

リーマン面上の場の理論と KN 代数

久保 礼次郎、尾島 修一^{*}、Samir K. PAUL^{**}、吉井 久博
(広島大学 理論物理学研究所)

1. 序論

量子化された弦理論において、経路積分の方法と演算子を用いる形式とは、基本的でしかも相補的な役割を果たしてきた。経路積分の方法では、多重ループ散乱振幅をリーマン面上の計量とリーマン面上に定義された場の量の積分によって計算することができる。グリーン関数や相関関数等も計算の結果、テータ関数や、いわゆる prime form を用いて表現できることがわかっている [1],[2]。

一方、演算子を用いる方法 [3],[4],[5] は、2 次元の共形不変な場の理論において発展したのであるが、弦理論に対して大変有効に応用されてきた。場の演算子は、いわゆる Virasoro algebra の表現となっており、リーマン面が球またはトーラスの場合には、適当な共形不変量によって弦理論が定式化されるのである。

高い genus のリーマン面は、低い genus のリーマン面を「縫い合わせて」生成していくことができる。しかし、この「縫い合わせ法」[6] は実際のところ困難で、結果は大変複雑な表現となって記述される。Alvarez-Gaume, Gomez, Moore および Vafa[7] は、場の演算子に Bogoliubov 変換を施すことによって、高い genus のリーマン面上の共形理論の定式化が可能であることを示し、経路積分の方法で得られた結果が、彼らの方法で確かに再生されることを計算してみせた。実際、経路積分の方法と Bogoliubov 変換の方法との間には、緊密な対応関係を見ることができる。

ところで、共形場の理論においては、相関関数の計算は、いわゆる演算子の近距離積展開の方法に基づいて実行される。一方、伝統的な場の量子論は、正準量子化に基づいて定式化され、そこに定義された 2 体の T -積を用いて、相関関数が計算される。そこで、共形場の理論を伝統的な正準量子化に基づく場の理論として定式化できないものであろうかということが考えられる。正準量子化による場の量子論においては、時間変数が存在し、従って、時間変位の生成演算子としてハミルトニアンが明確に定義されている。

^{*} 現在、大阪大学理学部

^{**} 現在、Institute of Physics, Sachivalaya Marg, Bhubaneswar 751005, India

一方、共形理論においては、時間の概念が明確ではなかったのである。局所的には、一点を囲む円の半径の大きさによって時間の順序を決めることができる。リーマン面が円筒の場合には、大域的な時間をそこに設定できるであろう。しかし、高い genus を持つリーマン面上に、大域的な時間を持ち込むことが可能かどうか知られていなかった。

1987 年、Krichever と Novikov[8] とによって開発された KN formalism においては、任意の genus を持つリーマン面上に、global な時間を明確に定義できることが示され、リーマン面がこの時間変数によって一意的に parametrize されることがわかった。したがって、リーマン面上にハミルトニアンを定義することができ、正準量子化が可能になる。この結果、任意の genus を持つリーマン面上の場の量子論を定式化することができる。これらの事情を以下に概説し、私共の最近の試みを紹介したい。

2. Krichever-Novikov Algebra

Compact なリーマン面 M (genus g) 上に 2 点 P_+ と P_- を一般の位置にとる。これら 2 点での局所座標を、それぞれ z_+ , z_- ($z_+(P_+) = 0$, $z_-(P_-) = 0$) とする。このリーマン面上には、有理型関数 f_i の他にベクトル場 e_i , アーベル微分 ω_i , 半微分 χ_i , 2-形式 Ω_i 等々を定義することができる。ここで、index i は genus の偶奇に従って整数又は半整数の値をとり、 $f_i, e_i, \dots$ 等はそれぞれ有理型関数、ベクトル場、... 等の基底を構成している。点 $P_\pm$ 以外で正則な λ -微分 (λ -形式) に対する基底を $f_i^{(\lambda)} = f_i^{(\lambda)}(z)(dz)^\lambda$ ($f_i^{(0)} = f_i$, $f_i^{(2)} = \Omega_i$, etc.) と書くことにする。

有理型関数 f_i 及び アーベル微分 ω_i の $P_\pm$ の近傍での振舞いは、

$$f_i(z_\pm) = \alpha_i^\pm z_\pm^{\pm i - g/2} [1 + O(z_\pm)], \quad (2.1a)$$

$$\omega_i(z_\pm) = \beta_i^\pm z_\pm^{\pm i + g/2 - 1} [1 + O(z_\pm)], \quad (2.1b)$$

となる。ここで、 α_i, β_i は定数である。 $i = -g/2, \dots, g/2 - 1$, に対しては、Weierstrass gap theorem により pole の次数が少し変わり、

$$f_i(z_-) = \alpha_i^- z_-^{-i - g/2 - 1} [1 + O(z_-)], \quad (2.1c)$$

$$\omega_i(z_-) = \beta_i^- z_-^{i + g/2} [1 + O(z_-)], \quad (2.1d)$$

となるのである。ここでは特に、

$$f_{g/2}(z) = 1, \quad (2.1e)$$

$$\omega_{g/2}(z) = \omega(z), \quad (2.1f)$$

と選ぶことにする。ここで、 $\omega(z)$ は M 上に定義された第 3 種アーベル微分である。ベクトル場、2-形式、半微分の $P_{\pm}$ の近傍における振舞いは、それぞれ、

$$e_i(z_{\pm}) = \gamma_i^{\pm} z_{\pm}^{\pm i - g_0 + 1} [1 + O(z_{\pm})], \quad (2.2a)$$

$$\Omega_i(z_{\pm}) = \delta_i^{\pm} z_{\pm}^{\mp i + g_0 - 1} [1 + O(z_{\pm})], \quad (2.2b)$$

そして

$$\chi_i(z_{\pm}) = \epsilon_i^{\pm} z_{\pm}^{\mp i - 1/2} [1 + O(z_{\pm})], \quad (2.3)$$

で与えられる。ここで、 $g_0 = 3g/2$ 、 $\gamma_i, \delta_i, \epsilon_i$ は定数である。

ベクトル場 e_i は次の KN commutation relations:

$$[e_i, e_j] = \sum_{s=-g_0}^{g_0} C_{ij}^s e_{i+j-s}, \quad (2.4)$$

を満足する。 C_{ij}^s は構造定数である。即ち、ベクトル場 $\{e_i\}$ は KN 代数を構成する。この式の central extension は交換関係、

$$[e_i, e_j] = \sum_{s=-g_0}^{g_0} C_{ij}^s e_{i+j-s} + \chi(e_i, e_j), \quad (2.5)$$

によって与えられる。ここで、 $\chi(e_i, e_j)$'s は cocycles を成し $|i+j| > 3g$ で 0 になることが知られている。

リーマン面がトーラスの場合、ベクトル場 e_n は具体的に、Weierstrass σ -関数を使って書ける。

$$e_n = e_n(z) \partial / \partial z, (n \neq -1/2)$$

ここで、 n は半整数値をとり、 $e_n(z)$ は次のような楕円関数によって与えられる。

$$e_n(z) = \frac{\sigma^{n-1/2}(z-z_o)\sigma(z+2nz_o)}{\sigma^{n+1/2}(z+z_o)} \frac{\sigma^{n+1/2}(2z_o)}{\sigma((2n+1)z_o)}$$

特に、 $e_{1/2}(z) = 1$ で

$$e_{-1/2}(z) = \frac{\sigma^2(z)}{\sigma(z+z_o)\sigma(z-z_o)} \frac{\sigma(2z_o)}{\sigma^2(z_o)}$$

はトーラス上の第 3 種アーベル微分である。 $\pm z_o$ は、トーラス上の 2 点 $P_{\pm}$ に対応する。このようにして与えられるトーラス上のベクトル場 e_n は交換関係、

$$[e_m, e_n] = \sum_{l=-3/2}^{3/2} C_{mn}^l e_{m+n-l}$$

を満足する。但し、 $m \neq \pm 1/2, n \neq \pm 1/2, m+n \neq -2$. 構造定数 C_{mn}^l は

$$\begin{aligned} C_{mn}^{3/2} &= n - m, \\ C_{mn}^{1/2} &= 3(m-n)\zeta(2z_o) + (n-m+1)\zeta((2m+1)z_o) \\ &\quad + (n-m-1)\zeta((2n+1)z_o) + (m-n)\zeta(2(m+n-1)z_o), \\ C_{mn}^{-1/2} &= -\frac{\lambda(m)\lambda(n)}{\lambda(m+n+1/2)\sigma(2z_o)} [3(m-n)\zeta(2z_o) \\ &\quad + (m-n+1)\zeta((2m-1)z_o) + (m-n-1)\zeta((2n-1)z_o) \\ &\quad - (m-n)\zeta(2(m+n+1)z_o)], \\ C_{mn}^{-3/2} &= \frac{(m-n)\lambda(m)\lambda(n)}{\lambda(m+n+3/2)\sigma^3(2z_o)}, \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\lambda(m) = \frac{\sigma((2m-1)z_o)}{\sigma((2m+1)z_o)}$$

そして、

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$$

リーマン面 M 上には一般に次のような性質をもつ第 3 種アーベル微分 ω が存在する。即ち ω は $M \setminus \{P_+, P_-\}$ 上で正則で、点 P_+ での留数が $+1$, P_- で -1 、そして imaginary periods を持っている。 ω のこの特別な性質を利用して、 M 上に (固有) 時間を

$$\tau(P) = \frac{1}{2} \int_{P_0}^P (\omega + \bar{\omega}), (P_0 \neq P_{\pm}). \quad (2.6)$$

によって定義することが出来る。特に、 $P \rightarrow P_{\pm}$ のとき、 $\tau \rightarrow \mp \infty$ となる。そこで、

$$C_{\tau} = \{P \in M; \tau(P) = \tau \in \mathbf{R}\}. \quad (2.7)$$

として、 M 上に閉等時曲線 C_{τ} を描くことができる。 C_{τ} の M 上における動きは、閉じた紐の運動であると考えることができる。更に、この C_{τ} を使えば、 M 上に新しい座標近傍を

$$w(P) = \tau(P) + i\sigma(P) = \int_{P_0}^P \omega, \quad (2.8)$$

によって導入することができる。ここで、

$$\sigma(P) = \frac{1}{2i} \int_{P_0}^P (\omega - \bar{\omega}). \quad (2.9)$$

は紐 C_{τ} 上の座標である。変換 $z \rightarrow w$ は、共形的な reparametrization である。

先に導入した種々の基底は、次のような双対関係を満足する。

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\tau}} f_i(\tau, \sigma) \omega_j(\tau, \sigma) d\sigma = \delta_{ij}, \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\tau}} e_i(\tau, \sigma) \Omega_j(\tau, \sigma) d\sigma = \delta_{ij}, \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\tau}} \chi_i(\tau, \sigma) \chi_{-j}(\tau, \sigma) d\sigma = \delta_{ij}. \quad (2.12)$$

量子電磁力学における ” D – functions” に対応して、” K – functions” を M 上に次のように定義しよう。

$$K(w, w') = K^{(+)}(w, w') + K^{(-)}(w, w') , \quad (2.13)$$

ここで、

$$K^{(+)}(w, w') = \sum_{l=-g_0+2}^{\infty} e_l(w) \Omega_l(w') , \tau > \tau' , \quad (2.14a)$$

$$K^{(-)}(w, w') = \sum_{l=-\infty}^{-g_0+1} e_l(w) \Omega_l(w') , \tau < \tau' . \quad (2.14b)$$

w と w' が level line C_τ 上にあるときには、

$$K^{(+)}(w, w')_{C_\tau} = \frac{1}{i} \left[\frac{P}{\sigma - \sigma'} + i\pi\delta(\sigma - \sigma') \right] , \quad (2.15a)$$

$$K^{(-)}(w, w')_{C_\tau} = \frac{1}{i} \left[-\frac{P}{\sigma - \sigma'} + i\pi\delta(\sigma - \sigma') \right] . \quad (2.15b)$$

そして

$$K(w, w')_{C_\tau} = 2\pi\delta(\sigma - \sigma') . \quad (2.16)$$

となる。 K_R, K_A, K_F については、

$$K_R(w, w') = -\theta(\tau - \tau') K(w, w') , \quad (2.17)$$

$$K_A(w, w') = \theta(\tau' - \tau) K(w, w') , \quad (2.18)$$

$$K_F(w, w') = \theta(\tau - \tau') K^{(+)}(w, w') - \theta(\tau' - \tau) K^{(-)}(w, w') , \quad (2.19)$$

によって定義される。但し、

$$\theta(\tau - \tau') = \begin{cases} 1 & \text{for } \tau > \tau' , \\ 0 & \text{for } \tau' < \tau . \end{cases} \quad (2.20)$$

3. b-c system の場の理論

この section において、 $b-c$ system に対する場の量子論を、一般の genus g のリーマン面 M 上で定式化しよう。前節と同じように、 M 上に 2 点 P_+ と P_- を一般の位置にとり、その周りでの局所座標 z_+ 及び z_- が $z_+(P_+) = 0$ 、 $z_-(P_-) = 0$ となるように選ぶ。計量は、暫く共形的にユークリッド系:

$$ds^2 = \rho(z, \bar{z}) dz d\bar{z} . \quad (3.1)$$

にとっておく。

このリーマン面上に ふたつの form: $b = b(z)(dz)^\lambda$ 及び $c = c(z)(dz)^{1-\lambda}$ を考える。ここで、 $b(z)$ と $c(z)$ はお互いに共役な場であって、それぞれコンフォーマルスピン λ 及び $1-\lambda$ を持っている。この系の action は

$$S[b, c] = \frac{1}{2} \int_M d^2 z \sqrt{g(z)} b(z) \nabla^z c(z) , \quad (3.2)$$

で与えられる。ここで、 $\nabla^z = \rho^{-1}(z, \bar{z}) \partial_{\bar{z}}$ 。ストレス-エネルギーテンソル $t(z)$ は、

$$t(z) = -\lambda b(z) \nabla^z c(z) + (1-\lambda)(\nabla_z b(z))c(z) . \quad (3.3)$$

となる。場 $b(z)$ と $c(z)$ は、KN bases によって次のように展開することができる。

$$b(z) = \sum_k b_k f_k^{(\lambda)}(z) , \quad (3.4a)$$

$$c(z) = \sum_l c_l f_l^{(1-\lambda)}(z) , \quad (3.4b)$$

ここで、 b_k 及び c_l は、反交換関係

$$\{b_k, c_l\} = \delta_{k+l, 0} , \quad (3.5a)$$

$$\{b_k, b_l\} = \{c_k, c_l\} = 0 . \quad (3.5b)$$

を満足する。 k と l は、genus の偶奇に従って両方共整数、あるいは両方とも半整数値をとる。

ストレス-エネルギーテンソル $t(z)$ も KN basis $\Omega_n(z)$ によって

$$t(z) = \sum_n K_n \Omega_n(z) . \quad (3.6)$$

のように展開される。今後は特に、コンフォーマルスピンの $\lambda = 2$ の場合すなわち bosonic string theory の ghost system に対応する場合を考えよう。 $\lambda = 2$ の時、

$$b(z) = \sum_k b_k \Omega_{-k}(z) , \quad (3.7a)$$

$$c(z) = \sum_l c_l e_l(z) , \quad (3.7b)$$

と書けるが、ここで $\{e_l(z)\}$ は ベクトル場に対する KN basis である。ストレス-エネルギーテンソル $t(z)$ は

$$t(z) = -2 \sum_{k,l} b_k c_l \Omega_{-k} \partial_z e_l - \sum_{k,l} b_k c_l \partial_z \Omega_{-k} e_l . \quad (3.8)$$

となる。(3.6) と (3.8) から

$$K_n = \sum_k \sum_{s=-g_0}^{g_0} C_{kn}^s b_{-k-n+s} c_k , \quad (3.9)$$

となることがわかる。ここで、双対関係 (2.11) を使った。

ところで、ストレス-エネルギーテンソル $t(z)$ は、フェルミ場同士の近距離相互作用から生ずる量子的な効果によって、真の意味の共変テンソルにはなっていない。実際、 $t(z)$ は holomorphic な変換 $z \rightarrow w$ の下で

$$t(w) = t(z) \left(\frac{dz}{dw} \right)^2 + \kappa S(z; w) , \quad (3.10)$$

のように変換されるのである。ここで、

$$S(z; w) = \frac{(d^3 z / dw^3)}{(dz/dw)} - \frac{3}{2} \left[\frac{(d^2 z / dw^2)}{(dz/dw)} \right]^2$$

はシュワルツ微分と呼ばれる量であって、 κ は或る定数である。 $t(z)$ は 厳密な意味で 2-form にはなっていないことがわかる。(3.6) からわかるように K_n は変換 $z \rightarrow w$ の下で $\tilde{K}_n$ に変わ

る。しかしながら、 $\tilde{K}_n$'s と K_n 's は両方とも次の同じタイプの交換関係

$$[K_m, K_n] = \sum_{s=-g_0}^{g_0} C_{mn}^s K_{m+n-s} + \kappa \chi_{mn}, \quad (3.11)$$

を満足する。これは、(3.9) と ヤコビ恒等式を使って示すことができる。 m と n は、整数あるいは半整数値をとる。また、 $\kappa = \frac{13}{6}$

$$\chi_{mn} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} e_{-m}(w) \partial_\sigma^3 e_{-n}(w) d\sigma \quad (3.12)$$

は KN コサイクルであって、 $|m+n| > 3g$ のとき 0 になる。

次に、ゴーストに対する真空 $|\phi_0\rangle$ を条件

$$\oint_{C_r} b(z) v(z) |\phi_0\rangle = 0, \quad (3.13a)$$

$$\oint_{C_r} c(z) q(z) |\phi_0\rangle = 0, \quad (3.13b)$$

によって定義しよう。ここで、 $v(z)$ 及び $q(z)$ は、それぞれ点 P_+ だけに pole を持つベクトル場と 2-form を表わす。即ち、

$$v(z) = \{e_j(z); j \leq -g_0 + 1\}, \quad (3.14a)$$

$$q(z) = \{\Omega_j(z); j \geq -g_0 + 2\}, \quad (3.14b)$$

であればよいが、これは次の条件と同等である。

$$b_j |\phi_0\rangle = 0 \text{ for } j \geq g_0 - 1, \quad (3.15a)$$

$$c_j |\phi_0\rangle = 0 \text{ for } j \geq -g_0 + 2. \quad (3.15b)$$

$\langle \phi_0 |$ に対する条件は、点 P_- だけに pole を持つベクトル場と 2-form を用いて得ることができる。結果は次のように纏められる。

$$\langle \phi_0 | b_j = 0 \text{ for } j \leq g_0 - 2, \quad (3.15c)$$

$$\langle \phi_0 | c_j = 0 \text{ for } j \leq -g_0 + 1 . \quad (3.15d)$$

さて、ここで新しい座標系

$$w = \tau(P) + i\sigma(P) \quad (2.8)$$

を導入しよう。 $\tau(P)$ および $\sigma(P)$ はすでに (2.6) と (2.9) に与えられている。この座標系を用いて $b-c$ system の場の量子論を定式化しよう。パラメータ $\tau(P)$ はリーマン面上で”時間”の役目を果たす。その結果、 M 上の場の”時間順序積”を明確に定義することができ、リーマン面上における時空構造についての具体的なイメージが得られる。

まず、 M 上に Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2\pi} b(w) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + i \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) c(w) . \quad (3.16)$$

によって導入する。 $c(w)$ に共役な運動量は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{c}} = \frac{i}{2\pi} b(w) , \quad (3.17)$$

で与えられる。Hamiltonian 密度は従って

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{c}} \dot{c} - \mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} b(w) \frac{\partial c(w)}{\partial \sigma} , \quad (3.18)$$

となる。ここで、 $\dot{c} = \partial c(\sigma, \tau) / \partial \tau$. Hamiltonian H は $\mathcal{H}$ を level curve C_τ で積分することにより得られる。

$$H = \oint_{C_\tau} \mathcal{H} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\tau} d\sigma b(\sigma, \tau) \frac{\partial}{\partial \sigma} c(\sigma, \tau) . \quad (3.19)$$

通常の正準量子化の処方に従って同時刻反交換関係

$$\{c(w), b(w')\}_{\tau=\tau'} = 2\pi \delta(\sigma - \sigma') , \quad (3.20)$$

を設定する。ここで σ 及び σ' は同じ level curve C_τ 上にあるとする。Heisenberg 方程式は

場の正則性を表現するものとして次のようになる。

$$\partial_{\bar{w}}\phi(w) = \left(\frac{\partial}{\partial\tau} + i\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\phi(w) = 0 \quad (3.21)$$

ここで $\phi(w)$ は $b(w)$ または $c(w)$ を表わす。系の運動量は

$$P = \frac{i}{2\pi} \oint_{C_\tau} d\sigma b(\sigma, \tau) \frac{\partial}{\partial\tau} c(\sigma, \tau) . \quad (3.22)$$

こうして得られた Hamiltonian H と運動量 P は保存量になっている。(3.19) 及び (3.22) の中の被積分関数は点 $P_\pm$ での pole を除いて正則であって H 及び P は τ に依存しないことがわかる。この事実は Bonora, Russo, Lugo[9],[10] や Konishi, Saito, Takahashi[11] 達によって得られた結果と異なる。彼らの場合には、第3種アーベル微分 ω に含まれる $2g$ 個の零点を通して H は τ に依存することになる。一方、我々の場合には、被積分関数は ω を露には含まず H の値は、 C_τ が ω の $2g$ 個の零点を通りすぎる時に変化しない。

次に、 $b-c$ 系に対するプロパゲーター $K_F(w, w')$ を

$$\begin{aligned} K_F(w, w') &= \langle \phi_0 | T(c(w)b(w')) | \phi_0 \rangle \\ &= \theta(\tau - \tau') \langle \phi_0 | c(w)b(w') | \phi_0 \rangle \\ &\quad - \theta(\tau' - \tau) \langle \phi_0 | b(w')c(w) | \phi_0 \rangle . \end{aligned} \quad (3.23)$$

として定義する。(3.8) 式をこれに代入して

$$\begin{aligned} K_F(w, w') &= \theta(\tau - \tau') \sum_{k=-g_0+2}^{\infty} e_k(w) \Omega_k(w') \\ &\quad - \theta(\tau' - \tau) \sum_{k=-\infty}^{-g_0+1} e_k(w) \Omega_k(w') . \end{aligned} \quad (2.19)$$

を得る。これはまた微分方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + i\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)K_F(w, w') = 2\pi\delta^2(w - w') . \quad (3.24)$$

を満たす。また、(3.7) を反交換関係に入れると

$$\{c(w), b(w')\} = K(w, w') \quad (3.25)$$

を得る。但し

$$K(w, w') = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k(w) \Omega_k(w') . \quad (3.26)$$

(3.25) において極限 $\tau \rightarrow \tau'$ をとれば、再び同時刻反交換関係 (3.20) を得る。

ストレス-エネルギーテンソル $t(w)$ は、前節に述べたように共変テンソルではないが、 M 上で holomorphic であって、次の簡単な微分方程式

$$\nabla^w t(w) = 0 , \quad (3.27)$$

を満足する。一方よく知られているように、共変テンソル $T(w)$ は微分方程式

$$\nabla^w T(w) = -\frac{\kappa}{4} \nabla_w R , \quad (3.28)$$

を満足する。ここで、 R は面の計量によって決まる曲率である。 $T(w)$ と $t(w)$ の違いは計量に依存する local counterterm $t_\rho(w)$ で与えられ

$$T(w) = t(w) + t_\rho(w) , \quad (3.29)$$

$$t_\rho = \kappa \{ (\partial_w \log \rho_w)^2 - 2 \partial_w^2 \log \rho_w \} . \quad (3.30)$$

と書ける。

$t(w)$ を含む交換関係は (3.25) を使えば次のように書けることがわかる。

$$[t(w), b(w')] = -2 \partial_w K(w, w') b(w') + K(w, w') \partial_{w'} b(w') , \quad (3.31a)$$

$$[t(w), c(w')] = \partial_w K(w, w') c(w') + K(w, w') \partial_{w'} c(w') , \quad (3.31b)$$

同時刻交換関係は

$$[t(w), b(w')]_{\tau=\tau'} = 2\pi \{ -2 \partial_w \delta(\sigma - \sigma') + \delta(\sigma - \sigma') \partial_{w'} \} b(w') , \quad (3.32a)$$

$$[t(w), c(w')]_{\tau=\tau'} = 2\pi\{\partial_w \delta(\sigma - \sigma') + \delta(\sigma - \sigma')\partial_{w'}\}c(w') . \quad (3.32b)$$

となる。但し、これらに付随する正則項はすべて省いた。 $t(w)$ と $t(w')$ の間の交換関係は

$$\begin{aligned} [t(w), t(w')] &= -\kappa\partial_w^3 K(w, w') - 2\partial_w K(w, w')t(w') \\ &\quad + K(w, w')\partial_{w'} t(w') , \end{aligned} \quad (3.33)$$

で与えられ、従って同時刻交換関係は

$$\begin{aligned} [t(w), t(w')]_{\tau=\tau'} &= -2\pi\kappa\partial_w^3 \delta(\sigma - \sigma') \\ &\quad - 4\pi\partial_w \delta(\sigma - \sigma')t(w') \\ &\quad + 2\pi\delta(\sigma - \sigma')\partial_{w'} t(w') . \end{aligned} \quad (3.34)$$

となる。

4. b-c system に対する Ward-Takahashi 恒等式

この section では、前節までに得られた結果を使って一連の Ward-Takahashi 恒等式 (WT) を導いてみよう。考える対象はエネルギーテンソル $t(w)$ を含む相関関数の期待値 $\langle T(t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \rangle$ や $\langle T(t(x)t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \rangle$ 等である。ここで、 $\langle T(\cdots) \rangle = \langle \phi_0 | T(\cdots) | \phi_0 \rangle$ は時間順序積 $T(\cdots)$ の真空期待値を表し、 $\phi_k(w_k)$ は $b(w_k)$ 、 $c(w_k)$ いずれかを表す。

$t(w)$ を唯一つ含む Ward-Takahashi 恒等式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} &\partial_{\bar{w}} \left\langle T(t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\ &= \left\langle T(\partial_{\bar{w}} t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \left\langle T(\phi_1(w_1)\cdots\phi_{k-1}(w_{k-1})[t(w), \phi_k(w_k)]\phi_{k+1}(w_{k+1})\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \delta(\tau - \tau_k) \\ &= 2\pi \sum_{k=1}^N \{h_k \partial_w \delta^2(w - w_k) + \delta^2(w - w_k) \partial_{w_k}\} \left\langle T(\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle , \end{aligned} \quad (4.1)$$

ここで

$$h_k = \begin{cases} -2 & \text{for } b(w_k) , \\ 1 & \text{for } c(w_k) , \end{cases} \quad (4.2)$$

この導出にあたって、前節の (3.27) および (3.31) を使った。この恒等式の積分形は

$$\begin{aligned} & \left\langle T(t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\ &= \sum_{j=-g_0+2}^{g_0-2} \Omega_j(w) \left\langle T(K_j\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\ &+ \sum_{k=1}^N \{h_k \partial_{w_k} K_F(w_k - w) + K_F(w_k - w) \partial_{w_k}\} \\ &\quad \times \left\langle T(\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle . \end{aligned} \quad (4.3)$$

となる。

相関関数に対する Teichmüller deformation は $3g - 3$ 個の Teichmüller parameters y_j と partition function Z を用いて

$$\sum_{j=-g_0+2}^{g_0-2} \delta y_j \left\langle T(K_j\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle = \frac{1}{Z} \delta \left(\left\langle T(\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle Z \right) . \quad (4.4)$$

と書けることが知られている。これはまた、次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} & \left\langle T(K_j\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle - \left\langle K_j \right\rangle \left\langle T(\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial y_j} \left\langle T(\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle , \end{aligned} \quad (4.5)$$

ここで

$$\left\langle K_j \right\rangle = \frac{\partial}{\partial y_j} \log Z . \quad (4.6)$$

(4.6) を (4.4) に代入すれば

$$\left\langle T(t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle t(w) \rangle \left\langle T(\phi_1(w_1) \cdots \phi_N(w_N)) \right\rangle + \sum_{j=-g_0+2}^{g_0-2} \Omega_j(w) \frac{\partial}{\partial y_j} \left\langle T(\phi_1(w_1) \cdots \phi_N(w_N)) \right\rangle \\
&+ \sum_{k=1}^N \{ h_k \partial_{w_k} K_F(w_k - w) + K_F(w_k - w) \partial_{w_k} \} \\
&\quad \times \left\langle T(\phi_1(w_1) \cdots \phi_N(w_N)) \right\rangle . \tag{4.7}
\end{aligned}$$

を得る。ストレス-エネルギーテンソルを 2 つ含む Ward-Takahashi 恒等式は同じ方法で求めることができ次のように書ける。

$$\begin{aligned}
&\partial_{\bar{x}} \left\langle T(t(x)t(w)\phi_1(w_1) \cdots \phi_N(w_N)) \right\rangle \\
&= \left\langle T(\partial_{\bar{x}} t(x)t(w)\phi_1(w_1) \cdots \phi_N(w_N)) \right\rangle \\
&\quad + \left\langle T([t(x), t(w)]\phi_1(w_1) \cdots \phi_N(w_N)) \right\rangle \delta(\tau_x - \tau_w) \\
&\quad + \sum_{k=1}^N \left\langle T(t(w)\phi_1(w_1) \cdots \phi_{k-1}(w_{k-1})[t(x), \phi_k(w_k)] \right. \\
&\quad \quad \left. \times \phi_{k+1}(w_{k+1}) \cdots \phi_N(w_N)) \right\rangle \delta(\tau_x - \tau_w) . \tag{4.8}
\end{aligned}$$

この式に (3.27), (3.32), (3.34) 等を代入すれば

$$\begin{aligned}
&\partial_{\bar{x}} \left\langle T(t(x)t(w)\phi_1(w_1) \cdots \phi_N(w_N)) \right\rangle \\
&= \left\langle \left[\left\{ -\frac{\pi\kappa}{6} \partial_x^3 \delta(\sigma_x - \sigma_w) - 4\pi \partial_x \delta(\sigma_x - \sigma_w) t(w) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\pi \delta(\sigma_x - \sigma_w) \partial_w t(w) \right\} \phi_1(w_1) \cdots \phi_N(w_N) \right] \right\rangle \delta(\tau_x - \tau_w) \\
&\quad + \sum_{k=1}^N \{ h_k \partial_{w_k} \delta(\sigma_k - \sigma_x) + \delta(\sigma_k - \sigma_x) \partial_{w_k} \} \\
&\quad \times \left\langle T(t(w)\phi_1(w_1) \cdots \phi_N(w_N)) \right\rangle . \tag{4.9}
\end{aligned}$$

となり、この積分形は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
&\left\langle T(t(x)t(w)\phi_1(w_1) \cdots \phi_N(w_N)) \right\rangle \\
&= \sum_{j=-g_0+2}^{g_0-2} \Omega_j(x) \left\langle T(K_j t(w)\phi_1(w_1) \cdots \phi_N(w_N)) \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\kappa\partial_x^3 K_F(x-w) \left\langle T(\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\
& -\{2\partial_x K_F(x-w) - K_F(x-w)\partial_w\} \left\langle T(t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\
& + \sum_{k=1}^N \{h_k\partial_{w_k} K_F(w_k-x) + K_F(w_k-x)\partial_{w_k}\} \\
& \quad \times \left\langle T(t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle .
\end{aligned} \tag{4.10}$$

これに更に (4.5) を代入すれば次のような表現が得られる。

$$\begin{aligned}
& \left\langle T(t(x)t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\
& = \langle t(x) \rangle \left\langle T(t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\
& + \sum_{j=-g_0+2}^{g_0-2} \Omega_j(x) \frac{\partial}{\partial y_j} \left\langle T(t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\
& - \kappa\partial_x^3 K_F(x-w) \left\langle T(\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\
& - \{2\partial_x K_F(x-w) - K_F(x-w)\partial_w\} \left\langle T(t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle \\
& + \sum_{k=1}^N \{h_k\partial_{w_k} K_F(w_k-x) + K_F(w_k-x)\partial_{w_k}\} \\
& \quad \times \left\langle T(t(w)\phi_1(w_1)\cdots\phi_N(w_N)) \right\rangle .
\end{aligned} \tag{4.11}$$

5. 結論

以上 KN 形式 (代数) とそれを利用したリーマン面 M 上の場の量子論について概説した。場の量子論は、ゴーストシステムに限ったが、この他にも例えばスカラー 場に対しても以上と殆ど同じ定式化が可能である。但し、スカラー 場については、Weierstrass gap の問題を注意深く考慮する必要があって多少複雑になる。

複雑な構造をもつ一般のコンパクトなリーマン面上に、グローバルに時間 τ を導入することができるということは驚くべきことである。この結果、正準量子化が M 上で可能になった。このことは、リーマン面上に場の量子論を構築するについて基本的に重要である。正準量子化ができることにより、同時刻交換関係も自動的に計算でき、WT の導出も通常の共形理論に依るよりも極めて容易になる。

KN 形式は、リーマン面上で重要な役割を果たしていることがわかった。KN 代数の更に広範な研究により、リーマン面上の物理について更に深い知識が得られるものと考えられる。紙数の都合により、KN 形式とその応用について重要な結果の一部だけしか述べることができなかった。詳細は、以下の文献を見られたい。

参考文献

- [1] T. Eguchi and H. Ooguri, *Phys. Lett.* **B187** (1987) 127.
- [2] E. Verlinde and H. Verlinde, *Nucl. Phys.* **B288** (1987) 357.
- [3] T. Eguchi and H. Ooguri, *Nucl. Phys.* **B282** (1987) 308.
- [4] P. Ginsparg, "Applied Conformal Field Theory", Harvard University preprint HUTP-88/A054,
- [5] D. Friedan, E. Martinec and S. Shenker, *Nucl. Phys.* **B271** (1986) 93.
D. Friedan, in Recent Advances in Field Theory and Statistic Mechanics, ed. J. B. Zuber and R. Stora, Proc. of 1982 Les Houches Summer School (Elsevier).
- [6] A. Cohen, G. Moore, P. Nelson and J. Polchinski, *Nucl. Phys.* **B281** (1987) 127,
G. Moore, *Phys. Lett.* **B176** (1986) 369.
- [7] L. Alvarez-Gaumé, C. Gomez, G. Moore and C. Vafa, *Nucl. Phys.* **B303** (1988) 455.
- [8] I. M. Krichever and S. P. Novikov, *Funk. Anal. Pril.* **21 No.2** (1987) 46 ;
21 No.4 (1988) 47.
- [9] L. Bonora, A. Lugo, M. Matone and J. Russo, SISSA preprint "A global operator formalism on higher genus Riemann surface; $b - c$ systems",
A. Lugo and J. Russo, "Hamiltonian formulation and scattering amplitudes in string theory at genus g ", Trieste preprint,
J. Russo, "Hamiltonian, supercharge and scattering amplitudes in superstring theory at genus g ", Trieste preprint.

- [10] L. Bonora, M. Bregola, P. Cotta-Ramusino and M. Martellini, *Phys. Lett.* **B205** (1988) 53,
T. Saito and K. Wu, *Phys. Lett.* **B220** (1989) 93,
G. Konishi, T. Saito and W. Takahashi, preprint, " KN algebras derived from Virasoro Algebra with Vertex Operators ".
- [11] L. Bonora, M. Rinaldi, J. Russo and K. Wu, *Phys. Lett.* **B208** (1988) 440.
L. Mezincescu, R. I. Nepomechie and C. K. Zachos, " (Super)conformal Algebra on the (Super)torus ", preprint, UMTG-144,
R. I. Nepomechie, " Conformal Algebra on the Torus and its Supersymmetric Generalizations ", preprint, UMTG-145,
L. Bonora, M. Martellini, M. Rinaldi and J. Russo, *Phys. Lett.* **B206** (1988) 444,
G. Konishi, T. Saito and W. Takahashi, preprint, " KN Superalgebras with Vertex Operators ".
- L. Bonora, M. Matone and M. Rinaldi, *Phys. Lett.* **B216** (1989) 313,
R. Kubo, S. Ojima and S.K. Paul, *Mod. Phys. Lett.* **A4** (1989) 1423.