



# ESTUDIO DE PROPIEDADES DINÁMICAS EN SISTEMAS BINARIOS DE AGUJEROS NEGROS

por

**EMMANUEL A. TASSONE**

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y  
Computación como parte de los requerimientos para la obtención del  
grado de Doctor en Física de la

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA**

Octubre, 2023

Director: Dr. Carlos N. Kozameh

Tribunal Especial: Dr. Emanuel Gallo (UNC), Dr. Carlos Lousto  
(RIT), Dr. Francisco Tamarit (UNC), Dr. Teresita Rojas (UNCA)



Este trabajo se distribuye bajo una licencia Creative Commons  
Atribución <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>

*Esta tesis está dedicada a mis papás, Guillermo y María José.*

# Agradecimientos

Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas e instituciones que contribuyeron de manera significativa en la realización de esta tesis doctoral. Su apoyo, aliento y colaboración fueron fundamentales para culminar este importante proyecto académico.

A continuación, quiero agradecer a:

Carlos Kozameh, mi director, por su guía, paciencia y compromiso durante todo el desarrollo de la investigación. Sus conocimientos y comentarios fueron esenciales para la escritura de este trabajo.

CONICET, por su apoyo económico, el cual fue fundamental para llevar a cabo este proyecto.

FaMAF, y en particular, al GRG, por mantener el área de la Relatividad General activa en Argentina.

Al CCRG y al RIT-COS 2021-DRIG grant por el apoyo financiero durante mi estadía en el 2022.

Carlos Lousto, por su gran pasión por la ciencia, por haber confiado en mí y haberme dado la oportunidad de superarme.

Mis profesores, por brindarme orientación académica que me ayudó a crecer como estudiante e investigador.

Todos mis amigos, y en especial a Giulio y Edu, por compartir su entusiasmo y dedicación de la astronomía conmigo.

Joaquín, por los casi diez años de gran amistad y la infinidad de charlas sobre ciencia que estos conllevan.

Mis familiares, por su amor, apoyo incondicional y comprensión a lo largo de mi carrera académica.

Flor, por brindarme su compañía todos los días, por apoyarme en todo, y por su amor.

Este trabajo no hubiera sido posible sin el respaldo de todas estas personas y su

---

influencia positiva en mi desarrollo como investigador. Una vez más, mi más profundo agradecimiento a todos ustedes.

*Emmanuel A. Tassone*

# Contenido

<b>Agradecimientos.</b>	<b>II</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>VI</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>IX</b>
<b>Resumen.</b>	<b>XI</b>
<b>Abstract.</b>	<b>XII</b>
<b>Convenciones</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Espacios asintóticamente planos . . . . .	3
1.1.1. Definición coordenada-dependiente . . . . .	3
1.1.2. Definición formal . . . . .	4
1.1.3. Coordenadas adaptadas al infinito nulo . . . . .	5
1.1.4. Propiedad de <i>Peeling</i> . . . . .	7
1.2. Formalismo de Newman-Penrose . . . . .	8
1.2.1. Espinores . . . . .	9
1.2.2. Coeficientes de espín . . . . .	11
1.2.3. Ecuaciones de coeficientes de espín . . . . .	14
1.2.4. Comportamiento asintótico . . . . .	15
1.3. Bases completas en $L_2(S^2)$ . . . . .	18
1.3.1. Esféricos armónicos tensoriales . . . . .	19
1.4. Transformaciones nulas . . . . .	21

---

<b>2. Formulación de superficies nulas</b>	<b>24</b>
2.1. Variables de la formulación . . . . .	25
2.2. Formulación linearizada . . . . .	27
2.2.1. Dispersión en ausencia de materia . . . . .	30
2.2.2. Dispersión en presencia de materia . . . . .	34
<b>3. Definición de centro de masa y momento angular intrínseco en Relatividad General</b>	<b>38</b>
3.1. Grupo de simetrías de Bondi-Metzner-Sachs . . . . .	39
3.1.1. Vectores de Killing asintóticos . . . . .	41
3.1.2. Teorema de Noether . . . . .	44
3.2. Cortes de Bondi, Newman-Unti y cortes de línea de mundo . . . . .	50
3.3. Ecuaciones para el centro de masa y momento angular intrínseco . . . . .	53
3.3.1. Definición de centro de masa y momento angular intrínseco . . . . .	55
3.3.2. Ecuaciones para un sistema físico con centro de masa $x^\mu(u)$ . . . . .	60
3.3.3. Comparación con otros formalismos . . . . .	64
<b>4. Aplicación a ondas gravitacionales</b>	<b>68</b>
4.1. Ecuaciones de movimiento . . . . .	69
4.2. Obtención del <i>shear</i> gravitacional . . . . .	71
4.3. Análisis de los Resultados . . . . .	76
4.3.1. Distribución de resultados . . . . .	78
4.3.2. Binarias con espines precesando . . . . .	88
4.3.3. Cinemática del Centro de Masa . . . . .	90
4.3.4. Momento Angular intrínseco . . . . .	92
4.3.5. Comparación con los metadatos del catálogo . . . . .	96
<b>5. Conclusiones</b>	<b>100</b>
<b>Bibliografía.</b>	<b>106</b>
<b>A. Ecuaciones de coeficientes de espín para espaciotiempos no vacíos</b>	<b>110</b>
A.1. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	111
<b>B. Clebsh-Gordan de los esféricos armonicos tensoriales <math>Y_{l,I_l}^s</math></b>	<b>113</b>
B.0.1. Productos de $l = 1$ con $l = 1$ . . . . .	113
B.0.2. Productos de $l = 1$ con $l = 2$ . . . . .	114
B.0.3. Productos de $l = 2$ con $l = 2$ . . . . .	114



# Índice de figuras

2.1. Ecuaciones obtenidas por la aplicación de derivadas $\tilde{\partial}$ que determinan condiciones de unicidad y existencia de la métrica . . . . .	37
4.1. Integración de los modos $l = 2$ de la simulación n <sup>o</sup> 14 del catálogo de Rochester, que dan la mayor contribución gravitacional. A la izquierda, $\sigma_{dir}$ se muestra el gráfico obtenido de hacer la integración directamente. A la derecha, $\sigma_{Reiss}$ se muestra el gráfico obtenido luego de utilizar el código de Reisswig. . . . .	74
4.2. Evolución de la radiación gravitacional para la simulación n <sup>o</sup> 443 . . .	75
4.3. Evolución temporal del valor absoluto del momento de Bondi. La figura muestra un pequeño cambio de 0 a 500 debido a la explosión inicial. . . . .	76
4.4. Distribución de las principales variables de interés para todas las simulaciones. . . . .	78
4.5. Correlación entre la energía total radiada $E_{rad}$ y el pico de pérdida de energía $\dot{M}_{max}$ para todas las simulaciones. La línea punteada roja representa el ajuste a los datos. La barra de colores indica el valor del cociente de masas entre las binarias, $q = m_1/m_2$ . . . . .	80
4.6. Correlación entre la energía radiada durante toda la simulación $E_{rad}$ y el momento angular inicial $J_{in}$ . Cada punto representa una simulación distinta. . . . .	81
4.7. Correlación entre la velocidad final del centro de masa, el cociente de masas $q$ y el pico de pérdida de energía gravitacional $\dot{M}_{max}$ . La línea punteada muestra el ajuste del modelo de Fitchett. . . . .	82
4.8. Correlación entre la radiación total emitida $E_{rad}$ y el momento angular total inicial $J_{in}$ . La barra de colores indica el cociente de masas $q$ en cada simulación. La letra $k$ indica el orden del polinomio ajustado. . .	83



---

4.9. Correlación entre el pico de pérdida de energía $\dot{M}_{max}$ y el cociente de masas $q$ . La barra de colores indica el valor de la energía radiada que es proporcional al pico de pérdida de energía. La línea punteada muestra el ajuste del model a los datos. . . . .	84
4.10. Correlación entre la velocidad final $V_f$ y el cociente de masas $q$ para binarias con espines alineados en la dirección del momento angular orbital. . . . .	85
4.11. Correlación entre $V_f$ y $q$ para binarias alineadas. La barra de colores muestra los niveles de pérdida máxima de energía $\dot{M}_{max}$ . La línea discontinua indica el límite fronterizo de las velocidades finales (en $km/s$ ). . . . .	86
4.12. Correlación entre el momento angular total inicial $J_{in}$ y la radiación total emitida $E_{rad}$ para binarios alineados. Los intervalos de relación de masa se han dividido y seleccionado para ser estudiados y se ilustran con diferentes colores. . . . .	87
4.13. Correlación entre el espín total inicial $\bar{\chi}$ y la radiación total emitida $E_{rad}$ . La línea gris discontinua muestra el ajuste a nuestros datos y debajo sus residuos. La línea discontinua azul claro muestra el polinomio de Reisswig a modo de comparación. . . . .	88
4.14. Correlación entre las variables finales globales e iniciales locales para las binarias de precesión. . . . .	89
4.17. Evolución del centro de masa para binarias de agujeros negros de cada categoría. El punto rojo especifica el punto de inicio del centro de masa y el número sobre el gráfico indica la simulación del catálogo RIT donde se ha tomado el valor de $\psi_4$ . . . . .	91
4.18. Momento angular intrínseco inicial del sistema vs. Velocidad Final del centro de masas . . . . .	92
4.19. A relationship between the magnitudes of the initial and final angular momenta . . . . .	93
4.20. Relación entre en el cambio en el valor absoluto del momento angular y el ángulo de volteo . . . . .	94
4.21. Correlation between $V_f$ and $(P^i/M)_f$ . . . . .	95
4.22. Evolución temporal de los distintos modos de radiación $l = 2$ y $l = 3$ del escalar $\Psi_4$ para una simulación con espines precesando. . . . .	96
4.23. Evolución temporal del valor absoluto de la fuerza de reacción, $F_R$ . . . . .	97
4.24. Relación entre $\Delta M$ y $\Delta M_{Roch}$ para todas las simulaciones. . . . .	98
4.25. Relación entre $\Delta J$ y $\Delta J_{Roch}$ para todas las simulaciones. . . . .	99

---

4.26. Relación entre las magnitudes finales del momento angular total para todas las simulaciones. . . . .	99
---	----

# Índice de tablas

4.1. Coeficientes de polinomios de segundo grado ajustados en la Fig. [4.12]	86
4.2. Coeficientes de los polinomios ajustados de segundo grado. . . . .	89

# Estudio de propiedades dinámicas en sistemas binarios de agujeros negros

Emmanuel A. Tassone

## Resumen

En esta Tesis, haciendo uso de la estructura asintótica del espaciotiempo y del formalismo de Newman-Penrose, definimos la noción de centro de masa y espín para sistemas gravitacionales que emiten radiación gravitacional. A diferencia de otras formulaciones disponibles en la literatura, una de las características centrales de nuestro formalismo es el uso del formalismo de superficies nulas. Explicaremos el *scattering* de materia en términos de este formalismo y la definición de cortes reales que se corresponden con líneas de mundo del espaciotiempo. Mediante el uso de estos cortes asociados a líneas de mundo derivamos las ecuaciones para el momento angular y el momento dipolar másico del espaciotiempo mediante el uso de las simetrías asintóticas presentes en el infinito nulo.

Proponemos un *gauge* que nos permiten resolver la ambigüedad del momento angular proveniente de las simetrías asintóticas del infinito nulo. Las ecuaciones obtenidas nos permiten definir el concepto de centro de masa y momento angular intrínseco para un espaciotiempo asintóticamente plano arbitrario. Los conceptos definidos reproducen la definición de centro de masa y momento angular intrínseco en el caso de un espaciotiempo de Minkowski. Obtenemos la evolución temporal de las variables dinámicas y cinemáticas a partir de las identidades de Bianchi. En particular, obtenemos la evolución del centro de masa y momento angular intrínseco a partir de las variables definidas en la frontera nula.

Finalmente, hacemos una aplicación del formalismo presentado al catálogo de ondas gravitacionales del instituto de tecnología de Rochester. La evolución del centro de masa, pérdida de momento angular intrínseco y total, energía radiada y velocidad del centro de masa para distintos valores iniciales de sistemas binarios de agujeros negros son calculados. Un análisis exhaustivo es hecho sobre la física de las variables definidas en el infinito nulo para las distintas categorías de simulaciones: binarias sin espines, binarias con espines alineados y binarias con espines precesantes. Analizamos la consistencia de los resultados obtenidos y, en particular, comparamos los valores finales de la velocidad del centro de masa con las *kick velocities* de los metadatos computadas para cada simulación.

# Estudio de propiedades dinámicas en sistemas binarios de agujeros negros

Emmanuel A. Tassone

## Abstract

In this Thesis, using the asymptotic structure of spacetime and the Newman-Penrose formalism, we define the notion of center of mass and spin for gravitational systems emitting gravitational radiation. Unlike other formulations available in the literature, a central feature of our formalism is the use of the null surface formalism. We will explain the scattering of matter in terms of this formalism and the definition of real cuts that correspond to world lines of spacetime. By using these cuts associated with world lines, we derive the equations for the angular momentum and the mass dipole moment of spacetime through the use of asymptotic symmetries present at null infinity.

We propose a gauge that allows us to resolve the ambiguity of angular momentum arising from the asymptotic symmetries of null infinity. The obtained equations allow us to define the concept of center of mass and intrinsic angular momentum for an arbitrarily asymptotically flat spacetime. The defined concepts reproduce the definition of center of mass and intrinsic angular momentum in the case of Minkowski spacetime. We obtain the time evolution of the dynamic and kinematic variables from the Bianchi identities. In particular, we obtain the evolution of the center of mass and intrinsic angular momentum from the variables defined on the null boundary.

Finally, we apply the presented formalism to the gravitational wave catalog from the Rochester Institute of Technology. The evolution of the center of mass, loss of intrinsic and total angular momentum, radiated energy, and velocity of the center of mass for different initial values of binary black hole systems are calculated. A thorough analysis is performed on the physics of the variables defined at null infinity for the different categories of simulations: non-spinning binaries, aligned-spin binaries, and precessing-spin binaries. We analyze the consistency of the obtained results and, in particular, compare the final values of the center of mass velocity with the kick velocities of the metadata computed for each simulation.

# Estudio de propiedades dinámicas en sistemas binarios de agujeros negros

Emmanuel A. Tassone

## Convenciones

A lo largo de esta tesis tomaremos las siguientes convenciones:

1. **Unidades:** Salvo fórmulas específicas, utilizaremos unidades geométricas en donde la velocidad de la luz,  $c$  ( $[Distancia][Tiempo]^{-1}$ ), y la constante gravitacional,  $G$  ( $[Distancia]^3 \cdot [Masa]^{-1} \cdot [Tiempo]^{-1}$ ) son fijadas a uno:

$$c = G = 1 \tag{1}$$

En Relatividad General, todo queda determinado entonces por una sola dimensión escala.

2. **Índices:** Los correspondientes a tensores tridimensionales se denotará con letras del alfabeto latino ( $ijk$ ), mientras que los índices correspondientes a tensores cuatridimensionales se denotará con letras del alfabeto griego ( $\mu\nu\gamma$ ), o eventualmente, con las primeras letras del alfabeto latino ( $abcd$ ). En la Sec. 1.2 utilizamos letras mayúsculas del alfabeto latino ( $ABCD$ ) para denotar índices de espinores.
3. Usamos la convención  $(+, -, -, -)$  para la métrica  $\eta_{\mu\nu}$  en el espacio de Minkowski y también para la signatura de la métrica  $g_{\mu\nu}$  de un espaciotiempo genérico.

# Capítulo 1

## Introducción

La teoría de la relatividad general de Einstein revolucionó nuestra comprensión del universo, permitiéndonos entender la naturaleza de la gravedad y su influencia en los cuerpos celestes. Entre los conceptos fundamentales de la relatividad general se encuentran el centro de masa y el momento angular, que son herramientas esenciales para la descripción de sistemas físicos complejos en el espacio-tiempo. En la teoría de la relatividad general, definir el centro de masa, el momento angular y otras cantidades globales es un problema no trivial debido a la naturaleza geométrica de la teoría.

En la mecánica newtoniana, cantidades como el centro de masa se definen fácilmente en términos de la masa y la posición de los objetos. Sin embargo, en la relatividad general, la masa y la energía son equivalentes, lo que significa que la energía gravitatoria también contribuye a la masa del sistema físico en cuestión. Además, la gravedad misma es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, lo que significa que la posición de un objeto no tiene un significado absoluto.

Esta nueva forma de estudiar la realidad introduce dificultades en la definición del centro de masa y del momento angular en relatividad general. En lugar de definir estas cantidades globales en términos de la posición y la velocidad de los objetos, se utilizan cantidades geométricas del espacio-tiempo, como el tensor de energía-momento y el tensor de momento angular. Estos objetos proporcionan una descripción matemática de la distribución de masa y momento angular en el espacio-tiempo. Sin embargo, la definición de estas cantidades en forma global y en términos de cantidades geométricas del espacio-tiempo es complicada y en general solo se puede hacer en situaciones especiales de simetría, como sistemas aislados o sistemas con simetría axial. En situaciones más generales, la definición del centro de masa y del momento

angular puede ser ambigua o incluso no tener un significado físico claro.

Por lo tanto, la definición de estas cantidades globales en relatividad general sigue siendo un tema de investigación activa en la física teórica y se espera que se desarrollen nuevas técnicas y herramientas para su definición y cálculo en situaciones más generales.

El problema de definir el centro de masa, el momento angular y otras cantidades globales en relatividad general es particularmente relevante en el estudio de sistemas binarios de agujeros negros.

Los sistemas binarios de agujeros negros son sistemas formados por dos agujeros negros orbitando uno alrededor del otro en una danza gravitatoria que emite ondas gravitatorias. Estos sistemas son importantes para la astrofísica y la cosmología porque son los principales objetos observados por las colaboraciones de detección de ondas gravitatorias como LIGO y Virgo.

Sin embargo, la definición precisa del centro de masa y el momento angular en sistemas binarios de agujeros negros es un problema difícil en relatividad general. Debido a que los agujeros negros son objetos extremadamente compactos y deforman significativamente el espacio-tiempo a su alrededor, la definición del centro de masa y del momento angular se vuelve mucho más compleja.

En particular, la definición del centro de masa en sistemas binarios de agujeros negros no es única y puede variar dependiendo de la elección del marco de referencia. También, la presencia de los agujeros negros dificulta la definición precisa de los momentos angulares individuales de cada agujero negro y el momento angular total del sistema.

Existen varios formalismos en relatividad general que dan una definición matemática rigurosa a estos conceptos globales. Algunos de los formalismos más conocidos son

- **Formalismo ADM** (Arnowitt-Deser-Misner): Este formalismo se basa en la idea de que el espacio-tiempo se puede dividir en una serie de rebanadas<sup>espaciales</sup> que evolucionan en el tiempo. En este enfoque, la definición de centro de masa y momento angular se realiza en términos de la geometría de cada rebanada espacial. La utilidad de este enfoque no radica en las definiciones globales, sino en los métodos cuasi-locales que permiten definir variables físicas de manera local [1].
- **Formalismo de superficies nulas**: Este formalismo utiliza la idea de que las ondas gravitatorias se pueden describir como ondas que se propagan sobre superficies nulas en el espacio-tiempo. En este enfoque, la definición de centro de masa y momento angular se realiza en términos de las propiedades de las



superficies nulas.

- **Formalismo de twistores:** Este formalismo utiliza la idea de que el espacio-tiempo se puede describir en términos de twistores, que son objetos matemáticos que tienen ciertas propiedades geométricas. En este enfoque, la definición de centro de masa y momento angular se realiza en términos de las propiedades de los twistores [2].
- **Formalismo de Cartan:** Este formalismo se basa en la idea de que la relatividad general se puede describir en términos de conexiones y curvaturas. En este enfoque, la definición de centro de masa y momento angular se realiza en términos de las propiedades de las conexiones y curvaturas.

Cada uno de estos formalismos tiene suposiciones y herramientas matemáticas diferentes que pueden afectar la definición de cantidades globales en relatividad general. Por lo tanto, es importante elegir el formalismo adecuado para el problema en cuestión y tener en cuenta las diferencias en la definición de cantidades globales al realizar cálculos y análisis en relatividad general. En esta tesis doctoral, se exploraremos la definición de cantidades globales como el centro de masa y momento angular en el formalismo de superficies nulas y utilizaremos estas herramientas para analizar sistemas binarios de agujeros negros. El objetivo final del trabajo es mejorar nuestra comprensión de estos sistemas y contribuir al desarrollo de la astrofísica teórica.

## 1.1. Espacios asintóticamente planos

Dentro de la relatividad general, uno de los varios temas que despiertan el gran interés de la comunidad científica, es el estudio de las propiedades física de los sistemas aislados. La noción de espaciotiempo asintóticamente plano es el marco de trabajo necesario que permite describir a los sistemas aislados en forma exacta y precisa.

### 1.1.1. Definición coordenada-dependiente

Probablemente la forma más sencilla y práctica (también la primera históricamente) de definir un espaciotiempo asintóticamente plano es, por un lado, elegir una coordenada radial  $r$  que esté bien definida para valores de  $r$  grandes, es decir,  $r \rightarrow \infty$ . Para identificar esta coordenada radial en el espaciotiempo basta con tener

una coordenada tipo espacio cuyo intervalo en el que está definido sea isomorfo a  $\mathbb{R}$ . Por otro lado, la noción de asintóticamente plano implica que el espaciotiempo se acerca a un espaciotiempo plano a medida que nuestra coordenada radial va hacia infinito. En términos de la métrica  $g_{ab}$ , esto implica que para  $r \rightarrow \infty$ ,  $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$ , con  $\eta_{ab}$  la métrica de Minkowski.

Entonces que  $g_{ab}$  sea asintóticamente plano, implica que  $h_{ab}$  satisfaga las siguientes condiciones

- $\lim_{r \rightarrow \infty} h_{ab} = \mathcal{O}(1/r)$ ,
- $\lim_{r \rightarrow \infty} h_{ab,p} = \mathcal{O}(1/r^2)$ ,
- $\lim_{r \rightarrow \infty} h_{ab,pq} = \mathcal{O}(1/r^3)$ .

En la siguiente sección introduciremos la definición más formal de espacio tiempo asintóticamente plano, que permite trabajar el concepto de infinito en términos matemáticos exactos. Este concepto fue introducido por Penrose y la técnica que permiten analizar los “bordes” del espaciotiempo se conoce como Compactificación Conforme.

### 1.1.2. Definición formal

En términos formales, un espaciotiempo  $(M, g_{ab})$  es asintóticamente plano en el infinito nulo ( $\mathcal{J}$ ) o espacial ( $i^0$ ) si existe un espaciotiempo  $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ , con  $\tilde{g}_{ab}$  infinitamente diferenciable, y una isometría conforme  $\psi : M \rightarrow \psi[M] \subset \tilde{M}$  con factor conforme  $\Omega$  satisfaciendo las siguientes condiciones:

1.  $\bar{J}^+(i^0) \cup \bar{J}^-(i^0) = \tilde{M} - \psi[M]$ , donde  $J^+$  y  $J^-$  denotan el futuro y pasado causal de un punto del espaciotiempo, respectivamente. La barra sobre  $J$  corresponde a la operación clausura de teoría de conjuntos.
2. Existe un entorno abierto,  $V$ , de  $\dot{M} = \mathcal{J}^+ \cap \mathcal{J}^- \cap i^0$  tal que el espaciotiempo  $(V, g_{ab})$  es causalmente fuerte.
3.  $\Omega$  puede ser extendido a una función  $C^2$  en  $i^0$  y  $C^\infty$  en todo otro punto de  $\tilde{M}$ .
4. Por un lado, en  $\mathcal{J}^+ \cap \mathcal{J}^-$  debe ser  $\Omega = 0$  y  $\Omega_{;a} \neq 0$ . Por otro, en  $i^0$ ,  $\Omega = 0$ ,  $\lim_{i^0} \Omega_{;a} = 0$  y  $\lim_{i^0} \Omega_{;a;b} = 2\tilde{g}_{ab}$

5. El mapa que lleva las direcciones nulas en  $i^0$  a el espacio de curvas integrales generado por  $n^a = {}^{ab}\Omega_{;a}$  en  $\mathcal{J}^+ \cap \mathcal{J}^-$  es un difeomorfismo. Para una función suave  $\omega \in \tilde{M} - i^0$  con  $\omega > 0$  en  $M \cap \mathcal{J}^+ \cap \mathcal{J}^-$ , si  $(\omega^4 n^a)_{;a} = 0$  en  $\mathcal{J}^+ \cap \mathcal{J}^-$  entonces  $\omega^{-1}n^a$  es un campo vectorial completo en  $\mathcal{J}^+ \cap \mathcal{J}^-$ .

De estas cinco condiciones, la primera, nos asegura que  $i^0$  represente el infinito espacial en forma eficaz; la segunda condición permite evadir cualquier patología causal cerca del infinito -por ejemplo, como sucede con las curvas cerradas temporales-; la tercera condición nos garantiza que la función escalar  $\Omega$  sea bien comportada cerca del infinito; la cuarta condición, y quizás la más importante en términos prácticos, nos hablan de un “estiramiento infinito” necesario para pasar de la métrica física  $g_{ab}$  a la no física  $\tilde{g}_{ab}$ . Aún más, la cuarta condición garantiza que la métrica física del espaciotiempo  $g_{ab}$  sea plana a medida que nos acercamos al infinito (sea  $\mathcal{J}^+$ ,  $\mathcal{J}^-$  o  $i^0$ ); Finalmente, la quinta condición tiene un trasfondo más técnico. La primera parte nos asegura que todos los generadores de geodésicas nulas de  $\mathcal{J}^+$  y  $\mathcal{J}^-$  surgen de  $i^0$  en forma apropiada, en particular, implica que  $\mathcal{J}^+$  y  $\mathcal{J}^-$  tienen topología  $S^2 \times R$ . La segunda parte nos habla de la completitud del campo vectorial  $n^a$ , o visto de otro modo, la segunda parte requiere que no haya “partes” de  $\mathcal{J}^+$  o  $\mathcal{J}^-$  que falten en nuestro espaciotiempo no físico  $\tilde{M}$ .

Un resultado importante que puede derivarse para dos tensores  $R_{ab}$  y  $\tilde{R}_{ab}$  de los respectivos espaciotiempos  $M$  y  $\tilde{M}$ , es la relación entre ambos

$$R_{ab} = \tilde{R}_{ab} + 2\Omega^{-1}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\Omega + \tilde{g}_{ab}\tilde{g}^{cd}\left(\Omega^{-1}\tilde{\nabla}_c\tilde{\nabla}_d\Omega - 3\Omega^{-2}\tilde{\nabla}_c\Omega\tilde{\nabla}_d\Omega\right). \quad (1.1)$$

### 1.1.3. Coordenadas adaptadas al infinito nulo

En términos sencillos, el concepto de infinito nulo futuro se refiere a una región lejana en el futuro de una solución de ondas gravitacionales. Las coordenadas nulas de Bondi-Sachs están especialmente diseñadas para describir esta región y permiten una descripción precisa de las propiedades asintóticas del espacio-tiempo en este límite. Para estudiar la estructura asintótica descrita en la Sección [1.1.2], es común utilizar estas coordenadas adaptadas al infinito nulo.

En un artículo de Nature de 1960 [3], Hermann Bondi presentó un nuevo enfoque para el estudio de las ondas gravitacionales en la teoría de la relatividad general de Einstein. Se basaba en los rayos nulos salientes a lo largo de los cuales viajaban las ondas. Fue seguido en 1962 por un artículo de Bondi, Metzner y van der Burg [4], en

el que se daban los detalles de los espaciotiempos axisimétricos. En su autobiografía Bondi comentó sobre este último trabajo:

«The 1962 paper I regard as the best scientific work I have ever done, which is later in life than mathematicians supposedly peak.»

Poco después, Rainer Sachs [5] generalizó este formalismo a espaciotiempos no axisimétricos y resolvió las simetrías asintóticas en la aproximación al infinito nulo. Este último tema será profundizado en el Cap.[3] de la tesis.

Las coordenadas desarrolladas en los trabajos mencionados, las coordenadas de Bondi-Sachs  $x^a = (u, r, x^A)$ , fueron construidas en base a una familia de superficies salientes  $u = \text{const}$ , con  $x^0 = u$  una coordenada nula. De modo que el vector tangente es  $k_a = -\partial_a u$ , y por ende  $g^{00} = 0$ . Aquí,  $x^A$  representa dos coordenadas angulares constantes a lo largo de los rayos nulos definidos por la coordenada  $u$ , es decir que

$$k^a \partial_a x^A = 0 = -g^{ab} \partial_a \partial_b x^A, \quad (1.2)$$

y por ende  $g^{0A} = 0$ . La coordenada restante  $x^1 = r$ , que varía a lo largo de un rayo nulo  $k^a$ , es elegida tal que  $\det(g_{AB}) = r^4 q$ , donde  $q$  es el determinante de la métrica de la esfera unitaria  $q_{AB}$  asociada a las coordenadas angulares  $x^A$ .

Para coordenadas estándares esféricas  $x^A = (\theta, \phi)$ ,

$$q_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Para conocer la forma de las componentes restantes de la métrica usamos las identidades

$$\begin{aligned} \delta_1^0 &= g^{0a} g_{a1} = g^{01} g_{11} = 0 \\ \delta_A^0 &= g^{0a} g_{aA} = g^{01} g_{1A} = 0, \end{aligned}$$

de donde vemos que  $g_{11} = g_{1A} = 0$  ya que  $g^{01}$  no puede ser cero, pues sino  $\det(g_{ab}) = 0$ .

Finalmente, podemos concluir que en coordenadas de Bondi-Sachs la métrica toma la forma

$$g_{ab} dx^a dx^b = -\frac{V}{r} e^{2\beta} du^2 - 2e^{2\beta} du dr + r^2 h_{AB} (dx^A - U^A du) (dx^B - U^B du), \quad (1.4)$$

donde  $g_{AB} = r^2 h_{AB}$  y hemos reescrito las componentes de las métricas restantes en términos de las funciones  $V, \beta$  y  $U^A$ .

Para el caso de un espaciotiempo plano, la métrica de Minkowski en coordenadas Bondi-Sachs (1.4) puede escribirse

$$\eta_{ab}dx^a dx^b = -du^2 - 2drdu + r^2 q_{AB} dx^A dx^B \quad (1.5)$$

Por otro lado, para un marco de referencia inercial asintótico en coordenadas de Bondi-Sachs, la métrica (1.4) debe aproximarse a la métrica de Minkowski en el infinito nulo (1.5), de modo que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \beta = \lim_{r \rightarrow \infty} U^A = 0, \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V}{r} = 1, \lim_{r \rightarrow \infty} h_{AB} = q_{AB}. \quad (1.6)$$

Los marcos de referencia inerciales se denominan sistemas de Bondi, o coordenadas de Bondi cuando refiere a las coordenadas que originan el sistema inercial, y son el análogo a los sistemas no acelerados que se encuentran en Minkowski. Estos sistemas son de gran relevancia para la comprensión de la radiación gravitacional y su descripción será ampliada en el Cap. [3].

#### 1.1.4. Propiedad de *Peeling*

En una variedad asintóticamente plana, el tensor de Weyl  $C_{abcd}$ , que describe las ondas gravitatorias en una región del espacio-tiempo, tiene un comportamiento específico cerca del infinito nulo. En particular, el tensor de Weyl se puede descomponer en una serie de términos que se vuelven cada vez más singulares a medida que nos acercamos al infinito nulo.

Esta descomposición en términos singulares se llama la propiedad de Peeling, y es importante porque proporciona información valiosa sobre las propiedades de las ondas gravitatorias cerca del infinito nulo. Por ejemplo, la descomposición de Peeling permite a los físicos distinguir entre diferentes tipos de ondas gravitatorias, como ondas gravitatorias de polarización nula y de polarización no nula. Esta descomposición también permite la identificación de características específicas en la forma de onda de las ondas gravitatorias.

Matemáticamente, la propiedad de Peeling afirma que dada una geodésica nula  $\gamma$  en un espaciotiempo  $(M, g_{ab})$  con parámetro afín  $\lambda$ , si tomamos el límite  $\lambda \rightarrow \infty$ , entonces el tensor de Weyl  $C_{abcd}$  tiene el siguiente comportamiento.

$$C_{abcd} = \frac{C_{abcd}^{(1)}}{\lambda} + \frac{C_{abcd}^{(2)}}{\lambda^2} + \frac{C_{abcd}^{(3)}}{\lambda^3} + \frac{C_{abcd}^{(4)}}{\lambda^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^5}\right). \quad (1.7)$$

Es decir, si hacemos una expansión en términos de  $1/\lambda$ , encontraremos componentes tensoriales  $C_{abcd}^{(N)}$  que poseen simetrías en sus direcciones nulas. El lector familiarizado con la clasificación de Petrov para espaciotiempos reconocerá estas simetrías.

Si tenemos un espaciotiempo con especialidad algebraica asintótica entonces solo sobrevivirá el término en la descomposición que nos dará las simetrías del tensor de Weyl correspondientes al tipo algebraico. Esto es

- Si  $C_{abcd}^{(1)} \neq 0 \rightarrow$  Tipo  $N$
- $C_{abcd}^{(2)} \neq 0 \rightarrow$  Tipo  $III$
- $C_{abcd}^{(3)} \neq 0 \rightarrow$  Tipo  $II$
- $C_{abcd}^{(4)} \neq 0 \rightarrow$  Tipo  $I$  (Ninguna simetría)

Más detalle sobre la clasificación de Petrov puede encontrarse en [6]. Veremos luego que esta descomposición tendrá grandes implicaciones en el formalismo de superficies nulas, ya que descomponer el tensor de Weyl implica descomponer la radiación gravitacional, y por ende, las variables físicas que la describen. En particular, veremos en la próxima sección cómo la propiedad de Peeling afecta las variables definidas en el formalismo de Newman-Penrose.

## 1.2. Formalismo de Newman-Penrose

El formalismo de Newman-Penrose, también llamado formalismo de coeficientes de espín, es un marco matemático utilizado para describir la geometría y la física de la relatividad general de una manera más clara y elegante que las técnicas matemáticas usuales en términos de tensores. Fue desarrollado en la década de 1960 por los físicos Roger Penrose y Ezra Newman. El formalismo de Newman-Penrose es una herramienta matemática muy poderosa para analizar la curvatura y las propiedades físicas del espacio-tiempo en la teoría de la relatividad. En particular, es de suma utilidad a la hora de estudiar ondas gravitacionales lejos de la fuente, ya que como veremos luego, es posible codificar toda la información gravitacional en un solo escalar proporcionado por este mismo formalismo.

### 1.2.1. Espinores

Para entender el origen del formalismo de Newman-Penrose es necesario introducir el concepto de espinores.

Los espinores son objetos matemáticos que se utilizan en física teórica, especialmente en teoría cuántica de campos y en relatividad general. Los espinores son una generalización de los vectores y se caracterizan por transformarse de manera no trivial bajo ciertas transformaciones de simetría, como rotaciones en el espacio o transformaciones de Lorentz. Quizás uno de los ejemplos más conocido de estos elementos puede encontrarse en el contexto de la mecánica cuántica, cuando hablamos de las matrices de Pauli para describir el espín de partículas con espín  $s = 1/2$ .

En esta tesis, no nos restringiremos a una representación específica de los espinores con espín fijo, sino que usaremos el concepto de espinor como elemento de un espacio espinorial que satisfacen un álgebra de espinores. Esta noción fue desarrollada por Penrose y Rindler, junto con la notación abstracta de espinores, que utilizaremos en esta sección. Dado un espinor  $\kappa \in \mathcal{G}$ , con  $\mathcal{G}$  un espacio vectorial complejo de dimensión finita, diremos que  $\kappa_{CD'}^{AB'}$  es un tensor de rango 4 que transforma bajo las transformaciones de Lorentz de acuerdo con las leyes de transformación de los espinores. Aquí los índices  $A, B', C, D'$  denotan cuatro tipos diferentes de espacios vectoriales: los subíndices sin primar indican pertenencia al espacio dual de  $\mathcal{G}$ , los supraíndices sin primar indican pertenencia a  $\mathcal{G}$ , y los subíndices y supraíndices primados indican pertenencia al espacio  $\mathcal{G}$  o  $\mathcal{G}$ -dual respectivamente, bajo la operación de conjugación de números complejos (los espacios vectoriales  $\mathcal{G}$  son por definición complejos).

Vease aquí que la notación introducida para espinores es completamente análoga a la de vectores, con el agregado de que al ser espacios vectoriales complejos también tenemos índices primados. Esta notación, al igual que para vectores, es invariante de coordenadas e utilizamos letras mayúsculas en los índices para señalar que las leyes de transformación de los espinores son distintas a aquellas de los vectores.

#### Estructura del espacio espinorial

Es posible definir un producto interno antisimétrico de  $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  y una forma  $\epsilon_{AB} \in \mathcal{G}_{AB}$  tal que, dados dos espinores  $\kappa^A$  y  $\omega^B$ , se tiene

$$\epsilon_{AB} \kappa^A \omega^B = -\epsilon_{AB} \omega^A \kappa^B. \quad (1.8)$$

La forma  $\epsilon_{AB}$  conforma una parte esencial del algebra espinorial y tiene un rol análogo al de la métrica para vectores. La forma  $\epsilon_{AB}$  es invariante bajo las transformaciones de Lorentz y nos permiten “bajar” o “subir” los índices espinoriales, no solo para espinores de un solo índice sino también para los espinores más generales de la forma  $\chi_{L\dots NU'\dots W'}^{A\dots DP'\dots R'}$ .

Por otro lado, también es posible definir una base en el espacio espinorial. Es decir, un par de espinores  $o, \iota$  tal que sean  $\epsilon_{AB} o^A \iota^B = 1$  y que dada un espinor  $\kappa^A$ , se tenga

$$\kappa^A = \kappa^0 o^A + \kappa^1 \iota^A,$$

con sus componentes  $\kappa^0 = -\iota_A \kappa^A$  y  $\kappa^1 = o_A \kappa^A$ .

La base del espacio espinorial y la forma introducida en (1.8), se relacionan mediante la siguiente ecuación fundamental

$$\epsilon^{AB} = o^A \iota^B - \iota^A o^B. \quad (1.9)$$

## Relación entre vectores y espinores

La relación entre los espacios espinoriales y el grupo de Lorentz puede ser establecida con los conceptos introducidos. Cabe destacar que las relaciones entre espinores y vectores deducidas en esta sección, se desprenden del hecho de que el producto tensorial de dos espinores transforma de la misma manera que un vector, y por ende, ambos espacios deben ser isomorfos.

Dada una base normalizada  $(o^A, \iota^A)$  del espacio espinorial  $\mathcal{G}$ , podemos definir tensores en  $W = \mathcal{G} \times \bar{\mathcal{G}}$  de la siguiente manera

$$t^{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(o^A o^{A'} + \iota^A \bar{\iota}^{A'}), \quad (1.10)$$

$$x^{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(o^A \bar{\iota}^{A'} + \iota^A o^{A'}), \quad (1.11)$$

$$y^{AA'} = \frac{i}{\sqrt{2}}(o^A \bar{\iota}^{A'} - \iota^A o^{A'}), \quad (1.12)$$

$$z^{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(o^A o^{A'} - \iota^A \bar{\iota}^{A'}). \quad (1.13)$$

El espacio cuadri-dimensional formado por estos tensores es invariante ante la conjugación compleja. Este hecho, sumando al hecho de que la ley de transformación



de estos tensores se comporta de la misma manera que los vectores ante transformaciones de Lorentz, nos dice que la base  $(t^a, x^a, y^a, z^a)$  también forma una base del espacio vectorial  $W$ . Se define entonces una transformación lineal híbrida  $\sigma$  entre vectores y espinores tal que

$$\sigma_{AA'}^a = t^a t_{AA'} - x^a x_{AA'} - y^a y_{AA'} - z^a z_{AA'}. \quad (1.14)$$

Esta transformación es un isomorfismo en  $W$  que nos permite transformar entre los tensores espinoriales (1.10) y la base vectorial conocida en Minkowski  $(t^a, x^a, y^a, z^a)$ .

### 1.2.2. Coeficientes de espín

Habiendo definido el álgebra de espinores es sencillo ahora definir la base nula a partir de la cual se desarrolla el formalismo de coeficientes de espín. Entonces dada una base de espinores  $(o^A, \iota^A)$ , simplemente definiremos una base ortogonal nula del espaciotiempo efectuando todas las posibles combinaciones de productos tensoriales entre esta base y su compleja conjugada. De esta forma surge de manera natural la base vectorial

$$l^a = o^A \bar{o}^{A'}, \quad m^a = o^A \bar{\iota}^{A'}, \quad \bar{m}^a = \iota^A \bar{o}^{A'}, \quad n^a = \iota^A \bar{\iota}^{A'}. \quad (1.15)$$

Se desprende de las propiedades de los espinores vistas en la anterior sección que estos vectores satisfacen las siguientes relaciones

$$l_a n^a = -1 = l^a n_a, \quad m_a \bar{m}^a = 1 = m^a \bar{m}_a, \quad (1.16)$$

$$l_a m^a = l_a \bar{m}^a = n_a m^a = n_a \bar{m}^a = 0, \quad (1.17)$$

$$l_a l^a = n_a n^a = m_a m^a = \bar{m}_a \bar{m}^a = 0. \quad (1.18)$$

Esto quiere decir que los cuatro vectores no solamente son nulos, sino que forman una base ortogonal de un espacio cuadi-dimensional. Los índices de estos vectores pueden subirse o bajarse para obtener su respectivo par del espacio dual mediante la métrica que queda determinada por nuestra base espinorial de dos dimensiones.

$$\begin{aligned} g_{ab} &= \varepsilon_{AB} \varepsilon_{A'B'} = (o_A \iota_B - \iota_A o_B) (\bar{o}_{A'} \bar{\iota}_{B'} - \bar{\iota}_{A'} \bar{o}_{B'}) \\ &= l_a n_b + n_a l_b - m_a \bar{m}_b - \bar{m}_a m_b, \end{aligned} \quad (1.19)$$

Si denotamos a los vectores de nuestra base nula como

$$\lambda_i^a = (l^a, n^a, m^a, \bar{m}^a), \quad (1.20)$$

podemos definir las derivadas direccionales, en la dirección de cada vector nulo, como

$$\nabla_i \equiv \lambda_i^b \nabla_b = (D, \Delta, \delta, \bar{\delta}). \quad (1.21)$$

Una vez introducidas las derivadas direccionales, podemos aplicarlas sobre la misma base nula y obtener los coeficientes de rotación de Ricci de nuestra base

$$\gamma_{jk}^i = \lambda_j^b \lambda_k^a \nabla_a \lambda_b^i. \quad (1.22)$$

Estos coeficientes son un caso particular de conexión cuando el marco de referencia es no coordinado. Luego, los escalares de Newman-Penrose se definen simplemente como las distintas componentes independientes de la conexión  $\gamma_{jk}^i$ ,

$$\begin{aligned} \pi &= -\gamma_{241}, & \epsilon &= \frac{1}{2}(\gamma_{121} - \gamma_{341}), & \kappa &= \gamma_{131} \\ \lambda &= -\gamma_{244}, & \alpha &= \frac{1}{2}(\gamma_{124} - \gamma_{344}), & \rho &= \gamma_{134} \\ \mu &= -\gamma_{243}, & \beta &= \frac{1}{2}(\gamma_{123} - \gamma_{343}), & \sigma &= \gamma_{133} \\ \nu &= -\gamma_{242}, & \gamma &= \frac{1}{2}(\gamma_{122} - \gamma_{342}), & \tau &= \gamma_{132}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Algunos de estos coeficientes tienen una interpretación física directa en términos del comportamiento de un conjunto de geodésicas. Estos escalares son ampliamente usados para estudiar el comportamiento de las ondas gravitatorias, los agujeros negros y otros fenómenos en la relatividad general, y componen una herramienta fundamental para comprender la estructura y la dinámica de espaciotiempos no triviales.

Dada una congruencia de curvas nulas, o “manejo” de curvas nulas en términos informales, algunos coeficientes de espín tienen significado geométrico bien definido. Estos son

- $\rho$ , con su parte real, representa la dilatación o expansión de los rayos de luz a lo largo de la congruencia de curvas; la parte imaginaria representa la rotación o *twist* de la congruencia. Si tomamos la sección transversal a los rayos de luz  $A$ , el cambio de la sección con respecto a la coordenada radial viene dado por

$$\frac{1}{A} \frac{ds}{dr} = -(\rho + \bar{\rho}) \quad (1.24)$$

- $\sigma$ , representa la deformación de la congruencia de curvas por la cual se propagan los rayos de luz;
- $\kappa$ , nos permite decidir si la congruencia se trata de una congruencia geodésica. Ya que en este caso, debe ser  $\kappa = 0$ .
- $\epsilon$ , también es un escalar vinculado a la condición geodésica ya que en este caso es posible hacer una elección del parámetro afín de la congruencia de tal forma que  $\epsilon + \bar{\epsilon} = 0$ . Esto es, el escalar  $\epsilon$  es imaginario.
- $\pi$ , junto con los escalares  $\kappa$  y  $\epsilon$  establecen cuando la tetrad nula asociada a la congruencia se transporta paralelamente sobre esta. En efecto, la tetrad nula es paralela a la congruencia si y solo si  $\pi = \kappa = \epsilon = 0$ .

Además de los doce escalares [1.23] de la conexión, podemos definir cinco escalares más relacionados a la radiación gravitacional, haciendo todas las contracciones independientes entre el tensor de Weyl y nuestra base nula,

$$\Psi_0 = -C_{abcc}l^a m^b l^c m^d, \quad (1.25)$$

$$\Psi_1 = -C_{abcd}l^a n^b l^c m^d, \quad (1.26)$$

$$\Psi_2 = -C_{abcd}l^a m^b \bar{m}^c n^d, \quad (1.27)$$

$$\Psi_3 = -C_{abcd}l^a n^b \bar{m}^c n^d, \quad (1.28)$$

$$\Psi_4 = -C_{abcd}\bar{m}^a n^b \bar{m}^c n^d. \quad (1.29)$$

En términos generales, los escalares de Weyl proporcionan una descripción detallada de la curvatura del espacio-tiempo y son importantes para la comprensión de la física de los objetos astrofísicos, como los agujeros negros y las estrellas de neutrones. También se utilizan en la construcción de modelos teóricos de la radiación gravitatoria y en la interpretación de las observaciones astronómicas. Existe una estrecha relación entre las simetrías que pueden presentar el espaciotiempo en una dirección nula y el valor de los escalares de Weyl en dicho punto. El lector interesado en entender esta relación podrá consultar [6] sobre la clasificación de Petrov para espaciotiempos.

### 1.2.3. Ecuaciones de coeficientes de espín

Escribiremos ahora las ecuaciones que rigen la dinámica de los coeficientes de espín en regiones de vacío. Por un lado, la tetraada nula [1.15], deben respetar las siguientes ecuaciones

$$\Delta l^a - Dn^a = (\gamma + \bar{\gamma})l^a + (\epsilon + \bar{\epsilon})n^a - (\tau + \bar{\pi})\bar{m}^a - (\bar{\tau} + \pi)m^a, \quad (1.30)$$

$$\delta l^a - Dm^a = (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})l^a + \kappa n^a - \sigma \bar{m}^a - (\bar{\rho} + \epsilon - \bar{\epsilon})m^a, \quad (1.31)$$

$$\delta n^a - \Delta m^a = -\bar{\nu}l^a + (\tau - \bar{\alpha} - \beta)n^a + \bar{\lambda}\bar{m}^a + (\mu - \gamma + \bar{\gamma})m^a, \quad (1.32)$$

$$\bar{\delta}m^a - \delta\bar{m}^a = (\bar{\mu} - \mu)l^a + (\bar{\rho} - \rho)n^a - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{m}^a + (\alpha - \bar{\beta})m^a. \quad (1.33)$$

Luego, los coeficientes de espín deben respetar el siguiente conjunto de dieciocho ecuaciones diferenciales

$$\Delta\lambda - \bar{\delta}\nu = -(\mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma})\lambda + (3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau})\nu - \Psi_4 \quad (1.34)$$

$$\delta\rho - \bar{\delta}\sigma = \rho(\bar{\alpha} + \beta) - \sigma(3\alpha - \bar{\beta}) + (\rho - \bar{\rho})\tau + (\mu - \bar{\mu})\kappa - \Psi_1 \quad (1.35)$$

$$\delta\alpha - \bar{\delta}\beta = \mu\rho - \lambda\sigma + \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - 2\alpha\beta + \gamma(\rho - \bar{\rho}) + \epsilon(\mu - \bar{\mu}) - \Psi_2 \quad (1.36)$$

$$\delta\lambda - \bar{\delta}\mu = (\rho - \bar{\rho})\nu + (\mu - \bar{\mu})\pi + \mu(\alpha + \bar{\beta}) + \lambda(\bar{\alpha} - 3\beta) - \Psi_3 \quad (1.37)$$

$$\delta\nu - \Delta\mu = \mu^2 + \lambda\bar{\lambda} + \mu(\gamma + \bar{\gamma}) - \bar{\nu}\pi + \nu(\tau - 3\beta - \bar{\alpha}) \quad (1.38)$$

$$\delta\gamma - \Delta\beta = \gamma(\tau - \bar{\alpha} - \beta) + \mu\tau - \sigma\nu - \epsilon\bar{\nu} - \beta(\gamma - \bar{\gamma} - \mu) + \alpha\bar{\lambda} \quad (1.39)$$

$$\delta\tau - \Delta\sigma = \mu\sigma + \rho\bar{\lambda} + \tau(\tau + \beta - \bar{\alpha}) - \sigma(3\gamma - \bar{\gamma}) - \kappa\bar{\nu} \quad (1.40)$$

$$\Delta\rho - \bar{\delta}\tau = -(\rho\bar{\mu} + \sigma\lambda) + \tau(\bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau}) + (\gamma + \bar{\gamma})\rho + \kappa\nu - \Psi_2 \quad (1.41)$$

$$\Delta\alpha - \bar{\delta}\gamma = \nu(\rho + \epsilon) - \lambda(\tau + \beta) + \alpha(\bar{\gamma} - \bar{\mu}) + \gamma(\bar{\beta} - \bar{\tau}) - \Psi_3 \quad (1.42)$$

$$D\rho - \bar{\delta}\kappa = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + (\epsilon + \bar{\epsilon})\rho - \bar{\kappa}\tau - \kappa(3\alpha + \bar{\beta} - \pi) \quad (1.43)$$

$$D\sigma - \delta\kappa = (\rho + \bar{\rho})\sigma + (3\epsilon - \bar{\epsilon})\sigma - (\tau - \bar{\pi} + \bar{\alpha} + 3\beta)\kappa + \Psi_0 \quad (1.44)$$

$$D\tau - \Delta\kappa = (\tau + \bar{\pi})\rho + (\bar{\tau} + \pi)\sigma + (\epsilon - \bar{\epsilon})\tau - (3\gamma + \bar{\gamma})\kappa + \Psi_1 \quad (1.45)$$

$$D\alpha - \bar{\delta}\epsilon = (\rho + \bar{\epsilon} - 2\epsilon)\alpha + \beta\bar{\sigma} - \bar{\beta}\epsilon - \kappa\lambda - \bar{\kappa}\gamma + (\epsilon + \rho)\pi \quad (1.46)$$

$$D\beta - \delta\epsilon = (\alpha + \pi)\sigma + (\bar{\rho} - \bar{\epsilon})\beta - (\mu + \gamma)\kappa - (\bar{\alpha} - \bar{\pi})\epsilon + \Psi_1 \quad (1.47)$$

$$D\gamma - \Delta\epsilon = (\tau + \bar{\pi})\alpha + (\bar{\tau} + \pi)\beta - (\epsilon + \bar{\epsilon})\gamma - (\gamma + \bar{\gamma})\epsilon + \tau\pi - \nu\kappa + \Psi_2 \quad (1.48)$$

$$D\lambda - \bar{\delta}\pi = \rho\lambda + \bar{\sigma}\mu + \pi^2 + (\alpha - \bar{\beta})\pi - \nu\bar{\kappa} - (3\epsilon - \bar{\epsilon})\lambda \quad (1.49)$$

$$D\mu - \delta\pi = \bar{\rho}\mu + \sigma\lambda + \pi\bar{\pi} - (\epsilon + \bar{\epsilon})\mu - \pi(\bar{\alpha} - \beta) - \nu\kappa + \Psi_2 \quad (1.50)$$

$$D\nu - \Delta\pi = (\bar{\tau} + \pi)\mu + (\tau + \bar{\pi})\lambda + (\gamma - \bar{\gamma})\pi - (3\epsilon + \bar{\epsilon})\nu + \Psi_3. \quad (1.51)$$

Este conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas debe resolverse junto con las identidades de Bianchi que, en términos de los coeficientes de espín, se leen

$$\bar{\delta}\Psi_0 - D\Psi_1 = (4\alpha - \pi)\Psi_0 - 2(2\rho + \epsilon)\Psi_1 + 3\kappa\Psi_2, \quad (1.52)$$

$$\bar{\delta}\Psi_1 - D\Psi_2 = \lambda\Psi_0 + 2(\alpha - \pi)\Psi_1 - 3\rho\Psi_2 + 2\kappa\Psi_3 \quad (1.53)$$

$$\bar{\delta}\Psi_2 - D\Psi_3 = 2\lambda\Psi_1 - 3\pi\Psi_2 + 2(\epsilon - \rho)\Psi_3 + \kappa\Psi_4 \quad (1.54)$$

$$\bar{\delta}\Psi_3 - D\Psi_4 = 3\lambda\Psi_2 - 2(\alpha + 2\pi)\Psi_3 + (4\epsilon - \rho)\Psi_4 \quad (1.55)$$

$$\Delta\Psi_0 - \delta\Psi_1 = (4\gamma - \mu)\Psi_0 - 2(2\tau + \beta)\Psi_1 + 3\sigma\Psi_2, \quad (1.56)$$

$$\Delta\Psi_1 - \delta\Psi_2 = \nu\Psi_0 + 2(\gamma - \mu)\Psi_1 - 3\tau\Psi_2 + 2\sigma\Psi_3, \quad (1.57)$$

$$\Delta\Psi_2 - \delta\Psi_3 = 2\nu\Psi_1 - 3\mu\Psi_2 + 2(\beta - \tau)\Psi_3 + \sigma\Psi_4, \quad (1.58)$$

$$\Delta\Psi_3 - \delta\Psi_4 = 3\nu\Psi_2 - 2(\gamma + 2\mu)\Psi_3 + (4\beta - \tau)\Psi_4 \quad (1.59)$$

En conclusión, podemos decir que la versión de vacío de las ecuaciones de Einstein consisten en tres conjuntos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales y acopladas entre sí. Estos conjuntos son: el conjunto de ecuaciones diferenciales para la tetraeda, el conjunto de ecuaciones para los coeficientes de espín y un tercer conjunto de ecuaciones para los escalares de Weyl. Aunque no hay mucha esperanza de poder resolver las ecuaciones (1.30), (1.34) y (1.52) en forma general, muchas soluciones exactas han sido encontradas en estas. En particular, se han encontrado varias soluciones de perturbaciones y de soluciones asintóticas. El interés de este trabajo radica en este último tipo de soluciones que describiremos en la próxima sección.

#### 1.2.4. Comportamiento asintótico

Presentaremos las soluciones asintóticas para el conjunto de ecuaciones (1.7), (1.34) y (1.52). Para encontrar estas soluciones uno debe empezar especificando el comportamiento de  $\Psi_0$  con respecto a la variable radial  $r^{-1}$ , definida en el infinito nulo. Luego, puede ir desacoplando las ecuaciones y resolviendolas en órdenes de  $r^{-1}$ . El lector interesado en conocer el procedimiento de resolución detalladamente podrá consultar las referencias [7, 8].

Denotaremos con un superíndice cero a las cantidades definidas en el infinito nulo  $\mathcal{J}$ , que serán soluciones asintóticas a las ecuaciones de Weyl y también constituyen los términos dominantes en espaciotiempos asintóticamente planos a medida que nos alejamos de una fuente.

Entonces asintóticamente, y teniendo en cuenta (1.7), podemos escribir los escalares

de Weyl como

$$\psi_0 = \psi_0^0 r^{-5} + O(r^{-6}), \quad (1.60)$$

$$\psi_1 = \psi_1^0 r^{-4} + O(r^{-5}), \quad (1.61)$$

$$\psi_2 = \psi_2^0 r^{-3} + O(r^{-4}), \quad (1.62)$$

$$\psi_3 = \psi_3^0 r^{-2} + O(r^{-3}), \quad (1.63)$$

$$\psi_4 = \psi_4^0 r^{-1} + O(r^{-2}). \quad (1.64)$$

Mientras que la solución a las Ecs. (1.34) es

$$\xi^{0\zeta} = -P, \quad \bar{\xi}^{0\zeta} = 0, \quad (1.65)$$

$$\xi^{0\bar{\zeta}} = 0, \quad \bar{\xi}^{0\bar{\zeta}} = -P, \quad (1.66)$$

$$P = 1 + \zeta\bar{\zeta}, \quad (1.67)$$

$$\alpha^0 = -\bar{\beta}^0 = -\frac{\zeta}{2}, \quad (1.68)$$

$$\gamma^0 = \nu^0 = 0, \quad (1.69)$$

$$\omega^0 = -\bar{\partial}\sigma^0, \quad (1.70)$$

$$\lambda^0 = \dot{\sigma}^0, \quad (1.71)$$

$$\mu^0 = U^0 = -1, \quad (1.72)$$

$$\psi_4^0 = -\ddot{\sigma}^0, \quad (1.73)$$

$$\psi_3^0 = \partial\dot{\sigma}^0, \quad (1.74)$$

$$\psi_2^0 - \bar{\psi}_2^0 = \bar{\sigma}^2\sigma^0 - \partial^2\bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}^0\lambda^0 - \sigma^0\bar{\lambda}^0, \quad (1.75)$$

$$(1.76)$$

con

$$\xi^A = \zeta \text{ or } \bar{\zeta}, \quad (1.77)$$

$$\xi^A = \xi^{0A}r^{-1} - \sigma^0\bar{\xi}^{0A}r^{-2} + \sigma^0\bar{\sigma}^0\xi^{0A}r^{-3} + O(r^{-4}), \quad (1.78)$$

$$\omega = \omega^0r^{-1} - (\sigma^0\bar{\omega}^0 + \psi_1^0/2)r^{-2} + O(r^{-3}), \quad (1.79)$$

$$X^A = (\psi_1^0\bar{\xi}^{0A} + \bar{\psi}_1^0\xi^{0A})(6r^3)^{-1} + O(r^{-4}), \quad (1.80)$$

$$U = U^0 - (\gamma^0 + \bar{\gamma}^0)r - (\psi_2^0 + \bar{\psi}_2^0)(2r)^{-1} + O(r^{-2}). \quad (1.81)$$

Por otro lado, se desprende de las identidades de Bianchi (1.52) que las ecuaciones

de evolución para los escalares de Weyl asintóticos son

$$\dot{\psi}_2^0 = -\partial\psi_3^0 + \sigma^0\psi_4^0, \quad (1.82)$$

$$\dot{\psi}_1^0 = -\partial\psi_2^0 + 2\sigma^0\psi_3^0, \quad (1.83)$$

$$\dot{\psi}_0^0 = -\partial\psi_1^0 + 3\sigma^0\psi_2^0. \quad (1.84)$$

De las tres ecuaciones (1.82) - (1.84), la primera está relacionada con la pérdida de energía gravitacional y juega un rol fundamental a la hora de comprender la dinámica de las cantidades físicas de una sistema. En efecto, definiendo el aspecto de masa como

$$\Psi = \psi_2^0 + \partial^2\bar{\sigma}^0 + \sigma^0\dot{\bar{\sigma}}^0, \quad (1.85)$$

la Ec. (1.82) puede reescribirse como

$$\dot{\Psi} = \dot{\sigma}\dot{\bar{\sigma}}. \quad (1.86)$$

Dado que todos los coeficientes de espín definidos dependen de las coordenadas  $(u, \zeta, \bar{\zeta})$  (Ver Sec. 1.1.3) podemos hacer una expansión del aspecto de masa en términos de los esféricos armónicos

$$\Psi(u, \zeta, \bar{\zeta}) = \Psi^0(u) + \Psi^i(u)Y_{1i}^0(\zeta, \bar{\zeta}) + \Psi^{ij}(u)Y_{1ij}^0(\zeta, \bar{\zeta}) + \dots \quad (1.87)$$

donde se suele definir la masa y momento de Bondi como los términos  $l = 0$  y  $l = 1$  de la expansión (1.87)

$$M_B = -\frac{c^2}{2\sqrt{2}G}\Psi^0, \quad (1.88)$$

$$P^i = -\frac{c^3}{6G}\Psi^i. \quad (1.89)$$

Por otro lado, una definición del momento angular en términos de con estas coordenadas no existe y esto introduce, en algún punto, el problema de definir cantidades globales similares a la mecánica newtoniana en relatividad general. Para teorías de relatividad lineales en vacío, el momento angular es usualmente definido en forma similar al momento de Bondi como la parte imaginaria del término vectorial en la expansión de  $\psi_1^{0i}$

$$J^i = -\frac{\sqrt{2}}{12}Im(\psi_1^{0i}), \quad (1.90)$$

entonces cualquiera sea la definición de momento angular dada en espaciotiempos genéricos, deberá tener como resultado de su linearización la Ec. (1.90).

El lector no debe dejar de notar que la Ec. (1.85) contiene una expansión no trivial de esféricos armónicos, ya que no son los  $Y_{lm}(\zeta, \bar{\zeta})$  usuales de la literatura general. Estos esféricos armónicos se conocen como esféricos armónicos tensoriales  $Y_{l, I_N}^s(\zeta, \bar{\zeta})$ , con  $I_N$  un conjunto de índices tensoriales  $(i_1 \dots i_N)$ , y profundizaremos sobre su definición en la próxima sección.

### 1.3. Bases completas en $L_2(S^2)$

En relatividad general, las cantidades escalares Ecs. (1.34) y (1.52) que utilizamos para estudiar la radiación gravitacional exhiben una simetría adicional correspondiendo al grupo de simetrías  $U(1)$ . Esto quiere decir que si tenemos una cantidad escalar  $\eta$  en la esfera  $S^2$  y efectuamos una rotación alrededor del polo norte de la esfera, entonces  $\eta$  transforma como

$$\eta \rightarrow e^{is\psi} \eta, \quad (1.91)$$

con  $s$  un número entero y  $\psi$  una fase. Se definen entonces los esféricos armónicos con peso de espín,  $Y_{lm}^s$ , como una generalización a los esféricos armónicos estándares y que, al igual que ellos, también son funciones en la esferas donde  $l, m$  están asociados a las transformaciones alrededor de los ejes x,y,z según las leyes de transformación

$$\begin{cases} Y_{l,m}(\theta + \delta\theta, \phi) = (-1)^l Y_{l,-m}(\theta, \phi) & \text{si eje x} \\ Y_{lm}(\theta, \phi + \delta\phi) = e^{im\delta\phi} Y_{lm}(\theta, \phi) & \text{si eje y} . \\ Y_{lm}(\theta, \phi + \delta\phi) = e^{im(\phi + \delta\phi)} Y_{lm}(\theta, \phi) & \text{si eje z} \end{cases}$$

Nótese que las funciones  $Y_{lm}^s(\zeta, \bar{\zeta})$  son funciones integrables en la esfera y por lo tanto puede definirse un producto interno entre estas funciones como

$$(Y_{lm}^s, Y_{l'm'}^{s'}) = \int_{S^2} Y_{lm}^s \bar{Y}_{l'm'}^{s'} dS. \quad (1.92)$$

Por lo tanto, se dice que estas son representaciones del grupo  $U(1) \times SO(3)$  sobre  $L_2(S^2)$  en el caso de esféricos armónicos con peso de espín y, similarmente, se dice que los esféricos armónicos estándares son representaciones del grupo  $SO(3)$  sobre  $L_2(S^2)$ .



Los esféricos armónicos con peso de espín, al ser una base completa sobre  $L_2(S^2)$ , permiten hacer un desarrollo en serie de la parte angular de cualquier cantidad escalar. En particular, en la literatura es usual hacer un desarrollo en serie del escalar de Weyl asintótico  $\Psi_4^0$  como

$$\Psi_4^0(u, \zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{l=2, m=-l}^{l=\infty, m=l} \Psi_{4lm}^0(u) Y_{lm}^2(\zeta, \bar{\zeta}). \quad (1.93)$$

Notemos que en este caso el escalar de Weyl tiene un peso de espín  $s = 2$  y esto se debe a que la radiación gravitacional tiene dos grados de polarización.

### 1.3.1. Esféricos armónicos tensoriales

En esta tesis, si bien utilizaremos cantidades con peso de espín, no utilizaremos los esféricos armónicos espinoriales sino una representación equivalente a esta. Los esféricos armónicos tensoriales constituyen otra representación de  $U(1) \times SO(3)$  en espacios tensoriales de rango  $(0, m)$ ,  $\mathbf{T}(V^0 \times V^{*m})$ , con  $V^{*m}$  el producto tensorial de  $m$ -veces el espacio dual de  $V$ . En esta sección nuestro espacio  $V$  será un espacio euclideo tridimensional, por lo tanto la diferenciación entre  $V$  y  $V^*$  es innecesaria.

Esta representación fue introducida por primera vez en [9] y es utilizada en diversos ámbitos de relatividad general, en particular, usaremos esta herramienta para estudiar la radiación gravitacional.

Matemáticamente, dados los vectores que componen la tetra nula (1.15) en el espacio de Minkowski

$$l^a(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + \zeta\bar{\zeta})} (1 + \zeta\bar{\zeta}, \zeta + \bar{\zeta}, -i(\zeta - \bar{\zeta}), -1 + \zeta\bar{\zeta}), \quad (1.94)$$

$$n^a(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + \zeta\bar{\zeta})} (1 + \zeta\bar{\zeta}, -(\zeta + \bar{\zeta}), i(\zeta - \bar{\zeta}), 1 - \zeta\bar{\zeta}), \quad (1.95)$$

$$m^a(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + \zeta\bar{\zeta})} (0, 1 - \bar{\zeta}^2, -i(1 + \bar{\zeta}^2), 2\bar{\zeta}), \quad (1.96)$$

$$\bar{m}^a(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + \zeta\bar{\zeta})} (0, 1 - \zeta^2, i(1 + \zeta^2), 2\zeta), \quad (1.97)$$

$$(1.98)$$

podemos definir vectores espaciales tridimensionales  $c_i$ ,  $m_i$  y  $\bar{m}_i$  como las proyecciones normales de los vectores  $c^a = l^a - n^a$ ,  $m^a$  y  $\bar{m}^a$  a  $t^a$ , es decir,

$$c^i = \frac{-\sqrt{2}}{(1 + \zeta\bar{\zeta})} (\zeta + \bar{\zeta}, -i(\zeta - \bar{\zeta}), -1 + \zeta\bar{\zeta}), \quad (1.99)$$

$$m^i = \frac{-1}{\sqrt{2}(1 + \zeta\bar{\zeta})} (1 - \bar{\zeta}^2, -i(1 + \bar{\zeta}^2), 2\bar{\zeta}), \quad (1.100)$$

$$\bar{m}^i = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + \zeta\bar{\zeta})} (1 - \zeta^2, i(1 + \zeta^2), 2\zeta). \quad (1.101)$$

Geométricamente, el vector  $c_i$  es un vector en la dirección radial en la esfera, mientras que los vectores  $m_i$  y  $\bar{m}_i$  son vectores tangentes a la esfera. Los vectores (1.99), (1.100) y (1.101) forman una base para construir los esféricos armónicos tensoriales. Entonces, se definen los esféricos armónicos tensoriales con peso de espín  $s = l$  como

$$Y_{l,i_1\dots i_l}^l = m_{i_1}\dots m_{i_l}. \quad (1.102)$$

Para extender su definición a pesos de espín  $s \neq l$ , se introducen dos operaciones de derivación sobre la esfera  $S^2$ ,  $\partial$  y  $\bar{\partial}$ , que actúan como “operadores escaleras” con respecto al índice  $S$ . Es decir,

$$\bar{\partial}^{l-s} Y_{l,i_1\dots i_l}^l = Y_{l,i_1\dots i_l}^s, \quad (1.103)$$

$$\partial^{l-|s|} Y_{l,i_1\dots i_l}^{-l} = Y_{l,i_1\dots i_l}^s \quad (1.104)$$

Para ser más precisos, los operadores  $\partial$  y  $\bar{\partial}$  son derivadas covariantes complejas en la variedad 2-dimensional de  $S^2$ . Es posible componer estas dos derivadas para definir el laplaciano en  $S^2$  y es sencillo verificar de (1.103) y (1.104) que

$$\partial\bar{\partial} Y_{l,i_1\dots i_l}^s = -(l+s)(l-s+1) Y_{l,i_1\dots i_l}^s, \quad (1.105)$$

es decir, los  $Y_{l,i_1\dots i_l}^s$  son autovalores del laplaciano.

Una vez definida la base tensorial, y siendo que esta es una base completa, podemos realizar un desarrollo similar a (1.93), pero esta vez en términos de los esféricos armónicos tensoriales:

$$\begin{aligned} \Psi_4^0(u, \zeta, \bar{\zeta}) &= \sum_{l=2}^{l=\infty} \Psi_4^0(u)_{l,I_l} Y_{l,I_l}^2(\zeta, \bar{\zeta}) \\ &= \Psi_4^0(u)_{2,i_1 i_2} Y_{2,i_1 i_2}^2(\zeta, \bar{\zeta}) + \Psi_4^0(u)_{3,i_1 i_2 i_3} Y_{3,i_1 i_2 i_3}^2(\zeta, \bar{\zeta}) + \dots \end{aligned} \quad (1.106)$$

## Descomposición de Clebsh-Gordan

Finalizaremos esta sección describiendo la descomposición de Clebsh-Gordan para productos de esféricos armónicos tensoriales. La descomposición de Clebsh-Gordan es un teorema en teoría de grupos que permite descomponer el producto directo de dos grupos en suma directa de representaciones de dimensiones menor. No nos adentraremos en los detalles matemáticos de las representaciones tensoriales ni tampoco daremos un algoritmo para la descomposición de cualquier producto. Sin embargo, es necesario mencionar esta herramienta ya que será de gran utilidad en cálculos posteriores.

Dados dos tensores  $Y_{l,i_1\dots i_l}^s$  y  $Y_{l',i_1\dots i_{l'}}^{s'}$ , el producto tensorial de ambos puede ser descompuesto como

$$Y_{l_1,i_1\dots i_{l_1}}^{s_1} Y_{l_2,i_1\dots i_{l_2}}^{s_2} = \sum_{l=-|l_1-l_2|}^{l=l_1+l_2} A_l \epsilon_{i_1\dots i_{l_1+l_2-l}} Y_{l,i_1\dots i_l}^{s_1+s_2}, \quad (1.107)$$

donde  $A_l$  constituyen los coeficientes de Clebsh-Gordan,  $\epsilon_{i_1\dots i_{l_1+l_2-l}} = \epsilon_{i_1\dots i_{l_1+l_2-l}}$  para tensores sobre espacios de dimensión impar y  $\epsilon_{i_1\dots i_{l_1+l_2-l}} = \delta_{i_1\dots i_{l_1+l_2-l}}$  para tensores sobre espacios de dimensión par.

De esta forma, si realizamos el producto tensorial de  $Y_{1i}^1$  e  $Y_{1j}^0$ , la descomposición de Clebsh-Gordan permite expresarlo como

$$Y_{1i}^1 Y_{1j}^0 = \frac{i}{\sqrt{2}} \epsilon_{ijk} Y_k + \frac{1}{2} Y_{2ij}^1. \quad (1.108)$$

Encontrar las constantes  $A_l$  no es una tarea sencilla y en general se dificulta hacia mayores valores del índice  $l$ . Para encontrar estos coeficientes deben escribirse ambos miembros de la igualdad (1.107) en términos de los vectores los  $c_i, m_i$  y  $\bar{m}_i$ . Luego, se plantea un sistema de ecuaciones compuesta de todas las ecuaciones con el mismo peso de espín y se despejan los coeficientes. Una tabla para los productos con índices más bajos puede verse en el Apéndice C.

## 1.4. Transformaciones nulas

Finalizaremos este capítulo presentando una subclase de las transformaciones de Lorentz, llamadas transformaciones nulas. Dentro de las cinco clases de conjugación del grupo restringido de las transformaciones de Lorentz  $SO^+(1, 3)$ , solo las transformaciones parabólicas (rotaciones nulas) y las hiperbólicas (también conocidas como

*boosts*) serán de interés en esta sección. Esto se debe a que trabajaremos con vectores nulos a lo largo de esta tesis.

Durante la tesis trabajaremos definiendo cantidades cuyas coordenadas  $(\zeta, \bar{\zeta})$  están contenidas en  $S^2$ . Para ver cómo transforma este par de coordenadas ante una transformación de lorentz restringida, es más sencillo ver su acción bajo el grupo  $SL(2, C)$ , que sabemos es isomorfo a  $SO^+(1, 3)$ . Entonces

$$\begin{aligned}\zeta &\rightarrow \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}, \\ \bar{\zeta} &\rightarrow \frac{\bar{a}\bar{\zeta} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{\zeta} + \bar{d}},\end{aligned}\tag{1.109}$$

con  $a, b, c, d$  los parámetros del grupo  $SL(2, C)$  que satisfacen la relación  $ac - bd = 1$ . La transformación (1.109) también es conocida como transformación fraccional o transformación de Möbius.

Dada una tetra nula como en (1.15), los seis parámetros de una transformación de Lorentz pueden ser agrupados en tres parámetros complejos. Estos tres parámetros dan lugar a tres tipos de rotaciones para la tetra nula:

- **Rotaciones nulas tipo I**

$$\begin{aligned}l^c &\rightarrow l^c, n^c \rightarrow n^c + \bar{a}m^c + a\bar{m}^c + \bar{a}al^c \\ m^c &\rightarrow m^c + al^c, \bar{m}^c \rightarrow \bar{m}^c + \bar{a}l^c\end{aligned}$$

- **Rotaciones nulas tipo II**

$$\begin{aligned}l^c &\rightarrow l^c + \bar{b}m^c + b\bar{m}^c, n^c \rightarrow n^c \\ m^c &\rightarrow m^c + bn^c, \bar{m}^c \rightarrow \bar{m}^c + \bar{b}n^c\end{aligned}$$

- **Transformaciones de *Boost* (hiperbólicas)**

$$\begin{aligned}l^c &\rightarrow A^{-1}l^c, n^c \rightarrow An^c \\ m^c &\rightarrow e^{i\theta}m^c, \bar{m}^c \rightarrow e^{-i\theta}\bar{m}^c\end{aligned}$$

Estas leyes de transformación pueden deducirse de (1.109) y (1.15).

Por otro lado, se desprende de las leyes de transformación para las tetradas que los escalares de Weyl (1.25) construidos en la Sec. 1.2.2 también transforman según el tipo de transformación nula. Esto es

- **Rotaciones nulas tipo I**

$$\Psi_0 \rightarrow \Psi_0$$

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &\rightarrow \Psi_1 + \bar{a}\Psi_0 \\
\Psi_2 &\rightarrow \Psi_2 + 2\bar{a}\Psi_1 + \bar{a}^2\Psi_0 \\
\Psi_3 &\rightarrow \Psi_3 + 3\bar{a}\Psi_2 + 3\bar{a}^2\Psi_1 + \bar{a}^3\Psi_0 \\
\Psi_4 &\rightarrow \Psi_4 + 4\bar{a}\Psi_3 + 6\bar{a}^2\Psi_2 + 4\bar{a}^3\Psi_1 + \bar{a}^4\Psi_0
\end{aligned}$$

■ **Rotaciones nulas tipo II**

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &\rightarrow \Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4 \\
\Psi_1 &\rightarrow \Psi_1 + 3b\Psi_2 + 3b^2\Psi_3 + b^3\Psi_4 \\
\Psi_2 &\rightarrow \Psi_2 + 2b\Psi_3 + b^2\Psi_4 \\
\Psi_3 &\rightarrow \Psi_3 + b\Psi_4 \\
\Psi_4 &\rightarrow \Psi_4
\end{aligned}$$

■ **Transformaciones de *Boost* (hiperbólicas)**

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &\rightarrow \Psi_0 \rightarrow A^{-2}e^{2i\theta}\Psi_0 \\
\Psi_1 &\rightarrow \Psi_1 \rightarrow A^{-1}e^{i\theta}\Psi_1 \\
\Psi_2 &\rightarrow \Psi_2 \rightarrow \Psi_2 \\
\Psi_3 &\rightarrow \Psi_3 \rightarrow Ae^{-i\theta}\Psi_3 \\
\Psi_4 &\rightarrow \Psi_4 \rightarrow A^2e^{-2i\theta}\Psi_4
\end{aligned}$$

## Capítulo 2

# Formulación de superficies nulas

Las ecuaciones de Einstein en su presentación original, si bien muestran una forma elegante y práctica a la hora de analizar algunos ejemplos particulares de espaciotiempos, en general, no son sencillas de resolver para espaciotiempos generales o con pocas simetrías. En este sentido varios formalismos se han desarrollado con distintos fines y herramientas, aumentando ampliamente el espacio de soluciones encontradas. La formulación de superficies nulas es uno de estos formalismos y provee un marco matemático que se utiliza para describir la geometría del espacio-tiempo en la teoría de la relatividad general. Este formalismo se basa en la idea de que el espacio-tiempo puede ser descrito por una red de superficies nulas, que son superficies tridimensionales que se propagan a la velocidad de la luz.

En la teoría de la relatividad general, sabemos que el campo fundamental o primordial es el tensor métrico, del cual se deducen el resto de los tensores de la teoría asociados a la curvatura y otras estructuras geométricas. En cambio, en la formulación de superficies nulas veremos que la métrica del espacio-tiempo se expresa en términos de la geometría de las superficies nulas. En lugar de describir el espacio-tiempo en términos de coordenadas espaciales y temporales, el formalismo utiliza coordenadas que están asociadas con estas superficies.

En esta formulación los campos fundamentales de la teoría son los escalares  $\Omega$  y  $Z$ , que representan el factor conforme de la teoría y una familia de superficies características nulas de la métrica, respectivamente. Los escalares  $\Omega$  y  $Z$  satisfacen un conjunto de ecuaciones diferenciales que determinan el comportamiento de los campos en cada punto.

Desde el punto de vista matemático, las diez ecuaciones de Einstein con tensores dependientes en puntos del espacio  $x^a$  son intercambiados por una ecuación princi-

pal para  $\Omega$  y  $Z$  y dos condiciones de metricidad, siendo un total de tres ecuaciones diferenciales acopladas en derivadas parciales. Este nuevo sistema de ecuaciones diferenciales conitnará siendo difícil de resolver y en consecuencia métodos numéricos o perturbativos deben ser utilizados para encontrar sus soluciones.

Dentro de los acercamientos numéricos que se han dado en este formalismo, varios códigos numéricos han sido desarrollados para simular la evolución numérica en coordenadas nulas de un espaciotiempo. Para conocer más sobre el tratamiento numérico y los código 1D, 2D y 3D desarrollados en coordenadas nulas, el lector debe consultar [10].

En esta tesis nos centraremos en las soluciones perturbativas de la formulación. Usaremos métodos perturbativos para estudiar qué forma toma la radiación gravitacional que recibimos luego de interactuar con un sistema aislado para los casos sin materia y con materia presente.

## 2.1. Variables de la formulación

La formulación de superficies nulas reformula la relatividad general como una teoría de superficies nulas que interactúan con materia a través de las ecuaciones de campo. En esta formulación, la métrica lorentziana del espacio-tiempo  $g_{ab}$  se construye a partir de una métrica invariante conforme  $\tilde{g}_{ab}$  y un factor conforme  $\Omega$  que se relacionan mediante la ecuación

$$g_{ab}(x^a) = \Omega^2 \tilde{g}_{ab}(Z). \quad (2.1)$$

La métrica conforme  $\tilde{g}_{ab}$  se obtiene a partir de una familia de superficies nulas parametrizadas por una función real  $Z$ , definida sobre el fibrado tangente de la variedad que define nuestro espaciotiempo  $g_{ab}$ . Es decir, dada una función  $Z = Z(x^a, \zeta, \bar{\zeta})$ , con  $x^a$  un punto del espaciotiempo y  $(\zeta, \bar{\zeta})$  coordenadas estereográficas que parametrizan  $S^2$ , entonces  $Z = \text{constante}$  define una superficie nula en el espaciotiempo. Por lo tanto, los gradientes de las superficies de nivel de  $Z$  deben ser nulos

$$g^{ab} \partial_a Z \partial_b Z = 0. \quad (2.2)$$

Se desprende de la Ec. (2.2) que la estructura conforme no depende de  $\Omega$ . También se deduce de esta ecuación que el vector nulo  $Z^a = g^{ab} \partial_b Z$  satisface la ecuación de geodésica homogénea, permitiendo definir un parámetro afín  $s$ .

Si derivamos (2.2), utilizando los operadores  $\tilde{\partial}$  y  $\bar{\tilde{\partial}}$  introducidos en las Ecs. (1.104) y (1.103), podemos obtener las componentes de la métrica conforme. Este cálculo

puede visualizarse en el diagrama de la Fig. [2.1]. Las componentes de la métrica física  $g_{ab}$  que no están en el diagrama,  $g^{21}, g^{31}$  y  $g^{11}$  pueden obtenerse de la forma

$$g^{21} = \frac{1}{2}\bar{\partial}g^{22}, \quad g^{31} = \frac{1}{2}\bar{\partial}g^{33}, \quad g^{11} = -2g^{01} + \bar{\partial}g^{21} + g^{ab}\bar{\partial}Z_{,a}\bar{\partial}\bar{\Lambda}_{,b}. \quad (2.3)$$

Es importante destacar que la Fig. [2.1] no solo nos proporciona las componentes de la métrica sino que también impone condiciones sobre la foliación nula del espaciotiempo  $Z$ . Si hubiésemos continuado con las derivaciones en la pirámide de la Fig. [2.1], hubiéramos obtenido identidades y ecuaciones que pueden demostrarse que no contribuyen con nueva información al sistema.

Si tomamos la ec.  $\bar{A}$  en la Fig. [2.1] obtenemos una restricción para la función  $\Lambda = \bar{\partial}^2 Z$ ,

$$3\bar{\partial}Z_a\Lambda^a + Z_a\bar{\partial}\Lambda^a = 0. \quad (2.4)$$

Solo para las funciones  $\Lambda$  que satisfagan la condición (2.4), es posible obtener una métrica conforme.

La segunda ecuación de relevancia en nuestro desarrollo es la ec.  $\bar{\partial}B$ , siendo  $B$  la ecuación de la Fig. [2.1]. De esta ecuación obtenemos

$$\frac{\partial\bar{\partial}^2\Lambda}{\partial s} = \bar{\partial}\bar{\partial}(\Omega^2) + g^{ab}\partial_a\Lambda\partial_b\bar{\Lambda}. \quad (2.5)$$

La Ec. (2.5) puede integrarse entre los puntos  $s = s$  y  $s = \infty$  formalmente como

$$\bar{\partial}^2\Lambda = \bar{\partial}^2\bar{\sigma}(Z, \zeta, \bar{\zeta}) + \bar{\partial}^2\sigma(Z, \zeta, \bar{\zeta}) + \int_Z^\infty \dot{\sigma}\dot{\sigma}du - \int_s^\infty (\bar{\partial}\bar{\partial}(\Omega^2) + g^{ab}\partial_a\Lambda\partial_b\bar{\Lambda}) ds', \quad (2.6)$$

donde el *shear* de Bondi  $\sigma(Z, \zeta, \bar{\zeta})$ , está directamente relacionado con la radiación gravitacional alcanzada en el infinito nulo y  $\dot{\sigma}$  es la derivada con respecto al tiempo de Bondi  $u$ . La ecuación (2.6) la denominamos ecuación fundamental asintótica de cortes nulos y será la ecuación que nos permitirá hallar las foliaciones  $Z$  del espaciotiempo. Debemos aclarar con respecto a la integración de esta ecuación que hemos elegido el *gauge*  $\sigma(s = \infty) = 0$ , de lo contrario, los primeros dos términos deberían escribirse como variaciones  $\Delta\sigma$ . Esta elección es hecha por simplicidad y para poder analizar la física de los sistemas aislados sin radiación previa presente del espaciotiempo. La elección de *gauge* hecha corresponde a haber fijado el grupo de simetrías de las supertraslaciones (discutiremos esto en detalle en el Cap. 3.).



Finalmente, para completar nuestro sistema de ecuaciones, el factor conforme  $\Omega$  puede encontrarse contrayendo las ecuaciones de Einstein con los vectores normales a las superficies nulas. De la relación (2.1) entre las dos métricas se obtiene

$$2\frac{\partial^2\Omega}{\partial s^2} = Z^a Z^b (R_{ab}[\tilde{g}] - R_{ab}[g]) \Omega. \quad (2.7)$$

$R_{ab}[h]$  y  $R_{ab}[g]$  son tensores de Ricci correspondientes a la métrica conforme y la métrica física, respectivamente. Es importante destacar que de la ecuación (2.6) junto con (2.4) y (2.5), son completamente equivalentes a las ecuaciones de Einstein para una métrica  $g_{ab}$ . Si reemplazamos  $G_{ab}[g] = T_{ab}$  y  $Z^a Z^b R_{ab}[\tilde{g}] = Q(\Lambda)\Omega$  obtenemos la ecuación final

$$2D^2\Omega = (Q(\Lambda) - T_{00}) \Omega, \quad (2.8)$$

con

$$Q(\Lambda) = -\frac{1}{4q}D\bar{\Lambda}_{,1}D\Lambda_1 - \frac{3}{8q^2}(Dq)^2 + \frac{1}{4q}D^2q, \quad q = 1 - \Lambda_{,1}\bar{\Lambda}_{,1}, \quad (2.9)$$

donde  $D = \frac{d}{ds}$  representa la derivada con respecto al parámetro afín  $s$  y  $\Lambda_{,1}$  la derivada con respecto a la variable radial  $r$ , que siempre es posible definir a partir de una superficie  $Z$ . El factor  $T_{00}$  proviene de la contracción con las superficies nulas  $Z^a Z^b T_{ab} = T_{00}$ . Recordemos que  $Z_{,a} = l_a$  es un vector nulo y es tomado como primer vector de nuestra base ortogonal nula.

La ecuación (2.8) es una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden no lineal. La resolución genérica de esta ecuación no es factible en forma analítica. Además, notemos que el escalar  $Z^a Z^b R_{ab}[\tilde{g}]$  de (2.7) es una función cuadrática  $Q(\Lambda^2)$  y por lo tanto es nula ante una aproximación lineal en esta variable. Esto sugiere que los métodos perturbativos son convenientes para el estudio de nuestro sistema de ecuaciones y explicaremos este método con detalle en la próxima sección.

## 2.2. Formulación linealizada

Como mencionamos en la anterior sección, las distintas dependencias funcionales de los términos de las Ecs. (2.8), (2.4) y (2.5) en la variable  $\Lambda$ , sugieren hacer perturbaciones sobre esta variable. Nuestro sistema de ecuaciones linealizado en la variable

$\Lambda$  toma entonces la forma

$$2\frac{\partial^2\Omega}{\partial s^2} = -T_{00}\Omega, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial(\bar{\partial}^2\bar{\partial}^2Z)}{\partial s} = 2\bar{\partial}\bar{\partial}\Omega \quad (2.11)$$

Este sistema de ecuaciones permite resolverse para una mayor cantidad de casos. Por ejemplo, es posible proponer soluciones de la forma  $Z(x^a, \zeta, \bar{\zeta}) = Z(x^a)Z(\zeta, \bar{\zeta})$  y obtener un sistema más sencillo cuya solución dependerá del  $T_{ab}$  presente en el espaciotiempo. Espaciotiempos sencillos como los espaciotiempos de Minkowski, De Sitter y Schwarzschild permiten una descripción directa y equivalente en términos de superficies nulas. Veremos a continuación el caso más sencillo del espaciotiempo de Minkowski.

### Espacio de Minkowski

Para el caso en que no hay materia  $T_{ab} = 0$  y de (2.11) con  $\Lambda = 0$  tenemos

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial s^2} = 0, \quad (2.12)$$

$$\bar{\partial}^2Z = \Lambda = 0. \quad (2.13)$$

Se desprende de estas ecuaciones que  $\Omega = 1$  y por lo tanto,  $g_{ab} = \eta_{ab}$  es la métrica de Minkowski. Por otro lado, de la Ec. (2.13) tenemos  $Z(x^a, \zeta, \bar{\zeta}) = x^a l_a(\zeta, \bar{\zeta})$  con  $l_a(\zeta, \bar{\zeta})$  un vector normalizado en coordenadas de Minkowski

$$l_a(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + \zeta\bar{\zeta})}(1 + \zeta\bar{\zeta}, \zeta + \bar{\zeta}, i(\zeta - \bar{\zeta}), -1 + \zeta\bar{\zeta}), \quad (2.14)$$

y  $x^a$  un punto del espaciotiempo en coordenadas de Minkowski que aparecen como las cuatro constantes de integración de la Ec. (2.13).

### Esquema de las perturbaciones

Nos interesa resolver ahora el sistemas de ecuaciones linearizado en forma iterativa. Tomaremos para ello como nuestra solución orden cero o foliación de orden cero a las soluciones correspondientes a la foliación del espacio de Minkowski  $Z_0 = x^a l_a$  con

$\Omega_0 = 1$ . El esquema iterativo consistirá en descomponer las variables del formalismo  $Z$  y  $\Omega$  en las sumas

$$Z = \sum_{n=0} Z_n, \quad (2.15)$$

$$\Omega = \sum_{n=0} \Omega_n. \quad (2.16)$$

La teoría linearizada de superficies nulas permite escribir a la función  $\Omega$  como una funcional explícita del tensor energía momento [Ec. (2.12)], dejando a la teoría con un solo escalar  $Z$  que puede ser obtenido iterando hacia órdenes más altos.

El lector debe recordar que las funciones  $Z$  representan superficies nulas y por lo tanto satisfacen la Ec. (2.2). En términos perturbativos, la condición nula de orden  $n$  puede escribirse

$$\sum_n \sum_{r+s=0}^n g_{n-r-s}^{ab} \partial_a Z_r \partial_b Z_s = 0. \quad (2.17)$$

con

$$\begin{aligned} g_0^{ab} &= \eta^{ab} \\ g_1^{ab} &= 2\Omega_1 \eta^{ab} + h_1^{ab} \\ &\vdots \end{aligned}$$

y  $\eta_{ab}$  la métrica de Minkowski y  $h_{1ab}$  la perturbación a primer orden de la métrica  $\eta_{ab}$ . Si  $n = 0$ , recuperamos en la Ec. (2.17) el producto interno para dos vectores nulos en el espacio plano de Minkowski

$$\eta^{ab} l_a l_b = 0. \quad (2.18)$$

Si  $n = 1$ , aparece la primera condición nula no trivial

$$h^{ab} l_a l_b + 2\eta^{ab} l_a \partial_b Z_1 = 0, \quad (2.19)$$

o también,

$$h^{ab} l_a l_b = -2l^a \partial_a Z_1 = -2 \frac{dZ_1}{ds}. \quad (2.20)$$

La Ec.(2.20) relaciona la corrección a primer orden de la métrica plana,  $h_{ab}$ , con la corrección a primer orden de la foliación  $Z_1$ .

Si escribimos las ecuaciones linealizadas para la primera iteración del esquema perturbativo, el sistema de ecuaciones finales a resolver nos queda

$$2\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial s^2} = -T_{00}\Omega_0 = -T_{ab}Z_0^a Z_0^b \Omega_0, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial (\bar{\partial}^2 \bar{\partial}^2 Z_1)}{\partial s} = 2\bar{\partial}\bar{\partial}\Omega_1. \quad (2.22)$$

El lector no debe confundir los subíndices ceros indicando las componente temporales del tensor energía-momento  $T_{00}$  con los subíndices zero que indican las soluciones a orden cero de las variables escalares  $Z$  y  $\Omega$ . Nótese también que, si bien este sistema fue escrito para perturbaciones de primer orden, puede ser fácilmente generalizable a órdenes mayores. En este trabajo, estudiaremos solo las desviaciones lineales de la foliación ya que nos interesa hacer un estudio desde el infinito nulo, lejos de cualquier fuente, de la radiación gravitacional.

Resolveremos las Ecs. (2.21) y (2.22) en las próximas secciones.

### 2.2.1. Dispersión en ausencia de materia

Estudiaremos cómo es la relación entre la radiación gravitacional que llega al espaciotiempo desde el infinito nulo pasado y es recibida en el infinito nulo futuro. El escalar de Newman-Penrose que representa la radiación gravitacional en el infinito nulo es  $\sigma_0$ . Por ende, describiremos la dispersión de radiación gravitacional en términos de cómo cambia el valor de esta cantidad en el infinito nulo pasado y futuro,  $\sigma_-$  y  $\sigma_+$ .

En esta sección, estudiaremos la dispersión en espaciotiempos de vacío, es decir con  $T_{ab} = 0$ , pero luego generalizaremos nuestros resultados a espaciotiempos con campos de materias.

#### Solución $Z_1$

De la Ec. (2.21) más la condición asintótica para el factor conforme  $\Omega$ ,  $\lim_{r \rightarrow \infty} \Omega = 1$ , es fácil ver que su perturbación a primer orden debe ser  $\Omega_1 = 0$ . En este caso solo debemos resolver la Ec. (2.22) para  $Z$ , que toma la forma

$$\bar{\partial}^2 \bar{\partial}^2 Z_1(x^a, \zeta, \bar{\zeta}) = \bar{\partial}^2 \sigma(Z_0, \zeta, \bar{\zeta}) + \bar{\partial}^2 \bar{\sigma}(Z_0, \zeta, \bar{\zeta}), \quad (2.23)$$

con  $Z_0 = u = x^a l_a$  la foliación en el espacio de Minkowski. La Ec.(2.23) es una ecuación diferencial de cuarto orden elíptica y  $\bar{\partial}^2 \bar{\partial}^2$  representa el doble laplaciano en la esfera. Notemos que  $Z$  es una cantidad con peso de espín  $s = 0$ , mientras que  $\sigma$  y  $\bar{\sigma}$  son cantidades con peso de espín  $s = 2$  y  $s = -2$  respectivamente, y por lo tanto, la ecuación presenta cantidades con peso de espín cero en cada lado de la igualdad. La ecuación (2.23) posee una función de Green única de tal forma que la solución puede ser dada en forma integral

$$Z_1(x^a, \zeta, \bar{\zeta}) = \oint_{S^2} G_{00'} (\bar{\partial}'^2 \sigma(x^a l'_a, \zeta', \bar{\zeta}') + \bar{\partial}'^2 \bar{\sigma}(x^a l'_a, \zeta', \bar{\zeta}')) dS', \quad (2.24)$$

siendo  $G_{00}$  la función de Green

$$G_{00}(\zeta, \bar{\zeta}, \zeta', \bar{\zeta}') = \frac{1}{4\pi} l^a l'_a \ln(l^a l'_a), \quad (2.25)$$

o si hacemos una expansión en esféricos armónicos tensoriales

$$G_{00}(\zeta, \bar{\zeta}, \zeta', \bar{\zeta}') = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{l,I_l}^0(\zeta, \bar{\zeta}) Y_{l,I_l}^0(\zeta', \bar{\zeta}'). \quad (2.26)$$

Como nuestro fin es estudiar la relación entre la radiación entrante y saliente del espaciotiempo, utilizaremos superíndices  $+$  y  $-$  para denotar las cantidades que están relacionadas con el infinito nulo futuro y el infinito nulo pasado respectivamente. De esta forma podemos distinguir dos tipo de soluciones (2.24) a la ecuación (2.23),

$$Z_1^+(x^a, \zeta, \bar{\zeta}) = \oint_{S^2} G_{00'} (\bar{\partial}'^2 \sigma^+(x^a l_a^{+'}, \zeta', \bar{\zeta}') + \bar{\partial}'^2 \bar{\sigma}^+(x^a l_a^{+'}, \zeta', \bar{\zeta}')) dS', \quad (2.27)$$

$$Z_1^-(x^a, \zeta, \bar{\zeta}) = \oint_{S^2} G'_{00} (\bar{\partial}'^2 \sigma^-(-x^a \ell_a^{-'}, \zeta', \bar{\zeta}') + \bar{\partial}'^2 \bar{\sigma}^-(-x^a \ell_a^{-'}, \zeta', \bar{\zeta}')) dS', \quad (2.28)$$

Nótese que en la solución (2.27), se contruye en base a  $Z_0^+ = x^a l_a^+$  que usa conos de Minkowski orientados hacia el futuro, mientras que (2.28) usa conos orientados hacia el pasado,  $Z_0^- = -x^a \ell_a^-$ .  $Z_0^+$  y  $Z_0^-$  pueden también interpretarse como las coordenadas nulas avanzadas y retardadas  $u$  y  $v$ , respectivamente.

### Transformaciones antipodales

La relación entre los vectores  $l_a^+$  y  $l_a^-$  que simbolizan las direcciones entrantes y salientes del espaciotiempo, puede entenderse en término de las transformaciones antipodales. La transformación antipodal en las coordenadas esféricas usuales  $(\theta, \phi)$  se define como

$$(\theta, \phi) \rightarrow (\pi - \theta, \pi + \phi), \quad (2.29)$$

y en coordenadas estereográficas

$$(\zeta, \bar{\zeta}) \rightarrow (-1/\bar{\zeta}, -1/\zeta). \quad (2.30)$$

Denotaremos las transformaciones antipodales con el símbolo  $\hat{\cdot}$  de modo que  $\hat{\zeta} = -1/\bar{\zeta}$ .

Si escribimos el vector nulo  $l^a$  de (2.14) como  $l^{+a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, r^i)$  con  $r^i = r^i(\zeta, \bar{\zeta})$  el correspondiente vector espacial, entonces

$$-l_+^a = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, r^i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -r^i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, \hat{r}^i) = \hat{l}_-^a. \quad (2.31)$$

Finalmente, si recordamos que los esféricos armónicos tensoriales de la Sec. [1.3.1] se contruyen a partir de vectores que dependen de los ángulos  $(\zeta, \bar{\zeta})$ , podemos aplicar una transformación antipodal a estos tensor y ver que se cumple

$$Y_{l_l}^s(\hat{\zeta}, \hat{\bar{\zeta}}) = (-1)^l Y_{l_l}^{-s}(\zeta, \bar{\zeta}) \quad (2.32)$$

. Esta última relación será usada en los cálculos de dispersión ya que es útil en muchos casos expandir las cantidades escalares en términos de los esféricos tensoriales, y en consecuencia, la transformación antipodal de esos escalares corresponderá a aquella de sus términos de expansión en esféricos armónicos.

### Relaciones de dispersión

Dado un punto del espaciotiempo  $x^a$  y la métrica en ese punto  $g_{ab}(x^a)$ , podemos escribir la métrica en términos de la radiación saliente  $(\sigma^+)$  o entrante  $(\sigma^-)$ , usando el campo escalar  $Z$ . De la unicidad de la métrica, sabemos que ambas descripciones deben coincidir y en consecuencia  $h_{00}^+ = h_{00}^-$ , o también

$$h_{1ab}^+(x^c) l^{+a} l^{+b} = h_{1ab}^-(x^c) \hat{l}^{-a} \hat{l}^{-b}. \quad (2.33)$$

Reemplazando la relación (2.20) en la anterior expresión,

$$l^{+a}\partial_a Z_1^+ = \hat{l}^{+a}\partial_a \widehat{Z}_1^- \quad (2.34)$$

$$l^{+a}\partial_a(Z_1^+ + \widehat{Z}_1^-) = \frac{d(Z_1^+ + \widehat{Z}_1^-)}{ds^+} = 0. \quad (2.35)$$

La Ec. (2.35) puede ser pensada como una ecuación para dos funciones distintas que dependen de las mismas variables. Finalizaremos esta sección mostrando la relación entre los modos de dispersión que conforman la radiación gravitacional entrante y saliente del infinito nulo. Para ello, utilizamos la relación entre las superficies nulas deducida (2.35) y expandimos los escalares de radiación  $\sigma$  en su parte angular

$$\sigma(u, \zeta, \bar{\zeta}) = \sum_l \sigma(u)^l Y_{l,l}^s(\zeta, \bar{\zeta}). \quad (2.36)$$

Reemplazando esta relación en las soluciones (2.27) y (2.28), obtenemos los modos para las superficies nulas entrante y saliente

$$Z_{l,l}^+ = \oint (Y_{l,l}^{-2}\sigma^+(u, \zeta, \bar{\zeta}) + Y_{l,l}^2\bar{\sigma}^+(u, \zeta, \bar{\zeta})) d^2S, \quad (2.37)$$

$$\widehat{Z}_{l,l}^- = (-1)^l \oint (Y_{l,l}^{-2}\sigma^-(v, \zeta, \bar{\zeta}) + Y_{l,l}^2\bar{\sigma}^-(v, \zeta, \bar{\zeta})) d^2S. \quad (2.38)$$

La relación entre los diferentes modos de radiación saliente  $\sigma_{l,l}^+$  y radiación entrante  $\sigma_{l,l}^-$  se obtiene reemplazando (2.37) y (2.38) en (2.35), y luego tomando la transformada de Fourier del tiempo de Bondi retardado  $u$ . Así

$$\sigma_{l,l}^+(w) + (-1)^l \bar{\sigma}_{l,l}^-(w) = 0, \quad (2.39)$$

con  $w$  una frecuencia positiva. Si efectuamos la antitransformada de Fourier en (2.39) y la suma sobre todos los modos obtenemos las relaciones para la radiación gravitacional total en función del tiempo de retardado  $u$  y las coordenadas estereográficas  $(\zeta, \bar{\zeta})$ ,

$$\sigma^+(u, \zeta, \bar{\zeta}) + \bar{\sigma}^-(u, \widehat{\zeta}, \widehat{\bar{\zeta}}) = 0. \quad (2.40)$$

La Ec. (2.40) puede interpretarse en términos de su parte real e imaginaria también como  $\sigma_R^+ = -\sigma_R^-$  y  $\sigma_I^+ = \sigma_I^-$ . Este resultado es lo que denominamos dispersión trivial y ocurre en un espacio plano sin materia. Esto es esperable ya que no hay razones para que la radiación entrante deba tener mezclas de modos de radiación o cambios en el valor de la radiación entrante. Sin embargo, vemos un cambio en el valor del signo de la parte real de la radiación y esto está vinculado al cambio en la dirección de el vector nulo  $l_a^+$  por  $l_a^-$ .

### 2.2.2. Dispersión en presencia de materia

En presencia de un campo de materia en el espaciotiempo tenemos un tensor de energía-momento  $T_{ab} \neq 0$ , y por ello, tenemos un término adicional afectando a la forma de la foliación  $Z$  en la Ec. (2.21). La presencia de materia arroja una complicación adicional ya que, desde el punto de vista matemático, los cálculos son más complejos. Aún así, es posible derivar una fórmula para relacionar los modos de radiación entrantes y salientes del infinito nulo.

Si resolvemos la nuevamente Ec. (2.22) incluyendo el término con el factor conforme  $\Omega_1$ , los modos de las foliaciones pueden escribirse

$$Z_{l,I_l}^+ = \oint \left[ Y_{l,I_l}^{-2} \sigma^+(u, \zeta, \bar{\zeta}) + c.c. - 2Y_{l,I_l}^0 \int_0^\infty ds \bar{\sigma} \sigma \Omega_1(y^c(s), \zeta, \bar{\zeta}) \right] d^2 S \quad (2.41)$$

$$Z_{l,I_L}^- = \oint \left[ Y_{l,I_L}^{-2} \sigma^-(v, \zeta, \bar{\zeta}) + c.c. - 2Y_{l,I_L}^0 \int_0^\infty ds \bar{\sigma} \sigma \Omega_1(y^c(s), \zeta, \bar{\zeta}) \right] d^2 S. \quad (2.42)$$

Aquí  $y^c(s) = x^c + sl^{+c}$  representa la trayectoria nula que parte del punto del espaciotiempo  $x^c$  y  $c.c.$  denota el término complejo conjugado a  $Y_{l,I_l}^{-2} \sigma^+(u, \zeta, \bar{\zeta})$ . Las soluciones (2.41) y (2.42) permiten también escribirse en forma geométrica, definiendo  $N_x^+$  al cono futuro nulo que emerge del punto  $x^a$  y  $C_x^+$  a la intersección de  $N_x^+$  con el infinito futuro nulo  $\mathcal{J}^+$ . Entonces

$$Z_{l,I_l}^+ = \oint_{C_x^+} d^2 S (Y_{l,I_l}^{-2} \sigma^+(u, \zeta, \bar{\zeta}) + c.c.) - 2 \int_{N_x^+} Y_{l,I_l}^0 \bar{\partial} \partial \Omega_1(x^c, s, \zeta, \bar{\zeta}) ds d^2 S, \quad (2.43)$$

$$Z_{l,I_l}^- = \oint_{C_x^-} d^2 S (Y_{l,I_l}^{-2} \sigma^-(v, \zeta, \bar{\zeta}) + c.c.) - 2 \int_{N_x^-} Y_{l,I_l}^0 \bar{\partial} \partial \Omega_1(x^c, s, \zeta, \bar{\zeta}) ds d^2 S. \quad (2.44)$$

### Factor Conforme

La relación entre un tensor de Ricci  $R_{ab}$  de un espaciotiempo genérico  $g_{ab}$  y su versión conforme  $\tilde{R}_{ab}$  es

$$R_{ab} = \tilde{R}_{ab} + 2\Omega^{-1} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \Omega + \tilde{g}_{ab} \tilde{g}^{cd} \left( \Omega^{-1} \tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}_d \Omega - 3\Omega^{-2} \tilde{\nabla}_c \Omega \tilde{\nabla}_d \Omega \right). \quad (2.45)$$

Esta expresión puede simplificarse notablemente cuando simplificamos los términos no lineales en  $\Omega$ . Para la versión linearizada de la formulacion de superficies nulas, podemos expandir  $\Omega = 1 + \Omega_1$  y recordando que  $\tilde{R}_{ab} = \mathcal{O}(\Lambda^2)$ , obtenemos



una versión más sencilla de la Ec. (2.45). Si además de linearizar la expresión, la contraemos con el tensor nulo  $l^a l^b$ , llegamos a la siguiente ecuación

$$R_{ab} l^a l^b = 2l^a l^b \partial_a \partial_b \Omega_1. \quad (2.46)$$

Nótese que hemos cambiado la derivada covariante por la derivada parcial ya que estamos trabajando a primer orden en nuestra aproximación. Si usamos la transformada de Fourier en la Ec.(2.46) sobre la variable  $x^a$ , encontramos la expresión para la perturbación a primer orden del factor conforme  $\Omega_1$  en términos del tensor energía-momento

$$\Omega_1(k^c, \zeta, \bar{\zeta}) = \frac{T_{ab}(k^c) l^a l^b}{2(k^c l_c)^2}, \quad (2.47)$$

donde el vector  $k^a = (k^0, \omega \vec{k})$  es un cuadrivector proveniente de la transformación de Fourier sobre la variable  $x^a$ .

Habiendo encontrado la forma del factor conforme a primer orden podemos reescribir las foliaciones avanzada (2.41) y retardada (2.42) como

$$Z_{l, l_l}^+ = \oint \left( Y_{l, l_l}^{-2} \sigma^+(x^c \ell_c^+, \zeta, \bar{\zeta}) + i Y_{l, l_l}^0 \int d^3 k \bar{\partial} \partial \left( \frac{T_{ab}(k^c) \ell^{+a} \ell^{+b}}{(k^c \ell_c^+)^2} \right) \frac{e^{-ix^c k_c}}{k^c \ell_c^+} + c.c. \right) d^2 S. \quad (2.48)$$

$$Z_{l, l_l}^- = (-1)^l \oint \left( Y_{l, l_l}^{-2} \sigma^-(-x^c \ell_c^-, \zeta, \bar{\zeta}) - i Y_{l, l_l}^0 \int d^3 k \bar{\partial} \partial \left( \frac{\bar{T}_{ab}(k^c) \ell^{+a} \ell^{-b}}{(k^c \ell_c^-)^2} \right) \frac{e^{-ix^c k_c}}{k^c \ell_c^-} \right. \quad (2.49)$$

$$\left. + c.c. \right) d^2 S,$$

Si reemplazamos estas expresiones en (2.35) en forma análoga a la sección anterior obtenemos las relaciones entre los modos de radiación entrante y saliente en el infinito nulo.

$$\sigma_{l, l_l}^+(w) + (-1)^l \bar{\sigma}_{l, l_l}^-(w) = i \oint d^2 S Y_{l, l_l}^0 \int_0^\infty dk^o \oint d^2 \hat{k} T_{ab} \quad (2.50)$$

$$\left( \frac{\bar{\partial} \partial \left( \frac{l^a l^b}{(k^c l_c)^2} \right)^+}{k^c l_c^+} + (-1)^l \frac{\bar{\partial} \partial \left( \frac{l^a l^b}{(k^c l_c)^2} \right)^-}{k^c l_c^-} \right).$$

Notemos aquí que los términos en la integral de esta ecuación son factores no triviales que contribuirán a los modos de la radiación entrante  $\sigma_{l,l}^+$ . El término del miembro derecho de la Ec. (2.50) también será responsable de producir acoplamientos entre los distintos modos de radiación  $l$ . Es interesante también notar que los términos entre paréntesis de la Ec. (2.50) podría anularse para algunos casos especiales del tensor energía-momento, por ejemplo si  $T_{ab} = f(k)k_a k_b + g(k)\eta_{ab}$ .

Si hacemos la antitransformada de Fourier en (2.50) y si sumamos los modos de esta ecuación obtenemos la relación entre la radiación entrante y saliente,

$$\sigma^+(u, \zeta, \bar{\zeta}) + \bar{\sigma}^-(u, \hat{\zeta}, \hat{\bar{\zeta}}) = i \int d^4k e^{i\omega u} T_{ab}(k) \quad (2.51)$$

$$\oint d^2S' \left( \frac{\bar{\partial}^2 G_{00'} \bar{\partial}' \bar{\partial}' \left( \frac{l'^a l'^b}{(k^c l'_c)^2} \right)^+}{k^c l'_c^+} + \frac{\bar{\partial}^2 G_{\hat{0}\hat{0}'} \bar{\partial}' \bar{\partial}' \left( \frac{l'^a l'^b}{(k^c l'_c)^2} \right)^-}{k^c l'_c^-} \right),$$

El lector interesado podrá leer en [11] el estudio de la relación de dispersión (2.51) para el caso particular donde el  $T_{ab}$  es aquel de un campo escalar sin masa, es decir,  $T_{ab} = g_{ab}(-\frac{1}{2}\partial_c \phi \partial^c \phi) + \partial_a \phi \partial_b \phi$ .

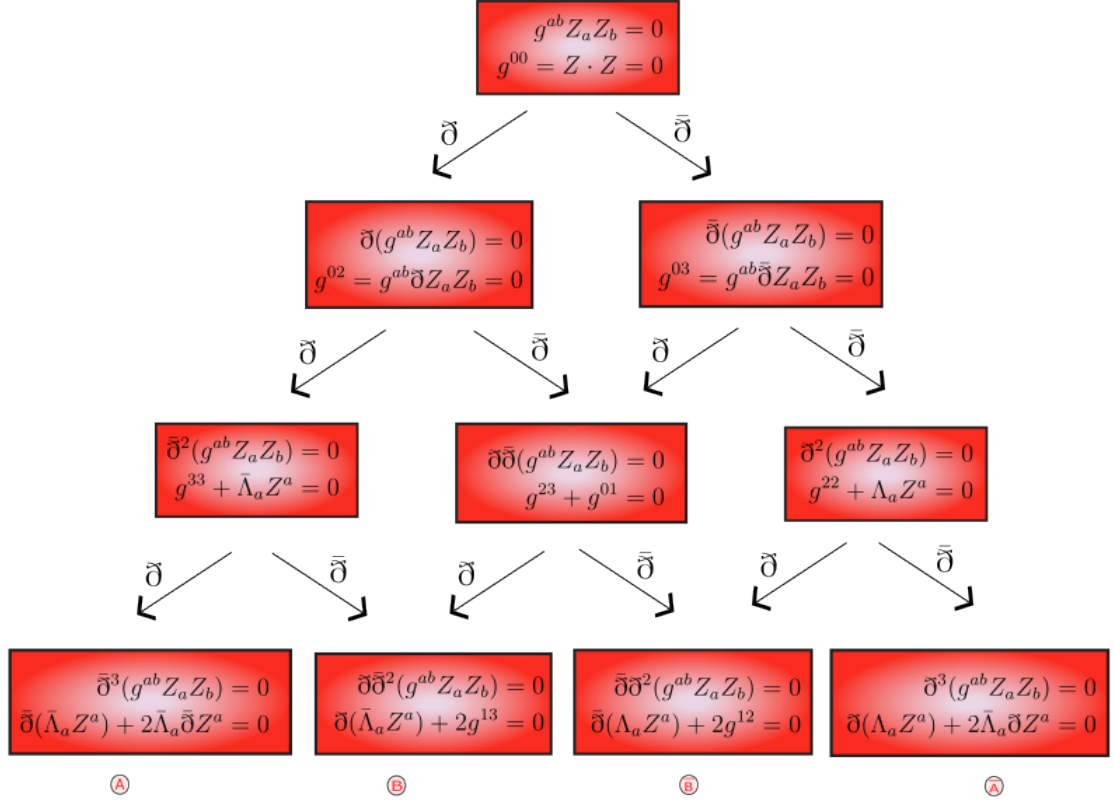


Figura 2.1: Ecuaciones obtenidas por la aplicación de derivadas  $\bar{\partial}$  que determinan condiciones de unicidad y existencia de la métrica

## Capítulo 3

# Definición de centro de masa y momento angular intrínseco en Relatividad General

El momento angular es una propiedad fundamental en la física clásica y cuántica, que permite describir la rotación de los objetos alrededor de un eje. En la relatividad general, sin embargo, definir el momento angular globalmente puede ser un problema complejo y ambiguo.

La ambigüedad de la definición del momento angular en la relatividad general surge debido a que no hay una noción bien definida de posición absoluta en esta teoría. En lugar de ello, la relatividad general establece que el espaciotiempo se curva en presencia de la materia y la energía, lo que hace que la medición del momento angular dependa del marco de referencia utilizado.

Similarmente, el concepto de centro de masa también es fundamental para describir la posición promedio de un sistema de partículas en física clásica. Sin embargo, en la relatividad general, el espaciotiempo se curva en presencia de la materia y la energía, lo que significa que la geometría del espaciotiempo varía en función de la distribución de masa y energía en el sistema. Esto plantea un desafío para la definición del centro de masa, ya que la noción clásica de un punto en el espacio donde se concentra toda la masa del sistema ya no es válida.

Además, la teoría relatividad general permite una mayor variedad de simetrías que la teoría clásica, lo que puede llevar a diferentes definiciones de momento angular dependiendo de la elección de simetrías. En particular, el grupo de simetrías conocido como BMS (Bondi-Metzner-Sachs) ha sido objeto de interés reciente en la física de

altas energías debido a su papel en la descripción de la radiación gravitacional. Este grupo de simetrías tiene dimensión infinita y puede llevar a diferentes definiciones de momento angular y centro de masa, lo que dificulta aún más su definición global.

El problema de definir el momento angular y centro de masa puede ser resuelto en espaciotiempos particulares o con simetrías. Por ejemplo, el momento angular en un espacio de Minkowski puede ser definido en términos de los grupos de Poincaré, que son finitos y bien definidos. También se conocen fórmulas para espaciotiempos estacionarios como la integral de Komar o fórmulas perturbativas para gravedad linealizada [Ver Ec. (1.90)]. Sin embargo, estas soluciones son limitadas ya que el espaciotiempo real no tendrá en general simetría alguna.

En resumen, la definición del momento angular y centro de masa en la relatividad general es un problema complejo y ambiguo que requiere una cuidadosa elección de las simetrías y el marco de referencia utilizados. En general no será posibles definir estos conceptos para un espaciotiempo general. Sin embargo, la clase de espaciotiempos asintóticamente planos presentan un grupo de simetrías asintóticas, o grupo BMS, que permite definir cantidades físicas en base a las simetrías asintóticas. La estructura infinita del grupo de simetrías asintóticas provee una importante herramienta para la identificación de espacios de Minkowski cerca del infinito nulo, si bien, las definiciones de momento angular intrínseco y centro de masa siguen siendo ambiguas. Estudiaremos este problema con más profundidad a lo largo de las próximas secciones.

### 3.1. Grupo de simetrías de Bondi-Metzner-Sachs

El Grupo de simetrías de Bondi-Metzner-Sachs, también conocido como Grupo BMS, es un concepto fundamental en la teoría de la relatividad general y tiene una profunda influencia en la comprensión de las soluciones de ondas gravitacionales y la estructura asintótica del espacio-tiempo. Este grupo fue introducido originalmente por H. Bondi, M. G. van der Burg, A.W. Metzner y R.K. Sachs en los trabajos seminales [4] y [12] como un intento de caracterizar las simetrías asintóticas del espacio-tiempo en la formulación de la relatividad general.

A diferencia de las simetrías locales que se describen mediante grupos de transformaciones locales, como las simetrías de Poincaré o las transformaciones de gauge, las simetrías asintóticas se refieren a las transformaciones que dejan invariantes las características globales del espacio-tiempo para distancias lejanas o en el límite cuando  $r$  va a infinito.

Sean  $u, \theta, \phi, r$  las coordenadas estándares de Bondi de la Sec. [1.1.3] para un espaciotiempo asintóticamente plano. Entonces  $u$  es el tiempo retardado y  $u = \text{const}$  denotan hipersuperficies nulas abriéndose hacia el futuro;  $\theta, \phi$  son coordenadas esféricas en el infinito nulo para cada superficie  $u = \text{const}$ ;  $r$  es una coordenada radial tal como la coordenada  $r$  definida a partir de la luminosidad. El grupo BMS queda definido por las siguientes transformaciones en las coordenadas  $\theta, \phi, u$

$$\theta' = \theta'(\theta, \phi), \quad (3.1)$$

$$\phi' = \phi'(\theta, \phi), \quad (3.2)$$

$$u' = K(\theta, \phi)(u - \alpha(\theta, \phi)), \quad (3.3)$$

donde  $(\theta, \phi) \rightarrow (\theta', \phi')$  es una transformación conforme, es decir, que la métrica de  $S^2$  preserva su forma excepto por un factor  $K^2$ ,

$$ds^2 = K^2(\theta', \phi')(d\theta'^2 + \sin^2\theta' d\phi'^2), \quad (3.4)$$

$$K^2 = \left( \frac{\sin\theta}{\sin\theta'} \right) |J| \quad (3.5)$$

con  $J = \frac{\partial(\theta, \phi)}{\partial(\theta', \phi')}$  el jacobiano de la transformación de coordenadas. La función  $\alpha(\theta, \phi)$  es una función real arbitraria suave en la esfera. Una observación respecto a la coordenada radial  $r$  es que si bien esta puede ser también transformada, la transformación es irrevalante para la estructura del grupo BMS y dependerá en general del tipo de coordenada radial elegida.

En particular, las transformaciones para las cuales  $\theta' = \theta, \phi' = \phi$  ( $K = 1$ ) son llamadas supertraslaciones. Notemos de (3.3) que las supertraslaciones transforman un sistema con superficies nulas  $u = \text{const}$  en otro sistema  $u' = \text{const}$ , sin involucrar rotaciones de Lorentz de por medio. La función  $\alpha$  de (3.3) puede ser expandida en términos de los esféricos armónicos tensoriales de la Sec. [1.3.1]:

$$\alpha = \sum_{l=0}^{\infty} a_{l, I_l} Y_{l, I_l}^0(\theta, \phi), \quad (3.6)$$

donde los coeficientes  $a_{l, I_l}$  son constantes. La función  $\alpha$  de (3.6) está generada por un conjunto de infinitos parámetros  $a_{l, I_l}$  que definen la supertraslación. Si elegimos  $a_{l, I_l} = 0$  para  $l > 2$ ,

$$\alpha = a_0 + a_{1,1} \sin\theta \cos\phi + a_{1,2} \sin\theta \sin\phi + a_{1,3} \cos\theta, \quad (3.7)$$

recuperamos los cuatro parámetros  $a_0$  y  $a_{1,i}$  que definen traslaciones de las superficies  $u = \text{const}$ .

El Grupo BMS captura estas simetrías asintóticas del espacio-tiempo en el contexto de las ondas gravitacionales. Estas ondas son perturbaciones en la geometría del espacio-tiempo que se propagan a la velocidad de la luz y son generadas por fuentes masivas en movimiento, como pares de estrellas de neutrones fusionándose o agujeros negros en colisión. El Grupo BMS describe las transformaciones que preservan las propiedades físicas de estas ondas gravitacionales en el límite asintótico.

Si recordamos que  $\sigma^0$  representa la radiación gravitacional en el límite asintótico, entonces dadas coordenadas de Bondi en un entorno de  $\mathcal{J}$ , Sachs [5] mostró que el grupo BMS transforma según la ley

$$\sigma^0(u', \theta', \phi') = K^{-1}[\sigma^0(u, \theta, \phi) + \mathfrak{D}^2\alpha(\theta, \phi)], \quad (3.8)$$

con  $u', \theta', \phi'$  dados por la transformación (3.3). Si solo hacemos una supertraslación entre dos superficies  $u = \text{const}$  y  $u' = \text{const}$ ,

$$\sigma^0(u', \theta, \phi) = \sigma^0(u' - \alpha, \theta, \phi) + \mathfrak{D}^2\alpha(\theta, \phi). \quad (3.9)$$

En particular, si efectuamos una supertraslación entre dos espacios estacionarios con  $\sigma^0 = 0$ , la Ec. (3.9) toma la forma

$$\mathfrak{D}^2\alpha(\theta, \phi) = 0. \quad (3.10)$$

La solución de  $\alpha$  a esta ecuación viene dada por (3.7), es decir, el subgrupo de las traslaciones. Esto demuestra que para espaciotiempos estacionarios, existen foliaciones de cortes nulos cuya deformación asintótica  $\sigma^0$  es nula. Estos cortes son llamados “cortes buenos” (del inglés *good cuts*). Además, la Ec. (3.7) también nos dice que el subgrupo que mapea un corte bueno a otro corte bueno es el grupo de Poincaré. En el espacio de Minkowski, un corte bueno simplemente vendrá dado por la intersección del cono de luz generado por un punto interior del espacio con el infinito nulo futuro,  $\mathcal{J}^+$ . En general, los espaciotiempos radiantes no poseerán cortes buenos.

### 3.1.1. Vectores de Killing asintóticos

Los vectores de Killing asintóticos son un concepto importante en la teoría de la relatividad general, que permite estudiar las simetrías y las propiedades geométricas

de las soluciones de campo gravitatorio en el límite asintótico. En particular, es posible construir el grupo BMS a partir de estos vectores.

En la relatividad general, los vectores de Killing  $\xi$  son campos vectoriales que generan simetrías en el espacio-tiempo. Estos campos se caracterizan por la propiedad de que la derivada de Lie del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  con respecto al campo vectorial de Killing  $\xi$  es igual a cero, es decir  $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0$ . Esto implica que las cantidades físicas medidas a lo largo de las trayectorias generadas por los vectores de Killing permanecen constantes a lo largo de esas trayectorias.

Si estudiamos espacios asintóticamente planos, podemos tomar el límite asintótico de los vectores Killing donde las distancias son muy grandes y el campo gravitatorio es débil. Estos vectores se llaman vectores de Killing asintóticos y por su construcción describirán las simetrías y propiedades de los campos gravitatorios en el infinito. Los vectores de Killing asintóticos capturan la noción de simetría en el infinito. Matemáticamente, los vectores de Killing asintóticos son las soluciones a la ecuación

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \mathcal{O}(1/r), \quad (3.11)$$

donde  $r$  es la coordenada radial inversa a la luminosidad de un sistema de coordenadas de Bondi. Veremos un ejemplo de cómo resolver este tipo de ecuación y el tratamiento de vectores de Killing asintóticos para un espaciotiempo de dos dimensiones a continuación.

### Ejemplo 1: Métrica 2-dimensional

Supongamos que tenemos la métrica en dos dimensiones

$$ds^2 = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(u) r^{-n} du^2 - 2du dr \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(u) r^{-n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} h_n(u) r^{-n} dr^2, \quad (3.12)$$

donde  $g_n, f_n, h_n$  son funciones que pueden fluctuar con  $u$  en el infinito nulo. Notemos que en el límite de  $r \rightarrow \infty$  esta métrica tiende a la métrica de Minkowski en coordenadas de Bondi-Sachs  $(u, r)$ . Por lo tanto se trata de un espaciotiempo asintóticamente plano.

El vector de Killing asintótico, solución a la Ec. (3.11), puede escribirse

$$\xi = (\epsilon(u) + \mathcal{O}(1/r))\partial_u + (-\epsilon'(u)r + \eta(u) + \mathcal{O}(1/r))\partial_r, \quad (3.13)$$

donde  $\epsilon, \eta$  son funciones arbitrarias que surgen de integrar las ecuaciones de Killing y parametrizan la familia de soluciones. Si removemos la parte con términos



$\mathcal{O}(1/r)$  obtenemos el vector de Killing generador de simetrías asintóticas para el espaciotiempo (3.12),

$$\xi = \epsilon(u)\partial_u + (-\epsilon'(u)r + \eta(u))\partial_r. \quad (3.14)$$

Si además calculamos el conmutador entre dos vectores de Killing  $\xi_1$  y  $\xi_2$ , obtenemos el álgebra que genera las simetrías asintóticas para nuestro espaciotiempo 2-dimensional,

$$[\xi(\epsilon_1, \eta_1), \xi(\epsilon_2, \eta_2)] = \xi(\epsilon_1\epsilon_2' - \epsilon_2\epsilon_1', (\epsilon_1\eta_2 - \epsilon_2\eta_1)') \quad (3.15)$$

### Ejemplo 2: Espaciotiempo asintóticamente plano 3-dimensional

Mostraremos con este ejemplo en tres dimensiones que el espacio de generadores de simetrías asintóticas para un espacio asintóticamente plano es un grupo más amplio que el de Poincaré. Usaremos coordenadas de Bondi  $(u, r, \phi)$  de manera que nuestro análisis estará restringido solo a  $\mathcal{J}^+$ . Dada la siguiente métrica asintóticamente plana,

$$ds^2 = (h_{uu} + \mathcal{O}(1/r))du^2 - 2dudr(1 + \mathcal{O}(1/r)) + (h_{u\phi} + \mathcal{O}(1/r))dud\phi + r^2d\phi^2(1 + \mathcal{O}(1/r)), \quad (3.16)$$

donde hemos ya fijado  $g_{rr} = g_{r\phi} = 0$  y  $h_{uu} = h_{uu}(u, \phi)$ ,  $h_{u\phi} = h_{u\phi}(u, \phi)$ . Si calculamos el escalar de Ricci o cualquier otra contracción escalar veremos que los invariantes son  $\mathcal{O}(1/r^n)$ ,  $n > 1$ .

Los vectores  $\xi$  que preservan la forma de la métrica (3.16), es decir que son solución a la Ec. (3.11), tienen la forma

$$\xi = (M(\phi) + uL'(\phi))\partial_u + (L(\phi) - \frac{u}{r}L''(\phi) - \frac{1}{r}M'(\phi))\partial_\phi - (rL'(\phi) + \mathcal{O}(1/r))\partial_r. \quad (3.17)$$

Para reconocer las simetrías subyacentes es conveniente descomponer este vector en dos partes

$$\xi^L = uL'(\phi)\partial_u + (L(\phi) - \frac{u}{r}L''(\phi))\partial_\phi - (rL'(\phi) + \mathcal{O}(1/r))\partial_r \quad (3.18)$$

$$\xi^M = M(\phi)\partial_u + \mathcal{O}(1/r). \quad (3.19)$$

Si calculamos los conmutadores de estos vectores, obtenemos el álgebra de Lie del grupo que preserva la métrica asintótica (3.16)

$$[\xi^L(L_1), \xi^L(L_2)] = \xi^L(L_1 L'_2 - L_2 L'_1 + \mathcal{O}(1/r)) \quad (3.20)$$

$$[\xi^L(L_1), \xi^L(M_2)] = \xi^M(L_1 M'_2 - M_2 L'_1 + \mathcal{O}(1/r)) \quad (3.21)$$

$$[\xi^L(M_1), \xi^L(M_2)] = \mathcal{O}(1/r). \quad (3.22)$$

El álgebra (3.20) también se conoce como álgebra de Witt. Para interpretar físicamente estos vectores es necesario hacer la expansión de la parte angular de los vectores  $\xi^M$  y  $\xi^L$ , similar a la expansión (3.6) pero teniendo en cuenta que en este caso tenemos una coordenada angular menos. De ese modo, los modos ceros  $\xi_0^M = \partial_u$  y  $\xi_0^L = \partial_\phi$  son los generadores de traslaciones temporales y rotaciones, respectivamente.

De esta manera vemos que el grupo de simetría de la métrica (3.16) contiene al grupo de Poincaré del espacio de Minkowski, pero también tiene infinitos generadores adicionales que conforman un grupo más amplio y producen ambigüedad a la hora de definir las cantidades físicas conservadas asociadas a cada generador. Los generadores  $\xi^M$  y  $\xi^L$  son llamadas supertraslaciones y superrotaciones respectivamente. Las supertraslaciones conmutan entre sí pero no así las superrotaciones.

Terminamos este ejemplo destacando que si bien el cálculo ha sido hecho para una métrica asintótica 3-dimensional, los resultados obtenidos son más generales y se reproducen en el caso de cuatro dimensiones obteniendo el grupo BMS (3.3) que definimos al principio de la sección.

### 3.1.2. Teorema de Noether

La presencia de vectores de Killing asintóticos es crucial para entender la noción de energía y momento en la relatividad general, ya que permiten definir cantidades conservadas asociadas a estas simetrías. Estas cantidades conservadas, como la energía total y el momento angular, tienen una interpretación física importante y proporcionan información sobre las propiedades globales de las soluciones gravitatorias.

Si suponemos un espaciotiempo con materia presente  $T_{\mu\nu}$  y denotamos la derivada de un vector de Killing  $\xi_{\mu,\nu}$ , podemos realizar con esta derivada cálculos similares a aquellos del tensor electromagnético  $F_{\mu\nu}$ . La derivada de vector de Killing es antisimétrica, de manera que puede ser visto como una 2-forma. Como una 2-forma es exacta, es decir que el campo  $\xi_{\mu,\nu} = -\frac{1}{2}(d\xi)_{\mu\nu}$  satisface una de las ecuaciones de

Maxwell, y  $-\frac{1}{2}\xi_\mu$  es una cantidad análoga al potencial electromagnético. La ecuación de Maxwell restante,  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$ , también tiene su análogo en términos de vectores de Killing

$$\xi^{\mu,\nu}_\nu = -R^\mu_\nu \xi^\nu = -(T^\mu_\nu - \frac{1}{2}Tg^\mu_\nu)\xi^\nu, \quad (3.23)$$

de donde vemos que la simetría subyacente dependerá del tensor energía-momento del espaciotiempo.

### Integral de Komar

Continuando con la analogía de los campos electromagnéticos, podemos integrar el diferencial  $\star d\xi$  sobre una superficie cerrada  $S$ , dando lugar a la integral de Komar

$$K[\xi] = \oint_S \star d\xi = \oint_S \xi^{\mu,\nu} dS_{\mu\nu}. \quad (3.24)$$

Utilizando el teorema de Stokes y reemplazando la ecuación (3.23) podemos reescribir la integral de Komar en términos del tensor energía-momento, lo cual permite una expresión más práctica para su cálculo

$$\oint_S \xi^{\mu,\nu} dS_{\mu\nu} = \oint_V (T^\mu_\nu - \frac{1}{2}Tg^\mu_\nu)\xi^\nu dV_\mu, \quad (3.25)$$

donde hemos llamado  $V$  al volumen encerrado por la superficie  $S$ . La integral de Komar se reduce a las expresiones de relatividad especial para la masa y momento angular en el límite de la teoría linealizada [13].

Supongamos ahora que tenemos un estacionario con simetría axial y carga, es decir un espaciotiempo de Kerr-Newman. En este caso tendremos un vector de Killing temporal  $\partial_t$  y otro vector de Killing espacial  $\partial_\phi$ , que corresponden a simetría de traslación en el espacio y simetrías de rotación alrededor del eje de simetría, respectivamente. En coordenadas de Boyer-Lindquist, el covector de Killing temporal puede escribirse

$$\xi = \left(\frac{\Delta\Sigma}{A}\right)^{1/2} - (\Delta\Sigma/A)^{1/2}dt + \frac{a \sin \theta}{(\Sigma A)^{1/2}} (Q^2 - 2Mr) (A \sin^2 \theta / \Sigma)^{1/2} (d\phi + \Omega dt). \quad (3.26)$$

con

$$\begin{aligned}\Omega &= (a/A) (Q^2 - 2Mr) \equiv (a/A)\beta, \\ \Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Delta &= r^2 + a^2 + Q^2 - 2Mr, \\ A &= (r^2 + a^2) \Sigma - a^2 (Q^2 - 2Mr) \sin^2 \theta.\end{aligned}$$

Si tomamos la derivada exterior del vector de Killing y luego el dual para integrar en (3.24), obtenemos para esta métrica

$$\begin{aligned} *d\xi &= \left[ -\hat{f} A^{1/2} \Omega \sin \theta - \tilde{h} \Sigma (\Delta/A)^{1/2} \right] d\theta \wedge dt \\ &+ \left[ \tilde{g} (A/\Delta)^{1/2} \Omega \sin \theta + \tilde{K} \Sigma (1/A^{1/2}) \right] dr \wedge dt \\ &- \tilde{f} A^{1/2} \sin \theta d\theta \wedge d\phi \\ &+ \tilde{g} (A/\Delta)^{1/2} \sin \theta dr \wedge d\phi, \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde hemos definido

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= - (2A^{1/2}/\Sigma^3) (M\Sigma + \beta r) (1 + a\Omega \sin^2 \theta), \\ \tilde{g} &= a\Omega (A^3/\Sigma^6 \Delta)^{1/2} \sin 2\theta \left[ 1 + \left( \frac{r^2 + a^2}{a} \right) \Omega \right], \\ \tilde{h} &= -(\Delta/A)^{1/2} (2a/\Sigma^2) (M\Sigma + \beta r) \sin \theta, \\ \tilde{K} &= \frac{2A^{1/2} \Omega \cos \theta}{\Sigma^2} (r^2 + a^2).\end{aligned}$$

Dado que (3.27) es un vector de Killing temporal, podemos integrar la fórmula (3.24) y obtener la masa encerrada en un espaciotiempo de Kerr para un radio  $r$ , que podemos llamar masa efectiva. Si hiciésemos esta integración en un espaciotiempo con simetría esférica, podríamos integrar sobre una esfera exterior al radio de Schwarzschild  $2M$ . En este caso, las coordenadas de Boyer-Lindquist también tienen una singularidad en  $\theta = \pi/2, r = 0$  por lo que no podemos integrar sobre una esfera. Por ello, se elige como superficie un toro radio exterior  $r$  y radio interior pequeño  $\epsilon$ . Más detalles sobre la integración puede encontrarse en [14].

Entonces, si reconocemos  $M_{eff} = 2K[\xi]$ , obtenemos la fórmula para la masa efectiva hasta un punto  $r$  en el espaciotiempo de Kerr,

$$M_{eff} = M - \frac{Q^2}{2r} - \frac{Q^2(r^2 + a^2)}{2ar^2} \arctan \frac{a}{r}. \quad (3.28)$$

Esta ecuación nos da una idea de la masa gravitacional efectiva que una partícula siente para una distancia  $r$ , siendo  $r$  la coordenada de Boyer-Lindquist. Es interesante ver que para valores suficientemente altos de la carga, la partícula puede sentir una fuerza de atracción repelente en el radio  $r$ . Este es un fenómeno que solo aparece en presencia de campos electromagnéticos dado que si  $Q = 0$ , tenemos  $M_{eff} = M$  y podemos identificar a la integral de Komar con la masa  $M$  del espaciotiempo. Para el caso de simetría esférica ( $a = 0$ ), obtenemos la expresión  $M_{eff} = M - Q^2/(2r)$ , que es la integral de Komar para un espaciotiempo de Reissner-Nordström. En el límite asintótico,  $r \rightarrow \infty$ , la integral de Komar representa la masa del espaciotiempo salvo un factor dos ( $M_{eff} = M$ ).

Similarmente, podríamos haber obtenido el momento angular efectivo usando el vector de Killing rotacional. Esta aplicación de la integral de Komar a un espaciotiempo de Kerr-Newman nos permite entender cómo se vinculan las cantidades conservadas usuales en física clásica con sus análogas en relatividad general. En particular, nos permiten ver que la definición de cantidades como  $M$ ,  $P$  o  $J$  dependerán del punto  $x^a$  del espaciotiempo. Sin embargo, también vimos que estos conceptos son más sencillos de interpretar en el límite asintótico.

### Linkages de Tamburino-Winicour

Dado un espaciotiempo  $M$ , en general no tendremos vectores de Killing presentes lo cual limita las posibilidades de utilizar la integral de Komar. A pesar de esto, los espaciotiempos asintóticamente planos poseen vectores Killing asintóticos, que hemos discutido en la Sec.[3.1.1]. Por ende, es posible definir leyes de conservación en base a las simetrías de los Killing asintóticos, aún cuando estas leyes se verán afectadas por las ambigüedades del grupo BMS, discutidas en la Sec.[3.1].

La generalización de la integral de Komar fue hecha por Tamburino y Winicour en 1966 [15], agregando las nociones de compactificación conforme de Penrose, los sistemas de coordenadas nulos de Bondi y Newman-Unti, y las simetrías del grupo BMS. Estas integrales modificadas fueron denominadas por los propios autores como *Linkages*.

Los Linkages asignan a cada generador asintótico  $\xi$  una función  $L_\xi(\Sigma^+)$  sobre cada superficie esférica  $\Sigma^+$  en  $\mathcal{J}^+$ . El esquema para construir los Linkages generadores de simetrías consiste en tres pasos:

1. Propagar el vector de Killing asintótico  $\xi^a$  sobre una superficie nula  $\Gamma$  que intersecta  $\mathcal{J}^+$  en  $\Sigma^+$  por medio de la ley de propagación de Killing sobre la

superficie nula

$$[\xi^{(a;b)} - \frac{1}{2}\xi_{,c}^c g^{ab}]l_b|_{\Gamma} = 0 \quad (3.29)$$

donde  $l_a$  es un generador nulo de  $\Gamma$ .

2. Evaluar la integral de Komar modificada

$$L_{\xi}(\Sigma) = -\frac{1}{16\pi} \oint_{\Sigma} (\xi^{a,b} + \xi_{,c}^c l^{[a} n^{b]}) dS_{ab} \quad (3.30)$$

3. Tomar el límite  $\Sigma \rightarrow \Sigma^+$  sobre  $\Gamma$

Los Linkages (3.30) se reducen a la integral de Komar (3.24) cuando  $\xi$  es una simetría exacta. Los linkages contienen un término adicional con la divergencia del vector de Killing que permite el cálculo de la integral sin conocer las derivadas de  $\xi^a$  en las direcciones apuntando fuera de  $\Gamma$ . Sin este término la energía obtenida en  $\Sigma^+$  no sería monotónicamente decreciente, sino la energía de Newman-Unti [8] que tiene una menor relevancia física.

Resulta conveniente a fines prácticos utilizar los Linkages en términos de los escalares de Newman-Penrose de la Sec.[1.2.2]. Para ello, escribimos el vector de Killing asintótico  $\xi^a$  en términos de la tetrada nula  $(l^a, n^a, m^a, \bar{m}^a)$ ,

$$\xi^a = Al^a + Bn^a + Cm^a + \bar{C}\bar{m}^a \quad (3.31)$$

con coeficientes

$$\begin{aligned} A &= A_1 r + A_0 + A_{-1} r^{-1} + \mathcal{O}(r^{-2}), \\ B &= B_0, \\ C &= C_1 r + C_0 + C_{-1} r^{-1} + \mathcal{O}(r^{-2}), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
A_1 &= -(1/\partial_u u_B) \partial_u (B_0 \partial_u u_B), \\
A_0 &= \partial \bar{\partial} B_0 + B_0 \partial \bar{\partial} \ln P(u_B, \xi, \bar{x}i), \\
A_{-1} &= \frac{1}{2} (B_0(\psi_2^0 + \bar{\psi}_2^0) + \bar{C}_1 \psi_1^0 + C_1 \bar{\psi}_1^0), \\
C_1 &= a(\xi, \bar{\xi})/\partial_u u_B, \text{ con } \partial a = 0, \\
C_0 &= \partial B_0 + \bar{C}_1 \sigma^0, \\
C_{-1} &= 0, \\
B_0 &= b(\xi, \bar{\xi})/\partial_u u_B - \frac{1}{2\partial_u u_B} \int_0^u (\partial_u u_B)^3 (\partial(\bar{a}(\partial_u u_B)^3) + \bar{\partial}(a(\partial_u u_B)^{-2}) du',
\end{aligned}$$

donde la única libertad está en las supertraslaciones  $b(\xi, \bar{\xi})$  y en el grupo de Lorentz homogéneo  $a(\xi, \bar{\xi})$ .

Si reemplazamos la expresión encontrada para el vector de Killing en la integral (3.30) y usamos que  $dS_{[ab]} = l_a n_b dS$ , podemos encontrar la siguiente expresión que provee un cálculo independiente de las coordenadas

$$\begin{aligned}
L_\xi(\Sigma^+) &= \frac{1}{8\pi 2^{1/2}} \operatorname{Re} \oint_{\Sigma^+} dS \{ \xi^a l_a (\psi_2^0 + \sigma^0 \dot{\bar{\sigma}}^0 - \bar{\partial}^2 \sigma^0) \\
&\quad + \xi^a \bar{m}_a [2\psi_1^0 - 2\sigma^0 \partial \sigma \bar{\sigma}^0 - \partial(\sigma^0 \bar{\sigma}^0)] \}, \tag{3.32}
\end{aligned}$$

donde  $Re$  denota la parte real de la integral,  $dS$  es el elemento de área de la esfera y  $m^a$  es un vector complejo nulo tangente a  $\Sigma^+$ .

La integral (3.32) forma una representación lineal del grupo BMS. Las integrales del centro de masa y momento angular pueden ser obtenidas de esta integral eligiendo un subgrupo de Lorentz. Aquí surge una nueva dificultad en definir el momento angular: no hay una única forma de elegir un subgrupo de Lorentz. La situación es análoga a lo que sucede con la libertad de traslaciones que uno encuentra al elegir un subgrupo de Lorentz del grupo de Poincaré, excepto que ahora la libertad de las infinitas supertraslaciones está presente.

Finalizaremos esta sección con una observación en la derivación (3.32). Al reemplazar la expresión  $dS_{[ab]} = l_a n_b dS$  el lector debe ser cuidadoso, ya que el  $n_b$  (de ahora en más,  $\hat{n}^b$ ) no pertenece al espaciotiempo físico  $g_{ab}$ , sino que es un vector conforme paralelo a las superficies  $u = \text{const}$  y  $r = \text{const}$ . Para relacionar este vector  $\hat{n}^b$  con el vector físico  $n^b$  nulo perpendicular al vector  $l^a$  de la integral (3.30), debemos hacer

una rotación nula de la forma

$$\hat{n}^a = n^a - \bar{\omega}m^a - \omega\bar{m}^a + \omega\bar{\omega}l^a \quad (3.33)$$

con

$$\omega = -(\bar{\partial}\sigma^0)r^{-1} + \mathcal{O}(r^{-2}). \quad (3.34)$$

De esta forma, concluimos con la expresión para las simetrías asintóticas que será fundamental en la definición del momento lineal, energía y momento angular.

## 3.2. Cortes de Bondi, Newman-Unti y cortes de línea de mundo

Retomaremos en esta sección con la teoría de superficies nulas de [2] para definir cortes del infinito nulo con relevancia física. Cuando hablamos de cortes nulos nos referimos a las superficies nulas  $\Gamma$  que intersecan al infinito nulo  $\mathcal{J}$  en una superficie  $\Sigma$  con topología  $S^2$ . Mencionamos ya en la Sección [1.1.3] que los sistemas de Bondi son aquellos que presentan similitud con los sistemas inerciales del espacio de Minkowski. En efecto, para el caso de un espaciotiempo plano los sistemas de Bondi pueden asociarse a líneas de mundo temporales de observadores inerciales.

Matemáticamente, quizás la manera más sencilla de definir a las superficies de Bondi es definiéndolos como la familia monoparamétrica de superficies nulas que se trasportan paralelamente y cuyo corte mantiene área unitaria. Es decir

$$\Gamma_u = \{u = cte : n_a n^a = 0, \nabla_a n^b = 0, \text{ con } n^b = \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^b \text{ y } \oint_{\Sigma^+} dS = 1\} \quad (3.35)$$

La condición de  $\nabla_a n^b = 0$  implica que los cortes de Bondi se propagan paralelamente en el infinito nulo. Aún más, implica que el área de las superficies que cortan en el infinito nulo se mantienen constantes.

Por otro lado, la integral de superficie es hecha sobre cortes de Bondi  $\Sigma^+$  para la métrica de  $S^2$  en  $\mathcal{J}^+$ .

En general, la métrica conforme en el infinito nulo futuro  $\mathcal{J}^+$  puede escribirse en términos de las coordenadas de Bondi-Sachs  $(u, \zeta, \bar{\zeta})$  como

$$\hat{ds}^2 = \frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{P(u, \zeta, \bar{\zeta})^2} \quad (3.36)$$



donde  $P(u, \zeta, \bar{\zeta})$  es una función que nos habla de la forma de los cortes en  $\mathcal{J}^+$ . Para el caso particular de los cortes de Bondi, la función  $P$  toma la forma  $P(u, \zeta, \bar{\zeta}) = 1 + \zeta\bar{\zeta}$ . Se deduce al integrar esta expresión que los cortes de Bondi son superficies de área unitaria.

En un espaciotiempo general, dados dos sistemas de Bondi  $(u_B, \zeta, \bar{\zeta})$  y  $(u'_B, \zeta, \bar{\zeta})$ , estos sistemas pueden relacionarse mediante las transformaciones del grupo BMS

$$u = K(\zeta, \bar{\zeta}) u' + \alpha(\zeta, \bar{\zeta}), \quad (3.37)$$

donde  $\alpha(\zeta, \bar{\zeta})$  es el generador de supertraslaciones del grupo BMS y recordemos que puede ser expandido como en (3.6).

De la misma manera, existen sistemas más generales que no se propagan paralelamente en el infinito nulo. Estos sistemas fueron descubiertos por Newman-Unti (NU) en [16].

Dados dos sistemas, uno más general de Newman-Unti  $(u, \zeta, \bar{\zeta})$  y de otro Bondi  $(u_B, \zeta, \bar{\zeta})$ , estos se relacionen a través de la ecuación

$$u = f(u', \zeta, \bar{\zeta}), \quad (3.38)$$

donde  $f$  es una función arbitraria que dependerá de la estructura del espaciotiempo.

### Generalización de cortes de Newman-Unti

Para estudiar sistemas físicos reales tales como binarias de agujeros negros o estrellas de neutrones, necesitamos estudiar cortes en el infinito nulo en espaciotiempos radiativos. Es decir, necesitamos cortes similares a los cortes en el espaciotiempo de Minkowski que provengan de un punto del espaciotiempo. Este concepto fue introducido por primera vez en [17].

Los cortes de línea de mundo son una generalización a los cortes de NU y pueden asociarse a curvas temporales del espaciotiempo. Los sistemas de coordenadas de cortes de línea de mundo en un espaciotiempo plano están intrínsecamente ligados a una línea de mundo temporal arbitraria, es decir observadores acelerados. De esta forma, estos sistemas constituyen los sistemas análogos no inerciales de relatividad especial.

En relatividad general, no es posible corresponder cortes de Bondi o de Newman-Unti en el infinito nulo con líneas de mundo asociadas a observadores, sino que, solamente a medida que el espaciotiempo  $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$  en forma asintótica, podemos definir

los observadores de Bondi asintóticos. No obstante, los cortes de línea de mundo permiten hacer una correspondencia con los puntos del interior del espaciotiempo, aún en la presencia de radiación.

Notemos que tanto en las transformaciones de Bondi como las de Newman-Unti los sistemas  $u_B$  y  $u'$  tienen las mismas coordenadas  $(\zeta, \bar{\zeta})$  en  $S^2$ . Se introducen a partir de estas transformaciones los sistemas de línea de mundo, que son una generalización a los sistemas de Newman-Unti en el siguiente sentido.

Dados dos sistemas, uno de línea de mundo  $(u, \zeta, \bar{\zeta})$  y otro de Bondi  $(u_B, \zeta_B, \bar{\zeta}_B)$ , estos se relacionan mediante las transformaciones

$$u = T(u_B, \zeta_B, \bar{\zeta}_B), \quad (3.39)$$

y

$$\zeta = \frac{a\zeta_B + b}{c\zeta_B + d}. \quad (3.40)$$

donde  $a, b, c, d$  son cuatro constantes complejas tal que  $ad - bc = 1$ . La Ec. (3.39) puede invertirse para obtener

$$u_B = Z(u, \zeta, \bar{\zeta}), \quad (3.41)$$

donde reconocemos a la función  $Z$  de la Sec. [2.1] y  $T$  es la función inversa de  $Z$ . Como  $Z$  es una función suave,  $T$  y  $Z$  satisfacen  $\bar{T}Z' = 1$ , siendo que el punto y el apóstrofe denotan derivación con respecto a las variables  $u_B$  y  $u$ , respectivamente.

Para relacionar las dos bases nulas que pertenecen a distintos sistemas, uno de línea de mundo y otro de Bondi, podemos hacer una rotación nula por un factor  $L(u_B, \zeta, \bar{\zeta})$  alrededor de  $n^a$ , es decir una rotación nula tipo II, y rotar el vector  $l_B^a$  del sistema de Bondi al vector  $l^a$  que es tangente a las superficies nulas que provienen de una línea de mundo. La derivación de la relación entre las tetradas que componen estos dos sistemas puede encontrarse en [16]. Son de particular interés las relaciones que se desprenden para los escalares  $\psi_1^0$  y  $\sigma_1^0$  en los respectivos sistemas. Estas son

$$\frac{\psi_1^{0*}}{Z'^3} = [\psi_1^0 - 3L\psi_2^0 + 3L^2\psi_3^0 - L^3\psi_4^0] \quad (3.42)$$

y

$$\frac{\sigma^{0*}}{Z'} = \sigma^0 - \bar{\partial}^2 Z. \quad (3.43)$$

Las relaciones son similares a aquellas de las transformaciones nulas de Lorentz pero ahora vemos la aparición adicional de un factor  $Z'$  dividiendo en la transformación. Recordemos que  $Z' = \partial_u u_B$ . El estudio de las relaciones entre estos dos tipos de sistemas puede verse con mayor profundidad en [17], [18] y [19].

Aquí, utilizamos en las Ecs. (3.42) y (3.43) la variable  $Z$  en lugar de  $u_B$  para especificar que los cortes nulos elegidos son cortes que corresponderán a observadores del espaciotiempo. En efecto, si  $Z$  satisface la ecuación fundamental de cortes de línea de mundo (2.6) entonces podremos hacer el desarrollo perturbativo ya introducido en el Cap. [2] y expresar los cortes nulos en términos de la posición de la línea de mundo y los terminos radiativos.

En particular, si resolvemos hasta orden cuadrupolar encontramos la siguiente ecuación para cortes nulos

$$Z = R^0 - \frac{1}{2}R^i Y_{1i}^0 + \left( \frac{\sigma_R^{ij}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{72} \dot{\sigma}_I^{ik} R^l \epsilon_{kl}^j \right) Y_{2ij}^0, \quad (3.44)$$

donde  $R^\mu(\tau)$  es el cuadvivector posición de una línea de mundo y  $\tau$  el parámetro afin.

### 3.3. Ecuaciones para el centro de masa y momento angular intrínseco

Si retomamos las soluciones asintóticas de las ecuaciones de Bianchi

$$\dot{\psi}_0^0 = -\bar{\partial}\psi_1^0 + 3\sigma^0\psi_2^0, \quad (3.45)$$

$$\dot{\psi}_1^0 = -\bar{\partial}\psi_2^0 + 2\sigma^0\psi_2^0, \quad (3.46)$$

$$\dot{\psi}_2^0 = -\bar{\partial}\psi_3^0 + \sigma^0\psi_4^0, \quad (3.47)$$

y recordamos al aspecto de masa definido a partir de estas,

$$\Psi = \psi_2^0 + \bar{\partial}^2 \bar{\sigma}^0 + \sigma^0 \dot{\bar{\sigma}}^0, \quad (3.48)$$

es posible definir al cuadrimomento de Bondi

$$P^\mu = -\frac{c^2}{8\pi\sqrt{2}G} \oint \Psi l^\mu dS. \quad (3.49)$$

Aquí  $l^\mu$  es el vector nulo de un espacio plano (2.14) y  $dS = 4\frac{d\zeta^d \bar{\zeta}}{P_0^2}$  es el elemento de área en la esfera unitaria.

En términos del teorema de Noether, la energía, el momento y la masa de ADM están definidos por las simetrías asintóticas en el infinito espacial, y la energía, el

momento y la masa de Bondi están definidos por las simetrías asintóticas en el infinito nulo.

Si bien Bondi define el cuádrimomento [4] solamente utilizando el aspecto de masa, la Ec. (3.32) para los Linkages gravitacionales contiene al cuádrimomento de Bondi en el primer término multiplicando a la cantidad  $\xi^a l_a$ .

Como ya mencionamos en la Sec. [3.1.2], el primer término en la integral de Winicour-Tamburino está asociada al momento lineal y energía gravitacional, mientras que el segundo término está asociado al momento angular y momento dipolar másico del sistema. Elegiremos  $\xi^a$  de tal manera que  $\xi^a l_a = 0$  y poder quedarnos solo con el término asociado al momento angular. De este modo, definimos el momento dipolar másico y el momento angular en un sistema de coordenadas de línea de mundo genérico como la parte real e imaginaria del segundo término en los linkages, respectivamente.

$$D_i^* + \frac{i}{c} J_i^* = \frac{1}{8\pi\sqrt{2}} \oint Y_{1i}^{-1} \left[ \frac{2\psi_1^{*0} - 2\sigma^{*0}\bar{\sigma}^{*0} - \bar{\sigma}^*(\sigma^{*0}\bar{\sigma}^{*0})}{Z^3} \right], \quad (3.50)$$

donde las tres constantes complejas del vector asintótico espacial  $\xi^i$  nos dan las tres componentes del vector momento dipolar másico y tres componente del momento angular total. Sucede un comportamiento análogo en gravedad linealizada en donde las partes reales e imaginarias del escalar  $\psi_{1i}^0$  capturan la noción de la dos forma que define el momento angular y momento dipolar másico [20]. Los *linkages* son una generalización natural de estos conceptos para espacios asintóticamente planos.

Es también importante mencionar que el valor de los linkages y de las cantidades definidas dependen de la sección integrada que elegimos en el infinito nulo. Esta libertad de elección de superficies es análoga a lo que sucede en relatividad especial cuando definimos el momento angular o centro de masa: las posiciones  $x, y, z$  pueden ser medidas desde distintos puntos. La diferencia aquí es que, mientras en relatividad especial la libertad yace en elegir un punto del espaciotiempo, en relatividad general la libertad es una superficie entera definida por un conjunto infinito de constantes, una para cada modo en la descomposición (3.6). En lo que sigue, restringiremos la libertad de infinitas constantes a cuatro funciones que describen una línea de mundo en el espaciotiempo.

Dada una familia de superficies nula de Bondi  $u = \text{const}$ , si efectuamos una transformación de supertraslación  $u' = u - \alpha(\xi_B, \bar{\xi}_B)$ , el aspecto de masa  $\Psi$  transforma como

$$\Psi'(u') = \Psi(u) + \bar{\sigma}^2 \alpha. \quad (3.51)$$

Si pedimos que para el corte  $u' = 0$  se cumpla

$$\Psi'(0)|_{l \geq 2} = 0, \quad (3.52)$$

entonces la única libertad restante de  $\Psi'$  corresponde a las constantes que acompañan los modos  $l = 0, 1$ . De esta manera, hemos fijado la libertad de supertraslaciones pidiendo que el aspecto de masa se anule sobre la foliación  $u' = \text{const.}$  para  $l \geq 2$ . Los cuatro parámetros restantes son una traslación temporal y espacial que utilizaremos para definir el centro de masa y momento dipolar másico de estos cortes provenientes de línea de mundo.

Se deduce de la elección de *gauge* (3.52) que las supertraslaciones correspondientes a esta elección debe satisfacer la ecuación

$$\bar{\partial}^2 \alpha(\xi, \bar{\xi}) = - \sum_{l=2}^{\infty} \Psi^{I_l} Y_{l, I_l}, \quad (3.53)$$

donde  $I_l$  denota un conjunto de  $l$  índices espaciales  $i_1, i_2, \dots, i_l$ .

### 3.3.1. Definición de centro de masa y momento angular intrínseco

Como hemos estudiado en las secciones anteriores, hay una correspondencia uno a uno entre las líneas de mundo del espaciotiempo y la foliaciones de cortes asociadas a estos observadores en el infinito nulo. Aún más, si pedimos que el momento dipolar másico definido en (3.50) se anule, queda determinada una única línea de mundo que definiremos como la línea de mundo asociada al centro de masa. A su vez, si calculamos el momento angular asociado a esta línea de mundo, obtendremos el momento angular intrínseco.

Resolviendo la integral de la Ec. (3.50) y teniendo en cuenta el *gauge* elegido (3.52), podemos escribir el momento dipolar másico y momento angular de una línea de mundo del espaciotiempo como

$$D_i^* + \frac{i}{c} J_i^* = \frac{-c^2}{12\sqrt{2}G} \left[ \frac{2\psi_1^{0*} - 2\sigma^{0*} \bar{\partial}^* \bar{\sigma}^{0*} - \bar{\partial}^* (\sigma^{0*} \bar{\sigma}^{0*})}{Z'^3} \right]^i, \quad (3.54)$$

donde el superíndice  $i$  indica que debemos hacer la expansión en esféricos armónicos de la expresión entre corchetes y quedarnos con el modo  $l = 1$ , ya que es el único que sobrevive en la integral (3.50).

Las seis funciones definidas en la Ec.(3.50),  $D_i$  y  $J_i$ , dependen de una línea de mundo particular  $x^a(u)$  que caracteriza cada corte en el infinito nulo, y por ende, nos define una foliación de superficies nulas. Luego, imponemos una condición sobre esta foliación pidiendo que para cada corte  $u = \text{const}$ , el momento dipolar másico  $D^*$  se anule. Es decir,

$$Re \left[ \frac{2\psi_1^{0*} - 2\sigma^{0*}\bar{\partial}^*\bar{\sigma}^{0*} - \bar{\partial}^*(\sigma^{0*}\bar{\sigma}^{0*})}{Z^3} \right]^i = 0. \quad (3.55)$$

Las tres condiciones que imponen esta ecuación, una por cada componente espacial del momento dipolar másico, fijan las componentes espaciales de la línea de mundo. Por otro lado, de la normalización de la cuadrivelocidad  $x'(u)^\mu x'(u)_\mu = 1$  queda determinada la componente temporal de la línea de mundo. Esta línea de mundo especial la denominamos línea de mundo del centro de masa  $x^i(u) = R^i(u)$ . El momento angular  $J^{i*}$  evaluado en el centro de masa será llamado momento angular intrínseco del sistema  $S^i$ . Es decir,

$$-\frac{c^3}{12\sqrt{2}G} Im \left[ \frac{2\psi_1^{0*} - 2\sigma^{0*}\bar{\partial}^*\bar{\sigma}^{0*} - \bar{\partial}^*(\sigma^{0*}\bar{\sigma}^{0*})}{Z^3} \right]^i. \quad (3.56)$$

Dado que las variables relevantes en relatividad general tales como la radiación gravitacional, la pérdida de masa y el momento lineal son descritas en sistemas de referencia de Bondi, nos interesa definir el momento dipolar másico y momento angular en estos sistemas de referencia. Entonces,

$$D_i + \frac{i}{c} J_i = -\frac{c^2}{12\sqrt{2}G} [2\psi_1^0 - 2\sigma^0\bar{\partial}\bar{\sigma}^0 - \bar{\partial}(\sigma^0\bar{\sigma}^0)]^i. \quad (3.57)$$

Podemos asociar las cantidades físicas entre los dos tipos de cortes, mediante las transformaciones nulas que relacionan a los dos sistemas. Teniendo en cuenta (3.42) y (3.43), encontramos

$$D^{*i}(u) = D^i(u_B) + \frac{3c^2}{6\sqrt{2}G} Re[\bar{\partial}Z(\Psi - \bar{\partial}^2\bar{\sigma}^0) + F]^i, \quad (3.58)$$

$$J^{*i}(u) = J^i(u_B) + \frac{3c^2}{6\sqrt{2}G} Im[\bar{\partial}Z(\Psi - \bar{\partial}^2\bar{\sigma}^0) + F]^i, \quad (3.59)$$

con

$$F = -\frac{1}{2}(\sigma^0\bar{\partial}\bar{\partial}^2Z + \bar{\partial}^2Z\bar{\partial}\bar{\sigma}^0 - \bar{\partial}^2Z\bar{\partial}\bar{\partial}^2Z) - \frac{1}{6}(\bar{\sigma}^0\bar{\partial}^3Z + \bar{\partial}^2Z\bar{\partial}\sigma^0 - \bar{\partial}^2\bar{\partial}^3Z). \quad (3.60)$$

En síntesis, podemos decir que dado un corte de línea de mundo del espaciotiempo  $Z$ , podremos relacionar el momento angular total  $J^{*i}$  y el momento dipolar másico  $D^{*i}$  asociado a este corte con los momentos  $J^i$  y  $D^i$  de un corte de Bondi  $Z = u_B = \text{const}$  en el infinito nulo. En particular, si elegimos los cortes nulos asociados a una línea de mundo  $x^\mu(u)$  que representa el centro de masa de un sistema, tendremos  $D^{*i} = 0$  y de la Ec. (3.58) encontramos  $D^i$  para el centro de masa en un sistema de Bondi.

Las expresiones (3.58) y (3.59) permiten describir sistemas físicos complejos utilizando cortes de línea de mundo y vinculando estos cortes con cortes de Bondi. Veremos en las próximas secciones cómo calcular la posición del centro de masa y el momento angular intrínseco utilizando los métodos perturbativos de la Sec.[2] para superficies nulas.

### Espaciotiempo de Minkowski

Mostraremos brevemente la similitud de nuestra definición del centro de masa y momento angular intrínseco con aquella que se define en un espaciotiempo plano. Aquí, no habrá ambigüedad proveniente del grupo BMS y por lo tanto la definición de estas cantidades resulta más directa y sencilla.

En un espaciotiempo plano los vectores de Killing, pueden encontrarse de forma exacta ya que están definidos en todo el espaciotiempo. Por esta razón, los vectores de Killing asintóticos coinciden con los vectores de Killing solución a la ecuación

$$\mathcal{L}_\xi \eta_{\alpha\beta} = 2\partial_{(\alpha}\xi_{\beta)} = 0. \quad (3.61)$$

Su solución

$$\xi^\alpha = \omega^{\alpha\beta} x_\beta + a^\alpha, \quad (3.62)$$

conforma una representación del grupo de Poincaré, donde  $\omega^{\alpha\beta}$  es el generador de las rotaciones y  $a^\alpha$  el generador de traslaciones.

Así como los vectores de Killing asintóticos nos permiten definir el momento angular y lineal en forma asintótica, en Minkowski sucede algo similar con los vectores de Killing exactos  $\xi^a$ . Dada la corriente conservada  $J^\mu = T^{\mu\nu}\xi_\nu$  que satisface  $\partial_\mu J^\mu = 0$ , podemos integrarla sobre una superficie espacial  $\Sigma$  y obtener la correspondiente cantidad física conservada. Por lo tanto,

$$Q_\xi = \int_\Sigma J^\beta t_\beta d\Sigma, \quad (3.63)$$

representa una cantidad conservada en la superficie  $\Sigma$  y  $t^\beta$  es un vector temporal futuro normal a  $\Sigma$ . Notemos que si quisieramos definir cantidades globales, deberíamos tomar el  $\lim_{r \rightarrow \infty} \Sigma$ , siendo  $r$  el radio de la superficie  $\Sigma$ .

Podemos definir el momento lineal o momento angular en la Ec. (3.63) según elijamos  $\xi$  a un vector temporal o espacial, respectivamente. A saber,

$$M^{\mu\nu} = 2 \int_{\Sigma_t} x^{[\mu} T^{0\nu]} d^3x, \quad (3.64)$$

$$P^\mu = \int_{\Sigma_t} T^{0\mu} d^3x. \quad (3.65)$$

Los vectores  $M^{\mu\nu}$  y  $P^\mu$  son respectivamente llamados tensor momento dipolar-angular relativista y cuadvivector momento lineal. Estas cantidades son las que obtendríamos del primer y segundo término en el integrando de los Linkages de Winicour (3.32). Como el término acompañando al parámetro  $a(\xi, \bar{\xi})$  en la integral (3.32) lo hemos tomado cero, y corresponde al término asociado al momento lineal, nos olvidaremos del cuadrimento  $P^\mu$  en lo que sigue.

Si descomponemos el tensor  $M^{\mu\nu}$  en su parte espacial y temporal, reobtenemos dos cantidades conocidas para la física Newtoniana. En primer lugar, el momento dipolar másico dinámico es

$$M^{i0} = N^i = D^i - tP^i = \int_{\Sigma_t} (\rho x^i - tP^i) d^3x. \quad (3.66)$$

Aquí, la cantidad  $D^i$  representa el momento dipolar másico y se relaciona con el momento dipolar dinámico a través de una traslación  $tP^i$ .  $D^i$  se define como

$$D^i = \sum_A x_A^i p_A^0 = \int_{\Sigma_t} \rho x^i d^3x, \quad (3.67)$$

dependiendo si se trata de un sistema discreto o continuo.

Por otro lado,

$$M^{ij} = \int_{\Sigma_t} (P^i x^j - x^i P^j) d^3x, \quad (3.68)$$

nos permite obtener el momento angular  $L^i = \epsilon^{ijk} M_{jk}$ .

Notemos que el tensor momento angular-momento dipolar másico  $M^{\mu\nu}$  presenta ambigüedades con respecto a su definición ante traslaciones  $R^\mu$ , similar a lo que pasa



con  $J^i$  en las supertraslaciones. En efecto,

$$\begin{aligned} M^{*\mu\nu} &= 2 \int_{\Sigma_t} P^{[\mu} (x - R)^{\nu]} d^3x = M^{\mu\nu} - \int_{\Sigma_t} P^{[\mu} R^{\nu]} d^3x \\ &= M^{\mu\nu} - P^{[\mu} V R^{\nu]} \end{aligned}$$

donde  $V$  es el volumen que resulta de hacer la integral en  $d^3x$ . Separamos el vector  $R^\mu$  en su término paralelo a  $P^\mu$  y otro término que contiene la parte perpendicular a  $P^\mu$ ,  $R_0^\mu$ . Así pues podemos escribir el momento angular trasladado como

$$M^{*\mu\nu} = M^{\mu\nu} - P^{[\mu} V R_0^{\nu]}. \quad (3.69)$$

De manera análoga al problema de centro de masa en relatividad general, debemos fijar una línea de mundo para poder fijar el momento angular. Impondremos entonces la condición análoga a  $D^{i*} = 0$  y calcularemos la línea de mundo que define el centro de masa del sistema. En nuestro caso, fijaremos primero el término perpendicular a  $P^\mu$  de  $R^\mu$ , pidiendo que  $M^{*\mu\nu} P_\nu = 0$ . De esta forma,

$$0 = M^{\mu\nu} P_\nu - R_0^\mu P^2, \quad (3.70)$$

de donde obtenemos

$$R_0^\mu = P^{-2} M^{\mu\nu} P_\nu. \quad (3.71)$$

El término paralelo a  $P^\mu$  solo requiere hallar la función  $\alpha$ , y esta puede definirse como un parámetro afín de la línea de mundo  $\tau$ . Definiendo  $M$  la masa del sistema dentro del volumen  $\Sigma_t$ , entonces  $P^\mu P_\mu = M^2$ . Al final, obtenemos las siguientes expresiones para la línea de mundo del centro de masa y la su velocidad  $V^\mu = \frac{dR^\mu}{d\tau}$ ,

$$MR^\mu = M^{-1} M^{\mu\nu} P_\nu + \tau P^\mu, \quad (3.72)$$

$$MV^\mu = P^\mu, \quad (3.73)$$

con  $V^\mu = \frac{dR^\mu}{d\tau}$ .

En resumen, hemos encontrado la línea de mundo que define el centro de masa en términos de las variables  $M, M^{\mu\nu}, P^\nu$ . Para ello, debimos fijar el momento angular ya que en el espacio de Minkowski la libertad de traslaciones permiten distintas definiciones. Este procedimiento es una demostración simplificada de lo que sucede en espaciotiempos asintóticos generales, donde el grupo de simetrías es más grande y debemos elegir un *gauge* que fije las supertraslaciones adicionalmente.

### 3.3.2. Ecuaciones para un sistema físico con centro de masa $x^\mu(u)$

Dada una foliación nula a primer orden  $Z = Z_0 + Z_1$  como en la Ec. (3.44), podemos obtener la posición del centro de masa y su momento angular intrínseco de manera similar a como hemos hecho para un espaciotiempo plano. Ahora, procederemos a hacer nuestro cálculo en un espaciotiempo con radiación gravitacional como puede ser, por ejemplo, el espaciotiempo asociado a un sistema binario de dos agujeros negros.

Para deducir la posición del centro de masa y el momento angular intrínseco debemos hacer algunas suposiciones de trabajo:

1. La radiación debió ser nula ( $\sigma = 0$ ) para algún tiempo de Bondi. Generalmente se toma  $\sigma|_{u=-\infty} = 0$ .
2. Supondremos que la parte espacial del  $R^i(u)$  de la línea de mundo del centro de masa es una desviación pequeña del origen de coordenadas.
3. La componente temporal de la línea de mundo  $R^0 = u$ , es decir, los sistemas no se mueven a velocidades relativistas.
4. El *shear* gravitacional solo tiene componente cuadrupolar.

La primera suposición, es una implicación del *gauge* elegido para las supertraslaciones y puede pensarse también como una condición equivalente para fijar las supertraslaciones.

En principio estas suposiciones pueden ser abandonadas, pero como queremos hacer una comparación directa con otras formulaciones, como la formulación de Adamo-Newman-Kozameh (ANK) o la formulación postnewtoniana (PN) de las ecuaciones de movimiento, serán necesitadas para este propósito. Específicamente, el formalismo PN elige un tiempo inicial donde el sistema en cuestión es estacionario y la métrica es plana, en lugar de nuestra suposición número 1.

La últimas dos suposiciones (3 y 4) son suposiciones que permiten una mayor simplificación en los cálculos pero de ninguna manera son restrictivos: en caso de querer mayor precisión en las fórmulas, basta agregar órdenes mayores en la velocidad u órdenes mayores en los modos de la radiación gravitacional, dependiendo si trabajamos con sistemas relativistas o sistemas altamente no lineales respectivamente.

### Cálculo de la posición

Vimos ya en la Ec. (3.58) cómo podemos hallar el momento dipolar másico para cortes relacionados al centro de masa del sistema en un sistema de Bondi. Usaremos ahora el esquema (2.15) para trabajar con una foliación a primer orden de forma similar al Cap.[2].

Para obtener expresiones desacopladas en modos haremos la expansión en esféricos armónicos tensoriales de todas las cantidades escalares

$$\sigma^0(u, \xi, \bar{\xi}) = \sigma^{ij}(u) Y_{2,ij}^2(\xi, \bar{\xi}) \quad (3.74)$$

$$\psi_1^0(u, \xi, \bar{\xi}) = \psi_1^{0i}(u) Y_{1i}^1(\xi, \bar{\xi}) + \psi_1^{0ij}(u) Y_{2ij}^1(\xi, \bar{\xi}) \quad (3.75)$$

$$\Psi = -\frac{2\sqrt{2}G}{c^2} M(u) - \frac{6G}{c^3} P^i(u) Y_{1i}^0(\xi, \bar{\xi}) + \Psi^{ij}(u) Y_{2ij}^0(\xi, \bar{\xi}) \quad (3.76)$$

Notemos que aquí el tensor  $\sigma^{ij}$  representa el momento cuadrupolar de la radiación gravitacional.

Ahora, si escribimos  $x^a(u)$  al cuadvivector  $(R^0(u), R^i(u))$ , y reemplazando la expansión (3.74) en la ecuación para los cortes nulos a primer orden homogénea (2.23), obtenemos la solución

$$u_B = Z_0 + Z_1(u, \xi, \bar{\xi}) = u + \delta u = R^0(u) - \frac{1}{2} R^i(u) Y_{1,i}^0 + \frac{1}{12} \sigma_R^{ij}(u) Y_{2,ij}^0. \quad (3.77)$$

Las componentes de  $R^\mu$  representan una línea de mundo en un espacio de Minkowski fiduciario. Si elegimos  $u$  como el tiempo propio, podemos encontrar fácilmente  $R^0(u)$  en términos de las componentes espaciales de la 4-velocidad. Aún más, en la aproximación no relativista  $R^0(u) = u + \mathcal{O}(v^2)$ .

Una vez encontrada la expresión para la foliación  $Z_1$ , podemos obtener el  $R^\mu(u)$  correspondiente a la línea de mundo del centro de masa del espaciotiempo a través de la Ec. (3.58). De esta forma, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= D^i(u + \delta u) + \frac{3c^2}{6\sqrt{2}G} \text{Re}[(\Psi - \bar{\partial}^2 \bar{\sigma}^0) \bar{\partial} \delta u + F]^i \\ 0 &= D^i(u) + [\dot{D}(u) \delta u]^i + \frac{3c^2}{6\sqrt{2}G} \text{Re}[(\Psi - \bar{\partial}^2 \bar{\sigma}^0) \bar{\partial} \delta u + F]^i \\ 0 &= D^i(u) + \frac{c^2}{6\sqrt{2}G} \text{Re}[(\bar{\partial} \Psi - \bar{\partial}^3 \bar{\sigma}^0) \delta u]^i + \frac{3c^2}{6\sqrt{2}G} \text{Re}[(\Psi - \bar{\partial}^2 \bar{\sigma}^0) \bar{\partial} \delta u + F]^i. \end{aligned}$$

En la segunda línea hemos hecho un desarrollo de la función  $D^i(u+\delta u)$  ya que hemos supuesto  $\delta u$  pequeño. En la tercera línea hemos usado las ecuaciones de evolución de Bianchi (1.82,1.83) para reemplazar  $\dot{D}(u)$ .

Luego de reemplazar la expansión en términos de los esféricos armónicos tensoriales, podemos despejar la expresión final para la posición del centro de masa  $R^i$ . A saber,

$$MR^i = D^i + \frac{8}{5\sqrt{2}c}\sigma_R^{ij}P^j, \quad (3.78)$$

donde  $\sigma_R^{ij}$  y  $\sigma_I^{ij}$  representa la parte real e imaginaria del tensor  $\sigma^{ij}$ ,  $M$  es la masa de Bondi del sistema y  $P^j$  las componentes del momento lineal gravitacional. Podemos hallar la foliación de cortes nulos asociados al centro de masa insertando la expresión encontrada (3.78) en (3.77). Esto es,

$$Z_{CM} = u - \frac{1}{2M}(D^i + \frac{8}{5\sqrt{2}c}\sigma_R^{ij}P^j)Y_{1i}^0 + \frac{1}{12}\sigma_R^{ij}Y_{2,ij}^0. \quad (3.79)$$

Similarmente, podemos encontrar el momento angular intrínseco del espaciotiempo utilizando la relación (3.59),

$$\begin{aligned} J^{*i}(u) &= J^i(u + \delta u) + \frac{3c^3}{6\sqrt{2}G}Im[(\Psi - \bar{\partial}^2\bar{\sigma}^0)\bar{\partial}\delta u + F]^i \\ &= J^i(u) + [J(u)\delta u]^i + \frac{3c^3}{6\sqrt{2}G}Im[(\Psi - \bar{\partial}^2\bar{\sigma}^0)\bar{\partial}\delta u + F]^i \\ &= J^i(u) + \frac{c^3}{6\sqrt{2}G}Im[(\bar{\partial}\Psi - \bar{\partial}^3\bar{\sigma}^0)\delta u]^i + \frac{3c^3}{6\sqrt{2}G}Im[(\Psi - \bar{\partial}^2\bar{\sigma}^0)\bar{\partial}\delta u + F]^i. \end{aligned}$$

Aquí hemos aplicado el procedimiento análogo al momento dipolar másico en la segunda y tercer línea. Si reemplazamos la última expresión la foliación del centro de masa (3.79) y recordamos que  $J^{*i}(u) = S^i(u)$ , entonces

$$S^i = J^i - \epsilon^{ijk}R_jP_k. \quad (3.80)$$

El lector debe notar que esta ecuación se reduce a la ecuación Newtoniana que conocemos del momento angular intrínseco cuando  $\sigma = 0$ . De la misma manera,  $R^i = D^i/M$  cuando no hay radiación gravitacional.

### Ecuaciones dinámicas

La evolución temporal de  $D^i$  y  $J^i$  se deduce de las identidades de Bianchi (1.83) para  $\psi_1^0$ . Debemos tener en cuenta que existe un factor  $\sqrt{2}$  entre el tiempo retardado

y el tiempo de Bondi,  $u_{ret} = \sqrt{2}u_B$ . Es importante utilizar el tiempo retardado para obtener los factores numéricos correctos en las expresiones finales. Usaremos un punto para simbolizar la derivada con respecto al tiempo retardado en las siguientes expresiones.

Si derivamos la expresión (3.57) e introducimos la Ec. (1.83), obtenemos para la parte real e imaginaria

$$\dot{D}^i = P^i \quad (3.81)$$

$$\dot{J}^i = \frac{c^3}{5G} \epsilon_{ijk} (\sigma_R^{kl} \dot{\sigma}_R^{jl} + \sigma_I^{kl} \dot{\sigma}_I^{jl}) \quad (3.82)$$

De la misma manera, si tomamos las componentes  $l = 0$  y  $l = 1$  del aspecto de masa, o equivalentemente, derivamos el primer término en la integral de linkages (3.32) y reemplazamos la identidad de Bianchi (1.82), se obtienen las ecuaciones de pérdida de masa y momento lineal.

$$\dot{M} = -\frac{c}{10G} (\dot{\sigma}_R^{ij} \dot{\sigma}_R^{ij} + \dot{\sigma}_I^{ij} \dot{\sigma}_I^{ij}) \quad (3.83)$$

$$\dot{P}^i = \frac{2c^2}{15G} \epsilon_{ijk} \dot{\sigma}_R^{jl} \dot{\sigma}_I^{kl}. \quad (3.84)$$

Si tomamos la derivada con respecto al tiempo retardado de (3.78), encontramos la velocidad asociada al centro de masa del sistema. Esto es,

$$M \dot{R}^i = P^i + \frac{8}{5\sqrt{2}c} \dot{\sigma}_R^{ij} P^j. \quad (3.85)$$

Esta ecuación provee una relación entre el centro de masa del sistema con el momento lineal de Bondi  $P^i$  ya conocido en Relatividad General de un sistema. Notemos que (3.85) difiere de la relación Newtoniana  $\dot{R}^i = P^i/M$  en los términos de radiación  $\sigma^{ij}$ .

Finalmente, si tomamos una derivada más de esta última relación, obtenemos la ecuación de movimiento del centro de masa

$$M \ddot{R}^i = \frac{2c^2}{15G} \epsilon_{ijk} \dot{\sigma}_R^{jl} \dot{\sigma}_I^{kl} + \frac{8}{5\sqrt{2}c} \ddot{\sigma}_R^{ij} P^j. \quad (3.86)$$

Notemos que la aceleración de la línea de mundo depende del dato gravitacional en el infinito nulo y de la masa inicial del sistema.

Similarmente, si tomamos la derivada temporal del momento angular intrínseco

$$\dot{S}^i = \frac{c^3}{5G} \epsilon_{ijk} (\sigma_R^{kl} \dot{\sigma}_R^{jl} + \sigma_I^{kl} \dot{\sigma}_I^{jl}) \quad (3.87)$$

Esta ecuación también es válida en mecánica Newtoniana para un sistema aislado, cuando  $\sigma = 0$  y el momento angular es conservado. En relatividad general, sin embargo, el momento angular intrínseco de un sistema aislado no se conserva ya que se pierde en forma de radiación gravitacional.

### 3.3.3. Comparación con otros formalismos

En esta sección compararemos las fórmulas obtenidas con las ecuaciones de movimientos provenientes de otros formalismos.

#### Comparación con las ecuaciones ANK

Existe un formalismo similar presentado en la anterior sección que permite obtener formulas de evolución para las cantidades físicas globales definidas también en el infinito nulo. Este es el formalismo Adamo-Newman-Kozameh ([20]) cuyo espacio de soluciones se diferencia principalmente por las siguientes características

1. En primer lugar, el formalismo ANK define el momento angular y dipolar másico a partir del modo  $l = 1$  del escalar  $\psi_1^0$ . En nuestro caso, el formalismo presentado en esta tesis define el momento angular y dipolar másico a partir del concepto de linkages de Winicour y simetrías asintóticas en el infinito nulo.
2. Mientras que el formalismo ANK utiliza cortes con deformación nula asintótica  $\sigma^0$ , nuestro formalismo incorpora cortes nulos con  $\sigma \neq 0$  obtenidos de la ecuación de cortes.
3. La ecuación de cortes en el formalismo ANK se denomina ecuación de cortes buenos (*good cuts equation*) y su espacio de solución es complejo, mientras que el espacio de soluciones de nuestra ecuación de cortes nulos es real y de esta manera permite identificarse con cantidades físicas de interés.
4. Dado que el espacio de soluciones en el formalismo ANK es complejo, también lo es la línea de mundo asociada a esta solución y por lo tanto su interpretación física no es tan directa. En el formalismo ANK, el momento angular intrínseco se define como la parte imaginaria de la línea de mundo, mientras que en nuestro formalismo se define en forma análoga a la mecánica clásica: es el momento angular asociado a la línea de mundo del centro de masa.

Estas diferencias delineadas son fundamentales en los resultados obtenidos de ambos formalismos. En efecto, en el formalismo ANK el momento angular total y momento dipolar másico se definen

$$D^i = -\frac{c^2}{6\sqrt{2}G}\psi_{1R}^{0i} + \frac{c^2}{5G}\epsilon_{ijk}\sigma_R^{jl}\sigma_I^{kl} \quad (3.88)$$

$$J^i = -\frac{c^3}{6\sqrt{2}G}[\psi_1^0 - \sigma^0\bar{\sigma}^0 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}(\sigma^0\bar{\sigma}^0)]_I^i. \quad (3.89)$$

Como hemos mencionado, la principal diferencia en las ecuaciones proviene de integrar las simetrías del grupo BMS en la definición de estas cantidades. Por otro lado,  $M$  y el momento lineal  $P^i$  permanecen iguales en ambos formalismos.

Es importante mencionar que el momento angular (3.89) solo está bien definido para radiación cuadrupolar y su definición debe ser cambiada al considerar momentos multipolares más altos al  $l = 2$ . En cambio, nuestro formalismo permite generalizarse para cualquier modo de radiación mayor al cuadrupolar.

La ecuación de movimiento para el centro de masa en el formalismo ANK se lee

$$M\ddot{\xi}_R^i = \frac{2\sqrt{2}c^2}{15G}\epsilon_{ijk}\dot{\sigma}_R^{jl}\dot{\sigma}_I^{kl} \quad (3.90)$$

y por lo tanto la dinámica entre ambos formalismos es sustancialmente distinta.

### Comparación con las ecuaciones Post-Newtonianas

El formalismo post-newtoniano es un formalismo matemático que combina conceptos de la mecánica newtoniana y la teoría de la relatividad general de Einstein para proporcionar una descripción más precisa de la gravedad y sus efectos en varios sistemas físicos.

Actualmente, el formalismo PN es uno de los formalismos más usados en relatividad general [21] con una innumerable cantidad de aplicaciones: desde simulaciones de agujeros negros y detección de ondas gravitacionales hasta deflexión de la luz y redshift gravitacional.

En esta sección compararemos parcialmente las ecuaciones de evolución obtenidas de nuestro enfoque con aquellas que vienen del formalismo Post-Newtonian (PN). En principio, una comparación detallada entre ambos formalismos es una tarea ardua ya que las derivaciones de los dos formalismos tienen un punto de partida distinto: el formalismo PN define los momentos multipolares en zonas cercanas a las fuentes

y en términos de la fuente, mientras que la formulación asintótica define momentos multipolares radiativos.

Por otro lado, las ecuaciones de movimiento de la formulación asintótica para la masa, el momento lineal y angular son exactas, permitiendo aplicarse a cualquier tipo de sistema gravitacional. En cambio, en el enfoque post-newtoniano se construye la pérdida gravitacional solo válida hasta cierto orden de aproximación, ya que a priori uno no tiene disponible una fórmula exacta. Sin embargo, es importante intentar contruir un puente entre los dos enfoques distintos y ver si producen o no ecuaciones de movimiento equivalentes para una fuente compacta que emite radiación gravitacional.

En el formalismo PN, las ecuaciones para la pérdida de energía, momento lineal y angular vienen dadas por las ecuaciones

$$\dot{E}_{PN} = -\frac{1}{5}\dot{U}^{ij}\dot{U}_{ij} - \frac{16}{45}\dot{V}^{ij}\dot{V}_{ij} - \frac{1}{189}\dot{U}^{ijk}\dot{U}_{ijk} - \frac{1}{84}\dot{V}^{ijk}\dot{V}_{ijk}, \quad (3.91)$$

$$\dot{P}_{PN}^i = \epsilon^{ijk} \left( \frac{16}{45}\dot{U}^{kl}\dot{V}^{jl} + \frac{1}{126}\dot{U}^{klm}\dot{V}^{jlm} \right) - \frac{2}{63}(\dot{U}^{jk}\dot{U}^{ijk} + 2\dot{V}^{jk}\dot{V}^{ijk}), \quad (3.92)$$

$$\dot{J}_{PN}^i = -\epsilon^{ijk} \left( \frac{2}{5}U^{kl}\dot{U}^{jl} + \frac{32}{45}V^{kl}\dot{V}^{jl} \right) - \epsilon^{ijk} \left( \frac{1}{63}U^{klm}\dot{U}^{jlm} + \frac{1}{28}V^{klm}\dot{V}^{jlm} \right), \quad (3.93)$$

donde hemos incluido los términos octupolares de la descripción PN. La descripción de estas mismas cantidades físicas en términos de nuestro formalismo asintótico, y teniendo en cuenta también los términos octupolares, se lee

$$\dot{M} = -\frac{1}{10}(\dot{\sigma}_R^{ij}\dot{\sigma}_R^{ij} + \dot{\sigma}_I^{ij}\dot{\sigma}_I^{ij}) - \frac{3}{7}(\dot{\sigma}_R^{ijk}\dot{\sigma}_R^{ijk} + \dot{\sigma}_I^{ijk}\dot{\sigma}_I^{ijk}), \quad (3.94)$$

$$\dot{P}^i = -\frac{2}{15}\epsilon^{ijk}\dot{\sigma}_R^{kl}\dot{\sigma}_I^{jl} - \frac{\sqrt{2}}{7}(\dot{\sigma}_R^{jk}\dot{\sigma}_I^{jk} + \dot{\sigma}_I^{jk}\dot{\sigma}_R^{ijk}) - \frac{3}{7}\epsilon^{ijk}\dot{\sigma}_R^{klm}\dot{\sigma}_I^{jlm}, \quad (3.95)$$

$$\dot{J}^i = \frac{1}{5}(\sigma_R^{kl}\dot{\sigma}_R^{jl} + \sigma_I^{kl}\dot{\sigma}_I^{jl}) - \frac{9}{7}(\sigma_R^{klm}\dot{\sigma}_R^{jlm} + \sigma_I^{klm}\dot{\sigma}_I^{jlm}). \quad (3.96)$$

Como las expresiones son cuadráticas en los términos de radiación, solo necesitamos una relación lineal entre la deformación gravitacional y los momentos multipolares post-newtonianos. Usando las ecuaciones de Einstein linealizadas y el *gauge* trans-



verso, es posible encontrar las siguientes relaciones

$$\sigma_R^{ij} = -\sqrt{2}U^{ij}, \quad (3.97)$$

$$\sigma_I^{ij} = \frac{8}{3\sqrt{2}}V^{ij}, \quad (3.98)$$

$$\sigma_R^{ijk} = -\frac{1}{9}U^{ijk}, \quad (3.99)$$

$$\sigma_I^{ijk} = -\frac{1}{6}V^{ijk}. \quad (3.100)$$

De esta forma, ambos sistemas de ecuaciones son equivalentes a orden octupolar. Este es un resultado destacable, ya que las ecuaciones de evolución provienen de enfoques completamente distintos.

Por otro lado, hay que ser cuidadosos con las ecuaciones finales de movimiento del centro de masa, energía y espín de un sistema, ya que la relación de estas cantidades con las variables cinemáticas son distintas en ambas formulaciones. Es común encontrar en la literatura post-newtoniana, la definición de la velocidad de retroceso (*recoil velocity*) del centro de masa definida como  $\frac{\Delta P}{M}$ , es decir la integral de la ec. (3.95) dividida la masa total final del sistema. Sin embargo, se sigue de la Ec. (3.85) que nuestra formulación arroja un resultado diferente. Un estudio más detallado de esta cantidad será dado en la próxima sección.

## Capítulo 4

# Aplicación a ondas gravitacionales

Las ondas gravitacionales han revolucionado nuestra comprensión del universo y nos han brindado una nueva ventana para explorar los eventos cósmicos más violentos. Estas ondas son perturbaciones en el espacio-tiempo que se propagan a la velocidad de la luz, llevando consigo información sobre eventos como fusiones de agujeros negros, colisiones de estrellas de neutrones y otras manifestaciones extremas de la gravedad.

Uno de los avances clave en la detección de las ondas gravitacionales ha sido el uso de simulaciones numéricas de agujeros negros binarios. Estas simulaciones, basadas en las ecuaciones de la relatividad general de Einstein, nos permiten recrear y estudiar en detalle los procesos de fusión y colisión de agujeros negros.

La relevancia de estas simulaciones radica en su papel fundamental en la detección y caracterización de las ondas gravitacionales. Al simular los eventos de fusión de agujeros negros, es posible predecir las señales que se esperan detectar y compararlas con las observaciones reales. Esto proporciona una base sólida para identificar y analizar las ondas gravitacionales detectadas por los observatorios.

Un ejemplo destacado de los catálogos desarrollados mediante estas simulaciones es el catálogo del Instituto de Tecnología de Rochester [22, 23, 24, 25, 26]. Este catálogo alberga más de 1800 simulaciones de agujeros negros binarios, abarcando una amplia gama de masas y configuraciones. Estas simulaciones nos permiten explorar diversas características de las ondas gravitacionales, como la amplitud, la frecuencia y la duración de las señales, lo que contribuye a nuestro conocimiento sobre la naturaleza de los eventos astrofísicos extremos.

Haremos uso de este catálogo en las próximas secciones para estudiar las ecuaciones del centro de masa y momento angular intrínseco.

## 4.1. Ecuaciones de movimiento

Hemos visto en el Capítulo anterior [3], las ecuaciones de movimiento para el centro de masa y el momento angular intrínseco para términos de radiación octupolar. También las ecuaciones de evoluciones de la energía, el momento lineal y angular total para un espaciotiempo radiativo. Ahora nuestro interés yace en utilizar estas ecuaciones para estudiar la radiación gravitacional de un espaciotiempo formado por un sistema compuesto por dos agujeros negros. Este tipo de sistemas cumple con nuestras hipótesis de trabajo ya que al ser un sistema aislado, satisface ser un espaciotiempo asintóticamente plano. Por otro lado, un sistema binario de agujeros negros también puede considerarse estacionario en el infinito pasado, por lo tanto puede elegirse  $\sigma(u_B = -\infty) = 0$ .

Dado que los sistemas binarios de agujeros negros pueden alcanzar hasta 1,33 % de la velocidad de la luz en el caso de binarias con órbitas cuasicirculares y espines precesando [27], o hasta un 9 % de la velocidad de la luz para binarias en colisión frontal [28], necesitamos agregar más precisión a nuestras ecuaciones incluyendo los términos lineales en la velocidad del centro de masa. También agregaremos los términos de la forma  $\sigma^2 R$  para contemplar las contribuciones provenientes de movimientos significativos en el centro de masa. Los escenarios donde esta última consideración serán más importante son las configuraciones con masas muy desiguales.

Si recordamos la expresión para el momento dipolar másico y el momento angular (3.50),

$$D_i^* + \frac{i}{c} J_i^* = \frac{1}{8\pi\sqrt{2}} \oint Y_{1i}^{*-1}(\xi, \bar{\xi}) \left[ \frac{2\psi_1^{*0} - 2\sigma^{*0}\bar{\sigma}^{*0} - \bar{\sigma}^*(\sigma^{*0}\bar{\sigma}^{*0})}{Z'^3} \right], \quad (4.1)$$

donde para integrar esta expresión hemos hechos la simplificación de velocidades bajas e ignorado el jacobiano proveniente de integrar en la variable  $\xi^*$ . Esto es, la integración fue hecha considerando un corte de Bondi con área unitaria. Sin embargo, como ahora nos interesa considerar una foliación con velocidad  $V(u, \xi, \bar{\xi})$  con respecto a una foliación de Bondi, necesitamos escribir la ley de transformación de  $Y_{1i}^{*-1}(\xi, \bar{\xi})$ , o lo que es lo mismo, el vector  $\bar{m}_i^*$ .

El vector  $\bar{m}^i$  transforma acorde a las transformaciones nulas vistas en la sección [1.4],

$$Y_{1i}^{*-1}(\xi, \bar{\xi}) = e^{-i\lambda} [Y_{1i}^{-1}(\xi_B, \bar{\xi}_B) + \bar{a} Y_{1i}^0(\xi, \bar{\xi})], \quad (4.2)$$

con

$$a = \frac{2\bar{\sigma}_B \dot{T}}{\dot{T}} \approx 2\sqrt{2} V^i Y_{1i}^{-1}, \quad (4.3)$$

el parámetro del grupo de las rotaciones de Lorentz que hemos aproximado a primer orden multipolar. De esta manera, las ecuaciones de evolución toman la forma

$$\begin{aligned}\dot{D}^i &= \sqrt{2}P^i + \frac{3}{7}\frac{c^2}{\sqrt{2}G}[(\dot{\sigma}_R^{ijk}\sigma_R^{jk} - \sigma_R^{ijk}\dot{\sigma}_R^{jk})] \\ &+ \frac{3}{7}\frac{c^2}{\sqrt{2}G}[(\dot{\sigma}_I^{ijk}\sigma_I^{jk} - \sigma_I^{ijk}\dot{\sigma}_I^{jk})],\end{aligned}\quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}J^i &= \frac{c^3}{5G}(\sigma_R^{kl}\dot{\sigma}_R^{jl} + \sigma_I^{kl}\dot{\sigma}_I^{jl})\epsilon^{ijk} \\ &+ \frac{9c^3}{7G}(\sigma_R^{klm}\dot{\sigma}_R^{jlm} + \sigma_I^{klm}\dot{\sigma}_I^{jlm})\epsilon^{ijk},\end{aligned}\quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}\dot{M} &= -\frac{c}{10\sqrt{2}G}(\dot{\sigma}_R^{ij}\dot{\sigma}_R^{ij} + \dot{\sigma}_I^{ij}\dot{\sigma}_I^{ij}) \\ &- \frac{3c}{7\sqrt{2}G}(\dot{\sigma}_R^{ijk}\dot{\sigma}_R^{ijk} + \dot{\sigma}_I^{ijk}\dot{\sigma}_I^{ijk}),\end{aligned}\quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}\dot{P}^i &= \frac{2c^2}{15\sqrt{2}G}\dot{\sigma}_R^{jl}\dot{\sigma}_I^{kl}\epsilon^{ijk} - \frac{\sqrt{2}c^2}{7\sqrt{2}G}(\dot{\sigma}_R^{jk}\dot{\sigma}_R^{jk} + \dot{\sigma}_I^{jk}\dot{\sigma}_I^{jk}) \\ &+ \frac{3c^2}{7\sqrt{2}G}\dot{\sigma}_R^{jlm}\dot{\sigma}_I^{klm}\epsilon_{ijk},\end{aligned}\quad (4.7)$$

con las ecuaciones para el centro de masa y momento angular intrínseco

$$\begin{aligned}D^i &= MR^i + \frac{1}{c^2}\epsilon^{ijk}V^jS^k - \frac{8}{5\sqrt{2}c}P^j\Delta\sigma_R^{ij} \\ &- \frac{c^2}{G}\epsilon^{ijk}\left(\frac{4}{5}\sigma_I^{jl}\sigma_R^{kl} - \frac{36}{7}\sigma_I^{klm}\sigma_R^{jlm}\right),\end{aligned}\quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}J^i &= S^i + \epsilon^{ijk}R^jP^k \\ &- \frac{151c^2}{168\sqrt{2}G}(\sigma_R^{ijk}\sigma_I^{jk} - \sigma_I^{ijk}\sigma_R^{jk}),\end{aligned}\quad (4.9)$$

y las ecuaciones de movimiento del centro de masa

$$MV^i = P^i - \frac{1}{c^2} \epsilon^{ijk} (V^j S^k)' + \frac{8}{5\sqrt{2}c} \Delta P^j \sigma_R^{ij'} - \frac{36c^2}{7G} \epsilon^{ijk} (\sigma_I^{klm} \sigma_R^{jlm})' \quad (4.10)$$

$$MV^{i'} = \frac{2c^2}{15G} \sigma_I^{kl'} \sigma_R^{j'l'} \epsilon^{ijk} - \frac{\sqrt{2}c^2}{7G} (\sigma_R^{jk'} \sigma_R^{ijk'} + \sigma_I^{jk'} \sigma_I^{ijk'}) + \frac{3c^2}{7G} \sigma_R^{jlm'} \sigma_I^{klm'} \epsilon_{ijk} - \frac{1}{Mc^2} \epsilon^{ijk} P^j S^{k''} + \frac{8}{5\sqrt{2}c} \Delta P^j \sigma_R^{ij''} - \frac{36c^2}{7G} \epsilon^{ijk} (\sigma_I^{klm} \sigma_R^{jlm})'' \quad (4.11)$$

La idea principal de este capítulo será entonces dar datos iniciales para resolver las Ecs. (4.4)-(4.7), asumiendo que antes de que la radiación gravitacional sea emitida, la línea de mundo del centro de masa es el origen del sistema de coordenadas de Bondi. Una vez que las identidades de Bianchi han sido resueltas, introducimos nuestro procedimiento perturbativo que preserva el orden de las ecuaciones y resuelve algebraicamente para las variables  $R^i$  y  $S^j$ .

## 4.2. Obtención del *shear* gravitacional

Notemos que las ecuaciones de movimientos están escritas en términos de la deformación de Bondi mientras que la radiación gravitacional en el catálogo del RIT viene dada a través del escalar  $\psi_4^0$ . En relatividad numérica es común expandir este escalar en la base de esféricos armónicos espinoriales  ${}_{(s)}Y_{lm}$ , con  $s, l, m$  números enteros que caracterizan las propiedades del esférico armónico. Entonces

$$\psi_4^0 = \sum_{l,m} \Psi^{lm} {}_{(-2)}Y_{lm}. \quad (4.12)$$

Aquí  $\Psi^{lm}$  representa los modos multipolares de radiación provenientes de las ondas gravitacionales en el infinito nulo. En la práctica, las cantidades  $\Psi^{lm}$  para cada valor de  $l$  y  $m$ , serán arreglos bidimensionales con una columna para la evolución temporal y otra para los valores de  $\Psi^{lm}$  en cada tiempo. Estos valores están almacenados en archivos de datos que han generados las simulaciones numéricas de binarias de

agujeros negros con distintas configuraciones iniciales.

Conociendo la solución asintótica para  $\sigma^0$  de (1.73), podemos escribir entonces

$$\ddot{\sigma}^0 = - \sum_{l,m} \Psi^{lm}_{(-2)} Y_{lm}. \quad (4.13)$$

Luego de integrar dos veces esta ecuación con respecto al tiempo podemos obtener la parte imaginaria y real de la deformación gravitacional que necesitan nuestras ecuaciones. Debido a que nuestras ecuaciones de evolución están escrita en términos de la base de esféricos armónicos tensoriales, necesitamos las leyes de transformación entre ambas bases  ${}_{(s)}Y_{lm}$  y  $Y_{l,I_l}^s$ .

Dada una función  $f$  regular en la esfera de peso de espín  $s$ , esta puede ser expandida de la forma

$$f = \sum_{l=|s|}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm(s)} Y_{lm}, \quad (4.14)$$

o también como

$$f = \sum_{l=|s|}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f^{I_l} Y_{l,I_l}^s. \quad (4.15)$$

Es decir que podemos escribir también una base completa en términos de la otra,

$$Y_{l,I_l}^s = \sum_m K_{I_l}^m {}_{(s)}Y_{lm} \quad (4.16)$$

y encontrar los coeficientes  $K_{I_l}^m$  usando la ortonormalización de los  ${}_{(s)}Y_{lm}$ . Entonces,

$$K_{I_l}^m = \int_{S^2} Y_{l,I_l}^s {}_{(s)}Y_{lm} dS. \quad (4.17)$$

Si ahora tomamos  $f = \sigma^0$ , podemos escribir las relaciones para encontrar  $\sigma^{ij}$  y  $\sigma^{ijk}$ , requeridas por nuestras ecuaciones de movimiento. Explícitamente, las relacio-

nes son

$$\ddot{\sigma}^{xy} = -\frac{i}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(\Psi^{22} - \Psi^{2-2}), \quad (4.18)$$

$$\ddot{\sigma}^{xx} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(\Psi^{2-2} + \Psi^{22}) + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\Psi^{20}, \quad (4.19)$$

$$\ddot{\sigma}^{yy} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(\Psi^{2-2} + \Psi^{22}) + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\Psi^{20}, \quad (4.20)$$

$$\ddot{\sigma}^{yz} = \frac{i}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(\Psi^{2-1} + \Psi^{21}), \quad (4.21)$$

$$\ddot{\sigma}^{xz} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(\Psi^{21} - \Psi^{2-1}), \quad (4.22)$$

y

$$\ddot{\sigma}^{xxx} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{7}{5\pi}}(\Psi^{3-1} - \Psi^{31}) + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{7}{3\pi}}(\Psi^{33} - \Psi^{3-3}) \quad (4.23)$$

$$\ddot{\sigma}^{xyy} = \frac{1}{24}\sqrt{\frac{7}{5\pi}}(\Psi^{3-1} - \Psi^{31}) - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{7}{3\pi}}(\Psi^{33} - \Psi^{3-3}) \quad (4.24)$$

$$\ddot{\sigma}^{yyy} = -\frac{i}{8}\sqrt{\frac{7}{5\pi}}(\Psi^{3-1} + \Psi^{31}) - \frac{i}{8}\sqrt{\frac{7}{5\pi}}(\Psi^{33} + \Psi^{3-3}) \quad (4.25)$$

$$\ddot{\sigma}^{xxy} = -\frac{i}{24}\sqrt{\frac{7}{5\pi}}(\Psi^{3-1} + \Psi^{31}) + \frac{i}{8}\sqrt{\frac{7}{5\pi}}(\Psi^{33} - \Psi^{3-3}) \quad (4.26)$$

$$\ddot{\sigma}^{xxz} = -\frac{1}{12}\sqrt{\frac{7}{2\pi}}(\Psi^{32} + \Psi^{3-2}) + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{15\pi}}\Psi^{30} \quad (4.27)$$

$$\ddot{\sigma}^{yyz} = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{7}{2\pi}}(\Psi^{32} + \Psi^{3-2}) + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{15\pi}}\Psi^{30} \quad (4.28)$$

$$\ddot{\sigma}^{xyz} = \frac{i}{12}\sqrt{\frac{7}{2\pi}}(\Psi^{3-2} - \Psi^{32}). \quad (4.29)$$

Los tensores de orden  $l = 4$ ,  $\sigma^{ijkl}$ , y en general cualquier tensor de orden  $l$ , también puede obtenerse mediante este método. Aquí solo hemos escrito los tensores necesarios para resolver nuestras ecuaciones a orden octupolar.

### Integración numérica de los modos de radiación

Notamos que la Ec. (4.13) requiere una doble integración numérica del escalar  $\Psi_4$  para la obtención de  $\sigma^0$ .

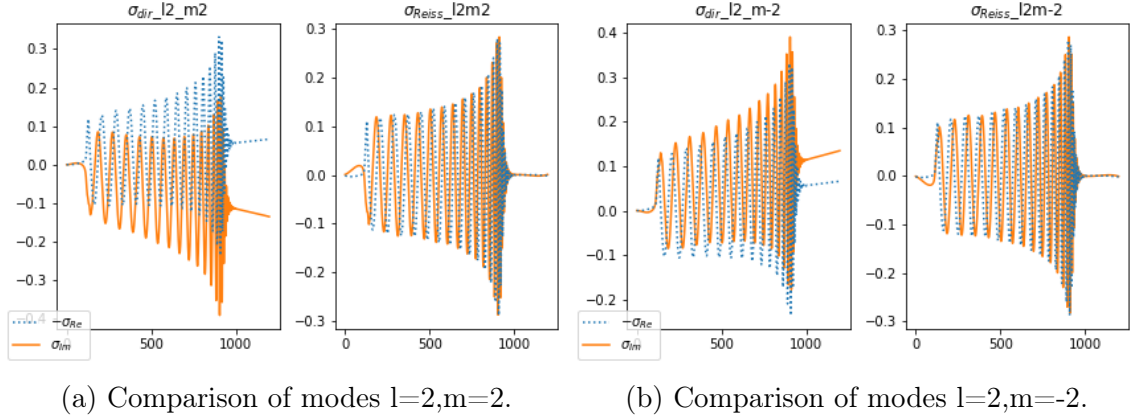


Figura 4.1: Integración de los modos  $l = 2$  de la simulación n<sup>o</sup>14 del catálogo de Rochester, que dan la mayor contribución gravitacional. A la izquierda,  $\sigma_{dir}$  se muestra el gráfico obtenido de hacer la integración directamente. A la derecha,  $\sigma_{Reiss}$  se muestra el gráfico obtenido luego de utilizar el código de Reisswig.

Esta integración sin embargo no puede hacerse de forma directa ya que aparece un desvío no lineal de  $\sigma$  como efecto secundario. Este efecto tiene su origen en las rápidas oscilaciones que presenta el escalar  $\Psi_4$  en las simulaciones numéricas cerca de la coalescencia. Los errores de integración se acumulan rápidamente sumando una contribución no lineal a la radiación. Por otro lado, también hay desvíos lineales que afectan la integración y provienen de los datos iniciales  $\sigma_B$  y  $\dot{\sigma}_B$ , que deben ser dados como condición inicial en las integraciones. Estos desvíos pueden producir hasta variaciones en el orden de  $\approx 0,2$  en la componente de radiación de mayor contribución,  $\sigma_{22}$ . Dado que la contribución gravitacional aparece en términos cuadráticos en las ecuaciones de movimiento, la variación es del orden de hasta  $\approx 0,04$ .

Las desviaciones en la integración numérica deben ser corregidas para obtener más precisión en la deformación gravitacional  $\sigma$ , y por ende en las ecuaciones finales. Por ello, hemos implementado el código PYGWANALYSIS[29] el cual resuelve los problemas de integración numérica implementando una transformación de Fourier con una función ventana y una frecuencia de *cutoff* para las frecuencias bajas (el *cutoff* es menor a todas las frecuencias físicas posibles). El código arroja como resultado final las polarizaciones lineal,  $h_+$ , y perpendicular,  $h_\times$ , de las cuales podemos obtener la deformación gravitacional  $\sigma^0$  a través de la relación  $\sigma^0 = -h$ . Aquí, las polarizaciones suma y cruz nos darán las componentes reales e imaginarias de la deformación gravitacional. En la Fig. [4.1] podemos visualizar los efectos de integrar directamen-



te en forma numérica vs. integrar con el código PYGWANALYSIS. Para conocer más sobre el código el lector puede consultar [30].

### Ondas viajeras en los datos del catálogo

Otro problema con el que lidiamos a la hora de evolucionar las ecuaciones de movimiento es la ráfaga o explosión inicial espuria que presentan las simulaciones del catálogo.

En la fig. [4.2] graficamos la evolución de la cantidad  $\Psi_4^0 \bar{\Psi}_4^0$  de la simulación n<sup>o</sup>443 a modo demostrativo. Para calcular el valor absoluto de  $\Psi_4^0$  todas las contribuciones provenientes de los modos  $l = 2$  y  $l = 3$  deben ser sumadas. De esta forma, podemos visualizar que al principio de esta simulación existe una explosión de radiación, la cual no tiene relación física con la coalescencia.

Por otro lado, en la fig. [4.3] podemos ver la evolución del momento de Bondi de la simulación n<sup>o</sup>443 del catálogo. La evolución se muestra en un sistema de Bondi cuyo origen es en el centro de masa, inicialmente en reposo. Luego de la ráfaga inicial, el momento deja de ser nulo y permanece constante hasta que el sistema binario empieza a emitir ondas gravitacionales. Finalmente, el momento lineal de Bondi es constante y no nulo. Como la ráfaga inicial de radiación es un efecto numérico en general no deseado, corremos el código una vez alcanzado el tiempo de relajación y antes de la coalescencia de las binarias de agujeros negros. Entonces, reiniciamos el tiempo y elegimos otro sistema de Bondi en reposo con el centro de masa de la simulación luego de la ráfaga inicial espuria de las simulaciones.

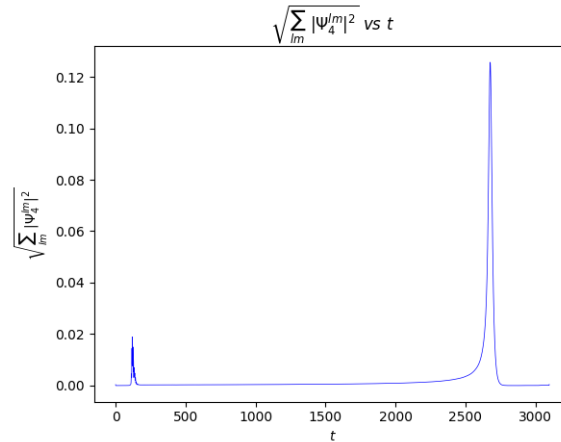


Figura 4.2: Evolución de la radiación gravitacional para la simulación n<sup>o</sup>443

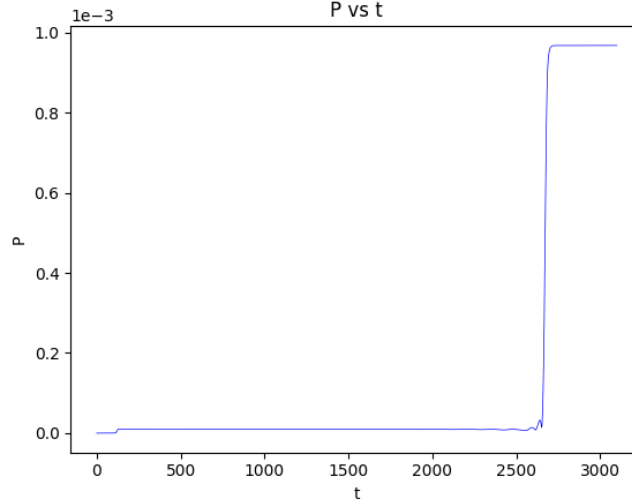


Figura 4.3: Evolución temporal del valor absoluto del momento de Bondi. La figura muestra un pequeño cambio de 0 a 500 debido a la explosión inicial.

### 4.3. Análisis de los Resultados

Para realizar el análisis de la física de nuestra formulación, comenzamos la integración numérica de las cantidades  $\dot{M}$ (4.4),  $\dot{P}$ (4.7),  $\dot{D}$ (4.4),  $\dot{J}$ (4.5), donde los datos iniciales para estas cantidades son tomadas de los metadatos que se encuentran en el catálogo de simulaciones.

Las ondas aisladas iniciales o explosión inicial sin relevancia física (ver sección anterior) que están presentes en la integración numérica son corregidas previamente encontrando el tiempo de relajación (tiempo en que la radiación espuria se ha desvanecido) y luego quitando la contribución de esta onda a la radiación en el infinito nulo. Escencialmente, esto se traduce en resetear el tiempo inicial a el tiempo de relajación de la simulaciones y luego utilizar los datos iniciales del catálogo de Rochester para las ecuaciones de evolución. Nuestro sistema de Bondi es tal que en el tiempo de relajación el origen de nuestras coordenadas está en el centro de masa, que se encuentra en reposo en ese tiempo. El tiempo inicial es reiniciado a cero en este punto.

Luego de calcular estas ecuaciones, resolvemos algebraicamente los siguientes siste-

mas.

$$MR^i + c^{-2}\epsilon^{ijk}\frac{P^j}{M}S^k = D^i + \frac{8}{5\sqrt{2}c}P^j\Delta\sigma_R^{ij} + \frac{c^2}{G}\epsilon^{ijk}\left(\frac{4}{5}\sigma_I^{jl}\sigma_R^{kl} - \frac{36}{7}\sigma_I^{klm}\sigma_R^{jlm}\right) \quad (4.30)$$

and

$$S^i + \epsilon^{ijk}R^jP^k = J^i + \frac{151c^3}{168\sqrt{2}G}(\sigma_I^{jk}\sigma_R^{ijk} - \sigma_I^{ijk}\sigma_R^{jk}). \quad (4.31)$$

Finalmente, encontramos las velocidades y aceleración del centro de masa. Siguiendo las mismas convenciones del repositorio de Rochester, hemos agrupado los resultados numéricos en diferentes clases, dependiendo de las masas relativas de los agujeros negros y dependiendo también de su espín. De esta forma, llamaremos **EM** (*equal masses*) a las simulaciones con dos agujeros negros de igual masa ( $q = 1$ ) o **NEM** (*non equal masses*) a las simulaciones con dos agujeros negros de distintas masa. Similarmente, llamaremos a las simulaciones con agujero negro no rotantes **NS** (*non spinning*), a las simulaciones con espines alineados con el momento angular orbital **A** (*aligned*), y a las simulaciones con espines no alineados con el momento angular orbital **P** (*precessing*). Notemos aquí la distinción hecha entre las dos clases **EM** y **NEM** de simulaciones. Nos interesa estudiar particularmente el comportamiento del centro de masa gravitatorio para el caso simétrico de dos agujeros negros con masas iguales y corroborar si la radiación gravitatoria afecta al centro de masa del sistema o lo mantiene inmóvil como sucede en la mecánica Newtoniana.

Estudiaremos en las próximas secciones la posición del centro de masa, su velocidad, aceleración y también la distribución de estas cantidades a lo largo de las distintas simulaciones. También el momento angular intrínseco definido a partir del centro de masa. En particular, nos interesará analizar los valores numéricos de nuestras cantidades físicas definidas a partir del infinito nulo y por medio de los Linkages de Winicour.

Estudiaremos luego la relación de las cantidades físicas finales y los parámetros iniciales de las simulaciones, tales como la relación entre la energía total radiada y el momento angular total inicial  $J_{in}$  o el cociente de masas  $q$ . Es importante distinguir entre dos conjuntos de variables en este estudio. El primero, las variables globales, son bien definidas en nuestro formalismo y pueden construirse a partir del infinito nulo sin conocimiento de las masas de los agujeros negros, espines y momento angular orbital. Basta conocer la radiación gravitacional que arriba al infinito solamente. El segundo conjunto de parámetros corresponde a los parámetros locales

que componen las condiciones iniciales en el catálogo de Rochester. En este conjunto se encuentran los espines iniciales de cada agujero negro, las masas y el momento angular orbital de las binarias de agujeros negros. Conocer este segundo conjunto es de suma importancia para entender las características propias del sistema aislado en cuestión y entenderla en términos de la radiación gravitacional que generan. Aún más, es importante entender la relación entre ambos tipos de variables para obtener una mejor comprensión de la estructura global del espaciotiempo.

### 4.3.1. Distribución de resultados

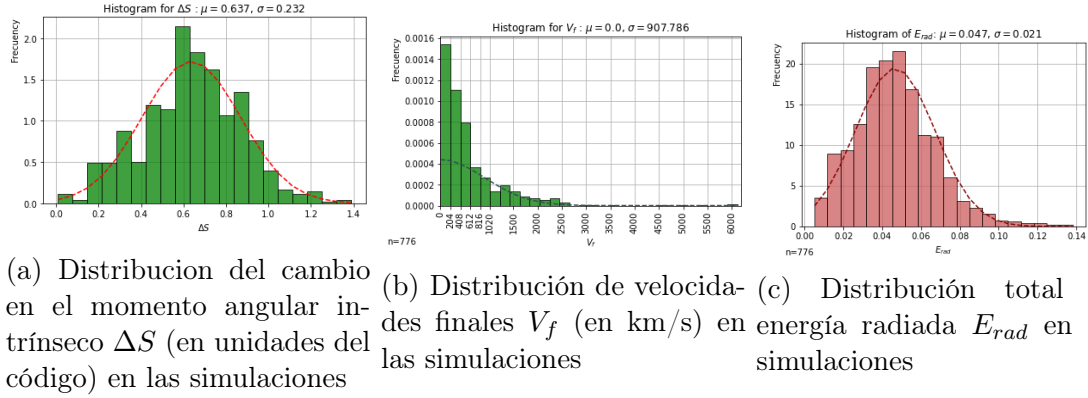


Figura 4.4: Distribución de las principales variables de interés para todas las simulaciones.

Hemos hecho un resumen de los resultados obtenido tras usar las Ecs. (4.4)-(4.7) en las Figs. [4.4a]-[4.4b]. Estas distribuciones nos dan un idea general de la energía radiada  $E_{rad}$ , la velocidad final del centro de masa  $V_f$  y la variación del momento angular intrínseco  $\Delta S$  para el total de las simulaciones. Las distribuciones fueron normalizadas y luego ajustadas a una Gaussiana para entender su comportamiento en términos de la media y dispersión de las variables físicas obtenidas de las simulaciones. Podemos ver en estas distribuciones que, por ejemplo, la velocidad del centro de masa para la mayor parte de las simulaciones es menor a  $\approx 1000 \text{ km/s}$  (Fig. [4.4b]). Trataremos de entender este tipo de cuestiones en términos de las variables locales del sistema de agujeros negros.

Recordemos que nuestro formalismo está descrito en términos del tiempo de Bondi. Con motivo de comparación dividimos las cantidades que provienen de derivadas, como la velocidad del centro de masa  $V_f$ , por un factor  $\sqrt{2}$  que contemplará

la transformación desde el tiempo de Bondi  $u$  al tiempo estandar  $t$ . El factor  $\sqrt{2}$  proviene de la relación  $\frac{t-r}{\sqrt{2}}$ .

En la Fig. [4.4c], hemos graficado la distribución de energía radiada en todas las simulaciones. Para ello, definimos la energía total irradiada como

$$E_{rad} = 1 - \frac{M_f}{M_i}, \quad (4.32)$$

donde  $M_i$  es la masa inicial de ADM de las binarias de agujeros negros y  $M_f$  es la masa de Bondi final del remanente obtenida por la Ec. (4.6). Notemos aquí la diferencia entre la masa final usada en este trabajo y la masa de Christodoulou usada comunmente en la literatura de relatividad numérica. La distribución de energía radiada para nuestro conjunto de soluciones varia en el rango  $\sim 0 - 13\%$  y la media de energía radiada es de  $4,7\%$  con una desviación estandar de  $2,1\%$ .

La definicion (4.32) es directamente proporcional al pico de energía  $\dot{M}_{max}$  o, equivalentemente, la luminosidad máxima de la fuente. Esto es, a mayor la energía total radiada en una simulación, mayor será el valor absoluto de la máxima pérdida de energía. En la Fig. [4.5], hemos mostrado esta proporcionalidad y vemos que puede explicarse por la relación  $E_{rad} = a\dot{M}_{max}$  con una constante,

$$a = 41,348 \pm 0,194. \quad (4.33)$$

Esta relación de proporcionalidad puede hacerse aún más precisa si nos restringimos a un cociente de masas específico  $q$ , como puede apreciarse en la Fig. [4.5]. Teniendo este resultado en mente, las figuras presentes en este trabajo utilizando la variable  $E_{rad}$  no serán muy diferentes de aquellas figuras utilizando  $\dot{M}_{max}$ . Esta relación de proporcionalidad es una característica de los sistemas binarios de agujeros negros y no será válida en general para cualquier sistema astrofísico.

Para terminar esta sección, mostramos una descripción general de la distribución de energía irradiada en términos del momento angular total  $J_{in}$  para todas las simulaciones en la Fig. [4.6]. El gráfico muestra una relación no lineal entre ambas variables y dependiente de los parámetros locales de cada simulación. Esta relación será analizada particularmente para cada categoría de simulaciones hecha. El modelo para entender el comportamiento de la energía radiada con respecto al momento angular total inicial es desarrollado en el Apéndice C. Este modelo tiene un origen Post-Newtoniano. De este modo, contrastaremos la evolución numérica de las variables, de un origen asintótico, con el modelo PN que vincula las variables locales con la dinámica del sistema.

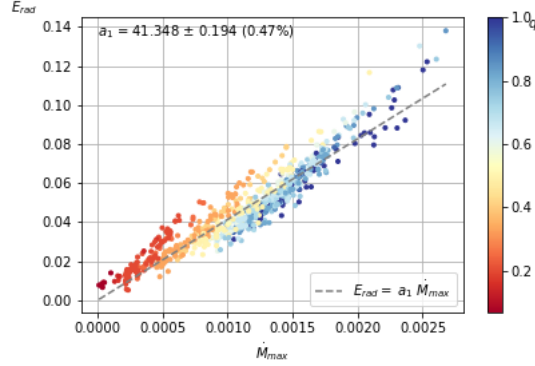


Figura 4.5: Correlación entre la energía total radiada  $E_{rad}$  y el pico de pérdida de energía  $\dot{M}_{max}$  para todas las simulaciones. La línea punteada roja representa el ajuste a los datos. La barra de colores indica el valor del cociente de masas entre las binarias,  $q = m_1/m_2$ .

### Binarias sin espines

En esta sección haremos el análisis del grupo de simulaciones sin espines iniciales. Este grupo de binarias son las que presentan la física más sencilla ya que el espacio de parámetros iniciales tiene la dimensión más baja.

Como primer paso, calculamos las correlaciones de la velocidad final y la luminosidad gravitacional máxima del sistema binario para un dado valor del cociente de masas  $q$ . La pérdida de radiación gravitacional es calculada a través de la Ec. (4.6) y está directamente relacionada a la luminosidad gravitacional a través de la integración de esta sobre una superficie de área muy lejos de la fuente.

Dado que la luminosidad es una cantidad final que puede ser usualmente medida, es relevante saber si existe una relación entre la radiación por unidad de tiempo y el cociente de masas  $q$ . De la misma manera, asumiendo que la velocidad final del centro de masas puede ser observada, la correlación con el cociente  $q$  también puede brindar información relevante sobre la coalescencia.

Las correlaciones entre  $V_f$ ,  $q$  y  $\dot{M}_{max}$  son mostradas en la Fig. [4.7]. Para modelar la velocidad final del centro de masa hemos tomado el modelo de Fitchett para órbitas circulares propuesto en [31], cuya dependencia con  $q$  es

$$V_f(q) = a \frac{q^2(1-q)}{(1+q)^5}. \quad (4.34)$$

con  $a$  una constante a ajustar. Calculamos  $a$  a través del método de mínimos cuadra-

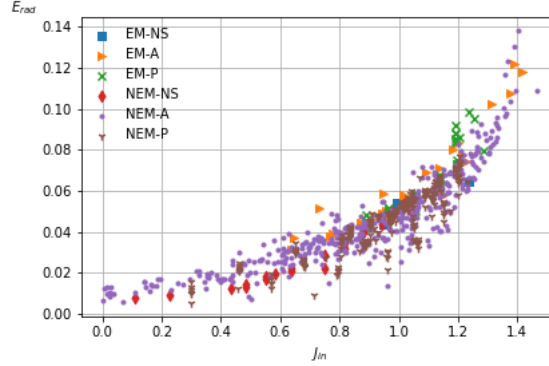


Figura 4.6: Correlación entre la energía radiada durante toda la simulación  $E_{rad}$  y el momento angular inicial  $J_{in}$ . Cada punto representa una simulación distinta.

dos. El mejor ajuste a nuestros datos dan un coeficiente  $a = 16317,78 \pm 207,93 \text{ km/s}$ . La derivación de la Ec. (4.34) puede verse en el apéndice C.

Encontramos que la velocidad máxima del centro de masa  $V_f = 309,43 \text{ km/s}$  se alcanza para el valor  $q = 0,4$ . Por otro lado, se encuentran centros de masa con velocidades nulas en los casos límites  $q = 0$  o  $q = 1$ , es decir,  $m_1 = 0$  or  $m_1 = m_2$ . Estos resultados pueden verse en la Fig. [4.7]. En términos clásicos, cuando  $q = 0$ , el centro de masa se coincide con el centro de la masa  $m_2$ ; entonces, el centro de masa permanece inmóvil ya que  $m_1$  no contribuye a su movimiento. Similarmente, cuando  $q = 1$ , el centro de masa no se mueve debido a la simetría del problema y clásicamente uno esperaría que el centro de masa se encuentra en la distancia media entre las dos binarias.

Si bien los casos  $q = 0$  y  $q = 1$  producen velocidades nulas, la Fig.[4.7] muestra que las binarias con  $q = 0$  no tiene prácticamente pérdida de energía, mientras que aquellas con  $q = 1$  son los sistemas que presentan mayor radiación emitida. Así, los sistemas binarios sin espines con  $q = 1$  son los más factibles a ser detectables por sus luminosidades grandes, mientras que los valores intermedios de  $q$  son más probables de ser detectados por sus velocidades finales altas del remanente.

La otra relación explorada corresponde a la energía radiada en una simulación,  $E_{rad}$ , y el momento angular total inicial  $J_{in}$ . Para el grupo de las binarias NS, el gráfico se muestra en la Fig. [4.8].

La Fig.[4.8] fue ajustada con una curva de la forma

$$E_{rad} = b J_{in}^2, \quad (4.35)$$

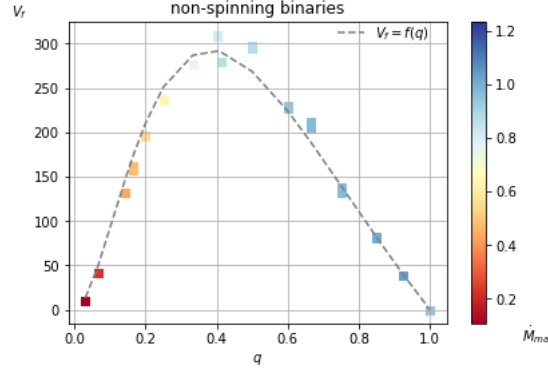


Figura 4.7: Correlación entre la velocidad final del centro de masa, el cociente de masas  $q$  y el pico de pérdida de energía gravitacional  $\dot{M}_{max}$ . La línea punteada muestra el ajuste del modelo de Fitchett.

con  $b = 0,050 \pm 0,001$ . El modelo ajustado en la Ec. (4.35) está motivada por la derivación hecha en el Apéndice C.

Similarmente, describimos la relación entre  $\dot{M}_{max}$  y  $q$ . El gráfico que relaciona ambas variables se encuentra en la Fig. [4.9] y la fórmula fenomenológica que contiene los dos parámetros a ajustar es derivada en el Apéndice C. Esta relación se lee,

$$\dot{M} = -\frac{A}{1000} \frac{q^2}{(1+q)^4} \left( 1 + \frac{B}{216} \left( \frac{1-q}{1+q} \right)^2 \right), \quad (4.36)$$

con  $A$  y  $B$  obtenidos a partir de los datos numéricos. Esta fórmula tiene un origen Post-Newtoniano y se deduce de esta misma que la luminosidad tiene un mínimo en  $q = 0$  y un máximo  $q = 1$ , es decir, las BBH con masas iguales producen las luminosidades máximas.

Los coeficientes encontrados para la fórmula (4.36) a través de mínimos cuadrados son

$$A = 22,44 \pm 0,06 \text{ (0,30 \%)} , \quad (4.37)$$

$$B = -159,00 \pm 4,74 \text{ (2,98 \%)} . \quad (4.38)$$

La relación (4.36) tiene la propiedad de ser inyectiva. Por ello, dados los coeficientes (4.37) y (4.38), es posible invertir la fórmula (4.36) y determinar qué cociente de masa  $q$  corresponde a esa luminosidad medida. En otras palabras, la información dinámica global es usada para obtener información local de los agujeros negros.



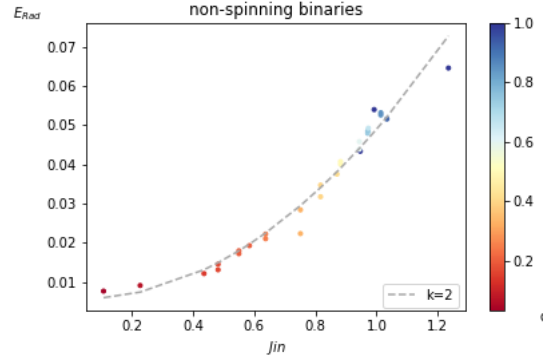


Figura 4.8: Correlación entre la radiación total emitida  $E_{rad}$  y el momento angular total inicial  $J_{in}$ . La barra de colores indica el cociente de masas  $q$  en cada simulación. La letra  $k$  indica el orden del polinomio ajustado.

### Binarias con espines alineados

En esta sección, analizaremos los sistemas de agujeros negros con espines alineados. Los espines iniciales en este tipo de configuración permanecen en la dirección del vector momento angular orbital que es escogido como eje  $z$ . Este tipo de configuración son conocidas por ser estables a lo largo de la evolución [32]. También se trata de escenarios más realistas y por ende más relevante para las aplicaciones astronómicas.

En la Fig. [4.10] comenzamos estudiando la dependencia de la velocidad final del centro de masa  $V_f$  con el cociente de masas inicial  $q$ . Las figuras [4.10a] y [4.10b] resaltan diferentes configuraciones iniciales para las distintas magnitudes y direcciones de los espines. Entre todas las 407 simulaciones alineadas, el valor absoluto de  $S_2$  toma los valores en el intervalo  $[0, 0.7]$  y el valor absoluto de  $S_1$  toma valores en el intervalo  $[0, 0.25]$ .

La Fig. [4.10a] muestra que la velocidad final del centro de masa más alta en la categoría de binarias de espines alineados  $V_f = 771,78 \text{ km/s}$  se alcanza para el cociente  $q = 0,6628$ . En el mismo gráfico, podemos apreciar que las velocidades máximas solo se pueden lograr para BBH con espines antialineados ( $\angle S_1 S_2 = \pi$ ). Esta propiedad ha sido reportada en otros trabajos [33, 34]. Por otro lado, no parece haber una imagen clara de la influencia entre la alineación del espín  $S_1$  y  $S_2$  en las velocidades finales más bajas. Además, puede verse en la Fig. [4.10b] que cuando el momento angular orbital inicial  $L_{in}$  está antialineado con el espín inicial  $S_2$  ( $\angle L_{in} S_2 = \pi$ ), se alcanzan velocidades finales más altas.

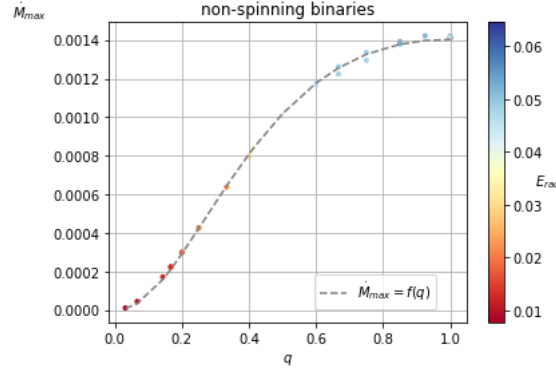
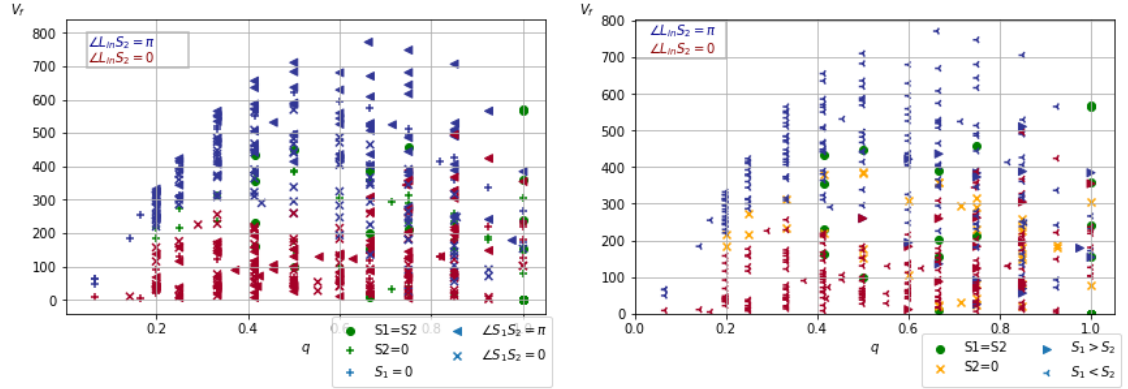


Figura 4.9: Correlación entre el pico de pérdida de energía  $\dot{M}_{max}$  y el cociente de masas  $q$ . La barra de colores indica el valor de la energía radiada que es proporcional al pico de pérdida de energía. La línea punteada muestra el ajuste del model a los datos.

En resumen, parece que los espines de valor absoluto más altos, en este caso  $S_2$ , deben estar antialineados con el momento angular orbital inicial  $L_{in}$  y el espín de menor valor absoluto, en este caso  $S_1$ , para lograr las velocidades máximas para el grupo alineado.

La correlación entre las velocidades finales  $V_f$  y la tasa máxima de pérdida de masa  $\dot{M}_{max}$  se muestra en la Fig.[4.11]. También se presenta un patrón similar discutido para las binarias NS (Sec. [4.3.1]). La máxima velocidad posible en términos de  $q$  tiene un máximo local (y absoluto) en  $q \sim 0,66$ . La velocidad final se anula en  $q = 0$ , alcanza un valor máximo y luego disminuye para valores cercanos a  $q = 1$ . Además, la pérdida de energía también se anula en  $q = 0$ . El caso de igual masa  $q = 1$  es bastante interesante. Como en el caso de **NS**, la máxima pérdida de energía y la velocidad final también se anulan en  $q = 1$ . Sin embargo, a diferencia del caso **NS**, ahora hay velocidades finales que no desaparecen en la configuración **EM-A**, una gran diferencia con el caso **NS**.

Luego, la relación de la pérdida de energía con respecto al momento angular total inicial  $J_{in}$  es analizada. En la Fig.[4.12], se muestra la dependencia entre el momento angular total inicial  $J_{in}$  y la energía radiada total  $E_{rad}$  para los rangos de masas:  $0 < q \leq 0,2$ ,  $0,2 < q \leq 0,4$ ,  $0,4 < q \leq 0,6$ ,  $0,6 < q \leq 0,8$  y  $0,8 < q \leq 1$ . Ajustamos un modelo polinomial cuadrático para cada rango que podría ser útil para estimar energía en escenarios astrofísicos o incluso para futuras comparaciones. Los coeficientes del ajuste para cada rango de masas puede encontrarse en la Tabla 4.1.



(a) Los colores rojo y azul indican la alineación del espín  $S_2$  con respecto al momento angular orbital  $L_{in}$ . Los colores verdes representan binarias cuya alineación  $S_2$  con respecto a  $L_{in}$  no se puede establecer ni diferenciar. Se utilizan diferentes marcadores para indicar el tipo de alineación entre los espines  $S_1$  y  $S_2$ .

(b) Los colores rojo y azul indican la alineación del espín  $S_2$  con respecto al momento angular orbital  $L_{in}$ . El color amarillo tiene  $S_2 = 0$  y por lo tanto no se puede establecer alineación con respecto a  $L_{in}$ . Los puntos verdes indican  $S_1 = S_2$ . Los marcadores indican qué masa posee el mayor espín en las simulaciones.

Figura 4.10: Correlación entre la velocidad final  $V_f$  y el cociente de masas  $q$  para binarias con espines alineados en la dirección del momento angular orbital.

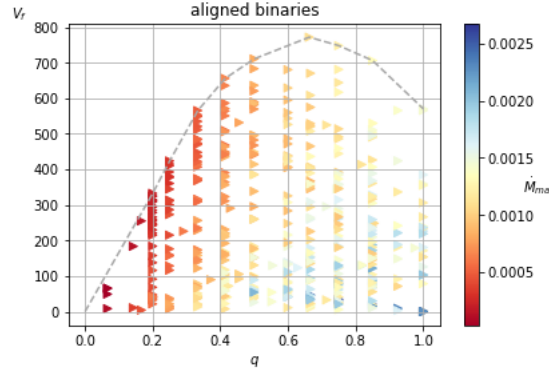


Figura 4.11: Correlación entre  $V_f$  y  $q$  para binarias alineadas. La barra de colores muestra los niveles de pérdida máxima de energía  $\dot{M}_{max}$ . La línea discontinua indica el límite fronterizo de las velocidades finales (en  $km/s$ ).

$q$	$a_0$	$a_1$	$a_2$
$0 < q \leq 0,2$	$0,037 \pm 0,016$	$-0,023 \pm 0,017$	$0,0095 \pm 0,0031$
$0,2 < q \leq 0,4$	$0,032 \pm 0,004$	$-0,007 \pm 0,005$	$0,0138 \pm 0,0013$
$0,4 < q \leq 0,6$	$0,093 \pm 0,009$	$-0,102 \pm 0,015$	$0,0553 \pm 0,0065$
$0,6 < q \leq 0,8$	$0,12 \pm 0,01$	$-0,156 \pm 0,019$	$0,082 \pm 0,009$
$0,8 < q \leq 1$	$0,149 \pm 0,014$	$-0,212 \pm 0,029$	$0,114 \pm 0,014$

Tabla 4.1: Coeficientes de polinomios de segundo grado ajustados en la Fig. [4.12]

Para finalizar el análisis de esta sección de las BBH con espines alineados, restringiremos nuestro análisis al caso de masas iguales  $q = 1$  y emplearemos el modelo de *Reisswig* de [35]. En este trabajo, los autores han demostrado que la energía radiada a través de ondas gravitatorias de binarias de igual masa con espines alineados puede estimarse mediante un polinomio cuadrático en el espín inicial promedio  $\bar{\chi} = (\chi_1 + \chi_2)/2$ , donde  $\chi_1$  y  $\chi_2$  son las proyecciones del espín inicial en la dirección  $L_{in}$ . El modelo se lee

$$E_{rad} = a_0 + a_1 \bar{\chi} + a_2 \bar{\chi}^2. \quad (4.39)$$

Nuestros ajustes a los datos proveen el siguiente vector de coeficientes

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,051 \pm 0,001 \\ 0,040 \pm 0,002 \\ 0,029 \pm 0,003 \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

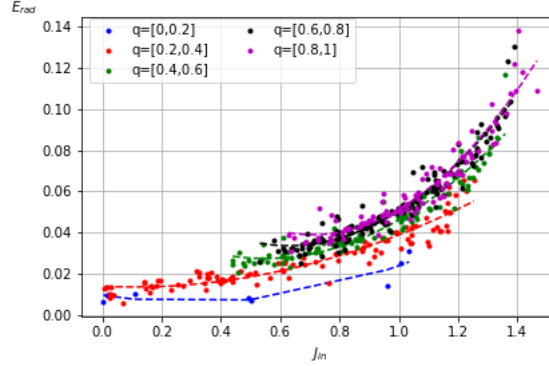


Figura 4.12: Correlación entre el momento angular total inicial  $J_{in}$  y la radiación total emitida  $E_{rad}$  para binarios alineados. Los intervalos de relación de masa se han dividido y seleccionado para ser estudiados y se ilustran con diferentes colores.

mientras que los coeficientes en [35] son

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,036 \pm 0,003 \\ 0,030 \pm 0,006 \\ 0,02 \pm 0,01 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Podemos ver en la Fig. [4.13] que hay una diferencia apreciable entre los polinomios. Esta diferencia podría atribuirse al hecho de que los parámetros para las simulaciones utilizadas difieren significativamente y, por lo tanto, el  $E_{rad}$  final también. En particular, no se hace mención al momento angular orbital inicial  $L_{in}$  utilizado en la Ref. [35], que puede causar estados finales distintos en la energía radiada para los mismos valores de los espines iniciales  $\chi_1, \chi_2$ . También podría explicarse este hecho si la energía radiada predicha para los BBH alineados en el marco de nuestra formulación fuera ligeramente superior a la energía radiada obtenida utilizando las cantidades locales, como la masa de Christodoulou en la relatividad numérica.

El mayor error del ajuste (4.40) se encuentra en el coeficiente de segundo orden y es de  $\sim 10\%$ . Estos coeficientes permiten encontrar la energía radiada máxima evaluando en el valor  $a = 1$  del polinomio obtenido y así encontramos  $E_{rad}(1) = 12,2\%$ . Este valor es más cercano a la energía máxima reportada  $E_{rad}^{max} = 11,3\%$  en [36] que  $E_{rad}^{max} = 9,9\%$  reportada en [35]. Nuestra energía máxima radiada cumple estar por debajo del valor  $E_{rad} \sim 14\%$  de [37], que ocurre en caso de una colisión frontal de dos agujeros negros **EM-NS**.

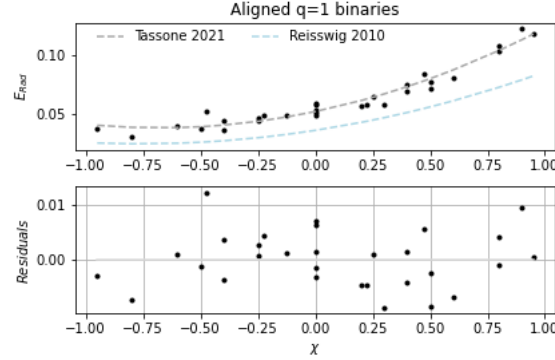


Figura 4.13: Correlación entre el espín total inicial  $\bar{\chi}$  y la radiación total emitida  $E_{rad}$ . La línea gris discontinua muestra el ajuste a nuestros datos y debajo sus residuos. La línea discontinua azul claro muestra el polinomio de Reisswig a modo de comparación.

### 4.3.2. Binarias con espines precesando

En esta sección proporcionaremos un análisis más profundo de los parámetros para el grupo de espines de precesión. Para este grupo de BBH, los espines iniciales  $S_1$  y  $S_2$ , en general, no estarán alineados en la dirección del eje  $\mathbf{L}_{in}$ . Se espera un comportamiento diferente con respecto a los grupos anteriores mencionados en las Secs. [4.3.1] y [4.3.1] ya que las configuraciones no alineadas presentan un comportamiento caótico [32].

Primeramente estudiamos, como en secciones anteriores, la dependencia de la velocidad final del centro de masa  $V_f$  con la relación de masas iniciales  $q$ . En la Fig. [4.14a] se puede apreciar que distribución de velocidad es esencialmente distinta con respecto a las otras clases **NS** y **A**. La diferencia más notable en el comportamiento de  $V_f$  es el logro de velocidades más altas para binarias de igual masa.

Por el contrario, la variable  $\dot{M}_{max}$  se comporta similar a las otras categorías y esto nos permite decir que para cualquier tipo de simulación los sistemas con  $q = 0$  no emiten energía mientras que con  $q = 1$  son los más energéticos. La diferencia entre las categorías radicará en los valores alcanzados dentro del rango  $[0, 1]$ . La tasa de pérdida de energía aumenta a medida que lo hace la relación de masa  $q$  entre las binarias.

La Fig. [4.14a] muestra  $E_{rad}$  frente al momento angular total inicial  $J_{in}$ . Utilizamos el modelo de polinomio cuadrático para ajustar los datos, también utilizado en las categorías de espines alineados y sin espín. La motivación del uso de este modelo puede verse en el Apéndice C. Los ajustes fueron hechos para cinco rangos de ma-

sas iniciales  $q$  diferentes. Los coeficientes de los polinomios se enumeran en la tabla 4.2. Aunque los polinomios de segundo grado pueden no ser los más adecuados para los datos, priorizamos su simplicidad para describir el comportamiento ascendente a primer orden de cada rango de masas en el grupo de precesión.

El rango de masas  $0 < q < 0,2$  se encuentra ausente en el gráfico [4.14a] debido a la falta de datos suficientes para proporcionar una curva representativa. A su vez, es interesante notar que el rango de masas  $0,2 < q < 0,4$  presenta un patrón regular con binarias por encima del ajuste y otras por debajo. Esto sugiere subdividir el rango en intervalos de masas más pequeños para los cuales el polinomio ajustaría el comportamiento con mucho mayor poder predictivo.

$q$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
$0,2 < q \leq 0,4$	$0,040 \pm 0,009$	$-0,020 \pm 0,014$	$0,017 \pm 0,005$
$0,4 < q \leq 0,6$	$0,070 \pm 0,013$	$-0,071 \pm 0,025$	$0,046 \pm 0,011$
$0,6 < q \leq 0,8$	$0,089 \pm 0,024$	$-0,097 \pm 0,048$	$0,059 \pm 0,024$
$0,8 < q \leq 1$	$0,180 \pm 0,038$	$-0,271 \pm 0,081$	$0,143 \pm 0,041$

Tabla 4.2: Coeficientes de los polinomios ajustados de segundo grado.

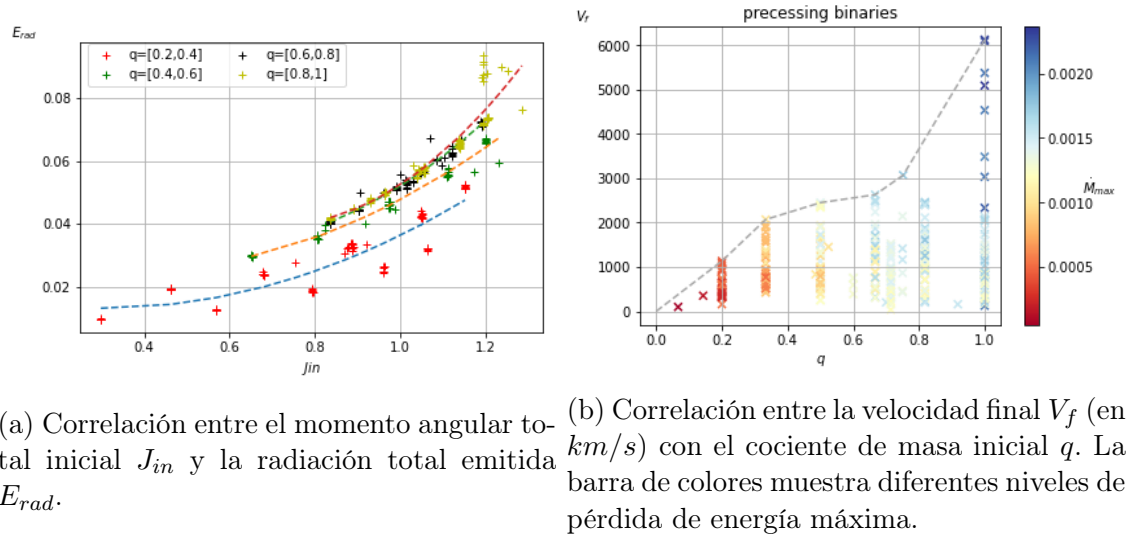
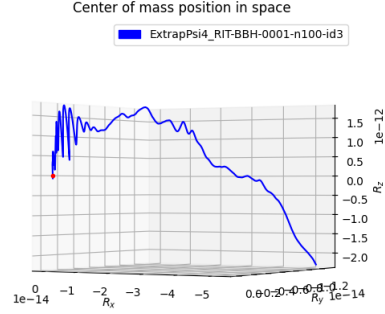
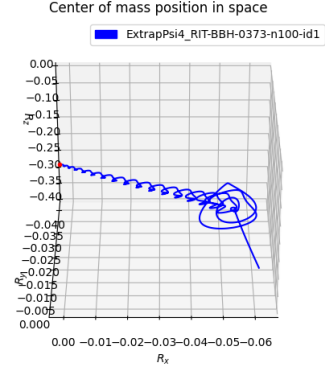


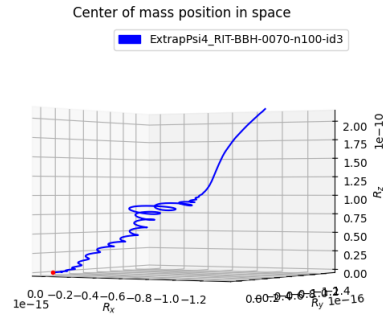
Figura 4.14: Correlación entre las variables finales globales e iniciales locales para las binarias de precesión.



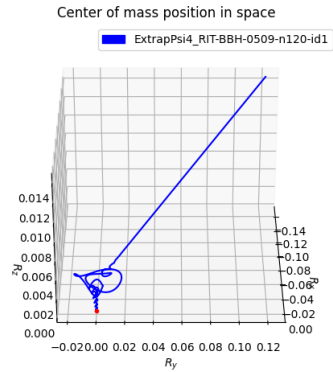
(a) 0001-EM-NS



(b) 0373-NEM-NS



(a) 0070-EM-A



(b) 0509-NEM-A

### 4.3.3. Cinemática del Centro de Masa

Graficamos la trayectoria del centro de masa obtenida de la Ec.(4.8) para algunas simulaciones representativas de cada categoría **EM**: **NS,A,P** y **NEM**: **NS,A,P**.

La evolución del centro de masa en el espacio tridimensional puede verse en las Figs. [4.15a, 4.15b, 4.16a, 4.16b, 4.17a, 4.17b] y el punto de comienzo de las simulaciones ha sido identificado con un punto rojo.

El primer gráfico de la Fig. [4.15a] muestra el movimiento del centro de masa para dos BH con masas iguales ( $m_1 = m_2 = 0,5$ ). Es interesante ver que el centro de masa reproduce el compartamiento Newtoniano para dos cuerpos orbitando con masas idénticas. Esto es, el centro de masa permanece inmóvil o con movimientos del orden de  $\approx 10^{-13}$ , los cuales son despreciables. Su velocidad final  $V_f$  también es nula dado nuestro análisis de la Sec. 4.3.1.



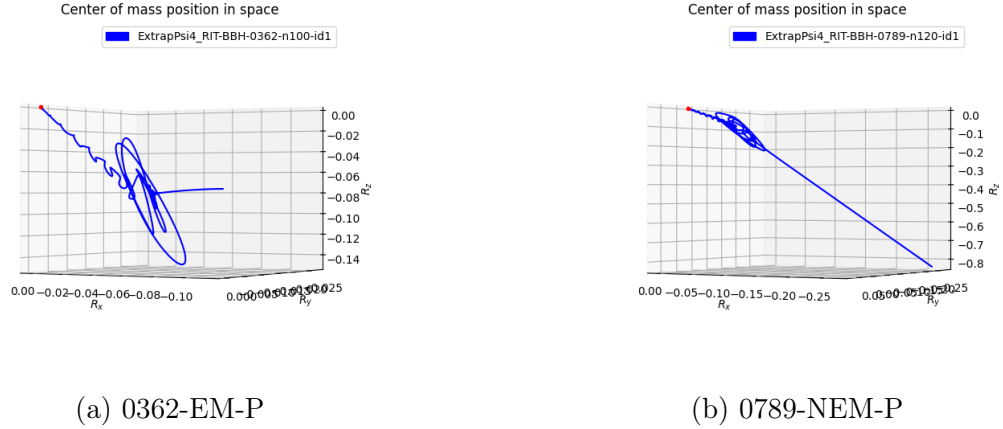


Figura 4.17: Evolución del centro de masa para binarias de agujeros negros de cada categoría. El punto rojo especifica el punto de inicio del centro de masa y el número sobre el gráfico indica la simulación del catálogo RIT donde se ha tomado el valor de  $\psi_4$ .

Por otro lado, si miramos las simulaciones sin espines y con masas desiguales **NEM-NS**, el centro de masa presenta un movimiento espiral regular hasta la coalescencia, donde las órbitas se vuelven más inestables en el eje alineado con el momento angular orbital  $\mathbf{L}$ . Luego de la fusión, el centro de masa sale eyectado a una velocidad final de  $5,5 \times 10^{-4}$  o  $165 \text{ km/s}$ . El movimiento espiral en los principios de la evolución se debe exclusivamente a la diferencia de masas entre las dos componentes. Este comportamiento desaparece o es despreciable en casos de simetría como se puede comparar en las Figs. [4.15a, 4.15b].

En la Fig.[4.16a], se muestra el centro de masas para dos agujeros negros de masas iguales y espines alineados con el momento angular orbital  $\mathbf{L}$ . El centro de masa permanece prácticamente inmóvil a lo largo de toda la simulación, similar al caso **EM-NS**, y su velocidad final también es casi nula. La Fig. [4.15b] muestra el caso para masas desiguales, nuevamente se aprecia la trayectoria en forma de espiral del centro de masa hasta la coalescencia donde luego se aleja de la posición inicial con un movimiento uniforme.

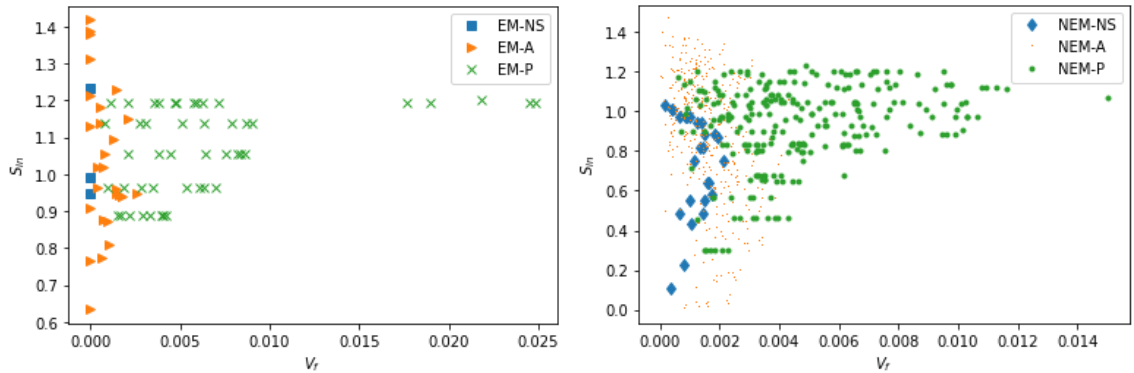
Hasta aquí podemos apreciar que la posición del centro de masa en presencia de radiación es mayormente dominada por el cociente de masas  $q$ . En efecto, los casos de masas iguales muestran trayectorias similares y con velocidades finales  $V_f \approx 0$  independientemente de la presencia de espines alineados o no. Esto sugiere que las configuraciones **A** o **NS** son estables. Lo contrario sucede cuando  $q \neq 0$ , en este caso

las velocidades finales del centro de masa son apreciables.

Para los sistemas con espines precesando la situación es distinta, como se visualiza en las Figs.[4.17a,4.17b]. La interacción de los espines con la radiación gravitacional permite al centro de masa alcanzar velocidades más elevadas, siendo las velocidades finales de las Fig. [4.17a] y [4.17b],  $200\text{km/s}$  y  $354\text{km/s}$ , respectivamente. A su vez, el acoplamiento del espín a la curvatura del espacio causa que las trayectorias espirales realizadas por el centro de masa no tienen la forma espiral tan bien definida y regular como en el caso de espines alineados, sino que el patrón es más complejo.

#### 4.3.4. Momento Angular intrínseco

##### Momento angular intrínseco inicial y velocidades finales



(a) Velocidades finales del centro de masas para simulaciones con masas iguales  $m_1 = m_2$  (b) Velocidades finales del centro de masas para simulaciones con masas iguales  $m_1 \neq m_2$

Figura 4.18: Momento angular intrínseco inicial del sistema vs. Velocidad Final del centro de masas

Hemos graficado en la Fig.[4.18a] y [4.18b] la relación para el momento angular intrínseco en su momento inicial y la velocidad final del centro de masa para todas las simulaciones. Se aprecia una clara diferencia entre los casos con precesión de espines y sin precesion. Las BBH alcanzan un valor máximo o pico de velocidades finales para un valor específico del momento angular intrínseco en cada categoría hecha. Si bien las velocidades finales son mayores para el caso **EM-P**, podemos también encontrar velocidades finales comparables a los casos **EM-A** y **NEM-A**. El comportamiento caótico de las BBH con espines precesando permite una diversa

cantidad de escenarios con velocidades finales muy distintas [32]. Por otro lado, las configuraciones con espines alineados y sin espines son estables y muestran valores más bajos para la velocidad final del centro de masa.

Notemos que la Fig. [4.18a] solo presenta tres simulaciones **EM-NS**. La escasez de este número de simulaciones proviene de la sencillez que presenta el espacio de parámetros iniciales.

### Variación momento angular total en el infinito nulo

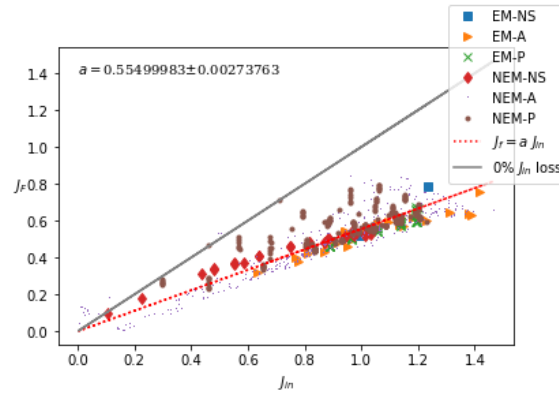


Figura 4.19: A relationship between the magnitudes of the initial and final angular momenta

La pérdida de momento angular total que llega al infinito nulo es visualizada en la Fig. [4.19]. Las BBH con espines alineados tiene una gran variedad de resultados para el valor absoluto del momento angular total final y en algunos casos particulares esta cantidad incrementa con respecto al valor inicial del momento angular total,  $J_f > J_{in}$ . Esta última característica se da cuando el valor del momento angular total inicial es aproximadamente cero  $J_{in} \approx 0$  y los espines se encuentran antialineados con el momento angular orbital  $\mathbf{L}$ . Sucede que mientras la magnitud de la parte orbital del momento angular siempre decrece, el momento angular total aumenta ya que los espines permanecen aproximadamente constantes cuando están alineados.

La línea punteada roja de la Fig. [4.19] muestra un ajuste lineal con constante de proporcionalidad  $a = 0,55$  al momento angular total de las simulaciones. Esta recta muestra la pérdida promedio de las simulaciones y vemos que hay categorías de simulaciones que siguen más fielmente esta recta mientras que otras tienen pérdidas

más esparcidas. La línea sólida gris marca las simulaciones sin pérdida del momento angular total.

### Cambio de dirección del momento angular intrínseco

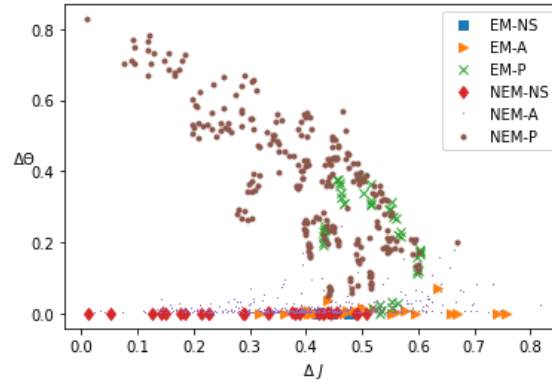


Figura 4.20: Relación entre en el cambio en el valor absoluto del momento angular y el ángulo de volteo

Para calcular el cambio en la dirección del momento angular intrínseco utilizaremos el producto escalar usual entre el momento angular intrínseco inicial y final,

$$\Delta\theta = \frac{\mathbf{S}_f \cdot \mathbf{S}_i}{|\mathbf{S}_f||\mathbf{S}_i|}, \quad (4.42)$$

donde  $\mathbf{S}_i$  es el momento angular intrínseco en el tiempo de relajación y  $\mathbf{S}_f$  el momento angular intrínseco al final de la evolución.  $\mathbf{S}_i$  es elegido de manera de evitar la contribución de la onda viajera al ángulo de volteo.

Podemos apreciar en la Fig. [4.20], que el volteo es nulo para los agujeros negros **NS** al igual que la clase **EM-A**. Un pequeño volteo puede ser observado para la clase alineada si desigualamos las masas iniciales, es decir en la clase **NEM-A**.

Como es de esperar, las BBH con precesión muestran gran variación en el ángulo de volteo. Aún más, la variación en el ángulo de volteo es inversamente proporcional a la variación en el momento angular intrínseco, como se muestra en la Fig. [4.20].

### Velocidad centro de masa $V_f$ y velocidad clásica $P^i/M$

Es interesante estudiar si existe una relación entre la velocidad final del centro de masa  $V_f$  y el concepto Newtoniano de centro de masa  $P^i/M$ .

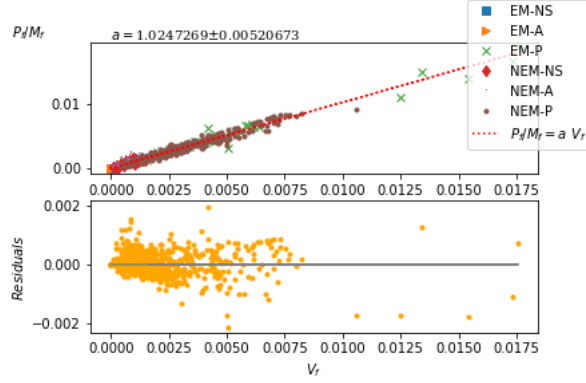


Figura 4.21: Correlation between  $V_f$  and  $(P^i/M)_f$ .

Si vemos la Fig. [4.21] podemos ver la constante de proporcionalidad entre  $V_f$  y  $P_f/M_f$  obtenida del ajuste hecho a todas las simulaciones. El valor de la constante de proporcionalidad es de  $a = 1,02$ , la cual nos indica una diferencia del 2% entre ambos conceptos. La razón de esta diferencia podría deberse a las contribuciones pequeñas hechas por la radiación que diferencian ambos conceptos. Más investigación debe ser hecha en esta dirección.

### Aceleración del centro de masa

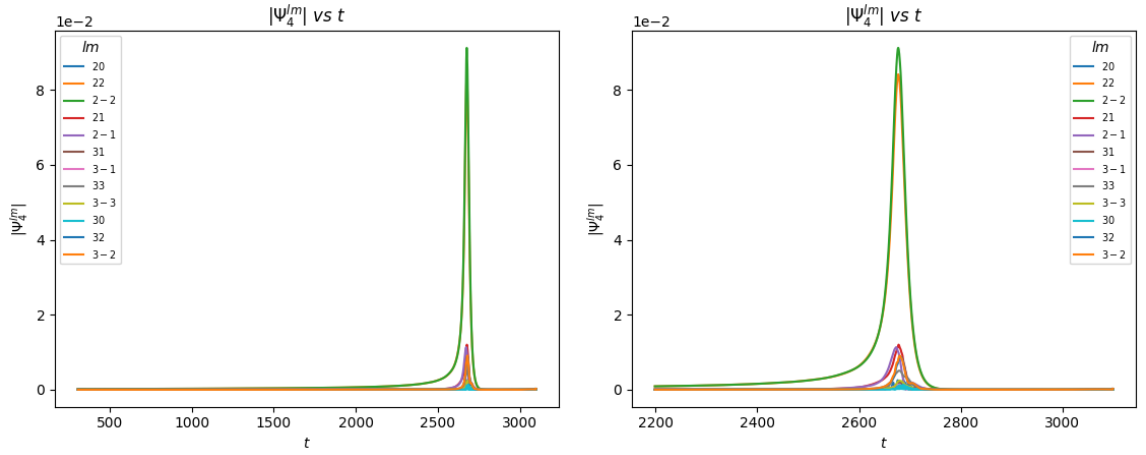
En esta sección hemos graficado cómo es afectada la aceleración del centro de masa en las distintas etapas del proceso de fusión de dos agujeros negros. Para ello, definimos la fuerza de reacción como

$$F_R^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d(MV^i)}{du}. \quad (4.43)$$

Es importante entender la evolución temporal de la fuerza de reacción en términos de los distintos modos de radiación  $\Psi_4$ . En la Fig. [4.22a] podemos ver la evolución temporal de los distintos modos de radiación  $l = 2$  y  $l = 3$  del escalar  $\Psi_4$  para una simulación con espines precesando. La evolución corresponde a la simulación n<sup>o</sup>443 del catálogo. Podemos apreciar en el gráfico que los distintos modos del valor absoluto de  $\psi_4$ , toman un valor máximo cerca de la fusión de los dos agujeros negros. En la Fig. [4.22b] podemos ver que el pico alcanzado para cada modo no se da para un mismo tiempo, sino que suceden con pequeñas diferencias temporales. Cada modo

da una contribución distinta a la fuerza de reacción  $F_R$  y entonces, dependiendo del escenario, la magnitud y dirección del impulso dado por esta fuerza puede ser bastante diferente.

En la Fig.[4.23a] hemos graficado la magnitud de la fuerza de reacción y en la Fig.[4.23b] hemos hecho un acercamiento en el intervalo de coalescencia. En este caso, la fuerza de radiación  $F_R$  tiene varios máximos locales provenientes de la contribución de cada modo cerca de la coalescencia.

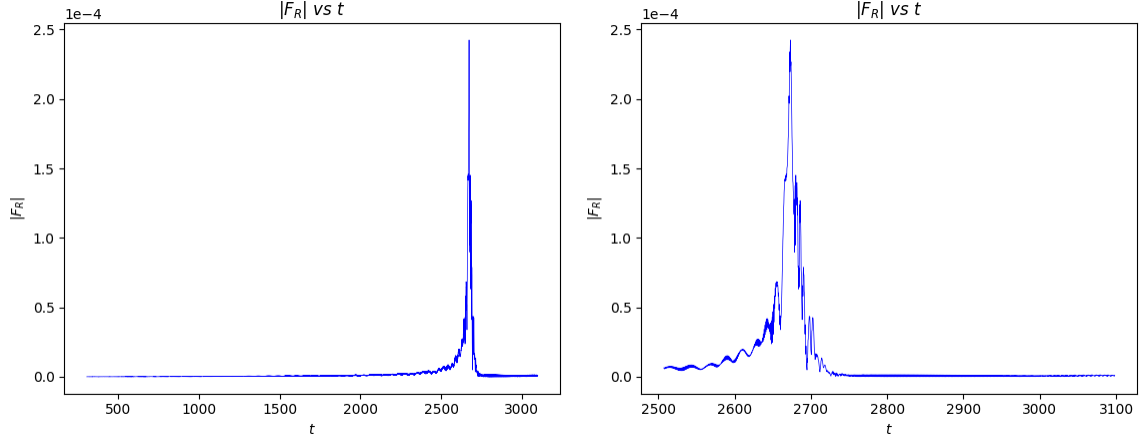


(a) Evolución temporal desde el comienzo hasta el final de la simulación n°443 (b) Zoom en el intervalo donde sucede la coalescencia de los agujeros negros

Figura 4.22: Evolución temporal de los distintos modos de radiación  $l = 2$  y  $l = 3$  del escalar  $\Psi_4$  para una simulación con espines precesando.

#### 4.3.5. Comparación con los metadatos del catálogo

El catálogo de Rochester incluye junto con la radiación gravitacional de las simulaciones un archivo con los parámetros que caracterizan el estado final de la coalescencia de los dos agujeros negros. En esta sección compararemos estas cantidades con las cantidades finales obtenidas a través de las ecuaciones de evolución (4.4)-(4.7). Estas ecuaciones fueron obtenidas a través de los *linkages* asintóticos definidos en el infinito nulo. Analizaremos en las siguientes secciones qué cantidades son consistentes con los metadatos [38, 39] y qué cantidades se deben reajustar o estudiar más en profundidad a partir de su comparación.



(a) Evolución temporal desde el comienzo hasta el final de la simulación n°443 (b) Zoom en el intervalo donde sucede la coalescencia de los agujeros negros

Figura 4.23: Evolución temporal del valor absoluto de la fuerza de reacción,  $F_R$

### Variación de Masas

Para comparar la variación de la masas definimos el cambio de masa para una simulación del catálogo de Rochester como

$$\Delta M_{Roch} = |M_F - M_{relax}| = M_{relax} - M_F, \quad (4.44)$$

donde  $M_F$  es la masa final del agujero negro remanente y  $M_{relax}$  es la masa de los dos agujero negros en el tiempo de relajación (que es levemente mayor a la masa inicial debido a la ráfaga espúrea).

En la Fig. [4.24] podemos ver la relación entre la pérdida de masa obtenida por la Ecs. (4.6) y (4.44). Vemos que hay una diferencia de  $\approx 20\%$  entre ambas variaciones. Esta diferencia podría deberse al hecho que al definir (4.44) con  $M_{relax}$ , estamos usando una medida local de la masa. Esta cantidad no debería diferir mucho de la masa asintótica relajada ya que la única radiación emitida ha sido aquella debido a la ráfaga no física inicial. Aún así, podría ser que nuestra ecuación para la pérdida de masa necesite un factor de corrección en la ecuación de los *linkages* que contemple la diferencia entre ambas definiciones. En menor medida, podrían haber contribuciones de errores numéricos provenientes de la integración a la ecuación final. Mayor investigación debe ser hecha en esta dirección.

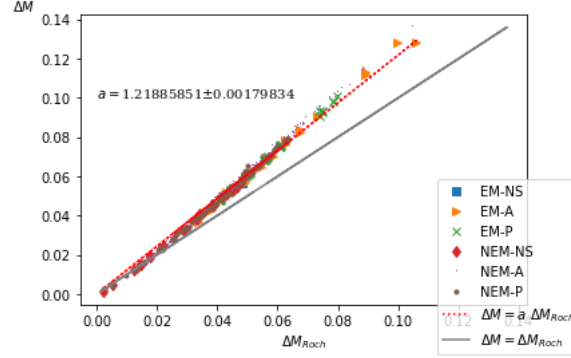


Figura 4.24: Relación entre  $\Delta M$  y  $\Delta M_{Roch}$  para todas las simulaciones.

### Variación del momento angular

Para comparar las variaciones del momento angular total con los metadatos del catálogo, definimos la variación del momento angular total de una simulación según los metadatos como

$$\Delta J = |\chi M^2 - J_{ADM}|. \quad (4.45)$$

El valor absoluto aquí hace la variación  $\Delta J$  positiva. Estamos suponiendo aquí que el estado final de la coalescencia es un agujero negro de Kerr y por lo tanto su momento angular viene dado por la fórmula  $J_f = \chi M^2$ , donde  $\chi$  y  $M_f$  son el parámetro de espín adimensional y la masa final del agujero negro resultante. Como las componentes del momento angular final del agujero negro remanente no son dadas en el catálogo, utilizamos la definición (4.45) que nos da una noción de cambio sin ambigüedad para las configuraciones sin espín y alineadas. Aún así, (4.45) no coincide exactamente con el cambio del momento angular para las configuraciones que precesan.

Por otro lado, hemos elegido usar el momento angular total de ADM para hacer la diferencia (4.45). Notemos que al hacer esta diferencia estamos teniendo en cuenta las contribuciones pequeñas hechas por la ráfaga inicial numérica a  $\Delta J_{Roch}$ .

En la Fig. [4.26], mostramos la comparación del resultado final obtenido para el momento angular total según nuestras ecuaciones de evolución (4.5). El momento angular total según nuestras ecuaciones  $J_F$  es definido como

$$J_f = |\mathbf{J}_F| = |\mathbf{J}_{ADM} + \Delta \mathbf{J}|, \quad (4.46)$$

con  $\Delta \mathbf{J}$  siendo obtenido de (4.5). Como  $\mathbf{J}_{ADM}$  no es igual para todas las simulaciones, no es trivial esperar una correlación lineal entre  $J_F$  y  $J_{Roch}$ , si bien este sería el



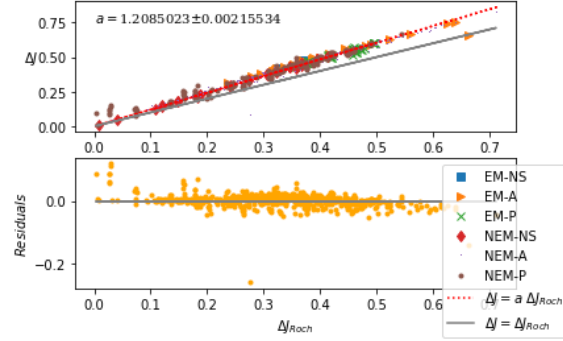


Figura 4.25: Relación entre  $\Delta J$  y  $\Delta J_{Roch}$  para todas las simulaciones.

resultado esperado para dos cantidades que tienen origen en distintos formalismos. El lector debe ser consciente que los métodos para calcular el valor absoluto del momento angular total en ambos formalismos son distintos. En efecto, La Ec. (4.46) es el valor absoluto de un vector mientras que la Ec. (4.45) es la formula del momento angular de un agujero negro de Kerr obtenida a partir de los parámetros finales de la simulación.

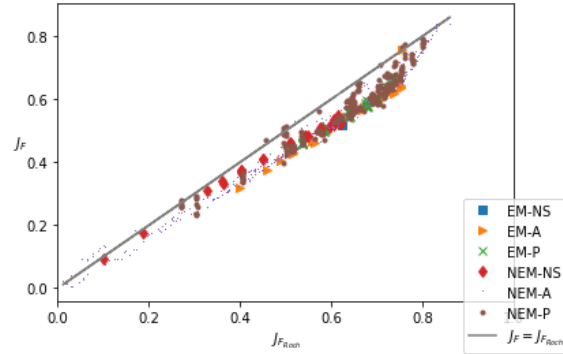


Figura 4.26: Relación entre las magnitudes finales del momento angular total para todas las simulaciones.

Nuevamente podemos apreciar que se manifiesta la diferencia del  $\approx 20\%$  entre las variaciones del momento angular, lo cual es posible suponer que se deba a un factor global en la ecuación de los *linkages*.

## Capítulo 5

### Conclusiones

Hemos definido la noción del centro de masa y espín intrínseco para espaciotiempos asintóticamente planos, estos son espaciotiempos en donde existe una noción precisa de los sistemas gravitacionales aislados. La descripción de estas variables es dada en términos de los escalares de Newman-Penrose.

Las principales herramientas que hemos usado para definir estos conceptos son los *linkages* de Tamburino-Winicour, junto con una foliación de cortes asociados a una línea de mundo. Estos cortes tienen una ecuación bien definida y un espacio de soluciones real. La ecuación de cortes de línea de mundo es un ingrediente fundamental en la vinculación de la estructura del infinito nulo con el espacio tiempo físico. El espacio físico 4-dimensional junto con la métrica lorentziana construida a partir de las soluciones de la ecuación de cortes nulos nos dan los cimientos para construir el concepto de línea de mundo asociada al centro de masa de un sistema.

En este trabajo hemos hecho un desarrollo perturbativo de las foliaciones nulas a orden cero y uno para encontrar soluciones a la ecuación de cortes de línea de mundo. Esta aproximación permite una gran variedad de aplicaciones en el marco de la relatividad general.

Por un lado, en el Cap. 2 hemos estudiado qué sucede si, en lugar de asumir un espaciotiempo asintótico estacionario en el pasado ( $\sigma(u = -\infty) = 0$ ), el espaciotiempo tiene radiación entrante,  $\sigma^-$ . Este problema es conocido como el problema de *scattering* en relatividad general. Hemos deducido el primer resultado para el caso simple de un espaciotiempo vacío donde la radiación obtenida en el infinito futuro es trivial. Este resultado se visualiza en la Ec. (2.40). Luego, hemos analizado el problema de *scattering* en presencia de un tensor de materia  $T_{\mu\nu}$  y encontrado una expresión de los modos de radiación gravitacional que llegan al infinito nulo futuro

en términos de la radiación que proviene del infinito nulo pasado. El resultado puede verse en la Ec. (2.51).

Por otro lado, hemos usado las foliaciones para estudiar la radiación gravitacional de sistemas aislados con  $\sigma(u = -\infty) = 0$ . Con el uso de los linkages de Winicour, definimos cantidades físicas globales del espaciotiempo y un *gauge* específico que nos permite lidiar con la ambigüedad proveniente de las supertraslaciones en el infinito nulo. Sumando a estas cantidades el concepto de cortes de línea de mundo, podemos vincular la física del infinito nulo con los puntos del espaciotiempo físico. En particular, recuperamos dos conceptos fundamentales de la física clásica: el centro de masa de una sistema y su momento angular intrínseco. Estos conceptos han sido poco explorados en el área de la relatividad general y por lo tanto hemos hecho un análisis riguroso de los mismos, utilizando el catálogo de Rochester para ondas gravitacionales como aplicación de los conceptos construidos.

Hemos calculado la evolución temporal del centro de masa y momento angular intrínseco para la tercer versión del catálogo de ondas gravitacional desarrollado por el Instituto de Tecnología de Rochester. Para realizar esta evolución debimos corregir los siguientes problemas:

- Calcular la correspondencia entre los esféricos armónicos tensoriales y los esféricos armónicos con peso de espín  $s$ .
- Corregir las ecuaciones de movimiento para las 777 simulaciones por la ráfaga inicial numérica no deseada. Esto se hizo encontrando el tiempo de relajación donde la ráfaga inicial no se encuentra presente. Luego obtenemos la velocidad del centro de masa en ese tiempo y aplicamos un *boost* a un nuevo sistema de Bondi cuyo origen coincide con el centro de masa y está inicialmente en reposo.
- Realizar la integración numérica de  $\psi_4$  corrigiendo los problemas numéricos provenientes de integrar una función con rápidas oscilaciones.

Los resultados fueron divididos en tres categorías según el tipo de espín que presentaban las simulaciones del catálogo: sin espines (**NS**), espines alineados (**A**), o espines precesando (**P**). Luego, utilizamos las ecuaciones de nuestro formalismo (4.8) para obtener la trayectoria del centro de masa para las simulaciones dentro de cada categoría de simulación. Las trayectorias se visualizaron en las Fig. [4.16a], [4.15a], [4.17a], [4.16b], [4.15b] y [4.17b]. Los resultados son prometedores: el centro de masa presenta un movimiento espiral para masas desiguales y antes de la coalescencia que se mantiene estable para binarias con espines alineados o sin espines; para sistemas

con espines precesando el movimiento espiral adquiere mayor complejidad; para los sistemas compuestos por binarias de igual masas el centro de masas permanece aproximadamente inmóvil; la trayectoria luego de la coalescencia sigue un movimiento rectilíneo uniforme para todos los casos, ya que el sistema no emite más radiación gravitacional. La velocidad asociada a este centro de masa es otro concepto que estudiamos ya que es más fácilmente comparable.

Para el grupo de simulaciones sin espines **NS** hemos visto que la velocidad final del centro de masa alcanza su máximo valor  $V_f \approx 310 \text{ km/s}$  en  $q = 0,4$ . Para las simulaciones alineadas, la velocidad final del centro de masa alcanza su valor máximo  $V_f = 771 \text{ km/s}$  en  $q = 0,66$ , mientras que para los espines precesando  $V_f = 6120,15 \text{ km/s}$  en  $q = 1$ . La influencia del espín en el punto máximo de velocidades es un fenómeno interesante. Las velocidades mencionadas fueron calculadas utilizando el tiempo de Bondi.

Con fines comparativos, debemos cambiar al tiempo retardado dividiendo por un factor  $\sqrt{2}$ . De esta forma, la velocidad final máxima alcanzada por el centro de masa es  $V_f = 219,20 \text{ km/s}$ ,  $V_f = 545,59 \text{ km/s}$  y  $V_f = 4327,59 \text{ km/s}$  en las simulaciones para los grupos **NS**, **A** y **P**, respectivamente. Este último valor para los espines precesando es levemente distinto del valor reportado en los metadatos para el remanente final de la simulación  $V_{kick} = 4257,3 \text{ km/s}$ . La diferencia entre ambas cantidades podría deberse a una leve desviación entre los dos conceptos. Dado que ambas velocidades finales son proporcionales, el factor de corrección es de sumo interés para la comprensión de esta diferencia. Más investigación debe ser hecha en esta dirección para entender la correspondencia.

Para el grupo **NS**, empleamos el modelo de retroceso de Fitchett para ajustar el comportamiento de las velocidades finales del centro de masa. Obtuvimos una constante  $a = 16317,78 \text{ km/s}$  con error asociado de  $\approx 1,5\%$ . Este modelo puede ser útil para la comparación de simulaciones posteriores o para modelar BBH astrofísicos con rotación despreciable. Asimismo, derivamos una fórmula para ajustar la correlación entre  $\dot{E}_{max}$  y  $q$  usando un parámetro fenomenológico adimensional  $b$  que debe ser mayor a 2. El valor obtenido  $b = 2,1867$  es un resultado razonable.

Para el grupo **A**, los resultados muestran que las velocidades finales del centro de masa son máximas cuando los espines están antialineados. Este resultado también ha sido reportado en otros trabajos utilizando las velocidades del remanente final [30, 31].

Para el grupo **P**, hemos encontrado que las velocidades finales del centro de masa más altas provienen de este grupo, y en particular de aquellas binarias con  $q = 1$ . Según las simulaciones tomadas del depósito de Rochester, podemos inferir que si

el agujero negro remanente se encuentra con velocidades superiores a los  $800\text{km/s}$ , entonces el BBH tendría giros de precesión. Además, si la velocidad del centro de masa BBH es superior a  $3000\text{km/s}$ , las binarias iniciales pertenecen al grupo **EM-P**.

Por otro lado, también hemos estudiado en profundidad la radiación gravitacional para cada grupo de simulaciones predicha por la Ec. (4.32). Para el grupo **NS**, encontramos que usando el modelo cuadrático, derivado en el Apéndice C, se ajusta notablemente bien a los datos con un coeficiente  $b = 0,04976$  y error asociado  $\approx 1,74\%$ . La sencillez de las binarias sin espines permiten modelar la dependencia de las variables finales con los parámetros iniciales y obtener fórmulas con errores más pequeños que en otras clases de BBH.

Para el grupo **A** y **P**, hicimos un ajuste de la energía radiada y el momento angular total para los diferentes rangos de relaciones de masa  $q$  y encontramos valores de error más altos en que las binarias sin espín. Los errores más altos podrían atribuirse a la dependencia de los coeficientes con el espín. Quizás el uso de modelos más complejos podrían reducir significativamente los errores de los coeficientes. A pesar de eso, los coeficientes calculados aún proporcionan un modelo simple y útil para la relación entre la energía total irradiada,  $E_{rad}$ , y el momento angular total inicial  $J_{in}$ .

Para el caso de binarias alineadas con masas iguales  $q = 1$ , ajustamos la energía radiada utilizando la variable  $\bar{\chi} = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$  en lugar de  $J_{in}$ . La gráfica en términos de la variable  $\bar{\chi}$  nos permite comparar la energía radiada predicha en nuestras Ecs. con otros trabajos. Vimos que el ajuste obtenido es consistente con la literatura en general, si bien ligeramente más alto que la mayoría de las energías radiadas reportadas. Esto podría ser consecuencia de definir (4.32) en términos de la masa Bondi. Un análisis más detallado sobre la diferencia entre la energía radiada definida a través de la ecuación (4.6) y la masa de Christodoulou es necesaria para aclarar estas cuestiones.

Con respecto a los resultados del estudio de las variables globales podemos remarcar algunos comentarios generales

- Reisswig et al [35] han demostrado que el patrón de ondas gravitacionales para **EM-NS** y **EM-A** son bastante similares. Dado que la evolución numérica de las binarias **EM-NS** es mucho más simple que la subclase **EM-A**, argumentan que simplemente se podría usar la clase **NS** para obtener las formas de onda de ambos subgrupos. Por otro lado, nuestros resultados muestran que el final las velocidades para las subclases **EM-NS** y **EM-A** son completamente diferentes. Mientras que la subclase **EM-NS** tiene velocidades de retroceso que se anulan, los casos **EM-A** no. Esta es una diferencia notable entre las dos subclases y ayuda a distinguirlas. Por lo tanto, aunque las plantillas de ondas

gravitacionales son prácticamente las mismas para estas subclases, la evolución numérica **EM-A** brinda información valiosa de la coalescencia.

- Las Figs. [4.14a] y [4.12] representan resultados globales. Los gráficos  $E_{rad}$  vs  $J_{in}$  están motivados por lo siguiente. Ambas variables se pueden obtener en el infinito nulo sin conocimiento de las masas, espines y momento angular orbital de BH. Para obtener  $J_{in}$  solo necesitamos el conocimiento de la posición del centro de masa y la definición del momento angular total, mientras que  $E_{rad}$  se calcula con el uso de la ecuación de pérdida de masa de Bondi.

Estos gráficos muestran una clara correlación entre  $E_{rad}$  y  $J_{in}$ . Usando un ajuste cuadrático obtuvimos una relación empírica en términos de dos coeficientes. Los resultados de este trabajo muestran que el momento angular total inicial  $J_{in}$  es una variable relevante en el espacio de parámetros para analizar las diferentes evoluciones numéricas. Es justo preguntar por qué debería haber una dependencia cuadrática del momento angular intrínseco total inicial del sistema BBH. La respuesta se encuentra en la fórmula de  $E_{rad}$  y depende de los términos cuadráticos de radiación gravitacional. Al mismo tiempo, la radiación depende del momento angular inicial total y se conserva si solo mantenemos los términos cuadráticos en la fórmula de  $E_{rad}$  ya que  $\dot{J}$  es cuadrático en la deformación gravitacional  $\sigma^0$ . Por lo tanto, deberíamos esperar esta dependencia en la coalescencia de BBH. Tenga en cuenta que los mismos resultados para  $E_{rad}$  se aplican también para  $\dot{M}_{max}$ , debido a la Fig. [4.5].

- La pérdida de momento angular  $\Delta S$  solo depende de la cantidad de momento angular irradiado, y se calcula con el conocimiento de los datos de radiación disponibles en el infinito nulo. La pérdida de momento angular sigue siendo un motivo principal de preocupación en nuestro formalismo. Como se mostró previamente, existe una discrepancia del momento angular intrínseco predicho con respecto a los valores para el momento angular total del catálogo RIT, que es un tema a estudiar en trabajos futuros. Por supuesto, una definición físicamente relevante del momento angular intrínseco es una tarea difícil, pero la que proporcionamos parece estar libre de ambigüedades. A pesar de eso, hemos demostrado a lo largo de este documento que las ecuaciones de movimiento para la energía, el momento lineal, la posición del centro de masa y la velocidad final, Ecs. (4.4-4.9) empleados en el marco del formalismo presentado son consistentes con la literatura general.

Finalmente, el cambio en la masa de Bondi y el momento angular fueron comparados

para nuestras ecuaciones y los metadatos proporcionados por el catálogo del RIT. Esta comparación es elegida ya que requiere integrar una sola vez, introduciendo menos error numérico en los resultados finales. Los resultados de las Figs. [4.24,4.26] muestran una clara correlación lineal entre las cantidades con una pendiente igual al valor 1,2 para ambos gráficos. El origen del factor causando el 20 % de desviación sobre la correlación deseada será investigado en trabajos futuros.

# Bibliografía

- [1] LB Szabados. Quasi-local energy-momentum and angular momentum in gr: a review article living rev. *Relativity*, 7(4), 2004.
- [2] Adam D Helfer. Angular momentum, spinors, and twistors. *Physical Review D*, 104(10):104053, 2021.
- [3] Hermann Bondi. Gravitational waves in general relativity. *Nature*, 186(4724):535–535, 1960.
- [4] Hermann Bondi, M Gr J Van der Burg, and AWK Metzner. Gravitational waves in general relativity, vii. waves from axi-symmetric isolated system. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 269(1336):21–52, 1962.
- [5] Rainer K Sachs. Gravitational waves in general relativity viii. waves in asymptotically flat space-time. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 270(1340):103–126, 1962.
- [6] Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, and Eduard Herlt. *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge university press, 2009.
- [7] Ezra Newman and Roger Penrose. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *Journal of Mathematical Physics*, 3(3):566–578, 1962.
- [8] Ezra T Newman and Theodore WJ Unti. Behavior of asymptotically flat empty spaces. *Journal of Mathematical Physics*, 3(5):891–901, 1962.
- [9] Ezra T Newman and Gilberto Silva-Ortigoza. Tensorial spin-s harmonics. *Classical and Quantum Gravity*, 23(2):497, 2005.



- [10] Jeffrey Winicour. Characteristic evolution and matching. *Living Reviews in Relativity*, 15:1–99, 2012.
- [11] Carlos N Kozameh and Emmanuel A Tassone. Scattering theory with matter fields of classical gravitons in the null surface formulation. *Physical Review D*, 107(10):105016, 2023.
- [12] RK1962PhRv Sachs. Asymptotic symmetries in gravitational theory. *Physical Review*, 128(6):2851, 1962.
- [13] RO Hansen and Jeffrey Winicour. Killing inequalities for relativistically rotating fluids. *Journal of Mathematical Physics*, 16(4):804–808, 1975.
- [14] Jeffrey M Cohen and F De Felice. The total effective mass of the kerr–newman metric. *Journal of mathematical physics*, 25(4):992–994, 1984.
- [15] Louis A Tamburino and Jeffrey H Winicour. Gravitational fields in finite and conformal bondi frames. *Physical Review*, 150(4):1039, 1966.
- [16] Ezra T Newman and TWJ Unti. A class of null flat-space coordinate systems. *Journal of Mathematical Physics*, 4(12):1467–1469, 1963.
- [17] Carlos N Kozameh and Gonzalo D Quiroga. Center of mass and spin for isolated sources of gravitational radiation. *Physical Review D*, 93(6):064050, 2016.
- [18] Carlos Nicolas Kozameh, Jose Ivan Nieva, and Gonzalo Damián Quiroga. Spin and center of mass comparison between the post-newtonian approach and the asymptotic formulation. *Physical Review D*, 98(6):064005, 2018.
- [19] CN Kozameh, JI Nieva, and GD Quiroga. Relativistic center of mass in general relativity. *Physical Review D*, 101(2):024028, 2020.
- [20] Timothy M Adamo, Ezra T Newman, and Carlos Kozameh. Null geodesic congruences, asymptotically-flat spacetimes and their physical interpretation. *Living Reviews in Relativity*, 15(1):1–92, 2012.
- [21] Luc Blanchet. Gravitational radiation from post-newtonian sources and inspiralling compact binaries. *Living reviews in relativity*, 17(1):1–187, 2014.
- [22] James Healy and Carlos O Lousto. Fourth rit binary black hole simulations catalog: Extension to eccentric orbits. *Physical Review D*, 105(12):124010, 2022.

- [23] James Healy and Carlos O Lousto. Third rit binary black hole simulations catalog. *Physical Review D*, 102(10):104018, 2020.
- [24] James Healy, Carlos O Lousto, Jacob Lange, Richard O’Shaughnessy, Yosef Zlochower, and Manuela Campanelli. Second rit binary black hole simulations catalog and its application to gravitational waves parameter estimation. *Physical Review D*, 100(2):024021, 2019.
- [25] James Healy, Carlos O Lousto, Yosef Zlochower, and Manuela Campanelli. The rit binary black hole simulations catalog. *Classical and Quantum Gravity*, 34(22):224001, 2017.
- [26] Manuela Campanelli, Carlos Lousto, Yosef Zlochower, and David Merritt. Large merger recoils and spin flips from generic black hole binaries. *The Astrophysical Journal*, 659(1):L5, 2007.
- [27] Manuela Campanelli, Carlos O Lousto, Yosef Zlochower, and David Merritt. Maximum gravitational recoil. *Physical Review Letters*, 98(23):231102, 2007.
- [28] Carlos Lousto and James Healy. Ultimate black hole recoil: What the maximum high energy collisions kick is? *Bulletin of the American Physical Society*, 2023.
- [29] Christian Reisswig. pygwanalysis. <https://svn.einsteintoolkit.org/pyGWAnalysis/trunk/>.
- [30] Christian Reisswig and Denis Pollney. Notes on the integration of numerical relativity waveforms. *Classical and Quantum Gravity*, 28(19):195015, 2011.
- [31] MJ Fitchett. The influence of gravitational wave momentum losses on the centre of mass motion of a newtonian binary system. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 203(4):1049–1062, 1983.
- [32] Carlos Nicolas Kozameh and Gonzalo Damián Quiroga. Spin stability of a binary black hole coalescence. *Physical Review D*, 102(6):064015, 2020.
- [33] Denis Pollney, Christian Reisswig, Luciano Rezzolla, Béla Szilágyi, Marcus Ansorg, Barrett Deris, Peter Diener, Ernst Nils Dorband, Michael Koppitz, Alessandro Nagar, et al. Recoil velocities from equal-mass binary black-hole mergers: a systematic investigation of spin-orbit aligned configurations. *Physical Review D*, 76(12):124002, 2007.

- [34] Michael Koppitz, Denis Pollney, Christian Reisswig, Luciano Rezzolla, Jonathan Thornburg, Peter Diener, and Erik Schnetter. Recoil velocities from equal-mass binary-black-hole mergers. *Physical Review Letters*, 99(4):041102, 2007.
- [35] Christian Reisswig, Sascha Husa, Luciano Rezzolla, Ernst Nils Dorband, Denis Pollney, and Jennifer Seiler. Gravitational-wave detectability of equal-mass black-hole binaries with aligned spins. *Physical Review D*, 80(12):124026, 2009.
- [36] Daniel A Hemberger, Geoffrey Lovelace, Thomas J Loredo, Lawrence E Kidder, Mark A Scheel, Béla Szilágyi, Nicholas W Taylor, and Saul A Teukolsky. Final spin and radiated energy in numerical simulations of binary black holes with equal masses and equal, aligned or antialigned spins. *Physical Review D*, 88(6):064014, 2013.
- [37] Ulrich Sperhake, Vitor Cardoso, Frans Pretorius, Emanuele Berti, and Jose A Gonzalez. High-energy collision of two black holes. *Physical review letters*, 101(16):161101, 2008.
- [38] Carlos O Lousto and Yosef Zlochower. Hangup kicks: still larger recoils by partial spin-orbit alignment of black-hole binaries. *Physical Review Letters*, 107(23):231102, 2011.
- [39] Manuela Campanelli and Carlos O Lousto. Second order gauge invariant gravitational perturbations of a kerr black hole. *Physical Review D*, 59(12):124022, 1999.
- [40] Subrahmanyan Chandrasekhar. *The mathematical theory of black holes*, volume 69. Oxford university press, 1998.
- [41] J. Winicour. Angular momentum in general relativity. In A. Held, editor, *General relativity and gravitation*, volume 2. Plenum Press, New York, 1980.
- [42] Lawrence E Kidder. Coalescing binary systems of compact objects to (post) 5/2-newtonian order. v. spin effects. *Physical Review D*, 52(2):821, 1995.

## Apéndice A

### Ecuaciones de coeficientes de espín para espaciotiempos no vacíos

En una tétrada nula compleja de NP, las identidades de Ricci dan lugar a las siguientes ecuaciones de campo NP que conectan los coeficientes de espín, los escalares Weyl-NP y Ricci-NP. Estas ecuaciones pueden encontrarse con distinta notación según el texto ([40],[41]). Seguiremos la notación de Newman y Tod en [41]

$$D\rho - \bar{\delta}\kappa = (\rho^2 + \sigma\bar{\sigma}) + (\varepsilon + \bar{\varepsilon})\rho - \bar{\kappa}\tau - \kappa(3\alpha + \bar{\beta} - \pi) + \Phi_{00} \quad (\text{A.1})$$

$$D\sigma - \delta\kappa = (\rho + \bar{\rho})\sigma + (3\varepsilon - \bar{\varepsilon})\sigma - (\tau - \bar{\pi} + \bar{\alpha} + 3\beta)\kappa + \Psi_0 \quad (\text{A.2})$$

$$D\tau - \Delta\kappa = (\tau + \bar{\pi})\rho + (\bar{\tau} + \pi)\sigma + (\varepsilon - \bar{\varepsilon})\tau - (3\gamma + \bar{\gamma})\kappa + \Psi_1 + \Phi_{01} \quad (\text{A.3})$$

$$D\alpha - \bar{\delta}\varepsilon = (\rho + \bar{\varepsilon} - 2\varepsilon)\alpha + \beta\bar{\sigma} - \bar{\beta}\varepsilon - \kappa\lambda - \bar{\kappa}\gamma + (\varepsilon + \rho)\pi + \Phi_{10} \quad (\text{A.4})$$

$$D\beta - \delta\varepsilon = (\alpha + \pi)\sigma + (\bar{\rho} - \bar{\varepsilon})\beta - (\mu + \gamma)\kappa - (\bar{\alpha} - \bar{\pi})\varepsilon + \Psi_1 \quad (\text{A.5})$$

$$D\gamma - \Delta\varepsilon = (\tau + \bar{\pi})\alpha + (\bar{\tau} + \pi)\beta - (\varepsilon + \bar{\varepsilon})\gamma - (\gamma + \bar{\gamma})\varepsilon + \tau\pi - \nu\kappa + \Psi_2 + \Phi_{11} - \Lambda, \quad (\text{A.6})$$

$$D\lambda - \bar{\delta}\pi = (\rho\lambda + \bar{\sigma}\mu) + \pi^2 + (\alpha - \bar{\beta})\pi - \nu\bar{\kappa} - (3\varepsilon - \bar{\varepsilon})\lambda + \Phi_{20} \quad (\text{A.7})$$

$$D\mu - \delta\pi = (\bar{\rho}\mu + \sigma\lambda) + \pi\bar{\pi} - (\varepsilon + \bar{\varepsilon})\mu - (\bar{\alpha} - \beta)\pi - \nu\kappa + \Psi_2 + 2\Lambda \quad (\text{A.8})$$

$$D\nu - \Delta\pi = (\pi + \bar{\tau})\mu + (\bar{\pi} + \tau)\lambda + (\gamma - \bar{\gamma})\pi - (3\varepsilon + \bar{\varepsilon})\nu + \Psi_3 + \Phi_{21} \quad (\text{A.9})$$

$$\Delta\lambda - \bar{\delta}\nu = -(\mu + \bar{\mu})\lambda - (3\gamma - \bar{\gamma})\lambda + (3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau})\nu - \Psi_4 \quad (\text{A.10})$$

$$\delta\rho - \bar{\delta}\sigma = \rho(\bar{\alpha} + \beta) - \sigma(3\alpha - \bar{\beta}) + (\rho - \bar{\rho})\tau + (\mu - \bar{\mu})\kappa - \Psi_1 + \Phi_{01} \quad (\text{A.11})$$

$$\delta\alpha - \bar{\delta}\beta = (\mu\rho - \lambda\sigma) + \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - 2\alpha\beta + \gamma(\rho - \bar{\rho}) + \varepsilon(\mu - \bar{\mu}) - \Psi_2 + \Phi_{11} + \Lambda, \quad (\text{A.12})$$

$$\delta\lambda - \bar{\delta}\mu = (\rho - \bar{\rho})\nu + (\mu - \bar{\mu})\pi + (\alpha + \bar{\beta})\mu + (\bar{\alpha} - 3\beta)\lambda - \Psi_3 + \Phi_{21} \quad (\text{A.13})$$

$$\delta\nu - \Delta\mu = (\mu^2 + \lambda\bar{\lambda}) + (\gamma + \bar{\gamma})\mu - \bar{\nu}\pi + (\tau - 3\beta - \bar{\alpha})\nu + \Phi_{22} \quad (\text{A.14})$$

$$\delta\gamma - \Delta\beta = (\tau - \bar{\alpha} - \beta)\gamma + \mu\tau - \sigma\nu - \varepsilon\bar{\nu} - (\gamma - \bar{\gamma} - \mu)\beta + \alpha\bar{\lambda} + \Phi_{12} \quad (\text{A.15})$$

$$\delta\tau - \Delta\sigma = (\mu\sigma + \bar{\lambda}\rho) + (\tau + \beta - \bar{\alpha})\tau - (3\gamma - \bar{\gamma})\sigma - \kappa\bar{\nu} + \Phi_{02} \quad (\text{A.16})$$

$$\Delta\rho - \bar{\delta}\tau = -(\rho\bar{\mu} + \sigma\lambda) + (\bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau})\tau + (\gamma + \bar{\gamma})\rho + \nu\kappa - \Psi_2 - 2\Lambda \quad (\text{A.17})$$

$$\Delta\alpha - \bar{\delta}\gamma = (\rho + \varepsilon)\nu - (\tau + \beta)\lambda + (\bar{\gamma} - \bar{\mu})\alpha + (\bar{\beta} - \bar{\tau})\gamma - \Psi_3 \quad (\text{A.18})$$

Además, los escalares Weyl-NP  $\Psi_i$  y los escalares Ricci  $\Phi_{ij}$  se pueden calcular indirectamente a partir de las ecuaciones de campo NP anteriores después de obtener los coeficientes de espín en lugar de usar directamente sus definiciones.

## A.1. Ecuaciones de Maxwell

Los seis componentes independientes del tensor de Faraday-Maxwell (o tensor electromagnético)  $F_{ab}$  se pueden codificar en tres escalares complejos de Maxwell-

NP

$$\phi_0 := F_{ab} l^a m^b \quad (\text{A.19})$$

$$\phi_1 := \frac{1}{2} F_{ab} (l^a n^b + \bar{m}^a m^b) \quad (\text{A.20})$$

$$\phi_2 := F_{ab} \bar{m}^a n^b \quad (\text{A.21})$$

y por lo tanto las ocho ecuaciones de Maxwell reales  $d\mathbf{F} = 0$  y  $d^*\mathbf{F} = 0$  (si  $\mathbf{F} = dA$ ) se pueden transformar en cuatro ecuaciones complejas,

$$D\phi_1 - \bar{\delta}\phi_0 = (\pi - 2\alpha)\phi_0 + 2\rho\phi_1 - \kappa\phi_2 \quad (\text{A.22})$$

$$D\phi_2 - \bar{\delta}\phi_1 = -\lambda\phi_0 + 2\pi\phi_1 + (\rho - 2\varepsilon)\phi_2 \quad (\text{A.23})$$

$$\Delta\phi_0 - \delta\phi_1 = (2\gamma - \mu)\phi_0 - 2\tau\phi_1 + \sigma\phi_2 \quad (\text{A.24})$$

$$\Delta\phi_1 - \delta\phi_2 = \nu\phi_0 - 2\mu\phi_1 + (2\beta - \tau)\phi_2 \quad (\text{A.25})$$

con los escalares de Ricci  $\Phi_{ij}$  definidos a partir de los escalares de Maxwell de la forma

$$\Phi_{ij} = 2\phi_i \bar{\phi}_j, \quad (i, j \in \{0, 1, 2\}) \quad (\text{A.26})$$

Vale la pena señalar que, la ecuación suplementaria  $\Phi_{ij} = 2\phi_i \bar{\phi}_j$  solo es válida para campos electromagnéticos; por ejemplo, en el caso de los campos de Yang-Mills tendremos  $\Phi_{ij} = \text{Tr}(F_i, \bar{F}_j)$  donde  $F_i (i \in \{0, 1, 2\})$  son escalares de Yang-Mills-NP. En resumen, las ecuaciones de conmutadores para la tetradra nula, las ecuaciones de campo NP y las ecuaciones de Maxwell-NP juntas constituyen las ecuaciones de Einstein-Maxwell en el formalismo de Newman-Penrose. Resolver este sistema de ecuaciones equivale a resolver las ecuaciones de Einstein en presencia de una campo electromagnético  $F_{\mu\nu}$ .

## Apéndice B

### Clebsh-Gordan de los esféricos armonicos tensoriales $Y_{l,I_l}^s$

Presentamos una tabla de productos de función con peso de espín  $s = (2, 1, 0, -1, -2)$  y  $l = (0, 1, 2)$ .

#### B.0.1. Productos de $l = 1$ con $l = 1$

$$Y_{1i}^1 Y_{1j}^0 = \frac{i}{\sqrt{2}} \epsilon_{ijk} Y_{1k}^1 + \frac{1}{2} Y_{2ij}^1 \quad (\text{B.1})$$

$$Y_{1i}^1 Y_{1j}^{-1} = \frac{1}{3} \delta_{ij} - \frac{i\sqrt{2}}{4} \epsilon_{ijk} Y_{1k}^0 - \frac{1}{12} Y_{2ij}^0 \quad (\text{B.2})$$

$$Y_{1i}^0 Y_{1j}^0 = \frac{2}{3} \delta_{ij} + \frac{1}{3} Y_{2ij}^0 \quad (\text{B.3})$$

**B.0.2. Productos de  $l = 1$  con  $l = 2$** 

$$Y_{1i}^1 Y_{2jk}^2 = Y_{3ijk}^3 \quad (\text{B.4})$$

$$Y_{1i}^0 Y_{2jk}^0 = -\frac{4}{5} \delta_{kj} Y_{1i}^0 + \frac{6}{5} (\delta_{ij} Y_{1k}^0 + \delta_{ik} Y_{1j}^0) + \frac{1}{5} Y_{3ijk}^0 \quad (\text{B.5})$$

$$Y_{1i}^1 Y_{2jk}^0 = \frac{2}{5} Y_{1i}^1 \delta_{kj} - \frac{3}{5} Y_{1j}^1 \delta_{ik} - \frac{3}{5} Y_{1k}^1 \delta_{ij} \quad (\text{B.6})$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{2}} (\epsilon_{ikl} Y_{2jl}^1 + \epsilon_{ijl} Y_{2kl}^1) + \frac{2}{5} Y_{3ijk}^1 \quad (\text{B.7})$$

$$Y_{1i}^1 Y_{2jk}^1 = -\frac{1}{6} \delta [Y_{1i}^1 Y_{2jk}^0] \quad (\text{B.8})$$

$$Y_{2ij}^{-1} Y_{1k}^1 = \frac{3}{10} Y_{1i}^0 \delta_{jk} + \frac{3}{10} Y_{1j}^0 \delta_{ik} - \frac{2}{10} Y_{1k}^0 \delta_{ij} \quad (\text{B.9})$$

$$+ \frac{i\sqrt{2}}{12} [\epsilon_{jkl} Y_{2il}^0 + \epsilon_{ikl} Y_{2lj}^0] - \frac{1}{30} Y_{3ijk}^0 \quad (\text{B.10})$$

$$Y_{1i}^0 Y_{2jk}^1 = -\frac{2}{5} Y_{1i}^1 \delta_{jk} + \frac{3}{5} Y_{1j}^1 \delta_{ik} + \frac{3}{5} Y_{1k}^1 \delta_{ij} \quad (\text{B.11})$$

$$- \frac{i}{3\sqrt{2}} (\epsilon_{ikl} Y_{2jl}^1 + \epsilon_{ijl} Y_{2kl}^1) + \frac{4}{15} Y_{3ijk}^1 \quad (\text{B.12})$$

$$Y_{2ij}^2 Y_{1k}^{-1} = \frac{3}{10} \delta_{jk} Y_{1i}^1 + \frac{3}{10} \delta_{ik} Y_{1j}^1 - \frac{1}{5} \delta_{ij} Y_{1k}^1 \quad (\text{B.13})$$

$$- \frac{i\sqrt{2}}{12} [\epsilon_{ikl} Y_{2jl}^1 + \epsilon_{jkl} Y_{2il}^1] - \frac{1}{30} Y_{3ijk}^1 \quad (\text{B.14})$$

$$Y_{2ij}^2 Y_{1k}^0 = \partial [Y_{2ij}^2 Y_{1k}^{-1}] \quad (\text{B.15})$$

**B.0.3. Productos de  $l = 2$  con  $l = 2$** 

$s = 4$

$$Y_{4ijkl}^4 = Y_{2ij}^2 Y_{2kl}^2 \quad (\text{B.16})$$

$s = 3$

$$Y_{2kl}^2 Y_{2ij}^1 = -\frac{i}{\sqrt{2}} [\epsilon_{ile} Y_{3jke}^3 + \epsilon_{jke} Y_{3ile}^3] + \frac{1}{2} Y_{4ijkl}^3 \quad (\text{B.17})$$



$s = 2$

$$Y_{2kl}^1 Y_{2ij}^1 = \frac{3}{7} K_{ijkl}^{2(0)} + \frac{4}{7} K_{ijkl}^{2(14)}, \quad (\text{B.18})$$

$$Y_{2kl}^0 Y_{2ij}^2 = -\frac{3}{7} K_{ijkl}^{2(0)} + \frac{1}{2} K_{ijkl}^{2(6)} + \frac{3}{7} K_{ijkl}^{2(14)}, \quad (\text{B.19})$$

con los tensores  $K$  dados por

$$K_{ijkl}^{2(0)} = -\frac{8}{3} (\delta_{kl} Y_{2ij}^2 + \delta_{ij} Y_{2kl}^2) + 2 [\delta_{lj} Y_{2ik}^2 + \delta_{ik} Y_{2lj}^2 + \delta_{kj} Y_{2il}^2 + \delta_{il} Y_{2kj}^2] \quad (\text{B.20})$$

$$K_{ijkl}^{2(6)} = \frac{i}{\sqrt{2}} [\epsilon_{ike} Y_{3ejl}^2 + \epsilon_{jke} Y_{3eil}^2 + \epsilon_{ile} Y_{3ejk}^2 + \epsilon_{jle} Y_{3eik}^2] \quad (\text{B.21})$$

$$K_{ijkl}^{2(14)} = \frac{1}{2} Y_{4ijkl}^2, \quad (\text{B.22})$$

$s = 1$

$$Y_{2ij}^0 Y_{2kl}^1 = \frac{3}{10} J_{4ijkl}^{1(0)} + \frac{1}{14} J_{4ijkl}^{1(4)} + \frac{1}{5} J_{4ijkl}^{1(10)} + \frac{3}{7} J_{4ijkl}^{1(18)} \quad (\text{B.23})$$

$$Y_{2ij}^{-1} Y_{2kl}^2 = \frac{1}{20} J_{4ijkl}^{1(0)} + \frac{1}{28} J_{4ijkl}^{1(4)} - \frac{1}{20} J_{4ijkl}^{1(10)} - \frac{1}{28} J_{4ijkl}^{1(18)} \quad (\text{B.24})$$

con los tensores  $J$  dados por

$$J_{4ijkl}^{1(0)} = i2\sqrt{2} [\delta_{ik} \epsilon_{ljf} + \delta_{jk} \epsilon_{lif} + \delta_{il} \epsilon_{kjf} + \delta_{jl} \epsilon_{kif}] Y_{1f}^1 \quad (\text{B.25})$$

$$J_{4ijkl}^{1(4)} = 6 [\delta_{li} Y_{2kj}^1 + \delta_{ik} Y_{2jl}^1 + \delta_{jk} Y_{2il}^1 + \delta_{jl} Y_{2ik}^1] - 8 [\delta_{ij} Y_{2lk}^1 + \delta_{kl} Y_{2ij}^1] \quad (\text{B.26})$$

$$J_{4ijkl}^{1(10)} = -\frac{i}{\sqrt{2}} [\epsilon_{ike} Y_{3ejl}^1 + \epsilon_{jke} Y_{3eil}^1 + \epsilon_{ile} Y_{3ejk}^1 + \epsilon_{jle} Y_{3eik}^1] \quad (\text{B.27})$$

$$J_{4ijkl}^{1(18)} = \frac{1}{3} Y_{4ijkl}^1 \quad (\text{B.28})$$

$s = 0$

$$Y_{2kl}^2 Y_{2ij}^{-2} = \frac{1}{5} F_{ijkl}^{0(0)} + \frac{2}{5} F_{ijkl}^{0(2)} + \frac{2}{7} F_{ijkl}^{0(6)} + \frac{1}{10} F_{ijkl}^{0(12)} + \frac{1}{70} F_{ijkl}^{0(20)}, \quad (\text{B.29})$$

$$Y_{2kl}^1 Y_{2ij}^{-1} = \frac{4}{5} F_{ijkl}^{0(0)} + \frac{4}{5} F_{ijkl}^{0(2)} - \frac{4}{7} F_{ijkl}^{0(6)} - \frac{4}{5} F_{ijkl}^{0(12)} - \frac{8}{35} F_{ijkl}^{0(20)}, \quad (\text{B.30})$$

$$Y_{2kl}^0 Y_{2ij}^0 = \frac{24}{5} F_{ijkl}^{0(0)} - \frac{48}{7} F_{ijkl}^{0(6)} + \frac{72}{35} F_{ijkl}^{0(20)} \quad (\text{B.31})$$

con los tensores  $F$  dados por

$$F_{ijkl}^{0(0)} = \frac{1}{2} \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{1}{2} \delta_{li} \delta_{kj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad (\text{B.32})$$

$$F_{ijkl}^{0(2)} = i \frac{\sqrt{2}}{8} (\delta_{jl} \epsilon_{ike} + \delta_{ki} \epsilon_{jle} + \epsilon_{jke} \delta_{il} + \delta_{kj} \epsilon_{ile}) Y_{1e}^0, \quad (\text{B.33})$$

$$F_{ijkl}^{0(6)} = \frac{1}{6} (\delta_{ij} Y_{2kl}^0 + \delta_{kl} Y_{2ij}^0) - \frac{1}{8} (\delta_{lj} Y_{2ik}^0 + \delta_{ki} Y_{2lj}^0 + \delta_{li} Y_{2kj}^0 + \delta_{kj} Y_{2il}^0), \quad (\text{B.34})$$

$$F_{ijkl}^{0(12)} = -\frac{i}{24\sqrt{2}} [\epsilon_{ike} Y_{3ejl}^0 + \epsilon_{jke} Y_{3eil}^0 + \epsilon_{ile} Y_{3ejk}^0 + \epsilon_{jle} Y_{3eik}^0], \quad (\text{B.35})$$

$$F_{ijkl}^{0(20)} = \frac{1}{24} Y_{4ijkl}^0. \quad (\text{B.36})$$

## Apéndice C

### Derivación Post-Newtoniana entre $\dot{E}$ , $J_{in}$ y $q$

Partiendo de la definición para los momentos cuadrupolares de masa ([42],[21]), tenemos las siguientes expresiones: con los parámetros de masa dados por  $m = m_1 + m_2$ ,  $\delta m = m_1 - m_2$ ,  $L^i$  el momento angular orbital, y  $\eta = m_1 m_2 / m^2$  cociente de masas simétrico.

Para simplificar, consideramos el caso de masas iguales que no giran. Por lo tanto,  $\delta m = 0$ ,  $m = 1$  y  $\eta = \frac{1}{4}$ . Con estos parámetros de masa, los momentos radiativos del cuadrupolo son

$$I_N^{ij} = \eta m \left[ x^i x^j - \frac{1}{3} \delta_{ij} x^2 \right] \quad (\text{C.1})$$

$$J_N^{ij} = 0. \quad (\text{C.2})$$

Explícitamente, los momentos radiativos distintos de cero en la aproximación  $N$  están dados por,

$$I_N^{zz} = -\frac{1}{12} m r^2 \quad (\text{C.3})$$

$$I_N^{xx} = \frac{1}{24} m r^2 [1 + 3 \cos(2\omega t)] \quad (\text{C.4})$$

$$I_N^{yy} = \frac{1}{24} m r^2 [1 - 3 \cos(2\omega t)] \quad (\text{C.5})$$

$$I_N^{xy} = I_N^{yx} = \frac{1}{8} m r^2 [\sin(2\omega t)] \quad (\text{C.6})$$

Dado que el momento angular orbital  $L = \eta m r^2 \omega$  se conserva en la aproximación  $N$  obtenemos

$$I_N^{(3)zz} = 0 \quad (\text{C.7})$$

$$I_N^{(3)xx} = 4L_{in}\omega^2[\sin(2\omega t)] \quad (\text{C.8})$$

$$I_N^{(3)yy} = -4L_{in}\omega^2[\sin(2\omega t)] \quad (\text{C.9})$$

$$I_N^{(3)xy} = I_N^{(3)yx} = -4L_{in}\omega^2[\cos(2\omega t)], \quad (\text{C.10})$$

donde el símbolo (3) denota tres derivadas temporales. Usando la Ec. (4.6) y tomando un promedio durante un período, tenemos

$$\dot{M} = -\frac{1}{10\sqrt{2}}\dot{\sigma}_R^{ij}\dot{\sigma}_R^{ij} \quad (\text{C.11})$$

$$= -\frac{32}{10\sqrt{2}}L_{in}^2\omega^4. \quad (\text{C.12})$$

Entonces,

$$\dot{M}_{max} = -\frac{32}{10\sqrt{2}}\omega_{max}^4 L_{in}^2. \quad (\text{C.13})$$

Si las masas no son iguales, la fórmula resultante para la subclase que no gira viene dada por

$$\dot{M}_{max} = -\frac{16}{10\sqrt{2}}\omega_{max}^4 L_{in}^2 \left(1 + \frac{1}{36}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^2 (M_{in}\omega_{max})^{\frac{2}{3}}\right). \quad (\text{C.14})$$

El valor más alto permitido para  $\omega$  en la aproximación PN es 0,05. Sin embargo, el factor numérico resultante de  $4 \times 10^{-5}$  en la ecuación anterior no debe compararse con el obtenido de la evolución numérica ya que estamos en la aproximación PN y los binarios ni siquiera están cerca del tiempo de fusión. Sin embargo, es importante ver la dependencia cuadrática de la luminosidad máxima con el valor inicial del momento angular total del sistema.

Si queremos aplicar este modelo a las otras clases de giro (A o P), usamos  $L^i = J^i - (S_1 + S_2)^i$ , lo que nos da un polinomio de segundo orden con coeficientes cero y de primer orden que no desaparecen. Aunque los coeficientes dependerán de los espines iniciales  $(S_1, S_2)$ , el modelo seguirá siendo útil para dar un valor representativo de la dependencia.

También se puede escribir la luminosidad máxima en términos de la relación  $q$  escribiendo el momento angular orbital como

$$L = \eta m r^2 \omega = \frac{q}{(1+q)^2} m r^2 \omega. \quad (\text{C.15})$$

Insertando esta ecuación en (C.14) y usando la fórmula de la órbita circular

$$\omega^2 r^2 = \frac{m}{r}$$

se obtiene

$$\dot{M} = -\frac{16}{10\sqrt{2}} \frac{q^2}{(1+q)^4} \left(\frac{m}{r}\right)^5 \left(1 + \frac{1}{36} \frac{m}{r} \left(\frac{1-q}{1+q}\right)^2\right). \quad (\text{C.16})$$

La última órbita circular estable antes de la coalescencia está dada por

$$r_{stable} = 6m,$$

Por lo tanto, la luminosidad en esa órbita en particular está dada por

$$\dot{M} = -\frac{16}{10\sqrt{2}} \frac{q^2}{(1+q)^4} \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(1 + \frac{1}{216} \left(\frac{1-q}{1+q}\right)^2\right). \quad (\text{C.17})$$

Ahora asumimos que los detalles finales de la coalescencia no cambian la dependencia del parámetro dada por la ec. (C.17). Sin embargo, la gran cantidad de energía debe tenerse en cuenta dando dos constantes fenomenológicas, una para cada contribución de la masa y términos de cuadrupolo magnético. Suponemos así que

$$\dot{M} = -\frac{A}{1000} \frac{q^2}{(1+q)^4} \left(1 + \frac{B}{216} \left(\frac{1-q}{1+q}\right)^2\right), \quad (\text{C.18})$$

y los valores de  $A$  y  $B$  se encuentran ajustando la fórmula con los datos numéricos. También se puede hacer una correlación fenomenológica entre el valor final de la velocidad  $V_f$  o cantidad de movimiento  $P_f$  y  $q$ . Tenga en cuenta que la ecuación. (4.7) depende del producto de la parte real e imaginaria de  $\sigma$ . Por lo tanto, una derivación análoga a la realizada para  $\dot{M}$  da como resultado

$$V_f = a\eta^2 \frac{\delta m}{m} = a \frac{q^2}{(1+q)^4} \frac{1-q}{1+q}, \quad (\text{C.19})$$

donde el parámetro  $a$  se puede obtener de la gráfica numérica. Este último resultado se ha derivado previamente en la Ref. [31].