



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática Aplicada



SOLUÇÕES DO TIPO WORMHOLE: Espalhamento, Estabilidade e Modos Quase-Normais

Fábio Dadam

Doutorado em Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa

Este trabalho contou com suporte financeiro do CNPq.

Campinas-SP
Março de 2011

ERRATA nos 2 exemplares da tese do aluno Fábio Dadam:

Em folha i:

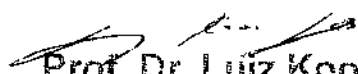
Onde se lê:	Leia-se:
Waldyr Alves Rodrigues Jr.	Waldir Alves Rodrigues Junior
Roldão da Rocha Jr.	Roldão da Rocha Júnior

Em folha ii:

Onde se lê:	Leia-se:
Waldyr Alves Rodrigues Jr.	Waldir Alves Rodrigues Junior
Roldão da Rocha Jr.	Roldão da Rocha Júnior

Em folha iii:

Onde se lê:	Leia-se:
Waldyr Alves Rodrigues Jr	Waldir Alves Rodrigues Junior
Roldão da Rocha Jr	Roldão da Rocha Júnior


Prof. Dr. Luiz Koodi Hotta
Coordenador CPG/IMECC
Matric. 042471 - UNICAMP

SOLUÇÕES DO TIPO WORMHOLE: Espalhamento, Estabilidade e Modos Quase-Normais

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Fábio Dadam** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 11 de março de 2011.



Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa (UNICAMP)

Prof. Dr. Patrício Anibal Letelier Sotomayor (UNICAMP)

Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr. (UNICAMP)

Prof. Dr. Roberto Venegeroles Nascimento (UFABC)

Prof. Dr. Roldão da Rocha Jr. (UFABC)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **DOCTOR em Matemática Aplicada**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Dadam, Fábio

D12s Soluções do tipo Wormhole: espalhamento, estabilidade e modos
quase-normais / Fábio Dadam – Campinas, [S.P.: s.n.], 2011.
132f. : il.

Orientador: Alberto Vazquez Saa.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Relatividade (Física). 2.Espalhamento (Matemática). 3.Gravitação.
I. Saa, Alberto Vazquez II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
III. Título

Título em Inglês: Wormhole solutions: scattering, stability and quasinormal modes

Palavras-chave em inglês (Key-words): 1.Relativity (Physics). 2.Scattering (Mathematics).
3.Gravitation.

Área de Concentração: Matemática Aplicada.

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada.

Banca Examinadora: Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa (UNICAMP)

Prof. Dr. Patrício Anibal Letelier Sotomayor (UNICAMP)

Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr. (UNICAMP)

Prof. Dr. Roberto Venegeroles Nascimento (UFABC)

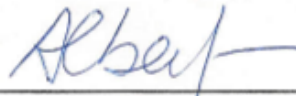
Prof. Dr. Roldão da Rocha Jr. (UFABC)

Data da defesa: 11/03/2011

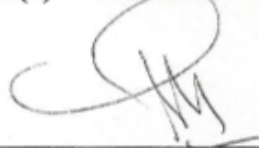
Programa de Pós-graduação: Doutorado em Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 11 de março de 2011 e aprovada

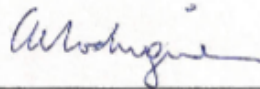
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). ALBERTO VAZQUEZ SAA




Prof(a). Dr(a). PATRICIO ANIBAL LETELIER SOTOMAYOR



Prof(a). Dr(a). WALDYR ALVES RODRIGUES JR



Prof(a). Dr(a). ROBERTO VENEGEROLES NASCIMENTO



Prof(a). Dr(a). ROLDÃO DA ROCHA JR

“Ao meu herói”

Quem passou pela vida em brancas nuvens

E em plácido repouso adormeceu

Quem não sentiu o frio da desgraça

Quem na vida não sofreu

Foi espectro de homem, não foi homem

Só passou pela vida, não viveu

RESUMO

O objetivo do presente trabalho foi o de estudar as oscilações de alguns wormholes na tentativa de se encontrar candidatos que apresentassem soluções exatas para modos quase normais. Apresentamos uma nova classe de wormholes estáticos que generaliza os wormholes de Morris-Thorne pela inclusão de dois parâmetros adicionais a fim de distorcer a simetria esférica e alcançar equações de perturbação onde o potencial pode ser dissociado das respectivas auto-frequências. A nova métrica provou ser muito geral no sentido de que a maioria das geometrias de wormhole estudadas atualmente na literatura podem ser expressas como casos particulares dela. As equações de Teukolsky para esta métrica geral foram determinadas por meio do formalismo de Newman-Penrose e, em consequência deste processo, obtivemos um tipo de solução com frequências de MQN exatas, a menos de uma equação transcendental. Esse tipo especial de solução foi usado para aproximar potenciais de buracos negros de uma forma semelhante às quadraturas. Estudamos também a propagação de ondas eletromagnéticas ao longo das soluções do tipo wormhole através do formalismo de Newman Penrose e, seguindo certos critérios, obtivemos certos tipos de geometrias de wormhole que são capazes de modelar barreiras de Coulomb ou Morse. Esses resultados podem indicar que wormholes poderiam ser usados no futuro como modelos para sistemas físicos, como as supercordas são usadas atualmente, e também como guia nos chamados modelos análogos de gravação. Finalmente, estudamos outros tipos de soluções do tipo "estrelas exóticas", as chamadas dobras espaciais. Esperamos que as equações, e especialmente os princípios, apresentados neste trabalho ajudem futuros pesquisadores a procurar wormholes susceptíveis a fornecer fontes para uma descrição exata das ondas gravitacionais e uma percepção mais profunda do problema das singularidades na Relatividade Geral e na Mecânica Quântica.

ABSTRACT

The aim of the present work was to study the oscillations of certain wormholes in an attempt to find candidates for exact solutions of quasinormal modes. We presented a new class of static wormholes which generalizes Morris-Thorne wormholes by adding two additional parameters in order to distort spherical symmetry and achieve perturbation equations where the potential may be decoupled from the frequency. The new metric proved to be very general in the sense that most of the current wormhole geometries studied in the literature can be expressed as particular cases of it. The Teukolsky equations for this class of wormholes were determined via Newman-Penrose formalism and, as a result of this procedure, we constructed one special solution with exact QNM frequencies except for a transcendental equation. This special type of solution is used to approximate black hole potentials in a similar manner than quadratures. We also studied the propagation of electromagnetic waves in wormhole solutions through Newman-Penrose formalism and, following a set of criteria, we obtained certain types of wormhole geometries that are capable of modeling Coulomb or Morse scatterers. These results may indicate that wormholes could be used in the future as models for physical systems just as superstrings are used today. Finally, we studied other kinds of exotic stars, the warp drives. We hope that the equations, and specially the principles, presented in this work will help future researchers to search for wormholes which could provide sources for exact description of gravitational waves and a deeper insight into the problem of singularities in both General Relativity and Quantum Mechanics.

Sumário

Introdução	1
1 PRELIMINARES	5
1.1 Soluções do tipo Wormholes	6
1.1.1 Wormholes de Morris-Thorne	10
1.1.2 Wormholes Inflacionários	13
1.2 Formalismo de Newman-Penrose	14
1.3 Modos Quase-Normais	22
2 WORMHOLE ULTRAESTÁTICO	25
2.1 Descrição do Espaço-Tempo	26
2.2 Perturbações Gravitacionais	28
3 WORMHOLES DE MORRIS-THORNE	35
3.1 Descrição do Espaço-Tempo	36
3.1.1 Matéria Exótica	36
3.1.2 Cones de Luz	37
3.2 Perturbação do Espaço-Tempo	41
3.2.1 Equações de Teukolsky	42
3.2.2 Equações de Onda	45
3.3 Frequências de MQN	47
4 UMA MÉTRICA SUFICIENTEMENTE GERAL	53
4.1 Descrição do Espaço-Tempo	54
4.1.1 Matéria Exótica	54
4.1.2 Cones de Luz	57
4.2 Perturbação do Espaço-Tempo	63
4.2.1 Equações de Teukolsky	63

4.2.2	Equação de Onda	67
4.3	Soluções de MQN	70
5	PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS	77
5.1	Perturbação das Equações de Maxwell	78
5.2	Uma Solução Especial	81
5.3	Barreiras de Potencial	82
6	FREQUÊNCIAS DE MQN PARA BURACOS NEGROS	85
6.1	O Problema	86
6.2	O Método	89
6.2.1	Buraco Negro de Schwarzschild	90
6.2.2	Buraco Negro de Kerr	90
7	WORMHOLES LIMÍTROFES	93
7.1	Introdução	94
7.2	Ondas Gravitacionais	95
7.3	Ondas Eletromagnéticas	96
8	DOBRAS ESPACIAIS	99
8.1	Apresentação	100
8.2	Descrição do Espaço-Tempo	101
8.3	Perturbação do Espaço-Tempo	106
8.3.1	Equações de Teukolsky	106
8.3.2	Equação de Onda	108
8.4	Frequências de MQN	109
	Considerações Finais	111
	Referências Bibliográficas	115

Introdução

A Teoria Geral da Relatividade é uma das teorias físicas mais exaustivamente testada e comprovada de nossa época. Seu alcance de previsões se estende desde o limite dos campos gravitacionais fracos do sistema solar até buracos negros e estrelas de nêutrons. Todas essas soluções foram obtidas considerando primeiramente uma distribuição normal de matéria (especificada pelo tensor de energia-momento), e através da equação de Einstein, a métrica de espaço-tempo da geometria é determinada. No entanto, pode-se resolver a equação de Einstein na direção inversa, ou seja, nós primeiro consideramos uma métrica de espaço-tempo interessante e exótica, e em seguida, determinamos o tensor de energia-momento responsável pela respectiva geometria. Desta forma, verificou-se que algumas dessas soluções poderiam possuir uma propriedade peculiar, denominada “matéria exótica”, envolvendo um tensor de energia-momento que viola certas condições de energia. Wormholes² são uma tal espécie de solução.

Estrelas são feitas de matéria, buracos negros, em seu exterior, não são nada mais do que vácuo e wormholes são mais facilmente descritos como “estrelas exóticas”, possíveis objetos astrofísicos constituídos por uma espécie de matéria que não interage com campos de matéria ordinária de qualquer forma. Um wormhole é definido como qualquer região compacta do espaço-tempo com uma fronteira topologicamente simples, mas um interior topologicamente não trivial [1], que captura a ideia de um túnel que une dois espaços-tempo ou duas regiões do mesmo universo. A história dos wormholes pode ser dividida em três fases: o trabalho inicial de Einstein e Rosen em 1935 que tentou modelar os elétrons, denominado Ponte de Einstein-Rosen[2]; a interpretação dos wormholes de Reissner-Nordström ou Kerr como objetos da “espuma quântica” devido a Wheeler[3] na década de 1950; e o momento atual de interesse após o artigo clássico de Morris e Thorne[4] em 1988. Inicialmente wormholes não eram transitáveis em princípio, mas depois do artigo de Morris e Thorne, vários pesquisadores passaram a estudar soluções das equações de Einstein com uma *boca* ao invés de um *horizonte de eventos*, uma *garganta* no lugar de uma *singularidade* e forças de maré extremamente

² Este termo não possui uma tradução satisfatória para a língua portuguesa. Buracos de minhoca e buracos de vermes são empregados em alguns textos. Manteremos, aqui, a expressão inglesa.

pequenas através da garganta para permitir uma viagem humana. Revisões completas sobre essas soluções encontram-se no livro de Visser[1] e no artigo de Lobo[5].

A existência dos wormholes está no centro da discussão entre gravitação clássica e quântica porque eles violam a condição de energia nula assim como alguns sistemas quânticos. Neste contexto podemos pensar que uma análise de estabilidade se faz necessária para atingir confiança sobre a existência de wormholes na Natureza. Para analisar a estabilidade dos wormholes temos de responder à pergunta: se tal objeto existe espontaneamente no universo, ou é construído por alguma eventual civilização extremamente avançada, será possível sua permanência na Natureza? Cada objeto astrofísico oscila por influências externas e ao fazê-lo, ele emite radiação determinada principalmente pelo fenômeno que causou essa oscilação; no entanto, podemos esperar que qualquer perturbação, durante seus últimos estágios, decaia de uma maneira característica do objeto e independente da causa original, da mesma forma que um sino soando suas últimas notas [6]. O conceito de modos quase-normais (MQN) baseia-se nestas considerações e matematicamente representa a solução das equações de perturbação para frequências complexas, onde a parte real representa a frequência de oscilação e a parte imaginária corresponde à taxa de amortecimento. Esta situação é compatível com o fato de que um wormhole deve ser visto como uma membrana infinita, em vez de um sistema oscilante fechado, como uma corda de violão. Para uma boa revisão em MQN, há os trabalhos de Kokkotas[7], Nollert[8], Martin[9] e Dadam[10].

No que diz respeito à teoria de perturbação linear em soluções de wormhole, algumas das obras mais importantes foram feitas por Frolov & Novikov [11], Kar et al[12], Perez & Hiberd[13], Kim[14] e Moreno & Garcia-Salcedo[15]. No entanto, nenhum desses trabalhos conseguiu obter frequências quase-normais exatas para os sistemas estudados. Este trabalho pode ser visto como uma generalização destes estudos, tanto do ponto de vista do objeto estudado (soluções generalizadas de wormholes), como do ponto de vista do ferramental matemático (formalismo de Newman-Penrose). De fato, o objetivo principal desse trabalho é o de se tentar determinar soluções exatas de MQN por meio da análise das perturbações de certas métricas através da teoria de perturbação, mas utilizando-se do formalismo de Newman-Penrose, mais precisamente baseando-se nas tétrades de vetores de tipo luz e vetores complexos desenvolvidas por Geroch, Held e Penrose [20] numa tentativa de se introduzir o formalismo espinorial na Relatividade Geral de uma forma mais natural, à semelhança das tétrades de Cartan. O Capítulo 1 fornece a base matemática necessária ao estudo que será feito no decorrer do texto. Neste primeiro capítulo, o espaço-tempo característico de um wormhole é definido, apresentamos as equações fundamentais do formalismo de Newman-Penrose que serão utilizadas na sequência e, finalmente, o problema dos modos quase-normais

(MQN), resultado final da teoria de perturbação, é formalizado matematicamente.

O Capítulo 2 faz o estudo das perturbações de um tipo simplificado de wormhole e seus resultados servem de base de comparação para os capítulos seguintes. No Capítulo 3, o mesmo estudo é feito sobre os wormholes de Morris-Thorne, em seu caso geral. O Capítulo 4 apresenta uma métrica suficientemente geral para os propósitos do trabalho. Em seguida, tal métrica é perturbada e as equações de perturbação são resolvidas na tentativa de se achar uma solução exata para o problema dos modos quase-normais. No Capítulo 5 é feita uma análise da propagação de ondas eletromagnéticas ao longo dessa mesma geometria e no Capítulo 6, o problema da determinação dos MQN de buracos negros é analisado sob uma nova perspectiva em que uso é feito de uma solução de certa forma especial. O Capítulo discute um caso particular de wormholes com quantidades mínimas de matéria exótica. Finalmente, tratamos das dobras espaciais no Capítulo 8 as quais também são soluções exóticas das Equações de Einstein.

Constituem material inédito neste trabalho a aplicação do formalismo de Newman-Penrose para os estudos de perturbações, propagação de campos de teste e modos quase-normais apresentados nos cap. 4, 5 e 6, e as análises das soluções apresentadas nos cap. 7 e 8.

Capítulo 1

PRELIMINARES

O objetivo desse capítulo é fornecer a base matemática necessária ao completo entendimento da sequência do texto. O espaço-tempo é identificado com uma variedade pseudo-riemanniana e as Equações de Einstein são postuladas como uma condição a ser obedecida pela métrica em tal variedade e interpretadas como a ação da energia-momento sobre a geometria do espaço-tempo, cuja consequência se conhece como gravitação. Wormholes são definidos como soluções especiais dessas equações que não possuem horizonte de eventos nem singularidades nuas. Em seguida, o formalismo de Newman-Penrose é apresentado em toda sua extensão, pois é através dele que será feita a análise de estabilidade das soluções nos capítulos seguintes, primeiramente descrevendo o espaço-tempo em tal formalismo e depois perturbando os vetores da base tétrade que o fundamenta. Finalmente, será feita a formulação matemática dos modos quase-normais como soluções da equação de onda, obtida ao fim da perturbação do espaço-tempo, para frequências complexas, e satisfazendo condições de fronteira apropriadas para uma resposta extrema do wormhole a perturbações externas.

1.1 Soluções do tipo Wormholes

Definição 1.1 *Um espaço-tempo consiste numa variedade quadridimensional conexa, orientada no espaço e no tempo, com uma métrica Lorentziana (pseudo-riemanniana) de assinatura -2 , juntamente com uma conexão de Levi-Civita [18].*

Espaços-tempo que possuam entre si uma isometria que preserve as orientações necessárias representam fisicamente a mesma situação. Os espaços-tempo de significado em Física são todos modelos da história do universo (ou de uma parte dela). A dimensão de um espaço-tempo é intuitivamente determinada pelas três dimensões espaciais do universo conhecido e uma dimensão temporal extra. Como espaços-tempo modelam histórias, “desconexo” significaria “sempre foi, é, e sempre será desconexo”. Portanto, assume-se uma variedade conexa.

Quanto à orientação, o requisito de ser orientável no tempo provém do conhecimento atual dos processos termodinâmicos na Terra, pois a segunda lei da termodinâmica implica que é possível distinguir o passado do futuro pela medição do aumento na entropia. A orientação espacial da variedade também é uma condição plausível de se impor porque a não conservação da paridade está agora estabelecida para uma ampla classe de experimentos (as chamadas “interações fracas”) de modo que podemos distinguir entre sistemas dextrógiros e levógiros no espaço tridimensional ordinário. Assim, o espaço-tempo pode ao menos ser orientado rigorosamente na região que circunda a Terra, no momento presente, da seguinte forma: em cada sistema de coordenadas, a forma volume $\sqrt{-g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$ será consistente com a orientação se, e somente se, cada dx^1, dx^2, dx^3 for de tipo-espaço¹ e $\{dx^1, dx^2, dx^3\}$ for dual a uma base espacial dextrógira do espaço tangente de cada ponto, e ainda dx^4 for de tipo-tempo e com direção futura.

Finalmente, resta falar a respeito da classe de diferenciabilidade da variedade identificada como espaço-tempo. Assume-se que tal variedade seja C^∞ , pois tal requerimento soa como o mais óbvio e mais aceitável de todos. Entretanto, as contradições da presente teoria quântica de campos são severas. Essas contradições podem forçar à aceitação de um mundo quântico ao invés de uma variedade C^∞ . Tais contradições também levam a sistemas quânticos que não satisfazem certas leis de conservação; em particular, a existência de tal possibilidade é o que enfatiza a necessidade de um estudo mais profundo de wormholes porque eles são originados e mantidos por tais sistemas.

¹Dada a métrica do espaço-tempo na forma $\mathbf{g} = g^{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$, com assinatura -2 , um vetor V é de tipo-espaço se $g(V, V) < 0$, de tipo-luz se $g(V, V) = 0$ e de tipo-tempo se $g(V, V) > 0$.

A conexão de Levi-Civita a que se refere a Definição 1.1 é aquela obtida da métrica

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\sigma\beta,\gamma} + g_{\sigma\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\sigma}). \quad (1.1)$$

Notação: A métrica inversa, $g^{\mu\nu}$, é a matriz inversa da métrica $g_{\mu\nu}$. Vírgulas denotam derivadas parciais: $X_{\mu,\nu} \equiv \partial_{\nu}X_{\mu} \equiv \frac{\partial X_{\mu}}{\partial x^{\nu}}$. A convenção de Einstein (na qual um índice sobrescrito seguido por um subscrito idêntico, ou vice-versa, em uma expressão corresponde a uma soma) será usada ao longo de todo o texto.

A partir de uma conexão numa variedade, podemos definir o tensor de curvatura de Riemann. Existem definições mais gerais, mas para os propósitos do texto a definição a seguir, que é válida num sistema de coordenadas local, é suficiente.

Definição 1.2 *O tensor de curvatura de Riemann é definido em termos de suas componentes numa base local de coordenadas por*

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \partial_{\gamma}\Gamma_{\beta\delta}^{\alpha} - \partial_{\delta}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \Gamma_{\sigma\gamma}^{\alpha}\Gamma_{\beta\delta}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\delta}^{\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}^{\sigma}. \quad (1.2)$$

A partir de contrações do tensor de Riemann, obtemos o tensor e o escalar de Ricci, que também auxiliam na análise da curvatura do espaço-tempo e em suas singularidades.

Definição 1.3 *Numa base local de coordenadas definem-se o tensor de Ricci por*

$$R_{\mu\nu} = R_{\alpha\mu\beta\nu}g^{\alpha\beta} \quad (1.3)$$

e o escalar de Ricci (também denominado curvatura escalar) por

$$R = R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta\nu}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} \quad (1.4)$$

Definição 1.4 *Numa base local de coordenadas, define-se o tensor de Weyl pela fórmula*

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{2}(g_{\alpha\gamma}R_{\beta\delta} + g_{\beta\delta}R_{\alpha\gamma} - g_{\beta\gamma}R_{\alpha\delta} - g_{\alpha\delta}R_{\beta\gamma}) + \frac{1}{6}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta})R \quad (1.5)$$

Finalmente, o tensor e o escalar de Ricci determinam o tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (1.6)$$

É postulado que todo espaço-tempo deve obedecer às Equações de Einstein que relacionam a curvatura do espaço-tempo (como descrita pelo tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$) à distribuição de

matéria e energia (como descrita pelo tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$). Explicitamente, tem-se

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1.7)$$

onde foram adotadas unidades geométricas $G = c = 1$.

Contraindo (1.7) com a métrica inversa, obtém-se

$$R_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T), \quad (T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}), \quad (1.8)$$

de forma que no vácuo (regiões do espaço-tempo em que $T_{\mu\nu} = 0$), as Equações de Einstein se reduzem a

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.9)$$

Estrelas, poeira e outros aglomerados de matéria comum constituem-se em soluções das Equações de Einstein para tensores energia-momento que apresentem densidades de energia positiva em todos os pontos. A condição de energia fraca (WEC) assume que a densidade local de energia é não-negativa e estabelece que $T_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \geq 0$, para todos os vetores de tipo-tempo U^μ . A condição de energia nula (NEC), $T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$, onde k^μ é um vetor de tipo-luz, é consequência da WEC e consiste na mais fraca das condições de energia de modo que sua violação constitui-se na violação das demais condições. Apesar de se acreditar que formas clássicas de matéria devam obedecer essas condições de energia, é um fato bem conhecido que elas são violadas por certos fenômenos quânticos, como o efeito Casimir e a evaporação de Hawking.

Os buracos negros de possível existência na Natureza em sua forma macroscópica consistem numa classe de soluções das Equações de Einstein no vácuo, cuja métrica obedece a certas restrições. A principal delas consiste na existência de um *horizonte de eventos*. Segundo [10], temos a seguinte definição matemática para tal estrutura.

Definição 1.5 *Um horizonte de eventos consiste numa subvariedade diferenciável bidimensional do espaço-tempo, de tipo-luz, gerada por um vetor de Killing de tipo-tempo e outro de tipo-espaço, onde entende-se por vetor de Killing numa variedade um campo K tal que $L_K g = 0$ sendo g a métrica e L o operador derivada de Lie².*

²A derivada de Lie de um campo tensorial é um tensor de mesmo tipo que satisfaz as seguintes regras:

(i) atua sobre um campo escalar como o gradiente; (ii) atua sobre um vetor do espaço tangente como o comutador; (iii) opera linearmente sobre campos tensoriais; e (iv) satisfaz a regra de Leibnitz quando atua sobre produtos tensoriais.

Na prática, para situações estacionárias e esfericamente simétricas, assume-se a existência de um horizonte de eventos quando a componente da métrica g_{tt} torna-se nula em algum ponto ou região do espaço-tempo.

Ao contrário das estrelas ordinárias, buracos negros são singularidades do espaço-tempo, pontos ou regiões no qual a métrica diverge; mais precisamente, indicadores como geodésicas ou contrações do tensor de curvatura encontram descontinuidades ou tornam-se infinitos, respectivamente.

Wormholes e demais estrelas exóticas basicamente diferem das estrelas comuns porque existe uma distribuição de matéria que os suporta, mas que em algum ponto apresenta densidade de energia negativa. Wormholes também diferem dos buracos negros porque não apresentam qualquer tipo de singularidade nem horizonte de eventos. Segundo a definição de Visser [1]:

Definição 1.6 *Wormholes são objetos com uma fronteira topologicamente simples, mas com um interior topologicamente não trivial.*

Ainda segundo Visser [1], encontramos a seguinte definição de um wormhole, mais rigorosa porém mais restritiva.

Definição 1.7 *Se um espaço-tempo de Minkowski contém uma região compacta Ω e se a topologia de Ω é da forma $\mathbb{R} \times \Sigma$ onde Σ é uma variedade tridimensional de topologia não trivial, cuja fronteira tem topologia da forma S^2 e, se além disso, as hipersuperfícies Σ são todas de tipo-espaço, então a região Ω contém um wormhole.*

Uma definição geométrica de wormhole é uma região do espaço-tempo contendo um “tubo universal”(a evolução temporal de uma superfície fechada) que não pode ser continuamente deformada a uma “linha universal”(a evolução temporal de um ponto).

Essas definições tentam captar a idéia daquilo que chamamos de *wormhole transitável*, um túnel entre dois universos ou duas regiões do mesmo universo, com uma *boca* ao invés de um horizonte de eventos, uma *garganta* em lugar de uma singularidade essencial e capaz de apresentar forças de maré suficientemente pequenas para permitir viagens humanas ou transferência de informação, em princípio.

As variedades de wormholes que foram encontradas na literatura até 1988 são todas problemáticas: a ponte de Einstein-Rosen apresentava horizonte de eventos microscópicos não condizentes com as previsões teóricas; os wormholes de Wheeler são simplesmente pequenos demais para terem algum de seus efeitos calculados; as singularidades nuas possuem forças

de maré que as tornam intransitáveis e não podem ser tomadas como verdadeiras se assumirmos a conjectura do censor cósmico de Penrose [6]. A grande aposta de Morris e Thorne em seu artigo clássico de 1988 foi perceber a possibilidade de construir espaços-tempo de wormholes que fossem em princípio transitáveis e, para tanto, admitiram dois requerimentos: a inexistência de horizonte de eventos e de singularidades nuas.

Restringir a atenção a soluções das Equações de Einstein que não possuam singularidades é uma tarefa nada fácil. O método tradicional seria tomar um tensor energia-momento que supostamente suporta o espaço-tempo de um wormhole, resolver as Equações de Einstein e por fim, checar a presença de singularidades na curvatura da solução assim obtida. Todas as tentativas em seguir este processo falharam. A idéia seminal de Morris e Thorne foi efetuar um raciocínio inverso ao descrito acima, a saber, assumir a existência de uma geometria interessante e bem comportada, depois calcular o tensor de Riemann associado a essa geometria e usar as Equações de Einstein para deduzir qual a distribuição de energia-momento precisa existir. O grande problema foi que, ao fazer isso, Morris e Thorne perceberam que a distribuição de energia-momento nas vizinhanças da garganta do wormhole era um tanto peculiar e incompatível com a Física (macroscópica) conhecida e aceita atualmente. Sem muito rigor, basicamente o que ocorre próximo da garganta de um wormhole é que em algum lugar e em algum momento, alguém será capaz de encontrar densidade de energia negativa. De acordo com Visser [1]

... Não fosse o fato de que experimentos revelaram alguns efeitos quânticos que violam certas leis de conservação da energia, o trabalho de Morris e Thorne seria interpretado como um estágio inicial de um teorema de inexistência de wormholes na Natureza.

1.1.1 Wormholes de Morris-Thorne

A fim de manter a análise mais facilmente tratável, Morris e Thorne assumiram que seus wormholes transitáveis eram independentes do tempo, sem rotação, e formavam pontes esfericamente simétricas entre dois universos. A variedade de interesse era portanto um espaço-tempo estático esfericamente simétrico possuindo duas regiões assintoticamente planas e, sem perda de generalidade, a métrica adotada tomou a forma

$$ds^2 = -e^{2\phi} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (1.10)$$

As coordenadas t , θ e φ representam tempo, e latitude e longitude em uma esfera de raio r , respectivamente. A coordenada radial é igual à coordenada radial do espaço de mergulho (Ver Fig. 1). Como resultado, r não é monotônica, decrescendo de $+\infty$ a um valor mínimo

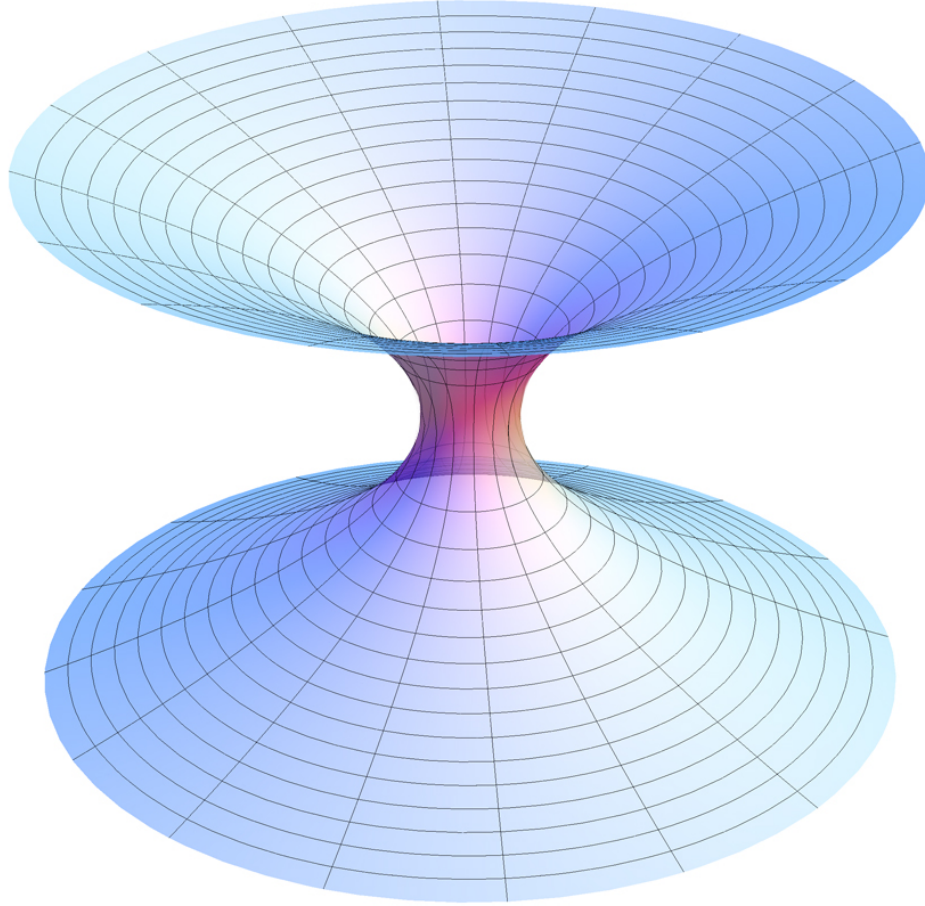


Figura 1.1: Típico mergulho da geometria do Wormhole de Morris-Thorne (1.10) em R^3 , veja Eq. (1.14). Mais detalhes, em [1].

em $r_0 \neq 0$, a garganta transitável, e aumentando novamente até $+\infty$ no outro universo (ou em uma outra região do mesmo universo). De acordo com a situação, é necessário limitar-se o alcance de r para esta solução a um intervalo $I = (r_0, a_0)$ unindo-na a uma nova solução de a_0 a $+\infty$.

A inexistência de um horizonte de eventos está garantida por

$$g_{tt} = -e^{2\phi(r)} \neq 0 \quad \forall r \in I \quad (1.11)$$

e ϕ , tomada como finita em todo lugar, é denominada *função desvio para o vermelho* porque quando $g_{tt} = 0$ a luz é completamente desviada para o vermelho (e forma-se um buraco negro). A função $b = b(r)$ adquire uma interpretação simples como uma *função de forma* porque ela determina a forma espacial do wormhole. De fato, tomando-se uma fatia do wormhole (1.10) em um momento definido no tempo ($dt = 0$) e no plano equatorial ($\theta = \frac{\pi}{2}$),

$$ds^2 = \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (1.12)$$

e mergulhando-a em um espaço euclidiano tridimensional,

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right] dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (1.13)$$

vê-se que as equações (1.12) e (1.13) representam o mesmo elemento de comprimento se identificarmos as coordenadas (r, φ) do espaço de mergulho com as (r, φ) do espaço-tempo de wormhole, e se for imposto que a função $z = z(r)$, a qual descreve a superfície de mergulho, satisfaça

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left[\frac{r}{b(r)} - 1\right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.14)$$

Uma análise dessa expressão mostra que a garganta do wormhole é um ponto fixo de b e, nesse ponto, a curvatura diverge (isto é, curvas na superfície terão tangentes que serão verticais no espaço).

Resta falar que as funções $\phi = \phi(r)$ e $b = b(r)$ são aceitas como sendo de classe $C_I^\infty(\mathbb{R})$. Uma métrica *estática e esfericamente simétrica* corresponde a existência de um vetor de Killing de tipo-tempo ortogonal a uma família de hipersuperfícies (no caso, as esferas de raio r); na prática, isto se manifesta no caráter ortogonal da métrica e na independência temporal de suas componentes. Dizer que uma métrica é *assintoticamente plana* consiste em dizer que, efetuando-se uma transformação conforme sobre a variedade a fim de se estender a métrica continuamente para se anexar uma fronteira \mathfrak{I} ao espaço-tempo, este infinito \mathfrak{I} será idêntico àquele do Espaço de Minkowski da Relatividade Especial; na prática, no entanto, adota-se como critério para que um wormhole seja assintoticamente plano a condição de que ambos os limites

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{b(r)}{r} \quad (1.15)$$

e

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \phi(r) \quad (1.16)$$

sejam zero.

O exemplo mais simples e também o mais estudado wormhole na literatura é o *wormhole ultraestático* o qual corresponde a um caso particular de um wormhole de Morris-Thorne com força de maré nula, dada por $\phi = 0$ e função de forma $b = \frac{r_0^2}{r}$ que satisfazem uma relação simples entre as distâncias radial e de luminosidade, a saber $r^2 = l^2 + r_0^2$.

1.1.2 Wormholes Inflacionários

Uma simples generalização das métricas de wormhole originalmente desenvolvidas por Morris e Thorne, caracterizadas pela equação (1.10), é aquela conhecida como *wormhole de Roman* e que corresponde a um espaço-tempo inflacionário dependente do tempo:

$$ds^2 = -e^{2\phi} dt^2 + e^{2\chi t} \left[\frac{dr^2}{1 - \frac{b}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right]. \quad (1.17)$$

Aqui a parte espacial da métrica (1.10) foi multiplicada pelo fator $e^{2\chi t}$ de uma escala de deSitter, onde $\chi = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$ e Λ é a constante cosmológica [16]. As coordenadas r, θ, φ foram escolhidas de modo a terem a mesma interpretação geométrica que antes. Em particular, círculos de r constante estão centrados na garganta do wormhole, localizada no ponto fixo mínimo e não nulo da função de forma $b = b(r)$. Para $\phi(r) = b(r) = 0$, a métrica de Roman se reduz a um espaço deSitter plano, enquanto que para $\chi = 0$, ela retorna à forma original de Morris-Thorne.

Da mesma forma que para os wormholes de Morris-Thorne, pode-se adotar $\phi(r) \rightarrow 0, \frac{b}{r} \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow +\infty$, de modo que o espaço-tempo seja assintoticamente deSitter, ou pode-se optar por fazer ϕ e b irem a zero em algum valor finito de r , além do qual o espaço-tempo seja deSitter, correspondendo ao corte de energia a uma distância finita.

No Capítulo 2, descreveremos sucintamente o desenvolvimento feito por Claudia Moreno e Ricardo García-Salcedo [15], que analisaram o caso particular de um wormhole ultraestático à luz do formalismo de Newman-Penrose e cujo artigo serve de comparação para os resultados que serão aqui obtidos. Nos Capítulos 3 e 5 estenderemos essa análise para o caso de um wormhole de Morris-Thorne genérico, estudando as perturbações gravitacionais e eletromagnéticas. No Capítulo 4, procuraremos generalizar a classe de wormholes de Morris-Thorne vista acima e efetuar a teoria de perturbação sobre uma métrica suficientemente geral atra-

vés do formalismo de Newman-Penrose; formalismo esse que é o assunto da próxima seção. O mesmo procedimento pode ser levado adiante para os wormholes de Roman, mas como resultado obtivemos uma equação de onda dependente do tempo muito complexa e que não será explicitada nesse texto por fugir ao objetivo principal do trabalho que é a busca por soluções de MQN exatas.

1.2 Formalismo de Newman-Penrose

Nessa seção será introduzida a base matemática para o estudo das perturbações das métricas descritas na seção anterior e suas generalizações. Sabe-se [10] que o estudo completo das perturbações em buracos negros só foi possível graças a uma abordagem diferenciada das Equações de Einstein via formalismo de Newman-Penrose. Tratado mediante tal formalismo, o problema adquire um caráter algébrico e - o que é mais importante - as equações são extremamente simplificadas para o caso dos buracos negros. Esse fato leva a crer que o uso de tal formalismo possa ampliar a visão que se tem das perturbações de wormholes. Esta é nossa principal motivação.

Inicialmente serão introduzidas as noções de base de tétrades e coeficientes de rotação, juntamente com as equações fundamentais da teoria. O formalismo de Newman-Penrose é então definido como aquele em que as tétrades são vetores de tipo-luz que obedecem certas condições. Também serão apresentadas as quantidades fundamentais do formalismo - a saber, os escalares de Weyl, Ricci, Maxwell e os coeficientes de spin - bem como as transformações possíveis nessas quantidades.

Definição 1.8 *Uma tétrade consiste numa base ortonormal de vetores tangentes definida em um aberto do espaço-tempo, ou seja,*

$$g(e_{(a)}, e_{(b)}) = g_{ij} e_{(a)}^i e_{(b)}^j = \eta_{(a)(b)}, \quad (1.18)$$

onde g é a métrica do espaço-tempo e $\eta_{(a)(b)}$ é uma matriz simétrica diagonal com ± 1 na diagonal. Da mesma forma, pode-se definir uma base dual de tétrades em cada ponto do espaço co-tangente, dada por

$$e_{(a)}^i e_i^{(b)} = \delta_{(a)}^{(b)} \quad e \quad e_{(a)}^i e_j^{(a)} = \delta_j^i. \quad (1.19)$$

A métrica $\eta_{(a)(b)}$ possui o mesmo comportamento que a métrica curva g_{ij} , isto é, podemos levantar e abaixar índices tétrades com $\eta_{(a)(b)}$ e $\eta^{(a)(b)}$ da mesma forma que fazemos com o

tensor métrico. Mais que isso, dado qualquer tensor, basta projetá-lo no referencial tétrade, à semelhança da equação (1.18), a fim de encontrar suas componentes tétrades. Baseado nesse processo, é possível estabelecer diferenciação no formalismo tétrade.

Definição 1.9 *A derivada direcional de um vetor A , com componentes tétrades $A_{(a)}$, na direção $e_{(b)}$, é dada por*

$$A_{(a),(b)} = e_{(b)}^i \frac{\partial}{\partial x^i} A_{(a)}. \quad (1.20)$$

Definição 1.10 *A derivada intrínseca de um vetor A , com componentes tétrades $A_{(a)}$, na direção $e_{(b)}$, é dada por*

$$A_{(a)|(b)} = e_{(a)}^i A_{i;j} e_{(b)}^j, \quad (1.21)$$

em que ponto e vírgula correspondem à derivada covariante³.

Proposição 1.1 *Sejam $A_{(a)}$ as componentes tétrades de um vetor A na base tétrade. Então*

$$A_{(a),(b)} = e_{(a)}^j A_{j;i} e_{(b)}^i + \gamma_{(c)(a)(b)} A^{(c)} \quad (1.22)$$

e

$$A_{(a)|(b)} = A_{(a),(b)} - \eta^{(n)(m)} \gamma_{(n)(a)(b)} A_{(m)}, \quad (1.23)$$

onde

$$\gamma_{(c)(a)(b)} = e_{(c)}^k e_{(a)k;i} e_{(b)}^i \quad (1.24)$$

são denominados coeficientes de rotação de Ricci.

Demonstração.

De (1.20) segue

$$A_{(a),(b)} = e_{(b)}^i \frac{\partial}{\partial x^i} [e_{(a)}^j A_j] = e_{(b)}^i \nabla_{\partial_i} [e_{(a)}^j A_j] = e_{(b)}^i [e_{(a)}^j A_{j;i} + A_k e_{(a);i}^k], \quad (1.25)$$

onde foram utilizadas as propriedades da derivada covariante [6]. Utilizando-se o tensor métrico, chegamos ao resultado

$$e_{(a)j} A^j = e_{(a)}^j A_j. \quad (1.26)$$

³Define-se a derivada covariante, ∇Y , de um campo vetorial Y , como sendo um campo tensorial de tipo (1,1) que mapeia o campo vetorial contravariante X em $\nabla_X Y$, onde $\nabla_X Y$ é linear em ambos os argumentos, obedece a regra de Leibnitz para o produto tensorial e coincide com a derivada direcional quando atua sobre funções.

Substituindo (1.26) em (1.25), obtemos

$$A_{(a),(b)} = e_{(a)}^j A_{j;i} e_{(b)}^i + e_{(a)k;i} e_{(b)}^i e_{(c)}^k A^{(c)} \quad (1.27)$$

onde uso foi feito do fato de que levantamento e abaixamento de índices tensoriais permutam com a operação de diferenciação covariante ([6], p.36). A equação (1.22) resulta de (1.27) e (1.24).

A equação (1.23) corresponde à equação (1.22) reescrita com o auxílio da definição (1.21). ■

Proposição 1.2 *Os coeficientes de rotação de Ricci podem ser determinados através da expressão*

$$\gamma_{(a)(b)(c)} = \frac{1}{2} [\lambda_{(a)(b)(c)} + \lambda_{(c)(a)(b)} - \lambda_{(b)(c)(a)}], \quad (1.28)$$

onde

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = [e_{(b)i;j} - e_{(b)j;i}] e_{(a)}^i e_{(c)}^j. \quad (1.29)$$

Demonstração.

Pela Definição 1.8, tem-se

$$0 = \eta_{(a)(b);i} = e_{(a)j;i} e_{(b)}^j + e_{(a)j} e_{(b);i}^j. \quad (1.30)$$

Utilizando-se (1.30) e (1.26) na definição (1.24), resulta que os coeficientes de rotação são anti-simétricos no primeiro par de índices

$$\gamma_{(c)(a)(b)} + \gamma_{(a)(c)(b)} = 0 \quad (1.31)$$

Em uma conexão simétrica, podemos substituir as derivadas ordinárias em (1.29) pelas correspondentes derivadas covariantes ([6], p.38) e escrever

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = \gamma_{(a)(b)(c)} - \gamma_{(c)(b)(a)}. \quad (1.32)$$

onde uso foi feito da definição (1.24).

Das equações (1.31) e (1.32), segue que (1.28) está bem definida. ■

A proposição acima garante que, uma vez estabelecida a base de tetrades, toda a análise do espaço-tempo pode ser feita independentemente de um conhecimento prévio da conexão riemanniana.

Proposição 1.3 *As equações fundamentais do formalismo tétrede são:*

(i) *as relações de comutação*

$$[e_{(a)}, e_{(b)}] = \gamma_{(b)(a)}^{(c)} - \gamma_{(a)(b)}^{(c)}, \quad (1.33)$$

(ii) *a identidade de Ricci*

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)(c)(d)} = & -\gamma_{(a)(b)(c),(d)} + \gamma_{(a)(b)(d),(c)} \\ & + \gamma_{(b)(a)(f)} [\gamma_{(c)(d)}^{(f)} - \gamma_{(d)(c)}^{(f)}] + \gamma_{(f)(a)(c)} \gamma_{(b)(d)}^{(f)} - \gamma_{(f)(a)(d)} \gamma_{(b)(c)}^{(f)}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

(iii) *a identidade de Bianchi⁴*

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)[(c)(d)](f)} = & \frac{1}{6} \sum_{[(c)(d)(f)]} \{ R_{(a)(b)(c)(d),(f)} - \eta^{(n)(m)} [\gamma_{(n)(a)(f)} R_{(m)(b)(c)(d)} \\ & + \gamma_{(n)(b)(f)} R_{(a)(m)(c)(d)} + \gamma_{(n)(c)(f)} R_{(a)(b)(m)(d)} + \gamma_{(n)(d)(f)} R_{(a)(b)(c)(m)}] \}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Demonstração.

As identidades de Ricci,

$$R_{jkl}^i Z_i = Z_{j;k;l} - Z_{j;l;k}, \quad Z \in T_0^1(M), \quad (1.36)$$

e de Bianchi,

$$R_{ij[kl;m]} = \frac{1}{3} (R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;l}) = 0, \quad (1.37)$$

são identidades diferenciais obedecidas pelo tensor de curvatura em uma conexão riemanniana. As expressões (ii) e (iii) da proposição podem ser verificadas diretamente mediante a projeção sobre a base tétrede das identidades (1.36) e (1.37), respectivamente, e substituição das derivadas covariantes dos vetores da base pelos coeficientes de rotação, dados pela

⁴Agupar um conjunto de índices entre colchetes significa que a quantidade em questão está sob a ação do operador de anti-simetrização A: $AT(X_1, \dots, X_s) = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) T(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(s)})$.

equação (1.24). A expressão (i) resulta da ação do comutador⁵ sobre um campo escalar arbitrário, expressa em termos dos coeficientes de rotação. ■

Devido à anti-simetria dos coeficientes de rotação no primeiro par de índices, decorrente da expressão (1.30), segue que existem 24 coeficientes de rotação de Ricci. Além disso, pela forma como são construídas as equações da Proposição 1.4, conclui-se que existem 24 relações de comutação, 36 identidades de Ricci e 20 identidades de Bianchi independentes ([6], p.39).

Definição 1.11 *A base de Newman-Penrose (l, n, m, \bar{m}) consiste em uma base tétrade formada por vetores de tipo-luz, sendo dois reais (l, n) e dois conjugados-complexos⁶ (m, \bar{m}) , de forma que a matriz $\eta_{(a)(b)}$ é dada por*

$$\eta_{(a)(b)} = \eta^{(a)(b)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

Os vetores da base, considerados como derivadas direcionais, são denotados por símbolos especiais:

- a) $e_1 = e^2 = D$;
- b) $e_2 = e^1 = \bar{\Delta}$;
- c) $e_3 = -e^4 = \delta$; e
- d) $e_4 = -e^3 = \delta^*$.

(1.39)

⁵O comutador dos campos vetoriais X e Y é dado por $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$, para cada função f sobre a variedade.

⁶A base de Newman-Penrose resulta da parametrização complexa do cone de luz - conjunto de vetores de tipo-luz - em um ponto do Espaço de Minkowski, que dá origem ao conceito de *espinor*. Ela é induzida por uma base normalizada do espaço de espinores de ordem 1 (ou vetores-spin). Uma exposição completa do assunto pode ser encontrada em [19].

Os vários coeficientes de rotação de Ricci, agora denominados *coeficientes de spin*, são representados pelos símbolos:

$$\begin{aligned}\kappa &= \gamma_{311} & \lambda &= \gamma_{244} & \rho &= \gamma_{314} & \tau &= \gamma_{312} & \varepsilon &= \frac{1}{2}(\gamma_{211} + \gamma_{341}) & \alpha &= \frac{1}{2}(\gamma_{214} + \gamma_{344}) \\ \sigma &= \gamma_{313} & \nu &= \gamma_{242} & \mu &= \gamma_{243} & \pi &= \gamma_{241} & \gamma &= \frac{1}{2}(\gamma_{212} + \gamma_{342}) & \beta &= \frac{1}{2}(\gamma_{213} + \gamma_{343})\end{aligned}\quad (1.40)$$

Deve ficar claro que o conjugado-complexo de qualquer quantidade no formalismo de Newman-Penrose pode ser obtido pela substituição do índice 3, onde quer que ele ocorra, pelo índice 4, e vice-versa.

Decorre das simetrias do tensor de Riemann em uma conexão riemanniana numa variedade quadridimensional que os tensores de Weyl e Ricci possuem dez componentes independentes cada ([6], pp.42-43).

Definição 1.12 *No formalismo de Newman-Penrose, as dez componentes independentes do tensor de Weyl são representadas pelos cinco escalares complexos,*

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= -C_{1313} = -C_{pqrs}l^p m^q l^r m^s, \\ \Psi_1 &= -C_{1213} = -C_{pqrs}l^p n^q l^r m^s, \\ \Psi_2 &= -C_{1342} = -C_{pqrs}l^p m^q \bar{m}^r n^s, \\ \Psi_3 &= -C_{1242} = -C_{pqrs}l^p n^q \bar{m}^r n^s, \\ \Psi_4 &= -C_{2424} = -C_{pqrs}n^p \bar{m}^q n^r \bar{m}^s,\end{aligned}\quad (1.41)$$

denominados escalares de Weyl.

Definição 1.13 *No formalismo de Newman-Penrose, as dez componentes independentes do tensor de Ricci são representadas pelos quatro escalares reais e pelos três complexos:*

$$\begin{aligned}\Phi_{00} &= -\frac{1}{2}R_{11}, & \Phi_{22} &= -\frac{1}{2}R_{22}, & \Phi_{02} &= -\frac{1}{2}R_{33}, & \Phi_{20} &= -\frac{1}{2}R_{44}; \\ \Phi_{11} &= -\frac{1}{4}(R_{12} + R_{34}), & \Phi_{01} &= -\frac{1}{2}R_{13}, & \Phi_{12} &= -\frac{1}{2}R_{23}, \\ \Lambda &= \frac{1}{24}R = \frac{1}{12}(R_{12} - R_{34}), & \Phi_{10} &= -\frac{1}{2}R_{14}, & \Phi_{21} &= -\frac{1}{2}R_{24}.\end{aligned}\quad (1.42)$$

onde

$$R_{ab} = R_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu \quad (1.43)$$

e $R_{\mu\nu}$ é dado pela Definição 1.4. As quantidades acima são denominadas escalares de Ricci.

Definição 1.14 As Equações de Maxwell livres de fonte, as quais descrevem o campo eletromagnético, são

$$F_{[ij;k]} = 0 \quad e \quad g^{ik} F_{ij;k} = 0 \quad (1.44)$$

ou, em um referencial tétrade⁷,

$$F_{[(a)(b)|(c)]} = 0 \quad e \quad \eta^{(n)(m)} F_{(a)(n)|(m)} = 0, \quad (1.45)$$

onde F_{ij} denota o tensor de Maxwell.

Definição 1.15 No formalismo de Newman-Penrose, o tensor de Maxwell F_{ij} , anti-simétrico de tipo $(0, 2)$, é substituído pelos três escalares complexos

$$\begin{aligned} \phi_0 &= F_{13} = F_{ij} l^i m^j \\ \phi_1 &= \frac{1}{2}(F_{12} + F_{43}) = \frac{1}{2} F_{ij} (l^i n^j + \bar{m}^i m^j) \\ \phi_2 &= F_{42} = F_{ij} \bar{m}^i n^j \end{aligned} \quad (1.46)$$

denominados escalares de Maxwell.

Definição 1.16 Uma congruência de tipo-luz consiste numa família de curvas integrais de um campo vetorial l de tipo-luz. Quando as curvas são geodésicas de tipo-luz, diz-se que a congruência é geodésica (ou de raios).

Proposição 1.4 Os campos vetoriais l da base de Newman-Penrose num aberto U do espaço-tempo formam uma congruência de geodésicas de tipo-luz se, e somente se, $\kappa = 0$. Além disso, as geodésicas estarão parametrizadas por parâmetros afins se, e somente se, $Re(\varepsilon) = 0$.

Demonstração.

A demonstração que segue foi extraída da referência [6]. Da definição de coeficientes de rotação de Ricci na Proposição 1.1, segue que a variação infinitesimal sofrida pelo vetor da base $e_{(a)}$ na direção ξ é

$$\delta e_{(a)i} = e_{(a)i;j} \xi^j = e_i^{(b)} \gamma_{(b)(a)(c)} e_j^{(c)} \xi^j = -\gamma_{(a)(b)(c)} e_i^{(b)} \xi^{(c)}, \quad (1.47)$$

⁷As equações (1.45) podem ser verificadas a partir da projeção sobre a base tétrade das equações (1.44) e substituição das derivadas covariantes dos vetores da base pelos coeficientes de rotação (1.24).

em que foi feito uso da anti-simetria dos coeficientes $\gamma_{(a)(b)(c)}$ no primeiro par de índices.

Portanto, a mudança $\delta \mathbf{e}_{(a)}(c)$ em $\mathbf{e}_{(a)}$, por unidade de deslocamento ao longo da direção c , é dada por

$$\delta \mathbf{e}_{(a)}(c) = -\gamma_{(a)(b)(c)} \mathbf{e}^{(b)}. \quad (1.48)$$

Em particular, para a mudança em \mathbf{l} , por unidade de deslocamento ao longo de \mathbf{l} , nós temos

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{l}(1) &= -\gamma_{1(b)1} \mathbf{e}^{(b)} \\ &= -\gamma_{121} \mathbf{e}^{(2)} - \gamma_{131} \mathbf{e}^{(3)} - \gamma_{141} \mathbf{e}^{(4)} \\ &= -\gamma_{121} \mathbf{l} + \gamma_{131} \bar{\mathbf{m}} + \gamma_{141} \mathbf{m} \end{aligned} \quad (1.49)$$

Utilizando-se os resultados (1.40), obtém-se

$$l_{i;j} l^j = (\varepsilon + \varepsilon^*) l_i - \kappa \bar{m}_i - \kappa^* m_i. \quad (1.50)$$

As afirmações da proposição decorrem da comparação entre (1.50) e a equação da geodésica

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} + \Gamma_{lk}^j \frac{dx^l}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad (1.51)$$

com $l^j = \frac{dx^j}{dt}$. ■

Pela Definição 1.11, tem-se que l é o vetor tangente a um raio de luz N e m é um vetor complexo ortogonal a l , de modo que em um ponto $p \in N$, a parte real de m gera com l um plano. Considerando um círculo nesse plano e seguindo os raios da congruência l que interceptam o círculo, na direção-futuro (parâmetro crescente), observa-se possível contração (ou expansão), rotação e distorção do círculo (em uma elipse). A contração (ou expansão), a rotação e a distorção são medidas, respectivamente, por $-Re(\rho)$, $Im(\rho)$ e σ ([6], pp. 56-58). Além disso, $\kappa = 0$ implica que os raios da congruência são geodésicas, como demonstrado na Proposição 1.5.

Dentre as congruências do vetor l , aquelas responsáveis por uma maior simplificação das quantidades e equações fundamentais são as *congruências geodésicas sem distorção*, para as quais $\kappa = \sigma = 0$. Se, além disso, as congruências de n também forem geodésicas e sem distorção, obtemos $\lambda = \nu = 0$; nesse caso, o único escalar de Weyl não nulo será Ψ_2 (Esses resultados decorrem do Teorema de Goldberg-Sachs; [6], pp.62-63). O principal problema do formalismo de Newman-Penrose está em se encontrar uma base para a qual as congruências

de l e n sejam geodésicas sem distorção.

O formalismo tétrade foi desenvolvido por Cartan e é equivalente ao formalismo tensorial da geometria riemanniana, mas enquanto esse último concentra as propriedades do espaço-tempo nas componentes do tensor métrico, a abordagem tétrade focaliza a análise na geometria dos vetores da base, através dos coeficientes de rotação. Dessa forma, pode-se explorar as simetrias presentes em certo espaço-tempo e escolher bases tétrades que se adaptem ao problema.

Outro conceito introduzido por Cartan, e desenvolvido por Penrose, é o de *espinor*[19], o qual surge no processo de parametrização complexa do cone de luz, definido como o conjunto de vetores de tipo-luz em um ponto do Espaço de Minkowski. *Nesse sentido, uma base de Newman-Penrose corresponde à utilização das congruências de raios de luz como referenciais.*

O formalismo de Newman-Penrose foi construído de modo a descrever o espaço-tempo por meio da geometria (coeficientes de spin) dos cones de luz. Isso decorre da forte crença de Roger Penrose de que o elemento essencial de um espaço-tempo é sua estrutura de cone de luz. Além do caráter algébrico que a teoria adquire, com a possível classificação dos espaços-tempo de acordo com a forma do tensor de Weyl ([6], pp.58-62), é nas soluções representativas dos buracos negros e inclusive wormholes que a estrutura do cone de luz se mostra mais efetiva. Nos capítulos seguintes, a adaptabilidade do formalismo de Newman-Penrose às soluções de wormholes se tornará evidente, na medida em que permitirá o estudo das perturbações dos mesmos através da separabilidade, e consequente resolução, das equações fundamentais da teoria.

1.3 Modos Quase-Normais

Uma perturbação genérica de um sistema oscilante fechado tem sua evolução governada pela superposição de *modos normais*

$$R(r)S(\theta)e^{i(\omega t + m\varphi)}, \quad (1.52)$$

em que a parte angular $S(\theta)$ satisfaz equações dependentes da geometria e do campo de ondas, enquanto que a parte radial $R(r)$ obedece a uma equação de onda

$$\Lambda^2 Z^{(s)} = V Z^{(s)} \quad \left(\Lambda^2 = \frac{d^2}{dt^{*2}} + \omega^2 \right) \quad (1.53)$$

onde $Z = Z(R(r), \omega)$ e as frequências ω (reais e positivas) obedecem às seguintes condições de contorno[26]

$$\begin{aligned} Z(l^*) &= Ae^{i\omega l^*} + Be^{-i\omega l^*}, \quad l^* \rightarrow +\infty \\ Z(l^*) &= Ce^{i\omega l^*}, \quad l^* \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (1.54)$$

Tais condições de fronteira correspondem a uma onda *incidente* e outra *refletida* em um lado da barreira de potencial V e a uma onda *transmitida* do outro lado⁸.

Como foi dito anteriormente, um wormhole precisa ser visto como uma membrana infinita, e assim, ele deve ser tratado como um sistema aberto. A consequência desse raciocínio é a de que as ondas emitidas por um wormhole aparecerão como oscilações amortecidas; este amortecimento é melhor expresso pela parte imaginária de uma frequência complexa. Também se faz importante procurar por radiação que carregue “impressões gravitacionais” do objeto astronômico sob estudo. Por essas razões a definição de modos quase-normais é a que segue.

Definição 1.17 *Modos quase-normais são as soluções $Z(l_*, \omega)$ das equações de perturbação correspondentes a frequências complexas ω e satisfazendo as condições de fronteira*

$$\begin{aligned} Z &\longrightarrow B(\omega)e^{-i\omega l_*} \quad (l_* \rightarrow +\infty), \\ &\longrightarrow C(\omega)e^{+i\omega l_*} \quad (l_* \rightarrow -\infty), \end{aligned} \quad (1.55)$$

onde a distância de luminosidade l_* será definida em termos da coordenada radial r futuramente, de acordo com o caso estudado.

Por comparação com (1.54), conclui-se que (1.55) aponta para uma onda de *incidência zero* sendo puramente refletida no infinito e puramente absorvida na garganta do wormhole (ou no horizonte do buraco negro). A razão entre as intensidades da onda refletida e da onda incidente denomina-se *coeficiente de reflexão* \mathbb{R} . Da mesma forma, define-se o *coeficiente de transmissão* \mathbb{T} a partir das intensidades da onda transmitida e da onda incidente. A lei de conservação de energia é expressa por

$$\mathbb{R} + \mathbb{T} = 1. \quad (1.56)$$

⁸No Capítulo 3, será estudado o caso de uma barreira de potencial unidimensional quadrada; em casos como esse, o lado não é importante já que o potencial é uma função par.

O processo para se encontrar as frequências de MQN dos wormholes a serem estudados seguirá a propriedade de que os modos quase-normais podem ser vistos como ressonâncias da amplitude de reflexão no plano complexo. Esta asserção baseia-se na seguinte proposição.

Proposição 1.5 *Sejam $\mathbb{R}(\omega)$ e $\mathbb{T}(\omega)$ os coeficientes de reflexão e transmissão de uma onda (gravitacional ou eletromagnética) incidente num wormhole. Então os MQN correspondem aos pólos da extensão analítica de $\mathbb{R}(\omega)$ ao plano das frequências complexas tais que $\text{Re}(\omega) \neq 0$ e $\frac{\mathbb{T}(\omega)}{\mathbb{R}(\omega)}$ é regular (e não-nulo).*

Demonstração.

No caso real, a definição (1.54) fornece, para as soluções da equação de onda (1.53),

$$\mathbb{R}(\omega) = \frac{|A(\omega)|^2}{|C(\omega)|^2} = \frac{(\frac{\Gamma}{2})^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2}, \quad (1.57)$$

que consiste na resposta apropriada a uma ressonância em um oscilador harmônico amortecido, onde ω_0 corresponde à frequência de ressonância e $\frac{\Gamma}{2}$ determina a taxa de amortecimento do oscilador [27]. Estendendo a função $\mathbb{R}(\omega)$ ao plano das frequências complexas, obtém-se

$$\frac{A(\omega)}{C(\omega)} = \frac{\frac{\Gamma}{2}}{\omega - \omega_0 + i\frac{\Gamma}{2}}. \quad (1.58)$$

Impondo as condições de fronteira (1.55) à expressão (1.58), segue o resultado. Os vínculos, $\text{Re}(\omega) \neq 0$ e $\frac{\mathbb{T}(\omega)}{\mathbb{R}(\omega)}$ regular não-nulo, servem para assegurar o cumprimento das condições de fronteira [28]. ■

A teoria da perturbação que será desenvolvida nos capítulos seguintes fornecerá como resultado final uma equação do tipo (1.53). Tal procedimento será generalizado para englobar frequências complexas ao espectro de radiação dos wormholes. Esse problema foi inicialmente proposto por Vishweshwara [32] no contexto da análise da estabilidade dos espaços-tempo gerados por buracos negros. Atualmente, o estudo de certas soluções para frequências complexas, os *modos quase-normais*, é de grande importância em Astrofísica na tentativa de se detectar diretamente a presença de buracos negros e wormholes no universo. Isso se deve ao fato de que os modos quase-normais são definidos de forma a representar radiação gravitacional que independe do processo de perturbação, ou seja, depende exclusivamente das características que definem a geometria do objeto astronômico.

Capítulo 2

WORMHOLE ULTRAESTÁTICO

Dentre todas as geometrias de wormhole encontradas na literatura, indubitavelmente a mais estudada é aquela correspondente ao *wormhole ultraestático*, o qual corresponde ao caso mais simples desse tipo de estrutura. O wormhole ultraestático apresenta duas características importantes, a saber: forças de maré nulas, o que permite transitabilidade através da garganta, e uma função de forma previamente escolhida de modo a se obter uma relação simples entre a coordenada radial e a distância de luminosidade. Neste capítulo, o formalismo de Newman-Penrose será usado para se analisar as perturbações gravitacionais na geometria de um wormhole ultraestático. A propagação de campos gravitacionais será estudada mostrando-se que a parte radial das perturbações pode ser expressa em termos de uma equação de Schrödinger unidimensional. A exposição que segue é uma discussão aprimorada do artigo de Claudia Moreno e Ricardo García-Salcedo [15].

2.1 Descrição do Espaço-Tempo

Uma solução das Equações de Einstein representativa de um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico possuindo duas regiões assintoticamente planas é um wormhole Lorentziano, cuja métrica tem a forma

$$ds^2 = e^{2\Phi(r)} dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.1)$$

onde, como vimos, $\Phi(r)$ é usualmente chamada *função desvio para o vermelho*, porque está relacionada com o processo gravitacional do desvio para o vermelho. A função $b(r)$ está relacionada à forma do wormhole por meio de diagramas de mergulho. Elas satisfazem as condições: i) $r \rightarrow \infty, \frac{b(r)}{r} \rightarrow 0$; ii) $r \rightarrow \infty, \Phi(r) \rightarrow 0$; iii) $\Phi(r)$ é sempre finita. A coordenada radial tem um alcance que aumenta de um valor mínimo em r_0 (em que $b(r_0) = r_0$), correspondente à garganta do wormhole, até o infinito. Na medida em que $r \rightarrow \infty$, $b(r)$ se aproxima de $2M$ que é definida como a massa do wormhole.

As Equações de Einstein implicam que tal métrica existe se e somente se a densidade de energia e a pressão radial no referencial de um observador estático¹ satisfazem a relação $\rho + p < 0$ (ρ denota a densidade de energia e p denota a pressão radial), correspondente à lei de conservação WEC [5].

A fim de manter as forças de maré nulas é suficiente impor $\Phi(r) = 0$ [4]. Neste caso, tomamos uma função de forma particular que satisfaz os requisitos de wormhole $b(r) = \frac{r_0^2}{r}$, onde r_0 é uma constante. Portanto, a métrica que iremos analisar é a seguinte

$$ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0^2}{r^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.2)$$

A *distância radial própria* ou *distância de luminosidade* é definida por

$$l(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}}. \quad (2.3)$$

A métrica (2.2) pode ser escrita em termos da distância radial própria como

$$ds^2 = dt^2 - dl^2 - r^2(l)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.4)$$

¹Para uma definição rigorosa de observador estático, consultar a referência [18].

onde $r^2(l) = l^2 + r_0^2$. A distância própria decresce de $l = +\infty$ no universo superior, a $l = 0$ na garganta, e então de zero a $l = -\infty$ no universo inferior.

Para uma descrição da solução de wormhole (2.4) no formalismo de Newman-Penrose, a métrica é descrita por [6]

$$g_{\mu\nu} = 2[l_{(\mu}n_{\nu)} - m_{\mu}\bar{m}_{\nu)}], \quad (2.5)$$

onde a barra denota conjugação complexa e os parênteses indicam simetrização. A tétrade de tipo-luz l , n , m e \bar{m} está determinada pela Definição 1.11 do Capítulo 1.

Assim, precisamos primeiro definir uma tétrade de tipo-luz [19] de acordo com a métrica de wormhole, a qual é satisfeita por

$$\begin{aligned} l^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0), \\ n^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0), \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(l^2 + r_0^2)^{\frac{1}{2}}}(0, 0, 1, i \csc \theta), \\ \bar{m}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(l^2 + r_0^2)^{\frac{1}{2}}}(0, 0, 1, -i \csc \theta), \end{aligned} \quad (2.6)$$

ou, equivalentemente, podemos definir os seguintes campos vetoriais, também chamados derivadas direcionais,

$$\begin{aligned} D = l^\mu \partial_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_t + \partial_l), \\ \Delta = n^\mu \partial_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_t - \partial_l), \\ \delta = m^\mu \partial_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(l^2 + r_0^2)^{\frac{1}{2}}}(\partial_\theta + i \csc \theta \partial_\varphi), \\ \bar{\delta} = \bar{m}^\mu \partial_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(l^2 + r_0^2)^{\frac{1}{2}}}(\partial_\theta - i \csc \theta \partial_\varphi). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Fazendo uso das equações (2.4), (2.5) e (2.6), podemos obter os escalares de Weyl através da Definição 1.12 do Capítulo 1. O único escalar de Weyl não nulo no espaço-tempo original é

$$\Psi_2 = -\frac{r_0^2}{3(l^2 + r_0^2)^2}, \quad (2.8)$$

o que significa que a solução de wormhole (2.2) é de tipo D na classificação de Petrov [6], ou seja, possui o mesmo caráter que as soluções de buracos negros [10].

Na métrica de wormhole, os coeficientes de spin associados a essa geometria são dados por

$$\begin{aligned}\nu &= \sigma = \kappa = \lambda = \epsilon = \gamma = \tau = \pi = 0, \\ \rho &= \mu = -\frac{l}{\sqrt{2}(l^2 + r_0^2)}, \\ \beta &= -\alpha = \frac{\cot \theta}{2\sqrt{2}(l^2 + r_0^2)^{\frac{1}{2}}},\end{aligned}\tag{2.9}$$

em que foi feito uso das equações (1.28), (1.29), (1.40) e (2.6).

Os únicos escalares de Ricci não nulos são determinados com o auxílio da Definição 1.13 aplicada à base de Newman-Penrose (2.6):

$$\begin{aligned}\Phi_{00} &= -\frac{r_0^2}{2(l^2 + r_0^2)^2}, \\ \Phi_{11} &= \frac{r_0^2}{2(l^2 + r_0^2)^2}, \\ \Phi_{22} &= -\frac{r_0^2}{2(l^2 + r_0^2)^2}, \\ \Lambda &= -\frac{r_0^2}{12(l^2 + r_0^2)^2}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Assim encerramos a descrição do espaço-tempo de wormhole (2.2) no formalismo de Newman-Penrose. Na próxima seção, iremos usar as Equações de Einstein perturbadas a fim de obter a Equação de Teukolsky que permite analisar a estabilidade da solução de wormhole através de uma equação radial e de seu potencial.

2.2 Perturbações Gravitacionais

No formalismo de Newman-Penrose há seis equações - quatro identidades de Bianchi e duas identidades de Ricci (ver Proposição 1.4) - as quais são lineares e homogêneas nas quantidades que se anulam identicamente no espaço-tempo não perturbado. São elas:

$$\begin{aligned}(\bar{\delta} - 4\alpha + \pi)\Psi_0 - (D - 2\epsilon - 4\rho)\Psi_1 - (3\Psi_2 - 2\Phi_{11})\kappa = \\ = (\delta + \bar{\pi} - 2\bar{\alpha} - 2\beta)\Phi_{00} - (D - 2\epsilon - 2\bar{\rho})\Phi_{01} - \bar{\kappa}\Phi_{02} + 2\sigma\Phi_{10},\end{aligned}\tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
& (\Delta - 4\gamma + \mu)\Psi_0 - (\delta - 2\beta - 4\tau)\Psi_1 - (3\Psi_2 + 2\Phi_{11})\sigma = \\
& = (\delta + 2\bar{\pi} - 2\beta)\Phi_{01} - (D - \bar{\rho} - 2\epsilon + 2\bar{\epsilon})\Phi_{02} - 2\kappa\Phi_{12} - \bar{\lambda}\Phi_{00},
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
& (D + 4\epsilon - \rho)\Psi_4 - (\bar{\delta} + 4\pi + 2\alpha)\Psi_3 + (3\Psi_2 + 2\Phi_{11})\lambda = \\
& = (\bar{\delta} + 2\alpha - 2\bar{\tau})\Phi_{21} - (\Delta + \bar{\mu} + 2\gamma - 2\bar{\gamma})\Phi_{20} + 2\nu\Phi_{10} + \bar{\sigma}\Phi_{22},
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta + 4\beta - \tau)\Psi_4 - (\Delta + 4\mu + 2\gamma)\Psi_3 + (3\Psi_2 - 2\Phi_{11})\nu = \\
& = (\bar{\delta} - \bar{\tau} + 2\alpha + 2\bar{\beta})\Phi_{22} - (\Delta + 2\bar{\mu} + 2\gamma)\Phi_{21} - \bar{\nu}\Phi_{20} - 2\lambda\Phi_{12},
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\Psi_0 + (\delta - 3\beta - \bar{\alpha} - \tau + \bar{\pi})\kappa - (D - 3\epsilon + \bar{\epsilon} - \rho - \bar{\rho})\sigma = 0, \tag{2.15}$$

$$\Psi_4 + (\Delta + \mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma})\lambda - (\bar{\delta} + 3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau})\nu = 0. \tag{2.16}$$

Essas equações estão linearizadas no sentido de que os escalares de Weyl Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_3 , Ψ_4 e os coeficientes de spin κ , σ , λ , ν como perturbações, são tomados somente em primeira ordem. Chegaremos a equações que dizem respeito a Ψ_0 e Ψ_4 somente, pois estes são os componentes mais significantes na radiação gravitacional, conforme afirma Teukolsky [17].

Como a métrica de wormhole ultraestático é de tipo D, então as quantidades não-perturbadas Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_3 , Ψ_4 , κ , σ , λ e ν se anulam, de modo que temos das equações (2.11)-(2.16),

$$\begin{aligned}
& (\bar{\delta} - 4\alpha)\Psi_0^B - (D - 4\rho)\Psi_1^B - (3\Psi_2 - 2\Phi_{11})\kappa^B = \\
& = -(D - 2\bar{\rho})\Phi_{01}^B + (\delta - 2\bar{\alpha} - 2\beta)\Phi_{00}^B + (\delta - 2\bar{\alpha} - 2\beta)^B\Phi_{00},
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
& (\Delta + \mu)\Psi_0^B - (\delta - 2\beta)\Psi_1^B - (3\Psi_2 + 2\Phi_{11})\sigma^B = \\
& = (\delta - 2\beta)\Phi_{01}^B - (D - \bar{\rho})\Phi_{02}^B - \bar{\lambda}^B\Phi_{00},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{\delta} + 2\alpha)\Psi_3^B - (D - \rho)\Psi_4^B - (3\Psi_2 + 2\Phi_{11})\lambda^B = \\
= (\Delta + \bar{\mu})\Phi_{20}^B - (\bar{\delta} + 2\alpha)\Phi_{21}^B - \bar{\sigma}^B\Phi_{22},
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta + 4\mu)\Psi_3^B - (\delta + 4\beta)\Psi_4^B - (3\Psi_2 - 2\Phi_{11})\nu^B = \\
= (\Delta + 2\bar{\mu})\Phi_{21}^B - (\bar{\delta} + 2\alpha + 2\bar{\beta})\Phi_{22}^B - (\bar{\delta} + 2\alpha + 2\bar{\beta})^B\Phi_{22}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Nas equações acima usou-se (2.9); o sobrescrito B denota quantidades perturbadas.

A perturbação das equações de Ricci (2.15) e (2.16) resulta em

$$(D - 4\rho - \bar{\rho})\Psi_2\sigma^B - (\delta - 3\beta - \bar{\alpha})\Psi_2\kappa^B - \Psi_0^B\Psi_2 = [2\rho\Phi_{11} - (\Delta + \bar{\mu})\Phi_{00} - 2D\Lambda]\sigma^B \tag{2.21}$$

e

$$(\bar{\delta} + 3\alpha + \bar{\beta})\Psi_2\nu^B - (\Delta + 4\mu + \bar{\mu})\Psi_2\lambda^B - \Psi_4^B\Psi_2 = [2\mu\Phi_{11} + (D - \bar{\rho})\Phi_{22} + 2\Delta\Lambda]\lambda^B, \tag{2.22}$$

onde foram usadas as equações (321(b)) e (321(g)) de [6].

Operamos $(\delta - 3\beta - \bar{\alpha})$ na equação (2.17) e $(D - 4\rho - \bar{\rho})$ na equação (2.18), e subtraímos uma equação da outra. Finalmente, usamos a relação (2.21), e a identidade

$$[(D - 4\rho - \bar{\rho})(\delta - 2\beta) - (\delta - 3\beta + \bar{\alpha})(D - 4\rho)] = 0 \tag{2.23}$$

a fim de anular os termos em Ψ_1^B , obtendo a Equação de Teukolsky para Ψ_0^B :

$$[(D - 4\rho - \bar{\rho})(\Delta - 4\gamma + \mu) - (\delta - 3\beta - \bar{\alpha})(\bar{\delta} - 4\alpha) - 3\Psi_2]\Psi_0^B = T_0 + T_{0a}, \tag{2.24}$$

onde

$$\begin{aligned}
T_0 &= (\delta - 3\beta - \bar{\alpha})[(D - 2\bar{\rho})\Phi_{01}^B - (\delta - 2\bar{\alpha} - 2\beta)\Phi_{00}^B] + \\
&+ (D - 4\rho - \bar{\rho})[(\delta - 2\beta)\Phi_{01}^B - (D - \bar{\rho})\Phi_{02}^B],
\end{aligned} \tag{2.25}$$

e o termo extra

$$\begin{aligned} T_{0a} &= [2(D - \rho - \bar{\rho})\Phi_{11} - 3(\Delta + \bar{\mu})\Phi_{00} - 6D\Lambda]\sigma^B + [2(\delta - 3\beta - \bar{\alpha})\Phi_{11}]\kappa^B - \\ &- [(D - 4\rho - \bar{\rho})\Phi_{00}]\bar{\lambda}^B - (\delta - 3\beta - \bar{\alpha})(\delta - 2\bar{\alpha} - 2\beta)^B\Phi_{00}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

representa a fonte quando o operador diferencial perturbado δ e os coeficientes de spin perturbados σ , κ , λ , α , β são não nulos.

À semelhança de Ψ_0^B , obtemos a Equação de Teukolsky para Ψ_4^B usando a relação (2.22) e a identidade

$$[(\Delta + 4\mu + \bar{\mu})(\bar{\delta} + 2\alpha) - (\bar{\delta} + \bar{\beta} + 3\alpha)(\Delta + 4\mu)] = 0 \quad (2.27)$$

a fim de eliminar Ψ_3^B , resultando em

$$[(\Delta + 4\mu + \bar{\mu})(D - \rho) - (\bar{\delta} + \bar{\beta} + 3\alpha)(\delta + 4\beta) + 3\Psi_2]\Psi_4^B = T_4 + T_{4a}, \quad (2.28)$$

onde

$$\begin{aligned} T_4 &= (\bar{\delta} + \bar{\beta} + 3\alpha)[(\Delta - 2\mu)\Phi_{21}^B - (\bar{\delta} + 2\alpha + 2\bar{\beta})\Phi_{22}^B] + \\ &+ (\Delta + 4\mu + \bar{\mu})[(\bar{\delta} - 2\alpha)\Phi_{21}^B - (\Delta - \mu)\Phi_{20}^B], \end{aligned} \quad (2.29)$$

e o termo extra

$$\begin{aligned} T_{4a} &= [3(\Delta - \rho)\Phi_{22} - 2(\Delta + \mu + \bar{\mu})\Phi_{11} + 6\Delta\Lambda]\lambda^B - 2(\bar{\delta} + \bar{\beta} + 3\alpha)\Phi_{11}\nu^B + \\ &+ (\Delta + 4\mu + \bar{\mu})\Phi_{22}\bar{\sigma}^B - (\bar{\delta} + \bar{\beta} + 3\alpha)(\delta + 2\alpha + 2\bar{\beta})^B\Phi_{22}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

representa a fonte quando o operador diferencial perturbado δ e os coeficientes de spin perturbados λ , ν , σ , α , β são não nulos.

Note que as projeções não nulas são funções de r e t somente. Assim, substituindo as projeções no lado direito das equações (2.24) e (2.28), os únicos termos de Ricci que restam são Φ_{00} , Φ_{11} e Φ_{22} . Contudo, esses operadores são agora operadores puramente angulares, e como as projeções são funções de (t, r) , o resultado é zero. As expressões para T_0 e T_4 se anulam. Do mesmo modo, pode-se mostrar [15] que as expressões para T_{0a} e T_{4a} são também zero. Desta maneira, concluímos que poeira penetrando radialmente no wormhole não produz perturbações nos escalares de Weyl perturbados Ψ_0^B e Ψ_4^B .

Atuando sobre $\rho^{-4}\Psi_4^B$ e usando as relações de comutação entre as derivadas direcionais, e a ação desses operadores sobre os coeficientes de spin, as equações de perturbação para

$\psi_G^{(0)} = \Psi_0^B$ e $\psi_G^{(4)} = \rho^{-4}\Psi_4^B$ podem ser escritas como uma única *equação mestre*

$$\{\Delta D - \bar{\delta}\delta + \mu D - (2s+1)\mu\Delta - (2s+1)\bar{\beta}\delta + 2s\beta\bar{\delta} - s(2s+1)\Psi_2 + 2s(\bar{\delta}\beta) + 4s(s+1)\beta\bar{\beta} + 2(2s+1)\Lambda\}\psi_G^{(2s)} = 0. \quad (2.31)$$

Fazendo a substituição

$$\psi_G^{(0)} = e^{-i\omega t} Y_{(-2)jm}(\theta, \varphi) X^{(0)}(l) \quad (2.32)$$

e

$$\psi_G^{(4)} = e^{-i\omega t} Y_{(2)jm}(\theta, \varphi) X^{(4)}(l), \quad (2.33)$$

substituindo os valores para as derivadas direcionais (2.7), para o escalar de Weyl (2.8) e para os coeficientes de spin (2.9) na equação (2.31), concluímos que as funções $X^{(0)}(l)$ e $X^{(4)}(l)$ precisam obedecer à equação radial de Schrödinger dada por

$$\left(\Lambda^2 + \frac{2i\omega l s}{l^2 + r_0^2} - \frac{(2l^2 + 4r_0^2)}{(l^2 + r_0^2)^2} - \frac{(j+2)(j-1)}{l^2 + r_0^2} \right) Z^{(2s)}(l) = 0, \quad (2.34)$$

onde usamos as definições

$$\begin{aligned} \Lambda_{\pm} &= \frac{d}{dl} \pm i\omega, \\ \Lambda^2 &= \Lambda_+ \Lambda_- = \frac{d^2}{dl^2} + \omega^2, \\ X^{(2s)}(l) &= Z^{(2s)}(l)(l^2 + r_0^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

A equação (2.34), juntamente com as equações (2.32) e (2.33), fornece a expressão para as perturbações gravitacionais na geometria do wormhole ultraestático (2.2). Perceba que encontrar uma expressão analítica para a solução de (2.34) não é tarefa fácil, pois o potencial está acoplado com a frequência de uma maneira não trivial. Na verdade, tal potencial se assemelha ao potencial do buraco negro de Kerr [10], semelhança essa marcada pela presença do termo em $i\omega$, e até hoje não foi possível achar solução analítica para as perturbações gravitacionais do buraco negro de Kerr. Portanto, conclui-se do desenvolvimento apresentado nesse capítulo que a determinação de soluções exatas para MQN de wormholes deve ser tão ou mais difícil que resolver o mesmo problema para buracos negros, já que o mais simples dos wormholes apresenta potenciais com elevada complexidade. O ponto a favor do estudo de wormholes é que eles são objetos exóticos e, portanto, temos certo grau de liberdade para criarmos novas geometrias a serem estudadas. No próximo capítulo, vamos efetuar o mesmo

estudo feito aqui para um wormhole de Morris-Thorne genérico tentando com isso encontrar alguma geometria que desacople a frequência do potencial de uma maneira elementar.

Capítulo 3

WORMHOLES DE MORRIS-THORNE

Neste capítulo, estendemos o desenvolvimento feito no capítulo anterior a uma geometria de wormhole de Morris-Thorne genérica. Inicialmente, iremos apresentar as principais características de um wormhole de Morris-Thorne, em particular a não conservação da energia, e após, partiremos para a descrição desse espaço-tempo no formalismo de Newman-Penrose, explicitando uma base bem como os coeficientes de spin e escalares de Ricci e Weyl derivados dela. Em seguida, essas quantidades serão perturbadas e obteremos as Equações de Teukolsky à semelhança do que foi feito para o wormhole ultraestático. Uma equação de onda de tipo Schrödinger será então obtida para a parte radial da radiação gravitacional e emergirá uma geometria capaz de desacoplar frequência e potencial de uma forma natural, proporcionando uma solução exata para as frequências de modos quase-normais a menos de uma equação transcendental.

3.1 Descrição do Espaço-Tempo

Relembrando o que foi visto no Capítulo 1, o wormhole de Morris-Thorne consiste numa classe de wormholes estáticos e esfericamente simétricos, governada por dois parâmetros, a saber:

- Função de desvio para o vermelho $\Phi = \Phi(r)$, a qual está relacionada com as forças de maré na garganta do wormhole; e
- Função de forma $b = b(r)$, que está associada ao formato do wormhole e à densidade de energia da matéria que suporta o wormhole.

A métrica de um wormhole de Morris-Thorne genérico possui a forma

$$ds^2 = -e^{2\phi} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (3.1)$$

3.1.1 Matéria Exótica

Para wormholes estáticos com simetria esférica, resultam as equações da referência [4] para os valores da densidade e da tensão radial da matéria que suporta cada wormhole. A densidade é

$$\rho = \frac{b'}{8\pi r^2} \quad (3.2)$$

e a tensão radial é

$$\tau = \frac{b - 2r(r - b)\phi'}{8\pi r^3}, \quad (3.3)$$

revelando que b' está diretamente conectado com a densidade do material e ϕ' com sua tensão radial. Como $b' < 0$ porque a matéria precisa se anular a uma certa distância da garganta, não é difícil ver que a equação (3.2) aponta para uma energia negativa, e assim, para a violação das condições de energia. Essa propriedade do tensor energia-momento está presente em praticamente todos os wormholes estudados na literatura e ganhou interpretação física de uma *matéria exótica* presente na garganta, formando e mantendo o wormhole. A matéria exótica, até onde se sabe, é um mero artifício de imaginação de modo que se supõe que ela não interage com nenhum tipo de matéria ordinária não sendo passível de detecção. No entanto, a presença de um wormhole na Natureza seria uma confirmação de sua existência.

Quanto às forças de maré, sabe-se que elas precisam obedecer ao seguinte vínculo a fim de

permitir viagem humana (para mais detalhes sobre os cálculos, ver [4])¹:

$$|R_{2\bar{1}2\bar{1}}| = \left| \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(-\phi'' + \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\phi' - \phi'^2\right) \right| \leq \frac{g}{\xi} \cong 4,9 \quad (3.4)$$

Da expressão acima, segue que a condição $\Phi = 0$ proporciona forças de maré nulas na garganta do wormhole. Veremos mais adiante que wormholes com essa condição não permitem uma solução analítica simples da equação radial da perturbação gravitacional.

3.1.2 Cones de Luz

Como vimos, a distância radial própria é definida por

$$\frac{dr}{dl} = \sqrt{\left(1 - \frac{b}{r}\right)} \implies l(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\left(1 - \frac{b}{r}\right)}}. \quad (3.5)$$

de modo que ela decresce de $l = +\infty$ no universo superior, para $l = 0$ na garganta, e então de zero para $-\infty$ no universo inferior. Esta distância precisa ser bem comportada ao longo de todo o espaço-tempo e representa uma “distância de luminosidade”, a distância real medida por um observador estático ao longo do caminho da viagem. Nessa nova coordenada, a métrica (3.1) se torna

$$ds^2 = e^{2\phi} dt^2 - dl^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (3.6)$$

onde a troca de assinatura da métrica foi feita para efeito de comparações com resultados da literatura.

Para a métrica acima, as componentes do tensor de energia-momento T_{ij} no “referencial geométrico” (via isomorfismo)

$$e_t = dt \quad e_r = dr \quad e_\theta = d\theta \quad e_\varphi = d\varphi. \quad (3.7)$$

são dadas por

$$T_{ij} = \frac{1}{8\pi} \left(R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \right), \quad (3.8)$$

em que as componentes da métrica g_{ij} estão explicitadas em (3.6), e R_{ij} e R são como na

¹Nesta expressão, $g = 9,8m/s^2$ é a “aceleração da gravidade da Terra” e $\xi = 2m$ é a altura aproximada de um astronauta.

Definição 1.4.

Efetutando-se a transformação (3.5), o referencial ortonormal de um observador estático, isto é, a tétrade de Cartan para (3.6), se reduz a

$$\begin{aligned}
 e_{(1)}^i &= e^{-\phi} e_t & e_{(1)i} &= e^{\phi} e_t \\
 e_{(2)}^i &= e_l & e_{(2)i} &= -e_l \\
 e_{(3)}^i &= \frac{1}{r} e_{\theta} & e_{(3)i} &= -r e_{\theta} \\
 e_{(4)}^i &= \frac{\csc \theta}{r} e_{\varphi} & e_{(4)i} &= -r \sin \theta e_{\varphi}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$e_{(a)}^i e_{(b)i} = -\mu_{(a)(b)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Para uma descrição da solução de espaço-tempo de wormhole (3.6) no formalismo de Newman-Penrose se faz necessário usar as relações [21]

$$\begin{aligned}
 l = e_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[e_{(1)} + e_{(2)}] & n = e_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[e_{(1)} - e_{(2)}] \\
 m = e_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[e_{(3)} + ie_{(4)}] & \bar{m} = e_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[e_{(3)} - ie_{(4)}],
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde a barra denota conjugação complexa. Esta relação corresponde a uma parametrização complexa do cone de luz e que fornece a seguinte base tétrade fundamental, a qual será usada

de agora em diante:

$$\begin{aligned}
 l_i &= \left(\frac{e^\phi}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right) & l^i &= \left(\frac{e^{-\phi}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right) \\
 n_i &= \left(\frac{e^\phi}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right) & n^i &= \left(\frac{e^{-\phi}}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right) \\
 m_i &= \left(0, 0, \frac{-r}{\sqrt{2}}, \frac{-ir \sin \theta}{\sqrt{2}} \right) & m^i &= \left(0, 0, \frac{1}{r\sqrt{2}}, \frac{i \csc \theta}{r\sqrt{2}} \right) \\
 \bar{m}_i &= \left(0, 0, \frac{-r}{\sqrt{2}}, \frac{ir \sin \theta}{\sqrt{2}} \right) & \bar{m}^i &= \left(0, 0, \frac{1}{r\sqrt{2}}, \frac{-i \csc \theta}{r\sqrt{2}} \right)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$e_a^i e_{bi} = \eta_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \eta^{ab}$$

As derivadas direcionais correspondentes são

$$\begin{aligned}
 D &= l^i \partial_i = \frac{e^{-\phi}}{\sqrt{2}} \partial_t + \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_l \\
 \Delta &= n^i \partial_i = \frac{e^{-\phi}}{\sqrt{2}} \partial_t - \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_l \\
 \delta &= m^i \partial_i = \frac{1}{r\sqrt{2}} \partial_\theta + \frac{i \csc \theta}{r\sqrt{2}} \partial_\varphi \\
 \bar{\delta} &= \bar{m}^i \partial_i = \frac{1}{r\sqrt{2}} \partial_\theta + \frac{-i \csc \theta}{r\sqrt{2}} \partial_\varphi
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Conhecida uma base de Newman-Penrose, a descrição do espaço-tempo consiste em explicitar os coeficientes de spin, responsáveis por indicar como o cone de luz muda ao se mover através do espaço-tempo, e dos escalares de Ricci e Weyl, que contém a informação que se precisa sobre a curvatura e sobre a matéria existente. Utilizando-se as equações (1.28), (1.29) e (1.40) aplicadas à base de Newman-Penrose (3.11), encontram-se os coeficientes de spin

$$\begin{aligned}
\kappa &= \gamma_{311} &= 0 \\
\sigma &= \gamma_{313} &= 0 \\
\lambda &= \gamma_{244} &= 0 \\
\nu &= \gamma_{242} &= 0 \\
\mu &= \gamma_{243} &= -\frac{1}{r\sqrt{2}} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \\
\rho &= \mu \epsilon \mathbb{R} \\
\tau &= \gamma_{312} &= 0 \\
\pi &= \gamma_{241} &= 0 \\
\varepsilon &= \frac{1}{2}(\gamma_{211} + \gamma_{341}) &= \frac{\phi'}{2\sqrt{2}} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \\
\gamma &= \varepsilon \epsilon \mathbb{R} \\
\beta &= \frac{1}{2}(\gamma_{213} + \gamma_{343}) &= \frac{\cot \theta}{2r\sqrt{2}} \\
\alpha &= -\beta \epsilon \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Os escalares de Weyl podem ser calculados diretamente pela Definição 1.12 ou através das identidades de Ricci (1.34). Para o wormhole em questão, todos os escalares de Weyl se anulam à exceção de $\Psi - 2$ que pode ser determinado com o auxílio da identidade

$$\frac{1}{2}(R_{1234} - R_{3434}) - \frac{1}{2}(R_{1212} - R_{3412}) + R_{1324}, \tag{3.14}$$

obtendo-se após um pouco de manipulação e substituição dos coeficientes de spin (3.13) e das derivadas direcionais (3.12),

$$\Psi_2 = -\frac{1}{6r^2} + \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[\frac{1}{6r^2} - \frac{\phi'}{6r} + \frac{\phi''}{6} + \frac{(\phi')^2}{6} \right] + \left[\frac{1}{r} - \phi' \right] \left(\frac{rb' - b}{12r^2} \right). \tag{3.15}$$

Da mesma maneira, os escalares de Ricci são determinados com o auxílio das identidades

de Ricci entre colchetes:

$$\begin{aligned}
[R_{1314}] \quad \Phi_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_l \mu - \mu^2 - 2\mu\varepsilon \\
[R_{1312}] \quad \Phi_{01} &= 0 \\
\left[\frac{1}{2}(R_{3414} - R_{1214})\right] \quad \Phi_{10} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \partial_l \beta - \frac{1}{r\sqrt{2}} \partial_\theta \varepsilon + \mu\beta \\
\left[\frac{1}{2}(R_{1212} - R_{3412})\right] \quad \Phi_{11} &= \frac{2}{\sqrt{2}} \partial_l \varepsilon + 4\varepsilon^2 - \Psi_2 + \Lambda \\
[R_{2441}] \quad \Phi_{20} &= 0 \\
[R_{2421}] \quad \Phi_{21} &= 0 \\
[R_{2423}] \quad \Phi_{22} &= \Phi_{00} \\
\left[\frac{1}{2}(R_{1232} - R_{3432})\right] \quad \Phi_{12} &= -\Phi_{10} \\
[R_{1332}] \quad \Phi_{02} &= 0 \\
\left[\frac{1}{2}(R_{1234} - R_{3434} - \frac{1}{2}(R_{1212} - R_{3412} - 2R_{1324})\right] \\
\Lambda &= \frac{1}{12r^2} - \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[\frac{1}{12r^2} + \frac{2\phi'}{12r} + \frac{\phi''}{12} + \frac{(\phi')^2}{12} \right] + \left[\frac{1}{r} + \phi' \right] \left(\frac{rb' - b}{12r^2} \right),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

onde as expressões para os coeficientes de spin β , μ e ε são dadas por (3.13).

Com as expressões para a base tétrade de tipo-luz, as derivadas direcionais, os coeficientes de spin, os escalares de Weyl e Ricci, completa-se a descrição do wormhole de Morris-Thorne no formalismo de Newman-Penrose. No limite $\phi' = 0$ e $b = \frac{r_0^2}{r}$, recupera-se as fórmulas análogas para o *wormhole ultraestático* do Capítulo 2, equações (2.8), (2.9) e (2.10).

3.2 Perturbação do Espaço-Tempo

O objetivo desta seção é determinar as perturbações nos escalares de Weyl Ψ_0 e Ψ_4 , porque essas componentes possuem toda a informação necessária sobre a onda gravitacional emitida pelo wormhole [15]. Todas as referências nessa seção podem ser obtidas nos trabalhos de Teukolsky [17], Moreno & Nuñez [22] e Moreno & Garcia-Salcedo [15].

3.2.1 Equações de Teukolsky

Há quatro identidades de Bianchi e duas identidades de Ricci (ver Seções 1.2 e 2.2) as quais são lineares e homogêneas nas quantidades que se anulam no espaço-tempo não perturbado (a saber, os coeficientes κ , σ , λ , ν e os escalares Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_3 e Ψ_4):

Identidade de Bianchi $R_{13[13|4]} = 0$:

$$\begin{aligned} &(\bar{\delta} - 4\alpha + \pi)\Psi_0 - (D - 4\rho - 2\varepsilon)\Psi_1 - (3\Psi_2 - 2\Phi_{11})\kappa = \\ &(\delta + \bar{\pi} - 2\bar{\alpha} - 2\beta)\Phi_{00} - (D - 2\varepsilon - 2\bar{\rho})\Phi_{01} - \bar{\kappa}\Phi_{02} + 2\sigma\Phi_{10} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Identidade de Bianchi $R_{13[13|2]} = 0$:

$$\begin{aligned} &(\Delta - 4\gamma + \mu)\Psi_0 - (\delta - 4\tau - 2\beta)\Psi_1 - (3\Psi_2 + 2\Phi_{11})\sigma = \\ &(\delta + 2\bar{\pi} - 2\beta)\Phi_{01} - (D - \bar{\rho} - 2\varepsilon + 2\bar{\varepsilon})\Phi_2 - 2\kappa\Phi_{12} - \bar{\lambda}\Phi_{00} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Identidade de Bianchi $R_{42[21|4]} = 0$:

$$\begin{aligned} &(D + 4\varepsilon - \rho)\Psi_4 - (\bar{\delta} + 4\pi + 2\alpha)\Psi_3 + (3\Psi_2 + 2\Phi_{11})\lambda = \\ &(\bar{\delta} + 2\alpha - 2\bar{\tau})\Phi_{21} - (\Delta + \bar{\mu} + 2\gamma - 2\bar{\gamma})\Phi_{20} + 2\nu\Phi_{10} + \bar{\sigma}\Phi_{22} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Identidade de Bianchi $R_{42[43|2]} = 0$:

$$\begin{aligned} &(\delta + 4\beta - \tau)\Psi_4 - (\Delta + 2\gamma + 4\mu)\Psi_3 + (3\Psi_2 - 2\Phi_{11})\nu = \\ &(\bar{\delta} - \bar{\tau} + 2\alpha + 2\bar{\beta})\Phi_{22} - (\Delta + 2\bar{\mu} + 2\gamma)\Phi_{21} + \bar{\nu}\Phi_{20} - 2\lambda\Phi_{12} \end{aligned} \quad (3.20)$$

e

Identidade de Ricci para R_{1313} :

$$\Psi_0 + (\delta - 3\beta - \bar{\alpha} - \tau + \bar{\pi})\kappa - (D - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \rho - \bar{\rho})\sigma = 0 \quad (3.21)$$

Identidade de Ricci para R_{2442} :

$$\Psi_4 + (\Delta + \mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma})\lambda - (\bar{\delta} + 3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \tau)\nu = 0 \quad (3.22)$$

A fim de se efetuar teoria de perturbação no espaço-tempo, é o bastante especificar a geometria perturbada por

$$\begin{aligned} l &= l^A + l^B \\ n &= n^A + n^B \\ m &= m^A + m^B \\ \bar{m} &= \bar{m}^A + \bar{m}^B \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde A denota o valor no espaço não perturbado e B , a perturbação (todas as quantidades de Newman-Penrose podem ser escritas dessa forma). Primeiramente, elimina-se os coeficientes de spin, os escalares de Ricci e os escalares de Weyl não perturbados que se anulam no espaço-tempo original, e faz-se algumas simplificações com a ajuda das equações (3.13) e (3.16), obtendo o conjunto de equações (3.17)*-(3.22)* governando as perturbações sofridas pelo modelo de espaço-tempo específico, a métrica de wormhole (3.6). Em segundo lugar, procede-se à redução desse sistema da seguinte maneira:

- i. Multiplique (3.18)* por $(D - 5\mu - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon})$, obtendo (3.18)**;
- ii. Multiplique (3.17)* por $(\delta - 2\beta)$, obtendo (3.17)**;

iii. Subtraia (3.17)** de (3.18)** e use (3.21)* para obter a seguinte equação²:

$$[(D - 5\mu - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon})(\Delta + \mu - 4\bar{\varepsilon}) - (\delta - 2\beta)(\bar{\delta} + 4\bar{\beta}) - 3\Psi_2]\Psi_0^2 = T_0 + T_{0a},$$

onde

$$T_0 = (\delta - 2\beta)[(D - 2\mu - 2\varepsilon)\Phi_{01}^B - \delta\Phi_{00}^B] + \\ (D - 5\mu - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon})[(\delta - 2\beta)\Phi_{01}^B - (D - \mu - 2\varepsilon + 2\bar{\varepsilon})\Phi_{02}^B]$$

e

$$T_{0a} = [2(D - 2\mu - 3\varepsilon + 3\bar{\varepsilon})\Phi_{11} - 3(\Delta + \mu - 2\varepsilon - 2\bar{\varepsilon})\Phi_{00} \\ - 6D\Lambda - 2(\delta - 2\beta)\Phi_{10} + 2\Phi_{11}D - 2\Phi_{10}\delta]\sigma^B + \\ [2(\delta - 2\beta)\Phi_{11} - 2(D - 5\mu - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon})\Phi_{12} - 3\delta\Psi_2 + 2\Phi_{11}\delta - 2\Phi_{12}D]\kappa^B \\ - (D - 5\mu - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon})\Phi_{00}\bar{\lambda}^B \\ - (\delta - 2\beta)[\delta + (\delta + \bar{\pi} - 2\bar{\alpha} - 2\beta)^B]\Phi_{00} \quad (3.24)$$

Como é explicado em [17], o conjunto completo das equações de Newman-Penrose é invariante sob a troca $l \leftrightarrow n, m \leftrightarrow \bar{m}$ e esta simetria não é destruída em um espaço-tempo de Tipo D, como é o caso do wormhole de Morris-Thorne. Pode-se, portanto, derivar³ uma equação para Ψ_4^B pela aplicação dessa transformação à equação⁴ (3.24):

$$[(\Delta + 5\mu + 3\bar{\varepsilon} - \varepsilon)(D - \mu + 4\varepsilon) - (\bar{\delta} - 2\bar{\beta})(\delta + 4\beta) - 3\Psi_2]\Psi_4^B = T_4 + T_{4a},$$

onde

$$T_4 = (\bar{\delta} - 2\bar{\beta})[(\Delta + 2\mu + 2\bar{\varepsilon})\Phi_{21}^B - \bar{\delta}\Phi_{22}^B] + (\Delta + 5\mu + 3\bar{\varepsilon} - \varepsilon)[(\bar{\delta} - 2\bar{\beta})\Phi_{21}^B \\ - (\Delta + \mu + 2\bar{\varepsilon} - 2\varepsilon)\Phi_{20}^B]$$

e

$$T_{4a} = [3(D - \mu + 2\varepsilon + 2\bar{\varepsilon})\Phi_{22} - 2(\Delta + 2\mu + 3\bar{\varepsilon} - \varepsilon)\Phi_{11} + \\ 6\Delta\Lambda + 2(\bar{\delta} - 2\bar{\beta})\Phi_{12} - 2\Phi_{11}D + 2\Phi_{12}\bar{\delta}]\lambda^B + \\ [-2(\bar{\delta} - 2\bar{\beta})\Phi_{11} + 2(\Delta + 5\mu + 3\bar{\varepsilon} - \varepsilon)\Phi_{10} + \\ 3\bar{\delta}\Psi_2 - 2\Phi_{11}\bar{\delta} + 2\Phi_{10}\Delta]\nu^B + (\Delta + 5\mu + 3\bar{\varepsilon} - \varepsilon)\Phi_{22}\bar{\sigma}^B + \\ - (\delta - 2\beta)[\bar{\delta} + (\bar{\delta} - \bar{\tau} + 2\alpha + 2\bar{\beta})^B]\Phi_{22} \quad (3.25)$$

²O sobrescrito nas quantidades não perturbadas foi suprimido, por simplicidade.

³Há uma maneira mais direta, semelhante ao processo de desenvolvimento da equação (3.24), o qual é explicado em [15].

⁴Aqui o sobrescrito nas quantidades não perturbadas também foi suprimido.

Pelo mesmo raciocínio feito em [22], pode-se mostrar que o lado direito nas equações (3.24) e (3.25) se anula para o caso de um wormhole estático e esfericamente simétrico. Feito isso, obtemos as *Equações de Teukolsky* para um wormhole de Morris-Thorne:

$$[(D - 5\mu - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon})(\Delta + \mu - 4\bar{\varepsilon}) - (\delta - 2\beta)(\bar{\delta} + 4\bar{\beta}) - 3\Psi_2]\Psi_0^B = 0 \quad (3.26)$$

e

$$[(D + 5\mu + 3\varepsilon - \bar{\varepsilon})(\Delta - \mu + 4\bar{\varepsilon}) - (\delta - 2\beta)(\bar{\delta} + 4\bar{\beta}) - 3\Psi_2]\Psi_4^B = 0 \quad (3.27)$$

Nas equações acima, os coeficientes de spin são dados pelas expressões (3.13).

3.2.2 Equações de Onda

O objetivo dessa seção é o de encontrar uma equação de onda que governe a radiação gravitacional a partir das Equações de Teukolsky (3.26) e (3.27) derivadas na seção anterior. Para tanto, devemos utilizar as relações de comutação (1.33) entre as derivadas direcionais (3.12), e a ação desses operadores sobre os coeficientes de spin (3.13), a fim de que as equações de perturbação para $\psi^{(2)} = \Psi_0^B$ e $\psi^{(-2)} = r^4\Psi_4^B$, equações (3.26) e (3.27), possam ser escritas como uma única *equação mestre* em termos do parâmetro s (o qual assume os valores 2 ou -2):

$$\begin{aligned} & \{\Delta D - \bar{\delta}\delta + [\mu - (2s + 1)\bar{\varepsilon} - \varepsilon]D - [(2s + 1)\mu + 2s\varepsilon]\Delta + \\ & - 2(s + 1)\bar{\beta}\delta + 2s\beta\bar{\delta} + s(2s + 1)[2(\mu + \varepsilon)\bar{\varepsilon} - \Psi_2] - 2s[(\Delta\varepsilon) \\ & - (\bar{\delta}\beta) + \mu\varepsilon - \varepsilon^2] + 4s(s + 1)\beta\bar{\beta} + 2(2s + 1)\Lambda\}\psi^{(s)} = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

A fim de transformar a equação mestre numa forma de tipo-onda, é preciso seguir o seguinte roteiro:

- i. Substituir em (3.28) todos os valores para os coeficientes de spin (3.13), o escalar de Weyl (3.15) e os escalares de Ricci (3.16);
- ii. Fazer a substituição

$$\Psi(t, l, \theta, \varphi) = e^{-i\omega t} e^{im\varphi} \mathfrak{N}(l, \theta), \quad (3.29)$$

para um modelo de função de onda, onde m é o número de onda (real), ω é a frequência (que pode ser real ou complexa) e $\aleph(l, \theta)$ é a amplitude;

iii. Finalmente usar o fato de que $\psi \neq 0$, para todo (t, l, θ, φ) , obtendo-se

$$\begin{aligned}
 & A \frac{\partial^2 \aleph}{\partial l^2} + B \frac{\partial^2 \aleph}{\partial \theta^2} + C \frac{\partial \aleph}{\partial l} + D \frac{\partial \aleph}{\partial \theta} + \{ (E\omega^2 + Fi\omega) + (Gm^2 + Hm) + I \} \aleph = 0, \\
 & \text{onde} \\
 & A = r^2 \sin \theta \\
 & B = \sin \theta \\
 & C = \{ 2(s+1)r \sin \theta + \phi' r^2 \sin \theta \} \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \\
 & D = \cos \theta \\
 & E = e^{-2\phi} r^2 \sin \theta \\
 & F = 2s e^{-2\phi} \{ r \sin \theta - r^2 \sin \theta \phi' \} \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \\
 & G = -\csc \theta \\
 & H = -2s \cot \theta \\
 & I = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left\{ \frac{(2s^2 + 1)}{3} [r^2 \sin \theta] \phi'' - \frac{(s^2 - 1)}{3} [r^2 \sin \theta] \phi'^2 \right\} + \\
 & + \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left\{ \frac{(4s^2 + 3s^2 + 2)}{3} [r \sin \theta] \phi' + \frac{(4s^2 - 1)}{3} \sin \theta \right\} - \\
 & - \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left\{ \frac{(2s^2 - 3s - 2)}{3} \sin \theta \right\} + \\
 & + \left(\frac{b - rb'}{2r^2}\right) \left\{ \frac{(2s^2 + 1)}{3} [r^2 \sin \theta] \phi' - \frac{(2s^2 - 3s - 2)}{3} r \sin \theta \right\} - \\
 & - \frac{(2s^2 + 1)}{3} \csc \theta - \\
 & - \frac{(s^2 - 1)}{3} \cot \theta \cos \theta
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Esta é a equação de onda que precisa ser obedecida por toda a radiação gravitacional emitida por um wormhole de Morris-Thorne. Perceba que $F(r, \phi, b) \neq 0$ implica num acoplamento indesejável entre frequência e potencial. Na próxima seção, vamos determinar condições sobre os parâmetros do wormhole de Morris-Thorne para que ocorra desacoplamento e consequente solução analítica da equação.

3.3 Frequências de MQN

Dividindo por $-(r^2 \sin^2 \theta)$ e somando $-(2s^2 + 3s + 1)/3$ a ambos os membros da equação de onda (3.30), atinge-se a separação de variáveis, isto é, $\aleph(l, \theta) = R(l)S(\theta)$ onde a equação angular é

$$\frac{d^2 S}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{dS}{d\theta} + (-m^2 \csc^2 \theta - 2sm \cot \theta \csc \theta - s^2 \cot^2 \theta + s + K)S = 0 \quad (3.31)$$

A equação (3.31) juntamente com as condições de fronteira de regularidade em $\theta = 0$ e π , constitui-se num problema de autovalor de Sturm-Liouville para a constante de separação K . Para s e m fixados, os autovalores serão indexados por j . O menor autovalor tem índice $j = \max(|m|, |s|)$. Da teoria de Sturm-Liouville, segue que as autofunções completas e ortogonais são os harmônicos esféricos de peso-spin $Y_{sjm} = S_{sjm}(\theta)e^{im\varphi}$, e $K = (j - s)(j + s + 1)$. Para mais detalhes, consultar [17].

Desde que a constante de separação foi determinada, toda a informação física é encontrada na equação radial que pode ser transformada em uma *equação de Schrödinger* através das seguintes mudanças de variáveis:

$$R^{(s)}(l) = r^{-(s+1)} Z^{(s)}(l) \quad e \quad \frac{dl}{dl^*} = e^\phi \quad (3.32)$$

Assim, a equação de onda mestre para a radiação gravitacional emitida por um wormhole de Morris-Thorne geral é

$$\Lambda^2 Z^{(s)} = V Z^{(s)} \quad \left(\Lambda^2 = \frac{d^2}{dl^{*2}} + \omega^2 \right) \quad (3.33)$$

em que o potencial é dado por

$$\begin{aligned} V(l^*) = & -2si\omega \left[\frac{1}{r} - \phi' \right] e^\phi \sqrt{1 - \frac{b}{r}} - \\ & -e^{2\phi} \left\{ \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[\frac{1-s^2}{3r^2} + \frac{(4s^2-1)}{3r} \phi' + \frac{1-s^2}{3} \phi'^2 + \frac{(2s^2+1)}{3} \phi'' \right] \right\} + \\ & -e^{2\phi} \left\{ \left(\frac{b-rb'}{2r^2} \right) \left[\frac{(2s^2+1)}{3} \phi' - \frac{(2s^2+1)}{3r} \right] \right\} \\ & -e^{2\phi} \left\{ -\frac{1}{r^2} \left[\frac{1-s^2}{3} + j(j+1) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Note que

$$l^* = \pm \int_{r_0}^r \frac{e^{-\phi}}{\sqrt{1 - \frac{b}{r}}} dr. \quad (3.35)$$

Escolhendo $\phi = 0, b = (r_0^2)/r$, e substituindo em (3.33) encontra-se

$$\left(\Lambda^2 + \frac{2i\omega sl}{(l^2 + r_0^2)} - \frac{2r_0^2}{(l^2 + r_0^2)^2} - \frac{j(j+1)}{(l^2 + r_0^2)} \right) Z^{(s)}(l^*) = 0 \quad (3.36)$$

que está em perfeito acordo com a equação (42) da referência [15] para o wormhole de Morris-Thorne ultraestático sem força de maré (ver Capítulo 2). É imediato que o potencial tem a mesma estrutura que o potencial do buraco negro de Kerr, que não possui soluções exatas de modos quase-normais! Assim como este caso, muitos outros wormholes não possuem uma relação elementar entre potencial e frequência de oscilação.

Proceder-se-á agora à busca por uma solução exata procurando por algum tipo de wormhole que não possua a frequência *acoplada* com o potencial na equação radial (3.33) com potencial dado por (3.34). Essa condição é expressa por

$$2si\omega e^{\phi} \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \left[\frac{1}{r} - \phi' \right] = 0 \quad (3.37)$$

e vincula a função da métrica $\phi = \phi(r)$ a ser

$$\phi' = \frac{1}{r} \Rightarrow \phi = \phi_1 + \ln r \quad (\phi_1 = \text{constante}) \quad (3.38)$$

O que (3.38) sugere é que uma vez que você possa resolver a equação angular (3.31) *exatamente* para a constante de separação, você será capaz de determinar *exatamente* a solução analítica da parte radial dada por (3.33) e (3.34), simplesmente como um problema de espalhamento por uma barreira de potencial em Mecânica Quântica [26].

Observação: Apesar de ϕ em (3.38) satisfazer o vínculo de força de maré (3.4) permitindo transitabilidade, ele fornece um comportamento indesejável para a solução resultante porque a componente g_{tt} da métrica não mais será assintoticamente plana. Para consertar isso, é suficiente fazer um corte de energia a uma distância $r = a_0$:

$$\begin{aligned} \phi &= \ln r - \ln a_0, \quad 0 < r \leq a_0 \\ \phi &= 0, \quad r \geq a_0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Como foi visto, para o caso de um wormhole de Morris-Thorne, a constante de separação é dada por $K = (j - s)(j + s + 1)$, onde j refere-se ao momento angular do modo de vibração. Assim, a seguinte solução,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{r^2}{a_0^2} dt^2 - dl^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad 0 < r \leq a_0 \\ ds^2 &= dt^2 - dl^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad r \geq a_0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

ao mesmo tempo, *separa* as variáveis na equação de perturbação e *desacopla* frequência e potencial na parte radial. A informação física da onda gravitacional emitida por esta solução está contida nas equações (3.33) e (3.34) que agora adquirem a forma mais simples

$$\frac{d^2 Z}{dl^{*2}} + \omega^2 Z = 0, \quad l \rightarrow -\infty, \quad l \rightarrow +\infty \quad (3.41)$$

$$\frac{d^2 Z}{dl^{*2}} + \omega^2 Z = V_0 Z, \quad -l^*(a_0) \leq l^* \leq l^*(a_0) \quad (3.42)$$

que revela um problema de espalhamento por uma barreira de potencial unidimensional quadrada de altura V_0 e largura $a = 2l^*(a_0)$. Em (3.42), a altura da barreira está expressa em termos do momento angular do modo por

$$V_0 = \frac{j(j+1) + 1}{a_0^2}. \quad (3.43)$$

Baseado no que foi visto no Capítulo 1, Seção 1.3, inicialmente as equações (3.41)-(3.42) serão tratadas como um problema de *modos normais* e então buscaremos singularidades nos coeficientes de reflexão obtidos. As soluções fora da barreira são

$$\begin{aligned} Z(l^*) &= B e^{-i\omega l^*}, \quad l^* \leq -\frac{a}{2} \\ Z(l^*) &= C e^{i\omega l^*}, \quad l^* \geq \frac{a}{2} \end{aligned} \quad (3.44)$$

e, para $V_0 \leq \omega^2$, pode-se definir o número de propagação dentro da barreira

$$\alpha = \sqrt{\omega^2 - V_0} \quad (3.45)$$

de modo que a solução interna seja

$$Z(l^*) = Fe^{i\alpha l^*} + Ge^{-i\alpha l^*}. \quad (3.46)$$

A continuidade de Z e dZ/dl^* nos extremos da barreira, requisitada pelas condições de fronteira, providencia quatro relações entre os cinco coeficientes. Elimina-se F e G e resolve-se para as razões B/A e C/A . Os quadrados dos valores absolutos dessas razões são os coeficientes de espalhamento (reflexão e transmissão)[26]

$$\begin{aligned} \left|\frac{B}{A}\right|^2 &= \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha a}{4\omega^2 \alpha^2 + V_0^2 \sin^2 \alpha a} \\ \left|\frac{C}{A}\right|^2 &= \frac{4\omega^2 \alpha^2}{4\omega^2 \alpha^2 + V_0^2 \sin^2 \alpha a} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Facilmente verifica-se que $|B/A|^2 + |C/A|^2 = 1$, como seria esperado para modos normais. Para modos quase-normais, deverão haver ressonâncias no plano complexo. As extensões analíticas dos coeficientes de espalhamento (3.47) são

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= \frac{V_0 \sin \alpha a}{2\omega \alpha + iV_0 \sin \alpha a} \\ \frac{C}{A} &= \frac{2\omega \alpha}{2\omega \alpha + iV_0 \sin \alpha a} \end{aligned} \quad (3.48)$$

e uma ressonância ($A = 0$) é atingida pelas frequências que obedecem à equação

$$2z\sqrt{z^2 + V_0} = -V_0 i \sin \alpha z \quad (3.49)$$

onde

$$z = \sqrt{\omega^2 - V_0} \in \mathbb{C} \quad (3.50)$$

Portanto, a equação (3.49) é uma equação transcendental complexa que fornece as frequências quase-normais da solução (3.40).

A tarefa está agora completa: as soluções de MQN de (3.40) são dadas pelo conjunto de equações

$$\begin{aligned} Z(l^*) &= Be^{-i\omega l^*}, \quad l^* \rightarrow -\infty \\ Z(l^*) &= Ce^{i\omega l^*}, \quad l^* \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (3.51)$$

com as frequências determinadas por (3.49)-(3.50).

Observação. É importante perceber que a solução (3.40) não constitui um wormhole em si, pois o vínculo (3.38) sobre a função da métrica ϕ torna tal função infinita em $r = 0$ e, segundo os argumentos de Morris e Thorne, tal função precisa ser finita em todo lugar. No entanto, segundo a referência [35], a solução especial (3.40) pode ser considerada um fluido perfeito, estático e esfericamente simétrico, que é solução ordinária (não exótica) das Equações de Einstein. Isso é verdade se tomarmos $b = \frac{r}{2}$ de modo a obtermos uma solução da forma

$$ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (3.52)$$

com

$$\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' - \frac{(\nu' + \lambda')}{r} + \frac{e^{2\lambda-1}}{r^2} = 0. \quad (3.53)$$

Vimos que não foi possível encontrar uma solução exata para MQN na classe de wormholes de Morris-Thorne. Encontramos, no entanto, uma solução semi-analítica através de (3.40) o que já representa um avanço. No próximo capítulo, faremos uma nova tentativa através de uma generalização da métrica do wormhole de Morris-Thorne.

Capítulo 4

UMA MÉTRICA SUFICIENTEMENTE GERAL

O objetivo deste capítulo é apresentar uma métrica que engloba as principais geometrias de wormhole encontradas na literatura e generaliza os wormholes esfericamente simétricos de Morris-Thorne pela inclusão de dois parâmetros adicionais a fim de atingir equações de perturbação (ou de Teukolsky) onde o potencial pode ser desacoplado da frequência. As Equações de Teukolsky para essa classe de wormholes foram determinadas via formalismo de Newman-Penrose e conjectura-se que podem haver wormholes com essa característica de desacoplamento. A nova métrica provou-se muito geral no sentido de que a maioria das geometrias de wormholes estudadas na literatura podem ser expressas como casos particulares desta.

4.1 Descrição do Espaço-Tempo

A métrica a ser estudada nesse capítulo tem a forma

$$ds^2 = -e^{2\phi} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b}{r}} + (c^2 + r^2) d\theta^2 + (d^2 + r^2 \sin^2 \theta) d\varphi^2 - 2r(d + c \sin \theta) d\theta d\varphi \quad (4.1)$$

e será denominada *wormhole distorcido*¹ porque ela diverge da simetria esférica pela inclusão de dois parâmetros c e d ; quando $c = d = 0$ a conhecida fórmula de Morris-Thorne (1.10) do Capítulo 1 é recuperada.

4.1.1 Matéria Exótica

Foi dito que wormholes surgem a partir de um “raciocínio inverso” na resolução das equações de Einstein, isto é, tomando uma métrica com algumas propriedades desejáveis como (4.1) e encontrando o tensor energia-momento que a suporta. As equações de Einstein em unidades geométricas ($G = c = 1$) são

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = 8\pi T_{ij} \quad (4.2)$$

ou, equivalentemente,

$$T_{ij} = \frac{1}{8\pi} \left(R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \right), \quad (4.3)$$

onde T_{ij} é o tensor energia-momento no “referencial geométrico” (via isomorfismo)

$$e_t = dt \quad e_r = dr \quad e_\theta = d\theta \quad e_\varphi = d\varphi. \quad (4.4)$$

¹Estamos aqui adotando uma definição de wormhole mais abrangente, permitindo ausência de simetria esférica. O importante é considerar essa métrica como uma classe de métricas que engloba uma série de geometrias de wormhole de acordo com os valores dos parâmetros ϕ , b , c e d .

Das equações

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} -e^{2\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (r^2 + c^2) & -r(d + c \sin \theta) \\ 0 & 0 & -r(d + c \sin \theta) & (d^2 + r^2 \sin \theta) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} -e^{-2\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{b}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(d^2 + r^2 \sin^2 \theta)}{(r^2 \sin \theta - cd)^2} & \frac{r(d + c \sin \theta)}{(r^2 \sin \theta - cd)^2} \\ 0 & 0 & \frac{r(d + c \sin \theta)}{(r^2 \sin \theta - cd)^2} & \frac{(r^2 + c^2)}{(r^2 \sin \theta - cd)^2} \end{bmatrix} \quad g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$$

$$R_{lm} = \Gamma_{lm,j}^j - \Gamma_{lj,m}^j + \Gamma_{kj}^j \Gamma_{lm}^k - \Gamma_{km}^j \Gamma_{lj}^k, \text{ onde } \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \quad (4.6)$$

e^2

$$R = g^{ij} R_{ij}, \quad (4.7)$$

obtem-se as componentes da energia-momento no sistema de coordenadas (t, r, θ, φ) .

Para atingir uma interpretação física simples das componentes da energia-momento, baseada em medições que observadores estáticos poderiam fazer, é preciso projetar os T_{ij} em um sistema de referência ortonormal, o qual é dado por

$$\begin{aligned} e_{(1)}^i &= e^{-\phi} e_t & e_{(1)i} &= -e^\phi e_t \\ e_{(2)}^i &= \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{\frac{1}{2}} e_r & e_{(2)i} &= \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} e_r \\ e_{(3)}^i &= \frac{r \sin \theta}{r^2 \sin \theta - cd} e_\theta + \frac{c}{r^2 \sin \theta - cd} e_\varphi & e_{(3)i} &= r e_\theta - d e_\varphi \\ e_{(4)}^i &= \frac{d}{r^2 \sin \theta - cd} e_\theta + \frac{r}{r^2 \sin \theta - cd} e_\varphi & e_{(4)i} &= -c e_\theta + r \sin \theta e_\varphi \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$e_{(a)}^i e_{(b)i} = \mu_{(a)(b)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

²Determinar a curvatura escalar R no sistema (t, r, θ, φ) é computacionalmente difícil por meio das fórmulas acima. Como um escalar tem o mesmo valor em qualquer sistema, pode-se usar a tetrade de campos vetoriais de tipo luz (4.15) e a equação (1.42) para o escalar de Ricci Λ a fim de se obter $R = 24\Lambda$ [6].

Um observador estático situado no wormhole (4.1) medirá a seguinte densidade ρ (matéria e energia por volume)³:

$$\rho = T_{(1)(1)} = e_{(1)}^i e_{(1)}^j T_{ij} = \frac{1}{8\pi(r^2 \sin \theta - cd)} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left\{ A + \frac{Br}{(r^2 \sin \theta - cd)^2(r-b)} + \frac{C}{4(r^2 \sin \theta - cd)} \right\},$$

onde

$$\begin{aligned} A &= (2r \sin \theta - cd' - c'd) \left[\frac{rb' - b}{2r(r-b)} \right] + c''d + 2c'd' + cd'' - 2 \sin \theta \\ B &= (r^2 \cos \theta - cd^\dagger)(r^2 \sin \theta \cos \theta + dd^\dagger) + (r^2 \sin \theta - cd)(d^{\dagger 2} - dd^{\dagger\dagger} - r^2 \cos 2\theta) \\ C &= (2r \sin \theta - cd' - c'd)^2 - (cd' - c'd)^2 - (d + c \sin \theta)^2 - (d' + c' \sin \theta)^2 r^2 \\ &\quad + 2r(d + c \sin \theta)(d' + c' \sin \theta) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Outro indivíduo estático no mesmo lugar irá observar uma tensão τ por unidade de área na direção radial (negativo da pressão radial), determinada pela fórmula:

$$\begin{aligned} \tau &= -T_{(2)(2)} = -e_{(2)}^i e_{(2)}^j T_{ij} = \\ &= A\phi' + \frac{B}{32\pi(r^2 \sin \theta - cd)^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) + \frac{C}{8\pi(r^2 \sin \theta - cd)^3} \\ &\quad - \frac{1}{16\pi(r^2 \sin \theta - cd)^4} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \{DE + FG\}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde

³Uma adaga \dagger irá sempre significar diferenciação com respeito à variável θ .

$$\begin{aligned}
A &= \frac{-(2r \sin \theta - cd' - c'd)}{8\pi(r^2 \sin \theta - cd)} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \\
B &= (2r \sin \theta - cd' - c'd)^2 - (cd' - c'd)^2 - (d + c \sin \theta)^2 - (d' + c' \sin \theta)^2 r^2 \\
&\quad + 2r(d + c \sin \theta)(d' + c' \sin \theta) \\
C &= (r^2 \cos \theta - cd^\dagger)(r^2 \sin \theta \cos \theta + dd^\dagger) + (r^2 \sin \theta - cd)(d^{\dagger 2} - dd^{\dagger\dagger} - r^2 \cos 2\theta) \\
D &= 2cc'd^2 - d^2r - 2cdr \sin \theta - dd'r^2 - c^2r \sin \theta^2 - (cd' + c'd)r^2 \sin \theta + cc'r^2 \sin \theta^2 \\
&\quad + 2r^3 \sin \theta^2 \\
E &= 2c^2dd' - d^2r - 2cdr \sin \theta + dd'r^2 + c^2r \sin \theta^2 - (cd' + c'd)r^2 \sin \theta - cc'r^2 \sin \theta^2 \\
&\quad + 2r^3 \sin \theta^2 \\
F &= d^3 - d^2d'r + cd^2 \sin \theta + (c'd^2 - 2cdd')r \sin \theta - dr^2 \sin \theta^2 - cr^2 \sin \theta^3 + d'r^3 \sin \theta^2 \\
&\quad + c'r^3 \sin \theta^3 \\
G &= -c^2d + (2cc'd - c^2d')r - c^3 \sin \theta + dr^2 + c^2c'r \sin \theta - d'r^3 - c'r^3 \sin \theta
\end{aligned}$$

No limite da simetria esférica ($c = d = 0$), resultam as equações da referência [4] para os wormholes de Morris-Thorne.

4.1.2 Cones de Luz

Até aqui trabalhamos com diferentes sistemas de referência, representando visões distintas do mesmo espaço-tempo (4.1), um baseado em coordenadas curvilíneas (t, r, θ, φ) com interpretação física e geométrica direta, outros baseados em bases ortonormais, denominadas *tétrades de Cartan*. Entretanto existe também um tipo de “raciocínio reverso” para esta situação: fornecer a parametrização dos cones de luz e construir um espaço-tempo a partir dela; esta visão originou o conceito de *espinor* e foi inicialmente proposta por Penrose e desenvolvida por Newman (para mergulhar nesse assunto fascinante, veja por exemplo [19]). Nesta seção, seguiremos o desenvolvimento presente no livro de Chandrasekhar [6], onde o tratamento do espaço-tempo via formalismo de Newman-Penrose é adaptado para o formalismo tétrede de Cartan, ao se representar o cone de luz por uma tétrede de vetores de tipo-luz em que dois vetores são reais e dois são “complexos conjugados”, à semelhança do desenvolvimento feito por Geroch, Held e Penrose [20] na tentativa de incluir de maneira natural o formalismo espinorial na Relatividade Geral.

À semelhança do desenvolvimento do Capítulo 3, a distância radial própria é definida por

$$\frac{dr}{dl} = \sqrt{\left(1 - \frac{b}{r}\right)} \implies l(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\left(1 - \frac{b}{r}\right)}}. \quad (4.11)$$

de modo que ela decresce de $l = +\infty$ no universo superior, para $l = 0$ na garganta, e então de zero para $-\infty$ no universo inferior. Como vimos, esta distância precisa ser bem comportada ao longo de todo o espaço-tempo e representa uma “distância de luminosidade”, a distância real medida por um observador estático ao longo do caminho da viagem. Nessa nova coordenada, a métrica (4.1) se torna

$$ds^2 = e^{2\phi} dt^2 - dl^2 - (c^2 + r^2) d\theta^2 - (d^2 + r^2 \sin^2 \theta) d\varphi^2 + 2r(d + c \sin \theta) d\theta d\varphi \quad (4.12)$$

onde a troca de assinatura da métrica foi feita para efeito de comparações com resultados da literatura. Efetuando-se a transformação (4.11), a tétrade de Cartan para (4.12), se reduz a

$$\begin{aligned} e_{(1)}^i &= e^{-\phi} e_t & e_{(1)i} &= e^\phi e_t \\ e_{(2)}^i &= e_l & e_{(2)i} &= -e_l \\ e_{(3)}^i &= \frac{r \sin \theta}{r^2 \sin \theta - cd} e_\theta + \frac{c}{r^2 \sin \theta - cd} e_\varphi & e_{(3)i} &= -r e_\theta + d e_\varphi \\ e_{(4)}^i &= \frac{d}{r^2 \sin \theta - cd} e_\theta + \frac{r}{r^2 \sin \theta - cd} e_\varphi & e_{(4)i} &= c e_\theta - r \sin \theta e_\varphi \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$e_{(a)}^i e_{(b)i} = -\mu_{(a)(b)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Para uma descrição da solução de espaço-tempo de wormhole (4.12) no formalismo de Newman-Penrose se faz necessário usar as relações [21]

$$\begin{aligned} l = e_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[e_{(1)} + e_{(2)}] & n = e_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[e_{(1)} - e_{(2)}] \\ m = e_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[e_{(3)} + i e_{(4)}] & \bar{m} = e_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[e_{(3)} - i e_{(4)}], \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde a barra denota conjugação complexa. Esta relação corresponde a uma parametrização complexa do cone de luz e que fornece a seguinte base tétrade fundamental, a qual será usada

de agora em diante⁴:

$$\begin{aligned}
l_i &= \left(\frac{e^\phi}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right) & l^i &= \left(\frac{e^{-\phi}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right) \\
n_i &= \left(\frac{e^\phi}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right) & n^i &= \left(\frac{e^{-\phi}}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right) \\
m_i &= \left(0, 0, \frac{-r+ic}{\sqrt{2}}, \frac{d-ir \sin \theta}{\sqrt{2}} \right) & m^i &= \left(0, 0, \frac{r \sin \theta + id}{\sqrt{2}(r^2 \sin \theta - cd)}, \frac{c+ir}{\sqrt{2}(r^2 \sin \theta - cd)} \right) \\
\bar{m}_i &= \left(0, 0, \frac{-r-ic}{\sqrt{2}}, \frac{d+ir \sin \theta}{\sqrt{2}} \right) & \bar{m}^i &= \left(0, 0, \frac{r \sin \theta - id}{\sqrt{2}(r^2 \sin \theta - cd)}, \frac{c-ir}{\sqrt{2}(r^2 \sin \theta - cd)} \right)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$e_a^i e_{bi} = \eta_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \eta^{ab}$$

As derivadas direcionais correspondentes são⁵

$$\begin{aligned}
D &= l^i \partial_i = \frac{e^{-\phi}}{\sqrt{2}} \partial_t + \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_l \\
\Delta &= n^i \partial_i = \frac{e^{-\phi}}{\sqrt{2}} \partial_t - \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_l \\
\delta &= m^i \partial_i = \frac{r \sin \theta + id}{\sqrt{2}(r^2 \sin \theta - cd)} \partial_\theta + \frac{c+ir}{\sqrt{2}(r^2 \sin \theta - cd)} \partial_\varphi \\
\bar{\delta} &= \bar{m}^i \partial_i = \frac{r \sin \theta - id}{\sqrt{2}(r^2 \sin \theta - cd)} \partial_\theta + \frac{c-ir}{\sqrt{2}(r^2 \sin \theta - cd)} \partial_\varphi
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Repetindo o que já foi dito, a filosofia por trás do formalismo de Newman-Penrose é a convicção de que a estrutura do cone de luz faz parte da essência da gravidade e trabalhar nesse referencial simplifica as equações. Dito isso, o problema agora consiste em substituir

⁴Na verdade, a generalização da métrica de Morris-Thorne começou pelo acréscimo dos parâmetros c e d como feito na tétrade de luz abaixo; tomamos o desenvolvimento inverso do raciocínio por nos parecer mais didático

⁵ ∂_x é a derivada parcial na direção do vetor da base e_x .

as componentes da métrica pelos coeficientes de spin

$$\begin{aligned}
\kappa &= \gamma_{311} &= 0 \\
\sigma &= \gamma_{313} &= \frac{1}{2\sqrt{2}(r^2 \sin \theta - cd)} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \{(cd' - c'd) - i[(d + c \sin \theta) - (d' + c' \sin \theta)r]\} \\
\lambda &= \gamma_{244} &= \bar{\sigma} \\
\nu &= \gamma_{242} &= 0 \\
\mu &= \gamma_{243} &= \frac{1}{2\sqrt{2}(r^2 \sin \theta - cd)} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \{cd' + c'd - 2r \sin \theta\} \\
\rho &= \mu \in \mathbb{R} \\
\tau &= \gamma_{312} &= 0 \\
\pi &= \gamma_{241} &= 0 \\
\varepsilon &= \frac{1}{2}(\gamma_{211} + \gamma_{341}) &= \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\phi'}{2\sqrt{2}} - i \frac{(d - c \sin \theta) - (d' - c' \sin \theta)r}{4\sqrt{2}(r^2 \sin \theta - cd)} \right\} \\
\gamma &= \bar{\varepsilon} \\
\beta &= \frac{1}{2}(\gamma_{213} + \gamma_{343}) &= \frac{r \cos \theta + id^\dagger}{2\sqrt{2}(r^2 \sin \theta - cd)} \\
\alpha &= -\bar{\beta}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

os quais determinam como que o cone de luz muda à medida em que ele se move através do espaço-tempo. As expressões em (4.17) foram determinadas com o auxílio das equações (1.28), (1.29) e (1.40) aplicadas à base de Newman-Penrose (4.15).

Um espaço-tempo é denominado *algebricamente especial de Tipo D* se o único escalar de Weyl não nulo for Ψ_2 . Essa geometria possui os cones de luz mais simples de todos, porque há um teorema garantindo congruências geodésicas e sem distorção formadas pelas duas direções nulas principais, l e n , assim como no caso do espaço Euclidiano onde um cone é formado por congruências de linhas retas.

Teorema de Goldberg-Sachs [6]: Dado um espaço-tempo de Tipo D, tem-se:

$\Psi_0 = \Psi_1 = 0 \Leftrightarrow \kappa = \sigma = 0$, e as congruências de l são geodésicas e sem distorção;

$\Psi_3 = \Psi_4 = 0 \Leftrightarrow \nu = \lambda = 0$, e as congruências de n são geodésicas e sem distorção.

Exemplos de espaços-tempo de Tipo D são wormholes e buracos negros, e em vista do teorema acima, pode-se analisar a equação (4.17) a fim de se estabelecer o primeiro vínculo sobre os parâmetros de distorção c e d :

Condição de Tipo D:

$$cd' - c'd = 0;$$

$$d + c \sin \theta - (d' + c' \sin \theta)r = 0$$

Esta condição é satisfeita pela solução geral

$$d(r, \theta) = rf(\theta) - c(r) \sin \theta, \quad (4.18)$$

onde $c = c(r)$ é qualquer função radial se $f(\theta) = 0$ e é $c = kr$, $k \in \mathbb{C}$, no caso de $f(\theta) \neq 0$ desde que $f(\theta) \neq (k + \frac{1}{k}) \sin \theta$.

O escalar de Weyl Ψ_2 pode ser calculado diretamente pela Definição 1.11 ou através das identidades de Ricci (1.34). Com o auxílio da identidade

$$\frac{1}{2}(R_{1234} - R_{3434}) - \frac{1}{2}(R_{1212} - R_{3412}) + R_{1324} \quad (4.19)$$

e (4.18), obtém-se após um pouco de manipulação e substituição dos coeficientes de spin (4.17) e das derivadas direcionais (4.16),

$$\begin{aligned} \Psi_2 = & \frac{-A}{6[(r^2+c^2)\sin\theta-cr f]^3} + \frac{B}{12[(r^2+c^2)\sin\theta-cr f]^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) + \\ & + \frac{C}{12[(r^2+c^2)\sin\theta-cr f]} \left(1 - \frac{b}{r}\right) + \left[\frac{2(r+cc')\sin\theta-f(c+c'r)}{2(r^2+c^2)\sin\theta-2cr f} - \phi' \right] \left(\frac{rb'-b}{12r^2} \right) + \frac{1}{6}[\phi'' + (\phi')^2] \left(1 - \frac{b}{r}\right) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A = & r^2 f f^\dagger \cos \theta + cr f^\dagger (r^2 + c^2) \sin \theta \cos \theta + \\ & + [c^2 r^2 f^2 - r^2 f^{\dagger 2} (r^2 + c^2) - r^2 f f^{\dagger \dagger} (r^2 + 2c^2)] \sin \theta + cr (r^2 + c^2) [f^{\dagger \dagger} - 2f] \sin^2 \theta + \\ & + (r^2 + c^2)^2 \sin^3 \theta + cr^3 f^2 f^{\dagger \dagger} \end{aligned}$$

$$B = [2(r + cc') \sin \theta - f(c + c'r)]^2$$

$$C = c'' r f + 2c' f - 2 \sin \theta (1 + c'^2 + cc'') - [2(r + cc') \sin \theta - f(c + c'r)] \phi' \quad (4.20)$$

Da mesma maneira, os escalares de Ricci são determinados com o auxílio das identidades

de Ricci entre colchetes:

$$\begin{aligned}
[R_{1314}] \quad \Phi_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_l \mu - \mu^2 - \mu(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) \\
[R_{1312}] \quad \Phi_{01} &= 0 \\
[R_{1314}] \quad \Phi_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_l \mu - \mu^2 - \mu(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) \\
[R_{1312}] \quad \Phi_{01} &= 0 \\
[\frac{1}{2}(R_{3414} - R_{1214})] \quad \Phi_{10} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \partial_l \bar{\beta} - \left[\frac{r \sin \theta + i(c \sin \theta - rf)}{\sqrt{2}(r^2 + c^2) \sin \theta - \sqrt{2}crf} \right] \partial_\theta \varepsilon + (\mu + \bar{\varepsilon} - \varepsilon) \bar{\beta} \\
[\frac{1}{2}(R_{1212} - R_{3412})] \quad \Phi_{11} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_l (\varepsilon + \bar{\varepsilon}) + (\varepsilon + \bar{\varepsilon})^2 - \Psi_2 + \Lambda \\
[R_{2441}] \quad \Phi_{20} &= 0 \\
[R_{2421}] \quad \Phi_{21} &= 0 \\
[R_{2423}] \quad \Phi_{22} &= \Phi_{00} \\
[\frac{1}{2}(R_{1232} - R_{3432})] \quad \Phi_{12} &= -\bar{\Phi}_{10} \\
[R_{1332}] \quad \Phi_{02} &= 0 \\
[\frac{1}{2}(R_{1234} - R_{3434} - \frac{1}{2}(R_{1212} - R_{3412} - 2R_{1324})] \\
\Lambda &= \frac{A}{12[(r^2 + c^2) \sin \theta - crf]^3} + \frac{B}{48[(r^2 + c^2) \sin \theta - crf]^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) + \\
&+ \frac{C}{12[(r^2 + c^2) \sin \theta - crf]} \left(1 - \frac{b}{r}\right) + \left[\frac{2(r + cc') \sin \theta - f(c + c'r)}{2(r^2 + c^2) \sin \theta - 2crf} + \phi' \right] \\
&\left(\frac{rb' - b}{12r^2} \right) - \frac{1}{12} [\phi'' + (\phi')^2] \left(1 - \frac{b}{r}\right), \tag{4.21}
\end{aligned}$$

onde A, B e C estão definidos em (4.20).

Na fórmula acima, as expressões para os coeficientes de spin β , μ e ε são

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{r \cos \theta + i(rf^\dagger - c \cos \theta)}{2\sqrt{2}[(r^2 + c^2) \sin \theta - crf]} \\
\mu &= \frac{f(c + c'r) - 2(r + cc') \sin \theta}{2\sqrt{2}[(r^2 + c^2) \sin \theta - crf]} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \\
\varepsilon &= \left\{ \frac{\phi'}{2\sqrt{2}} + i \frac{(c - c'r) \sin \theta}{2\sqrt{2}[(r^2 + c^2) \sin \theta - crf]} \right\} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Com as expressões para a base tétrade de tipo-luz, as derivadas direcionais, os coeficientes de spin, os escalares de Weyl e Ricci, completa-se a descrição do wormhole distorcido no

formalismo de Newman-Penrose. No limite $\phi' = c = d = 0$ e $b = \frac{r_0^2}{r}$, recupera-se as fórmulas análogas para o *wormhole ultraestático* da referência [15]:

$$\begin{aligned}
\nu &= \sigma = \kappa = \lambda = \varepsilon = \gamma = \tau = \pi = 0 \\
\rho &= \mu = -\frac{l}{\sqrt{2}(l^2 + r_0^2)} \\
\beta &= -\alpha = \frac{\cot \theta}{2\sqrt{2}(l^2 + r_0^2)^{\frac{1}{2}}} \\
\Psi_2 &= -\frac{r_0^2}{3(l^2 + r_0^2)^2} \\
\Phi_{01} &= \Phi_{10} = \Phi_{02} = \Phi_{20} = \Phi_{12} = \Phi_{21} = 0 \\
\Phi_{00} &= \Phi_{22} = -\frac{r_0^2}{2(l^2 + r_0^2)^2} \\
\Phi_{11} &= \frac{r_0^2}{4(l^2 + r_0^2)^2} \\
\Lambda &= -\frac{r_0^2}{12(l^2 + r_0^2)^2}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

4.2 Perturbação do Espaço-Tempo

Esta seção segue um raciocínio idêntico ao da Seção 3.2.

O objetivo desta seção é determinar as perturbações nos escalares de Weyl Ψ_0 e Ψ_4 , porque essas componentes possuem toda a informação necessária sobre a onda gravitacional emitida pelo wormhole [15]. Todas as referências nessa seção podem ser obtidas nos trabalhos de Teukolsky [17], Moreno & Nuñez [22] e Moreno & Garcia-Salcedo [15].

4.2.1 Equações de Teukolsky

Há quatro identidades de Bianchi e duas identidades de Ricci (ver Seção 1.2) as quais são lineares e homogêneas nas quantidades que se anulam no espaço-tempo não perturbado (de acordo com o Teorema de Goldberg-Sachs):

Identidade de Bianchi $R_{13[13|4]} = 0$:

$$\begin{aligned}
&(\bar{\delta} - 4\alpha + \pi)\Psi_0 - (D - 4\rho - 2\varepsilon)\Psi_1 - (3\Psi_2 - 2\Phi_{11})\kappa = \\
&(\delta + \bar{\pi} - 2\bar{\alpha} - 2\beta)\Phi_{00} - (D - 2\varepsilon - 2\bar{\rho})\Phi_{01} - \bar{\kappa}\Phi_{02} + 2\sigma\Phi_{10}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Identidade de Bianchi $R_{13[13]2] = 0$:

$$\begin{aligned}
&(\Delta - 4\gamma + \mu)\Psi_0 - (\delta - 4\tau - 2\beta)\Psi_1 - (3\Psi_2 + 2\Phi_{11})\sigma = \\
&(\delta + 2\bar{\pi} - 2\beta)\Phi_{01} - (D - \bar{\rho} - 2\varepsilon + 2\bar{\varepsilon})\Phi_2 - 2\kappa\Phi_{12} - \bar{\lambda}\Phi_{00}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Identidade de Bianchi $R_{42[21|4] = 0$:

$$\begin{aligned}
&(D + 4\varepsilon - \rho)\Psi_4 - (\bar{\delta} + 4\pi + 2\alpha)\Psi_3 + (3\Psi_2 + 2\Phi_{11})\lambda = \\
&(\bar{\delta} + 2\alpha - 2\bar{\tau})\Phi_{21} - (\Delta + \bar{\mu} + 2\gamma - 2\bar{\gamma})\Phi_{20} + 2\nu\Phi_{10} + \bar{\sigma}\Phi_{22}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Identidade de Bianchi $R_{42[43|2] = 0$:

$$\begin{aligned}
&(\delta + 4\beta - \tau)\Psi_4 - (\Delta + 2\gamma + 4\mu)\Psi_3 + (3\Psi_2 - 2\Phi_{11})\nu = \\
&(\bar{\delta} - \bar{\tau} + 2\alpha + 2\bar{\beta})\Phi_{22} - (\Delta + 2\bar{\mu} + 2\gamma)\Phi_{21} + \bar{\nu}\Phi_{20} - 2\lambda\Phi_{12}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

e

Identidade de Ricci para R_{1313} :

$$\Psi_0 + (\delta - 3\beta - \bar{\alpha} - \tau + \bar{\pi})\kappa - (D - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \rho - \bar{\rho})\sigma = 0 \tag{4.28}$$

Identidade de Ricci para R_{2442} :

$$\Psi_4 + (\Delta + \mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma})\lambda - (\bar{\delta} + 3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \tau)\nu = 0 \tag{4.29}$$

Equações (4.24)-(4.29) são válidas para todo espaço-tempo genérico de Tipo D que não esteja perturbado.

A fim de se efetuar teoria de perturbação no espaço-tempo, é o bastante especificar a

geometria perturbada por

$$\begin{aligned}
 l &= l^A + l^B \\
 n &= n^A + n^B \\
 m &= m^A + m^B \\
 \bar{m} &= \bar{m}^A + \bar{m}^B
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

onde A denota o valor no espaço não perturbado e B , a perturbação (todas as quantidades de Newman-Penrose podem ser escritas dessa forma). Primeiramente, elimina-se os coeficientes de spin, os escalares de Ricci e os escalares de Weyl não perturbados que se anulam no espaço-tempo original, e faz-se algumas simplificações com a ajuda das equações (4.17) e (4.21), obtendo o conjunto de equações (4.24)*-(4.29)* governando as perturbações sofridas pelo modelo de espaço-tempo específico, a métrica de wormhole (4.12). Em segundo lugar, procede-se à redução desse sistema da seguinte maneira:

- i. Multiplique (4.25)* por $(D - 5\mu - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon})$, obtendo (4.25)**;
- ii. Multiplique (4.24)* por $(\delta - 2\beta)$, obtendo (4.24)**;
- iii. Subtraia (4.24)** de (4.25)** e use (4.28)* para obter a seguinte equação⁶:

$$[(D - 5\mu - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon})(\Delta + \mu - 4\bar{\varepsilon}) - (\delta - 2\beta)(\bar{\delta} + 4\bar{\beta}) - 3\Psi_2]\Psi_0^2 = T_0 + T_{0a},$$

onde

$$\begin{aligned}
 T_0 &= (\delta - 2\beta)[(D - 2\mu - 2\varepsilon)\Phi_{01}^B - \delta\Phi_{00}^B] + \\
 & (D - 5\mu - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon})[(\delta - 2\beta)\Phi_{01}^B - (D - \mu - 2\varepsilon + 2\bar{\varepsilon})\Phi_{02}^B
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 T_{0a} &= [2(D - 2\mu - 3\varepsilon + 3\bar{\varepsilon})\Phi_{11} - 3(\Delta + \mu - 2\varepsilon - 2\bar{\varepsilon})\Phi_{00} \\
 & - 6D\Lambda - 2(\delta - 2\beta)\Phi_{10} + 2\Phi_{11}D - 2\Phi_{10}\delta]\sigma^B + \\
 & [2(\delta - 2\beta)\Phi_{11} - 2(D - 5\mu - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon})\Phi_{12} - 3\delta\Psi_2 + 2\Phi_{11}\delta - 2\Phi_{12}D]\kappa^B \\
 & - (D - 5\mu - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon})\Phi_{00}\bar{\lambda}^B \\
 & - (\delta - 2\beta)[\delta + (\delta + \bar{\pi} - 2\bar{\alpha} - 2\beta)^B]\Phi_{00}
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Como é explicado em [15], o termo extra T_{0a} representa a fonte quando o operador diferencial perturbado δ e os coeficientes de spin perturbados $\sigma, \kappa, \lambda, \alpha, \beta$ são não nulos. Como é explicado em [17], o conjunto completo das equações de Newman-Penrose é invariante sob

⁶O sobrescrito nas quantidades não perturbadas foi suprimido, por simplicidade.

a troca $l \leftrightarrow n, m \leftrightarrow \bar{m}$ e esta simetria não é destruída pela condição de Tipo D. Pode-se, portanto, derivar⁷ uma equação para Ψ_4^B pela aplicação dessa transformação à equação⁸ (4.31):

$$[(\Delta + 5\mu + 3\bar{\varepsilon} - \varepsilon)(D - \mu + 4\varepsilon) - (\bar{\delta} - 2\bar{\beta})(\delta + 4\beta) - 3\Psi_2]\Psi_4^B = T_4 + T_{4a},$$

onde

$$T_4 = (\bar{\delta} - 2\bar{\beta})[(\Delta + 2\mu + 2\bar{\varepsilon})\Phi_{21}^B - \bar{\delta}\Phi_{22}^B] + (\Delta + 5\mu + 3\bar{\varepsilon} - \varepsilon)[(\bar{\delta} - 2\bar{\beta})\Phi_{21}^B - (\Delta + \mu + 2\bar{\varepsilon} - 2\varepsilon)\Phi_{20}^B]$$

e

$$\begin{aligned} T_{4a} = & [3(D - \mu + 2\varepsilon + 2\bar{\varepsilon})\Phi_{22} - 2(\Delta + 2\mu + 3\bar{\varepsilon} - \varepsilon)\Phi_{11} + \\ & 6\Delta\Lambda + 2(\bar{\delta} - 2\bar{\beta})\Phi_{12} - 2\Phi_{11}D + 2\Phi_{12}\bar{\delta}]\lambda^B + \\ & [-2(\bar{\delta} - 2\bar{\beta})\Phi_{11} + 2(\Delta + 5\mu + 3\bar{\varepsilon} - \varepsilon)\Phi_{10} + \\ & 3\bar{\delta}\Psi_2 - 2\Phi_{11}\bar{\delta} + 2\Phi_{10}\Delta]\nu^B + (\Delta + 5\nu + 3\bar{\varepsilon} - \varepsilon)\Phi_{22}\bar{\sigma}^B + \\ & -(\delta - 2\beta)[\bar{\delta} + (\bar{\delta} - \bar{\tau} + 2\alpha + 2\bar{\beta})^B]\Phi_{22} \end{aligned} \quad (4.32)$$

As equações (4.31) e (4.32) são não homogêneas. Há vários modos de escolher uma perturbação que cause o anulamento dos lados direitos de tais equações. Em [22], o tensor energia-momento é puramente radial de modo que as projeções não nulas são funções de r e t somente. O caráter angular dos operadores nesse caso garante a homogeneidade. Para o wormhole em estudo nesse trabalho, tal escolha não funciona mas o conjunto de condições abaixo possibilita o anulamento desejado dos termos T_0, T_{0a}, T_4, T_{4a} :

$$\begin{aligned} \Phi_{01}^B &= \Phi_{02}^B = \Phi_{21}^B = \Phi_{20}^B = 0 \\ \Phi_{00}^B &= \Phi_{22}^B = f(r, t) \\ \sigma^B &= \kappa^B = \lambda^B = \nu^B = 0 \\ (\delta + \bar{\pi} - 2\bar{\alpha} - 2\beta)^B \Phi_{00} &= -\delta\Phi_{00} \\ (\delta - \bar{\tau} + 2\alpha + 2\bar{\beta})^B \Phi_{22} &= -\bar{\delta}\Phi_{22} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Aplicando as condições de homogeneidade acima, finalmente as *Equações de Teukolsky* são atingidas, as quais governam as perturbações, presentes nos escalares de Weyl Ψ_0^B e Ψ_4^B , da

⁷Há uma maneira mais direta, semelhante ao processo de desenvolvimento da equação (4.31), o qual é explicado em [15].

⁸Aqui o sobrescrito nas quantidades não perturbadas também foi suprimido.

classe de wormholes distorcidos, estáticos e de Tipo D:

$$[(D - 5\mu - 3\varepsilon + \bar{\varepsilon})(\Delta + \mu - 4\bar{\varepsilon}) - (\delta - 2\beta)(\bar{\delta} + 4\bar{\beta}) - 3\Psi_2]\Psi_0^B = 0 \quad (4.34)$$

e

$$[(D + 5\mu + 3\varepsilon - \bar{\varepsilon})(\Delta - \mu + 4\bar{\varepsilon}) - (\delta - 2\beta)(\bar{\delta} + 4\bar{\beta}) - 3\Psi_2]\Psi_4^B = 0 \quad (4.35)$$

Na próxima seção, essas equações serão reduzidas à uma equação de onda.

4.2.2 Equação de Onda

Atuando sobre $\chi\Psi_4^B$, onde

$$\begin{aligned} \chi &= e^{2\int \lambda d\theta} [(r^2 + c^2) \sin \theta - crf]^2, \\ \lambda &= \lambda(\theta) = \frac{crf^\dagger - (r^2 + c^2) \cos \theta}{(r^2 + c^2) \sin \theta - crf} \end{aligned} \quad (4.36)$$

e usando as relações de comutação entre as derivadas direcionais, e a ação desses operadores sobre os coeficientes de spin, as equações de perturbação para $\psi^{(2)} = \Psi_0^B$ e $\psi^{(-2)} = \chi\Psi_4^B$, equações (4.34) e (4.35), podem ser escritas como uma única *equação mestre* em termos do parâmetro s (o qual assume os valores 2 ou -2):

$$\begin{aligned} &\{\Delta D - \bar{\delta}\delta + [\mu - (2s + 1)\bar{\varepsilon} - \varepsilon]D - [(2s + 1)\mu + 2s\varepsilon]\Delta + \\ &- 2(s + 1)\bar{\beta}\delta + 2s\beta\bar{\delta} + s(2s + 1)[2(\mu + \varepsilon)\bar{\varepsilon} - \Psi_2] - 2s[(\Delta\varepsilon) \\ &- (\bar{\delta}\beta) + \mu\varepsilon - \varepsilon^2] + 4s(s + 1)\beta\bar{\beta} + 2(2s + 1)\Lambda\}\psi^{(s)} = 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Não é difícil ver que o comentário após a Condição de Tipo D (4.18) garante que a função $\lambda = \lambda(\theta)$ no integrando de (4.36) acima está bem definida. Para um buraco negro, $\Lambda = 0$ e tem-se $\chi = r^4$ de modo que a equação (4.37) coincide com a equação (13) em [22].

A fim de transformar a equação mestre numa forma de tipo-onda, é preciso fazer o seguinte roteiro:

- i. Substituir em (4.37) todos os valores para os coeficientes de spin (4.17), o escalar de Weyl (4.20) e os escalares de Ricci (4.21);

ii. Fazer a substituição

$$\Psi(t, l, \theta, \varphi) = e^{-i\omega t} e^{im\varphi} \aleph(l, \theta), \quad (4.38)$$

para um modelo de função de onda, onde m é o número de onda (real), ω é a frequência (que pode ser real ou complexa) e $\aleph(l, \theta)$ é a amplitude;

iii. Finalmente usar a condição de Tipo D (4.18), o fato de que $\psi \neq 0$, para todo (t, l, θ, φ) , e

após muito trabalho, consegue-se

$$\begin{aligned}
& A \frac{\partial^2 \aleph}{\partial l^2} + B \frac{\partial^2 \aleph}{\partial \theta^2} + C \frac{\partial \aleph}{\partial l} + D \frac{\partial \aleph}{\partial \theta} + \{ (E\omega^2 + Fi\omega) + (Gm^2 + Hm) + I \} \aleph = 0, \\
& \text{onde} \\
& A = (r^2 + c^2) \sin \theta - crf \\
& B = \sin \theta + \frac{rf(r - c \sin \theta)}{(r^2 + c^2) \sin \theta - crf} \\
& C = \{ 2(s+1)[(r + cc') \sin \theta - cf] + [(r^2 + c^2) \sin \theta - crf] \phi' + 2si(c'r - c) \sin \theta \} \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \\
& D = 2 \cos \theta + \frac{(\lambda r^2 + c^2) \sin^2 \theta - 2cr(f + f^\dagger) \sin \theta + r^2 f(f + 2f^\dagger)}{(r^2 + c^2) \sin \theta - crf} \\
& \quad - 2i \frac{[sr(rf^\dagger - c \cos \theta) \sin \theta - mr^2 f]}{(r^2 + c^2) \sin \theta - crf} \\
& E = e^{-2\phi} [(r^2 + c^2) \sin \theta - crf] \\
& F = 2se^{-2\phi} \{ [(r + cc') \sin \theta - cf] - [(r^2 + c^2) \sin \theta - crf] \phi' \} \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \\
& G = -\frac{(r^2 + c^2)}{(r^2 + c^2) \sin \theta - crf} \\
& H = 2s \frac{[crf^\dagger - (r^2 + c^2) \cos \theta]}{(r^2 + c^2) \sin \theta - crf} + i \frac{r^2(\lambda f - f^\dagger)}{(r^2 + c^2) \sin \theta - crf} \\
& I = (1 - \frac{b}{r}) \left\{ \frac{(2s^2 + 1)}{3} [(r^2 + c^2) \sin \theta - crf] \phi'' - \frac{(s^2 - 1)}{3} [(r^2 + c^2) \sin \theta - crf] \phi'^2 \right\} + \\
& \quad + (1 - \frac{b}{r}) \left\{ \frac{(4s^2 + 3s^2 + 2)}{3} [(r + cc') \sin \theta - cf] \phi' + \frac{(4s^2 - 1)}{3} \frac{[(r + cc') \sin \theta - cf]^2}{(r^2 + c^2) \sin \theta - crf} \right\} + \\
& \quad - (1 - \frac{b}{r}) \left\{ \frac{(2s^2 - 3s - 2)}{3} [(1 + c'^2 + cc'') \sin \theta - c'f] + \frac{s(2s + 1)}{4} \frac{(c'r - c) \sin \theta}{(r^2 + c^2) \sin \theta - crf} \right\} + \\
& \quad + (1 - \frac{b}{r}) \left\{ \frac{s}{2} \frac{(c'r - c)^2 \sin^2 \theta}{(r^2 + c^2) \sin \theta - crf} \right\} + \\
& \quad + (\frac{b - rb'}{2r^2}) \left\{ \frac{(2s^2 + 1)}{3} [(r^2 + c^2) \sin \theta - crf] \phi' - \frac{(2s^2 - 3s - 2)}{3} [(r + cc') \sin \theta - cf] \right\} - \\
& \quad - \frac{(2s^2 + 1)}{3} \left\{ (\sin \theta - \lambda \cos \theta) + \frac{(cr \sin \theta - r^2 f)(f^{\dagger\dagger} + \lambda f^\dagger)}{(r^2 + c^2) \sin \theta - crf} \right\} - \\
& \quad - \frac{(s^2 - 1)}{3} \left\{ \frac{(r^2 + c^2) \cos^2 \theta - 2crf^\dagger \cos \theta + r^2 f^{\dagger 2}}{(r^2 + c^2) \sin \theta - crf} \right\} + i(\frac{b - rb'}{2r^2}) s(c'r - c) \sin \theta - \\
& \quad - i \frac{s(b - rb')}{2} \frac{[f(\sin \theta - \lambda \cos \theta) + (f^{\dagger\dagger} + \lambda f^\dagger) \sin \theta]}{(r^2 + c^2) \sin \theta - crf} + i(1 - \frac{b}{r}) sc'' r \sin \theta + \\
& \quad + i(1 - \frac{b}{r}) \left\{ \frac{s}{2} (c'r - c) \sin \theta [2\phi' - \frac{1}{(r^2 + c^2) \sin \theta - crf}] \right\} + \\
& \quad + i(1 - \frac{b}{r}) \left\{ s(2s - 1) \frac{[(r + cc') \sin \theta - cf](c'r - c) \sin \theta}{(r^2 + c^2) \sin \theta - crf} \right\} \tag{4.39}
\end{aligned}$$

Esta é a equação de onda que precisa ser obedecida por toda a radiação gravitacional emitida por um wormhole distorcido.

4.3 Soluções de MQN

A métrica (4.1) mostrou um poder de unificação muito grande na medida em que quase todos os wormholes (e incluindo buracos negros) mais comumente encontrados na literatura podem ser vistos como casos especiais dessa classe. Uma lista com alguns exemplos poderia ser:

i. Wormhole Ultraestático [15]

$$\phi = 0, b = (r_0^2)/r, c = 0, d = 0$$

ii. Wormhole de Morris-Thorne com Densidade Zero [1]

$$\phi = 0, b = 2GM, c = 0, d = 0$$

iii. Wormhole Proximal de Schwarzschild [1]

$$\phi = 1/2 \ln(1 - 2GM/r + \varepsilon/r^2), b = 2GM, c = 0, d = 0$$

iv. "Foil" de Schwarzschild [23] (buraco negro para $\lambda = 0$)

$$\phi = 1/2 \ln(1 - 2GM/r + \lambda^2), b = 2GM, c = 0, d = 0$$

v. Wormhole Cosmológico [24]

$$\phi = m/l_0 \arctg(l/l_0) = u, b = r(1 - e^2 u),$$

$$c = \sqrt{(e^{-2u}(l^2 + l_0^2) - r^2)}, d = -\sqrt{(e^{-2u}(l^2 + l_0^2) - r^2)} \sin \theta$$

vi. "Punch-through" Wormhole [25]

$$\phi = 1/2 \ln(((G^2 M^2 - 4r^2)^2 + 16\lambda^2 r^2)/((GM + 2r)^4 + 16\lambda^2 r^2)),$$

$$b = (GMr + 2r^2 - 16r^5)/(GM + 2r)$$

$$c = \sqrt{((GM + 2r)^4 - 16r^4)}/4r,$$

$$d = -\sqrt{((GM + 2r)^4 - 16r^4)}/4r\sin\theta$$

vii. "Timehole" [25]

$$\phi = 1/2\ln(1 - 2GM/\sqrt{\lambda^2 + l^2}), b = \sqrt{(\lambda^2 + l^2)}/2GML, c = \lambda, d = -\lambda\sin\theta$$

Todos esses wormholes irão emitir radiação gravitacional baseada na equação (4.39). No entanto, é interessante notar que em todos os casos a equação se apresenta muito difícil de se resolver devido a duas características principais: o *acoplamento* da frequência com o potencial ($F \neq 0$) de um modo semelhante ao que acontece com o buraco negro de Kerr, como pode ser visto pelo potencial (3.7) da referência [34], cuja forma geral é dada por

$$Q = \omega^2 - 2is\omega \frac{2r\Delta - (r-1)(r^2 + \alpha^2)}{(r^2 + \alpha^2)^2} - \left[\frac{\lambda\Delta}{(r^2 + \alpha^2)^2} + G^2 + \frac{dG}{dr_*} \right], \quad (4.40)$$

e a *separação* de variáveis que nem sempre é possível. Como já foi dito no começo, esse trabalho visa encontrar uma solução exata para a equação (4.39). Para tentar encontrá-la serão analisados alguns casos baseados na equação de desacoplamento, dada por $F = 0$, ou seja,

$$(r + cc') \sin \theta - cf = [(r^2 + c^2) \sin \theta - crf]\phi' \quad (4.41)$$

Caso 1: Forças de maré nulas

Esse caso consiste em se impor a condição de que $\phi = 0$ na equação de desacoplamento (4.41). Fazendo isso, obtemos a condição (pois $c \neq 0$)

$$f(\theta) = \frac{(r + cc')}{c} \sin \theta \quad (4.42)$$

que equivale à condição

$$\frac{(r + cc')}{c} = \alpha \quad (4.43)$$

onde α é uma constante.

Substituindo esses valores na equação de onda (4.39), percebe-se que a separação de variáveis só ocorre se tivermos $c = kr$ e, portanto, $\alpha = \frac{1+k^2}{k}$. Infelizmente, essa situação entra em contradição com o comentário após a condição de Tipo D (4.18), pois f não pode assumir tal valor. Assim, wormholes com forças de maré nulas até podem desacoplar a frequência do potencial, mas não produzem separação eficiente das variáveis na equação de onda, impossibilitando desse jeito uma resolução analítica do problema.

Caso 2: Simetria esférica

Atingimos simetria esférica tomando o parâmetro f como zero. A equação de desacoplamento (4.41) então nos fornece

$$\phi' = \frac{r + c\phi}{r^2 + c^2} \quad (4.44)$$

Novamente, a separação de variáveis na equação de onda aponta para a solução $c = kr$ e isso, por sua vez, nos dá

$$\phi' = \frac{1}{r} \quad (4.45)$$

que é o mesmo resultado que obtivemos no Capítulo 3 para o wormhole de Morris-Thorne ($k = 0$).

Caso 3: Separação de variáveis

Inicialmente, assumamos apenas que o candidato tem um parâmetro $c = kr$, e substitua-o na equação de perturbação (4.39). A fim de se obter a *separação de variáveis*, é preciso ter

$$f(\theta) = \alpha \sin \theta \quad (\alpha = \text{constante}) \quad (4.46)$$

Agora divide-se a equação resultante por $\sin \theta$ e soma-se a ambos os membros $-(2s^2 + 3s + 1)/3$, obtendo a equação angular

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{(\alpha - k)}{U} \operatorname{cosec} \theta \right] \frac{d^2 S}{d\theta^2} + \left[\left(2 - \frac{1}{U} - \frac{2\alpha k}{U} + \frac{2\alpha^2}{U} \right) \cot \theta + \frac{(\alpha - k)^2}{U} \right] \frac{dS}{d\theta} + \\ & + \left\{ -\frac{(1 + k^2)}{U} m^2 \operatorname{cosec}^2 \theta - 2\left(s + \frac{i\alpha}{U}\right) m \cot \theta \operatorname{cosec} \theta - \frac{(2s^2 + 1)}{3} \left[1 - \frac{\alpha(k - \alpha)}{U} \right] \operatorname{cosec} \theta - \right\} \\ & - \left\{ \frac{(s^2 - 1)}{3} \left[1 + \frac{(\alpha - k)^2}{U} \right] \cot \theta \operatorname{cosec} \theta - \frac{(2s^2 + 3s + 1)}{3} + K \right\} S = 0, \\ & U = 1 + k^2 - \alpha k \end{aligned} \quad (4.47)$$

e a equação radial

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 Z}{dt^{*2}} + \omega^2 Z + 2si\omega e^\phi \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \left[\frac{1}{r} - \phi' \right] Z + \\
& + e^{2\phi} \left\{ \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[\frac{1-s^2}{3r^2} + \frac{(4s^2-1)}{3r} \phi' + \frac{1-s^2}{3} \phi'^2 + \frac{(2s^2+1)}{3} \phi'' \right] \right\} \\
& + e^{2\phi} \left\{ \left(\frac{b-rb'}{2r^2} \right) \left[\frac{(2s^2+1)}{3} \phi' - \frac{(2s^2+1)}{3r} \right] \right\} - \\
& - e^{2\phi} \left\{ \frac{1}{Ur^2} \left[\frac{(2s^2+3s+1)}{3} + K \right] \right\} Z = 0 \quad (U = 1 + k^2 - \alpha k) \quad (4.48)
\end{aligned}$$

Uma simples análise das possibilidades para k e α a fim de simplificar as equações e torná-las resolvíveis de forma exata, leva à escolha especial

$$\alpha = k \quad (4.49)$$

Com essa escolha, a equação (4.47) é resolvível e, mais interessante ainda, tem-se que a equação (4.48) é idêntica àquela do caso Morris-Thorne de modo que ela também pode ser transformada na equação de onda padrão pelo mesmo procedimento ilustrado no Capítulo 3. Tomando-se $k = 0$, obtemos a solução (3.40). Para $k \neq 0$ obtém-se resultados similares, mas a constante de separação K na equação angular será diferente. No próximo caso, frequências de MQN serão determinadas para um wormhole com parâmetros de distorção não nulos, baseando-se num esquema de aproximação.

Caso 4: “Modelo brinquedo”

Substituindo $f = 0$ nas equações (4.18) e (4.39), obtém-se uma equação de bernoulli para a condição de desacoplamento

$$r + cc' = (r^2 + c^2)\phi' \quad (4.50)$$

que tem a solução geral

$$c^2 = Ae^{2\phi} + e^{2\phi} \int e^{-2\phi} [\phi' r^2 - r] dr \quad (4.51)$$

De acordo com a equação (3.4), tomando-se $\phi = 0$, consegue-se um wormhole perfeitamente transitável porque *não haverá nenhuma força de maré*. Inserindo esse valor em (4.51), conclui-se que o desacoplamento da frequência e do potencial neste caso é determinado por $c = \sqrt{C^2 - r^2}$ e $d = -\sqrt{C^2 - r^2} \sin \theta$, onde r vai de r_0 na garganta até $r = C$.

Pode-se conseguir separação de variáveis na equação (4.39) se for considerado o esquema de aproximação $b \ll r \ll C$. Neste caso, a equação angular fica

$$\frac{d^2 S}{d\theta^2} + (1 + 2\cot\theta) \frac{dS}{d\theta} - [m^2 \operatorname{cosec}^2 \theta + 2sm \operatorname{cosec} \theta \cot \theta + s^2 \cot^2 \theta - s - KC^2]S = 0 \quad (4.52)$$

e a equação radial se reduz a

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{dl^2} + \omega^2 R &= \left[\frac{s+6}{2} - K + isr \right] R \\ l &= l^* \epsilon(-\infty, +\infty) \quad \frac{dr}{dl} = \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Uma vez determinada a constante de separação K , com o uso da equação angular, a solução radial é alcançada fazendo-se a transformação

$$Z = -\frac{1}{R} \frac{dR}{dl} \quad (4.54)$$

resultando na equação de riccati

$$\frac{dZ}{dl} = Z^2 + \left[\omega^2 + K - \frac{(s+2)}{6} - isr(l) \right] \quad (4.55)$$

Tomando-se $b = (r_0^2)/r$ e aproximando em segunda ordem a raiz quadrada $r = \sqrt{l^2 + r_0^2}$ pela série [29]

$$\sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{(1 - l^2 - r_0^2)^n}{n!} \quad (4.56)$$

obtém-se a solução exata

$$Z = -\frac{1}{w} \frac{dw}{dl}$$

onde

$$w(l) = \sqrt{l} \left[C_1 J_{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\omega^2 + K - \frac{(s+6)}{2} - i\frac{s}{2}l} \right) + C_2 Y_{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\omega^2 + K - \frac{(s+6)}{2} - i\frac{s}{2}l} \right) \right] \quad (4.57)$$

As frequências de MQN são então obtidas a partir dos zeros das funções de Bessel, porque haverá divergência (ou ressonância) nesses pontos:

$$\begin{aligned}\omega_K &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a} + i \frac{\text{sgn}(b)}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a} \\ a &= \frac{(s+6)}{2} - K \\ b &= \frac{s}{2}\end{aligned}\tag{4.58}$$

Note que este wormhole não apresenta modos de vibração para $s = 2$, porque neste valor, as partes imaginárias das frequências em (4.58) são positivas, e assim o que se obtém são “modos crescentes” (não amortecidos), que não tem significado físico.

Embora todas as tentativas a respeito tenham fracassado, conjectura-se que existam wormholes satisfazendo a condição de desacoplamento (4.41) e que permitam simultaneamente a separação de variáveis na equação de onda (4.39).

Capítulo 5

PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

O objetivo desse capítulo é mostrar que é possível encontrar wormholes que tenham barreiras de potencial idênticas a outros sistemas físicos na Natureza, tais como um elétron ou uma molécula de hidrogênio. Essa idéia vai de encontro ao raciocínio de Einstein, Rosen e Wheeler em eliminar as singularidades (partículas quânticas e até buracos negros) por meio de alguma estrutura unificadora. Na seção 5.1, a propagação das ondas eletromagnéticas no espaço-tempo descrito no capítulo anterior é estudada mediante a perturbação das equações de Maxwell via formalismo de Newman-Penrose, assim como feita para os buracos negros [17]. Na seção 5.2, buscaremos um candidato *simples*, significando *simples* uma métrica ortogonal que satisfaça o Teorema de Birkhoff, separe as partes angular e radial da equação de perturbação obtida na Seção 5.1 e, finalmente, seja capaz de desacoplar a frequência de oscilação do potencial na equação de onda. Como resultado desse processo, felizmente será encontrada um tipo de geometria que preenche tais critérios e cuja barreira de potencial pode ser modelada por sua função de forma. Na Seção 5.3, mostraremos que tal geometria pode representar uma barreira de Coulomb pela simples resolução de uma equação diferencial ordinária na função de forma b . Um exemplo ilustrativo é dado e é mostrado que outras barreiras de potencial podem ser modeladas pelo mesmo procedimento.

5.1 Perturbação das Equações de Maxwell

O objetivo desta seção é determinar as perturbações nos escalares de Maxwell ϕ_0 e ϕ_2 (ver Capítulo 1, Seção 1.2), porque esses componentes contêm toda a informação necessária a respeito das interações entre as ondas eletromagnéticas e a geometria de wormhole de fundo. Como é dito em¹ [17]: *Como a amplitude da energia-momento eletromagnética é de segunda ordem no campo eletromagnético, a mudança na geometria de base causada pela perturbação eletromagnética é também de segunda ordem. Assim, nas equações de Maxwell, esta mudança na geometria pode ser negligenciada a apenas primeira ordem.*

Em um espaço-tempo de Tipo D, as equações de Maxwell são

$$\begin{aligned} (D - 2\rho)\phi_1 - (\bar{\delta} + \pi - 2\alpha)\phi_0 &= 2\pi J_l \\ (\delta - 2\tau)\phi_1 - (\Delta + \mu - 2\gamma)\phi_0 &= 2\pi J_m \\ (D - \rho + 2\varepsilon)\phi_2 - (\bar{\delta} + 2\pi)\phi_1 &= 2\pi J_{\bar{m}} \\ (\delta - \tau + 2\beta)\phi_2 - (\Delta + 2\mu)\phi_1 &= 2\pi J_n, \end{aligned} \tag{5.1}$$

em que os escalares ϕ são campos de teste de primeira ordem e $J_l = J_\mu l^\mu$, etc., com J_μ a densidade de 4-corrente.

A fim de reduzir o sistema (5.1), basta tomar os seguintes passos:

- i. Opere $(\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})$ na primeira equação de Maxwell e $-(D - \varepsilon + \bar{\varepsilon} - 2\rho - \bar{\rho})$ na segunda;
- ii. Some ambas as equações e elimine ϕ_1 utilizando a identidade $[D - \varepsilon + \bar{\varepsilon} - 2\rho - \bar{\rho}](\delta - 2\tau) = [\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi}](D - 2\rho)$.

A equação resultante será

$$\begin{aligned} \{ (D - \varepsilon + \bar{\varepsilon} - 2\rho - \bar{\rho})(\Delta + \mu - 2\gamma) - (\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})(\bar{\delta} + \pi - 2\alpha) \} \phi_0 &= 2\pi J_0, \\ \text{com} \\ J_0 &= (\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})J_l - (D - \varepsilon + \bar{\varepsilon} - 2\rho - \bar{\rho})J_m. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Como explicado em [17], o conjunto completo das equações de Newman-Penrose é invariante sob a transformação $l \leftrightarrow n, m \leftrightarrow \bar{m}$ e esta simetria não é destruída pela condição de Tipo D. Pode-se portanto derivar uma equação para ϕ_2 pela aplicação dessa transformação

¹O leitor interessado pode encontrar toda a base para o desenvolvimento feito nesta seção nas referências [17], [6] e [22].

à equação (5.2):

$$\begin{aligned} & \{(\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + 2\mu + \bar{\mu})(D - \rho + 2\varepsilon) - (\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} + 2\pi - \bar{\tau})(\delta - \tau + 2\beta)\} \phi_2 = 2\pi J_2, \\ & \text{com} \\ & J_2 = (\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + 2\mu + \bar{\mu})J_{\bar{m}} - (\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} + 2\pi - \bar{\tau})J_n. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Escolhendo a densidade de 4-corrente nas direções de l e n torna J_0 e J_2 iguais a zero nas equações acima, a homogeneidade sendo garantida pelo caráter angular dos operadores relevantes. Desta forma atingem-se as *Equações de Teukolsky*, que governam as perturbações nos escalares de Maxwell ϕ_0 e ϕ_2 , da classe de wormholes distorcidos estáticos e de Tipo D:

$$\{(D - \varepsilon + \bar{\varepsilon} - 2\rho - \bar{\rho})(\Delta + \mu - 2\gamma) - (\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})(\bar{\delta} + \pi - 2\alpha)\} \phi_0 = 0 \quad (5.4)$$

e

$$\{(\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + 2\mu + \bar{\mu})(D - \rho + 2\varepsilon) - (\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} + 2\pi - \bar{\tau})(\delta - \tau + 2\beta)\} \phi_2 = 0 \quad (5.5)$$

Agindo sobre $\chi\phi_2$, onde

$$\begin{aligned} \chi &= e^{\int \lambda d\theta} [(r^2 + c^2) \sin \theta - crf], \\ \lambda &= \lambda(\theta) = \frac{crf^\dagger - (r^2 + c^2) \cos \theta}{(r^2 - c^2) \sin \theta - crf} \end{aligned} \quad (5.6)$$

e usando as relações de comutação² entre as derivadas direcionais e a ação destes operadores nos coeficientes de spin (4.17) da métrica do Capítulo 4, as equações de perturbação para $\psi^{(1)} = \phi_0$ e $\psi^{(-1)} = \chi\phi_2$, equações (5.4) e (5.5), podem ser escritas como uma única *equação mestre* em termos do parâmetro s (o qual assume os valores 1 ou -1):

$$\begin{aligned} & \{\Delta D - \bar{\delta}\delta + [\mu - (2s + 1)\bar{\varepsilon} - \varepsilon]D - [(2s + 1)\mu + 2s\varepsilon]\Delta + \\ & - 2(s + 1)\bar{\beta}\delta + 2s\beta\bar{\delta} + 2s\varepsilon^2 + 2(s + 2)\varepsilon\bar{\varepsilon} - (s - 1)\mu\varepsilon + 2(s + 2)\mu\bar{\varepsilon} + \\ & + 4(s + 1)\beta\bar{\beta} - 2s[(\Delta\varepsilon) - (\bar{\delta}\beta)] - (s + 2)\Psi_2 + 2(2s + 1)\Lambda\} \psi^{(s)} = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Não é difícil ver que o comentário após a condição de Tipo D (4.18) garante que a função

²Consulte o Capítulo 1 de [6] para essas definições.

$\lambda = \lambda(\theta)$ no integrando de (5.6) acima está bem definida.

Fazendo a substituição

$$\Psi(t, l, \theta, \varphi) = e^{-i\omega t} e^{im\varphi} \aleph(l, \theta), \quad (5.8)$$

para um modelo de função de onda, em que m é o número de onda (real), ω é a frequência (pode ser real ou complexa) e $\aleph(l, \theta) = R(l)S(\theta)$ é a amplitude, e usando o fato de que $\psi \neq 0$, para todo (t, l, θ, φ) , transforma-se (5.7) em

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2R} \frac{d^2 R}{dl^2} + \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [\mu - \varepsilon - (2s+1)\bar{\varepsilon}] + \frac{1}{\sqrt{2}} [(2s+1)\mu + 2s\varepsilon] \right\} \frac{1}{R} \frac{dR}{dl} - \\ & -\frac{e^{-2\phi}}{2} \omega^2 - \\ & -i\omega \left\{ \frac{e^{-\phi}}{\sqrt{2}} [\mu - \varepsilon - (2s+1)\bar{\varepsilon}] + \frac{e^{-\phi}}{\sqrt{2}} [(2s+1)\mu + 2s\varepsilon] + \frac{e^{-\phi}}{\sqrt{2}} 2\varepsilon \right\} + \\ & + 2s\varepsilon^2 + 2(s+2)\varepsilon\bar{\varepsilon} - (s-1)\mu\varepsilon + 2(s+2)\mu\bar{\varepsilon} - 2s(\Delta\varepsilon) - (s+2)\Psi_2 + 2(2s+1)\Lambda \\ & = \\ & \frac{r^2 \sin^2 \theta + d^2}{2(r^2 \sin \theta - cd)^2} \frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\theta^2} + \\ & + \frac{1}{S} \frac{dS}{d\theta} \left\{ \frac{2imr(d + c \sin \theta)}{2(r^2 \sin \theta - cd)^2} + 2(s+1)\bar{\beta} \frac{(r \sin \theta + id)}{\sqrt{2}(r^2 \sin \theta - cd)} \right\} - \\ & + \frac{1}{S} \frac{dS}{d\theta} \left\{ -2s\beta \frac{(r \sin \theta - id)}{\sqrt{2}(r^2 \sin \theta - cd)} + \frac{(r \sin \theta - id)(d^\dagger \sin \theta - d \cos \theta)(c + ir)r}{2(r^2 \sin \theta - cd)^3} \right\} \\ & - \frac{(r^2 + c^2)}{2(r^2 \sin \theta - cd)^2} m^2 - \\ & -im \left\{ -2(s+1)\bar{\beta} \frac{(c + ir)}{\sqrt{2}(r^2 \sin \theta - cd)} + 2s\beta \frac{(c - ir)}{\sqrt{2}(r^2 \sin \theta - cd)} \right\} \\ & -im \left\{ + \frac{(r \sin \theta - id)(r^2 \cos \theta - cd^\dagger)(c + ir)}{2(r^2 \sin \theta - cd)^3} \right\} - \\ & -4(s+1)\beta\bar{\beta} - 2s(\delta\beta) \end{aligned} \quad (5.9)$$

As expressões para $\mu, \varepsilon, \beta, \Psi_2$ e Λ são obtidas nas equações (4.17), (4.20) e (4.21).

Esta é a equação de onda que deve ser obedecida por toda radiação eletromagnética incidente em um wormhole distorcido.

5.2 Uma Solução Especial

Até aqui foi apresentada no Capítulo 4 uma métrica que generaliza a maior parte das métricas de wormhole estudadas na literatura atual e na Seção 5.1, a equação que governa a propagação eletromagnética ao longo desta geometria foi determinada. Deseja-se agora encontrar uma *solução simples* pertencente a essa classe e que satisfaça certas propriedades especiais. É imposto que a solução especial seja *ortogonal*, satisfaça o *Teorema de Birkhoff*³, *separe* as partes angular e radial da equação de onda e, finalmente, *desacople* a frequência de oscilação da barreira de potencial⁴.

Analisando as possibilidades, conclui-se que

$$\phi = \phi_1 + \ln r \quad b = b(r) \quad c = kr \quad d = -kr \sin \theta \quad (5.10)$$

é uma métrica que satisfaz todos os requisitos. É imediato que tal escolha promove um comportamento indesejado na medida que a componente g_{tt} da métrica não será assintoticamente plana. Como foi visto no Capítulo 4, para se consertar essa situação, é necessário fazer um corte de energia a uma distância $r = a_0$:

$$\begin{aligned} \phi &= \ln r - \ln a_0, \quad r_0 \leq r \leq a_0 \\ \phi &= 0, \quad r \geq a_0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

No próximo capítulo, esta mesma geometria será usada na determinação dos *modos quase-normais* de um buraco negro, e então a condição $k \neq 0$ será necessária. Entretanto, para os propósitos desse capítulo, pode-se sem perda de generalidade tomar $k = 0$, obtendo a seguinte solução

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{r^2}{a_0^2} dt^2 - dl^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad r_0 \leq r \leq a_0 \\ ds^2 &= dt^2 - dl^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad r \geq a_0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Substituindo (5.10), com $k = 0$ em (5.9), e multiplicando por $-2r^2$, atinge-se a separação de variáveis, isto é, $\aleph(l, \theta) = R(l)S(\theta)$ onde a equação angular é

$$\frac{d^2 S}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{dS}{d\theta} + (-m^2 \operatorname{cosec}^2 \theta - 2s m \cot \theta \operatorname{cosec} \theta - (s+1) \cot^2 \theta + s \operatorname{cosec}^2 \theta + C) S = 0 \quad (5.13)$$

³Isto é, seja a única solução estática esfericamente simétrica da equação de Einstein.

⁴Ou seja, o coeficiente de $i\omega$ em (5.9) precisa se anular.

A equação (5.13) juntamente com condições de regularidade em $\theta = 0$ e π , constitui-se num problema de autovalor de Sturm-Liouville para a constante de separação C . Desde que a constante de separação seja determinada, toda a informação física está contida na equação radial que pode ser transformada em uma equação de Schrödinger através das seguintes mudanças de variáveis

$$R^{(s)}(l) = r^{-(s+1)} Z^{(s)}(l) \quad \frac{dl}{dl^*} = e^\phi \quad (5.14)$$

Assim, a equação de onda padrão para a radiação eletromagnética propagando-se através da solução de wormhole especial (5.12) será

$$\Lambda^2 Z^{(s)} = V Z^{(s)} \quad \left(\Lambda^2 = \frac{d^2}{dl^{*2}} + \omega^2 \right) \quad (5.15)$$

onde o potencial é dado por

$$V(l^*) = \frac{1}{a_0^2} \left\{ \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[(s+1)^2 - \frac{5(s+1)}{2} \right] + \left(\frac{b - rb'}{2} \right) \left[\frac{3s+4}{3r} - \frac{5(s+1)}{3} \right] - [C + s + 1] \right\} \quad (5.16)$$

Note que

$$l^* = \pm \int_{r_0}^r \frac{e^{-\phi}}{\sqrt{1 - \frac{b}{r}}} dr. \quad (5.17)$$

Na próxima seção um método será apresentado a fim de se modelar sistemas físicos através desta métrica por meio da escolha conveniente de funções de forma b na equação (5.16).

5.3 Barreiras de Potencial

O que foi visto até agora é que existe um tipo especial de métrica que possui um potencial dependendo somente da função de forma $b = b(r)$. Essa liberdade de escolha permite criar um método para se interpretar vários sistemas físicos apenas pelo ajuste da função de forma a fim de se atingir a barreira de potencial desejada. No que segue essa técnica será ilustrada para uma barreira de Coulomb.

Seja [30]

$$V = -\frac{\epsilon^2}{r} + \frac{j(j+1)}{r^2} - \frac{\epsilon^4}{4(j+1)^2} \quad (5.18)$$

uma barreira de Coulomb, onde j é o momento angular e ϵ é a carga elétrica do elétron. O desejo aqui é o de que a equação (5.15) represente esta barreira de modo que é preciso impor

sobre (5.16),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_0^2} \left\{ \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[(s+1)^2 - \frac{5(s+1)}{2}\right] + \left(\frac{b - rb'}{2}\right) \left[\frac{3s+4}{3r} - \frac{5(s+1)}{3}\right] - [C + s + 1] \right\} = \\ & = -\frac{\epsilon^2}{r} + \frac{j(j+1)}{r^2} - \frac{\epsilon^4}{4(j+1)^2}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

dando origem a uma equação diferencial ordinária de primeira ordem para b ,

$$\begin{aligned} b' + b \left[\frac{A}{Ur} - \frac{5(s+1)}{U} \right] &= \frac{B}{U} - \frac{6\epsilon^2}{Ura_0^2} + \frac{6j(j+1)}{Ur^2a_0^2}, \\ A &= (3s+4) - 6(s+1)^2 + 15(s+1), \\ B &= 6[C + s + 1] - 6(s+1)^2 + 15(s+1) - \frac{3\epsilon^4}{2a_0^2(j+1)^2}, \\ U &= 5(s+1)r - (3s+4), \end{aligned} \quad (5.20)$$

cuja solução geral⁵ é

$$b = Q[r^{-1}U^{5(s+1)}]^{-\frac{A}{3s+4}}U + [r^{-1}U^{5(s+1)}]^{-\frac{A}{3s+4}}U \int^r [t^{-1}U^{5(s+1)}]^{\frac{A}{3s+4}}U^{-1} \left[\frac{B}{U} - \frac{6\epsilon^2}{Uta_0^2} + \frac{6j(j+1)}{Ut^2a_0^2} \right] dt \quad (5.21)$$

Para uma caso de estudo simples, tome $Q = \ln a_0 = 0$ e $s = -1$, então

$$b = \frac{3j(j+1)}{r} - [6j(j+1) - \frac{3\epsilon^4}{2(j+1)^2}]r \ln r - 6\epsilon^2 \quad (5.22)$$

A garganta ocorre em r_0 como solução da equação transcendental

$$r = \frac{3j(j+1)}{r} - [6j(j+1) - \frac{3\epsilon^4}{2(j+1)^2}]r \ln r - 6\epsilon^2 \quad (5.23)$$

Sua amplitude de espalhamento é, de acordo com a referência [30],

$$S_j(\omega) = \frac{\Gamma(j+1 - i\frac{\epsilon^2}{2\omega})\Gamma(1 + i\frac{\epsilon^2}{2\omega})}{\Gamma(j+1 + i\frac{\epsilon^2}{2\omega})\Gamma(1 - i\frac{\epsilon^2}{2\omega})} \quad (5.24)$$

As ressonâncias ocorrem nos pontos de divergência de Γ , que são os inteiros negativos, pois não há zeros para a função gama no plano complexo [9]. Entretanto, para uma barreira de

⁵ Q é uma constante.

Coulomb há apenas modos puramente crescentes,

$$\omega_n = \frac{i\epsilon^2(n+1)}{2}, \quad (5.25)$$

ou puramente decrescentes ($n > j-1$),

$$\omega_n = -\frac{i\epsilon^2}{(n+1)-j}. \quad (5.26)$$

Também é relevante nesse exemplo simplificado que a função de forma para o modo de vibração $s = -1$ tenha sido determinada. Isto poderia ter sido feito para o outro modo também. Admitindo a forma (5.22), o potencial gerado por este wormhole no modo $s = 1$ será

$$V = B \ln r + \left[\frac{7B-6}{6} + 10\epsilon^2 - j(j+1) \right] - \frac{5B}{3}r - \frac{[\epsilon^2 + 10j(j+1)]}{r} + \frac{10j(j+1)}{r^2},$$

$$B = 6j(j+1) - \frac{3\epsilon^4}{2(j+1)^2}, \quad (5.27)$$

de maneira que, quando $r \rightarrow 0$, ele também forma uma barreira de Coulomb.

O processo descrito acima pode ser estendido a outras barreiras de potencial [30], como as de Morse, Poschl-Teller, Eckart, etc. Estas barreiras devem apresentar características mais interessantes, como modos quase-normais oscilantes por exemplo.

Capítulo 6

FREQUÊNCIAS DE MQN PARA BURACOS NEGROS

Este capítulo continua o desenvolvimento feito nos dois capítulos anteriores que estudaram algumas das propriedades de uma classe de métricas. No que segue, uma solução especial, pertencente a essa classe, será usada na tentativa de se aproximar potenciais de buracos negros de forma similar às quadraturas. Com essa abordagem, será possível determinar uma técnica semi-analítica e equações algébricas para as frequências de MQN dos buracos negros de Schwarzschild e Kerr.

6.1 O Problema

Buracos negros são a característica mais intrigante da Teoria da Relatividade Geral pois a existência de um e completude do outro estão intrinsecamente ligadas. Entretanto, a métrica de buraco negro é uma *singularidade* da teoria, uma estrela *feita de vácuo* e um lugar no universo que claramente desafia todas as leis da mesma Física que o criou! Tal comportamento à parte, parecem haver sinais da presença de buracos negros na Natureza, especialmente no núcleo das galáxias, como a Via Láctea.

Após o trabalho pioneiro de Regge & Wheeler [31] nos anos 50, as perturbações das métricas de buracos negros foram extensivamente estudadas a fim de se responder à questão da possível estabilidade de tais objetos na Natureza. Vishweshwara [32] propôs em 1956 a necessidade de se considerar o efeito das frequências complexas nas equações de perturbação, em que a parte real representa a frequência de oscilação e a imaginária representa uma taxa de amortecimento. As oscilações a partir desses tipos de frequências foram denominadas *modos quase-normais* para distingui-las dos *modos normais* de um sistema fechado (ondas planas). Mais que isso, a definição completa dos modos quase-normais implica que eles sirvam como “digitais” do buraco negro no sentido de que, nos últimos estágios, eles carregam somente informação a respeito da estrutura da métrica perturbada e não da perturbação que causou o efeito. Revisões completas desses assuntos podem ser encontradas em [6] e [33].

Wormholes foram analisados do ponto de vista de seus modos quase-normais com os mesmos objetivos que aqueles dos buracos negros. Nesse capítulo, um candidato particular da classe dos wormholes distorcidos estudada até então será escolhido por possuir um tipo especial de potencial. Munindo-se desses “blocos de construção”, procederemos a uma descrição das barreiras de potencial de Schwarzschild e Kerr. Nessa seção, tal wormhole será determinado e na seção seguinte, ele será usado para se propor um método de determinação das frequências quase-normais para um buraco negro em geral *preenchendo o espaço-tempo com estruturas de wormhole específicas de uma maneira similar a uma partição que preenche um domínio de integração com intervalos*.

Escolhendo-se $f = 0$ e $c = kr$ na equação (4.39), que deve ser obedecida por toda a radiação gravitacional emitida por um wormhole distorcido, obtém-se após alguma manipulação a

equação angular

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{-k}{U} \operatorname{cosec} \theta \right] \frac{d^2 S}{d\theta^2} + \left[\left(2 - \frac{1}{U} \right) \cotg \theta + \frac{k^2}{U} \right] \frac{dS}{d\theta} + \\ & + \left\{ -m^2 \operatorname{cosec}^2 \theta - 2sm \cotg \theta \operatorname{cosec} \theta - \frac{(2s^2 + 1)}{3} \operatorname{cosec} \theta - \right\} \\ & - \left\{ \frac{(s^2 - 1)}{3} \left[1 + \frac{k^2}{U} \right] \cotg \theta \operatorname{cosec} \theta - \frac{(2s^2 + 3s + 1)}{3} + K \right\} S = 0, \\ & U = 1 + k^2 \end{aligned} \quad (6.1)$$

e a equação radial

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 Z}{dl^{*2}} + \omega^2 Z + 2si\omega e^\phi \sqrt{1 - \frac{b}{r} \left[\frac{1}{r} - \phi' \right]} Z + \\ & + e^{2\phi} \left\{ \left(1 - \frac{b}{r} \right) \left[\frac{1 - s^2}{3r^2} + \frac{(4s^2 - 1)}{3r} \phi' + \frac{1 - s^2}{3} \phi'^2 + \frac{(2s^2 + 1)}{3} \phi'' \right] \right\} \\ & + e^{2\phi} \left\{ \left(\frac{b - rb'}{2r^2} \right) \left[\frac{(2s^2 + 1)}{3} \phi' - \frac{(2s^2 + 1)}{3r} \right] \right\} - \\ & - e^{2\phi} \left\{ \frac{1}{Ur^2} \left[\frac{(2s^2 + 3s + 1)}{3} + K \right] \right\} Z = 0 \quad (U = 1 + k^2) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Procede-se agora, em analogia com o que foi feito no Capítulo 4, buscando-se algum tipo de wormhole que não apresente a frequência *acoplada* com o potencial na equação radial (6.2). Essa condição é expressa por

$$2si\omega e^\phi \sqrt{1 - \frac{b}{r} \left[\frac{1}{r} - \phi' \right]} = 0 \quad (6.3)$$

e o vínculo na função da métrica $\phi = \phi(r)$ será

$$\phi' = \frac{1}{r} \Rightarrow \phi = \phi_1 + \ln r \quad (\phi_1 = \text{constante}) \quad (6.4)$$

Novamente, o que (6.4) sugere é que uma vez que você possa resolver a equação angular (6.1) *exatamente* para a constante de separação, você será capaz de determinar de maneira *exata* a solução analítica da parte radial dada por (6.2). Assim como no caso estudado no Capítulo 3, a componente da métrica ϕ em (6.4) exige a necessidade de um corte de energia

a uma distância $r = a_0$:

$$\begin{aligned}\phi &= \ln r - \ln a_0, \quad 0 < r \leq a_0 \\ \phi &= 0, \quad r \geq a_0\end{aligned}\tag{6.5}$$

Assim, a métrica procurada é

$$\begin{aligned}ds^2 &= \frac{r^2}{a_0^2} dt^2 - dl^2 - r^2(1 + k^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad 0 < r \leq a_0 \\ ds^2 &= dt^2 - dl^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad r \geq a_0\end{aligned}\tag{6.6}$$

que possui a propriedade de ao mesmo tempo *separar* as variáveis na equação de perturbação e *desacoplar* frequência e potencial na parte radial. A informação física da onda gravitacional emitida por este wormhole está contida nas equações

$$\frac{d^2 Z}{dl^{*2}} + \omega^2 Z = 0, \quad l \rightarrow -\infty, \quad l \rightarrow +\infty\tag{6.7}$$

$$\frac{d^2 Z}{dl^{*2}} + \omega^2 Z = V_0 Z, \quad -l^*(a_0) \leq l^* \leq l^*(a_0)\tag{6.8}$$

as quais revelam um problema de espalhamento por uma barreira de potencial unidimensional quadrada de altura V_0 , dada por

$$V_0 = \frac{K + s + 3}{a_0^2(1 + k^2)}.\tag{6.9}$$

O processo de determinação das frequências de MQN para a métrica (6.6) segue a mesma linha de raciocínio utilizada no Capítulo 3, Seção 3.3, com a diferença de que agora as alturas das barreiras de potencial têm expressões diferentes. Formalmente, no entanto, o resultado é o mesmo, a saber

$$\omega^2 = z^2 + V_0\tag{6.10}$$

em que vale a equação transcendental complexa

$$2z\sqrt{z^2 + V_0} = -V_0 i \sin az\tag{6.11}$$

6.2 O Método

O princípio do método que será descrito nessa seção é o mesmo que o antigo conceito de *quadratura*. Em uma integral de Riemann, integra-se uma *função* tomando-se o limite de uma aproximação que é feita por *retângulos* construídos a partir de uma partição do domínio de integração. Os potenciais de buracos negros são *funções* da coordenada tartaruga r_* com diferentes formatos para diferentes casos e o potencial da solução especial de wormhole (6.6) tem a forma de um *retângulo* com diferentes alturas (6.9) para diferentes valores de k .

Portanto, é possível se aproximar o potencial de um buraco negro por uma série de barreiras de potencial de métricas especiais, e então chegar à fórmula

$$\int_{r_0+2M}^{r_0+nM} [\sigma^2 - V] \frac{dr_*}{dr} dr \simeq p \sum_{l=2}^n [\omega_l^2 - V_l] \quad (6.12)$$

Para se obter maior simplicidade computacional, pode-se tomar o passo como $p = r_0$ de modo que a distância entre o l -retângulo e o horizonte será modelada pela métrica

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{r^2}{l^2 r_0^2} dt^2 - dl^2 - r^2(1 + k^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (l-1)r_0 \leq r \leq lr_0 \\ ds^2 &= dt^2 - dl^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad r \leq (l-1)r_0, \quad r \geq lr_0 \end{aligned} \quad (6.13)$$

a qual possui uma barreira de potencial quadrada dada por

$$V(lr_0, \sigma) = V_l(lr_0) = \frac{K + s + 3}{l^2 r_0^2 (1 + k^2)} \quad (6.14)$$

para algum k convenientemente escolhido. As frequências quase-normais ω_l são fornecidas por meio da equação (6.11).

Assim a fórmula (6.12) resulta em

$$\sigma^2[r_*(r_0+nM) - r_*(r_0+2M)] - r_0 \sum_{l=2}^n \omega_l^2 \simeq \int_{r_0+2M}^{r_0+nM} V(r, \sigma) \frac{dr_*}{dr} dr - r_0 \sum_{l=2}^n V_l(lr_0) = \Delta V(r_0, n), \quad (6.15)$$

estando a aproximação garantida pela existência de k e sendo tanto melhor quanto menor for o erro ΔV no potencial, isto é, $r_0 \rightarrow 0$ e $n \rightarrow \infty$.

Com a fórmula acima torna-se possível, a partir do conhecimento da forma do potencial de buraco negro V , determinar frequências quase-normais aproximadas σ para ele, simplesmente pela resolução de uma equação algébrica. Na sequência esses cálculos serão feitos para os

buracos negros de Schwarzschild e Kerr.

6.2.1 Buraco Negro de Schwarzschild

A coordenada tartaruga¹ está relacionada à coordenada radial por

$$\frac{dr_*}{dr} = \frac{r^2}{\Delta} \quad \Delta = r^2 - 2Mr \quad (6.16)$$

e o potencial de Regge-Wheeler é dado por

$$V(r) = \frac{j(j+1)}{r^2} - \frac{2M}{r^3}[j(j+1) + 3] + \frac{12M^2}{r^4} \quad (6.17)$$

Assim, a fórmula (6.15) resulta em

$$M\sigma^2 \left\{ (n-2) + \ln \left[1 + \frac{(n-2)M}{r_0} \right]^2 \right\} - r_0 \sum_{l=2}^n \omega_l^2 =$$

$$j(j+1) \left[\frac{1}{r_0 + 2M} - \frac{1}{r_0 + nM} \right] + 3M \left[\frac{1}{(r_0 + nM)^2} - \frac{1}{(r_0 + 2M)^2} \right] - r_0 \sum_{l=2}^n V_l(lr_0) \quad (6.18)$$

em que a existência de $V_l(lr_0) = V(lr_0)$ está garantida pela escolha de k em cada passo.

É importante ressaltar que foi encontrada uma equação algébrica apenas de segundo grau em σ !

6.2.2 Buraco Negro de Kerr

Como um exemplo ilustrativo, toma-se $M = 1$ e $m = 0$.

A coordenada tartaruga² está relacionada à coordenada radial por

$$\frac{dr_*}{dr} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \quad \Delta = r^2 + a^2 - 2r \quad (6.19)$$

¹As fórmulas apresentadas aqui podem ser encontradas em [6] ou [10].

²As fórmulas apresentadas aqui podem ser encontradas em [34] ou [10].

e o potencial de Kerr é definido por

$$\begin{aligned}
 V(r) &= 2is\sigma \left[\frac{2r\Delta - (r-1)(r^2 + a^2)}{(r^2 + a^2)^2} \right] + \left[\frac{\lambda\Delta}{(r^2 + a^2)^2} + G^2 + \frac{dG}{dr_*} \right], \\
 \lambda &= C_{ja} + a^2\sigma^2 + 2am\sigma - s(s+1), \\
 G &= \frac{s(r-1)}{r^2 + a^2} + \frac{r\Delta}{(r^2 + a^2)^2}
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Assim, a fórmula (6.15) fornece

$$\sigma^2 \int_{r_0+2}^{r_0+n} \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr - r_0 \sum_{l=2}^n \omega_l^2 = F(\sigma^2, \sigma, r)|_{r_0+2}^{r_0+n} - r_0 \sum_{l=2}^n V_l(lr_0) \tag{6.21}$$

onde a função F tem no máximo grau 2 em σ . Novamente atinge-se uma equação algébrica apenas de segundo grau em σ , mas dessa vez ela ocorre sobre o corpo complexo.

Capítulo 7

WORMHOLES LIMÍTROFES

Nesse capítulo, uma solução com a matéria exótica restrita a duas conchas infinitesimais em torno da garganta do wormhole é introduzida como um limite especial de uma classe de soluções pré-fixadas. A propagação de ondas gravitacionais e eletromagnéticas através de tal geometria com conteúdo minimal de matéria exótica é investigada a partir dos resultados anteriores.

7.1 Introdução

À parte os problemas teóricos decorrentes da necessidade de existência de grandes montantes de matéria exótica para sustentar wormholes macroscópicos os efeitos astrofísicos não triviais provenientes da existência de um wormhole têm sido intensivamente investigados nos últimos anos. O espalhamento de ondas escalares em uma classe de soluções de wormhole foi investigado por Kar e Sahdev [36], e algumas ressonâncias devido a estados fundamentais foram identificadas. Essas ressonâncias poderiam, em princípio, fornecer informações sobre o tamanho e forma da garganta do wormhole. Novamente, o problema do espalhamento foi tratado numericamente.

Aqui nós mostramos como obter, tomando-se um limite apropriado na classe de soluções introduzida em [36], uma solução com a matéria exótica restrita a duas conchas infinitesimais localizadas em torno da garganta do wormhole.

A classe de soluções de wormhole introduzida em [36] é dada por

$$ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{b}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (7.1)$$

onde

$$b = r \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \right]^{2 - \frac{2}{n}} \right\} \quad (7.2)$$

ou seja, consiste basicamente em uma classe de wormholes de Morris-Thorne com forças de maré nulas.

Assim temos $-\infty < l < +\infty$ e

$$r^n(l) = r_0^n + l^n \quad (7.3)$$

com n par. O wormhole minimal surge no limite $n \rightarrow +\infty$. Neste caso, temos $r(l) = r_0$ se $|l| \leq r_0$, e $r(l) = l$ se $|l| > r_0$, de modo que o espaço-tempo é plano fora do wormhole.

Para esta geometria de wormhole, as componentes do tensor energia-momento diagonal são [36]

$$\rho(l) = \frac{1}{(r_0^n + l^n)^{\frac{2}{n}}} - \frac{2(n-1)l^{n-2}r_0^n + l^{2n-2}}{(r_0^n + l^n)^2} \quad (7.4)$$

$$\tau(l) = \frac{l^{2n-2}}{(r_0^n + l^n)^2} - \frac{1}{(r_0^n + l^n)^{\frac{2}{n}}} \quad (7.5)$$

$$p(l) = \frac{(n-1)l^{n-2}r_0^n}{(r_0^n + l^n)^2} \quad (7.6)$$

As condições de energia fraca, dadas por $\rho \geq 0$, $\rho + \tau \geq 0$ e $\rho + p \geq 0$, são violadas para todo n . Entretanto, em nosso limite $n \rightarrow +\infty$, é fácil ver que toda a matéria exótica necessária está confinada nas conchas infinitesimais $|l| = r_0$ pois a solução é plana para $|l| > r_0$ e, para $|l| < r_0$, temos $\rho = -\tau = \frac{1}{r_0^2}$ e $p = 0$.

7.2 Ondas Gravitacionais

Vimos no Capítulo 3 que a equação de onda para a radiação gravitacional emitida por um wormhole de Morris-Thorne geral é

$$\Lambda^2 Z^{(s)} = V Z^{(s)} \quad \left(\Lambda^2 = \frac{d^2}{dt^{*2}} + \omega^2 \right) \quad (7.7)$$

em que o potencial é dado por

$$\begin{aligned} V(l^*) = & -2si\omega \left[\frac{1}{r} - \phi' \right] e^\phi \sqrt{1 - \frac{b}{r}} - \\ & -e^{2\phi} \left\{ \left(1 - \frac{b}{r} \right) \left[\frac{1-s^2}{3r^2} + \frac{(4s^2-1)}{3r} \phi' + \frac{1-s^2}{3} \phi'^2 + \frac{(2s^2+1)}{3} \phi'' \right] \right\} + \\ & -e^{2\phi} \left\{ \left(\frac{b-rb'}{2r^2} \right) \left[\frac{(2s^2+1)}{3} \phi' - \frac{(2s^2+1)}{3r} \right] \right\} \\ & -e^{2\phi} \left\{ -\frac{1}{r^2} \left[\frac{1-s^2}{3} + j(j+1) \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.8)$$

O wormhole limítrofe é dado pelo limite de uma sequência de wormholes de Morris-Thorne. Portanto, é razoável esperar que ele deva oscilar de acordo com essa equação. Substituindo $\phi = 0$ e (7.2) para o n -ésimo wormhole da sequência, teremos a equação (7.7) com potencial (7.8) dado por

$$\begin{aligned}
V_n(l) = & -2 \frac{si\omega}{r} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \right]^{1-\frac{1}{n}} + \\
& + \frac{1}{r^2} \left\{ \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \right]^{2-\frac{2}{n}} + 3(n-1) \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \right]^{1-\frac{2}{n}} + j(j+1) - 1 \right\}
\end{aligned} \tag{7.9}$$

O potencial resultante para o wormhole limítrofe consiste no limite de V_n quando $n \rightarrow +\infty$. Estes pontos estão agora sob investigação [40].

7.3 Ondas Eletromagnéticas

Como vimos no Capítulo 5, a propagação de ondas eletromagnéticas é governada pela equação

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2R} \frac{d^2 R}{dl^2} + \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [\mu - \varepsilon - (2s+1)\bar{\varepsilon}] + \frac{1}{\sqrt{2}} [(2s+1)\mu + 2s\varepsilon] \right\} \frac{1}{R} \frac{dR}{dl} - \\
& -\frac{e^{-2\phi}}{2} \omega^2 - \\
& -i\omega \left\{ \frac{e^{-\phi}}{\sqrt{2}} [\mu - \varepsilon - (2s+1)\bar{\varepsilon}] + \frac{e^{-\phi}}{\sqrt{2}} [(2s+1)\mu + 2s\varepsilon] + \frac{e^{-\phi}}{\sqrt{2}} 2\varepsilon \right\} + \\
& + 2s\varepsilon^2 + 2(s+2)\varepsilon\bar{\varepsilon} - (s-1)\mu\varepsilon + 2(s+2)\mu\bar{\varepsilon} - 2s(\Delta\varepsilon) - (s+2)\Psi_2 + 2(2s+1)\Lambda \\
& = \\
& \frac{r^2 \sin^2 \theta + d^2}{2(r^2 \sin \theta - cd)^2} \frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\theta^2} + \\
& + \frac{1}{S} \frac{dS}{d\theta} \left\{ \frac{2imr(d + c \sin \theta)}{2(r^2 \sin \theta - cd)^2} + 2(s+1)\bar{\beta} \frac{(r \sin \theta + id)}{\sqrt{2}(r^2 \sin \theta - cd)} \right\} - \\
& + \frac{1}{S} \frac{dS}{d\theta} \left\{ -2s\beta \frac{(r \sin \theta - id)}{\sqrt{2}(r^2 \sin \theta - cd)} + \frac{(r \sin \theta - id)(d^\dagger \sin \theta - d \cos \theta)(c + ir)r}{2(r^2 \sin \theta - cd)^3} \right\} \\
& - \frac{(r^2 + c^2)}{2(r^2 \sin \theta - cd)^2} m^2 - \\
& -im \left\{ -2(s+1)\bar{\beta} \frac{(c + ir)}{\sqrt{2}(r^2 \sin \theta - cd)} + 2s\beta \frac{(c - ir)}{\sqrt{2}(r^2 \sin \theta - cd)} \right\} \\
& -im \left\{ + \frac{(r \sin \theta - id)(r^2 \cos \theta - cd^\dagger)(c + ir)}{2(r^2 \sin \theta - cd)^3} \right\} - \\
& -4(s+1)\beta\bar{\beta} - 2s(\bar{\delta}\beta)
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Substituindo os valores $\phi = c = d = 0$, correspondentes ao wormhole limítrofe, obtemos

como resultado, após alguma manipulação, uma equação angular e uma equação radial, sendo esta última dada por

$$\frac{d^2 Z}{dl^2} + \omega^2 Z = V Z \quad (7.11)$$

com potencial

$$\begin{aligned} V(l) = & 2i\omega \frac{(s+1)}{r} \sqrt{1 - \frac{b}{r}} + \\ & + \frac{(s+2)}{3r^2} - \frac{(s+2)}{3r^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) - \frac{(s+2)}{r} \left(\frac{rb' - b}{6r^2}\right) + \\ & + \frac{(2s+1)}{3r^2} - \frac{(2s+1)}{3r^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) + \frac{(2s+1)}{r} \left(\frac{rb' - b}{3r^2}\right) - \\ & - 2C - \frac{(s+1)(s+2)}{r^2} \sqrt{1 - \frac{b}{r}} + \frac{2(s+1)^2}{r^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) + \frac{(s+1)}{r} \left(\frac{b - rb'}{2r^2}\right) \end{aligned} \quad (7.12)$$

em que C é a constante de separação determinada a partir da equação angular.

A equação (7.12) fornece o potencial para o wormhole limítrofe num processo de espalhamento de ondas eletromagnéticas desde que se saiba qual é o exato valor da função de forma b , isto é, novamente é preciso resolver o problema de se determinar o limite no infinito para a função b . Estes pontos estão agora sob investigação [40].

Capítulo 8

DOBRAS ESPACIAIS

Nesse último capítulo faremos um breve estudo das oscilações a serem apresentadas por um tipo de solução exótica das Equações de Einstein denominada *dobra espacial*. Primeiramente, será introduzido o conceito de dobra espacial e será visto que tal espaço-tempo produz violação das condições de energia, sendo necessário matéria exótica para mantê-lo. Em seguida, o procedimento utilizado em capítulos anteriores será aplicado à métrica de dobra espacial de Alcubierre, considerada tão importante quanto é a métrica de Morris-Thorne para os wormholes; será feita uma descrição do espaço-tempo em questão no formalismo de Newman-Penrose e depois as quantidades relevantes serão perturbadas. Obtendo as Equações de Teukolsky para o caso considerado, serão definidas condições sobre os parâmetros da métrica a fim de que se possa encontrar uma solução analítica para a equação de onda unidimensional resultante. Infelizmente, o mais longe que nossa análise nos levou foi à construção de um modelo de dobra espacial que apresenta frequências de MQN similares às da solução especial derivada do wormhole de Morris-Thorne do Capítulo 3, isto é, a solução encontrada pode ser considerada apenas como sendo *semi-analítica*.

8.1 Apresentação

Em 1994, o físico mexicano Miguel Alcubierre propôs a existência da *dobra espacial* como modelo matemático consistindo num método para se deformar o espaço em uma onda que poderia em teoria contrair o espaço à frente de uma espaçonave e expandi-lo na parte posterior. A nave então navegaria por essa onda dentro de uma região conhecida como *bolha de dobra*, formada por espaço plano. Como a nave não se move dentro dessa bolha, mas é carregada pela região pela qual a bolha se move, efeitos relativísticos convencionais não se aplicam da maneira como aconteceria se a nave estivesse viajando através do espaço-tempo plano com alta velocidade. Esse método de viagem também não envolve movimento mais rápido que a luz em um sentido local, pois um feixe de luz dentro da bolha continuaria a se mover mais rápido que a nave; ele é apenas *mais rápido que a luz* no sentido de que, graças à contração do espaço na sua frente, a nave poderia alcançar seu destino mais rápido que um feixe de luz restrito a viajar fora da bolha de dobra. Assim, a dobra espacial não contradiz o fato de que a relatividade proíbe que objetos mais lentos que a luz possam acelerar até velocidades superiores às da luz.

Para a dobra espacial de Alcubierre, a métrica de espaço-tempo é dada por

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - [dz - v(t)f(x, y, z)dt]^2 \quad (8.1)$$

A função de forma $f(x, y, z)$ deve possuir a característica geral de ter o valor $f = 0$ no exterior e $f = 1$ no interior da bolha de dobra. A classe geral de funções de forma escolhida por Alcubierre foi a das funções esfericamente simétricas $f(r)$ com $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Sempre que um exemplo específico é solicitado, o modelo de função de forma mais utilizado na literatura é

$$f(r) = \frac{\tanh[\sigma(r + R)] - \tanh[\sigma(r - R)]}{2 \tanh(\sigma R)} \quad (8.2)$$

onde $R > 0$ e $\sigma > 0$ são dois parâmetros arbitrários. No que segue, entretanto, não iremos impor nenhuma condição sobre a função de forma f ; o que iremos fazer é determinar quais as expressões para $v(t)$ e $f(x, y, z)$ a fim de que possamos obter uma solução analítica para as perturbações gravitacionais sofridas por uma dobra espacial.

Com a forma particular (8.1) da métrica, é possível demonstrar¹ que a densidade de energia medida por observadores cujas 4-velocidades são normais às hipersuperfícies $t = \text{constante}$ é

¹Conferir [5].

dada por

$$\rho = -\frac{v^2}{32\pi}[(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2] < 0. \quad (8.3)$$

Portanto, como a densidade de energia é negativa, precisamos de matéria exótica para viajar mais rápido que a velocidade da luz. Como vimos, fenômenos como o efeito Casimir e a aceleração do universo dão suporte a uma possível existência de matéria exótica na Natureza. Entretanto, gerar matéria exótica suficiente para produzir características como viajar além da velocidade da luz ou manter aberta a garganta de um wormhole é por enquanto impraticável. Acredita-se que assim como para os wormholes, não existe dobra espacial sem que haja matéria exótica para sustentá-la e que uma teoria consistente da gravitação quântica irá resolver tais problemas [5].

8.2 Descrição do Espaço-Tempo

A fim de descrever o espaço-tempo (8.1) no formalismo de Newman-Penrose, considere inicialmente o seguinte referencial ortonormal:

$$\begin{aligned} e_{1i} &= (1, 0, 0, 0) & e_1^i &= (1, 0, 0, vf) \\ e_{2i} &= (0, -1, 0, 0) & e_2^i &= (0, 1, 0, 0) \\ e_{3i} &= (0, 0, -1, 0) & e_3^i &= (0, 0, 1, 0) \\ e_{4i} &= (vf, 0, 0, -1) & e_4^i &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned} \quad (8.4)$$

Através das relações [21]

$$\begin{aligned} l = e_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[e_{(1)} + e_{(2)}] & n = e_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[e_{(1)} - e_{(2)}] \\ m = e_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[e_{(3)} + ie_{(4)}] & \bar{m} = e_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[e_{(3)} - ie_{(4)}], \end{aligned} \quad (8.5)$$

onde a barra denota conjugação complexa, obtemos a base tétrade fundamental, a qual será

usada de agora em diante:

$$\begin{aligned}
 l_i &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right) & l^i &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{vf}{\sqrt{2}} \right) \\
 n_i &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right) & n^i &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{vf}{\sqrt{2}} \right) \\
 m_i &= \left(\frac{ivf}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-i}{\sqrt{2}} \right) & m^i &= \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \\
 \bar{m}_i &= \left(-\frac{ivf}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}} \right) & \bar{m}^i &= \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}} \right)
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

$$e_a^i e_{bi} = \eta_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \eta^{ab}$$

As derivadas direcionais correspondentes são

$$\begin{aligned}
 D &= l^i \partial_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_t + \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_x + \frac{vf}{\sqrt{2}} \partial_z \\
 \Delta &= n^i \partial_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_t - \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_x + \frac{vf}{\sqrt{2}} \partial_z \\
 \delta &= m^i \partial_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_y + \frac{i}{\sqrt{2}} \partial_z \\
 \bar{\delta} &= \bar{m}^i \partial_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_y - \frac{i}{\sqrt{2}} \partial_z
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

Utilizando-se as equações (1.28), (1.29) e (1.40) aplicadas à base de Newman-Penrose (8.6), encontram-se os coeficientes de spin

$$\begin{aligned}
\kappa &= \gamma_{311} &= 0 \\
\sigma &= \gamma_{313} &= -\frac{iv}{2\sqrt{2}}[f_y + if_z] \\
\lambda &= \gamma_{244} &= -\frac{iv}{2\sqrt{2}}[f_y - if_z] \\
\nu &= \gamma_{242} &= 0 \\
\mu &= \gamma_{243} &= \frac{vf_z}{2\sqrt{2}} \\
\rho &= \gamma_{314} &= -\frac{vf_z}{2\sqrt{2}} \\
\tau &= \gamma_{312} &= -\frac{ivf_x}{2\sqrt{2}} \\
\pi &= \gamma_{241} &= -\frac{ivf_x}{2\sqrt{2}} \\
\varepsilon &= \frac{1}{2}(\gamma_{211} + \gamma_{341}) &= \frac{ivf_y}{4\sqrt{2}} \\
\gamma &= \frac{1}{2}(\gamma_{212} + \gamma_{342}) &= \frac{ivf_y}{4\sqrt{2}} \\
\beta &= \frac{1}{2}(\gamma_{213} + \gamma_{343}) &= \frac{ivf_x}{4\sqrt{2}} \\
\alpha &= \frac{1}{2}(\gamma_{214} + \gamma_{344}) &= -\frac{ivf_x}{4\sqrt{2}}
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Nesse ponto, precisamos restringir nossa função de forma a fim de obtermos um espaço-tempo de tipo D. Isso é necessário para que possamos usar as identidades de Teukolsky-Starobinsky no desenvolvimento feito na próxima seção. Para tanto, precisamos nos limitar a dobras espaciais que apresentem os coeficientes de spin κ , σ , λ e ν todos nulos, ou seja,

precisamos lidar com funções de forma que satisfaçam as seguintes condições:

$$f_y = f_z = 0 \quad (8.9)$$

isto é, devemos ter $f(x, y, z) = f(x)$.

Com a condição de Tipo D acima satisfeita, os coeficientes de spin ficam

$$\begin{aligned} \kappa = \sigma = \lambda = \nu = \rho = \mu = \varepsilon = \gamma &= 0 \\ \tau = \pi = 2\alpha = -2\beta &= -\frac{ivf_x}{2\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (8.10)$$

Os escalares de Weyl podem ser calculados diretamente pela Definição 1.12 ou através das identidades de Ricci (1.34). Para o espaço-tempo (8.1), obtemos os seguintes valores:

$$\begin{aligned} \Psi_0 = \Psi_2 = \Psi_4 &= 0 \\ \Psi_1 &= \frac{iv_t f_x}{8} + \frac{iv f_{xx}}{8} \\ \Psi_3 &= \frac{iv_t f_x}{8} - \frac{iv f_{xx}}{8} \end{aligned} \quad (8.11)$$

A fim de obter maior simplificação das equações, vamos impor

$$v_t = 0 \quad f_{xx} = 0 \quad (8.12)$$

de modo que se tenha o anulamento de *todos* os escalares de Weyl. Com isso, nossa dobra espacial possuirá uma velocidade de dobra uniforme, dada por $v = v_0$ e uma função de forma linear $f = ax + b$.

Os escalares de Ricci são determinados com auxílio das identidades de Ricci entre colchetes

(ver Capítulo 1):

$$\begin{aligned}
[R_{1314}] \Phi_{00} &= 0 \\
[R_{1312}] \Phi_{01} &= 0 \\
[\frac{1}{2}(R_{3414} - R_{1214})] \Phi_{10} &= 0 \\
[\frac{1}{2}(R_{1212} - R_{3412})] \Phi_{11} &= \frac{v^2 f_x^2}{16} \\
[R_{2441}] \Phi_{20} &= \frac{v^2 f_x^2}{8} \\
[R_{2421}] \Phi_{21} &= 0 \\
[R_{2423}] \Phi_{22} &= 0 \\
[\frac{1}{2}(R_{1232} - R_{3432})] \Phi_{12} &= 0 \\
[R_{1332}] \Phi_{02} &= \frac{v^2 f_x^2}{8} \\
[\frac{1}{2}(R_{1234} - R_{3434} - \frac{1}{2}(R_{1212} - R_{3412} - 2R_{1324})] \\
\Lambda &= -\frac{v^2 f_x^2}{16},
\end{aligned} \tag{8.13}$$

Até o momento podemos resumir a descrição do espaço-tempo de dobra espacial que esta-

mos estudando no formalismo de Newman-Penrose pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= dt^2 - dx^2 - dy^2 - [dz - v_0(ax + b)dt]^2 \\
D &= \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_t + \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x + \frac{v_0(ax + b)}{\sqrt{2}}\partial_z \\
\Delta &= \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_t - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x + \frac{v_0(ax + b)}{\sqrt{2}}\partial_z \\
\delta &= \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_y + \frac{i}{\sqrt{2}}\partial_z \\
\bar{\delta} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_y - \frac{i}{\sqrt{2}}\partial_z \\
\kappa &= \sigma = \lambda = \nu = \rho = \mu = \varepsilon = \gamma = 0 \\
\tau &= \pi = 2\alpha = -2\beta = -\frac{iv_0a}{2\sqrt{2}} \\
\Psi_0 &= \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0 \\
\Phi_{00} &= \Phi_{01} = \Phi_{10} = \Phi_{12} = \Phi_{21} = \Phi_{22} = 0 \\
\Phi_{02} &= \Phi_{20} = 2\Phi_{11} = -2\Lambda = \frac{v_0^2 a^2}{8}
\end{aligned} \tag{8.14}$$

8.3 Perturbação do Espaço-Tempo

Nessa seção, as equações que determinam a perturbação gravitacional sofrida por uma dobra espacial serão determinadas. O desenvolvimento será feito em estreita analogia com a Seção 3.2 relativa ao wormhole de Morris-Thorne.

8.3.1 Equações de Teukolsky

Após efetuar a perturbação do conjunto de equações (3.17)-(3.20) e substituir os valores para os coeficientes de spin e escalares de Ricci e Weyl presentes em (8.14), ficamos com o seguinte sistema de equações:

$$(\bar{\delta} - \tau)\Psi_0^B - D\Psi_1^B + 2\Phi_{11}\kappa^B = (\delta + \tau)\Phi_{00}^B - D\Phi_{01}^B - \Phi_{02}\bar{\kappa}^B \tag{8.15}$$

$$\Delta\Psi_0^B - (\delta - 3\tau)\Psi_1^B - 2\Phi_{11}\sigma^B = (\delta + 2\bar{\tau} + \tau)\Phi_{01}^B - (D - \bar{\rho} - 2\varepsilon + 2\bar{\varepsilon})^B\Phi_{02} - D\Phi_{02}^B \tag{8.16}$$

$$D\Psi_4^B - (\bar{\delta} + 5\tau)\Psi_3^B + 2\Phi_{11}\lambda^B = (\bar{\delta} + \tau - 2\bar{\tau})\Phi_{21}^B - (\Delta + \bar{\mu} + 2\gamma - 2\bar{\gamma})^B\Phi_{20} - \Delta\Phi_{20}^B \quad (8.17)$$

$$(\delta - 3\tau)\Psi_4^B - \Delta\Psi_3^B - 2\Phi_{11}\nu^B = (\bar{\delta} + \tau - 2\bar{\tau})\Phi_{22}^B - \Delta\Phi_{21}^B + \Phi_{20}\bar{\nu}^B \quad (8.18)$$

Operando $(\delta - 3\tau)$ em (8.15) e D em (8.16) e subtraindo as equações resultantes, obtemos

$$\begin{aligned} [D\Delta - (\delta - 3\tau)(\bar{\delta} - \tau)]\Psi_0^B &= \\ &= 2D\Phi_{11}\sigma^B + 2(\delta - 3\tau)\Phi_{11}\kappa^B + (\delta - 3\tau)\Phi_{02}\bar{\kappa}^B - D(D - \bar{\rho} - 2\varepsilon + 2\bar{\varepsilon})^B\Phi_{02} + \\ &+ [D(\delta - \tau) + (\delta - 3\tau)D]\Phi_{01}^B - (\delta - 3\tau)(\delta + \tau)\Phi_{00}^B - D^2\Phi_{02}^B \end{aligned} \quad (8.19)$$

onde uso foi feito da identidade (2.11) de [17] dada por

$$[D - (p+1)\varepsilon + \bar{\varepsilon} + q\rho - \bar{\rho}](\delta - p\beta + q\tau) = [\delta - (p+1)\beta - \bar{\alpha} + \bar{\pi} + q\tau](D - p\varepsilon + q\rho).$$

Da mesma forma, operando Δ em (8.17) e $(\bar{\delta} + 5\tau)$ em (8.18) e subtraindo as equações resultantes, obtemos

$$\begin{aligned} [\Delta D - (\bar{\delta} + 5\tau)(\delta - 3\tau)]\Psi_4^B &= \\ &= -2\Delta\Phi_{11}\lambda^B - 2(\bar{\delta} + 5\tau)\Phi_{11}\nu^B - (\bar{\delta} + 5\tau)\Phi_{20}\bar{\nu}^B - \Delta(\Delta + \bar{\mu} + 2\gamma - 2\bar{\gamma})^B\Phi_{20} + \\ &+ \Delta(\bar{\delta} + 3\tau)\Phi_{21}^B - \Delta^2\Phi_{20}^B - (\bar{\delta} + 5\tau)(\bar{\delta} + 3\tau)\Phi_{22}^B + (\bar{\delta} + 5\tau)\Delta\Phi_{21}^B \end{aligned} \quad (8.20)$$

onde uso foi feito da identidade (2.11) de [17] dada por

$$[\Delta + (p+1)\gamma - \bar{\gamma} - q\mu + \bar{\mu}](\bar{\delta} + p\alpha - q\pi) = [\bar{\delta} + (p+1)\alpha + \bar{\beta} - \tau - q\pi](\Delta + p\gamma - q\mu).$$

Impondo as condições de homogeneidade abaixo sobre a perturbação,

$$\begin{aligned} \sigma^B &= \kappa^B = \lambda^B = \nu^B = 0, \\ (D - \bar{\rho} - 2\varepsilon + 2\bar{\varepsilon})^B\Phi_{02}, \\ (\Delta + \bar{\mu} + 2\gamma - 2\bar{\gamma})^B\Phi_{20}, \\ \Phi_{01}^B &= \Phi_{00}^B = \Phi_{02}^B = \Phi_{21}^B = \Phi_{20}^B = \Phi_{22}^B = 0, \end{aligned} \quad (8.21)$$

resultam de (8.19) e (8.20) as Equações de Teukolsky que governam as perturbações nos escalares Ψ_0 e Ψ_4 , os quais contêm as informações sobre a onda gravitacional [15]:

$$[D\Delta - \bar{\delta}\bar{\delta} + 3\tau\bar{\delta} - 3\tau^2]\Psi_0^B = 0 \quad (8.22)$$

e

$$[\Delta D - \bar{\delta}\bar{\delta} - 5\tau\bar{\delta} + 15\tau^2]\Psi_4^B = 0 \quad (8.23)$$

8.3.2 Equação de Onda

Com procedimento análogo ao dos capítulos anteriores, obtivemos a partir das equações (8.22) e (8.23), uma equação mestre

$$\{\Delta D - \bar{\delta}\bar{\delta} + \frac{5}{4}(s-2)\tau\bar{\delta} + \frac{3}{4}(s+2)\tau\bar{\delta} - \frac{9}{2}(s-\frac{4}{3})\tau^2\}\psi^{(s)} = 0 \quad (8.24)$$

onde $\psi^{(-2)} = \Psi_0^B$ e $\psi^{(2)} = \Psi_4^B$.

Adotando o modelo de onda

$$\psi(t, x, y, z) = e^{-i\omega t} R(x, y, z) \quad (8.25)$$

e substituindo na equação mestre os valores das derivadas direcionais e dos coeficientes de spin, obtemos a equação na amplitude R , dada por

$$\begin{aligned} & -\frac{\omega^2 R}{2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \left[-\frac{1}{2} + \frac{v_0^2(ax+b)^2}{2}\right] \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} - \\ & -i\omega v_0(ax+b) \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{i}{16} (8s-4)v_0a \frac{\partial R}{\partial y} + (2s-24) \frac{v_0a}{16} \frac{\partial R}{\partial z} + \\ & + \frac{9}{16} \left(s - \frac{4}{3}\right) v_0^2 a^2 R = 0 \end{aligned} \quad (8.26)$$

Tomando-se $R(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ e $a = 0, b = 1$ na equação acima, resulta para a equação em Z :

$$Z'' - 2 \frac{\omega^2}{v_0^2 - 1} Z - 2 \frac{i\omega v_0}{v_0^2 - 1} Z' - \frac{2k}{v_0^2 - 1} Z = 0 \quad (8.27)$$

onde k é constante de separação que pode ser obtida das equações em X e Y .

8.4 Frequências de MQN

Utilizando-se agora as mudanças de variáveis

$$Z = e^{i \frac{\omega v_0}{v_0^2 - 1} z} Q \quad (8.28)$$

e

$$\frac{d}{dz} = \left[\frac{1}{v_0^2 - 1} \left(\frac{1}{v_0^2 - 1} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dw} \quad (8.29)$$

a equação (8.27) pode ser transformada na equação

$$Q'' + \omega^2 Q = VQ \quad (8.30)$$

em que temos para o potencial V , os valores

$$V = V_0 = k \left(\frac{2v_0^2 - 2}{2 - v_0^2} \right) \quad (8.31)$$

se $f = 1$ e $V = 0$ para $f = 0$.

Chegamos a um problema de espalhamento por uma barreira de potencial quadrada similar ao encontrado no Capítulo 3, cuja solução é dada através da equação transcendental

$$2u\sqrt{u^2 + V_0} = -V_0 i \sin au \quad (8.32)$$

onde

$$u = \sqrt{\omega^2 - V_0} \in \mathbb{C} \quad (8.33)$$

e V_0 é dado pela equação (8.31).

Com isso obtemos uma solução semi-analítica para as frequências de MQN da dobra espacial

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - [dz - v_0 f dt]^2 \quad (8.34)$$

onde v_0 corresponde a uma velocidade constante e $f = 1$ na bolha de dobra e $f = 0$ fora dela.

Considerações Finais

Neste trabalho, tentou-se criar uma nova classe de wormholes a fim de simplificar as equações de perturbação através do desacoplamento da frequência e do potencial. Na Seção 4.3 do Capítulo 4, ficou claro porque os parâmetros de distorção c e d foram introduzidos; para atingir a condição de desacoplamento “mais ampla possível”, com mais liberdade de escolha do que para os wormholes de Morris-Thorne. Infelizmente, mesmo fazendo tal mudança a solução exata não apareceu a menos de equações transcendentais ou esquemas de aproximação. É preciso enfatizar que no Caso 4 da Seção 4.3, o wormhole distorcido foi obtido pela resolução de uma equação de Bernoulli; há alguma esperança de que outras soluções analíticas desta equação possam dar origem a wormholes que se comportarão adequadamente, ou seja, darão origem a potenciais desacoplados da frequência. Entretanto, todas as tentativas de se atingir tal solução fracassaram.

No Capítulo 5, tomou-se a classe geral de métricas desenvolvida no Capítulo 4 e, dentro dela, escolheu-se um candidato com a propriedade de se adequar a qualquer barreira de potencial. Esse objetivo se encontra com o desejo de desaparecer com todas as singularidades da Natureza. Se é possível achar wormholes que respondem às ondas eletromagnéticas da mesma forma que outros sistemas, talvez este seja um sinal de que wormholes transitáveis possam ser usados para modelar partículas elementares e até buracos negros, fazendo “ressurgir” a antiga idéia de Einstein, Rosen e Wheeler. A forma como isso será feito ainda é obscura aos olhos, mas a idéia de se introduzir novos parâmetros ou de trabalhar com métricas axisimétricas, inflacionárias ou outros tipos de wormholes ao invés da classe simplificada de Morris-Thorne poderia abrir portas para uma melhor descrição da Gravitação Quântica.

Sobre o desenvolvimento feito no Capítulo 6, é importante salientar que o método lá apresentado de fato sugere que o espaço-tempo possa ser preenchido por wormholes, em analogia com a construção da *esponja quântica* de Wheeler. Além disso, a solução especial utilizada naquela ocasião tem a mesma barreira de potencial gravitacional independentemente do parâmetro de forma b enquanto que, no caso eletromagnético, esse parâmetro é decisivo para a descrição da barreira. Este comportamento aparentemente sem sentido pode ser justificado pelo fato de que a gravitação não distingue a Lua da maçã, ela é universal enquanto

que o eletromagnetismo não. Talvez o comportamento desta solução especial e de sua forma seja um sinal da existência de um objeto unificador na Natureza.

Sobre o formalismo de Newman-Penrose, ressalta-se mais uma vez com esse trabalho a sua validade em revelar características escondidas das singularidades do espaço-tempo, mostrando facetas da Relatividade Geral como o desacoplamento da frequência e do potencial, somente percebidas na forma de onda da equação radial. Fora a sua trabalhosa complexidade computacional, pôde-se chegar ao final a equações algébricas relativamente simples para as frequências quase-normais de wormholes e buracos negros, em lugar de equações diferenciais para as mesmas. Acredita-se que aumentar o leque de liberdade nos parâmetros da geometria de wormhole irá permitir tratar de forma mais completa os potenciais complexos e até os modos quase-normais do buraco negro de Kerr.

Em busca de generalizações dos desenvolvimentos feitos nesse trabalho, eis algumas sugestões para pesquisa futura na área:

1. Estudar espaços-tempo que não obedeçam a condição restritiva de Tipo D;
2. Estudar outros wormholes dependentes do tempo, além dos wormholes de Roman apresentados no Capítulo 1; particularmente, acredita-se que essa abordagem possa abrir opções para se criar modelos que desacoplem a frequência embora o preço que se deva pagar por isso seja o de resolver uma equação de Schrödinger dependente do tempo;
3. Estudar uma combinação, muito geral e muito difícil, de wormholes não esféricos e dependentes do tempo.

Para finalizar esse trabalho, algumas palavras a mais sobre a busca por soluções exatas de MQN.

Pode-se expressar o problema de uma forma simples e separável no formalismo de Newman-Penrose?

Esta questão aparece no trabalho de Damien Martin [9] no contexto de seus “buracos negros sujos”, mas é perfeitamente aplicável à presente situação. *A resposta é talvez.* Acredita-se na importância do formalismo de Newman-Penrose como uma abordagem alternativa ao uso direto das equações de Einstein em sua forma tensorial; nesse sentido, tal técnica está para a Relatividade Geral assim como os formalismos de Lagrange e Hamilton estão para a Mecânica Newtoniana. Matematicamente, ele fornece um caráter algébrico para a teoria na medida em que espaços-tempo de wormholes podem ser expressos por campos escalares e classificados pela forma do tensor de Weyl (teorema de Goldberg-Sachs). Fisicamente,

parece ser o caminho certo a seguir pois ele se baseia no conceito de espinor, obtido da parametrização do cone de luz. Entretanto, um dos wormholes mais simples, estudado em [15] via tal formalismo, apresenta uma equação de onda do mesmo grau de dificuldade que a do buraco negro de Kerr! Concorda-se com Martin no que diz respeito aos adjetivos “bagunça”, “frustrante” e “depressivo” que cercam esse assunto. Foi dito *talvez* como uma resposta à pergunta acima porque acredita-se que talvez a tétrade complexa de tipo-luz poderia não ser tão equivalente ao formalismo espinorial explícito como se pensa. Uma abordagem mais direta baseada numa direta tradução de *todas* as equações para o formalismo espinorial poderia abrir os olhos para algumas características obscurecidas por outros meios. Entretanto, todas essas palavras possam apenas ser sonhos sem esperança. A Natureza poderia estar simplesmente dando uma mensagem: vocês não têm acesso a certos fenômenos assim como o princípio da incerteza estabelece. Se é assim, *é possível modelar sistemas quânticos por meio de wormholes?* Este era um dos últimos sonhos de Einstein...

Referências Bibliográficas

- [1] M. Visser, Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking (American Institute of Physics, New York, 1995).
- [2] A. Einstein e N. Rosen, "The Particle Problem in the General Theory of Relativity", Phys. Rev. 48, 73-77 (1935).
- [3] J. A. Wheeler, "Geons", Phys. Rev. 97, 511-536 (1955).
- [4] M. S. Morris e K. S. Thorne, "Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching General Relativity", Am. J. Phys. 56, 395 (1988).
- [5] F. N. Lobo. (2004) [arXiv:gr-qc/0710447v1].
- [6] S. Chandrasekhar, The Mathematical Theory of Black Holes, (Clarendon, Oxford, 1983).
- [7] K. D. Kokkotas e B. G. Schmidt, "Quasinormal modes of stars and black holes"(1999), <http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-1999-2/>.
- [8] H. P. Nollert, "On the determination of quasinormal modes of Schwarzschild black holes". In *Rome 1985, Proceedings, General Relativity, Pt. A*, 759-767.
- [9] D. Martin. Master of Science in Mathematics thesis, Victoria University of Wellington, New Zealand (2008).
- [10] F. Dadam. Master of Science in Mathematics thesis, State University of Campinas, Brazil (2005).
- [11] V. P. Frolov e I. D. Novikov, "Wormhole as a device for studying a black hole interior", Phys. Rev. D 48, 1607 (1993).
- [12] S. Kar, B. Sahdev e B. Bhawal. Phys. Rev. D 49, 853 (1994).
- [13] S. E. Pérez Bergliaffa e K. E. Hibberd, Phys. Rev. D 62, 044045 (2001).

- [14] Sung-Won, K. (2004) [arXiv:gr-qc/0401007].
- [15] C. Moreno e R. Garcia-Salcedo. ArXiv preprint Gr-qc/0703110 (2007).
- [16] T. A. Roman. ArXiv preprint Gr-qc/9211012 v1 (1992)
- [17] S. A. Teukolsky, Phys. Rev. Lett. 29, 1114 (1972).
- [18] R. K. Sachs e H. Wu, General Relativity for Mathematicians. Graduate texts in mathematics, (Springer-Verlag, New York, 1977).
- [19] R. Penrose e W. Rindler, Spinors and Spacetime, v.1 and 2, (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [20] R. Geroch, A. Held e R. Penrose, "A spacetime calculus based on pairs of null directions", J. Math. Phys., Vol. 14, n. 7 (1973).
- [21] C. M. Chambers e I. G. Moss, "Stability of the Cauchy horizon in Kerr-de Sitter spacetimes"(1994) [arXiv:gr-qc/9404015v1].
- [22] C. Moreno e D. Nuñez, Journal of Modern Phys. 11, 1331, (2001).
- [23] T. Damour e S. N. Solodukhin, "Wormholes as Black Hole Foils"(2007) [arXiv:gr-qc/0704266v1].
- [24] S. V. Sushkov e K. Sung-Wong, "Cosmological evolution of a ghost scalar field"(2004) [arXiv:gr-qc/0404037v1].
- [25] M. Visser e D. Hochberg, "Generic wormhole throats"(1997) [arXiv:gr-qc/9710001v2].
- [26] L. I. Schiff, Quantum Mechanics, (McGraw Hill Kogakusha, LTD., Tokyo, 1968)
- [27] S. Iyer e C. M. Will, "Black hole normal modes: A WKB approach.I. Foundations and application of a higher order WKB analysis of potential-barrier scattering", Phys. Rev. D 35, 3621, (1987).
- [28] V. Ferrari e B. Mashhoon, "New aproach to the quasinormal modes of a black hole", Phys. Rev. D, 30, 295, (1984).
- [29] G. B. Arfken e H. J. Weber, Mathematical Methods for Physicists, (Elsevier Academic Press, London, 2005).

- [30] A. Khare e U.P. Sukhatme, “Scattering amplitudes for supersymmetric shape-invariant potentials by operator methods”, J. Phys. A: Math. Gen. 21, L501-L508 (1988)
- [31] T. Regge e J. A. Wheeler, Phys. Rev., 108, 1063, (1957)
- [32] C. V. Vishveshwara, “Stability of the Schwarzschild metric”, Phys. Rev. D, 1, 2870, (1970)
- [33] C. W. Misner, K. Thorne and J. Wheeler, Gravitation, (W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1970)
- [34] K. D. Kokkotas, “Normal modes of Kerr black hole”, Class. Quantum Grav. 8, 2217 (1991)
- [35] Stephani, H. et al. Exact Solutions of Einstein’s Field Equations. (Cambridge University Press, 2003).
- [36] Kar, S. et al. Phys. Rev. D 51, 1632 (1995).
- [37] D. H. Correa, J. Oliva and R. Troncoso, “Stability of asymptotically AdS wormholes in vacuum against scalar field perturbations,” JHEP **0808**, 081 (2008) [arXiv:0805.1513 [hep-th]].
- [38] C. Hellaby and A. Krasinski, “You can’t get through Szekeres wormholes - or: Regularity, topology and causality in quasi-spherical Szekeres models,” Phys. Rev. D **66**, 084011 (2002) [arXiv:gr-qc/0206052].
- [39] A. G. Agnese and M. La Camera, “Schwarzschild metrics, quasi-universes and wormholes,” arXiv:astro-ph/0110373.
- [40] F. Dadam e A. Saa, em preparação.
- [41] C. Molina and J. C. S. Neves, “Black holes and wormholes in AdS branes,” Phys. Rev. D **82**, 044029 (2010) [arXiv:1005.1319 [hep-th]].
- [42] R. A. Konoplya and C. Molina, “The ringing wormholes,” Phys. Rev. D **71**, 124009 (2005) [arXiv:gr-qc/0504139].
- [43] D. Hochberg, C. Molina-Paris and M. Visser, “Tolman wormholes violate the strong energy condition,” Phys. Rev. D **59**, 044011 (1999) [arXiv:gr-qc/9810029].

- [44] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, “Quasinormal modes of black holes: from astrophysics to string theory,” arXiv:1102.4014 [gr-qc].
- [45] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, “Passage of radiation through wormholes of arbitrary shape,” Phys. Rev. D **81**, 124036 (2010) [arXiv:1004.1284 [hep-th]].
- [46] M. Jamil, P. K. F. Kuhfittig, F. Rahaman and S. A. Rakib, “Wormholes supported by polytropic phantom energy,” Eur. Phys. J. C **67**, 513 (2010) [arXiv:0906.2142 [gr-qc]].
- [47] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, “Stability and quasinormal modes of the massive scalar field around Kerr black holes,” Phys. Rev. D **73**, 124040 (2006) [arXiv:gr-qc/0605013].
- [48] R. A. Konoplya and C. Molina, “Late time tails of the massive vector field in a black hole background,” Phys. Rev. D **75**, 084004 (2007) [arXiv:gr-qc/0602047].
- [49] N. Bugdayci, “Scalar waves in a wormhole topology,” Int. J. Mod. Phys. D **15**, 669 (2006) [arXiv:gr-qc/0511029].
- [50] A. Zhidenko, Class. Quant. Grav. **23**, 3155 (2006) [arXiv:gr-qc/0510039].
- [51] R. A. Konoplya, “Massive vector field perturbations in the Schwarzschild background: Stability and unusual quasinormal spectrum,” Phys. Rev. D **73**, 024009 (2006) [arXiv:gr-qc/0509026].
- [52] E. Abdalla, R. A. Konoplya and C. Molina, “Scalar field evolution in Gauss-Bonnet black holes,” Phys. Rev. D **72**, 084006 (2005) [arXiv:hep-th/0507100].