t), \, A_b^\mu(x)] = i \, f_{abc} A_c^\mu(x)
\end{aligned}$$

ce qui résulte des règles de commutation de $q(x)$.

III - L'ANGLE DE CABIBBO ET L'UNIVERSALITE DES INTERACTIONS FAIBLES

Avec les huit générateurs F_a on peut définir un ensemble de huit autres opérateurs équivalents.

$$
\begin{aligned}
T^+ &= F_1 + i F_2 , \\
T^- &= F_1 - i F_2 , \\
T^3 &= F_3 , \\
V^+ &= F_4 + i F_5 , \\
V^- &= F_4 - i F_5 , \\
\mathscr{U}^+ &= F_6 + i F_7 , \\
\mathscr{U}^- &= F_6 - i F_7 \\
Y &= \frac{2}{\sqrt{3}} F_8
\end{aligned}
\qquad \text{(XIII,43)}
$$

Dans la représentation fondamentale on a :

$$
T^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad T^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,
$$

$$
V^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad V^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,
$$

(XIII,43a)

$$
\mathscr{U}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathscr{U}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
Y = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
$$

et ces opérateurs ont les commutateurs suivants

$$
\begin{aligned}
[T^+, T^-] &= 2T_3 , \\
[T_3, T^\pm] &= \pm T^\pm , \\
[V^+, V^-] &= 2V_3 , \qquad V_3 = \frac{1}{2} (T_3 + \frac{3}{2} Y) , \\
[V_3, V^\pm] &= \pm V^\pm ,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&[U^+,U^-] = 2U_3\,, \qquad U_3 = \tfrac{1}{2}\left(-T_3 + \tfrac{3}{2}Y\right)\\
&[U_3,U^\pm] = \pm U^\pm\\
\text{(XIII,43b)}\quad &[Y,T^\pm] = 0,\ [Y,T_3] = 0\,,\\
&[T_3,V^\pm] = \pm \tfrac{1}{2} V^\pm\,,\\
&[Y,V^\pm] = \pm V^\pm\,,\\
&[T_3,U^\pm] = \mp \tfrac{1}{2} U^\pm\,,\\
&[Y,U^\pm] = \pm U^\pm\,,\\
&[T^-,V^+] = U^+,\quad [T^+,U^+] = V^+\,,\\
&[V^-,T^+] = U^-,\quad [U^-,T^-] = V^-\,,\\
&[V^+,U^-] = T^+,\quad [U^+,V^-] = T^-
\end{aligned}$$

On voit que :

$$\text{(XIII,44)}\qquad \begin{aligned}\bar{q}\gamma^\mu(1-\gamma^5)T^+q &= \bar{p}\gamma^\mu(1-\gamma^5)n\\ \bar{q}\gamma^\mu(1-\gamma^5)T^-q &= \bar{n}\gamma^\mu(1-\gamma^5)p\end{aligned}$$

et donc ce sont les courants faibles des quarks qui correspondent aux transitions faibles neutron → proton et proton → neutron respectivement (voir équation XII,11).

D'autre part,

$$\text{(XIII,45)}\qquad \begin{aligned}\bar{q}\gamma^\mu(1-\gamma^5)V^+q &= \bar{p}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\lambda\\ \bar{q}\gamma^\mu(1-\gamma^5)V^-q &= \bar{\lambda}\gamma^\mu(1-\gamma^5)p\end{aligned}$$

On peut donc considérer ces courants comme les responsables des transitions lambda → proton et proton → lambda respectivement.

Nous allons donc admettre que les courants faibles $V^\mu(x)$ et $A^\mu(x)$ sont des membres d'un octet de SU(3). Et puisqu'il n'y a que deux générateurs de SU(3) qui correspondent, l'un à un changement de charge hadronique $\Delta Q = 1$ et d'hypercharge (ou d'étrangeté) $\Delta Y = 0$, l'autre à $\Delta Q = 1$, $\Delta Y = 1$ à savoir, T^+ et V^+ respectivement, nous poserons, avec Cabibbo :

$$\text{(XIII,46)}\quad V^\mu(x) = C_o(V_1{}^\mu + iV_2{}^\mu) + C_1\ (V_4{}^\mu + iV_5{}^\mu)$$

où $V_a^\mu(x)$, a = 1,2, ... 8, est un octet de courants sous SU(3) tel que les générateurs de ce groupe soient :

$$\text{(XIII,47)}\qquad F_a = \int V_a^o(x)\,d^3x$$

Quelles sont les conditions aptes à déterminer les constantes C_o et C_1 ? Or si, en général, le courant $V^\mu(x)$ est une combinaison linéaire de $V_a^\mu(x)$ (un vecteur de l'espace à 8 dimensions) on pourrait toujours faire une transformation SU(3) et le vecteur $V^{\mu}(x)$ changerait de position dans le plan $\delta Q = 1$ sans que l'on puisse déterminer sa direction. Le fait que le lagrangien (XIII,24) a un terme de masse signifie que la symétrie SU(3) est rompue. En effet, ce terme privilégie les axes 3 et 8 de l'espace de l'octet puisque :

(XIII,56)
$$\bar{q}(x) M q(x) = \bar{q}(x) \begin{pmatrix} m_p & 0 & 0 \\ 0 & m_n & 0 \\ 0 & 0 & m_\lambda \end{pmatrix} q =$$
$$= \alpha\left(\bar{q}(x) I q(x)\right) + \beta\left(\bar{q}(x)\lambda_3 q(x)\right) + \gamma\left(\bar{q}(x)\lambda_8 q(x)\right)$$

où :

$$\alpha = \frac{1}{3}\,(m_p + m_n + m_\lambda)$$
$$\beta = \frac{1}{2}\,(m_p - m_n)$$
$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{6}\,(m_p + m_n - 2\, m_\lambda)$$

Par conséquent l'hamiltonien δH_{nf} qui rompt la symétrie SU(3) contient un terme de la forme : $\bar{q}Mq$ qui privilégie les axes 3 et 8 (ce terme commute toutefois avec T_3 et Y). Dans l'approximation où l'on néglige les interactions électromagnétiques on pose $m_p = m_n$ et alors c'est l'axe 8 qui rompt la symétrie SU(3), c'est-à-dire, si $m_\lambda \neq m_p$.

D'ailleurs, les divergences (XIII,31) et (XIII,37) s'écrivent :

(XIII,57a)
$$\partial_\mu V^{\mu}_a(x) = i\,\bar{q}(x)\,[M, \tfrac{1}{2}\lambda_a]\,q(x)\ ,$$
$$\partial_\mu A^{\mu}_a(x) = i\,\bar{q}(x)\,\{M, \tfrac{1}{2}\lambda_a\}\,\gamma^5 q(x)$$

ou :

$$\partial_\mu V^{\mu}_a(x) = (\beta f_{a3b} + \gamma f_{a8b})\,\bar{q}(x)\,\lambda_b\,q(x)$$

(XIII,57b)
$$\partial_\mu A^{\mu}_a(x) = i\alpha\bar{q}(x)\gamma^5\lambda_a q(x) +$$
$$i\beta\left(\frac{2}{3}\,\delta_{a3}\,\bar{q}(x)\,\gamma^5 q(x) + d_{3ac}\,\bar{q}(x)\,\gamma^5\lambda_c q(x)\right)$$
$$+\ i\gamma\left(\frac{2}{3}\,\delta_{a8}\,\bar{q}(x)\,\gamma^5\,q(x) + d_{8ac}\,\bar{q}(x)\,\gamma^5\lambda_c q(x)\right)$$

puisque :

$$M = \alpha I + \beta\lambda_3 + \gamma\lambda_8$$

Pour les courants d'intérêt physique d'après (XIII,54) on a :

(XIII,58)
$$\partial_\mu(V^{\mu}_1 + iV_2^{\mu}) = i\,(m_p - m_n)\,(\bar{p}n)$$

et donc le courant vectoriel sans changement d'étrangeté se conserve quand $m_p = m_n$, i.e., quand la symétrie SU(2) est exacte (en négligeant les effets électromagnétiques).

et par conséquent :

(XIII,64) $$\frac{\Lambda(K\to\mu+\nu_\mu)}{\Lambda(\pi\to\mu\ \nu_\mu)} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\ \frac{f_K^2}{f_\pi^2}\ \frac{m_K}{m_\pi}\frac{\left(1-\frac{m_\ell^2}{m_K^2}\right)^2}{\left(1-\frac{m_\ell^2}{m_\pi^2}\right)^2}$$

De la valeur expérimentale de ce rapport il vient

(XIII,65) $$\left(\frac{f_K}{f_\pi}\right)\ \mathrm{tg}\ \theta \cong 0{,}27$$

A la limite de symétrie SU(3) exacte

$$f_K = f_\pi \qquad (SU(3)\ \text{exacte})$$

on obtient

(XIII,66) $$\sin\theta \cong 0.2655 \pm 0.0066$$

en premier ordre dans le terme de rupture de SU(3).

$$<0|A^{\mu}_{(o)}(x)|\pi> = <0|A^{\mu}_{(o)}(o)|\pi>\, e^{-ip_\pi x} = if_\pi(p^2)p^{\mu}_{\pi}\, e^{-ip_\pi x}$$

$$<0|\partial_\mu A^{\mu}_{(o)}(x)|\pi> = f_\pi m_\pi^2 e^{-ip_\pi x}$$

Par conséquent si $A^{-}_{(o)}(x)$ était conservé on aurait

$$\text{soit } f_\pi = 0$$

et donc les désintégrations (VIII,1,2) du pion seraient interdites ;

$$\text{soit } m_\pi = 0$$

le pion devrait avoir une masse nulle.

On voit que cette limite est moins forte que celle imposée par le modèle des quarks puisque d'après celui-ci

$$\partial_\mu(A^{\mu}_{1}+iA^{\mu}_{2}) = i(\bar{p}\gamma^5 n)(m_p+m_n)$$

la conservation de ce courant exigerait $m_p = m_n = 0$. L'expérience semble indiquer la conservation partielle de courant axial (PCAC) due à la petite valeur de la masse du pion par rapport à la masse des baryons. Pourquoi cet intérêt à la conservation de $A^{\mu}(x)$? Pour expliquer la faible renormalisation de G_A (équation VII,29).

Considérons la désintégration beta du neutron et l'expression (VII,24) de l'élément de matrice du courant axial. Comme la partie du courant axial avec $\Delta Y = 0$ est, d'après (XIV,1), $A^{\mu}_{(+)}(x)\cos\theta$ on posera

$$\mathcal{G}<P'|A^{\mu}_{(o)}(o)|P> = G_V <P'|A^{\mu}_{(+)}(o)|P>$$

c'est-à-dire :

$$<P'|A^{\mu}_{(o)}(o)|P> = <P'|A^{\mu}_{(+)}(o)|P> \cos\theta \qquad \text{(XIV,3)}$$

où

$$<P'|A^{\lambda}_{(+)}(o)|P> =$$

$$= \bar{u}_p(P')\{f^{(1)}_A(q^2)\gamma^\lambda\gamma^5+f^{(2)}_A(q^2)\sigma^{\lambda\eta}q_\eta\gamma^5+f^{(3)}_A(q^2)q^\lambda\gamma^5\}u_n(P) \qquad \text{(XIV,4)}$$

avec (voir VII,24) :

$$f^{(i)}_{A}(q^2) = \frac{g^{(i)}_A(q^2)}{G_V}$$

On a alors (voir VII,6) :

$$(XIV,11)\quad \langle P'|A_+^\lambda(o)|P\rangle_\pi^{m_\pi=0} = (i)\left(iq^\lambda f_\pi(q^2)\right)\frac{i}{-q^2}\left(\sqrt{2}g_{\pi N}i\bar{u}(P')\gamma^5\tau_+u(P)\right)$$

où l'on considère que la masse du pion est nulle.

Si l'on compare avec l'expression de cet élément de matrice en fonction des facteurs de forme on voit que ce diagramme ne contribue qu'à la fonction $f_A^{(3)}(q^2)$:

$$(XIV,12)\qquad f_A^{(3)}(q^2)_\pi = \frac{\sqrt{2}g_{\pi N}f_\pi(q^2)}{-q^2}$$

où $g_{\pi N}$ est la constante de couplage π-N renormalisée $\frac{g^2_{\pi N}}{4\pi} \cong 14$, $f_\pi(q^2)$ est le facteur de forme du pion dans la transition pion $\to$ vide.

Ainsi si cette contribution domine la valeur du facteur de forme jusqu'à $q^2 \to 0$, on aura :

$$\lim q^2\, f_A^{(3)}(q^2) = -\sqrt{2}\, g_{\pi N}\, f_\pi(o)$$

et par conséquent :

$$f_A^{(1)}(o) = \frac{\sqrt{2}}{2m_N}\ g_{\pi N}f_\pi(o)$$

Comme

$$f_A^{(1)}(o) = \frac{G_A}{G_V}$$

on obtient la relation de Goldberger-Treiman

$$(XIV,13)\qquad \boxed{g_{\pi N}f_\pi(o) = \sqrt{2}\ m_N\,\frac{G_A}{G_V}}$$

La cons... f_π se réfère à des pions chargés.

Cette relation serait exacte si la masse du pion était nulle. On peut la considérer comme approximativement valable puisque $m_\pi \ll m_N$. Pour déduire de cette équation une autre relative à des quantités mesurables physiquement il faut savoir comment ces quantités passent, comme fonctions de m_π, de la valeur zéro à la valeur de la masse du pion ; on admet, faute de meilleure connaissance, la variation lente. Une application directe de la relation de Goldberger-Treiman aux valeurs expérimentales

$$(XIV,14)\qquad \frac{G_A}{G_V} \cong 1{,}22\quad ,\quad \frac{g^2_{\pi N}}{4\pi} \cong 14{,}5$$

donne

$$f_\pi(o) \cong 0.61\ m_\pi$$

tandis que

$$f_\pi(o)_{exp} \cong 0{,}68\ m_\pi$$

alors, comme

(XIV,21) $\qquad <0|\partial_\lambda A^\lambda(o)|\pi> = f_\pi m_\pi^2$

on obtient :

(XIV,22) $\qquad C = m_\pi^2 f_\pi$

Appelons j_π le courant qui est la source du champ φ, c'est-à-dire, posons par définition :

(XIV,23) $\qquad j_\pi^a(x) = (\Box+m_\pi^2)\varphi_a(x)$

Soit

(XIV,24) $\qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1+i\varphi_2)$

On aura alors pour la désintégration du neutron, par exemple :

$$<P'|\partial_\mu A_+^\mu(o)|P> = C <P'|\varphi(o)|P> = C \frac{<P'|(m_\pi^2-q^2)\varphi(o)|P>}{m_\pi^2-q^2}$$

(XIV,25)

$$= C \frac{<P'|j_\pi(o)|P>}{m_\pi^2-q^2}$$

Par définition :

(XIV,26) $\quad <P'|j_\pi(o)|P>_{q^2=m_\pi^2} = \sqrt{2}\; g\; \bar{u}_p(P')i\gamma^5 u_n(P)$

Si $q^2 \neq m_\pi^2$ on définira $g(q^2)$ par l'équation :

(XIV,27) $\quad <P'|j_\pi(o)|P> = \sqrt{2}\; g(q^2)\; \bar{u}_p(P')i\gamma^5 u_n(P)$

$g(q^2)$ est la constante de couplage pion-nucléon hors de couche de masse ($q^2 \neq m_\pi^2$).

Si l'on compare ces deux équations avec les équations (XIV,7) et (XIV,8) on obtient :

(XIV,28) $\quad D(q^2) = \frac{C\sqrt{2}g(q^2)}{m_\pi^2-q^2} = \frac{\sqrt{2}f_\pi m_\pi^2 g(q^2)}{m_\pi^2-q^2}$

équation exacte pour $q^2 \neq m_\pi^2$.

Etant donné la définition (XIV,7) il vient à partir de $D(q^2)$:

(XIV,29) $\quad g(o)f_\pi = \sqrt{2}\; m_N \frac{G_A}{G_V}$

L'hypothèse PCAC affirme que $<P'|j_\pi(o)|P>$ varie lentement comme fonction de $q^2 = (P'-P)^2$ dans l'intervalle $0 \leq q^2 \leq m_\pi^2$. *Si l'on remplace alors*

(XIV,30) $\quad g(o) \cong g(m_\pi^2)$

$$\frac{G_P}{G_A} \simeq 7$$

IV - CONSERVATION PARTIELLE DU COURANT AXIAL AVEC $\Delta Y = 1$

Les considérations des paragraphes précédents relatifs au pion et au pôle du pion se transplantent au cas du kaon. Cela veut dire que les conditions étudiées pour la conservation du courant axial avec $\Delta Y = 0$ et basées sur la petite valeur de m_π sont généralisables au cas du courant axial avec $\Delta Y = 1$ et seront basées sur la limite $m_K \to 0$. Comme $m_K \sim 3m_\pi$, ces considérations sont moins utiles sous le point de vue physique.

Au lieu de la désintégration beta du neutron on considérera par exemple :

$$\Sigma^- \to n + e^- + \bar{\nu}_e$$

et le courant axial y contribue avec l'élément de matrice :

$$<P'(n)|A^{\mu}_{(1)}(o)|P(\Sigma^-)> \quad <P'(n)|A^{\mu}_{(1)+}(o)|P(\Sigma^-)>\sin\theta \tag{XIV,37}$$

où :

$$A^{\mu}_{(1)+} = A^{\mu}_4 + iA^{\mu}_5$$

Comme pour l'équation (VII,24) on pose maintenant :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}<P'(n)|A^{\lambda}_{(1)}(o)|P(\Sigma^-)> = \bar{u}_n(P') \Big\{ G^{(1)}_A(q^2)\gamma^\lambda\gamma^5 + G^{(2)}_A(q^2)\sigma^{\lambda\eta}q_\eta\gamma^5 + \\ + G^{(3)}_A(q^2)q^\lambda\gamma^5 \Big\} u_\Sigma(P) \end{aligned} \tag{XIV,38}$$

où :

$$G^{(1)}_A(o) = G_A^{\Sigma-n}$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} <P'(n)|A^{\lambda}_{(1)+}(o)|P(\Sigma^-)> = \bar{u}_n(P') \Big\{ F^{(1)}_A(q^2)\gamma^\lambda + \\ + F_A^{(2)}(q^2)\sigma^{\lambda\eta}q_\eta + F^{(3)}_A(q^2)q^\lambda \Big\} \gamma^5 u_\Sigma(P) \end{aligned} \tag{XIV,39}$$

où :

$$F^{(1)}_A(q^2) = \frac{G^{(1)}_A(q^2)}{G_V^{\Sigma-n}}$$

avec :

$$G_V^{\Sigma-n} = \mathcal{G}\sin\theta$$
$$G_A^{\Sigma-n} = G^{(1)}_A(o)$$

CHAPITRE XV

LA FORME ALGEBRIQUE DE L'UNIVERSALITE

I - REGLES DE SELECTION

On a vu au Chapitre XIII, paragraphe III que les courants faibles sont membres d'un octet SU(3).

Comme il n'existe pas des générateurs de SU(3) avec $\Delta Y > 1$, la théorie conduit aux règles de sélection suivantes :

a) $\boxed{|\Delta S| \leq 1}$ Les réactions semi-leptoniques avec $|\Delta S| > 1$ sont interdites, par exemple :

$$\Xi \not\to n + e^- + \bar{\nu}_e$$
$$\bar{\nu}_e + n \not\to \Lambda^0 + K^- + e^+$$

b) $\boxed{\Delta Q = \Delta S}$ Les réactions semi-leptoniques avec $\Delta Q = -\Delta S$ sont interdites. En effet,, comme la charge hadronique est donnée par

$$Q = T_3 + \frac{S+B}{2} \tag{XV,1}$$

où B est le nombre baryonique, $\Delta B = 0$, on aura

$$\Delta Q = \Delta T_3 + \frac{1}{2}\,\Delta S \tag{XV,2}$$

L'hypothèse $\Delta Q = -\Delta S$ conduit à :

$$\Delta T_3 = \frac{3}{2}\,\Delta Q \tag{XV.3}$$

et comme dans les réactions faibles $\Delta Q = 1$, on aurait dans ces conditions :

$$|\Delta T_3| = \frac{3}{2} \tag{XV,4}$$

Le courant devrait donc avoir une partie avec isospin supérieur ou égale à 3/2. Ces termes n'existent pas dans l'octet SU(3).

Par conséquent les réactions interdites (XV,5) suivantes sont interdites

D'autre part :

(XV,12) $$J^{\lambda+}_{(1)}|K^o\rangle \sim |T = \frac{1}{2}, T_3 = -\frac{1}{2}, T' = \frac{1}{2}, T'_3 = -\frac{1}{2}\rangle$$

et puisque :

$$|\pi^-\rangle = |1,-1\rangle = |-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$

on aura :

$$\langle\pi|J^{\lambda}_{(1)}|K^o\rangle \sim H$$

ce qui établit le rapport ci-dessus.

Si on se rappelle que, en négligeant la violation très faible de CP, on peut écrire :

$$K_S^o = |K_1^o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|K^o+\overline{K}^o\rangle \quad , \quad |K_2^o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|K^o-\overline{K}^o\rangle = K_L^o$$

on a :

(XV,13) $$\langle\pi^o|J^{+\lambda}_{(1)}|K^+\rangle = \langle\pi^-|J^{\lambda+}_{(1)}|K_1^o\rangle = \langle\pi^-|J^{\lambda+}_{(1)}|K_2^o\rangle$$

puisque

$$\overline{K}^o \not\to \pi^- + e^+ + \nu_e$$

est interdite par la règle $\Delta S = \Delta Q$.

Par conséquent :

(XV,14) $$\Lambda\ (K^+ \to \pi^c + e^+ + \nu_e) = \Lambda\ (K_1^o \to \pi^{\mp} + e^{\pm} + \nu_e) = (K_2^o \to \pi^{\mp} + e^{\pm} + \nu_e)$$

K_1^o et K_2^o ne sont pas des états propres de l'étrangeté c'est pourquoi ils peuvent se désintégrer en π^+ et en π^-.

II - ELEMENTS DE MATRICE DU COURANT ENTRE MEMBRES D'UN OCTET

Nous voulons maintenant déterminer la forme des états physiques de la représentation 8.

Comme les opérateurs π^o des particules de l'octet satisfont au commutateur :

(XV,15) $$[F^a,\pi^b] = i\ f^{abc}\ \pi^c$$

on a :

$$\langle\pi^b|F^a|\pi^c\rangle = \langle\pi^b|F^a|\pi_c|0\rangle = \langle\pi^b|[F^a,\pi^c]|0\rangle$$

$$= \langle\pi^b|if^{acd}|\pi^d\rangle =$$

$$= if^{acb} = if^{bac}$$

De la formule générale :

(XV,20) $T_+|t,t_3-1\rangle = \sqrt{(t+t_3)(t-t_3+1)}\,|t,t_3\rangle$

On a :

(XV,21) $T_+|1,0\rangle = \sqrt{2}|1,1\rangle$

Si l'on identifie l'état $|y = 0,\ t = 1,\ t_3 = 0\rangle$ avec $|\pi^3\rangle$ on obtient

(XV,22) $T_+|\pi^3\rangle = \sqrt{2}|y = 0,\ t = 1,\ t_3 = 1\rangle$

D'autre part, d'après (XV,16)

(XV,23) $T_+|\pi^3\rangle \equiv (F_1+iF_2)|\pi^3\rangle = if^{13d}|\pi d\rangle + i(if^{23d})|\pi_d\rangle = -i|\pi_1\rangle - |\pi_2\rangle$

par conséquent :

(XV,24) $\boxed{|y = 0,\ t = 1,\ t_3 = 1\rangle \equiv |t_+\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi_1\rangle + i|\pi_2\rangle)}$ $|\pi^+\rangle,\ |\Sigma^+\rangle$

On obtient ainsi :

(XV,25) $\boxed{|y = 0,\ t = 1,\ t_3 = -1\rangle \equiv |t_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi_1\rangle - i|\pi_2\rangle)}$ $|\pi^-\rangle,\ |\Sigma^-\rangle$

(XV,26) $\boxed{|y = 0,\ t = 1,\ t_3 = 0\rangle \equiv |t_o\rangle \equiv |\pi_3\rangle}$ $|\pi^o\rangle,\ |\Sigma^o\rangle$

Aussi :

(XV,27) $V^+|\pi_3\rangle = (F_4+iF_5)|\pi_3\rangle = if_{43d}|\pi_d\rangle - f_{53d}|\pi_d\rangle = -\frac{i}{2}(|\pi_4\rangle + i|\pi_5\rangle)$

par conséquent si :

(XV,28) $V^+|\pi_3\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|y = 1,\ t = 1/2,\ t_3 = 1/2\rangle$

on aura :

(XV,29) $\boxed{|y = 1,\ t = \frac{1}{2},\ t_3 + \frac{1}{2}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi_4\rangle + i|\pi_5\rangle)}$ $|K^+\rangle,\ |p\rangle$

$$\mathcal{U}^+|\pi_3\rangle = (F_6 + iF_7)|\pi_3\rangle = if_{63d}|\pi_d\rangle - f_{73d}|\pi_d\rangle =$$

$$= \frac{i}{2}|\pi_7\rangle + \frac{1}{2}|\pi_6\rangle = \frac{1}{2}(|\pi_6\rangle + i|\pi_7\rangle)$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{2}|y = 1,\ t = 1,\ t_3 = -\frac{1}{2}\rangle$$

on obtient :

(XV,30) $\boxed{|y = 1,\ t = \frac{1}{2},\ t_3 = -\frac{1}{2}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi_6\rangle + i|\pi_7\rangle)}$ $|K^o\rangle,\ |N\rangle$

Egalement :

(XV,31) $\boxed{|y = -1,\ t = \frac{1}{2},\ t_3 = \frac{1}{2}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi_6\rangle - i|\pi_7\rangle)}$ $|\bar{K}^o\rangle,\ |\Xi^o\rangle$

XV,32) $\boxed{|y=-1,\ t=\frac{1}{2}\ ,\ t_3=-\frac{1}{2}> = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|\pi_4> + i|\pi_5>)}$ $|K^->,\ |\Xi^->$

Avec la définition des générateurs T^+, $\mathcal{U}^+$, ... et avec la constante de structure du groupe SU(3) on construit donc les états physiques de l'octet.

Les mêmes constantes f_{abc} déterminent <u>les éléments de matrice du courant vectoriel entre membres d'un octet dans l'approximation permise</u>.

En effet posons :

(XV,33a) $[F_a, B_b] = i\, f_{abc}\, B_c$

où B_c sont les composantes de l'octet des baryons et soit :

(XV,33b) $<B_f(p')|V_a^\lambda(o)|B_i(p)> = i\,\overline{u}(p')\gamma^\lambda u(p) C_{aif} + O(q)$

où $O(q)$ sont des termes qui s'annulent avec $q = p'-p$.

On a alors :

$$
\begin{aligned}
<B_f(p')|F_a|B_i(p)> &= if_{aik} <B_f(p')|B_k(p)> = \\
&= if_{aik}\, \delta_{fk}\, (2\pi)^3\, 2p^o\, \delta^3(p'-p)\, \delta_{S_3S'_3} \\
&= if_{aif}\, (2\pi)^3\, 2p^o \delta^3(p'-p)\, \delta_{S'_3S_3}
\end{aligned} \tag{XV,34}
$$

Mais à la limite de symétrie SU(3) exacte :

$$
\begin{aligned}
<B_f(p')|F_a|B_i(p)> &= <B_f(p')|\int V_a^{\,o}(x) d^3x|B_i(p)> \\
&= <B_f(p')|\int V_a^{\,o}(\vec{x},o) d^3x|B_i(p)> = \\
&= (2\pi)^3\, \delta^3(p'-p)\, i\,\overline{u}(p')\gamma^o\, u(p)\, C_{aif} = \\
&= i\, C_{aif}\, 2p^o\, (2\pi)^3\, \delta^3(p'-p)\, \delta_{S_3S'_3}
\end{aligned} \tag{XV,35}
$$

On voit que

(XV,36) $C_{aif} = f_{aif}$

Pour les courants axiaux on considère que $A_a^\lambda(o)$ appartient à un octet et donc

$$A_a^\lambda(o)|B_i(p)> \in\ 8 \otimes 8 = \overline{1} + 8_1 + 8_2 + 10 + 10^* + 27$$

A l'élément de matrice

$$<B_f(p')|A_a(o)|B_i(p)>$$

contribueront seulement les éléments de 8_1 et 8_2. Il y a deux combinaisons linéaires de $A_a^\lambda(o)|B_i(p)>$ qui se transforment comme un octet :

(XV,37a) $if_{aik}\, A_a^\lambda(o)|B_i(p)> = |\varphi_k^{\lambda(I)}(p)$

$$d_{aik}\, A_a^{\lambda}(o)|B_i(p)\rangle = |\varphi_k^{(II)\lambda}(p)\rangle . \qquad \text{(XV,37b)}$$

On aura donc dans la limite SU(3) exacte :

$$\langle B_f(p')|A_a^{\lambda}(o)|B_i(p)\rangle =$$

$$= if_{aik}\,\langle B_f(p')|\varphi_k^{I\lambda}(p)\rangle + d_{aik}\,\langle B_i(p')|\varphi_k^{II\lambda}(p)\rangle \qquad \text{(XV,38)}$$

Dans l'approximation permise :

$$\begin{aligned} f_{aik}\,\mathscr{G}\langle B_f(p')|\varphi_k^{I\lambda}(p)\rangle_{p'=p} &= G_F\, \bar{u}'\gamma^{\lambda}\gamma^5 u\, f_{aif} \\ d_{aik}\,\mathscr{G}\langle B_f(p')|\varphi_k^{II\lambda}(p)\rangle_{p'=p} &= G_D\, u'\gamma^{\lambda}\gamma^5 u\, d_{aif} \end{aligned} \qquad \text{(XV,39)}$$

d'où :

$$\mathscr{G}\langle B_f(p)|A_a^{\lambda}(o)|B_i(p)\rangle = (if_{aif}G_F + d_{aif}\,G_D)\,\bar{u}'\gamma^{\lambda}\gamma^5 u . \qquad \text{(XV,40)}$$

Si l'on applique cette méthode à plusieurs réactions on obtient :

$$\begin{aligned} & n \to p+e^-+\bar{\nu}_e && G_A = \cos\theta(G_F+G_D) \\ & \Sigma^- \to \Lambda+e^-+\bar{\nu}_e && G_A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,G_D \cos\theta \\ & \Sigma^- \to n+e^-+\bar{\nu}_e && G_A = (G_D-G_F)\sin\theta \\ & \Lambda \to p+e^-+\bar{\nu}_e && G_A = -(\sqrt{3}G_F+\frac{G_D}{\sqrt{3}})\,\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ & \Xi^- \to \Lambda+e^-+\bar{\nu}_e && G_A = (\sqrt{3}G_F-\frac{G_D}{\sqrt{3}})\,\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \end{aligned} \qquad \text{(XV,41)}$$

Pour le courant vectoriel on obtient G_V en faisant $G_D = 0$ et $G_F = \mathscr{G}$ dans ces formules pour G_A.

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 0.228 \pm 0.006 \\ \frac{G_D}{G_D+G_F} &= 0.611 \pm 0.014 \end{aligned} \qquad \text{(XV,42)}$$

III - <u>LE THEOREME DE ADEMOLLO ET GATTO</u>

Considérons la réaction ($K_{\ell 3}$) :

$$K^+ \to \pi^0+e^++\nu_e \qquad \text{(XV,43)}$$

Son élément de matrice est :

$$M = \frac{\mathscr{G}}{2}\,\sin\theta\langle\pi^0(p')\,V_4^{\lambda}(o)-i\,V_5(o)|K^+(p)\rangle\,\left(\bar{u}_{\nu}\gamma_{\lambda}(1-\gamma^5)v_e\right) \qquad \text{(XV,44)}$$

Ainsi à la limite $\lambda \to 0$:

$$f_+(o) = 1$$

Le théorème d'Ademollo et Gatto affirme que $f_+(o)$ diffère de l'unité, quand le courant est non-conservé, par des termes du second ordre, λ^2, dans le paramètre λ du hamiltonien qui rompt la symétrie.

En effet, du commutateur

(XV,49) $$[V^+,V^-] = 2V_3 \equiv T_3 + \frac{3}{2} Y$$

on tire :

(XV,50) $$\langle K^+(p_2)|[V^+,V^-]|K^+(p_1)\rangle = 2(2\pi)^3\, 2E_K\, \delta^3\,(p_2-p_1)$$

On insère un ensemble complet d'états physiques intermédiaires

$$\sum_n \left\{\langle K^+(p_2)|V^+|n\rangle \langle n|V^-|K^+(p_1)\rangle - \right.$$

$$\left. - K^+(p_2)|V^-|n\rangle\langle n|V^+|K^+(p_1)\rangle\right\} \equiv$$

(XV,51) $$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^o} \left\{\langle K^+(p_2)|V^+|\pi^o(p)\rangle\langle\pi^o(p)|V^-|K^+(p_1)\rangle - \right.$$

$$\left. - \langle K^+(p_2)|V^-|\pi^o(p)\rangle\langle\pi^o(p)|V^+|K^+(p_1)\rangle\right\} + \sum_{n'} \{\ldots\} =$$

$$= 2(2\pi)^3\; 2E_K\; \delta^3(p_2-p_1)$$

On définit la constante $f_{K\pi}$ par :

(XV,52) $$\langle\pi^o(p)|V^-|K^+(p_1)\rangle = \sqrt{2} f_{K\pi}\;(2\pi)^3(2E_\pi 2E_K)^{1/2}\;\delta^3\;(p-p_1)$$

Il en résulte que :

(XV,53) $$2f^2_{K\pi}(2\pi)^3\delta^3(p_2-p_1)2E_K + \sum_{n'}\left\{\langle p_2|V^+|p'\rangle\langle p'|V^-|p_1\rangle - \right.$$
$$\left. - \langle p_2|V^-|p'\rangle\langle p'|V^+|p_1\rangle\right\} = 2(2\pi)^3\; 2E_K\delta^3(p_2-p_1)$$

Comme $\langle p_2|V^+|p_1\rangle \sim O(\lambda)$ (puisque de $[F_a,H] = i\int d^3x\; \partial_\alpha V^\alpha_a(x)$

il résulte

(XV,54) $$\langle p_2|F_a|p_1\rangle = i\,\frac{\langle p2|\partial_\alpha V^\alpha_a|p'\rangle}{E_2-E_1}\,(2\pi)^3\;\delta^3(p_2-p_1)$$

et $\langle p_2|\partial_\alpha V^\alpha_a|p_1\rangle \sim O(\lambda)$) il est clair que

(XV,55) $$f^2_{K\pi} = 1 + O\,(\lambda^2)$$

CHAPITRE XVI

LES DIFFICULTES DE LA THEORIE V-A DES INTERACTIONS FAIBLES

I - LES BOSONS INTERMEDIAIRES DES INTERACTIONS FAIBLES

Après la suggestion initiale de Fermi, on avait essayé de décr les interactions faibles au moyen de composantes scalaire, vectorielle, pseudoscalaire, axiale et tensorielle du lagrangien, d'après une superposition du type donné par l'équation (III,20), les combinaisons V-A et S-T+P étant invariantes par rapport au réarrangement de Fierz. Il n'y avait ainsi aucune raison de tenir à l'idée de bosons intermédiaires qui seraient les responsables des interactions faibles - l'idée de postuler un grand nombre de champs intermédiaires et de constantes d'interaction n'est pas satisfaisante.

La conception de Yukawa d'associer les pions aux interactions faibles aussi bien qu'aux interactions fortes n'avait pas abouti puisque bien que les pions donnent lieu à une interaction faible pseudo-scalaire induite ils ne peuvent pas décrire les interactions de Fermi (l'échange de pions ne contribue pas aux facteurs de forme vecteur ou axial dominant à $q \to 0$ dans la désintégration beta).

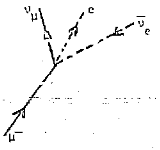
Dès le moment néanmoins où Feynman et Gell-Mann et Marshak et Sudarshan montrèrent que le courant faible était un quadrivecteur, l'analogie avec l'électrodynamique devint plus frappante : on pensa que l'interaction locale de Fermi courant-courant pouvait bien être due à un échange d'un boson vectoriel lourd entre les courants.

Si l'on considère par exemple la désintégration du muon

$$\mu^- \to \nu_\mu + e + \bar{\nu}_e$$

le graphe de Feynman pour l'interaction locale courant-courant (fig. XVI,1) :

Figure (XVI,1)

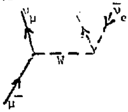


conduit à l'amplitude S de la réaction, qui s'écrit en première approximation, d'après les règles de Feynman

$$S = -\frac{iG_F}{\sqrt{2}} \int d^4x \left(\overline{\nu}_\mu(x)\gamma^\alpha(1-\gamma^5)\mu(x)\right)\left(\overline{e}(x)\gamma_\alpha(1-\gamma^5)\nu_e(x)\right)$$

L'idée que l'interaction est le résultat de l'échange d'un méson lourd W, de masse m_W, entre les courants, nous conduit à remplacer ce graphe par le diagramme de la figure XVI,2

Figure (XVI,2)



Si l'on désigne par $\Delta_F^{\alpha\beta}(x-y)$ le propagateur de Feynman du champ vectoriel $W^\alpha(x)$ associé aux mésons W, on aura pour l'amplitude correspondant à ce dernier diagramme l'expression

$$S' = -ig_W^2 \iint d^4x d^4y \left(\overline{\nu}_\mu(x)\gamma^\alpha(1-\gamma^5)\mu(x)\right) \left(\Delta_F(x-y)\right)_{\alpha\beta} \overline{e}(y)\gamma^\beta(1-\gamma^5)\nu_e(x)$$

La constante g_W est la constante d'interaction entre les courants et le champ W^α.

Un champ vectoriel $W^\alpha(x)$ doté d'une masse m_W satisfait à l'équation :

$$\partial_\beta G^{\alpha\beta}(x) + m_W^2 W^\alpha(x) = \rho^\alpha(x) ,$$

où $\rho^\alpha(x)$ est le courant, source du champ et

$$G^{\alpha\beta}(x) = \partial^\beta W^\alpha(x) - \partial^\alpha W^\beta(x)$$

Cette équation s'écrit

(XVI,1) $$P_{\alpha\beta}W^\beta(x) = \rho_\alpha(x)$$

où

$$P_{\alpha\beta} = (\Box + m_W^2)\, g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\partial_\beta$$

est l'opérateur que nous appellerons opérateur de Proca.

Dans le vide, $\rho_\alpha(x) = 0$, l'équation :

$$P_{\alpha\beta}W^\beta(x) = 0$$

doit conduire à l'équation de Klein-Gordon en raison de la relation relativiste entre l'énergie et l'impulsion. Il doit donc exister un opérateur $\pi^{\alpha\beta}$, l'opérateur de Peierls, tel que

(XVI,2) $$\pi^{\alpha\lambda}P_{\lambda\beta} = \delta^\alpha_{\ \beta}\,(\Box + m_W^2) ,$$

par cette formule de S' si l'on admet que le transfert d'impulsion

$$k = p_{\nu_\mu} - p_\mu$$

est très faible par rapport à la masse m_W :

$$k^2 \ll m_W^2$$

L'identification de S et S' dans cette approximation conduit à la relation :

$$\frac{g_W^2}{m_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}$$

entre la constante g_W, la masse m_W et la constante de Fermi.

II - INDICATIONS D'UNE POSSIBLE UNIFICATION DES INTERACTIONS FAIBLES ET ELECTROMAGNETIQUES

Pour calculer la masse m_W on doit connaître la constante d'interaction g_W. Puisque le méson W est vectoriel, l'auteur a suggéré en 1958 que cette constante d'interaction g_W était égale à la charge e, constante d'interaction d'un autre boson vectoriel, le photon, avec la matière :

$$g_W = e$$

Dans ces conditions la masse m_W a une valeur de l'ordre de 40 masses protoniques.

Dans le même article, l'auteur suggérait l'existence de mésons vectoriels chargés $W^{\pm}$ et de mésons vectoriels neutres W^0 et essayait sans succès d'éliminer les réactions non observées produites par les courants neutres.

Par conséquent, l'hypothèse $g_W = e$ indiquait pour la première fois que les mésons W et les photons appartenaient à la même famille et que les interactions électromagnétiques et faibles avaient la même origine. Cette idée trouve sa réalisation dans le développement élégant et précis élaboré par Weinberg et par Salam et Ward.

La théorie de Fermi n'est pas renormalisable : les intégrales divergentes des amplitudes d'ordre supérieur au premier ne sont pas absorbées dans la renormalisation de la masse et de la constante d'interaction. La théorie des mésons vectoriels qui ont une masse n'est pas renormalisable non plus : elle n'a pas d'invariance de jauge et le propagateur de Feynman possède un terme quadratique dans l'impulsion des mésons virtuels qui contribue à la divergence des amplitudes d'ordre supérieur au premier.

L'idée de Salam et Ward et de Weinberg a été de décrire les bosons vectoriels par des champs à masse nulle, ayant une invariance de et le lagrangien

$$L = ej^{\mu}_{(\gamma)} A_{\mu} + g_W (j^{\lambda}_W W^{+}_{\lambda} + j^{\lambda +}_W W_{\lambda}) + g_o j^{\lambda}_{(o)} W_{(o)\lambda}$$

deviendra :

$$L = e\,(j^{\lambda}_1 W_{1\lambda} + j^{\lambda}_2 W_{2\lambda} + j^{\lambda}_3 W_{3\lambda} + j^{\lambda}_o V_{\lambda})$$

dès le moment où les constantes d'interaction satisfont aux relations

(XVI,4) $$e = - g_o = \frac{2\eta g_W}{\sqrt{2}}$$

Pour mettre sur un pied d'égalité les interactions électromagnétiques et les interactions faibles sous la forme d'un lagrangien indépendant de la charge, on devrait donc avoir une relation entre la charge e et les constantes d'interaction g_W et g_o, du type indiqué ci-dessus.

Si l'on pose $\eta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans l'équation (XVI,4) on obtient l'égalité $g_W = e$.
Pour $\eta = 2$ la relation

$$e = \frac{4g_W}{\sqrt{2}}$$

a été établie par T.D. Lee. Le modèle de Salam et Weinberg relie les champs V^{λ} et A^{λ} à un champ de Yang-Mills $\mathfrak{a}^{\lambda}_a$ et à un champ vectoriel B^{λ}. La relation (XVI,4) y est remplacée par une autre plus générale.

IV - VIOLATION DE L'UNITARITE

La théorie basée sur le lagrangien (III,13) ne peut pas décrire les réactions faibles au-dessus d'une certaine énergie. Elle conduit à une section efficace pour la diffusion

(XVI,5) $$\nu_{\ell} + \ell^- \rightarrow \nu_{\ell} + \ell^-$$

(XVI,6) et $$\bar{\nu}_{\ell} + \ell^- \rightarrow \nu_{\ell} + \ell^-$$

qui viole la borne d'unitarité.

Pour voir cela, considérons tout d'abord par simplicité une collision élastique entre deux particules sans spin. L'amplitude de diffusion s'écrit, comme il est bien connu :

$$f(\theta) = \frac{2\pi}{k} \langle\theta|T|0\rangle \,,$$

$$\langle\theta|T|0\rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell} (2\ell+1)\, T_{\ell}(s)\, P_{\ell}(\cos\theta) \,.$$

$$T_\ell = 2\, e^{i\delta_\ell} \sin\delta_\ell ,$$

en fonction de l'impulsion (tri-dimensionnelle) initiale k et l'énergie totale s dans le système du centre de masse, $T_\ell(s)$ et $\delta_\ell(s)$ étant l'amplitude d'onde partielle et la phase correspondante. La section efficace différentielle est alors :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

D'autre part, l'unitarité de la matrice S conduit au théorème optique :

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(o)$$

qui établit une relation entre la section efficace totale et la partie imaginaire de l'amplitude en avant (θ=0).

Si, dans une collision, une onde partielle seulement contribue à l'amplitude, par exemple l'onde S, on aura :

$$\operatorname{Im} f(o) \sim \frac{1}{k} \sin^2 \delta_o \leq \frac{1}{k}$$

et par conséquent :

$$\sigma_{tot} \leq \frac{4\pi}{k^2} = \frac{16\pi}{s}$$

si l'on peut négliger les masses des particules de telle façon que :

$$s = 4k^2$$

On a donc pour la section efficace élastique, dans ce cas, la borne d'unitarité :

$$\sigma_{e\ell} \leq \sigma_{tot} \leq \frac{16\pi}{S}$$

Maintenant, nous avons besoin de la section efficace des réactions (XVI,5), (XVI,6) ; elles sont :

(XVI,7) $$\frac{d\sigma(\nu_\ell \ell^-)}{d\Omega} = \frac{G_F^2}{4\pi^2} \frac{(s-m_\ell^2)^2}{s} ,$$

$$\frac{d\sigma(\bar{\nu}_\ell \ell^-)}{d\Omega} = \frac{G_F^2}{4\pi^2} \frac{(s-m_\ell^2)^2}{s} \times$$

(XVI,8) $$\times \frac{1}{4s^2} \{(s-m_\ell^2) \cos\theta + s + m_\ell^2\}^2$$

où s est le carré de l'énergie totale dans le système du centre de masse et θ est l'angle de diffusion. On doit comparer ces équation avec la section efficace donnée par le formalisme de Jacob et Wick :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |\langle\lambda_3\lambda_4|f|\lambda_1\lambda_2\rangle|^2 \qquad \text{(XVI,9)}$$

où $\langle\lambda_3\lambda_4|f|\lambda_1\lambda_2\rangle$ est l'amplitude de diffusion des particules initiales 1 et 2, avec hélicités λ_1, λ_2 dans les particules finales 3,4 avec hélicités $\lambda_3\lambda_4$. Cette amplitude est une série d'ondes partielles :

$$\langle\lambda_3\lambda_4|f|\lambda_1\lambda_2\rangle = \frac{1}{2k}\sum_{J=0}^{\infty}(2J+1)\langle\lambda_3\lambda_4|T_J|\lambda_1\lambda_2\rangle\, d^J_{\lambda\lambda'}(\theta) \qquad \text{(XVI,10)}$$

où k est l'impulsion dans le système du centre de masse et

$$d^J_{\lambda\lambda'}(\theta) = \langle j\lambda'|e^{-i\theta J_y}|j\lambda\rangle \ ; \ \lambda = \lambda_2-\lambda_1,\ \lambda' = \lambda_4-\lambda_3$$

est la matrice des rotations θ autour de l'axe y (voir Mattin & Spearman, <u>Elementary particle theory</u> Chapitre 4 et Appendice A).

Si l'on compare l'équation (XVI,7) pour grandes énergies :

$$\frac{d\sigma(\nu_\ell\ell^-)}{d\Omega} \simeq \frac{G^2}{4\pi^2}\,s \simeq \frac{G^2}{\pi^2}\,k^2 \ , \ s \gg m_\ell^2$$
$$s \simeq 4k^2$$

avec (XVI,9) et (XVI,10) on voit que <u>seule l'onde S (J=0) contribue à la réaction (XVI,5)</u> et que :

$$\langle\lambda_3\lambda_4|T_o|\lambda_1\lambda_2\rangle = \frac{2G}{\pi}\,k^2 = \frac{Gs}{2\pi}$$

Comme l'unitarité de la matrice S impose

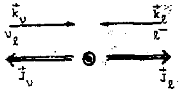
$$|\langle\lambda_3\lambda_4|T_o|\lambda_1\lambda_2\rangle| < 1$$

on voit que cette condition est violée quand

$$s = 4k^2 \geq \frac{2\pi}{G}$$

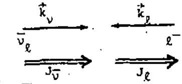
Ce qui correspond à une énergie totale dans le système du centre de masse de l'ordre de 650 GeV.

D'ailleurs à la limite des hautes énergies le lepton ℓ^- dans la réaction (XVI,5) sera une particule gauche (puisqu'on peut négliger sa masse à ces énergies). Comme ν_ℓ est une particule gauche il s'ensuit que dans le système du centre de masse le moment angulaire total sur la direction du mouvement est zéro :



Pour la réaction (XVI,6) à hautes énergies, on aura par cont

dans le centre de masse :



c'est-à-dire comme le $\bar{\nu}$ est une particule droite et ℓ^- une particule gauc

(on néglige m_ℓ) on voit que le moment angulaire total sur la direction de l'impulsion est égal à 1. Pour cette réaction on a, d'après l'équation (XV à hautes énergies :

$$\frac{d\sigma(\bar{\nu}_\ell \ell^-)}{d\Omega} = \frac{G^2}{4\pi^2}\, s\, \frac{(1+\cos\theta)^2}{4}$$

et on trouve que la condition d'unitarité est violée pour $s > 700$ GeV (énergie totale dans le s.c.m.)

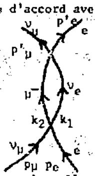
IV - NON-RENORMALISABILITE DE LA THEORIE V-A

La théorie des perturbations basée sur le lagrangien V-A conduit à des termes d'ordre supérieur fortement divergents.

Par exemple la diffusion

$$\nu_\mu + e^- \to \nu_\mu + e^-$$

a lieu dans cette théorie d'accord avec le diagramme :



et son amplitude sera proportionnelle à :

$$G^2 \left(\bar{u}_e(p'_e)\gamma^\lambda(1-\gamma^5)v_\mu(p'_\mu)\right)\left(\bar{v}_\mu(p_\mu)\gamma^\eta(1-\gamma^5)u_e(p_e)\right) \times$$

$$\times \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\, \frac{g_{\lambda\eta}(k_1k_2)-k_{1\lambda}k_{2\eta}-k_{1\eta}k_{2\lambda}-\varepsilon_{\lambda\eta\alpha\beta}k_1^\alpha k_2^\beta}{(m_\mu^2-k_2^2)k_1^2}$$

avec $k_2 = p_e + p_\mu - k_1$.

Cette intégrale est divergente comme $\int^\infty k\,dk$. Et cette divergence ne peut pas être éliminée par une renormalisation des masses et constantes d'interaction - puisque chaque terme d'ordre supérieur a une divergence de degré supérieur comme $\Lambda^{2(n-1)}$ si Λ est un paramètre de coupure. Il faudrait un ensemble infini de constantes pour éliminer ces divergences. La théorie est donc non-renormalisable.

La théorie des bosons vectoriels avec masse $m_W \neq 0$ a aussi les mêmes défauts de violation de l'unitarité et de non-renormalisabilité.

Ces difficultés sont écartées dans le modèle des champs de jauges unifiés proposé par Weinberg et Salam et Ward.