

# 用独立元格等效作用量研究三维 $U(1)$ 格点规范理论的相结构\*

赵佩英 吴济民

(中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

1995-01-26 收稿

## 摘 要

在格点规范理论中,应用变分累积展开方法,引入独立元格等效作用量,研究了三维  $U(1)$ 格点规范理论的元格内能,得到连续的内能曲线,与 Monte Carlo (MC)数据相符,表明理论是禁闭的.

**关键词** 格点规范理论,变分累积展开,内能,独立元格等效作用量.

格点规范理论是研究强相互作用的主要非微扰方法.采用 MC 数值模拟方法,已经得到了许多重要结果.但为了更深入地了解物理图象,人们仍在积极发展解析研究的方法.变分累积展开方法就是这些年发展起来的一种新的解析方法.这种方法在研究格点  $U(1)$ ,  $Z(N)$ ,  $SU(2)$ ,  $SU(3)$ ,  $\Phi^4$ ,  $O(N)$ , 等理论中已经取得了比较满意的结果.但为了使这种理论更完善,人们仍在不断地改进它,发展它,如在确定变分参数的方法<sup>[1]</sup>及等效作用量的选取方面<sup>[2,4]</sup>.文献[3,4]中提出用独立元格方法进行计算.文献[4]研究了三维  $SU(2)$ 和  $SU(3)$ 规范理论的相结构,得到的元格内能曲线是连续的,计算结果趋于合理.但是  $SU(2)$ ,  $SU(3)$ 规范场在三维情况下没有 MC 数据可比较.本文用此种方法计算  $U(1)$ 规范场在三维情况下的平均元格内能.计算结果与 MC 数据相符,在中间耦合区域元格内能曲线也没有出现跳跃,与理论预言的没有相变是一致的.

在  $U(1)$ 格点规范理论中, Wilson 作用量为

$$S = \frac{\beta}{2} \sum_P [U_P + U_P^+], \quad (1)$$

$U_P$  是组成一个元格的四条链变量的乘积.

$$U_P = U_{\mu\nu}(r) = U_\mu(r) U_\nu(r + \hat{\mu}) U_\mu^+(r + \hat{\nu}) U_\nu^+(r), \quad (2)$$

每个链变量为

\* 国家自然科学基金和中国科学院特殊资助.

$$U_\mu = e^{i\theta_\mu(r)}, \quad \theta_\mu(r) \in [-\pi, \pi]. \quad (3)$$

元格变量为

$$U_p = e^{i\theta_{\mu\nu}(r)},$$

$$\theta_{\mu\nu}(r) = \theta_\mu(r) + \theta_\nu(r + \hat{\mu}) - \theta_\mu(r + \hat{\nu}) - \theta_\nu(r). \quad (4)$$

系统的配分函数为

$$Z = \int \mathcal{D}U_l e^S, \quad (5)$$

其中

$$\mathcal{D}U_l \equiv \prod_l dU_l. \quad (6)$$

自由能  $W$  为

$$W = -\frac{1}{N_p} \ln Z, \quad (7)$$

其中,  $N_p$  为元格总数. 在变分累积展开中, 引入等效作用量  $S_0$ , 则

$$Z = Z_0 \langle e^{S-S_0} \rangle_0,$$

$$\ln Z = -\ln Z_0 - \sum_{n=1} \frac{1}{n!} K_n, \quad (8)$$

$$K_1 = \langle S - S_0 \rangle_0,$$

$$K_2 = \langle (S - S_0)^2 \rangle_0 - \langle S - S_0 \rangle_0^2,$$

⋮

$$Z_0 = \int \mathcal{D}U_l e^{S_0}. \quad (9)$$

$K_n^{[5]}$  中的每一项都是解析可解的. 用自由能极小值条件确定  $S_0$  中的变分参数  $J$  (本文计算到  $K_1$  阶, 见后面), 并将其代入  $Z$  中, 通过  $W$  就可得到平均元格内能

$$E_p = 1 - \frac{\partial W}{\partial \beta}. \quad (10)$$

现在我们引用独立元格等效作用量来计算上述物理量, 就必须把  $Z$  中对链的积分改为对元格的积分, 在测度变换中要乘上一个 Jacobian 行列式.

$$Z = \int \mathcal{D}U_{\mu\nu}(r) \prod_{r,\nu} \delta [ e^{i\Delta_\mu \tilde{\theta}_{\mu\nu}(r)} - 1 ] e^{\frac{\beta}{2} \sum_{\mu,\nu} [U_{\mu\nu}(r) + U_{\mu\nu}^+(r)]}, \quad (11)$$

其中

$$\tilde{\theta}_{\mu\nu}(r) \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \theta_{\rho\sigma}(r),$$

在 Abelian 群情况下, 变换的 Jacobian 是一个由格点 Bianchi 恒等式组成的  $\delta$  函数<sup>[3]</sup>.

Bianchi 恒等式的数目与维数有关, 它是在空间能够组成不同类型的三维立方体 (cube) 的数目, 例如在二维情况下, 不存在立方体, 因此没有 Bianchi 恒等式. 在三维  $(t, x, y)$  情况下, 只有一类立方体, 因此有一个 Bianchi 恒等式. 在  $D$  维情况下, 有  $D(D-1)(D-2)/6$  个不同类型的三维立方体. 因此有相同数目的 Bianchi 恒等式. 在三维情况下, Bianchi 恒等式为:

$$e^{i\Delta_{\mu\nu}\tilde{\theta}_{\mu\nu}(r)} = 1. \quad (12)$$

为了用元格变量表示链变量, 选用“路径规范”的方法<sup>[3]</sup>. 让我们选择一个原点  $(t_0, x_0, y_0)$ , 通过一条路径到一个任意点  $(t, x, y)$ . 例如开始沿着  $y$  轴到点  $(t_0, x_0, y)$ , 然后平行  $x$  轴到  $(t_0, x, y)$ , 最后平行于  $t$  轴到  $(t, x, y)$ . 位于这条路径上的所有链定义为 1. 上面的路径规范为

$$U_0(t, x, y) = U_1(t_0, x, y) = U_2(t_0, x_0, y) = 1. \quad (13)$$

由此很容易用元格表示链. 让我们用两个方向和三个点表示一个元格. 以 0, 1, 2 分别表示  $t, x, y$  的方向, 在  $\mu\nu$  ( $\mu, \nu = 0, 1, 2$ ) 平面上的元格变量分别记为  $U_{01}(t, x, y)$ ,  $U_{02}(t, x, y)$  和  $U_{12}(t, x, y)$ . 在此规范下

$$U_1(t, x, y) = \prod_{t'=t}^{t_0-1} U_{10}(t', x, y),$$

$$U_2(t, x, y) = \prod_{t'=t}^{t_0-1} U_{20}(t', x, y) \prod_{x'=x}^{x_0-1} U_{21}(t_0, x', y). \quad (14)$$

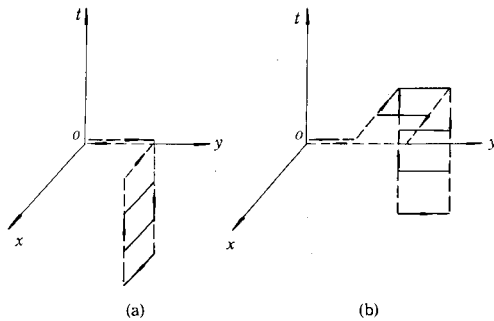


图 1 (a)  $U_1(t, x, y)$  和 (b)  $U_2(t, x, y)$  分别表示用元格填满了的 Wilson 圈  
虚线为规范线.

由图 1 中可以看出, 用一条链可以表示一个封闭的 Wilson 圈, 从  $(t_0, x_0, y_0)$  出发沿着规范线, 通过链再沿着规范线回到  $(t_0, x_0, y_0)$ , 图 1 中的虚线就是规范线. 每个 Wilson 圈由元格填满: 由上面的论述可以看出只有  $U_{01}(t, x, y)$ ,  $U_{02}(t, x, y)$  和  $U_{12}(t_0, x, y)$  是独立元格变量, 而  $t \neq t_0$  的  $U_{12}(t, x, y)$  不是独立元格变量. 因为元格  $U_{12}(t, x, y)$  ( $t \neq t_0$ ) 可以用  $U_{01}(t, x, y)$ ,  $U_{02}(t, x, y)$  和  $U_{12}(t_0, x, y)$  表示出来, 把方程 (14) 代入方程 (2) 就得到:

$$U_{12}(t, x, y) = \prod_{t'=t}^{t_0-1} U_{10}(t', x, y) \prod_{t'=t}^{t_0-1} U_{20}(t', x+1, y) \prod_{x'=x+1}^{x_0-1} U_{12}^+(t_0, x', y)$$

$$\left[ \prod_{t'=t}^{t_0-1} U_{10}(t', x, y+1) \right]^+ \left[ \prod_{t'=t}^{t_0-1} U_{20}(t', x, y) \prod_{x'=x}^{x_0-1} U_{12}^+(t_0, x', y) \right]^+. \quad (15)$$

在此规范下, 作用量变为

$$S = \frac{\beta}{2} \left\{ \sum_{t,x,y} [(U_{01}(t,x,y) + U_{02}(t,x,y)) + \text{H.C}] + \sum_{x,y} [U_{12}(t_0,x,y) + \text{H.C}] + \sum_{\substack{t,x,y \\ i \neq t_0}} [U_{12}(t,x,y) + \text{H.C}] \right\}. \quad (16)$$

配分函数变为

$$Z = \int \text{D}U_{01}(t,x,y) \text{D}U_{02}(t,x,y) \text{D}U_{12}(t_0,x,y) e^S. \quad (17)$$

自由能变为

$$W = -\frac{1}{N_F} \ln Z. \quad N_F \text{ 为独立元格总数.} \quad (18)$$

为了计算方便，我们选取这样的  $S_0$ ，其中只含有独立的元格变量：

$$S_0 = \frac{J}{2} \left\{ \sum_{t,x,y} [(U_{01}(t,x,y) + U_{02}(t,x,y)) + \text{H.C}] + \sum_{x,y} [U_{12}(t_0,x,y) + \text{H.C}] \right\}. \quad (19)$$

$J$  为变分参数，在  $U(1)$  群中有：

$$\int \text{d}U_P e^{\frac{J}{2}(U_P + U_P^+)} U_P = \int \text{d}U_P e^{\frac{J}{2}(U_P + U_P^+)} U_P^+ = I_1(J). \quad (20)$$

单个元格积分为：

$$f \equiv \int \text{d}U_P e^{\frac{J}{2}(U_P + U_P^+)} = I_0(J). \quad (21)$$

本文中出现的  $I_n(J)$  是  $n$  阶修正的 Bessel 函数。

在此情况下， $Z_0$  和  $K_1$  项分别是：

$$Z_0 = \int \text{D}U_{01}(t,x,y) \text{D}U_{02}(t,x,y) \text{D}U_{12}(t_0,x,y) e^{S_0} = f^{N_F}. \quad (22)$$

$$K_1 = \langle S - S_0 \rangle_0$$

$$= \frac{1}{Z_0} \int \text{D}U_{01}(t,x,y) \text{D}U_{02}(t,x,y) \text{D}U_{12}(t_0,x,y) \left\{ \left[ \sum_{t,x,y} (U_{01}(t,x,y) + U_{02}(t,x,y)) + \sum_{x,y} U_{12}(t_0,x,y) \right] + \text{H.C} \right\} e^{S_0} + \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{t,x,y \\ i \neq t_0}} [U_{12}(t,x,y) + \text{H.C}] e^{S_0}, \quad (23)$$

上式第一大项很容易求出, 即为:

$$I = N_F (\beta - J) y_1, \quad y_1 \equiv \frac{I_1(J)}{I_0(J)}. \quad (24)$$

第二项比较复杂, 为了计算方便, 首先在  $T_0 \times N_1 \times N_2$  点阵上计算第二大项, 然后取  $T_0, N_1, N_2 \rightarrow \infty$  得到全时间 - 空间的贡献. 在  $T_0 \times N_1 \times N_2$  点阵上, 设格距等于 1. 取  $t_0 = T_0, t = t_0 - T, x = N_1 - n_1$  和  $y = N_2 - n_2$ , 其中  $T, n_1, n_2$  是求和变量.

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{Z_0} \int \mathbf{D}U_{01}(t, x, y) \mathbf{D}U_{02}(t, x, y) \mathbf{D}U_{12}(t_0, x, y) e^{s_0} \\ &\quad \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{t, x, y \\ t \neq t_0}} (U_{12}(t, x, y) + \text{H.C.}) \\ &= \frac{1}{Z_0} \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} \sum_{T=1}^{T_0} \int \mathbf{D}U_{01}(t, x, y) \mathbf{D}U_{02}(t, x, y) \mathbf{D}U_{12}(t_0, x, y) e^{s_0} \\ &\quad \frac{\beta}{2} (U_{12}(T, n_1, n_2) + \text{H.C.}). \\ &= \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} \sum_{T=1}^{T_0} \frac{1}{Z_0} \frac{\beta}{2} \int \mathbf{D}U_{01}(t, x, y) \mathbf{D}U_{02}(t, x, y) \mathbf{D}U_{12}(T_0, x, y) e^{s_0} \\ &\quad \left( \prod_{t'=T_0-T}^{T_0-1} U_{10}(t', n_1, n_2) \prod_{t'=T_0-T}^{T_0-1} U_{20}(t', n_1+1, n_2) \prod_{x'=n_1-1}^1 U_{12}^+(T_0, x', n_2) \right. \\ &\quad \left. \prod_{t'=T_0-T}^{T_0-1} U_{10}^+(t', n_1, n_2+1) \prod_{x'=1}^{n_1} U_{12}(T_0, x', n_2) \prod_{t'=T_0-T}^{T_0-1} U_{20}^+(t', n_1, n_2) + \text{H.C.} \right) \quad (25) \end{aligned}$$

上式中,  $\Pi U_{01}, \Pi U_{01}^+, \Pi U_{02}, \Pi U_{02}^+$  分别是  $T$  个因子的乘积,  $\Pi U_{12}$  是  $n_1$  个因子的乘积,  $\Pi U_{12}^+$  是  $(n_1-1)$  个因子的乘积, 所以总共是  $(4T+2n_1-1)$  个因子的乘积. 最后得到方程 (25) 的贡献为

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} \sum_{T=1}^{T_0} \beta y_1^{4T+2n_1-1} \\ &= N_2 \beta \frac{y_1^5}{(1-y_1^4)(1-y_1^2)}. \quad (26) \end{aligned}$$

$T_0, N_1, N_2$  分别为沿  $t, x, y$  方向上格点的总数. 所以

$$\langle S - S_0 \rangle_0 = N_F (\beta - J) y_1 + N_2 \beta \frac{y_1^5}{(1-y_1^4)(1-y_1^2)}. \quad (27)$$

本文只计算到  $K_1$  阶, 得到:

$$W = - \left[ \ln f + (\beta - J) y_1 + \frac{N_2}{N_F} \beta \frac{y_1^5}{(1-y_1^4)(1-y_1^2)} \right], \quad (28)$$

当各方向上的格点数都  $\rightarrow \infty$  时，最后一项可以忽略，用自由能极小值条件

$$\frac{\partial W}{\partial J} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial J^2} > 0. \quad (29)$$

推出  $J = \beta$ 。代入方程 (10)，得到：

$$E_p = 1 - y_1. \quad (30)$$

通过以上运算得到了三维  $U(1)$  规范场的内能，如图 2 所示。可以看到，虽然只计算到累积展开一阶近似，得到的结果与 MC 数据 [6] 相符，只是在  $\beta$  的中间区域有偏差。但曲线是连续的，没有出现跳跃，说明了理论的禁闭性质。

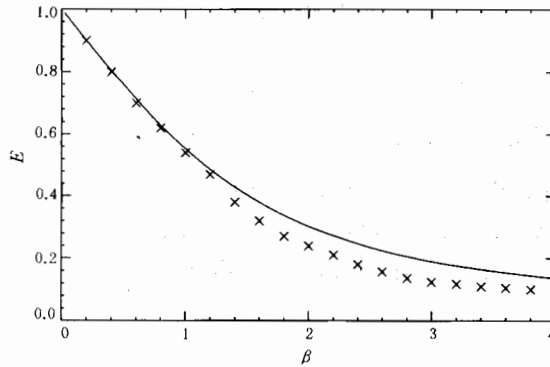


图 2 三维  $U(1)$  模型的平均元格内能

MC 数据 (x) 来自文献 [6]。

以前用累积展开方法计算过  $U(1)$  内能 [7]，但引入的是独立链等效作用量，得到的理论曲线在  $\beta$  中间区域有间断，随着变分累积展开阶数的升高，间断只是减小，但并不消失。本文的结果没有间断，因此看来采用独立元格变量来等效作用量  $S$  中的元格变量是一种更合理的选择。可以相信，如果计算到更高阶近似，理论会给出更好的结果，但由于累积展开阶数越高，则计算就越复杂，我们暂时只给出一阶近似结果。

### 参 考 文 献

- [1] W. Kerler, *Phys. Rev. Lett.*, **60** (1988) 1906; *Phys. Rev.*, **D40** (1989) 2085; X.T. Zheng, G. Chen, *Commun. Theor. Phys.*, **20** (1993) 95.
- [2] C.M. Wu, *High Ener. Phys. Nucl. Phys.*, **13** (1989) 789.
- [3] G.G. Batrouni, *Nucl. Phys.*, **B208** (1982) 467.
- [4] D. Gong, J.M. Liu, *Commun. Theor. Phys.*, **19** (1993) 225; *High Ener. Phys. Nucl. Phys.*, **17** (1993) 128.
- [5] C.M. Wu, Z.K. Zhu, P.Y. Zhao *et al.*, *Phys. Lett.*, **216B** (1989) 381.
- [6] G. Bhanat, M. Creutz, *Phys. Rev.*, **D21** (1980) 2892.
- [7] P.Y. Zhao, *Commun. Theor. Phys.*, **6** (1986) 277; J.M. Wu, P.Y. Zhao, *High Ener. Phys. Nucl. Phys.*, **10** (1986) 297.

**Phase Structure of  $U(1)$  Lattice Gauge Theory  
by Variational Study with Independent  
Plaquette Effective Action**

Zhao Peiyong    Wu Jimin

(Institute of High Energy Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039)

Received 26 January 1995

Abstract

The average plaquette energy  $E_p$  of  $U(1)$  Lattice gauge theory in 3 dimensions with an independent plaquette effective action is calculated using the variational cumulant expansion. The  $E-\beta$  curve is continuous, which shows that  $U(1)$  theory has only one confine phase. Our result is consistent with Monte Carlo data.

**Key words** Lattice gauge theory, variational cumulant expansion, internal energy, independent plaquette effective action.