

**UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
POSTGRADO EN FÍSICA**



***SOBRE LA SUPERMEMBRANA CON CARGAS CENTRALES Y  
LA SUPERGRAVEDAD CALIBRADA***

**Tesis Doctoral presentada ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por la Licenciada Joselen Marivi Peña Quintero, para optar al título de Doctor en Ciencias Mención Física.**

**Tutora: Dra. María del Pilar García del Moral.**

**Caracas – Venezuela  
Febrero, 2013**

# Resumen

---

Esta tesis tiene dos objetivos bien diferenciados, uno avanzar en el estudio hacia una descripción fenomenológica de la supermembrana, y el otro determinar la teoría de supergravedad a bajas energías que se acopla con ésta. Para alcanzar el primer objetivo se utiliza un sector topológico de la supermembrana, llamado *la supermembrana con cargas centrales* [1, 2, 3, 4] que tiene dos propiedades relevantes para este estudio: (1) se ha demostrado que es un objeto cuántico bien definido [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]; y (2), posee simetría de calibre definida en el volumen del mundo. Esta última propiedad es de gran importancia a la hora de pensar en obtener grupos de calibre no abelianos que reproduzcan el modelo estándar. En esta tesis se construye la acción de la supermembrana  $11D$  con cargas centrales no triviales minimalmente inmersa sobre una variedad toroidal  $7D$  (MIM2). Los grados de libertad de esta teoría vienen dados por siete campos escalares, un campo de calibre y ocho grados de libertad fermiónicos. Las coordenadas transversas a la supermembrana son mapas a un espacio-tiempo de Minkowski  $4D$ . Esta acción contiene al grupo de symplectomorfismos como simetrías de calibre. La acción es invariante bajo simetrías globales adicionales en comparación a la supermembrana sobre un espacio target de

---

Minkowski  $11D$ . El hamiltoniano en el calibre del cono de luz es invariante bajo transformaciones conformes sobre una superficie de Riemann como variedad de base. El espectro del hamiltoniano regularizado es discreto con multiplicidad finita. La supersimetría se rompe espontáneamente a  $N = 1$  en  $4D$ . Para el caso de la compactificación sobre un 7-toro isótropo, el potencial no contiene ninguna dirección plana, es estable sobre el espacio de módulos de los parámetros.

Para la consecución del segundo objetivo mostramos la formulación explícita de la supermembrana  $11D$  como un fibrado toroidal simpléctico con monodromía no trivial en  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Esta construcción permite una clasificación de todas las supermembranas mostrando explícitamente las simetrías  $SL(2, \mathbb{Z})$  asociadas a dualidades. Se encuentra que el origen en teoría M de las supergravidades calibradas IIB en nueve dimensiones, clasificadas según las clases inequivalentes de monodromía, corresponden a la descripción global de la supermembrana con cargas centrales en un target  $M_9 \times T^2$ . La descripción global es una realización del 'mecanismo de esculpido' para calibrar una teoría [14] y está asociado a una deformación particular de las fibraciones. Esta formulación global corresponde al calibrado de los subgrupos abelianos de  $SL(2, \mathbb{Z})$  asociados a las monodromías que actúan en el toro del target. Mostramos la existencia de la simetría trombón formulada como una realización no lineal de la simetría  $SL(2, \mathbb{Z})$  y se construye su calibrado en términos de la supermembrana formulada sobre una clase inequivalente de fibración toroidal simpléctica.

La supermembrana, además muestra invariancia bajo T-dualidad. Se encuentra la transformación explícita realizada en la teoría de la supermembrana. Ésta tiene una interpretación natural en términos de la cohomología de la variedad base y la homología del toro target. Esta construcción global es una realización explícita de las transformaciones de dualidad como simetrías de la misma. Como consecuencia de

---

---

ello, se conjetura que esta construcción es también válida para explicar el origen de las supergravedades IIA calibradas en  $9D$  tal que la supermembrana se convertiría en el origen de todas las supergravedades del tipo II en  $9D$ . Las supergravedades maximales estarán asociadas a la supermembrana compactificada sin carga central y las supergravedades calibradas al sector de la supermembrana con carga central.

La estructura geométrica del fibrado toroidal simpléctico va más allá de la clasificación sobre las clases conjugadas de  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Esta depende de los elementos del grupo coinvariante asociados al grupo de monodromía que restringen los posibles valores de las cargas  $(p, q)$ . Nosotros interpretamos que las clases de equivalencia de los grupos coinvariantes están asociados a la clasificación de las soluciones de supergravedades calibradas tipo II en  $9D$ . Los resultados de esta tesis se han reportado en las siguientes publicaciones:

1. *Supermembrane origin of type II gauged supergravities in 9D*. M.P. García del Moral, J.M. Peña, A. Restuccia, JHEP 1209 (2012) 063, hep-th/1203.2767 [15] (Cap. 6).
  2. *T-duality Invariance of the Supermembrane*, M.P. García del Moral, J.M. Peña, A. Restuccia, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 10 (2013) 1360010, hep-th/1211.2434 [16] (Cap. 7). Proceedings del XXI International Workshop on Geometry and Physics, U.Burgos, Spain.
  3.  *$SL(2, \mathbb{Z})$  symmetries, Supermembranes and Symplectic Torus Bundles*. M.P. García del Moral, I. Martín, J.M. Peña, A. Restuccia, JHEP 1109 (2011) 068, hep-th/1105.3181 [17] (Cap. 5).
  4.  *$N=1$  4D Supermembrane from 11D*. María Pilar García del Moral, J.M. Peña, A. Restuccia, JHEP 0807 (2008) 039, hep-th/0709.4632 [18] (Cap. 4).
  5. *The Minimally Immersed 4D Supermembrane*, M.P. García del Moral, J.M. Peña, A. Restuccia, Fortsch. Phys. 56 (2008) 915-921. Realizado para 3rd RTN Workshop: Consti-
-

---

tients, Fundamental Forces and Symmetries of the Universe, 1-5/Oct/2007. Valencia, Spain, hep-th/0803.3385 [19] (Cap. 4).

---

# Abstract

---

This thesis has two objectives well differentiated, one is to advance in the study towards a phenomenological description of the supermembrane, and the other is to determine the supergravity theory at low energies that is coupled with this one. In order to reach our first goal, we used a topological sector of the supermembrane, called the supermembrane with central charges [1, 2, 3, 4], that has two excellent properties for this study: one, it has been demonstrated that is a quantum object well defined [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. Another important property, is that it has a gauge symmetry defined on its worldvolume. This last property is of great relevance when thinking in obtaining eventually non abelian gauge groups that will reproduce the standard model. In this thesis we construct the action of the supermembrane  $11D$  with non-trivial central charges minimally immersed on a toroidal manifold  $7D$  (MIM2). The degrees of freedom of this theory are seven scalars fields, a gauge field and eight fermionics degrees of freedom. The transverse coordinates to the supermembrane are maps to a  $4D$  Minkowski space-time. This action contains to the group of symplectomorphisms as gauge symmetries. The action is invariant under additional global symmetries in comparison to the supermembrane on  $11D$  Minkows-

---

ki target space. The hamiltonian in the light cone gauge is invariant under conformal transformations on a Riemann surface as base manifold. The regularized hamiltonian spectrum is discrete with finite multiplicity. The supersymmetry is broken spontaneously to  $N = 1$  in  $4D$ . For the case of the compactification on an isotropic 7-torus, the potential does not contain any flat direction, it is stable on the moduli space of the parameters. To achieve the second goal we showed the explicit formulation of the  $11D$  supermembrane in terms of a toroidal symplectic fiber bundle with non trivial monodromy in  $SL(2, \mathbb{Z})$ .

As a result of this thesis we find that the theory M origin of IIB gauged supergravities in  $9D$ , classified according to the monodromy inequivalents classes, correspond to the global description of the supermembrane with central charges in a target  $M_9 \times T^2$ . The global description is done through the "sculpting mechanism" [14], that involves the gauging of a theory associated to a particular deformation of fibrations. This corresponds to gauging one of the abelian sub-groups of  $SL(2, \mathbb{Z})$  associated to the monodromies that act in the target torus. We also showed to the existence of the trombone symmetry formulated like a nonlinear realization of  $SL(2, \mathbb{Z})$  symmetry and constructed its gauging in terms of the supermembrane formulated on an inequivalent class of toroidal symplectic fibration.

The supermembrane, in addition, shows invariance under T-duality. We find the explicit transformation realized in the supermembrane theory. It has a natural interpretation in terms of the cohomology of the base manifold and the homology of the torus target. This global construction is an explicit realization of the duality transformations as symmetries of it. As a result of it, we conjecture that this construction is also valid to explain the origin of IIA gauged supergravities in  $9D$ , so that the supermembrane would become the origin of all type II supergravities in  $9D$ . The picture

---

---

that emerges is that the maximal supergravities are associated to the compactified supermembrane without central charges and the gauged supergravities to the sector of the supermembrane with central charge. The geometric structure of symplectic fiber bundle goes beyond the classification on the conjugated classes of  $SL(2, \mathbb{Z})$  and depends on the elements of the coinvariant group associated the monodromy group that restrict the possible values of the charges  $(p, q)$ . We interpret that the equivalence classes of the coinvariant groups are associated to the classification of the solutions of type II gauged supergravities in  $9D$ .

The results of this thesis have been reported in following papers:

1. *Supermembrane origin of type II gauged supergravities in 9D*. M.P. García del Moral, J.M. Peña, A. Restuccia, JHEP 1209 (2012) 063, hep-th/1203.2767 [15] (Chap. 6).
  2. *T-duality Invariance of the Supermembrane*, M.P. García del Moral, J.M. Peña, A. Restuccia, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 10 (2013) 1360010, hep-th/1211.2434 [16] (Cap. 7). Proceedings del XXI International Workshop on Geometry and Physics, U.Burgos, Spain.
  3.  *$SL(2, \mathbb{Z})$  symmetries, Supermembranes and Symplectic Torus Bundles*. M.P. García del Moral, I. Martín, J.M. Peña, A. Restuccia, JHEP 1109 (2011) 068, hep-th/1105.3181 [17] (Chap. 5).
  4.  *$N=1$  4D Supermembrane from 11D*. María Pilar García del Moral, J.M. Peña, A. Restuccia, JHEP 0807 (2008) 039, hep-th/0709.4632 [18] (Chap. 4).
  5. *The Minimally Immersed 4D Supermembrane*, M.P. García del Moral, J.M. Peña, A. Restuccia, Fortsch. Phys. 56 (2008) 915-921. Prepared for 3rd RTN Workshop: Constituents, Fundamental Forces and Symmetries of the Universe, 1-5/Oct/2007. Valencia, Spain, hep-th/0803.3385 [19] (Chap. 4).
-



*A Abraham y a Amanda.*

*A la memoria de César Peña.*

*A la Familia Brito.*

*A todos los defensores de DDHH de Venezuela.*

.

.

.

.

«Los dirigentes del mundo [...] no saben emocionalmente con qué problema tratan [...]; lo que tienen que hacer estos hombres es conectar consigo mismos y descubrir quiénes son y por qué odian; y decirse: "Este es mi odio. Odio porque mi madre era antipática o mi padre era cruel. No voy a odiar a los rusos, no voy a odiar a los judíos, no voy a odiar a los negros. Voy a reconocer mi odio como mío; y voy a amar"» Helen Caldicott

---

## Agradecimientos

En lo académico, infinito agradecimiento a la prof. María del Pilar García del Moral sin cuyas ideas, entusiasmo, intuición física, paciencia, perseverancia, y generosidad, esta tesis no se hubiese podido completar, debido a que este trabajo se desarrolló a distancia y con una dedicación, de mi parte, que no pudo ser exclusiva. Infinitas gracias.

También en lo académico, quiero agradecer al Prof. Álvaro Restuccia que desde Chile estuvo siempre dispuesto a tener reuniones de discusión sobre los aspectos matemáticos más intrincados de este trabajo de investigación.

Agradecida con la prof. Anamaría Font, jurado de esta tesis, por sus correcciones a la versión preliminar de la misma.

Un agradecimiento especial para la secretaria del Postgrado de Física, Mary Muñoz quien con mucha diligencia respondió a todas mis inquietudes e hizo su trabajo con dedicación. Igualmente gracias a los directores del Postgrado en Física, prof. John Mantilla y prof. Carolina Bessega.

Quisiera agradecer a todos los que de alguna u otra manera me ayudaron a ser quién soy hoy.

Gracias a Abraham y a Amanda, quienes este último año colaboraron activamente para que pudiera terminar el manuscrito de la tesis. Los quiero mucho.

Muchas gracias a Bea, Omarah, Sandra, Rosa, Isbelia, María Estela, Nubia y a mi hermana Josegry, por reflexivas e interesantes conversaciones durante el trayecto.

Gracias a Hercilia por presentarme al yoga.

---

Agradezco a todos mis estudiantes de Física I, que me hicieron aprender muchas cosas en mi experiencia docente en la UCV desde 2011 y que soportaron que les hablara de vez en cuando de la supermembrana y las 11 dimensiones. Agradecida con los profesores con quienes he compartido en esta nueva etapa docente: Solmar, Orlenys, David, Fermín, Esteban, y Nuri.

A todos los amigos que están en el extranjero, y que mantienen el contacto por facebook. Además agradecida a desconocidos y conocidos tuiteros que me hicieron reír y mantenerme al tanto noticioso durante los períodos de descanso del trabajo.

Agradecida con la música y a toda buena interpretación artística.

A todas las mamás con las que he compartido en la espera durante los ensayos de la Orquesta Sinfónica Infantil de Chacao y que aliviaron la angustia con sus conversaciones.

Finalmente, agradezco el financiamiento parcial de este trabajo en sus primeros 4 años, realizado por el FONACIT en el marco de la Beca Misión Ciencia.

---

# Índice general

---

Resumen	III
Abstract	VII
Índice de figuras	XIX
Índice de cuadros	XX
Introducción	1
1. Supergravedad y Supermembrana en $11D$	13
1.1. Supergravedad Maximal en $11D$ . . . . .	13
1.1.1. Supergravedad en el Formalismo del Superespacio $11D$ . . . . .	17
1.2. Supermembrana $11D$ . . . . .	18
1.2.1. Super $p$ -branas . . . . .	19

---

1.2.2. La Supermembrana en el Superespacio . . . . .	23
1.2.3. La Supermembrana en el Calibre del Cono de Luz . . . . .	27
1.2.4. Propiedades Espectrales: Espectro Continuo . . . . .	30
1.3. Conexión entre Supermembrana y Supergravedad en $11D$ . . . . .	33
<b>2. Metodología: Compactificación y Calibrados</b>	<b>35</b>
2.1. Métodos de Compactificación usados en Supergravedad . . . . .	35
2.1.1. Compactificación Toroidal: Reducción Dimensional . . . . .	36
2.1.2. Reducción con un Twist: Compactificaciones Scherk-Schwarz (SS)	41
2.1.3. Otros Calibrados . . . . .	47
2.1.4. El grupo $GL(2, \mathbb{R})$ . . . . .	50
2.2. Compactificaciones en términos de Fibrados . . . . .	52
2.2.1. Fibrados . . . . .	52
2.2.2. Compactificaciones, Fibrados y Monodromías . . . . .	55
2.2.3. Condiciones de Cuantización . . . . .	57
2.3. Metodología usada para Calibrar la Supermembrana . . . . .	61
2.3.1. Método de la Simetría Kappa . . . . .	61
2.3.2. El Mecanismo de Esculpido para Calibrar Teorías . . . . .	63

---

<b>3. Supergravedad y Supermembrana en <math>9D</math></b>	<b>68</b>
3.1. Supergravedades Maximales en $10D$ y $9D$ . . . . .	68
3.1.1. Supergravedades Maximales en $10D$ . . . . .	69
3.1.2. Supergravedad Maximal $9D$ . . . . .	71
3.1.3. Simetrías Globales de Supergravedades Maximales . . . . .	72
3.2. Supergravedades Calibradas . . . . .	75
3.2.1. Supergravedad Masiva y Calibrada en $10D$ . . . . .	77
3.2.2. Supergravedades Calibradas en $9D$ . . . . .	79
3.3. La Supermembrana con Cargas Centrales no Triviales en $9D$ . . . . .	85
3.3.1. Simetrías $SL(2, \mathbb{Z})$ . . . . .	89
3.3.2. Propiedades Espectrales: Espectro Discreto . . . . .	92
<b>Nuevos Resultados</b>	<b>96</b>
<b>4. La Supermembrana <math>4D</math> <math>N = 1</math> desde <math>11D</math></b>	<b>97</b>
4.1. Supermembrana $11D$ con cargas centrales sobre una variedad target $M_5 \times T^6$ . . . . .	98
4.2. Compactificación sobre el $S^1$ restante . . . . .	103
4.3. $N = 1$ supersimetría . . . . .	107
4.4. Discretitud del espectro . . . . .	108
4.5. Otras Propiedades Físicas . . . . .	112
4.6. Conclusión . . . . .	116

---

---

<b>5. La Supermembrana como un Fibrado Toroidal Simpléctico</b>	<b>118</b>
5.1. Introducción . . . . .	119
5.2. Fibrados Toroidales Simplécticos . . . . .	120
5.3. Mapas de la Supermembrana como Secciones de un Fibrado Toroidal Simpléctico . . . . .	124
5.4. Conclusión . . . . .	129
 <b>6. La Supermembrana como Origen de Supergravidades tipo II en 9D</b>	 <b>131</b>
6.1. Introducción . . . . .	131
6.2. Clasificación del Fibrado Toroidal Simpléctico . . . . .	135
6.2.1. Clase de Conjugación Elíptica . . . . .	136
6.2.2. Clase de Conjugación Parabólica . . . . .	137
6.2.3. Clase de Conjugación Hiperbólica . . . . .	138
6.3. Simetrías Residuales de la Supermembrana Calibrada . . . . .	138
6.4. Calibrando la Simetría Trombón de la Supermembrana . . . . .	141
6.4.1. La Simetría Trombón . . . . .	142
6.4.2. Calibrando la Simetría Trombón . . . . .	146
6.5. Conclusión . . . . .	147

---

---

<b>7. T-Dualidad en la Supermembrana con Cargas Centrales</b>	<b>149</b>
7.1. Transformación de T-dualidad . . . . .	152
7.2. T-Dualidad sobre Fibrados Simpléticos . . . . .	156
7.3. T-Dualidad como una Simetría . . . . .	158
7.4. Conclusión . . . . .	160
<b>8. Conclusiones</b>	<b>161</b>
<b>Apéndices</b>	<b>169</b>
<b>A. Notación y Convenciones</b>	<b>170</b>
A.1. Notación . . . . .	170
A.2. Superespacio . . . . .	170
<b>B. Supergravedad 11D</b>	<b>173</b>
<b>C. Cálculo de Supervínculos Usando Simetría Kappa</b>	<b>178</b>
C.1. Supermembrana y Supergravedad $D = 11$ . Superespacio Plano a Primer Orden en $(\theta, \partial_i \theta)$ . . . . .	179
C.2. Supermembrana en $M_9 \times T^2$ a Primer Orden en $(\theta, \partial_i \theta)$ . . . . .	181
C.3. Supermembrana con Condición de Carga Central a Primer Orden en $(\theta, \partial_i \theta)$ . . . . .	184

---



---

<b>D. Hamiltoniano Supermembrana con Cargas Centrales <math>4D</math></b>	<b>186</b>
D.1. Acción $S$ en $M_5 \times T^6$ . . . . .	187
D.2. Acción $S_{M_5 \times T^6}$ compactificada en $S^1$ . . . . .	187
D.3. Hamiltoniano Dual $H_{M_4 \times T^6 \times S^1}$ . . . . .	189
D.3.1. Cálculo de la Acción Dual $\tilde{S}$ . . . . .	189
D.3.2. Variación de $\tilde{S}$ con respecto a $L_0$ y $L_a$ . . . . .	190
D.3.3. Cálculo de $L_a$ . . . . .	191
D.3.4. Cálculo del Hamiltoniano Dual $\mathcal{H}_{M_4 \times T^6 \times S^1}$ . . . . .	192
<b>E. Cálculo de la Matriz <math>\Lambda_0</math> de Transformaciones de T-dualidad</b>	<b>193</b>
<b>F. Clases de Equivalencia entre Fibrados Toroidales Simpléticos</b>	<b>195</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>196</b>

---

# Índice de figuras

---

0.1. <i>Dualidades entre las teorías de supercuerdas.</i> . . . . .	2
3.1. <i>Gráfico original de [66] donde se resume todas las reducciones twisted. Los parámetros de masa en la misma caja forman un multiplete bajo el grupo <math>SL(2, \mathbb{R})</math>. También se dan la simetría calibrada y el vector de calibre en 9D.</i> . . . . .	83
8.1. <i>Relaciones entre la supermembrana con cargas centrales y la supergravedades tipo II.</i> . . . . .	167

# Índice de cuadros

---

1.1. <i>Supergravedad en diversas dimensiones <math>D</math>, etiquetadas por el número de sus generadores de supersimetría.</i>	14
1.2. <i>Grados de libertad on-shell de los campos de supergravedad de <math>D</math> dimensiones. Tabla original de [66]</i>	15
2.1. <i>La tabla original de [108] que clasifica las diferentes monodromías <math>SL(2, \mathbb{Z})</math>.</i>	59

# Introducción

---

En la actualidad todavía sigue siendo un problema no resuelto la cuantización del campo gravitacional en las cuatro dimensiones espacio-temporales así como su unificación con las demás fuerzas fundamentales de la naturaleza. En la literatura pueden encontrarse distintos enfoques que pretenden formular una teoría de unificación relativista y cuánticamente consistente, que además sea capaz de reproducir los datos experimentales a escalas desde  $10^{-16}cm$  del Modelo Estándar (ME) hasta escala cosmológica. Algunas de estas teorías combinan elementos como: gran unificación, utilización de dimensiones espaciales extras, supersimetría. A pesar de los relevantes avances en la materia quedan aún importantes cuestiones por resolver.

Un camino prometedor tanto en la cuantización de la gravedad como en la unificación, han sido las teorías de cuerdas. La formulación de una teoría cuántica de cuerdas contiene a la gravedad y es una teoría consistente al menos perturbativamente, que permite obtener modelos semirealistas en cuatro dimensiones restringiendo parámetros libres del Modelo Estándar: quiralidad, grupos y números cuánticos del ME, acoplos de Yukawa, gran unificación, etc.

---

La teoría de cuerdas es una teoría donde el objeto fundamental es un objeto extendido unidimensional denominado *cuerda*. En un principio, la formulación de la teoría se hizo considerando solo los grados de libertad bosónicos, pero resultó inestable. Posteriormente, se incluyeron los fermiones en la construcción requiriendo supersimetría. A estas teorías supersimétricas se les denomina *supercuerdas*. Para que las teorías de cuerdas sean cuánticamente consistentes se necesita que la bosónica se formule en  $D = 26$  y la supersimétrica en  $D = 10$  [20, 21]. Existen cinco teorías consistentes de supercuerdas [22]. A continuación se mencionarán brevemente las características más relevantes de cada una. La teoría *Tipo I*, incluye cuerdas cerradas y abiertas, con superficies mundo sin orientación determinada, grupo de simetría  $SO(32)$ . Tiene supersimetría  $N = 1$  que en  $10D$ , significa 16 supercargas. La *Tipo IIA*, contiene sólo cuerdas cerradas, con superficies mundo sin orientación determinada, fermiones sin masa, no quiral (conserva paridad). Tiene supersimetría  $N = 2$  que en  $D = 10$  significa 32 supercargas. *Tipo IIB*, contiene sólo cuerdas cerradas, con superficies mundo sin orientación determinada, fermiones sin masa, quiral (el espín tiene una dirección violando paridad), supersimetría con 32 supercargas. Tipo *Heterótica*, sólo se tienen cuerdas cerradas, con superficies mundo sin orientación determinada, y con un álgebra de vínculos que actúa de manera distinta sobre los campos que se mueven hacia la derecha y sobre aquellos que se mueven a la izquierda. Cuando el grupo de simetría es  $SO(32)$  se llama HO, y cuando el grupo de simetría  $E_8 \times E_8$  se denomina HE.

Todas las teorías de supercuerdas están relacionadas a través de transformaciones de dualidad, ver figura (0.1). Las teorías IIA y la IIB están conectadas por la llamada dualidad T, en la cual la teoría IIA compactificada en un círculo de radio R describe la misma física que la teoría IIB pero compactificada en un círculo de radio  $(\frac{\alpha'}{R})^1$

---

<sup>1</sup>El parámetro  $\alpha'$  es el parámetro de Regge (*Regge slope*), relacionado con la tensión de la cuerda fundamental por  $1/(2\pi\alpha')$ .

---

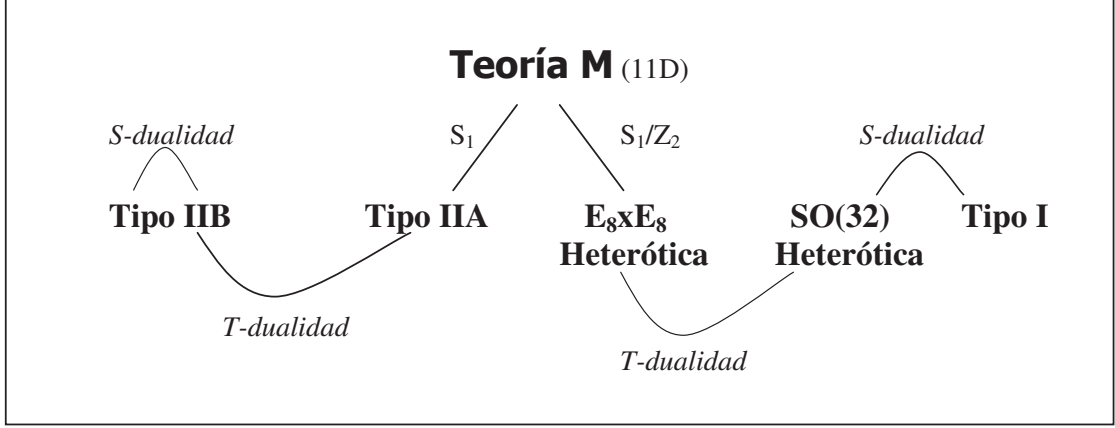


Figura 0.1: *Dualidades entre las teorías de supercuerdas.*

cuando además se intercambian los modos de KK con los modos de enrollamiento. Asimismo las teorías heteróticas  $SO(32)$  y  $E_8 \times E_8$  también están relacionadas entre sí por una dualidad T. Las teorías Tipo I y la heterótica  $SO(32)$  están relacionadas por la llamada dualidad S, la cual significa que la descripción de partículas débilmente interactuantes en la teoría Tipo I pueden ser vistas como la descripción de partículas que interactúan fuertemente en la teoría heterótica  $SO(32)$ .

Desde hace dos décadas, se considera que existe una teoría más fundamental que se formula en  $11D$  denominada *Teoría M*, cuyo límite en  $10D$  son las cinco teorías de supercuerdas [23]. En 1994, Witten planteó que la teoría de supergravedad Tipo IIA podía ser obtenida por la reducción dimensional de una teoría de supergravedad única en  $D = 11$  [24, 25]. Conjeturó que debería haber una teoría en  $D = 11$  que en el límite bajas energías fuese la supergravedad  $11D$  y que bajo reducción dimensional a  $10D$  a través de un círculo generase la teoría de supercuerdas IIA y bajo reducción dimensional sobre  $S^1/Z_2$ , produjese la teoría heterótica  $SO(32)$ . A esta teoría del ‘todo’ es a la que se le denomina teoría M [26]. Las cinco teorías de supercuerdas, definidas en  $10D$  son todas ellas supersimétricas [22]. La supersimetría garantiza que

---

se tengan teorías consistentes cuyos espectros no contienen taquiones (partículas de masa imaginaria).

Inicialmente la teoría de supergravedad fue propuesta en  $D = 4$  en [27, 28], como modelo de una teoría de campo supersimétrica para la gravedad. Así como es posible la definición supersimétrica consistente de supergravedades puras en otras dimensiones menores de  $11D$ , es posible la existencia de otros objetos tipo  $p$ -branas también en otras dimensiones  $D < 11$ , ver la clasificación que reúne todas las posibilidades en [29]. Esta teoría contiene un campo de espín 2 (gravitón) con su respectivo compañero supersimétrico, un campo de espín  $\frac{3}{2}$  (gravitino). Desafortunadamente la cuantización de esta teoría muestra infinitos ultravioleta que no pueden cancelarse: la teoría es no renormalizable. Se pueden formular supergravedades en dimensiones  $D > 4$  las cuales siguen teniendo los mismos problemas en el límite ultravioleta cuando se les intenta cuantizar. Sin embargo, a partir de 2007 Bern et al han presentado resultados donde hay evidencia que la teoría de supergravedad  $D = 4$  y  $N$  igual a 8, es finita ultravioleta al menos hasta cuatro lazos<sup>2</sup> [30, 31, 32].

La cuantización no perturbativa de la teoría de cuerdas continúa siendo un problema abierto que ha recibido mucha atención a lo largo de décadas. Este problema puede ser reformulado en términos de la cuantización de la teoría M en  $11D$ . A pesar de los avances hacia la cuantización de la Teoría M [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 33, 34, 35, 36, 37, 38], ella es una teoría aún no muy bien entendida. De forma similar a lo que ocurre en teoría de cuerdas, donde la supercuerda es el objeto fundamental de la teoría, se esperaba que la supermembrana [39, 40, 41], fuese el objeto extendido fundamental de la teoría M, es decir, que describiera los grados de libertad microscópicos

---

<sup>2</sup>Traducción al español de la palabra inglesa *loops*. Debido al amplio uso del inglés en este campo, a lo largo de la tesis se harán este tipo de observaciones cuando, a nuestro criterio, la traducción de la palabra al español no sea de uso frecuente o que no sea posible hacer una traducción efectiva.

---

---

de la teoría. La interpretación de la supermembrana como objeto fundamental en el contexto de la teoría M fue inicialmente descartada debido a que el espectro de la teoría es continuo. Posteriormente, se reinterpretó como una teoría de interacción de  $D0$ -branas, es decir, como una teoría de segunda cuantización [35]. Para analizar el comportamiento cuántico de la supermembrana se utilizaron los modelos matriciales  $SU(N)$  supersimétricos en el límite  $N \rightarrow \infty$  [33].

Sin embargo, se puede hacer una interpretación de la supermembrana como objeto fundamental, al restringirse a un sector de la teoría M: a la supermembrana con cargas centrales no triviales [2, 3, 4], dado que su espectro es discreto [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. Este sector de la teoría posee una carga central no trivial en el álgebra supersimétrica. Dicha supermembrana con cargas centrales está minimalmente inmersa en la variedad target<sup>3</sup> y por eso la denominamos *MIM2*. Su estudio podría brindar herramientas para abordar el problema más general de la cuantización de otros sectores de la teoría M.

En esta tesis restringiremos el estudio a este sector sobre un 7-toro sector compacto de la variedad target (MIM2) [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. La MIM2 en  $9D$  es dual a un fibrado construido con un sistema ligado de  $D2 - D0$  branas. Además, la MIM2 contiene en su espectro los estados de cuerdas no perturbativos, por ejemplo las  $(F, Dp)$ -branas [13], y por tanto es el origen en  $11D$  de los multipletes  $SL(2, \mathbb{Z})$  de la teoría IIB y podría ser el origen de los estados diónicos no perturbativos de tipo IIA que no pueden ser vistos a nivel perturbativo [13]. Esto es de interés ya que se ha visto que las configuraciones de este tipo desempeñan un papel importante en el estudio de efectos no perturbativos. Los efectos no perturbativos en teoría de cuerdas han sido objeto de un estudio intensivo dado que potencialmente podrían explicar de manera natural los valores muy pequeños de parámetros dentro de MSSM, por ejemplo, las

---

<sup>3</sup>Sin traducción.

---



---

masas muy pequeñas de los neutrinos o los acoplamientos de Yukawa. Los resultados de Bern en [30, 31, 32] agregan interés en el análisis de la supermembrana  $4D$  ya que el primer nivel fundamental del espectro de la supermembrana se espera que corresponda con el supermultiplete de supergravedad.

La teoría M/cuerdas necesita la introducción de dimensiones extras. Esas dimensiones extras se creen que forman una variedad de compactificación tales que cuando la teoría M/cuerdas se compactifican a  $4D$  podría dotar a la teoría efectiva de las propiedades necesarias para reproducir la física esperada. Lo que se busca es una teoría cuántica consistente en  $4D$  con supersimetrías  $N = 1$  o  $N = 0$ , libre de móduli, acorde a la física observada en  $4D$ . En la naturaleza hasta el momento no se han observado evidencias de dimensiones extras. La idea es que las dimensiones se enrollan de tal manera que son tan pequeñas que los experimentos realizados no han podido detectarlas. Actualmente sin embargo en el acelerador de partículas LHC, en el CERN, hay experimentos diseñados para detectar posibles violaciones de la conservación de energía debidos a la existencia de una quinta dimensión.

Cualquiera de las teorías formuladas hasta ahora cuando es compactificada a  $4D$  contiene muchos vacíos debido a la presencia de los campos móduli que deben ser estabilizados. Son muchas las posibles variedades de compactificación que se pueden generar al hacer estos enrollamientos. A falta de uno o más principios físicos de selección de vacíos (problema del Landscape) el criterio que se sigue para encontrar las mejores variedades de compactificación es ir verificando que la teoría física obtenida reproduce el modelo estándar. En el contexto de las supercuerdas  $10D$ , las variedades más estudiadas para la compactificación de las seis dimensiones espaciales extras para obtener  $D = 4$ , son las llamadas variedades de Calabi-Yau. En un principio se consideró el 6-toro  $T^6$  como la 6-variedad de compactificación de estas dimensiones extras

---

---

por ser la extensión natural de la compactificación en un círculo a más dimensiones. Esta variedad tiene curvatura nula, y es el caso más sencillo del proceso de compactificación. Debido a que las compactificaciones toroidales tienen holonomía trivial todas las supersimetrías de la teoría en  $D$  dimensiones se preservan también al reducir a  $D = 4$ , y se obtiene una teoría  $N = 8$  lo que no genera modelos realistas. Además el 6-toro  $T^6$  no incorpora en la teoría los aspectos quirales del modelo estándar. Existen teorías efectivas de cuerdas que cuando son compactificadas sobre orbifolds toroidales reproducen muchas de las características del modelo estándar. Un orbifold toroidal es el cociente entre una variedad suave y un grupo discreto, por ejemplo,  $T^6/Z_N$ .

Esta tesis tiene dos objetivos fundamentales: (1) obtener la formulación de la supermembrana con cargas centrales  $N = 1$  en  $4D$  por sus potencial fenomenológico. La formulación de la supermembrana con cargas centrales compactificada en un 7-toro genera una teoría  $N$  igual a 1 en cuatro dimensiones, que tiene además monopolos magnéticos en el volumen del mundo, y que por lo tanto incorpora aspectos quirales deseables que pueden ser de utilidad a futuro en una formulación más realista. Y (2) encontrar la teoría de supergravedad que se obtiene como límite a bajas energías de la supermembrana con cargas centrales no triviales en  $9D$ <sup>4</sup>. La supermembrana con cargas centrales veremos que está naturalmente asociada a las supergravedades del tipo calibrada<sup>5</sup>. Las teorías de supergravedades calibradas pueden construirse tanto a partir de reducciones de supergravedades maximales (no calibradas/no masivas) como de supergravedades masivas [42, 43, 44]. Hay esencialmente tres maneras en que pueden construirse teorías calibradas/masivas de supergravedad a partir de reducciones de supergravedades maximales: (1) A través de compactificaciones en variedades internas no-triviales [42, 43, 44], (2) haciendo reducciones dimensionales generalizadas

---

<sup>4</sup>Estas dimensiones se refieren a las dimensiones no compactas del target.

<sup>5</sup>Del inglés *gauged*.

---

---

llamadas de Scherk-Schwarz (SS), con las cuales se introducen parámetros de masa en las compactificaciones de las teorías de supergravedad y supercuerdas. Finalmente, (3) se obtienen las supergravedades calibradas/masivas a través de compactificaciones hechas con flujos no triviales [45].

Desde el punto de vista de la teoría M, el origen de las supergravedades calibradas es un problema interesante abierto y al que pretende dar respuesta esta tesis. Es bien conocido que las ecuaciones de movimiento de la supergravedad  $11D$  son obtenidas de la invariancia bajo simetría kappa de la acción de la supermembrana  $D = 11$  formulada sobre un background<sup>6</sup> general [41]. Esto apoya la conjetura de que la descripción a baja energía de la supermembrana es la supergravedad  $11D$  (esta conjetura significa que el estado base de la supermembrana  $11D$  corresponde al supermultiplete asociado a la supergravedad  $11D$ , pero aún no se tiene una prueba rigurosa sobre este problema que sigue abierto). La dimensión máxima para supergravedades calibradas es  $9D$ . Hay cuatro clases diferentes de calibrados<sup>7</sup> que aparecen en  $9D$ . Este resultado se estableció inicialmente por [42, 46]. Si incluimos además, las deformaciones que provienen del sector de la teoría de tipo IIA, existen cuatro más, pero solo siete de ellas son deformaciones independientes y ellas constituyen la supergravedad calibrada del tipo II en  $9D$  [46], donde está incluida el calibrado de las simetrías de escala [47, 48]. Recientemente en [49] se han analizado de forma más general los calibrados en  $9D$  a través del formalismo del tensor de embedding<sup>8</sup> y se ha visto que corresponden a los resultados obtenidos en [46].

Para alcanzar el segundo objetivo de esta tesis se procede a analizar los aspectos globales de la supermembrana con cargas centrales. Los efectos no perturbativos,

---

<sup>6</sup>Sin traducción.

<sup>7</sup>Traducción usada para *gauging*.

<sup>8</sup>Sin traducción.

---

---

tales como monopolos e instantones en las teorías de calibre convencionales, o las dualidades en el contexto de las teorías M/cuerdas, descansan en aspectos globales de dichas teorías que las describimos en términos de fibrados. Propiedades como el confinamiento también podrían ser debidas a aspectos topológicos no triviales. Las fibraciones no triviales han sido usadas también en el contexto de las teorías no conmutativas, como es el caso de la formulación no conmutativa del toro [50], así como para caracterizar espacios de compactificación útiles para fenomenología de cuerdas, por ejemplo [51].

Hay evidencia que la teoría de cuerdas puede ser consistentemente definida en backgrounds no geométricos en los cuales las funciones de transición entre parches de coordenadas incluye no solo los difeomorfismos y transformaciones de calibre, sino también transformaciones de dualidad [52, 53, 54, 55]. Una forma de obtener estos backgrounds no geométricos es a través de compactificaciones denominadas compactificaciones con twist dual<sup>9</sup> [45], las cuales generalizan las compactificaciones a la Scherk-Schwarz usadas con las teorías de supergravedad. En casos especiales, las compactificaciones con twists duales son equivalentes a orbifolds asimétricos los cuales pueden dar backgrounds de cuerdas consistentes [56]. Otro tipo de backgrounds no geométricos son las denominadas T-variedades<sup>10</sup>, en las cuales las funciones de transición incluyen T-dualidades. Estas T-variedades [54, 57] están construidas usando las cuerdas formuladas sobre una variedad cuya fibra es un toro doble  $T^{2n}$  con  $n$  coordenadas conjugadas al momento y las otras  $n$  coordenadas conjugadas a los modos de enrollamiento [53]. Ejemplos de T-variedades generalizadas pueden ser obtenidas contruyendo fibraciones de toro sobre variedades base con ciclos que no pueden contraerse [58].

---

<sup>9</sup>En inglés 'duality twist'

<sup>10</sup>Traducción de *T-folds*.

---

---

En [53] fue argumentado que una formulación fundamental de la teoría M/cuerda debería existir, en la cual las simetrías de dualidad (T, S, U) son manifiestas desde el comienzo. Ver también [59]. En particular, se argumentó que muchas supergravidades masivas y calibradas no pueden naturalmente ser incluidas<sup>11</sup> en la teoría de cuerdas sin este esquema o marco [52, 55, 58]. Sin embargo, hasta lo que sabemos previo a esta tesis, no existe un desarrollo de la realización de estas ideas en términos de la supermembrana para teoría M.

En esta tesis se prueba que la acción de la Supermembrana con cargas centrales no triviales en  $9D$ , cuyas estructura local fue dada en [2, 3, 13], puede ser globalmente definida en términos de secciones de un fibrado toroidal simpléctico con monodromía en  $SL(2, \mathbb{Z})$ .

El contenido de la tesis está estructurado como sigue. En los primeros tres capítulos se hace un repaso a los temas necesarios para poner el contexto adecuado a nuestra investigación. En el capítulo 1 se hace una recopilación de resultados de la literatura respecto a la supergravedad y a la supermembrana en once dimensiones. Se dan sus definiciones y características. Se explica la conexión entre ambas. En el capítulo 2, se presentan las consideraciones matemáticas que describen los elementos de la metodología empleada para conseguir los resultados de esta tesis. Entre ellas están un repaso a los métodos de compactificación empleados en supergravedad, la discusión sobre la relación entre estas reducciones y los conceptos geométricos como los fibrados y monodromías, y la descripción de un nuevo método de calibrado a nivel de la supermembrana, denominado *mecanismo de esculpido* de [14]. Intentos anteriores para establecer la conexión entre el calibrado de la supermembrana y el de las supergravidades calibradas  $9D$  se pueden encontrar en [60, 61]. En el capítulo

---

<sup>11</sup>Traducción de *embedded*.

---

---

3, repasamos tanto las supergravedades maximales como las supergravedades calibradas en  $9D, 10D$ . También describimos el objeto fundamental de nuestra teoría: la supermembrana con cargas centrales no triviales.

En los siguientes capítulos mostramos los nuevos resultados obtenidos en esta tesis. En el capítulo 4, se construye la acción para la supermembrana con cargas centrales no triviales compactificada sobre un  $T^7$  y se analizaron sus propiedades físicas en el calibre del cono de luz. La acción describe una supermembrana que evoluciona en un espacio de Minkowski  $4D$ . En el capítulo 5, probaremos que la acción de la supermembrana con cargas centrales no triviales en  $9D$ , cuya estructura local fue dada en [2, 3, 13], puede ser definida globalmente en términos de secciones de un fibrado toroidal simpléctico con monodromía no trivial en  $SL(2, \mathbb{Z})$ .

En el capítulo 6, se clasifican los fibrados simplécticos toroidales que describen a la supermembrana con cargas centrales de acuerdo a las monodromías y se establece la relación con las supergravedades calibradas IIB. En las supergravedades tipo II en  $9D$ , hay cuatro calibrados inequivalentes de la simetría global  $GL(2, \mathbb{R})$ , tres de ellos están asociados al calibrado de la simetría global  $SL(2, \mathbb{R})$  correspondiendo a las llamadas clases inequivalentes parabólicas, elípticas e hiperbólicas. En este capítulo se encuentran los fibrados toroidales simplécticos asociados a cada clase. El cuarto calibrado corresponde al calibrado de la simetría trombón [47] asociado a los escalamientos  $\mathbb{R}^+$ . A nivel cuántico la realización de estos calibrados es más compleja ya que no es suficiente describirlos en términos de fibrados cuya monodromía esté contenida en el subgrupo aritmético  $GL(2, \mathbb{Z})$ . La razón es que la simetría de escalamiento no está incluida en ese subgrupo. Esta simetría trombón se realiza mediante una transformación no lineal  $SL(2, \mathbb{Z})$  que los autores [62] denominaron simetría activa. En este capítulo se encuentra el calibrado de dicha simetría a nivel de la teoría de la

---

supermembrana. Además se analizan las simetrías residuales de la teoría calibrada y se clasifican los fibrados toroidales equivalentes de acuerdo al grupo de coinvariantes para una monodromía dada.

En el capítulo 7, consideraremos las transformaciones de dualidad en el contexto del objeto fundamental de nuestro modelo: la supermembrana con cargas centrales. Mostramos la existencia de una simetría nueva  $Z_2$  que juega el papel de T-dualidad en la supermembrana intercambiando las cargas de enrollamiento y las KK pero dejando el hamiltoniano invariante, tal que el grupo de simetría completo en la supermembrana no calibrada corresponde a:  $(SL(2, \mathbb{Z})_\Sigma \times SL(2, \mathbb{Z})_{T^2})/Z_2$ . La T-dualidad se convierte en una simetría exacta de la descripción de la supermembrana a en términos del fibrado toroidal simpléctico. Las monodromías con el origen tipo IIA son inferidas a partir de la invariancia bajo T-dualidad del operador de masa de la supermembrana con cargas centrales.

Aunque en cada capítulo hemos presentado conclusiones parciales, en el capítulo 8 damos una visión general de todos los resultados obtenidos además que presentamos algunos aspectos que quedan abiertos para trabajos posteriores. Finalmente, se anexan varios apéndices donde se explican más detalles de algunos cálculos explícitos, además de las convenciones y notación usadas en la tesis.

---

---

# Supergravedad y Supermembrana en $11D$

---

En este capítulo se hará una revisión de resultados descritos en la literatura para la teoría de supergravedad no-calibrada en  $11D$  así como para la supermembrana en  $11D$ , y la relación entre ambas los cuales son parte del marco teórico adecuado para cumplir los objetivos y para la discusión de los resultados de esta tesis.

## 1.1. Supergravedad Maximal en $11D$

En esta sección haremos una breve descripción de una de las supergravedades llamadas maximales o no calibradas [27, 28, 63]. En general, las supergravedades maximales son teorías invariantes bajo super-Poincaré. Ésta denominación incluye los generadores de Lorentz, los generadores de las traslaciones, y los generadores de la supersimetría. El álgebra de super-Poincaré puede extenderse agregándole generadores de calibre, bosónicos denominados  $p$ -formas [64].

A las teorías con exactamente 32 supercargas se les llama supergravedades maximales.  $D = 11$  es la máxima dimensión permitida para las teorías de supergravedad



que solamente contienen campos con espín máximo igual a dos, el gravitón (partícula conjeturada como mediadora de la interacción gravitatoria). En esta dimensión solo existe una única teoría de supergravedad. Dependiendo del número de supercargas  $\mathcal{N}$ , se pueden tener diferentes teorías maximales en diferentes dimensiones. En esta tesis nos referiremos a las teorías formuladas en  $D = 11, 10, 9$ . Los campos de super-

Dimensión	Supergravedad ( $\mathcal{N}$ )
11	1
10	1, IIA, IIB
9	2

Cuadro 1.1: *Supergravedad en diversas dimensiones  $D$ , etiquetadas por el número de sus generadores de supersimetría.*

gravedad forman multipletes sin masa bajo supersimetría, llamados supermultipletes. Por ejemplo, el multiplete gravitón lo contienen todas las teorías de supergravedad, incluye los siguientes campos: el gravitón (espín 2), uno o más gravitinos (espín  $3/2$ ) y campos de espín más pequeño. Las supergravedades maximales solo contienen este supermultiplete.

Para que la supersimetría sea una simetría consistente, todos los supermultipletes deben tener igual número on-shell de grados de libertad bosónicos y fermiónicos. En la tabla 1.2 se distinguen dos tipos de escalares posibles: dilatones  $\phi$  (en teoría de cuerdas el campo dilatón está determinado por la intensidad de acoplo de la cuerda  $e^\phi = g_s$ ) y axiones  $\chi$ .

El potencial  $d$ -forma,  $C^{(d)}$ , tiene la misma cantidad de grados de libertad que un potencial dual  $\tilde{d}$ -forma con  $\tilde{d} = D - 2 - d$ . Lo que corresponde a una carga eléctrica en un potencial es una carga magnética en su potencial dual y viceversa. Esta equi-

valencia entre dos potenciales es llamada dualidad de Hodge y es una generalización, a mayores rangos de  $d$  y  $\tilde{d}$  y dimensión  $D$ , de la dualidad eléctrica-magnética bien conocida en  $4D$  por Montonen-Olive [65]. En el caso  $d = (D - 2)/2$  se puede imponer una restricción de autodualidad sobre la  $(d + 1)$ -forma de intensidad de campo. Todos los campos del supermultiplete de gravedad pueden agruparse de la siguiente manera:

Nombre	Símbolo	Espín	Grados de libertad On-shell
Gravitón	$G_{mn}$	2	$(D - 2)(D - 1)/2 - 1$
Gravitino	$\Psi_m$	3/2	$(D - 3) \cdot q/2$
Potencial de Rango- $d$ potential	$C_{m_1 \dots m_d}^{(d)}$	1	$\binom{D - 2}{d}$
Dilatino	$\lambda$	1/2	$q/2$
Escalar	$\phi$ ó $\chi$	0	1

Cuadro 1.2: *Grados de libertad on-shell de los campos de supergravedad de  $D$  dimensiones. Tabla original de [66]*

En esta sección describimos brevemente las características fundamentales de la única teoría de supergravedad en  $D = 11$  que fue obtenida en [25] con  $\mathcal{N} = 1$  y 32 supercargas. Es una teoría maximal. La acción es

$$\begin{aligned}
S_{SG}^{D=11} = & \int d^{11}x \left\{ -\frac{1}{2}eR(\omega) - 2e\bar{\Psi}_m \Gamma^{mnl} D_n \left( \frac{\omega + \hat{\omega}}{2} \right) \Psi_l - \frac{1}{96}e F_{mnrs} F^{mnrs} + \right. \\
& - \frac{1}{2(12)^4} \varepsilon^{m_1 m_2 \dots m_{11}} F_{m_1 m_2 m_3 m_4} F_{m_5 m_6 m_7 m_8} C_{m_9 m_{10} m_{11}} + \\
& \left. - \frac{1}{96}e (\bar{\Psi}_n \Gamma^{m_1 m_2 m_3 m_4 nl} \Psi_l + 12 \bar{\Psi}^{m_1} \Gamma^{m_2 m_3} \bar{\Psi}^{m_4}) (F_{m_1 m_2 m_3 m_4} + \hat{F}_{m_1 m_2 m_3 m_4}) \right\},
\end{aligned} \tag{1.1}$$

donde como mencionamos antes, encontramos un único supermultiplete formado por los campos sin masa: el gravitón (tensor simétrico de segundo orden) construido con el

vielbein  $e_{\hat{a}m}(x)$  en  $11D$ , el gravitino (espinor de Majorana)  $\Psi_{\hat{a}m}(x)$  y un tensor de tres índices totalmente antisimétrico llamado la 3-forma de potencial de calibre  $C_{mnl}(x)$ , con la intensidad de campo  $F_4 = dC_3$  (para mayor detalle en la notación e identificación de variables, ver apéndices A y B). El multiplete gravitón  $\{e_m^{\hat{a}}, C_{mnl}; \Psi_m\}$  tiene 256 grados de libertad on-shell

$$D=11: \quad (\mathbf{44} + \mathbf{84})_B + (\mathbf{128})_F. \quad (1.2)$$

La parte bosónica de la acción tiene un término de Einstein-Hilbert, un término cinético para el potencial de rango-3 y un término de Chern-Simons llamado también término topológico. La teoría de supergravedad  $11D$  contiene una simetría global de escalamiento que se conoce como  $\mathbb{R}^+$  que actúa como

$$G_{mn} \rightarrow \lambda^2 G_{mn}, \quad C_{mnl} \rightarrow \lambda^3 C_{mnl}, \quad \Psi_m \rightarrow \lambda^{1/2} \Psi_m, \quad (1.3)$$

con  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . Esta simetría actúa covariantemente sobre las ecuaciones de campo pero no deja el Lagrangiano invariante: éste transforma como  $L \rightarrow \lambda^9 L$ . Todos los términos en  $L$  escalan con el mismo peso: por esta razón a esta simetría se le conoce como *simetría trombón*. La existencia de esta simetría trombón es una característica en las supergravedades sin masa o no calibradas. En general, un lagrangiano en  $D$  dimensiones escalará como  $L \rightarrow \lambda^{D-2} L$  bajo dicha simetría [62]. Alternativamente, tales simetrías trombón se pueden ver como un escalamiento de la única longitud de escala de la teoría, ver por ejemplo [62, 67]. La acción de supergravedad  $11D$  tiene una relevancia fundamental en el contexto de la teoría M, ya que se le considera la teoría efectiva de la misma, por ser la única maximal en  $D = 11$  [20, 34, 68].

### 1.1.1. Supergravedad en el Formalismo del Superespacio 11D

En esta sección queremos referirnos a la descripción de la supergravedad maximal 11D en el formalismo del superespacio <sup>1</sup>, resultados obtenidos por Cremmer y Ferrara en [24]. Este formalismo es importante debido a la conexión de la supergravedad 11D con la supermembrana 11D. Sobre esta conexión nos referiremos en la sección (1.3). En [24], demuestran que las ecuaciones de movimiento de la supergravedad 11D pueden resumirse en la ecuación:

$$(\Gamma^{\hat{u}\hat{v}\hat{w}}\tilde{D})_{\hat{x}}W_{\hat{u}\hat{v}\hat{w}\hat{x}}(x, \theta) = 0, \quad (1.4)$$

donde  $W_{\hat{u}\hat{v}\hat{w}\hat{x}}(x, \theta)$  es un supercampo tensorial completamente antisimétrico definido tal que

$$W_{\hat{u}\hat{v}\hat{w}\hat{x}}(x, \theta = 0) = \hat{F}_{\hat{u}\hat{v}\hat{w}\hat{x}}(x) = e_{\hat{u}}^ue_{\hat{v}}^ve_{\hat{w}}^we_{\hat{x}}^x\hat{F}_{uvwx}. \quad (1.5)$$

Luego, es posible escribir todos los supercampos que definen al superespacio de la supergravedad 11D en términos de este campo  $W$ . Esto es,

(1) La supertorsión,  $T_{\hat{A}\hat{B}}^{\hat{C}}$ , definida en (A.7),

$$T_{\hat{u}\hat{s}}^{\hat{t}} = T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{\hat{\delta}} = T_{\hat{\alpha}\hat{s}}^{\hat{t}} = 0, \quad T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{\hat{u}} = \frac{1}{2}i(\Gamma^0\Gamma^{\hat{u}})_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}, \quad (1.6)$$

$$T_{\hat{u}\hat{v}}^{\hat{\beta}} = -\frac{1}{42}(\Gamma^{\hat{w}\hat{x}}\Gamma^0)^{\hat{\beta}\hat{\alpha}}\tilde{D}_{\hat{\alpha}}W_{\hat{u}\hat{v}\hat{w}\hat{x}}, \quad (1.7)$$

$$T_{\hat{\alpha}\hat{u}}^{\hat{\beta}} = \frac{1}{2}W_{\hat{p}\hat{v}\hat{w}\hat{x}}(T_{\hat{u}}^{\hat{p}\hat{v}\hat{w}\hat{x}})^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}. \quad (1.8)$$

(2) La supercurvatura,  $R_{\hat{A}\hat{B}}^{\hat{C}\hat{D}}$ , definida en (A.8) y (A.9),

$$R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{\hat{u}\hat{v}} = (\Gamma^0S^{\hat{u}\hat{v}\hat{w}\hat{x}\hat{y}\hat{z}})_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}W_{\hat{w}\hat{x}\hat{y}\hat{z}}, \quad (1.9)$$

---

<sup>1</sup>En el apéndice A se explica la convención y notación usada aquí, tanto para los índices como para la definición de la estructura del superespacio.

---

$$R_{\hat{\alpha}\hat{t}}{}^{\hat{u}\hat{v}} = -\frac{1}{42}i[(\Gamma^0\Gamma^{\hat{v}}\Gamma^{\hat{w}\hat{x}}\Gamma^0\tilde{D})_{\hat{\alpha}}W_{\hat{w}\hat{x}\hat{t}}^{\hat{u}} - (\Gamma^0\Gamma^{\hat{u}}\Gamma^{\hat{w}\hat{x}}\Gamma^0\tilde{D})_{\hat{\alpha}}W_{\hat{w}\hat{x}\hat{t}}^{\hat{v}} + (\Gamma^0\Gamma^{\hat{t}}\Gamma^{\hat{w}\hat{x}}\Gamma^0\tilde{D})_{\hat{\alpha}}W_{\hat{w}\hat{x}}^{\hat{u}\hat{v}}], \quad (1.10)$$

$$R_{\hat{u}\hat{v}}{}^{\hat{\beta}}_{\hat{\delta}} = -\frac{1}{21}(\Gamma^{\hat{w}\hat{x}}\Gamma^0)^{\hat{\beta}\hat{\alpha}}\tilde{D}_{\hat{\delta}}\tilde{D}_{\hat{\alpha}}W_{\hat{w}\hat{x}\hat{u}\hat{v}} - 2(T_{[\hat{u}}^{\hat{w}\hat{x}\hat{y}\hat{z}}\tilde{D}_{\hat{v}}])^{\hat{\beta}}_{\hat{\delta}}W_{\hat{w}\hat{x}\hat{y}\hat{z}} - [T_{\hat{u}}^{\hat{w}\hat{x}\hat{y}\hat{z}}, T_{\hat{v}}^{\hat{m}\hat{n}\hat{p}\hat{q}}]_{\hat{\delta}}^{\hat{\beta}}W_{\hat{w}\hat{x}\hat{y}\hat{z}}W_{\hat{m}\hat{n}\hat{p}\hat{q}}, \quad (1.11)$$

donde  $S_{\hat{u}\hat{v}}^{\hat{w}\hat{x}\hat{y}\hat{z}} = \frac{1}{72}(\Gamma_{\hat{u}\hat{v}}^{\hat{w}\hat{x}\hat{y}\hat{z}} + 24\delta_{\hat{u}}^{[\hat{w}}\delta_{\hat{v}}^{\hat{x}}\Gamma^{\hat{y}\hat{z}}])$ . El resto de las componentes para la supercurvatura están definidas por (A.9).

(3) La intensidad de campo  $F_{MNLP}$ , definida en (A.18) y (A.19),

$$F_{\hat{u}\hat{v}\hat{w}\hat{x}}(x, \theta) = W_{\hat{u}\hat{v}\hat{w}\hat{x}}(x, \theta), \quad (1.12)$$

$$F_{\hat{u}\hat{v}\hat{\alpha}\hat{\beta}}(x, \theta) + \frac{1}{2}(\Gamma^0\Gamma_{\hat{u}\hat{v}})_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 0, \quad (1.13)$$

$$F_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}(x, \theta) = F_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\lambda}\hat{x}}(x, \theta) = F_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\lambda}\hat{\chi}}(x, \theta) = 0. \quad (1.14)$$

La supertorsión  $T_{\hat{A}\hat{B}}^{\hat{C}}$  y la supercurvatura  $R_{\hat{A}\hat{B}}$  verifican las identidades de Bianchi (A.12). Mientras que  $F_{MNLP}$  cumple la identidad de Bianchi (A.17).

## 1.2. Supermembrana 11D

En 1962 Dirac [69] introdujo la idea de que las partículas elementales podrían corresponder a los diferentes modos de vibración de una membrana. No fue hasta 1986 que Hughes, Liu y Polchinski [70] combinaron exitosamente la idea de la membrana con supersimetría, dando origen a la *supermembrana*. Luego, se extendió esta idea a objetos de más de dos dimensiones, denominados  $p$ -branas. Así, tal y como la membrana al moverse en el espacio-tiempo describe un volumen-mundo  $2+1$ -dimensional, la  $p$ -brana describe uno  $(d = p + 1)$ -dimensional. Sin embargo, la consistencia de la teorías de objetos extendidos,  $p$ -branas tiene restricciones debidas a las dimensiones del espacio-tiempo y a la supersimetría [71, 72]. La supermembrana de Bergshoeff,

---

Sezgin y Townsend [41, 73] está formulada en  $D = 11$ , que como se mencionó antes, es la máxima dimensión del espacio-tiempo permitida por supersimetría en una teoría que admita campos con espín máximo 2. Hay dos características importantes de esta supermembrana  $11D$  que mostraban que esta teoría podría ser una teoría fundamental en el contexto de la teoría M. Una, es que ella se acopla a la única teoría de supergravedad  $D = 11$  [25, 74, 75]. Y la otra, es que a partir de ella puede obtenerse la teoría de supercuerdas Tipo *IIA* [76]. Al descubrirse en 1988 que la supermembrana tiene espectro continuo [35], su estudio como objeto microscópico fue prácticamente abandonado, sobre todo desde que se vio cualitativamente que la supermembrana enrollada tiene también estas mismas propiedades espectrales [37]. Sin embargo, como hemos mencionado en la Introducción, a partir de 1997 se han obtenido avances en la teoría de la supermembrana como objeto cuántico bien definido. Ver por ejemplo, [2, 3, 6, 7, 8].

### 1.2.1. Super $p$ -branas

En esta sección se presentan algunos de los principales resultados que han sido obtenidos en la literatura en la formulación de una teoría de la supermembrana  $D = 11$ . Consideremos en primer lugar de forma más general, un objeto extendido  $p$ -brana con dimensiones  $d = p + 1$ , donde 1 es la coordenada temporal y  $(d - 1)$  coordenadas espaciales, que se mueve en un espacio-tiempo de  $D$  dimensiones. Se define su dinámica, por medio de la acción que describe el volumen del mundo de la  $p$ -brana al evolucionar en el tiempo, esto es,

$$S = -T_d \int d^d \xi \{ -\det(\partial_i x^m \partial_j x^n \eta_{mn}) \}^{1/2}, \quad (1.15)$$

donde  $\xi^i$ , con  $(i = 0, \dots, d - 1)$ , son las coordenadas del volumen-mundo, mientras que  $x^m$ , con  $(m = 0, \dots, D - 1)$  son las coordenadas del espacio-tiempo  $D$ . En esta

---

acción se supone el espacio-tiempo plano con métrica de Minkowski  $\eta_{mn}$  y signatura  $(-, +, \dots, +)$ .  $T_d$  es una constante llamada tensión del objeto con dimensión tal que deja a  $S$  adimensional. Esta acción fue introducida por primera vez por Dirac para la membrana ( $d = 3$ ) [69] y luego por Nambu y Goto para la cuerda ( $d = 2$ ) [77, 78]. La variación de la acción (1.15) produce las ecuaciones clásicas de movimiento, las cuales son equivalentes a las que se pueden obtener de la acción de Polyakov:

$$S = T_d \int d^d \xi \left( -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ij} \partial_i x^m \partial_j x^n \eta_{mn} + \frac{1}{2} (d-2) \sqrt{-g} \right). \quad (1.16)$$

En dicha acción se introduce el campo auxiliar  $g_{ij}(\xi)$ , con  $g$ , su determinante y  $g^{ij}$  su inversa [79, 80]. La acción (1.16) puede hacerse más general suponiendo que la membrana está en un espacio curvo, es decir, sustituir  $\eta_{mn}$  por  $G_{mn}(x)$ . También puede incorporarse un tensor de campo antisimétrico  $C_{mn\dots l}(x)$  de rango  $d$  que se acopla a través de un término de tipo Wess-Zumino. Con estos nuevos elementos (1.16) queda:

$$S = T_d \int d^d \xi \left[ -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ij} \partial_i x^m \partial_j x^n G_{mn}(x) + \frac{1}{2} (d-2) \sqrt{-g} \right. \\ \left. + \frac{1}{d!} \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_d} \partial_{i_1} x^{m_1} \partial_{i_2} x^{m_2} \dots \partial_{i_d} x^{m_d} C_{m_1 m_2 \dots m_d}(x) \right], \quad (1.17)$$

la cual da como ecuaciones de movimiento:

$$\partial_i \left( \sqrt{-g} g^{ij} \partial_j x^n G_{mn}(x) \right) + G_{ml} \Gamma_{pt}^l \partial_i x^p \partial_j x^t g^{ij} \\ = \frac{1}{d!} F_{mnt\dots p} \epsilon^{ij\dots k} \partial_i x^n \partial_j x^t \dots \partial_k x^p, \quad (1.18)$$

y

$$g_{ij} = \partial_i x^m \partial_j x^n G_{mn}(x), \quad F = dC, \quad (1.19)$$

donde  $F$  es la intensidad de campo<sup>2</sup> que obedece la identidad de Bianchi  $dF = 0$ .

---

<sup>2</sup>Traducción de *field-strength*.

---

A partir de estas generalizaciones se formula la versión supersimétrica de la membrana, la *supermembrana*. La introducción de la supersimetría a la teoría de la membrana bosónica puede hacerse de dos maneras. La primera es formular una supermembrana con supersimetría del espacio-tiempo manifiesta pero sin supersimetría en el volumen-mundo barrido por la membrana. La segunda es formular una membrana con supersimetría del volumen-mundo manifiesta pero sin supersimetría en el espacio-tiempo, a esta supermembrana se le denomina *membrana spinning*<sup>3</sup>. En esta membrana spinning se presenta el problema [80] de que el término cosmológico del volumen-mundo no permite la supersimetrización con las reglas usuales del cálculo tensorial sin la introducción de un término de Einstein-Hilbert [81]. Este impedimento se tradujo en un teorema de *no-go* para este tipo de membranas [82]. Posteriormente se consiguió formular la supermembrana con ambas supersimetrías [83]. El enfoque en esta tesis será el de considerar a la supermembrana descrita por una acción del tipo Green-Schwarz que tiene supersimetría en el espacio-tiempo y tiene simetría kappa en el volumen-mundo. Para formular la acción de la super  $p$ -brana a la Green-Schwarz es necesario usar el formalismo del superespacio (ver apéndice A). Se introducen las super-coordenadas (A.1)  $Z^M = (x^m, \theta^\alpha)$  de un superespacio curvo y los supervielbeins (A.3),  $E_M^{\hat{A}}(Z)$  donde los índices definidos por la convención (A.1). Con el pull-back definido:

$$E_i^{\hat{A}} = \partial_i Z^M E_M^{\hat{A}} \quad , \quad (1.20)$$

con  $i$  la coordenada del volumen-mundo. Es necesario definir una super- $d$ -forma  $C_{\hat{A}_d \dots \hat{A}_1}(Z)$ , ya que para poder definir la acción de la super  $p$  – brana tiene que

---

<sup>3</sup>Sin traducción.



existir una  $(p+2)$ -forma cerrada en el superespacio. Su acción es:

$$S = T_d \int d^d \xi \left[ -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ij} E_i^{\hat{a}} E_j^{\hat{b}} \eta_{\hat{a}\hat{b}} + \frac{1}{2} (d-2) \sqrt{-g} + \frac{1}{d!} \epsilon^{i_1 \dots i_d} E_{i_1}^{\hat{A}_1} \dots E_{i_d}^{\hat{A}_d} C_{\hat{A}_d \dots \hat{A}_1} \right], \quad (1.21)$$

Para el caso  $d = 3$  esta acción se corresponde con la de la supermembrana. Esta acción es equivalente a:

$$S = T_3 \int d^3 \xi \left[ -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ij} E_i^{\hat{a}} E_j^{\hat{b}} \eta_{\hat{a}\hat{b}} + \frac{1}{2} \sqrt{-g} + \frac{1}{6} \epsilon^{ijk} E_i^{\hat{A}} E_j^{\hat{B}} E_k^{\hat{C}} C_{\hat{C}\hat{B}\hat{A}} \right]. \quad (1.22)$$

donde,  $g_{ij} = E_i^{\hat{a}} E_j^{\hat{b}} \eta_{\hat{a}\hat{b}}$ .

La acción (1.21) al igual que (1.17) tiene un término cinético, un término cosmológico y un término de Wess-Zumino. Esta acción (1.21) se reduce a la acción de la supercuerdas Green-Schwarz cuando  $d = 2$ .

Las simetrías del espacio target son los superdifeomorfismos, la invariancia de Lorentz y la invariancia de calibre de la  $d$ -forma. Mientras que las simetrías del volumen-mundo son los difeomorfismos usuales y la invariancia kappa. Las leyes de transformación bajo simetría kappa [70] son:

$$\delta Z^M E^{\hat{a}}_M = 0, \quad \delta Z^M E^{\hat{\alpha}}_M = \kappa^{\hat{\beta}} (1 + \Gamma)^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}}, \quad (1.23)$$

donde  $\kappa^{\hat{\beta}}(\xi)$  es un espinor que anticonmuta del espacio-tiempo pero un escalar en el volumen-mundo, con:

$$\Gamma^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}} = \frac{(-1)^{d(d-3)/4}}{d! \sqrt{-g}} \epsilon^{i_1 \dots i_d} E_{i_1}^{\hat{a}_1} E_{i_2}^{\hat{a}_2} \dots E_{i_d}^{\hat{a}_d} \Gamma_{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_d}^{\hat{\alpha}}. \quad (1.24)$$

Allí las matrices  $\Gamma_a$  son las matrices de Dirac en el espacio-tiempo que verifican (B.3) y (B.4). Sobre la invariancia bajo simetría kappa de la acción (1.22) se pueden hacer las siguientes observaciones. En primer lugar, la invariancia se verifica si y solo si se

satisfacen ciertas restricciones sobre el tensor de intensidad de campo antisimétrico  $F_{MNPQ}(Z)$  y sobre la supertorsión  $T_{MN}^{\hat{A}}$  (en el caso  $d = 3$ ). En particular, la identidad de Bianchi  $dF = 0$  requiere que  $\Gamma$  verifique la matriz identidad:

$$(d\bar{\theta}\Gamma_a d\theta)(d\bar{\theta}\Gamma^{ab_1\dots b_{d-2}} d\theta) = 0, \quad (1.25)$$

para un espinor que conmuta  $d\theta$ . Esta restricción solo se satisface para ciertos valores de  $d$  y  $D$  [72]. En el caso de la supercuerda y la supermembrana los valores permitidos son:

$$d = 2 : \quad D = 3, 4, 6, 10; \quad d = 3 : \quad D = 4, 5, 7, 11. \quad (1.26)$$

Se tiene entonces el resultado ya conocido para la existencia clásica de las supercuerdas Green-Schwarz y el límite superior para  $D$ ,  $D = 11$ . En segundo lugar, la matriz  $\Gamma$  (1.24) tiene traza nula y satisface:

$$\Gamma^2 = 1 \quad (1.27)$$

cuando se satisfacen las ecuaciones de movimiento, por lo que las matrices  $(1 \pm \Gamma)/2$  actúan como operadores proyectores. Entonces la ley de transformación (1.23) elimina la mitad de los grados de libertad fermiónicos, con lo cual el número de grados de libertad fermiónicos y bosónicos coinciden sobre el volumen-mundo. Finalmente, una propiedad importante para el caso de la supermembrana  $D = 11$  es que la invariancia kappa de la acción impone vínculos sobre los campos del background,  $E_M^{\hat{A}}$  y  $C_{MNP}$ , que coinciden con las ecuaciones de movimiento de la única teoría de supergravedad en  $D = 11$  [41, 73].

### 1.2.2. La Supermembrana en el Superespacio

Se puede obtener una expresión de la supermembrana en el superespacio en términos de las componentes de los supercampos en un espacio-tiempo curvo. Para ello,

usaremos los resultados obtenidos por B. de Wit, K. Peeters, J. Plefka en [84], donde se usa el método denominado *gauge completion*<sup>4</sup>, el cual fue usado para la supergravedad en un principio por Cremmer y Ferrara en [24]. Se puede ver también [85, 86]. Con dicho método es posible obtener las expresiones explícitas en términos de las coordenadas fermiónicas de dichos supercampos y obtener toda la descripción de dicho superespacio. En [84] se obtienen los supercampos solamente a segundo orden en la variable fermiónica  $\theta$  debido a la complejidad de estas expansiones. Por ejemplo, para la expansión del superveilbein  $E_M^{\hat{A}}$  se obtiene:

$$\begin{aligned} E_m^{\hat{A}} &= e_m^{\hat{A}} + 2\bar{\theta}\Gamma^{\hat{A}}\Psi_m - \frac{1}{4}\bar{\theta}\Gamma^{\hat{A}}\hat{\omega}_m^{\hat{t}\hat{u}}\Gamma_{\hat{t}\hat{u}}\theta + \bar{\theta}\Gamma^{\hat{A}}T_m^{tfgh}\hat{F}_{tfgh}\theta + O(\theta^3), \\ E_m^{\hat{\alpha}} &= \Psi_m^{\hat{\alpha}} - \frac{1}{4}\hat{\omega}_m^{\hat{t}\hat{u}}(\Gamma_{\hat{t}\hat{u}}\theta)^{\hat{\alpha}} + (T_m^{tfgh}\theta)^{\hat{\alpha}}\hat{F}_{tfgh} + O(\theta^3), \\ E_{\alpha}^{\hat{A}} &= -(\bar{\theta}\Gamma^{\hat{A}})_{\alpha} + O(\theta^3), \\ E_{\alpha}^{\hat{\alpha}} &= \delta_{\alpha}^{\hat{\alpha}} + M_{\alpha}^{\hat{\alpha}} + O(\theta^3), \quad M_{\alpha}^{\hat{\alpha}} \propto \hat{F}\theta^2, \end{aligned} \tag{1.28}$$

de igual manera consiguen expresiones para los campos  $C_{MNP}$ ,  $E_i^{\hat{A}}$  y para todos los campos que aparecen en la acción y los que definen la estructura del superespacio correspondiente.

Luego, sustituyen estos resultados en la acción de la supermembrana (1.22) en su versión Nambu-Goto,

$$S = \int d^3\xi [-(\sqrt{-g}) + \frac{1}{6}(\varepsilon^{ijk}E_i^{\hat{A}}E_j^{\hat{B}}E_k^{\hat{C}}C_{\hat{C}\hat{B}\hat{A}})], \tag{1.29}$$

---

<sup>4</sup>Sin traducción.

y obtienen:

$$\begin{aligned}
S = & \int d^3\xi(-\sqrt{-g}) + \int d^3\xi[\frac{1}{6}\varepsilon^{ijk}\partial_i X^m\partial_j X^n\partial_k X^p\{C_{mnp} - 6\bar{\theta}\Gamma_{mn}\Psi_p + \frac{3}{4}\bar{\theta}\Gamma_{\hat{t}\hat{u}}\Gamma_{mn}\theta\hat{\omega}_p^{\hat{t}\hat{u}}\}] + \\
& + \int d^3\xi[\frac{1}{6}\varepsilon^{ijk}\partial_i X^m\partial_j X^n\partial_k X^p\{-3\bar{\theta}\Gamma_{mn}T_p^{tuvw}\theta\hat{F}_{tuvw} - 12\bar{\theta}\Gamma_{tm}\Psi_n\bar{\theta}\Gamma^t\Psi_p\}] + \\
& + \int d^3\xi[-\varepsilon^{ijk}\bar{\theta}\Gamma_{mn}\partial_k\theta\{\frac{1}{2}\partial_i X^m\partial_j X^n + \frac{1}{2}\partial_i X^m\bar{\theta}\Gamma^n\partial_j\theta + \frac{1}{6}\bar{\theta}\Gamma^m\partial_i\theta\bar{\theta}\Gamma^n\partial_j\theta\}] + \\
& + \int d^3\xi[\frac{1}{3}\varepsilon^{ijk}\partial_i X^m\partial_j X^n\{4\bar{\theta}\Gamma_{pm}\partial_k\theta\bar{\theta}\Gamma^p\Psi_n - 2\bar{\theta}\Gamma^p\partial_k\theta\bar{\theta}\Gamma_{pm}\Psi_n\} + O(\theta^3)]. \quad (1.30)
\end{aligned}$$

La expresión (1.30) es consistente con la simetría kappa cuya expresión está en (1.23). Esto garantiza, en principio, que los vínculos derivados coincidan con las ecuaciones de movimiento de la supergravedad  $D = 11$  como se vio en [41]. Debido a lo complicado de la expresión a este orden o a órdenes superiores en  $\theta$ , los autores en [84] hacen un análisis restringiéndose a la membrana bosónica en un background curvo, donde aparece un elemento importante en la caracterización del background que es la 3-forma. Hablaremos más de ella en la subsección 1.2.3. La acción (1.22) es completamente general. En particular, se incluye la posibilidad de que el espacio-tiempo sea plano lo cual simplifica la acción enormemente. La métrica del espacio-tiempo es la métrica de Minkowski, y la representación en componentes de los supercampos  $E_M^{\hat{A}}$  y  $C_{MNP}$  en el formalismo del superespacio plano se reduce a:

$$\begin{aligned}
E_m^{\hat{A}}(x, \theta) &= \delta_m^{\hat{A}}(x), \quad E_m^{\hat{\alpha}}(x, \theta) = 0, \\
E_{\alpha}^{\hat{A}}(x, \theta) &= -(\bar{\theta}\Gamma^{\hat{A}})_{\alpha}, \quad E_{\alpha}^{\hat{\alpha}}(x, \theta) = \delta_{\alpha}^{\hat{\alpha}}, \quad (1.31)
\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
C_{mnp} &= 0, \quad C_{mna} = (\bar{\theta}\Gamma_{mn})_{\alpha}, \quad C_{m\alpha\beta} = (\bar{\theta}\Gamma_{mn})_{(\alpha}(\bar{\theta}\Gamma^n)_{\beta)}, \\
C_{\alpha\beta\gamma} &= (\bar{\theta}\Gamma_{mn})_{(\alpha}(\bar{\theta}\Gamma^m)_{\beta}(\bar{\theta}\Gamma^n)_{\gamma)}. \quad (1.32)
\end{aligned}$$

Con las condiciones (1.31) y (1.32), la acción (1.29) se reduce a:

$$S = \int d^3\xi \{ -\sqrt{-g} - \varepsilon^{ijk} \bar{\theta} \Gamma_{mn} \partial_k \theta \left[ \frac{1}{2} \partial_i X^m (\partial_j X^n + \bar{\theta} \Gamma^n \partial_j \theta) + \frac{1}{6} \bar{\theta} \Gamma^m \partial_i \theta \bar{\theta} \Gamma^n \partial_j \theta \right] \}. \quad (1.33)$$

En un primer análisis, nosotros analizamos a primer orden en  $\theta$  en el formalismo del superespacio a la supermembrana enrollada en un  $T^2$  siguiendo a [41]. Se impuso la simetría kappa:

$$\begin{aligned} \delta_\kappa S_{M_9 \times T^2} = & - \int d^3\xi \delta(\sqrt{-g}) + \\ & - \int d^3\xi \frac{1}{6} \delta_\kappa [\varepsilon^{ijk} E_i^{\hat{A}'} E_j^{\hat{B}'} E_k^{\hat{C}'} B_{\hat{C}' \hat{B}' \hat{A}'} + 3\varepsilon^{ijk} E_i^{\hat{A}'} E_j^{\hat{B}'} E_k^{\hat{C}*} B_{\hat{C}* \hat{B}' \hat{A}'} + \\ & + 3\varepsilon^{ijk} E_i^{\hat{A}'} E_j^{\hat{B}*} E_k^{\hat{C}*} B_{\hat{C}* \hat{B}* \hat{A}'} + \varepsilon^{ijk} E_i^{\hat{A}*} E_j^{\hat{B}*} E_k^{\hat{C}*} B_{\hat{C}* \hat{B}* \hat{A}*}], \end{aligned} \quad (1.34)$$

y determinamos los vínculos para los supercampos  $T_{MN}^{\hat{A}}$  y  $C_{MNP}$ , asociados a las ecuaciones de movimiento de la supergravedad  $D = 9, N = 2$  (para mayor detalle ver apéndice C donde encontramos los siguientes resultados):

$$T_{\hat{\rho}\hat{\beta}}^{\hat{b}'} \propto (\Gamma^{\hat{b}'})_{\hat{\rho}\hat{\beta}}, \quad T_{\hat{\rho}\hat{\beta}}^{\hat{s}} \propto (\Gamma^{\hat{s}})_{\hat{\rho}\hat{\beta}}, \quad (1.35)$$

y

$$\begin{aligned} \delta_\kappa C_{\hat{r}\hat{q}\hat{\alpha}} &= \delta_\kappa C_{\hat{\chi}\hat{b}'\hat{a}'} = 0, \\ \delta_\kappa C_{\hat{r}\hat{s}\nu} &= (\bar{\kappa}_- \Gamma_{rs})_\nu, \quad \delta_\kappa C_{\hat{r}\hat{b}'\hat{\alpha}} \propto \bar{\kappa}_- \Gamma_{m's}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Obtenidos estos resultados, se siguió esta metodología aplicada al caso de la supermembrana con cargas centrales para encontrar los supervínculos correspondientes. Inicialmente se consideró el caso a primer orden en  $\theta$ . Se calcularon parcialmente estos vínculos asociados con la intención de obtener la supergravedad calibrada en el formalismo del superespacio. Resultados parciales fueron presentados en el *VII Congreso*

---

*de la Sociedad Venezolana de Física, Diciembre 7-11, Caracas, Venezuela, 2009* (ver apéndice C).

Debido a la complejidad de las expresiones obtenidas usando este método que dificultaban la clasificación de las supergravedades calibradas asociadas, finalmente se prefirió utilizar un método diferente basado en el análisis global de la supermembrana tal y como explicaremos a partir del capítulo 2. Con este método se obtuvieron los resultados que se presentarán en los capítulos 5, 6 y 7. Sin embargo, esperamos en un trabajo posterior completar y publicar los resultados del apéndice C, con los supervínculos de la supermembrana con cargas centrales correspondientes con las ecuaciones de movimiento de la supergravedad calibrada asociada en  $D = 9$  en el formalismo del superespacio.

### 1.2.3. La Supermembrana en el Calibre del Cono de Luz

En esta sección, en primer lugar comentaremos los resultados de [84] referente a la teoría de la membrana formulada en un background no trivial en el calibre del cono de luz (CCL). Aunque en nuestro caso se parte de un background plano, es interesante el resultado discutido en [84] porque el enrollamiento con la condición de carga central podría reinterpretarse en términos de flujos sobre el background de la parte compacta generando un background curvo.

En primer lugar se formula a la membrana en el calibre del cono de luz en el background definido por la métrica  $G_{mn}$  y el tensor de campo de calibre  $C_{mnl}$ . La densidad lagrangeana de la membrana bosónica es:

$$\mathcal{L} = -\sqrt{-g} - \frac{1}{6}\epsilon^{ijk}\partial_i X^m \partial_j X^n \partial_k X^l C_{lmn}, \quad (1.37)$$


---

donde la métrica inducida es  $g_{ij} = \partial_i X^m \partial_j X^n \eta_{mn}$ .

En la formulación del cono de luz, las coordenadas se descomponen en  $(X^+, X^-, X^a)$  con  $a = 1, \dots, 9$ . Por otra parte se usan los difeomorfismos en el espacio target para escribir la métrica en una forma conveniente [87],

$$G_{--} = G_{a-} = 0. \quad (1.38)$$

A continuación se identifica la coordenada temporal del espacio target con el tiempo del volumen-mundo, imponiendo la condición  $X^+ = \tau$ . Además, denotamos las coordenadas de la parte espacial del volumen-mundo de la membrana  $\sigma^r$ ,  $r = 1, 2$ . Siguiendo los pasos descritos en [33] para la membrana en espacio plano, se obtiene el hamiltoniano de la teoría en términos de las coordenadas y momento, sometido al vínculo

$$\phi_r = P_a \partial_r X^a + P_- \partial_r X^- \approx 0, \quad (1.39)$$

que es igual al de la teoría en espacio plano. El hamiltoniano obtenido en [84] es:

$$H = \int d^2\sigma \left\{ \frac{G_{+-}}{P_- - C_-} \left[ \frac{1}{2} \left( P_a - C_a - \frac{P_- - C_-}{G_{+-}} G_{a+} \right)^2 + \frac{1}{4} (\varepsilon^{rs} \partial_r X^a \partial_s X^b)^2 \right] \right. \\ \left. - \frac{P_- - C_-}{2 G_{+-}} G_{++} - C_+ - C_{+-} + c^r \phi_r \right\}. \quad (1.40)$$

donde se han hecho las siguientes definiciones:

$$C_a = -\varepsilon^{rs} \partial_r X^- \partial_s X^b C_{-ab} + \frac{1}{2} \varepsilon^{rs} \partial_r X^b \partial_s X^c C_{abc}, \\ C_{\pm} = \frac{1}{2} \varepsilon^{rs} \partial_r X^a \partial_s X^b C_{\pm ab}, \\ C_{+-} = \varepsilon^{rs} \partial_r X^- \partial_s X^a C_{+-a}. \quad (1.41)$$

En (1.40) se incluye un multiplicador de Lagrange  $c^r$  acoplándose al vínculo (1.39). Los índices son contraídos con la métrica  $G_{ab}$  o su inversa. La selección del calibre  $X^+ = \tau$  permite reparametrizaciones dependientes de  $\tau$  de las coordenadas del espacio de

mundo<sup>5</sup>  $\sigma^r$ , que a su vez induce transformaciones sobre el multiplicador de Lagrange  $c^r$  a través de las ecuaciones de movimiento de Hamilton. Mediante posteriores fijaciones de calibre y resolución del vínculo se llega a otras expresiones del hamiltoniano. En los casos en los que la matriz constante antisimétrica  $C_{-ab}$  es distinta de cero se ha conjeturado, que ésta tiene un papel importante dentro de los modelos matriciales en la compactificación sobre un toro no-conmutativo [88, 89, 90]. Si en cambio se considera  $C_{-ab} = 0$ , el hamiltoniano correspondiente fue reformulado en términos del lagrangiano de la teoría de calibre de los difeomorfismos que preservan el área del volumen-mundo de la supermembrana. En dicho caso el espacio-tiempo 11D es Minkowski, se toma el volumen-mundo como una foliación  $\Sigma \times R$ , con  $\Sigma$  una superficie de Riemann de genus  $g$ , las coordenadas locales espaciales sobre  $\Sigma$ ,  $\sigma^a$  ( $a = 1, 2$ ), y  $\tau \in R$  representa el tiempo en el volumen-mundo. Si ahora se descomponen los  $X^\mu$  y  $P_\mu$  de acuerdo al ansatz estándar del calibre del cono de luz y se resuelven los vínculos [33], el hamiltoniano canónico reducido de la supermembrana  $D = 11$  está dado por:

$$H = T^{-2/3} \int_{\Sigma} \sqrt{W} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{P_M}{\sqrt{W}} \right)^2 + \frac{T^2}{4} \{X^M, X^N\}^2 + \sqrt{W} \bar{\theta} \Gamma_- \Gamma_m \{X^m, \theta\} \right], \quad (1.42)$$

sometido al vínculo local

$$\phi \equiv d(P_M dX^M + \bar{\theta} \Gamma_- \theta) = 0, \quad (1.43)$$

y al vínculo global

$$\phi_0 \equiv \int_{\mathcal{C}_f} P_M dX^M + \bar{\theta} \Gamma_- d\theta = 0, \quad (1.44)$$

donde  $\mathcal{C}_s$  es una base de homología sobre  $\Sigma$ , con  $M = 1, \dots, 9$ , y  $P_M$  son los momentos conjugados a  $X^M$ .  $\sqrt{W}$  es la densidad escalar introducida en el CCL,  $\Sigma$  es la variedad base que es una superficie de Riemann,  $\theta$  representa los espinores de Majorana 11D y

---

<sup>5</sup>Traducción de *world-space*.



$\Gamma_m$  son las matrices de Dirac correspondientes.  $T$  es la tensión de la supermembrana.  $\phi$  y  $\phi_0$  son los generadores de los difeomorfismos que preservan el área.  $\phi_0$  se corresponde con los generadores de los difeomorfismos homotópicos a la identidad, y es el único presente en el target no-compacto. Ambos tipos de generadores preservan el elemento de área  $\sqrt{W}\epsilon_{ab}d\sigma^a \wedge d\sigma^b$ , una 2-forma simpléctica. La ecuación

$$\{X^m, X^n\} = \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{W}} \partial_a X^m \partial_b X^n, \quad (1.45)$$

es el corchete simpléctico asociado.

#### 1.2.4. Propiedades Espectrales: Espectro Continuo

En esta sección se comentará sobre el resultado obtenido en [35] acerca del hecho de que la supermembrana  $11D$  tiene espectro continuo. Una primera observación sobre el hamiltoniano en el cono de luz es que los modos cero se desacoplan del operador de masa que describe los modos de oscilación de la supermembrana que se corresponde con el hamiltoniano que usaremos en lo sucesivo. La cinemática del movimiento del centro de masas es descrito por la cinemática de una partícula relativista libre. Cuando nos restringimos a la membrana bosónica se observa que la densidad de potencial es:

$$V = (\epsilon^{rs} \partial_a X^r \partial_s X^b)^2. \quad (1.46)$$

Esta expresión es cero cuando los campos  $X$  dependen de una combinación lineal de las coordenadas espaciales que parametrizan el volumen mundo  $\sigma^r$ 's. En estos casos, se dice que la superficie degenera, esto es, cuando la membrana tiene 'brotes' infinitos muy delgados en su superficie, llamadas configuraciones tipo cuerdas. Este hecho muestra que membrana clásicamente es inestable, dado que estas configuraciones tienen energía cero (energía proporcional al área), por lo que clásicamente el sistema

accede a todos los estados posibles, con o sin cuerdas. La membrana clásicamente no preserva ni el número de partículas ni la topología [92].

Para estudiar el espectro de la supermembrana como objeto cuántico se introduce el modelo matricial  $SU(N)$  con  $N$  grande pero finito, con el hamiltoniano descrito por:

$$H = \frac{1}{2} P_a^A P_{aA} + \frac{1}{4} (f_{AB}{}^C X_a^A X_b^B)^2 - \frac{i}{2} f_{ABC} X_a^A \theta^B \gamma^a \theta^C, \quad (1.47)$$

con el vínculo de Gauss,

$$\phi_A = f_{ABC} (X_a^B P_a^C - \frac{i}{2} \theta_\alpha^B \theta_\alpha^C) \approx 0. \quad (1.48)$$

Con este modelo matricial se encuentra que el espectro del hamiltoniano es continuo [35], y ello llevó a interpretar a esta teoría como una teoría de segunda cuantización [92, 93].

Para explicar este resultado se usa un modelo *de juguete*<sup>6</sup> que incluye todos los aspectos cualitativos de la supermembrana. Este modelo es un sistema cuántico supersimétrico de dos dimensiones con valles planos. El hamiltoniano supersimétrico del modelo de juguete es:

$$H = \begin{pmatrix} -\Delta + x^2 y^2 & x + iy \\ x - iy & -\Delta + x^2 y^2 \end{pmatrix}. \quad (1.49)$$

La estructura de este hamiltoniano supersimétrico  $H$  muestra la parte bosónica en la diagonal y la parte fermiónica fuera de ella. Consideraremos una función de onda definida por,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1(x, y) \\ \phi_2(x, y) \end{pmatrix}. \quad (1.50)$$

---

<sup>6</sup>Traducción de *toy model*.

---

El potencial  $V(x, y) = x^2 y^2$  tiene dos direcciones planas que se corresponden con las direcciones  $x = 0$  y  $y = 0$ , el potencial se anula. Es importante conocer cómo se comporta la parte bosónica del hamiltoniano. Esto es,

$$H_B = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(p_x^2 + x^2 y^2) + \frac{1}{2}(p_y^2 + x^2 y^2) \geq \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}|y| + \frac{1}{2}|x|, \quad (1.51)$$

donde esta desigualdad es una desigualdad entre operadores, donde está acotado inferiormente por la suma de los osciladores armónicos con frecuencia variable dadas respectivamente por  $y$  y por  $x$ . Por un teorema de Barry Simon [91], un hamiltoniano acotado inferiormente por otro hamiltoniano con espectro discreto, tiene espectro discreto. Esto es sorprendente teniendo en cuenta el comportamiento clásico. Cuando se incluye la contribución fermiónica en el hamiltoniano supersimétrico, lo que de Wit, Lüscher y Nicolai probaron en [35] es que el espectro es continuo. Esto significa que no existe potencial que permita el confinamiento de la función de onda, lo cual implica que el espectro será un continuo. Para la demostración, ellos usaron el método de reducción al absurdo. Aplicándolo al modelo de juguete, se prueba que existe al menos una familia de funciones de onda que eligieron específicamente:

$$\Psi_\lambda(x, y) := \chi(x - \lambda) \sqrt{\frac{|x|}{4\pi}} e^{-\frac{1}{2}|x|y^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (1.52)$$

donde,

$$\chi(x) := e^{ikx} \chi_0(x), \quad (1.53)$$

con  $k = \sqrt{E}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $\chi_0$  es una función real que varía suavemente de soporte compacto en  $\mathbb{R}$  que es normalizada

$$\|\chi\|^2 = \int \chi^2 dx = 1. \quad (1.54)$$

Demostraron que dado cualquier  $\epsilon > 0$ , existe un  $\lambda$  tal que

$$\|(H - E)\Psi_\lambda\| < \epsilon. \quad (1.55)$$

---

Lo cual prueba que el espectro de  $H$  lo forman un continuo de números positivos.

Este resultado fue totalmente inesperado y contrario al comportamiento de la supercuerda, cuyas excitaciones discretas se interpretan como excitaciones de tipo partícula de una teoría cuyo espacio target está en más dimensiones. Posteriormente este resultado fue reinterpretado en términos de una teoría en segunda cuantización en la que las membranas se entienden como una teoría de interacción de muchas partículas ( $D0$ -branas), y en donde ahora por consistencia es necesario que el espectro sea continuo, ya que los estados de scattering<sup>7</sup> de la supermembrana conectados por configuraciones de tipo cuerdas deberían tener un espectro continuo de energía [92, 93].

### 1.3. Conexión entre Supermembrana y Supergravedad en $11D$

Como se mencionó antes, a la supergravedad  $D = 11$  se le considera como la teoría efectiva del límite a bajas energías de la teoría-M. Por otro lado, está bien establecido que las ecuaciones de movimiento de la supergravedad en  $11D$  surgen como una consecuencia de imponer la simetría kappa a la acción de la supermembrana formulada sobre un background general [41]. Esto respalda la conjetura de que la descripción a baja energía de la teoría de la supermembrana es la teoría de supergravedad en  $11D$ . Más específicamente, esta conjetura significa que el estado fundamental de la supermembrana en  $11D$  se corresponde al supermultiplete asociado a la supergravedad en  $11D$ . Una prueba rigurosa sobre este punto aún no existe, aunque se está trabajando

---

<sup>7</sup>Sin traducción.

---

en ello [94]. En esta sección mencionaremos los resultados más generales encontrados en [41]. Sea la variación de la acción de la supermembrana (1.22) bajo simetría kappa

$$\begin{aligned} \delta_\kappa S = \int d^3\xi \{ & \sqrt{-g} g^{ij} (-\delta_\kappa E^{\hat{\beta}} E_i^{\hat{\gamma}} T_{\hat{\gamma}\hat{\beta}}^{\hat{a}}) E_{j\hat{a}} + \sqrt{-g} g^{ij} (-\delta_\kappa E^{\hat{\beta}} E_i^{\hat{c}} T_{\hat{c}\hat{\beta}}^{\hat{a}}) E_{j\hat{a}} + \} \\ & - \frac{1}{2} \sqrt{-g} \delta_\kappa g (\mathcal{T}^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} \mathcal{T} - \frac{1}{2} g^{ij}) + \varepsilon^{ijk} E_i^{\hat{A}} E_j^{\hat{B}} E_k^{\hat{C}} \delta_\kappa E^{\hat{A}} F_{\hat{A}\hat{C}\hat{B}\hat{A}} \}, \end{aligned} \quad (1.56)$$

donde las transformaciones bajo simetría kappa (1.23) se pueden escribir de manera más compacta:

$$\begin{aligned} \delta_\kappa E^{\hat{\beta}} &= (1 + \Gamma)_\beta^\alpha \kappa^\beta, \\ \delta_\kappa E^a &= 0, \end{aligned} \quad (1.57)$$

y  $g_{ij} \equiv \mathcal{T}_{ij}$ . Finalmente, los vínculos que se obtienen imponiendo la invariancia de la acción bajo esta simetría  $\delta_\kappa S = 0$  son:

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} = F_{\alpha\beta\gamma d} = F_{\alpha abc} = 0, \quad (1.58)$$

$$F_{\alpha\beta ab} = -\frac{1}{6} (\Gamma_{ab})_{\alpha\beta}, \quad (1.59)$$

$$T_{\alpha\beta}^a = (\Gamma^a)_{\alpha\beta}. \quad (1.60)$$

que coinciden con las ecuaciones de movimiento de la supergravedad 11D en el formalismo del superspacio, mostradas en (1.6) y (1.12).

## CAPÍTULO 2

---

# Metodología: Compactificación y Calibrados

---

En este capítulo resumiremos la metodología usada en esta tesis para alcanzar los objetivos planteados. Discutiremos algunos de los métodos de compactificación usados en supergravedad y en la teoría de la supermembrana. Se repasará el concepto de fibrado y el papel desempeñado por la monodromía en los métodos de calibrado. Se describirán dos métodos para obtener la descripción efectiva de la supermembrana con cargas centrales. En particular, se describe el *método de esculpido* que explica a nivel global el calibrado de la supermembrana con cargas centrales y que posteriormente a lo largo de esta tesis va a permitir establecer la correspondencia entre las supergravedades calibradas, la teoría-M y las relaciones de dualidad.

## 2.1. Métodos de Compactificación usados en Supergravedad

En esta sección describimos algunos métodos de compactificación usados en supergravedad. Estos procedimientos son importantes para obtener las descripciones

efectivas de las supergravidades en menor dimensión. En particular, las teorías de supergravedad en cuatro dimensiones pueden ser obtenidas mediante estos métodos a partir de esas teorías de supergravedad en mayor dimensión.

### 2.1.1. Compactificación Toroidal: Reducción Dimensional

En esta sección describimos la compactificación toroidal resumiendo los resultados expuestos en [66]. El procedimiento esencialmente consiste en expresar un campo de dimensión mayor en una torre infinita de campos de menor dimensión expandiendo la dependencia sobre las coordenadas internas en armónicos. En el caso de la reducción sobre un círculo de un campo escalar complejo  $\hat{\phi}$  en  $\hat{D}$  dimensiones, dependiente de las coordenadas  $x^{\hat{m}} = (x^m, y)$ , se hace la expansión de Fourier:

$$\hat{\phi}(x^m, y) = \sum_n e^{iny/R} \phi_n(x^m), \quad (2.1)$$

donde la dirección  $y$  se toma como dirección compacta de longitud  $2\pi R$ , con el momento  $k$  definido por  $k = n/R$  en dicha dirección, y se impone la condición de borde:

$$\hat{\phi}(x^m, 0) = \hat{\phi}(x^m, 2\pi R). \quad (2.2)$$

Supondremos, además, que el campo escalar  $\hat{\phi}$  verifica la ecuación de Klein-Gordon  $\square \hat{\phi} = 0$  donde  $\square = \partial_\mu \partial^\mu + \partial_y \partial^y$ . Si se descompone el D'Alembertiano en términos de las coordenadas, la ecuación queda:

$$\square \phi_k - k^2 \phi_k = \square \phi_n - (n/R)^2 \phi_n = 0, \quad (2.3)$$

donde  $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ . Esta es la ecuación para un escalar complejo de  $(masa)^2 = k^2$ . Por lo tanto, un escalar sin masa en  $\hat{D}$  dimensiones se convierte en un número infinito de campos escalares en  $D = \hat{D} - 1$  dimensiones. Estos campos son los estados de

---

Kaluza-Klein (KK). El espectro de los estados KK es continuo para las direcciones internas no-compactas mientras que es discreto cuando estas son compactas. Solo la componente  $\phi_0$  ( $n = 0$ ) no tiene masa. El caso en que el proceso de compactificación solo considera estos modos no masivos, se le denomina *reducción dimensional* [66].

Luego, en el límite  $R \rightarrow 0$ , los modos masivos se convierten en infinitamente masivos por lo cual pueden ser descartados consistentemente. Al despreciar los estados masivos, esta compactificación se reduce a una reducción dimensional. Para obtener la descripción a bajas energías se debe truncar de manera consistente a un número finito de campos. En este caso, la consistencia se refiere a que cada solución de menor dimensión corresponda a una solución en dimensión mayor. En la reducción dimensional toroidal esto queda automáticamente satisfecho, si bien no es necesariamente cierto para compactificaciones más generales [95].

En la reducción dimensional las masas son inversamente proporcionales al tamaño de la variedad interna. Esto significa que las masas asociadas a los estados con momentos distintos de cero son muy grandes y no se observan a bajas energías. En este tipo de reducción el número de grados de libertad no cambia, dado que se preserva solo el modo más ligero. Esos campos de menor dimensión forman multipletes del grupo de isometrías de la variedad interna, ver por ejemplo [96]. Los grados de libertad de la teoría formulada en menor dimensión, *no* son siempre no-masivos. Los grados de libertad masivos aparecen cuando la expansión de Fourier de un campo sobre la variedad interna no contiene ningún campo sin masa.

En la teoría de la supermembrana con cargas centrales partimos de un espacio-tiempo plano compactificado toroidalmente. Desde ese punto de vista también resulta interesante considerar la reducción toroidal de la métrica a fin de poder establecer

---



la relación con la teoría efectiva asociada. En la práctica, se construye un ansatz de reducción, que se sustituye en las ecuaciones de campo o en el lagrangiano.

Lo ilustramos con el ejemplo más sencillo descrito por [66]. Se considera la reducción de la métrica en  $\hat{D}$  dimensiones sobre un círculo a  $D = \hat{D} - 1$  dimensiones. El ansatz estándar para la descomposición de la métrica es:

$$\hat{ds}^2 = e^{2\alpha\phi} ds^2 + e^{2\beta\phi} (dy + A_m dx^m)^2, \quad (2.4)$$

donde se muestra que  $\hat{g}_{\hat{m}\hat{n}}$  en  $\hat{D}$ -dimensiones se descompone en  $g_{mn}$   $D$ -dimensional más un vector  $A_m$  y un escalar  $\phi$ . Las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  son, en principio, arbitrarias, pero pueden ser seleccionadas de modo que la teoría formulada en menor dimensión esté descrita con el lagrangiano en su forma estándar<sup>1</sup> :

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\hat{g}} \hat{R} = \sqrt{-g} [R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2!} e^{2(\beta-\alpha)\phi} F^2], \quad (2.5)$$

con  $F = dA$ . Las simetrías del Lagrangiano en menor dimensión (2.5) se pueden entender considerando su origen en dimensiones más altas.

En  $\hat{D}$  dimensiones, la transformación general de coordenadas no preserva la forma del ansatz de reducción (2.4), sin embargo puede definirse un ansatz con parámetros específicos  $\alpha$  y  $\beta$  que preservan la transformación general de coordenadas  $D$ -dimensional, las transformaciones de calibre  $U(1)$  y una simetría de escalamiento global en  $D$ . En el caso de la simetría trombón o de escalamiento en  $\hat{D}$ -dimensiones  $\hat{g}_{\hat{m}\hat{n}} \rightarrow \lambda^2 \hat{g}_{\hat{m}\hat{n}}$ , ésta se reduce a una simetría de escalamiento en dimensión  $D$ . Por tanto, en la teoría formulada en  $D$  dimensiones se pueden construir combinaciones lineales de estas dos simetrías globales para obtener las siguientes transformaciones

---

<sup>1</sup>Ver, por ejemplo, los lagrangianos efectivos provenientes de teorías de cuerdas descritos por Stelle en [29].

rígidas [66]:

$$g_{mn} \rightarrow \lambda_1^2 g_{mn}, \quad A_m \rightarrow \lambda_1 A_m \quad ; \quad A_m \rightarrow \lambda_2^{\alpha-\beta} A_m, \quad e^\phi \rightarrow \lambda_2 e^\phi, \quad (2.6)$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ . La simetría trombón parametrizada por  $\lambda_1$  en dimensión  $D$ , escala todos los términos en el lagrangiano con el mismo factor, y es solamente una simetría de las ecuaciones de campo. La simetría de escala parametrizada por  $\lambda_2$  es la única simetría que deja invariante el lagrangiano. Las dos simetrías  $\mathbb{R}^+$  de la supergravedad IIA en  $D$  dimensiones aparecen de esta manera.

Si se hace la reducción de la métrica sobre un toro  $T^n$ , tal y como se explica en [66], el ansatz de reducción de la métrica  $\hat{D}$ -dimensional a  $D = \hat{D} - n$  dimensiones es (con una descomposición de coordenadas  $x^{\hat{m}} = (x^m, y^r)$  donde  $r = 1, \dots, n$ ):

$$\hat{ds}^2 = e^{2\alpha\phi} ds^2 + e^{2\beta\phi} J_{rs} (dy^r + A_m^r dx^m) (dy^s + A_n^s dx^n). \quad (2.7)$$

Los campos en menor dimensión son:  $g_{mn}$ ,  $n$  vectores  $A_m^r$ , un dilatón  $\phi$  y una matriz escalar  $J_{rs}$  que parametriza un coset  $SL(n, \mathbb{R})/SO(r)$ . Este último corresponde a  $(n-1)$  dilatones y  $\frac{1}{2}n(n-1)$  axiones. El lagrangiano en dimensión  $D$  viene dado por una reducción del término Einstein Hilbert:

$$\mathcal{L}_D = \sqrt{-\hat{g}} \hat{R} = \sqrt{-g} [R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{4}\text{Tr}(\partial J \partial J^{-1}) - \frac{1}{22!} e^{2(\beta-\alpha)\phi} J_{mn} F^m F^n], \quad (2.8)$$

con  $F^r = dA^r$ . Los valores convenientes para  $\alpha$  y  $\beta$  producen el lagrangiano en la forma convencional (2.8). La métrica (2.7) es invariante bajo transformaciones de coordenadas generales  $D$ -dimensional, transformaciones de calibre  $U(1)^n$  y una simetría global  $GL(n, \mathbb{R}) = SL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+$ . Las transformaciones globales vienen descritas por consiguiente por  $SL(n, \mathbb{R})$  y  $\mathbb{R}^+$ .

Consideremos ahora la reducción de un potencial de calibre de rango  $d$ ,  $\hat{C}^{(d)}$ , sobre un círculo [66]. La dinámica del potencial de mayor dimensión  $\hat{C}^{(d)}$ , acoplada a

gravedad y a un dilatón  $\hat{\varphi}$ , es determinada por:

$$\hat{\mathcal{L}} = \sqrt{-\hat{g}}[-\frac{1}{2}(\partial\hat{\varphi})^2 - \frac{1}{2}e^{a\hat{\varphi}}\hat{G}^{(d+1)} \cdot \hat{G}^{(d+1)}], \quad (2.9)$$

con  $\hat{G}^{(d+1)} = d\hat{C}^{(d)}$ , donde se ha incluido el término cinético dilatónico. El parámetro  $a$  caracteriza el acoplamiento de dilatón. El ansatz de reducción para la forma de calibre es:

$$\hat{C}^{(d)} = C^{(d)} + (dz + A) \wedge C^{(d-1)}, \quad \hat{\varphi} = \varphi. \quad (2.10)$$

donde  $A$  es el campo vectorial KK del ansatz (2.4). El lagrangiano resultante está descrito por:

$$\mathcal{L}_D = \sqrt{-g}[-\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}e^{a\varphi-2d\alpha\phi}G^{(d+1)} \cdot G^{(d+1)} - \frac{1}{2}e^{a\varphi+2(D-d-1)\alpha\phi}G^{(d)} \cdot G^{(d)}], \quad (2.11)$$

con intensidades de campo  $G^{(d+1)} = dC^{(d)} + F \wedge C^{(d-1)}$  y  $G^{(d)} = dC^{(d-1)}$ .

Se puede ver que la reducción de una  $d$ -forma sobre un  $n$ -toro produce la cantidad de  $\binom{n}{d-\tilde{d}}$  formas de rango  $\tilde{d}$  (donde  $d-n \leq \tilde{d} \leq d$ ). Por ejemplo, la reducción de una 2-forma (que es el caso que nos interesa) sobre un 2-toro da lugar a una 2-forma, dos vectores y un escalar. Al reducir sobre un toro, la simetría de calibre  $\delta\hat{C}^{(d)} = d\hat{\lambda}^{(d-1)}$  se divide en diferentes transformaciones de calibre de menor dimensión, correspondiente a los diferentes potenciales  $\tilde{d}$ -formas. Los potenciales  $\tilde{d}$ -formas, forman representaciones lineales de la simetría global  $SL(n, \mathbb{R})$ .

Finalmente, nos referiremos al sector fermiónico de la teoría de supergravedad [96]. En la reducción dimensional fermiónica los espinores en dimensión  $\hat{D}$ , se expresan como un producto tensorial de espinores en el espacio de dimensión  $D$  y el espacio interno. Para la reducción toroidal, los espinores 'internos' se toman como constantes. Por ejemplo, el ansatz de reducción para el dilatino es:

$$\hat{\lambda} = \sum_i \lambda^i \otimes \eta^i, \quad (2.12)$$

donde  $\lambda^i$  son los espinores de menor dimensión y  $\eta^i$  los espinores internos. El rango de  $i$  es igual al número de componentes de espín-1/2 independientes de la variedad interna por lo que depende de  $(\hat{D} - D)$ . Por ejemplo, al reducir sobre un siete-toro, el espinor minimal de 32-componentes  $\hat{\lambda}$  se divide en espinores minimales de 4-componentes  $\lambda^i$ , por lo que  $i$  va desde 1 a 8. En el caso de fermiones de espín-3/2, es decir, si los fermiones tienen además un índice del espacio-tiempo, el procedimiento es una combinación de los ansätze bosónico y fermiónico. Ambos índices, espinorial y del espacio-tiempo, se separan en rangos de menor dimensión:

$$\hat{\psi}_m = \sum_i \psi_m^i \otimes \eta^i, \quad \hat{\psi}_r = \sum_j \lambda^j \otimes \eta_r^j, \quad (2.13)$$

donde  $\eta^i$  y  $\eta_r^j$  son fermiones constantes en el espacio interno de espín 1/2 y 3/2, respectivamente. Así, los fermiones resultantes son el gravitini  $\psi_m^i$  y el dilatini  $\lambda^j$ .

Este tipo de reducciones genera todas las supergravidades maximales en  $D < 11$ .

### 2.1.2. Reducción con un Twist: Compactificaciones Scherk-Schwarz (SS)

En esta sección se hace un repaso de un método de reducción dimensional que es una generalización de la reducción de Kaluza-Klein (KK) con un twist la cual es posible siempre que la teoría de mayor dimensión contenga una simetría global [97]. Las compactificaciones SS aparecieron como una generalización de las reducciones KK en las cuales los campos pueden tener una dependencia no-trivial sobre las variables compactificadas, pero de tal modo que el truncamiento del lagrangiano en menor dimensión sigue siendo consistente. Este método consiste en imponer una condición de borde, denominada *twisted*.

Supongamos que tenemos inicialmente una teoría invariante bajo un grupo de simetría global  $G$ . Consideremos los campos escalares  $\hat{\phi}$  transformando linealmente bajo una transformación global:  $\hat{\phi} \rightarrow g\hat{\phi}$  con  $g \in G$ . Esto permite imponer una condición de borde twisted más general [97]:

$$\hat{\phi}(x, 2\pi R) = \mathcal{M}(g)\hat{\phi}(x, 0). \quad (2.14)$$

donde al compactificar en el círculo los campos tienen una condición de periodicidad módulo una transformación de simetría. A esta transformación de simetría se le llama *monodromía*.

Para grupos generales  $G$ , el elemento  $g(y)$  tiene que satisfacer el siguiente criterio de consistencia:

$$M = g(y)^{-1}\partial_y g(y), \quad (2.15)$$

debe ser constante. Esta condición se impone para asegurar que se anula la dependencia de las coordenadas compactas y así garantizar la consistencia del truncamiento en menor dimensión. Esta condición puede satisfacerse si:

$$g(y) = e^{(My)}, \quad \text{con } \mathcal{M} = e^{(2\pi RM)}. \quad (2.16)$$

Por lo tanto, las constantes  $M$  constituyen un elemento del álgebra de Lie de  $g$ .

Este ansatz de reducción lleva desde las ecuaciones Klein-Gordon sin masa en mayor dimensión a las ecuaciones de Klein-Gordon masivas de menor dimensión:

$$\hat{\square}\hat{\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \square\phi + M^2\phi = 0. \quad (2.17)$$

Por esta razón, la matriz  $M$  es usualmente llamada la matriz de masa. Los autovalores de  $M^2$  están relacionados a la  $(masa)^2$  de los campos  $\phi$ : los autovalores negativos corresponden a las  $(masas)^2$  positivas y viceversa, dependiendo si los subgrupos de  $G$  generados por  $M$  son o no compactos respectivamente.

La simetría  $G$  es rota en la reducción twisted: elementos de  $G$  no preservan las ecuaciones de campo sino que transforman la matriz de masa por:

$$M \rightarrow g^{-1} M g. \quad (2.18)$$

Solamente las transformaciones para las cuales las dos matrices de masa  $M$  y  $g^{-1} M g$  son iguales preservan las ecuaciones de campo de menor dimensión [66]. Ésto, en general, solo lo cumplen los elementos de grupo. Si  $G$  es el grupo trivial  $G = I$  entonces  $M = 0$  y se recupera la reducción toroidal. Si por otra parte,  $G$  no es una simetría de la teoría, la reducción no será consistente: en general, no se encontrará la cancelación de todas las dependencias en las coordenadas internas al obtener las ecuaciones de campo de menor dimensión [97].

Aplicando este método en el contexto de la teoría de supergravedad, el lagrangiano en  $\hat{D}$ -dimensiones es:

$$\hat{\mathcal{L}} = \sqrt{-\hat{g}}[\hat{R} + \frac{1}{4}\text{Tr}(\partial\hat{J}\partial\hat{J}^{-1})], \quad (2.19)$$

donde  $J$  es la matriz definida por el conjunto de escalares de la teoría de supergravedad maximal que parametriza el coset  $G/H$  [66]. Hemos visto que para este lagrangiano, la reducción sobre un círculo tiene el ansatz (2.4), con  $\hat{J} = J$ . Además tiene una simetría global ya que  $J \rightarrow \Omega J \Omega^T$  con  $\Omega \in G$ .

Consideremos el ansatz de reducción twisted definido por:

$$\hat{ds}^2 = e^{2\alpha\phi} ds^2 + e^{2\beta\phi} (dy + A_m dx^m)^2, \quad \hat{J} = U(y) J U(y)^T, \quad (2.20)$$

para un elemento  $U(y) = \exp(My) \in G$ , donde  $M$  es la matriz de masa del álgebra de Lie de  $G$ . Notemos que el ansatz es el mismo empleado de la reducción KK, pero el conjunto de escalares  $J$  tiene una relación no trivial (definida a través de la matriz de monodromía (2.16)) con el conjunto de escalares  $\hat{J}$ , a diferencia del caso toroidal en el que  $U(y) = I$  y  $\hat{J} = J$ .

La descomposición de las transformaciones de coordenadas en dimensión  $\hat{D}$  a menor dimensión ( $D = \hat{D} - n$ ),  $\delta x^{\hat{m}} = -\hat{\xi}^{\hat{m}}$ , es análoga a la reducción KK. Ésta se descompone en una transformación de coordenadas,  $U(1)^n$  simetrías de calibre y una transformación global. La transformación de calibre  $U(1)$  viene parametrizada por  $\hat{\xi}^y = \lambda(x)$ . La transformación de coordenadas en  $D$  dimensiones mantiene la invariancia bajo difeomorfismos. Las otras dos transformaciones quedan modificadas debido al twist.

En el caso de la reducción twisted sobre un círculo [66], el ansatz de reducción (2.20) no es invariante bajo la siguiente transformación de coordenadas:

$$\hat{J} = U(y)JU(y)^T \quad \rightarrow \quad \hat{J} = U(y - \lambda)JU(y - \lambda)^T. \quad (2.21)$$

Usando  $U(y) = \exp(My) \in G$ , la transformación de coordenada interna corresponde a la transformación de  $J$  en  $D$  dimensiones:

$$J \rightarrow \exp(-M\lambda)J\exp(-M^T\lambda), \quad A_m \rightarrow A_m + \partial_m\lambda. \quad (2.22)$$

De hecho, la intensidad de campo escalar transforma covariantemente bajo esta transformación local. Por lo tanto puede decirse que el subgrupo unidimensional de  $G$  generado por  $M$  está *calibrado*. Esto significa que el parámetro global de esta transformación  $\lambda$  es promovido a local. Por esta razón se dice que la reducción twisted lleva a un calibramiento no-trivial en la teoría de menor dimensión [66].

La transformación global viene parametrizada por un parámetro constante  $c$  y bajo este parámetro,  $J$  transforma como

$$\hat{J} = U(y)JU(y)^T \quad \rightarrow \quad \hat{J} = U(y - cy)JU(y - cy)^T. \quad (2.23)$$

Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre con la transformación de calibre (2.21), ésta no puede ser interpretada como una transformación de simetría en dimensión  $D$

dado que no es independiente de las coordenadas internas sobre  $J$ . Además los términos cinéticos no escalan igual que el potencial escalar. Esto hace que la simetría de escalamiento se rompa debido a los parámetros de masa  $M$ . Esta es una característica general de la mayor parte de las teorías masivas: La masa rompe la invariancia de escala.

Se pueden construir ansätze de reducciones twisted para un lagrangiano más general que incluya a los potenciales de calibre y fermiones. Para ello, se debe estudiar cómo modificar los ansätze toroidales mediante la introducción de la transformación  $U(y)$  de manera conveniente. Sin embargo, la consistencia de tales reducciones está garantizada por la simetría global  $G$  en  $\hat{D}$  [66].

En casos especiales, la existencia de potenciales de calibre extra en las reducciones twisted da origen a un 'aumento o mejoramiento' del calibrado. En esos casos, adicionalmente al calibrado por simetría twisted, se encuentran otras simetrías que han sido promovidas a locales en la teoría calibrada. Para que esto sea posible, se necesita que la parte global de esas simetrías estén presentes en la teoría no-calibrada, y adicionalmente deben existir los vectores de calibre correspondientes, necesarios para calibrar las simetrías extras.

Por ejemplo, tal y como se explica en [66], supongamos que se incluye un vector de calibre  $\hat{V}$  en el lagrangiano en  $\hat{D}$  dimensiones.  $\hat{V}$  tiene una simetría global  $\hat{V} \rightarrow \Omega^\alpha \hat{V}$  con  $\Omega \in \mathbb{R}^+$ , con un peso específico  $\alpha$ . Además se tiene la transformación de calibre  $\delta \hat{V} = d\hat{\lambda}$ . Entonces, el ansatz de reducción twisted para  $\hat{V}$  y  $\hat{\lambda}$  se escribe:

$$\hat{V} = U^\alpha (V + \chi(dy + A)), \quad \hat{\lambda} = U^\alpha \lambda, \quad (2.24)$$

donde  $\hat{V}$  se descompone en un vector  $V$  y el axión  $\chi$ .  $A$  es el vector que proviene de la métrica y el elemento del grupo  $\mathbb{R}^+$  es  $U = \exp^{my}$ , con un parámetro de masa  $m$ .



Consideremos a  $\lambda_A$  y  $\lambda_V$ , los parámetros de calibre de  $A$  y  $V$ , respectivamente. Su acción sobre el axión  $\chi$  es:

$$\delta_A \chi = m \lambda_A \chi, \quad \delta_V \chi = m \lambda_V. \quad (2.25)$$

Por lo tanto, cuando un parámetro de masa es generado por dos transformaciones locales independientes: se encuentra un 'aumento o mejoramiento' en la simetría de calibre. De hecho, en este caso los dos calibres son no-abelianos, ya que:

$$[\delta_A, \delta_V] = m^2 \lambda_A \lambda_V. \quad (2.26)$$

Estas transformaciones forman el grupo no-Abeliano bidimensional único, que se denota por  $A(1)$  [46]. Éste aparece en nueve dimensiones y tiene su origen en el calibrado de la teoría de supergravedad *IIA* en diez dimensiones.

Ahora analicemos cómo afectan las reducciones twisted al sector fermiónico. Para una teoría de supergravedad con una simetría global  $G$  y simetría local  $K$ , los fermiones son inertes bajo  $G$  pero transforman bajo  $K$ . Se puede primero seleccionar un calibre físico eliminando la simetría local  $K$ , y por consiguiente se reduce con un twist en  $G$  (el cual solo actúa sobre los fermiones mediante la transformación compensadora) y una selección de la estructura de espín para cada representación  $K$ .

Para una reducción twisted sobre un toro, las simetrías incluyen una simetría rígida  $SL(2, \mathbb{R}) \subseteq G$  y una local  $U(1) \subseteq K$  en  $D+1$  dimensiones. En este caso, si fijamos la simetría  $K$  completamente, seleccionando un calibre físico, la transformación  $SL(2, \mathbb{R})$  representada por la matriz

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

actúa mediante un fermión  $\lambda$  de carga  $U(1)$ ,  $q$  por la transformación compensadora  $U(1)$

$$\lambda \rightarrow \left( \frac{c\bar{\tau} + d}{c\tau + d} \right)^{q/4} \lambda. \quad (2.28)$$

Las reducciones twisted de supergravedad dan lugar a supergravedades calibradas en menor dimensión.

### 2.1.3. Otros Calibrados

#### (1) *Calibrados CSO de Supergravedades Maximales*

En esta sección se mencionan otras posibilidades de supergravedades maximales calibradas. Un importante papel en la supergravedad maximal calibrada lo juegan los grupos llamados *CSO*, ver por ejemplo [66]. Estos grupos pueden ser vistos como continuaciones analíticas y contracciones de grupos *SO*. Por ejemplo este es el caso que se obtuvo al reducir la supergravedad  $D = 11$  en una 7-esfera con flujo asociado al calibrado  $SO(8)$  en cuatro dimensiones [98].

Los calibrados *CSO* generalizan los calibrados de subgrupos de  $SL(2, \mathbb{R})$  en nueve dimensiones. Un ejemplo es el calibrado del subgrupo  $SO(n)$  de teorías de supergravedad con simetría global  $SL(n, \mathbb{R})$ . Además de  $SO(n)$ , existen otros subgrupos de el grupo de  $SL(n, \mathbb{R})$  que pueden ser calibrados. Estos calibrados pueden obtenerse por continuación analítica o contracción de grupo del grupo de calibre [99], y se conocen como el grupo  $CSO(p, q, r)$  con  $p + q + r = n$ , donde  $p, q, r \in \mathbb{Z}$ . En esta tesis nos restringiremos a reducciones a nueve dimensiones ( $n = 2$ ). Un caso especial de esta reducción es dada por  $p + q = 1$  o  $2$ . En esos casos,  $H^{p,q}$  corresponde a una variedad uno-dimensional, sobre los cuales se hace una reducción twisted.

La diferencia entre  $(p, q, r) = (2, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$  y  $(1, 0, 1)$  es el flujo de los escalares: los diferentes valores corresponden a twisting con los subgrupos  $SO(2)$ ,  $SO(1, 1)$  y  $\mathbb{R}$  de un grupo de simetría global  $SL(2, \mathbb{R})$ , respectivamente.

## (2) *Tensor de Embedding*

Motivados por el descubrimiento de nuevos calibrados, asociados a la correspondencia AdS/CFT y al estudio de compactificaciones con flujo, se propuso un nuevo método: El método del tensor de embedding, que pretende clasificar de la forma más general posible todos los calibrados asociados a una teoría de supergravedad en una dimensión dada [99, 100]. Esta clasificación se hace atendiendo a los subgrupos de simetrías globales residuales en la teoría calibrada vía un tensor de embedding. Una condición que se le impone a este método de calibrado es que se preserve la supersimetría del lagrangiano original.

Una característica fundamental de las supergravedades maximales es que los escalares parametrizan un espacio simétrico  $G/H$ . Con,  $G$  denominado el grupo dualidad y  $H$  el grupo de la simetría  $R$  (R-symmetry)<sup>2</sup>. Los campos escalares son descritos en términos de un elemento de  $G$ ,  $V(x)$ , que depende de las coordenadas del espacio-tiempo, y transforma bajo transformaciones globales por la izquierda. Las transformaciones locales  $H$  actúan por la derecha [52]. Si se selecciona un calibre, el elemento de grupo  $V$  es el coset de  $G/H$ . Para calibrar la teoría de la supergravedad se utiliza el embedding de este grupo de calibre en  $G$  mediante un tensor  $\Theta_M^\alpha$ , denominado *tensor de embedding*:

$$\delta_M \equiv \Theta_M^\alpha \delta_\alpha, \quad (2.29)$$

donde  $\delta_M$  son los generadores del grupo  $H$  y  $\delta_\alpha$ , los generadores de  $G$ .

---

<sup>2</sup>Simetría que actúa no trivialmente sobre las supercorrientes.

Al calibrar las derivadas se sustituyen por derivadas covariantes preservando la forma del lagrangiano. Estas derivadas covariantes tienen la siguiente forma:

$$D_m = \partial_m - e A_m^M \Theta_M^\alpha t_\alpha, \quad (2.30)$$

donde  $A_m^M$  son campos de calibre abelianos que transforman en  $G$  con los generadores  $(t_\alpha)_M^N$ , tal que  $\delta A_m^M = -\Lambda^\alpha (t_\alpha)_N^M A_m^N$ , y  $e$  es la constante de acoplamiento de la teoría que en ocasiones es absorbida en la definición  $\Theta_M^\alpha$ . El tensor de embedding  $\Theta_M^\alpha$  es real y satisface la condición de cierre del álgebra:

$$\Theta_M^\alpha \Theta_N^\beta f_{\alpha\beta}^\gamma = f_{MN}^P \Theta_P^\gamma, \quad (2.31)$$

donde  $f_{\alpha\beta}^\gamma$  son las constantes de estructura de  $G$ , y  $f_{MN}^P$ , las constantes de estructura del grupo de calibre. Esta condición implica que  $\Theta$  es invariante bajo el grupo de calibre. La ec (2.31) se puede escribir en términos de los generadores  $t_\alpha$ ,

$$f_{\beta\gamma}^\alpha \Theta_M^\beta \Theta_N^\gamma - (t_\beta)_N^P \Theta_M^\beta \Theta_P^\alpha = 0. \quad (2.32)$$

A esta condición se le denomina el vínculo cuadrático en el tensor de embedding. Además  $\Theta$  verifica también la condición:

$$\mathbb{P}_1 \Theta = 0 \quad (2.33)$$

donde  $\mathbb{P}_1$  es un proyector que proyecta en la representación en  $\Theta$  que son prohibidas. A esta condición se le denomina vínculo lineal en el tensor de embedding [101].

Por consiguiente, calibrados consistentes están caracterizados a través de tensores de embedding que satisfacen dos vínculos, uno cuadrático y uno lineal en el tensor de embedding. El vínculo cuadrático asegura que el tensor de embedding define un subgrupo propio del grupo de dualidad. El vínculo lineal implica que el tensor de embedding pertenece a una representación específica del grupo de dualidad. Recientemente en [49] han usado el método del tensor de embedding para construir en  $9D$  las supergravidades calibrada/masivas más generales a partir de la maximal en  $9D$ .

### 2.1.4. El grupo $GL(2, \mathbb{R})$

Para el caso de interés aquí, las supergravidades calibradas tipo  $II$  en  $9D$ , las monodromías están asociadas al grupo de simetría global  $GL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+$ . Los primeros trabajos en relacionar las teorías de supergravedad tipo  $II$  en  $9D$  con la clasificación de la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$  y su subgrupo aritmético  $SL(2, \mathbb{Z})$  fueron realizados por [42, 43]. En esta sección nosotros repasaremos las clases inequivalentes.

En el sector  $SL(2, \mathbb{R})$ , existen tres clases inequivalentes de teorías correspondientes a las clases conjugadas  $SL(2, \mathbb{R})$  denominadas hiperbólicas, elípticas y parabólicas, que están representadas de la forma [102]:

$$\mathcal{M}_p = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_h = \begin{pmatrix} e^\gamma & 0 \\ 0 & e^{-\gamma} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_e = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

donde cada clase se especifica por la constante de acoplamiento ( $k$ ,  $\gamma$  o  $\theta$ ). Además, en  $9D$  la teoría puede ser descrita en términos de la matriz de masa  $M$  con tres parámetros [42, 43]:

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 + m_3 \\ m_2 - m_3 & -m_1 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Esta matriz de masa, como se explicó en [42, 43], pertenece al álgebra de Lie  $sl(2, \mathbb{R})$  y transforma en la representación adjunta irreducible. Esto se caracteriza por el vector de masa  $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$ . A bajas energías la supergravedad calibrada está determinada por la matriz de masa  $M$  para una monodromía dada  $\mathcal{M}$ .

Existen tres casos distintos dependiendo del valor de  $\vec{m}^2 = \frac{1}{4}(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2)$  [102, 105] caracterizando un conjunto de tres clases conjugadas mostradas en (2.34):  $\mathbb{R}$ ,  $SO(1, 1)^+$ ,  $SO(2)$ . Como haremos uso de los mismos se describen a continuación.

Cada uno de los subgrupos es generado por un elemento del grupo  $SL(2, \mathbb{R})$ ,  $\Lambda$  con  $\det \Lambda = 1$ . Ellos se clasifican de acuerdo a su traza:

- La supergravedad parabólica calibrada está asociada al calibrado del subgrupo  $\mathbb{R}$  con parámetro  $\zeta$  generada por una  $\Lambda_p$  de la forma  $\mathcal{M}_p$ . La clase conjugada corresponde a las matrices con  $|Tr \Lambda_p| = 2$ .
- La supergravedad calibrada hiperbólica está asociada al calibrado del subgrupo  $SO(1, 1)^+$  con parámetro  $\gamma$  generada por una  $\Lambda_h$  de la forma  $\mathcal{M}_h$ . La clase conjugada la forman las matrices cuyos  $|Tr \Lambda_h| > 2$ .
- La supergravedad calibrada elíptica está asociada al calibrado del subgrupo  $SO(2)$  generada por elementos  $\Lambda_e$  de  $SL(2, \mathbb{R})$  de la forma  $\mathcal{M}_e$  con parámetro  $\theta$ . La clase conjugada elíptica corresponde a las matrices con  $|Tr \Lambda_e| < 2$ .

El grupo  $\mathbb{R}^+$  es una clase conjugada uniparamétrica. Esto corresponde a los escalamientos que dejan invariante las ecuaciones de campo pero escalan globalmente el lagrangiano. Estas simetrías fueron llamadas trombón por [62]. Su calibrado fue estudiado en [47, 48]. Esto corresponde a la reducción con un nuevo parámetro  $m_4 \neq 0$ . Siguiendo a [46], la simetría  $\mathbb{R}^+$  se calibra con parámetro  $\Lambda_{\mathbb{R}^+} = e^{m_4 \lambda}$ .

Como se explicó en [46] el conjunto completo de deformaciones  $\{m_i, m_4\}$  con un grupo de simetría  $GL(2, \mathbb{R})$  para las reducciones de supergravedad tipo *IIB* corresponden a:

$$\Lambda_{GL(2, \mathbb{R})} = \Lambda_{SL(2, \mathbb{R})} \Lambda_{\mathbb{R}^+}. \quad (2.36)$$

## 2.2. Compactificaciones en términos de Fibrados

En esta sección describimos teorías de supercuerdas/supergravedad/teoría-M en términos de fibrados, para ello se hace una breve revisión del concepto de fibrado y se estudian la reducciones analizadas anteriormente.

### 2.2.1. Fibrados

A continuación daremos un resumen sobre nociones de fibrados que nos serán de utilidad. La motivación para introducir el formalismo de fibrados es considerar las compactificaciones del espacio space como un tipo particular de fibrados [14, 106].

Se define a un *fibrado*  $(E, \pi, M, F, G)$  como una construcción matemática que está formada por los siguientes elementos: tres variedades diferenciables, llamadas el espacio total  $E$ , la base  $M$ , y la fibra  $F$ ; una función sobreyectiva  $\pi$  denominada proyección tal que  $\pi : E \rightarrow M$ , y con la imagen inversa  $\pi^{-1}(p) \equiv F_p \cong F$  donde  $F$  es denominada la fibra en  $p \in M$ ; un grupo de Lie  $G$  denominado el grupo de estructura, el cual actúa sobre  $F$  por la izquierda; un difeomorfismo  $\phi, \phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$  tal que  $\pi\phi_i(p, f) = p$ , donde  $\{U_i\}$  es un conjunto de cubrimiento abierto de  $M$ . A  $\phi_i$  se le llama trivialización local; y finalmente, un conjunto de funciones denominadas funciones de transición  $t_{ij}$ , tal que  $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$  y  $\phi_j(p, f) = \phi_i(p, t_{ij}(p)f)$ , relacionando  $\phi_i$  y  $\phi_j$  con  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ .

En general, a un fibrado como el descrito antes  $(E, \pi, M, F, \{U_i\}, \{\phi_i\}, G)$  se le denomina, fibrado coordinado. Con lo cual, el término fibrado representa una clase de equivalencia de fibrado coordinado. Existen generalizaciones del concepto de fibrados llamadas *fibraciones*, en donde no se admiten siempre trivializaciones locales. Esto es,

en el que no necesariamente todas las fibras son iguales. Las diferentes fibraciones para una base  $B$  y una fibra  $F$  se clasifican por las clases características correspondientes.

Se denomina *sección de un fibrado*  $s$ , a un mapa suave  $s : M \rightarrow E$ , que satisface  $\pi s = id_M$ . Con  $s(p) = s|_p$  es un elemento de  $F_p = \pi^{-1}(p)$ . El conjunto de secciones sobre  $M$  se denota por  $\Gamma(M, E)$ . Si  $U \subset M$ , se puede definir una sección local solo sobre  $U$ . Por lo tanto,  $\Gamma(U, E)$  denota el conjunto de secciones locales sobre  $U$ . Los campos físicos de una teoría son secciones de un fibrado, mientras que la acción  $\mathcal{S}$  de una teoría es el funcional invariante de calibre de las secciones. Dada un fibración determinada se pueden construir varias acciones (y lagrangianos) compatibles con las mismas secciones para un fibrado dado.

El fibrado  $E$  será *trivial* si todas las funciones de transición  $t_{ij}$  son la identidad, en tal caso se puede describir como el producto directo del espacio base y la fibra,  $E = M \times F$ . Una variedad fibrada no trivialmente no se puede ser escrita de esta manera, lo cual significa que se necesitan varias cartas o cubrimientos  $\{U_i\}$  para cubrirla tal que las funciones de transición existan.

Un *Fibrado Principal* se define como un fibrado cuya fibra  $F$  es idéntica al grupo de estructura  $G^3$ . Un fibrado principal  $P \xrightarrow{\pi} M$  se denota como  $P(M, G)$ ,  $G$ -fibrado sobre  $M$ . Los fibrados principales pueden ser triviales o no. Un fibrado principal es trivial si y solo si, éste admite una sección global. Dado un fibrado principal  $P(M, G)$ , se define un *fibrado asociado*: Supongamos que  $G$  actúa sobre una variedad  $F$  por la izquierda. Define una acción de  $g \in G$  sobre  $P \times F$  por  $(u, f) \rightarrow (ug, g^{-1}f)$  donde  $u \in P$  y  $f \in F$ . Luego, el fibrado asociado  $(E, \pi, M, G, F, P)$  es una clase de equivalencia  $P \times F \setminus G$  en los cuales dos puntos  $(u, f)$  y  $(ug, g^{-1}f)$  están identificados.

---

<sup>3</sup>Un ejemplo del mismo es un fibrado toroidal principal en el que la fibra es un toro y el grupo de estructura es el mismo toro  $U(1) \times U(1)$ .

---



Un fibrado *vectorial*  $E \xrightarrow{\pi} M$  es un fibrado cuya fibra es un espacio vectorial. Si  $F$  es  $\mathbb{R}^k$  y  $M$  una variedad de  $m$  dimensiones. A  $k$  se le denomina dimensión de la fibra, mientras que la dimensión del espacio total  $E$  es  $m + k$ . Para este tipo de fibrado, las funciones de transición forman parte del grupo  $GL(k, \mathbb{R})$ , ya que son funciones que mapean un espacio vectorial en otro espacio vectorial de la misma dimensión isomórficamente. Si  $F$  es un espacio vectorial complejo  $\mathbb{C}^k$ , el grupo de estructura es  $GL(k, \mathbb{C})$ . Un fibrado vectorial  $V$  es trivial si y solo si su fibrado principal también lo es. Un fibrado vectorial asociado  $P \times V$ , con  $V \equiv F$  un espacio vectorial de  $k$  dimensiones y  $\rho$  es la representación  $k$ -dimensional de  $G$ , se define identificando los puntos  $(u, v)$  y  $(ug, (g)^{-1}v)$  de  $P \times V$ , donde  $u \in P$ ,  $g \in G$  y  $v \in V$ . En física los campos son secciones de un fibrado vectorial.

La *Conexión* en un fibrado permite la comparación entre diferentes fibras asociadas a diferentes puntos de la variedad. Son conocidas como *potenciales de calibre*. Se define globalmente sobre  $E$ , aunque también puede llevar información local. Sea  $A_i$  la conexión sobre una trivialización que satisface la siguiente condición:

$$A_j = t_{ij}^{-1} A_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}. \quad (2.37)$$

Debido a que un fibrado principal no trivial no admite una sección global, el pull back  $A_i = s_i^* \omega$  existe localmente pero no necesariamente globalmente. La uno-forma de conexión sobre el fibrado principal permite definir 'subespacios horizontales'. Las uno-formas de conexión  $A_i$  están asociadas al fibrado trivial y no tienen información global de  $E$ , por consiguiente se necesitan un conjunto completo  $\{A_i\}$  para definirla globalmente sobre  $E$ .

### 2.2.2. Compactificaciones, Fibrados y Monodromías

En esta subsección queremos interpretar las compactificaciones que antes hemos descrito (KK y Scherk-Schwarz(SS)) y otras más generales, en términos de fibrados. En el contexto de supergravedad las reducciones toroidales en un  $T^d$  producen backgrounds del tipo  $X_{11-d} \times T^d$ . Estos backgrounds pueden ser interpretados como fibrados triviales con fibra  $T^d$  y base  $X_{11-d}$ .

Si por ejemplo se considera una reducción de la teoría de supergravedad en una variedad tridimensional  $\mathcal{M}_3 = S^1 \times \mathcal{T}^2$ , con  $\mathcal{T}^2$  una variedad twisted. La variedad tridimensional  $\mathcal{M}_3$  es un fibrado toroidal principal no trivial de base el círculo y fibra  $\mathcal{T}^2$ . Las reducciones de supergravedad a la KK están asociadas a supergravedades maximales en menor dimensión y las de SS están asociadas a las calibradas. En ambos sectores las distintas teorías están conectadas entre sí mediante *transformaciones de dualidad* (dualidad  $S$ , dualidad  $U$  y dualidad  $T$ ). La teoría M como teoría de unificación en once dimensiones, se espera que realice estas transformaciones de dualidad como simetrías de la teoría [107].

C. Hull propuso que estas dualidades se podrían observar de forma explícita como simetrías de un fibrado que describa globalmente la teoría de cuerdas o la teoría M [107]. Las funciones de transición de dicho fibrado, deben transformar no solo bajo difeomorfismos sino también bajo transformaciones de dualidad. La teoría del campo doble intenta realizar estas ideas a partir de teorías efectivas de supercuerdas/supergravedad usando las nociones de geometría generalizada.

Estos fibrados asociados a la teoría del campo doble son fibrados toroidales no triviales. El hecho de que la fibra sea una variedad toroidal tiene su origen en la T-dualidad, la cual es llamada así porque en su realización más sencilla, conecta teorías

---

de cuerdas compactificadas en un círculo ( $IIA/IIB$  y  $Het(SO(32))/(E8 \times E8)$ ) o a nivel de teoría M compactificada en un toro, transforma una teoría en su dual conservando la física del sistema. Por ejemplo, analicemos ahora las compactificaciones SS de los backgrounds de supergravedad desde el punto de vista de fibrados. Las reducciones SS pueden ser expresadas en términos de los fibrados principales sobre círculos con un twisting dado por la monodromía [102, 103, 104]. El background posee un grupo de isometrías globales  $G$  asociadas a la variedad de compactificación sobre la cual es fibrada. Los mapas que describen las variables compactificadas  $g(y)$  no son periódicos, sino que tienen una monodromía  $g(y) = \exp(My)$  [102].  $g(y)$  es una sección local de un fibrado principal sobre el círculo con fibra  $G$  y monodromía  $\mathcal{M}(G)$  en  $g$ . El funcional invariante que describe la acción se expresa en términos de las secciones locales de este fibrado (los campos).

La monodromía  $\mathcal{M}(g)$ , como hemos visto antes, viene expresada en términos de una matriz de masa  $M$ , como  $\mathcal{M}(g) = \exp M$ . Monodromías relacionadas por una conjugación  $G$  definen teorías con acciones equivalentes pero cambiando la carga de la retícula. La compactificación twisted induce un potencial Scherk-Schwarz (SS) en el espacio móduli. Para ciertos valores de ese espacio móduli hacer un twist es equivalente a introducir flujos junto a un corrimiento<sup>4</sup> en las coordenadas internas del toro compactificado.

La descripción global necesaria para encontrar la relación entre supermembrana con cargas centrales y la teoría de supergravedad se hace en términos de fibraciones toroidales más complejas como se verá en la subsección 2.3.2.

---

<sup>4</sup>Traducción de *shift*.

---

### 2.2.3. Condiciones de Cuantización

En esta sección se considera la realización de las compactificaciones twisted a nivel de la teoría de cuerdas. Es decir, se pasa de una descripción clásica de la supergravedad a una cuántica de teoría de cuerdas. De acuerdo a [107] esto implica que la simetría global clásica  $G$  se rompe a su subgrupo arimético  $G(\mathbb{Z})$  y por tanto la matriz de monodromía debe ser un elemento de este subgrupo. Para el caso de la teoría de cuerdas  $IIB$  el grupo de monodromía debe pertenecer a  $SL(2, \mathbb{Z})$ , donde la matriz de masa está evaluada en los números enteros. Las clases conjugadas  $SL(2, \mathbb{Z})$  han sido analizadas en [108]. Dada una monodromía,  $\pm\mathcal{M}$  y  $\pm\mathcal{M}^{-1}$  son clases conjugadas.

En el caso de las monodromías elípticas existen cuatro clases conjugadas, aparte de la clase trivial  $\mathcal{M} = \mathbb{I}$  [45]:

$$\mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

que generan respectivamente  $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6$  que son subgrupos de orden finito de  $SL(2, \mathbb{Z})$ .

Las monodromías en las clases parabólicas e hiperbólicas conjugadas generan grupos de twist de orden infinito.

Hay un número infinito de clases conjugadas parabólicas  $SL(2, \mathbb{Z})$  con  $Tr(\mathcal{M}) = 2$ , representada por  $T^n$ :

$$\mathcal{M}_{T_n} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

con una clase conjugada distinta para cada entero  $n$ .

Hay un número infinito de clases conjugadas hiperbólicas  $SL(2, \mathbb{Z})$  con  $|Tr(M)| > 2$ , representado por:

$$\mathcal{M}_{H_n} = \begin{pmatrix} n & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

para enteros  $n$  con  $|n| \geq 3$ , junto con monodromías puntuales  $\mathcal{M}(t)$  de traza  $t$  (clases esporádicas). Para más detalles ver [45].

Siguiendo a [66], los parámetros de masa son parametrizados por  $\vec{m} = \tilde{m}(p, q, r)$ . Entonces, dado el radio de compactificación  $R$  y los coeficientes relativos  $(p, q, r)$  de los parámetros de masa, se selecciona el coeficiente global  $\tilde{m}$  tal que la monodromía esté en  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Esto no siempre es posible: un requerimiento necesario estudiado en [108] es que  $(p, q, r)$  sean enteros y satisfagan la llamada ecuación diofántica, esto es, una ecuación para números enteros. Asimismo, se debe exigir que  $q$  y  $r$  sean ambos pares o ambos impares. Por tanto, se obtienen todas las monodromías que pueden ser expresadas como productos de los elementos:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

y sus inversas. Las clases de conjugación de  $SL(2, \mathbb{Z})$  fueron recopiladas en [108].

A nivel cuántico la realización de estas simetrías  $G$  se propone que esté asociada a sus subgrupos aritméticos  $G(\mathbb{Z})$  [107]. La realización cuántica de la simetría trombón  $\mathbb{R}^+$  es más complicada. El problema a nivel cuántico es el siguiente: El grupo  $GL(2, \mathbb{R})$  debería romperse a sus subgrupo aritmético para garantizar la cuantización de la red de carga BPS, sin embargo el conjunto de matrices  $Mat(2, \mathbb{Z})$  cuyos determinantes son un entero, no forman un grupo ya que la inversa de un entero no necesariamente es un entero (el subgrupo aritmético de  $GL(2, \mathbb{R})$  es el grupo  $GL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z}) \times Z_2$ , pero falla en incorporar los escalamientos).

Class	$\alpha^2$	$\text{Tr}(\Lambda)$	$p^2 + q^2 - r^2$	$(p, q, r)$	$\Lambda$	
I	$= 0$	2	0	$(0, n, n)$	$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$n \in \mathbb{Z}$
II	$> 0$	$n$	$n^2 - 4$	$(\pm n, 0, \pm 2)$	$(ST^{-n})^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & n \end{pmatrix}^{\pm 1}$	$3 \leq n \in \mathbb{Z}$
III	$< 0$	0	-4	$(0, 0, \pm 2)$	$S^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{\pm 1}$	
		1	-3	$(\pm 1, 0, \pm 2)$	$(T^{-1}S)^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{\pm 1}$	
		2	-4		$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	

Cuadro 2.1: La tabla original de [108] que clasifica las diferentes monodromías  $SL(2, \mathbb{Z})$ .

### 2.2.3.1. Simetría Trombón a Nivel Cuántico

La simetría de escalamiento  $\mathbb{R}^+$  aparece cuando consideramos escalamientos que dejan invariante las ecuaciones de campo, pero que pueden escalar globalmente el lagrangiano. Estas simetrías fueron llamada trombón por [62]. En [62] ellos encuentran una manera propia para modelar los escalamientos a nivel cuántico introduciendo representaciones no lineales de  $SL(2, \mathbb{Z})$  que ellos denominan activas, para distinguirlas de aquellas asociadas a la  $U$ -dualidad. Esta simetría está caracterizada por el hecho que ésta actúa sobre la carga reticular transformando cargas de enteros en cargas de enteros mediante la transformación  $SL(2, \mathbb{Z})$  pero dejando el móduli fijo. Esto se alcanza a través del uso de una transformación compensadora, que es aplicada una vez, la  $U$ -dualidad transforma cargas y móduli por un  $SL(2, \mathbb{Z})$  lineal. La transformacin compensadora actúa sobre el móduli transformado para retornar a su valor original.

A nivel cuántico la realización fue estudiada por [62] mientras que su calibrado por [48]. Hacemos un breve resumen de los procedimientos seguidos en [62].

Dado un mapping arbitrario  $SL(2, \mathbb{Z})$  entre  $Q_1$  y  $Q_2$ , con  $Q_1$  la retícula elemental de carga, notamos que la descomposición de Iwasawa para  $SL(2, \mathbb{Z})$  nos permite factorizar un elemento del grupo  $\Lambda \in SL(2, \mathbb{Z})$  como

$$\Lambda = \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{H} , \quad (2.42)$$

donde  $\tilde{\mathbf{B}}$  es un elemento del grupo de Borel que deja invariante  $Q_2$  bajo escalamiento y  $\mathbf{H}$  es un elemento del grupo de estabilidad  $H = SO(2)$  para un valor dado del parámetro de Teichmüller,  $\tau_0 = i$ . Este grupo de estabilidad es al mismo tiempo, el subgrupo linealmente realizado del grupo de simetría estándar clásico  $G = SL(2, \mathbb{R})$ , con los campos escalares tomando sus valores en  $G/H$ . Claramente, solo la transformación  $\mathbf{B}$  es la que realmente provoca que  $\tau_0$  se transforme, así que la parte de transformación de Borel del compensador debe ser  $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}^{-1}$ . En consecuencia, parte de la transformación de Borel del compensador y de  $\Lambda$  se anulan, quedando simplemente con

$$\mathbf{B} t \Lambda = t \mathbf{H} , \quad (2.43)$$

*i.e.* la transformación compensadora  $SL(2, \mathbb{Z})$  puede ser realizada como una transformación específica  $SO(2)$ , de  $\mathbf{H}$  por el rescalamiento trombón  $t$ . Debe notarse que la matriz  $\mathbf{H}$  (y además el producto  $t \mathbf{H}$ ) no es, en general, una matriz de valores enteros.

Se llamará a las transformaciones compensadoras  $SL(2, \mathbb{Z})$ , transformaciones  $SL(2, \mathbb{Z})$  *activas*, para distinguirlas de las transformaciones de dualidad  $SL(2, \mathbb{Z})$  de teoría de cuerdas, que transforman simultáneamente el módulo  $\tau_0$  y las cargas.

---

## 2.3. Metodología usada para Calibrar la Supermembrana

En esta sección revisaremos las herramientas tanto conceptuales como de cálculo que han sido usadas en esta tesis para encontrar, interpretar y discutir los resultados obtenidos que mostraremos a partir del capítulo 4 que se refieren al calibrado de la supermembrana con cargas centrales.

### 2.3.1. Método de la Simetría Kappa

En esta tesis hemos denominado *Método de la Simetría Kappa* al método mediante el cual usamos la exigencia de invariancia de la acción de la supermembrana  $D = 11$  y de la supermembrana con cargas centrales bajo la simetría kappa en el modo en que lo hace Bergshoeff, Sezgin y Townsend en [41]. Este procedimiento es llevado a cabo para encontrar los vínculos que conectan a la teoría a altas energías en dimensión  $D$  con la teoría efectiva de supergravedad a la cual se acopla. En esta tesis uno de los objetivos es encontrar cuál supergravedad es la teoría efectiva de la supermembrana con cargas centrales en  $9D$ . En el caso  $11D$ , fue probado en [41] que las ecuaciones de movimiento de la supergravedad  $11D$  se obtienen a partir de la teoría de la supermembrana  $11D$ . Esto lo verificamos a primer orden en la coordenada fermiónica en la sección (C.1) del apéndice C.

Nosotros extendimos el resultado de [41] cuando se hace una compactificación toroidal de la supermembrana en un background  $X^9 \times T^2$ . Usando este método obtuvimos los vínculos de la única teoría de supergravedad maximal en  $D = 9$ . Estos

---



---

resultados los reportamos en la sección (C.2) del apéndice C y esperamos que formen parte de una futura publicación.

Para usar este método se parte del formalismo del superespacio en el que se expanden los supercampos del background en términos de la variable fermiónica  $\theta$ . Para obtener las expresiones de los supercampos de la supergravedad en el formalismo del superespacio como expansiones en la variable  $\theta$  es necesario hacer la identificación, de un modo compatible, de todos esos supercampos y superparámetros de las supertransformaciones en el superespacio, considerándolos como expansiones en la coordenada  $\theta$ , con los campos y parámetros de la teoría de la supergravedad usual.

El procedimiento se denomina método de "gauge completion", ver [24, 84, 85], y consiste en: (1) Se escoge un calibre en el que se identifican las componentes de todos los supercampos y superparámetros en  $\theta = 0$  con los campos y parámetros de las transformaciones de la supergravedad usual. Y, (2) se comparan las reglas de transformación de los supercampos y las álgebras de dichas transformaciones con las correspondientes a los campos en la teoría de la supergravedad  $D = 11$ .

Una vez formulada la supermembrana compactificada en el toro  $T^2$  en el formalismo del superespacio se impone la invariancia de la simetría kappa de la acción y se obtienen un conjunto de supervínculos. Posteriormente se compararon con los vínculos de [41] compactificados en el  $T^2$  (sección C.2) .

Luego, se aplicó el mismo método para la supermembrana con cargas centrales, pero las expresiones obtenidas, aún a primer orden en  $\theta$ , son bastante complejas para efectuar cálculos y llegar a resultados definitivos. Por otra parte en la literatura no existen una clasificación de las supergravedades calibradas en  $9D$  en el formalismo

---

---

del superespacio. Por esta razón se propuso un método alternativo que explicamos a continuación.

Los resultados de la sección C.3 esperamos completarlos y que formen parte de una publicación a futuro.

### 2.3.2. El Mecanismo de Esculpido para Calibrar Teorías

En esta sección se resumen los resultados de [14]. El mecanismo propuesto allí es un mecanismo nuevo de calibrado que consiste en extraer la teoría deformada utilizando y modificando la estructura global de la misma en términos de fibrados. A esto se le llama *mecanismo de esculpido*<sup>5</sup>. Éste consiste en una deformación del tipo de homotopía de la fibración completa  $E$  preservando el tipo de homotopía de la base y de la fibra. Nos restringiremos en esta tesis a la aplicación de este mecanismo a la supermembrana. Se toma como teoría no-calibrada a la supermembrana compactificada sobre un 2-toro. Esta corresponde a un funcional invariante (acción) sobre una variedad base de Riemann cuya fibra, por simplicidad, es el espacio tangente  $T^2 \times M_9$ . La parte topológicamente no-trivial de la fibra corresponde a la variedad toroidal asociada al espacio tangente. La formulación global de la teoría no-calibrada es un fibrado toroidal trivial sobre una variedad base que, por simplicidad, seleccionaremos que sea homotópicamente un toro.

La deformación en el fibrado total puede ser vista al imponer dos tipos de restricciones: la primera, debida a la introducción de una condición topológica que se explicará más adelante (la carga central) mediante la cual el fibrado toroidal trivial se deforma a un fibrado principal. Físicamente, esto puede verse como restricciones sobre

---

<sup>5</sup>Denominado en inglés *sculpting mechanism*.

---

los mapas permitidos en el espacio target compactificado. En segundo lugar, el proceso de extracción del campo de calibre de una manera consistente a partir de la forma cerrada implica la modificación del fibrado toroidal principal en un fibrado toroidal simpléctico con monodromía no trivial. El fibrado total puede ser o no simpléctico de acuerdo a si la monodromía es dada por la clase de torsión asociada al "Mapping Class Group" (MCG) de la variedad base  $\Pi_1(\Sigma)$ . La supermembrana resultante es, por lo tanto, calibrada en este nuevo sentido de *esculpido* y corresponde geoméricamente a una supermembrana minimamente inmersa en el espacio target. Como resultado de este procedimiento, la simetría global (discreta) de la teoría no-calibrada está parcialmente rota a un subgrupo  $H \in G$ . El grupo de calibre de los simplectomorfismos de la variedad de la base se deforma a aquellos dados por las clases de isotopía asociados a la monodromía  $\rho$ . Además esta deformación dota al nuevo fibrado de una conexión  $A$  en el fibrado toroidal simpléctico conectado con el fibrado principal. Este tipo de deformaciones de acuerdo a [14] pueden entenderse como restricciones que se le imponen al fibrado y a la conexión y en ese sentido se denomina de *esculpido*. El cambio en la cohomología del fibrado toroidal es de la siguiente manera:

$$\mathbb{I} \rightsquigarrow H^2(\Sigma, \mathbb{Z}) \rightsquigarrow H^2(\Sigma, \mathbb{Z}_\rho), \quad (2.44)$$

siendo  $\rho$  una representación contenida en el grupo de isotopía asociado al grupo de difeomorfismos de la variedad base. Para el caso de la supermembrana dicho grupo es el  $SL(2, \mathbb{Z})$ .

Notar que las flechas no implican una secuencia espectral. Siguiendo [14], enfatizamos que los tres principales pasos necesarios para producir la deformación *sculpting/de esculpido* del fibrado, esto es: el primer paso es imponer la condición de carga central que representa un impedimento a la trivialidad supuesta produciendo un twist en la fibración, generándose un fibrado principal cuya cohomología en  $H^2(\Sigma, \mathbb{Z})$  es

no trivial. El lagrangiano de la fibra sin deformar tiene las siguientes simetrías: una simetría de calibre  $DPA_0(\Sigma_1^2)$ , el espacio target supersimétrico  $N = 2$ , una simetría global discreta  $G \equiv Sp(2, \mathbb{Z})$  asociada a la condición de enrollamiento de los mapas embebidos  $\Sigma_1^2 \rightarrow T^2$ : Existe un conjunto infinito de conexiones que pueden fijarse al fibrado principal. La condición de enrollamiento define 1-formas cerradas  $dX_r$  que admiten una descomposición de Hodge en términos de uno-formas armónicas  $d\hat{X}_r$  y una uno-forma exacta  $dA_r$ :

$$dX_r = P_r^s d\hat{X}_s + dA_r, \quad (2.45)$$

la matriz  $P_r^s$  describe los 4 grados de libertad globales asociados a la condición de enrollamiento, cuyos coeficientes dependen del tiempo. En presencia de la condición de carga central, dicha matriz  $\mathcal{P}_r^s$  es constante y no-degenerada, estamos "congelando" el enrollamiento.

Las uno-formas armónicas, gracias a la condición de carga central, tienen una simetría global extra  $Sp(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})$ . Como consecuencia de ello, la matriz  $\mathcal{P}_r^s$  se puede expresar de la siguiente manera:

$$P_r^s = M_r^s = 2\pi R^r S_r^s \quad \text{con} \quad S_r^s \in SL(2, \mathbb{Z}). \quad (2.46)$$

Una vez elegida la base de formas armónicas  $\{d\hat{X}^s\}$ , la descomposición de Hodge es única, y la matriz  $P_r^s$  queda fijada (por ejemplo a  $\delta_s^r$ ). Como consecuencia de ello hay una fijación parcial de la simetría global que se rompe a una simetría residual asociada dada por las monodromías del fibrado calibrado.

El próximo paso es *extraer* una uno-forma de conexión al fibrado no-trivial. Definimos una conexión simpléctica  $A$  preservando la estructura de la fibra bajo holonomías. Para ello, primero definimos una derivada rotada asociada al fibrado Weyl [8]:

$$D_r \bullet = (2\pi R^r l^r) \theta_l^r \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{W(\sigma)}} \partial_a \hat{X}^l(\sigma) \partial_b \bullet, \quad (2.47)$$

haciendo explícita la dependencia en  $\theta \in SL(2, \mathbb{Z})$ , la cual depende de la monodromía  $\rho$ .

En 2-dim los difeomorfismos que preservan el área son también los symplectomorfismos. La tercera selección relevante es la elección para  $W$  en el modelo geométrico que hemos definido. A continuación, se define:

$$\sqrt{W} = \frac{1}{2} \epsilon_{rs} \partial_a \hat{X}^r \partial_b \hat{X}^s \epsilon^{ab}, \quad (2.48)$$

ésta es una densidad regular globalmente definida sobre  $\Sigma$ . Es invariante bajo un cambio de la base canónica de homología.

La matriz  $\theta$  lleva la información de la simetría global residual discreta asociada a las funciones de transición del "patching" de las diferentes cartas en la variedad base compacta para una base fijada de las formas armónicas. Esto juega un rol análogo al tensor de embedding en el calibrado de Noether de las teorías de supergravedad. Señalaremos aquí que el lugar donde las simetrías globales discretas surgen junto con el operador derivada en lugar de aparecer además el campo de calibre ya que su origen es topológicamente asociado a la superficie compacta de la variedad base p-brana.

La definición de esta derivada rotada (estamos haciendo una *extensión de la definición de la derivada covariante*), en la cual el fibrado asociado tiene una monodromía no-trivial de la  $\pi_1(\Sigma)$  sobre la homología de la fibra  $H_1(T^2)$ . La derivada asociada fija una escala en la teoría y rompe la primera teoría  $H = Sp(2, \mathbb{Z})$  a un subgrupo  $\Gamma \in Sp(2, \mathbb{Z})$  especificando los enteros de  $S_r^s$ .

La derivada covariante simpléctica [8], es entonces:

$$\mathcal{D}_r \bullet = D_r \bullet + \{A_r, \bullet\}, \quad (2.49)$$

---

y entonces la conexión transforma con el symplectomorfismo como:

$$\delta_\epsilon A = \mathcal{D}_r \epsilon. \quad (2.50)$$

Se concluye que el fibrado *esculpido* es un fibrado toroidal simpléctico con cohomología  $H^2(\Sigma, \mathbb{Z}_\rho)$  [14].

---

## CAPÍTULO 3

---

# Supergravedad y Supermembrana en $9D$

---

En este capítulo se hará un repaso de las principales características de las supergravedades tanto maximales como las calibradas en nueve dimensiones  $9D$ , ya que será muy importante al analizar nuestros resultados. Además, incluiremos una muy breve descripción de las teorías de supergravedad maximal y calibrada en  $10D$ . Se describirá asimismo el elemento fundamental de nuestro trabajo, la supermembrana con cargas centrales formulada en  $9D$  no compactas.

## 3.1. Supergravedades Maximales en $10D$ y $9D$

Antes de pasar directamente a referirnos al caso  $9D$ , se hará en esta sección una muy breve descripción de las teorías de supergravedad no-calibradas en  $9D$  y  $10D$ , destacando los aspectos que tienen que ver con las simetrías globales de las teorías, pues éstas juegan el rol principal para obtener las supergravedades masivas/calibradas en las cuales estos grupos se calibran.

### 3.1.1. Supergravedades Maximales en $10D$

En esta sección se da un vistazo a las supergravedades no calibradas en  $10D$ . En diez dimensiones se puede tener supersimetría  $N = 1$  o  $N = 2$ , correspondiendo a 16 ó 32 supercargas, respectivamente. A la teoría con  $N = 1$  se le denomina supergravedad minimal y para  $N = 2$  se tienen dos supergravedades maximales inequivalentes, por lo que  $D = 10$  es la única dimensión en que sucede esto, en todas las otras dimensiones hay solo una supergravedad maximal. La estructura de las supergravedades maximales en diez dimensiones corresponde a las posibles teorías de cuerdas con supersimetría maximal. De hecho, en esta dimensión, se tienen las teorías de cuerdas IIA y IIB, cuyas acciones efectivas a bajas energías están dadas por las supergravedades correspondientes. En  $10D$  el espinor minimal es un espinor Majorana-Weyl de 16 componentes. Entonces, supersimetría minimal  $N = 1$  en  $10D$  tiene 16 supercargas.

En cuanto a la supersimetría maximal  $N = 2$  en  $10D$ , se tienen dos posibilidades: se pueden seleccionar espinores Majorana-Weyl de opuesta o igual quiralidad, para obtener las teorías de supergravedad no-quiral IIA o la quiral IIB con supersimetría  $(1, 1)$  y  $(2, 0)$ , respectivamente.

La superálgebra IIA y IIB puede ser extendida con simetrías de calibre. La superálgebra IIB tiene una simetría adicional llamada  $R$ -simetría  $SO(2)$ , que rota los dos espinores de supersimetría de igual quiralidad.

Hay un subsector bosónico, llamado subsector NeveuSchwarz (NS)-NeveuSchwarz (NS), que contiene la gravedad, un potencial de rango 2 y un dilatón. La parte bosónica restante es llamada subsector Ramond-Ramond (RR) y solo contienen potenciales R-R de rango- $d$  donde  $d$  es impar en IIA y par en IIB. En el caso IIA, los fermiones son reales y contiene dos espinores minimales de ambas quiralidades, mientras en el



caso IIB los espinores son complejos y contiene dos espinores minimales de la misma quiralidad. El contenido en campos estándar de estas teorías tienen  $d = 1, 3$  para IIA y  $d = 0, 2, 4$  para IIB:

$$\begin{aligned} \text{IIA:} \quad & \{g_{mn}, B_{mn}, \phi, C_m^{(1)}, C_{mnl}^{(3)}; \psi_m, \lambda\}, \\ \text{IIB:} \quad & \{g_{mn}, B_{mn}, \phi, C^{(0)}, C_{mn}^{(2)}, C_{mnp}^{(4)+}; \psi_m, \lambda\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Para ver las acciones bosónicas maximales IIA y IIB [109, 110]. Existe una formulación especial de la supergravedad IIA y IIB, equivalente a la estándar, que enfatiza la equivalencia de los potenciales R-R duales. En esa formulación no aparecen términos de Chern-Simons explícitos en la acción.

Las teorías de supergravedad maximales en  $11D$  y  $10D$  están conectadas a través de una reducción dimensional. Estas relaciones pueden ser entendidas por las diferentes dualidades entre las diferentes teorías de cuerdas y la teoría M. Cuando se reduce dimensionalmente la supergravedad  $11D$  sobre un círculo, manteniendo solo los modos sin masa, se obtiene la supergravedad IIA en  $10D$ . Cuando se compactifica sobre un orbifold  $S^1/Z_2$  se obtiene la teoría de supergravedad heterótica  $SO(32)$ . El Lagrangiano completo  $11D$  y las transformaciones supersimétricas al ser reducidas dan lugar a sus contrapartes de la teoría IIA, así como los grados de libertad on shell. Se pueden obtener relaciones entre los parámetros de IIA y  $11D$  reducida sobre un círculo:

$$l_s^2 = \frac{l_p^3}{R}, \quad g_s = \left(\frac{R}{l_p}\right)^{3/2}, \quad (3.2)$$

donde  $l_p$  es la longitud de Planck y  $R$  el radio del círculo interno. Dadas estas relaciones puede interpretarse que el acoplamiento fuerte en la teoría de cuerda IIA corresponde a formularla en un radio grande, lo que equivale a descompactificar la coordenada undécima y surge la teoría M en  $11D$  [20, 34, 68]. Por otro lado, la teoría IIA sobre un círculo con radio  $R$  es equivalente a la IIB sobre un círculo con radio  $\tilde{R}$  con

la relación  $\tilde{R} = \alpha'/R$  mediante el intercambio de los modos de enrollamiento y los modos de KK [114, 115]. Esta relación entre las teorías sobre diferentes variedades de compactificación es llamada T-dualidad [113, 116].

### 3.1.2. Supergravedad Maximal $9D$

Para  $D \leq 9$  las supergravedades maximales son únicas, por ello todas pueden ser obtenidas, por reducción dimensional de cualquiera de las teorías de mayor dimensión, del mismo modo que la supergravedad IIA puede ser obtenida desde  $11D$ . El contenido en campos así como los lagrangianos y fórmulas generales de cualquiera de las supergravedades maximales  $D \leq 9$ -dimensional se pueden obtener por reducción dimensional, [111]. La reducción toroidal de las supergravedades sin masa IIA y IIB sobre un círculo produce la única supergravedad  $N = 2$  sin masa  $D = 9$ . Su contenido en campo está dado por:

$$D=9: \quad \{e_m^{\hat{a}}, \phi, \varphi, \chi, A_m, A_m^i, B_{mn}^i, C_{mnl}; \psi_m, \lambda, \tilde{\lambda}\}, \quad (3.3)$$

con los índices  $i = 1, 2$  de  $SL(2, \mathbb{R})$ . En [66] se muestra que el sector escalar de la teoría  $9D$  es, por construcción, invariante bajo el grupo semi-simple correspondiente a determinadas transformaciones globales. Sin embargo, este grupo resulta ser una simetría no solo del subsector escalar sino de toda la teoría en la que se incluyen los potenciales de mayor rango y fermiones.

En la dimensión  $D = 9$  las supergravedades IIA y IIB se reducen a la supergravedad maximal de nueve dimensiones. Se reducen tanto las transformaciones de supersimetría IIA y IIB y las ecuaciones de campo a sus equivalentes en  $9D$ . Además, los dos lagrangianos IIA y IIB pueden ser reducidos a la acción correcta en  $9D$ . En

---

términos de los grados de libertad on-shell, las descomposiciones de las representaciones IIA y IIB de  $SO(8)$  bajo  $SO(7)$ , coinciden [112].

Por tanto, los modos sin masa de las supergravedades IIA y IIB sobre  $S^1$  son equivalentes: están descritas por la misma teoría efectiva, la teoría de supergravedad maximal única  $D = 9$ . Sin embargo, los modos masivos de las supergravedades IIA y IIB sobre  $S^1$ , algunas veces llamados modos de momentos, son distintos. Por esta razón, estas dos supergravedades son equivalentes solamente sobre pequeños círculos, donde estos modos se transforman en infinitamente masivos [112]. Esto no sucede en la teoría de cuerdas donde se obtiene que la combinación de estados de momento masivos y estados masivos de enrollamiento producen el mismo resultado para las teorías de cuerdas IIA y IIB. Por tanto, como se mencionó antes, estas dos teorías son equivalentes en el contexto de la T-dualidad.

### 3.1.3. Simetrías Globales de Supergravedades Maximales

En esta sección se resumirán las simetrías globales de las supergravedades maximales en  $D = 9, 10$  [67]. Si  $G$  son los grupos de simetrías de la supergravedad  $11D$  reducida sobre un toro, se espera que éstos se rompan a un subgrupo aritmético  $G(\mathbb{Z})$  a nivel cuántico, para la teoría M completa sobre un toro [107]. El grupo de simetría  $SL(11 - D, \mathbb{R})$  es el grupo esperado para las supergravedades maximales sobre círculos teniendo en cuenta su origen en  $11D$ . Sin embargo el grupo de simetría global  $G$  en  $D$  dimensiones es usualmente más grande, por esta razón el grupo  $G$  es conocido como una simetría oculta [117]. Los sectores escalares de las supergravedades maximales están definidos sobre el espacio simétrico determinado por  $G/H$ , denominado coset escalar.  $H$  es el subgrupo maximal compacto de  $G$ , y corresponde al grupo de la si-

---

metría  $R$  de la superálgebra. La dimensión del coset escalar  $G/H$  es igual al número de escalares.

El número de axiones es dado por el número de raíces positivas del álgebra correspondiente a  $G$  mientras el número de dilatones iguala a  $11 - D$  (uno para cada dimensión reducida). Al reducir a menor dimensión aparecen potenciales bosónicos de mayor rango que transforman bajo los grupos  $G$ . Los potenciales forman representaciones lineales de  $G$  mientras son invariantes bajo  $H$ . A diferencia de los bosones, los fermiones son invariantes bajo  $G$  pero transforman bajo  $H$ . Ver [66] donde se muestra una tabla con un resumen de todos los grupos  $G$ ,  $H$  y la dimensión  $G/H$  para las supergravedades maximales  $D \leq 11$ .

### 3.1.3.1. Simetrías Globales: Supergravedad Maximal $10D$

En la sección 3.1.1 se mostró el contenido de campos para las supergravedades maximales en  $10D$  (3.1). A continuación nos referimos a sus simetrías globales.

La teoría de supergravedad IIA en  $10D$ , tiene dos simetrías  $\mathbb{R}^+$ . La primera es una simetría del Lagrangiano y está dada por

$$e^\phi \rightarrow \lambda e^\phi, \quad B_{mn} \rightarrow \lambda^{1/2} B_{mn}, \quad C_m^{(1)} \rightarrow \lambda^{-3/4} C_m^{(1)}, \quad C_{mnl}^{(3)} \rightarrow \lambda^{-1/4} C_{mnl}^{(3)}, \quad (3.4)$$

con  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  y otros campos invariantes. La segunda simetría es la análoga en  $10D$  de la simetría trombón en  $11D$  (1.3):

$$G_{mn} \rightarrow \lambda^2 G_{mn}, \quad C_{mnl} \rightarrow \lambda^3 C_{mnl}, \quad \Psi_m \rightarrow \lambda^{1/2} \Psi_m.$$

La teoría de supergravedad IIB tiene una simetría global  $SL(2, \mathbb{R})$  [119], con elemento

$$\Lambda_i^j = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}), \quad (3.5)$$

que actúa sobre los campos de la teoría:

$$\begin{aligned} \tau &\rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, & B^i &\rightarrow (\Lambda^{-1})^i_j B^j, & C^{(4)} &\rightarrow C^{(4)}, \\ \psi_m &\rightarrow \left(\frac{c\tau^* + d}{c\tau + d}\right)^{1/4} \psi_m, & \lambda &\rightarrow \left(\frac{c\tau^* + d}{c\tau + d}\right)^{3/4} \lambda, \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde  $B^i = (-B, C^{(2)})$  y el escalar complejo  $\tau = \chi + ie^{-\phi}$  con el axión  $\chi = C^{(0)}$ .

La simetría  $SL(2, \mathbb{R})$  de la supergravedad IIB es rota a  $SL(2, \mathbb{Z})$  en la teoría de cuerdas IIB [107]. Una transformación particular es, por ejemplo, el elemento  $(a, b; c, d) = (0, 1; -1, 0)$  que corresponde a la transformación  $\phi \rightarrow -\phi$  (con un background sin axión), que relaciona los acoplamientos de cuerdas fuerte y débil. Por esta razón esta transformación es llamada dualidad  $S$  [120]. Adicionalmente, la teoría IIB también tiene una simetría trombón.

### 3.1.3.2. Simetrías Globales: Supergravedad Maximal $9D$

El contenido en campos de la supergravedad tipo II en  $9D$  se mostró en (3.3). En dicha ecuación se tiene para el sector bosónico: un supervielbein  $e_m^{\hat{a}}$ , tres escalares  $(\phi, \varphi, \chi)$ , tres campos de calibre  $(A_m, \{A_n^{(1)}, A_n^{(2)}\} \equiv \vec{A})$ , dos 2-formas antisimétricas  $(\{B_{mn}^{(1)}, B_{mn}^{(2)}\} \equiv \vec{B})$ , y una 3-forma  $C_{mnl}$ . Para el sector fermiónico, la contribución es un espinor  $\psi_\mu$  y dos dilatinos  $\lambda, \tilde{\lambda}$  [42, 46]. La simetría global  $D = 9$  (3.5) actúa en la teoría no-calibrada de la siguiente manera:

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \vec{A} \rightarrow \Lambda \vec{A}, \quad \vec{B} \rightarrow \Lambda \vec{B}, \quad (3.7)$$

más las transformaciones fermiónicas:

$$\psi_m \rightarrow \left(\frac{c\tau^* + d}{c\tau + d}\right)^{1/4} \psi_m, \quad \lambda \rightarrow \left(\frac{c\tau^* + d}{c\tau + d}\right)^{3/4} \lambda, \quad \tilde{\lambda} \rightarrow \left(\frac{c\tau^* + d}{c\tau + d}\right)^{-1/4} \tilde{\lambda}, \quad (3.8)$$

mientras el escalar  $\varphi$  y la 3-forma  $C$  permanecen invariantes. Esta simetría global  $SL(2, \mathbb{R})$  en  $9D$  proviene de la simetría análoga en supergravedad IIB en  $10D$ . Las transformaciones de simetría de escalares y fermiones no cambian si se reemplazan  $\Lambda$  por  $-\Lambda$ ; por lo tanto, esos campos transforman bajo  $PSL(2, \mathbb{R})$ . Usualmente solo se consideran elementos de grupo  $\Lambda$  que están continuamente conectados a la identidad.

Además de la simetría global  $SL(2, \mathbb{R})$  veamos otras simetrías<sup>1</sup> de la teoría de supergravedad en  $9D$  [66]: Esta hereda dos simetrías de escalamiento  $\alpha$  y  $\beta$  procedentes de la IIA y, una simetría de escalamiento  $\gamma$  incluida en  $SL(2, \mathbb{R})$ , y una simetría trombón  $\delta$ , procedentes de la IIB. Pero, solo tres de las cuatro simetrías de escalamiento son linealmente independientes [46]:

$$8\alpha - 48\beta = 18\gamma + 9\delta. \quad (3.9)$$

Por lo tanto, cada uno de los tres campos de calibre  $A_m, A_m^1, A_m^2$  tienen peso cero bajo las dos combinaciones lineales de esas tres simetrías: una es una simetría de la acción, y la otra es una simetría de las ecuaciones de movimiento solamente. Como se encontró en  $10D$ , las simetrías que dejan al vector de calibre invariante pueden hacerse locales. Los pesos de escalamiento de los campos de supergravedad  $9D$  y la acción bajo las simetrías de escalamiento  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  se muestran en [66].

## 3.2. Supergravedades Calibradas

Las supergravedades calibradas fueron descubiertas por [121, 122] al compactificar la supergravedad  $11D$  sobre un  $S^7$ , una variedad compacta con holonomía no-trivial. Prontamente después de este resultado, el mecanismo de calibrado se aplicó a teorías

---

<sup>1</sup>Aquí estamos usando la nomenclatura usada en [66] para su designación.

---

con grupos de simetrías no-compactos [123]. Desde entonces, este campo de investigación ha sido muy activo, encontrándose diferentes maneras de obtener una deformación consistente de una determinada supergravedad maximal formulada en un espacio target con  $D < 11$ . Una de estas posibilidades es a través de compactificaciones del tipo  $SS$  (ver sección 2.1.2), y otra, haciendo compactificaciones sobre variedades con flujos. Para profundizar, ver por ejemplo, [52, 66].

En esta sección se hace un resumen de cómo algunos de los métodos de reducción dimensional mencionados en el capítulo anterior producen, cuando son aplicados a la teorías de supergravedades maximales, una teoría calibrada resultante en menor dimensión, esto es, se calibra una simetría global de la teoría sin masa. También se pueden deformar estas teorías agregando masa a estos campos sin producir calibrado. De esta manera se tendrán supergravedades masivas. Además, se puede producir un aumento<sup>2</sup> de la simetría de calibre lo cual es de interés a nivel de teorías efectivas.

Una propiedad importante de las deformaciones que se están considerando es que ellas no rompen supersimetría. Entonces, las supergravedades calibradas o masivas tienen el mismo número de supercargas (i.e. 32) tal y como las correspondientes supergravedad sin calibrar o sin masa. Este hecho puede ser contrastado con, por ejemplo, las compactificaciones Calabi-Yau, las cuales rompen una fracción de la supersimetría [124].

En esta sección incluiremos una breve referencia a la supergravedad masiva IIA [125], que es la única deformación masiva de la supergravedad de la que actualmente no se conoce ni su formulación covariante en  $11D$  ni de su origen a partir de teoría M/cuerdas. En [102, 128] fueron discutidos los fundamentos de su formulación no covariante. Usualmente, la reducción dimensional se hace sobre las transformaciones

---

<sup>2</sup>Traducción de *enhancement*.

---

supersimétricas de los campos y sobre las ecuaciones de campo en lugar de reducir los lagrangianos (ver apéndices en [66]). Esto debido a que hay simetrías rígidas que se emplean para la reducción, las cuales escalan a los lagrangianos, es decir, no los dejan invariantes. En general, las transformaciones supersimétricas y las ecuaciones de campo tendrán términos de masa implícitos que aparecen a través de las intensidades de campo covariantes, y términos de masa explícitos. Un ejemplo de supergravedades sin lagrangiano son las calibradas trombón.

En esta sección solo se revisarán aspectos - todos ellos encontrados previamente en la literatura-, que son relevantes para nuestras construcciones: aquellos en los cuales la monodromía tiene un rol importante.

### 3.2.1. Supergravedad Masiva y Calibrada en $10D$

En esta sección se consideran dos deformaciones de la supergravedad IIA, una de las cuales lleva a una versión masiva de IIA mientras que la otra da origen a la teoría IIA calibrada.

La reducción toroidal de la teoría  $11D$  en un círculo produce la teoría no calibrada y sin masa IIA en  $10D$ . El contenido en campos de la teoría de supergravedad IIA  $D = 10$  está dado por:

$$D=10 \text{ IIA: } \{e_m^{\hat{a}}, B_{mn}, \phi, C_m^{(1)}, C_{mnl}^{(3)}; \psi_n, \lambda\}. \quad (3.10)$$

Como se mencionó en la sección 3.1.3.1, la teoría IIA tiene dos simetrías de escalamiento: una, la simetría  $\alpha$  que escala el lagrangiano y tiene su origen en  $11D$ ; y la otra, la simetría  $\beta$ , que deja el lagrangiano invariante y que proviene de las coordenadas internas de la supergravedad de  $11D$ .



El vector Ramond-Ramond  $C^{(1)}$  en (3.10) es invariante bajo  $\alpha$  mientras que escala bajo  $\beta$ . Solamente la simetría  $\alpha$  puede ser calibrada mientras que es imposible para la simetría  $\beta$  [126].

La teoría supergravedad IIA *masiva* fue construida por Romans [125] y resulta de hacer una deformación masiva, con parámetro de masa  $m_R$ . El lagrangiano contiene términos lineales y cuadráticos en  $m_R$ . El potencial escalar de Romans es:

$$V_{m_R} = \frac{1}{2} e^{5\phi/2} m_R^2. \quad (3.11)$$

El parámetro  $m_R$  rompe ambas simetrías  $\alpha$  y  $\beta$  de la teoría IIA. No obstante, hay una combinación lineal que no es rota por los términos masivos: la combinación  $12\beta - 5\alpha$ . El parámetro de masa  $m_R$  debe ser visto como una cero-forma Ramond-Ramond de intensidad de campo. La correspondiente D-brana es la D8-brana, la cual está cargada magnéticamente con respecto a  $m_R$  [127]. La supergravedad masiva IIA, no es una supergravedad calibrada, dado que ninguna simetría global de la teoría sin masa se ha promovido a local. Las transformaciones de supersimetría,  $\delta_{m_R}$ , son [66]:

$$\delta_{m_R} \psi_m = -\frac{1}{32} W \Gamma_m \epsilon, \quad \delta_{m_R} \lambda = \delta_\phi W \epsilon, \quad W = e^{5\phi/4} m_R, \quad (3.12)$$

donde  $W$  es un superpotencial,  $\phi$  el dilatón, y  $\delta_\phi W = \delta W / \delta \phi$ . Las intensidades de campo quedan modificadas de la manera siguiente:

$$G^{(2)} = dC^{(1)} + m_R B, \quad H = dB, \quad G^{(4)} = dC^{(3)} + C^{(1)} \wedge H + \frac{1}{2} m_R B \wedge B. \quad (3.13)$$

La supergravedad *calibrada* IIA puede obtenerse a través de dos procedimientos: (1) por una deformación con un parámetro  $m_{11}$ , donde la simetría  $\alpha$  ha sido calibrada; y (2) una reducción twisted de la supergravedad  $D = 11$  usando la simetría trombón (1.3) con parámetro  $m_R$  [104, 129, 103]. También es posible hacer una combinación de las dos deformaciones consideradas, ver [46].

El ansatz correspondiente a la reducción twisted con  $m_{11}$  produce la teoría reducida la cual es una supergravedad calibrada, dado que la simetría de escalamiento  $\alpha$  ha sido calibrada. En particular, el parámetro de calibre y la transformación de los potenciales Ramond-Ramond son:

$$\Lambda = e^{w_\alpha m_{11} \lambda}, \quad C^{(1)} \rightarrow C^{(1)} - d\lambda, \quad C^{(3)} \rightarrow e^{3m_{11} \lambda} (C^{(3)} - d\lambda B), \quad (3.14)$$

donde  $w_\alpha$  son los pesos bajo  $\alpha$ . Para la supergravedad calibrada  $D = 10$  no se puede definir un lagrangiano ya que la simetría que es calibrada no es una simetría del lagrangiano. Sin embargo, las ecuaciones de campo correspondientes sí pueden obtenerse pero no pueden ser interpretadas como ecuaciones de Euler-Lagrange. La simetría que es calibrada es simetría de las ecuaciones de movimiento, debido a que al hacer una reducción desde una teoría de mayor dimensión, hay un twisting con una simetría de las ecuaciones de campo solamente.

El método (2) para construir la teoría de supergravedad calibrada  $D = 10$  se llevó a cabo en [129]. Allí se consideran una solución más general de las identidades de Bianchi del superespacio  $D = 11$  para un espacio-tiempo no-trivial de la forma  $M_{10} \times S^1$  y luego se reduce sobre un círculo.

### 3.2.2. Supergravedades Calibradas en $9D$

En esta sección se muestran los resultados de varias deformaciones masivas de la supergravedad maximal en  $D = 9$ , las cuales dan origen a supergravedades calibradas y tienen un origen de mayor dimensión, ver [46, 66]. Pueden obtenerse supergravedades calibradas en nueve dimensiones haciendo reducciones twisted de la supergravedad IIB en  $D = 10$  usando la simetría  $SL(2, \mathbb{R})$ . Esto ha sido tratado con creciente generalidad en [42, 43, 103, 104, 130].

Para el caso de interés aquí, esto es, las supergravedades calibradas del tipo II en  $9D$ , las monodromías están asociadas al grupo de simetría global  $GL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+$ . En el sector  $SL(2, \mathbb{R})$ , hay tres clases inequivalentes de teorías, correspondientes a las clases de conjugación de  $SL(2, \mathbb{R})$  hiperbólica, elíptica y parabólica, representadas por las matrices de monodromías de la forma (2.34) donde cada clase está determinada por la constante de acoplamiento ( $\zeta$ ,  $\gamma$  o  $\theta$ ) [102]. En  $9D$  la teoría puede además ser descrita en términos de la matriz de masa  $M$ , la cual está caracterizada por tres parámetros que definen el vector de masa  $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$  [42]:

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 + m_3 \\ m_2 - m_3 & -m_1 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Esta matriz de masa, como se explicó en [42], pertenece al álgebra de Lie  $sl(2, \mathbb{R})$  y transforma en la representación irreducible adjunta. A bajas energías la supergravedad calibrada está determinada por la matriz de masa  $M$  para una monodromía dada  $\mathcal{M}$ .

Como se explicó en [42, 46] las simetrías locales previamente a ser calibradas, corresponden a:

$$A \rightarrow A - d\lambda, \quad \vec{B} \rightarrow \vec{B} - \vec{A}d\lambda. \quad (3.16)$$

Las deformaciones masivas a partir del sector tipo IIB están etiquetadas por cuatro parámetros  $m = (m_i, m_4)$  con  $i = 1, \dots, 3$ . Tres de ellas, caracterizadas por  $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$ , pertenecen a las deformaciones  $SL(2, \mathbb{R})$  y la restante  $m_4$  tiene su origen en el calibrado de la simetría de escalamiento  $\mathbb{R}^+$ . Los parámetros de  $m$  calibran un subgrupo de la simetría global  $SL(2, \mathbb{R})$  y  $\mathbb{R}^+$  respectivamente, con parámetro  $\Lambda = e^{\widetilde{M}\lambda}$  y las transformaciones de calibre de campo se convierten en:

$$A \rightarrow A - d\lambda, \quad \vec{B} \rightarrow \Lambda(\vec{B} - \vec{A}d\lambda), \quad (3.17)$$

donde definimos  $\widetilde{M} = (M, m_4)$ , para agrupar los dos tipos de deformaciones.

Siguiendo [42, 46], consideremos en primer lugar las deformaciones masivas asociadas a  $\Lambda_{SL(2,\mathbb{R})}$  para el calibrado del subgrupo de  $SL(2, \mathbb{R})$  con generador la matriz de masa  $M$  empleada en la reducción. Hay tres casos distintos dependiendo del valor de  $\vec{m}^2 = \frac{1}{4}(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2)$  caracterizando el conjunto de tres clases de conjugación ya mostrada en (2.34) [102, 105]:  $\mathbb{R}, SO(1, 1)^+, SO(2)$ . Ya que se hará uso de ellas, se describirán brevemente (para simplificar la notación se mantiene la usada en [46] y se hace un resumen de sus resultados enfocados solo en el análisis de la monodromía). Cada uno de los subgrupos está generado por un elemento  $\Lambda$  del grupo  $SL(2, \mathbb{R})$  con  $\det \Lambda = 1$ . Ellos se clasifican de acuerdo a sus trazas como se vio en la sección 2.1.4:

- La teoría de supergravedad calibrada parabólica está asociada al calibrado del subgrupo  $\mathbb{R}$  con parámetro  $\zeta$  generada por  $\Lambda_p$ .
- La teoría de supergravedad calibrada hiperbólica está asociada al calibrado del subgrupo  $SO(1, 1)^+$  con parámetro  $\gamma$  generada por  $\Lambda_h$ .
- La teoría de supergravedad calibrada elíptica está asociada al calibrado del subgrupo  $SO(2)$  generada por los elementos  $\Lambda_e$  de  $SL(2, \mathbb{R})$  con parámetro  $\theta$ .

El grupo  $\mathbb{R}^+$  es una clase de conjugación de 1 parámetro. Corresponde a los escalamientos que dejan invariantes las ecuaciones de campo pero que escalan al lagrangiano globalmente. Estas simetrías fueron llamadas trombón por [62]. Su calibrado fue estudiado por ejemplo en [47, 48]. Esto corresponde a la reducción con  $m_4 \neq 0; m_1 = m_2 = m_3 = 0$ . Siguiendo a [46], la simetría  $\mathbb{R}^+$  ha sido calibrada con parámetro  $\Lambda_{\mathbb{R}^+} = e^{m_4 \lambda}$ . Como se explicó en [46], el conjunto completo de deformaciones  $\{m_i, m_4\}$  para las reducciones IIB corresponde a

$$\Lambda_{GL(2,\mathbb{R})} = \Lambda_{SL(2,\mathbb{R})} \Lambda_{\mathbb{R}^+}. \quad (3.18)$$

Además de las reducciones twisted para obtener teorías calibradas de supergravedad en  $9D$ , se pueden generar términos masivos en nueve dimensiones haciendo la reducción toroidal de la supergravedad masiva IIA, con un ansatz de reducción que lleva a la supergravedad calibrada  $9D$  [42, 130]. Por consiguiente, la reducción de la supergravedad IIA masiva corresponde a una reducción twisted de la supergravedad IIB, empleando el subgrupo de  $\mathbb{R}$  de  $SL(2, \mathbb{R})$ . Esta equivalencia en nueve dimensiones es llamada *T-dualidad masiva* y puede considerarse como una deformación de la dualidad T sin masa.

Una característica interesante de la T-dualidad masiva es que la teoría IIA masiva se transforma en una teoría calibrada después de la reducción. El surgimiento de este calibrado puede ser visto como una generalización de los calibrados 'aumentados o mejorados' mencionados antes, en los cuales el vector de calibre extra proviene de un vector de mayor dimensión. En el caso de la teoría masiva IIA, sin embargo, el vector de calibre es  $A$ , proveniente de la 2-forma Neveu-Schwarz  $B$  en IIA.

Además de la reducción twisted  $SL(2, \mathbb{R})$  de IIB, se puede también hacer reducciones twisted de ambas IIA y IIB usando las simetrías de escalamiento  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta^3$ , con los parámetros de masa correspondientes denotadas por  $m_{\text{IIA}}$ ,  $m_4$  y  $m_{\text{IIB}}$ , respectivamente. Por ejemplo, se puede obtener un calibrado de la supergravedad IIA en  $9D$  por reducción en un círculo a la KK de la teoría masiva IIA en diez dimensiones. Las diferentes posibilidades están ilustradas en la figura 3.1 [66]. En total, esto equivale a siete deformaciones de la supergravedad única  $D = 9$ , con parámetros  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_{\text{IIA}}, m_{\text{IIB}}$  y  $m_{11}$ . El parámetro de Romans  $m_{\text{R}}$  no es independiente sino que está relacionado a un subconjunto de los parámetros  $\vec{m}$ .

Los autores de [46] analizan en  $9D$  todas las combinaciones con las 7 deformaciones

---

<sup>3</sup>Aquí estamos siguiendo la notación de Roest en [66].

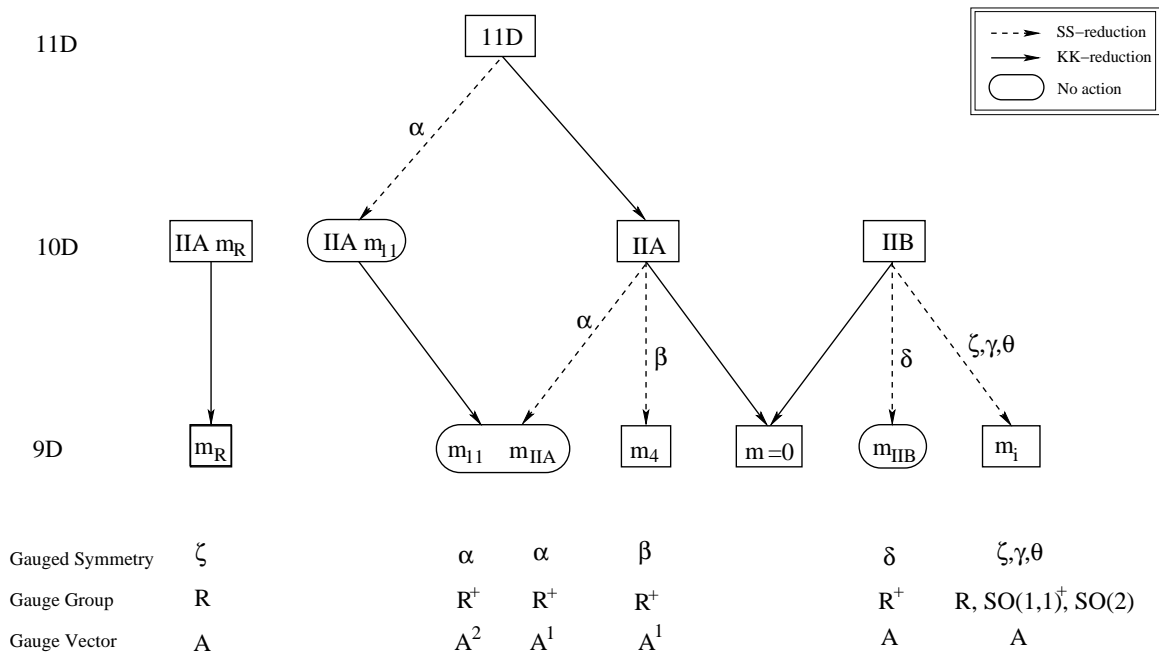


Figura 3.1: Gráfico original de [66] donde se resume todas las reducciones twisted. Los parámetros de masa en la misma caja forman un multiplete bajo el grupo  $SL(2, \mathbb{R})$ . También se dan la simetría calibrada y el vector de calibre en  $9D$ .

---

masivas existentes en  $9D$ . Ellos consiguen las siguientes posibles combinaciones (con los otros parámetros de masa cero) que recopilamos por completitud:

- (1) *Combinación con las deformaciones  $\{m_{\text{IIA}}, m_4\}$* : Puede obtenerse además por una reducción twisted de IIA usando una combinación lineal de las simetrías  $\alpha$  y  $\beta$ . Hay un calibrado de ambas simetrías y (para  $m_4 \neq 0$ ) el subgrupo parabólico de  $SL(2, \mathbb{R})$  en  $9D$ , resultando un grupo de calibre no-abeliano.
- (2) *Combinación con las deformaciones  $\{\vec{m}, m_{\text{IIB}}\}$* : Esta combinación contiene tres casos diferentes inequivalentes dependiendo de  $\vec{m}^2$  (dependiendo de manera crucial del hecho que  $m_{\text{IIB}}$  es un singlete bajo  $SL(2, \mathbb{R})$ ): (a) con  $\{\vec{m}, m_{\text{IIB}}\}$  y  $\vec{m}^2 = 0$ ; (b) con  $\{\vec{m}, m_{\text{IIB}}\}$  y  $\vec{m}^2 > 0$ ; y, (c) con  $\{\vec{m}, m_{\text{IIB}}\}$  y  $\vec{m}^2 < 0$ . Todas esas combinaciones pueden además ser obtenidas por reducción twisted de IIB, empleando una combinación lineal de las simetrías  $\delta$  y uno de los subgrupos de  $SL(2, \mathbb{R})$ . Todos los casos (con  $m_{\text{IIB}} \neq 0$ ) corresponde al calibrado de una simetría de escalamiento abeliana en  $9D$ .
- (3) *Combinaciones con  $\{5m_4 = -12m_{\text{IIA}}, m_2 = m_3\}$* : Este caso puede entenderse como la reducción twisted de la teoría masiva IIA de Romans, usando la simetría de escalamiento que no es rota por las deformaciones  $m_{\text{R}}$ : Esto es dado por la combinación  $12\beta - 5\alpha$ . Esta deformación calibra tanto la combinación lineal de simetrías de escalamiento como el subgrupo parabólico de  $SL(2, \mathbb{R})$  en  $9D$ , formando ambos un grupo de calibre no-abeliano.

Por lo tanto las deformaciones más generales son los cinco casos dados arriba, conteniendo todos dos parámetros de masa. Todos ellos son teorías calibradas y tienen un origen de mayor dimensión. Los casos (1) y (3) tienen un grupo de calibre no-abeliano contemplando  $m_4 \neq 0$ . Solo las simetrías que se preservan cuando se incluyen

---

en la teoría de supergravedad correcciones a orden árbol cuyo origen es teoría de cuerdas, van a ser a su vez simetrías de teorías de cuerdas. Se tienen dos de tales simetrías [46]:

- La simetría  $SL(2, \mathbb{R})$  de IIB (o mejor su subgrupo  $SL(2, \mathbb{Z})$ ). De este modo las deformaciones  $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$  corresponden a los límites a bajas energías de tres sectores diferentes de la teoría de cuerdas IIB compactificada (dependiendo de  $\vec{m}^2 = \frac{1}{4}(-m_1^2 - m_2^2 + m_3^2)$ ).
- La combinación lineal  $\alpha + 12\beta$  de simetrías de escalamiento de la teoría IIA. Por lo tanto se puede definir una deformación masiva  $m_s$  dentro del caso 1 con  $\{m_{\text{IIA}} = m_s, m_4 = 12m_s\}$  que corresponde al límite a baja energía de un sector de la teoría de cuerdas IIA compactificada.

Todas las correcciones  $\alpha'$ , a mayor orden en  $11D$  son invariantes bajo transformaciones de coordenadas generales  $x^{11} \rightarrow \lambda x^{11}$  y en caso de reducción, deben transformar covariantemente bajo las transformaciones de coordenadas reducidas, entre las cuales está la simetría de escalamiento  $\alpha + 12\beta$ . Por consiguiente, esa combinación es simetría de escalamiento de la teoría IIA debido a su origen en  $11D$  [66].

Un ejemplo de cómo se relacionan los diferentes métodos de reducción dimensional es el siguiente: la reducción twisted desde la teoría IIA a  $9D$  usando la transformación de coordenadas generales de arriba es equivalente a la reducción única del grupo de la variedad de  $11D$  a  $9D$ . Las deformaciones  $m_s$  corresponden a un calibrado del grupo  $2D$  no-abeliano y no solo el de la simetría  $\alpha + 12\beta$ .



### 3.3. La Supermembrana con Cargas Centrales no Triviales en $9D$

En la sección 1.2 se hizo un resumen de los resultados hasta ahora presentes en la literatura en la descripción de la supermembrana en  $11D$ . Se incluyó su formulación en el superespacio (sección 1.2.2) y la selección del calibre del cono de luz (CCL) (sección 1.2.3) para obtener su hamiltoniano y sus propiedades espectrales (sección 1.2.4).

En esta sección describiremos un sector de la Supermembrana compactificada sobre un espacio target  $M_9 \times T^2$ .  $T^2$  es un toro plano definido en términos de una retícula<sup>4</sup>  $\mathcal{L}$  sobre el plano complejo  $C$  por  $C/\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L} : z \rightarrow z + 2\pi R(l + m\tau), \quad (3.19)$$

donde  $m, l$  son enteros,  $R$  es un móduli real,  $R > 0$ , y  $\tau$  un móduli complejo  $\tau = Re\tau + iIm\tau$ ,  $Im\tau > 0$ .  $\tau$  es la coordenada compleja del espacio de Teichmüller para  $g = 1$ , que es la parte superior del plano. El espacio de Teichmüller es un cubrimiento del espacio de móduli de las superficies de Riemann, es una variedad  $2g - 1$  compleja, analítica, simplemente conexa, para superficies de Riemann de genus  $g$ . Los toros conformalmente equivalentes están identificados por el parámetro  $\tau$  módulo el grupo modular de Teichmüller, el cual en el caso  $g = 1$  es  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Este grupo actúa sobre el espacio de Teichmüller mediante una transformación de Möbius y tiene una acción natural sobre el grupo de homología  $H_1(T^2)$ .

Para definir una supermembrana con cargas centrales no triviales, consideraremos mapas  $X^m, X^r$  desde una superficie de Riemann  $\Sigma$  con  $g = 1$  al espacio target, donde

---

<sup>4</sup>Traducción de *lattice*.

$X^m$  son mapas univaluados hasta el sector Minkowski del espacio target mientras que los mapas  $X^r$  van hasta el sector compacto  $T^2$  del espacio target con los índices  $m = 3, \dots, 9; r = 1, 2$ . Recordemos que partimos de la supermembrana  $11D$  que está en el CCL con coordenadas del espacio target  $(X^+, X^-, X^a)$  con  $a = 1, \dots, 9$ .  $\sqrt{W}$  es una densidad independiente del tiempo introducida para preservar el comportamiento de densidad de  $P_-$  [33]. Eliminamos  $X^-, P_+$  de los vínculos y se resuelven los vínculos fermiónicos de segunda clase de la manera usual [4].

Las condiciones necesarias de enrollamiento que deben cumplir los mapas  $X^m, X^r: \Sigma \rightarrow T^2$ , (con  $r = 1, 2$ ) son:

$$\oint_{\mathcal{C}_s} dX^m = 0, \quad (3.20)$$

$$\oint_{\mathcal{C}_s} dX = 2\pi R(l_s + m_s \tau), \quad (3.21)$$

$l_s, m_s, s = 1, 2$ , son enteros, y  $\mathcal{C}_s$ , la base de homología de una superficie de Riemann  $\Sigma$  de genus  $g = 1$ . Las uno-formas  $dX^m$  son exactas, sin embargo las uno-formas asociadas al sector compacto  $dX^r$  son cerradas. Podemos por consiguiente, hacer la descomposición de Hodge de dichas uno-formas en términos de las uno-formas armónicas más uno-formas exactas. Sin perder generalidad, podemos descomponer las uno-formas cerradas  $dX^r$  en

$$dX^r = M_s^r d\hat{X}^s + dA^r, \quad r = 1, 2, \quad (3.22)$$

donde  $d\hat{X}^s, s = 1, 2$  es la base de uno-formas armónicas, denotaremos por  $d\hat{X}^r$ , con  $r = 1, 2$ , la base normalizada de uno-formas armónicas sobre  $\Sigma$ :

$$\oint_{\mathcal{C}_s} d\hat{X}^r = \delta_r^s, \quad (3.23)$$

$dA^r$  son las uno-formas exactas y  $M_s^r$  son los coeficientes constantes.

Además, podemos definir dichas formas en coordenadas complejas:

$$dX = dX^1 + idX^2, \quad dA = dA^1 + idA^2. \quad (3.24)$$

La condición de enrollamiento (3.21) implica:

$$M_s^1 + iM_s^2 = 2\pi R(l_s + m_s\tau). \quad (3.25)$$

En consecuencia, la expresión más general para los mapas  $X^r$ , es:

$$dX = 2\pi R(l_s + m_s\tau)d\hat{X}^s + dA, \quad (3.26)$$

$l_s, m_s$ ,  $s = 1, 2$ , enteros arbitrarios.

Se impone a continuación la restricción topológica sobre los mapas de enrollamiento: el vínculo de enrollamiento irreducible, también llamado *condición de carga central*<sup>5</sup>:

$$\int_{\Sigma} dX^r \wedge dX^s = n\epsilon^{rs} \text{Area}(T^2), \quad r, s = 1, 2, \quad (3.27)$$

donde el número de enrollamiento  $n$  se toma como distinto de cero.  $\epsilon^{rs}$  es el tensor antisimétrico simpléctico asociado a la 2-forma simpléctica sobre el toro plano  $T^2$ . En el caso que estamos considerando  $\epsilon^{rs}$  es el símbolo antisimétrico de Levi Civita.

La densidad escalar natural  $\sqrt{W}$  en el modelo geométrico que estamos considerando se obtiene del pullback<sup>6</sup> de la 2-forma simpléctica por el mapa  $\hat{X}^r$ ,  $r = 1, 2$ , sobre  $T^2$ :

$$\omega = \epsilon_{rs} d\hat{X}^r \wedge d\hat{X}^s \equiv \sqrt{W} \epsilon_{ab} d\sigma^a \wedge d\sigma^b, \quad (3.28)$$

---

<sup>5</sup>La ecuación (3.25) describe la carga central de del álgebra supersimétrica en  $11D$  asociada a una M2.

<sup>6</sup>Sin traducción.

---

donde  $\sqrt{W} = \frac{1}{2}\epsilon_{rs}\partial_a\hat{X}^r\partial_b\hat{X}^s\epsilon^{ab}$ . Los symplectomorfismos que preservan la estructura canónica simpléctica sobre  $T^2$  son entonces el pull-back a los symplectomorfismos que preservan  $W$  sobre  $\Sigma$ . Esto es relevante en la construcción de la supermembrana con cargas centrales como secciones de un fibrado toroidal simpléctico. Usando que  $Area(T^2) = (2\pi R)^2 Im\tau$ , la condición (3.27) implica que la matriz de enrollamiento  $\mathbb{W} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$  satisface:

$$n = \det\mathbb{W}, \quad (3.29)$$

(no confundir con  $W$ ). Esto es, todos los enteros  $l_s, m_s$  con  $s = 1, 2$  son admitidos con tal que ellos satisfagan la restricción (3.29).

La supermembrana con cargas centrales no triviales es invariante bajo los difeomorfismos que preservan el área homotópicos a la identidad. En particular, bajo mapas conformes que dejan invariante la base de homología sobre  $\Sigma$ . De hecho,  $d\hat{X}^r$  permanece invariante y por lo tanto la 2-forma simpléctica en  $\Sigma$ . También, la teoría es invariante bajo los difeomorfismos no homotópicos a la identidad actuando sobre la base de homología en  $\Sigma$  como transformaciones  $SL(2, \mathbb{Z})$ .

El hamiltoniano físico para la supermembrana con cargas centrales en el CCL está dado por [2, 3, 4],

$$\begin{aligned} H_{CCL} = & \int_{\Sigma} T^{-2/3}\sqrt{W} \left[ \frac{1}{2}\left(\frac{P_m}{\sqrt{W}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{P_r}{\sqrt{W}}\right)^2 + \frac{T^2}{2}\{X^r, X^m\}^2 + \frac{T^2}{4}\{X^r, X^s\}^2 \right] \\ & + \int_{\Sigma} T^{-2/3}\sqrt{W} \left[ \frac{T^2}{4}\{X^m, X^n\}^2 - \bar{\theta}\Gamma_- \Gamma_m \{X^m, \theta\} - \bar{\theta}\Gamma_- \Gamma_r \{X^r, \theta\} \right], \end{aligned} \quad (3.30)$$

sujeto a los nuevos vínculos:

$$d(P_r dX^r + P_m dX^m - \bar{\theta}\Gamma_- d\theta) = 0, \quad (3.31)$$

$$\oint_{\mathcal{C}_s} (P_r dX^r + P_m dX^m - \bar{\theta}\Gamma_- d\theta) = 0, \quad (3.32)$$

y la condición de carga central (3.27). Notemos que, comparando con el hamiltoniano (1.42), ambos son muy similares en su forma, pero en este último hay términos adicionales que incluyen las coordenadas compactificadas.

### 3.3.1. Simetrías $SL(2, \mathbb{Z})$

La supermembrana con cargas centrales tiene dos simetrías  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Una está asociada a la invariancia conforme sobre la variedad base  $\Sigma$ . Esto se debe a que los simplectomorfismos que preservan la estructura canónica simpléctica sobre  $T^2$  son entonces pull-back a los simplectomorfismos que preservan  $W$  sobre  $\Sigma$  y esto nos permite identificar los modos de enrollamiento. La otra simetría  $SL(2, \mathbb{Z})$  actúa sobre el móduli del espacio target en particular sobre la coordenada de Teichmüller  $\tau$  y además sobre el radio  $R$ , por lo que las clases de equivalencia del toro bajo esta transformación no son clases conformalmente equivalentes. Usando ambas transformaciones  $SL(2, \mathbb{Z})$ , se vio en [13] que la contribución al operador de masa de los estados de cuerdas contenidos en la supermembrana con cargas centrales, concuerdan exactamente con el espectro de masa perturbativo de las supercuerdas  $(p, q)$  *IIB* y *IIA*. A continuación veremos con más detalle estas simetrías.

#### 3.3.1.1. $SL(2, \mathbb{Z})$ de la superficie de Riemann

La supermembrana con cargas centrales es invariante bajo mapas conformes homotópicos a la identidad (mapas biholomórficos). Ellos son difeomorfismos que preservan  $d\hat{X}^r, r = 1, 2$ , las uno-formas armónicas. Entonces, el área de la métrica espacial del volumen de mundo de la supermembrana  $W$  es invariante:

$$W'(\sigma) = W(\sigma). \quad (3.33)$$

Además, la supermembrana con cargas centrales es invariante bajo difeomorfismos cambiando la base de homología, y en consecuencia cambiando las uno-formas armónicas normalizadas por una transformación modular sobre el espacio de Teichmüller de la base del toro  $\Sigma$ . De hecho, si

$$d\hat{X}^{r'}(\sigma) = S^r_s d\hat{X}^r(\sigma), \quad (3.34)$$

satisface:

$$\epsilon_{rs} S^r_t S^s_u = \epsilon_{tu}, \quad (3.35)$$

esto es,  $S \in Sp(2, \mathbb{Z}) \equiv SL(2, \mathbb{Z})$ , y por consiguiente la 2-forma simpléctica  $\omega$  permanece invariante.

Entonces se concluye que la supermembrana con cargas centrales tiene una simetría adicional con respecto a la supermembrana  $D = 11$  y a la supermembrana compactificada del sector sin cargas centrales o  $n = 0$ . Todas las transformaciones conformes sobre  $\Sigma$  son simetrías de la la supermembrana con cargas centrales [7, 9, 10, 38]. Notemos que bajo (5.7)

$$dX \rightarrow 2\pi R(l_s + m_s \tau) S^s_r d\hat{X}^r + dA, \quad (3.36)$$

donde  $A(\sigma)$  transforma como un campo escalar. Esto es,

$$\mathbb{W}' = \mathbb{W} \begin{pmatrix} S^1_1 & S^1_2 \\ S^2_1 & S^2_2 \end{pmatrix}^{-1} \quad (3.37)$$

$Sp(2, \mathbb{Z})$  actúa desde la derecha.

### 3.3.1.2. Invariancia bajo U-dualidad

La supermembrana con cargas centrales es además invariante bajo la siguiente transformación  $SL(2, \mathbb{Z})$  sobre el toro del target  $T^2$  también conocida por U-dualidad:

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad R \rightarrow R|c\tau + d|, \quad A \rightarrow Ae^{i\varphi_\tau}, \quad \mathbb{W} \rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \mathbb{W}, \quad (3.38)$$

donde  $c\tau + d = |c\tau + d|e^{-i\varphi_\tau}$  y  $\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(2, \mathbb{Z})$ . Notar que la transformación de U-dualidad para la supermembrana con cargas centrales no solo transforma los módulos sino también la fase del campo de calibre. En esta tesis hemos constatado que esta transformación del campo de calibre ha sido requisito indispensable para poder establecer la relación entre la supermembrana con cargas centrales y la supergravedades calibradas como veremos en capítulo 6.

Como se muestra en [13] la densidad hamiltoniana de la a supermembrana con cargas centrales es entonces invariante bajo (3.38). La matriz  $Sp(2, \mathbb{Z})$  actúa, ahora, desde la izquierda de la matriz  $W$ .

La acción de la matrices  $Sp(2, \mathbb{Z})$  por la izquierda y la correspondiente por la derecha no son equivalentes, sino son complementarias. Es decir, son simetrías distintas bien definidas que actúan simultáneamente sobre el hamiltoniano de la supermembrana con cargas centrales. Las siguientes observaciones son válidas. La expresión general para los mapas  $dX$  es:

$$dX = dX_h + dA, \quad (3.39)$$

donde la parte armónica de  $dX$ , se puede expresar como:

$$dX_h = 2\pi R(nd\hat{X}^1 + \tau d\hat{X}^2), \quad (3.40)$$

es una inmersión mínima de  $\Sigma$  a  $T^2$  sobre el target, además está directamente relacionado con una inmersión holomórfica de  $\Sigma$  en  $T^2$ .

La extensión de la teoría de supermembranas con el vínculo topológico asociado a enrollamiento irreducible, a sectores compactos más generales en el espacio target está directamente relacionado con la existencia de inmersiones holomórficas [38]. Por eso a la supermembrana con cargas centrales también se le denominó *supermembrana minimalmente inmersa MIM2*.

### 3.3.2. Propiedades Espectrales: Espectro Discreto

En esta sección nos referimos a la discretitud del espectro de la supermembrana con cargas centrales. Haremos un breve resumen de sus propiedades más significativas, para un análisis detallado ver trabajos originales [5, 9, 6, 7, 11, 12]. El análisis del espectro se hace a nivel del operador de Schrödinger regularizado asociado al modelo matricial de la supermembrana con cargas centrales  $\hat{H}$ , (ver [5]): En primer lugar, a diferencia de lo que ocurre para el caso de la supermembrana  $D = 11$ , o con la supermembrana compactificada en  $M_9 \times T^2$  sin la condición de cargas centrales, el potencial del operador de Schrödinger se anula solo en el origen del espacio de configuración:

$$V = 0 \rightarrow ||(X^m, A^r)|| = 0, \quad (3.41)$$

donde  $||\cdot||$  representa la norma euclídea en  $R^L$ . Es decir,  $\hat{H}$  no tiene configuraciones singulares asociadas a direcciones planas del potencial [5]. Por consiguiente, no hay configuraciones tipo cuerdas y la teoría a nivel clásico es estable. Esto es debido a que la condición de carga central implica la cancelación de un término del hamiltoniano que es una derivada total que es el responsable de la presencia de estas configuraciones.



En segundo lugar, usando un teorema de B. Simons [91], se demostró en [9] que existe una constante  $M > 0$  tal que,

$$V(X^m, A^r) \geq M ||(X^m, A^r)||^2. \quad (3.42)$$

Denotando  $(X^m, A^r) \equiv (X, A)$  y escribiendo en coordenadas polares  $X = Rx$   $A = Ra$  donde  $\theta \equiv (x, a)$  se define sobre la esfera unitaria,  $||(x, a)|| = 1$ , el potencial satisface que:

$$V(X, A) \geq MR^2. \quad (3.43)$$

El operador de Schrödinger está acotado inferiormente por un oscilador armónico pero va a infinito en todas las direcciones del espacio de configuración, por consiguiente tiene espectro discreto. Este resultado es análogo al que se obtiene al probar la discretitud del espectro de la membrana bosónica regularizada sin la condición de carga central, aunque la cota, al tratarse de hamiltonianos diferentes, no es la misma.

Además, en [10] se probó la discretitud de la parte bosónica de la supermembrana con cargas centrales a nivel exacto de la teoría, es decir sin regularizar. Este resultado implicó trabajar con infinitos grados de libertad en el que los teoremas usuales de mecánica cuántica para espacios de Hilbert finitos en general no se cumplen.

En [6, 7, 133], se demostró que el hamiltoniano supersimétrico de la supermembrana con cargas centrales es discreto. Este es un resultado notable que ha permitido a los autores interpretar este sector de la supermembrana como una teoría de primera cuantización. La demostración se basa en lo siguiente: Los autores probaron que la contribución fermiónica al potencial es una perturbación de la contribución bosónica, algo que no ocurre en general.

Para ello en [6] desarrollaron el Lemma.1 : Sean  $v_k(x)$  los autovalores de  $V(x)$ . Si todos  $v_k(x) \rightarrow +\infty$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ , entonces el espectro de  $H$  es discreto. Con el

---

operador hamiltoniano:  $H = -d^2/dx^2 + V = -\Delta + V$ . Para la demostración, en [6] se considera la resolvente de un operador  $\mu$ :

$$\mu = -\Delta + V_B \mathbb{I} + V_F, \quad (3.44)$$

definido en el espacio total de configuraciones sin vínculos, con  $V_B$ , el potencial bosónico y  $V_F$  el potencial fermiónico. Los autovalores están determinados por las soluciones de la ecuación característica, entonces  $\lambda$  debe satisfacer:

$$\det \left[ \frac{\lambda - V_B}{R} \mathbb{I} - M(x, a) \right] = 0, \quad R > 0. \quad (3.45)$$

con  $M$  homogéneo. Luego, si  $\hat{\lambda}$  son los autovalores de  $M(x, a)$ , entonces

$$\lambda = V_B(Rx, Ra) + R\hat{\lambda}. \quad (3.46)$$

En consecuencia,  $\lambda \rightarrow +\infty$  cuando  $R \rightarrow \infty$ .  $V = V_B + V_F$  es un potencial continuo, por lo que está automáticamente acotado por debajo. Esto también es cierto para el operador  $\mu$  con su dominio en el espacio de configuración completo sin tener en cuenta los vínculos, y por lo tanto también se cumple para la teoría con vínculos. Entonces, el hamiltoniano supersimétrico mantiene las propiedades de discretitud de la parte bosónica del mismo. La contribución supersimétrica cancela el punto de cero energía de los osciladores bosónicos aún en la teoría exacta [10, 81]. El operador de Schrödinger es acotado por el oscilador armónico y por tanto tiene resolvente compacta. Los autores de [6] lo generalizaron a otras teorías de mecánica cuántica matricial y obtuvieron una condición de suficiencia para asegurar que el espectro de esta teoría es discreto, resultado que utilizaron posteriormente para analizar la M5-brana y teorías tipo ABJM [132], modelos BMN y  $D2 - D0$  [11, 12].

---

## Nuevos Resultados

---

## CAPÍTULO 4

# La Supermembrana $4D$ $N = 1$ desde $11D$

En lo que sigue nos enfocaremos en el sector de la supermembrana con cargas centrales de la cual se ha hablado en preliminares. Recordemos que la condición de carga central es una condición topológica que aparece al imponer una condición irreducible sobre el sector compacto de la variedad target. La importancia de este sector es que hasta el momento presente es el único sector que puede ser definido a nivel cuántico de forma consistente y por lo tanto tiene un claro potencial interés para la fenomenología<sup>1</sup>.

El propósito de este capítulo es mostrar la construcción de la acción de la supermembrana con cargas centrales no triviales compactificada sobre un  $T^7$  y una vez obtenida analizar sus propiedades físicas. Este proceso lo haremos en dos pasos, un primero en el que compactificaremos la MIM2 en cinco dimensiones, generalizando la condición de carga central, y un segundo paso, en el que compactificaremos en el círculo restante.

---

<sup>1</sup>Posteriormente a la realización de este trabajo se demostró en [11] que la supermembrana en una pp-wave a nivel regularizado tiene espectro discreto y no solo su aproximación semiclásica. Sin embargo sus propiedades espectrales en el límite con  $N$  grande no quedan claras.

---

La acción describe una supermembrana que evoluciona en un espacio de Minkowski  $4D$ . Ésta es invariante bajo supersimetría (SUSY) con un parámetro espinorial de Majorana de 32 componentes. Sin embargo, lo que observamos es que en el caso de la supermembrana con cargas centrales esta supersimetría se rompe espontáneamente a una teoría  $N = 1$  en 4 dimensiones cuando la configuración minimal es fijada. Cuando la variedad de compactificación es una variedad isotrópica, como es el caso particular del toro  $T^7$  que estamos asumiendo, es decir, cuando todos los radios son iguales, demostramos que el potencial no tiene direcciones planas. Esto implica que dicho potencial es estable en el espacio móduli de parámetros. Los resultados de este capítulo fueron reportados en [18, 19].

### 4.1. Supermembrana $11D$ con cargas centrales sobre una variedad target $M_5 \times T^6$

En lo que sigue vamos a generalizar la acción de la supermembrana con cargas centrales que se introdujo en la sección preliminares a una espacio target  $M_5 \times T^6$ . Estamos interesados en reducir la teoría al modelo 4-dimensional, por lo que tomaremos una variedad target  $M_4 \times T^7$ . Separamos el  $T^7$  en  $T^6 \times S^1$  porque vamos a imponer la condición generalizada de cargas centrales a la subvariedad de mayor dimensión contenida en  $T^7$ , ésta se corresponde con un  $T_6$ . Los mapas de configuración  $\Sigma$  en  $T_7$  satisfacen las siguientes condiciones de enrollamiento:

$$\oint_{c_s} dX^r = 2\pi S_s^r R^r \quad r, s = 1, \dots, 6. \quad (4.1)$$

$$\oint_{c_s} dX^7 = 2\pi L_s R, \quad (4.2)$$


---

$$\oint_{c_s} dX^m = 0, \quad m = 8, 9, \quad (4.3)$$

donde  $S_s^r, L_s$  son enteros y  $R^r, r = 1, \dots, 6$  son los radios de  $T^6 = S^1 \times \dots \times S^1$ , mientras que  $R$  es el radio del  $S^1$  restante sobre el target. Estas condiciones aseguran que estamos haciendo el mapa de  $\Sigma$  sobre un sector  $\Pi_{i=1}^7 S_i^1$  de la variedad target. En lo que sigue consideraremos solamente la compactificación sobre el toro  $T^6$  para ello necesitamos generalizar la condición de carga central, que la definimos de la siguiente manera:

$$I^{rs} \equiv \int_{\Sigma} dX^r \wedge dX^s = (2\pi R^r R^s) \omega^{rs}, \quad (4.4)$$

donde  $\omega^{rs}$  es una matriz simpléctica sobre el sector  $T^6$  del target. Por simplicidad tomaremos que  $\omega^{rs}$  sea la matriz simpléctica canónica:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{pmatrix} n, \quad (4.5)$$

Esta matriz corresponde a la intersección ortogonal de tres supermembranas toroidales  $T^2$ . La dirección temporal es el espacio de intersección. La condición topológica (4.4) no cambia las ecuaciones de campo del hamiltoniano (1.42) restringidos por los vínculos (1.43) y (1.44). De hecho, cualquier variación de  $I^{rs}$  bajo un cambio  $\delta X^r$ , univaluada sobre  $\Sigma$ , es idénticamente cero. Además de las ecuaciones de campo obtenidas de (1.42), las configuraciones clásicas deben satisfacer la condición (4.4). Ésta es solamente una restricción topológica sobre el conjunto original de soluciones clásicas de las ecuaciones de campo. En la teoría cuántica, el espacio de las configuraciones físicas está además restringida por la condición (4.4). La interpretación geométrica de esta condición fue discutida en trabajos anteriores [2, 3].

Observemos que (4.4) solo restringe los valores de  $S_s^r$ , los cuales son ya números enteros por (4.1).

Consideraremos a continuación el mapa más general que satisface la condición (4.4). Para ello hacemos una descomposición de Hodge de una uno-forma cerrada  $dX^r$  en una parte armónica y una parte exacta, como en casos anteriores:

$$dX^r = M_s^r d\hat{X}^s + dA^r, \quad (4.6)$$

donde  $d\hat{X}^s$ ,  $s = 1, \dots, 2g$  es una base de uno-formas armónicas sobre  $\Sigma$ . Se puede normalizar esta base seleccionando una base canónica de homología e imponiendo:

$$\oint_{c_s} d\hat{X}^r = \delta_s^r. \quad (4.7)$$

Ahora, consideraremos una superficie de Riemann con una clase de base canónica equivalente. La condición (4.1) determina:

$$M_s^r = 2\pi R^r L_s^r. \quad (4.8)$$

Con  $dA^r$  una uno-forma exacta. A continuación se impone la condición (4.4) y se obtiene:

$$S_t^r \omega^{tu} S_u^s = \omega^{rs}, \quad (4.9)$$

esto es,  $S \in Sp(6, \mathbb{Z})$ . Este es el mapa más general que satisface (4.4). Notar que el grupo de simplectomorfismos ya no coincide con el grupo de difeomorfismos que preserva la base que es  $SL(2, \mathbb{Z})$ .

La elección natural para  $\sqrt{W(\sigma)}$  en este marco geométrico es considerarla como la densidad obtenida del pull-back de la 2-forma de Khäler sobre  $T^6$  en términos de la forma simpléctica anteriormente introducida. Entonces definimos:

$$\sqrt{W(\sigma)} = \frac{1}{2} \partial_a \hat{X}^r \partial_b \hat{X}^s \omega_{rs}. \quad (4.10)$$

---

La  $\sqrt{W(\sigma)}$  es entonces invariante bajo el cambio:

$$d\widehat{X}^r \rightarrow S_g^r d\widehat{X}^s, \quad S \in Sp(2g, Z), \quad (4.11)$$

Pero, éste es justo el cambio sobre la base canónica de uno-formas armónicas cuando un mapa biholomórfico en  $\Sigma$  es hecho cambiando la base canónica de homología. Entonces, concluimos que la teoría es invariante no solo bajo los difeomorfismos generados por  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , sino además bajo los difeomorfismos, mapas biholomórficos, que cambian la base canónica de homología por una transformación modular.

La teoría de supermembranas con cargas centrales en el CCL que hemos construido, depende entonces del espacio de móduli de las superficies de Riemann compactas  $M_g$  solamente. Ella puede ser definida sobre las clases equivalentes conformes de superficies de Riemann compactas.

Comparte esta propiedad con la teoría de cuerdas, aunque al estar la teoría de la supermembrana restringida por los vínculos que preservan el área, hay difeomorfismos que preservan el área que no son mapas conformes. Además, la supermembrana depende del móduli identificando la inmersión holomórfica desde el  $M_g$  a la variedad target. Este es un espacio de móduli interesante que ya ha sido considerado en un contexto diferente en [134].

Identificada la invariancia modular de la teoría, se puede regresar a la expresión general de  $dX^r$ , y podemos siempre considerar una base canónica de tal modo que:

$$dX^r = R^r d\widehat{X}^r + dA^r, \quad (4.12)$$

haciendo explícita la dependencia de los radios. Debido a que estamos en dimensión impar no haremos uso de las definiciones estándar de la formulación compleja de los móduli geométricos para caracterizar la variedad de compactificación. Los correspondientes grados de libertad son descritos exactamente por los campos univaluados  $A^r$ .

---



Después de reemplazar esta expresión en el hamiltoniano (1.42) y siguiendo todo el proceso indicado en [3], obtenemos:

$$\begin{aligned}
 H = & \int_{\Sigma} \sqrt{W} d\sigma^1 \wedge d\sigma^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{P_m}{\sqrt{W}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Pi_r}{\sqrt{W}} \right)^2 + \frac{1}{4} \{X^m, X^n\}^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{D}_r X^m)^2 + \frac{1}{4} (\mathcal{F}_{rs})^2 + \right. \\
 & + \int_{\Sigma} \mathcal{F} + (2\pi)^4 (R^r R^s)^4 \int_{\Sigma} \sqrt{W} (D_r \hat{X})^2 + \Lambda (\mathcal{D}_r (\frac{\Pi_r}{\sqrt{W}}) + \{X^m, \frac{P_m}{\sqrt{W}}\}) \\
 & \left. + \int_{\Sigma} \sqrt{W} [-\bar{\theta} \Gamma_- \Gamma_r \mathcal{D}_r \theta] + \bar{\theta} \Gamma_- \Gamma_m \{X^m, \theta\} + \Lambda \{\bar{\theta} \Gamma_-, \theta\} \right],
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

donde  $\mathcal{D}_r X^m = D_r X^m + \{A_r, X^m\}$ ,  $\mathcal{F}_{rs} = D_r A_s - D_s A_r + \{A_r, A_s\}$ ,  $D_r = 2\pi R^r \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{W}} \partial_a \hat{X}_r \partial_b$ .  $P_m$  y  $\Pi_r$  son los momentos conjugados a  $X^m$  y  $A_r$  respectivamente.  $\mathcal{D}_r$  y  $\mathcal{F}_{rs}$  son la derivada covariante y curvatura de una teoría simpléctica no conmutativa [3, 9], construida a partir de la estructura simpléctica  $\frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{W}}$  introducida por la carga central. Esta es la estructura de la supermembrana con cargas centrales donde se ha generalizado el número de componentes. Tomaremos la integral de la curvatura como cero y el término de volumen corresponde al valor del hamiltoniano en su estado fundamental. El último término representa su extensión supersimétrica en términos de los espinores de Majorana. Los grados de libertad físicos de la teoría son los  $X^m, A_r, \Psi_\alpha$ , que son campos univaluados sobre  $\Sigma$ .

En [38] un sector de la supermembrana con cargas centrales compactificado sobre  $T^4$  fue analizado. Su hamiltoniano fue expresado en términos de un marco diferente para el sector compactificado sobre el toro  $T^4$ . En ese caso el pull-back se hizo directamente con los modos armónicos  $d\hat{X}^r$ , mientras que en la presente formulación la métrica sobre ese sector es  $\delta_{rs}$  y el pullback debería ser hecho con  $G^{1/2} d\hat{X}$ ,  $G$  es la matriz constante introducida en [38]. En ambos casos la misma densidad escalar  $\sqrt{W(\sigma)}$  es obtenida.

## 4.2. Compactificación sobre el $S^1$ restante

El análisis de la compactificación sobre el  $S^1$  restante puede ser realizado directamente en el formalismo descrito antes o bien considerando su formulación dual en términos de los campos de calibre  $U(1)$ . Se discutirán ambas aproximaciones.

En el primer caso, caso directo, podemos resolver la condición de enrollamiento (4.2), y obtener:

$$dX^7 = RL_s d\hat{X}^s + d\hat{\phi}, \quad (4.14)$$

donde  $d\hat{\phi}$  es una uno-forma exacta y  $d\hat{X}^s$ , como antes son la base de 1-formas armónicas sobre  $\Sigma$ . Para el análisis sobre la discretitud es más conveniente expresar  $dX^7$  en términos de la solución del laplaciano covariante sobre  $\Sigma$ :

$$\mathcal{D}_r \mathcal{D}_r \tilde{X} = 0, \quad (4.15)$$

donde  $\mathcal{D}_r$ ,  $r = 1, \dots, 6$  fueron definidos en la sección previa. Hay 6 soluciones independientes de (4.15). De hecho,  $d\tilde{X}$  es necesariamente una combinación lineal de la base de 1-formas armónicas más las uno-formas exactas. Para cada  $d\hat{X}^s$  existe un único  $\phi^s$ , univaluado sobre  $\Sigma$  tal que se satisface:

$$D_r D_r \hat{X}^s + D_r D_r \phi^s = 0. \quad (4.16)$$

La solución más general para  $\tilde{X}_1$  que satisface  $D_r D_r \tilde{X}_1 = 0$  es entonces,

$$d\tilde{X}_1 = L_s (d\hat{X}^s + d\phi^s), \quad (4.17)$$

puesto que la única solución en términos de las formas puramente exactas es la trivial. Notemos además que  $d\hat{X}^s + d\phi^s$  con  $s = 1, \dots, 6$  son linealmente independientes. La solución más general para  $\mathcal{D}_r \mathcal{D}_r \tilde{X} = 0$ , es de la misma forma (4.17), ya que todas

las contribuciones nuevas a la solución son exactas. Podemos reescribir (4.14) en la forma:

$$dX^7 = RL_s d\tilde{X}^s + d\phi, \quad (4.18)$$

Notemos que  $L_s$  son iguales a los introducidos en (4.8). El único cambio está en las 1-formas exactas.

Podemos ahora analizar la contribución de los campos  $dX^7$  al hamiltoniano. Adicionalmente a sus momentos conjugados, los cuales aparecen cuadráticamente, tenemos una contribución extra al potencial:

$$V_7 = \langle (\mathcal{D}_r X^7)^2 + \{X^m, X^7\}^2 \rangle = \langle (L_s \mathcal{D}_r \tilde{X}^s)^2 + (\mathcal{D}_r \phi)^2 + \{X^m, X^7\}^2 \rangle, \quad (4.19)$$

donde hemos usado explícitamente (4.15). Entonces, obtenemos el límite inferior:

$$V_7 \geq \langle (\mathcal{D}_r \phi)^2 + \{X^m, X^7\}^2 \rangle \geq (\mathcal{D}_r \phi)^2, \quad (4.20)$$

el cual directamente muestra que el enrollamiento correspondiente a  $dX^7$  no afecta las propiedades cualitativas del espectro de (4.13) dado que se pueden usar los teoremas de discretitud previamente explicados.

Ahora, construiremos por completitud la formulación dual a (4.13), cuando  $dX^7$  está restringida por la condición (4.2) asegurando que  $X^7$  toma valores sobre  $S^1$  (ver apéndice C), obteniéndose:

$$\mathcal{L} = p_I \dot{X}^I + p \dot{X} - \mathcal{H}(p_I, X^I, p, X), \quad (4.21)$$

donde

$$\oint_{C_s} dX = RL_s, \quad (4.22)$$

y la dependencia sobre  $X$  es solamente a través de sus derivadas  $\partial_\lambda X$  con  $\lambda = 0, a$ , y  $a = 1, 2$  a está etiquetando las coordenadas espaciales construimos,

$$\langle \hat{\mathcal{L}} + W_\lambda F_{\mu\nu} \epsilon^{\lambda\mu\nu} \rangle, \quad (4.23)$$

donde

$$\widehat{\mathcal{L}} = p_I \dot{X}^I + p W_0 - \mathcal{H}(p_I, X^I, p, W_a), \quad (4.24)$$

la eliminación de  $W_0$ , a través de su ecuación de campo o directamente de la integral gaussiana en la integración funcional, produce la acción dual:

$$\widetilde{\mathcal{L}} = p_I \dot{X}^I + \Pi^a \dot{A}_a + A_0 \partial_a \pi^a - \mathcal{H}(p_I, X^I, F_{ab} \epsilon^{ab}, -\frac{1}{2} \epsilon_{ba} \Pi^b). \quad (4.25)$$

Esta es ya una formulación canónica del hamiltoniano. El nuevo hamiltoniano es obtenido del original haciendo las sustituciones antes mencionadas. Nótese que no hay suposiciones sobre la estructura de  $\mathcal{H}$ , la cual no es necesariamente cuadrática. En nuestro caso particular la dependencia de  $p$  y  $W_a$  es cuadrática. La condición (4.22) se transforma en

$$\oint_{C_s} (-\frac{1}{2} \epsilon_{ba} \Pi^b) d\sigma^a = \frac{1}{R} m_s, \quad (4.26)$$

donde  $m_s$  son enteros.

Notemos que el campo  $A_s$  asociado a la compactificación de la supermembrana  $x^7$  no es una conexión en un fibrado lineal sobre  $\Sigma$ . De hecho, la condición:

$$\int_{\Sigma} F_{ab} d\sigma^a \wedge d\sigma^b = 2\pi n, \quad (4.27)$$

no necesariamente es satisfecha. Para tener una conexión en el fibrado lineal sobre  $\Sigma$  se debe requerir un tiempo euclídeo periódico sobre la formulación de la integral funcional. En ese caso la condición (4.2), donde ahora la base de la homología uno-dimensional incluye el  $S^1$  adicional, asegurando que  $F_{mn}$  es la curvatura de una uno-forma de conexión sobre la variedad base de tres dimensiones. Bajo esta suposición la condición (4.2) para cualquier  $L_s$  implica la suma sobre todos los fibrados principales  $U(1)$ . La contribución de esta suma de la función de partición es una función  $\theta$  generalizada [134] que surge de la evaluación de la acción abeliana sobre las configuraciones mínimas, esto es, soluciones tipo monopolos [135].

La expresión final de la formulación dual de (4.13) cuando  $X^7$  es enrollada sobre un  $S^1$ , condición (4.2), es:

$$\begin{aligned}
H_d = & \int_{\Sigma} \sqrt{W} d\sigma^1 \wedge d\sigma^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{P_m}{\sqrt{W}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Pi^r}{\sqrt{W}} \right)^2 + \frac{1}{4} \{X^m, X^n\}^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{D}_r X^m)^2 + \right. \\
& + \frac{1}{4} (\mathcal{F}_{rs})^2 + \frac{1}{2} \left( F_{ab} \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{W}} \right)^2 + \frac{1}{8} \left( \frac{\Pi^c}{\sqrt{W}} \partial_c X^m \right)^2 + \frac{1}{8} [\Pi^c \partial_c (\hat{X}_r + A_r)]^2 + \\
& + \Lambda \left( \left\{ \frac{P_m}{\sqrt{W}}, X^m \right\} - \mathcal{D}_r \left( \frac{\Pi^r}{\sqrt{W}} \right) - \frac{\Pi^c}{2\sqrt{W}} \partial_c \left( F_{ab} \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{W}} \right) \right) + \lambda \partial_c \Pi^c + \\
& \left. + \int_{\Sigma} \sqrt{W} [-\bar{\theta} \Gamma_- \Gamma_r \mathcal{D}_r \theta + \bar{\Gamma}_- \Gamma_m \{X^m, \theta\} + 1/2 \bar{\theta} \Gamma_7 \Pi^b \partial_b \theta] + \Lambda \{\bar{\theta} \Gamma_-, \theta\} \right]. \quad (4.28)
\end{aligned}$$

El término:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left( \frac{P_m}{\sqrt{W}} \right)^2 + \frac{1}{4} \{X^m, X^n\}^2 + \frac{1}{2} \left( F_{ab} \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{W}} \right)^2 + \frac{1}{8} \left( \frac{\Pi^c}{\sqrt{W}} \partial_c X^m \right)^2 + \\
& + \Lambda \left( \left\{ \frac{P_m}{\sqrt{W}}, X^m \right\} - \frac{1}{2} \Pi^c \partial_c \left( F_{ab} \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{W}} \right) \right) + \lambda \partial_c \Pi^c, \quad (4.29)
\end{aligned}$$

describe la densidad canónica de una teoría de tipo Dirac-Born-Infeld en términos de  $G_{ab} = \partial_a X^m \partial_b X^m$  y  $F_{ab}$ . En la teoría completa con el hamiltoniano  $H_d$ , hay términos adicionales de interacción que describen el acoplamiento al sector enrollado sobre un  $T^6$ . Consideramos la M2 con todas las configuraciones físicas enrolladas de un modo irreducible sobre un espacio target  $T^6 \times S^1$ . Si a continuación se toma el sector compactificado del target como  $T^7 = (S^1)^7$ , se deberían entonces considerar todas las posibles descomposiciones de la forma  $T^6 \times S^1$ . Entonces, el espacio de Hilbert de las configuraciones físicas es ampliado al tomar en cuenta todas las posibles inmersiones holomórficas y sus correspondientes estados físicos en términos de campos univaluados sobre la variedad base, como se explicó en la sección 2. El rompimiento de la supersimetría inducido por el estado base se sigue de la misma manera.

### 4.3. $N = 1$ supersimetría

La condición topológica asociada a la carga central determina una inmersión homomórfica minimal desde la  $g$ -superficie de Riemann a la variedad target  $2g$ -toro. Esta inmersión minimal está directamente relacionada al estado BPS que minimiza el hamiltoniano. Cuando comenzamos con el  $g = 1$  y  $T^2$  sobre el espacio target, el estado base preserva  $\frac{1}{2}$  de la supersimetría original con el parámetro espinorial un espinor de Majorana de 32 componentes. Cuando consideramos nuestra construcción para toros sobre el target  $T^4, T^6$  con  $g = 2, 3$ , el análisis de la preservación de la supersimetría es exactamente el mismo a cuando consideramos intersecciones ortogonales de 2-branas con la dirección temporal como la dirección de intersección. La supersimetría del estado base preserva  $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$  de la supersimetría original. El estado base en todos esos casos corresponde a:

$$\theta = 0, \quad X^m = 0, \quad X_i^r = \widehat{X}_i^r. \quad (4.30)$$

La preservación del estado base implica el rompimiento de la supersimetría. En el CCL, terminamos cuando  $g = 3$  con  $\frac{1}{8}$  de la supersimetría original, esto es un parámetro de Grassmann complejo correspondiente a un multiplete  $N = 1$  de supersimetría en el cono de luz.

La acción es invariante bajo supersimetría en el cono de luz. Hay una clase completa de mínimos para el hamiltoniano, correspondiente a:

$$\begin{aligned} \theta &= \epsilon_1 + \epsilon_2, \\ X^r &= \widehat{X}^r + i\bar{\epsilon}_2 \Gamma \epsilon_1, \\ X^m &= i\bar{\epsilon}_2 \Gamma^m \epsilon_1. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Sin embargo, cuando el vacío es fijado espontáneamente a uno de ellos, la supersimetría se rompe a  $N = 1$  a nivel cuántico cuando el target es  $M_5 \times T^6$ . Posteriormente,

---

no hay rompimiento de susy cuando se compactifica el  $S^1$  adicional para obtener un target  $M_4 \times T^7$  dado que no hay modificaciones de la condición de carga central generalizada.

#### 4.4. Discretitud del espectro

Consideraremos un procedimiento de fijación de calibre sobre una formulación BFV de la teoría. Varias condiciones de calibre son apropiadas para analizar cualitativamente las propiedades del espectro. Podemos imponer como en ([6, 9]) una selección de calibre una vez que una base normal de funciones sobre  $\Sigma$  se introduce en la teoría. Podríamos también considerar la condición de calibre de Coulomb  $D_r A_r = 0$ . Podemos resolverla en términos de modos longitudinales y transversos de la manera usual, junto con la resolución de los vínculos de primera clase, el vínculo de Gauss. En este caso, una vez que todo el hamiltoniano canónico es expresado en términos de los modos canónicos transversos, uno de ellos tiene una expresión complicada asociada al cuadrado del momento después de desacoplar el término longitudinal. Este es de la forma:

$$D_r \Pi^L D_r \Pi^L, \quad (4.32)$$

donde  $\Pi^L$  es la parte longitudinal del momento  $\Pi_r$ , y  $\Pi^L$  tiene que ser reemplazado por la solución de los vínculos. En lo que sigue podemos eliminar este término positivo, ya que la discretitud del operador de límite inferior asegura la misma propiedad del hamiltoniano original. Este argumento fue usado en [9].

Podríamos además considerar una condición de fijación de calibre:

$$\chi \equiv a D_r A_r + B, \quad (4.33)$$


---

donde  $B$  es el transformado BRST del campo antighost mientras que  $a$  es un número real que puede ser seleccionado de modo de cancelar la contribución  $(D_r A_r)^2$  del término  $\mathcal{F}^2$  en el hamiltoniano. Después de la redefinición de  $B$ , éste se desacopla de la integral funcional, finalizamos con una formulación canónica en términos del cuadrado de todos los momentos junto con los términos cuadráticos de masa para cada modo en la formulación. Un importante aspecto para mencionar es que en todos esos casos los campos ghost no se desacoplan de la acción, sin embargo las contribuciones son siempre lineales en las variables de la configuración. El teorema 2 en [7] asegura que esta contribución ghost no cambia las propiedades de discretitud de la formulación canónica. La discusión de las propiedades espectrales del hamiltoniano es bastante simplificada por estas consideraciones. Podemos reducir los grados de libertad físicos o podemos ampliar el espacio de fase como en el formalismo canónico BFM, en ambos casos el análisis se reduce a un operador Schröendiger con términos cuadráticos de masa y potencial positivo. Podemos considerar, por ejemplo, usando (4.20):

$$\begin{aligned} \hat{H}_B = \int_{\Sigma} \sqrt{W} & \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{P_m}{\sqrt{W}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{P}{\sqrt{W}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Pi^r}{\sqrt{W}} \right)^2 + \frac{1}{4} \{X^m, X^n\}^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \{X^m, X^7\}^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{D}_r X^m)^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{D}_r \phi)^2 + \frac{1}{4} (\mathcal{F}_{rs})^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{D}_r A_r)^2 \right], \end{aligned} \quad (4.34)$$

donde  $P$  es el momento conjugado de  $\phi$ , la contribución de la compactificación sobre  $S^1$ . Este hamiltoniano es exactamente de la forma considerada en [6, 7, 9]. Entonces, para poder aplicar los resultados allí desarrollados y estudiar en detalle sus propiedades espectrales, obtenemos una versión matricial (regularizada) del hamiltoniano [5].

Consideramos, del modo usual, una descomposición de todos los campos escalares sobre  $\Sigma$  en términos de una base discreta ortonormal  $Y_A(\sigma^1, \sigma^2)$ . Es relevante en esta



---

línea de trabajo considerar una superficie de Riemann compacta y cerrada  $\Sigma$ :

$$\begin{aligned} X^m(\sigma^1, \sigma^2, \tau) &= X^{mA}(\tau) Y_A(\sigma^1, \sigma^2), \\ A_r(\sigma^1, \sigma^2, \tau) &= A_r^A(\tau) Y_A(\sigma^1, \sigma^2), \\ \phi(\sigma^1, \sigma^2, \tau) &= \phi^A(\tau) Y_A(\sigma^1, \sigma^2). \end{aligned} \quad (4.35)$$

El corchete simpléctico es además un escalar sobre  $\Sigma$ , por consiguiente éste debe ser reescrito en términos de la base:

$$\{Y_A, Y_B\} = f_{AB}^C Y_C, \quad (4.36)$$

después de definir:

$$\int_{\Sigma} Y_A Y_B = \eta_{AB}. \quad (4.37)$$

Obtenemos:

$$\int_{\Sigma} \{Y_A, Y_B\} Y_C = f_{ABC}, \quad (4.38)$$

$f_{ABC}$  son en consecuencia completamente antisimétricas.  $f_{AB}^C$  son las constantes de estructura de los difeomorfismos que preservan el área. Entonces, se reemplazan esas expresiones en la densidad hamiltoniana y se integra la dependencia  $\sigma^1, \sigma^2$ . Se obtiene una formulación del operador en términos de los modos dependientes de  $\tau$  solamente. Consideramos el truncamiento del operador, esto es restringimos el rango de los índices  $A, B, C$  a un conjunto finito  $N$  e introduce constantes  $f_{AB}^{NC}$  tal que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_{AB}^{NC} = f_{AB}^C. \quad (4.39)$$

En [35, 36],  $f_{AB}^{NC}$  son las constantes de estructura de  $SU(N)$ , esto es la teoría truncada tiene además simetría de calibre. En [6] para la supermembrana con cargas centrales compactificada sobre un  $T^2$  la teoría truncada en términos de las constantes de estructura de  $SU(N)$  tiene además una simetría de calibre. El álgebra de los vínculos de primera clase en ambos casos es la misma. Sin embargo, en la prueba de discretitud

---

del espectro en [6] las propiedades algebraicas de  $f_{AB}^{N\ C}$  no juegan ningún papel. Entonces, continuamos con el análisis del espectro del operador de Schrödinger truncado asociado a  $\hat{H}$  sin otros requerimientos sobre las constantes  $f^N$ :

i) El potencial del operador de Schrödinger solamente se anula en el origen del espacio de configuración:

$$V = 0 \rightarrow ||(X, A, \phi)|| = 0, \quad (4.40)$$

donde  $||\cdot||$  denotando la norma euclídea en  $R^L$ . Nótese que el hamiltoniano original así como  $\hat{H}_B$  están definidos sobre los campos salvo constantes.

ii) Existe una constante  $M > 0$  tal que:

$$V(X, A, \phi) \geq M ||(X, A, \phi)||^2. \quad (4.41)$$

Otra vez, este límite surge de consideraciones muy generales. De hecho, escribiendo  $(X, A, \phi)$  en coordenadas polares:

$$X = Rx, \quad A = Ra, \quad \phi = R\varphi, \quad (4.42)$$

donde  $\theta \equiv (x, a, \varphi)$  está definida en la esfera unidad,  $|(x, a, \varphi)| = 1$ , obtenemos:

$$V(X, A, \phi) = R^2 P_\theta(R), \quad (4.43)$$

donde:

$$P_\theta(R) = R^2 k_1(\theta) + R k_2(\theta) + k_3(\theta) > 0, \quad (4.44)$$

con  $k_3(\theta) > 0$ ,  $k_1(\theta) \geq 0$  y  $k_1(\theta) = 0 \Rightarrow k_2(\theta) = 0$ . Entonces, definimos:

$$\mu(\theta) = \min_R P_\theta(R), \quad (4.45)$$

que es continuo en  $\theta$  y  $\mu(\theta) > 0$ . Usando que la esfera unidad es compacta se obtiene:

$$V(X, A, \phi) = R^2 P_\theta(R^2) \geq R^2 \min P_\theta = M R^2. \quad (4.46)$$

---

Entonces, el operador de Schrödinger está limitado por un oscilador armónico. En consecuencia tiene una resolvente compacta. Usamos el teorema 2 [7] para mostrar que: i) las contribuciones ghost y antighost a la acción efectiva, ii) la contribución fermiónica al hamiltoniano supersimétrico, no cambian las propiedades cualitativas del espectro del hamiltoniano. De hecho, ambas contribuciones son lineales en las variables de configuración.

Adicionalmente, la contribución supersimétrica cancela la energía del punto cero de los osciladores bosónicos aún en la teoría exacta [10, 81]. Se ha mostrado entonces, que el hamiltoniano regularizado compactificado sobre el espacio target  $M_4 \times T^6 \times S^1$  tiene una resolvente compacta y por consiguiente tiene un espectro discreto con multiplicidad finita. Esperamos que el mismo resultado sea válido para la teoría exacta.

## 4.5. Otras Propiedades Físicas

Hasta ahora hemos visto que la acción de la supermembrana  $N = 1$  en 4 dimensiones tiene un espectro discreto regularizado. Una de las características de la teoría es que debido a la condición topológica los campos adquieren masa. Estos hechos representan una alternativa al mecanismo de Higgs como mecanismo para generar masa, ya que no hay ninguna partícula de Higgs involucrada<sup>2</sup> sino que la masa se genera dinámicamente por efecto de la condición de carga central. Existen varios mecanismos en la literatura generadores de masa [136, 137]. Debido a que nuestro mecanismo no corresponde estrictamente hablando a ninguno de ellos, aunque tienen algunos aspectos parecidos, explicaremos el nuestro brevemente para mayor claridad.

---

<sup>2</sup>Recientemente se ha encontrado en el LHC una resonancia de  $125 GeV$  cuyas propiedades parecen corresponder a la esperada para la partícula de Higgs [138].

---

---

En el mecanismo nuestro, los campos de la teoría  $X^m, A_r, \phi, \theta$  adquieren masa vía los campos vectoriales  $\widehat{X}_r$  definidos sobre la supermembrana. Puesto que esos campos no viven en el espacio target no hay violación de la invariancia de Lorentz. Esto se asemeja al mecanismo de Scherk-Schwarz que induce una monodromía sobre los campos que hacen que éstos se vuelvan masivos.

Una posible pregunta extra es el análisis de la estabilización de los móduli. Estos son los campos escalares sin masa que pueden parametrizar la geometría compactificada así como a diferentes sectores de materia. Pueden ser distinguidos dos tipos de móduli: el cuántico y el clásico. El móduli cuántico de la teoría, en general no es conocido aunque existen algunas aproximaciones para sistemas en los cuales un grupo diferente de esos móduli muestran la interpolación entre diferentes vacíos con diferentes grupos de calibre [139]. Como hemos enfatizado a lo largo del texto, la teoría de supermembranas cuánticas con cargas centrales que hemos construido depende entonces del espacio móduli de superficies de Riemann compactas  $M_g$  solamente. La teoría está definida sobre las clases equivalentes conformes de superficies de Riemann compactas, y además depende del móduli identificando la inmersión holomórfica desde  $M_g$  a la variedad de target.

Generalmente, el análisis de los campos móduli se hace a nivel clásico desde el punto de vista de supergravedad, donde estos móduli son supercampos y no parámetros. Esto ha sido hecho en potenciales  $4D$  efectivos en aproximaciones de supergravedad de acciones inspiradas en la teoría M. El potencial de Kähler está expresado en términos de ellos [140]. Puesto que nuestro estudio es a nivel de la supermembrana, esos términos no aparecen, sin embargo la acción posee escalares y parámetros de la variedad compacta que pueden generar direcciones planas en el potencial. Podemos distinguir entre dos tipos de campos escalares, aquellos asociados a la posición de la

---

---

supermembrana en las dimensiones transversas, -análogo a lo que en teoría de cuerdas representa el móduli de cuerda abierta- y los escalares cuyos vevs parametrizan la variedad compacta - análogo a lo que en teoría de cuerdas representa el móduli de la cuerda cerrada-.

Vamos a analizar de manera separada los dos tipos de móduli clásicos. Este análisis desacoplado es solo justificado si y solo si las escalas de estabilización (las masas del móduli) son claramente diferentes, de otro modo la minimización con respecto al conjunto completo de móduli (origen geométrico y de materia) deben ser realizados. Un análisis exhaustivo de este hecho va más allá del alcance de este artículo. Sin embargo, algunas consideraciones pueden hacerse:

A nivel clásico el comportamiento de la teoría es conocido. La teoría no contiene ninguna configuración tipo cuerda. Supondremos por el momento una variedad compacta cuyos radios  $R_1, \dots, R_7$  están fijos. Los  $X^m$  que parametrizan la posición en las dimensiones transversas de la supermembrana adquieren masa debido a la condición de carga central así que no hay direcciones planas en la pieza escalar del potencial. La componente número 7 tiene un efecto inducido debido a la condición de carga central a través del acoplamiento cuadrático con los campos de calibre simplécticos  $A_r$  y además gana una masa efectiva. Todos esos tipos de móduli se convierten en estables.

Hasta ahora, hemos considerado que el 7-toro es rígido, de tal modo que los  $R_1 \dots, R_7$  son dejados fijos y ellos no aparecen en la métrica y corresponderían al móduli de la cuerda cerrada. Si ahora se relaja esta condición y se dejan que ellos varíen muy suavemente, nos podemos preguntar si, en principio es posible obtener un mínimo. Un argumento heurístico para apoyar la estabilización del móduli es la siguiente: Tratamos en nuestra construcción con fibrados de calibre no triviales cuyas

---

intensidades de campo asociados pueden ser representados como flujos del volumen-mundo [12]. Ya que para la construcción el mapa representa una inmersión mínima sobre el espacio target, ellos inducen un efecto similar al producido por una calibración generalizada. Las calibraciones minimales además toman en cuenta la dependencia sobre la variedad base, la superficie de Riemann seleccionada  $\Sigma$ . La condición de la calibración generalizada - la cual muestra la deformación de los ciclos que son enrollados por la supermembrana- representa una condición para minimizar la energía [141]. Sucede igual con las inmersiones minimales. Para un flujo inducido dado, se puede esperar que el volumen sea fijado. La supermembrana con cargas centrales está enrollada en el 7-toro con la máxima cantidad de monopolos inducidos sobre él, así que, es lógico esperar que el el móduli geométrico total será estabilizado.

Ilustraremos ésto, con el caso particular de un toro isotrópico, esto es,  $R_1 = \dots = R_7 = R_0$ . Entonces, obtenemos en  $\hat{H}_B$ , la siguiente expresión:

$$V = A + BR_0 + CR_0^2 + DR_0^4, \quad (4.47)$$

donde  $A \geq 0$ ,  $C \geq 0$  y  $D > 0$ , con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\Sigma} \sqrt{W} \left[ \frac{1}{4} \{X^m, X^n\}^2 + \frac{1}{4} \{X^m, \phi\}^2 + \frac{1}{2} \{A_r, X^m\}^2 + \frac{1}{2} \{A_r, \phi\}^2 + \{A_r, A_s\}^2 \right]. \\ B &= \int_{\Sigma} \sqrt{W} \left[ \frac{1}{2} \{X^m, L_s \tilde{X}^s\} \{X^m, \phi\} + D_r X^m \{A_r, X^m\} + D_r \phi \{A_r, \phi\} \right] + \\ &\quad + \int_{\Sigma} \sqrt{W} \left[ \frac{1}{2} (D_r A_s - D_s A_r) \{A_r, A_s\} \right]. \\ C &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sqrt{W} \left[ (D_r X^m)^2 + (D_r \phi)^2 + (D_r A_s)^2 + \{X^m, \hat{X}^s L_s\}^2 \right]. \\ D &= \frac{1}{4} \int_{\Sigma} \sqrt{W} \{ \hat{X}^r, \hat{X}^s \}^2, \end{aligned} \quad (4.48)$$

donde hemos extraído el factor  $R_0$  de las expresiones de la derivada  $D_r$ .

Los términos de masa cuadráticos contribuyen a la expresión de  $C$ .  $C$  es cero si y solo si  $(X^m, \phi, A_s)$  son constantes, en la clase de equivalencia de cero. Obtenemos

el potencial:

$$\frac{d^2V}{dR_0^2} = 2C + 12DR_0^2 > 0, \quad (4.49)$$

así el problema es siempre estable con respecto a las variaciones de  $R$ . Podemos tener dos posibles mínimos: un mínimo centrado en  $R_0 = 0$ , o un mínimo para  $R_0 \neq 0$ . El potencial es globalmente estable con respecto al módulo  $R_0$ .

El análisis de los casos de compactificaciones toroidales con radios todos diferentes, que claramente es el indicado para obtener un modelo más realista, es mucho más complejo. Es necesario un estudio más exhaustivo que está fuera del objetivo de esta tesis.

## 4.6. Conclusión

Hemos obtenido la acción de la supermembrana  $D = 11$  compactificada sobre  $T^7$  con cargas centrales no triviales inducidas por una condición topológica invariante bajo transformaciones supersimétricas y de simetría kappa. Para poder imponer la condición de carga central se descompuso la variedad del 7-toro en un  $T^6 \times S^1$  y se obtuvo la formulación de la MIM2 en dicho  $T^6$  y posteriormente se compactificó en un círculo extra. Además, también se obtuvo la formulación dual sobre este último círculo.

El hamiltoniano de la MIM2 en el CCL es invariante bajo las transformaciones conformes sobre la variedad base que es una superficie de Riemann. La susy es rota espontáneamente por el vacío a  $1/8$  de la original. Este corresponde en  $4D$  a tener  $N = 1$ . Clásicamente el hamiltoniano no contiene configuraciones singulares y a nivel cuántico el hamiltoniano regularizado tiene un espectro discreto, con multiplicidad

---

finita. Su resolvente es compacto. El potencial no contiene ninguna dirección plana en el espacio de configuración ni en el espacio de parámetros de móduli (para el caso de un 7-toro isótropo). El hamiltoniano es estable en ambos espacios.

---



## CAPÍTULO 5

---

# La Supermembrana como un Fibrado Toroidal Simpléctico

---

En este capítulo se formula globalmente *la supermembrana con cargas centrales* compactificada en un espacio target  $M_9 \times T^2$ . La estructura local de esta supermembrana ya ha sido estudiada y dichos resultados los hemos descrito brevemente en la sección 3.3 de esta tesis. Los resultados de este capítulo fueron reportados en [17].

A continuación se mostrará que globalmente la supermembrana con cargas centrales se corresponde a secciones de un fibrado toroidal simpléctico con monodromía no trivial en  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Esta construcción nos va a permitir en el capítulo 6 obtener una clasificación de todas las supermembranas mostrando en términos de fibrados las simetrías discretas asociadas a las monodromías en  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Luego, este resultado junto con los del capítulo 7 conducen, de forma natural, a interpretar la teoría de la supermembrana con cargas centrales como el origen en teoría M del calibrado de las teorías efectivas de cuerdas de tipo II.

## 5.1. Introducción

Los efectos no perturbativos, tales como monopolos e instantones en las teorías de calibre convencionales, o las dualidades en el contexto de las teorías M/cuerdas, descansan en aspectos globales de dichas teorías. Propiedades tales como el confinamiento también podrían ser debidas a aspectos topológicos no triviales. En el pasado, las fibraciones no triviales han sido usadas también en el contexto de las teorías no conmutativas, como es el caso de la formulación no conmutativa del toro [50], así como para caracterizar espacios de compactificación interesantes para fenomenología de cuerdas, por ejemplo [51]. Por esta razón estudiaremos la formulación global de la supermembrana con cargas centrales.

A la hora de encontrar una teoría globalmente definida sobre un fibrado es necesario obtener una acción que sea un funcional invariante compatible con dicho fibrado. Para lo cual es preciso satisfacer ciertas condiciones. En este capítulo encontramos una descripción de la supermembrana compactificada en términos de fibrados toroidales. Probamos un paso no-trivial como es el demostrar que la acción de la supermembrana con cargas centrales es globalmente definida.

La supermembrana con cargas centrales no triviales es una supermembrana compactificada y podemos describir esta compactificación en términos de fibrados en donde la base del fibrado viene descrita por el volumen del mundo de la supermembrana y la fibra está asociada al espacio target en el que se compactifica. La supermembrana con cargas centrales no triviales, como hemos visto introduce una restricción topológica sobre las configuraciones físicas. Esta restricción topológica globalmente está asociada a la existencia de la primera clase de Chern no trivial. Desde un punto de vista algebraico, ésto puede ser interpretado como una carga central no trivial en

el álgebra supersimétrica. Desde el punto de vista geométrico ella asegura la existencia de un fibrado principal no trivial  $U(1)$  y una conexión monopolo sobre él [1], cuya curvatura está en la clase de Chern asociada a la restricción topológica. En este sentido, se tiene una manera natural de introducir configuraciones tipo monopolo que estabilizan la supermembrana. Así, el hamiltoniano regularizado resultante tiene un espectro discreto [6, 7, 10, 11].

La estructura global adicional que consideraremos, conlleva de un modo manifiesto el grupo de dualidad  $S$  de la teoría de cuerdas, el grupo  $SL(2, \mathbb{Z})$  y como veremos en el capítulo 7 también realiza la  $T$ -dualidad. El origen de la dualidad  $S$  desde el punto de vista de la supermembrana fue destacado en [118] en relación con las soluciones de cuerdas  $(p, q)$  (ver además [13]). El grupo  $SL(2, \mathbb{Z})$ , que ya ha sido caracterizado en la sección 3.3.1, veremos cómo actúa sobre la estructura del fibrado y probaremos cómo la acción de la supermembrana con cargas centrales queda formulada en el mismo. La consistencia de esta construcción se verifica al probar que la estructura global del fibrado  $SL(2, \mathbb{Z})$  es compatible con la restricción topológica tipo monopolo (o carga central). Este fibrado es un fibrado toroidal simplético con monodromía en  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Esto permite una clasificación de todas las supermembranas con cargas centrales y que como se verá en el capítulo 6, es el origen en teoría M de las teorías de supergravidades calibradas tipo II en  $9D$ . Ellas son teorías efectivas asociadas a las teorías de cuerdas tipo II compactificadas sobre un círculo.

## 5.2. Fibrados Toroidales Simpléticos

Consideraremos en este sector la estructura global de la supermembrana en el CCL cuando los campos  $X, \Psi$  son secciones y  $A$  es una conexión simplética sobre un

fibrado toroidal simplético no trivial. Un fibrado toroidal simplético  $E$  es un fibrado suave  $F \rightarrow E \xrightarrow{\pi} \Sigma$  cuyo grupo de estructura  $G$  es el grupo de simplectomorfismos que preserva una dos-forma simplética  $\omega$  sobre la fibra  $F$ .  $\Sigma$  es la variedad de base, que consideraremos una superficie de Riemann compacta y cerrada que modela la parte espacial de la foliación del volumen-mundo de la supermembrana, y  $E$  es el espacio total. Tomaremos la fibra como la variedad del espacio target  $F = M_9 \times T^2$  como en [14]. La parte topológicamente no-trivial corresponde al  $T^2$ , y es la única relevante en el análisis a continuación, así que en lo que sigue nos referiremos a esta parte que es la que caracteriza el fibrado. En particular, consideraremos  $\Sigma$ , una superficie de genus  $g = 1$  con una métrica inducida no-plana:

$$d^2s = \frac{1}{\cosh^2 \phi} [d^2\varphi + d^2\phi]. \quad (5.1)$$

Cuando  $g > 1$ , el primer grupo de homotopía  $\pi_1(\Sigma)$  es no-abeliano permitiendo la construcción de fibrados toroidales simpléticos con monodromías no-abelianas. En esta tesis nos restringimos solo al caso abeliano. Sobre  $T^2$ , un toro plano, consideraremos la 2-forma canónica simplética. Su pullback, usando los mapas armónicos desde la variedad base a  $T^2$ , define la 2-forma simplética  $\omega$  sobre  $\Sigma$ . En términos de una base armónica de uno-formas  $d\hat{X}^r$ ,  $r = 1, 2$ , la 2-forma simplética asociada es:

$$\omega = [(2\pi R)^2 n Im \tau] \epsilon_{rs} d\hat{X}^r \wedge d\hat{X}^s. \quad (5.2)$$

Esto induce la métrica asociada (5.1), cuya curvatura es no nula, con tensor de Ricci diferente de cero

$$R_{ab} = \frac{4\delta_{ab}}{(e^\phi + e^{-\phi})^2}. \quad (5.3)$$

Los simplectomorfismos sobre una superficie bidimensional, y la simetría residual de la supermembrana, que son los difeomorfismos que preservan el área, corresponden al mismo grupo. Por tanto, los simplectomorfismos sobre  $\Sigma$  homotópicos a la identidad están generados por los vínculos de primera clase de la supermembrana (1.43),

(1.44). En la supermembrana con cargas centrales no triviales [2] los simplectomorfismos corresponden al pull-back de los simplectomorfismos sobre la fibra, y no son los mismos que aparecen si no se impone la condición de cargas centrales. Para describir los aspectos globales de la supermembrana se introduce una monodromía y el  $\mathbb{Z}$ -módulo asociado. Por otro lado, los simplectomorfismos que preservan  $\omega$  definen clases isotópicas. Estas clases forman el grupo  $\pi_0(G)$ . En el caso que estamos considerando, donde la fibra es  $T^2$ ,  $\pi_0(G)$  es isomorfo a  $SL(2, \mathbb{Z})$ . La acción de  $G$  sobre la fibra  $T^2$  produce una acción sobre la homología y cohomología de  $T^2$ . Esta acción se reduce a una acción de  $\pi_0(G)$ , ya que sobre una clase de isotopía dada, dos simplectomorfismos están conectados por un camino continuo dentro de la clase, y por lo tanto no se puede cambiar el elemento del grupo de homología o cohomología. La acción de  $G$  sobre la fibra definida sobre un punto de la base  $x(\sigma_1, \sigma_2)$  cuando se va alrededor del mismo mediante un elemento de  $\pi_1(\Sigma)$  define un homomorfismo

$$\pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_0(G) \approx SL(2, \mathbb{Z}), \quad (5.4)$$

tal que  $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow SL(2, \mathbb{Z})$ , se define como la monodromía del fibrado toroidal. Esta definición de monodromía es la extensión natural de la monodromía en un fibrado toroidal sobre un círculo, que fue considerado previamente por Thurston [142]. En esta tesis hemos seguido la línea de acción de [143]. Otros trabajos relacionados son [144, 145, 146]. La monodromía puede ser trivial o no, pero aún cuando sea trivial, el fibrado toroidal simplético puede ser no-trivial. De hecho, se podría tener una transición no-trivial dentro de los simplectomorfismos sobre una clase de isotopía. Si la monodromía es trivial, el fibrado toroidal simplético es trivial si y solo si existe una sección global. Este es el caso de la supermembrana sobre un espacio target de Minkowski en once dimensiones [33], así como el caso de la supermembrana en el CCL sobre un espacio compactificado del tipo<sup>1</sup>  $\mathbb{R}_{9-d} \times T^d$  en [37]. Por consiguiente,

---

<sup>1</sup> $d$  es el número de coordenadas transversas de enrollamiento sobre el toro de  $d$  dimensiones.

también es el caso de una supermembrana enrollada *sin* carga central en un  $M_9 \times T^2$ .

Para el caso de fibrados no triviales con monodromía,  $\rho$  actúa naturalmente sobre el primer grupo de homología  $H_1(T^2)$  sobre  $T^2$ , y le da a  $H_1(T^2)$  la estructura de un  $Z[\pi_1(\Sigma)]$ -módulo el cual puede denotarse como  $Z_\rho^2$ . Dado  $\rho$ , existe una correspondencia biyectiva entre las clases de equivalencia de los fibrados toroidales simpléticos con base  $\Sigma$  y los módulos  $Z_\rho^2((m, n))$ , con los elementos del segundo grupo de cohomología de  $\Sigma$  cuyas coeficientes  $Z_\rho^2, H^2(\Sigma, Z_\rho^2)$  [143]. Según [143], el elemento de  $H^2(\Sigma, Z_\rho^2)$  es denominado *la clase de cohomología del fibrado toroidal simplético* y es denotado por  $C(E)$ .  $C(E) = 0$  si y solo si existe una sección global sobre  $E$ . Si  $\rho$  es trivial,  $C(E) = 0$  si y solo si  $E$  es trivial.

La teoría de la supermembrana con cargas centrales no-triviales tiene  $C(E) \neq 0$  y por lo tanto  $E$  siempre es no-trivial. La condición  $C(E) \neq 0$  es una condición relevante que asegura un espectro discreto de la supermembrana con cargas centrales no-triviales [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. En el caso de un fibrado toroidal simplético trivial el espectro de la supermembrana es continuo desde  $[0, +\infty)$  [35].

El segundo grupo de cohomología  $H^2(\Sigma, Z_\rho^2)$  puede ser igual al conjunto de los enteros  $\mathbb{Z}$ , como ocurre en el caso donde la monodromía viene dada por:

$$\rho(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \rho(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

donde  $(\alpha, \beta)$  denotan los elementos de  $\pi_1(\Sigma)$ . Pero también puede ocurrir que solo contenga un número finito de elementos como en el caso de [143],

$$\rho(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} -2mn + 1 & 2mn^2 + n \\ -m & mn + 1 \end{pmatrix}^{(\alpha+\beta)}, \quad (5.6)$$

donde los enteros  $m, n > 0$ . Estos fibrados son fibrados con torsión ya que  $H^2(\Sigma, Z_\rho^2) = Z_m \oplus Z_n$ . El número de fibrados toroidales inequivalentes simplécticos es, en este caso,  $mn$ . Por lo tanto, dado  $\rho$  el número de fibrados simplécticos toroidales inequivalentes, en general, no está necesariamente en correspondencia con los enteros como en un principio se podría pensar, sino que depende de si el fibrado tiene o no torsión. Esta es una afirmación importante en el análisis de los grupos de simetría asociados a la teoría a nivel cuántico.

### 5.3. Mapas de la Supermembrana como Secciones de un Fibrado Toroidal Simpléctico

Para formular la supermembrana con cargas centrales en términos de secciones de un fibrado toroidal simpléctico con monodromía  $\rho$  induciendo un  $Z[\pi_1(\Sigma)]$ -módulo, tenemos que considerar la transformación de su hamiltoniano bajo la acción de  $SL(2, \mathbb{Z})$  sobre la base de homología puesto que el móduli del 2-toro  $T^2$  aparece explícitamente en el hamiltoniano. En esta sección se probará la invariancia del hamiltoniano de la supermembrana con cargas centrales bajo el  $Z[\pi_1(\Sigma)]$ -módulo. Dicho hamiltoniano que habíamos visto en la sección 3.3, está dado por la ecuación (3.30):

$$H = \int_{\Sigma} T^{-2/3} \sqrt{W} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{P_m}{\sqrt{W}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{P_r}{\sqrt{W}} \right)^2 + \frac{T^2}{2} \{X^r, X^m\}^2 + \frac{T^2}{4} \{X^r, X^s\}^2 \right] \\ + \int_{\Sigma} T^{-2/3} \sqrt{W} \left[ \frac{T^2}{4} \{X^m, X^n\}^2 - \bar{\theta} \Gamma_- \Gamma_m \{X^m, \theta\} - \bar{\theta} \Gamma_- \Gamma_r \{X^r, \theta\} \right],$$

Con los vínculos (3.31) y (3.32):

$$d(P_r dX^r + P_m dX^m - \bar{\theta} \Gamma_- d\theta) = 0,$$

$$\oint_{\mathcal{C}_s} (P_r dX^r + P_m dX^m - \bar{\theta} \Gamma_- d\theta) = 0,$$

y la condición de carga central (3.27), donde  $X^r$  son las secciones sobre el fibrado toroidal simplético  $E$  con grupo de estructura  $G$ , los simplectomorfismos preservando la 2-forma simplética sobre la fibra  $T^2$  definida previamente.  $P_r$  son los momentos conjugados a la parte exacta en la descomposición de  $X^r$ .

Para hacer más explícita la dependencia del hamiltoniano en términos del módulo del toro del target space se introducen variables complejas. El integrando dependiente de  $X^r$ , con  $r = 1, 2$ , puede ser reescrito de la siguiente manera:

$$dX = dX^1 + idX^2, \quad (5.7)$$

y el potencial asociado se puede reescribir como:

$$\frac{1}{2}\{X, X^m\}\{\bar{X}, X^m\} + \frac{1}{8}\{X, \bar{X}\}\{\bar{X}, X\}, \quad (5.8)$$

donde

$$dX = 2\pi R(l_s + m_s\tau)d\hat{X}^s + dA, \quad (5.9)$$

con  $R$  y  $\tau$  el módulo de  $T^2$ ,  $d\hat{X}^s$ ,  $s = 1, 2$  como antes, la base armónica de  $\Sigma$  y  $dA$  es la uno-forma exacta en la descomposición de Hodge.  $A = A_1 + iA_2$  lleva los grados de libertad del sector compacto. La acción de  $\pi_0(G) \equiv SL(2, \mathbb{Z})$  en  $H_1(T^2)$  es el modo más natural de inducir una transformación de Möbius en el plano superior con coordenada compleja  $\tau$ .

A continuación probaremos que el hamiltoniano (3.30) es un funcional bien definido sobre el fibrado toroidal simplético con monodromía  $\rho$ , donde  $\rho$  es una representación de  $\pi_1(\Sigma)$  en  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Como vimos en la sección 3.3.1.2, es invariante bajo las transformaciones sobre  $T^2$  dadas por la ecuaciones (3.38):

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad R \rightarrow R|c\tau + d|, \quad A \rightarrow Ae^{i\varphi_\tau}, \quad \mathbb{W} \rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \mathbb{W},$$



con  $c\tau + d = |c\tau + d|e^{-i\varphi_\tau}$  y  $\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(2, \mathbb{Z})$ . Esta invariancia fue encontrada en [13]. El hamiltoniano (3.30) así como (3.27), y el área  $Area(T^2)$ , son invariantes bajo la transformación anterior.

Podemos darnos cuenta que el grupo  $SL(2, \mathbb{Z})$  (3.38) actúa desde la izquierda sobre  $\mathbb{W}$ , mientras que la invariancia  $SL(2, \mathbb{Z})$  sobre la base  $\Sigma$ , actúa a la derecha. Bajo esas transformaciones el  $det\mathbb{W}$  permanece invariante.

Dada  $\mathbb{W}$  con determinante  $\neq 0$  siempre existen elementos de  $SL(2, \mathbb{Z})$  cuya acción desde la izquierda y desde la derecha produce

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathbb{W} \begin{pmatrix} S_1^1 & S_1^2 \\ S_2^1 & S_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

donde  $\lambda_1\lambda_2 = n$ . Además, si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son primos relativos siempre existen elementos de  $SL(2, \mathbb{Z})$  cuya acción desde la izquierda y desde la derecha produce  $\lambda_1 = n$  y  $\lambda_2 = 1$ . Si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  no son primos relativos, se puede redefinir el parámetro  $R$  y nuevamente reducirse al caso donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son primos relativos. Aunque podemos tener números de enrollamiento  $l_1, l_2, m_1, m_2$  las simetrías de la teoría permiten reducir todo a que la carga central sea un entero  $n$ . Ahora queremos determinar qué representaciones  $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_0(G) \equiv SL(2, \mathbb{Z})$  dejan invariante la forma de la densidad del hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H = \int_{\Sigma} \mathcal{H} = \int_{\Sigma} T^{-2/3} \sqrt{W} & \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{P_m}{\sqrt{W}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{P_r}{\sqrt{W}} \right)^2 + \frac{T^2}{2} \{X, X^m\} \{\bar{X}, X^m\} \right] + \\ & + \int_{\Sigma} T^{-2/3} \sqrt{W} \left[ \frac{T^2}{8} \{X, \bar{X}\} \{\bar{X}, X\} + \frac{T^2}{4} \{X^m, X^n\}^2 \right] + \\ & - \int_{\Sigma} T^{2/3} \sqrt{W} [\bar{\theta} \Gamma_- \Gamma_m \{X^m, \theta\} + 1/2 \bar{\theta} \Gamma_- \bar{\Gamma} \{X, \theta\} + 1/2 \bar{\theta} \Gamma_- \Gamma \{\bar{X}, \theta\}], \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde  $dX = 2\pi R(d\hat{X}^1 + n\tau d\hat{X}^2)$ .

Las representaciones  $\rho_n : \pi_1(\Sigma) \rightarrow SL(2, \mathbb{Z})_n$ , donde  $SL(2, \mathbb{Z})_n$  es el subgrupo de  $SL(2, \mathbb{Z})$  cuyos elementos son de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & nb \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

dejan invariante la densidad hamiltoniana en (5.11).  $\rho_n$  caracteriza las representaciones compatibles con la restricción topológica (3.27). Por ejemplo, si tomamos la representación  $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow SL(2, \mathbb{Z})_n$  definida de la siguiente manera:

$$\pi_1(\Sigma) \ni \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & nM \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

El elemento de  $H_1(T^2)$  puede ser dado  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$  siendo  $p, q$  enteros. Entonces, la acción natural de  $SL(2, \mathbb{Z})$  es dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & nM \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + nMq \\ q \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

El grupo de cohomología  $H^2(\Sigma, \mathbb{Z}_\rho^2) \cong \mathbb{Z}$ , además de la condición de la carga central (3.27) establece que estamos en la clase característica  $C(E) = n \neq 0$ , en consecuencia, existe una supermembrana  $D = 11$  con cargas centrales no triviales formulada en términos de secciones de un fibrado de toro simplético  $E$  con representación (5.13) produciendo un  $Z[\pi_1(\Sigma)]$ -módulo. En el caso (5.6) todos los elementos son de torsión mientras que en el caso (5.5) solo cuando  $C(E) = 0$ , lo cual está excluido en el análisis presente ya que consideramos una supermembrana con carga central no-trivial.

Ahora, consideraremos la ley de transformación de los campos describiendo la supermembrana con carga central no trivial. Consideremos una supermembrana sobre un fibrado toroidal simplético con monodromía  $\rho(\alpha, \beta)$ . Bajo una simetría rígida

$SL(2, \mathbb{Z})$  sobre el target la conexión simpléctica  $A(x)$  transforma con un factor global  $e^{i\varphi}$  donde  $e^{-i\varphi} = \frac{c\tau+d}{|c\tau+d|}$ ,  $\Lambda \in SL(2, \mathbb{Z})$  actúa sobre el móduli y la matriz de enrollamiento  $\mathbb{W}$  como ya se ha presentado. Sobre el fibrado toroidal simpléctico con monodromía  $\rho(\alpha, \beta)$ ,  $A(x)$  transforma además con un factor de fase  $e^{i\varphi_\rho}$  con  $\varphi_\rho \equiv \varphi(\rho(\alpha, \beta))$  pero ahora  $\Lambda \equiv \rho(\alpha, \beta)$ . Esto es,  $a, b, c, d$  son enteros, que dependen de  $(\alpha, \beta)$ . Por ejemplo, si consideramos  $\alpha = \beta = 0$  correspondiendo a un elemento trivial de  $\pi_1(\Sigma)$ , entonces  $\varphi = 0$ , mientras que si  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  entonces  $\varphi$  puede ser diferente de cero, por ejemplo en el caso (5.6). Si escribimos  $A(x) = |A(x)|e^{i\lambda(x)}$ , entonces asociado a  $(\alpha, \beta) \in \Pi_1(\Sigma)$  tenemos  $A(x) = |A(x)|e^{i\lambda(x)+\varphi_\rho}$ . Así, se obtiene

$$d\left(|A(x)|e^{i\lambda(x)+e^{i\varphi_\rho}}\right) = dA(x)e^{i\varphi_\rho}. \quad (5.15)$$

Para tomar en cuenta el factor de fase  $e^{i\varphi_\rho}$ , se puede multiplicar la derivada covariante simpléctica en la formulación por este factor de fase y dejar  $A(x)$  como una 1-forma de conexión univaluada. En el hamiltoniano de la sección 3, el factor de fase  $e^{i\varphi(\rho(\alpha, \beta))}$  es cancelado por la contribución de su complejo conjugado, en consecuencia, el hamiltoniano está bien definido sobre un fibrado toroidal simpléctico con monodromía no-trivial.

Otro aspecto importante de la supermembrana formulada sobre un fibrado toroidal simpléctico con monodromía es que las cargas Kaluza-Klein  $(p, q)$  que aparecen en el operador de masa no son cualesquiera sino que dependen del tipo de fibrados que consideremos ya que toman su valor sobre el módulo  $Z_\rho^2$ .

De hecho, las cargas  $(p, q)$  están asociados naturalmente al elemento de  $H_1(T^2)$ . Se tiene entonces una bonita interpretación geométrica: Las cargas KK están asociadas a la homología de  $T^2$  sobre el target, mientras el enrollamiento está asociado a la cohomología sobre la base  $\Sigma$ . Probamos que el hamiltoniano junto con los vínculos

---

son invariantes bajo la acción de  $SL(2, \mathbb{Z})$  sobre el grupo de homología  $H_1(T^2)$  de la fibra del 2-Toro  $T^2$ .

Las clases de calibrados permitidas vienen parametrizadas por  $\Lambda$ , por lo que corresponden a las clases inequivalentes (elípticas, parabólicas e hiperbólicas) de  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Esto será analizado en detalle en el capítulo 6.

Sin embargo, como ya se explicó, la clasificación de los calibrados del tipo IIB a nivel global es más fina ya que depende de la clase de cohomología de la fibración. Esto es, hay más clases inequivalentes de fibrados toroidales simpléticos que no son visibles a bajas energías para una monodromía dada. Como veremos en el capítulo 7, para el caso menos directo de las monodromías de origen tipo IIA, estas se inferirán del hecho de que el hamiltoniano es invariante bajo T-dualidad.

## 5.4. Conclusión

Mostramos que la Supermembrana con cargas centrales no triviales puede ser formulada en términos de secciones de fibrados toroidales simpléticos con una monodromía dada por una representación  $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow SL(2, \mathbb{Z})$  induciendo un  $Z[\pi_1(\Sigma)]$ -módulo en términos del grupo de homología de la fibra  $H_1(T^2)$ . El punto no trivial en la construcción fue probar que el hamiltoniano junto con los vínculos son invariantes bajo la acción de  $SL(2, \mathbb{Z})$  sobre el grupo de homología  $H_1(T^2)$  de la fibra  $T^2$ . Un aspecto interesante de esta estructura geométrica es la posible existencia de una extensión de la 2-forma simplética sobre la fibra al espacio total del fibrado toroidal simplético.

---

Un teorema de Khan [143] establece que la extensión existe si y solo si la clase característica es una clase de torsión en  $H^2(\Sigma, Z_\rho^2)$ . En el caso del ejemplo considerado, concluimos que allí no existe dicha extensión ya que  $C(E) = n$  no es una clase de torsión. Solo hay una,  $C(E) = 0$ , la cual no es compatible con la restricción topológica (3.27) de la supermembrana con cargas centrales. Localmente, tenemos la interpretación de la supermembrana en términos de mapas desde  $\Sigma$  hasta el target. Globalmente tenemos ahora una estructura geométrica más interesante ya que el hamiltoniano está definido sobre un fibrado toroidal simplético no trivial con monodromía.

Localmente, el target es un producto de  $M_9 \times T^2$  pero globalmente no podemos descomponer el target desde la base  $\Sigma$  puesto que  $T^2$  es la fibra en el fibrado toroidal simplético no trivial  $T^2 \rightarrow \Sigma$ . La formulación de la supermembrana en términos de secciones del fibrado toroidal simplético con una monodromía es una bonita estructura geométrica para analizar aspectos globales de procesos de calibrado de teorías efectivas provenientes de la teoría M. Notamos el caso particular en el cual la representación  $\rho$  es dada por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{M+N}. \quad (5.16)$$

El subgrupo se reduce a  $Z_2 \times Z_2$ . Está asociado a bajas energías a la supergravedad calibrada elíptica. Este caso fue considerado en [3, 5, 147].

---

# La Supermembrana como Origen de Supergravedades tipo II en 9D

---

## 6.1. Introducción

El origen en teoría-M de las supergravedades calibradas es un problema abierto de gran interés. En este capítulo se demuestra que la supermembrana en  $11D$  compactificada sobre un toro es el origen en teoría-M de todas las supergravedades en  $9D$ : no solo la asociada a la supergravedad maximal [25] sino además las que provienen del sector calibrado (Ver [42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49]). Se propone que hay dos sectores bien diferenciados: El primero está asociado a compactificaciones triviales de la supermembrana sobre un 2-toro, con su límite a baja energía correspondiente a la supergravedad maximal  $N = 2$  en  $9D$ , y globalmente asociado a la formulación de la supermembrana en un fibrado toroidal simpléctico trivial. El segundo sector corresponde a la supermembrana formulada globalmente como un fibrado toroidal simpléctico no-trivial. Esta condición de no trivialidad puede estar asociada a una monodromía no trivial o aún en el caso de una monodromía trivial (la identidad)

debido a la existencia de una clase de cohomología no-trivial en la variedad de base. Imponer la condición de carga central sobre la supermembrana se corresponde exactamente a imponer una condición de cohomología no-trivial sobre el fibrado. La supermembrana con cargas centrales no triviales corresponde a este sector. A continuación clasificaremos la teoría de la supermembrana con cargas centrales de acuerdo a las clases de fibrados toroidales con monodromía no trivial. Físicamente, como recordaremos, la consecuencia de imponer esta condición es muy importante. El espectro del hamiltoniano de la supermembrana con carga central se convierte en un espectro discreto con multiplicidad finita. Al hacer esta afirmación, nos referimos al espectro del hamiltoniano exacto, y no solo a su aproximación semi-clásica.

Está bien establecido que las ecuaciones de movimiento de la supergravedad en  $11D$  surgen como una consecuencia de la invariancia bajo simetría  $\kappa$  de la acción de la supermembrana formulada sobre un background general. Esto respalda la conjetura de que la descripción a baja energía de la teoría de la supermembrana es la teoría de supergravedad en  $11D$ . Más específicamente, esta conjetura significa que el estado fundamental de la supermembrana en  $11D$  se corresponde al supermultiplete asociado a la supergravedad en  $11D$ . Una prueba rigurosa completa sobre este punto aún no existe. Sin embargo, es natural esperar que sea la supermembrana compactificada en un toro la teoría asociada a todas las supergravedades en  $9D$ , no solamente a las maximales. Para ello es necesario considerar los dos sectores de la supermembrana compactificada, tanto el que tiene carga central trivial como el de carga central no trivial.

La dimensión máxima para supergravedades calibradas es  $9D$ . Existen cuatro clases diferentes de deformaciones que aparecen en la supergravedad calibrada IIB en  $9D$ , establecidas inicialmente por [42, 43]. Si se incluyen además las deformaciones

---

que provienen del sector de supergravedad de tipo IIA, hay cuatro deformaciones más, pero solamente siete de ellas son deformaciones independientes y constituyen las supergravedades calibradas de tipo II en  $9D$  [46]. En estas se incluye el calibrado de las simetrías de escalamiento [47, 48].

El objetivo de este capítulo es caracterizar la supermembrana con cargas centrales en términos de los fibrados toroidales simplécticos con monodromía no-trivial en  $SL(2, \mathbb{Z})$  y su correspondencia a bajas energías con los calibrados de las supergravedades tipo II en  $9D$ . Estos resultados de fueron reportados en [15].

Esta descripción global corresponde a una supermembrana calibrada en el sentido del 'mecanismo de esculpido' explicado en la sección 2.3.2. Intentos preliminares para establecer la relación entre el calibrado de la supermembrana y las supergravedades calibradas en  $9D$  se consideraron en [60, 61].

De acuerdo a las clases inequivalentes de monodromías, nosotros encontramos una clasificación de los fibrados toroidales simplécticos que describen globalmente la supermembrana. La monodromía es la representación del grupo fundamental  $\Pi_1(\Sigma)$  en  $SL(2, \mathbb{Z})$ , donde  $\Sigma$  es la variedad de base de la supermembrana, y  $SL(2, \mathbb{Z})$  es el grupo de isotopía de las clases homotópicas de simplectomorfismos (simetría local de la supermembrana en el CCL). El grupo  $SL(2, \mathbb{Z})$  actúa naturalmente sobre el primer grupo de homología de la fibra, lo cual en nuestro caso corresponde a un toro en el espacio target. La monodromía define un automorfismo sobre las fibras, proporcionando la estructura global de la configuración geométrica. Recientemente, se ha encontrado en [49] una manera más general de calibrar en  $9D$  expresada en el formalismo del tensor embedding [100, 149]. En las supergravedades IIB en nueve dimensiones, hay cuatro calibrados inequivalentes posibles de la simetría global  $GL(2, \mathbb{R})$ , tres de ellos están asociados al calibrado de la simetría global  $SL(2, \mathbb{R})$ , con las clases inequiva-

---



lentes parabólicas, elípticas e hiperbólicas y se encuentran sus respectivos fibrados toroidales simplécticos. El cuarto calibrado corresponde al calibrado de la simetría trombón asociada a los escalamientos  $\mathbb{R}^+$ . A nivel cuántico, la realización de este último calibrado es más complejo ya que el escalamiento no está incluido en el subgrupo aritmético  $GL(2, \mathbb{Z})$ . En [62] se brinda un modo de realizar esta simetría antes de calibrarla estudiando una realización de ella que se llamó simetría  $SL(2, \mathbb{Z})$  activa. Un modo de realizar esta simetría de escalamiento es mediante una representación no-lineal del grupo  $SL(2, \mathbb{Z})$ . A nivel de supergravedad, el calibrado de las simetrías trombón produce supergravedades sin lagrangiano, debido al hecho que la simetría trombón es simetría de las ecuaciones de movimiento y no del lagrangiano. Mostramos que esta 'simetría' está presente en la teoría de la supermembrana con cargas centrales no-calibrada. Construimos el fibrado toroidal simpléctico asociado al calibrado de esta simetría de escalamiento, el cual corresponde, desde el punto de vista de la fibración, a una cuarta clase inequivalente de fibras. Esto prueba el origen a partir de la supermembrana de todas las supergravedades calibradas del tipo IIB en 9D. Las monodromías de origen de tipo IIA son inferidas del hecho de que el hamiltoniano es invariante bajo T-dualidad como veremos en el capítulo 7. En la sección 6.2, mostramos las clases inequivalentes de fibrados toroidales calibrados (en el sentido del mecanismo de esculpido) asociados a las clases inequivalentes de monodromías. Es importante puntualizar que para monodromías que incluyen las clases elíptica, parabólica e hiperbólica, hay elementos de torsión en el segundo grupo de cohomología de la variedad base con coeficientes enteros dados por la monodromía que brindan una restricción sobre los posibles valores de las cargas de la teoría. En la sección 6.3, se discute la construcción del fibrado para la supermembrana con la simetría trombón calibrada. El efecto de la representación no-lineal de la monodromía produce cambios en los coeficientes de homología del toro de la fibra llevando a fibraciones

---

inequivalentes.

## 6.2. Clasificación del Fibrado Toroidal Simpléctico

En esta sección vamos a clasificar todos los fibrados toroidales simplécticos compatibles con la supermembrana con cargas centrales. Para ello, estableceremos primero la noción de fibrados equivalentes.

Dos representaciones conjugadas  $\rho$  y  $U\rho U^{-1}$ , con  $U \in SL(2, \mathbb{Z})$ , definen respectivamente los módulos  $Z_\rho^2$  y  $Z_{U\rho U^{-1}}^2$  con grupos de cohomología isomorfos  $H^2(\Sigma, Z_\rho^2) \sim H^2(\Sigma, Z_{U\rho U^{-1}}^2)$ . Ellos definen fibrados toroidales simplécticos equivalentes. Esta equivalencia la podemos ver estudiando los grupos de coinvariantes respectivos. Es decir, consideramos el grupo de coinvariantes asociados a  $\rho$  y a  $U\rho U^{-1}$ . Hay, entonces, un isomorfismo entre el grupo de los coinvariantes asociados a  $\rho$  y los asociados a  $U\rho U^{-1}$ , ellos definen los fibrados toroidales simplécticos equivalentes. Para clasificarlos, se debe determinar primero las clases de conjugación de  $SL(2, \mathbb{Z})$  y luego los coinvariantes asociados. Una vez hecho esto, la correspondencia con las supergravedades calibradas en nueve dimensiones se sigue directamente.

Cada clase de conjugación de  $SL(2, \mathbb{Z})$  puede ser representada por uno de los siguientes coinvariantes:

Caso Elíptico :  $\pm S$ , con  $\text{Traza}=0$ .

Caso Elíptico :  $\pm T^{-1}S$ ,  $\pm(T^{-1}S)^2$ , con  $|\text{Traza}| = 1$ .

Caso Parabólico :  $\pm T^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , con  $|\text{Traza}| = 2$ .

Caso Hiperbólico :  $\pm T^{r_0} S T^{r_1} S \dots T^{r_k} S$ ,  $r_i \leq -2$ ,  $r_0 < -2$ ,  $i = 1, \dots, k$ , y  $|\text{Traza}| > 2$ .

(6.1)

---

donde

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

A continuación se explican cada una de estas clases de conjugación.

### 6.2.1. Clase de Conjugación Elíptica

El caso de la clase de conjugación elíptica está asociado a matrices de  $SL(2, \mathbb{Z})$  con traza cero o uno. Las monodromías asociadas a la clase de conjugación elíptica son, por tanto:

$$\begin{aligned} \rho(\alpha, \beta) &= (-\mathbb{I})^{\alpha+\beta}, \\ \rho(\alpha, \beta) &= +(T^{-1}S)^2)^{\alpha+\beta}, \\ \rho(\alpha, \beta) &= (\pm S)^{\alpha+\beta}, \\ \rho(\alpha, \beta) &= (+T^{-1}S)^{\alpha+\beta}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

los cuales definen subgrupos finitos isomorfos a  $Z_2, Z_3, Z_4, Z_6$ , respectivamente. Como se explica en [45], estos subgrupos están asociados a su vez, respectivamente, a las monodromías  $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3, \mathcal{M}_4$  y  $\mathcal{M}_6$  para una compactificación con un twist  $SL(2, \mathbb{R})$ . Entonces, existe una relación entre esta descripción global con los twists asociados a los calibrados elípticos correspondientes a las supergravedades calibradas elípticas tipo IIB en 9D. Luego, la supermembrana globalmente descrita como fibrados toroidales simplécticos que tienen las monodromías anteriormente presentadas (6.3) son el origen en teoría M de estas supergravedades calibradas elípticas.

Las representaciones de las monodromías:

$$\rho(\alpha, \beta) = (-T^{-1}S)^{\alpha+\beta} \quad \text{y} \quad \rho(\alpha, \beta) = -(T^{-1}S)^2)^{\alpha+\beta}, \quad (6.4)$$


---

definen subgrupos isomorfos a  $Z_3$  y  $Z_6$  respectivamente, sin embargo los grupos coinvariantes asociados son el trivial y  $Z_6$ , respectivamente. En términos de la representación:

$$\rho_{mn}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} -2mn + 1 & 2mn^2 + n \\ -m & 1 + mn \end{pmatrix}^{\alpha+\beta}, \quad (6.5)$$

con  $m, n > 0$  [143],  $[(T^{-1}S)^2]^{\alpha+\beta}$  es conjugada a  $\rho_{31}(\alpha, \beta)$ ,  $S^{\alpha+\beta}$  es conjugada a  $\rho_{21}(\alpha, \beta)$  y  $[T^{-1}S]^{\alpha+\beta}$  a  $\rho_{11}(\alpha, \beta)$ .

Los fibrados toroidales simplécticos inequivalentes asociados a  $\rho_{mn}(\alpha, \beta)$  son  $mn$  y todos ellos corresponden a las clases de torsión en  $H^2(B, Z_\rho^2) \equiv \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m$  equivalentemente al grupo coinvariante  $Z_n \oplus Z_m$ . Es interesante que más allá de los casos de grupos finitos  $(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3, \mathcal{M}_4, \mathcal{M}_6)$  asociados al caso elíptico, hay monodromías definiendo subgrupos no-finitos asociados a un número finito de fibrados toroidales simplécticos. Por ejemplo,  $\rho_{41}(\alpha, \beta)$  es conjugado a  $(-T^{-1})^{\alpha+\beta} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{\alpha+\beta}$ , que genera un subgrupo no-finito, el número asociado de fibrados toroidales simplécticos es finito, en concreto cuatro, y en este caso el grupo de coinvariantes es isomorfo a  $Z_4$ . Un ejemplo de grupo  $Z_2 \times Z_2$  es (5.16).

### 6.2.2. Clase de Conjugación Parabólica

Para la clase de conjugación parabólica  $|\text{Traza}| = 2$ , hay dos casos, el primero está asociado a las monodromías con traza positiva, generando infinito fibrados toroidales simplécticos en correspondencia a  $\mathbb{Z}$ , mientras que en el segundo caso, con traza negativa, se genera un número finito de fibrados toroidales simplécticos inequivalentes. El grupo de coinvariantes es siempre  $Z_4$ . En ambos casos, los subgrupos generados por la representación de monodromía son no finitos. Si  $mn > 4$ ,  $\text{Traza}\rho_{mn}(\alpha, \beta) < -2$ ,

---

con  $\rho_{mn}$  dado por (6.5). El caso parabólico con torsión no había sido analizado previamente en [46].

### 6.2.3. Clase de Conjugación Hiperbólica

Hay representaciones hiperbólicas de  $SL(2, \mathbb{Z})$ . En este caso hay un número finito de fibrados toroidales simplécticos inequivalentes generados por subgrupos no finitos. En este caso,  $mn > 4$ , la matriz  $M \equiv \rho_{mn}(\alpha, \beta)$  (6.5) con  $\alpha + \beta = 1$  es conjugada, de acuerdo a (6.3), a  $\pm T^{r_0} S T^{r_1} S \dots T^{r_k} S$ ,  $r_i \leq -2$ ,  $r_0 < 2$ , y  $i = 1, \dots, k$ . Esta clasificación de monodromías hiperbólicas  $SL(2, \mathbb{Z})$  generaliza la considerada en [108]. En particular, obtenemos para  $n = 1, m \geq 5$  que  $M$  es conjugado a  $-T^{-3} S (T^{-2} S)^{m-5}$ . El grupo de coinvariantes asociados a la monodromía correspondiente es  $Z_m$ ,  $m \geq 5$ . Hay  $m$  fibrados toroidales simplécticos inequivalentes correspondientes a esta monodromía. El signo es muy importante. Por ejemplo, para  $m = 5$ ,  $\rho_{51}(\alpha, \beta) = (-T^3 S)^{\alpha+\beta}$  tiene un grupo coinvariante  $Z_5$  mientras que  $(+T^3 S)^{\alpha+\beta}$  tiene un grupo coinvariante trivial, con solo el elemento identidad. Este último caso no está contenido en (6.5), puesto que corresponde a traza positiva, aunque es otro ejemplo válido de calibrado hiperbólico.

## 6.3. Simetrías Residuales de la Supermembrana Calibrada

En esta sección queremos caracterizar las simetrías globales residuales de la supermembrana una vez que la teoría se ha calibrado vía el mecanismo de esculpido. Sabemos que a nivel de las teorías de supergravedad el calibrado implica una ruptura

---

de las simetrías globales de la teoría no calibrada a un subgrupo que genéricamente viene dado por la monodromía. Para ello podemos ahora considerar la libertad de calibre asociada al calibrado de los subgrupos abelianos de  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Esto corresponde a fibrados toroidales simplécticos equivalentes que surgen de las representaciones conjugadas  $U\rho(\alpha, \beta)U^{-1}$ ,  $U \in SL(2, \mathbb{Z})$ . Podemos seleccionar  $U$  para dejar congelada la matriz de enrollamiento bajo la acción de la transformación de monodromía. La fijación de calibre es como sigue: Se re-arregla la matriz de enrollamiento como  $\mathbb{W} = \begin{pmatrix} m_1 & l_1 \\ m_2 & l_2 \end{pmatrix}$ , con  $\det \mathbb{W} = n$ . Bajo la simetría de la sección 3, ésta transforma como:

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & l_1 \\ m_2 & l_2 \end{pmatrix} \Lambda^{-1}. \quad (6.6)$$

La simetría  $SL(2, \mathbb{Z})$  asociada a la variedad base del fibrado  $\Sigma$  puede ser interpretada como la simetría que garantiza la independencia de elección de la base de homología de dicha variedad  $\Sigma$ . De hecho, la matriz de enrollamiento está asociada a una base particular de homología. Por lo tanto, ya que el cambio de la base de homología corresponde a una transformación  $SL(2, \mathbb{Z})$ , la teoría solo debería depender de las clases de equivalencia construidas desde la aplicación desde la izquierda por una matriz  $SL(2, \mathbb{Z})$ :

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & l_1 \\ m_2 & l_2 \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Bajo esta transformación, la matriz de enrollamiento puede ser siempre reducida a la forma canónica:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \beta & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

con  $\lambda_1 \lambda_2 = n$ , la carga central definida en la sección 2, y  $|\beta| \leq \frac{\lambda_1}{2}$ . En particular, si  $\lambda_1 = n$ ,  $\lambda_2 = 1$  entonces  $|\beta| \leq \frac{n}{2}$ . Notemos que además de la carga central entera  $n$ ,

---

hay grados de libertad adicionales representados por el entero  $\beta$ .

Podemos ahora considerar la supermembrana formulada como un fibrado toroidal simpléctico con monodromía  $U\rho(\alpha, \beta)U^{-1}$ . La acción sobre la matriz de enrollamiento está dada por:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \beta & \lambda_2 \end{pmatrix} U\rho^{-1}U^{-1}. \quad (6.9)$$

Podemos, además, actuar desde la izquierda por una matriz  $SL(2, \mathbb{Z})$ , la cual tomaremos de la forma  $V^{-1}\rho^*V$ . Se puede tomar  $U$  y  $V$  ambas matrices  $SL(2, \mathbb{Z})$  para re-escribir la matriz de enrollamiento en forma tal que es invariante por la izquierda bajo la acción de  $\rho^*$  y  $\rho^{-1}$ . Por ejemplo, si se toma la monodromía asociada a la supermembrana con cargas centrales  $n$  como:

$$\rho(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} a & nb_1 \\ c & d \end{pmatrix}^{\alpha+\beta} \in SL(2, \mathbb{Z}), \quad (6.10)$$

se puede tomar:

$$\rho(\alpha, \beta)^* = \begin{pmatrix} a & b_1 \\ nc & d \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

y  $V, U$  tal que:

$$V \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \beta & \lambda_2 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Luego,

$$\rho^*(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \rho^{-1}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Se tiene entonces:

$$V^{-1}\rho^*V \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \beta & \lambda_2 \end{pmatrix} U\rho^{-1}U^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \beta & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$


---

Esto es, la matriz de enrollamiento es dejada invariante bajo la monodromía  $\rho(\alpha, \beta)$  propuesta que consideramos una representación abeliana asociada de  $SL(2, \mathbb{Z})$  actuando sobre la homología de la variedad base. Establecido el procedimiento de fijación de calibre que surge de las representaciones conjugadas  $U\rho(\alpha, \beta)U^{-1}$ , podemos preguntar cuál es la simetría residual de la supermembrana en el fibrado toroidal simpléctico con monodromía  $U\rho(\alpha, \beta)U^{-1}$ . Esta simetría residual debe dejar invariante los elementos del grupo coinvariante asociado a la monodromía, es decir, debe actuar como la identidad sobre dicho grupo de coinvariantes. En consecuencia, éste es el mismo grupo abeliano que define a la monodromía. Esto es diferente al análisis realizado por Hull en [105] donde la simetría residual asociada a la teoría de supergravedad calibrada viene descrita por el subgrupo de simetría global que conmuta con el grupo de simetría asociado a la monodromía, el cual no tiene que ser necesariamente la identidad. Este último caso a nivel de la supermembrana se corresponde con la simetría residual de la teoría siempre y cuando consideremos un conjunto de fibrados asociados a una monodromía dada y no un único fibrado. Cuando construimos las supergravidades calibradas en  $9D$  a partir de la teoría de la supermembrana compactificada en el toro con la condición de carga central, tomamos fibrados inequivalentes (como fibrados) todos ellos con una monodromía dada, los cuales dan origen a bajas energías a una misma clase de supergravidades calibradas.

## 6.4. Calibrando la Simetría Trombón de la Supermembrana

En esta sección mostraremos que además hay una teoría de supermembrana con cargas centrales formulada sobre un fibrado toroidal simpléctico con una monodromía

---



que corresponde al calibrado de la simetría trombón introducido en el contexto de supergravedad en la sección (3.2.2), ver [62]. El primer paso será considerar la supermembrana formulada sobre un fibrado toroidal simpléctico con monodromía trivial (la teoría sin calibrar) y obtener la ley de transformación bajo simetría de escalamiento del operador de masa presentada en el capítulo 3.

Se seguirá, en primer lugar, la aproximación de [62] y se calculará el compensador general en el contexto de la teoría de la supermembrana. El segundo paso, será calibrar la simetría trombón en teoría-M. La simetría trombón a nivel de la supergravedad escala el lagrangiano y las cargas KK sin variar el móduli de la teoría.

### 6.4.1. La Simetría Trombón

A continuación generalizamos explícitamente la ley de transformación compensadora bajo la simetría de escalamiento [62], para valores arbitrarios del móduli  $\tau$ , y no solo para el caso  $\tau = i$ .

#### 6.4.1.1. La Forma General de la Transformación Compensadora

Consideramos una retícula entera de cargas KK parametrizada por  $Q = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ . La interpretación geométrica de  $Q$  está en términos de los elementos del grupo de homología  $H_1(T^2)$  de la fibra, el cual es un 2-toro. Bajo la transformación de U-dualidad (3.38), las cargas transforman como  $Q \rightarrow \Lambda Q$ , con  $\Lambda \in SL(2, \mathbb{Z})$ , donde la transformación correspondiente de los parámetros del móduli es como se presentó en el capítulo 5. Estamos interesados en la transformación más general que mapea  $Q_i \rightarrow Q_j : Q_j = \Lambda_{ij} Q_i$ . Para un  $Q_i$  dado, definimos  $\Lambda_i \in SL(2, \mathbb{Z}) : \Lambda_i Q_0 = Q_i$  donde

---

$Q_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .  $\Lambda_i$  no es única, su expresión más general es  $\Lambda_i g$ , donde  $g = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  para cualquier entero  $k \neq 0$ , y  $g \in H$  es el grupo de Borel de las matrices parabólicas  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Entonces, tenemos  $\Lambda_{ji} = \Lambda_j g \Lambda_i^{-1}$  para cualquier  $g \in H$ . Bajo composición se tiene que:

$$\Lambda_{kj} \Lambda_{ji} = \Lambda_{ki}. \quad (6.15)$$

Para  $\Lambda_{ji} \in SL(2, \mathbb{Z})$  actuando sobre  $Q_i$  hay una transformación asociada de los parámetros de móduli. La fórmula de la masa es invariante bajo una transformación general de este tipo. Consideramos las clases de equivalencia de matrices  $\Lambda_{ji}$ : dos elementos de la clase difieren en un elemento  $g \in H$ . Denotamos la clase  $\tilde{\Lambda}_{ij}$ . Ahora, se puede introducir el compensador siguiendo [62].

El siguiente resultado es válido: para cada clase de equivalencia  $\tilde{\Lambda}_{ji}$  existe una matriz única  $H_{ji} \in GL(2, \mathbb{R})$ ,  $H_{ji} = M_{ji} \Lambda_{ji}$  y un número complejo único  $h_{ji} \in \mathbb{C}$  tal que:

$$(i) \quad H_{ji} Q_i = Q_j, \quad (ii) \quad H_{ji} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} = h_{ji} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.16)$$

$H_{ji}$  depende solo de la clase de equivalencia, es independiente de  $g \in H$ . En cambio, el compensador  $M_{ji}$  depende explícitamente de  $g \in H$ . La relación ii) es equivalente a hacer la siguiente secuencia de transformaciones:

$$\tau \xrightarrow{\Lambda_{ji}} \tilde{\tau} \xrightarrow{M_{ji}} \tau, \quad (6.17)$$

donde  $\tau \rightarrow \tilde{\tau}$  es la transformación de Möbius asociada a  $\Lambda_{ji} \in SL(2, \mathbb{Z})$ . La expresión general de la matriz  $H_{ji}$  es:

$$H_{ji} = \begin{pmatrix} -\frac{p_j}{q_j} u + \frac{q_i}{q_j} \mathcal{C} & \frac{p_j}{q_i} + \frac{p_i p_j}{q_i q_j} u - \frac{p_i}{q_j} \mathcal{C} \\ -u & \frac{q_j}{q_i} + \frac{p_i}{q_i} u \end{pmatrix}, \quad (6.18)$$


---

con:

$$u = \frac{(p_j q_i - p_i q_j)}{|p_i - q_i \tau|^2}, \quad \mathcal{C} = \det M_{ji} = \frac{|p_j - q_j \tau|^2}{|p_i - q_i \tau|^2}, \quad \lambda_{ji} = \frac{p_j - q_j \bar{\tau}}{p_i - q_i \bar{\tau}},$$

y  $\bar{\tau}$  es el complejo conjugado de  $\tau$ . Entonces, se sigue que el compensador  $M_{ji}$  depende explícitamente de  $g \in H$  ya que  $M_{ji} = H_{ji} \Lambda_{ji}^{-1}$ . Aunque  $H_{ji} \in GL(2, \mathbb{R})$ , la transformación no lineal transforma cargas enteras  $Q_i$  en cargas enteras  $Q_j$  para satisfacer la condición de cuantización de carga.

Es directo mostrar que  $H_{ji}$  define una realización no-lineal del grupo  $SL(2, \mathbb{Z})$ . De hecho, si

$$\Lambda_{21} \rightarrow H_{21}, \quad \Lambda_{32} \rightarrow H_{32}, \quad \Lambda_{31} \rightarrow H_{31}, \quad (6.19)$$

entonces  $H_{21} Q_1 = Q_2$ ,  $H_{32} Q_2 = Q_3$  y por lo tanto,  $H_{32} H_{21} Q_1 = Q_3$ . De manera análoga,

$$H_{32} H_{21} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_{32} \lambda_{21} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_{31} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

La unicidad de la transformación implica entonces que  $H_{31} = H_{32} H_{21}$ .  $H_{ji}$  realiza una representación no lineal de  $SL(2, \mathbb{Z})$  y representa la simetría trombón en el nivel cuántico.

#### 6.4.1.2. La Transformación del Operador de Masa bajo Simetría Trombón

Determinada la ley de transformación para las cargas KK y el móduli complejo  $\tau$ , podemos considerar la transformación del otro móduli  $R$ , y la matriz de enrollamiento. De (3.38) sabemos sus leyes de transformación bajo  $\Lambda_{ji} \in SL(2, \mathbb{Z})$ , se puede entonces determinar la acción compensadora sobre ellos. Se hará esto imponiendo la condición

---

de que el hamiltoniano permanezca invariante bajo su acción. La transformación para el móduli complejo  $\tau$  puede ser re-escrito como:

$$\begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{\Lambda_{ji}}{l_{ji}}} \begin{pmatrix} \tau' \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{l_{ji}}{h_{ji}} M_{ji}} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

donde  $l_{ji} \equiv c\tau + d$  cuando  $\Lambda \in SL(2, \mathbb{Z})$  mientras  $\frac{1}{|h_{ji}|} M_{ji} \in SL(2, \mathbb{R})$  y  $h_{ji}$  se define como en la sección previa. El sector armónico de la supermembrana puede ser expresado como:

$$2\pi R(d\hat{X}^1, d\hat{X}^2) \begin{pmatrix} m_1 & l_1 \\ m_2 & l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

Bajo la primera transformación en la composición (6.21), el factor  $|l_{ji}|^{-1}$  es cancelado por la transformación de  $R$ :

$$R \xrightarrow{|l_{ji}|} R' = R|l_{ji}|. \quad (6.23)$$

Debemos considerar:

$$R'' = \frac{R'}{|l_{ji}|} \quad (6.24)$$

para compensar el factor  $|l_{ji}|$  en la segunda transformación en (6.21). Se tiene entonces,

$$R \rightarrow R' \rightarrow R. \quad (6.25)$$

Finalmente, bajo  $\Lambda_{ji}$  la matriz de enrollamiento transforma como:

$$\begin{pmatrix} m_1 & l_1 \\ m_2 & l_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} m'_1 & l'_1 \\ m'_2 & l'_2 \end{pmatrix} \Lambda_{ji}^{-1}, \quad (6.26)$$

En consecuencia, la acción compensadora debe ser

$$\begin{pmatrix} m'_1 & l'_1 \\ m'_2 & l'_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Lambda_{ji}^{-1}} \begin{pmatrix} m_1 & l_1 \\ m_2 & l_2 \end{pmatrix} \Lambda_{ji}, \quad (6.27)$$


---

de modo de tener un hamiltoniano invariante bajo esa acción. Notemos que el sector armónico no es invariante pero su contribución junto con la de su complejo conjugado produce un hamiltoniano invariante. El término de enrollamiento en la fórmula de masa, además permanece invariante mientras los términos KK varían de acuerdo a:

$$\frac{|p_i - q_i \tau|}{R \operatorname{Im} \tau} \rightarrow \frac{|p_j - q_j \tau|}{R \operatorname{Im} \tau}. \quad (6.28)$$

### 6.4.2. Calibrando la Simetría Trombón

Finalmente, podemos considerar el calibrado de la simetría trombón. El principal punto en la construcción es la descripción geométrica de las cargas KK  $(p, q)$  en términos de los elementos del grupo de homología  $H_1(T^2)$  de la fibra  $T^2$ . Si denotamos  $\rho(\alpha, \beta) \in SL(2, \mathbb{Z})$ , el elemento de  $SL(2, \mathbb{Z})$  asociado a  $(\alpha, \beta) \in \pi_1(\Sigma)$ , su acción sobre  $H_1(T^2)$  produce:

$$Q_j = \rho(\alpha, \beta) Q_i. \quad (6.29)$$

De la sección (6.3) se concluye que  $\rho(\alpha, \beta) = \Lambda_{ji}$  y que existe una representación asociada no-lineal realizada en términos de la matriz  $H_{ji}$ . La monodromía está construida con esta representación no-lineal de  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Nótese que el módulo  $Z[\Pi_1(\sigma)]$  es el mismo que el que surge de la representación lineal  $\rho$ , sin embargo su acción sobre  $\tau$ ,  $R$  y la matriz de enrollamiento es diferente ya que su transformación está hecha en términos de las matrices  $H_{ji}$ . De este modo, se obtiene una estructura global diferente para la supermembrana sobre este fibrado toroidal simpléctico. Siguiendo el análisis del capítulo 5, el hamiltoniano de la supermembrana está bien definido sobre este fibrado toroidal simpléctico. Notamos que las cargas  $(p, q)$  en el término KK de la fórmula de la masa al cuadrado no tiene valores arbitrarios. De hecho, los valores permitidos son aquellos determinados del módulo  $Z_\rho^2$ . Para obtener la invariancia de

---

la fórmula de la masa al cuadrado se puede considerar la suma sobre todos los valores  $(p, q)$  permitida por el módulo  $Z_\rho^2$ . Se llega a la familia de fibrados toroidales simplécticos cuyas monodromías realizan el calibrado de la simetría trombón.

## 6.5. Conclusión

Hemos encontrado que la supermembrana con cargas centrales formulada en términos de secciones del fibrado toroidal simpléctico con monodromía, es el modo natural de entender el origen en teoría M de las teorías de supergravedad calibradas tipo IIB en 9D. La descripción global es una realización del *mecanismo de esculpido* encontrado en [14] y que está asociado a las clases inequivalentes de fibrados toroidales simplécticos con monodromías en  $SL(2, \mathbb{Z})$ . La supermembrana compactificada sobre un  $T^2$  sin ninguna condición topológica extra, es una teoría de calibre sobre un fibrado principal trivial con grupo de estructura el grupo simpléctico homotópico a la identidad. La supermembrana con carga central no trivial es también invariante bajo el grupo de isotopía de simplectomorfismos, que en el caso considerado es  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Se analizó la supermembrana calibrada que se genera del calibrado de los subgrupos abelianos de este grupo  $SL(2, \mathbb{Z})$  el cual tiene un significado intrínseco en la teoría. El calibrado se realiza automáticamente formulando la supermembrana con cargas centrales como secciones de un fibrado toroidal simpléctico con monodromía. El subgrupo abeliano de  $SL(2, \mathbb{Z})$  actúa naturalmente sobre la homología del toro target (la fibra del fibrado  $H_1(T^2)$ ). Identificamos, en nuestra formulación de la supermembrana, los elementos de  $H_1(T^2)$  con  $(p, q)$ , cargas KK. Además, los números de enrollamiento están directamente relacionados a la cohomología de la variedad base  $\Sigma$ . Para una monodromía dada hay una correspondencia uno a uno entre el fibrado toroidal simpléctico con esa monodromía y los elementos del grupo de coinvariantes de

---

la monodromía [143]. Esos elementos son clases equivalentes de las cargas KK  $(p, q)$ , las cuales describimos explícitamente para las monodromías elípticas, parabólicas e hiperbólicas. Clasificamos los fibrados toroidales simplécticos en términos del grupo de coinvariantes de la monodromía. Esto muestra que a nivel de la supermembrana lo que es relevante son los elementos del grupo de coinvariantes de un grupo de monodromía dada. Los posibles valores de las cargas  $(p, q)$  sobre un fibrado toroidal simpléctico con esa monodromía están restringidos a la correspondiente clase de equivalencia que define el elemento del grupo de coinvariantes asociados al fibrado. Además, analizamos la presencia de elementos de torsión en la cohomología de la base de la variedad o de forma equivalente los grupos  $Z_m \oplus Z_n$  como grupo de coinvariantes de la monodromía. Obtuvimos, usando el mismo escenario geométrico, el calibrado de la simetría trombón. Esta se construyó de una representación no lineal de  $SL(2, \mathbb{Z})$ , dando origen a un fibrado toroidal simpléctico diferente en comparación a las construcciones anteriores en términos de representaciones lineales. De esta construcción de la supermembrana sobre un fibrado toroidal simpléctico, podemos identificar directamente las supergravidades calibradas IIB en 9D correspondientes. Por otro lado, una supergravedad calibrada dada solamente puede interactuar con la supermembrana correspondiente sobre un fibrado toroidal simpléctico asociado a un elemento coinvariante de la misma monodromía, porque en caso contrario ocurre una inconsistencia con las funciones de transición sobre el fibrado. Además, se obtienen los grados de libertad de calibre explícitos de la teoría, y la simetría global residual de la teoría para una monodromía dada.

---

---

# T-Dualidad en la Supermembrana con Cargas Centrales

---

En este capítulo mostramos que la T-dualidad es una simetría de la supermembrana con cargas centrales, resultado reportado en [16]. En teoría de cuerdas existen diferentes transformaciones de dualidad que relacionan las distintas teorías de cuerdas entre sí, que muestran que son diferentes aproximaciones de una única teoría, la teoría M. Así, se tienen las dualidades  $S$ ,  $T$  y  $U$ . La dualidad  $S$  es una simetría bajo la cual la constante de acoplamiento de una teoría cuántica cambia no-trivialmente, ésta incluye el caso de la dualidad fuerte-débil [120, 127].

Por ejemplo, la teoría de cuerdas de tipo  $IIB$  es autodual bajo la simetría de  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Otros ejemplos de dualidad  $S$  son: la dualidad entre la  $IIA$  y la teoría-M (sobre un círculo), la dualidad Tipo  $I$  y la heterótica  $SO(32)$ , y la dualidad entre la  $E_8$  y la teoría-M (sobre un intervalo). En el caso de teorías de cuerdas compactificadas, la transformaciones de dualidad  $S$  se refiere a aquellas dualidades que dejan el radio invariante, y varían el acoplamiento global de la teoría.

Por su parte la T-dualidad en teoría de cuerdas se refiere a una simetría que deja la constante de acoplamiento invariante a cualquier orden de perturbación y varían el



---

radio de compactificación. En el nivel más sencillo se presenta, por ejemplo en la teoría de cuerdas IIA o IIB, compactificada sobre un círculo, o más general, toroidalmente. Para el caso del círculo es la dualidad  $R \rightarrow \alpha'/R$ , que relaciona teorías de cuerdas compactificadas sobre un círculo pequeño con las compactificadas sobre uno grande intercambiando a su vez los modos de enrollamiento y los modos de Kaluza-Klein. En un sentido más general, incluye traslaciones<sup>1</sup> en el tensor antisimétrico y transformaciones de coordenadas más generales en el espacio-tiempo. La T-dualidad ha sido generalizada a backgrounds arbitrarios y también se ha explorado la T-dualidad no abeliana y T-dualidad fermiónica, tópicos que no comentamos en esta tesis.

Finalmente, la U-dualidad [22, 151] en teoría de cuerdas se postula como la unificación de dualidades, e incluye tanto la S-dualidad y T-dualidad, y adicionalmente incluyen transformaciones que mezclan los radios y los acoplamientos.

Actualmente, la teoría de campo doble es un escenario interesante para tratar de comprender algunas de las propiedades de dualidad de la teoría de cuerdas. Ésta es una teoría efectiva que de forma global describe modelos sigma en donde se introducen  $2d$  variables ( $d$  asociadas a las coordenadas –modos de enrollamiento– y  $d$  asociadas a sus momentos respectivos –modos de Kaluza-Klein–), sobre fibraciones toroidales  $T^{2d}$ , más un vínculo necesario para garantizar el número correcto de grados de libertad. Las funciones de transición entre las diferentes cartas de coordenadas del fibrado incluyen no solo difeomorfismos y transformaciones de calibre sino además transformaciones de dualidad [53]. El grupo de T-dualidad, genéricamente es igual a  $O(d, d, \mathbb{Z})$ . A este tipo de compactificaciones se le conoce como T-variedades [54]. Ejemplos de T-variedades generalizados pueden ser obtenidos construyendo fibraciones toroidales sobre variedades de base con ciclos no-contráctiles, por ejemplo el toro. La teoría de

---

<sup>1</sup>Traducción de *shifts*.

---

---

cuerdas puede ser definida consistentemente en estos backgrounds no-geométricos. Tales backgrounds pueden obtenerse a partir de compactificaciones con twists a los que se les hace posteriormente una transformación de dualidad [45] o bien si se actúa sobre backgrounds geométricos con flujos, y realizando luego una transformación con T-dualidad [53, 55].

En casos especiales, dichas compactificaciones con twists de dualidad corresponden a compactificaciones en orbifolds asimétricos los cuales pueden generar backgrounds de cuerdas consistentes [56, 59].

La realización de estas ideas en términos de la acción efectiva de cuerdas de tipo II ha sido obtenida recientemente en [152, 153]. Dicha acción efectiva propuesta es por consiguiente invariante bajo transformaciones de dualidad. En  $9D$  las transformaciones de dualidad corresponden a la simetría  $SL(2, \mathbb{Z}) \times Z_2$  [107]. Algunos aspectos de la T-dualidad en teoría de cuerdas fueron analizados con anterioridad en [113, 154] y más recientemente por [54]. La relación de la dualidad y teoría M también fue analizada en [112]. En [53] se argumentó que debe existir una formulación fundamental de la teoría de cuerda/teoría M en la cual las simetrías de dualidad sean manifiestas desde el comienzo. Las simetrías de dualidad de la teoría M y la teoría de cuerdas deberían ser simetrías geométricas discretas de este espacio generalizado. Con especial importancia, se argumentó que muchas supergravedades masivas o calibradas no pueden ser embebidas naturalmente en la teoría de cuerdas sin este esquema [52, 55, 58]. Sin embargo, a pesar de estos importantes avances, hasta donde sabemos, una realización concreta de estas ideas en términos de teorías del volumen-mundo de la teoría M, aún no se tiene, y es lo que hemos intentado resolver en esta tesis. Nuestro enfoque ha sido partir directamente de un objeto bien definido en teoría M: la supermembrana con cargas centrales compactificada en un toro. Hemos generalizado la noción de T-

---

---

dualidad a este objeto cuyo volumen del mundo es tridimensional. Hemos utilizado la descripción global de la supermembrana en términos de fibrados para así obtener las transformaciones globales y locales de T-dualidad.

## 7.1. Transformación de T-dualidad

En esta sección, introducimos las transformaciones de T-dualidad para la teoría de la supermembrana. Esto va más allá de la T-dualidad de la teoría de supercuerdas. De hecho, ésta última puede ser obtenida directamente a partir de la teoría de la membrana si se restringe la teoría a imponer que los campos dependan de una única coordenada espacial [13]. En esta sección generalizamos dichos resultados y obtenemos la transformación de T-dualidad asociada a la totalidad de los grados de libertad de la supermembrana. Veremos que esta es una simetría de la teoría cuando ésta se formula sobre un fibrado toroidal simpléctico dual (es decir, un fibrado toroidal simpléctico definido bajo la transformación de T-dualidad). Esta transformación actúa sobre el móduli así como sobre los campos bosónicos y fermiónicos. Veremos que la T-dualidad es una simetría natural de la teoría que fija la escala de energía de la tensión de la supermembrana  $T$ . La transformación de T-dualidad es una transformación no-lineal la cual intercambia los modos de enrollamiento  $\mathbb{W}$ , - definidos previamente como aquellos asociados a la cohomología de la variedad de base-, con las cargas KK,  $Q = (p, q)$  -asociadas a la homología del toro del target- junto con la transformación del móduli real  $R \rightarrow \frac{1}{R}$  y móduli complejo  $\tau \rightarrow \tilde{\tau}$ , ambos de un modo no trivial. En lo que sigue todas las cantidades transformadas bajo T-dualidad están denotadas con una tilde, para diferenciarlas de otras simetrías anteriormente consideradas.

Dada una matriz de enrollamiento  $\mathbb{W}$  y los modos KK, siempre existe una matriz

---

de enrollamiento equivalente  $\mathbb{W}' = \begin{pmatrix} l'_1 & l'_2 \\ m'_1 & m'_2 \end{pmatrix}$ , bajo la simetría  $SL(2, \mathbb{Z})$  (3.37) y

para las cargas KK, que transforma a  $\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ , como:

$$\begin{pmatrix} l'_1 \\ m'_1 \end{pmatrix} = \Lambda_0 \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

donde  $\Lambda_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$  con  $\alpha = \delta$  (ver apéndice E). Esta es una relación intrínseca entre las clases de equivalencia de matrices de enrollamiento  $\mathbb{W}$  y los modos KK. De hecho, es preservada bajo una transformación de U-dualidad que denotamos mediante variables con gorrito, ver (3.22):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} l'_1 \\ m'_1 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} \widehat{l}_1 \\ \widehat{m}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l'_1 \\ m'_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} \widehat{p} \\ \widehat{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} \widehat{l}_1 \\ \widehat{m}_1 \end{pmatrix} = \mathbb{M} \begin{pmatrix} \widehat{p} \\ \widehat{q} \end{pmatrix}, \quad (7.3)$$

donde

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \Lambda_0 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

La matriz  $\mathbb{M} \in SL(2, \mathbb{Z})$  tiene términos en la diagonal iguales, dado que  $\Lambda_0$  tiene  $\alpha = \delta$ . Para definir la transformación de T-dualidad introducimos las siguientes variables adimensionales (ec. 47) en [13]:

$$\mathcal{Z} := T\tilde{A}\tilde{Y} \quad , \quad \tilde{\mathcal{Z}} := T\tilde{A}\tilde{Y}, \quad (7.5)$$

donde  $T$  es la tensión de la supermembrana,  $A = (2\pi R)^2 Im\tau$  es el área del toro target y  $Y = \frac{RI m\tau}{|q\tau - p|}$ . Las variables con tilde  $\tilde{A}, \tilde{Y}$  son las cantidades transformadas bajo la T-dualidad. La transformación de T-dualidad se introduce por:

$$\begin{aligned} \text{El móduli : } \quad \mathcal{Z}\tilde{\mathcal{Z}} &= 1, & \tilde{\tau} &= \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \alpha}; \\ \text{Las cargas : } \quad \tilde{\mathcal{Q}} &= \Lambda_0 \mathcal{Q}, & \tilde{\mathbb{W}} &= \Lambda_0^{-1} \mathbb{W}'. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Notemos que las transformaciones de T-dualidad para la matriz de enrollamiento, teniendo  $\Lambda_0$  términos iguales en la diagonal, se convierte en una matriz que tiene la misma forma que (3.22). La expresión explícita para  $\Lambda_0$  está en el apéndice E. La principal diferencia es que  $\Lambda_0$  está determinada en términos de los modos de enrollamiento y los modos KK, definiendo una transformación no-lineal sobre las cargas de la supermembrana, mientras que (3.22) es una transformación lineal sobre ellos. Con la definición anterior de la transformación de T-dualidad se tiene:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l'_1 \\ m'_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} l'_1 \\ m'_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{l}'_1 \\ \tilde{m}'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

Esto es, los modos KK son transformados en los modos de enrollamiento y viceversa. Esta propiedad junto con la condición  $\mathcal{Z} = 1, \tilde{\mathcal{Z}} = 1$  asegura que  $(\text{T-dualidad})^2 = \mathbb{I}$ , la principal característica de la T-dualidad. Las transformaciones explícitas del modulus real, obtenido de la transformación de la T-dualidad es:

$$\tilde{R} = \frac{|\gamma\tau + \alpha||q\tau - p|^{2/3}}{T^{2/3}(Im\tau)^{4/3}(2\pi)^{4/3}R}, \quad \text{con} \quad \tilde{\tau} = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \alpha} \quad \text{y} \quad \mathcal{Z}^2 = \frac{TR^3(Im\tau)^2}{|q\tau - p|}, \quad (7.8)$$

Los modos de enrollamiento y la contribución de las cargas KK en la fórmula de masa al cuadrado transforma de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Tn^2 A^2 &= \frac{n^2}{\tilde{Y}^2} \mathcal{Z}^2, \\ \frac{m^2}{Y^2} &= T^2 m^2 \tilde{A}^2 \mathcal{Z}^2. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Para ver cómo transforma bajo T-dualidad la cantidad [13, 118]

$$Masa^2 = T^2((2\pi R)^2 n I m \tau)^2 + \frac{1}{R^2}((m_1^2 + (\frac{m|q\tau - p|}{R I m \tau})) + T^{2/3} H, \quad (7.10)$$

con el hamiltoniano  $H$  definido como:

$$H = H_{CCL} - T^{-2/3} \int_{\Sigma} \sqrt{W} \frac{T^2}{4} \{X_h^r, X_h^s\}^2, \quad (7.11)$$

y  $X_h^s$ , la parte armónica de  $X^s$  dada por (3.39). Las reglas de transformación para los campos son:

$$\begin{aligned} dX^m &= u d\tilde{X}^m, & d\tilde{X} &= u e^{i\varphi} dX, & A &= u e^{i\varphi} \tilde{A}, \\ \text{y} \quad \theta &= u^{3/2} \tilde{\theta}, & \bar{\theta} &= u^{3/2} \tilde{\bar{\theta}}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Donde  $u = \mathcal{Z}^2 = \frac{R|\gamma\tau + \alpha|}{R}$ ,  $\varphi$  fue definido en (3.38) y  $dX = dX^1 + idX^2$ . El dual de  $dX$ ,  $d\tilde{X}$  es:

$$d\tilde{X} = 2\pi \tilde{R}[(\tilde{m}_1 \tilde{\tau} + \tilde{l}_1) d\hat{X}^1 + (\tilde{m}_2 \tilde{\tau} + \tilde{l}_2) d\hat{X}^2]. \quad (7.13)$$

La fase  $e^{i\varphi}$  se cancela con el hermítico conjugado (h.c.) de la transformación del hamiltoniano. La relación entre el hamiltoniano a través de una transformación T-dual es

$$H = \frac{1}{\tilde{\mathcal{Z}}^8} \tilde{H}, \quad \tilde{H} = \frac{1}{\mathcal{Z}^8} H. \quad (7.14)$$

Por lo tanto, obtenemos para el operador de masa expresado en las variables originales y las variables duales la siguiente identidad:

$$M^2 = T^2 n^2 A^2 + \frac{m^2}{Y^2} + T^{2/3} H = \frac{1}{\tilde{\mathcal{Z}}^2} (\frac{n^2}{\tilde{Y}^2} + T^2 m^2 \tilde{A}^2) + \frac{T^{2/3}}{\tilde{\mathcal{Z}}^8} \tilde{H}. \quad (7.15)$$

Entonces como veremos más adelante, cuando  $\tilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z} = 1$ , la expresión para  $M^2$  es invariante bajo las transformaciones antes mencionadas.

## 7.2. T-Dualidad sobre Fibrados Simpléticos

En esta sección vamos a definir la noción de fibrado simplético dual.

Dos representaciones conjugadas  $\rho$  y  $U\rho U^{-1}$ , con  $U \in SL(2, \mathbb{Z})$ , define los módulos  $Z_\rho^2$  y  $Z_{U\rho U^{-1}}^2$  con los grupos de cohomología isomórficos  $H^2(\Sigma, Z_\rho^2) \sim H^2(\Sigma, Z_{U\rho U^{-1}}^2)$ . Estos definen fibrados toroidales simpléticos equivalentes. Una manera equivalente es considerar el grupo de coinvariantes asociadas a  $\rho$  y  $U\rho U^{-1}$ . De hecho, el grupo  $H^2(\Sigma, Z_\rho^2)$  es isomórfico, mediante la dualidad de Poincaré, al grupo de coinvariantes asociados a  $\rho$ . Entonces, hay un isomorfismo entre el grupo de coinvariantes asociados a  $\rho$  y a  $U\rho U^{-1}$ , ellos definen fibrados equivalentes simpléticos. Dado  $\mathcal{Q} \equiv \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in H_1(T^2)$ , el grupo de coinvariantes de monodromía  $\rho$  es el grupo abeliano de clases de equivalencia

$$\{\mathcal{Q} - \Lambda \hat{\mathcal{Q}} - \hat{\mathcal{Q}}\}, \quad (7.16)$$

para cualquier  $\Lambda \in \rho$  y cualquier  $\hat{\mathcal{Q}} = \begin{pmatrix} \hat{p} \\ \hat{q} \end{pmatrix} \in H_1(T^2)$ . De esto se sigue que esta clase es transformada a la clase asociada a  $U\mathcal{Q}$  bajo la representación  $U\rho U^{-1}$ :

$$\{U\mathcal{Q} - U\Lambda U^{-1} \tilde{\mathcal{Q}} - \tilde{\mathcal{Q}}\}, \quad (7.17)$$

donde  $\tilde{\mathcal{Q}} = U\hat{\mathcal{Q}}$ , pero cualquier  $\tilde{\mathcal{Q}} \in H_1(T^2)$  puede ser expresado siempre como  $U\hat{\mathcal{Q}}$  para algún otro  $\hat{\mathcal{Q}} \in H_1(T^2)$ , ya que  $U$  es invertible. Entonces, hay un isomorfismo entre el grupo de coinvariantes asociados a  $\rho$  y a  $U\rho U^{-1}$ , ellos definen fibrados toroidales simpléticos equivalentes.

Hay una relación biyectiva entre los fibrados toroidales simpléticos con monodromía  $\rho(\alpha, \beta)$  y los elementos del grupo de cohomología  $H_2(\Sigma, Z_\rho)$  de la variedad

de base  $\Sigma$  con coeficientes sobre el módulo  $Z_\rho^2$ , y por lo tanto con los elementos del grupo de coinvariantes asociado al grupo de monodromía  $G$ . Es decir, cada clase de equivalencia

$$\{\mathcal{Q} + g\widehat{\mathcal{Q}} - \widehat{\mathcal{Q}}\}, \quad (7.18)$$

para cualquiera  $g \in G$  y  $\widehat{\mathcal{Q}} \in H_1(T^2)$ , caracteriza un fibrado toroidal simpléctico. En la formulación de la supermembrana sobre esta estructura geométrica,  $\mathcal{Q}$  están identificadas con las cargas KK. La acción de  $G$ , el grupo de monodromía, deja invariante a la clase de equivalencia.  $G$  actúa como la identidad sobre el grupo coinvariante. Consideremos la transformación de dualidad introducida antes. Ésta intercambia los modos de KK  $\mathcal{Q}$  en componentes de la matriz de enrollamiento a través de la relación (7.1):

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix} = \Lambda_0 \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

Bajo la transformación de dualidad la clase de equivalencia transforma como:

$$\{\Lambda_0 \mathcal{Q} + (\Lambda_0 g \Lambda_0^{-1}) \Lambda_0 \widehat{\mathcal{Q}} - \Lambda_0 \widehat{\mathcal{Q}}\}. \quad (7.20)$$

Por lo tanto, para el fibrado dual esto se cumple,

$$\{\Lambda_0 \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix} + (\Lambda_0 g \Lambda_0^{-1}) \begin{pmatrix} \widehat{l}_1 \\ \widehat{m}_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \widehat{l}_1 \\ \widehat{m}_1 \end{pmatrix}\}. \quad (7.21)$$

Esto es, como un elemento del grupo coinvariante de  $\Lambda_0 G \Lambda_0^{-1}$ . Entonces, concluimos que la transformación de dualidad, adicionalmente a la transformación sobre el móduli  $R, \tau$ , también transforma la estructura geométrica sobre un fibrado toroidal simpléctico con monodromía  $\Lambda_0 G \Lambda_0^{-1}$ . Notamos que la transformación depende crucialmente de la clase de equivalencia original del grupo coinvariante. Así, para un fibrado toroidal simpléctico no-equivalente, la transformación dual es realizada con



una matriz  $SL(2, \mathbb{Z})$  diferente,  $\Lambda_0$ . En consecuencia, esta transformación dual entre la supermembrana sobre fibrados toroidales simplécticos no puede ser vista a el nivel de la teoría de supergravedad en la cual solo se distingue el grupo de monodromía pero no a su estructura coinvariante. Es posible que esta información quede codificada en los distintos tipos de soluciones que presentan un mismo tipo de supergravedad calibrada, por ejemplo, las diferentes soluciones tipo *domain wall*<sup>2</sup> en  $9D$  que llevan a soluciones tipo  $(p, q)$  7-branas en  $10D$  [131]. Un estudio detallado sobre esto queda para un futuro trabajo.

### 7.3. T-Dualidad como una Simetría

A continuación se puede determinar la T-dualidad como una simetría natural para la familia de supermembranas con cargas centrales. Tomamos:

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z} = 1 \Rightarrow T_0 = \frac{|q\tau - p|}{R^3(Im\tau)^2}. \quad (7.22)$$

Esto impone una relación entre la escala de energía de la tensión de la supermembrana y el móduli de la fibra toroidal y la de su dual. De hecho, podemos pensar en dos maneras diferentes: dados los valores del móduli y cargas Kaluza-Klein, éstos fijan la tensión permitida  $T_0$  o la manera a la inversa, en la cual para una tensión fija  $T_0$ , el radio, el parámetro de Teichmuller del 2-toro, y las cargas KK satisfacen (7.22). Cuando esta T-dualidad extendida a teoría M actúa únicamente sobre los estados tipo cuerda<sup>3</sup> de la supermembrana con cargas centrales sobre un  $\tilde{T}^2$  (congelando los demás modos), se recuperan las relaciones de T-dualidad estándar en teoría de cuerdas [13].

---

<sup>2</sup>Sin traducción.

<sup>3</sup>Estas son configuraciones físicas de la supermembrana con cargas centrales en las cuales se considera  $X^m = X^m(\tau, q_1 \hat{X}^1 + q_2 \hat{X}^2)$  y  $A^r = A^r(\tau, q_1 \hat{X}^1 + q_2 \hat{X}^2)$  donde  $q_1, q_2$  son números enteros primos relativos [13].

---

---

La restricción de los estados tipo cuerda de la supermembrana con cargas centrales sobre un toro dual  $\tilde{T}^2$  fue encontrada en [13].

En el nivel de la supergravedad la simetría de la variedad de base de la supermembrana es invisible y ella aparece indirectamente como las componentes no nulas de la 3-forma, la cual para la supermembrana en el CCL corresponde a  $C_{-rs}$ , ver [84]. En el trabajo [155] sobre toros no-conmutativos, el análisis está hecho fundamentalmente en espacio plano con un producto estrella de Moyal en el cual el parámetro no-conmutativo es constante y está dado por la 2-forma.

Sin embargo como se expresó en [155], esta descripción se puede generalizar a variedades curvas, para las cuales el producto estrella (no conmutativo) se modifica a una deformación por cuantización a la Kontsevich [156] y entonces, es necesario seleccionar adicionalmente una estructura de Poisson para caracterizar la teoría. En nuestro caso se corresponde a un producto estrella tipo Fedosov [157], por lo que podemos interpretar a  $C_{-rs} = F_{rs}$  como la 2-forma no-degenerada asociada a la condición de carga central, entonces  $\int_{\Sigma} F_{rs} = n$ .

La formulación de la supermembrana en la presencia de la 3-forma no nula ha sido analizada en [84]. En nuestra formulación hay una particularidad ya que el campo magnético sobre el volumen de mundo de la supermembrana inducido por la contribución de monopolo no es constante, en consecuencia pensamos que ésto debe estar asociado a la existencia de una 4-forma de flujo no nula  $G = dC$  en  $11D$ . En teoría de cuerdas la doble T-dualidad se puede ver como la existencia de una 3-forma no-nula asociada a un 2-toro no-conmutativo que aparece debido a la presencia del campo no nulo  $B_{ij}$  en el sector de cuerda cerrado. Sería interesante ver si existe alguna conexión con nuestros resultados.

---

## 7.4. Conclusión

En este capítulo mostramos la existencia de una nueva simetría  $Z_2$  que juega el papel de T-dualidad en la teoría M intercambiando las cargas de enrollamiento y las cargas KK pero dejando el hamiltoniano invariante. Localmente obtenemos la realización de la transformación de la T-dualidad a nivel de la supermembrana y globalmente estudiamos cómo se transforman dichos fibrados simplécticos. Encontramos que dicha transformación de dualidad es en realidad una simetría de la teoría. Por consiguiente, las monodromías cuyo origen está en la teoría de supergravedad IIA conjeturamos que se generan del fibrado toroidal simpléctico dual obtenido de esta nueva simetría de T-dualidad. En consecuencia, esperamos que la formulación geométrica global de las supermembranas que proponemos dé un origen unificado de todas las teorías de supergravedad calibradas del tipo II en  $9D$ . Entonces, podemos conjeturar que la supermembrana se convierte en el origen en teoría M de todas las teorías de supergravedades del tipo II en nueve dimensiones.

Este resultado es relevante también desde el punto de vista de teoría M dado que hemos conseguido realizar una formulación invariante bajo dualidades en términos de un objeto cuántico de la misma bien definido: la supermembrana con cargas centrales. Esta es una característica exigida a cualquier teoría que pretenda describir grados de libertad microscópicos de la teoría M.

---

## Conclusiones

---

En esta tesis hemos obtenido en el calibre del cono de luz (CCL), la acción de la supermembrana con cargas centrales no triviales sobre un 7-toro. En vista de las propiedades espectrales de la supermembrana en  $9D$  y  $7D$  no compactas respectivamente era natural hacer lo mismo para formulaciones de la teoría en  $4D$ . A nivel clásico se obtuvo que el hamiltoniano no contiene tampoco configuraciones tipo cuerda que puedan producir inestabilidades. Este resultado no era directo dado que la generalización de la condición de carga central es natural en dimensiones pares, y la variedad de compactificación es impar (7-toro), por lo que el análisis se hizo en dos pasos: primero compactificando en un  $T^6$  sobre el cual se imponen una condición de carga central generalizada y posteriormente en un  $S^1$ .

A nivel cuántico haciendo el análisis supersimétrico de la teoría se ve que el hamiltoniano cuántico regularizado tiene espectro discreto con multiplicidad finita. Esto prueba que la supermembrana con cargas centrales es un objeto bien definido a nivel cuántico en  $4D$  y por tanto describe (al menos) una parte de los grados de libertad microscópicos de la Teoría M.

A nivel de simetrías la teoría tiene una simetría global  $Sp(6, \mathbb{Z}) \times U(1)$  y una simetría de calibre asociada al grupo de simplectomorfismos sobre el volumen del

---

mundo de la supermembrana. Este grado de libertad esta asociado a la presencia de monopolos sobre el volumen de mundo de la misma. Esos monopolos magnéticos sugieren propiedades de quiralidad de manera similar a lo que ocurre en la descripción de  $D$ -branas magnetizadas, aunque este punto necesita de un estudio más profundo.

En principio se podría pensar que una compactificación en un 7-toro carecería de interés fenomenológico. Sin embargo la imposición de la condición de cargas centrales afecta a los mapas de la variedad base en el espacio target produciendo una ruptura espontánea de la supersimetría a una teoría con  $N = 1$ . Los grados de libertad de la teoría se preservan, además debido a la compactificación y a la carga central, todos los campos escalares adquieren masa. Luego, se hizo el análisis con la variedad de compactificación restringiéndose al caso de un 7-toro isotrópico. Para ello, se hizo explícita la dependencia en el móduli geométrico del 7-toro, esto es, en términos de los radios y éstos se consideraron iguales. Se encontró que no hay direcciones planas. Este es un resultado prometedor cara a un estudio realista de estabilización de móduli.

En resumen, la supermembrana con cargas centrales compactificada en un 7-toro isotrópico es un objeto cuántico bien definido que captura grados de libertad no perturbativos de la teoría M, con  $N = 1$  formulada en  $4D$  y quiral con simetría de calibre, realizando el grupo de symplectomorfismos.

Este un comienzo prometedor cara a obtener en un estudio a futuro una descripción fenomenológica del modelo estándar en términos de la supermembrana. Puntos abiertos es encontrar la formulación lagrangiana de la supermembrana que contenga al grupo de calibre del modelo estándar a bajas energías. Esfuerzos en esta dirección posteriores a este trabajo fueron hechos en: [148] la formulación no abeliana de la supermembrana, [147] la formulación de la supermembrana en una variedad  $G2$ .

---

La segunda parte de esta tesis se centró en encontrar la descripción a bajas energías del sector topológico de la supermembrana con cargas centrales dada por las teorías de supergravedad en el caso más sencillo,  $9D$ . A este respecto se trabajó en dos direcciones diferentes. En un principio, se intentó obtener los (super) vínculos<sup>1</sup> en el formalismo del superespacio usando el método de la simetría kappa explicado en la sección 2.3.1. La complejidad de ciertas expresiones para ir más allá de la aproximación a primer orden, entre otras cosas, hizo que se abandonase esa línea de investigación por otra centrada en fibrados con especial énfasis en la relación dada por los calibrados y las monodromías asociadas a dichos fibrados. En particular se estudiaron las simetrías globales de la supermembrana con cargas centrales, los grupos  $SL(2, \mathbb{Z})$ , y se interpretan a la luz de los conceptos de fibrados y monodromías. Como ya se ha dicho, estos conceptos son importantes porque ellos sirven de factor de clasificación de las teorías de supergravedad calibradas. Ya sabemos que localmente, tenemos la interpretación de la supermembrana en términos de mapas desde  $\Sigma$  hasta el target, el cual es un producto de  $M_9 \times T^2$ . En el desarrollo del capítulo 5, se mostró que globalmente se puede describir nuestra teoría con una estructura geométrica más compleja e interesante. Como sabemos, la supermembrana compactificada sobre un  $T^2$  sin ninguna condición topológica extra, es una teoría de calibre sobre un fibrado principal trivial cuya fibra es el toro.

Para el caso de la supermembrana con cargas centrales se probó que el hamiltoniano junto con los vínculos son invariantes bajo la acción de  $SL(2, \mathbb{Z})_\sigma \times SL(2, \mathbb{Z})_T$ . El grupo  $SL(2, \mathbb{Z})_T$  actúa sobre el grupo de homología  $H_1(T^2)$  de la fibra  $T^2$ . Con este resultado se pudo entonces formular la supermembrana con cargas centrales no triviales en términos de secciones de fibrados toroidales simplécticos con una representación  $\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow SL(2, \mathbb{Z})$  induciendo un  $Z[\pi_1(\Sigma)]$ -módulo en términos del grupo de

---

<sup>1</sup>Traducción de *superconstraints*.

---

---

homología de la fibra  $H_1(T^2)$ . La representación  $\rho$  es la monodromía sobre el fibrado.

Entonces, el hamiltoniano de la supermembrana con cargas centrales no triviales está definido sobre un fibrado toroidal simpléctico no trivial, por lo tanto globalmente, no podemos descomponer el target de la base  $\Sigma$ . Un aspecto interesante de esta estructura geométrica es la posible existencia de una extensión de la 2-forma simpléctica sobre la fibra al espacio total del fibrado toroidal simpléctico.

En el capítulo 6 se demuestra que a través de esta nueva interpretación geométrica de la supermembrana con cargas centrales no triviales podemos conectar con las supergravidades calibradas en  $9D$  tipo IIB. Estas supergravidades son las que aparecen al calibrar el grupo  $GL(2, \mathbb{R})$ : la elíptica, parabólica e hiperbólica y una supergravedad calibrada de tipo trombón. La supermembrana con carga central no trivial es también invariante bajo el grupo de isotopía de simplectomorfismos, que en el caso considerado es  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Se analizó la supermembrana calibrada asociada a las distintas clases de monodromías dadas por los subgrupos abelianos del grupo  $SL(2, \mathbb{Z})$ . El calibrado se realiza automáticamente formulando la supermembrana con cargas centrales como secciones de un fibrado toroidal simpléctico con monodromía. Además, la monodromía se define intrínsecamente considerando representaciones de  $\Pi_1(\Sigma)$ , el grupo fundamental de la variedad de base de Riemann de genus uno ( $\Sigma$ ), sobre  $\Pi_0(G)$ , el grupo de isotopía de los simplectomorfismos de la fibra  $G$  que en este caso corresponden al grupo  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Los simplectomorfismos en dos dimensiones son equivalente a los difeomorfismos que preservan el área. Los subgrupos abelianos de  $SL(2, \mathbb{Z})$  actúan naturalmente sobre la homología del toro target  $H_1(T^2)$ . La fibra completa corresponde en este caso al espacio target, que en el caso considerado es  $M_9 \times T^2$  pero las propiedades topológicas no triviales están solo asociadas al sector compacto. Identificamos, en nuestra formulación de la supermembrana, los elementos

---

---

de  $H_1(T^2)$  con  $(p, q)$ , cargas KK. Además, los números de enrollamiento están directamente relacionados a la cohomología de la variedad base  $\Sigma$ . Para una monodromía dada hay una correspondencia uno a uno entre el fibrado toroidal simpléctico con esa monodromía y los elementos del grupo de coinvariantes de la monodromía [143]. Los elementos del grupo de coinvariantes clasifican las clases de fibrados inequivalentes. Ellos están asociados a las clases equivalentes de las cargas KK  $(p, q)$ , las cuales describimos explícitamente para las monodromías elípticas, parabólicas e hiperbólicas. Clasificamos los fibrados toroidales simplécticos en términos del grupo de coinvariantes para una monodromía dada. Los posibles valores de las cargas  $(p, q)$  sobre un fibrado toroidal simpléctico con una monodromía dada están restringidos a los valores dados por la correspondiente clase de equivalencia que define el elemento del grupo de coinvariantes asociados al fibrado. Nosotros interpretamos que las distintas clases de coinvariantes para una monodromía dada pueden etiquetar a bajas energías las diferentes soluciones de supergravedad con esa monodromía. Pensamos que puede ser interesante estudiar con más profundidad esta relación para un trabajo a futuro y ver si los coinvariantes pueden ser de utilidad para encontrar nuevas soluciones de supergravedad.

Además, analizamos la presencia de elementos de torsión en la cohomología de la variedad de base o de forma equivalente los grupos  $Z_m \oplus Z_n$  como grupo de coinvariantes de la monodromía. Obtuvimos, usando el mismo escenario geométrico, el calibrado de la simetría trombón. Esta se contruyó de una representación no lineal de  $SL(2, \mathbb{Z})$ , dando origen a un fibrado toroidal simpléctico inequivalente en comparación a las construcciones anteriores hechas en términos de representaciones lineales. De esta construcción de la supermembrana sobre un fibrado toroidal simpléctico, podemos identificar directamente las supergravedades calibradas en  $9D$  correspondientes. Por otro lado, una supergravedad calibrada dada, solamente puede interactuar con la su-

---



---

permembrana correspondiente sobre un fibrado toroidal simpléctico asociado a un elemento coinvariante de la misma monodromía, porque en caso contrario ocurre una inconsistencia con las funciones de transición sobre el fibrado. Además obtenemos los grados de libertad de calibre explícitos de la teoría, y obtenemos la simetría residual una vez que la monodromía ha sido fijada. Para un fibrado particular esta coincide exactamente con el subgrupo dado por la monodromía.

Hemos mostrado explícitamente la relación con las teorías de supergravedad calibradas del tipo IIB en  $9D$ . En el capítulo 7 mostramos la existencia de una nueva simetría  $Z_2$  que juega el papel de T-dualidad en la teoría M intercambiando las cargas de enrollamiento y las cargas KK pero dejando el hamiltoniano invariante. Esta transformación de T-dualidad es una simetría de la teoría que transforma supermembranas descritas por un fibrado toroidal en supermembranas formuladas en el fibrado toroidal dual que está en la misma clase de equivalencia. La transformación de T-dualidad de la cuerda cerrada en  $9D$  entre el operador de masa IIA y IIB se obtiene como un límite de la transformación de T-dualidad para la supermembrana cuando el toro degenera en un círculo y consideramos únicamente las configuraciones de tipo cuerda contenida en la supermembrana.

Por esta razón, pensamos que todas las monodromías asociadas a la teoría IIA se generen del fibrado toroidal simpléctico dual obtenido de esta nueva simetría de T-dualidad. En consecuencia, esperamos que la formulación geométrica global de las supermembranas que proponemos dé un origen unificado de todas las teorías de supergravedad calibradas del tipo II en  $9D$ . Entonces, podemos conjeturar que la supermembrana se convierte en el origen en teoría M de todas las teorías de supergravedades del tipo II en nueve dimensiones. Como se ha conjeturado en [14] se puede afirmar que se verifica el diagrama 8.1: Esto es, se conjetura que la formulación de

---

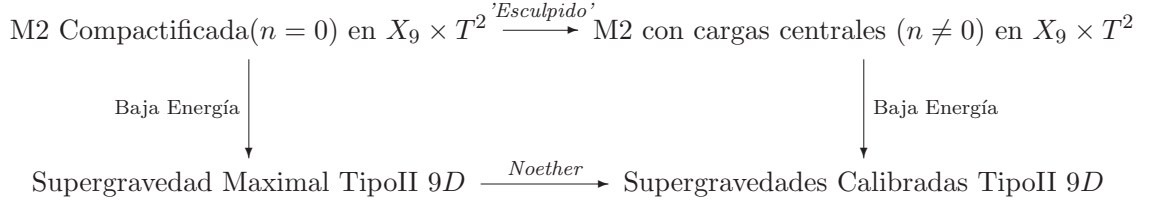


Figura 8.1: *Relaciones entre la supermembrana con cargas centrales y la supergravedades tipo II.*

la supermembrana en términos de secciones del fibrado toroidal simpléctico con una monodromía, es el modo natural de entender el origen en teoría M de las supergravedades calibradas. La descripción global es una realización del *mecanismo de esculpido* encontrado en [14] y que está asociado a las clases inequivalentes de fibrados toroidales simplécticos con monodromías en  $SL(2, \mathbb{Z})$ .

Este estudio demuestra que considerar solamente la supermembrana compactificada sin cargas centrales es incompleto y es totalmente necesario incluir como parte fundamental de la teoría M el sector de la supermembrana con cargas centrales aún a nivel clásico.

Una vez vista la conexión con las supergravedad calibradas en  $9D$ , una vía posible de extender este estudio es ver si podemos utilizar la clasificación en términos de fibrados de las supermembranas con cargas centrales para obtener las posibles supergravedades calibradas en dimensiones de mayor interés como son  $5D$  y  $4D$ . Asimismo el estudio y clasificación de las clases de coinvariantes nos puede servir para predecir, en principio soluciones nuevas de una teoría de supergravedad calibrada con una monodromía dada.

Otra posible vía a explorar es el origen de la supergravedad de Romans, hasta ahora desconocido a nivel de teoría M. La idea sería explorar esta deformación en términos de esta descripción global de la supermembrana con cargas centrales. Una

---

---

dificultad es que la condición de cargas centrales está definida para dimensión no compacta  $9D$ , y en  $10D$  habría que encontrar el equivalente a la condición de carga central sobre un círculo. El que ésta sea una deformación masiva y no calibrada desde este punto de vista es normal porque no hay campos de calibre que aparezcan vía compactificación sobre un círculo. En la fenomenología de cuerdas tipo II, el papel de las  $M2$ -branas enrolladas sobre 2-ciclos homológicos con torsión han sido usadas recientemente como una realización de la M-teoría de las llamadas simetrías de calibre discreta  $Z_N$ . Estas simetrías pueden tener un potencial número de cualidades desde el punto de vista fenomenológico. Por ejemplo, que sean simetrías discretas que pueden ayudar a realizar la estabilidad del protón o ayudar a eliminar algunos operadores peligrosos. Se ha conjeturado que estas  $M2$ -branas a bajas energías podrían producir partículas Aharonov-Bohm [150]. En nuestras construcciones muchos de los fibrados  $M2$ -branas naturalmente son enrolladas sobre 2-ciclos homológicos con torsión. Sería interesante ver si en compactificaciones a  $4D$ , podría ser una posible conexión con nuestra construcción.

Es de particular interés el que se haya encontrado que la formulación global de la supermembrana con cargas centrales tiene como simetrías las transformaciones de dualidad S y T, algo que está predicho para teoría M y hasta ahora buscado en el contexto de las acciones efectivas vía la teoría de campo doble. Esto representa una realización de esta propuesta directamente en teoría M, a partir de una teoría construida con un objeto cuántico bien definido: *la supermembrana con cargas centrales*.

---

## Apéndice

---

---

## Notación y Convenciones

---

### A.1. Notación

A menos que se indique otra cosa, los índices de los campos en esta tesis significarán lo siguiente: Los índices explícitos que aparecen en la acción son índices bosónicos del espacio target. Así que en nuestra convención se escribirán los índices bosónicos del espacio-tiempo como las letras del alfabeto latino  $a, b, c, \dots = 0, \dots, 10$ , mientras que los fermiónicos serán los del alfabeto griego  $\alpha, \beta, \chi, \dots = 1, \dots, 32$ . Cuando los índices tengan gorrito,  $(\hat{a}, \hat{\alpha})$  entonces estos serán del espacio-tangente, bosónicos y fermiónicos, respectivamente.

### A.2. Superespacio

En esta sección se describe el formalismo del superespacio [158] en el contexto de la supergravidad. Las coordenadas del superespacio son designadas por:

$$Z^M = (X^m, \theta^\mu) \tag{A.1}$$

donde  $X^m$  son las coordenadas bosónicas y  $\theta^\mu$ , las fermiónicas. La geometría del superespacio queda establecida por el supervielbein,  $E_M^{\hat{A}}$ , y el campo de la superconexión de espín,  $\Omega_{M\hat{C}}^{\hat{A}}$ . El supervielbein verifica

$$E_{\hat{A}}^M E_M^{\hat{B}} = \delta_{\hat{A}}^{\hat{B}}. \quad (\text{A.2})$$

En el lenguaje de las formas, se tiene, respectivamente,

$$E^{\hat{A}} = dz^M E_M^{\hat{A}}, \quad (\text{A.3})$$

y

$$\Omega_{\hat{C}}^{\hat{A}} = dz^M \Omega_{M\hat{C}}^{\hat{A}}. \quad (\text{A.4})$$

Esta última satisface la condición de Lorentz:

$$\Omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} = \frac{1}{4} \Omega^{\hat{a}\hat{b}} (\Gamma_{\hat{a}\hat{b}})^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}}, \quad (\text{A.5})$$

$$\text{y } \Omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{b}} = \Omega_{\hat{a}}^{\hat{\beta}} = 0.$$

A partir de  $E_M^{\hat{A}}$  y  $\Omega_{M\hat{C}}^{\hat{A}}$ , se define la supertorsión (en componentes)  $T_{\hat{A}\hat{B}}^{\hat{C}}$ , esto es:

$$T_{\hat{A}\hat{B}}^{\hat{C}} = (-1)^{M(\hat{B}+p)} E_{\hat{A}}^M E_{\hat{B}}^p [\tilde{D}_M E_p^{\hat{C}} - (-1)^{Mp} \tilde{D}_p E_M^{\hat{C}}], \quad (\text{A.6})$$

o

$$T_{MN}^{\hat{A}} = \partial_M E_N^{\hat{A}} - \partial_N E_M^{\hat{A}} + (-1)^{m(b+n)} E_N^{\hat{B}} \Omega_{M\hat{B}}^{\hat{A}} + (-1)^{m(b+n)} E_M^{\hat{C}} \Omega_{N\hat{C}}^{\hat{A}}, \quad (\text{A.7})$$

Se puede definir también, la supercurvatura,  $R_{\hat{A}\hat{B}}^{\hat{u}\hat{v}}$ , de la manera siguiente:

$$R_{\hat{A}\hat{B}}^{\hat{u}\hat{v}} = (-1)^{L(\hat{B}+p)} E_{\hat{A}}^L E_{\hat{B}}^p \{ \partial_L \Omega_p^{\hat{u}\hat{v}} - (-1)^{Lp} \partial_p \Omega_L^{\hat{u}\hat{v}} + [\Omega_L^{\hat{u}\hat{t}} \Omega_p^{\hat{t}\hat{v}} - (-1)^{Lp} \Omega_p^{\hat{u}\hat{t}} \Omega_L^{\hat{t}\hat{v}}] \eta_{\hat{t}\hat{t}'} \}. \quad (\text{A.8})$$

Además de la estructura del grupo del espacio-tangente (el grupo de Lorentz) se puede extender y definirse, además de  $R_{\hat{A}\hat{B}}^{\hat{u}\hat{v}}$ , las otras componentes de  $R_{\hat{A}\hat{B}}^{\hat{C}\hat{D}}$ ,

$$\begin{aligned} R_{\hat{A}\hat{B}}^{\hat{\chi}\hat{\delta}} &= \frac{1}{4} R_{\hat{A}\hat{B}}^{\hat{u}\hat{v}} (\Gamma_{\hat{u}\hat{v}})^{\hat{\chi}}_{\hat{\delta}}, \\ R_{\hat{A}\hat{B}}^{\hat{\chi}\hat{v}} &= R_{\hat{A}\hat{B}}^{\hat{u}\hat{\delta}} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

En el lenguaje de las formas, las super identidades de Bianchi, son:

$$DT^{\hat{A}} = E^{\hat{C}} R_{\hat{C}}^{\hat{A}}, \quad (\text{A.10})$$

$$DR_{\hat{C}}^{\hat{A}} = 0. \quad (\text{A.11})$$

En componentes, estas identidades se escriben como:

$$B_{\hat{A}\hat{B}\hat{C}}^{\hat{D}} \equiv 2\tilde{D}_{[\hat{A}}T_{\hat{B}\hat{C}}^{\hat{D}} + 4T_{[\hat{A}\hat{B}}^{\hat{C}'}T_{\hat{C}}^{\hat{D}} + R_{[\hat{A}\hat{B},\hat{C}}^{\hat{D}} = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$\tilde{D}_{[\hat{A}}R_{\hat{B}\hat{C}}^{\hat{D}} + 2T_{[\hat{A}\hat{B}}^{\hat{D}}R_{\hat{D}\hat{C}} = 0, \quad (\text{A.13})$$

donde las derivadas covariantes, están definidas por:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_L E_p^{\hat{u}} &= \partial_L E_p^{\hat{u}} + \Omega_{L\hat{v}}^{\hat{u}} E_p^{\hat{v}}, \\ \tilde{D}_L E_p^{\hat{\alpha}} &= \partial_L E_p^{\hat{\alpha}} + \frac{1}{4} \Omega_{L\hat{a}\hat{b}} (\Gamma^{\hat{a}\hat{b}})^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}} E_p^{\hat{\beta}}, \\ \tilde{D}_{\hat{A}} &= E_{\hat{A}}^L \tilde{D}_L, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} [\tilde{D}_{\hat{A}}, \tilde{D}_{\hat{B}}] &= -2T_{\hat{A}\hat{B}}^{\hat{C}} \tilde{D}_{\hat{C}} + R_{\hat{A}\hat{B}}, \\ [X, Y] &= XY - (-)^{XY} YX, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$[[\tilde{D}_{\hat{A}}, \tilde{D}_{\hat{B}}], \tilde{D}_{\hat{C}}] = 0. \quad (\text{A.16})$$

En la representación en el formalismo del superespacio, la teoría de supergravedad  $D = 11$  tiene una super 3-forma de calibre,  $C_{MNL}$  que define a una 4-forma denominada intensidad de campo  $F_{MNL P}$ , verificando:

$$dC = F, \quad dF = 0. \quad (\text{A.17})$$

En componentes, se tiene:

$$F_{MNL P} = 4\partial_{[M} C_{NLP]}. \quad (\text{A.18})$$

La 4-forma,  $F$ , se puede escribir en el espacio tangente usando los supervielbein, esto es,

$$F_{\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}} = (-)^{M(N+\hat{B}+L+\hat{C}+P+\hat{D})+N(L+\hat{C}+P+\hat{D})+L(P+\hat{D})} E_{\hat{A}}^M E_{\hat{B}}^N E_{\hat{C}}^L E_{\hat{D}}^P F_{MNL P}. \quad (\text{A.19})$$

## APÉNDICE B

### Supergravedad 11D

Por completitud, en este apéndice vamos a escribir la acción y simetrías de la supergravedad 11D [24, 25]. Seguimos la notación para los índices definidas en (A.1).

La acción de la supergravedad 11D es:

$$\begin{aligned}
 S_{SG}^{D=11} = \int d^{11}x \{ & -\frac{1}{2}eR(\omega) - 2e\bar{\Psi}_m\Gamma^{mnl}D_n(\frac{\omega + \hat{\omega}}{2})\Psi_l - \frac{1}{96}eF_{mnrs}F^{mnrs} + \\
 & - \frac{1}{2(12)^4}\varepsilon^{m_1m_2\dots m_{11}}F_{m_1m_2m_3m_4}F_{m_5m_6m_7m_8}C_{m_9m_{10}m_{11}} + \\
 & - \frac{1}{96}e(\bar{\Psi}_n\Gamma^{m_1m_2m_3m_4nl}\Psi_l + 12\bar{\Psi}^{m_1}\Gamma^{m_2m_3}\bar{\Psi}^{m_4})(F_{m_1m_2m_3m_4} + \hat{F}_{m_1m_2m_3m_4}) \}
 \end{aligned}
 \tag{B.1}$$

En esta acción se tienen tres campos fundamentales: Un tensor de segundo orden simétrico, 11-bein, gravitón,  $e_{\hat{a}m}(x)$ ; un vector-espinor de Majorana, gravitino,  $\Psi_{\hat{a}m}(x)$ , y un potencial de calibre de tres índices completamente antisimétricos  $C_{mnl}(x)$ .

Identificamos los objetos que aparecen en la acción:

$$e = \det e_{\hat{a}m}, \quad \text{diag}(\eta_{\hat{a}\hat{b}}) = (+, -, -, \dots, -), \quad k = \sqrt{8\pi G}, \tag{B.2}$$

donde  $k$  es la constante gravitacional, y  $\eta_{\hat{a}\hat{b}}$  es la métrica Minkowski del espacio-tangente.



Las matrices  $\Gamma$ ,  $(\Gamma^{\hat{a}})^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}}$ , obedecen

$$\{\Gamma^{\hat{a}}, \Gamma^{\hat{b}}\} = 2\eta_{\hat{a}\hat{b}}. \quad (\text{B.3})$$

Luego,  $\Gamma^{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n}$ , está definido por:

$$\Gamma^{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n} \equiv \Gamma^{[\hat{a}_1} \dots \Gamma^{\hat{a}_n]}, \quad (\text{B.4})$$

donde los corchetes [...] indican la suma antisimetrizada de los índices sobre todas las permutaciones. Los índices fermiónicos de las matrices  $(\Gamma^{\hat{a}})^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}}$ , son bajados por  $\Gamma^0$ :

$$(\Gamma^{\hat{a}})_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} = (\Gamma^0)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} (\Gamma^{\hat{a}})^{\hat{\beta}}_{\hat{\gamma}}. \quad (\text{B.5})$$

La acción (B.1) tiene  $k = 1$ , con lo cual quedan definidas las siguientes cantidades de la manera siguiente:

(1) El escalar de curvatura:

$$R = e^n_{\hat{b}} e^m_{\hat{a}} R_m^{\hat{a}}{}_{\hat{n}}^{\hat{b}}. \quad (\text{B.6})$$

(2) El tensor de curvatura:

$$R_{mn}^{\hat{a}}{}_{\hat{b}} = 2\partial_{[m}\hat{\omega}_{n]}^{\hat{a}}{}_{\hat{b}} - [\hat{\omega}_m, \hat{\omega}_n]^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}. \quad (\text{B.7})$$

(3) El tensor de torsión:

$$T_m^{\hat{a}}{}_{\hat{n}} = \frac{i}{2} [\bar{\Psi}_r \Gamma_m^{\hat{a}}{}_{\hat{n}}{}^r{}^s \Psi_s - 2\bar{\Psi}_m \Gamma^{\hat{a}} \Psi_n]. \quad (\text{B.8})$$

(4) La conexión de espín supercovariante:

$$\hat{\omega}_{m\hat{r}\hat{s}} = \omega_{m\hat{r}\hat{s}}(e) + \frac{1}{2}i(\bar{\Psi}_m \Gamma_{\hat{s}} \Psi_{\hat{r}} - \bar{\Psi}_m \Gamma_{\hat{r}} \Psi_{\hat{s}} + \bar{\Psi}_{\hat{s}} \Gamma_m \Psi_{\hat{r}}), \quad (\text{B.9})$$

con

$$\begin{aligned} \omega_m^{\hat{a}}{}_{\hat{b}} &= -e^n{}^{\hat{a}} \partial_{[m} e_{n]\hat{b}} + e^l{}^{\hat{a}} e^n{}_{\hat{b}} e_m{}^{\hat{c}} \partial_{[l} e_{n]\hat{c}} + e^n{}_{\hat{b}} \partial_{[m} e_{n]}^{\hat{a}} + \\ &+ (\bar{\Psi}_m \Gamma_{\hat{b}} \Psi^{\hat{a}} + \bar{\Psi}_{\hat{b}} \Gamma_m \Psi^{\hat{a}} - \bar{\Psi}_m \Gamma^{\hat{a}} \Psi_{\hat{b}}) - \frac{1}{2} \bar{\Psi}_n \Gamma_m{}^a{}_{\hat{b}}{}^n{}^p \Psi_p. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

(5) La derivada covariante:

$$D_n(\omega)\Psi_m = \partial_n\Psi_m + \frac{1}{4}\omega_{n\hat{a}\hat{b}}\Gamma^{\hat{a}\hat{b}}\Psi_m. \quad (\text{B.11})$$

(6) El campo supercovariante:

$$\hat{F}_{rstl} = F_{rstl} - 3\Psi_{[r}\Gamma_{st}\Psi_{l]}, \quad (\text{B.12})$$

con la intensidad del campo  $F$ :

$$F_{rstl} = 4\partial_{[r}C_{stl]}. \quad (\text{B.13})$$

La acción (B.1) es invariante bajo las siguientes transformaciones:

(1) Transformaciones supersimétricas:

$$\begin{aligned} \delta_{ss}e_m^{\hat{a}} &= 2\bar{\varepsilon}\Gamma^{\hat{a}}\Psi_m, \\ \delta_{ss}\Psi_m &= D_m(\hat{\omega})\varepsilon + T_m^{rstu}\varepsilon\hat{F}_{rstu}, \\ \delta_{ss}A_{klm} &= -6\bar{\varepsilon}\Gamma_{[kl}\Psi_{m]}, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

donde

$$T_m^{rstu} \equiv \frac{1}{288} \left( \Gamma_m^{rstu} - 8\delta_m^{[r}\Gamma^{stu]} \right). \quad (\text{B.15})$$

(2) Transformaciones de coordenadas generales:

$$\begin{aligned} \delta_g e_m^{\hat{a}} &= \xi^n \partial_n e_m^{\hat{a}} + \partial_m \xi^n e_n^{\hat{a}}, \\ \delta_g \Psi_m^{\hat{a}} &= \xi^n \partial_n \Psi_m^{\hat{a}} + \partial_m \xi^n \Psi_n^{\hat{a}}, \\ \delta_g A_{mnl} &= \xi^p \partial_p A_{mnl} + 3\partial_{[m} \xi^k A_{|k|nl]}, \\ \delta_g \omega_{m\hat{b}}^{\hat{a}} &= \xi^n \partial_n \omega_{m\hat{b}}^{\hat{a}} + \partial_m \xi^n \omega_{n\hat{b}}^{\hat{a}}. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

(3) Transformaciones de Calibre:

$$\delta_c C_{mnl} = 3\partial_{[m} \xi_{nl]}. \quad (\text{B.17})$$

(4) Transformaciones Locales de Lorentz:

$$\begin{aligned}\delta_l e_m^{\hat{a}} &= \lambda_{\hat{b}}^{\hat{a}} e_m^{\hat{b}}, \\ \delta_l \Psi_m^{\hat{\alpha}} &= \left[ \frac{1}{4} \lambda_{\hat{a}\hat{b}} (\Gamma^{\hat{a}\hat{b}})^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}} \right] \Psi_m^{\hat{\beta}}, \\ \delta_l \omega_{m\hat{b}}^{\hat{a}} &= \partial_m \lambda_{\hat{b}}^{\hat{a}} + \lambda_{\hat{c}}^{\hat{a}} \omega_{m\hat{b}}^{\hat{c}} - \omega_{m\hat{c}}^{\hat{a}} \lambda_{\hat{b}}^{\hat{c}}.\end{aligned}\tag{B.18}$$

El álgebra completa de estas transformaciones son:

$$[\delta_1, \delta_2] = \delta_g(\xi_3) + \delta_{ss}(\varepsilon_3) + \delta_l(\lambda_3) + \delta_c(\xi_{3mn}),\tag{B.19}$$

$$\delta \equiv \delta_g(\xi) + \delta_{ss}(\varepsilon) + \delta_l(\lambda) + \delta_c(\xi_{mn}),\tag{B.20}$$

donde,

$$\begin{aligned}\xi_3^m &= \xi_2^n \partial_n \xi_1^m + \bar{\varepsilon}_2 \hat{\Gamma}^m \varepsilon_1 - (1 \leftrightarrow 2), \\ \varepsilon_3 &= -\bar{\varepsilon}_2 \hat{\Gamma}^n \varepsilon_1 \Psi_n - \xi_1^n \partial_n \varepsilon_2 + \frac{1}{4} \lambda_{\hat{a}\hat{b}} \Gamma^{\hat{a}\hat{b}} \varepsilon_1 - (1 \leftrightarrow 2), \\ \xi_{3mn} &= -\bar{\varepsilon}_2 \hat{\Gamma}^k \varepsilon_1 A_{kmn} - \bar{\varepsilon}_2 \Gamma_{mn} \varepsilon_1 - \xi_1^k \partial_k \xi_{2mn} - 2\xi_1^k \partial_{[m} \xi_{2n]k} - (1 \leftrightarrow 2) \\ \lambda_{3\hat{b}}^{\hat{a}} &= -\bar{\varepsilon}_2 \hat{\Gamma}^n \varepsilon_1 \omega_n - \xi_1^n \partial_n \lambda_{2\hat{b}}^{\hat{a}} + \lambda_{2\hat{c}}^{\hat{a}} \lambda_{1\hat{b}}^{\hat{c}} + \frac{1}{144} \hat{\varepsilon}_2 \left[ \Gamma_{\hat{b}}^{\hat{a}rstu} \hat{F}_{rstu} + 24 \Gamma_{rs} \hat{F}_{\hat{b}}^{\hat{a}rs} \right] \varepsilon_1 - (1 \leftrightarrow 2).\end{aligned}\tag{B.21}$$

Las ecuaciones de movimiento a partir de  $\delta L = 0$  [24] son:

$$\begin{aligned}\Gamma^{\hat{u}\hat{v}\hat{w}} \hat{D}_{\hat{v}} \Psi_{\hat{w}} &= 0, \\ \hat{D}_{\hat{t}} \hat{F}^{\hat{t}\hat{u}\hat{l}\hat{z}} + \frac{1}{(24)^2} \varepsilon^{\hat{m}\hat{n}\hat{p}\hat{q}\hat{v}\hat{w}\hat{x}\hat{y}} \hat{F}_{\hat{m}\hat{n}\hat{p}\hat{q}} \hat{F}_{\hat{v}\hat{w}\hat{x}\hat{y}} &= 0.\end{aligned}\tag{B.22}$$

donde la cantidad  $\hat{D}$  indica superderivada covariante.

Las identidades de Bianchi para las tres intensidades de campo supercovariantes

son:

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{t,\hat{y}\hat{n}}^{\hat{n}} - \frac{1}{2}\eta_{t\hat{y}}\hat{R}_{\hat{m}\hat{n},}^{\hat{m}\hat{n}} &= \frac{1}{24}[\eta_{t\hat{y}}(\hat{F}_{\hat{m}\hat{n}\hat{p}\hat{q}})^2 - 8\hat{F}_{\hat{m}\hat{n}\hat{p}t}\hat{F}^{\hat{m}\hat{n}\hat{p}}_{\hat{y}}], \\
\hat{D}_{[\hat{p}}\hat{D}_{\hat{m}}\Psi_{\hat{n}]} + T_{[\hat{n}}^{\hat{v}\hat{w}\hat{x}\hat{y}}\hat{D}_{\hat{p}}\Psi_{\hat{m}}]\hat{F}_{\hat{v}\hat{w}\hat{x}\hat{y}} &= 0, \\
\hat{R}_{[\hat{m}\hat{n},\hat{p}]\hat{q}} &= 0, \\
\hat{D}_{[\hat{y}}\hat{F}_{\hat{m}\hat{n}\hat{p}\hat{q}]} &= 0.
\end{aligned} \tag{B.23}$$

---

## Cálculo de Supervínculos Usando Simetría Kappa

---

En este apéndice vamos a reportar los resultados preliminares obtenidos cuando se aplica el método basado en la simetría kappa para determinar la supergravedad calibrada asociada a la supermembrana con cargas centrales. Este método se basa en el conocimiento que se tiene que la supergravedad consistente acoplada a esta supermembrana  $D = 11$  es la única supergravedad  $D = 11$ . Esto se determina cuando al exigir que la acción (1.29) sea invariante kappa, se consiguen restricciones sobre la super-3-forma  $B_{LMN}(x, \theta)$  y la supertorsión  $T_{\hat{C}\hat{B}}^{\hat{A}}(x, \theta)$ . Este procedimiento es realizado por [41] para el caso general. En nuestro caso tenemos una acción que tiene una expresión explícita en términos de las supercoordenadas del superespacio. Por esta razón una posibilidad a seguir es verificar a cada orden en  $\theta$  si realmente hay invariancia bajo la simetría kappa y cuáles son los vínculos sobre la geometría del superespacio. En el caso de la supermembrana  $D = 11$  o enrollada sobre un  $T^2$  el resultado debería ser una extensión del encontrado por [41]. Sin embargo, a nuestra teoría, la extensión no es directa.

## C.1. Supermembrana y Supergravedad $D = 11$ . Superespacio Plano a Primer Orden en $(\theta, \partial_i \theta)$

En esta sección se explica el método a aplicar usando el ejemplo de la supermembrana  $D = 11$  en el superespacio plano a primer orden en  $\theta$  para verificar el resultado ya conocido para el caso espacio-tiempo de Minkowski.

Para el superespacio plano se tienen las expresiones (1.31) y (1.32) para  $E_M^{\hat{A}}$  y  $C_{MNP}$  respectivamente. Si consideramos la aproximación  $O(\theta^2, \partial_i \theta^2)$ , estas expresiones quedan:

$$\begin{aligned} E_m^{\hat{a}}(x, \theta) &= \delta_m^{\hat{a}}, \quad E_m^{\hat{\alpha}} = 0, \quad E_\alpha^{\hat{a}} = -(\bar{\theta} \Gamma^{\hat{a}})_\alpha, \quad E_\alpha^{\hat{\alpha}} = \delta_\alpha^{\hat{\alpha}}, \\ C_{mnp} &= 0 + O(\theta^2), \quad C_{mn\alpha} = (\bar{\theta} \Gamma_{mn})_\alpha + O(\theta^2), \quad C_{m\alpha\beta} = 0 + O(\theta^2), \\ C_{\alpha\beta\gamma} &= 0 + O(\theta^2). \end{aligned} \tag{C.1}$$

Con estas expresiones la ecuación (1.33) resulta:

$$S_\theta = \int d^3\xi \{ -\sqrt{-g} - \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \bar{\theta} \Gamma_{mn} \partial_k \theta \partial_i X^m \partial_j X^n \} + O(\theta^2, (\partial_i \theta)^2). \tag{C.2}$$

A continuación se hace  $\delta_\kappa S_\theta = 0$  considerando la transformación kappa (1.23) en su versión en componentes a primer orden en  $\theta$ , esto es:

$$\begin{aligned} \delta X^m &= (1 - \Gamma) \bar{\kappa} \Gamma^m \theta + O(\theta^2) = \bar{\kappa}_- \Gamma^m \theta + O(\theta^2), \\ \delta \theta &= (1 - \Gamma) \kappa + \bar{\theta} \Gamma^m (1 - \Gamma) \kappa + O(\theta^2) = \kappa_- + O(\theta^2), \end{aligned} \tag{C.3}$$

donde se toma también la aproximación  $O(\theta^2, (\partial_i \theta)^2)$  y adicionalmente  $O(\partial_i \bar{\kappa}, \Psi = 0)$ .

Con  $\kappa$  el parámetro fermiónico de la transformación kappa.

Entonces, se hace  $\delta_\kappa S_\theta = 0$  obteniéndose:

$$\begin{aligned} \delta_\kappa S_\theta &= \int d^3\xi \{ -(\bar{\kappa}_- \Gamma) [(+1) \varepsilon^{ijk} \partial_i X^{\hat{c}} \partial_j X^{\hat{b}} \Gamma_{\hat{c}\hat{b}}] \partial_k \theta + \\ &+ \frac{1}{2} (\bar{\kappa}_- \Gamma) \varepsilon^{ijk} \partial_i X^m \partial_j X^n \Gamma_{mn} \partial_k \theta + O(\theta^2, (\partial_i \theta)^2, \partial_i \bar{\kappa}) \} = 0, \end{aligned} \quad (C.4)$$

Expresión que puede probarse se verifica al usar  $g^{ij} g_{ij} = \delta_i^i = +1$ ,  $\bar{\kappa}_- \Gamma = -\bar{\kappa}_-$ .

La segunda parte del método consiste en hacer:

$$\delta_\kappa S = \int d^3\xi \left[ -\delta(\sqrt{-g}) + \frac{1}{6} \delta(\varepsilon^{ijk} E_i^{\hat{A}} E_j^{\hat{B}} E_k^{\hat{C}} B_{\hat{C}\hat{B}\hat{A}}) \right] \Big|_{O(\theta^2, (\partial_i \theta)^2, \partial_i \bar{\kappa}, \Psi=0)}, \quad (C.5)$$

para luego comparar con (C.4). Luego de hacer explícitamente (C.5) e imponer la aproximación  $O(\theta^2, (\partial_i \theta)^2, \partial_i \bar{\kappa}, \Psi = 0)$ , en la que estamos trabajando, se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta_\kappa S &= \int d^3\xi \left[ \sqrt{-g} g^{ij} \{ \partial_i X^{\hat{a}} \partial_j X^{\hat{c}} + \partial_i X^{\hat{a}} \bar{\theta} \Gamma^{\hat{c}} \partial_j \theta + \partial_j X^{\hat{c}} \bar{\theta} \Gamma^{\hat{a}} \partial_i \theta \} \delta_\kappa E^{\hat{\beta}} T_{\hat{c}\hat{\beta}}^{\hat{b}} \eta_{\hat{a}\hat{b}} + \right. \\ &+ \sqrt{-g} g^{ij} \delta_\kappa E^{\hat{\beta}} \partial_i X^{\hat{a}} \partial_j \theta^{\hat{\lambda}} T_{\hat{\lambda}\hat{\beta}}^{\hat{b}} \eta_{\hat{a}\hat{b}} + \\ &+ \frac{1}{6} 3 \{ -\varepsilon^{ijk} [\partial_i X^{\hat{a}} \partial_j X^{\hat{b}} \partial_k X^{\hat{c}}] \delta_\kappa E^{\hat{\beta}} T_{\hat{c}\hat{\beta}}^{\hat{\lambda}} (\bar{\theta} \Gamma_{\hat{b}\hat{a}})_{\hat{\lambda}} + \\ &- \varepsilon^{ijk} \delta_\kappa E^{\hat{\beta}} [\partial_i X^{\hat{a}} \partial_j X^{\hat{b}} \partial_k \theta^{\hat{\nu}}] T_{\hat{\nu}\hat{\beta}}^{\hat{\lambda}} (\bar{\theta} \Gamma_{\hat{b}\hat{a}})_{\hat{\lambda}} + \\ &- 3 \varepsilon^{ijk} [\partial_i \theta^{\hat{\alpha}} \partial_j X^{\hat{b}} \partial_k X^{\hat{d}}] \delta_\kappa E^{\hat{\beta}} T_{\hat{d}\hat{\beta}}^{\hat{c}} (\bar{\theta} \Gamma_{\hat{c}\hat{b}})_{\hat{\alpha}} + \\ &\left. + \varepsilon^{ijk} \partial_i \theta^{\hat{\alpha}} \partial_j X^{\hat{b}} \partial_k X^{\hat{c}} \delta_\kappa \{ (\bar{\theta} \Gamma_{\hat{c}\hat{b}})_{\hat{\alpha}} \} \right] = 0, \end{aligned} \quad (C.6)$$

donde  $\delta_\kappa E^{\hat{\beta}} = \kappa_-^{\hat{\beta}}$ . Entonces, si se comparan (C.6) y (C.4) se obtiene:

$$T_{\hat{c}\hat{\beta}}^{\hat{b}} = 0, \quad T_{\hat{c}\hat{\beta}}^{\hat{\lambda}} = 0, \quad T_{\hat{\nu}\hat{\beta}}^{\hat{\lambda}} = 0. \quad (C.7)$$

El resultado (C.7) conduce a:

$$\begin{aligned} \delta_\kappa S &= \int d^3\xi \left[ +\sqrt{-g} g^{ij} \delta_\kappa E^{\hat{\beta}} \partial_i X^{\hat{a}} \partial_j \theta^{\hat{\lambda}} T_{\hat{\lambda}\hat{\beta}}^{\hat{b}} \eta_{\hat{a}\hat{b}} + \right. \\ &\left. + \varepsilon^{ijk} \partial_i \theta^{\hat{\alpha}} \partial_j X^{\hat{b}} \partial_k X^{\hat{c}} \delta_\kappa \{ (\bar{\theta} \Gamma_{\hat{c}\hat{b}})_{\hat{\alpha}} \} \right] = 0, \end{aligned} \quad (C.8)$$

donde ya sabemos que

$$B_{mn\alpha} = (\bar{\theta} \Gamma_{mn})_{\alpha} + O(\theta^2), \quad \delta_{\kappa} B_{mn\alpha} = \delta_{\kappa} (\bar{\theta} \Gamma_{mn})_{\alpha} + O(\theta^2). \quad (\text{C.9})$$

Al comparar (C.8) con (C.4), se tiene:

$$T_{\hat{\lambda}\hat{\beta}}^{\hat{b}} \propto (\Gamma^{\hat{b}})_{\hat{\lambda}\hat{\beta}}, \quad \delta_{\kappa} B_{mn\alpha} \propto \bar{\kappa}_{-} \Gamma_{mn}. \quad (\text{C.10})$$

Estos resultados (C.7) y (C.10) es el que podría esperarse de acuerdo al resultado general en [41].

## C.2. Supermembrana en $M_9 \times T^2$ a Primer Orden en $(\theta, \partial_i \theta)$

A continuación consideraremos un enrollamiento de las coordenadas del target en un  $T^2$ , e intentaremos hacer el mismo procedimiento descrito en la sección C.1 de este apéndice. Se supone que el espacio-tiempo se podrá considerar como  $M_9 \times T^2$ . Para ello partiendo de (C.2) se hace una descomposición en las coordenadas  $X^m = (X^{m'}, X^r)$  donde  $m' = 0, \dots, 8$  y  $r = 9, 10$  corresponden a las no-compactas y compactas respectivamente. Entonces, la acción se puede escribir como:

$$S = \int d^3\xi \{ -\sqrt{-g} + S_{\text{no-compacta}} + S_{\text{compacta}} + S_{\text{mixta}} \}, \quad (\text{C.11})$$

con

$$\begin{aligned} S_{\text{no-compacta}} &\equiv -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \bar{\theta} \Gamma_{m'n'} \partial_k \theta \partial_i X^{m'} \partial_j X^{n'}, \\ S_{\text{compacta}} &\equiv -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \bar{\theta} \Gamma_{sr} \partial_k \theta \partial_i X^s \partial_j X^r, \\ S_{\text{mixta}} &\equiv -\frac{1}{2} 2 \varepsilon^{ijk} \bar{\theta} \Gamma_{m's} \partial_k \theta \partial_i X^{m'} \partial_j X^s. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$



A continuación se hace  $\delta_\kappa S$ , esto es,  $\delta_\kappa S_{\text{no-compacta}}$ ,  $\delta_\kappa S_{\text{compacta}}$ ,  $\delta_\kappa S_{\text{mixta}}$  y  $\delta\sqrt{-g}$ , y seguimos el mismo procedimiento de antes. Se obtiene

$$\begin{aligned} \delta_\kappa S_{M_9 \times T^2} = & \int d^3\xi \{ -2\sqrt{-g}g^{ij}[\partial_i X^{\hat{a}'} \bar{\kappa}_- \Gamma_{\hat{a}'} \partial_j \theta + \partial_i X^{\hat{r}} \bar{\kappa}_- \Gamma_{\hat{r}} \partial_j \theta] + \\ & - \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \bar{\kappa}_- \Gamma_{m'n'} \partial_k \theta \partial_i X^{m'} \partial_j X^{n'} - \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \bar{\kappa}_- \Gamma_{rs} \partial_k \theta \partial_i X^r \partial_j X^s + \\ & - \frac{1}{2} 2\varepsilon^{ijk} \bar{\kappa}_- \Gamma_{m's} \partial_k \theta \partial_i X^{m'} \partial_j X^s + O(\theta^2, (\partial_k \theta)^2, \partial_i \kappa) \}, \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

donde hemos supuesto las transformaciones bajo simetría kappa en la aproximación considerada para nuestros cálculos:

$$\begin{aligned} \delta X^{m'} &= (1 - \Gamma) \bar{\kappa} \Gamma^{m'} \theta + O(\theta^2) = \bar{\kappa}_- \Gamma^{m'} \theta + O(\theta^2), \\ \delta X^r &= (1 - \Gamma) \bar{\kappa} \Gamma^r \theta + O(\theta^2) = \bar{\kappa}_- \Gamma^r \theta + O(\theta^2), \\ \delta \theta &= (1 - \Gamma) \kappa + \bar{\theta} \Gamma^m (1 - \Gamma) \kappa + O(\theta^2) = \kappa_- + O(\theta^2). \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Se puede verificar que efectivamente (C.13) se anula. Este cálculo no lo mostraremos aquí pero era un resultado esperado. A continuación hacemos  $\delta_\kappa$  de la acción en su forma supercovariante, pero esta vez hay que introducir el hecho que hay dos coordenadas compactificadas. Se hace la descomposición usando la siguiente notación: las coordenadas primadas corresponden a las coordenadas no compactificadas, y las coordenadas con asteriscos las coordenadas compactificadas (todos índices del superespacio):

$$\begin{aligned} \delta_\kappa S_{M_9 \times T^2} = & - \int d^3\xi \delta(\sqrt{-g}) + \\ & - \int d^3\xi \frac{1}{6} \delta_\kappa [\varepsilon^{ijk} E_i^{\hat{A}'} E_j^{\hat{B}'} E_k^{\hat{C}'} B_{\hat{C}' \hat{B}' \hat{A}'} + 3\varepsilon^{ijk} E_i^{\hat{A}'} E_j^{\hat{B}'} E_k^{\hat{C}*} B_{\hat{C}* \hat{B}' \hat{A}'} + \\ & + 3\varepsilon^{ijk} E_i^{\hat{A}'} E_j^{\hat{B}*} E_k^{\hat{C}*} B_{\hat{C}* \hat{B}* \hat{A}'} + \varepsilon^{ijk} E_i^{\hat{A}*} E_j^{\hat{B}*} E_k^{\hat{C}*} B_{\hat{C}* \hat{B}* \hat{A}*}]. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Esta expresión puede re-escribirse:

$$\begin{aligned} \delta_\kappa S_{M_9 \times T^2} = & \int d^3\xi \{ \delta_\kappa S_{\sqrt{-g}} + \delta_\kappa S_{B_{\hat{c}' \hat{b}' \hat{a}'}} + \delta_\kappa S_{B_{\hat{C}* \hat{B}' \hat{A}'}} + \\ & \delta_\kappa S_{B_{\hat{C}* \hat{B}* \hat{A}'}} + \delta_\kappa S_{B_{\hat{C}* \hat{B}* \hat{A}*}} \}, \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

donde:

$$\delta_\kappa S_{\sqrt{-g}} \equiv \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ij} 2E_i^{\hat{a}} \delta_\kappa E_j^{\hat{B}} E_j^{\hat{C}} T_{\hat{C}\hat{B}}^{\hat{b}} \eta_{\hat{a}\hat{b}}. \quad (\text{C.17})$$

Se ha supuesto que la parte no-compacta cumple las condiciones de superespacio plano. Luego,

$$\begin{aligned} \delta S_{\hat{C}'\hat{B}'\hat{A}'} &= -\frac{1}{6} 3\varepsilon^{ijk} E_i^{\hat{a}'} E_j^{\hat{b}'} [-2\delta E^{\hat{\rho}} E_k^{\hat{D}'} T_{\hat{D}'\hat{\rho}}^{\hat{\lambda}} - 2\delta E^{\hat{\rho}} E_k^{\hat{D}*} T_{\hat{D}*\hat{\rho}}^{\hat{\lambda}}] B_{\hat{\lambda}\hat{b}'\hat{a}'} + \\ &\quad - \varepsilon^{ijk} E_j^{\hat{b}'} E_i^{\hat{a}'} [-2\delta E^{\hat{\rho}} E_k^{\hat{D}'} T_{\hat{D}'\hat{\rho}}^{\hat{c}'} - 2\delta E^{\hat{\rho}} E_k^{\hat{D}*} T_{\hat{D}*\hat{\rho}}^{\hat{c}'}] B_{\hat{c}'\hat{a}\hat{b}'} + \\ &\quad - \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} E_i^{\hat{\alpha}} E_j^{\hat{b}'} E_k^{\hat{c}'} \delta B_{\hat{c}'\hat{b}'\hat{\alpha}}, \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

$$\begin{aligned} \delta S_{B_{\hat{C}*}\hat{B}'\hat{A}'} &\equiv -\frac{1}{6} 9\varepsilon^{ijk} E_i^{\hat{A}'} E_j^{\hat{B}'} [\partial_k(\delta E^{\hat{C}*}) - \delta E^{\hat{B}'} E_k^{\hat{D}'} T_{\hat{D}'\hat{B}'}^{\hat{C}*} - \delta E^{\hat{B}*} E_k^{\hat{D}'} T_{\hat{D}'\hat{B}*}^{\hat{C}*}] B_{\hat{C}*}\hat{B}'\hat{A}' + \\ &\quad - \frac{1}{6} 9\varepsilon^{ijk} E_i^{\hat{A}'} E_j^{\hat{B}'} [-\delta E^{\hat{B}'} E_k^{\hat{D}*} T_{\hat{D}*}\hat{B}'^{\hat{C}*} - \delta E^{\hat{B}*} E_k^{\hat{D}*} T_{\hat{D}*}\hat{B}*^{\hat{C}*}] B_{\hat{C}*}\hat{B}'\hat{A}' + \\ &\quad - \frac{1}{6} 3\varepsilon^{ijk} E_i^{\hat{A}'} E_j^{\hat{B}'} E_k^{\hat{C}*} \delta B_{\hat{C}*}\hat{B}'\hat{A}', \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

$$\begin{aligned} \delta S_{B_{\hat{C}*}\hat{B}*}\hat{A}' &\equiv -\frac{1}{6} 9\varepsilon^{ijk} E_i^{\hat{A}'} E_j^{\hat{B}*} [\partial_k(\delta E^{\hat{C}*}) - \delta E^{\hat{B}'} E_k^{\hat{D}'} T_{\hat{D}'\hat{B}'}^{\hat{C}*} - \delta E^{\hat{B}*} E_k^{\hat{D}'} T_{\hat{D}'\hat{B}*}^{\hat{C}*}] B_{\hat{C}*}\hat{B}*}\hat{A}' + \\ &\quad - \frac{1}{6} 9\varepsilon^{ijk} E_i^{\hat{A}'} E_j^{\hat{B}*} [-\delta E^{\hat{B}'} E_k^{\hat{D}*} T_{\hat{D}*}\hat{B}'^{\hat{C}*} - \delta E^{\hat{B}*} E_k^{\hat{D}*} T_{\hat{D}*}\hat{B}*^{\hat{C}*}] B_{\hat{C}*}\hat{B}*}\hat{A}' + \\ &\quad - \frac{1}{6} 3\varepsilon^{ijk} E_i^{\hat{A}'} E_j^{\hat{B}*} E_k^{\hat{C}*} \delta B_{\hat{C}*}\hat{B}*}\hat{A}', \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

$$\begin{aligned} \delta S_{B_{\hat{C}*}\hat{B}*}\hat{A}* &\equiv -\frac{1}{6} (3\varepsilon^{ijk} E_i^{\hat{A}*} E_j^{\hat{B}*} [\partial_k(\delta E^{\hat{C}*}) - \delta E^{\hat{B}'} E_k^{\hat{D}'} T_{\hat{D}'\hat{B}'}^{\hat{C}*} - \delta E^{\hat{B}*} E_k^{\hat{D}'} T_{\hat{D}'\hat{B}*}^{\hat{C}*}] B_{\hat{C}*}\hat{B}*}\hat{A}* + \\ &\quad - \frac{1}{6} 3\varepsilon^{ijk} E_i^{\hat{A}*} E_j^{\hat{B}*} [-\delta E^{\hat{B}'} E_k^{\hat{D}*} T_{\hat{D}*}\hat{B}'^{\hat{C}*} - \delta E^{\hat{B}*} E_k^{\hat{D}*} T_{\hat{D}*}\hat{B}*^{\hat{C}*}] B_{\hat{C}*}\hat{B}*}\hat{A}* + \\ &\quad - \frac{1}{6} \varepsilon^{ijk} E_i^{\hat{A}*} E_j^{\hat{B}*} E_k^{\hat{C}*} \delta B_{\hat{C}*}\hat{B}*}\hat{A}*). \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Cuando se compara (C.13) con las expresiones (C.17), (C.18), (C.19), (C.20) y

(C.21), se obtiene:

$$\begin{aligned}
T_{\hat{s}\hat{\rho}}^{\hat{c}'} &= 0, & T_{\hat{s}\hat{\rho}}^{\hat{\lambda}} &= 0, & T_{\hat{d}'\hat{\rho}}^{\hat{\lambda}} &= 0, & T_{\hat{\delta}\hat{\rho}}^{\hat{\alpha}} &= 0, & T_{\hat{d}'\hat{\rho}}^{\hat{c}'} &= 0, \\
T_{\hat{d}'\hat{\beta}}^{\hat{r}} &= 0, & T_{\hat{d}\hat{*}\hat{\beta}}^{\hat{r}} &= 0, & T_{\hat{d}\hat{*}\hat{\beta}}^{\hat{r}} &= 0, & T_{\hat{q}\hat{\beta}}^{\hat{r}} &= 0, & T_{\hat{\rho}\hat{\beta}}^{\hat{b}'} &\propto (\Gamma^{\hat{b}'})_{\hat{\rho}\hat{\beta}}, \\
T_{\hat{\rho}\hat{\beta}}^{\hat{s}} &\propto (\Gamma^{\hat{s}})_{\hat{\rho}\hat{\beta}}.
\end{aligned} \tag{C.22}$$

$$\begin{aligned}
\delta B_{\hat{r}\hat{q}\hat{\alpha}} &= 0, & \delta B_{\hat{r}\hat{q}\hat{a}'} &= 0, & B_{\hat{s}\hat{b}'\hat{a}'} &= 0, & \delta B_{\hat{r}\hat{b}'\hat{a}'} &= 0, \\
\delta B_{\hat{\chi}\hat{b}'\hat{a}'} &= 0, & B_{\hat{r}\hat{s}\hat{q}} &= 0, & B_{\hat{r}\hat{q}\hat{a}'} &= 0, & \delta B_{\hat{r}\hat{s}\hat{q}} &= 0, \\
T_{\hat{\delta}\hat{\beta}}^{\hat{r}} &= 0 & B_{\hat{r}\hat{s}\hat{q}} &= 0; & \delta B_{\hat{r}\hat{s}\nu} &= (\bar{\kappa}_- \Gamma_{rs})_{\nu}, \\
\delta B_{\hat{r}\hat{b}'\hat{\alpha}} &\propto \bar{\kappa}_- \Gamma_{m's}.
\end{aligned} \tag{C.23}$$

### C.3. Supermembrana con Condición de Carga Central a Primer Orden en $(\theta, \partial_i \theta)$

A continuación se aplica el mismo procedimiento, pero ahora se impone la condición de carga central,

$$X^s(\xi^i) = \hat{X}^s(\sigma_{1,2}) + \tilde{A}^r(\tau, \sigma_{1,2}), \tag{C.24}$$

imponiendo que las transformaciones kappa quedan:

$$\delta_{\kappa} \hat{X}^r = 0, \quad \delta_{\kappa} \tilde{A}^r = \bar{\kappa} \Gamma^r \theta, \tag{C.25}$$

obteniéndose los resultados parciales en la aproximación  $O(\theta^2, (\partial_i \theta)^2, \partial_i \bar{\kappa}, \Psi = 0)$ ,:

$$\begin{aligned}
T_{\hat{\rho}\hat{\beta}}^{\hat{c}'} &= (\Gamma^{\hat{c}'})_{\hat{\rho}\hat{\beta}}, & T_{\hat{\rho}\hat{\beta}}^{\hat{s}} &= (\Gamma^{\hat{s}})_{\hat{\rho}\hat{\beta}}, & T_{\hat{q}\hat{\beta}}^{\hat{s}} &= 0, & T_{\hat{c}'\hat{\beta}}^{\hat{b}'} &= 0, & T_{\hat{q}\hat{\beta}}^{\hat{b}'} &= 0, \\
T_{\hat{c}'\hat{\beta}}^{\hat{s}} &= 0, & T_{\hat{\delta}\hat{\beta}}^{\hat{s}} &\neq 0, & T_{\hat{\delta}\hat{\beta}}^{\hat{\lambda}} &= 0, & T_{\hat{r}\hat{\beta}}^{\hat{\lambda}} &= 0, & T_{\hat{d}'\hat{\beta}}^{\hat{\lambda}} &= 0, \\
T_{\hat{s}\hat{\rho}}^{\hat{c}'} &= 0, & T_{\hat{s}\hat{\rho}}^{\hat{\lambda}} &= 0, & T_{\hat{d}'\hat{\rho}}^{\hat{\lambda}} &= 0, & T_{\hat{\delta}\hat{\rho}}^{\hat{\alpha}} &= 0, & T_{\hat{d}'\hat{\rho}}^{\hat{c}'} &= 0,
\end{aligned} \tag{C.26}$$

---


$$\begin{aligned}
B_{\hat{r}\hat{s}\hat{q}} &= 0, \quad \delta B_{\hat{r}\hat{q}\hat{\alpha}} \propto \delta\bar{\theta}\Gamma_{\hat{r}\hat{q}}, \quad B_{\hat{r}\hat{q}\hat{a}'} = 0, \quad , \\
\delta B_{\hat{r}\hat{a}'\hat{\beta}} &\propto \delta\bar{\theta}\Gamma_{\hat{r}\hat{a}'}, \quad \delta B_{\hat{r}\hat{q}\hat{\alpha}} = 0, \quad \delta B_{\hat{s}\hat{b}'\hat{a}'} = 0, \\
\delta B_{\hat{\chi}\hat{b}'\hat{a}'} &= 0.
\end{aligned} \tag{C.27}$$


---

## APÉNDICE D

# Hamiltoniano Supermembrana con Cargas Centrales $4D$

El hamiltoniano bosónico de Bellorín-Restuccia en [38] describe una supermembrana en un  $M_7 \times T^4$ :

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2} \int d^2\sigma \sqrt{w} \left[ \frac{1}{w} (P_m^2 + P^r{}^2) - \frac{2}{w} P_m \varepsilon^{ab} \partial_a X^m \partial_b \Lambda \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \int d^2\sigma \sqrt{w} \left[ -\frac{2}{w} P_r \varepsilon^{ab} \partial_a A^r \partial_b \tilde{\Lambda} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \int d^2\sigma \sqrt{w} \left[ \frac{1}{2} \tilde{F}_{rs}^2 + g^{rs} \delta_{mn} \tilde{D}_r X^m \tilde{D}_s X^n \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \int d^2\sigma \sqrt{w} \left[ \frac{1}{2} \{X^m, X^n\}^2 + n^2 \right], \tag{D.1}
 \end{aligned}$$

con el vínculo,

$$\int_{\sigma} \tilde{F}_{rs} dX^r \wedge dX^s = 0, \tag{D.2}$$

y donde

$$P^r = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{A}^r}, \quad P_m = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{X}^m}, \quad \dot{A}^r = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta P^r}, \quad \dot{X}^m = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta P^m}, \quad H = \int_{\sigma} d^2\sigma \mathcal{H}, \tag{D.3}$$

$$\tilde{F}_{rs} = D_r A_s - D_s A_r + \{A_r, A_s\}, \quad \tilde{D}_r = D_r + \{A_r, \quad \}, \quad D_r = \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{w}} \partial_a \hat{X}_r \partial_b, \tag{D.4}$$

con el corchete:

$$\{\varphi, \chi\} = \omega^{rs} D_r \varphi D_s \chi. \quad (\text{D.5})$$

En lo que sigue describiremos a la supermembrana en un  $M_5 \times T^6$  con el hamiltoniano de Bellorín-Restuccia con los índices  $m = 1, 2, 3, +, -$ . y  $r = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ .

## D.1. Acción $S$ en $M_5 \times T^6$

Calculando explícitamente (D.3), se tiene:

$$\dot{X}_m = \frac{P_m}{\sqrt{w}} - \frac{1}{\sqrt{w}} \varepsilon^{ab} \partial_a X^m \partial_b \Lambda, \quad \dot{A}^r = \frac{P^r}{\sqrt{w}} - \frac{1}{\sqrt{w}} \varepsilon^{ab} \partial_a A^r \partial_b \tilde{\Lambda}. \quad (\text{D.6})$$

Sustituyendo (D.6) y la expresión para  $H$  de (D.1) en:

$$S = \int_V d^3\sigma \left[ P_m \dot{X}^m + P_r \dot{A}^r - \mathcal{H} \right] = \int_V d^3\sigma \mathcal{L}. \quad (\text{D.7})$$

Para obtener:

$$\begin{aligned} S_{M_5 \times T^6} = & \frac{1}{2} \int d^2\sigma \sqrt{w} \left[ \frac{1}{w} (P_m^2 + P^{r2}) \right] + \frac{1}{2} \int d^2\sigma \sqrt{w} \left[ -\frac{1}{2} \tilde{F}_{rs}^2 - g^{rs} \delta_{mn} \tilde{D}_r X^m \tilde{D}_s X^n \right] + \\ & + \frac{1}{2} \int d^2\sigma \sqrt{w} \left[ -\frac{1}{2} \{X^m, X^n\}^2 - n^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

## D.2. Acción $S_{M_5 \times T^6}$ compactificada en $S^1$

Se considera la siguiente descomposición en los índices  $m$ :

$$X^m = (X^{m-1}, \phi) = (X^{m'}, \phi). \quad (\text{D.9})$$

A continuación se reescribe la acción (D.8) en términos de estas nuevas variables.

Para ello,  $P_m P^m$ , con:

$$P^m = \sqrt{w} \dot{X}_m + \varepsilon^{ab} \partial_a X^m \partial_b \Lambda, \quad (\text{D.10})$$

se reescribe:

$$P_m P^m = P_{m'} P^{m'} + P_\phi P^\phi = P_{m'} P^{m'} + [\sqrt{w} \partial_0 \phi + \sqrt{w} \{\phi, \Lambda\}] [\sqrt{w} \partial_0 \phi + \sqrt{w} \{\phi, \Lambda\}], \quad (\text{D.11})$$

donde se ha definido

$$\{\phi, \Lambda\} \equiv \frac{\varepsilon^{ab}}{\sqrt{w}} \partial_a \phi \partial_b \Lambda, \quad (\text{D.12})$$

$$\{X^m, X^n\}^2 = \{X^{m'}, X^{n'}\}^2 + \{X^{m'}, \phi\}^2 + \{\phi, X^{n'}\}^2. \quad (\text{D.13})$$

La acción con la descomposición de los índices propuesta  $S' = S_{M_5 \times T^6 \times S^1}$ , se escribe:

$$\begin{aligned} S' = & \int_\sigma d^3 \sigma \frac{1}{2} \sqrt{w} \left\{ \frac{1}{w} (P^{m'^2} + P^{r2}) - \frac{1}{2} \tilde{F}_{rs}^2 - g^{rs} \delta_{m'n'} \tilde{D}_r X^{m'} \tilde{D}_s X^{n'} \right\} + \\ & + \int_\sigma d^3 \sigma \frac{1}{2} \sqrt{w} \left\{ -\frac{1}{2} \{X^{m'}, X^{n'}\}^2 - n^2 + [\partial_0 \phi + \{\phi, \Lambda\}]^2 - \{\phi, X^{n'}\}^2 \right\} + \\ & + \int_\sigma d^3 \sigma \frac{1}{2} \sqrt{w} \left\{ -g^{rs} \tilde{D}_r \phi \tilde{D}_s \phi - g^{rs} \delta_{m'\phi} \tilde{D}_r X^{m'} \tilde{D}_s \phi - g^{rs} \delta_{\phi n'} \tilde{D}_r \phi \tilde{D}_s X^{n'} \right\}. \quad (\text{D.14}) \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned} g^{rs} \delta_{m'\phi} \tilde{D}_r X^{m'} \tilde{D}_s \phi + g^{rs} \delta_{\phi n'} \tilde{D}_r \phi \tilde{D}_s X^{n'} &= g^{sr} \delta_{n'\phi} \tilde{D}_s X^{n'} \tilde{D}_r \phi + g^{rs} \delta_{\phi n'} \tilde{D}_r \phi \tilde{D}_s X^{n'} = \\ &= 2g^{rs} \delta_{\phi n'} \tilde{D}_r \phi \tilde{D}_s X^{n'}. \quad (\text{D.15}) \end{aligned}$$

Finalmente, la acción  $S'$  se puede escribir como  $S' = S_{M_5 \times T^6 \times S^1} = S_0 + S_1$ , donde:

$$S_0 = \int_\Sigma d^3 \sigma \frac{1}{2} \sqrt{w} \left[ \frac{1}{w} (P^{m'^2} + P^{r2}) - \frac{1}{2} \tilde{F}_{rs}^2 - g^{rs} \delta_{m'n'} \tilde{D}_r X^{m'} \tilde{D}_s X^{n'} - \frac{1}{2} \{X^{m'}, X^{n'}\}^2 - n^2 \right], \quad (\text{D.16})$$

$$S_1 = \int_\Sigma d^3 \sigma \frac{1}{2} \sqrt{w} [(\partial_0 \phi + \{\phi, \Lambda\})^2 - \{\phi, X^{n'}\}^2 - g^{rs} \tilde{D}_r \phi \tilde{D}_s \phi - 2g^{rs} \delta_{m'\phi} \tilde{D}_r X^{m'} \tilde{D}_s \phi]. \quad (\text{D.17})$$

### D.3. Hamiltoniano Dual $H_{M_4 \times T^6 \times S^1}$

En esta sección se construye el hamiltoniano dual en 4D. Cada paso relevante en dicha construcción se trabajará como una subsección.

#### D.3.1. Cálculo de la Acción Dual $\tilde{S}$

Se define  $\tilde{S}$  de la siguiente manera:

$$\tilde{S} = S + \int d^3\sigma \varepsilon^{ijk} A_k \partial_j L_i, \quad (\text{D.18})$$

donde

$$L_i \equiv \partial_i \phi \quad \rightarrow \quad L_0 \equiv \partial_0 \phi, \quad L_a \equiv \partial_a \phi. \quad (\text{D.19})$$

Entonces,

$$\tilde{S} = S - \int d^3\sigma \varepsilon^{ijk} \partial_j A_k L_i = S - \frac{1}{2} \int d^3\sigma \varepsilon^{ijk} L_i F_{jk}. \quad (\text{D.20})$$

Se escribe la acción  $S$  explícitamente en términos de  $L_0$  y  $L_i$ . La parte de  $S$  que depende de  $\phi$  es (D.17). Así que analizamos cada término de  $S_1$ :

$$\begin{aligned} \{\phi, \Lambda\} &= \frac{\varepsilon^{ab}}{\sqrt{w}} \partial_a \phi \partial_b \Lambda = \frac{\varepsilon^{ab}}{\sqrt{w}} L_a \partial_b \Lambda, \\ \{\phi, X^{n'}\} &= \frac{\varepsilon^{ab}}{\sqrt{w}} \partial_a \phi \partial_b X^{n'} = \frac{\varepsilon^{ab}}{\sqrt{w}} L_a \partial_b X^{n'}, \\ \tilde{D}_r \phi \tilde{D}_s \phi &= \left[ \frac{\varepsilon^{ab}}{\sqrt{w}} \partial_a \hat{X}_r L_b + \frac{\varepsilon^{ab}}{\sqrt{w}} \partial_a A_r L_b \right] \left[ \frac{\varepsilon^{cd}}{\sqrt{w}} \partial_c \hat{X}_s L_d + \frac{\varepsilon^{cd}}{\sqrt{w}} \partial_c A_s L_d \right], \\ \tilde{D}_r \phi \tilde{D}_s X^{n'} &= \left[ \frac{\varepsilon^{ab}}{\sqrt{w}} \partial_a \hat{X}_r L_b + \frac{\varepsilon^{ab}}{\sqrt{w}} \partial_a A_r L_b \right] \tilde{D}_s X^{n'}. \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$



Sustituyendo en (D.17) y haciendo la sustitución  $\mathcal{A}_r \equiv \widehat{X}_r + A_r$ , para simplificar la notación, tenemos que  $S$  puede escribirse como:

$$\begin{aligned} S = S_0 + & \\ & + \int d^3\sigma \frac{1}{2} \sqrt{w} \{ [L_0 + \frac{\varepsilon^{ab}}{\sqrt{w}} L_a \partial_b \Lambda]^2 - [\frac{\varepsilon^{ab}}{\sqrt{w}} L_a \partial_b X^{n'}]^2 - g^{rs} [\frac{\varepsilon^{ab}}{\sqrt{w}} \partial_a \mathcal{A}_r L_b] [\frac{\varepsilon^{cd}}{\sqrt{w}} \partial_c \mathcal{A}_s L_d] \} + \\ & + \int d^3\sigma \frac{1}{2} \sqrt{w} \{ -2g^{rs} \delta_{\phi n'} [\frac{\varepsilon^{ab}}{\sqrt{w}} \partial_a \mathcal{A}_r L_b] \tilde{D}_s X^{n'} \}. \end{aligned} \quad (D.22)$$

Luego,  $\tilde{S}$  tiene la expresión:

$$\begin{aligned} \tilde{S} = S_0 + & \\ & + \int d^3\sigma \frac{1}{2} \sqrt{w} \{ [L_0 + \frac{\varepsilon^{ab}}{\sqrt{w}} L_a \partial_b \Lambda]^2 - [\frac{\varepsilon^{ab}}{\sqrt{w}} L_a \partial_b X^{n'}]^2 - g^{rs} \frac{\varepsilon^{ab}}{\sqrt{w}} \frac{\varepsilon^{cd}}{\sqrt{w}} \partial_a \mathcal{A}_r \partial_c \mathcal{A}_s L_b L_d + \\ & - 2g^{rs} \delta_{\phi n'} \frac{\varepsilon^{ab}}{\sqrt{w}} \partial_a \mathcal{A}_r \tilde{D}_s X^{n'} L_b \} + \frac{1}{2} \int d^3\sigma (\varepsilon^{ab} L_0 F_{ab} - 2\varepsilon^{ab} L_a F_{0b}). \end{aligned} \quad (D.23)$$

### D.3.2. Variación de $\tilde{S}$ con respecto a $L_0$ y $L_a$

Se hace la variación de (D.20) como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{S} = \delta S - \int d^3\sigma \varepsilon^{ijk} \partial_j A_k \delta L_i = & \\ = \frac{\partial S}{\partial L_0} \delta L_0 + \frac{\partial S}{\partial L_a} \delta L_a + \frac{1}{2} \int d^3\sigma (\varepsilon^{ab} \delta L_0 F_{ab} - 2\varepsilon^{ab} \delta L_a F_{0b}). \end{aligned} \quad (D.24)$$

Explícitamente, la variación con respecto a  $L_0$ :

$$\int d^3\sigma \left\{ \sqrt{w} L_0 + \varepsilon^{ab} L_a \partial_b \Lambda + \frac{1}{2} \varepsilon^{ab} F_{ab} \right\} \delta L_0 = 0, \quad (D.25)$$

implica

$$L_0 = \frac{1}{\sqrt{w}} \left[ -\varepsilon^{ab} L_a \partial_b \Lambda - \frac{1}{2} \varepsilon^{ab} F_{ab} \right]. \quad (D.26)$$

Luego, variando (D.20) con respecto a  $L_e$ ,

$$\frac{\partial S}{\partial L_e} \delta L_e + \frac{1}{2} \int d^3\sigma (-2\varepsilon^{eb} \delta L_e F_{0b}) = 0, \quad (D.27)$$

y usando la expresión para (D.22) y (D.26), se tiene:

$$\frac{\partial S}{\partial L_e} = \int d^3\sigma \frac{1}{2} \sqrt{w} \left\{ -\frac{1}{w} \varepsilon^{ab} \varepsilon^{ed} F_{ab} \partial_d \Lambda - \frac{2}{w} \varepsilon^{ab} \varepsilon^{ed} \partial_b X^{n'} \partial_d X_{n'} L_a + \right. \quad (D.28)$$

$$\left. - \frac{2}{w} g^{rs} \varepsilon^{ab} \varepsilon^{ce} \partial_a \mathcal{A}_r \partial_c \mathcal{A}_s L_b - 2g^{rs} \delta_{\phi n'} \frac{\varepsilon^{ae}}{\sqrt{w}} \partial_a \mathcal{A}_r \tilde{D}_s X^{n'} \right\}, \quad (D.29)$$

para obtener:

$$\int d^3\sigma \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{w}} \varepsilon^{ab} \varepsilon^{ed} F_{ab} \partial_d \Lambda - \frac{1}{\sqrt{w}} \varepsilon^{ab} \varepsilon^{ec} \partial_b X^{n'} \partial_c X_{n'} L_a + \right. \quad (D.30)$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{w}} g^{rs} \varepsilon^{ba} \varepsilon^{ce} \partial_b \mathcal{A}_r \partial_c \mathcal{A}_s L_a - g^{rs} \delta_{\phi n'} \varepsilon^{ae} \partial_a \mathcal{A}_r \tilde{D}_s X^{n'} - \varepsilon^{eb} F_{0b} \right\} \delta L_e = 0.$$

### D.3.3. Cálculo de $L_a$

De (D.30) se obtiene:

$$-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon^{ab} \varepsilon^{ed}}{\sqrt{w}} F_{ab} \partial_d \Lambda - \frac{\varepsilon^{ab} \varepsilon^{ec}}{\sqrt{w}} \left[ \partial_b X^{n'} \partial_c X_{n'} + g^{rs} \partial_b \mathcal{A}_r \partial_c \mathcal{A}_s \right] L_a + \quad (D.31)$$

$$- g^{rs} \delta_{\phi n'} \varepsilon^{ae} \partial_a \mathcal{A}_r \tilde{D}_s X^{n'} - \varepsilon^{eb} F_{0b} = 0.$$

Se hacen las siguientes definiciones,

$$\partial_b X^{n'} \partial_c X_{n'} \equiv v_{bc}, \quad g^{rs} \partial_b \mathcal{A}_r \partial_c \mathcal{A}_s \equiv \beta_{bc}, \quad v_{bc} + \beta_{bc} \equiv \Upsilon_{bc}. \quad (D.32)$$

Entonces, (D.31) queda:

$$-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon^{ab} \varepsilon^{ed}}{\sqrt{w}} F_{ab} \partial_d \Lambda - \frac{\varepsilon^{ab} \varepsilon^{ec}}{\sqrt{w}} \Upsilon_{bc} L_a - g^{rs} \delta_{\phi n'} \varepsilon^{ae} \partial_a \mathcal{A}_r \tilde{D}_s X^{n'} - \varepsilon^{eb} F_{0b} = 0. \quad (D.33)$$

Se despeja  $L_a$ , usando que  $\varepsilon^{ab} \varepsilon^{ec} \Upsilon_{bc} = \Upsilon \Upsilon^{ae}$ ,

$$L_a = -\sqrt{w} \frac{\Upsilon_{ae}}{\Upsilon} \left( g^{rs} \delta_{\phi n'} \varepsilon^{fe} \partial_f \mathcal{A}_r \tilde{D}_s X^{n'} + \varepsilon^{eb} F_{0b} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^{fb} \varepsilon^{ed}}{\sqrt{w}} F_{fb} \partial_d \Lambda \right). \quad (D.34)$$

Simplificando la expresión de (D.23) con ayuda de  $L_0$  y  $L_a$ , se obtiene:

$$\tilde{S}_{M_4 \times T^6 \times S^1} = S_0 + \int d^3\sigma \left\{ -\frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{w}} \varepsilon^{ab} \varepsilon^{ef} F_{ef} F_{ab} + \frac{1}{2\sqrt{w}} \Upsilon \Upsilon^{ae} L_a L_e \right\}, \quad (D.35)$$

con  $S_0$  determinado por (D.16). Por lo tanto el lagrangiano es:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{M_4 \times T^6 \times S^1} &\equiv \frac{1}{2}\sqrt{w}\left[\frac{1}{w}(P^{m'2} + P^{r2}) - \frac{1}{2}\tilde{F}_{rs}^2 - g^{rs}\delta_{m'n'}\tilde{D}_r X^{m'}\tilde{D}_s X^{n'}\right] + \\ &\quad - \frac{1}{4}\sqrt{w}\{X^{m'}, X^{n'}\}^2 - \frac{1}{2}\sqrt{w}n^2 - \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{w}}\varepsilon^{ab}\varepsilon^{ef}F_{ef}F_{ab} + \frac{1}{2\sqrt{w}}\Upsilon\Upsilon^{ae}L_aL_e + \\ &\equiv L_0 + L_1.\end{aligned}\tag{D.36}$$

#### D.3.4. Cálculo del Hamiltoniano Dual $\mathcal{H}_{M_4 \times T^6 \times S^1}$

Finalmente, se obtiene la expresión para el hamiltoniano dual  $\mathcal{H}_{M_4 \times T^6 \times S^1}$  partiendo de la expresión usual para el cálculo del hamiltoniano, esto es,

$$\mathcal{H}_{M_4 \times T^6 \times S^1}(P, X, A) = P_{m'}\dot{X}^{m'} + P_r\dot{A}^r + P_a\dot{A}^a - \mathcal{L}_{M_4 \times T^6 \times S^1},\tag{D.37}$$

donde los momentos conjugados son:

$$P_{m'} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{X}^{m'}}, \quad P_r = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{A}^r}, \quad P_a = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{A}^a}.\tag{D.38}$$

Para determinar las velocidades generalizadas se usan las ecuaciones resultantes del cálculo de los momentos conjugados (D.38), obteniéndose:

$$\begin{aligned}\dot{X}^{m'} &= \frac{P^{m'}}{\sqrt{w}} - \frac{1}{\sqrt{w}}\varepsilon^{ab}\partial_a X^{m'}\partial_b\Lambda, \quad \dot{A}^r = \frac{P^r}{\sqrt{w}} - \frac{1}{\sqrt{w}}\varepsilon^{ab}\partial_a A^r\partial_b\tilde{\Lambda}, \\ \partial_0 A_h &= \partial_h A_0 + \frac{1}{\sqrt{w}}\Upsilon_{hc}P^c - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^{fb}}{\sqrt{w}}F_{fb}\partial_h\Lambda - g^{rs}\delta_{\phi n'}\partial_h A_r\tilde{D}_s X^{n'}.\end{aligned}\tag{D.39}$$

A continuación, se sustituyen las expresiones (D.39) en (D.37), para obtener el hamiltoniano:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{M_4 \times T^6 \times S^1}(P, X, A) &= \frac{P^{m'}P_{m'}}{2\sqrt{w}} + \frac{P^rP_r}{2\sqrt{w}} - \frac{1}{2\sqrt{w}}\Upsilon_{cf}P^cP^f + \frac{1}{\sqrt{w}}\Upsilon_{ac}P^aP^c + \\ &\quad + \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{w}}\varepsilon^{ab}\varepsilon^{ef}F_{ef}F_{ab} + \frac{\sqrt{w}}{4}\tilde{F}_{rs}^2 + \frac{\sqrt{w}}{2}g^{rs}\delta_{m'n'}\tilde{D}_r X^{m'}\tilde{D}_s X^{n'} + \frac{\sqrt{w}}{4}\{X^{m'}, X^{n'}\}^2 + \frac{\sqrt{w}}{2}n^2 + \\ &\quad + P^a\partial_a A_0 - P^a g^{rs}\delta_{\phi n'}\partial_a A_r\tilde{D}_s X^{n'} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^{fb}}{\sqrt{w}}P^a F_{fb}\partial_a\Lambda - \frac{P_{m'}}{\sqrt{w}}\varepsilon^{ab}\partial_a X^{m'}\partial_b\Lambda - \frac{P_r}{\sqrt{w}}\varepsilon^{ab}\partial_a A^r\partial_b\tilde{\Lambda}.\end{aligned}\tag{D.40}$$

---

## Cálculo de la Matriz $\Lambda_0$ de Transformaciones de T-dualidad

---

En este apéndice determinaremos  $\Lambda_0$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer  $l_1$  y  $m_1$  sean enteros primos relativos. Tenemos  $\det(\mathbb{W}) = n$ . Es importante notar que  $\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$  son también enteros primos relativos. Siempre existe  $\Lambda_0 \in SL(2, \mathbb{Z})$  tal que

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix} = \Lambda_0 \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.1})$$

Entonces tenemos de (5.5):

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{q}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.2})$$

Se introduce

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r_1 \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.3})$$

A continuación se define  $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} p_1 & r_2 \\ q_1 & r_1 \end{pmatrix}$  en consecuencia  $\mathbb{A} = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$ , con  $\det \mathbb{A} = n$ . Notemos que  $\det \begin{pmatrix} \tilde{l}_1 & \tilde{l}_2 \\ \tilde{m}_1 & \tilde{m}_2 \end{pmatrix} = \mathbb{A}$ . Se tiene entonces una transformación intercambiando los modos KK y los modos de enrollamiento. La expresión para  $\Lambda_0$  puede ser obtenida de la siguiente manera: Existen enteros  $(b_2, b_1, d_1, c_1)$  tal que hay  $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} p_1 & b_2 \\ q_1 & b_1 \end{pmatrix}$ , y  $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} l_1 & d_1 \\ m_1 & c_1 \end{pmatrix}$ , con:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = \mathbb{B} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \end{pmatrix} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{E.4})$$

donde  $\mathbb{B}, \mathbb{C} \in SL(2, \mathbb{Z})$ . Finalmente podemos determinar la matriz de transformación  $\Lambda_0$ . Esto corresponde a,

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} l_1 & d_1 \\ m_1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & b_2 \\ q_1 & b_1 \end{pmatrix}^{-1}. \quad (\text{E.5})$$

y junto con la condición (7.6), implica que la transformación T-dualidad satisface,  $(\text{T-dualidad})^2 = \mathbb{I}$  y por tanto es una transformación de tipo  $Z_2$ .

---

## Clases de Equivalencia entre Fibrados Toroidales Simpléticos

---

Una manera equivalente de verlo es considerar el grupo de coinvariantes asociados a  $\rho$  y  $U\rho U^{-1}$ . De hecho, el grupo  $H^2(\Sigma, Z_\rho^2)$  es isomórfico, a través de la dualidad de Poincaré, al grupo de coinvariantes asociadas a  $\rho$ . Dado  $\mathcal{Q} \in H_1(T^2)$  definido como,  $\mathcal{Q} \equiv \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ , el grupo de coinvariantes de la monodromía  $\rho$  es el grupo abeliano de las clases de equivalencia:

$$\{\mathcal{Q} - \Lambda \widehat{\mathcal{Q}} - \widehat{\mathcal{Q}}\}, \quad (\text{F.1})$$

para cualquier  $\Lambda \in \rho$  y cualquier  $\widehat{\mathcal{Q}} \in H_1(T^2)$ . Se sigue que esta clase es transformada a la clase asociada a  $U\mathcal{Q}$  bajo la representación  $U\rho U^{-1}$ :

$$\{\mathcal{Q} - U\Lambda U^{-1}\widetilde{\mathcal{Q}} - \widetilde{\mathcal{Q}}\}, \quad (\text{F.2})$$

donde  $\widetilde{\mathcal{Q}} = U\widehat{\mathcal{Q}}$ , pero cualquier  $\widetilde{\mathcal{Q}} \in H_1(T^2)$  puede siempre ser expresada como  $U\widehat{\mathcal{Q}}$  para algún otro  $\widehat{\mathcal{Q}} \in H_1(T^2)$ , ya que  $U$  es invertible. Entonces, hay un isomorfismo entre el grupo de coinvariantes asociados a  $\rho$  y a  $U\rho U^{-1}$ , ellos definen un fibrado toroidal simplético equivalente.

# Bibliografía

---

- [1] I. Martín, A. Restuccia, *Magnetic monopoles over topologically non trivial Riemann Surfaces*, Lett. Math. Phys. **39** 379-391, 1997. hep-th/9603035.
- [2] I. Martín, A. Restuccia, R. Torrealba, *On the stability of compactified  $D = 11$  supermembranes*, Nucl. Phys. **B521**: 117-128, 1998. hep-th/9706090.
- [3] I. Martín, J. Ovalle, A. Restuccia, *D-branes, Symplectomorphisms and Noncommutative Gauge Theories*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **102**: 169-175, 2001;  
*Compactified  $D = 11$  Supermembranes and symplectic Noncommutative Gauge Theories*. Phys. Rev. **D64**: 046001, 2001. hep-th/0101236.
- [4] I. Martín, J. Ovalle, A. Restuccia, *Stable Solutions of the Double Compactified  $D=11$  Supermembrane Dual*, Phys. Lett. B472 (2000) 77-82. hep-th/9909051.
- [5] M.P. García del Moral, A. Restuccia, *On the Spectrum of a Noncommutative Formulation of the  $D = 11$  Supermembrane with Winding*, Phys. Rev. **D66** 045023, 2002. hep-th/0103261.

- 
- [6] L. Boulton, M.P. García del Moral, A. Restuccia, *Discreteness of the Spectrum of the Compactified  $D = 11$  Supermembrane with Non-trivial Winding*. Nucl. Phys. **B671**: 343-358, 2003. hep-th/0211047.
- [7] L. Boulton, A. Restuccia, *The heat kernel of the compactified  $D = 11$  supermembrane with non-trivial winding*, Nucl. Phys. **B724** (2005) 380-396, hep-th/0405216.
- [8] I. Martín, A. Restuccia, *Symplectic Connections, Noncommutative Yang-Mills theory and Supermembranes*, Nucl. Phys. **B622**: 240-256, 2002. hep-th/0108046.
- [9] L. Boulton, M.P. García del Moral, A. Restuccia, *On the spectrum of a matrix model for the  $D = 11$  Supermembrane Compactified on a Torus with Nontrivial Winding*. Class. Quant. Grav. 19 (2002) 2951. hep-th/0109153.
- [10] L. Boulton, M.P. García del Moral, A. Restuccia, *The Supermembrane with Central Charges:  $(2+1)$ -D NCSYM, Confinement and Phase Transition*. Nucl. Phys. **B795**: 27-51, 2008. hep-th/0609054.
- [11] L. Boulton, M.P. García del Moral, A. Restuccia, *Spectral properties in supersymmetric matrix models*, Nucl. Phys. B856 (2012) 716-747. hep-th/10114791.
- [12] M. P. García del Moral, A. Restuccia, *The Supermembrane with central charge as a bundle of  $D2 - D0$  branes*, Institute of Physics Conference Series 2005, Vol **43**, 151. hep-th/0410288.
- [13] M. P. García del Moral, I. Martín, A. Restuccia, *Nonperturbative  $SL(2, \mathbb{Z})$   $(p, q)$ -strings manifestly realized on the quantum  $M2$* . hep-th/08020573.
- [14] M. P. García del Moral, *A New Mechanism for Gauging a Theory*. hep-th/11073255.
-



- 
- [15] M.P. García del Moral, J.M. Peña, A. Restuccia, *Supermembrane origin of type II gauged supergravities in 9D*, JHEP 1209 (2012) 063, hep-th/1203.2767.
- [16] M.P. García del Moral, J.M. Peña, A. Restuccia, *T-duality Invariance of the Supermembrane*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 10 (2013) 1360010. hep-th/1211.2434.
- [17] M.P. García del Moral, I. Martín, J.M. Peña, A. Restuccia,  *$SL(2, \mathbb{Z})$  symmetries, Supermembranes and Symplectic Torus Bundles*, JHEP 1109 (2011) 068. hep-th/1105.3181.
- [18] María Pilar García del Moral, J.M. Peña, A. Restuccia,  *$N=1$  4D Supermembrane from 11D*, JHEP 0807 (2008) 039. hep-th/0709.4632.
- [19] M.P. García del Moral, J.M. Peña, A. Restuccia, *The Minimally Immersed 4D Supermembrane*, Fortsch. Phys. 56 (2008) 915-921. Realizado para 3rd RTN Workshop: Constituents, Fundamental Forces and Symmetries of the Universe, 1-5/Oct/2007. Valencia, Spain. hep-th/0803.3385.
- [20] E. Witten, *String theory dynamics in various dimensions*, Nucl. Phys. **B443** (1995) 85-126. hep-th/9503124.
- [21] M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten, *Superstring theory, Vol. 1, 2*, Cambridge, UK: Univ. Pr. (1987).
- [22] J. Polchinski, *String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*, Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) 531 p
- [23] P. Horava, E. Witten, *Heterotic and Type I string dynamics from eleven dimensions*, Nucl. Phys. B460 (1996) 506.
-

- 
- [24] E. Cremmer, S. Ferrara, *Formulation Of 11-Dimensional Supergravity in Superspace*, Phys. Lett. **91B** (1980) 61-66.
- [25] E. Cremmer, B. Julia, J. Scherk, *Supergravity in theory in 11 dimensions*, Phys. Lett. **76B** (1978) 409.
- [26] Duff, M.J., *M-Theory (the Theory Formerly Known as Strings)*, Int. J. Mod. Phys. A11 (1996) 5623-5642. hep-th/9608117.
- [27] D.Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen, S. Ferrara, *Progress toward a Theory of Supergravity*, Phys. Rev. D13 Phys. Rev. **D13** (1976) 3214-3218.
- [28] D.Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen, S. Ferrara, *Properties of Supergravity Theory*, Phys. Rev. D14 (1976) 912.
- [29] K.S. Stelle, *Lectures on Supergravity p-branes*, Lectures presented at 1996 ICTP Summer School, Trieste. hep-th/9701088.
- [30] Z. Bern, L. J. Dixon, R. Roiban, *Is  $N = 8$  Supergravity Ultraviolet Finite?*, Phys. Lett. **B644** (2007) 265-271. hep-th/0611086.
- [31] Z. Bern, J. J. Carrasco, L. J. Dixon, H. Johansson, R. Roiban, *The Ultraviolet Behavior of  $N=8$  Supergravity at Four Loops*, Phys. Rev. Lett. **103**, 081301, 2009. hep-th/0905.2326.
- [32] Z. Bern, J. J. Carrasco, L. J. Dixon, H. Johansson, R. Roiban, *Amplitudes and Ultraviolet Behavior of  $N = 8$  Supergravity*, Fortsch. Phys. 59 (2011) 561-578. hep-th/1103.1848.
- [33] B. de Wit, J. Hoppe, H. Nicolai, *On the Quantum Mechanics of Supermembranes*. Nucl. Phys. **B305**: 545, 1988.
-

- 
- [34] P. K. Townsend, *The eleven-dimensional supermembrane revisited*, Phys. Lett. **B350** (1995) 184-187. hep-th/9501068.
- [35] B. de Wit, M. Luscher, H. Nicolai, *The Supermembrane Is Unstable*, Nucl. Phys. **B320**: 135, 1989.
- [36] B. de Wit, U. Marquard, H. Nicolai, *Area preserving diffeomorphisms and supermembrane lorentz invariance*. Commun. Math. Phys. **128**: 39-62, 1990.
- [37] B. de Wit, K. Peeters, J. Plefka, *Supermembranes with winding*, Phys. Lett. **B409** (1997) 117-123. hep-th/9705225.
- [38] J. Bellorín, A. Restuccia, *D=11 Supermembrane Wrapped on Calibrated Submanifolds*. Nucl. Phys. **B737**: 190-208, 2006. hep-th/0510259.
- [39] P.S. Howe, E. Sezgin, *The supermembrane revisited*, Class. Quant. Grav. 22 (2005) 2167-2200, hep-th/0412245.
- [40] M. J. Duff, K. S. Stelle, *Multimembrane solutions of  $D = 11$  supergravity*, Phys. Lett. B253 (1991) 113.
- [41] E. Bergshoeff, E. Sezgin, P.K. Townsend, *Supermembranes and eleven-dimensional supergravity*, Phys. Lett. **B189** (1987) 75-78.
- [42] P. Meessen, T. Ortín, *An  $SL(2,Z)$  Multiplet of Nine-dimensional Type II Supergravity Theories*, Nucl. Phys. B **541**, 195 (1999). hep-th/9806120.
- [43] J. Gheerardyn, P. Meessen, *Supersymmetry of massive  $D = 9$  supergravity*, Phys. Lett. **B525** (2002) 322-330. hep-th/0111130.
- [44] N. Alonso-Alberca, T. Ortín, *Gauged/Massive Supergravities in Diverse Dimensions*, Nucl. Phys. B651 (2003) 263-290. hep-th/0210011.
-

- 
- [45] A. Dabholkar, C. Hull, *Duality Twists, Orbifolds, and Fluxes*, JHEP 0309:054, 2003. hep-th/0210209.
- [46] E. Bergshoeff, T. de Wit, U. Gran, R. Linares, D. Roest, *(Non-)Abelian Gauged Supergravities in Nine Dimensions*, JHEP 0210 (2002) **061**, hep-th/0209205.
- [47] A. Le Diffon, H. Samtleben, *Supergravities without an Action: Gauging the Trombone*, Nucl. Phys. **B811**: 1-35, 2009. hep-th/08095180.
- [48] F. Riccioni, *Local  $E(11)$  and the gauging of the trombone symmetry* Class. Quant. Grav. **27**: 125009, 2010. hep-th/10011316.
- [49] J.J. Fernandez-Melgarejo, T. Ortín, E. Torrente-Lujan, *The general gaugings of maximal  $d=9$  supergravity*, JHEP 1110: **068**, 2011. hep-th/11061760.
- [50] Pei-Ming Ho *Twisted bundle on quantum torus and BPS states in matrix theory*, Phys. Lett. **B434**: 41-47, 1998. hep-th/9803166.
- [51] B. A. Ovrut, T. Pantev, R. Reinbacher, *Torus fibered Calabi-Yau threefolds with nontrivial fundamental group*, JHEP **0305**: 040, 2003. hep-th/0212221.
- [52] H. Samtleben, *Lectures on Gauged Supergravity and Flux Compactifications*, Class. Quant. Grav. **25**: 214002, 2008. hep-th/08084076.
- [53] C. M. Hull, *A geometry for non-geometric string backgrounds*. JHEP 0510:065, 2005. hep-th/0406102.
- [54] C. M. Hull, *Global Aspects of T-Duality, Gauged Sigma Models and T-Folds*. JHEP **0710**: 057, 2007. hep-th/0604178.
- [55] J. Shelton, W. Taylor, B. Wecht, *Nongeometric Flux Compactifications*. JHEP 0510:085, 2005. hep-th/0508133.
-

- 
- [56] A. Flournoy, B. Williams, *Nongeometry, Duality Twists, and the Worldsheet*, JHEP 0601:166, 2006. hep-th/0511126.
- [57] C. M. Hull, *Doubled Geometry and T-Folds*. JHEP 0707:080, 2007. hep-th/0605149.
- [58] C.M. Hull, R.A. Reid-Edwards, *Flux Compactifications of M-Theory on Twisted Tori*, JHEP 0610:086, 2006. hep-th/0603094.
- [59] M. Cederwall, *M-branes on U-folds*. hep-th/07124287.
- [60] H. Nishino, S. Rajpoot, *Lorentz-covariant non-Abelian gauging of a supermembrane*, Phys. Rev. **D77**: 106002, 2008. hep-th/08060660.
- [61] H. Nishino, S. Rajpoot, *Gauged N=2 supergravity in nine-dimensions and domain wall solutions*. Phys. Lett. **B546**: 261-272 , 2002. hep-th/0207246.
- [62] E. Cremmer, H. Lu, C.N. Pope, K.S. Stelle, *Spectrum-generating Symmetries for BPS Solitons*, Nucl. Phys. **B520**: 132-156, 1998, hep-th/9707207.
- [63] S.R. Coleman, J. Mandula, *All possible symmetries of the S matrix*, Phys. Rev. **159** (1967) 1251-1256.
- [64] R. Haag, J.T. Lopuszanski, M. Sohnius, *All possible generators of supersymmetries of the S matrix*, Nucl. Phys. **B88** (1975) 257.
- [65] C. Montonen, D. Olive, *Magnetic Monopoles as Gauge Particles?* , Phys. Lett.**B72** 117-120, (1977).
- [66] D. Roest, *M-theory and Gauged Supergravities*, Based on author's Ph.D. Thesis. Published in Fortsch. Phys. **53**: 119-230, 2005.
- [67] B. de Wit, *Supergravity*. hep-th/0212245.
-

- 
- [68] J. H. Schwarz, *The power of M theory*, Phys. Lett. **B367** (1996) 97-103. hep-th/9510086.
- [69] P. A. M. Dirac, *An Extensible Model of the Electron*, Proc. Roy. Soc. **A268** (1962) 57-67.
- [70] J. Hughes, J. Liu, J. Polchinski, *Supermembranes*. Phys. Lett. **B180** 370, (1986).
- [71] M.J.Duff, *Supermembranes*, 26th British Universities Summer School in Theoretical Elementary Particle Physics 3-18 Sep 1996. Swansea, Wales. hep-th/9611203.
- [72] A. Achucarro, J. Evans, P. Townsend, D.Wiltshire, *Super p-branes*, Phys.Lett. **198B** (1987) 441.
- [73] E. Bergshoeff, E. Sezgin, P. Townsend, *Properties of the eleven-dimensional super membrane theory*, Ann. Phys. **185** (1988) 330.
- [74] M. J. Duff, *Kaluza-Klein theory in perspective*, in the Proceedings of the Nobel Symposium *Oskar Klein Centenary*, Stockholm, September 1994, (Ed Lindstrom, World Scientific 1995). hep-th/9410046.
- [75] B. Julia, in *Proceedings of the 2nd Marcel Grossman meeting*, Trieste (1979).
- [76] M. Duff, P. Howe, T. Inami, K.Stelle, *Superstrings in  $d = 10$  from supermembranes in  $d = 11$* , Phys. Lett. **191B** (1987) 70.
- [77] Y. Nambu, *Lectures at the Copenhagen conference, 1970*.
- [78] T. Goto, *Relativistic Quantum Mechanics of One-Dimensional Mechanical Continuum and Subsidiary Condition of Dual Resonance Model*, Prog. Theor. Phys. **46** No. 5 (1971) 1560.
-

- 
- [79] A. M. Polyakov, *Quantum geometry of bosonic strings*, Phys. Lett. **103B** (1981) 207- 211.
- [80] P. S. Howe, R. W. Tucker, *A Locally Supersymmetric And Reparametrization Invariant Action For A Spinning Membrane*, J. Phys. A 10 (1977) L155.
- [81] M. J. Duff, T. Inami, C. N. Pope, E. Sezgin, K. S. Stelle, *Semiclassical quantization of the supermembrane*, Nucl. Phys. **B297** (1988) 515.
- [82] E. Bergshoeff, E. Sezgin, P. Townsend, *On 'spinning' Membrane Models*, Phys. Lett. **B209** (1988) 451.
- [83] P. S. Howe, E. Sezgin, *Superbranes*, hep-th/9607227.
- [84] B. de Wit, K. Peeters, J. Plefka, *Superspace Geometry for Supermembrane Backgrounds*. Nucl.Phys.**B532**:99-123, 1998. hep-th/9803209.
- [85] Y. Shibusa, *11-Dimensional Curved Backgrounds for Supermembrane in Superspace*. hep-th/9905071v1.
- [86] M. T. Grisaru, M. E. Knutt, *Norcor vs the Abominable Gauge Completion*, Phys.Lett. B500 (2001) 188-198. hep-th/0011173.
- [87] M. Goroff, J.H. Schwarz, *D-dimensional gravity in the light-cone gauge*, Phys. Lett. **127B** (1983) 61.
- [88] A. Connes, M.R. Douglas, A. Schwarz, *Noncommutative Geometry and Matrix Theory: Compactification on Tori*, JHEP021998003, hep-th/9711162.
- [89] M.R. Douglas, C. Hull, *D-branes and the Noncommutative Torus*, JHEP02 1998 008, hep-th/9711165.
-

- 
- [90] N.A. Obers, B. Pioline, E. Rabinovici, *M-Theory and U-duality on  $T^d$  with gauge backgrounds*, hep-th/9712084.
- [91] B. Simon, *Some Quantum Operators With Discrete Spectrum But Classically Continuous Spectrum*, Annals Phys., 146:209, 1983.
- [92] H. Nicolai, R. Helling, *Supermembranes and M(atrix) Theory*, Published in In \*Trieste 1998, Nonperturbative aspects of strings, branes and supersymmetry\* 29-74 AEI-093. hep-th/9809103.
- [93] T. Banks, W. Fischler, S.H. Shenker, L. Susskind, *M theory as a matrix model: A Conjecture*, Phys. Rev. D55 (1997) 5112-5128. hep-th/9610043.
- [94] L. Boulton, M.P. García del Moral, A. Restuccia, in preparation.
- [95] A. Font, S. Theisen, *Introduction to string compactification*, Lect. Notes Phys. 668 (2005) 101-181.
- [96] M.J. Duff, B. E. W. Nilsson, C. N. Pope, *Kaluza-Klein Supergravity*, Phys. Rep. **130** (1986) 1.
- [97] J. Scherk, J. H. Schwarz, *Spontaneous Breaking of Supersymmetry Through Dimensional Reduction*, Phys. Lett. **B82** (1979) 60.
- [98] B.de Wit, H.Nicolai, *N=8 supergravity*, Nucl. Phys. **B208** (1982) 323.
- [99] C. M. Hull, *Noncompact gaugings of N=8 supergravity*, Phys. Lett. **B142** (1984) 39.
- [100] B. de Wit, H. Samtleben, M. Trigiante, *On Lagrangians and gaugings of maximal supergravities*, Nucl. Phys. B655 (2003) 93. hep-th/0212239.
-



- 
- [101] M. Weidner, *Gauged supergravities in various spacetime dimensions*, Fortsch. Phys. 55 (2007) 843-945 . hep-th/0702084
- [102] C.M. Hull, *Massive string theories from M theory and F theory*. JHEP 9811: **027**, 1998. hep-th/9811021.
- [103] I.V. Lavrinenko, Hong Lu, C.N. Pope, *Fiber bundles and generalized dimensional reduction*. Class. Quant. Grav. **15**: 2239-2256, 1998. hep-th/9710243.
- [104] I.V. Lavrinenko, Hong Lu, C.N. Pope, *From topology to generalized dimensional reduction*. Nucl. Phys. **B492**:278-300, 1997. hep-th/9611134.
- [105] C.M. Hull *Gauged D=9 Supergravities and Scherk-Schwarz Reduction*, Class. Quant. Grav. 21: 509-516, 2004. hep-th/0203146.
- [106] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*, Taylor Francis; 2 edition (June 4, 2003)
- [107] C. M. Hull, P. K. Townsend, *Unity of superstring dualities*, Nucl. Phys. **B438**: 109-137, 1995. hep-th/9410167.
- [108] O. DeWolfe, T. Hauer, A. Iqbal , B. Zwiebach, *Uncovering the symmetries on (p,q) 7-branes: Beyond the Kodaira classification*, Adv. Theor. Math. Phys. **3** (1999) 1785-1833. hep-th/9812028.
- [109] J.H. Schwarz, *Covariant field equations of chiral N=2 D = 10 supergravity*, Nucl. Phys. **B226** (1983) 269.
- [110] P. S. Howe, P. C. West, *The complete N=2, d = 10 supergravity*, Nucl. Phys. **B238** (1984) 181.
- [111] H. Lu, C. N. Pope, *p-brane Solitons in Maximal Supergravities*, Nucl. Phys. **B465** (1996) 127-156. hep-th/9512012.
-

- 
- [112] M. Abou-Zeid, B. de Wit, D. Lüst, H. Nicolai, *Space-time supersymmetry, IIA/B Duality and M Theory* Phys. Lett. **B466**: 144-152, 1999. hep-th/9908169.
- [113] E. Alvarez, L. Alvarez-Gaumé, J. L. F. Barbon, Y. Lozano, *Some global aspects of duality in string theory*, Nucl. Phys. B415: 71-100, 1994. hep-th/9309039.
- [114] J. Dai, R. G. Leigh, J. Polchinski, *New connections between string theories*, Mod. Phys. Lett. **A4** (1989) 2073-2083.
- [115] M. Dine, P. Y. Huet, N. Seiberg, *Large and small radius in string theory*, Nucl. Phys. **B322** (1989) 301.
- [116] A. Giveon, M. Porrati, E. Rabinovici, *Target space duality in string theory*, Phys. Rept. **244** (1994) 77-202. hep-th/9401139.
- [117] E. Cremmer, B. Julia, *The  $N=8$  supergravity theory. 1. the Lagrangian*, Phys. Lett. **B80** (1978) 48.
- [118] J. H. Schwarz, *An  $SL(2,Z)$  multiplet of type IIB superstrings*, Phys.Lett. **B360**: 13-18, 1995, Erratum-ibid. B364: 252, 1995. hep-th/9508143.
- [119] J. H. Schwarz, P. C. West, *Symmetries and transformations of chiral  $N=2$   $D = 10$  supergravity*, Phys. Lett. **B126** (1983) 301.
- [120] A. Font, L. Ibanez, D. Lust, F. Quevedo, *Strong-weak coupling duality and nonperturbative effects in string theory*, Phys. Lett. **B249** (1990) 35.
- [121] B. Biran, F. Englert, B. de Wit, H. Nicolai, *Gauged  $N=8$  Supergravity And Its Breaking From Spontaneous Compactification*, Phys. Lett. **B124**: 45, 1983, Erratum-ibid.**B128**:461,1983.
- [122] S.J. Gates, J., H. Nishino and E. Sezgin, *Supergravity in  $D = 9$  and Its Coupling to Non-Compact sigma-Models*, Class. and Quant. Grav. **3** (1986) 21.
-

- 
- [123] C.M. Hull, *The Construction Of New Gauged  $N=8$  Supergravities*, Physica **15D**: 230, 1985.
- [124] M. Haack, J. Louis, H. Singh, *Massive type IIA theory on  $K3$* , JHEP **04** (2001) 040, hep-th/0102110.
- [125] L. Romans, *Massive  $N = 2a$  supergravity in ten dimensions*, Phys. Lett. **B169** (1986) 374.
- [126] F. Giani, M. Pernici,  *$N=2$  supergravity in ten dimensions*, Phys. Rev. **D30** (1984) 325-333.
- [127] J. Polchinski, *Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724-4727. hep-th/9510017.
- [128] E. Bergshoeff, Y. Lozano, T. Ortín, *Massive branes*, Nucl. Phys. **B518** (1998) 363-423. hep-th/9712115.
- [129] P. S. Howe, N. D. Lambert, P. C. West, *A new massive type IIA supergravity from compactification*, Phys. Lett. **B416** (1998) 303-308. hep-th/9707139.
- [130] E. Bergshoeff, M. de Roo, M. B. Green, G. Papadopoulos, P. K. Townsend, *Duality of Type II 7-branes and 8-branes*, Nucl. Phys. **B470** (1996) 113-135. hep-th/9601150.
- [131] E. Bergshoeff, U. Gran, D. Roest, *Type IIB seven-brane solutions from nine-dimensional domain walls*, Class. Quant. Grav. **19** (2002) 4207-4226. hep-th/0203202.
- [132] M.P. García del Moral, *Update on the quantum properties of the Supermembrane*, Fortsch. Phys. **57** (2009) 558-565. hep-th/09020078.
-

- 
- [133] M.P. García del Moral, Tesis Doctoral titulada *Cuantización de la Supermembrana  $D = 11$  Compactificada utilizando los Modelos Matriciales  $SU(N)$* , Universidad Simón Bolívar, Caracas (Venezuela), 2002. Bajo la dirección de A. Restuccia.
- [134] E. Witten, *On  $S$  duality in Abelian gauge theory*, Selecta Math. **1** (1995) 383. hep-th/9505186.
- [135] J. Bellorín, A. Restuccia, *Extended selfdual configurations as stable exact solutions in Born-Infeld theory*, Phys. Rev. **D64** (2001) 106003. hep-th/0007066.
- [136] J. Scherk, J.H. Schwarz *How to get masses from extra dimensions*, Nucl.Phys.**B153** (1979) 61-68.
- [137] M.E. Shaposhnikov, P. Tinyakov *Extra dimensions as an alternative to Higgs mechanism*, Phys.Lett. **B515** (2001) 442-446. hep-th/0102161.
- [138] CMS Collaboration, *Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC* . hep-th/12077235.
- [139] T. Friedmann, *On the quantum moduli space of  $M$  theory compactifications*, Nucl. Phys. **B635** (2002) 384-394, hep-th/0203256.
- [140] A. Lukas, S. Morris, *Moduli Kahler potential for  $M$  theory on a  $G(2)$  manifold*, Phys.Rev. **D69** (2004) 066003. hep-th/0305078.
- [141] J. Evslin, L. Martucci  *$D$ -brane networks in flux vacua, generalized cycles and calibrations*, JHEP **0707** (2007) 040. hep-th/0703129.
- [142] W. Thurston, *Some simple examples of symplectic manifolds*. Proc. of the AMS **55** (1976), 467-8.
- [143] P. J. Khan, *symplectic torus bundles and group extensions*. New York Journal of Mathematics. New York J. Math. **11**: 35-55, 2005.
-

- 
- [144] H. Geiges, *Symplectic structures on  $T^2$ -bundles over  $T^2$* . Duke Math. J. Volume **67**, Number 3 (1992), 539-555.
- [145] K. Sakamoto, S. Fukuhara, *Classification of  $T^2$ -bundles over  $T^2$* . Tokyo J. Math. **6**: 311-327, 1983.
- [146] R. Walczak, *Existence of symplectic structures on torus bundles over surfaces*. math/0310261.
- [147] A. Belhaj, M.P. García del Moral, A. Restuccia, A. Segui, J.P. Vairo, *The Supermembrane with Central Charges on a  $G_2$  Manifold*, J. Phys. **A42**: 325201, 2009. hep-th/08031827.
- [148] M. P. García del Moral, A. Restuccia, *A  $N=8$  Action for Multiple  $M_2$ -branes with an Arbitrary Number of Colors*, JHEP 1006:020, 2010. hep-th/09035202.
- [149] B. de Wit, H. Nicolai, H. Samtleben, *Gauged Supergravities, Tensor Hierarchies, and  $M$ -Theory*. JHEP 0802:**044**, 2008. hep-th/08011294.
- [150] L. E. Ibanez, A. N. Schellekens, A. M. Uranga, *Discrete Gauge Symmetries in Discrete MSSM-like Orientifolds*. hep-th/12055364.
- [151] I. V. Lavrinenko, H. Lu, C. N. Pope, T.A. Tran,  *$U$ -duality as general coordinate transformations, and spacetime geometry*, Int. J. Mod. Phys. **A14** (1999) 4915-4942. hep-th/9807006.
- [152] O. Hohm, S. Ki Kwak, B. Zwiebach, *Double Field Theory of Type II Strings*, JHEP 1109: **013**, 2011. hep-th/1107.0008
- [153] O. Hohm, S. Ki Kwak, *Massive Type II in Double Field Theory*. JHEP 1111: **086**, 2011. hep-th/1108.4937.
-

- 
- [154] M. Cvetič, H. Lu, C. Pope, K. Stelle, *T duality in the Green-Schwarz formalism, and the massless massive IIA duality map*, Nucl. Phys. B573: 149-176, 2000. hep-th/9907202.
- [155] A. Connes, M. R. Douglas, A. S. Schwarz, *Noncommutative geometry and matrix theory: Compactification on tori*, JHEP **9802** (1998) 003. hep-th/9711162.
- [156] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds, I*, Lett. Math. Phys. 66:157-216, 2003. q-alg/9709040.
- [157] B. V. Fedosov, J. Diff. Geom. 40 (1994) 213.
- [158] P. S. Howe, *Supergravity in Superspace*, Nucl. Phys. B199 (1982) 309.
-