

## Novel Kinetic Theory Describing Ultrasoft Fermionic Mode

佐藤大輔 (京大理), 日高義将 (理研)

### 1 導入

多体系においてはほとんどの場合、系の自由度の多さゆえに正確な計算が困難である。したがって結合定数  $e$  が小さい場合 ( $e \ll 1$ ) には、摂動計算が広く用いられている。しかし粒子の質量が無視できる程度の高温 ( $T$ ) におけるフェルミオン-ボソン系 (湯川模型、量子電磁力学 (QED)、量子色力学 (QCD) など) では、素朴な摂動計算が信頼できない場合がある。

その事に関して、フェルミオンの伝播関数に関する解析の場合に説明する (図 1)。考えるエネルギー領域が  $eT$  程度の場合、hard thermal loop (HTL) 近似 [1] と呼ばれる素朴な 1 ループ近似が適用できることが知られている。この近似は Vlasov 方程式と等価である [2]。この近似の結果、ノーマルフェルミオンおよびプラズミーノと呼ばれるフェルミオン的な集団運動が出現することが知られている。一方エネルギーが  $e^2 T$  程度かそれ以下の場合、HTL 近似はもはや適用できない。このエネルギー領域では resummation<sup>1</sup>を行う必要がある [4, 5]。その手続きは以下の通りである：

1. 粒子の熱質量および崩壊幅を resum した伝播関数を用いる
2. 梯子型のダイアグラムを全て足し上げる

この手法を用いた解析の結果、存在が示唆されていた [5] 集団運動の存在が確立した [4]。

しかしながらこの手続きには、場の理論に基づいた systematic な導出があるわけではない。また、梯子型ダイアグラムの足し上げが物理的には何に対応するのかが不明瞭であった。そこで我々はこの resummation を使った手法と等価な運動論的方程式を Kadanoff-Baym 方程式から導出し、この点を明らかにした。以下でそれについて述べる。

### 2 Kadanoff-Baym 方程式

紙面の都合上、湯川模型および QCD の場合は省略し、QED の場合に限って導出を行う。ここでの計算はクーロンゲージを採用し、Keldysh 形式を用いて行う。

フェルミオン的な集団運動を Kadanoff-Baym 方程式を使って解析するには、以下の状況を考えれば良い。熱平衡系に十分弱いフェルミオン的な外場 ( $\eta(x)$ ) を加え、それによってフェルミオン的な集団運動 ( $\Psi(x)$ ) を生じさせる。そのような状況での Kadanoff-Baym 方程式は以下の通りである：

$$\partial_y^2 K^\mu(x, y) + e S^<(x, y) \gamma^\mu \Psi(y) = \int d^4 z (-K^\nu(x, z) \Pi_\nu^{\mu R}(y, z) + S^<(x, z) \delta \Gamma^\mu(z, y)), \quad (1)$$

$$\partial_x K^\mu(x, y) + ie \gamma_\nu D^{\nu\mu}<(x, y) \Psi(x) = i \int d^4 z (-\Sigma^R(x, z) K^\mu(z, y) + D^{\nu\mu}<(z, y) \delta \Gamma_\nu(x, z)). \quad (2)$$

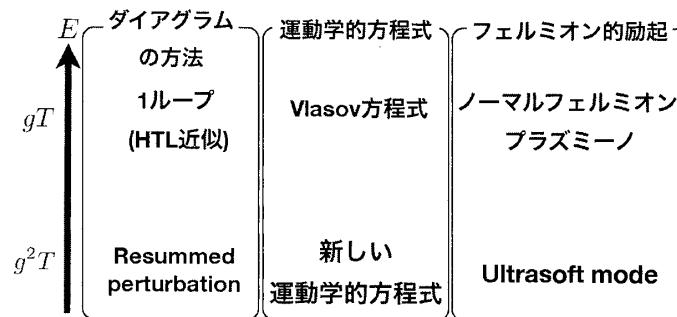


図 1: 各エネルギー階級におけるダイアグラム的な解析手法、運動学的方程式、およびそれらの結果存在が示唆されるフェルミオン的励起。

<sup>1</sup> ボソンの伝播関数の解析における resummation は [3] を参照。

ここで、

$$S^<(x, y) \equiv <\bar{\psi}(y)\psi(x)>, \quad D_{\mu\nu}^<(x, y) \equiv <a_\nu(y)a_\mu(x)>, \quad K^\mu(x, y) \equiv <\psi(x)a^\mu(y)> \quad (3)$$

を導入した。ただし、 $\psi(x)$  ( $a^\mu(x)$ ) はフェルミオン (ボソン) 場のゆらぎである。また、 $\Sigma^R(x, y)$ 、 $\Pi_{\mu\nu}^R(x, y)$ 、 $\delta\Gamma^\mu(x, y)$  は、それぞれフェルミオンおよびボソンの遅延自己エネルギー、vertex 補正である。

一方、考える集団運動 ( $\Psi(x)$ ) の時間発展は以下の式で与えられる：

$$i\partial_x\Psi(x) = \eta(x) + \eta_{\text{ind}}(x). \quad (4)$$

$\eta_{\text{ind}}(x) \equiv eK(x, x)$  は我々が知りたい量であるフェルミオンの自己エネルギー ( $\Sigma^R(x)$ ) を使って  $\eta_{\text{ind}}(x) = \int d^4y \Sigma^R(x - y)\Psi(y)$  と書けるため、結局我々がやるべきことは式 (1) および (2) から  $K^\mu(x, y)$  を求める事に帰着する。

ここで 2 つの近似を行う。1 つめは、gradient 展開と呼ばれるものである。まず、時空の座標  $x$  および  $y$  を使って、その平均  $X \equiv (x + y)/2$  および差  $s \equiv x - y$  を定義する。ここで、 $X$  は平均場の座標に対応するため、 $\partial_X \sim e^2 T$  である。一方後でみると、 $s$  はゆらぎの相関関数の引数である。ゆらぎの起源は熱的なものなので、 $\partial_s \sim T$  である。したがって、 $\partial_s$  に比べて  $\partial_X$  を無視する事ができる。

さて、ここで運動量空間に移るために Wigner 変換を行う。Wigner 変換は任意の関数  $f(x, y)$  を使って以下のように定義される：

$$f(k, X) \equiv \int d^4s f(X + s/2, X - s/2) e^{ik \cdot s}. \quad (5)$$

次に 2 つの近似を説明する。今外場 ( $\eta$ ) が十分小さい場合を考えているため、系は熱平衡状態からほとんど離れていない。従って式 (1) および (2) に現れる伝播関数を、以下の熱平衡時における相互作用がない場合のそれで置き換える事ができる：

$$S^{<(\text{eq})}(k) = \not{k}\rho^0(k)n(k^0), \quad D_{\mu\nu}^{<(\text{eq})}(k) = \rho^0(k)N(k^0)P_{\mu\nu T}(k). \quad (6)$$

ここで  $\rho^0(k) \equiv 2\pi \text{sgn}(k^0)\delta(k^2)$ 、 $n(k^0) \equiv (e^{k^0/T} + 1)^{-1}$ 、 $N(k^0) \equiv (e^{k^0/T} - 1)^{-1}$  である。また、横波成分への射影演算子  $P_{\mu\nu T}(k) \equiv g_{\mu i}g_{\nu j}(\delta_{ij} - \hat{k}_i\hat{k}_j)$  を導入した。ただし、 $\hat{k}^i \equiv k^i/|\mathbf{k}|$  である。ただし  $K^\mu$  は平衡時に 0 であるため、そのまま残す。さらに、自己エネルギーは熱平衡時における 1 ループの値を用い、vertex 補正是非平衡状態における 1 ループの値を用いる：

$$\{\not{k}, \Sigma^R(k)\} = m_f^2 - 2i\zeta_f k^0, \quad \Pi_{\mu\nu}^R(k) = m_b^2 P_{\mu\nu T}(k), \quad (7)$$

$$\delta\Gamma^\mu(k, X) = e^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \gamma^\nu \frac{\not{k} + \not{l}}{2k \cdot l} \gamma^\mu K_\nu(l, X). \quad (8)$$

ここで、 $m_f^2 \equiv e^2 T^2/4$ 、 $m_b^2 \equiv e^2 T^2/6$  である。フェルミオンの崩壊幅 ( $\zeta_f \sim e^2 T \ln(1/e)$ ) は leading-log の精度でしか計算されていないため、表式を書く事はできない。

この 2 つの近似の結果、以下の運動論的方程式が得られる。

$$(2iv \cdot \partial_X \pm \frac{\delta m^2}{|\mathbf{k}|} + 2i\zeta_f) \not{A}_\pm(\mathbf{k}, X) = 2e\not{\psi}(N(|\mathbf{k}|) + n(|\mathbf{k}|))\Psi(X) \\ + e^2 \gamma_i \not{\psi}(N(|\mathbf{k}|) + n(|\mathbf{k}|)) P_T^{\mu i}(v) \sum_{s=\pm} \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|l|} \frac{sv^\alpha \gamma_\nu \pm v_{l\nu} \gamma^\alpha}{|\mathbf{k}||\mathbf{l}|v \cdot v_l} \Lambda_{s\alpha}(l, X). \quad (9)$$

ここで、 $K^\mu(k, X) \equiv 2\pi\delta(k^2)(\theta(k^0)\Lambda_+^\mu(\mathbf{k}, X) + \theta(-k^0)\Lambda_-^\mu(-\mathbf{k}, X))$ 、 $v^\mu \equiv (1, \hat{\mathbf{k}})$ 、 $v_l^\mu \equiv (1, \hat{\mathbf{l}})$ 、 $\delta m^2 \equiv m_b^2 - m_f^2$  を導入した。

ダイアグラムの方法	運動論的方程式
熱質量	質量項
崩壊幅	衝突項
梯子型ダイアグラムの足し上げ	外力項への補正

表 1: resummed perturbation と運動論的方程式との対応関係。

さて、各項の意味を見てみよう。まず左辺第 1 項は、相互作用がない場合の時間発展を表す項であり、Boltzmann 方程式における駆動項に対応する。第 2 項は、伝播関数に自己エネルギーとしてではなく、通常の質量として  $m_f$  と  $m_b$  を入れた時にも出てくる。このため、この項はフェルミオンおよびボソンの質量に由来する。この項を質量項と呼ぶ事にする。第 3 項は散乱振幅の 2 乗を使って表すことができ、衝突項に対応する。ただし、 $K^\mu$  が平衡時に 0 になる事により、緩和時間近似を行った時の形になっている。一方右辺第 1 項は、平均場との相互作用に由来しており、外力項に対応する。第 2 項は、vertex 補正  $\delta\Gamma_\nu$  に由来するため、外力の補正であると解釈する。ここで、駆動項以外の項の形は、Boltzmann 方程式におけるそれとは異なっている事に注意する。この事は、Boltzmann 方程式の場合とは違い、今時間発展を調べている量  $K^\mu$  が異なる粒子間の相関関数であることに由来する。

また、この運動論的方程式から計算した  $\Sigma^R(p)$  は、[4]において resummed perturbation を使って計算されたものと一致する。このことから、我々が導出した運動論的方程式と resummed perturbation は等価であると言える。したがって、resummed perturbation における各手続きを運動学的に解釈できる。その結果は、熱質量は質量項に、崩壊幅は衝突項に、梯子型ダイアグラムは外力の補正項に対応するというものである（表 1）。

最後に、ここで行った 2 つの近似は弱結合性から正当化される事に注意する。1 つめは  $\partial_X \sim e^2 T$ ,  $\partial_s \sim T$  より明らかである。2 つめの近似が必要十分である事を見るために、運動論的方程式の各項の大きさを評価しよう。まず自己エネルギーを 1 ループで近似したことから、質量項および衝突項が出現した。これらの項は  $e^2 T \Lambda$  程度の大きさである。また、vertex 補正を 1 ループで近似したため、外力の補正項が出現した。この項の大きさも  $e^2 T \Lambda$  程度である。一方駆動項は、 $\partial_X \sim e^2 T$ ,  $k \sim T$  より、 $e^2 T^2 \Lambda$  程度の大きさである。考えている項が全て同程度であるため、ここで使った 1 ループ近似は leading order の寄与のみを考える限り必要十分である事がわかる；2 ループ以上の効果は駆動項より小さく、無視できる。

### 3まとめ

我々は線形応答領域における Kadanoff-Baym 方程式に gradient 展開を用いる事によって、フェルミオン的集団運動を解析できる新しい運動論的方程式を導出した。この運動論的方程式から計算した  $\Sigma^R(p)$  は、resummed perturbation から計算されたものと一致したため、その運動論的方程式は resummed perturbation と等価である事がわかった。この事は resummed perturbation の基礎付けを与える。また、この等価性を使って resummed perturbation の手続きの運動学的な解釈を与えた（表 1）。

### 参考文献

- [1] H. A. Weldon, Phys. Rev. D **26**, 2789 (1982); **40**, 2410 (1989).
- [2] J. P. Blaizot and E. Iancu, Nucl. Phys. B **390**, 589 (1993); **417**, 608 (1994).
- [3] J. P. Blaizot and E. Iancu, Nucl. Phys. B **570**, 326 (2000).
- [4] D. Satow and Y. Hidaka, arXiv:1109.0088 [hep-ph].
- [5] V. V. Lebedev and A. V. Smilga, Annals Phys. **202**, 229 (1990).