Zur Fermischen Theorie des β-Zerfalls.

Von **Markus Fierz.**

(Eingegangen am 7. Dezember 1936.)

1. Zurückführung der invarianten Ansätze für das Matrixelement des β-Zerfalls, welche keine Ableitungen der Wellenfunktionen enthalten, auf 5. 2. Form der β-Spektren, die sich bei dem allgemeinen Ansatz, einer Linearkombination der fünf Invarianten, ergibt. 3. Die sich aus einem solchen Ansatz ergebenden Kräfte zwischen Proton und Neutron. 4. Das magnetische Moment des Neutrons.

Einleitung.

Die Fermische Theorie des β-Zerfalls[1]) liefert in erster Ordnung der Störungsrechnung die Form des β-Spektrums; in zweiter Ordnung ergeben sich dann Aussagen über Austauschkräfte zwischen den Protonen und Neutronen und über eventuelle Zusatzmomente dieser Teilchen.

Die Fragen wurden zwar schon von verschiedenen Autoren diskutiert[2]), insbesondere von v. Weizsäcker[3]), doch hat man sich dabei immer auf spezielle Ansätze für die Wechselwirkung beschränkt. Berücksichtigt man nur solche Wechselwirkungsenergien, welche die Ableitungen der Wellenfunktionen nicht enthalten, so gibt es fünf linear unabhängige, lorentzinvariante Ansätze für die Wechselwirkung[4]). Daher sollen hier diese Fragen mit dem allgemeinen Ansatz, einer Linearkombination dieser fünf Invarianten, behandelt werden. Was die Kräfte zwischen schweren Teilchen betrifft, die sich aus solchen Rechnungen ergeben, so ist es wegen der starken Divergenz der Potentiale für verschwindende Abstände der Teilchen bekanntlich nicht möglich, Stoßquerschnitte und Bindungsenergien damit zu berechnen. Anderseits sind die so erhaltenen Kräftepotentiale in Abständen, welche den experimentellen Reichweiten der Kernkräfte entsprechen, praktisch schon Null. Um diese Diskrepanz zu vermeiden, hat man Ableitungen der Wellenfunktionen in den Ausdruck für die Wechselwirkung eingeführt. Dieses Vorgehen scheint aber zu anderen ernstlichen

---

[1]) E. Fermi, ZS. f. Phys. **88**, 161, 1934. — [2]) W. Heisenberg, Zeeman-Verhandelingen, Haag 1935, S. 108. Daselbst findet sich auch ältere Literatur zitiert. — [3]) C. F. v. Weizsäcker, ZS. f. Phys. **102**, 572, 1936. Diese Arbeit ist durch Rechenfehler entstellt. Wir werden im Einverständnis mit v. Weizsäcker die Arbeit hier berichtigen; soweit wir die gleichen Probleme behandeln. — [4]) H. A. Bethe u. R. F. Bacher, Rev. of Mod. Phys. **8**, April 1936.

Schwierigkeiten zu führen, welche die Erfüllung des Ausschließungsprinzips betreffen[1]). Deshalb wollen wir hier von der Einführung von Ableitungen absehen.

Unabhängig von diesen ungelösten Schwierigkeiten kann man aber aus Störungsrechnungen der erwähnten Art gewisse Aufschlüsse über die allgemeine Form solcher Kräfte gewinnen. Neben den drei bekannten Kräftetypen, gewöhnliche Kraft, Majorana-Kraft, Heisenberg-Kraft tritt noch eine vierte Möglichkeit in Erscheinung, der Gestalt

$$(\sigma^{\mathrm{I}}, x^{\mathrm{I}} - x^{\mathrm{II}})\,(\sigma^{\mathrm{II}}, x^{\mathrm{I}} - x^{\mathrm{II}})\,J\,(|x^{\mathrm{I}} - x^{\mathrm{II}}|),$$

d. i. eine Kraft, welche von den Spinkomponenten in der Verbindungsrichtung der beiden Teilchen abhängt.

Die Rechnungen über das magnetische Zusatzmoment der schweren Teilchen sind hier nur der Vollständigkeit halber aufgenommen (Abschnitt 4); denn es scheint uns sehr zweifelhaft, ob ein physikalischer Sinn damit verbunden werden kann.

Die Theorie führt nämlich auf stark divergente Integrale, und das Resultat, das dann schließlich erhalten wird, hängt wesentlich von den Vorschriften ab, nach welchen die Divergenzen weggeschafft werden. Zwar ließe sich die richtige Größenordnung der magnetischen Momente von Proton und Neutron wohl auch hier durch Einführen geeigneter Ableitungen und mit Hilfe konvergenzerzeugender Faktoren und dgl. Vorschriften erzwingen, aber dies scheint die relativistische Invarianz der Theorie wesentlich zu zerstören.

1. Zurückführung der invarianten Ansätze für das Matrixelement des β-Zerfalls, welche keine Ableitungen der Wellenfunktionen enthalten auf 5[2]). Wir werden hier zeigen, daß die folgenden fünf Invarianten, welche aus Φ^+, Ψ, φ^+, ψ gebildet werden können und in diesen Größen biquadratisch sind, die einzigen linear unabhängigen sind.

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \Phi^+ \Psi \varphi^+ \psi, \\ J_2 &= \Phi^+ \gamma^\mu \Psi \varphi^+ \gamma^\mu \psi, \\ J_3 &= \Phi^+ \gamma^{[\mu\nu]} \Psi \varphi^+ \gamma^{[\mu\nu]} \psi, \\ J_4 &= \Phi^+ \gamma^{[\mu\nu\lambda]} \Psi \varphi^+ \gamma^{[\mu\nu\lambda]} \psi, \\ J_5 &= \Phi^+ \gamma^5 \Psi \varphi^+ \gamma^5 \psi. \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

Dabei ist über gleiche Indizes zu summieren.

---

[1]) Über diese Frage wird demnächst eine Note erscheinen. — [2]) Der Inhalt dieses 1. Abschnittes stammt von Prof. W. Pauli und ich bin ihm für die Überlassung seiner Rechnungen zu Dank verpflichtet.

Zur Abkürzung werden wir auch $J_k = \Phi^+ A^k \Psi \varphi^+ A^k \psi$, $k = 1 \ldots 5$ schreiben. Es ist

$$\Phi^+ = i\Phi^* \gamma^4, \quad \alpha^k = i\gamma^4 \gamma^k, \quad \gamma^4 = \beta,$$

$\gamma^{[\mu\nu]}$ ist eine der sechs schiefen Größen

$$\gamma^{[\mu\nu]} = \tfrac{1}{2} i (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu),$$

$\gamma^{[\lambda\mu\nu]}$ ist eine der vier, in allen Indizes schiefen Größen

$$(i\gamma^2\gamma^3\gamma^4, \; i\gamma^3\gamma^1\gamma^4, \; i\gamma^1\gamma^2\gamma^4, \; i\gamma^1\gamma^2\gamma^3)$$
$$\gamma^5 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4.$$

Die Aufgabe ist nun, zu zeigen, daß die Invarianten

$$J'_k = \Phi^+ A^k \psi \varphi^+ A^k \Psi,$$

wo also ψ und Ψ vertauscht sind, linear durch die J_k ausgedrückt werden können.

$$J'_k = \sum_r C^k_r J_r .$$

Hierzu betrachten wir die 16 Größen

$$\gamma^A = (I, \gamma^\mu, \gamma^{[\nu\mu]}, \gamma^{[\nu\mu\lambda]}, \gamma^5), (\gamma^A)^2 = I.$$

Für jede vierreihige Darstellung der $\gamma^A : (\gamma^A_{\sigma\varrho})$ gilt dann die folgende Identität:

$$\sum_{A=1}^{16} \gamma^A_{\varrho\sigma} \gamma^A_{\bar\sigma\bar\varrho} = 4\,\delta_{\bar\sigma\sigma}\delta_{\varrho\bar\varrho}\,^{1)}. \tag{1.2}$$

Daraus folgt nun

$$\sum_{A=1}^{16} \sum_{\varkappa,\lambda=1}^{4} \gamma^A_{\varrho\sigma} (\gamma^B_{\bar\sigma\varkappa} \gamma^A_{\varkappa\lambda} \gamma^B_{\lambda\varrho}) = 4 \sum_{\lambda,\varkappa=1}^{4} \delta_{\varkappa\sigma}\delta_{\varrho\lambda} \gamma^B_{\bar\sigma\varkappa} \gamma^B_{\lambda\bar\varrho} = 4\gamma^B_{\bar\sigma\sigma}\gamma^B_{\varrho\bar\varrho} \tag{1.3}$$

Die linke Seite von (1.3) ist auszurechnen und ergibt gewisse Zahlfaktoren. Es ist daher durch diese Formel möglich, Größen der Form

$$\Phi^+_{\bar\sigma} A^K_{\bar\sigma\sigma} \psi_\sigma \varphi^+_\varrho A^K_{\varrho\bar\varrho} \Psi_{\bar\varrho} \qquad \text{durch} \qquad \sum_r C_r \Phi^+_{\bar\sigma} A^r_{\bar\sigma\bar\varrho} \Psi_{\bar\varrho} \varphi^+_\varrho A^r_{\varrho\sigma} \psi_\sigma$$

auszudrücken. Man findet aus (1.2) und (1.3)[2])

$$\left.\begin{aligned}
4J'_1 &= \sum_{K=1}^{5} J_K, \\
4J'_2 &= 4J_1 - 2J_2 \qquad\qquad + 2J_4 - 4J_5, \\
4J'_3 &= 6J_1 \qquad\quad - 2J_3 \qquad\quad + 6J_5, \\
4J'_4 &= 4J_1 + 2J_2 \qquad\qquad - 2J_4 - 4J_5, \\
4J'_5 &= \;\;J_1 - \;\;J_2 + \;\;J_3 - \;\;J_4 + \;\;J_5.
\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

[1]) Zum Beweis siehe: W. Pauli, Zeeman-Verhandelingen, Haag 1935, S. 31. — [2]) Setzt man $\Phi = \varphi = \psi = \Psi$, oder was das gleiche ist, $J_K = J'_K$, so folgen aus (1.4) die Identitäten (8a), (8b), (8d) bei W. Pauli, l. c.

Im folgenden werden wir als allgemeinsten Ansatz eine Linearkombination der fünf von Bethe[1]) angegebenen Invarianten benutzen. Dabei ist darauf zu achten, daß die vier ersten Invarianten bei Bethe das umgekehrte Vorzeichen haben wie die von uns in (1. 1) definierten J_K, was von den hier eingeführten Faktoren i kommt, um $(\gamma^4)^2 = I$ zu erfüllen. Von hier ab werden wir mit den Betheschen Vorzeichen rechnen, was bei Umrechnung der J'_K auf die J zu beachten ist.

2. Form der β-Spektren. Wir wollen hier die Form des β-Spektrums herleiten, das sich bei einem allgemeinen Ansatz für das Matrixelement H_β von der Form $H_\beta = \sum_K C_K J_K$ ergibt. Die C_K sind beliebige, reelle Zahlen. Dabei wollen wir uns bezüglich der schweren Teilchen auf die unrelativistische Näherung beschränken. Weiter nehmen wir wie Fermi (l. c.) an, die Wellenlänge der leichten Teilchen sei groß gegen die Kerndimensionen, und setzen $|\int \Phi^+ A^K \Psi \, dv|^2 = 1$, wo Φ die Eigenfunktion des Neutrons, Ψ diejenige des Protons bedeutet. Der Einfachheit halber wollen wir auch die Wirkung der Kernladung Z vernachlässigen, d. h. wir betrachten Kerne kleiner Ordnungszahl. Die Kernladung kann immer nachträglich durch einen Faktor $F(Z, E_{\text{el}})$ berücksichtigt werden, welcher schon von Fermi angegeben wurde und der nicht von den speziellen Ansätzen für H_β abhängt. Daher ist der einzige, von den Ansätzen abhängige Faktor in der Verteilungsfunktion der β-Elektronen das Quadrat des Matrixelementes $|H_\beta|^2$.

Es scheint daher vernünftig, die experimentellen Kurven durch $F(Z, E_{\text{el}})$ und durch den statistischen Faktor $p_\nu^2 p_{\text{el}} E_{\text{el}}$ zu dividieren, wodurch man den Verlauf von $|H_\beta|^2$ erhält, und dies mit der Theorie zu vergleichen. Behandelt man die schweren Teilchen unrelativistisch, so ist J_5 Null zu setzen und man erhält

$$\begin{aligned} |H_\beta|^2 &= \sum_{i,\,k=1}^{4} C_i C_k \, \psi_{\text{el}}^* A^i \varphi_\nu \varphi_\nu^* A^k \psi_{\text{el}} \\ &= C_i C_k \text{ Spur } \{A^i D_\nu^{\mp} A^k D_{\text{el}}^{\pm}\}. \end{aligned}$$

Dabei gilt das obere Vorzeichen bei Elektronenemission, das untere bei Positronenemission.

Es ist

$$A^k, A^i = I, \beta, \alpha_l \alpha_n, \beta \alpha_l \alpha_n$$

$$D_{\substack{\nu \\ \text{el}}}^{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \frac{(\alpha \underset{\text{el}}{p_\nu}) \cdot c + \beta \underset{\text{el}}{m_\nu} c^2}{\underset{\text{el}}{E_\nu}(p)} \right\}.$$

[1]) H. A. Bethe u. R. F. Bacher, Rev. of Mod. Phys. 8, April 1936.

Es folgt

$$\frac{|H_\beta|^2}{2} = C_1^2 + C_2^2 + 3\,C_3^2 + 3\,C_4^2$$

$$+ \frac{(\vec{p}_\nu \vec{p}_{\mathrm{el}})}{p_\nu E_{\mathrm{el}}} \{C_1^2 - C_2^2 - C_3^2 + C_4^2\} \pm \frac{m c^2}{E_{\mathrm{el}}} (C_1 C_2 + 3 C_3 C_4). \qquad (2.1)$$

Die C_K sind dabei die Koeffizienten der Invarianten J_K. $\vec{p}_\nu$ ist der Impuls des Neutrinos, $\vec{p}_{\mathrm{el}}$ der des Elektrons. Der Term $\sim (\vec{p}_\nu \vec{p}_{\mathrm{el}})$ bestimmt die Richtungsverteilung der Neutrinos bezüglich der Elektronen. Aus dem beim β-Zerfall auftretenden Rückstoß kann auf ihn geschlossen werden.

Der Term $\sim \frac{m c^2}{E_{\mathrm{el}}}$ hat eine gewisse Asymmetrie des Spektrums bezüglich Neutrinos und Elektronen bzw. Positronen zur Folge. Sind die $C_K > 0$, so werden wegen dieses Terms bei Elektronen die kleineren Energien bevorzugt, bei Positronenemission tritt aber an Stelle des $+$-Zeichens das $-$-Zeichen, so daß hier dieser Zusatz gerade in der entgegengesetzten Richtung wirkt.

Überdies ist die so erhaltene Asymmetrie viel kleiner, als vom Experiment gefordert wird. Betrachtet man nämlich den experimentellen Verlauf von $|H_\beta|^2$, so hat diese Größe am oberen Ende des Elektronenspektrums höchstens noch ein Viertel des Wertes, den sie für $p_{\mathrm{el}} = 0$ hat. Das theoretische $|H_\beta|^2$ hingegen hat günstigstenfalls die Gestalt $1 + \frac{m c^2}{E}$ und ist daher an der oberen Grenze des Elektronenspektrums höchstens auf die Hälfte abgefallen.

3. *Austauschkräfte.* Die Existenz des β-Zerfalls gibt bekanntlich zu Austauschkräften zwischen Proton und Neutron Anlaß [1]). Diese lassen sich aus vorstehender Theorie in zweiter Näherung des Störungsverfahrens berechnen; und zwar gibt es zwei Prozesse, welche immer zugleich auftreten und in gleichem Sinne wirken. 1. Das Neutron emittiert ein Elektron und ein Antineutrino, welche Teilchen dann vom Proton absorbiert werden. Dabei verwandelt sich das Neutron in ein Proton und das Proton in ein Neutron. 2. Das Proton emittiert ein Positron und ein Neutrino, die dann vom Neutron absorbiert werden. Dabei verwandelt sich das Proton in ein Neutron und das Neutron in ein Proton. Obwohl nun diese so berechneten Kräfte zu divergenten Resultaten führen, wenn die Theorie bis zu beliebig kleinen Abständen der schweren Teilchen als gültig erachtet wird, und es anderseits nicht möglich ist, durch „Abschneidevorschriften" vernünftige Resultate zu erzielen; so kann man doch durch Betrachtung der Potentiale,

[1]) Siehe Fußnote 2 und 3 S. 553.

die vorliegende Theorie ergibt, gewisse allgemeine Aufschlüsse gewinnen, die von den Divergenzschwierigkeiten unabhängig sind, da für endliche Abstände keine Divergenzen auftreten. Auch hier wollen wir uns auf die unrelativistische Näherung in den schweren Teilchen beschränken. Wir wollen uns vorstellen, das Proton sei durch ein Wellenpaket $\Psi(x')$, das Neutron durch ein Wellenpaket $\Phi(x)$ beschrieben. Der Abstand $(x - x')$ der Gebiete, in denen Φ und Ψ von Null verschieden sind, soll die Ungleichung $\frac{\hbar}{mc} \gg |x - x'| \gg \frac{\hbar}{Mc}$ erfüllen. Dann sind die Impulse der Elektronen und Neutrinos, welche bei der Wechselwirkung die Hauptrolle spielen, groß gegen mc und man kann die Ruhmasse des Elektrons durch Null ersetzen. Anderseits ist der auf die schweren Teilchen übertragene Impuls noch klein gegen Mc, so daß man ihre Energie durch die Ruhmasse ersetzen kann.

In dieser Näherung kann die potentielle Energie zwischen Proton und Neutron in folgender Form geschrieben werden:

$$-\sum_{i,\,k} C_i C_k \int \mathrm{d}\,x \int \mathrm{d}\,x' \sum_{p_{\mathrm{el}},\,p_\nu} \frac{\Phi^*(x) A^k \Psi(x)\, \Psi^*(x') A^i \Phi(x')\, \varphi^* A^k \psi\, \psi^* A^i \varphi}{p_{\mathrm{el}} + p_\nu}. \quad (3,1)$$

Hier bedeutet

Φ die Eigenfunktion des Neutrons, sie ist eine Matrix einer Zeile und mit zwei Spalten,

Ψ diejenige des Protons, sie ist eine Matrix wie Φ,

$\left.\begin{array}{l}\varphi \text{ diejenige des Neutrinos} \\ \psi \text{ diejenige des Elektrons}\end{array}\right\}$ Matrizen mit einer Zeile und vier Kolonnen.

Der Operator A^k ist bei den schweren Teilchen derjenige der zweikomponentigen, unrelativistischen Theorie, für die leichten Teilchen der entsprechende relativistische Operator. Es ist also

$$\sum_K C_k \Phi^*(x) A^k \Psi\, \varphi^*(x) A_k \psi(x) = C_1 (I)(\beta) + C_2 (I)(I) + C_3 (\sigma)(\beta\sigma) + C_4 (\sigma)(\sigma),$$

wobei

$$(I)(\beta) = \Phi^*(x)\, \Psi(x)\, \varphi^*(x) \beta \psi(x), \ldots$$

σ_l ist für die leichten Teilchen $= -i\,\alpha_i \alpha_k$; i, k, l zyklisch. Die leichten Teilchen behandeln wir als ebene Wellen. Es ist dann

$$\varphi_\nu^*(x) A^k\, \psi(x)\, \psi^*(x') A^i \varphi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_e - \vec{p}_\nu)(\vec{x} - \vec{x}')} \operatorname{Sp}\{A^k\, D_e^{\pm} A^i D_\nu^{\mp}\}.$$

Die Zeichen $\pm$ beziehen sich auf die oben erwähnten Prozesse 1, 2. Da die Masse des Elektrons Null gesetzt ist, ergibt die Spur mit dem oberen Vorzeichen dasselbe wie diejenige mit dem unteren Vorzeichen.

Von diesen Spuren ergeben nun nur diejenigen einen Beitrag, die proportional zu C_k^2 sind. Diejenigen $\sim C_k C_{k+1}$, $C_1 C_4$ sind Null, weil sie nur ein β enthalten. $C_i C_{i+2}$ ergibt Terme $\sim [\vec{p}_e \vec{p}_\nu]$, welche bei der Integration über die $\vec{p}$ Null ergeben, wie wir weiter unten sehen werden.

Die Spuren werden daher mit $\frac{\vec{p}_e}{|p_e|} = \vec{s}$, $\frac{\vec{p}_\nu}{|p_\nu|} = \vec{t}$

$$\left.\begin{aligned}
2\,C_1^2\,\mathrm{Sp}\,\{D_e^+ D_\nu^+\} &= 2\,C_1^2\,(1 + (\vec{s}\,\vec{t})),\\
2\,C_2^2\,\mathrm{Sp}\,\{D_e^+ D_\nu^-\} &= 2\,C_2^2\,(1 - (\vec{s}\,\vec{t})),\\
2\,C_3^2\,\mathrm{Sp}\,\{\sigma_i D_e^+ \sigma_k D_\nu^+\} &= 2\,C_3^2\,\{\delta_{ik}(1 - (\vec{s}\,\vec{t})) + 2\,s_i\,t_k\},\\
2\,C_4^2\,\mathrm{Sp}\,\{\sigma_i D_e^+ \sigma_k D_\nu^-\} &= 2\,C_4^2\,\{\delta_{ik}(1 + (\vec{s}\,\vec{t})) - 2\,s_i\,t_k\}.
\end{aligned}\right\} \tag{3, 2}$$

Bei der Integration über die Impulse treten daher drei Integrale auf:

$$\left.\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}\vec{p}_e \int \mathrm{d}\vec{p}_\nu \frac{e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_e - \vec{p}_\nu)\cdot\vec{r}}}{p_e + p_\nu} = \frac{2\,\pi^3\,\hbar^5}{r^5},\\
&\int \mathrm{d}\vec{p}_e \int \mathrm{d}\vec{p}_\nu \frac{e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_e - \vec{p}_\nu)\cdot\vec{r}}\cdot(\vec{p}_e\,\vec{p}_\nu)}{p_e\,p_\nu\,(p_e + p_\nu)} = \frac{10\,\pi^3\,\hbar^5}{r^5},\\
&\int \mathrm{d}\vec{p}_e \int \mathrm{d}\vec{p}_\nu \frac{e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_e - \vec{p}_\nu)\vec{r}}\,p_\nu^i\,p_e^k}{p_e\,p_\nu\,(p_e + p_\nu)} = \frac{2\,\pi^3\,\hbar^5}{r^5}\cdot\frac{r^i\,r^k}{r^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{3, 3}$$

Dabei ist $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$ der Abstand zwischen Proton und Neutron. Das letzte Integral ist symmetrisch in i, k, woraus folgt, daß die schiefe Größe $[\vec{p}_e \vec{p}_\nu]$ bei der Integration Null ergibt. Damit wird die potentielle Energie gleich

$$-\frac{1}{16\,\pi^2\,hc}\int \mathrm{d}\vec{x}\int \mathrm{d}\vec{x}'\cdot\frac{1}{r^5}\,\Phi_{\bar{\sigma}}^*(x)\,\Psi_\varrho(x)\,\Psi_{\bar{\varrho}}^*(x')\,\Phi_{\bar{\sigma}}(x').$$

$$\cdot\Big[\delta_{\sigma\varrho}\,\delta_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}}\,\{(C_1^2 + C_2^2)\cdot\tfrac{1}{5} + (C_1^2 - C_2^2)\}$$

$$+\sum_{i,k}\sigma_{\sigma\varrho}^i\,\sigma_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}}^k\left\{(C_3^2 + C_4^2)\,\delta_{ik}\cdot\frac{1}{5} + (C_3^2 - C_4^2)\left(2\,\frac{r_i\,r_k}{r^2} - \delta_{ik}\right)\right\}\Big]. \tag{3, 4}$$

Aus (3. 4) sieht man, was für (geschwindigkeitsunabhängige) Kräfte möglich sind. Insbesondere treten Spinkräfte auf, welche von der Spinkomponente in der Verbindungsrichtung von Proton und Neutron abhängen.

Ist $C_3 = C_4 = 0$, so erhält man eine reine Heisenberg-Kraft.

Ist

$$\left.\begin{aligned} C_3^2 - C_4^2 &= 0 \\ C_3^2 + C_4^2 &= 6\,C_1^2 - 4\,C_2^2 \end{aligned}\right\} C_3^2 = 3\,C_1 - 2\,C_2^2,$$

so hat man eine reine Majoranakraft.

Die Invarianten J_2, J_4 ergeben abstoßende Kräfte, die Invarianten J_1, J_3 anziehende. Wird der Abstand $r \lesssim \frac{\hbar}{Mc}$, so verlieren unsere Rechnungen ihren Sinn[1]).

4. Das magnetische Moment der schweren Teilchen. Infolge der Existenz des β-Zerfalls sollten die schweren Teilchen, Proton und Neutron, ein elektromagnetisches Zusatzmoment besitzen; und zwar ergeben die im folgenden verwendeten theoretischen Ansätze und Rechenmethoden für das Proton das entgegengesetzt gleiche Moment wie für das Neutron.

Bei dieser Rechnung, welche sich auf Fermis Theorie stützt, wird man auf Integrale, die wie $\int p^2\,dp$ und stärker divergieren, geführt; denn dieses Moment wird durch eine Rechnung, analog derjenigen, welche die Selbstenergie der Teilchen liefert, gewonnen. Wenn man nun, durch willkürliche „Abschneidevorschriften" die auftretenden Integrale endlich macht, so hängt das gewonnene Resultat wesentlich von der verwendeten Vorschrift ab — auch qualitativ —, so daß der Sinn der ganzen Rechnung sehr fraglich ist.

Man kann den Ausdruck für das Moment in folgender Weise gewinnen: Man berechnet den Zusatzterm in der Hamilton-Funktion, z. B. des Neutrons, bei Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes, der dann die Form $-\mu\,\beta\,\alpha_i\,\alpha_k\,F_{ik}$ haben sollte, wenn μ das erwartete Moment ist.

Es sind vier verschiedene Prozesse möglich, die zu von uns gesuchten Zusätzen führen.

1a. Das Neutron verwandelt sich in ein Proton + Elektron + Neutrino; das Elektron nimmt Impuls aus dem Strahlungsfelde auf und hierauf

---

[1]) Das von v. Weizsäcker verwendete Verfahren, durch Abschneiden der Integrale über p_e, p_ν bei einem Impulse $1/\alpha$ auch für J_2 eine Anziehung zu erzwingen, wenn $r \lesssim \hbar\alpha$ ist, erweist sich als überflüssig.

werden Elektron und Neutrino wieder verschluckt und das Proton verwandelt sich wieder in ein Neutron.

1b. Wie 1a, nur nimmt das Proton den Impuls aus dem Strahlungsfeld.

2a. Das Strahlungsfeld erzeugt ein Elektron und Positron, worauf das Neutron zuerst das Positron verschluckt und sich in Proton und Neutrino verwandelt. Dann verschluckt das Proton das Elektron und das Neutrino und verwandelt sich wieder in das Neutron zurück.

2b. Wie 2a, nur, daß zuerst ein Proton-Antiproton-Paar erzeugt wird.

Um nun überhaupt rechnen zu können, müssen wir jedoch eine „Abschneidevorschrift" einführen: Die auftretenden divergenten Integrale sollen im Integranden einen konvergenzerzeugenden Faktor $e^{-\frac{\alpha}{\hbar}(p_e + p_\nu)}$ erhalten, wobei α der folgenden Ungleichung genügt

$$\frac{\hbar}{mc} \gg \alpha \gg \frac{\hbar}{Mc}. \tag{4.1}$$

Unter diesen Voraussetzungen stellen die folgenden Vereinfachungen eine gute Näherung dar.

1. Die Prozesse 1b, 2b, d. i. die Wechselwirkung des Protons mit dem Strahlungsfeld, ergeben lediglich einen Term, der der Ladung des Protons im Zwischenzustand entspricht, der also nur vom skalaren Potential abhängt. Die Terme proportional dem Vektorpotential bekommen einen Faktor $1/\alpha M$, den wir hier Null setzen dürfen.

2. In den Integralen über p_e, p_ν werden die wesentlichen Beiträge vom Gebiete geliefert, wo $p \gg mc$ ist. Man darf daher die Energie des Elektrons durch cp ersetzen. Da für die auf die schweren Teilchen übertragene kinetische Energie gilt $(p_e + p_\nu)^2 \cdot \frac{1}{2M} \sim E_{\text{kinet}} \ll p_e + p_\nu$, so kann sie in dem Resonanznenner weggelassen werden.

Die Energien der schweren Teilchen ersetzen wir durch die Ruhmasse, was bis zur Ordnung v/c in der Geschwindigkeit der schweren Teilchen richtig ist.

Das elektromagnetische Feld beschreiben wir durch ein Vektorpotential $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 e^{i\vec{k}\vec{x}}$. Es soll $k \ll 1/\alpha$ sein, so daß wir nach $\hbar k/p_e$ entwickeln können. Die Terme erster Ordnung in k entsprechen dann dem Dipolmoment und wir werden uns auf diese beschränken.

Für die Fermische Wechselwirkung setzen wir eine Linearkombination aller Invarianten an: $\sum_k C_k J_k$. Alle vorkommenden Teilchen beschreiben wir durch ebene Wellen. Als Zusatzenergie erhalten wir dann

$$H = -\frac{e}{c^2 h^6} \sum_{i,k} C_i C_k \int \mathrm{d}\vec{x} \int \mathrm{d}\vec{p}_e \int \mathrm{d}\vec{p}_\nu \sum_{p=1}^{2} \Phi^* A^i \Psi^p \Psi^{*p} A^k \Phi$$
$$\cdot \sum_{q=3}^{4} \cdot \sum_{r'=1}^{2} \left\{ \sum_{r=1}^{2} \frac{\varphi_q^* A^i \psi_{r'} \psi_{r'}^* (\alpha \mathfrak{A}_0) \psi_r \psi_r^* A^k \varphi_q}{(p_e + p_\nu)(p_e' + p_\nu)} \right.$$
$$\left. + \sum_{r=3}^{4} \frac{\varphi_q^* A^i \psi_{r'} \psi_{r'}^* (\alpha \mathfrak{A}_0) \psi_r \psi_r^* A^k \varphi_q}{(p_e + p_e')(p_e' + p_\nu)} \right\}. \quad (4.2)$$

Die beiden Terme mit den verschiedenen Resonanznennern entsprechen den Prozessen 1, 2. Die Indizes q, r', r, p numerieren die vier Zustände, die zu einem Impuls gehören. Die Summen über r, r', p, q führen wir aus, indem wir die Operatoren $\frac{1}{2}(1 \pm H/E)$ einführen.

Mit den Abkürzungen

$$\vec{t} = \frac{\vec{p}_\nu}{p_\nu}, \quad \vec{s} = \frac{\vec{p}_e}{p_e}, \quad \vec{s}' = \frac{\vec{p}_e'}{p_e'} \quad (4.3)$$

erhalten wir im Integranden

$$\frac{1}{2} \Phi^* A^i (1 + \beta) A^k \Phi \left[\frac{\mathrm{Spur}}{8} \left\{ \frac{A^i (1 + (\alpha s')) (\alpha \mathfrak{A}_0) (1 + (\alpha s)) A^k (1 - (\alpha t))}{(p_e + p_\nu)(p_e' + p_\nu)} \right\} \right.$$
$$\left. + \frac{\mathrm{Spur}}{8} \left\{ \frac{A^i (1 + (\alpha s')) (\alpha \mathfrak{A}_0) (1 - (\alpha s)) A^k (1 - (\alpha t))}{(p_e + p_e')(p_e' + p_\nu)} \right\} \right]. \quad (4.4)$$

Wir führen nun $\vec{n} = \vec{s}' - \vec{s}$ als Variable, nach der wir entwickeln, ein.

Es werden auch von n unabhängige Terme auftreten, die einem Strom und einer Ladung des Neutrons entsprechen. Die Ladung des Elektrons im Zwischenzustand wird durch die des Protons kompensiert. Die zweite Spur in (4. 4) ergibt nämlich Null, wenn $s = s'$ und $(\alpha \mathfrak{A})$ durch das skalare Potential ersetzt wird. Die Wechselwirkung des Protons mit dem skalaren Potential liefert aber gerade einen Term, der die erste Spur kompensiert. Weiter treten auch Stromterme der Gestalt $\Phi^* (\alpha \mathfrak{A}) \Phi$ auf. Diese sind stärker divergent als die Terme $\sim \vec{n}$ und geben zu Momenten proportional $1/\alpha M$ Anlaß, welche aber gemäß der Abschneidevorschrift (4. 1) wegzulassen sind. Wir werden nun die Terme erster Ordnung in n betrachten. Man erhält von jeder Spur zwei Beiträge, einer, der von der Entwicklung des Zählers,

und einer, der von der des Nenners herrührt. Über die Neutrinoimpulsrichtungen $\vec{t}$ können wir mitteln und erhalten

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{Sp}}{8}\left\{\frac{A^k A^i\,(1+(\alpha,\,s+n))\,(\alpha\,\mathfrak{A}_0)\,(1+(\alpha\,s))}{(p_e+p_\nu)^2}\right\}\\
&\qquad\qquad+\frac{\mathrm{Sp}}{8}\left\{\frac{A^k A^i\,(1+(\alpha,\,s+n))\,(\alpha\,\mathfrak{A}_0)\,(1-(\alpha\,s))}{(p_e+p_\nu)\,2\,p_e}\right\}\\
&-(\vec{s}\,\vec{n}_{st})\,\frac{\mathrm{Sp}}{8}\left\{\frac{A^k A^i\,(1+(\alpha\,s)\,(\alpha\,\mathfrak{A}_0))\,(1+(\alpha\,s))}{(p_e+p_\nu)^2}\right\}\\
&\qquad-\frac{\mathrm{Sp}}{8}\left\{\frac{A^k A^i\,(1+(\alpha\,s))\,(\alpha\,\mathfrak{A}_0)\,(1-(\alpha\,s))}{2\,p_e\,(p_e+p_\nu)}\right\}\cdot\left\{(\vec{s}\,\vec{n}_{st})+\tfrac{1}{2}\,(\vec{s}\,\vec{n}_s)\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad(4.5)$$

Dabei ist

$$\vec{n}_{st}=\frac{\hbar\,\vec{k}}{p_e+p_\nu},\qquad \vec{n}_s=\frac{\hbar\,k}{p_s},\qquad \vec{n}=\vec{n}_s-\vec{s}\,(\vec{n}_s\,\vec{s}).$$

Wir interessieren uns nun nur für Größen linear in $\vec{n}$ bzw. $\vec{n}_{st}$ und $\vec{n}_s$ Diese dürfen $\vec{s}$ nur quadratisch oder dann gar nicht enthalten. weil sie sonst bei der Integration über $\vec{s}$ Null ergeben. Weiter sind alle Terme der Form

$$(\vec{n}\,\vec{\mathfrak{A}})=0,\ \text{weil}\ n_K\mathfrak{A}_K\sim k_K\mathfrak{A}_K\sim \operatorname{div}\mathfrak{A}=0.$$

Daraus kann man folgern, daß nur folgende Invariantenkombinationen Beiträge zum Moment liefern:

$$C_2^2,\ C_2C_4,\ C_4^2,\ C_3^2,\ C_1C_3,\ C_3C_5.$$

Betrachten wir nun unsere vier verschiedenen Spuren (4. 5), so findet man, daß die beiden ersten auf die Form

$$\mathrm{Spur}\left\{\sigma_i\,(\alpha n)\,(\alpha\mathfrak{A})\right\}$$

gebracht werden können, wo $\sigma_i=-i\,\alpha_k\,\alpha_l=A^kA^l$. Die dritte, welche in s linear sein muß, weil s als Faktor davor steht, ergibt zwei entgegengesetzt gleiche Beiträge, also in summa Null, bei der vierten haben beide Beiträge das gleiche Vorzeichen und sind von der Form

$$-\,\mathrm{Spur}\left\{\sigma_i\,(\alpha s)\,(\alpha\mathfrak{A}_0)\right\}.$$

Die Spuren ergeben $-i\,[\mathfrak{A}n]_i$ bzw. $i\,[\mathfrak{A}s]_i$. Mittelt man $-i\,[\mathfrak{A}n]_i$ und $i\,[\mathfrak{A}s]_i\left\{(\vec{s}\,n_{st})+\frac{1}{2}\,(s\,n_s)\right\}$ über die Richtungen von $\vec{s}$, so erhält man

$$-\frac{2\,i}{3}\,[\mathfrak{A}\,n_s]_i\quad\text{bzw.}\quad\frac{i}{3}\left([\mathfrak{A}\,n_{st}]_i+\frac{1}{2}\,[\mathfrak{A}\,n_s]_i\right).$$

Die Integration über die p führt auf Integrale vom Typus

$$\int \vec{\mathrm{d}p_e} \int \vec{\mathrm{d}p_\nu} \frac{e^{-\frac{\alpha}{\hbar}(p_e + p_\nu)}}{(p_e + p_\nu)^3} \sim \frac{\hbar^3}{\alpha^3}.$$

Weiter ist

$$[\mathfrak{A} n_s] = [\mathfrak{A} k] \cdot \frac{\hbar}{p_e} = i \vec{\mathfrak{H}} \cdot \frac{\hbar}{p_e}.$$

Vor jeder Spur in (4.5) steht nun noch ein Faktor

$$C_i C_k \Phi^* A^i (1 + \beta) A^k \Phi.$$

Die Operatoren, welche auf die Φ wirken, sind dabei

$$\left.\begin{array}{ll} C_2^2 : \sigma_i (1 - \beta) & C_3^2 : \sigma_i \\ C_4^2 : \sigma_i (1 + \beta) & C_1 C_3 : \sigma_i (1 + \beta) \\ C_2 C_4 : \sigma_i & C_1 C_5 : \sigma_i (1 - \beta) \end{array}\right\} \tag{4.6}$$

Wir erhalten daher schließlich als Zusatz zur Hamilton-Funktion einen Ausdruck der Gestalt

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{e}{c^2 h^2} \cdot \frac{K}{\alpha^3} \int \mathrm{d}\vec{r}\, \Phi_\varrho^x [\vec{\sigma}_{\lambda\bar{\varrho}} \mathfrak{H}] \Phi_{\bar{\varrho}} \{C_2^2 (\delta_{\varrho\lambda} - \beta_{\varrho\lambda}) \\ \qquad + 2 C_2 C_4 \delta_{\varrho\lambda} + C_4^2 (\delta_{\varrho\lambda} + \beta_{\varrho\lambda}) + C_3 [2 C_3 \delta_{\varrho\lambda} \\ \qquad\qquad + C_1 (\delta_{\varrho\lambda} + \beta_{\varrho\lambda}) + C_5 (\delta_{\varrho\lambda} - \beta_{\varrho\lambda})]\}. \end{array}\right\} \tag{4.7}$$

K ist eine positive Konstante, deren Zahlenwert von der Abschneidemethode abhängt und die von der Größenordnung 1 ist.

Da in unserem Falle e die Ladung des Elektrons ist, so hat das Moment dann das von der Erfahrung geforderte Vorzeichen, wenn der Klammerausdruck > 0 ist (für $v/c = 0$, d. h. $\beta = 1$). D. h.

$$C_2 C_4 + C_4^2 + C_3 (C_3 + C_1) > 0.$$

Diese Bedingung ist mit beliebigem Kräfteansatz vereinbar. Es ist natürlich auch möglich, das verkehrte Vorzeichen zu erhalten. Man sieht weiter, daß in derjenigen Näherung, in der $\beta = 1$ ist ($v/c = 0$), J_2 keinen Beitrag zum Moment ergibt. Da aber unsere Rechnung bis zur Ordnung v/c des Neutrons gültig ist, so ist kein Grund, $\beta = 1$ zu setzen. Ein magnetisches Moment sollte dann durch den Operator $\beta \vec{\sigma}$ dargestellt werden. Wir erhalten aber auch Beiträge der Gestalt σ, was bedeutet, daß die relativistische Invarianz durch das Abschneiden zerstört wird.

Herrn Prof. Dr. W. Pauli bin ich für manchen Rat und viele Diskussionen zu großem Dank verpflichtet.

5. *Berichtigungen zur v. Weizsäckerschen Arbeit* [1]).

Es sollen hier die Irrtümer dieser Arbeit zusammengestellt werden, soweit sie uns bekannt sind. Die Nummern beziehen sich auf die Formelnummern in [1]).

S. 594. Die dort aufgestellte Behauptung, daß H_b kein magnetisches Moment ergebe, ist unrichtig, wie man am einfachsten aus den von uns angegebenen Formeln (1.4) und 4.7) ersieht (C_1 bis $C_4 = -1$, $C_5 = 1$).

S. 596 unten steht der Satz: „Damit fallen die sämtlichen ${}_1H$-Glieder fort." Dies ist unrichtig, da ${}_1H^b$ (66 b) einen Beitrag ergibt.

(61). Hier wurde nicht beachtet, daß nur über $K = 1, 2$ zu summieren ist. Es ist daher noch ein Operator $\frac{1}{2}(1 + \beta)$ in (62) einzuführen, der auf $\Phi_e(r, \lambda)$ wirkt.

(63). Für das untere Vorzeichen (+) ist die Formel unrichtig.

(71 c), (71 d). Berücksichtigt man hier den Faktor $(1 + \beta)$ in (61), so sind beide Größen Null, wenn $\beta = 1$ gesetzt wird.

(74 a). Hier sollte der Integrand $\dfrac{e^{-\alpha(p_s + p_t)}}{p_s (p_s + p_t)^2}$ lauten.

(74). Hier sollte der Integrand $\dfrac{e^{-\alpha(p_s + p_t)}}{2 p_s^2 (p_s + p_t)}$ lauten.

Zürich, Physikalisches Institut der Eidgenössisch-Technischen Hochschule.

---

[1]) C. F. v. Weizsäcker, ZS. f. Phys. **102**, 572, 1936.