

# ÉTUDE DE LENTILLES MAGNÉTIQUES A FOCALISATION FORTE \*

P. GRIVET, A. SEPTIER et J. HUE

Laboratoire d'Electronique et de Radioélectricité, Fontenay-aux-Roses, France

## Introduction

Le projet relatif à l'injection, dans le synchrotron du CERN, de protons de 50 Mev, prévoit l'utilisation de deux paires de lentilles quadrupolaires, destinées à modifier la forme et l'ouverture du faisceau. Ces lentilles seront identiques, avec une distance focale variable entre 1 à 2 mètres.

Dans le but de préciser les propriétés optiques des lentilles quadrupolaires, une maquette a été réalisée, qui a permis de mesurer les valeurs des diverses composantes du champ et des gradients magnétiques en tous points de l'espace utile, tandis qu'un programme de calculs menés conjointement essayait de chiffrer l'ordre de grandeur des diverses aberrations.

## PREMIÈRE PARTIE

### Etude expérimentale

#### 1. Caractéristiques de la lentille

Par raison de simplicité de construction mécanique, les pièces polaires sont circulaires. Le cercle choisi, tangent

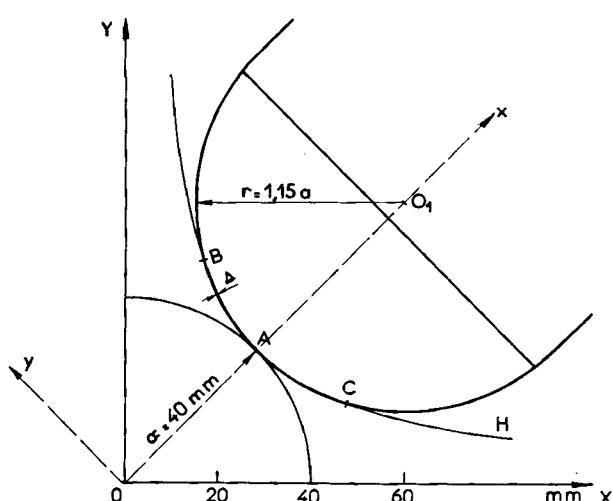


Fig. 1.

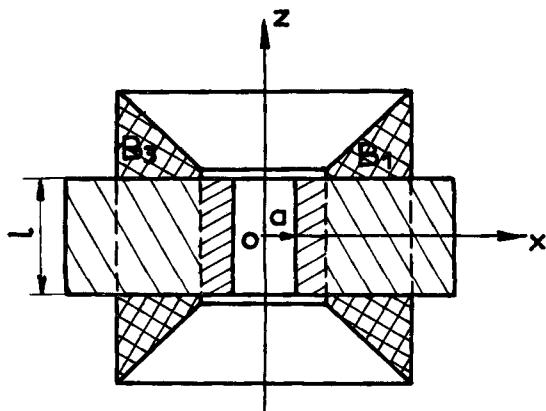
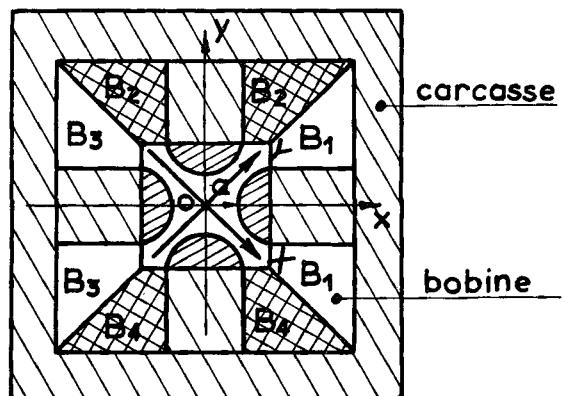


Fig. 2.

au sommet de l'hyperbole équilatère théorique d'équation  $XY = 800 \text{ mm}^2$ , la recoupe en deux points (fig. 1) et a pour rayon  $R = 1,15 a$ ,  $a$  étant le rayon du cercle tangent aux quatre pièces polaires et égal ici à 40 mm. La longueur des pièces polaires est de  $l = 150 \text{ mm}$ , la carcasse de forme carrée a 50 cm de côté et une section de  $75 \text{ cm}^2$ . Chaque support de pièce polaire porte une bobine

\* Cette communication n'a pas figuré au programme des discussions.

à section trapézoïdale (fig. 2) comportant 627 spires (ruban de cuivre de  $4 \times 2$  mm).

L'intensité normale de fonctionnement assurant une distance focale de l'ordre de 2 mètres est de 4 ampères, mais un système de refroidissement permet de fonctionner de façon continue jusqu'à 15 ampères.

## 2. Champ transversal

L'approximation des pièces polaires circulaires est excellente, car le gradient transversal au centre de la lentille, est parfaitement constant *dans toutes les directions* aussi bien dans les plans de symétrie « diagonaux » OX et OY que dans les plans de symétrie « médians » Ox et Oy (fig. 3) et jusqu'à une distance de l'axe égale à  $a$ . Le champ transversal croît de façon parfaitement linéaire lorsqu'on s'éloigne de l'axe, avec un gradient de 400 gauss/cm pour  $I = 4$  Amp.

Si l'on trace les courbes à différentes intensités, cette loi se conserve, et en un point donné, le champ est proportionnel au courant jusqu'à 10 ampères environ (fig. 4); pour des intensités plus fortes, la saturation commence à se faire sentir, mais son effet ne dépasse pas 5% vers 20 ampères.

Si on se déplace parallèlement à l'axe de la lentille, la valeur du champ transversal se maintient constante sur une distance  $d$ , de l'ordre de 7 cm, au centre de la lentille, puis décroît rapidement sur les bords (fig. 5). Le champ de fuite est pratiquement nul à 15 cm des faces terminales des pièces polaires. Si on accouple deux telles lentilles de façon que leurs centres soient distants de 50 cm, il n'y a

aucune interaction entre les champs de fuite. Lorsqu'on s'éloigne de l'axe, le « plateau » s'allonge; les courbes restent régulières dans les plans OX et OY, mais des anomalies apparaissent lorsqu'on s'approche des angles des pièces polaires (fig. 6) dans les plans Ox et Oy. Cet effet est déjà marqué à 30 mm de l'axe. Le remplacement de l'angle vif des pièces polaires par un léger arrondi (5 mm de rayon) n'amène aucune amélioration. Pour  $a = 60$  mm, le plateau atteint encore 30 mm au centre. D'où la relation :  $d \simeq l - 2a$ .

Les mêmes phénomènes se manifestent sur les courbes donnant les variations du gradient transversal.

## 3. Longueur équivalente

La longueur  $L$  de la lentille idéale équivalente à la lentille réelle peut être définie de deux façons différentes : soit à partir du champ magnétique transversal  $B$ , par analogie avec les lentilles électroniques classiques :

$$L_B = \frac{1}{B_0} \int_{-\infty}^{+\infty} B \, dz$$

où  $B_0$  représente la valeur du champ au centre ( $z = 0$ ), soit à partir du gradient transversal

$$L_G = \frac{1}{B'_0} \int_{-\infty}^{+\infty} B' \, dz$$

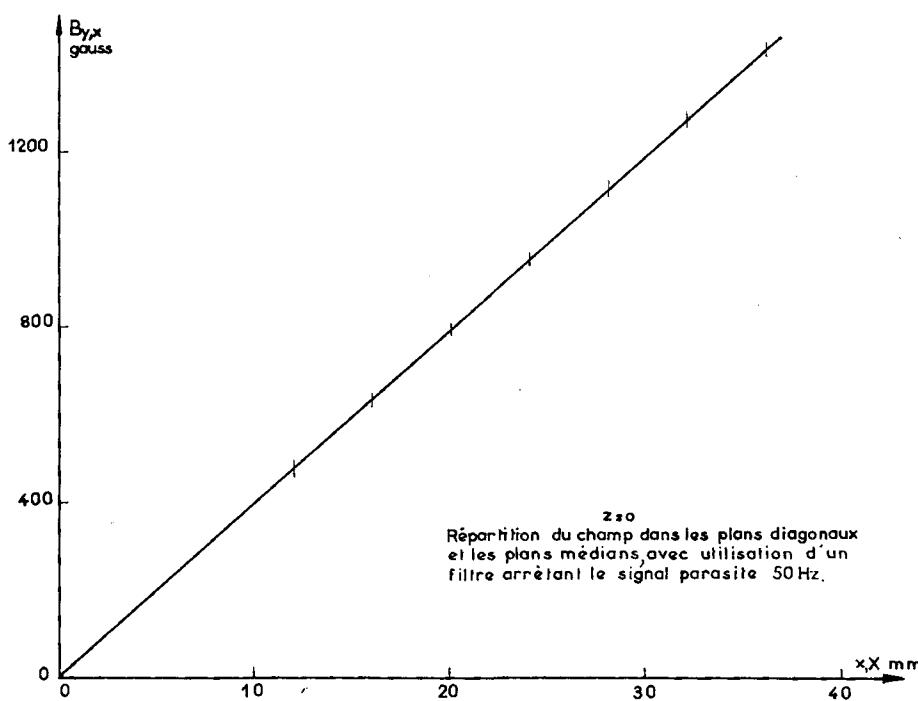


Fig. 3.

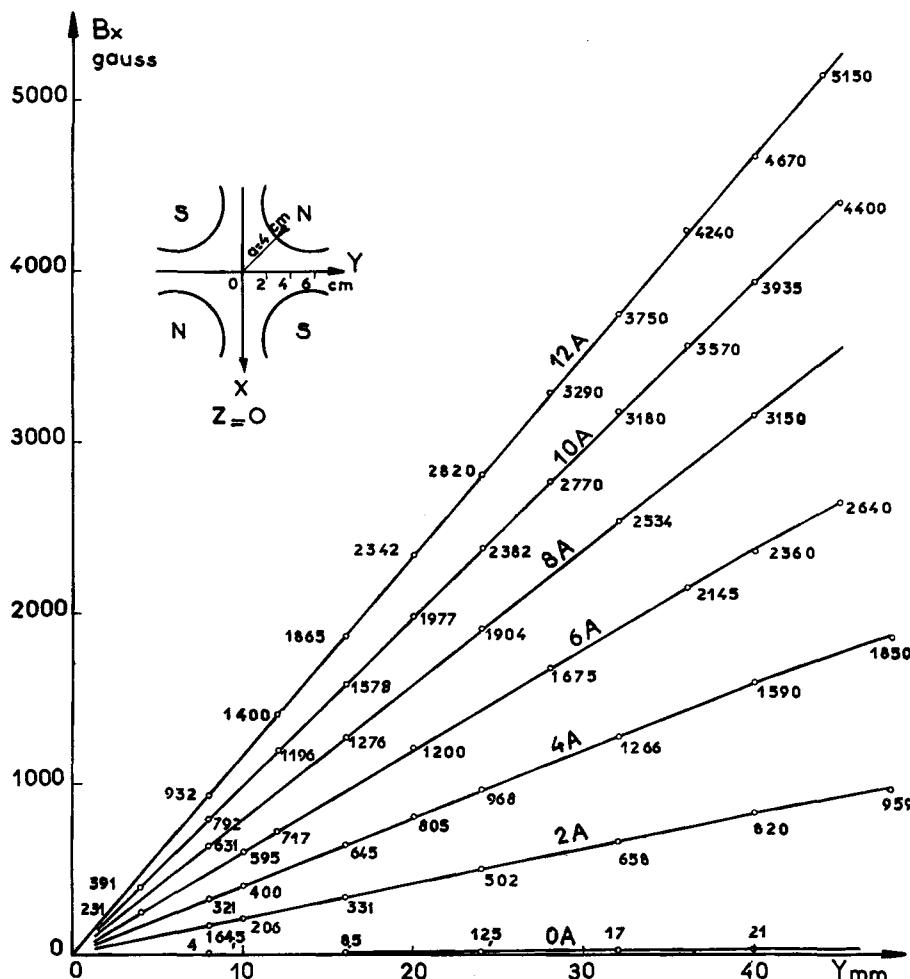


Fig. 4.

(avec par exemple  $B' = \partial B_x / \partial Y$  ou  $B' = \partial B_y / \partial X$ ), cette grandeur intervenant dans les équations de trajectoires lorsqu'on utilise précisément le modèle simplifié défini plus loin.

Ces deux grandeurs sont égales au centre, et pratiquement confondues dans toute la zone utile. Elles varient dans le même sens, et les deux points essentiels à noter sont les suivants :

$L$  est notablement plus grande que la longueur  $l$  des pièces polaires (195 mm au centre, au lieu de 150, soit  $(L-l)/l = 30\%$ ).

$L$  décroît légèrement du centre vers les bords : cette diminution atteint 1% environ à 30 mm de l'axe et 2% à 40 mm (fig. 7). Cette décroissance est la même dans toutes les directions. La lentille possèdera donc une aberration négative d'ouverture. Ce phénomène se produit à toutes les intensités.

Le calcul montre que les aberrations dues à cette faible variation de  $L$  sont importantes. Il est heureusement

possible d'y remédier en ajoutant des masselottes d'acier doux convenablement disposées aux extrémités des pièces polaires (fig. 8). On arrive à rendre  $L$  parfaitement constante dans toutes les directions jusqu'à 4 cm de l'axe (fig. 9). Un profil continu destiné à les remplacer est à l'étude.

#### 4. Champ magnétique longitudinal

Dans le champ de fuite apparaît une composante longitudinale  $B_z$ . Nulle sur l'axe et dans les plans  $OX$  et  $OY$ , elle croît selon une loi parabolique dans les plans  $Ox$  et  $Oy$  ; elle atteint rapidement de fortes valeurs au voisinage des plans terminaux des faces des pièces polaires (750 gauss à 35 mm de l'axe, en un point où le champ transversal est de l'ordre de 1.400 gauss) (fig. 10). Suivant des parallèles à l'axe, l'action de  $B_z$  sera localisée aux deux extrémités de la lentille avec un maximum aigu, et l'on peut craindre, pour les rayons, une action perturbatrice dont le calcul seul peut donner l'importance. La fig. 11 représente la carte de la répartition spatiale de la grandeur

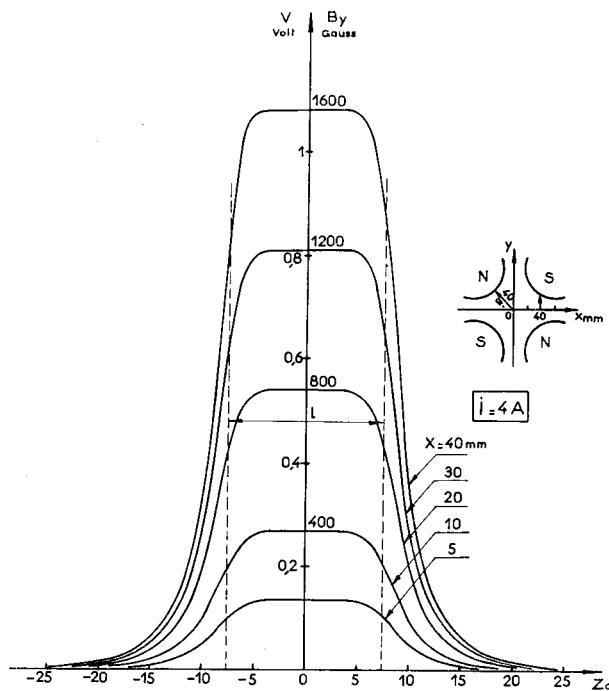


Fig. 5.

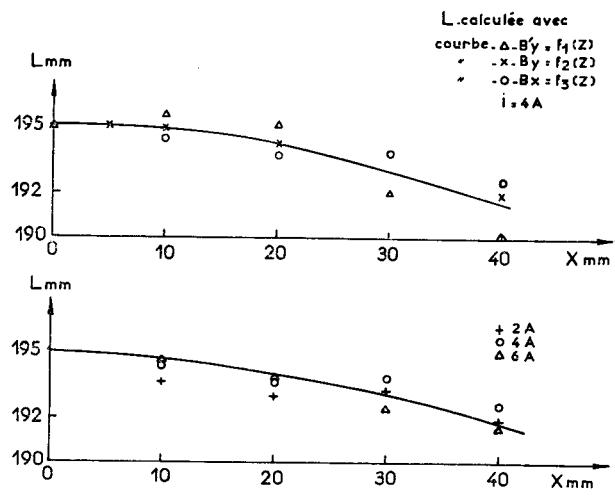


Fig. 7.

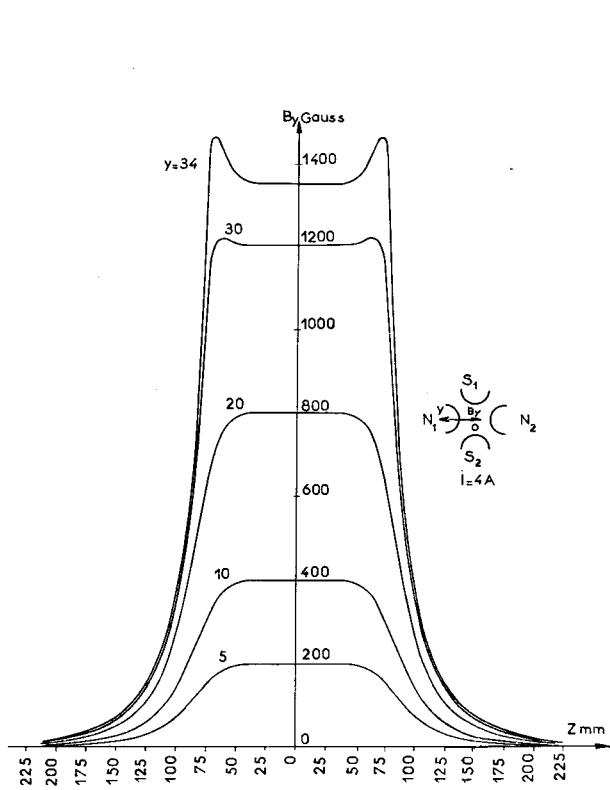


Fig. 6.

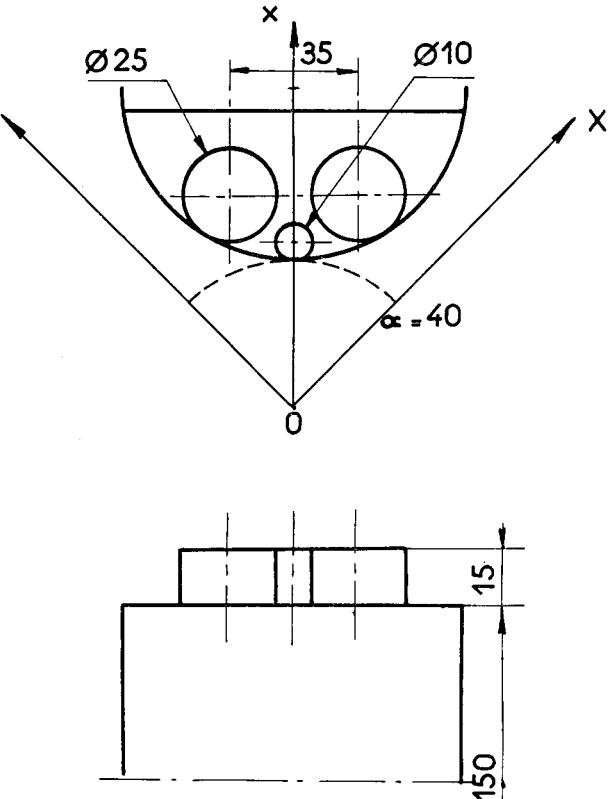


Fig. 8.

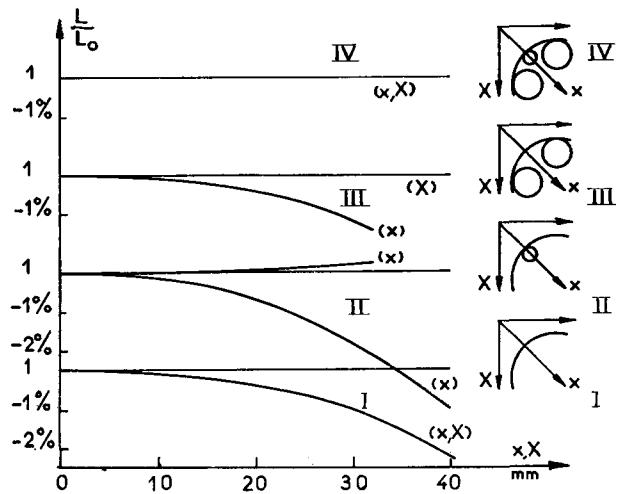


Fig. 9.

$$\dot{L} = \int_0^{+\alpha} B_z dz,$$

qui intervient dans le calcul des aberrations avec le modèle simplifié.

##### 5. Dimensionnement des lentilles définitives

Bien que la répartition du champ transversal dans la zone centrale coïncide avec la répartition idéale qui serait fournie par quatre pièces polaires hyperboliques, l'effet perturbateur des extrémités et des champs de fuite incite à n'utiliser pour le faisceau de protons qu'un espace restreint au voisinage de l'axe. Pour un faisceau incident parallèle de 6 cm. de diamètre (dont certaines particules s'éloigneraient à 4 cm de l'axe environ, durant la traversée des lentilles), il sera bon d'envisager une valeur de  $\alpha$  de l'ordre de 6 à 8 cm. Dans le même but, il sera bon de prendre une lentille plus longue dans laquelle la longueur du « plateau » idéal sera beaucoup plus grande. Nous envisageons d'accroître  $l$  par un facteur 2.

##### 6. Méthodes de mesure

La composante transverse du champ magnétique perpendiculaire à l'axe optique Oz a été mesurée avec une bobine de petites dimensions entraînée par un moteur synchrone et portée par un axe parallèle à Oz. La reproductibilité des mesures est meilleure que 1%. Le signal est proportionnel au champ.

Une bobine tournante longue formée de 12 spires rectangulaires de 6 mm de largeur et 600 mm de long, bobinées sur une tige de plexiglas nous a permis d'obtenir un signal proportionnel à l'intégrale :

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} B_{x, y} dz$$

de déterminer rapidement la longueur équivalente  $L_b$  en tous points de l'espace utile, et d'en suivre les variations.

Il faut noter que tout signal fourni par une bobine tournante comporte une partie parasite de fréquence double, due à un très léger excentrage de la bobine et à l'existence d'un gradient de champ, dans une direction perpendiculaire à l'axe de rotation. Ce signal, *proportionnel au gradient*, entache d'erreur les mesures effectuées au voisinage de l'axe où le champ est nul, et un filtrage sérieux permet seul de l'éliminer.

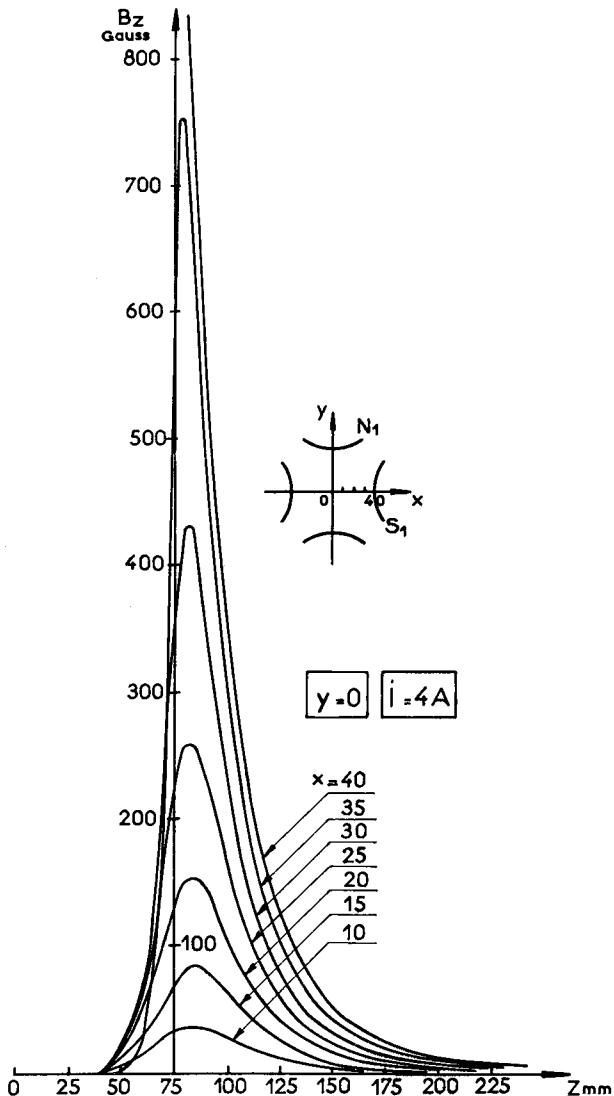


Fig. 10.

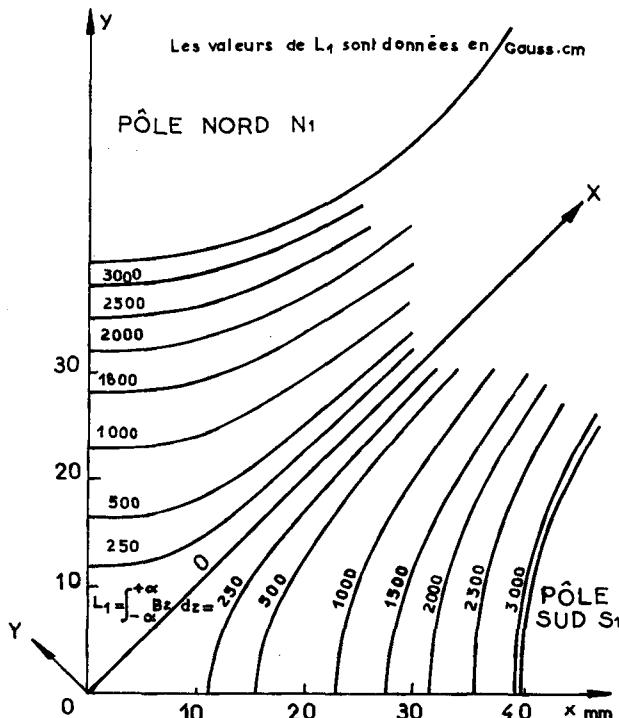


Fig. 11.

La composante longitudinale du champ magnétique a été mesurée à l'aide d'un long solénoïde de faible diamètre vibrant parallèlement à l'axe, entraîné par un moteur électrodynamique à une fréquence de 50 Hz. L'une des extrémités est placée en dehors du champ, l'autre au point où l'on fait la mesure. Le signal est proportionnel au champ  $B_z$  en ce point.

La détermination des gradients transversaux a été effectuée dans les plans  $OX$  et  $OY$ , à l'aide d'un vibreur spécialement mis au point: une bobine de très petites dimensions est placée à l'extrémité d'une verge rectangu-

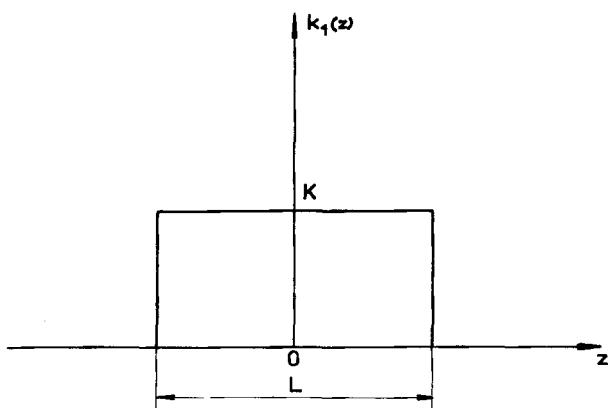


Fig. 12.

laire de plexiglas qu'on fait vibrer transversalement sur le mode  $5\lambda/4$  (fréquence voisine de 80 Hz). L'amplitude atteint 2 mm. Le signal est proportionnel au gradient  $\partial B_x / \partial Y$  ou  $\partial B_y / \partial X$ .

## DEUXIÈME PARTIE

### Marche des rayons

#### 1. Calcul du premier ordre

On a cherché à évaluer la précision du modèle discontinu (caractéristique rectangulaire) qui, à cause de sa simplicité, est très employé dans les évaluations des projets préliminaires. Pour cela on a tenu compte de l'extension du champ de fuite en le représentant par un modèle complètement intégrable par fonction élémentaire. Tout revient à représenter la fonction  $k_1(z)$ . Nous pouvons prendre un rectangle

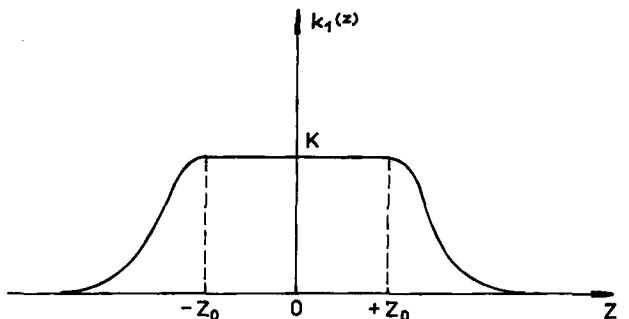


Fig. 13.

de hauteur  $K$  et de longueur  $L$  (fig. 12). Nous pouvons aussi améliorer cette représentation (fig. 13) en prenant un palier, de longueur  $2z_0$ , terminé par deux courbes en cloche, d'équation :

$$k_1(z) = \frac{K}{\left[ 1 + \left( \frac{z + z_0}{b} \right)^2 \right]^2}; -\alpha < z \leq -z_0$$

et

$$k_1(z) = \frac{K}{\left[ 1 + \left( \frac{z - z_0}{b} \right)^2 \right]^2}; +z_0 \leq z < +\alpha$$

1.1 — Il faut adapter le modèle aux résultats des mesures de champ. Pour le modèle rectangulaire, un seul paramètre  $L$  (qui ne doit pas être confondu avec la longueur  $l$  des électrodes) est nécessaire. On écrit que l'aire de la courbe  $k_1(z)$  est bien représentée.

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} k_1(z) dz = S = KL$$

ce qui donne L. Dans le cas du modèle plus évolué, on fait le même calcul, ce qui donne :

$$S = K [2z_0 + \pi/2 \cdot b]$$

On ajoute une condition supplémentaire : on fait coïncider les pentes maximum de  $k_1(z)$  (point d'infexion) et de la courbe approchée, ce qui conduit à :

$$b = (25\sqrt{5}/54) \cdot K/P$$

avec P : pente de  $k_1(z)$  au point d'infexion.

1.2 — Les calculs donnent les éléments cardinaux. Avec le modèle rectangulaire, les résultats classiques sont :

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_x} &= \beta \sin \beta L & \frac{1}{f_y} &= -\beta \sinh \beta L \\ z_{fx} &= \frac{L}{2} + f_x \cos \beta L & z_{fy} &= \frac{L}{2} + f_y \sinh \beta L \\ \text{avec } \beta &= \mu_0 K \cdot nI \cdot \sqrt{2e/M\Phi} \end{aligned}$$

L'origine des abscisses est au milieu de la lentille.

Avec le modèle évolué on trouve :

$$\frac{a}{f_x} = \beta \sin 2 \frac{\beta z_0}{a} \left[ \left( \frac{\sin \omega_1 \frac{\pi}{2}}{\omega_1} \right)^2 + \frac{\cos^2 \omega_1 \frac{\pi}{2}}{1 - \omega_1^2} \right] - \frac{a}{b} \frac{\sin \omega_1 \pi}{\omega_1} \cos 2 \frac{\beta z_0}{a}$$

$$\frac{a}{f_y} = -\beta \sinh 2 \frac{\beta z_0}{a} \left[ \left( \frac{\sin \omega_2 \frac{\pi}{2}}{\omega_2} \right)^2 + \frac{\cos^2 \omega_2 \frac{\pi}{2}}{1 - \omega_2^2} \right] - \frac{a}{b} \frac{\sin \omega_2 \pi}{\omega_2} \cos 2 \frac{\beta z_0}{a}$$

$$\text{avec : } \omega_1^2 = 1 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \beta^2 \quad , \quad \omega_2^2 = 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \beta^2 \quad \text{et} \quad \beta = \mu_0 K (\sqrt{2e/M}) (nI \sqrt{\Phi})$$

$$\frac{z_{fx}}{a} = \frac{z_0}{a} + \frac{f_x}{a} \left[ \beta \sin \frac{2\beta z_0}{a} \left( \frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{1 - \omega_2^2} \right) \cdot \frac{b}{2a} \sin \omega_1 \pi - \cos \frac{2\beta z_0}{a} \cdot \cos \omega_1 \pi \right]$$

$$\frac{z_{fy}}{a} = \frac{z_0}{a} + \frac{f_y}{a} \left[ -\beta \sinh \frac{2\beta z_0}{a} \left( \frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{1 - \omega_1^2} \right) \cdot \frac{b}{2a} \sin \omega_2 \pi - \sinh \frac{2\beta z_0}{a} \cos \omega_2 \pi \right]$$

Exemple d'une lentille pour laquelle  $S = 5 K$  et  $\beta = 1/15$ , ce qui correspond à une lentille magnétique, de 20 cm de long environ, de 4 cm d'ouverture ( $a = 4$  cm), qui reçoit des protons de  $\Phi = 50$  Mev; chaque bobine de pôle compte  $nI = 1800$  amp-tours et on néglige la réluctance du fer.

On trouve les mêmes valeurs à 1 % près au moins, pour les éléments cardinaux, avec le modèle rectangulaire et avec le modèle évolué, terminé par deux courbes en cloche.

## 2. Aberration chromatique

On calcule l'influence d'une variation  $\Delta$  de l'énergie des protons; chaque focale est remplacée par une tache elliptique dont on calcule l'épaisseur dans le plan des focales pour l'énergie  $\Phi$ . On a fait le calcul numérique pour  $\Phi = 50$  Mev et  $\Delta\Phi = 0,1$  Mev; le rayon incident étant parallèle à l'axe optique et distant de 3 cm. de celui-ci. La lentille était définie par :

$$a = 4.10^{-2} \text{ m} \quad I = 4 \text{ ampères}$$

$$L = 19,5.10^{-2} \text{ m} \quad nI = 2508 \text{ A.T par pôle} \quad \beta = 2,015$$

Les focales se trouvaient aux distances  $Z_1$  et  $Z_2$  de la face de sortie de la lentille équivalente (l'épaisseur des focales est appelée  $\delta_1$  et  $\delta_2$ ) :

$$Z_1 = 2,155 \text{ m} \quad \delta_1 = 100 \mu \text{ (microns)}$$

$$Z_2 = 5,057 \text{ m} \quad \delta_2 = 200 \mu$$

## 3. Influence du raccourcissement de la longueur équivalente $L_B$ quand on s'écarte de l'axe

Lorsqu'on s'écarte beaucoup de l'axe, la longueur du plateau de  $B_x$  et de  $B_y$  diminue, et la longueur des zones de fuite varie. Autrement dit, les valeurs de  $B_x$  ou  $B_y$ , à une certaine distance de l'axe, ne sont pas proportionnelles dans le champ de fuite, à celles qu'on observe à son voi-

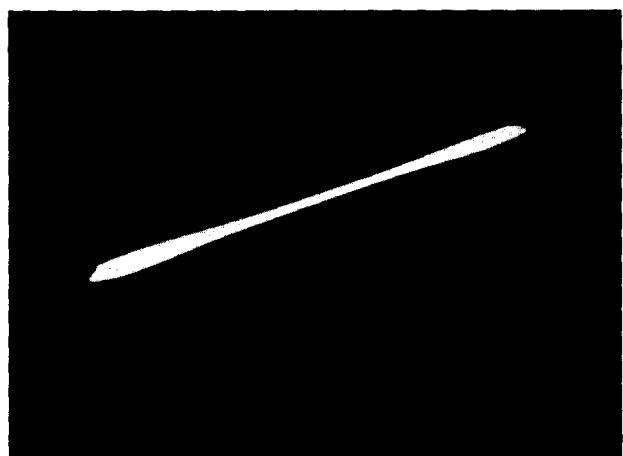


Fig. 14a. Sous-focalisation.

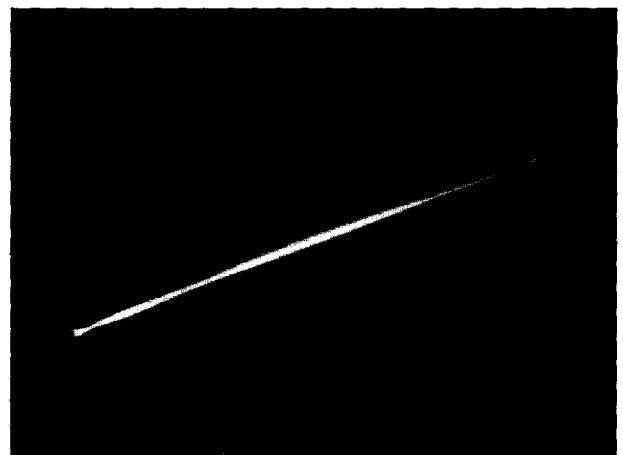


Fig. 14b. Focalisation.



Fig. 14c. Sur-focalisation.

sinage immédiat (le rapport de proportionnalité théorique étant  $r_2/r_1$ ).

On a tenté d'évaluer cet effet grossièrement en calculant la trajectoire au premier ordre, dans une lentille équivalente raccourcie pour des particules circulant loin de l'axe. On peut représenter encore le défaut par un élargissement en ellipse des focales. Pour une variation de longueur équivalente  $L$ ,  $dL/L = 1\%$ , on trouve, le rayon incident étant à 3 cm. de l'axe :

$$\begin{aligned} Z_1 &= 2,155 \text{ m} & \delta_1 &= 870 \mu \\ Z_2 &= 5,057 \text{ m} & \delta_2 &= 1250 \mu \end{aligned}$$

L'effet serait donc plus important que celui de l'aberration chromatique d'où l'intérêt de rendre  $L$  constante dans tout l'espace utile.

#### 4. Aberration du troisième ordre

On a essayé de serrer la réalité de plus près, en faisant un calcul d'aberration au troisième ordre. Le calcul correct est tellement complexe qu'on n'a pas pu le mener jusqu'au bout. On a dû se contenter jusqu'à présent d'évaluations partielles qui sont peu satisfaisantes sur les points suivants :

Première évaluation :

Modèle rectangulaire, composante  $v_z$  de la vitesse assimilée à  $v$ .

L'action de la composante  $B_z$ , est introduite sous formes d'impulsions aux deux extrémités de la lentille idéale; l'amplitude de ces impulsions est donnée par l'intégrale

$$I = \int_0^{+\alpha} B_z dz$$

Il y a bon accord entre les valeurs expérimentales de  $I$  obtenues par intégration graphique des répartitions

mesurées de  $B_z$ , et les valeurs théoriques calculées à partir des répartitions rectangulaires idéales.

Deuxième évaluation :

Modèle adouci par des demi-cloches, composante  $v_z$  de la vitesse assimilée à  $v$ .

Une discussion encore inachevée semble montrer que :

1° — L'assimilation de  $v_z$  à  $v$  n'est pas légitime.

2° — Il faut introduire dans le développement du potentiel magnétique, le coefficient des termes en  $(x^4 - y^4)$  qui ne peut être négligé dans la lentille réelle, alors qu'il disparaît dans les calculs, lorsqu'on se contente du modèle rectangulaire.

Lorsqu'on cherche à introduire ces perfectionnements les calculs deviennent si complexes, qu'il semble que la méthode de perturbation perde son intérêt. C'est pourquoi on a commencé à attaquer ce problème par deux méthodes différentes :

— Calcul pas à pas de quelques trajectoires, à partir des champs mesurés; cependant, si l'on veut éviter l'approximation  $v = v_z$ , l'usage d'une machine à calculer puissante semble nécessaire.

— Expérience directe sur un banc d'optique ionique permettant la mesure de l'épaisseur des focales.

Des expériences préliminaires, effectuées avec des électrons et un système de deux lentilles *électrostatiques* à l'échelle 1/10 montrent que, dans les conditions de travail les plus mauvaises, faisceau large (4 mm à l'entrée de la première lentille), très ouvert ( $\alpha = 2,5 \cdot 10^{-2}$ ), l'épaisseur moyenne des taches focales est de l'ordre de 0,3 mm dans le plan de meilleure mise au point (qui n'est pas forcément le plan « de Gauss » envisagé durant les calculs). La forme des focales est d'ailleurs assez complexe, comme le laissait déjà prévoir le calcul simplifié avec le modèle rectangulaire. Les figures 14 a, b et c, très agrandies, montrent la forme de la section du faisceau au voisinage de la focale du plan « convergent-divergent » du système. On peut donc espérer, dans les conditions normales de fonctionnement, obtenir des focales ayant une épaisseur de 1 à 2 mm.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. Septier, A. Mesure des gradients et des champs magnétiques dans une lentille quadrupolaire. CERN-PS/Sp 8, 1955. (non publié.)
2. Septier, A. Résultats des premières mesures relatives à la maquette Q, de lentille quadrupolaire. CERN-PS/Sp 12, 1955. (non publié.)
3. Septier, A. Répartition du champ dans la première maquette de lentille quadrupolaire. CERN-PS/Sp 13, 1955. (non publié.)
4. Septier, A. Etude de la composante longitudinale  $B_z$  du champ de fuite, et des variations de la « longueur équivalente » d'une lentille quadrupolaire magnétique. CERN-PS/Sp 14, 1956. (non publié.)
5. Bernard, M. Y. Etude théorique de la lentille à forte convergence. CERN-PS/MB 5, 1955. (non publié.)
6. Bernard, M. Y. et Grivet, P. Aberrations des lentilles à forte convergence. Influence du champ longitudinal  $B_z$ . CERN-PS/MB 6, 1955. (non publié.)
7. a) Hue, J. Trajectoire et aberrations dans une lentille à forte convergence magnétique. CERN-PS/HUE 1, 1956. (non publié.)  
b) Hue, J. et Septier, A. Aberration chromatique et d'ouverture dans une lentille quadrupolaire magnétique. CERN-PS/HUE-Sp 1, 1956. (non publié.)