UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

JOSÉ GOMES DE ASSIS

Fatores de Fase Geométricos e Topológicos Em Gravitação

João Pessoa - 2000

A848f Assis, José Gomes de.
Fatores de fase geométricos e topológicos em gravitação / José Gomes de Assis.-- João Pessoa, 2000.
160f.
Orientador: Valdir Barbosa Bezerra
Tese (Doutorado) – UFPB/CCEN
1. Física. 2. Fases geométricas. 3. Mecânica quântica. 4. Efeito Aharonov-Bohm. 5. Teoria da gravitação. 6. Defeitos topológicos.

UFPB/BC CDU: 53(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

JOSÉ GOMES DE ASSIS

Fatores de Fase Geométricos e Topológicos Em Gravitação

Tese submetida à Universidade Federal da Paraíba como parte dos requisitos para a 0btenção do grau de doutor em Física.

João Pessoa - 2000

Às minhas filhas, Cibelle, Thaís e Priscilla

À nega.

AGRADECIMENTOS

À Deus pela sua infinita grandeza.

Ao professor Valdir Barbosa Bezerra pela construtiva e eficiente orientação e amizade.

Ao professor Joel B. da Fonseca pela ajuda nos cálculos computacionais.

Ao Professor Cláudio Furtado pela criteriosa análise dos cálculos.

Aos professores e funcionários do departamento de Física da UFPB, Campus I, pelo apoio e amizade durante o desenvolvimento desta tese.

Aos colegas da pós-graduação pela amizade e assistência que me foram dados.

À Jean Spinelly pela ajuda na digitação final e pelo companheirismo.

Aos colegas do Departamento de Matemática da UFPB, Campus I, pelo apoio e incentivo.

Resumo

Os fatores de fase geométricos e topológicos têm sido objeto de grande interesse em diferentes áreas da física. Nas teorias de gauge não-Abelianas, essas quantidades foram usadas no estudo de propriedades, como, por exemplo, o confinamento de quarks na cromodinâmica quântica. No contexto da mecânica quântica, a fase geométrica aparece na evolução de um sistema cuja Hamiltoniana é dependente do tempo, e é de fundamental importância no contexto da gravitação. Os fatores de fase também foram usados para se obter uma descrição da teoria independente de gauge. Nesta tese usamos o fator de fase nas teorias da gravitação de Einstein e Kaluza-Klein para investigar o efeito Aharonov-Bohm, caracterizar globalmente alguns espaços-tempos e estudar o aparecimento da fase de Berry e suas relações com os parâmetros que caracterizam os espaços-tempos considerados. Investigamos também, como o fator de fase no espaço-tempo de Kerr-Newman com defeito cônico, depende da rotação e da presença do defeito.

Fatores de Fase Geométricos e Topológicos em Gravitação

José Gomes de Assis

25 de Maio de 2010

Conteúdo

Abstract

The geometric and topological phase factors have drawn considerable interest in different areas of physics. In the non-Abelian gauge theories they have been used in connection with the problem of confinement of quarks in quantum cromodinamic. In quantum mechanics, the geometric phase of the wave function describing the evolution of a system with time-dependent Hamiltonian has fundamental importance. In the context of gravity, some investigations concerning these phases were done in connection and with the description of this theory in a way independent of gauge. In this thesis we use these phases in Einstein and Kaluza-Klein theories of gravity in order study the Aharonov-Bohm effect, characterize globally some spacetime, to study the appearance of Berry phase and its relation with the parameters characterizing the spacetime under consideration. We also perform the computations of the phase factor for the gravitational field corresponding to the Kerr-Newman metric with a conical defect, showing how the phase depends on the rotation and on the presence of the defect.

Introdução

Os problemas relacionados com o aparecimento e as propriedades das fases em mecânica quântica tem uma longa história e pode ser remetida ao início dos anos 20 quando da introdução dos números complexos em mecânica quântica. De fato, alguns anos antes Schrödinger publicou um trabalho [1] em que introduziu o fator de fase $\exp(-\frac{ie}{\hbar}\oint\limits_{C} A_\mu dx^\mu)$, com base na teoria de Weiy [2]. Este fator está associado à fase da função de onda de partículas carregadas no campo de um solenóide, no efeito Aharonov-Bohm eletromagnético [3].

Em 1975, Wu e Yang [4] chamaram a atenção para o fato de que a quantidade física que possui relevância no eletromagnetismo não é a intensidade de campo, $\mathcal{F}_{\mu\nu}$, nem o potencial vetor, A_μ, e sim o fator de fase, que é um número complexo e possui diferentes valores para cada contorno diferente do ponto de vista topológico. Eles resumiram suas observações dizendo que [4]:

- O tensor intensidade de campo, $\mathcal{F}_{\mu\nu}$, subdescreve o eletromagnetismo, o que é confirmado pelo efeito Aharonov-Bohm.

- A fase $-\frac{ie}{\hbar}\oint A_\mu dx^\mu$ sobredescreve o eletromagnetismo, pois, experimentalmente, não se pode distinguir entre dois casos em que a diferença de fase é 2π ou múltiplo de 2π.

- O eletromagnetismo é completamente descrito pelo fator de fase, que contém a necessária e duficiente informação acerca dos fenômenos eletromagnéticos.

A formulação do eletromagnetismo usando o fator de fase foi generalizada para o caso de campos de gauge não-Abelianos [4]. Neste caso, o fator de fase tornou-se mais importante, pois, o tensor intensidade de campo subdescreve os campos de gauge mesmo em regiões simplesmente conexas. No contexto das teorias de gauge não-Abelianas foi evidenciada a importância do fator de fase no estudo de propriedades a grandes distâncias [5], e como conseqüência disto, a formulação [6] dessas teorias em termos do fator de fase tem sido objeto de grande interesse.

A propriedade de invariância de gauge do fator de fase (*loop* de Wilson) permite, então, fazer uma formulação da teoria de modo a eliminar qualquer referência aos gauges [7]. Assim, o formalismo diferencial das teorias de gauge pode ser reformulado em termos de um formalismo integral [8] no qual o fator de fase dependente do contorno desempenha um papel fundamental.

A extensão do formalismo do fator de fase para a teoria da gravitação foi considerada, inicialmente, por Mandelstam [9], que estabeleceu várias equações envolvendo o fator de fase (variável de contorno), e também por Yang [8], Menskii [10] e Voronov e Makeenko[11].

No início dos anos 80, Berry [12] descobriu que se a evolução de um dado Hamiltoniano é determinado por um conjunto de parâmetros dependentes do tempo, então, a mudança de fase da função de onda, na evolução cíclica do sistema, isto é, sob condições periódicas, possui propriedades geométricas, e a mudança de fase não depende da evolução do sistema (que é admitido ser suficientemente longo para ser considerado adiabático), e sim, é determinada pelas propriedades geométricas do espaço dos parâmetros. De fato, essa mudança de fase pode ser interpretada como a condição de transporte paralelo [13] dos vetores de estado do sistema quântico no espaço de Hilbert.

Várias generalizações da fase de Berry tem sido feitas, como, por exemplo, considerar a evolução cíclica de sistemas degenerados [14] (caso não-Abeliano), e não exigir a condição da adiabaticidade [15], bem como considerar a fase de Berry para um sistema quântico evoluindo em um campo gravitacional [16],[17] e [18], ou no contexto cosmológico[19].

Em física, dois tipos de fases despertam interesse. Um tipo é a fase geométrica que é determinada pela estrutura geométrica ao longo de uma curva, bem como da conexão que é usada para o transporte paralelo ao longo desta curva. No contexto da fase de Berry, a natureza geométrica significa que o fator de fase depende somente da curva no espaço dos estados quânticos-trajetória no espaço de Hilbert, que é conhecido como espaço de Hilbert projetivo. Em particular, a fase geométrica é independente da parametrização da curva no espaço projetivo de Hilbert.

O outro tipo é a fase topológica, a qual é invariante pela deformação contínua e suave de curva escolhida. Este fato não ocorre para fases geométricas, em geral. Fases topológicas deste tipo forman um subconjunto de todas as fases geométricas.

O efeito Aharonov-Bohm [3] tem sido discutido por mais de quarenta anos e ainda continua a ser visto como um assunto de grande interesse em várias áreas da física [20]. Este efeito tem sido investigado experimentalmente [21]. No contexto de física da matéria condensada, o efeito Aharonov-Bohm tem sido largamente estudado na teoria de defeitos em sólidos [22], [23].

A

existência do efeito gravitacional Aharonov-Bohm no espaço-tempo quadridimensional da corda cósmica é bem conhecido e foi investigado por diversos autores [24],[25] e [26]. Nesta tese, estendemos esse estudo para várias configurações de campo gravitacional, tanto no contexto da teoria de Einstein, quanto na de Kaluza-Klein, e também investigamos esses dois tipos de fase nesses contextos.

No primeiro capítulo, apresentamos uma revisão matemática sobre temas importantes para a compreensão dos estudos feitos nesta tese. O fator de fase, tanto em teorias de gauge, quanto em gravitação tem uma grande importância nesse estudos, daí a ênfase dada a este objeto e ao efeito Aharonov-Bohm eletromagnético e seu análogo gravitacional. A revisão termina por apresentar uma correspondência entre os termos usados em teorias de gauge e espaços fibrados.

No segundo capítulo, verificamos que a transformação de holonomia para curvas no plano perpendicular ao cilindro de matéria com rotação depende do momento angular da fonte, apesar de esta grandeza não afetar o tensor de curvatura, na aproximação de campo fraco, em que o cilindro gira lentamente de modo que os termos proporcionais ao quadrado do momento angular são desprezíveis. Esta dependência do fator de fase com uma grandeza que não afeta a curvatura da região acessível a partícula denominamos de efeito Aharonov-Bohm gravitacional generalizado. Também determinamos o fator de fase associado à corda quiral e à multicorda quiral e estabelecemos a caractrerização global do espaço-tempo de N cordas com uma delas dotada de um *boost*. Mostramos que no caso da corda com rotação, o fator de fase é um elemento do grupo de Poincaré, e que este fato está associado à existência de um sistema de coordenadas plano. Este resultado não pode ser generalizado para um espaço-tempo qualquer. Obtemos uma generalização da solução de monopolo, calculamos os fatores de fase e mostramos que eles satisfazem às relações de Mandelstam.

Ressaltamos, no capítulo 3, a importância da fase de Berry em diversos ramos da física, exibimos a sua dedução para um sistema que evolui adiabaticamente com o tempo, caracterizando-a como um objeto puramente geométrico, pois, depende fundamentalmente das curvas fechadas no espaço de parâmetros dos sistemas considerados. Além do mais, apresentamos um resumo dos estudos que vem sendo feitos sobre fase geométrica, no sentido de generalizações para campos de gauge não-Abelianos e para aproximação adiabática relativística. Encontramos a fase de Berry adquirida por uma partícula escalar quântica nos espaços-tempos da corda quiral e da multicorda quiral, do cilindro com rotação e em universos isotrópicos.

No capítulo 4, apresentamos uma breve revisão da teoria penta-dimensional Abeliana de Kaluza-Klein e utilizamos as transformações de holonomias, em diversos espaço-tempos, como os associados ao solenóide e monopolo global, à corda e multicorda quiral magnética, para estudar aspectos globais destes espaço-tempos.

Apresentamos um tratamento unificado dos efeitos Aharonov-Bohm eletromagnético e gravitacional. O resultado final nos fornece os efeitos eletromagnético e gravitacional separado e simultaneamente. A parte gravitacional é caracterizada pelos parâmetros α, J^t e J^z; e a eletromagnética pelo fluxo Φ. O aparecimento desses efeitos de forma combinada é uma conseqüência do esquema de unificação da teoria de Kaluza-Klein.

No capítulo 5, apresentamos, inicialmente, algumas considerações sobre a obtenção da métrica de Kerr, que é a única solução estacionária das equações de Einstein no vazio correspondente a um buraco negro com rotação. A seguir, calculamos os fatores de fase para várias curvas no espaço-tempo de Kerr contendo um defeito cônico (corda cósmica) e exibimos o efeito da rotação na expressão da holonomia total. Particularizamos esses resultados para o espaço-tempo de Schwarzschild com defeito.

Para finalizar, apresentamos as conclusões sobre os resultados constantes desta tese.

Capítulo 1

Resultados Básicos

1.1 Introdução.

Nosso objetivo neste primeiro capítulo, é fornecer alguns resultados que serão importantes para o entendimento da estrutura matemática a ser usada. Vamos iniciar nossa fundamentação matemática pelo conceito de Variedades Diferenciáveis e nos estenderemos até o conceito de Fibrados e em particular, o de Fibrado Principal, conexões em Fibrados. Os conceitos aqui apresentados não têm o rigor matemático que são apresentados na literatura própria do assunto, pois estamos fazendo uma simples revisão. Estes conceitos são encontrados nos bons livros de Geometria Diferencial e Riemanniana e nos compêndios de Geometria e Topologia Algébrica [27]. Apresentaremos também um paralelo entre teorias de gauge e teoria de fibrados, e o conceito de fator de fase. Discutiremos o efeito Aharonov-Bohm eletromagnético e seu análogo gravitacional.

1.2 Variedades diferenciáveis.

O primeiro passo a ser dado na construção da teoria geral da relatividade é deixar o espaço Euclidiano e o sistema de coordenadas Cartesianas. Contudo, a partir da nossa experiência do mundo real queremos construir uma estrutura que, localmente, seja um espaço-tempo quadrimensional. Este objeto é chamado de variedade quadridimensional. Por uma questão de conveniência, não vamos restringir as definições ao espaço de quatro dimensões. Iremos trabalhar em um espaço de n-dimensões.

Uma variedade diferenciável M de classe C^∞, de n dimensões, é um conjunto de pontos juntamente com famílias de pares $\{(U_i, \varphi_i)\}$, onde i é um índice que assume determinados valores, podendo inclusive assumir valores em um conjunto infinito. Essas famílias devem satisfazer às seguintes condições:

(i) $\{U_i\}$ são conjuntos abertos que cobrem M, isto é, $\bigcup_i U_i = M$, e φ_i é um homeomorfismo (φ_i e φ_i^{-1} são contínuas) de U_i em um aberto U_i' de $\mathbb{R}^n$.

(ii) Dados U_i e U_j tais que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, a aplicação $\psi_{ij} = \varphi_i \varphi_j^{-1}$ de $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ para $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ é de classe C^∞.

O par (U_i, φ_i), para um valor fixo de i é chamado de carta, enquanto a família $\{(U_i, \varphi_i)\}$ é chamada de atlas. O subconjunto U_i é chamado de vizinhaça de coordenadas, enquanto φ_i é a função coordenada, ou simplesmente coordenada. A coordenada φ_i é representada por n funções $\{x^1(p), ..., x^n(p)\}$, $p \in M$, e o conjunto $\{x^\mu(p)\}$ é também chamado de coordenadas.

Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma lei que faz corresponder a cada pomto $p \in M$ um produto interno $< \cdot >_p$, (forma bilinear simétrica definida positiva) em $T_p(M)$ (espaço tangente de M em p), que varia diferencialmente no seguinte sentido: Se $\mathbf{x}$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $\mathbf{x}(x^1, x^2 \ldots x^n) = q \in \mathbf{x}(\mathbf{U}')$ e $\frac{\partial}{\partial x^i}(q) = d\mathbf{x}(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, então,

$$< \frac{\partial}{\partial x^\mu} \cdots \frac{\partial}{\partial x^\nu} >_q \equiv g_{\mu\nu}(x^1, \ldots, x^n), \tag{1.1}$$

é uma função diferenciável na vizinhança U de M.

Outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da métrica Riemanniana é dizer que para todo par (X, Y) de campos de vetores diferenciáveis em U, a função $< X, Y >$ é difenciável em U. Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma variedade Riemanniana. Se $< V, V' > = 0$ para qualquer $V' \in T(M)$, então $V = 0$ e $< V, V' > = < V', V >$, $\forall\ V, V' \in T_p(M)$, e dizemos que M é uma variedade pseudo-Riemanniana.

Sejam M e N variedades Riemannianas, elas são ditas difeomórficas se existir uma aplicação C^{∞}, $f: M \rightarrow N$ com inversa também de classe C^{∞}. Se duas variedades forem difeomórficas, então, elas terão a mesma estrutura diferencial.

Dizemos que f é uma isometria se:

$$< X, Y >_p = \ < df_p(X), df_p(Y) >_{f(p)} \ , \forall p \in M \text{ e } X, Y \in T_p(M). \tag{1.2}$$

Se U é uma vizinhança em M e $f: U \rightarrow f(U) \subset N$ satisfaz a equação eq.(1.2), então f é chamada de isometria local.

Um exemplo de variedade Riemanniana é o $\mathbb{R}^n$, com $\frac{\partial}{\partial x^i} \equiv e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$. A métrica é dada por $< e_i, e_j > = \delta_{ij}$. $\mathbb{R}^n$ é chamado espaço Euclidiano de dimensão n e a geometria Riemanniana deste espaço é a métrica Euclidiana.

Dizemos que uma métrica $g_{\mu\nu}(x)$ é uma forma invariante se efetuada uma mudança de variável $x \rightarrow x'$ temos

$$g_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x), \forall x \in M. \tag{1.3}$$

Se sob tal mudança de variável $g_{\mu\nu}(x)$ se transforma como

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} g_{\rho\sigma}(x'), \tag{1.4}$$

e a mudança $x \rightarrow x'$ é dita uma isometria.

1.3 Formas diferenciais.

Um tensor do tipo (q, r) é um objeto multilinear, o qual mapeia q elementos de $T_p^*(M)$(espaço dual do $T_p(M)$) e r elementos de $T_p(M)$ em um múmero real. Denotamos o conjunto dos tensores tipo (q, r) em $p \in M$, por $\mathcal{T}^q_{r,p}(M)$. Um elemento de $\mathcal{T}^q_{r,p}(M)$ é escrito em termos da base $\{\frac{\partial}{\partial x^{\mu_i}}\}$ na forma

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_q}{}_{\nu_1 \dots \nu_r} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} dx^{\nu_1} \cdots dx^{\nu_r}, \tag{1.5}$$

vemos assim que T é um funcional linear de $\otimes^q T_p^*(M) \otimes^r T_p(M)$ em $\mathbb{R}$.

A operação de simetria em um tensor $\omega \in \mathcal{T}^0_{r,p}(M)$ é definida por

$$P\omega(V_1, ..., V_r) \equiv \omega(V_{P(1)}, ..., V_{P(r)}), \tag{1.6}$$

aonde $V_i \in T_pM$ e P é um elemento de S_r, grupo de simetria de ordem r. Se P for uma simetria de ω em todos os pontos da variedade, então P é chamada simetria de ω ou transformação de simetria de ω. Quando P é uma simetria da métrica, dizemos que P é uma isometria. Uma r-forma diferencial é um tensor totalmente antissimétrico do tipo $(0,r)$. Denotamos o espaço vetorial das r-formas em $p \in M$ por $\Omega_p^r(M)$, cuja base é o produto exterior $\wedge$, de r-formas

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r} = \sum_{P \in S_r} sgn(P) dx^{\mu_{P(1)}} \otimes dx^{\mu_{P(2)}} ... \otimes dx^{\mu_{P(r)}}, \tag{1.7}$$

que é um elemento $\omega \in \Omega_p^r(M)$, sendo expandido como

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 ... \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}, \tag{1.8}$$

onde $\omega_{\mu_1\mu_2...\mu_r}$ são totalmente antissimétricos e $dx^1 \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}$ forma uma base para $\Omega_p^r(M)$ que é um espaço de dimensão $n!/r!(n-r)!$. Podemos associar a cada ponto da variedade uma r-forma, definindo assim, um campo de formas $\Omega_p^r(M)$.

O produto exterior de uma q-forma por uma r-forma é uma aplicação

$$\wedge : \Omega_p^q(M) \times \Omega_p^r(M) \rightarrow \Omega_p^{q+r}(M),$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\zeta \wedge \zeta = 0$ se $\zeta \in \Omega_p^q(M)$ e q é impar;

(ii) $\zeta \wedge \xi = (-1)^{qr} \xi \wedge \zeta$, com $\zeta \in \Omega_p^q(M)$ e $\xi \in \Omega_p^r(M)$;

(iii) $(\zeta \wedge \xi) \wedge \phi = \zeta \wedge (\xi \wedge \phi)$ com $\zeta \in \Omega_p^q(M)$, $\xi \in \Omega_p^r(M)$ e $\phi \in \Omega_p^s(M)$.

Portanto, dada uma q-forma ζ e uma r-forma ξ, o produto $\zeta \wedge \xi$ é uma $(q+r)$-forma definida por

$$(\zeta \wedge \xi)_{\mu_1 ... \mu_{q+r}} = \frac{(q+r)!}{q!r!} \zeta_{[\mu_1 ... \mu_q} \xi_{\mu_{q+1} ... \mu_{q+r}]}.$$

Se $\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_r} dx^1 \wedge dx^{\mu_2} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}$ for uma r-forma, define-se a derivada exterior de ω como sendo a aplicação $d_r : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$ dada por

$$d_r \omega = \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \omega_{\mu_1 \cdots \mu_r} \right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}. \tag{1.9}$$

Vamos apresentar o exemplo mais simples e mais conhecido de formas que é a 1-forma. Uma 1-forma em uma variedade M é uma aplicação

$$\begin{aligned} \phi: \ & T_p(M) \rightarrow \mathbb{R} \\ & (X,Y) \hookrightarrow \phi(aX+bY) = a\phi(X) + b\phi(Y) \end{aligned}$$

Notemos que $\phi(X)$ e $\phi(Y)$ pertencem ao dual, $T_p^*(M)$, portanto $\phi(X) = \sum_i f_i dx_i$ onde $\{dx_i\}$ é uma base para $T_p^*(M)$. Sejam $\phi = \sum_i f_i dx_i$ e $\omega = \sum_i g_i dx_i$ duas 1-formas. Então,

(i) $\phi + \omega = \sum_i (f+g)dx_i$, é uma 1-forma;

(ii) $dx_i \wedge dx_j = 0$ se $i = j$ e $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dxi$

;

(iii) $d\phi = \sum_i df_i \wedge dx_i$, é uma 2-forma;

(iv) Se h e t são funções, então,

1. $d(ht) = dh.t + hdt$;
2. $d(h\phi) = dh \wedge \phi + h \wedge d\phi$;
3. $d(\phi \wedge \omega) = d\phi \wedge \omega - \phi d\omega$.

Vamos exibir alguns exemplos de cálculo com 1-forma. Primeiramente consideremos $\phi = xdx - ydy$ e $\varphi = zdx + xdz$, então,

$$\begin{aligned} \phi \wedge \varphi &= (xdx - ydy) \wedge (zdx + xdz) \\ &= xzdxdx + x^2 dxdz - yzdydx - yxdydz. \end{aligned}$$

Mas $dx \wedge dx = 0$, e $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$, portanto, temos que

$$\phi \wedge \varphi = yzdx \wedge dy + x^2 dx \wedge dz - xydy \wedge dz,$$

que é uma 2-forma.

Considerando a 1-forma $\theta = zdy$, então

$$\theta \wedge \phi \wedge \varphi = yz^2 dydxdy + x^2 zdydxdz - xyzdydydz.$$

Como $dy \wedge dx \wedge dy$ e $dy \wedge dy \wedge dz$ contém cada uma, uma repetição, portanto são nulas, logo

$$\theta \wedge \phi \wedge \varphi = -x^2 z dxdydz,$$

que é uma 3-forma.

Consideremos agora a 2-forma $\eta = ydxdz + xdydz$. Segue que

$$\theta \wedge \eta = (x^2 + y^2)dxdydz.$$

Vamos considerar também que $\phi = xydx + x^2dz$, então

$$\begin{aligned} d\phi &= d(xy) \wedge dx + d(x^2) \wedge dz \\ &= (ydx + xdy) \wedge dx + 2xdxdz \\ &= -xdxdy + 2xdxdz. \end{aligned}$$

Uma q-forma ζ é dita fechada se $d\zeta = 0$, e é dita exata se $\zeta = d\xi$ para alguma $(q-1)-$forma. Portanto, todas as formas exatas são fechadas. Como exemplo, vamos considerar o campo vetorial covariante $\mathcal{A}_\mu$ do campo eletromagnético. O tensor campo eletromagnético $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ é uma 2-forma definida por

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A},$$

ou

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}\mathcal{A}_{\nu]} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu,$$

onde $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$.

Pela identidade de Bianchi $\partial_{[\rho}\mathcal{F}_{\mu\nu]} = 0$ ou $d\mathcal{F} = 0$, que é uma consequência de $d^2\mathcal{A} = 0$. A equação $d\mathcal{F} = 0$ corresponde a duas das equações de Maxwell.

Com a operação de derivação de uma q-forma, construímos uma aplicação

$$f : \Omega_p^q(M) \to \Omega_p^{q+1}(M).$$

Considere o subespaço $\Lambda_p^q(M)$ de $\Omega_p^q(M)$, que consiste das formas exatas, isto é, formas diferenciais ζ tal que $d\zeta = 0$. O espaço $\Lambda_p^q(M)$ contém o subespaço $\Delta_p^q(M)$ que consiste de todas as q-formas exatas em $\Omega_p^q(M)$, isto é, de todas as formas diferenciais em $\Omega_p^q(M)$ que podem ser escritas como $d\xi$ em termos de uma $(q-1)$-forma. Defina o espaço vetorial

$$W_p^q(M) = \frac{\Lambda_p^q(M)}{\Delta_p^q(M)},$$

constituído por todas as formas fechadas de modulo exatas.

Dizemos que $W_p^q(M)$ é o espaço vetorial da q-ésima cohomologia de Rham. Ele tem dimensão $a_q = \dim \Lambda_p^q(M) - \dim \Delta_p^q(M)$, que é chamada o q-ésimo número de Betti da variedade M e é um invariante topológico. A característica de Euler da variedade é dada por $\mathcal{X} = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q a_q$.

1.4 Grupos e álgebras de Lie.

Os grupos de Lie constituem uma classe especial de variedades diferenciáveis. Eles têm a estrutura de uma variedade diferenciável e além do mais são grupos com a operação de grupo que é diferenciável.

Um grupo de Lie G é uma variedade diferenciável que possui estrutura de grupo, isto é, tem uma operação definida, $\star$ tal que

(i) $\begin{array}{rl} \star : & G \times G \to G \\ & (g, g') \to g * g' \end{array}$ (fechamento);

(ii) a identidade e, e o inverso g^{-1}de qualquer $g \in G$, pertencem a G e são diferenciáveis.

Um exemplo de variedade grupo de Lie é o $\mathbb{R}^+$, com a operação multiplicação.

A ação de um grupo de Lie G sobre uma variedade M é uma aplicação diferenciável

$$\eta : G \times M \to M$$

tal que:

(i) $\eta(e, p) = p$, $\forall p \in M$,onde e é a identidade de G;

(ii) $\eta(g, \eta(g', p)) = \eta(gg', p)$, com g, $g' \in G$.

Seja G um grupo Lie, a ação à esquerda de G (translação à esquerda de G) é o mapeamento

$$L_g : G \to G, \tag{1.10}$$

definido por $L_g(x) = gx$, $x \in G$. Este mapeamento induz a aplicação

$$L_{*g} : T_x(G) \to T_{gx}(G), \tag{1.11}$$

definida por $L_{*g}(X) = Y$,com $Y \in T_{gx}(G)$.

Um campo vetorial X tal que $L_{*g}(X)_{|x} = X_{|gx}$ é dito invariante à esquerda de M. Seja $\mathcal{G}(G)$ o conjunto de todos esses campos vetoriais (espaço vetorial). De maneira análoga define-se a invariância à direita$(D_g : G \to G)$, definida por $D_g(x) = xg$ em G.

Sejam H um espaço de Hilbert e $GL(H)$ o conjunto das transformações lineares invertíveis e G um grupo. A representação de G em H é um homomorfismo de grupos,

$$\begin{aligned} \rho : \quad & G \to GL(H). \\ & g \to \rho(g) \text{ linear} \end{aligned}$$

A aplicação

$$\psi : \mathcal{G}(G) \to T_e(G), \tag{1.12}$$

definida por $\psi(X) = X(e)$, é um isomorfismo entre espaços vetoriais, e daí

$$\dim \mathcal{G}(G) = \dim T_e(G) = \dim G. \tag{1.13}$$

Necessitamos deste fato para que tenhamos $\mathcal{G}(G)$ como uma álgebra de Lie, a qual é uma versão infinitesimal de G. A vantagem da álgebra de Lie é que ela é um objeto algébrico com estrutura linear, a qual sempre determina G localmente.

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. V é uma álgebra de Lie se existe o produto $\bullet$

$$\begin{aligned} \bullet : \quad & V \times V \to V \\ & (x, y) \to [x, y] \end{aligned} \tag{1.14}$$

tal que:

(i) $[ax + bx', y] = a\,[x, y] + b[x', y]$, $(\bullet)$ é bilinear

(ii) $[x, y] = -\,[y, x]$, $(\bullet)$ é antissimétrico

(iii) $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$, $(\bullet)$ satisfaz a identidade de Jacobi.

Como exemplo de álgebra de Lie temos o espaço de todos os campos vetorias de M, $\mathcal{X}(M)$ munido com o parêntese de Lie $[X, Y] = XY - YX$.

Dado um grupo de Lie G podemos construir sua álgebra de Lie (via campos laterais à esquerda) da seguinte maneira. Consideremos $\mathcal{G}(G)$ munindo-o com o parênteses de Lie

$$[X, Y] = X^{\mu}\partial_{\mu}Y^{\nu} - Y^{\nu}\partial_{\mu}X^{\nu}. \tag{1.15}$$

Assim $\mathcal{G}(G)$ é a álgebra de Lie de G.

Seja $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ uma base de $\mathcal{G}(G)$, daí:

(i) $[E_i, E_j] = E_iE_j - E_jE_i \in \mathcal{G}(G)$;

(ii) $[E_i, E_j] = C_{ij}^{k}E_k$, (o comutador de dois campos vetorias à esquerda é também um campo vetorial à esquerda), onde C_{ij}^{k} são as constantes de estrutura do grupo de Lie sujeitas às condições

1. $C_{ij}^{k} = -C_{ji}^{k}$;

2. $C_{ij}^{s}C_{ks}^{m} + C_{ki}^{s}C_{js}^{m} + C_{jk}^{s}C_{is}^{m} = 0$ (identidade de Jacobi).

Exibiremos agora alguma relações entre grupo e álgebra de Lie.

(i) Cada grupo de Lie está associado a uma única álgebra de Lie.

(ii) Cada álgebra de Lie define um único grupo de Lie local.

(iii) Dada uma álgebra de Lie $\mathcal{G}(G)$ associada a G, corresponde um único grupo de Lie $\overline{G}$ simplesmente conexo, denominado de cobertura universal de $\mathcal{G}$. $\overline{G}$ é localmente isomorfo a G, via projeção $p : \overline{G} \to G$. Esta é uma propriedade global do grupo de Lie.

Observemos que um grupo de Lie é Abeliano se somente se $C_{ij}^{k} = 0, \forall i,j,k$. O subgrupo H de G é normal em G se e somente se os geradores h_i de H satisfazem a relação

$$[E_i, h_j] = C_{ij}^{k}h_k. \tag{1.16}$$

Toda subalgebra $\mathcal{G}_i$ de uma álgebra $\mathcal{G}$ de um grupo de Lie G, gera localmente, um subgrupo. Uma subálgebra com base $\{N_i\}_{i=1}^{r}$satisfazendo a eq.(1.15) gera um subgrupo normal.

Seja

$$\varphi : \mathbb{R} \to G,$$

um homomorfismo de grupos de Lie Abelianos. O conjunto $\{\varphi(t); t \in \mathbb{R}\}$ é um subgrupo de G, chamado de grupo a 1-parâmetro. Demonstra-se que dado um grupo de Lie G, para qualquer $X \in \mathcal{G}, \neq 0$, existe um único subgrupo a 1-parâmetro de G o qual é a transformação infinitesimal de X. Formalmente a álgebra de Lie $\mathcal{G}$ pode ser definida como as direções tangentes em G, pois $\mathcal{G} \cong T_e(G)$. Esta é uma maneira mais simples e direta de definir a álgebra de Lie. Assim cada elemento $\zeta \in \mathcal{G}$ é um vetor tangente a G e podemos considerar curvas em G tendo ζ como vetor tangente. Dentre essas curvas existe uma única curva $g(t)$, a qual é também um subgrupo de G tal que :

(i) $g(t_1 + t_2) = g(t_1) \cdot g(t)$;

(ii) $g(0) = 1$, $g(t)^{-1} = g(-t)$.

Notemos que g é um grupo a 1-parâmetro. Assim qualquer subgrupo a 1-parâmetro determina um vetor tangente

$$\zeta = \frac{d}{dt} g(t)_{|t=0} \text{ em } \mathcal{G}. \tag{1.17}$$

A correspondência entre ζ e $g(t)$ é $g(t) = \exp(t\zeta)$. A razão desta notação é que no caso de $GL = GL(n, \mathbb{R})$ temos

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\zeta)^n}{n!} \tag{1.18}$$

e, portanto podemos identificar $\mathcal{G} = GL(n, \mathbb{R})$ com $M(n, n)$ (espaço das matrizes quadradas $n \times n$).

Seja V um espaço vetorial real. A representação da Álgebra de Lie $\mathcal{G}$ em V é uma aplicação

$$\begin{aligned} \rho :\ & \mathcal{G} \to LG(V) \\ & A \to \rho(A), \end{aligned}$$

tal que:

(i) $\rho(\alpha A + \beta B) = \alpha\rho(A) + \beta\rho(B)$;

(ii) $\rho[A, B] = \rho(A)\rho(B) - \rho(B)\rho(A)$.

Seja $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ uma base para $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{G}_n$, com $\mathcal{G}_{i's}$ sub-álgebras de $\mathcal{G}$, onde cada $\mathcal{G}_i$ é um ideal de $\mathcal{G}$, e seja C^{ij} a inversa da matriz não-singular da forma bilinear simétrica

$$< A_i, A_j > \;\; = tr[\rho(A_i)\rho(B_i)]. \tag{1.19}$$

Vamos construir o operador $C = \sum_{i,j=1}^{n} C^{ij}\rho(A_i)\rho(B_j)$, que é chamado de operador de Casimir da representação ρ. Então, tem-se que;

(i) $[C, A] = 0$, $\forall\ A \in \mathcal{G}$, ou seja C comuta com qualquer elemento de $\mathcal{G}$

(ii) $[C, g] = 0$, $\forall\ g \in G$.

De (i) e (ii) conclui-se que C é um múltiplo da identidade.

Seja η a ação de um grupo G sobre a variedade M, cada elemento g de G induz uma transformação

$$\begin{aligned} \eta_g :\ \ & M \to M \\ & x \to gx, \end{aligned} \tag{1.20}$$

definida por $\eta_g(x) = \eta(g, x)$. Notemos que $\eta_e(x) = x$, isto é, η_e é a aplicação identidade e que $\eta_{g_1 g_2}(x) = \eta(g_1 g_2, x)$. Daí demonstra-se que o conjunto

$$H = \{\eta_g : M \to M\} \tag{1.21}$$

é um grupo que é isomorfo a G. Devido a este isomorfismo, H é denotado de grupo de transformações de G. Quando a variedade grupo de Lie G é de dimensão r (dim$H$=dim$G$), o grupo de transformações é dito ser de r-parâmetros.

Neste caso se $\eta_g\ (x) = x$, $\forall x \in M$, isto implica que $g = e$ ou $\eta_g\ (x) = x_1$ se $g \neq e$. Dizemos que η_g é efetiva, daí quando G é efetivo sobre M, dim$G = r$ e denotamos o grupo das transformações por G_r.

Se x_0 é um ponto fixo de M, define-se a órbita de x_0 sobre G, como sendo

$$\mathcal{O}_{x_0} = \{x = \eta_g(x_0) = gx_0, \forall g \in G\} \subset M, \tag{1.22}$$

que é uma subvariedade de M.

Um grupo G é dito transitivo sobre a variedade M se dados dois pontos x, y de M existe pelo menos um $\eta_g \in H$ tal que $\eta_g(x) = y$. Se η_g é única dizemos que G é simplesmente transitivo, caso contrário dizemos que G é multiplamente transitivo sobre M. Quando G é transitivo sobre M, então $\mathcal{O}_{x_0} = M$ e se G é multiplamente transitivo, então G atua efetivamente.

O fato de de um grupo G_r ser transitivo, simplesmente transitivo ou intransitivo, depende da variedade órbita sobre a qual fazemos G_r atuar.

O conjunto dos elementos $g \in G$ que deixam $x_0 \in M$ fixo, isto é,

$$I_{x_0} = \{g \in G; \eta_g(x_0) = x_0\}, \tag{1.23}$$

constitui um subgrupo de G, denominado de grupo de isotropia de x_0. Notemos que I_{x_0} é um subgrupo normal de G. Portanto, podemos definir o grupo quociente G/I_{x_0} que é também um grupo de Lie chamado de Espaço Homogêneo. Se $M = \mathbb{R}^3$ e $G = SO(3)$ e $H = SO(2)$ então $G/H = S^2$.

Consideremos agora o mapeamento

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_x : \ & G \to \mathcal{O}_x \\ & g \to \mathcal{U}_x(g) = xg, \end{aligned} \tag{1.24}$$

que induz a aplicação

$$(\mathcal{U}_x)_* : T(G) \to T(\mathcal{O}_x), \tag{1.25}$$

a qual, em particular, levará os campos invariantes à esquerda de G em campos vetoriais tangentes à órbita. Mostra-se que esta aplicação independe da escolha do ponto e que ela pode ser estendida a toda variedade M que contem $\mathcal{O}_x$, ou seja podemos definir campos vetoriais sobre toda variedade M. Como $(\mathcal{U}_x)_*[X, Y] = [(\mathcal{U}_x)_* X, (\mathcal{U}_x)_* Y]$ para quaisquer X, Y em $T(G)$, é claro que tais campos imagens formarão uma álgebra de Lie, com as mesmas constantes de estrutura da álgebra de Lie dos campos invariantes à esquerda de G. Se denotarmos por $\{X_i\}_{i=1}^r$ os campos vetoriais em M, obtidos pela aplicação de $(\mathcal{U}_x)_*$ à base $\{E_i\}_{i=1}^r$ de $\mathcal{G}(G)$, então $\{X_i\}_{i=1}^r$ é uma base para $T(G_r)$.

1.5 Grupos de isometrias.

Dentre todos os grupos de transformções de uma variedade Riemaniana M, do ponto de vista da Relatividade Geral, um mais importante é o grupo de isometrias ou grupo de movimento, que estudaremos suscitamente agora. Para tanto precisamos de alguns conceitos como derivada de Lie e campos de Killing.

Vamos iniciar nossa discussão considerando a transformação de coordenadas em M

$$\widetilde{x}^{\mu} = \widetilde{x}^{\mu}(\varepsilon; x^{\nu}), \tag{1.26}$$

onde

$$x^{\mu} = \widetilde{x}^{\mu}(0; x^{\nu}). \tag{1.27}$$

e ε é um parâmetro. A equação eq.(1.26) descreve um conjunto de transformações a 1-parâmetro $x^{\mu} \to \widetilde{x}^{\mu}$, que sob o ponto de vista infinitesimal pode ser escrita na forma

$$\widetilde{x}^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon \xi^{\mu}(x), \tag{1.28}$$

onde ε é um parâmetro infinitesimal e $\xi^{\mu}(x)$ é um campo de vetores contravariantes, o qual será definido por

$$\xi^{\mu}(x) = \left[\frac{\partial \widetilde{x}^{\mu}}{\partial \varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} \tag{1.29}$$

Define-se a derivada de Lie de um campo escalar ϕ em relação ao campo vetorial $\xi^{\mu}(x)$ como sendo

$$\mathcal{L}_{\xi}\phi(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\phi(\widetilde{x}) - \widetilde{\phi}(\tilde{x})}{\varepsilon} = \xi^{\mu}(x)\frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} = \ < \xi, \nabla\phi > . \tag{1.30}$$

Para um campo tensorial T, ela é definida por

$$\mathcal{L}_{\xi}T(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{T(\widetilde{x}) - \widetilde{T}(\tilde{x})}{\varepsilon}. \tag{1.31}$$

A derivada de Lie para um vetor contravariante V^{α} em relação a ξ é

$$\mathcal{L}_{\xi}V^{\alpha} = \xi^{\beta}\nabla_{\beta}V^{\alpha} - V^{\beta}\nabla_{\beta}\xi^{\alpha}, \tag{1.32}$$

e para um vetor covariante V_{α} é

$$\mathcal{L}_{\xi}V_{\alpha} = \xi^{\mu}\nabla_{\mu}V_{\alpha} + V_{\mu}\nabla_{\alpha}\xi^{\mu}. \tag{1.33}$$

Para um tensor covariante de segunda ordem $T_{\mu\nu}$,a derivada de Lie é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi}T_{\mu\nu} &= \xi^{\rho}\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} + T_{\mu\rho}\frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\nu}} + T_{\rho\nu}\frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \\ &= \xi^{\rho}\nabla_{\rho}T_{\mu\nu} + T_{\mu\rho}\nabla_{\nu}\xi^{\rho} + T_{\rho\nu}\nabla_{\mu}\xi^{\rho}. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Em particular, a derivada de Lie do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu, \tag{1.35}$$

pois a derivada covariante do tensor métrico é nula.

Dado $g_{\mu\nu}$ de um espaço-tempo, $g_{\mu\nu}$ é invariante quando

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}(x) = 0, \tag{1.36}$$

e neste caso, a transformação dada pela eq.(1.24) é uma isometria. Das equações (1.31) e (1.32) temos

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0, \tag{1.37}$$

que é a equação de campos de Killing. A solução $\xi_\mu(x)$ da equação anterior é chamada de vetor de Killing, que forma o espaço vetorial gerado por $\xi_\mu(x)$. Se o espaço-tempo tem solução de Killing dizemos que ele é simétrico, caso contrário dizemos que ele é não-simétrico .

Sejam ξ_i e ξ_j campos de Killing distintos, então o comutador $\left[\xi_i, \xi_j\right]$ é um campo de Killing. Como os vetores de Killing constituem um espaço vetorial, temos

$$\left[\xi_i, \xi_j\right] = C^k_{ij}\xi_k, \tag{1.38}$$

onde C^k_{ij} são constantes e, evidentemente, satisfazem as propriedades do parênteses de Lie e consequentemente, os campos Killing formam uma álgebra de Lie para o grupo de isometrias.

Considere o grupo G_r simplesmente transitivo sobre uma dada órbita $\mathcal{O}_x \equiv M$. Neste caso a aplicação dada pela eq.(1.23) é um isomorfismo que induz a aplicação na eq.(1.25), que leva campos invariantes à direita de G nos correspondentes campos invariantes de M. Sobre a variedade órbita de x, pela ação do grupo G, podemos construir a métrica

$$ds^2 = g(X_i, X_j)\omega^i\omega^j = g_{ij}\omega^i\omega^j \tag{1.39}$$

onde $\omega^i(X_J) = \delta^i_j$, ou seja ω^i são 1-formas correspondentes aos campos invariantes à esquerda sobre $\mathcal{O}_x \equiv M$. Usando os resultado de derivada de Lie para campos tensoriais e o fato de que $[E_i, E_j] = 0$, temos $\left[X_i, \xi_j\right] = 0$. Logo podemos dotar a variedade M de uma métrica

$$dl^2 = g(\xi_i, \xi_j)\widetilde{\omega}^i\widetilde{\omega}^j = \widetilde{g}_{ij}\widetilde{\omega}^i\widetilde{\omega}^j, \tag{1.40}$$

onde $\widetilde{\omega}^i(\xi_j) = \delta^i_j$.

As simetrias de uma variedade espaço-tempo são expressas pela invariância da métrica sob o transporte de Lie. O conjunto de todas as isometrias formam, um grupo de Lie de transformações da variedade considerada. Este espaço-tempo pode ter no máximo 10 campos de Killing linearmente independentes, pois o número dos campos ζ, satisfaz a equação $0 \leq \zeta \leq \frac{n(n+1)}{2}$, $n = \dim M$, ou seja um grupo G_{10} de movimento. O espaço-tempo de Minkowski é um exemplo de uma variedade quadrimensional que possui um grupo de isometria G_{10}, o grupo de Poincaré, que tem um subgrupo G_6(grupo de Lorentz).

1.6 Fibrados.

Nesta seção introduziremos as definições básicas de fibrado, fibrado principal, fibrado associado e espaço projetivo.

Sejam

- E uma variedade diferenciável de classe C^∞
- R uma relação de equivalência em E tal que:

(i) o espaço quociente $M = E/R = \{\overline{x},\ \overline{x}$ classe de equivalência de $x, x \in M\}$ é uma variedade diferenciável de dimensão n;

(ii) a projeção $\pi : E \to M$, $(\pi(x) = \overline{x})$ é C^∞ e tem posto n.

- F uma variedade de classe C^∞;
- G um grupo de Lie que atua em F à esquerda.

A estrutura de fibrado diferenciável em E é a sêxtupla $(E,\ \pi,\ M,\ F,\ \Psi,\ G)$, onde $\Psi = \{\Psi_\alpha\}_\alpha$ é uma família de difeomorfismos satisfazendo às seguintes propriedades

(i) se $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ é uma cobertura aberta de M, então $\forall x \in M$, $\exists\ U_\alpha(x)$ e $\exists\ \Psi_\alpha \in \Psi$ tal que

$$\Psi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha) \text{ e } \pi \circ \Psi_\alpha(x, y) = x, \forall (x, y) \in U_\alpha \times F \tag{1.41}$$

$(U_\alpha, \Psi_\alpha)_{\alpha \in I}$ é a representação de coordenadas para E. A função ψ_α é chamada de trivialização local.

(ii) $\forall \ (U_\alpha, \Psi_\alpha)_{\alpha \in I}$,

$$\Psi_{\alpha,x} : F \to F_x = \{y \in E; \pi(y) = x\}$$

com $\Psi_{\alpha,x}(y) = \Psi_\alpha(x, y)$ é bijetora para $y \in F$ e $x \in U_\alpha$.

Seja M um fibrado. Uma seção $s : M \to E$ é a aplicação suave a qual satisfaz a $\pi s = id_M$. Notemos que para $x \in M$, e então $s(x) = s_{|x} \in F_x$. O conjunto das seções de M é denotado por $\Gamma(M, E)$. Se $U \subset M$, dizemos que s é uma seção local.

Em particular, se $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, o difeomorfismo $t_{ij}(x) = \Psi_{i,x}^{-1} \circ \Psi_{j,x} : F \to F_x \in G$, onde t_{ij} é chamado de função de transição e F_x é chamado de fibra sobre $x \in M$, $F_x = \pi^{-1}(x)$, $\forall x \in M$, que é uma subvariedade fechada de E.

O espaço cobertura de uma variedade diferenciável é um exemplo de Fibrado mais comum. Se $t_{ij} =$ Identidade, o fibrado é dito trivial, isto é, M é contraída a um ponto (Mé simplesmente conexa). Um tipo de Fibrado fundamental para a gravitação e teorias de gauge é o Fibrado Principal, que num certo sentido é a generalização geométrica da noção de grupos de Lie.

Um Fibrado Principal sobre M com grupo G, consiste de uma variedade diferenciável P e da ação R_{gp}, do grupo G em P satisfazendo a

(i) $$\begin{aligned} R_{gp} : \ & P \times G \to P \\ & (p, g) \to R_{gp} = p \cdot g \end{aligned}$$

(ii) $M = P/R$, onde $R = \{(p_1, p_2) \in P \times P; \exists g \in G;\ p_1.g = p_2\}$ e M é conhecido como espaço órbita. $\pi^{-1}(x) = \{pg; g \in G, \pi(p) = x\}$ é a fibra de x sobre P com $\pi : P \to M$ a projeção diferenciável;

(iii) P é um Fibrado localmente trivial sobre M, isto é, para qualquer $x \in M$, existe $U \subset P$ e um difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$, definido por $\varphi(p) = (\pi(p), \varphi(p)) = \varphi(p).g \ \forall g \in G$.

O Fibrado Principal é denotado por $P(M, G)$, frequentemente chamado simplesmente de fibrado.

Um outro exemplo de fibrados é o Espaço Projetivo, conceito que vamos apresentar agora.Considere o $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ e definamos a relação de equivalência, $\sim$, em $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ por,

$$x, y \in \mathbb{R}^{n+1}-\{0\}, x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}-\{0\}; y=\lambda x (y^i=\lambda x^i, 0 \leq i \leq n).$$

O conjunto das classes de equivalência dada por $\sim$ e denotado por

$$P^n(\mathbb{R})=[\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}] / \sim, \tag{1.42}$$

é chamado de Espaço Projetivo de dimensão n sobre $\mathbb{R}$.

Como a aplicação

$$\begin{aligned} \pi: \ & \mathbb{R}^{n+1}-\{0\} \rightarrow P^n \\ & x \rightarrow \pi(x)=[x]=\overline{x} \end{aligned} \tag{1.43}$$

é sobrejetiva, a cada classe de equivalência $[x] \in P^n$ associa-se a reta

$$\lambda x:=\{\lambda x^i ; \lambda \in \mathbb{R}^*\}=\pi^{-1}(\pi(x)). \tag{1.44}$$

Assim $P^n(\mathbb{R})$ é o conjunto de todas as retas que passam pela origem de $\mathbb{R}^{n+1}$, sendo, portanto, um espaço topológico de Hausdorff compacto e conexo, admitindo uma estrutura de variedade n-diferenciável. Este conjunto pode ser pensado como o espaço quociente da esfera unitária $S^n=\{x \in \mathbb{R}^{n+1} ;|p|=1\}$ pela relação de equivalência definida por

$$x \sim y \Longleftrightarrow x, y \in \mathbb{S}^n \Rightarrow y= \pm x. \tag{1.45}$$

Com efeito, cada reta que passa pela origem determina na esfera dois pontos antípodas e a correspondência assim obtida é, evidentemente, biunívoca e sobrejetiva, logo $P^n(\mathbb{R})= \mathbb{S}^n / \sim$.

O espaço projetivo complexo $P^n(\mathbb{C})$ é definido por $P^n(C)=\mathbb{S}^{2n+1} / \sim$ onde $\sim$é a relação

$$\sim \ : x, y \in \mathbb{S}^{2n+1},\ x \sim y \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \ ; \ x=\lambda y,\ y \neq 0,\ |\lambda|=1, \tag{1.46}$$

e $S^{2n+1}=\{x \in \mathbb{C}^{n+1} ;\|x\|=1\}$. A projeção $\pi: S^{2n+1} \rightarrow P^n(\mathbb{C})$ define a classe de equivalência $[z]=\{\lambda \cdot z ; \lambda \in S^1\} \cong S^1$. Assim a relação $\sim$ decompõe a esfera em S^{2n+1} como reunião de círculos dois a dois disjuntos, sendo cada um deles um ponto no espaço projetivo complexo que são as fibras.

Dado um caminho $\overline{C}$ em P^n existe um único levantamento C em S^{2n+1} e se $\overline{C}$ é fechado, então, o leventamento pode não ser fechado, mas se C é fechado então $\overline{C}$ é fechado.

Dado um fibrado principal $P(M,G)$, podemos construir o fibrado associado como segue: seja G atuando na variedade F à esquerda. Define-se a ação de $g \in G$ em $P \times F$ por $(u,f) \to (ug, g^{-1}f)$ onde $u \in P$ e $f \in F$. Então, o fibrado associado (E,π,M,G,F,P) é uma clase de equivalência $P \times F/G$ na qual dois pontos (u,f) e $(ug,g^{-1}f)$ são identificados.

Considere o caso em que F é um espaço vetorial V de dimensão k . Seja ρ a representação k-dimensional de G. O vetor fibrado associado $P \times_\rho V$ é definido pela identificação dos pontos (u,v) e $(ug,\rho(g)^{-1}v)$ de $P \times V$, onde $u \in P$, $g \in G$ e $v \in V$.

1.7 Conexões em fibrados.

Vamos fazer, inicialmente, uma revisão sobre conexões em uma variedade Riemaniana M. Vamos indicar por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais de classe C^∞ e por $\mathfrak{D}(M)$ o anel das funções C^∞ definidas em M.

Uma conexão afim ∇, em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M) \\ (X,Y) \quad &\to \nabla_X Y, \end{aligned} \tag{1.47}$$

que satisfaz às seguintes propriedades:

(i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

(ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

(iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$, onde X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e f , $g \in \mathfrak{D}(M)$.

Demonstra-se que se M é uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇, então, existe uma única lei que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $C : I \subset \mathbb{R} \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de C,denominado derivada covariante de V ao longo de C, tal que:

(i) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$

(ii) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$

(iii) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$ $V(t) = Y(C(t))$, entao $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y$.

A noção de derivada covariante tem várias consequências importantes. Ela tornou claro que as idéias básicas de geodésica e curvatura poderiam ser definidas em situações mais gerais que a de variedades Riemanianas. É suficiente para isto que se possa definir uma noção de derivação de campos de vetores com certas propriedades, como a variedade sendo dotada de uma conexão afim. Isto estimulou a criação de várias estruturas geométricas mais gerais que a Geometria Riemaniana. Assim como a geometria Euclidiana métrica é um caso particular da geometria afim, mais geralmente, da geometria projetiva, a Geometria Riemaniana é um caso particular de estruturas geométricas mais gerais.

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, $C : I \to S$ uma curva parametrizada em S, e $V : I \to \mathbb{R}^3$ um campo de vetores tangentes a S ao longo de C. O vetor $\frac{dV}{dt}(t)$, $t \in I$, não pertence, em geral, ao plano tangente $T_{C(t)}(S)$. Daí, vê-se que a noção de derivada de um campo vetorial não é , portanto, uma noção da geometria de S. Para contornar tal incoveniente, surgiu a noção de derivada covariante.

Como vimos, conexão afim é um conceito local. Escolhendo um sistema de coordenadas $(x_1, ..., x_n)$ em torno de um ponto $p \in M$ e escrevendo $X = \sum\limits_i x_i X_i$, $Y = \sum\limits_j y_j X_j$, onde $X_i = \partial \backslash \partial x_i$, teremos

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k, \tag{1.48}$$

onde $\nabla_{X_i} X_j = \sum\limits_k \Gamma_{ij}^k X_k$, e Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel da conexão.

Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $C : I \to M$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0, \forall t \in I$. Se C é diferencável e V_0 é um vetor tangente a M em $C(t_0), t_0 \in I$, e então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de C tal que $V(t_0) = V_0$. $V(t)$ é chamado de transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de C. Se M é uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemaniana $< . >$, a conexão é dita compatível com a métrica, quando para toda curva diferenciável C e quaisquer pares de campos de vetores paralelos

X, Y ao longo de C, tivermos $< X, Y > =$ constante. Mostra-se que uma conexão afim ∇ em variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se e só se

$$X < Y, Z > \; = \; < \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z > X, Y, Z \in \mathcal{X}(M), \tag{1.49}$$

e ∇ é simétrica quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \tag{1.50}$$

Quando a conexão afim for compatível com a métrica e simétrica ao mesmo tempo, dizemos que ∇ é uma conexão de Levi-Civita (ou Riemanniana) de M.

Seja $P(M, G)$ um fibrado principal. A conexão em P é a única separação do espaço tangente T_uP, $u \in P$ nos espaços vertical V_uP e horizontal H_uP tal que;

(i) $T_uP = H_uP \oplus V_uP$;

(ii) um campo vetorial suave X em P separa-se em

$X = X^H + X^V$, $X^H \in H_uP$ e $X^V \in V_uP$;

(iii) $H_{ug}P = R_g \cdot H_uP$, $\forall u \in P$, $g \in G$.

Vamos construir V_uP, para tanto considere $u \in P(M, G)$ e $\pi^{-1}(p) = F$, a fibra de $p \in M$. V_uP é um subespaço de T_uP que é tangente à fibra. Tome $A \in \mathcal{G}$(álgebra de Lie associada ao grupo G) e defina $R_{\exp(tA)}u = u \exp(tA)$, como $\pi(u) = \pi(u \exp(tA) = p$, então a curva $u \exp(tA) \in F$. Define-se o vetor $A^\# \in T_uP$ por $A^\# f(u) = \frac{d}{dt} f(u \exp(tA)_{|0}$, $f : P \to \mathbb{R}$, suave.

Notemos que $A^\#$ é tangente a F em u daí $A^\# \in V_uP$. Como a aplicação

$$\begin{aligned} \# : \; \mathcal{G} &\to V_uP \\ A &\to A^\#, \end{aligned} \tag{1.51}$$

é um isomorfismo, então, $\mathcal{G} \approx V_uP$.

Seja $P(M, G)$ um fibrado principal e seja $\gamma : [0, 1] \to M$ uma curva em M . A curva $\widehat{\gamma} : [0, 1] \to P$ é dito um leventemento horizontal de γ se $\pi\widehat{\gamma} = \gamma$ e o vetor tangente a $\widehat{\gamma}(t)$ pertence sempre $H_{\widehat{\gamma}(t)}P$. Demonstra-se que se γ é uma curva e $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$, então existe um único leventamento horizontal $\widehat{\gamma}$ em P tal que $\widehat{\gamma}(0) = u_0$.

Define-se a conexão de 1-forma, $\omega \in \mathcal{G} \otimes TP^*$(ação da álgebra sobre o espaço tangente dual de P) como sendo é a projeção do T_uP sobre a componente vertical $V_uP \approx \mathcal{G}$, tal que

(i) $\omega(A^{\#}) = A \in \mathcal{G}$

(ii) $R_g^*\omega = Aad_{g^{-1}}\omega(X) = g^{-1}\omega_u(X)g; u \in P$

Notemos que $H_uP = \{X \in T_uP; \omega(X) = 0\} = \ker \omega$, e que ω é definida de F em F, que leva A em $A^{\#}$.

1.8 Conexão local de 1-forma e potencial de gauge.

Seja $\{U_i\}$ cobertura aberta de M e $\sigma_i : U_i \to \pi^{-1}(U_i)$ uma função suave, chamada seção local. A conexão local de 1-forma é definida como sendo o *pullback* (de 1-forma) $\mathcal{A}_i = \sigma_i^*\omega \in \mathcal{G} \otimes \otimes^1(U_i)$.

Das 1-formas locais que satisfazem a relação

$$\mathcal{A}_j{=}t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}dt_{ij}, \tag{1.52}$$

pode-se construir a $\mathcal{G}$-*valued* 1-forma ω sobre P. Como P é não-trivial, não admite seção global, o *pullback* $\mathcal{A}_i = \sigma_i^*\omega$ existe apenas localmente. Em termos de teorias de gauge $\mathcal{A}_\mu$ define o potencial de gauge(discutiremos sobre este assunto na próxima seção), e a conexão A_μ define o potencial vetorial. A conexão $\mathcal{A}_\mu$ difere do potencial vetor A_μ por um fator da álgebra de Lie, $\mathcal{A}_\mu{=}iA_{\mu.}$.

A forma local $\mathcal{F}$ da curvatura Ω é definida por $\mathcal{F} = \sigma_i^*\Omega$, e σ seção local definida na carta U de M. $\mathcal{F}$ é expressa em termos do potencial de gauge $\mathcal{A}$ como

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}, \tag{1.53}$$

onde d é a derivada exterior em M. Atuando em vetores de $T(M)$, temos

$$\mathcal{F}(X, Y) = d\mathcal{A}(X, Y) + [\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)]. \tag{1.54}$$

Em cada carta U onde as coordenadas são $x^\mu = \varphi(p)$, seja $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu$ ($\mathcal{A}_\mu \in \mathcal{G}$) e $\mathcal{F} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$, então a expresão de $\mathcal{F}$ torna-se

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]. \tag{1.55}$$

Como $\mathcal{A}_\mu$ e $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ são funções $\mathcal{G}$ *-valued*, elas podem ser expandidas em termos das base $\{T_\alpha\}$ de $\mathcal{G}$ como

$$\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\mu^\alpha T_\alpha,\ \mathcal{F}_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha \text{ com } [T_\alpha, T_\beta] = f_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma. \tag{1.56}$$

Podemos agora construir o levantamento horizontal $\widehat{\gamma}$ e definir o conceito de transporte paralelo em fibras.

Seja U_i uma carta a qual contém γ e considere a seção σ_i sobre U_i. Se existe um leventamento horizontal $\widehat{\gamma}$, podemos expressá-lo como $\widehat{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))t_{ij}(t)$, onde $t_{ij}(t)$(função de transição) é entendida como $t_i(\gamma(t)) \in G$. Sem perda de generalidade, podemos tomar a seção como sendo tal que $\sigma_i(\gamma(0)) = \widehat{\gamma}(0)$, isto é $t_i(0) = e$. Seja X um vetor tangente a $\gamma(t)$ em $\gamma(0)$. Então, $\widehat{X} = \widehat{\gamma}_* X$ é tangente a $\widehat{\gamma}$ em $u_0 = \widehat{\gamma}(0)$. Como o vetor tangente $\widehat{X}$ é horizontal, ele satisfaz $\omega(\widehat{X}) = 0$. Da eq.(1.52) temos

$$\widehat{X} = t_i^{-1}(t)\sigma_{i*} X t_i(t) + \left[t_i^{-1} dt_i(X)\right]^\#. \tag{1.57}$$

Aplicando ω a ambos os lados a eq.(1.57), obtemos

$$\frac{dt_i(t)}{dt} = -\omega(\sigma_{i*}X)t_i(t), \tag{1.58}$$

que possui uma única solução. Como $\omega(\sigma_{i*}X) = \sigma_i^*\omega(X) = \mathcal{A}_i(X)$, temos

$$\frac{dt_i(t)}{dt} = -\mathcal{A}_i(X)t_i(t), \tag{1.59}$$

e a solução formal com $t_i(0) = e$ é dada por

$$\begin{aligned} t_i(\gamma(t)) &= P\exp\left(-\int_0^t \mathcal{A}_{i\mu}\frac{dx^\mu}{dt}dt\right) \\ &= P\exp\left(-\int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} \mathcal{A}_{i\mu}(\gamma(t))dx^\mu\right), \end{aligned} \tag{1.60}$$

onde P é o operador ordenação ao longo do caminho $\gamma(t)$. O levantamento horizontal é expresso por $\widehat{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))t_i(\gamma(t))$.

Seja $\gamma : [0,1] \to M$, uma curva. Considere um ponto $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Existe um único levantamento $\widehat{\gamma}(t)$ de $\gamma(t)$ através de u_0, e existe um único ponto $u_1 = \widehat{\gamma}(1) \in \pi^{-1}(\gamma(1))$. O ponto u_1 é chamado de transporte paralelo de u_0 ao longo da curva $\widehat{\gamma}$. Isto define a aplicação

$$\Gamma(\widehat{\gamma}) : \pi^{-1}(\gamma(0)) \to \pi^{-1}(\gamma(1)) \tag{1.61}$$

tal que $u_0 \to u_1$.

Esta aplicação comuta com a ação à direita R_g, $g \in G$, isto é,

$$R_g \Gamma(\widehat{\gamma}) = \Gamma(\widehat{\gamma}) R_g \; \forall u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0)). \tag{1.62}$$

Se a forma local dada pela eq.(1.60) for empregada, temos

$$u_1 = \sigma_i(1) P \exp\left(- \int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} \mathcal{A}_{i\mu}(\gamma(t)) dx^{\mu} \right). \tag{1.63}$$

Com a estrutura matemática apresentada, podemos definir o conceito de Holonomia, objeto matemático ao qual dedicaremos grande atenção nesta tese.

Sejam $P(M,G)$ um fibrado principal e $\gamma : [0,1] \to M$ uma curva cujo levantamento horizontal através de $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ é $\widehat{\gamma}$. Vamos considerar a aplicação $\Gamma(\widehat{\gamma})$ tal que $u_0 = \widehat{\gamma}(0)$ e $\widehat{\gamma}(1) = u_1$. Sejam $\alpha, \beta : [0,1] \to M$, duas curvas com $\alpha(0) = \beta(0) = p_0$ e $\alpha(1) = \beta(1) = p_1$ e $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ seus respectivos levantamentos tais que $\widehat{\alpha}(0) = \widehat{\beta}(0) = u_0$. Então, $\widehat{\alpha}(1)$ não é necessariamente igual a $\widehat{\beta}(1)$. Isto mostra que se considerarmos a curva $\gamma : [0,1] \to M$ tal que $p = \gamma(0) = \gamma(1)$, temos $\widehat{\gamma}(0) \neq \widehat{\gamma}(1)$, em geral. A curva γ define a transformação $\tau_{\gamma} : \pi^{-1}(p) \to \pi^{-1}(p)$ na fibra. Esta transformação satisfaz a relação $\tau_{\gamma}(ug) = \tau_{\gamma}(u)g$. Notemos que τ_{γ} não só depende da curva, mas também da conexão. Esta função recebe o nome de variável de contorno. Vemos assim que existe um único elemento $g \in G$ tal que

$$gu_0 = u_1,$$

onde g é a transformação de holonomia.

Tome um ponto $u \in P$ com $\pi(u) = p$ e considere o conjunto das curvas

$$C_p(M) = \{\gamma : [0,1] \to M; \gamma(0) = \gamma(1) = p\}.$$

O conjunto dos elementos

$$\Phi_u \equiv \{g \in G \ ; \tau_\gamma(u) = ug, \ \gamma \in C_p(M)\} \tag{1.64}$$

é um subgrupo do grupo G e é chamado de grupo de holonomia**.**

1.9 Teorias de gauge.

Há evidências de que as interações da narureza sejam descritas pelas chamadas Teorias de Gauge. A universalidade do princípio de gauge, ou melhor, a estrutura comum das interações fundamentais representa um passo significativo no sentido de se formular uma única teoria que incorpore todas as interações, ou seja unifica-las, bem como no sentido de geometrizá-las, pois as estruturas de gauge são essencialmente geométricas.

Em 1919, H. Weyl [2] tentou unificar a gravitação e o eletromagnetismo através do uso do conceito geométrico de espaço-tempo dependente da mudança de escala. Posteriormente, o próprio Weyl deu uma descrição do eletromagnetismo como uma teoria de gauge numa forma que se aproxima da atual (formalismo diferencial).

O princípio de invariância de gauge local para as interações entre cargas elétricas foi generalizado, para o caso não-Abeliano, por Yang e Mills [28]. Posteriormente, Utiyama [29] construiu uma teoria de gauge para um grupo de simetria arbitrário.

Fisicamente, a busca da invariância ou simetrias globais é justificável pelo fato de que a toda simetria contínua da Lagrangiana corresponde a uma lei de conservação (Teorema de Noether). Como exemplo de simetria temos a invariância por transformação gerais de coordenadas implicando na construção da Relatividade Geral, a simetria de gauge Abeliana local implicando na construção do eletromagnetismo e a simetria de gauge não-Abeliana acarretando nos campos não-Abelianos. Dois fatos fundamentais que motivaram a construção de teorias não-abelianas foram a descoberta de que a força entre os núcleos possui curto alcance e a independência da intensidade da força nuclear com as cargas dos núcleos, e que levam à formulação da simetria de *spin* isotópico.

1.9.1 Eletromagnetismo como uma teoria de gauge.

O eletromagnetismo clássico pode ser formulado inteiramente em termos do tensor campo eletromagnético $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$. Por exemplo, dado $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$ em um ponto x, podemos determinar, usando a equação de Lorentz, como uma partícula carregada colocada em x irá mover-se. Isto não é mais verdade na teoria quântica; $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$, neste contexto, não é adequado para descrever os efeitos eletromagnéticos sobre a função de onda de um életron, conforme foi demonstrado[3].

A teoria de Maxwell do eletromagnetismo é descrita pelo grupo de gauge $U(1)$ que é Abeliano e uni-dimensional. Como o espaço base M é o espaço-tempo quadri-dimensional de Minkowski, o fibrado $P(M, U(1))$ é trivial, ou seja $P = \mathbb{R}^4 \times U(1)$, com potencial de gauge $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu$, e o campo de gauge $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$, que em componentes

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \mathcal{A}_\mu}{\partial x^\nu}. \tag{1.65}$$

O campo de gauge $\mathcal{F}$ satisfaz a identidade de Bianchi

$$d\mathcal{F} = \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} - \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} = 0,$$

que pode ser escrita na forma

$$\partial_\lambda \mathcal{F}_{\mu\nu} + \partial_\nu \mathcal{F}_{\lambda\mu} + \partial_\mu \mathcal{F}_{\nu\lambda} = 0. \tag{1.66}$$

Sendo $\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv iF_{\mu\nu}$, e se identificamos o campo elétrico E e magnético B como $E_i = F_{i0}$ e $B_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk}$, a eq.(1.66) reduz-se para às duas equações homogênas de Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \wedge E + \partial B/\partial t &= 0 \qquad (1.67)\\ \nabla . B &= 0. \end{aligned}$$

Para determinar a dinâmica, temos que especificar a ação. A ação de Maxwell, $\delta_M[\mathcal{A}]$, é um funcional de $\mathcal{A}$ dado por

$$\delta_M[\mathcal{A}] = -\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} dx^4 = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} dx^4. \tag{1.68}$$

Pela variação de $\delta_M[\mathcal{A}]$ com relação a $\mathcal{A}$ obtemos a equação do movimento

$$\partial_\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} = 0 \tag{1.69}$$

e desta equação se deduz o segundo grupo de equações de Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \cdot E &= 0 \\ \nabla \times B - \frac{\partial E}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \tag{1.70}$$

No estudo do eletromagnetismo clássico, os campos elétricos e magnéticos ($F_{\mu\nu}$) são de muita importância, e o potencial vetor $\vec{A}$ e o potencial escalar $\Phi = A_0$ são secundários. Na teoria quântica, no entanto, existe uma variedade de situações em que $F_{\mu\nu}$ não é suficiente para descrever a teoria e usa-se o fator de fase construido a partir do quadrivetor potencial $A_\mu = (A_0, A)$ na sua descrição. Um desses exemplos é o conhecido efeito Aharonov-Bohm [3] eletromagnético, que é uma manifestação invariante de gauge do fator de fase.
Como o problema é essencialmente em duas dimensões, vamos considerar a região $M = \mathbb{R}^2$, onde o solenóide está na origem. O fibrado principal é $P(M, U(1))$ e o fibrado associado é $E = PX_\rho\mathbb{C}$, com $U(1)$ atuando em $\mathbb{C}$. E é um fibrado linear complexo sobre M, onde a seção é a função de onda ψ.

Vamos definir a 1-forma $\mathcal{A} = iA = iA_\mu dx^\mu$ assumindo valores na na álgebra de Lie. A derivada covariante associada com a conexão local é $D = d + \mathcal{A}$, com $\mathcal{A} = (\frac{-y\Phi}{2\pi r^2}, \frac{x\Phi}{2\pi r^2})$ onde $\Phi = \int\limits_S BdS$, é o fluxo.
Como $d\mathcal{A} = \mathcal{F} = 0$, esta conexão é localmente plana. Considerando o círculo unitário S^1 que envolve o solenóide, parametrizando-o por $e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ e escrevendo a conexão em S^1 como

$$\mathcal{A} = i\frac{\Phi}{2\pi}d\theta, \tag{1.71}$$

temos que ao transportarmos paralelamente a quantidade ψ ao longo de S^1, com relação à conexão local, obtemos

$$D\psi(\theta) = (d + \frac{i\theta}{2\pi}d\theta)\psi(\theta) = 0, \tag{1.72}$$

cuja solução é $\psi(\theta) = e^{\frac{-i\Phi\theta}{2\pi}}$.

Este efeito pode ser descrito por um tratamento puramente matemático [30], mostrando-se que a representação unitária do grupo de cobertura do grupo Euclidiano E^2 do plano é um bom modêlo matemático para o efeito Aharonov-Bohm.

Uma outra forma de escrever o efeito Aharonov-Bohm é idealizando uma configuração que envolve um solenóide e partículas teste incidentes confinadas a uma região sem curvatura de gauge(sem campo eletromagnético) M, que pode ser considerada como um plano menos a origem ($\mathbb{R}^2 - \{0\}$) e é multiplamente conexa. A múltipla conectividade de M é necessária para a observação do efeito Aharonov-Bohm, pois toda conexão plana (isto é, com curvatura nula) definida numa região simplesmente conexa é trivial. Em outras palavras, em um espaço que não seja simplesmente conexo, existe um potencial de gauge não-trivial com a intensidade do campo de gauge nula. Podemos trabalhar com um espaço multiplamente conexo M através de seu espaço de cobertura, em particular o espaço de cobertura universal $\tilde{M}$. Temos que $M = \tilde{M}/\Gamma$, onde Γ é um grupo discreto de difeomorfismos de $\tilde{M}$. Funções definidas univocamente em M podem ser levantadas para funções constantes sobre as fibras em $\tilde{M}$. Levantando-se as curvas de M para $\tilde{M}$, vemos que o levantamento de uma conexão não-trivial em M é trivial em $\tilde{M}$.

Deve ser notado que a transformação de gauge $\tilde{S}(\tilde{x})$ de $\tilde{A}_\mu(\tilde{x}) = 0$ no espaço de cobertura universal $\tilde{M}$ pode ocorrer em três diferentes formas, a saber [31]:

(i) A primeira é quando $\tilde{S}(\tilde{x})$ é constante sobre as fibras e portanto, pode ser projetada numa transformação de gauge univocamente definida em M. Neste caso, não há efeito Aharonov-Bohm.

(ii) A segunda é quando $\tilde{S}(\tilde{x})$ não é projetável, mas dá origem a um campo projetável tal que $\tilde{A}_\mu(\tilde{x}) = \tilde{S}(\tilde{x})\tilde{\partial}_\mu\tilde{S}^{-1}$(campo de gauge trivial). Isto resulta no efeito Aharonov-Bohm em M. Neste caso a transformação de gauge $\tilde{S}(\tilde{x})$ em $\tilde{M}$ não é constante sobre as fibras, o que resulta em um fator de fase não-trivial conectando dois pontos quaisquer de cada fibra, o que é necessário para observar o efeito Aharonov-Bohm.

(iii) A terceira é quando $\tilde{S}(\tilde{x})$ é uma transformação de gauge não projetável e o campo de gauge puro $\tilde{A}_\mu(\tilde{x}) = \tilde{S}(\tilde{x})\tilde{\partial}_\mu\tilde{S}^{-1}$ também não é projetável.

1.9.2 Teoria de Yang-Mills.

A observação de que a interação forte é independente das cargas elétricas dos núcleos (novo princípio de simetria), permitiu estender a invariância de gauge para além dos limites do eletromagnetismo, e levou à proposição de que a interação forte pode ser descrita por uma teoria de gauge análoga à eletrodinâmica. Para tanto é introduzido em cada ponto do espaço de Minkowski um espaço interno complexo de duas dimensões. As bases espinoriais do espaço interno, denotada por η_p^a, atuam sobre os elementos do grupo de simetrias

$$SU(2) = \{A \in M(2 \times 2)\ ;\ A^{-1} = A^{\dagger},\ \det A = 1\},$$

que é uma cobertura compacta para $O(3)$. O grupo $SU(2)$ é o grupo de gauge local da teoria. A teoria de Yang-Mills falhou na sua proposta original de estabelecer uma teoria para as interações fortes, porém, ela estabeleceu os fundamentos da moderna teoria de gauge não-Abeliana.

Vamos considerar a teoria de gauge do $SU(2)$ definida no $\mathbb{R}^4$. O fibrado que decreve tal teoria de gauge é $P(\mathbb{R}^4, SU(2))$. Como $\mathbb{R}^4$ é trivial, o potencial de gauge (conexão na fibra) é

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu^\alpha T_\alpha dx^\mu, \tag{1.73}$$

onde $\alpha = 1, 2, 3$, representa o índice interno, $T_\alpha \equiv \sigma_\alpha / 2i$ são os geradores da álgebra de Lie, $\mathcal{G}(SU(2))$ do $SU(2)$ e σ_α são as matrizes de Pauli.

O campo de gauge é

$$\mathcal{F} \equiv d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{1.74}$$

onde

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = F_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha,$$

com

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_{\nu\alpha} - \partial_\nu A_{\mu\alpha} + \varepsilon_{\alpha\beta\mu} A_{\mu\beta} A_{\nu\gamma}.$$

O campo de gauge satisfaz a identidade de Bianchi $D\mathcal{F} = dF + [\mathcal{A},\mathcal{F}] = 0$. A ação de

Yang-Mills é

$$\delta_{YM}[\mathcal{A}] \equiv -\frac{1}{4}\int\limits_{M} tr(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\int\limits_{M} tr(\mathcal{F}\wedge^{*}\mathcal{F}), \tag{1.75}$$

sendo que a variação com relação a $\mathcal{A}_\mu$ nos fornece a equação $D_\mu\mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$ ou $D^\alpha\mathcal{F} = 0$. Este procedimento da teoria de Yang-Mills pode ser usado para construir uma teoria de gauge para um grupo interno qualquer. Para isto precisamos do potencial (conexão)

$$\Gamma_\mu(x) = A^\alpha_\mu(x)T_\alpha,$$

onde T_α são os geradores da álgebra de Lie do grupo de gauge e $A^\alpha_\mu(x)$ são as conexões de 1-forma com derivada $D_\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i\Gamma_\mu\right)\varphi$ e os campos de gauge

$$F^\alpha_{\mu\nu} = \partial_\nu A^\alpha_\mu - \partial_\mu A^\alpha_\nu + C^\alpha_{lm}A^\beta_\mu A^\gamma_\nu, \tag{1.76}$$

onde C^α_{lm} são sa constantes que satisfazem a relação $[T_\alpha, T_\beta] = iC^\alpha_{\alpha\beta}T_\alpha$.

Existe um formalismo que generaliza o formalismo integral (global) para campos de gauge apresentado por Feynman [32], utilizado na Mecânica Quântica em variedades multiplamente conexas, o qual demonstra que o formalismo diferencial apresentado por Weyl não descreve totalmente o eletromagnetismo. O formalismo das integrais de trajetória considera uma curva C em M e seu leventamento horizontal C' no fibrado principal $P(M,G)$, que é simplesmente conexo, portanto, totalmente integrável, depois retornado à variedade M pela projeção $\pi : P \to M$.

O que vamos apresentar a seguir corresponde a uma breve revisão de pioneiros trabalhos sobre teoria de gauge não-Abeliana usando o formalismo integral [33]. O ponto básico é que o eletromagnetismo pode ser descrito por um fator de fase não-integrável, fato discutido por Dirac, Peierls e outros, isto é, dependente do caminho. O formalismo apresentado por Yang e Wu tem a vantagem de descrever intrinsicamente e completamente o eletromagnetismo e as teorias gauges não-Abelianas.

Seja M uma variedade e $x = (x^\mu), \mu = 1, \ldots n$ um ponto de M e considere um grupo de gauge G (Abeliano ou não), o qual é um grupo de Lie com geradores $X_k(k = 1, \ldots)$. O fator de fase dependente do caminho U_{AB}, é um elemento do grupo G associado com o caminho AB entre os pontos A e B na variedade, satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $U_{ABC} = U_{AB}U_{BC}$ com AB e BC são partes de AC

(ii) $U_{A(A+dx)} = I + b^k_\mu(x)X_k dx^\mu$.

A função $b^k_\mu(x)$ é definida na variedade e é chamada de potencial de gauge e U_{AB} será chamado de fator de fase de gauge.

Consideremos agora um paralelogramo infinitessimal de lados dx e dx'. Então U_{ABCDA} pode ser calculado por multiplicação de quatro fatores de fase de (ii), o que resulta em

$$U_{ABCDA} = I + f^k_{\mu\nu}X_k dx^\mu dx^\nu,$$

onde

$$f^k_{\mu\nu} = \frac{\partial b^k_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial b^k_\nu}{\partial x^\mu} - b^i_\mu b^j_\nu C^k_{ij} = -f^k_{\nu\mu}, \tag{1.77}$$

sendo C^i_{kj} definida por $X_kX_i - X_jX_k = C^i_{kj}X_i$, e $f^k_{\mu\nu}$ é chamado de campo de gauge.

Para um elemento ξ da álgebra de Lie de G, isto é, $\xi \in \mathcal{G}$, no formalismo de conexões em fibrados, o deslocamento paralelo de ξ em $g(t) \in F$ é identificado como sendo a conexão local de 1-forma ou melhor o potencial de gauge. Assim,

$$\xi \equiv t_i A^k_i T_k \equiv A_i, \{T_K\} \text{ é uma base de } \mathcal{G}.$$

Portanto, $g(t) = \exp(A_i) = exp(A\ ^k_i dx^i)$. Da propriedade (i) temos que

$$g(\sum_{i=0}^{\infty} t_i) = \prod_{i=0}^{\infty}(\exp t_i A^k_i dx^i) = \exp(\sum_{i=0}^{\infty} t_i A^k_i dx^i) \tag{1.78}$$

Identificando $\sum\limits_{i=0}^{\infty} t_i A^k_i dx^i \equiv \int\limits_0^1 A_i dx^i$, temos

$$g(\sum_{i=0}^{\infty} t_i) = \exp\left(\int_0^1 A_i dx^i\right). \tag{1.79}$$

Como $\exp\left(\int\limits_0^1 A_i dx^i\right)$ está em F, definimos o fator de fase como sendo,

$$U_{BA} = P\exp(\int_A^B \Gamma_\mu dx^\mu), \tag{1.80}$$

onde AB é o caminho que liga os pontos, A (inicial) e B (final), Γ_μ a conexão na fibra ou potencial de gauge e P ordena o produto das matrizes $\exp \int \Gamma_\mu$. No caso do efeito Aharonov-Bohm temos a conexão $\Gamma_\theta d\theta = \frac{i\Phi}{2\pi} d\theta$. Então,

$$U_{(2\pi,0)} = \exp\left(\int_0^{2\pi} \frac{i\Phi}{2\pi} d\theta\right) \tag{1.81}$$

que é o fator de fase.

Podemos resumir as considerações apresentadas dizendo que $F_{\mu\nu}$ subdescreve o eletromagnetismo, enquanto o conhecimento de $\oint A_\mu dx^\mu$ para um dado contorno fechado sobredescreve o eletromagnetismo. O eletomagnetismo é corretamente descrito pelo fator de fase $\exp\left[\frac{ie}{\hbar c} \oint A_\mu dx^\mu\right]$. O fator de fase para uma curva qualquer, não necessariamente fechada é dado por

$$U_{BA} = \exp\left[i\frac{e}{\hbar c}\int_A^B A_\mu dx^\mu\right]. \tag{1.82}$$

Se $F_{\mu\nu} = 0$, ele é independente das deformações da curva entre os pontos A e B, mas, em geral, depende da curva. Então, associado à cada curva entre os pontos A e B, temos um fator de fase não-integrável, no sentido de depender da curva.

Se considerarmos a transformação de gauge

$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha}\psi = S^{-1}\psi, \tag{1.83}$$

então,

$$U_{BA} \to U'_{BA} = S^{-1}(B) U_{BA} S(A) \tag{1.84}$$

onde $S(B) = e^{-i\alpha_B}$.

A transformação de gauge do fator de fase envolve a função S calculada nos pontos extremos da curva. Para uma curva fechada, $S(B) = S(A)$, de modo que U_{BA} permanece inalterado. Portanto, podemos afirmar que o eletromagnetismo é uma manifestação invariante de gauge do fator de fase não-integrável.

Algumas aplicações na gravitação serão vistas nos capítulos 2 e 3 desta tese. Apresentaremos agora um paralelo entre os conceitos em teoria de campos de gauge e a teoria sobre fibrados. A translação desse conceitos é dada na Tabela 1.1.

Terminologia de teoria de gauge	Terminologia de espaços fibrados
espaços de fatores de fase	espaços de fibrado
campos de gauge	fibrados
espaço tempo	espaço base
gauge(ou gauge global)	coordenada principal
tipo de gauge	fibrado principal
potencial de gauge b_{μ}^{k}	conexão no fibrado principal
intensidade de campo $f_{\mu\nu}^{k}$	curvatura na conexão
transformação de gauge	função de transição t_{ij}
fator de fase	transporte paralelo
eletromagnetismo	conexão em $P = \mathbb{R}^4 \times U(1)$
campos de gauge de spin isotópico	conexão em $P(\mathbb{R}^4, SU(2))$
eletromagnetismo sem monopolos	conexão trivial em $P = \mathbb{R}^4 \times U(1)$
eletromagnetismo com monopolos	conexão não trivial em $P = \mathbb{R}^4 \times U(1)$

Tabela 1.1: Correspondência entre os termos usados em teorias de gauge e espaços fibrados

A situação é semelhante no caso de teorias de gauge não-Abelianas, exceto pelo fato de que neste caso o tensor $F_{\mu\nu}(x)$ é inadequado para descrever a teoria, mesmo de nível puramente clássico. O fator de fase torna-se mais importante neste caso, pois o tensor intensidade de campo subdescreve a teoria mesmo em uma região simplesmente conexa. Novamente, o que descreve a teoria exatamente não é $F_{\mu\nu}(x)$, nem $A_\mu(x)$, mas a generalização não-Abeliana do fator de fase dado por

$$U_{BA}(C) = P \exp \left[i \frac{e}{\hbar c} \int_A^B A_\mu dx^\mu \right] , \tag{1.85}$$

onde, agora, como $A_\mu(x)$ em geral não comuta, tem que ser feito um ordenamento, simbolizado por P, ao longo da curva.

A matriz $U_{BA}(C)$ que toma valores no grupo de gauge G, possui significado geométrico. Ela representa a matriz de transporte paralelo da teoria. Devido a esta interpretação parece natural considerar $U_{BA}(C)$ como uma quantidade mais fundamental do que $A_\mu(x)$, que depende da escolha do gauge do que $F_{\mu\nu}(x)$, já que neste caso podemos ter famílias de $A_\mu(x)'s$ que não estão relacionadas por uma transformação de gauge e que fornecem o mesmo tensor intensidade de campo [4].

1.10 Fator de fase em gravitação e o efeito Aharonov-Bohm gravitacional.

Como vimos na seção anterior, no formalismo do espaço de contornos para teorias de gauge [9] os campos dependem dos caminhos ao invés dos pontos do espaço-tempo. A quantidade fundamental que surge nesse formalismo é o fator de fase [4] (variável de contorno), o qual descreve exatamente a dinâmica de um dado sistema físico, como por exemplo, a de um sistema correspondente a um elétron (quântico) interagindo com um campo eletromagnético.

A extensão do formalismo do espaço de contornos para a teoria da gravitação foi primeiramente considerada por Mandelstam [9] o qual estabeleceu varias equações envolvendo as variáveis de contorno, e também por Yang [8], Voronov a Makeenko [11] e Bollini et al [82] que calcularam a variável de contorno para várias curvas no campo gravitacional correspondente ao espaço-tempo de Kerr.

Os fatores de fase na teoria da gravitação são matrizes que representam o transporte paralelo ao longo de curvas no espaço-tempo com uma conexão afim dada. Elas estão conectadas com a transformação de holonomia linear que é determinada pela métrica e contém importantes informações topológicas. Esses objetos matemáticos contêm informações bastante interessantes. Por exemplo, como os vetores mudam quando são transportados em torno de um curva fechada. Essa mudança é uma medida de quanto o espaço-tempo se desvia do espaço-tempo de Minkowski, do ponto de vista global.

Suponha que temos um vetor v^μ em um ponto Q da curva fechada C. Então, podemos gerar o vetor $\bar{v}^{\ \mu}$ em Q ao transportarmos v^μ paralelamente ao longo da curva. O vetor assim obtido é, em geral, diferente do vetor transportado. Neste caso, podemos associar ao ponto Q e à curva C uma aplicação linear U^μ_ν de tal modo que para qualquer vetor v^μ em Q, o vetor $\bar{v}^\mu$ em Q, resultante do transporte paralelo de v^μ ao longo da curva C, é dado por $\bar{v}^\mu = U^\mu_\nu v^\nu$. A aplicação linear U^μ_ν é chamada transformação de holonomia associada com o ponto Q e à curva C. Se escolhermos uma base de tétradas $\{e^a_\mu(x)\}$ e um parâmetro $\lambda \in [0,1]$ para a curva C tal que $C(0) = C(1) = Q$, então, em se transportando o vetor v^α paralelamente à curva C, de $C(\lambda)$ para $C(\lambda + d\lambda)$, as componentes do vetor sofrem a mudança $\delta v^\mu = \mathcal{M}^\mu_\nu\,[x(\lambda)]\,v^\nu d\lambda$, onde $\mathcal{M}^\mu_\nu$ é uma aplicação linear que depende das tétradas, da conexão afim do espaço-tempo e do valor de λ, e que toma um vetor tangente em um ponto Q e o transporta paralelamente ao longo da curva C de volta ao ponto Q. Segue, portanto, que a transformação de holonomia U^μ_ν é dada pelo produto ordenado das matrizes correspondentes às N aplicações lineares como

$$U^\mu_\nu(C) = \lim_{N\to\infty} \prod_{i=1}^{N} \left[\delta^\mu_\nu + \frac{1}{N}\mathcal{M}^\mu_\nu\,[x(\lambda)]_{|\lambda=\frac{i}{N}}\right]. \tag{1.86}$$

Podemos escrever a aplicação linear U^μ_ν dada pela eq.(1.86) como

$$U_L(C) = P\exp\left(\int_C \mathcal{M}\right), \tag{1.87}$$

onde L significa linear e P é o operador que ordena o produto das N aplicações ao longo da curva C. A eq.(1.87) será entendida como uma abreviação do lado direito da eq.(1.86) e define a holonomia. Note que se $\mathcal{M}^{\mu}_{\nu}$ é independente de λ, então segue da eq.(1.87) que U^{μ}_{ν} é dado por $U^{\mu}_{\nu} = (\exp \mathcal{M})^{\mu}_{\nu}$. Usando o formalismo métrico, a eq.(1.87) pode ainda ser escrita

$$U_L(C) = P\exp(\iint_D R^{\lambda}_{\mu\nu\rho}dx^{\mu}dx^{\nu}), \tag{1.88}$$

onde D é o disco limitado por C e $R^{\lambda}_{\mu\nu\rho}$ é o tensor de Riemann. Também podemos expressar o fator de fase por

$$U_{BA}(C) = P\exp[\int\limits_A^B \Gamma^a_{\mu b}x(\lambda)\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}d\lambda], \tag{1.89}$$

onde $\Gamma^a_{\mu b}$ é a conexão tetrádica e A e B são os pontos inicial e final da curva C. Portanto, associado a cada curva C, de um ponto A a outro ponto B, temos o fator de fase dado pela eq.(1.89). Em outras palavras, o fator de fase é, por construção, uma função da curva C e dos pontos inicial e final da curva. Da definição de U^{μ}_{ν} segue também que sob uma transformação de coordenadas $x \to y$, essa quantidade se transforma da seguinte maneira

$$U^{\mu}_{\nu}(x, x') \to U^{\mu}_{\nu}(x, x')\left(\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\right)_x \left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{\beta}}\right)_{x'}. \tag{1.90}$$

Para uma curva fechada, essa transformação tem a forma $U \to \Omega U \Omega^{-1}$, e portanto não afeta o traço de $U(C)$. A quantidade $U_{BA}(C)$ pode ser expandida da seguinte maneira

$$\begin{aligned} U_{BA}(C) &= P\exp(\int\limits_A^B \Gamma_{\mu}dx^{\mu}) \\ &= I + \oint\limits_C dx^{\mu}\Gamma_{\mu}(x) + \tfrac{1}{2}P\oint\limits_C dx^{\mu}\oint\limits_C dy^{\nu}\Gamma_{\mu}(x)\Gamma_{\nu}(y) + \ldots, \end{aligned} \tag{1.91}$$

com Γ_{μ} sendo os símbolos de Christoffel ou conexão tétradica [35]. Da eq.(1.89) podemos obter a quantidade invariante

$$W(C) = Tr[P\exp(\int\limits_A^B \Gamma^a_{\mu b}x(\lambda)\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}d\lambda)], \tag{1.92}$$

onde Tr é o traço. A quantidade $W(C)$ é conhecida como *loop* de Wilson gravitacional e nos traz informações acerca das propriedades geométricas e topológicas do espaço-tempo.

Na teoria métrica da gravitação, o campo gravitacional está relacionado ao tensor de curvatura de Riemann não-nulo. No entanto, em situações em que o espaço-tempo possui topologia não-trivial, efeitos globais do campo gravitacional devem ser considerados.

Um desses efeitos corresponde ao análogo gravitacional do efeito Aharonov-Bohm eletromagnético, e que consiste no seguinte: partículas restritas a se mover em regiões onde o tensor de curvatura de Riemann não dependem do momento angular (por exemplo, no caso do cilindro com rotação que iremos tratar no próximo capítulo), podem exibir efeitos gravitacionais associados ao momento angular. Outras situações semelhantes são apresentadas e discutidas na literatura. Em geral, o efeito Aharonov-Bohm gravitacional pode ser caracterizado pelo fato de a partícula exibir efeitos gravitacionais mesmo estando restrita a se mover em uma região de curvatura nula [36],[26].

O efeito Aharonov-Bohm gravitacional pode ser entendido em termos do fator de fase gravitacional $P\exp\left(\int \Gamma_\mu dx^\mu\right)$. O transporte paralelo de vetores e espinores ao longo de uma curva fechada que envolve a região de curvatura diferente de zero resulta em uma fase que não é igual a identidade. Este resultado pode ser entendido em termos dos aspectos globais (topologia não-trivial) do espaço-tempo. Portanto, o efeito Aharonov-Bohm gravitacional mostra que a topologia influencia o comportamento de um dado sistema físico. Enquanto o efeito Aharonov-Bohm eletromagnético é de natureza quântica, o análogo gravitacional é puramente clássico. Esta generalização do efeito Aharonov-Bohm para o caso gravitacional foi estudado por vários autores [37]

Em conclusão, podemos dizer que o fator de fase $P\exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\int A_\mu dx^\mu\right)$ tem um papel fundamental na descrição de efeitos globais no eletromagnetismo e em outras teorias de gauge. A intensidade de campo $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \nabla_{[\mu}A_{\nu]}$ subdescreve o eletromagnetismo em situações onde os aspectos globais (topologia não-trivial) são levados em conta. Basicamente, $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ é uma 2-forma fechada ($d\mathcal{F} = 0$), no entanto a topologia impede que ela seja globalmente exata ($\mathcal{F} \neq dA$): há, portanto, uma descontinuidade na conexão de gauge 1-forma A, ou equivalentemente uma segunda classe de cohomologia não-trivial.

Na gravitação o fator de fase também é importante, especialmente na descrição de situações onde a topologia é não-trivial, bem como na formulação da gravitação numa abordagem que independe de coordenadas, o que pode ser fundamental na construção de uma teoria quantizada de campo gravitacional.

Neste primeiro capítulo apresentamos uma revisão matemática sobre temas importantes para a compreensão dos estudos feitos nesta tese. O fator de fase tanto em teorias de gauge quanto em gravitação tem uma grande importância nesse estudos, daí a ênfase dada a este objeto e ao efeito Aharonov-Bohm eletromagnético e seu análogo gravitacional.

Capítulo 2

Holonomias, Efeito Aharonov-Bohm Gravitacional e Caracterização Global do Espaço-Tempo Cônico.

2.1 Introdução.

Neste capítulo vamos calcular os fatores de fase para algumas curvas em diferentes espaços-tempos, tais como o correspondente ao cilindro com rotação [26], monopolo global generalizado, a corda quiral[38] e multicorda quiral [39].

No caso do cilindro com rotação vamos aplicar o fator de fase para mostrar a existência do efeito Aharanov-Bohm [3] gravitacional. Para o caso da corda cósmica quiral vamos determinar a holonomia e generalizar para o sistema formado por N cordas quirais e estudar os aspectos globais do espaço-tempo correspondente a esta configuração. No espaço-tempo gerado por um monopolo global generalizado vamos calcular os fatores de fase e mostrar que eles obedecem as relações de Mandelstam [9].

2.2 Variável de contorno no espaço-tempo do cilindro de matéria com rotação.

Nesta seção estamos interessados em estudar o análogo gravitacional [34] do efeito Aharonov-Bohm eletromagnético, no seguinte sentido geral: um vetor ou um espinor que é transportado em uma região onde a curvatura não depende de um certo parâmetro, como o momento angular, no caso que iremos tratar, pode exibir um efeito gravitacional, associado com este parâmetro, adquirindo um fator de fase que depende do mesmo, de modo que as componentes do vetor transportado dependem do momento angular sem que o tensor de curvatura de Riemann possua dependência com o momento angular.

Como fonte do campo gravitacional, vamos considerar uma casca cilíndrica infinita e com massa, a qual rotaciona em torno do seu eixo. O elemento de linha correspondente a esta situação, na aproximação de campo fraco, é dado por [11]

$$ds^2 = -(1-a/2)dt^2 + (1+a/2)(dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2) + 2b(r)dtd\phi \tag{2.1}$$

onde m é a densidade linear de massa e $j = m\varpi r_0$ é a densidade linear do momento-angular, com ϖ sendo a velocidade angular e r_0 o raio da casca cilíndrica. Esta solução aproximada é justificada em um domínio onde $|a(r)| = |-4\Phi| << 1$, sendo Φ o potencial Newtoniano gerado pela delgada casca cilíndrica com massa e $b(r)$ é uma função de r, e é dada por $b(r) = 4j\left[\frac{r^2}{r_0^2}\Theta(r_0 - r) + \Theta(r - r_0)\right]$, com j sendo o momento angular da fonte. Como o campo gravitacional é considerado fraco, podemos escrever o tensor métrico correspondente à eq.(2.1) na forma $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, onde $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = diag(-1,1,1,1)$ e $h_{\mu\nu}$ é dado pelas identificações óbvias. Neste caso, o tensor de Riemann é dado por

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = (\frac{1}{2}h_{\alpha\nu,\mu\beta} + h_{\mu\beta,\alpha\nu} - h_{\mu\nu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu\nu}), \tag{2.2}$$

onde a vírgula denota derivação.

Usando a expressão dada pela eq.(2.2) podemos verificar que a curvatura fora da casca cilíndrica de matéria não depende do momento angular da mesma, no limite da aproximação linear. Isto significa que o campo gravitacional fraco associado com uma casca cilíndrica de matéria que gira lentamente não é afetado pelo momento angular da fonte.

Agora, vamos calcular as transformações de holonomia para uma curva qualquer no plano xy, que é perpendicular ao cilindro. Para tanto, vamos, primeiramente, calcular as conexões tetrádicas.

Definindo as 1-formas

$$\begin{aligned} \omega^0 = & \ (1 - a/4)dt + bd\phi, \\ \omega^1 = & \ (1 + a/4)dr, \\ \omega^2 = & \ (1 + a/4)rd\phi, \\ \omega^3 = & \ (1 + a/4)dz \end{aligned} \tag{2.3}$$

e usando a equação de estrutura de Cartan,

$$d\omega^a = -\omega^a_b \wedge \omega^b = e^{(a)}_{\mu||\nu} dx^\nu dx^\mu,$$

obtemos as seguintes conexões tetrádicas

$$\begin{aligned} \Gamma^2_{\mu 1} dx^\mu = & \ [1 - 2m(1 - a/4)]\, d\phi = -\Gamma^1_{\mu 2} dx^\mu, \\ \Gamma^3_{\mu 1} dx^\mu = & \ -2m/r(1 - a/4)dz = -\Gamma^1_{\mu 3} dx^\mu, \\ \Gamma^0_{\mu 1} dx^\mu = & \ 2m/r(1 - a/4)dt = \Gamma^1_{\mu 0} dx^\mu, \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde $a(r) = -8m \ln(r/r_0)$ e $b(r) = 4m\varpi r_0$.

Vamos considerar primeiramente curvas fechadas quaiaquer, no plano perpendicular ao cilindro, com centro na origem e valores fixos de t e z. Então, neste caso, temos

$$\Gamma_\mu dx^\mu = \Gamma_\phi d\phi, \tag{2.5}$$

com Γ_ϕ dado por

$$\Gamma_\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_\phi & 0 \\ 0 & -A_\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

onde $A_\phi = [1 - 2m(1 - a/4)]$.

Como Γ_ϕ independe de ϕ, a holonomia linear para esta curva é

$$\begin{aligned} U_L = & \ P\exp(\int_0^{2\pi} \Gamma_\phi d\phi) = \exp(2\pi\Gamma_\phi) \qquad (2.7) \\ = & \ I + \frac{\Gamma_\phi}{A_\phi} sen(2\pi A_\phi) + \frac{\Gamma^2_\phi}{A^2_\phi}[1 - \cos(2\pi A_\phi)], \end{aligned}$$

onde usamos o fato que $(\Gamma_\phi)^3 = -\Gamma_\phi$. Portanto, na forma matricial a holonomia linear é dada por

$$U_L(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi A_\phi & sen 2\pi A_\phi & 0 \\ 0 & -sen 2\pi A_\phi & \cos 2\pi A_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(-2\pi i A_\phi J_{12}), \tag{2.8}$$

com J_{12} sendo o gerador de rotações em torno do eixo z.

Vamos, agora, calcular o fator de fase no caso em que o caminho é uma translação na direção z, $(dt = dr = d\phi = 0)$. Neste caso temos

$$\Gamma_\mu dx^\mu = \Gamma_z dz, \tag{2.9}$$

com

$$\Gamma_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_z & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

sendo $A_z = 2mr^{-1}(1-a/4)$. Como Γ_z é independente de z, para o contorno correspondente ao segmento que vai de z_1 ate $z_2, U(C)$ é dado simplesmente por

$$U_{z_1 z_2}(C) = \exp\left(\int_{z_1}^{z_2} \Gamma_z dz\right) = \exp[-iA_z(z_2 - z_1)]J_{13}, \tag{2.11}$$

onde J_{13} é o gerador de rotação em torno do eixo y.

Para uma translação no tempo, temos

$$\Gamma_\mu dx^\mu = \Gamma_t dt,$$

com Γ_t sendo dado por

$$\Gamma_t = \begin{pmatrix} 0 & A_t & 0 & 0 \\ A_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

onde $A_t = 2mr^{-1}(1 - a/4)$. Portanto, para a translação no tempo o fator de fase é

$$U_{t_1 t_2}(C) = \exp(-iA_t(t_2 - t_1))J_{14}, \tag{2.13}$$

onde J_{14} é o gerador de *boost* na direção $0x$. Note que a holonomia linear não depende do momento angular da fonte.

Agora, vamos calcular a holonomia translacional, a qual esta associada com o momento angular conforme veremos a seguir. Para isto, vamos escrever o elemento de linha dado pela eq.(2.1), na seguinte forma

$$ds^2 = -[(1 - a/4)dt - bd\phi]^2 + (1 + a/2)(dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2). \tag{2.14}$$

Quando circundamos a casca cilíndrica ao longo do círculo de um ponto de coordenadas (t, x, y, z) até o de coordenadas (t', x', y', z'), o vetor coluna $(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ transportado paralelamente ao longo do círculo torna-se $(\mathbf{t}', \mathbf{x}')$. Esses vetores relacionam-se pelas seguintes relações

$$\begin{aligned}
t' &= (1 - a/4)t - 2\pi b, \\
x' &= x\cos(2\pi A_\phi) + ysen(2\pi A_\phi), \\
y' &= -xsen(2\pi A_\phi) + y\cos(2\pi A_\phi), \\
z' &= z,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

onde $A_\phi = [1 - 2m(1 - a/4)]$.

A transformação dada pela eq.(2.15) pode ser posta na forma de multiplicação de matrizes homogêneas dada por: seja M_B^A uma matriz pertencente ao espaço das matrizes $M(5 \times 5)$ com A, B variando de 0 até 4. Vamos tomar M_μ^υ como sendo a matriz associada a rotação a qual é dada pela eq.(2.8), $M_0^0 = -a/4$, $M_4^0 = 2\pi b$ e o outros elementos são todos nulos, isto é,

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = (-iA_\phi J_{12} + i\frac{a}{4}M + ibM') \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

onde

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e tais que $[M, M'] = 0$, $M^3 = -M$ e $M'^{\,3} = -M$.
Logo podemos expresar a holonomia total como sendo

$$\begin{aligned} U(C) &= \exp(\frac{a\pi}{2} iM + 2\pi i b M') \exp(-2\pi i A_\phi J_{12}) \\ &= \exp(-2\pi i A_\phi J_{12} + \frac{a\pi}{2} iM + 2\pi i b M'), \end{aligned} \tag{2.17}$$

onde estamos considerando a representação em cinco dimensões dos geradores de rotações.

Portanto, se considerarmos o transporte paralelo de um vetor ao longo de um círculo em torno de um cilindro, após este processo ele adquire um fator de fase dado pela eq.(2.17), a qual depende do momento angular, que não contribui para a curvatura na aproximação de campo fraco. Esta dependência da fase de uma quantidade (momento angular) que não afeta a curvatura, chamamos de efeito Aharonov-Bohm gravitacional generalizado.
O fato de que um atributo da fonte (momento angular) está codificado no fator de fase, que é uma quantidade global, pois depende das curvas sobre as quais ele é calculado, e não esta codificado no tensor de curvatura de Riemann, que é uma quantidade local, evidencia a importância daeastrutura topológica do espaço-tempo na descrição da física de um dado sistema.

2.3 Variáveis de contorno no espaço-tempo de um monopolo global generalizado.

O modelo considerado por Barriola e Vilenkin [34] e que dá origem à solução do monopolo global é descrito pela Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi^a \partial^\mu \Phi^a - \frac{1}{4}\lambda(\Phi^a\Phi^a - \eta^2)^2, \tag{2.18}$$

sendo $\Phi^a (a = 1, 2, 3)$ um tripleto de campos escalares. O modelo tem uma simetria global $O(3)$ que é espontaneamente quebrada em $U(1)$. A configuração de campos que descreve o monopolo é

$$\Phi^a = \eta f(r) x^a / r, \tag{2.19}$$

onde $x^a x^a = r^2$.

Para determinar o campo gravitacional gerado por um monopolo global, vamos considerar a métrica mais geral, esfericamente simétrica, e que pode ser escrita na forma

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2). \tag{2.20}$$

As equações de movimento para Φ^a no espaço-tempo correspondente ao elemento de linha dado por eq.(2.20) se reduzem a uma equação para $f(r)$ e que é dada por [34]

$$\frac{1}{A} f'' + \left[\frac{2}{Ar} + \frac{1}{2B}\left(\frac{B}{A}\right)'\right] f' - \frac{2f}{r^2} - \lambda\eta^2 f(f^2 - 1) = 0, \tag{2.21}$$

onde a vírgula indica derivada em relação à coordenada radial.

As componentes do tensor energia-momento são

$$\begin{aligned} T_t^t &= -\frac{\eta^2 f'^2}{2A} - \frac{\eta^2 f^2}{r^2} - \frac{1}{4}\lambda\eta^4(f^2-1)^2 \\ T_r^r &= \frac{\eta^2 f'^2}{2A} - \frac{\eta^2 f^2}{r^2} - \frac{1}{4}\lambda\eta^4(f^2-1)^2 \\ T_\theta^\theta &= T_\phi^\phi = -\frac{\eta^2 f^2}{2A} - \frac{1}{4}\lambda\eta^4(f^2-1)^2 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Para resolver as equações de Einstein para o tensor energia-momento dado por (2.22), Barriola e Vilenkin admitiram que $f = 1$ fora do núcleo do monopolo. Neste caso $T_t^t = T_r^r = -\eta^2/r^2$ e $T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = 0$. Na realidade, $f = 1$ não resolve a equação (2.21), a menos que o termo de $O(1/r^2)$ seja desprezado. Com esta aproximação, a solução obtida é [34]

$$ds^2 = -(1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2m}{r})dt + (1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2m}{r})^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2). \tag{2.23}$$

Para obter uma solução correta até o termo de $O(1/r^2)$, vamos considerar $f(r) = 1 - 1/\lambda\eta^2 r^2$. Mantendo-se os termos até $O(1/r^4)$ no tensor energia-momento, as equações de Einstein tomam a seguinte forma

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r^2} - \frac{1}{Br^2} + \frac{1}{B^2 r}\frac{dB}{dr} &= 8\pi(\frac{1}{\lambda r^4} - \frac{\eta^2}{r^2}), \\
\frac{1}{r^2} - \frac{1}{Br^2} + \frac{1}{ABr}\frac{dA}{dr} &= 8\pi(\frac{1}{\lambda r^4} - \frac{\eta^2}{r^2}), \\
\frac{8\pi}{\lambda r^4} &= \frac{1}{2B^2 r}\frac{dB}{dr} - \frac{1}{2AB}\frac{d^2A}{dr^2} - \frac{1}{2ABr}\frac{dA}{dr} + \\
&\quad \frac{1}{4AB^2}\left(\frac{dA}{dr}\right)\left(\frac{dB}{dr}\right) + \frac{1}{4A^2B}\left(\frac{dA}{dr}\right)^2
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

A solução destas equações até $O(1/r^4)$ é dada por

$$
A = B^{-1} = 1 - 8\pi\eta^2 - 2m/r - 8\pi/\lambda r^2). \tag{2.25}
$$

Portanto, o elemento de linha para o monopolo global generalizado é

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -(1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2m}{r} - \frac{8\pi}{\lambda r^2})dt + (1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2m}{r} - \frac{8\pi}{\lambda r^2})^{-1}dr^2 + \\
&\quad r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2),
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

onde o m é uma constante de integração que está asociada à massa, η é um parâmetro relacionado com a escala de quebra de simetria e λ é a constante de acoplamento.

Considerando as 1-formas definidas por

$$
\begin{aligned}
\omega^0 &= \sqrt{A}dt, \\
\omega^1 &= 1/\sqrt{A}dr, \\
\omega^2 &= rd\theta, \\
\omega^3 &= rsen\theta d\phi,
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

e usando as equacões de estrutura de Cartan, $d\omega^a = -\omega^a_b \wedge \omega^b = e^{(a)}_{\mu||\nu} dx^\nu dx^\mu$, determinamos as seguintes conexões tetrádicas

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{\mu 1}dx^\mu &= (-m/r^2 + 8\pi/\lambda r^3)dt = \Gamma^1_{\mu 0}, \\
\Gamma^2_{\mu 1}dx^\mu &= \sqrt{A}d\theta = -\Gamma^1_{\mu 2}dx^\mu, \\
\Gamma^3_{\mu 1}dx^\mu &= \sqrt{A}sen\theta d\phi = -\Gamma^1_{\mu 3}dx^{\mu,}, \\
\Gamma^3_{\mu 2}dx^\mu &= \cos\theta d\phi = -\Gamma^2_{\mu 3}dx^\mu.
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Se considerarmos o círculo com centro na origem, com r, θ e t fixos, das expressões para as conexões tetrádicas, obtemos que

$$
\Gamma_\mu dx^\mu = \Gamma_\phi d\phi,
$$

onde

$$\Gamma_\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathcal{A} \\ 0 & 0 & 0 & -D \\ 0 & \mathcal{A} & D & 0 \end{pmatrix} = -i\mathcal{A}J_{13} - iDJ_{23}, \tag{2.29}$$

sendo $\mathcal{A} = A^{1/2}sen\theta = (1 - 8\pi\eta^2 - 2m/r - 8\pi/\lambda r^2)^{1/2}sen\theta$, $D = \cos\theta$ e J_{13} e J_{23} os geradores de rotações em torno dos eixos y e x, respectivamente. Como Γ_ϕ é independente de ϕ, a transformação de holonomia para círculos,com $\phi \in [0, 2\pi]$ é dada por

$$U(C) = P\exp\left(\int_0^{2\pi} \Gamma_\phi d\phi\right) = \exp\left[2\pi\Gamma_\phi\right]. \tag{2.30}$$

Para $\theta = \pi/2$, e usando o fato de que a matriz Γ_ϕ satisfaz a seguinte propriedade $(\Gamma_\phi)^3 = -\mathcal{A}^2\Gamma_\phi = -A\Gamma_\phi$, o fator de fase para este caso é dado por

$$U(C) = I + \frac{\Gamma_\phi}{\mathcal{A}}sen(2\pi\mathcal{A}) + \left(\frac{\Gamma_\phi}{\mathcal{A}}\right)^2[1 - \cos(2\pi\mathcal{A})]. \tag{2.31}$$

Na forma matricial o fator de fase $U(C)$ torna-se

$$U(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi A^{1/2} & 0 & -sen2\pi A^{1/2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & sen2\pi A^{1/2} & 0 & \cos 2\pi A^{1/2} \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

Consideremos, agora, a curva $r(s)$, $\theta(s)$ contida no plano meridiano. Neste caso, temos

$$\Gamma_s ds = \left(\Gamma_\theta\frac{d\theta}{ds} + \Gamma_r\frac{dr}{ds}\right). \tag{2.33}$$

Da equação (2.19) concluimos que $\Gamma_r = 0$ e que

$$\Gamma_\theta = i\sqrt{A}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -i\sqrt{A}J_{12}, \tag{2.34}$$

onde J_{12} é o gerador de rotações em torno do eixo-z.

Como Γ_θ é independente de θ, então, o fator de fase para uma curva qualquer no plano meridiano é dado por

$$U_{\theta_1\theta_2}(C) = \exp\left[i\sqrt{A}(\theta_2 - \theta_1)J_{12}\right], \tag{2.35}$$

que representa a rotação de um ângulo $\sqrt{A}(\theta_2 - \theta_1)$ em torno do eixo z.

Para finalizar os cálculos de holonomias nesse espaço-tempo, vamos considerar a translação no tempo. E neste caso, temos que

$$\Gamma_\mu dx^\mu = \Gamma_t dt,$$

sendo

$$\Gamma_t = i\frac{m}{r^2}\begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i\frac{m}{r^2}J_{10} \tag{2.36}$$

onde J_{10} é o gerador de *boost* na diração $0x$. Portanto, o fator de fase para este caso é

$$U_{t_2t_1}(C) = \exp(i\sqrt{A}J_{10})(t_2 - t_1).$$

Usando resultados anteriores para fatores de fase podemos escrever a expressão geral para o fator de fase $U(C)$, o qual é escrito como

$$U(C) = P\exp\left(-\frac{i}{2}\int \Gamma_\mu^{ab}(x)J_{ab}dx^\mu\right) \tag{2.37}$$

onde J_{ab} são os geradores do grupo de Lorentz $SO(3,1)$ e Γ_μ^{ab} são as conexões tetrádicas apropriadas. Deste resultado concluímos que o fator de fase correspondente a curvas no espaço-tempo do monopolo global generalizado é o homomorfismo que mapeia uma dada classe de curvas homotópicas nos elementos do grupo de Lorentz.

Das equações (2.32) e (1.92) obtemos o seguinte resultado para o *loop* de Wilson

$$W(C) = 2[1 + \cos(2\pi A^{1/2})]. \tag{2.38}$$

Finalizaremos esta seção mostrando que *loop* de Wilson satisfaz as relações de Mandelstam. Como Γ_ϕ dada pela eq.(2.29) é função apenas de r para θ fixo, então

$W(C)$ é também função somente de r. Portanto temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}\{2[1+\cos 2\pi(1-8\pi\eta^2-2m/r-8\pi/\lambda r^2)^{1/2}]\} \\
&= -2\pi sen(2\pi A^{1/2})A^{-1/2}(m/r^2+8\pi/\lambda r^3), \\
\frac{\partial W}{\partial \theta} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Da expresão para o tensor de curvatura para o monopolo global generalizado, temos

$$R^a_{13b} = -A^{-1/2}(m/r^2+8\pi/\lambda r^3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R^a_{23b} = 2mr^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde a e b são índices tetrádicos. Em particular, para $\Delta\phi = 2\pi$, podemos verificar que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial r} &= \int_0^{2\pi} d\phi Tr(R_{13}U) = 2\pi Tr(R_{13}U), \\
\frac{\partial W}{\partial \theta} &= 0
\end{aligned} \tag{2.40}$$

As equações acima são casos particulares de

$$\frac{\partial W}{\partial x_\nu} = \oint ds Tr\{R_{\mu\nu}U(C)\}\frac{dy^\mu}{ds}, \tag{2.41}$$

que correspondem à relação de Mandelstam. Portanto, o *loop* de Wilson para as curvas consideradas no espaço-tempo do monopolo global generalizado satisfaz a relação de Mandelstam. [9].

2.4 Transformações de holonomia no espaço-tempo de uma corda quiral.

Em coordenadas cilíndricas a métrica para a corda cósmica quiral é dada por [38]

$$ds^2 = -\left(dt + 4J^t d\phi\right)^2 + dr^2 + \alpha^2 r^2 d\phi^2 + (dz + 4J^z d\phi)^2 \tag{2.42}$$

onde $r \geq 0$ e $\phi \in [0, 2\pi]$. Esta é a solução mais geral, estacionária, e que depende de três parâmetros. O parâmetro J^t representa o momento angular da corda; $2J^z/\pi$ é o análogo do vetor de Burgers da dislocação e $\alpha = 1 - 4\mu$, onde μ é a densidade linear de massa da corda. Geometricamente, a métrica dada por (2.42) pode ser obtida retirando-se um fator angular do espaço-tempo de Mimkowski, fazendo-se um *boost* em uma das faces e depois colocando-se as mesmas.Com $J^t = J^z = 0$ a métrica resultante representa o espaço-tempo da corda cósmica [40]. Para $J^z = 0$, $\alpha \neq 1$ e $J^t \neq 0$, temos a métrica correspondente a corda com rotação [41]

Agora, vamos escrever a eq.(2.42) como $ds^2 = \eta_{ab}\omega^a\omega^b$, onde as 1-formas $\omega^a(a = 0, 1, 2, 3)$ são dadas por

$$\begin{aligned} \omega^0 &= dt + 4J^t d\phi, \\ \omega^1 &= \cos\phi dr - \alpha r sen\phi d\phi, \\ \omega^2 &= sen\phi dr + \alpha r \cos\phi d\phi, \\ \omega^3 &= dz + 4J^z d\phi. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Para esta escolha das tédradas, obtemos as seguinte conexões tetrádicas não-nulas

$$-\Gamma^1_{\mu 2} dx^\mu = \Gamma^2_{\mu 1} dx^\mu = -(1-\alpha)d\phi. \tag{2.44}$$

Notemos que a conexões tetrádicas não dependem dos parâmetros J^t e J^z, mas tão somente de α, que está associado a densidade linear de massa da corda quiral.

A métrica da corda quiral pode ser colocada na forma de Minkowski com a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} T &= t + J^t\phi \qquad (2.45) \\ \theta &= \alpha\phi \\ Z &= z + J^z\phi. \end{aligned}$$

Da mudança na coordenada temporal, vemos que há uma singularidade no tempo análoga ao defeito produzido pela massa no caso estático. É importante notar que para t constante, quando ϕ atinge o valor 2π, que deve ser identificado com $\phi = 0$, a coordenada T

sofre uma alteração de $8\pi J^t$, de modo a presevar a univocidade. O mesmo acontece com a coordenada Z que é alterada por $8\pi J^z$. Portanto, o espaço cônico em torno da corda quiral possui uma singularidade com deficiência angular $8\pi\mu$, e além disto, possui uma alteração nas direções t e z proporcionais, respectivamente, a $8\pi J^t$ e $8\pi J^z$. Então, quando circulamos o cone quiral para $t =$ constante e $z =$ constante, voltamos ao mesmo ponto, porém, com alterações em t e z, proporcionais ao momento angular e à torção, respectivamente.

Primeiramente, vamos considerar um círculo C no equador ($dr = dt = dz = 0$). Então a holonomia linear é dada por

$$U(C) = \exp\left(\int_0^{2\pi} \Gamma_\phi d\phi\right) = e^{-8\pi i\mu J_{12}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 8\pi\mu & sen 8\pi\mu & 0 \\ 0 & -sen 8\pi\mu & \cos 8\pi\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (2.46)$$

onde J_{12} é o gerador de rotações em torno do eixo z. Este resultado não depende de J^t nem de J^z, e portanto, a holonomia linear não distingue a métrica da corda quiral para diferentes valores de J^te J^z.

A partir deste resultado vemos que quando um vetor é transportado paralelamente em torno de um cone quiral situado na origem, este vetor adquire uma fase que vem da holonomia linear a qual é dada por $\exp(-8i\pi\mu J_{12})$. Mas, sabemos que existem *saltos* nas coordenadas t e z, e portanto, a holonomia total deve conter estas informações. Como o espaço-tempo fora da corda quiral é localmente plano, podemos descrever as soluções analíticas em termos de partes do espaço-tempo com a métrica de Minkowski, mas conectadas por condições adicionais que dão conta dos *saltos* nas coordenadas t e z. No presente caso existe um sistema de coordenadas localmente plano, e então, podemos assumir a estrutura helicoidal do tempo adotada no caso da gravitação em $(2 + 1)$-dimensões[42]. Note que a generalização dessa estrutura para o caso geral de $(3+1)$-dimensões não pode ser admitida simplesmente, pois, esta estrutura helicoidal é dependente da existência de coordenadas localmente planas. No caso em consideração a estrutura helicoidal pode ser admitida, pois existem coordenadas localmente planas.

Então, para se estabelecer as condições vamos considerar a situação em que circundamos a corda cósmica quiral ao longo de um círculo C partindo de um ponto $(t, \mathbf{x})$ para um ponto $(t', \mathbf{x}')$. Então, em virtude dos *saltos* nas coordenadas t e z, os vetores coluna $(t, \mathbf{x})$ e $(t', \mathbf{x}')$ estão relacionados pelas equações

$$
\begin{aligned}
t' &= t + 8\pi J^t, \\
x' &= \cos(8\pi\mu)x + sen(8\pi\mu)y, \\
y' &= -sen(8\pi\mu)x + \cos(8\pi\mu)y, \\
z' &= z + 8\pi J^z
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

ou, na forma matricial

$$
\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 8\pi J^t \\ 0 & \cos(8\pi\mu) & sen(8\pi\mu) & 0 & 0 \\ 0 & -sen(8\pi\mu) & \cos(8\pi\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8\pi J^z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.48}
$$

Introduzindo as matrizes

$$
M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

podemos escrever a eq.(2.48) como

$$
\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \exp(-8i\pi J^t M_0)\exp(-8i\pi J^z M_3)\exp(-8i\pi\mu J_{12}) \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.49}
$$

onde consideramos a representação de J_{12} em 5-dimensões. Da eq.(2.49) podemos extrair a parte translacional da holonomia total a qual é dada por $\exp(-8i\pi J^t M_0)\exp(-8i\pi J^z M_3)$.

O fator de fase que atua em $(t, \mathbf{x})$ no caso considerado tomando as circunstâncias especiais de existência de coordenadas localmente planas, em que podemos identificar o espaço tangente com a própria variedade, nos permite tratar o ponto $(t, \mathbf{x})$ como um vetor e como consequência a matriz produto da eq.(2.49) como a matriz de transporte paralelo. Essa identificação não é possível no caso da não existência de um sistema de coordenadas localmente plano, e portanto, não pode ser generalizada para qualquer espaço-tempo.

A eq.(2.49) é a expressão exata para a holonomia para círculos no espaço-tempo da corda cósmica quiral. Definindo $X^A = (x^\mu, 1)$, podemos usar as condições dadas pelas equações eq.(2.47) como $X^A = M^A_B X^B$, as quais diz que os pontos $(t, \mathbf{x})$ e $(t', \mathbf{x}')$ ao longo do percurso são relacionados pela fase dada pela eq.(2.49), que depende dos parâmetros α, J^t e J^z que caracterizam a métrica.

O primeiro fator na eq.(2.49) corresponde a uma translação no tempo ao qual pode ser dada a seguinte interpretação. Suponha que um interferômetro circula a corda quiral. Então, o deslocamento de $8\pi E J^t$ no tempo corresponde a uma mudança de fase de dois feixes de luz que circulam a corda cósmica quiral ao longo da mesma curva e em direções opostas. Esta mudança de fase é conhecida como efeito Sagnac [43] e representa um análogo gravitacional do efeito Aharonov-Bohm da eletrodinâmica. O segundo fator corresponde a uma translação espacial e tem o seguinte significado físico [44]. Considerando que o feixe de partículas é espalhado tenha uma componente z do momento igual a k, então, este fator dá a mudança de fase $8\pi k J^z$,devido ao acoplamento do momento linear da partícula com a torção.

Portanto, quando transportamos um vetor ao longo de círculo no espaço-tempo da corda cósmica quiral, ele adquire uma fase que depende de α(ou μ), J^z e J^t os quais impedem que a matriz de transporte paralelo(fator de fase) seja igual à identidade. Este efeito está associado exclusivamente ao fato de a topologia do espaço-tempo em questão ser não-trivial. Este é um exemplo do efeito Aharonov-Bohm gravitacional. [37], [3]. Este efeito foi obtido classicamente e está associado com a transformação de holonomia não-trivial para círculos no plano-xy. Como neste caso a geometria é localmente plana, a mudança de fase adquirida pelo vetor quando transportado paralelamente em torno de fonte pode ser vista como devido ao acoplamento da energia-momento com as propriedades geométricas e topológicas do espaço-tempo, gerado pela corda cósmica quiral.

Vamos considerar o caso particular em que $J^t = J^z = 0$, e que corresponde a uma corda cósmica. Neste caso, a transformação de holonomia para curvas fechadas situadas no plano perpendicular ao da corda é dasda por $U(C) = \exp(-8\pi i\mu J_{12})$. De um modo geral, podemos verificar que [41]$U(C) = \exp(-\frac{i}{2}\int \Gamma^{ab}_{\mu}(x)J_{ab}dx^{\mu})$, onde J_{ab} são os geradores do grupo de Lorentz $SO(1,3)$.

No caso em que $J^t \neq 0$ e $J^z = 0$, temos que o fator de fase é dado por

$$U(C) = \exp(-8\pi i J^t M_0)\exp(-8\pi\mu J_{12}). \tag{2.50}$$

Podemos reescrever a eq.(2.50) em termos dos geradores do grupo de Poincaré da seguinte forma

$$U(C) = P\exp\left[-\frac{i}{2}\int\limits_C (e^{(a)}_{\mu}P_a + \frac{1}{2}\Gamma^{ab}_{\mu}J_{ab})dx^{\mu}\right], \tag{2.51}$$

onde introduzimos os geradores de translações $P_\mu = -i\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ devido a translação temporal. Portanto, no caso estacionário os fatores de fase correspondentes a curvas fechadas em torno da corda cósmica com rotação [41] são elementos do grupo de Poincaré $ISO(1,3)$. O fato do grupo de holonomia, neste caso, ser o $ISO(1,3)$ ao invés do $SO(1,3)$ parece interessante e sugere um importante paralelo com a gravitação de Einstein em $(2+1)$-dimensões. É importante observar que o fato de os fatores de fase serem elementos do grupo de Poincaré está intimamente associado à existência de um sistema de coordenadas localmente plano. Portanto, esta estrutura não pode ser simplesmente admitida como válida no caso geral de um espaço-tempo em $(3+1)$-dimensões.

A gravitação em (2+1)-dimensões é equivalente a uma teoria de gauge de Chern-Simons [45]com grupo $ISO(1,2)$, na qual a tríade $e^{\mu}_{(a)}$ corresponde ao grupo de gauge, e portanto faz sentido pensar em um fator de fase envolvendo $e^{\mu}_{(a)}$. Há uma correspondente teoria em (3+1)-dimensões? (Há estudos tentando construir uma teoria de gauge do grupo $ISO(1,3)$ em (3+1)-dimensões, mas, tanto quanto sabemos, não há uma versão convincente dessa teoria que trate as tétradas com campos de gauge ordinários). Porém, a existência de um sistema de coordenadas localmente plano em alguns casos específicos em (3+1)-dimensões, nos permite construir a teoria de Einstein nessa dimensão como uma teoria de gauge do grupo de Poincaré, e portanto, nesses casos faz sentido construir o fator de fase na forma dada pela eq.(2.51), sendo $e^{(a)}_{\mu}$ e Γ^{ab}_{μ} os potenciais de gauge.

Portanto, no caso da corda cósmica com rotação existe um fator extra na fase quando comparado ao caso sem rotação. Então, por exemplo, quando um feixe de luz de comprimento de onda λ descreve uma circunferência de raio R em torno da corda girante, a fase da luz é alterada pela quantidade $8\pi J/\lambda$, quando compara com o caso sem momento angular. Este efeito é um análogo gravitacional do efeito Aharonov-Bohm eletromagnético, mas, neste caso, ele é de natureza puramente clássica.

No caso em que $J^t \neq 0$ mas $J^z = 0$, isto é, a corda cósmica girante, sugere um tratamento geométrico para a o caso do potencial solenoidal infinito. O solenóide infinito possui uma singularidade do tipo da corda cósmica com rotação, ou seja existe uma 1-forma A_μ, com discontinuidade do tipo das coordenadas polares $(0, 0, \Phi/r)$. A mudança do eletomagnetismo para a gravitação é feita usando a seguinte correspondência na aproximação de campo fraco: $e \leftrightarrow m$, $A_\mu \leftrightarrow h_\mu(\frac{1}{2}h_{00}, h_{0i})$. Daí, o espaço-tempo correspondente ao potencial $\mathbf{A} = (0, 0, \Phi/r)$ é dado por

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2 - 2\Phi d\phi dt \tag{2.52}$$

onde $\Phi \equiv$ fluxo magnético$/2\pi e$.
Da equação eq.(2.51), concluímos que a holonomia total para círculo neste espaço-tempo é dada por

$$U(C) = \exp[-8\pi i(\Phi M_0)].$$

Esta fase é diferente da unidade, em geral, e então, temos o efeito Aharonov-Bohm.

2.5 Fatores de fase no espaço-tempo de N cordas quirais.

Vamos, nesta seção, determinar a holonomia no espaço-tempo gerado por por N cordas cósmicas quirais localizadas nos pontos $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$, com $i = 1, 2, \ldots, N$, e situadas paralelamente ao eixo z[39]. A métrica associada ao espaço-tempo gerado por uma corda quiral dada pela eq.(2.42) pode ser escrita da seguinte forma

$$ds^2 = -(dt + 4J^t d\phi)^2 + r^{-8\mu}(dr^2 + r^2 d\phi^2) + (dz + 4J^z d\phi)^2 \tag{2.53}$$

Se considerarmos um sistema Cartesiano de coordenadas $x = r\cos\phi$, $y = rsen\phi$, a equação (2.53) fica dada por

$$ds^2 = -(dt + 4J^t \frac{xdy - ydx}{r^2})^2 + e^{-4V}(dx^2 + dy^2) + (dz + 4J^z \frac{xdy - ydx}{r^2})^2, \qquad (2.54)$$

com $V = 2\mu \ln r$.

A generalização da métrica de uma corda quiral para a de N cordas quirais paralelas ao eixo z, pode ser obtida com as seguintes trocas [39]

$$\begin{aligned} J^t \frac{xdy - ydx}{r^2} &\rightarrow \sum_{i=0}^{N} J_i^t \frac{(x - x_i)dy - (y - y_i)dx}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \\ J^z \frac{xdy - ydx}{r^2} &\rightarrow \sum_{i=0}^{N} J_i^z \frac{(x - x_i)dy - (y - y_i)dx}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \\ 2\mu \ln r &\rightarrow \sum_{i=0}^{N} \mu_i \ln\left[r^2 - 2rr_i\cos(\phi - \phi_i) + r_i^2\right]. \end{aligned} \qquad (2.55)$$

Portanto, o espaço-tempo gerado por N cordas quirais possui elemento de linha dado por

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\left[dt + \sum_{i=1}^{N} A_i(W_i^1 dy - W_i^2 dx)\right]^2 + e^{-4V}(dx^2 + dy^2) + \\ & \left[dz + \sum_{i=1}^{N} B_i(W_i^1 dy - W_i^2 dx)\right]^2, \end{aligned} \qquad (2.56)$$

onde $A_i = 4J_i^t$ e $B_i = 4J_i^z$, com J_i^t e J_i^z correspondendo ao momento angular e torção da i-ésima corda quiral, respectivamente, e W_i^1 e W_i^2 dados por

$$W_i^1 = \frac{x - x_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2}, \; W_i^2 = \frac{y - y_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \qquad (2.57)$$

Considerando o caso em que $J_i^t = J_i^z = 0$, teremos o espaço-tempo de N cordas cósmicas (múltiplas cordas). Quando um vetor é transportado paralelamente ao longo de uma curva fechada qualquer no plano-xy, no espaço-tempo da múltipla corda cósmica, este adquire uma fase dada por [46]

$$U(C) = \exp\left(\int_0^{2\pi} \Gamma_\phi d\phi\right) = e^{-8\pi i\tilde{\mu}J_{12}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 8\pi\tilde{\mu} & sen8\pi\tilde{\mu} & 0 \\ 0 & -sen8\pi\tilde{\mu} & \cos 8\pi\tilde{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (2.58)$$

onde $\tilde{\mu} = \sum_{i=1}^{N} m_i$.

Portanto, os vetores coluna $(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ e $(\mathbf{t}', \mathbf{x}')$ são relacionados por

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 8\pi\tilde{\mu} & sen 8\pi\tilde{\mu} & 0 \\ 0 & -sen 8\pi\tilde{\mu} & \cos 8\pi\tilde{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{2.59}$$

Como no caso da múltipla corda, o espaço-tempo da multi corda quiral é também localmente plano, fora das localizações das fontes. Portanto, podemos usar as mesma condições dadas pela eq.(2.59), exceto as concernentes às coordenadas t e z. Essas condições são expressas relacionando-se os pontos $(t, \mathbf{x})$ e $(t', \mathbf{x}')$ como segue:

$$\begin{aligned} t' =& \quad t + 8\pi\tilde{J}^t, \\ x' =& \quad \cos(8\pi\tilde{\mu})x + sen(8\pi\tilde{\mu})y, \\ y' =& \quad -sen(8\pi\tilde{\mu})x + \cos(8\pi\tilde{\mu})y, \\ z' =& \quad z + 8\pi\tilde{J}^z, \end{aligned} \tag{2.60}$$

onde $\tilde{J}^t = \sum_{i=1}^{N} J_i^t$ e $\tilde{J}^z = \sum_{i=1}^{N} J_i^z$ e consideramos como curvas as circunferências no plano-xy. A transformação dada pela equação eq.(2.60) pode ser posta na forma de produtos de matrizes da seguinte forma: seja M_A^B uma matriz 5-dimensional, com $A, B = 0, \ldots, 4$. Tomemos M_ν^μ como sendo a matriz associada a rotação $U(C) = \exp(-8\pi\tilde{\mu}J_{12})$, e $M_4^0 = 8\pi\tilde{J}^t$, $M_4^3 = 8\pi\tilde{J}^z$, $M_4^0 = M_4^1 = M_4^4 = 1$, temos então que;

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 8\pi\tilde{J}^t \\ 0 & \cos 8\pi\tilde{\mu} & sen 8\pi\tilde{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & -sen 8\pi\tilde{\mu} & \cos 8\pi\tilde{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8\pi\tilde{J}^z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.61}$$

que pode ser posta na forma,

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \exp\left[8\pi i\tilde{J}^t M_0\right] exp\left[8\pi i\tilde{J}^z M_3\right] \exp\left[-8\pi i\tilde{\mu}J_{12}\right] \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

onde $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

A equação eq.(2.62) é a expressão exata para a holonomia, para círculos no espaço-tempo da multicorda quiral.

Podemos calcular as holonomias para circunferências no espaço-tempo de N cordas quirais no contexto da teoria de Einstein-Cartan [39]. Neste caso temos que as conexões espinoriais são dadas por

$$\Gamma^1_{\mu 2} dx^\mu = 2(\frac{\partial V}{\partial x} dy - \frac{\partial V}{\partial y} dx) = -\Gamma^2_{\mu 1} dx^\mu, \tag{2.63}$$

que em coordenadas cilindricas ($x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \phi$, $x^3 = z$) pode ser escrita na forma

$$\Gamma^1_{\mu 2} dx^\mu = -\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi} dr - (1 - 2r\frac{\partial V}{\partial r}) d\phi = -\Gamma^2_{\mu 1} dx^\mu. \tag{2.64}$$

Agora, considere a mesma circunferência do cálculo anterior. Neste caso $U_{(2\pi,0)}(C)$ é dado por

$$U_{(2\pi,0)}(C) = \exp(\int_0^{2\pi} \Gamma_\phi d\phi) = \exp\left[-8\pi i (\sum_{j=1}^{N} \mu_j) J_{12}\right], \tag{2.65}$$

onde

$$\Gamma_\phi = i\{1 - 4\sum_{j=1}^{N} \mu_j \frac{R[R - r_i\cos(\phi - \phi_i)]}{[R^2 - 2Rr_i\cos(\phi - \phi_i) + r_i^2]}\} J_{12},$$

sendo R o raio da circunferência.

Deste resultado, vemos que, no contexto da teoria Einstein-Cartan, a transformação de holonomia não contém informações sobre o momento angular e a torção. Portanto, o conceito de holonomia pode ser usado para distinguir as conexões nos contextos das teorias de Einstein e de Einstein-Cartan.

Analisando a eq.(2.65), concluimos que o fator de fase adquirido por um vetor ao ser transportado no espaço-tempo de N cordas quirais é afetado somente pelas cordas que estão circuladas pela curva ao longo da qual o vetor é transportado.

A existência de coordenadas localmente planas no espaço-tempo nos permite considerar a matriz M^A_B como a matriz do transporte paralelo. Então podemos dizer que quando transportamos um vetor ao longo de um círculo neste espaço-tempo ele adquire uma fase que depende de μ_i, J_i^t , J_i^z apesar do espaço-tempo ser localmente plano. Este efeito é próprio da não-trivialidade da topologia do espaço-tempo em questão, e o análogo gravitacional do efeito Aharonov-Bohm eletromagnético.

2.6 Caracterização global do espaço-tempo N cordas quirais.

Como uma aplicação da transformação de holonomia vamos estudar [46] do ponto de vista global, o espaço-tempo de uma configuração de N cordas cósmicas quirais localizadas nos pontos $\mathbf{a}_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Para tanto vamos usar o resultado que somente a corda envolvida pela curva contribui para o fator de fase adquirido por um vetor quando transportado paralelamente no espaço-tempo de múltiplas cordas quirais [38].

Se transportamos um vetor $\mathbf{x}$ paralelamente, ao longo de um círculo que circunda uma corda quiral obtemos o seguinte vetor após esse processo

$$\mathbf{x}^{(1)} = U_1\mathbf{x}, \tag{2.66}$$

onde U_1 é obtido de

$$U_k = \exp(-8i\pi J_k^t M_0)\exp(-8i\pi J_k^z M_3)\exp(-8i\pi\mu_k J_{12}) \tag{2.67}$$

para $k = 1$.

Agora, vamos considerar um sistema de duas cordas quirais, uma em $\mathbf{a}_1 = 0$ (origem) e a outra em $\mathbf{a}_2$. Se transportarmos paralelamente o vetor $\mathbf{x}$ ao longo do círculo em torno da corda cósmica 2, o vetor resultante é dado por $U_2\mathbf{x}$. Transportando paralelamente este vetor resultante ao longo do círculo que circunda a corda cósmica 1, teremos um novo vetor resultante qur é dado por

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{b}_{1,2} + U_1U_2\mathbf{x}, \tag{2.68}$$

onde $\mathbf{b}_{1,2} = U_1(1 - U_2)\mathbf{a}_2$ e U_2 é dado pela eq.(2.67) para $k = 2$.

Vamos considerar um sistema com três cordas. Neste caso temos

$$\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{b}_{1,2,3} + U_1 U_2 U_3 \mathbf{x}, \tag{2.69}$$

onde $\mathbf{b}_{1,2,3} = U_1(1 - U_2)\mathbf{a}_2 + U_1 U_2(1 - U_3)\mathbf{a}_3$.

É facil generalizar este resultado para um sistema de N cordas cósmicas, localizadas em $\mathbf{a}_1$,$\mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_N$. O vetor $\mathbf{x}^{(N)}$, obtido após o transporte paralelo do vetor $\mathbf{x}$ é dado pela expresão

$$\mathbf{x}^{(N)} = \mathbf{b}_{1,2,\ldots N} + U_1 U_2 \ldots U_N \mathbf{x}, \tag{2.70}$$

onde $\mathbf{b}_{1,2,\ldots,N-1} = U_1(1-U_2)\mathbf{a}_2 + U_1 U_2(1-U_3)\mathbf{a}_3 + \ldots + U_1 U_2 \ldots U_{N-2}(1-U_N)\mathbf{a}_{N-1} U_{N-1}(1-U_N)\mathbf{a}_N$ e U_N é dado pela eq.(2.67) para $k = N$. Então, um vetor $\mathbf{x}$ transportado paralelemente em um campo de N cordas quirais adquire uma fase dada por $U_1 U_2 \cdots U_N$ e do ponto de vista global, o sistema comporta-se como uma simples corda com as condições dadas pela eq.(2.70) sendo satisfeitas.

Agora considere um sistema de duas cordas quirais uma movendo-se com relação a outra. Considere a corda cósmica 1, localizada na origem, e a corda cósmica 2, localizada em $\mathbf{a}_2$ movendo-se com relação à primeira com velocidade $\mathbf{v}_2$. Esta corda pode ser vista como a corda que sofre um *boost*. Então, se transportarmos paralelamente o vetor $\mathbf{x}$ ao longo do círculo em torno da corda cósmica 2, obtemos

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{a}_2 + L_2 U_2 L_2^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_2), \tag{2.71}$$

com

$$L_2 = \begin{pmatrix} \cosh\gamma_2 & senh\gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ senh\gamma_2 & \cosh\gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.72}$$

onde γ_2 é o parâmetro de *boost* tal que $\|\mathbf{v}_2\| = tagh\gamma_2$. Este *boost* corresponde a mudança de coordenadas $L\mathbf{x}$ e sob esta mudança o fator de fase U transforma-se como LUL^{-1}. Se transportamos paralelamente o vetor $\mathbf{x}^{(2)}$ ao longo do círculo, em torno da corda cósmica 1, o vetor resultante é

$$\mathbf{x}^{(1)} = U_1[\mathbf{a}_2 + L_2 U_2 L_2^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_2)]. \tag{2.73}$$

Então, vemos que se o vetor é paralelamente transportado em torno das cordas 1 e 2, ele adquire uma fase dada por $U_1 L_2 U_2 L_2^{-1}$. Este resultado pode ser generalizado no sentido de considerar N-1 cordas cósmica localizada em $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_{N-1}$ e a N-ésima com um *boost*. Neste caso temos

$$\mathbf{x}^{(N)} = \mathbf{b}_{1,2,\ldots N} + U_1 U_2 \ldots U_{N-1} L_N U_N L_N^{-1} \mathbf{x}. \tag{2.74}$$

Portanto, quando um vetor é transportado paralelamente em torno dessas N cordas quirais, ele adquire a fase

$$U_1 U_2 \ldots U_{N-1} L_N U_N L_N^{-1}, \tag{2.75}$$

onde L_N é dada pela eq.(2.72) com $\gamma_2 \to \gamma_N$.

Vamos considerar uma única corda quiral que se comporta como este sistema. Esta corda pode ser considerada como estando submetida a um *boost* dado por

$$L(\phi, \gamma) = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & L_{02} & L_{03} & L_{04} \\ L_{10} & L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{20} & L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{30} & L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{40} & L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{pmatrix}, \tag{2.76}$$

onde

$$\begin{aligned} L_{00} &= \cosh\gamma, L_{01} = \cos\phi\sinh\gamma, L_{02} = \sin\phi\sinh\gamma,\ L_{03} = 0,\ L_{04} = 0 \\ L_{10} &= \cos\phi\sinh\gamma,\ L_{11} = 1 - \cos^2\phi(1-\cosh\gamma),\ L_{12} = -\cos\phi\sin\phi(1-\cosh\gamma) \\ L_{13} &= 0,\ L_{14} = 0,\ L_{20} = sen\phi\cosh\gamma, L_{21} = -\cos\phi\sin\phi(1-\cosh\gamma), \\ L_{22} &= 1 - sen^2\phi(1-\cosh\gamma), L_{23} = 0,\ L_{24} = 0 \\ L_{30} &= 0, L_{31} = 0, L_{32} = 0, L_{33} = 1,\ L_{34} = 0 \\ L_{40} &= 0,\ L_{41} = 0,\ L_{42} = 0,\ L_{43} = 0, L_{44} = 1. \end{aligned}$$

A forma $L(\phi, \gamma)$ decore do fato que toda transformação de Lorentz homogenea pode ser decomposta da seguinte forma:

$$L(\phi, \gamma) = R(\phi) L(0, \gamma) S(\phi),$$

onde $R(\phi)$ e $S(\phi)$ são rotações puras. Assim, se fizermos o transporte paralelo de um vetor $\mathbf{x}$ ao longo de curvas fechadas em cujo centro geométrico se encontra uma corda cósmica quiral com densidade de massa μ, momento angular J^t e parâmetro de deslocação J^z, obtemos o seguinte vetor após este processo

$$\mathbf{x}^{N+1} = L\left[\mathbf{a} + UL^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a})\right], \tag{2.77}$$

onde $\mathbf{a}$ é a posição da corda quiral que é equivalente ao sistema de cordas.

Igualando as fases adquiridas pelo vetor $\mathbf{x}$ em ambos os casos, temos

$$U_1 U_2 \ldots U_{N-1} L_N U_N L_N^{-1} = LUL^{-1}. \tag{2.78}$$

Esta é a equação fundamental e corresponde exatamente às identidade de Bianchi usadas em [47]. No caso particular de duas partículas que colidem ($N = 2$), no contexto da gravitação em (2+1)-dimensões. Tomando o traço da eq.(2.78) obtemos o seguinte resultado [46]

$$\begin{aligned} \cos\phi \;=\;& \cos\phi_N \cos(\sum_{j=1}^{N-1}\phi_j) - \cosh\gamma_N \sin\phi_N \sin(\sum_{j=1}^{N-1}\phi_j) + \\ & \frac{\sinh^2\gamma_N}{2}(\cos\phi_N - 1)\left[\cos(\sum_{j=1}^{N-1}\phi_j) - 1\right] \end{aligned} \tag{2.79}$$

onde $\phi_j = 8\pi\mu_j$ e $\phi = 8\pi\mu$.

Esta é a relação entre a deficiência angular do espaço-tempo da corda quiral que equivale, do ponto vista global, ao sistema de N cordas e a deficiência angular destas N cordas quirais envolvidas. Se consideramos as outras componentes da eq.(2.78), obtemos as equações [46]

$$\begin{aligned} \cos(\sum_{j=1}^{N-1}\phi_j)\sinh\gamma_N J_N^t &= J^t\cos\phi\sinh\gamma, \\ \sin(\sum_{j=1}^{N-1}\phi_j)\sinh\gamma_N J_N^t &= J^t\cos\phi\sinh\gamma, \\ \sum_{j=1}^{N} J_j^t &= J^z, \\ J_N^t\cosh\gamma_N + \sum_{j=1}^{N-1} J_j^t &= \cosh\gamma_N J^t, \end{aligned} \tag{2.80}$$

que relacionam os parâmetros associados à corda cósmica quiral, que é equivalente ao sistema de N cordas quirais, com os parâmetros que caracterizam essas cordas.

Agora considere o caso particular da corda cósmica estática ($J^t = J^z = 0$). Neste caso as componentes da velocidade da corda cósmica equivalente são

$$v_x = \cot\left(\sum_{i=1}^{N-1} \phi_i\right) v_y \text{ e } \quad v_y = \sinh\gamma_N / \cot\left(\sum_{i=1}^{N-1} \phi_i\right) \cos h\gamma_N + tg\phi_N$$

.

Se considerarmos $N = 2$, temos a seguinte relação entre as massas e a velocidade da segunda corda

$$\cos 4\pi\mu_3 = (\cos 4\pi\mu_1)(\cos 4\pi\mu_2) - \sin(4\pi\mu_1)(\sin 4\pi\mu_2)\cosh\gamma_2. \tag{2.81}$$

Neste caso particular ($\not{N} = 2$) também podemos obter de eq.(2.78) o seguinte resultado para as componentes da velocidade da corda cósmica quiral que equivale ao sistema de duas cordas, e que são dadas por

$$\begin{aligned} v_x &= (\cot 4\pi m_1) v_y, \\ v_y &= \sinh\gamma_2 / [\cot(4\pi m_1)\cosh\gamma_2 + \tan(4\pi m_2)]. \end{aligned}$$

As equaçõe (2.79) e (2.80) são as relações entre a deficiências angulares, momentos angulares e os parâmetros de deslocação associados ao sistema de N cordas quirais e as quantidades associadas com uma simples corda quiral que é equivalente, do ponto de vista global, a este sistema. Dessas equações podemos estabelecer todos os diferentes casos de corda estática e corda cósmica com rotação bem como os casos correspondentes em gravitação em três dimensões.

Os resultados para o cone estático podem ser particularizados para a gravitação em (2+1)-dimensões, bastando para isto trocar μ(densidade de massa da corda) por m(massa da partícula) e tomar a seção $z =$ constante. Neste caso obtemos uma descrição para a gravitação em (2+1)-dimensões usando o fator de fase que é equivalente à descrição dada usando o cálculo de Regge.[47]

Verificamos, neste capítulo, que a transformação de holonomia para curvas no plano perpendicular ao cilindro de matéria com rotação depende do momento angular da fonte, apesar de que esta grandeza não afeta o tensor de curvatura, na aproximação de campo fraco em que o cilindro gira lentamente de modo que os termos proporcionais ao quadrado do momento angular são desprezíveis. Esta dependência do fator de fase com uma grandeza que não afeta a curvatura da região acessivel a partícula denominamos de efeito Aharonov-Bohm gravitacional generalizado.

Encontramos uma solução para as equações de Einstein que coresponde a uma generalização do monopolo global, de Barriola e Vilenkin [34], e então, usando as variáveis de contorno calculamos o fator de fase para várias curvas no espaço-tempo do monopolo, e mostramos que o *loop* de Wilson gravitacional satisfaz à relação de Mandelstam. Ainda neste capítulo calculamos para curvas no espaços-tempos de uma corda quiral e no da para multicorda quiral, para diversas curvas. Finalizamos o capítulo apresentando uma caracterização para o espaço-tempo de multicordas quirais paralelas, sendo que uma delas posui uma velocidade em relação as demais. Mostramos, então, que do ponto de vista global o espaço-tempo de multicordas quirais equivale ao de uma única corda quiral com relações apropriadas entre os parâmetros (massa, momento angular e rotação) que caracterizam o sistema de cordas e o que lhe equivale.

Capítulo 3

Fases de Berry em Gravitação

3.1 Introdução.

Recentemente, a fase quântica geométrica (fase de Berry) tem sido um tópico de grande interesse. Berry mostrou [12] a existência de um fator de fase durante uma evolução adiabática dos estados de um dado sistema quântico. Essencialmente, essa fase está associada ao fato de que a função de onda do sistema guarda a informação sobre como ele evoluiu. O termo geométrico significa que o fator de fase depende somente da curva no espaço dos estados quânticos, ou seja, ele é uma transformação de holonomia no espaço de parâmetros, e é independente, portanto, da parametrização da curva no espaço projetivo de Hilbert.

A fase de Berry foi generalizada de modo a incluir campos de gauge não-Abelianos [14], e nesse contexto, para sistemas evoluindo ciclicamente e sem estarem submetidos à restrição da adiabaticidade [15].

Na física, temos vários exemplos de sistemas em que o comportamento é especificado a menos de uma fase. A fase total adquirida pela função de onda de um sistema quântico em evolução cíclica ou não-cíclica contém duas partes, a fase dinâmica e a fase geométrica. A primeira esta associada à Hamiltoniana do sistema, e a segunda depende, simplesmente, da curva no espaço gerado pelos estados do sistema.

Estudos mostram a importância da fase geométrica em várias áreas da física, tal como o efeito Hall quântico[48], efeito Jan-Teller,[49] e muitos outros tópicos de interesse da física molecular[50] da óptica quântica[51] e da gravitação e cosmologia[19][16][18].

No contexto da gravitação e cosmologia foram feitos ultimamente alguns trabalhos [52] concernentes a investigação da fase de Berry. Em particular, Cai e Papini [17] obtiveram a generalização covariante da fase de Berry e amplicaram esses resultados para problemas envolvendo campos gravitacionais fracos. Recentemente Corichi e Pierri [16] estudaram o comportamento de uma partícula escalar quântica em uma classe de espaços-tempos estacionários e investigaram a fase adquirida por esta partícula quando transportada ao longo de um caminho fechado nas proximidades de uma corda cósmica girante, resultado também apresentado em [53], com outra abordagem.

Neste capítulo, apresentaremos a fase de Berry para uma partícula escalar no espaço-tempo de uma corda cósmica quiral que é uma generalização do trabalho de Corichi e Pierri e apresentaremos também a fase de Berry para o espaço-tempo da multicordas quirais, cilindro com rotação e em um universo isótropico e concluíremos apresentando a fase geométrica em modelos cosmologicos espacialmente homogêneos.

3.2 Fase de Berry.

Em mecânica quântica definimos a função de onda a menos de uma fase, que usualmente é desprezada. No entanto, Berry [12] observou que adicionalmente a essa fase, que é desprezada existe uma outra que aparece quando o sistema evolui adiabáticamente, e que guarda informações sobre a evolução do sistema. Nesta seção vamos descrever a obtenção da fase de Berry para sistemas quânticos que evoluem adiabaticamente.

Para deduzir a fase de Berry, vamos considerar um sistema quântico com Hamiltoniana $H(\mathbf{R})$, a qual depende dos parâmetros R^i, que coletivamente vamos escrever como $\mathbf{R} = (R^1, R^2, \ldots R^n)$. Suponha que $\mathbf{R}$ varia adiabaticamente com o tempo, $R = \mathbf{R}(t)$. A equação de Schrödinger torna-se, então

$$H(\mathbf{R}(t)) \mid \psi(t) > \; = i\frac{d}{dt} \mid \psi(t) > . \tag{3.1}$$

Admitindo que, o sistema em $t = 0$, está no n-éssimo auto-estado, isto é, $\mid \psi(0) > = \mid n, R(0) >$, onde

$$H(\mathbf{R}(0)) \mid n, \psi(0) > \; = E_n(\mathbf{R}(0)) \mid n, \mathbf{R}(0) > \tag{3.2}$$

e que $< n, \mathbf{R}(t) \mid n, \mathbf{R}(t) > = 1$ e que os auto-valores $E_n(\mathbf{R})$ de $H(\mathbf{R})$ sejam não-degenerados, podemos perguntar qual será dos estados $\mid \psi(t) >$, no tempo t.

Se escolhermos

$$\mid \psi(t) > \; = \exp\left(-i\int_o^t dsE_n(\mathbf{R}(s))\right) \mid n, \mathbf{R}(t) >, \tag{3.3}$$

verificamos que o estado normalizado $\mid n, \mathbf{R}(t) >$ satisfaz a equação

$$H(\mathbf{R}(t)) \mid n, \psi(t) > \; = E_n(\mathbf{R}(t)) \mid n, \mathbf{R}(t) >, \tag{3.4}$$

mas não satisfaz a equação eq.(3.1). Vamos, então introduzir uma fase extra $\gamma_n(t)$ na função de onda dada pela eq.(3.3), de modo que a função de onda modificada é

$$\mid \psi(t) > \; = \exp[i\gamma_n(t) - i\int_o^t dsE_n(\mathbf{R}(s)] \mid n, \mathbf{R}(t) > . \tag{3.5}$$

colocando a 3.5 na eq.(3.1) obtém-se

$$\frac{d\gamma_n(t)}{dt} = i < n, \mathbf{R}(t) \mid \frac{d}{dt} \mid n, \mathbf{R}(t) > \tag{3.6}$$

de onde concluímos que

$$\begin{aligned} \gamma_n(t) &= i\int_0^t < n, \mathbf{R}(s) \mid \frac{d}{ds} \mid n, \mathbf{R}(s) > ds \\ &= i\int_{R(0)}^{R(t)} < n, \quad \mid \boldsymbol{\nabla}_R \mid n, \mathbf{R} > d\mathbf{R} \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde $\boldsymbol{\nabla}_R$ é o gradiente no $\mathbf{R}$-espaço, comhecido como espaço de parâmetros. Notemos que $\gamma_n(t)$ é real. Supondo que o sistema executa um loop no R-espaço, $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}(T)$ para $T > 0$, temos

$$\begin{aligned} \gamma_n(t) &= i\int_0^T < n, R(s) \mid \frac{d}{ds} \mid n, \mathbf{R}(s) > ds \\ &= i\int_{R(0)}^{R(T)} < n, \mathbf{R} \mid \boldsymbol{\nabla}_R \mid n, \mathbf{R} > d\mathbf{R} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Para $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}(T)$, a expressão eq.(3.8) parece anular-se, no entanto, o integrando não é necessariamente uma derivada total e portanto $\gamma_n(t)$ pode não ser nulo. A fase $\gamma_n(t)$ é a conhecida fase de Berry. O significado geométrico da fase de berry foi dado em [13] como representando o transporte paralelo (transformação de holonomia no espaço dos parâmetros) dos estados do sistema ao longo de uma curva no espaço projetivo de Hilbert, com respeito a uma conexão obtida do produto interno no espaço de Hilbert.Se tomarmos o traço do fator de fase $e^{i\gamma_n}$ obteremos o *loop* de Wilson no espaço de parâmetros. Considerando, M a variedade que descreve o espaço de parâmetros $\mathbf{R} = (R^i)$ e que para cada ponto $\mathbf{R} \in M$, o n-éssimo auto-estado normalizado da Hamiltoniana $H(\mathbf{R})$, estado quântico $\mid n, \mathbf{R} >$ não pode ser distinguido de $e^{i\phi} \mid n, \mathbf{R} >$, então um estado físico pode ser expresso por uma classe de equivalência

$$[\mid \mathbf{R} >] := \{g \mid \mathbf{R} > \;\; ; g \in U(1)\}. \tag{3.9}$$

Assim, temos o fibrado principal $P(M, U(1))$ sobre M, cuja projeção é dada por $\pi(g \mid \mathbf{R} >) = \mid \mathbf{R} >$. Usando a teoria das conexões em fibrados, apresentada no capítulo 1 desta tese, e fixando a fase de $\mid \mathbf{R} >$, para cada ponto $\mathbf{R} \in M$, seja $\sigma(\mathbf{R}) = \mid \mathbf{R} >$ a seção local sobre a carta U de M. A triviliação local é dada por $\phi^{-1}(\mid \mathbf{R} >) = (\mathbf{R}, e)$ e a ação à direita

$$\phi^{-1}(\mid \mathbf{R} > g) = (\mathbf{R}, e)g = (\mathbf{R}, g). \tag{3.10}$$

Agora a estrutura de fibrado está definida, e podemos apresentar a conexão de Berry denotada por

$$\mathcal{A}_\mu dR^\mu := \;\; < \mathbf{R} \mid (d\mathbf{R}) > \;\; = -(d < \mathbf{R} \mid \mathbf{R} > \tag{3.11}$$

onde $d = \frac{\partial}{\partial R^\mu} dR^\mu$ é a derivada exterior no R-espaço. A curvatura ou campo de gauge de Berry é

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} = (\frac{\partial < \mathbf{R} \mid}{\partial R^\mu})(\frac{\partial \mid \mathbf{R} >}{\partial R^\nu}) dR^\mu \wedge dR^\nu \tag{3.12}$$

Assim, a fase de Berry está associada a holonomia da conexão eq.(3.11) em $P(M, U(1))$, pois se tomarmos a seção $\sigma(\mathbf{R}) = \mid \mathbf{R} >$ sobre a carta U de M, seja $R : [0, 1] \to M$ a curva em U, o levantamento horizontal de $R(t)$ com a conexão eq.(3.11) é $\widehat{R}(t) = \sigma(R(t))g(R(t))$ onde $g(R(0))$ é o elemento identidade de $U(1)$. O elemento do grupo satisfaz

$$\frac{dg(t)}{dt} = g(t)^{-1} = - < R(t) \mid \frac{d}{dt} \mid R(t) > . \tag{3.13}$$

como $g(t) = \exp(i\gamma(t))$ temos $i\frac{d\gamma_n(t)}{dt} = - < R(t) \mid \frac{d}{dt} \mid R(t) >$ daí,

$$\eta(1) = i \int_0^1 < R(s) \mid \frac{d}{ds} \mid R(s) > ds = i \oint_c < R \mid d \mid R > \tag{3.14}$$

Como $R(0) = R(1)$, logo $\mid R(0) > = \mid R(1) >$. Então $\exp(i\gamma(t))$ é tratada como holonomia, que é um objeto geométrico e

$$\widehat{R}(1) = \exp(-\oint_c < R \mid d \mid R >) \cdot \mid R(0) > .$$

Como $U(1)$ é um grupo abeliano, então a fase de Berry é abeliana.

Anandan e Stodolsky [54] deram um tratamento de grupo para a fase fase de Berry e apresentaram uma interpretação associada com o ângulo sólido de uma determinada variedade, comprovando assim o caráter geométrico da fase de Berry.

Em física molecular, o movimento de elétrons é estudado na aproximação adiabática, tratando a posição do núcleo como um parâmetro externo dependente do tempo. Como as energias envolvidas no movimento nuclear são muito menores do que a dos elétrons, estudamos as equações para o núcleo em um dado autoestado.

Um recente interesse no teorema adiabático teve inicio com uma obsevação feita por Berry [12] de que o teorema adiabático clássico deixa de lado uma importante contribuição que pode ser interpretada como uma fase geométrica no espaço dos parâmetros.

A derivação da fase de Bery no formalismo Hamiltoniano parte da seguinte equação de Schrödinger

$$H(\mathbf{R}, \mathbf{P}; \mathbf{r}, \mathbf{p})\psi = (T_{nuc.}(\mathbf{P}) + h(\mathbf{R}; \mathbf{r}, \mathbf{p}))\psi(\mathbf{R}, \mathbf{P}; \mathbf{r}, \mathbf{p}) = E\psi(\mathbf{R}, \mathbf{P}; \mathbf{r}, \mathbf{p}), \tag{3.15}$$

onde $\mathbf{R}, \mathbf{P}$ e $\mathbf{r}, \mathbf{p}$ denotam as variáveis nucleares e eletrónicas, respectivamente, e $T_{nuc.}$ é a energia cinética do núcleo. A função de onda é expandida em termos da base de autofunções da Hamiltoniana h como

$$\psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \sum_n \Phi_n(\mathbf{R})\varphi_n(\mathbf{R}; \mathbf{r}) \tag{3.16}$$

isto é, a função de onda eletrônica $\varphi_n(\mathbf{R}; \mathbf{r})$ a equação

$$h(\mathbf{R}, \mathbf{r})\varphi_n(\mathbf{R}; \mathbf{r}) = \varepsilon_n(\mathbf{R})\varphi_n(\mathbf{R}; \mathbf{r}). \tag{3.17}$$

Integrando a eq.(3.15) sobre os modos eletrônicos, temos

$$(\sum_n < \varphi_n \mid \frac{1}{2M}\nabla^2_{\mathbf{R}} \mid \varphi_n > + \varepsilon_n(\mathbf{R})\boldsymbol{\delta}_{mn})\Phi(\mathbf{R}) = E\Phi(\mathbf{R}) \tag{3.18}$$

Se o operador de energia cinética não atuar sobre a coordenada $\mathbf{R}$ das funções de onda eletrônica $\varphi_n(\mathbf{R};\mathbf{r})$ a decomposição dada pela eq.(3.16) separará completamente a eq.(3.15). Para analizar essa dependencia vamos reescrever o termo da eq.(3.18) como

$$<\varphi_m \mid \frac{1}{2M}\nabla^2_{\mathbf{R}} \mid \varphi_n > \Phi = \sum_k (\delta_{mk}\nabla_{\mathbf{R}} - iA_{mk}(\mathbf{R}))(\delta_{kn}\nabla_{\mathbf{R}} - iA_{kn}(\mathbf{R}))\Phi, \qquad (3.19)$$

onde introduzimos a notação

$$\mathbf{A}_{mn}(\mathbf{R}) = <\varphi_m \mid i\nabla_{\mathbf{R}} \mid \varphi_n > . \qquad (3.20)$$

Considere primeiramente o caso de um estado eletrônico φ_n não-degenerado. Então, para $m \neq n$ podemos diferenciar a identidade $h \mid \varphi_n > = \varepsilon_n \mid \varphi_n >$ para obter

$$\mathbf{A}_{mn}(\mathbf{R}) = <\varphi_m \mid \frac{i\nabla h}{\varpi_{mn}} \mid \varphi_n > \qquad (3.21)$$

onde $\varpi_{mn} = \varepsilon_n - \varepsilon_m$ é a frequência de Bohr para a diferença de energia considerada. A aproximação de Bohr-Oppenheimer é aplicável no caso em que o denominador assume grandes valores, o que suprime a contribuição dos elementos fora da diagonal. Sob esta condição, temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{mn}(\mathbf{R})\boldsymbol{\delta} &= \delta_{mn}\mathbf{A}_n(\mathbf{R}) \qquad (3.22) \\ \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) &= <\varphi_n \mid i\nabla_{\mathbf{R}} \mid \varphi_n >, \end{aligned}$$

sendo $\mathbf{A}_n(\mathbf{R})$ a conexào de Berry. Esta contribuição para o Hamiltoniano efetivo do sistema foi desconsiderada, por acreditar-se erroneamente que poderíamos eliminar $\mathbf{A}_n(\mathbf{R})$ por uma possível redefinição da base para a eq.(3.16) da seguinte forma

$$\varphi_n(\mathbf{R};\mathbf{r}) \rightarrow e^{-i\lambda_n(\mathbf{R})}\varphi_n(\mathbf{R},\mathbf{r}). \qquad (3.23)$$

Ao invés disto, $\mathbf{A}_m(\mathbf{R})$ se transforma como um potencial de gauge

$$\mathbf{A}_m(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) + \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{R}}\lambda_n(\mathbf{R}). \qquad (3.24)$$

Neste caso o Hamiltoniano nuclear efetivo é dado por

$$H_{eff}(\mathbf{P},\mathbf{R}) = -\frac{1}{2M}(\mathbf{P} - \mathbf{A}_n(\mathbf{R}))^2 + \varepsilon_n(\mathbf{R}). \qquad (3.25)$$

Note que, em particular, quando as funções de onda eletrônica $\varphi_n(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ são reais e unívocas em $\mathbf{R}$, a conexão de Berry se anula.

Quando os N níveis de energia são degenerados, as condições acima são generalizadas facilmente, como uma matriz A_{mn}, do tipo $N \times N$,substituindo $\mathbf{A}_n$. A arbitrariedade da eq.(3.16) com respeito a escolha de uma base no espaço degenerado envolve, agora, uma matriz $U(N)$ ao invés da exponencial na eq.(3.23) e $\mathbf{A}_{mn}(m, n-1, 2, ...N)$ se transforma como uma conexão não-abeliana de $U(N)$.

3.3 Fase de Berry não-Abeliana.

O trabalho de Berry [12] sobre fase adiabática geométrica, inspirou generalização da mesma no sentido de considerar o caso dos campos de gauge não-Abeliano [14], levando em conta a posibilidade da evolução adiabática de um sistema quântico com estados degenerados e que não considera a adiabáticidade do sistema mas sim a evolução cíclica do mesmo. Vamos apresentar a seguir o modelo resumidamente.

Por definição um estado (um elemento do espaço de Hilbert projetivo $\mathcal{P}$), de um sistema quântico cuja dinâmica é governada pela equação de Schrödinger,

$$\frac{i\partial\psi(t)}{\partial t} = H(t)\psi(t), \tag{3.26}$$

é dito cíclico com período T se ele é um auto-vetor do operador evolução temporal

$$U(T) = \mathbb{P}\exp(-i\int_0^T H(t)dt) \tag{3.27}$$

onde $\mathbb{P}$ é o operador ordenação temporal. O auto-vetor correspondente ao estado inicial $\psi(0)$ satisfaz a equação

$$\mid \psi(T) > \ = U(T) \mid \psi(0) > \ = e^{i\alpha(T)} \mid \psi(0) > \tag{3.28}$$

com $\alpha(T) \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$)

Se a Hamiltoniana H for um operador auto-adjunto, então $\alpha \in \mathbb{R}$ e consequentemente $\mid \psi(T) >$ e $\mid \psi(0) >$ diferem por um fator de fase. Em geral $\alpha(T)$ pode ser expresso como a soma de uma parte dinâmica e outra geométrica.

Consideremos o subespaço

$$H_0 = \{|\ \psi(T)> \ \in \mathbb{H}; <\psi \mid \psi> \ = 1\}, \tag{3.29}$$

do espaço de Hilbert $\mathbb{H}$.

Seja $\pi : H_0 \to \mathcal{P}$ a aplicação projeção definida por

$$\pi(|\ \psi(T)>) := \{|\ \psi'> \ ; |\ \psi'> \ = e^{i\alpha(T)} \mid \psi(T)> \ , \alpha(T) \in \mathbb{R}\} \tag{3.30}$$

que é uma classe de equivalência em H_0, ou seja uma fibra em $\mathcal{P} = H_0/\pi(|\ \psi>)$, espaço projetivo que representa o espaço de todos os estados físicos distintos. Lembremos que H_0 tem uma estrutura de fibrado principal sobre $\mathcal{P}$.

Considerando $|\ \psi(T)>$ em H_0 satisfazendo as equações eq.(3.1) e eq.(3.28), com $\alpha(T) \in \mathbb{R}$, $|\ \psi(t)>$ define uma curva $C : [0,T] \to H_0$ com $\widehat{C} = \pi(C)$ (levantamento horizontal de C em $\mathcal{P}$) sendo uma curva fechada em $\mathcal{P}$. Por outro lado qualquer curva C pode definir a função Hamiltoniana $H(T)$ satisfazendo a equação eq.(3.1). Vamos admitir a dependência temporal da Hamiltoniana, isto é, $\hat{H}(t) = \hat{H}\,[R(t)]$ por intermedio do conjunto de parâmetros $R(t) = (R^1(t), R^2(t), \ldots R^n(t))$. que correspondem a coordenadas no espaço de parâmetros. Seja $E_n(t) = E_n\,[R(t)]$, isto é,

$$\widehat{H}[R(t)]\psi_n[R(t)] = E_n[R(t)]\psi_n[R(t)], \tag{3.31}$$

com o grau de degenerescência de E_n independente de R.

Considerando o teorema adiabático podemos escrever

$$\psi(t) = U(t)\psi_n(0) \simeq e^{i\alpha_n(t)}\psi_n(t), \tag{3.32}$$

onde $\psi_n(t) = \psi_n[R(t)]$. Se $E_n(t) = E_n\,[R(t)]$ possui grau de degenerescência N, então $\psi_n(t)$ pertence ao subespaço degenerado de dimensão N (auto-espaço associado) $\mathbb{H}_n$ de H_0, α_n é uma matriz $N \times N$ dependente do tempo.

Admitindo a validade do teorema adiabático e substituindo (3.32) na eq.(3.26) obtemos [14]

$$e^{i\alpha_n(t)} = \exp[-i\int_0^t E_n(t')dt']P\exp[i\int_{C(o)}^{C(t)} \mathcal{A}_\mu] \tag{3.33}$$

com P indicando um operador de ordenamento ao longo da curva e

$$\mathcal{A}_{\mu}^{IJ}[R] = i < \psi_n^I[R], d\psi_n^J[R] >, \tag{3.34}$$

com os índices I e J rotulando as degenerescências e $\{\psi_n^I[R]\}$ sendo uma base ortonormal para $\mathbb{H}_n$ e $< . >$ o seu produto interno. Notemos ainda que $\mathcal{A}_{\mu}^{IJ} \in U(N)$, o fibrado espectral associado a ao N-ésimo auto-espaço.

Se a Hamiltoniana for periódica, isto é, para uma curva fechada C, então, de acordo com a eq.(3.32) $\psi_n[R(0)] = \psi_n[R(T)]$ é um auto-vetor de estado cíclico. Neste caso, o primeiro fator em (3.33) é a fase dinâmica, eo segundo fator é a fase geométrica, e corresponde ao fator de fase não-abeliano. Na obtenção da fase geométrica não-Abeliana [15]. Porém, se a adiabaticidade for usada para implementar o movimento, então, afasse geométrica é a mesma de Berry. Notemos também que a fase de Berry é reobitida quando H_0 é adiabática.

3.4 Fase de Berry para um sistema relativístico.

Recentemente Corichi e Pierri [16] consideraram o comportamento de uma partícula escalar satisfazendo a equação de Klein-Gordon em uma classe de espaços-tempos estacionários, em particular no caso da corda cósmica com momento angular. Eles investigaram a existência da fase gravitacional do tipo Aharanov-Bohm induzida neste espaço-tempo. Para isto consideraram a equação de Klein-Gordon com acoplamento mínimo dada por

$$(\Box - m^2)\Psi = 0, \tag{3.35}$$

onde $\Box = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu \left(\partial\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\right)$ e m é a massa da partícula.

O elemento de linha para os espaços-tempos estacionários foi considerado como tendo a forma

$$ds^2 = -V^2(dt - A_i dx^i)^2 + h_{ij}dx^i dx^j, \tag{3.36}$$

onde V, A_i e h_{ij} são funções em uma superfície de Cauchy Σ, cujas coordenadas são $x^i(i = 1, 2, 3)$, e portanto essas funções não dependem do tempo, e $A_i(x^i)$ é tal que $\partial_{[i}A_{j]} = 0$.

Para o elemento de linha dado pela eq.(3.36), a equação de Klein-Gordon toma a seguinte forma

$$[\dot{\Box} + h^{ij}A_iA_j\partial_0^2 + 2h^{ij}A_j\partial_0\partial_j + \frac{1}{V\sqrt{h}}\partial_i(h^{ij}A_jV\sqrt{h}\partial_0) - m^2]\Psi = 0, \tag{3.37}$$

onde $\dot{\Box}$ é o d'Alembertiano da métrica estática, h^{ij} é o inverso de h_{ij} e $h = \det(h_{ij})$. Como os espaços-tempos são independentes do tempo, então, as soluções de (3.37) podem ser escritas como

$$\Psi(t, x) = e^{-iEt}\Phi(x). \tag{3.38}$$

Substituindo (3.38) na equação (3.37) encontramos uma equação para $\Phi(x)$, cuja solução pode ser escrita em termos de Φ_0 que é solução de $(\dot{\Box} - m^2)\Phi_0 = 0$, como segue

$$\Phi(x) = \left[\exp(iE\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} A_i dx^i)\right]\Phi_0, \tag{3.39}$$

onde o termo $\exp(iE\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} A_i dx^i)$ é conhecido como fator de Dirac.

Um caso particular dos espaços-tempos cujos elementos de linha são dados por (3.36) é o da corda cósmica com momento angular. Neste caso, o elemento de linha em coordenadas cilíndricas (t, r, ϕ, z) é dado pela eq.(3.36) com [16]

$$\begin{aligned} V^2 &= 1 \qquad (3.40) \\ A_i &= -4J^t\nabla_i\Phi \\ h_{ij} &= \nabla_i r\nabla_j r + (\alpha r)^2\nabla_i\phi\nabla_j\phi + \nabla_i z\nabla_j z, \end{aligned}$$

onde J^t é o momento angular da corda e $\alpha = 1 - 4\mu$, com μ sendo a densidade linear de massa. Neste caso da corda com rotação, a solução de equação de Klein-Gordon é dada por

$$\Psi(t, r, \phi, z) = [e^{-iEt}e^{-4iJ^tE\int_{\phi_0}^{\phi} d\phi}]\Phi_0(r, \phi, z), \tag{3.41}$$

com $\Phi_0(r, \phi, z)$ sendo a solução da equação de Klein-Gordon no espaço da corda cósmica estática.

Portanto, podemos relacionar a solução da eq.(3.37) com a solução de uma equação mais simples que é $(\dot{\Box} - m^2)\psi = 0$, através do fator de Dirac. Esta possibilidade também é uma característica da função de onda associada ao efeito Aharonov-Bohm eletromagnético. Neste caso,a solução da equação de Schrödinger para uma partícula carregada, colocada na região exterior ao solenóide que contém um fluxo Φ pode ser construída a partir da solução sem fluxo através do fator $\exp(i\oint A_i dx^i)$ que é precissamente a transformaçào de holonomia associada à conexão $U(1)$ devido ao fluxo. Vamos, então usar o fator Dirac e relacionar o efeito Aharonov-Bohm com a holonomia associada a uma dada conexão seguindo a sugestão de Berry de que o efeito Aharonov-Bohm é um caso particular da fase de Berry[12]. Assim sendo, considere uma partícula carregada, com carga q, no interior de uma caixa de modo que a função de onda $\Psi_n(r)$ seja diferente de zero somente no interior da mesma. Sejam R_i as componentes do vetor $\mathbf{R}$ que localiza o centro da caixa em relação ao solenóide. Quando não há potencial magnético, as funções de onda possuem a forma $\Psi_n(\mathbf{r}-\mathbf{R})$, com energias E_n independente de R_i.

Com fluxo diferente de zero, as funções de onda $< n \mid \mathbf{R} >$ são obtidas do fator de Dirac dento da caixa através da relação

$$< n \mid \mathbf{R} > = \exp\left(iq \int_R^r dr' A(r') \right) \Psi_n(r-R). \tag{3.42}$$

Logo, o fator de fase geométrico pode ser calculado a partir de

$$\begin{aligned} < n, \mathbf{R} \mid \boldsymbol{\nabla}_R \mid n, \mathbf{R} > &= \int d^3r \Psi^*(r-R)[-qA(R)\Psi_n(r-R) + \boldsymbol{\nabla}_R \Psi_n(r-R) \\ &= -iqA(R), \end{aligned} \tag{3.43}$$

o que implica, usando (3.8) que

$$\gamma(C) = q \oint A(R) dR = q\Phi. \tag{3.44}$$

Vamos apresentar, agora, o formalismo de duas componentes e sua relação com a fase geométrica no regime adiabático [53].Para isto, considere um campo escalar complexo ϕ definido em um espaço globalmente hiperbólico $(M, g) = (\mathbb{R} \times \not{\angle}, g)$ satisfazendo a equação de Klein-Gordon eq.(3.35). Podemos expressar a eq.(3.35) na forma

$$\partial_0^2 \Phi + \hat{D}_1(\partial_0 \Phi) + \hat{D}_2 \Phi = 0, \tag{3.45}$$

onde

$$\begin{aligned}\hat{D}_1 &\equiv \frac{1}{g^{00}}[2g^{0i}\partial_i - g^{\mu\nu}\Gamma^0_{\mu\nu}], \qquad (3.46)\\ \hat{D}_2 &\equiv \frac{1}{g^{00}}[g^{ij}\partial_i\partial_j - g^{\mu\nu}\Gamma^i_{\mu\nu}\partial_i - m^2.\end{aligned}$$

Podemos representar a equação (3.45), usando o formalismo de duas componentes, na forma

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi, \qquad (3.47)$$

sendo $\Psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ com

$$\begin{aligned} u &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial t}), \qquad (3.48)\\ v &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi - \frac{\partial\Phi}{\partial t})\end{aligned}$$

e

$$\hat{H} \equiv \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 - \hat{D}_1 - \hat{D}_2 & -1 + \hat{D}_1 - \hat{D}_2 \\ 1 + \hat{D}_1 + \hat{D}_2 & -1 - \hat{D} + \hat{D}_2 \end{pmatrix}. \qquad (3.49)$$

Agora, considere o problema de auto-valores para $\hat{H}$. Denotamos os auto-valores e os auto-vetores por E_n e Ψ_n, ou seja,

$$\hat{H}\Psi_n = E_n\Psi_n, \qquad (3.50)$$

temos que

$$\Psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 - iE_n \\ 1 + iE_n \end{pmatrix}\Phi_n, \qquad (3.51)$$

com Φ_n satisfazendo a equação

$$(\hat{D}_2 - iE_n\hat{D}_1 - E_n^2)\Phi_n = 0, \qquad (3.52)$$

e tal que Φ_n pertence ao espaço de Hilbert $H_t = L^2(\Sigma_t)$ das funções de quadrado integrável definidas sobre as hipersuperfícies tipo-espaço Σ_t, com métrica Riemanniana.

Suponha que:

1. $\hat{D}_1 = 0$;

2. $\hat{D}_2$ é o auto-adjunto com respeito ao produto interno em H_t;

3. $\hat{D}_2$ possui um especto discreto;

4. durante a evolução do sistema $E_n \neq E_m$ se $m \neq n$;

5. E_n é um auto-valor não-degenerado de H, e E_n^2 é um auto-valor não-degenerado de $\hat{D}_2$.

Então, para $m \neq n < \Phi_n \mid \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} > = < \Phi_m \mid \hat{D}_2 \Phi_n > /(E_n^2 - E_m^2)$, e na aproximação adiabática relativística a solução inicial da equação de Klein-Gordon é

$$\Psi(0) = e^{i\alpha_n(0)}\Psi_n(0) + e^{i\alpha_{-n}(0)}\Psi_{-n}(0), \tag{3.53}$$

com $n \geq 0$ e $\alpha_{\pm n}(0) \in \mathbb{C}$, cuja evoluçào é dada por

$$\Psi(t) \sim e^{i\alpha_n(t)}\Psi_n(t) + e^{-i\alpha_{-n}(t)}\Psi_n(t),$$

onde a fasae total $\alpha_{\pm n}(t)$ é dada por $\alpha_{\pm n}(t) = [\alpha_n(0) + \alpha_{-n}(0)]/2 + \gamma_n(t) + \delta_{\pm n}(t)$, sendo $\alpha_{\pm n}(0)$ constantes arbitrárias, $\gamma_n(t)$ a fase geométrica e $\delta_{\pm n}(t)$ a fase dinâmica. A fase geométrica é dada por

$$\gamma_n(t) = \int\limits_{R(0)}^{R(t)} \mathcal{A}_\mu[R], \tag{3.54}$$

onde

$$\mathcal{A}_\mu[R] \equiv i < \Phi_n[R] \mid d \mid \Phi_n[R] > \quad = i < \Phi_n[R] \mid \frac{\partial}{\partial R^a} \mid \Phi_n[R] > dR^a \tag{3.55}$$

é a conexão 1-forma de Berry, $R = (R^1, R^2, \ldots R^n)$ são os parâmetros do sistema e d representa a derivada exterior com respeito a R^a.

Suponha que E_n tenha degenerescência de grau N. Então, a condição para a validade da aproximação adiabática torna-se $< \Phi_n^I \mid \frac{\partial \Phi_n^J}{\partial t} > \sim 0$, para todo $m \neq n$ e $I, J = 1, 2, \ldots N$. Neste caso, para um contorno fechado, a fase de Berry é dada por

$$\gamma_n(t) = \oint \mathcal{A}_\mu^{IJ}, \tag{3.56}$$

onde

$$\mathcal{A}_\mu^{IJ} = i < \Phi_n^I[R] \mid d \mid \Phi_n^J[R] > . \tag{3.57}$$

Portanto, no caso relativístico podemos usar o formalismo de duas componentes, transformando, assim, a equação de Klein-Gordon na de Schrödinger, e determinamos a fase de Berry seguindo o procedimento original[16], e tratando os casos degenerados e não-degenerados.

3.5 Fase de Berry no espaço-tempo da corda cósmica quiral.

Nesta seção vamos proceder analogamente ao tratamento dado por Corichi e Pierri [16] para a obtenção da fase geométrica associada a uma partícula escalar quântica, induzida pela corda cósmica quiral. O elemento de linha que descreve tal espaço-tempo é dado pela eq.(2.42)

O comportamento da partícula quântica escalar é descrito pela equação covariante de Klein-Gordon (eq.(3.35)). Portanto, vamos considerar a equação de Klein-Gordon na métrica dada pela eq.(2.42) que pode ser escrita na forma

$$\{\partial_t^2 - \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) - \frac{1}{\alpha^2 r^2}[(4J^t\partial_t - \partial_\phi)^2 + (4J^z\partial_z - \partial_\phi)^2] +$$

$$32J^tJ^z\partial_t\partial_z + \alpha^2 r^2(\partial_z^2 - m^2)]\}\psi(t,r,\phi,z) = 0 \tag{3.58}$$

Como o espaço-tempo da corda cósmica quiral é tempo independente simétrico sobre translações ao longo do eixo-z, então a solução da eq.(3.58) pode ser escrita na forma

$$\psi_n(t,r,\phi,z) = e^{-iE_n t}e^{ik_n z}\varphi_n(r,\phi), \tag{3.59}$$

onde E_n são autovalores de energia e k_n são os vetores de onda na direção z. Usando o método do fator de Dirac, podemos escrever φ_n como [18]

$$\varphi_n(r,\phi) = \exp\left(-4i\int_{\phi_0}^{\phi}(E_nJ^t - k_nJ^z)d\phi\right)\varphi_0(r,\phi) \tag{3.60}$$

com $\varphi_0(r,\phi)$, sendo a solução da equação

$$\left[\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + \frac{1}{\alpha^2 r^2}\partial_\phi^2 - (m^2 - E_n^2 - K_n^2)\right]\varphi_0(t,r,\phi,z) = 0, \tag{3.61}$$

que é a equação de Klein-Gordon na métrica eq.(2.42) para $J^t = J^z = 0$,que corresponde à corda cósmica. Desta forma, determinamos a solução de uma equação mais complicada,eq.(3.58 a partir da solução de uma equação mais simples (eq.(3.61)).

Vamos, agora, investigar a fase de Berry no espaço-tempo da corda cósmica quiral. Para este caso, o ângulo de fase geométrico com rotação depende dos níveis de energia, justamente como no caso da corda cósmica com rotação [53]. Portanto, cada autovalor diferente, rotulado por n,adquire fases geométricas diferentes, e como consequência, o tratamento apropriado deste problema é obtido usando a generalização não-abeliana [53] da fase de Berry.

Para calcular esta fase vamos confinar o sistema quântico em uma caixa perfeitamente, refletora onde os pacotes de onda são não nulos no interior da caixa e são dados pela superposição de diferentes auto-funções. O vetor que localizado a caixa em relação ao defeito é chamado de $\mathbf{R}$. Este vetor é orientado a partir da origem do sistema de coordenadas(onde se localiza o defeito) para o centro da caixa. Vamos chamar de R_i as componentes de $\mathbf{R}$, dadas por $R_i = (R_0, \phi_0, z_0)$ e tal que $R_0 > 4J^t/\alpha$. Esta condição imposta a R_0 nos leva a dois problemas: a multivaluação das auto-funções e a existência de curvas fechadas tipo-tempo.

Da equações eq.(3.59) e eq.(3.60) concluímos que se $J^t = J^z = 0$, a função de onda tem a forma $\varphi_n = (\mathbf{x} - \mathbf{R})$, onde $\mathbf{x}$ localiza a partícula relativamente ao centro da caixa. Se considerarmos $J^t \neq 0$ e $J^z \neq 0$, então a função de onda é sensível a estes parâmetros e pode ser obtida pelo fator de fase de Dirac dado pela equação eq.(3.60), dentro da caixa. Vamos transportar a caixa em torno da curva fechada C que envolve o defeito. Como o espaço-tempo é axialmente simmetrico, podemos transportar a caixa ao longo do campo vetorial de Killing $R^a = (\frac{\partial}{\partial\phi})^a$.

Devido a degenerescência dos autovalores de energia, para calcular a fase de Berry, é necessário o uso da versão não-abeliana da conexão correspondente [53] dada por

$$\mathcal{A}_n^{IJ} = \ <\varphi_n^I(\mathbf{x} - \mathbf{R}) \mid \nabla_R \varphi_n^J(\mathbf{x} - \mathbf{R})> \qquad (3.62)$$

onde I e J representam os níveis de degenerescência.

Vamos utilizar o produto interno dado por

$$< \Psi, \Psi' > \quad = i \int dS^a (\Psi' \nabla_a \bar{\Psi} - \bar{\Psi} \nabla_a \Psi'), \tag{3.63}$$

na expressão anterior e fazer uso do fator fase de Dirac, obtermos [18] a seguinte conexão de Berry

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n^{IJ} &= \quad < \varphi_n^I(\mathbf{x} - \mathbf{R}) \mid \nabla_R \varphi_n^J(\mathbf{x} - \mathbf{R}) > \\ &= i \oint_\Sigma dS \varphi_n^{*I}(x_i - R_i)[4(k_n J^z - E_n J^t)\varphi_n^J(x_i - R_i) + \\ &\quad -\nabla_R \varphi_n^J(x_i - R_i)], \end{aligned} \tag{3.64}$$

onde $dS = \alpha r dr d\phi dz$.
Calculando a integral obtemos o resultado

$$< \varphi_n^I(\mathbf{x} - \mathbf{R}) \mid \nabla_R \varphi_n^J(\mathbf{x} - \mathbf{R}) > \quad = -4i(E_n J^t - k_n J^z)\delta IJ.. \tag{3.65}$$

Então, a fase de Berry é

$$\gamma_n(C) = 8\pi(E_n J^t - k_n J^z), \tag{3.66}$$

onde os níveis I, J e δIJ.
foram omitidos.

Este resultado generaliza os obtidos por Corichi e Pierri [16] e Ali Mostafazadeh [53] para o caso da corda cósmica girante. Como foi enfatizado em [16], este efeito pode ser observado por uma interferência da função de onda associada com à partícula na caixa transportada e um outra correspondendo a partícula na caixa que segue órbitas que coincidem com campos de Killing tipo-tempo, t^a.

Fazendo uso do espaço-tempo correspondente a um solenóide cujo potencial é dado por $\mathbf{A} = (0, 0, \Phi/r)$ vamos considerar o elemento de linha dado pela eq.(2.52), cujo tensor métrico na representação matricial é

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \Phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \Phi & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -r^2/(r^2+\Phi^2) & 0 & \Phi/(r^2+\Phi^2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \Phi/(r^2+\Phi^2) & 0 & 1/(r^2+\Phi^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e portanto, $g = \det(g_{\mu\nu}) = -(r^2 + \Phi^2)$.

A equação de Klein-Gordon neste espaço-tempo é dada por

$$\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial_r} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}[-8\Phi\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \phi} + r^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - r^2 m^2]\}\Psi = 0. \tag{3.67}$$

Escrevendo $\Psi = e^{-iEt}\psi_n(r, \phi, z)$ e substituindo na equação eq.(3.67), obtemos

$$\{-E^2 - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial_r} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}[8\Phi i E\frac{\partial}{\partial \phi} + r^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - r^2 m^2]\}\psi_n = 0. \tag{3.68}$$

Vamos tomar, agora, $\Psi_n = \exp(i\xi\phi)\varphi_n(r, \phi, z)$. Colocando esta expressão na equação (3.68), determinamos que $\xi = -4E\Phi$ e que φ_n satisfaz a equação

$$\{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial_r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - m^2 + E^2\}\varphi_n = 0 \tag{3.69}$$

A equação (3.69) pode ser obtida de (3.68) fazendo $\Phi = 0$ e trocando ψ_n por φ_n. Usando o método do fator de fase de Dirac podemos escrever

$$\varphi_n(r, z) = \exp\left(-4i\oint_{\phi_0}^{\phi} E\Phi d\phi\right)\varphi_0(r, z), \tag{3.70}$$

com $\varphi_0(r, z)$ satisfazendo a equação

$$\{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial_r} + (E^2 - m^2)\}\psi_0(t, r, \phi, z). \tag{3.71}$$

E usando o fator de Dirac eq.(3.70) e as mesma condições anteriores concluimos que a conexão de Berry é dada por

$$< \varphi_n^I(\mathbf{x} - \mathbf{R}) \mid \nabla_R \varphi_n^J(\mathbf{x} - \mathbf{R}) > \;\; = -4iE\Phi\delta_{IJ.},$$

e portanto, a fase geométrica é

$$\gamma_n(C) = 8\pi E\Phi, \tag{3.72}$$

que depende do acoplamento entre a energia da partícula e o fluxo do campo magnético.

3.6 Fase de Berry no espaço-tempo das N cordas quirais.

Nesta seção vamos calcular a fase de Berry quântica associada com uma partícula escalar no espaço-tempo das N cordas quirais paralelas, cujo elemento de linha é dado pela equação (2.56). Neste caso, o cálculo direto do fator de Dirac via solução da equação de Klein-Gordon é complicado. Diante desta dificuldade vamos usar o fato de que o fator de fase adquirido por um vetor quando transportado paralelamente no espaço-tempo correspondente a multi corda quiral é afetado somente pela corda que eatá situada no interior da curva ao longo da qual o vetor é transportado paralelamente [55]. Portanto calcularemos o fator de Dirac para duas, três e assim sucessivamente até N cordas quirais. Primeiramente consideremos o sistema formado por duas cordas quirais, uma localizada em r_1 e a outra em r_2. Efetuamos o transporte da caixa que contém a partícula, ao longo de uma curva fechada C_1 em torno da corda quiral 1. Neste caso, o fator de Dirac é idêntico ao dado pela equação eq.(3.60), que vamos escreve-lo como

$$\varphi_n^1(r,\phi) = \exp\left(-4i\int_{\phi_0}^{\phi}(E_n J_1^t - k_n J_1^z)d\phi\right)\varphi_0(r,\phi) \tag{3.73}$$

Agora, vamos transportar o estado $\varphi_n^1(r,\phi)$ em torno da corda quiral localizada em r_2, ao longo da curva C_2. Desta forma, obteremos o seguinte resultado

$$\varphi_n^2(r,\phi) = \exp\left(-4i\int_{\phi_0}^{\phi}(E_n J_2^t - k_n J_2^z)d\phi\right)\varphi_n^1(r,\phi). \tag{3.74}$$

Substituindo a equação eq.(3.74) em eq.(3.73), obtemos

$$\varphi_n^{1,2}(r,\phi) = \exp\{-4i\left[(J_2^t + J_1^t)E_n - (J_2^z + J_1^z)k_n\right]\int_{\phi_0}^{\phi} d\phi\}.\varphi_0(r,\phi). \tag{3.75}$$

A generalização deste resultado para N cordas quirais localizadas em $r_1, r_2, \ldots r_N$ é dada por

$$\varphi_n^{1,2,\ldots N}(r,\phi) = \exp\{-4i\left[\sum_{j=1}^{N}(J_j^t E_n - J_j^z k_n)\right]\int_{\phi_0}^{\phi} d\phi\}.\varphi_0(r,\phi). \tag{3.76}$$

Da eq.(3.76) podemos extrair a conexão de Berry que dada por [18]

$$\mathcal{A}_n^{IJ} = -4i\sum_{j=1}^{N}(J_j^t E_n - J_j^z k_n)dR^2\delta_{I,J}, \tag{3.77}$$

onde R^2 é o ângulo polar associado com o centro da caixa. Desta forma a fase de Berry é

$$\gamma_n(C) = i\oint_C \mathcal{A}_n^{IJ} = 8\pi\sum_{j=1}^{N}(J_j^t E_n - J_j^z k_n). \tag{3.78}$$

Por conveniência omitimos os índices I e J correspondentes a autovalores distintos. Este resultado dá a fase de Berry associada a partícula em uma caixa que é deslocada sobre um circuito C que contorna o sistema formado por N cordas quirais.

3.7 Fase geométrica no espaço-tempo do cilindro de matéria com rotação.

Conforme vimos no capítulo anterior, o elemento de linha correspondente ao espaço-tempo gerado por um cilindro de matéria com rotação é

$$ds^2 = -(1 - a/2)dt^2 + (1 + a/2)(dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2) + 2bdtd\phi, \tag{3.79}$$

onde $a(r)$, $b(r)$ e Φ foram definidos anteriormente.

Vamos considerar a partícula quântica escalar imersa neste campo gravitacional clássico. Seu comportamento é descrito pela equação covariante de Klein-Gordon que é dada por

$$\begin{aligned}\{(1+a)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2b}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{m^2(2+a)}{2}\}\Psi = 0,\end{aligned} \tag{3.80}$$

pode ser escrita na forma da equação (3.45), ou seja,

$$\ddot{\Psi} + \hat{D}_1\dot{\Psi} + \hat{D}_2\Psi = 0 \tag{3.81}$$

onde o ponto significa derivada com relação ao tempo.

Neste caso, temos que

$$\begin{aligned}\hat{D}_1 &= -\frac{1}{(1+a)r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}, \\ \hat{D}_2 &= -\frac{1}{(1+a)}\left[\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{(2+a)}{2}m^2\right].\end{aligned} \tag{3.82}$$

A equação *generalizada* de autovetores [53]

$$(\hat{D}_2 - iE_n\hat{D}_1 - E_n^2)\Phi_n = 0 \tag{3.83}$$

torna-se, então,

$$\begin{aligned}0 = &\{\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{(2+a)}{2}m^2 \\ &-\frac{2ibE_n}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi} + (1+a)E_n^2\}\Phi_n.\end{aligned} \tag{3.84}$$

Vamos considerar o *ansatz* $\Phi_n = \exp(i\xi\phi)\varphi_n$, e a eq.(3.84) toma a forma

$$\{\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{(2+a)}{2}m^2 + \frac{1}{r^2}(2i\xi - 2biE_n)\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2}(-\xi^2 + +3bE_n\xi) + (1+a)E_n^2\}\varphi_n = 0, \tag{3.85}$$

de onde temos que $\xi = bE_n$ e que φ_n satisfaz a equação

$$\{\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{(2+a)}{2}m^2 + (1+a)E_n^2\}\varphi_n = 0. \tag{3.86}$$

Notemos que $\xi = bE_n$ é a contribuição extra, na fase produzida pelo efeito da rotação do cilindro, e que φ_n determina os auto-valores da Hamiltoniana para o cilindro sem rotação de mesma densidade de massa. Como $\hat{D}_1$ anula-se e $\hat{D}_2$ é auto-adjunto, então, a Hamiltoniana é auto-adjunta, logo com autovalores reais, daí $\frac{\partial}{\partial R^i} = 0$, isto é, não depende de R_i.

Portanto, a solução é

$$\begin{aligned} \psi(t,r,\phi,z) = &\quad e^{-iE_n t}\Phi(r,\phi,z), \\ \text{com} & \\ \Phi(r,\phi,z) = &\quad \exp\left(ibE_n \textstyle\int_{\phi_0}^{\phi} d\phi\right)\varphi_n(r,\phi,z). \end{aligned} \tag{3.87}$$

Utilizando o mesmo procedimento para o cálculo da fase geométrica no espaço-tempo da corda cósmica quiral, encotramos a conexão de Berry

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu^{IJ} &= <\varphi_n^I(\mathbf{x}-\mathbf{R}) \mid \nabla_R \varphi_n^J(\mathbf{x}-\mathbf{R})> \\ &= i\oint_\Sigma dS\{\varphi_n^{*I}(\mathbf{x}-\mathbf{R})[biE_n\varphi_n^J(\mathbf{x}-\mathbf{R}) + \frac{\partial}{\partial R^i}\varphi_n^J(\mathbf{x}-\mathbf{R})dR^i]\} \\ &= biE_n\delta_{I,J}dR^2 \end{aligned} \tag{3.88}$$

onde $S = rdrd\phi dz$.

Assim, a fase de Berry para o cilindro com rotação é

$$\gamma_n(C) = i\int_0^{2\pi} \mathcal{A}_\mu^{IJ} = -2\pi bE_n, \tag{3.89}$$

onde C é o círculo que envolve o cilindro.

Poderiamos ter feito este cálculo da mesma forma que nos casos anteriores mas resolvemos utilizar o processo apresentado por Ali [53] para exibir outro método para o cálculo de fase de Berry.

3.8 Fase geométrica em um universo isotrópico.

Sistemas físicos quânticos em espaços-tempos curvos têm recebido muita atenção ao longo dos tempos. Recentemente, tem sido dada atenção ao comportamento de sistemas atômicos em espaços-tempos curvos[56] e, em especial, os efeitos sobre esses sistemas devido a algumas configurações do campo gravitacional com topologia não-trivial [57]. Como o campo gravitacional se acopla universalmente com todos os campos, é interessante formular uma teoria quântica no espaço-tempo curvo. Dessa forma, podemos descrever a interação de uma partícula quântica com um campo gravitacional clássico, como por exemplo, estudar o efeito da curvatura do espaço-tempo sobre o átomo de hidrogênio [58].

Em particular, um sistema que tem atraído considerável interesse é o oscilador harmônico com frequência e (ou) massa variando com o tempo (ou ambos simultâneamente), colocado no espaço-tempo curvo. Este sistema tem chamado a atenção por causa de sua conexão com outros sistemas em diferentes áreas de física tais como física de plasma [59], gravitação [60] e óptica quântica [61], por exemplo.

A conexão da cosmologia com alguns processos em óptica quântica também tem despertado alguma atenção. Neste contexto, Berger [62] construiu uma representação de estado coerente para um campo escalar minimamente acoplado para o campo gravitacional. Resentemente, foi usada a linguagem da óptica quântica [63] para auxiliar a existência de estados comprimidos no contexto da cosmologia, bem como foi apresentada uma abordagem usando estados coerentes [64] com o objetivo de quantizar a teoria de Einstein-Yang-Mills.

Nesta seção vamos utilizar o processo adotado em [65] que permite estudar o comportamento de uma partícula escalar colocada em um universo anisotrópico com a topologia do 3-toros.

Vamos consider um espaço-tempo anisotrópico cuja hipersuperfície tipo-espaço possui a topologia de um 3-toros. Neste caso, o elemento de linha é dado por

$$ds^2 = -N^2dt^2 + g_{ij}dx^idx^j, \tag{3.90}$$

onde $N = N(t)$ e $g_{ij} = g_{ij}(t)$ é a métrica da hipersuperfície tipoespaço ortogonal à direção t. Exigindo-se que $x, y, z \in [0, 2\pi]$, então, esse espaço-tempo tem a topologia de um 3-toros.

A equação de Klein-Gordon, que governa o movimento de uma partícula escalar, tem a forma covariante dada por (3.35), e no espaço-tempo dado pelo elemento de linha (3.90) toma a forma

$$\ddot{q}(t) + \gamma(t)\dot{q}(t) + \omega^2(t)q(t) = 0, \tag{3.91}$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \frac{d}{dt}\left[\ln m(t)\right], \\ m(t) &= \sqrt{g}N^{-1\prime}, \\ \omega^2(t) &= N^2(t)(g^{ij}k_ik_j + m^2) \end{aligned} \tag{3.92}$$

com $q(t)$ sendo a amplitude do campo para o modo môdelo caracterizado por k_i.

Notemos que a equação eq.(3.91) é a equação clássica para o oscilador harmônico paramétrico, isto é, com frequência e massa dependetes do tempo.

A equação eq.(3.91) pode ser obtida via a Hamiltoniana

$$H(t) = \frac{p^2}{2m(t)} + \frac{1}{2}m(t)\omega^2(t)q^2(t) \tag{3.93}$$

para o modo $k_i(i = 1, 2, 3)$,com $m(t)$ e $\omega^2(t)$ definidos anteriormente e p sendo o momento conjugado a q. Para quantizar este sistema, impomos a cada modo do campo a relação $[q, p] = i\hbar$. Assim a equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H(t)\psi, \tag{3.94}$$

onde $H(t)$ é dada por por

$$H(t) = -\frac{1}{2m(t)}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2}m(t)\omega^2(t)q^2(t) \tag{3.95}$$

que é a versão quântica da Hamiltoniana dada pela eq.(3.93).

Vamos, agora, considerar a situação mais geral possivel, tomando o espaço-tempo, no qual a equação de Klein-Gordon toma da equação de um oscilador harmômico generalizado, cuja Hamiltoniana é dada por

$$H(t) = \frac{1}{2}\left[X(t)q^2 + Y(t)(q.p + p.q) + Z(t)p^2\right], \tag{3.96}$$

onde os parâmetros variam lentamente com o tempo. O sistema caracterizado pela eq.(3.96) possui um invariante associado, dado por

$$I(t) = \frac{1}{2}\{\left(\frac{q}{\rho}\right)^2 + [\rho(p + \frac{Y}{Z}q) - \frac{q}{Z}\dot{\rho}]^2\}, \tag{3.97}$$

com

$$\dot{I}(t) \equiv i[H, I] + \frac{\partial I(t)}{\partial t} = 0, \tag{3.98}$$

sendo $\rho(t)$ um c-número solução da equação auxiliar

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\frac{\dot{\rho}}{Z}) - \left[\frac{d}{dt}(\frac{Y}{Z}) - \frac{XZ - Y^2}{Z} + \frac{Z}{\rho^4}\right] = 0 \tag{3.99}$$

e o ponto significa a derivada com relação ao tempo.

Os auto-valores de $I(t)$ são definidos por

$$I(t) =\mid \lambda_n, t > \ = \lambda_n \mid \lambda_n, t > \tag{3.100}$$

onde $\lambda_n = \lambda_n(t) = -(n + \frac{1}{2})$. O sistema descrito pela Hamiltoniana dada pela eq.(3.96) desenvolve-se de acordo com a equação de Schrödinger, cujas soluções são

$$\begin{aligned} \mid \psi(q,t) > \ &= e^{i\alpha_n(t)} \mid \lambda_n; t >, \\ \mid \psi(q,t) > \ &= \sum_n C_n e^{i\alpha_n(t)} \mid \lambda_n; t >, \end{aligned} \tag{3.101}$$

com C_n sendo independente do tempo e $\alpha_n(t)$ correspondendo a uma fase, a qual pela teoria de Lewis e Riesenfeld [66] é dada por

$$\alpha_n(t) = -(1 + \frac{n}{2}) \int_0^t dt' \frac{Z(t')}{\rho^2(t')}. \tag{3.102}$$

Utilizando o conceito de ação efetiva, $\Gamma\left[X(t), Y(t), Z(t)\right]$, no contexto da teoria de campos, temos que

$$e^{i\Gamma[X,Y,Z]} = \int Dp(t)Dq(t) \exp\{i \int_{t_1}^{t_2} dt \, [p\dot{g} - H(p, q, X, Y, Z]\}, \tag{3.103}$$

onde a integração é feita sobre todos os caminhos satisfazendo $q(T) = q(0)$ e $T \to \infty$, sugerindo uma adiabaticidade cíclica fechada. Podemo calcular a ação efetiva Γ utilizando o propagador de Feynman, $K(q_2, t_2; q_1, t_1)$, na presença de um *campo externo* $(X(t), Y(t), Z(t))$ por um caminho similar com as condições $q(t_1) = q_1$ e $q(t_2) = q_2$.

Estamos interessados especificamente na contribuição da curva, isto é, no traço da parte diagonal do propagador de Feynman no q-espaço, isto é,

$$\begin{aligned} G(T) &= e^{i\Gamma[X,Y,Z]} = trK \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dqK(q,T;q,0) \\ &= \sum_n e^{i\alpha_n(t)} < \lambda_n, 0 \mid \lambda_n, T > \end{aligned} \tag{3.104}$$

onde $\alpha_n(t)$ é um fator de fase e a eq.(3.104) é uma função de onda do tipo da eq.(3.101), para uma escolha especial de $C_{n's}$.

Considerando que os parâmetros externos (X,Y,Z) fazem uma excursão adiabática durante o tempo T no espaço de parâmetros, isto é, $(X,Y,Z)(0) = (X,Y,Z)(T)$, e que no limite adiabático $\dot{\rho}$ da equação eq.(3.99) é desprezível, temos

$$\frac{Z}{\rho^2} = \omega_D \left[1 - \frac{Z}{\omega_D^2}\frac{d}{dt}(Y/Z)\right]^{1/2\prime}, \tag{3.105}$$

onde $\omega_D = \sqrt{XZ - Y^2}$, com $XZ > Y^2$. Expandindo com relação a $\frac{Z}{\omega_D^2}\frac{d}{dt}(Y/Z) << 1$, obtemos

$$\frac{Z}{\rho^2} = \left[1 - \frac{Z}{2\omega_D^2}\frac{d}{dt}(Y/Z)\right] = \omega_D - \frac{Z}{2\omega_D}\frac{d}{dt}\left(\frac{Y}{Z}\right) \tag{3.106}$$

Portanto, fase total que é dada por

$$\alpha_n(T) = -(1 + \frac{n}{2})\int_0^T f(t')dt', \tag{3.107}$$

onde $f(t) = \omega_D - \frac{Z}{2\omega_D}\frac{d}{dt}\left(\frac{Y}{Z}\right)$, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \alpha_n(T) &= -(1 + \frac{n}{2})\int_0^T \omega_D dt' + (1 + \frac{n}{2})\int_0^T \frac{Z}{2\omega_D}\frac{d}{dt}\left(\frac{Y}{Z}\right)dt' \\ &= -(1 + \frac{n}{2})\int_0^T \omega_D dt' + (1 + \frac{n}{2})\oint_C dR\frac{Z}{2\omega_D}\nabla_R\left(\frac{Y}{Z}\right), \end{aligned} \tag{3.108}$$

onde $R = (X,Y,Z)$. A primeira integral corresponde a fase dinâmica e à segunda a fase geométrica fase de Berry,

$$\gamma_g(C) = (1 + \frac{n}{2})\oint_C dR\frac{Z}{2\omega_D}\nabla_R\left(\frac{Y}{Z}\right). \tag{3.109}$$

Sob o ponto de vista *convencional* (não-adiabático) a fase dinâmica obtida sobre um período é

$$\begin{aligned} \gamma_d &= \int_0^T < \psi_n(t') \mid H \mid \psi_n(t') > dt' \\ &= \frac{1}{2}(n + \frac{1}{2})\int_0^T \frac{|\dot{\rho}|^2 + 2Y\,\mathrm{Re}(\dot{\rho}.\rho^*) + Z.X.\,|\rho|^2}{\beta(t')} \end{aligned} \tag{3.110}$$

onde $\beta(t') = \text{Im}(\rho(t').\dot{\rho}^*(t') = \lambda/m(t')$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Portanto, a fase de Berry não-adiabática é dada por [15]

$$\begin{aligned}
\gamma_n(C) &= \alpha_n(T) + \gamma_d \qquad (3.111)\\
&= (n+\frac{1}{2})\int_0^T \left[-\frac{\beta(t')}{|\rho|^2} + \frac{|\dot{\rho}|^2 + 2Y\,\text{Re}(\dot{\rho}\rho^*) + ZX\,|\rho|^2}{\beta(t')} \right].
\end{aligned}$$

Vamos voltar ao início desta seção, onde tínhamos o espaço-tempo no qual a equação de Klein-Gordon tem a forma dada pela eq.(3.91), e que pode ser obtida da Hamiltoniana dada pela eq.(3.93)

Comparando as equações (3.93) e (3.96), verificamos que $Y(t) = 0$ e portanto, a fase geométrica obtida da da eq.(3.109) é nula. Considerando o caso particular em que $m(t) = m$(constante) e $\omega = \omega(t)$ temos a equação clássica do movimento

$$\ddot{q} + \omega^2(t)q = 0, \qquad (3.112)$$

com equação auxiliar

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho - \frac{1}{\rho^3} = 0. \qquad (3.113)$$

Portanto, a fase de Berry adiabática é nula e a não-adiábatica é [67]

$$\varphi_B = -\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})\int_0^T \left[\rho(t')\ddot{\rho}(t') - \dot{\rho}(t')\right] dt' \qquad (3.114)$$

onde ρ é a solução da equação eq.(3.113).

3.9 Fase de Berry em modelos cosmológicos espacialmente homogêneos.

Em recente trabalho Ali Mostafazadeh [19] utilizou o formalismo de duas componentes(ver seção 3.4) na obtenção da fase de Berry, no caso dos modelos espacialmente homogêneos. Nesse cálculo foram usados os grupos de simetrias asociados ao espaço-tempo, segundo a classificação de Bianchi [68].

Vamos consider um espaço-tempo espacialmente homogêneo associado com o grupo de Lie, G, isto é, $M = \mathbb{R}\times G$. O elemento de linha asociado a este espaço-tempo é

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\omega^\mu\omega^\nu = -dt^2 + g_{ij}\omega^i\omega^j, \qquad (3.115)$$

onde ω^i são as 1-formas invariantes e $g_{ij} = g_{ij}(t)$ são as componentes espaciais da métrica. Para estudar a fase geometrica adiabática associada ao espaço-tempo considerado, temos que introduzir os operadores [53] definidos (ver seção 3.4) por

$$\begin{aligned}\hat{D}_1 &= g^{ij}\Gamma^0_{ij}, \\ \hat{D}_2 &= -\Delta_t + m^2, \\ \Delta_t &= g^{ij}\nabla_i\nabla_j = g^{ij}X_iX_j - \Gamma^k_{ijk},\end{aligned} \tag{3.116}$$

onde X_a são os operadores associados com o campo vetorial dual ω^i e Δ_t é o Laplaciano em Σ_t(hipersuperfície tipo-espaço), ∇_i é a derivada covariante correspondente à conexão Riemanniana, e

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}(g_{\delta\alpha,\beta} + g_{\beta\delta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\delta} + g_{\epsilon\alpha}C^\epsilon_{\delta\beta} - g_{\epsilon\beta}C^\epsilon_{\delta\alpha} - \frac{1}{2}C^\gamma_{\alpha\beta} \tag{3.117}$$

com $g_{\alpha\beta,\gamma} := X_\gamma g_{\alpha\beta}$ e $C^\gamma_{\alpha\beta}$ são as constantes de estrutura que satisfazem a relação

$$[X_\alpha, X_\beta] = -C^\gamma_{\alpha\beta}X_\gamma \tag{3.118}$$

com $X_0 = \frac{\partial}{\partial t}$.

Demonstra-se que a contribuição de $\hat{D}_1$ é nula. Logo a equação de autovalores geralizada eq.(3.83) torna-se;

$$(\hat{D}_2 - E_n^2)\Phi_n = -(\Delta_t + E_n^2 - m^2)\Phi_n = 0. \tag{3.119}$$

Vemos assim, que o operador $\hat{D}_2$ é essencialmente o operador Δ_t sobre Σ_t,e é auto-adjunto. Isto garante que as auto-funções Φ_n são ortogonais e os autovalores E_n^2 são reais.

A análise da função Φ_n é equivalente a estudar os autovalores do Laplaciano sobre a variedade tri-dimensional Σ_t. O problema se resume, então, a estudar o espectro de Δ_t. Vamos relembrar algumas propriedades gerais do Laplaciano para uma variedade Riemanniana Σ, finita, compacta ou onde as auto-funções têm suporte compacto, isto é, as auto-funções se anulam na fronteira de Σ:

(i) O espectro de Δ é um subconjunto discreto infinito de $\mathbb{R}^+$.

(ii) Os autovalores são não-degenerados ou finitamente degenerado.

(iii) Existe um conjunto ortonormal de auto-funções o qual forma uma base para $\mathcal{L}^2(\Sigma)$ (funções de quadrado integrável).

(iv) Se Σ é compacta, então o primeiro auto-valor é zero o qual é não-degenerado, sendo o auto-espaço associado o conjunto das funções constantes.

Se Σ é não compacta mas as auto-funções tem suporte compacto($\{f : \Sigma \to \Sigma; f(x) = 0, \forall x \in \partial\Sigma\}$), então o primeiro auto-valor é positivo.

Notemos que para modelos cosmológicos espacialmente homogêneos, os campos vetorias invariantes X_a produz em uma representação dos geradores G_r de G, com $\mathcal{L}^2(\Sigma)$ sendo o espaço de representação. Assim, podemos ver o Laplaciano Δ_t como (uma representação de) um elemento da cobertura álgebra de Lie de G. Portanto, Δ_t comuta com qualquer operador de Casimir C_λ e consequentemente tem o mesmo conjunto de autovetores de C_λ.

A seguir, vamos utilizar essas idéis para apresentar três exemplos correspondentes aos tipos Bianchi I, VIII e IX.

3.9.1 Bianchi tipo I.

Para este caso temos $C^\gamma_{\alpha\beta} = 0, \forall \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$ e

Campos de Killing	Geradores	1-formas
$\xi_1 = \partial_1$	$X_1 = \partial_1$	$\omega^1 = dx^1$
$\xi_2 = \partial_2$	$X_2 = \partial_2$	$\omega^2 = dx^2$
$\xi_3 = \partial_3$	$X_3 = \partial_3$	$\omega^3 = dx^3$

com $d\omega^1 = d\omega^2 = d\omega^3 = 0$.

Neste caso G é abeliano, pois da eq.(3.118), temos $[X_i, X_j] = 0$, com $i, j = 1, 2, 3$. Logo os X_a comutam com o operador de Casimir C_λ, daí as auto-funções de Δ_t as Φ_n são independentes de t. Portanto as conexões de Berry eq.(3.34) são nulas, logo a fase de Berry é a trivial, isto é, o sistema não apresenta a fase de Berry.

3.9.2 Bianchi tipo VIII.

Para este tipo de espaço-tempo temos :

$$
\begin{aligned}
C^1_{23} &= -C^1_{32} &= -1 \\
C^2_{31} &= -C^2_{13} &= 1 \\
C^3_{12} &= -C^3_{21} &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{1}{2}e^{-x^2}\partial_1 \\
\xi_2 &= \partial_3 \\
\xi_3 &= \frac{1}{2}e^{-x^3}\partial_1 - \frac{1}{2}\left[e^{x^2} + (x^2)^2 e^{-x^3}\right]\partial_2 - x^2 e^{-x^3}\partial_3 \\
X_1 &= \frac{1}{2}\left[1 + (x^1)^2\right]\partial_1 + \frac{1}{2}\left[1 - 2x^1x^2\right]\partial_2 - x^1\partial_3 \\
X_2 &= -x^1\partial_1 + x^2\partial_2 + \partial_3 \\
X_3 &= \frac{1}{2}\left[1 - (x^1)^2\right]\partial_1 + \frac{1}{2}\left[2x^1x^2 - 1\right]\partial_2 + x^1\partial_3 \\
\omega^1 &= dx^1 + \left[1 + (x^1)^2\right]dx^2 + \left[x^1 - x^2 - (x^1)^2x^2\right]dx^3 \\
\omega^2 &= 2x^1dx^2 + (1 - 2x^1x^2)dx^3 \\
\omega^3 &= dx^1 + \left[(x^1)^2 - 1\right]dx^2 + [x^1 + x^2 - (x^1)^2x^2]dx^3
\end{aligned}
$$

e $d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega^3$, $d\omega^2 = \omega^3 \wedge \omega^1$, $d\omega^3 = \omega^1 \wedge \omega^2$

Notemos que neste caso, $G_r = SO(2,1) \approx SU(1,1)/\mathbb{Z}_2$, $SU(1,1)$ é o grupo de cobertura de $SO(2,1)$ que é topologicamente isomorfo à pseudo-esfera Λ^2, que não é compacta e portanto não admite uma cobertura universal. Lembremos que a pseudo-esfera é a superfície

$$\Lambda^2 = \{(x_1, x_2, x_3)\ ; -(x^2)^2 + (x^2)^2 + (x^2)^2 = 1, \text{com } x^1, x^2, x^3 \in \mathbb{R}\}$$

que tem de curvatura Gaussiana constante e negativa $k = -1$.

Fazendo a mudança de variável $(x^1, x^2, x^3) \to (r, \theta, \phi)$ onde

$$
\begin{aligned}
x^1 &= \cosh\theta \\
x^2 &= senh\theta\cos\phi \\
x^3 &= senh\theta sen\phi \\
r &= 1
\end{aligned}
\tag{3.120}
$$

com $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$, temos a métrica associada a variedade cujo elemento de linha é dado por

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2)^2. \quad (3.121)$$

A pseudo-esfera Λ^2 é analiticamente equivalente aos três espaços Riemanniano:

(i) O disco de Poincaré: $D = \{z = a + ib = re^{i\phi}; r < 1, \phi \in [0, 2\pi]\}$

(ii) O plano superior de Poincaré : $U = \{z = a + ib; a, b \in \mathbb{R} \ , b > 0\}$

(iii) O hiperbolóide de duas folhas que uma superfície aberta e plana. Portanto a fase de Berry é trivial.

Um exemplo de simetria $SU(1, 1)$ é o oscilador paramétrico que estudamos anteriormente. Com o objetivo de exemplificar o método apresentado, vamos apresentar o mesmo resultado sob este ponto de vista. Sabemos que a Hamiltoniana para o sistema é

$$H(t) = \frac{1}{2}\left[X(t)q^2 + Y(t)(q.p + p.q) + Z(t)p^2\right] \quad (3.122)$$

Introduzindo a seguinte representação para os geradores da álgebra de Lie de $SU(1, 1)$,

$$J_1 = \frac{1}{4}(q^2 - p^2), \ J_2 = \frac{1}{4}(pq + qp) \text{ e } J_3 = \frac{1}{4}(q^2 + p^2), \quad (3.123)$$

com $[J_i, J_j] = \epsilon_{ij}^k J_k \ g_{ij} = diag(-1, -1, 1)$, sendo ϵ_{ijk} o tensor antisimétrico usual ($\epsilon_{ijk} = 1$).

O valor do operador de Casimir

$$C_\lambda = J^i J_i = -J_1^2 - J_2^2 + J_3^2, \quad (3.124)$$

na representação acima mencionada é

$$C_\lambda = -\frac{3}{16} =: l(l + 1), \quad (3.125)$$

com soluções $l = -3/4$ e $l = -1/4$. Da teoria geral [69] segue que o espectro de J_3 para uma representação limitada inferiormente temos os autovalores

$$k_m = -l + m \ , \ m \in \mathbb{N}, \quad (3.126)$$

onde $l = -1/4, -3/4$. Isto pode ser expresso na forma

$$k_n = \frac{1}{2}(n + 1/2), n \in \mathbb{N}, \tag{3.127}$$

que corresponde aos autovalores da Hamiltoniana eq.(3.96) obtidos em [70] e dados por

$$E_n = \frac{1}{2}(n + 1/2),\ n \in \mathbb{N}\ . \tag{3.128}$$

O que mostra a ausência da fase geometrica e a presença da fase dinâmica no sistema, como de se esperar.

3.9.3 Bianchi tipo IX.

Neste caso $G = SO(3) \approx S^3 \approx SU(2)/\mathbb{Z}_2$, onde $SU(2)$ é o grupo de cobertura, que é compacto, e portanto é uma cobertura universal. Sejam J_1, J_2 e J_3 os geradores imfinitessimais de de $SO(3)$ com

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ij}^k J_k \tag{3.129}$$

onde ϵ_{ijk} é o tensor de Levi-Civita. O operador de Casimir é

$$J^2 = \sum_a J_a^2, \tag{3.130}$$

e os vetores de Killing são dados por $\xi_a = iJa$.

Para o cálculo de fase de Berry para este caso faz-se necessário um estudo mais aprofundado dos sistemas que apresentam tal simetria, para tanto veja os trabalhos Hu [71] onde ele encontra fase de Berry não trivial, e Ali [19].onde são apresentadas situações tendo e não tendo fase de Berry trivial.

Neste capítulo, além de resaltarmos a importância da fase de Berry em diversos ramos da física exibimos a sua dedução para um sistema que evolui adiabaticamente com o tempo, caracterizando-a como um objeto puramente geométrico, pois, depende fundamentalmente das curvas fechadas nos espaços-tempos considerados. Além do mais, apresentamos um resumo dos estudos que vem sendo feitos sobre fase geométrica, no sentido de generalizações para campos de gauge não-Abelianos e para aproximação adiabática relativística. Calculamos a fase de Berry para uma partícula escalar no espaço-tempo de uma corda cósmica quiral que é uma generalização do trabalho de Corichi e Pierri e calculamos, também, a fase de Berry para os espaços-tempos das multicordas quirais, do cilindro com rotação e em um universo isótropico . Finalmente, apresentamos a fase geométrica em alguns modelos cosmológicos espacialmente homogêneos.

Capítulo 4

Caracterização Global do Espaço-Tempo, Efeito Gravitacional Aharonov-Bohm e Fase de Berry na Teoria de Kaluza-Klein.

4.1 Introdução.

Umas das linhas de pesquisa da física teórica moderna consiste na formulação de uma teoria que forneça a unificação da gravitação com as outras interações da natureza. Uma das primeiras teorias com o objetivo de estabelecer a unificação da gravitação e do eletromagnetismo foi sugerida por Kaluza [72] que postulou a existência de uma quinta dimensão para o espaço-tempo, que possui a natureza das demais coordenadas espaciais. Posteriormente Klein [73] estendeu as idéias de Kaluza, justificando a hipótese da independência da métrica com respeito à dimensão suplementar e o fato de que essa dimensão não é observável. Para isto, ele postulou que o espaço-tempo tem a topologia do produto $M^4 \times S^1$, sendo M^4 o espaço-tempo 4-dimensional e S^1 um círculo de raio a parametrizado pela quinta coordenada $X : 0 \leq X \leq L$. Ele supôs que existe uma isometria definida por um vetor de Killing do tipo espaço o que significa que o espaço-tempo é homogêneo na quinta direção, e supos também que o raio a é pequeno e que a dimensão estra não é observada. Também foi mostrado dentro do contexto dessas extensão da teoria da Relatividade Geral de Einstein como ambas, gravitação e eltromagnetismo podem ser tratados de forma similar - no sentido que ambos são descritas como partes de uma métrica em cinco-dimensões. Nessa teoria, as transformações de gauge eletromagnéticas são interpretadas como transformações de coordenadas na dimensão extra, a qual preserva a forma da métrica de Kaluza-Klein.

Mais recentemente, foi demonstrado por Weinberg [74] e Salam [75], como as interações fracas e eletromagnéticas podem ser unificadas em uma teoria de gauge, não-abeliana com grupo de gauge $SU(2)\times U(1)$. É natural pensar que também é possível incluir a interação forte numa grande teoria de unificação (GUT) no contexto de uma teoria de gauge com grupo de $SU(5)$, como no modelo de Georgi e Glashow [76].

Uma generalização natural da idéia de Kaluza-Klein, a qual incorpora os campos de gauge não-abelianos, é considerar a teoria das altas dimensões ($d > 5$), na qual os campos de gauge farão parte da métrica, do mesmo modo como o campos eletromagnéticos na teoria de Kaluza-Klein. O interese em teorias com altas dimensões está associado ao advento da supergravidade. Neste contexto, idéias tais como redução da dimensão[77] e compactificação [78] do espaço possuem um papel relevente.

A idéia original da teoria de Kaluza [72] é que o espaço-tempo é realmente penta-dimensional. Ele postulou que o elemento de linha é dado por

$$\begin{aligned} ds^2 &= \hat{g}_{AB}(x,y)dx^A dx^B \\ &= g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu + (dX + kA_\mu(x)dx^\mu)^2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde X é a coordenada espacial adicional, com $0 \leq X \leq L$, variando sobre um intervalo finito e sendo periódico. O tensor $\hat{g}_{AB}$ é o tensor métrico do espaço em 5-dimensões, que consideramos com a assinatura $(-1,1,1,1,1)$ e com coordenadas (t,x^1,x^2,x^3,X), $A,B = 0,1,2,3,5$ e $\mu,\nu = 0,1,2,3$. Daí a variedade penta-dimensional, é localmente, da forma $M_4 \times S^1$ onde M_4 é a variedade 4-dimensional corespondente ao espaço-tempo e $g_{\mu\nu}$ é a métrica de M_4, que não tem dependência com a variável X.

O quadrivetor $A_\mu(x)$ corresponde ao campo eletromagnético é independente de X. A constante k possui unidade de $(\text{massa})^{-1}$ ou comprimento, o que torna o termo $kA_\mu(x)$ adimensional. o que facilitar as interpretações subsequentes de A_μ como campo de gauge eletromagnetico em 4-dimensões o qual tem unidade de massa.

Vamos agora estudar as transformações de coordenadas que preservam a forma do elemento de linha de Kaluza-Klein. Primeiramente, por causa do comportamento do quadrivetor o A_μ , ds^2 será invariante por uma mudança de coordenadas $x^\mu \to x'^\mu(x^\nu)$ em M_4 somente. Vamos condiderar a mudança na quinta coordenada da forma

$$X \to X' = F(X, x^\mu). \tag{4.2}$$

Então,

$$dyX \to dX' = \frac{\partial F}{\partial X} dX + \frac{\partial F}{\partial x^\mu} dx^\mu.$$

A invariância de ds^2 impõe a restrinção $\frac{\partial F}{\partial X} = 1$, pois de outra forma o último termo de eq.(4.1) necessariamente mudaria. Com esta restrinção a eq.(4.2), torna-se

$$X' = X + f(x^\mu). \tag{4.3}$$

Segue então que a mudança $A_\mu(x) \to A'_\mu(x)$ pela transformação dada por (4.3),resultará

$$dX + kA_\mu(x)dx^\mu \to dX + k\left[A'_\mu(x) + k^{-1}\frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu}\right]dx^\mu. \tag{4.4}$$

Para ds^2 ser invariante exigimos que $A_\mu(x) \to A'_\mu(x) - k^{-1}\frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu}$, que é uma transformação de gauge para campos vetoriais. Logo, na teoria de Kaluza-Klein, a transformações da coordenada espacial extra é interpretada como uma transformação de gauge.

Da eq.(4.1), as componentes da métrica podem ser lidas na forma matricial e podemos escrever $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ como

$$\hat{g}_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} - k^2 A_\mu A_\nu & -kA_\mu \\ -kA_\nu & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

As componentes $\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ da matriz inversa são facilmente calculadas via $\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \delta^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}}$, e temos o resultado

$$\hat{g}^{AB} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -kA^\mu \\ -kA^\mu & -1 + k^2 A^\lambda A_\lambda \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

As componentes da métrica nas eqs.(4.5) e (4.6) foram tomadas em relação a uma base , na qual $\{dx, dX\}$ são as 1-formas. A base dual $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{X}\}$ forma uma base do espaço tangente. No entanto, existe uma outra escolha que torna mais conveniente os cálculos, pois torna a métrica diagonal. Esta base é chamada de base de levantamento horizontal e é obtida considerando-se

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^{\mu} &= dx^{\mu} \\ \hat{\theta}^{5} &= dX + kA_{\mu}(x)dx^{\mu} \end{aligned} \tag{4.7}$$

como bases de 1-forma. Daí

$$\hat{g}_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

A de vetores $e_{\hat{\mu}}$ os quais são duais à $\hat{\theta}^{\mu}$ são dadas por

$$\begin{aligned} \hat{e}_{\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - kA_{\mu}(x)\frac{\partial}{\partial X}, \\ \hat{e}_{5} &= \frac{\partial}{\partial X}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Logo, obtém-se os seguintes resultados

$$\begin{aligned} [\hat{e}_{\mu}, \hat{e}_{\nu}] &= -kF_{\mu\nu}(x)\frac{\partial}{\partial X}, \\ [\hat{e}_{\mu}, \hat{e}_{5}] &= 0, \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}A_{\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}A_{\mu}(x). \tag{4.11}$$

Agora é possível encontrar o tensor de curvatura.

Os coeficientes de conexões não-nulos são dados por [79]

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda} &= \tfrac{1}{2}\left[\partial_{\lambda}g_{\mu\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\lambda} - \partial_{\mu}g_{\lambda\nu}\right] = \Gamma_{\nu\mu\lambda} \\ \hat{\Gamma}_{\mu\nu5} &= \hat{\Gamma}_{\mu5\nu} = \tfrac{1}{2}kF_{\mu\nu} \\ \hat{\Gamma}_{5\mu\nu} &= -\tfrac{1}{2}kF_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

onde $\Gamma_{\mu\nu\lambda}$ são as componentes da conexão na variedade 4-dimensional. O escalar de curvatura é

$$\hat{R} = \hat{R}^{AB}_{AB} = \hat{R}^{AB}_{AB} + 2\hat{R}^{\mu5}_{\mu5}. \tag{4.13}$$

As componentes do tensor de curvatura podem ser obtidas usando-se as eqs.(4.12), resultando em

$$\begin{aligned} \hat{R}^{\lambda}_{\ \sigma\mu\nu} &= R^{\lambda}_{\ \sigma\mu\nu} + \frac{1}{4}k^{2}F^{\lambda}_{\ \nu}F_{\sigma\mu} - \frac{1}{4}k^{2}F^{\lambda}_{\ \mu}F_{\sigma\nu} - \frac{1}{2}k^{2}F^{\lambda}_{\ \sigma}F_{\mu\nu}, \\ \hat{R}^{\lambda}_{\ 5\mu5} &= \frac{1}{4}k^{2}F^{\lambda}_{\ \tau}F^{\tau}_{\ \mu}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

onde $R^{\lambda}_{\sigma\mu\nu}$ é o tensor de curvatura construído com a métrica de M_4 e suas derivadas. A contração dos índices em (4.14) fornecem os seguintes resultados

$$\begin{aligned} \hat{R}^{\mu\nu}_{\mu\nu} &= R - \frac{3}{4}k^2 F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \\ \hat{R}^{\mu 5}_{\mu 5} &= \frac{1}{4}k^2 F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

onde $R = R^{\mu\nu}_{\mu\nu.}$. Substituindo esses resultados na eq.(4.13) obtemos o escalar de curvatura

$$\hat{R} = R - \frac{1}{4}k^2 F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{4.16}$$

Como $\hat{R}$ é um escalar, ele é independente da escolha da base, e a eq.(4.16) é um resultado geral.

Na versão original da teoria de Kaluza-Klein, a ação básica em cinco-dimensões para a ação gravitacional de Einstein-Hilbert é:

$$I_{EH} = (16\pi L)^{-1} \int d^5x \sqrt{\hat{g}}[\hat{R} - 2\Lambda], \tag{4.17}$$

onde $\hat{g} = \det(\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}) = -\det(g_{\mu\nu})$, e Λ é uma constante cosmológica. Quando a forma da métrica de Kaluza-Klein é usada, o integrando da eq.(4.17), não tem dependência em X, logo a equação pode ser posta na forma

$$I_{EH} = (16\pi L)^{-1} \int d^4x \sqrt{g}[R - 2\Lambda - \frac{1}{4}k^2 F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}]. \tag{4.18}$$

Temos, então, a ação de Einstein-Maxwell com a identificação $k = 16\pi$.

Em virtude do recente interesse no formalismo de Kaluza-Klein, na pespectiva de se construir uma teoria que unifica as interações fundamentais, nos parece interessante calcular os fatores de fase para algumas configurações do campo gravitacional, e especialmente, estudar novos aspectos do efeito Aharonov-Bohm eletromagnético e gravitacional e da caracterização global do espaço-tempo envolvendo certas configurações. Para atingir esses objetivos vamos usar os fatores de fase no espaço-tempo de cinco dimensões, e estudar os efeitos eletromagnéticos e gravitacionais de uma maneira unificada.

Vamos agora apresentar alguns resultados sobre fatores de fase, na teoria de Kaluza-Klein, nos espaços-tempo de um solenóide, do monopolo global, e de uma corda quiral.

Usaremos as transformações de holonomia no espaço-tempo da multicorda quiral para estudar os aspectos globais deste espaço-tempo. Também calcularemos a fase de Berry associada a uma partícula escalar quântica nos espaços-tempos da corda magnética quiral e de múltiplas cordas magnéticas quirais.

4.2 Holonomias associadas ao solenóide em Kaluza-Klein.

A métrica em 5-dimensões correspondente a solução estática das equações de Kaluza-Klein do solenóide com simetria cilíndrica é dada por [80]

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + dr^2 + dz^2 + \frac{r^2 d\phi^2}{1+4\pi B_0 r^2} + \\ & (1+4\pi G_0 B_0 r^2)\left[\frac{\pm\sqrt{4\pi} B_0 r^2 d\phi}{1+4\pi B_0 r^2} + dX\right]^2, \end{aligned} \tag{4.19}$$

onde B_0 é a intensidade do campo magnético no eixo do solenóide. Notemos que desse elemento de linha podemos, facilmente, escrever a métrica quadri-dimensional, o campo escalar, e os potenciais eletromagnéticos como sendo

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= diag(-1, 1, \frac{r^2}{1+4\pi B_0 r^2}, 1), \\ \Phi^2 &= 1 + 4\pi B_0 r^2, \\ A_\mu &= (0, \frac{\pm\frac{1}{2} B_0 r^2}{1+4\pi B_0 r^2}, 0, 0). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Note que para $4\pi B_0 r^2 << 1$, esses potenciais são precisamente os potenciais obtidos na eletrodinâmica clássica para um solenóide cilíndrico no gauge de Lorentz.

Considerando o limite $r \to 0$, tomemos $\alpha = \sqrt{4\pi} B_0$, assim, a eq.(4.19) torna-se

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + dz^2 + \frac{r^2 d\phi^2}{1+\alpha^2 r^2} + (1+\alpha^2 r^2)\left[\frac{\alpha r^2 d\phi}{1+\alpha^2 r^2} + dX\right]^2. \tag{4.21}$$

Tomando as 1-formas

$$\begin{aligned} \omega^0 &= dt, \\ \omega^1 &= dr, \\ \omega^2 &= r d\phi (1+\alpha^2 r^2)^{-1/2}, \\ \omega^3 &= dz, \\ \omega^5 &= (1+\alpha^2 r^2)^{1/2}\left[\alpha r^2 (1+\alpha^2 r^2)^{-1} d\phi + dX\right], \end{aligned} \tag{4.22}$$

obtemos os coeficientes não-nulos da conexões pentrádicas

$$\begin{aligned}\Gamma^2_{\mu 1}dx^\mu &= (1+\alpha^2r^2)^{-3/2}d\phi = -\Gamma^1_{\mu 2}dx^\mu, \\ \Gamma^4_{\mu 1}dx^\mu &= \frac{2\alpha r+\alpha^3r^3}{(1+\alpha^2r^2)^{3/2}}d\phi - \alpha^2 r\frac{(1+\alpha^2r^2)^{1/2}}{(1-\alpha r)}dX = -\Gamma^1_{\mu 5}dx^\mu.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Tomando o contorno C como sendo a curva onde $dr = dt = dz = 0$, daí temos o único coeficiente pentrádico não-nulo,

$$\Gamma_\mu dx^\mu = \Gamma_\phi d\phi. \tag{4.24}$$

Da eq.(4.23) obtemos que

$$\Gamma_\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & B \\ 0 & -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.25}$$

onde $A = -(1+\alpha^2r^2)^{-3/2}$ e $B = -2\alpha r + \alpha^3r^3(1+\alpha^2r^2)^{-3/2}$.

Como Γ_ϕ tem a propriedade $(\Gamma_\phi)^3 = -(A^2+B^2)\Gamma_\phi$, definamos A_ϕ por $A_\phi = (A+B)^{1/2}$. Assim, a holonomia para a curva considerada é

$$\begin{aligned} U(C) &= \exp\left[\int_0^{2\pi}\Gamma_\phi d\phi\right] = \exp(2\pi\Gamma_\phi) \\ &= I + \frac{\Gamma_\phi}{A_\phi}sen(2\pi A_\phi) + (\frac{\Gamma_\phi}{A_\phi})^2\left[1-\cos(2\pi A_\phi)\right], \end{aligned} \tag{4.26}$$

que é não-trivial.

Notemos que a contribuição da quinta componente é percebida pela variável de contorno, apesar da holonomia ter a mesma forma que a quadri-dimensional.

4.3 Fatores de fase no espaço-tempo do monopolo global na teoria de Kaluza-Klein

O elemento de linha para o espaço-tempo associado a um monopolo global na teoria de Kaluza-Klein foi obtido por Sen e Baneejee [81], e é dado por

$$ds^2 = -\mathfrak{A}(R)d\tau^2 + \mathfrak{B}(R)dR^2 + \mathfrak{R}(R)(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) + \mathfrak{C}(R)d\psi, \tag{4.27}$$

onde $\mathfrak{A}(R) = [1 - 8\pi\eta^2 - 2M/R]^a$, $\mathfrak{B}(R) = [1 - 8\pi\eta^2 - 2M/R]^{-(a+b)}$, $\mathfrak{R}(R) = R^2 [1 - 8\pi\eta^2 - 2M/R]^{1-a-b}$ e $\mathfrak{C}(R) = [1 - 8\pi\eta^2 - 2M/R]^b$ e os parâmetros a e b obedecem a seguinte relação de consistência $a^2 + b^2 + ab = 1$.

Para o caso particular de $a = 1$ e $b = 0$, a equação (4.27) torna-se

$$ds^2 = -Ad\tau^2 + A^{-1}dR^2 + R^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) + d\psi^2, \tag{4.28}$$

onde $A = [1 - 8\pi\eta^2 - 2M/R]$, e M é o parâmetro de massa e η é um parâmetro relacionado com a escala na qual a simetria é quebrada.

Fazendo a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} \tau &\rightarrow t = \beta\tau, \\ R &\rightarrow r = \beta^{-1}R, \\ M &\rightarrow m = \beta^{-3}M, \\ \psi &\rightarrow \psi, \end{aligned}$$

onde $\beta^2 = 1 - 8\pi\eta^2$, o elemento de linha dado pela equação (4.28), torna-se

$$ds^2 = -(1 - 2m/r)dt^2 + (1 - 2m/r)^{-1}dr^2 + \beta^2 r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) + d\psi^2. \tag{4.29}$$

Escolhendo as seguintes péntadas

$$\begin{aligned} \omega^0 &= \mathcal{A}^{1/2}dt, \\ \omega^1 &= \mathcal{A}^{-1/2}dr, \\ \omega^2 &= \beta r d\theta, \\ \omega^3 &= \beta r sen\theta d\phi, \\ \omega^5 &= d\psi, \end{aligned} \tag{4.30}$$

onde $\mathcal{A} = (1 - 2m/r)$.

Usando a equação de estrutura de Cartan $d\omega^a + \omega^a_c \wedge \omega^c_b = 0$(com os índices pentádricos iguais a $0, 1, 2, 3, 5$) encontramos as seguintes conexões, não nulas,

$$\Gamma^0_{\mu 1}dx^\mu = -m/r^2 dt = -\Gamma^1_{\mu 0}dx^\mu \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^2_{\mu 1}dx^\mu &= \beta\mathcal{A}^{1/2}d\theta = -\Gamma^1_{\mu 2}dx^\mu \\ \Gamma^3_{\mu 1}dx^\mu &= \beta\mathcal{A}^{1/2}sen\theta d\phi = -\Gamma^1_{\mu 3}dx^\mu \\ \Gamma^3_{\mu 2}dx^\mu &= \beta\cos\theta d\phi = -\Gamma^2_{\mu 3}dx^\mu \end{aligned}$$

Vamos inicialmente considerar círculos centrados na origem com valores fixos de r, θ e t. Neste caso, da eq.(4.31) temos

$$\Gamma_\mu dx^\mu = \Gamma_\phi d\phi,$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma_\phi &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta\mathcal{A}^{1/2} sen\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta\cos\theta & 0 \\ 0 & -\beta\mathcal{A}^{1/2} sen\theta & -\beta\cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= i\beta\mathcal{A}^{1/2}(r) sen\theta J_{13} - i\beta\cos\theta J_{23}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

sendo J_{13} e J_{23} os geradores de rotação em cinco dimensões, em torno dos eixos y e x, respectivamente.

Como Γ_ϕ é independente de ϕ, então o fator de fase é

$$U(C) = P\exp\left[\oint \Gamma_\mu dx^\mu\right] = \exp\left[\oint \Gamma_\phi d\phi\right] = e^{\Gamma_\phi(\phi_2 - \phi_1)}. \quad (4.33)$$

Em particular, para $\theta = \pi/2$, os elementos não-nulos da matriz dada pela eq.(4.32) são

$$\begin{aligned} \beta\mathcal{A}^{1/2} sen\theta &= \beta(1 - 2m/r)^{1/2}, \\ \beta\cos\theta &= 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Notemos que Γ_ϕ satisfaz a relação $(\Gamma_\phi)^3 = -\beta^2\mathcal{A} = -\beta^2(1 - 2m/r)\Gamma_\phi = -A_\phi^2\Gamma_\phi$, $(A_\phi = \beta(1 - 2m/r)^{1/2})$, o que acarreta que o fator de fase para este caso é

$$U(C) = I + \frac{\Gamma_\phi}{A_\phi} sen A_\phi(\phi_2 - \phi_1) + \left(\frac{\Gamma_\phi}{A_\phi}\right)^2 \left[1 - \cos A_\phi(\phi_2 - \phi_1)\right]. \quad (4.35)$$

Tomando o traço para um círculo completo, temos que o *loop* de Wilson gravitacional é

$$W(C) = Tr(U(C)) = 2(\frac{3}{2} + \cos 2\pi A_\phi). \quad (4.36)$$

Vamos calcular o fator de fase para a curva $r(s)$, $\theta(s)$ contida no plano meridiano. Necessitamos calcular, então,

$$\Gamma_s ds = (\Gamma_\theta\dot{\theta} + \Gamma_r\dot{r})ds \quad (4.37)$$

onde, da eq.(4.31) temos

$$\Gamma_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \mathcal{A}^{1/2}(r) & 0 & 0 \\ 0 & -\beta \mathcal{A}^{1/2}(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.38}$$

Mas,

$$P \exp\left[\int \Gamma_s ds\right] = \exp\left[\int \Gamma_s ds\right], \tag{4.39}$$

pois as matrizes comutam para diferentes valores de s. A propriedade dada pela eq.(4.39) é válida para qualquer curva contida em um plano arbitário contendo a origem. Em particular, para a curva meridiana, $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = 1$, obtemos

$$\Gamma_s = \Gamma_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \mathcal{A}^{1/2}(r) & 0 & 0 \\ 0 & -\beta \mathcal{A}^{1/2}(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ib\mathcal{A}^{1/2}(r) J_{12}, \tag{4.40}$$

onde J_{12} é o gerador de rotaçòes em torno do eixo-z, na representação pentadimensional. Portanto, o fator será dado por

$$U_{(0,2\pi)}(C) = I + \frac{\Gamma_\theta}{A_\theta} sen(2\pi A_\theta) + \left(\frac{\Gamma_\theta}{A\theta}\right)^2 \left[1 - \cos(2\pi A_\theta)\right], \tag{4.41}$$

onde $A_\theta = A_\phi$. E o *loop* de Wilson é

$$W(C) = Tr(U(C)) = 2(\frac{3}{2} + \cos 2\pi A_\phi). \tag{4.42}$$

Para um segmento radial obtemos a partir da eq.(4.31), com $\dot{\theta} = 0$ e $\dot{r} = 1$, que o fator de fase é trivial ou seja $U = I$.

Para uma translação no tempo, temos que

$$\Gamma_\mu dx^\mu = \Gamma_t dt,$$

com Γ_t sendo dada por

$$\Gamma_t = \begin{pmatrix} 0 & m/r^2 & 0 & 0 & 0 \\ m/r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -i\frac{m}{r^2}J_{04}, \tag{4.43}$$

onde J_{04} é o gerador de *boost* na direção z. Portanto o fator de fase é

$$U_{(t_1 t_2)}(C) = \Gamma_t senh[m/r^2(t_2 - t_1)] + \Gamma_t^2 \cosh[m/r^2(t_2 - t_1)]. \tag{4.44}$$

Agora, vamos definir a variação angular e estabelecer sua ligação com a transformação de holonomia. A variação angular é um número e a transformação de holonomia é um conjunto de aplicações lineares(uma para cada ponto e para cada curva fechada). Devemos obter, então, das aplicações lineares um número, a variação angular no transporte paralelo.Para obter uma dada transformação linear, vamos considerar um ponto sobre a curva C. Então, U_B^A definido por (4.37) é a transformação de holonomia associada com o ponto $p \in C$, cuja relação com a variação angular $\mathcal{X}$ é dada por

$$U_A^A = \cos \mathcal{X}_A. \tag{4.45}$$

Se considerarmos um círculo equatorial e o índice A=1, então eq.(4.45) nos dá

$$\cos \mathcal{X}_1 = \cos 2\pi A_\phi, \quad |\mathcal{X}_1| = |2\pi A_\phi + 2\pi n|\,.$$

Quando $m \to 0$ temos que $\mathcal{X}_1 \to 0$, logo, $n = -1$, daí

$$|\mathcal{X}_1| = 2\pi\,|A_\phi - \beta| = 2\pi\beta\,|\mathcal{A}{-}1|\,. \tag{4.46}$$

Como esta métrica é tipo Schwarzschild [82]) o ângulo correspondente é

$$\left|\mathcal{X}^S\right| = 2\pi\,|A_\phi - \beta| = 2\pi\beta\,|\mathcal{A}{-}1| \tag{4.47}$$

Notemos que quando $r = 2m$(raio de Schwarzschild) temos $A_\phi = 0$ e $\mathcal{X}_1^S = 2\pi\beta$. Notemos também que para $A = 4$, $\cos \mathcal{X}_4 = 1 \to \mathcal{X}_4 = 0$, logo a coordenada ψ não influência no transporte paralelo do vetor V^A, ficando a influência por conta das outras coordenadas espaciais.

Com o intuito de estabelecer a relações de Mandelstam vamos utilizar a segunda equação de estrutura de Cartan; $R^a_b = d\omega^a + \omega^a_c \wedge \omega^c_b$ e as conexões de 1-forma dada pela eq.(4.31) para estabelecer as componentes do tensor de Ricci e em seguida determinamos que as expressões para o tensor de curvatura, que são dadas na forma matricial por

$$\hat{R}^A_{13B} = \beta m sen\theta r^{-2}(1-2m/r)^{-1/2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.48}$$

e

$$\hat{R}^A_{23B} = 2\beta m r^{-1} sen\theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.49}$$

$(A, B$ são índices pentrádicos).

Verificamos, então que as relações de Mandelstam para um círculo equatorial ($\theta = \pi/2$ e $\Delta\phi = 2\pi$) são satisfeitas e são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial r} &= \int_0^{2\pi} d\phi Tr(\hat{R}_{13}U) = 2\pi Tr(\hat{R}_{13}U) = -2\pi\beta\frac{m}{(1-2m/r)^{1/2}r^2} sen(2\pi A_\phi), \qquad (4.50) \\ \frac{\partial W}{\partial \theta} &= \int_0^{2\pi} d\phi Tr(\hat{R}_{23}U) = 2\pi Tr(\hat{R}_{23}U) = 0. \end{aligned}$$

onde $W(C)$ é dado pela equação eq.(4.42).

Usando estes resultados para o fator de fase podemos concluir que novamente a expressão geral para $U(C)$ é

$$U(C) = P\exp\left(-\frac{i}{2}\int \Gamma^{AB}_C(x)J_{AB}dx^C\right), \tag{4.51}$$

como elemento do grupo $SO(4,1)$.

Estes resultados podem ser particularizados para o monopolo global [83] retomamos a hipersuperfície ψ =constante. Neste caso, os fatoes de fase são elementos do grupo de Lorentz $SO(3,1)$.

4.4 Fatores de fase no espaço-tempo de uma corda quiral magnética.

O elemento de linha correspondente a corda cósmica quiral magnetica na teoria de Kaluza-Klein é dada por [84]

$$ds^2 = -\left(dt + 4J^t d\phi\right)^2 + dr^2 + \alpha^2 r^2 d\phi^2 + (dz + 4J^z d\phi)^2 + (dX + \frac{\Phi}{2\pi} d\phi)^2. \tag{4.52}$$

Os parâmetros J^t, J^z e Φ são tratados como momento, torção e fluxo através da corda, respectivamente. Para $\Phi = 0$ ela representa o espaço-tempo gerado pela corda cósmica quiral na teoria de Kaluza-Klein.

Vamos considerar o caso no qual $J^t = J^z = \Phi = 0$. Isto corresponde ao caso da corda cósmica [85]. Sobre este ponto de vista vamos calcular a transformação de holonomia para uma curva qualquer no plano-xy a partir dos resultados [46] correspondentes ao caso da corda cósmica quiral em 4-dimensões. Como já mostramos, quando transportamos um vetor paralelamente em torno de uma corda cósmica, ao longo de uma curva qualquer no plano-xy, iniciando e terminando na origem, o vetor adquire uma fase que é dada por

$$U(C) = \exp\left(\int_0^{2\pi} \Gamma_\phi d\phi\right) = e^{-8\pi i\mu J_{12}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 8\pi\mu & sen 8\pi\mu & 0 & 0 \\ 0 & sen 8\pi\mu & \cos 8\pi\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.53}$$

onde J_{12} é o gerador de rotações na (representação em 5-dimensões) em torno do eixo-z. Então, quando circulamos uma corda cósmica, partimos de um ponto $(t, \mathbf{x})$ para um ponto $(t', \mathbf{x}')$, os vetores coluna $(t, \mathbf{x})$ e $(t', \mathbf{x}')$ relacionam-se pela equação

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 8\pi\mu & sen 8\pi\mu & 0 & 0 \\ 0 & -sen 8\pi\mu & \cos 8\pi\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ X \end{pmatrix}. \tag{4.54}$$

Como o espaço-tempo fora da corda cósmica é localmente plano, podemo descrever a solução analítica em termos da métrica do espaço-tempo de Minkowski, mas conectados por algumas condições as quais são dadas pela eq.(4.54).

O elemento de linha correspondente a corda cósmica quiral magnética pode ser posta na forma de Minkowski

$$ds^2 = -dT^2 + dR^2 + Rd\theta^2 + dZ^2 + dX^2, \tag{4.55}$$

através da mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} t =& \quad T - J^t\phi \\ \phi =& \quad \theta/\alpha \\ r =& \quad R \\ z =& \quad Z - J^z\phi \\ x =& \quad X - \tfrac{\Phi}{2\pi}\phi. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Como no caso da corda cósmica, o espaço-tempo exterior à corda quiral magnética é localmente plano, e podemos descrevê-lo em termos do espaço-tempo munido com a métrica de Minkowski, agora conectado por condições as quais são as mesma do caso da corda cósmica, com a condição extra para as coordenadas t, z e X. Essas condições são expressas pela relação entre os pontos $(t, \mathbf{x})$ e $(\ t', \mathbf{x}')$ ao longo das fronteiras dadas pela eq.(4.55), levando em conta as condições adicionais dadas pelas equações de eq.(4.56).

As transformações dadas pelas eqs.(4.55) e (4.56) podem ser postas na forma de multiplicação de matrizes homogêneas da seguinte maneira: seja M_A^B uma matriz hexa dimensional, com A e B tomando os valores $A, B = 0, 1, 2, 3, 5, 6$. Tomemos M_ν^μ como sendo a matriz de rotação dada pela eq.(4.53), $M_6^0 = 8\pi J^z$, $M_6^3 = 8\pi J^t, M_6^4 = \Phi, M_6^0 = M_6^1 = M_3^6 = 0$ e $M_6^6 = 1$, temos então, que

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \\ X' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8\pi J^t \\ 0 & \cos 8\pi\mu & sen 8\pi\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -sen 8\pi\mu & \cos 8\pi\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8\pi J^z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ X \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.57}$$

Considerando as matrizes

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ & & & & & \end{pmatrix}.$$ Podemos escrever a equação (4.57) na forma

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \\ X' \\ 1 \end{pmatrix} = \exp\left[-i8\pi J^z M_3\right] \exp\left[-i8\pi J^t M_0\right] \exp\left[-i\Phi M_5\right] \exp\left[-8i\pi m J_{12}\right] \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ X \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.58}$$

No presente caso, existe um sistema de coordenadas localmente plano e portanto podemos assumir a interpretação usual para o tempo comestrutura geométrica helicoidal. Note que a generalização desta estrutura para o espaço-tempo com quatro ou mais dimensões, cinco, neste caso, não pode ser simplesmente admitida pois, tal estrutura depende da existência de um sistema de coordenadas localmente plano.

Da equação (4.58) podemos obter a transformação de holonomia para a corda cósmica ($J^t = J^z = \Phi = 0$), para a corda girante ($J^z = \Phi = 0$) e para a corda de fluxo magnético ($J^t = J^z = 0$). Neste caso temos o seguinte elemento de linha

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + dr^2 + \alpha^2 r^2 + (dX + \frac{\Phi}{2\pi} d\phi)^2. \tag{4.59}$$

Usando a decomposição usual de Kaluza-Klein para a métrica em 5-dimensões, podemos mostrar que a métrica eq.(4.51) representa a corda de fluxo magnético com campo longitudinal

$$B^z = k^{-1}\Phi\delta^{(2)}(\mathbf{r}) \tag{4.60}$$

onde k é a constante de Kaluza. O vetor potencial $A_\phi = k^{-1}\frac{\Phi}{2\pi}$ é gauge puro, exceto sobre eixo-z.

Notemos que o último fator que aparece na eq.(4.58) é próprio da presença adicional da quinta dimensão e esta associação ao efeito Aharonov-Bohm eletromagnético. Os outros três fatores estão associados com o espaço-tempo quadri-dimensional e leva em conta os efeitos gravitacionais usuais. Portanto, ainda da eq.(4.58) podemos concluir que quando transportamos um vetor ao longo de uma curva que circunda a corda, o vetor transportado adquire um fator de fase não-nulo. Esta fase não-trivial é uma expressão dos efeitos Aharonov-Bohm eletromagnético e gravitacional, combinados que aparecem como consequência da unificação de Kaluza-Klein. Este efeito deve ser entendido em termos dos aspectos globais do espaço-tempo em combinação e possui natureza puramente clássica.

4.5 Fatores de fase no espaço-tempo de múltiplas cordas quirais magnéticas.

Primeiramente, vamos usar a solução de Azreg-Ainou e Clément [84] para uma corda quiral em teoria de Kaluza-Klein para obtermos a generalização para o caso de N cordas quirais paralelas em teoria de Kaluza-Klein. Se considerarmos o sistema Cartesiano de coordenadas $x = r\cos\phi$, $y = rsen\phi$, podemos escrever o elemento de linha dado pela eq.(4.52) como

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(dt + 4J^t\frac{xdy - ydx}{r^2})^2 + e^{-4V}(dx^2 + dy^2) + \\ &\quad (dz - 4J^z\frac{xdy - ydx}{r^2})^2 + (dX + \frac{\Phi}{2\pi}\frac{xdy - ydx}{r^2})^2 \end{aligned} \tag{4.61}$$

com $V = 2\mu\ln r$.

A generalização da corda quiral para a multicorda quiral foi obtida [86] pela introdução dos parâmetros μ_i, J_i^t, J_i^z e Φ_i com $i = 1, 2, \ldots, N$ definido em cada corda quiral localizada nos pontos $\mathbf{r}=\mathbf{r}_i$ do plano $z=0$. O métrica resultante tem a forma da eq.(4.61) com as seguintes mudanças:

$$
\begin{aligned}
J^t\frac{xdy-ydx}{r^2} &\rightarrow \sum_{i=0}^{N} J_i^t\frac{(x-x_i)dy-(y-y_i)dx}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\right|^2} \\
J^z\frac{xdy-ydx}{r^2} &\rightarrow \sum_{i=0}^{N} J_i^z\frac{(x-x_i)dy-(y-y_i)dx}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\right|^2} \\
\frac{\Phi}{2\pi}\frac{xdy-ydx}{r^2} &\rightarrow \sum_{i=0}^{N} \frac{\Phi_i}{2\pi}\frac{(x-x_i)dy-(y-y_i)dx}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\right|^2} \\
V &= 2m\ln r \rightarrow \sum_{i=0}^{N} m_i\ln\left[r^2-2rr_i\cos(\phi-\phi_i)+r_i^2\right].
\end{aligned} \tag{4.62}
$$

Portanto, o elemento de linha para o espaço-tempo gerado pelas N cordas quirais na teoria de Kaluza-Klein pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -\left[dt+\sum_{i=1}^{N} A_i(W_i^1dy-W_i^2dx)\right]^2+e^{-4V}(dx^2+dy^2)+ \\
&\left[dz+\sum_{i=1}^{N} B_i(W_i^1dy-W_i^2dx)\right]^2+\left[dX+\sum_{i=1}^{N} C_i(W_i^1dy-W_i^2dx)\right]
\end{aligned} \tag{4.63}
$$

onde $A_i=4J_i^t$, $B_i=4J_i^z$ e $C_i=\frac{\Phi_i}{2\pi}$. Com J_i^t , J_i^z e Φ_i correspondendo ao momento angular, torsão e fluxo da i-ésima corda quiral, respectivamente, sendo W_i^1 e W_i^2 são dados por

$$
W_i^1=\frac{x-x_i}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\right|^2},\ W_i^2=\frac{y-y_i}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\right|^2}. \tag{4.64}
$$

Vamos, agora, considerar o caso em que $\Phi_i=0$. Sabemos que isto corresponde a multiplas cordas cósmicas quirais. Como é conhecido do capítulo 3, seção 5, um vetor transportado paralelamente ao longo de uma curva qualquer no plano-xy, que inicia e termina na origem,em torno da multicorda cósmica quiral, e adquire uma fase dada por

$$
U(C)=\exp\left(\int_0^{2\pi}\Gamma_\phi d\phi\right)=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 8\pi\tilde{J}^t \\
0 & \cos 8\pi\tilde{\mu} & sen 8\pi\tilde{\mu} & 0 & 0 \\
0 & -sen 8\pi\tilde{\mu} & \cos 8\pi\tilde{\mu} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 8\pi\tilde{J}^z \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \tag{4.65}
$$

onde $\tilde{\mu}=\sum_{i=1}^{N}\tilde{\mu}_i$, $\tilde{J}^t=\sum_{i=1}^{N}\tilde{J}_i^t$ e $\tilde{J}^z=\sum_{i=1}^{N}\tilde{J}_i^z$.

Como o espaço-tempo fora da multicorda cósmica quiral é localmente plano, podemos descrever a solução analítica puramente em termos do espaço-tempo com a métrica de Minkowski, mas conectada pelas seguintes condições

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 8\pi\tilde{\mu} & sen 8\pi\tilde{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & -sen 8\pi\tilde{\mu} & \cos 8\pi\tilde{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ X \end{pmatrix} \tag{4.66}$$

que relacionam os pontos $(t, \mathbf{x})$ e $(t', \mathbf{x}')$, ao longo das bordas. Como no caso da múltipla corda, o espaço-tempo da multicorda quiral magnética é também plano, e podemos usar as mesma condições com exceção as concernentes as coordenadas t, z e X. Essas condições são expressas relacionando-se os pontos $(t, \mathbf{x})$ e $(t', \mathbf{x}')$ como segue:

$$\begin{aligned} t' = & \quad t - 8\pi\tilde{J}^t, \\ x' = & \quad \cos(8\pi\tilde{\mu})x + sen(8\pi\tilde{\mu})y, \\ y' = & \quad -sen(8\pi\tilde{\mu})x + \cos(8\pi\tilde{\mu})y, \\ z' = & \quad z - 8\pi\tilde{J}^z, \\ X' = & \quad X - \Phi, \end{aligned} \tag{4.67}$$

onde consideramos como caminhos círculos no plano-xy.

A transformação dada pela equação (4.67) pode ser posta na forma de produtos de matrizes homogêneas como foi feito na seção anterior. Tomemos M^μ_ν como sendo a matriz de rotação $U(C) = \exp(-8\pi\tilde{\mu}J_{12})$ e $M^0_6 = 8\pi\tilde{J}^t$, $M^3_6 = 8\pi\tilde{J}^z$ $M^4_6 = \tilde{\Phi}$, $M^0_6 = M^1_6 = M^6_3 = 0$ e $M^6_6 = 1$, temos então, que

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \\ X' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8\pi\tilde{J}^t \\ 0 & \cos 8\pi\tilde{\mu} & sen 8\pi v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -sen 8\pi\tilde{\mu} & \cos 8\pi\tilde{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8\pi\tilde{J}^z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \tilde{\Phi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ X \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.68}$$

que pode ser posta na forma;

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \\ X' \\ 1 \end{pmatrix} = \exp\left[i8\pi\tilde{J}^z M_3\right]\exp\left[i8\pi\tilde{J}^t M_0\right]\exp\left[-i\tilde{\Phi}M_4\right]\exp\left[-8i\pi V J_{12}\right]\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ X \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.69}$$

onde

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A equação eq.(4.69) é a expessão exata para a holonomia, para círculos no espaço-tempo da multicorda quiral magnética. Somente as cordas envolvidas pela curva contribui para o fator de fasse.

A existência de coordenadas localmente planas neste espaço-tempo nos permite considerar a eq.(4.69) como a matriz de transporte paralelo. Então, podemos dizer que quando transportamos um vetor ao longo de um círculo neste espaço-tempo ele adquire uma fase que depende de μ_i, J_i^t , J_i^z e Φ_i. Este efeito está associado a topologia não-trivial do espaço-tempo em questão, e representa uma combinação dos efeitos Aharonov-Bohm eletromagnético e gravitacional, no contexto da teoria unificada de Kaluza-Klein.

4.6 Caracterização global da multicorda quiral magnética.

Como mais uma aplicação da transformação de holonomia vamos estudar, do ponto de vista global, o espaço-tempo de uma configuração de N cordas cósmicas quirais magnéticas localizadas nos pontos $\mathbf{a}_j, j = 1, 2, \ldots, N$. Para tanto vamos usar o resultado que diz que somente a corda envolvida pela curva contribui para o fator de fase adquirido por um vetor quando transportado paralelamente no espaço-tempo de múltiplas cordas quirais magnéticas. Vamos proceder de maneira análoga como foi feito no cápitulo 2.

Se transportamos um vetor $\mathbf{x}$ paralelemente em torno de um círculo que circunda uma corda quiral temos o seguinte vetor resultante

$$\mathbf{x}^{(1)} = U_1 \mathbf{x} \tag{4.70}$$

onde U_1 é obtido de [86]

$$U_k = \exp(-8i\pi J_k^t M_0) \exp(-8i\pi J_k^z M_3) \exp(-8i\pi m_k J_{12}) \exp(-i\Phi_k M_5), \tag{4.71}$$

pondo $k = 1$.

Agora, vamos considerar um sistema de duas cordas quirais, uma em $\mathbf{a}_1 = 0$(origem) e a outra em $\mathbf{a}_2$. Se transportarmos o vetor $\mathbf{x}$ ao longo do círculo em torno da corda cósmica 2, o vetor resultante é dado por $U_2\mathbf{x}$. Transportando paralelamente este vetor resultante ao longo do círculo que circunda a corda cósmica 1, teremos o novo vetor resultante

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{b}_{1,2} + U_1 U_2 \mathbf{x} \tag{4.72}$$

onde $\mathbf{b}_{1,2} = U_1(1 - U_2)\mathbf{a}_2$. A expressão para U_2 é dada pela equação eq.(4.71) com $k = 2$.

Se considerarmos um sistema com três cordas, temos

$$\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{b}_{1,2,3} + U_1 U_2 U_3 \mathbf{x} \tag{4.73}$$

onde $\mathbf{b}_{1,2,3} = U_1(1 - U_2)\mathbf{a}_2 + U_1 U_2 (1 - U)\mathbf{a}_3$.

É facil generalizar este resultado para um sistema de N cordas cósmicas, localizadas em $\mathbf{a}_1$,$\mathbf{a}_2$,$\ldots\mathbf{a}_N$. O vetor $\mathbf{x}^{(N)}$ obtido após o transporte paralelo do vetor $\mathbf{x}$ é dado pela expresão

$$\mathbf{x}^{(N)} = \mathbf{b}_{1,2,\ldots N} + U_1U_2\ldots U_N\mathbf{x} \tag{4.74}$$

onde $\mathbf{b}_{1,2,\ldots,N-1} = U_1(1-U_2)\mathbf{a}_2+U_1U_2(1-U_3)\mathbf{a}_3+\ldots+U_1U_2\ldots U_{N-2}(1-U_N)\mathbf{a}_{N-1}U_{N-1}(1-U_N)\mathbf{a}_N$ e U_N é dado pela equação eq.(4.71) com $k = N$. Então, um vetor $\mathbf{x}$ transportado paralelamente no campo gravitacional gerado por de N cordas quirais adquire uma fase dada por $U_1U_2\cdots U_N$ e do ponto de vista global, este sistema comporta-se como uma simples corda com as condições dadas pela eq.(4.74)

Agora, considere um sistema de duas cordas quirais com uma movendo-se com relação a outra. Considere a corda 1, localizada na origem, e a corda 2, localizada em $\mathbf{a}_2$ movendo-se com relação a primeira com velocidade $\mathbf{v}_2$. Esta corda pode ser vista como uma corda submetida a *boost*. Então, se transportarmos um vetor $\mathbf{x}$ percorrer ao longo do círculo em torno da corda 2, temos

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{a}_2 + L_2U_2L_2^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_2), \tag{4.75}$$

com

$$L_2 = \begin{pmatrix} \cosh\gamma_2 & senh\gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ senh\gamma_2 & \cosh\gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.76}$$

onde γ_2 é o parâmetro de *boost* tal que $\|\mathbf{v}_2\| = tgh\gamma_2$. Este *boost* corresponde a mudança de coordenadas $L\mathbf{x}$ e sob esta mudança o fator de fase U transforma-se como LUL^{-1}. Se transportamos paralelamente o vetor $\mathbf{x}^{(2)}$ ao longo do círculo, em torno da corda 1, o vetor resultante é dado por

$$\mathbf{x}^{(1)} = U_1(\mathbf{a}_2 + L_2U_2L_2^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_2)). \tag{4.77}$$

Então, vemos que se o vetor é paralelamente transportado no campo das cordas 1 e 2, ele adquire a fase dada por $U_1L_2U_2L_2^{-1}$. Este resultado pode ser generalizado no sentido de considerar N-1 cordas cósmicas localizadas em $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_{N-1}$ e a N-ésima com um *boost*. Nesse caso, temos

$$\mathbf{x}^{(N)} = \mathbf{b}_{1,2,\ldots N} + U_1 U_2 \ldots U_{N-1} L_N U_N L_N^{-1} \mathbf{x}. \tag{4.78}$$

Portanto, quando um vetor é paralelamente transportado em torno dessas N cordas quirais, adquire a fase

$$U_1 U_2 \ldots U_{N-1} L_N U_N L_N^{-1}, \tag{4.79}$$

onde L_N é dada pela eq.(4.76) com $\gamma_2 \to \gamma_N$.

Vamos considerar uma simples corda quiral que se comporta como este sistema. Esta corda pode ser considerada como estando submetida a um *boost* dado por

$$L(\phi,\gamma) = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & L_{02} & L_{00} & L_{04} & L_{05} \\ L_{10} & L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{20} & L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{30} & L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{40} & L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} \\ L_{50} & L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{pmatrix}, \tag{4.80}$$

onde

$$\begin{aligned}
L_{00} &= \cosh\gamma, L_{01} = \cos\phi\sinh\gamma, L_{02} = \sin\phi\sinh\gamma,\ L_{03} = 0,\ L_{04} = 0, L_{05} = 0 \\
L_{10} &= \cos\phi\sinh\gamma,\ L_{11} = 1 - \cos^2\phi(1-\cosh\gamma),\ L_{12} = -\cos\phi\sin\phi(1-\cosh\gamma), \\
L_{13} &= 0,\ L_{14} = 0,\ L_{15} = 0, L_{20} = sen\phi\cosh\gamma, L_{21} = -\cos\phi\sin\phi(1-\cosh\gamma), \\
L_{22} &= 1 - sen^2\phi(1-\cosh\gamma), L_{23} = 0,\ L_{24} = 0, L_{25} = 0 \\
L_{30} &= 0, L_{31} = 0, L_{32} = 0, L_{33} = 1,\ L_{34} = 0, L_{35} = 0 \\
L_{40} &= 0,\ L_{41} = 0,\ L_{42} = 0,\ L_{43} = 0, L_{44} = 1, L_{45} = 0 \\
L_{50} &= 0, L_{51} = 0, L_{52} = 0, L_{53} = 0, L_{54} = 0, L_{55} = 1
\end{aligned}$$

A forma $L(\phi,\gamma)$ decore do fato que toda transformação de Lorentz homogênea pode ser decomposta da seguinte maneira

$$L(\phi,\gamma) = R(\phi)L(0,\gamma)S(\phi),$$

onde $R(\phi)$ e $S(\phi)$ são rotações. Assim, se fizermos o transporte paralelo de um vetor $\mathbf{x}$ ao longo das curvas fechadas, em cujos centros localiza-se uma corda temos o seguinte vetor após este processo

$$\mathbf{x}^{N+1} = L\left[\mathbf{a} + UL^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a})\right], \tag{4.81}$$

onde $\mathbf{a}$ é a posição da corda quiral que é equivalente ao sistema de cordas.

Igualando as fases geométricas adquiridas pelo vetor $\mathbf{x}$ em ambos os casos, temos

$$U_1 U_2 \ldots U_{N-1} L_N U_N L_N^{-1} = LUL^{-1}. \tag{4.82}$$

Tomando o traço da eq.(4.82) obtemos o seguinte resultado [86]

$$\begin{aligned} \cos\phi &= \cos\phi_N \cos(\sum_{j=1}^{N-1}\phi_j) - \cosh\gamma_N \sin\phi_N \sin(\sum_{j=1}^{N-1}\phi_j) + \\ & \frac{\sinh^2\gamma_N}{2}(\cos\phi_N - 1)\left[\cos(\sum_{j=1}^{N-1}\phi_j) - 1\right] \end{aligned} \tag{4.83}$$

onde $\phi_j = 8\pi\mu_j$ e $\phi = 8\pi\mu$.

Esta é a relação entre a deficiência angular do espaço-tempo resultante e a deficiência angular do espaço-tempo associado às N cordas quirais. Se consideramos as outras componentes da eq.(4.83), obtemos as equações

$$\begin{aligned} J^t \cos\phi \sinh\gamma &= \cos(\sum_{j=1}^{N-1}\phi_j)\sinh\gamma_N J_N^t, \\ -J^t \sin\phi \sinh\gamma &= \sin(\sum_{j=1}^{N-1}\phi_j)\sinh\gamma_N J_N^t, \\ J^z &= \sum_{j=1}^{N} J_j^z, \\ \cosh\gamma_N J^t &= \sum_{j=1}^{N}\Phi_j, \\ \Phi &= \sum_{j=1}^{N}\Phi_j, \end{aligned} \tag{4.84}$$

que relacionam os parâmetros associados com a corda cósmica quiral, que é equivalente ao sistema N de cordas quirais, com os parâmetros que caracterizam essas cordas. Portanto, do ponto de vista global temos uma equivalência entre uma simple corda cósmica quiral magnética e N cordas quirais magnéticas, sendo que a ultima está submetida um *boost*, desde que as relações dadas pela euações (4.83) e (4.84) sejam satisfeitas.

4.7 Fase de Berry na teoria de Kaluza-Klein.

Nesta seção vamos considerar a fase de Berry associada a uma partícula escalar quântica induzida pelo espaço-tempo de uma corda cósmica quiral magnética, no contexto da teoria pentadimensional de Kaluza-Klein. A dinâmica da partícula quântica escalar neste espaço-tempo, cujo elemento de linha é dado pela eq.(4.52) é dascrita pela seguinte equação Klein-Gordon, com acoplamento mínimo, dado por

$$\{\partial_t^2 - \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) - \frac{1}{\alpha^2 r^2}[\partial_\phi - 4J^t\partial_t - 4J^z\partial_z$$

$$-\frac{\Phi}{2\pi}\partial X]^2 - m^2\}\psi(t,r,\phi,z,X) = 0. \tag{4.85}$$

Agora, vamos proceder de maneira análoga ao que foi feito no capítulo anterior. A solução desta equação pode ser escrita como

$$\psi(t,r,\phi,z,X) = e^{-iE_n t}e^{ik_n z}e^{iQX}\varphi(r,\phi). \tag{4.86}$$

Substituindo a eq.(4.86) na eq.(4.85), obtemos

$$\{\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + \frac{1}{\alpha r^2}\left[\partial_\phi - 4iE_nJ^t - 4ik_nJ^z - \frac{\Phi Q}{2\pi}\right]^2$$

$$+E_n^2 - K_n^2 - Q^2 + m^2\}\varphi(r,\phi) = 0. \tag{4.87}$$

Para este caso, o fator de fase de Dirac é dado por

$$\varphi_n(r,\phi) = \exp\{[-4i(E_nJ^t - k_nJ^z) - iQ\frac{\Phi}{2\pi}]\int_{\phi_0}^{\phi} d\phi\}\varphi_0(r,\phi) \tag{4.88}$$

Considere que a partícula está em uma caixa localizada a uma distancia R_i da corda. Então, a conexão de Berry associada a esta situação é dada por

$$A_n^{I,J} = [-4i(E_nJ^t - k_nJ^z) - iQ\frac{\Phi}{2\pi}]dR^2\delta_{I,J} \tag{4.89}$$

Portanto , a fase geometrica para este problema é

$$\gamma_n(C) = 8\pi[E_nJ^t - K_nJ^z] + Q\Phi \tag{4.90}$$

Notemos que para $J^t = J^z = 0$ obtemos a fase quântica de Berry correspondente ao efeito Aharonov-Bohm eletromagnético [12]; para $J^z = 0$ e $\Phi = 0$ temos a fase geométrica gravitacional de Corrichi e Pierri [16]. Para $\Phi = 0$, reobtemos os resultados do capítulo anterior.

Agora, vamos generalizar os estes resultados para o espaço-tempo gerado por múltiplas cordas cósmicas quirais magnéticas na teoria de Kaluza-Klein, cujo elemento de linha é dado pela eq.(4.63) .

Vamos adotar o mesmo procedimento usado no caso do espaço-tempo da multicorda quiral e calcular o fator de fase de Dirac para uma, duas,...,N cordas. Para uma corda, o método do fator de fase de Dirac nos fornece a seguinte expressão

$$\varphi_n^1(r,\phi) = \exp\{[-4i(E_n J_1^t - k_n J_1^z) - iQ\frac{\Phi_1}{2\pi}]\int_{\phi_0}^{\phi} d\phi\}\varphi_0(r,\phi). \tag{4.91}$$

Agora, transportando o estado $\varphi_n^1(r,\phi)$ em torno da segunda corda, localizada em r_2 , ao longo da curva C_2, temos o seguinte resultado

$$\varphi_n^2(r,\phi) = \exp\{[-4i(E_n J_2^t - k_n J_2^z) - iQ\frac{\Phi_2}{2\pi}]\int_{\phi_0}^{\phi} d\phi\}\varphi^1(r,\phi). \tag{4.92}$$

Substituindo a equação eq.(4.91) em eq.(4.92), obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}\varphi_n^2(r,\phi) \;=\; & \exp\{[-4i(E_n(J_2^t + J_1^t) - k_n(J_2^z + J_1^z) \\ & -iQ\frac{(\Phi_2+\Phi_1)}{2\pi}]\int_{\phi_0}^{\phi} d\phi\}\varphi^1(r,\phi).\end{aligned} \tag{4.93}$$

A generalização deste resultado para N cordas quirais magnéticas localizadas em $r_1, r_2, \ldots, r_N$ segue por analogia com os dos resultados anteriores, e é dado por

$$\varphi_n^{1,2,\ldots N}(r,\phi) = \exp\{[-4i(\sum_{j=1}^{N}(J_j^t E_n - J_j^z k_n)) - \frac{iQ}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\Phi_i]\int_{\phi_0}^{\phi} d\phi\}.\varphi_0(r,\phi). \tag{4.94}$$

Usando o resultado dado pela equação (4.94) e o mesmo procedimento das seções anteriores, segue que

$$\gamma_n(C) = i\oint_C \mathcal{A}_n^{IJ} = \sum_{j=1}^{N}[8\pi(J_j^t E_n - J_j^z k_n) + Q\Phi_j], \tag{4.95}$$

que é a fase geométrica quântica de Berry para uma partícula quântica escalarno espaço-tempo gerado por N cordas quirais magnéticas na da teoria de Kaluza-Klein.

Sumarizando, apresentamos neste capítulo uma breve revisão da teoria penta-dimensional Abeliana de Kaluza-Klein e utilizamos as transformações de holonomias, em diversos espaço-tempos para estudar aspectos globais destes espaço-tempos. No caso do solenóide, notamos que a contribuição da quinta componente é percebida pela holonomia quando circundamos o solenóide pela curva onde $dr = dt = dz = 0$,apesar da holonomia ter a mesma forma que a quadri-dimensional, e no caso do monopolo global estabelecemos a variação angular que é relacionada com a transformação de holonomia. No caso da corda quiral magnética demonstramos que a fase é não-trivial, e que é uma expressão dos efeitos Aharonov-Bohm eletromagnético e gravitacional combinados, que aparece como consequência da unificação de Kaluza-Klein. Para o caso das multicordas quirais magnéticas calculamos a holonomia e obtivemos um resultado análogo, em que os efeitos eletromagnético e gravitacional aparecem simultaneamente e de maneira independente. Apresentamos a caracterização global para o espaço-tempo de multicordas, sendo que uma delas está submetida a um *boost*. Finalizamos este capítulo calculando a fase de Berry associada a uma partícula escalar quântica, induzida pelos espaços-tempos de uma corda cósmica quiral magnética e o de N cordas quirais magnéticas na teoria de Kaluza-Klein.

Capítulo 5

Fatores de Fase no Espaço-Tempo de Kerr-Newman com um defeito Cônico.

5.1 Introdução.

A holonomia linear clássica não é suficiente para distinguir espaços-tempos com e sem rotação [87], e portanto, para se calcular a holonomia correspondente a curvas em espaços-tempos gerados por corpos em rotação é necessário considerar também a holonomia translacional que é propocional ao momento angular da fonte. No caso em que há torção, e que não iremos considerar, faz-se necessário calcular também a holonomia translacional de modo a se obter a expressão correta correspondente à holonomia total. As transformações de holonomia ao longo de uma dada curva não é um invariante por difeomorfismo. No caso particular em que a curva é aberta, o transporte paralelo não só depende da trajétoria, como também das coordenadas dos pontos extremos da curva.

Introduzimos, como nos capítulos anteriores, o formalismo de tétradas e obtemos a holonomia linear por uma integração direta da conexão espinorial. No caso da holonomia translacional, adotamos o conceito de desenvolvimento de curva sobre uma variedade [88]

Neste capítulo calculamos os fatores de fase para diferentes curvas no espaço-tempo de Kerr-Newman com um defeito cônico (corda cósmica). A presença deste altera a isometria original do espaço-tempo, informação esta que podemos extrair da estrutura do fator de fase. Alguns casos particulares como os dos espaços-tempos de Kerr, Lense-Thirring e Schawzchild, serão também considerados. Os resultados obtidos em Kerr corrigem cálculos feitos anteriormente [82], em que não foi considerada na holonomia total a parte translacional e sim somente a parte linear dessa quantidade.

5.2 Buraco negro carregado e com rotação.

As soluções de Schwarzschild e Reissner-Nordstrom foram originalmente obtidas entre 1915-1916, logo após o advento da Relatividade Geral. Elas surgiram cinquenta anos antes da determinação da métrica associada ao espaço-tempo gerado por um corpo com rotação, obtido primeiramente por Kerr. A razão para tal dificuldade é que um corpo girando apresenta duas isometrias: uma axial e outra translacional no tempo. Por outro lado, a simetria esférica deste problema torna os cálculos mais simples. Agora, temos que resolver as equações de Einstein no vazio com mais funções arbitrárias, quando comparadas, por exemplo, com o caso de Schwarzschild.

Inicialmente, a grande contribuição para o entendimento da solução de Kerr veio de trabralhos sobre a classificação das métricas de Einstein (soluções de $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$) via propriedades algébricas do tensor de Weyl. Esta classificação é chamada de Petrov, e é dela que vem que a solução de Kerr que é um tipo algebricamente especial, tipo D. Isto significa que existe um família de geodésicas não-nulas com vetores tangentes k^μ tais que

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\rho[\sigma}\, k_{\lambda]} k^\nu k^\rho &\equiv 0, \\ {}^*C_{\mu\nu\rho[\sigma}\, k_{\lambda]} k^\nu k^\rho &\equiv 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde ${}^*C_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau} C^{\lambda\tau}_{\ \ \rho\sigma}$. Esta condição toma uma forma mais simples se decompusermos $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, em suas componentes espinoriais. Neste caso, a condição torna-se uma restrinção sobre o número de autovalores distintos da forma espinorial de $C_{\mu\nu\rho\sigma}$.

Mais recentemente [89] um método com mais motivação física para gerar a solução de Kerr foi apresentado.

Lembremos que qualquer problema dinâmico para uma dada Hamiltoniana possui a forma equivalente de Hamilton-Jacobi. Tais equivalências são usadas para tratar equações de onda, por exemplo. Este assunto teve grande destaque no início deste século, e muitos trabalhos foram feitos sobre o assunto. Uma maneira equivalente de resolver a equação do movimento de um sistema Hamiltoniano é encontrar a solução da equação de Hamilton-Jacobi

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial x^i}, x^i\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \tag{5.2}$$

onde $H(p_j, x^i)$ é a Hamiltoniana. Embora exista alguma sutileza em definir a Hamiltoniana para geodésicas, elas satisfazem a equação de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} + g^{\mu\nu}\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 0, \tag{5.3}$$

onde λ é um parâmetro afim.

Para resolver o problema geodésico tem-se que encontrar a solução da eq.(5.3) e tentar escrevê-la separando-a da seguinte forma

$$S(x^i, \lambda) = f(\lambda) + g_0(x^0) + g_1(x^1) + \ldots + g_{n-1}(x^{n-1}). \tag{5.4}$$

As métricas para as quais isto é possível e nas quais consegue-se separar as variáveis nas equações de Klein-Gordon ou Schrödinger foram classificadas [90], há algum tempo. Mostrou-se, então, que a métrica de Kerr é uma dessas, e portanto pode-se usa o argumento para métricas nas quais a equação de Hamilton-Jacobi é separável.

Por volta de 1900, mostrou-se que a equação de Hamilton-Jacobi é separável para uma equação do movimento com n-variáveis, se somente se, existem n soluções algebricamente independentes - cada uma correspondendo a uma constante de separação. Além do mais para o problema geodésico essas soluções algebricamente independentes ou são lineares ou quadráticas no momento; $g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\lambda}$. Essas correspondem aos vetores de Killing, ξ_μ ou tensores de Killing do tipo (0,2), $\xi_{\mu\nu}$, e tomam a forma

$$\xi_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \text{constante}, \tag{5.5}$$

ou

$$\xi_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = \text{constante}. \tag{5.6}$$

Um tensor de Killing do tipo $(0, n)$ é um tensor simétrico $\xi_{\mu_1 \ldots \mu_n}$ tal que

$$\nabla_{(\nu}\xi_{\mu_1 \ldots \mu_n)} \equiv 0. \tag{5.7}$$

Obviamente a métrica, $g_{\mu\nu}$, é um tensor de Killing, e o produto simetrizado $\xi^{(1)}_{(\mu_1}\xi^{(2)}_{\mu_2}\ldots\xi^{(n)}_{\mu_n)}$ de n vetores de Killing $\xi^{(1)},..,\xi^{(n)}$, é também um tensor de Killing. Um tensor de Killing automaticamente nos fornece uma solução geodésica

$$\xi_{\mu_1\cdots\mu_n}\frac{dx^{\mu_1}}{d\lambda}\cdots\frac{dx^n}{d\lambda} = \text{constante}. \tag{5.8}$$

Como o buraco negro com rotação tem apenas dois vetores de Killing, $\xi_t = \partial/\partial t$ e $\xi_\phi = \partial/\partial_\phi$ e

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = \text{constante}, \tag{5.9}$$

então existe uma segunda solução, quadrática, a qual pode ser obtida explicitamente por separação de variáveis da equação de Hamilton-Jacobi. De uma forma ou de outra as equações geodésicas de movimento são completamente solúveis em termos das primeiras integrais do movimento.

A generalização da métrica de Kerr para a métrica gerada por uma distribuição esférica de matéria e carregada parece ser direta. Esta métrica é as vezes chamada de Kerr-Newman, com carga q, massa m e momento angular por unidade de massa a e é expressa por

$$\begin{aligned} ds^2 &= \Sigma\left[\Delta^{-1}dr^2 + d\theta^2\right] + (r^2+a^2)sen^2\theta d\phi^2 - dt^2 \\ &+\Sigma^{-1}(2mr - q^2)(asen^2\theta d\phi - dt)^2, \end{aligned} \tag{5.10}$$

onde $\Sigma(r,\theta) \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta$ e $\Delta(r) \equiv r^2 - 2mr + a^2 + q^2$.

Esta métrica é a solução para as equações de Einstein com um campo eletromagnético como fonte. O campo eletromagnético pode ser determinado do seguinte potencial de gauge

$$A_\mu = -\frac{qr}{\Sigma}(1,0,0,-asen^2\theta), \tag{5.11}$$

nas coordenadas (t,r,θ,ϕ). Da expressão para A_μ, encontramos que

$$A_\mu dx^\mu = -\frac{qr}{\Sigma}(dt - asen^2\theta d\phi). \tag{5.12}$$

Portanto, $F_{\mu\nu}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu = \;& q\Sigma^{-2}(r^2 - a^2\cos^2\theta)dr \wedge (dt - asen^2\theta d\phi) \\
&+2\Sigma^{-2}a^2 qrsen\theta\cos\theta dt \wedge d\theta \\
&+2aqr\Sigma^{-2}(r^2+a^2)sen\theta\cos\theta d\theta \wedge d\phi \qquad (5.13)\\
\tfrac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu = \;& q\Sigma^{-2}(r^2 - a^2\cos^2\theta)dr \wedge (dt - asen^2\theta d\phi) \\
&+2aqr\Sigma^{-2}sen\theta\cos\theta d\theta \wedge \left[(r^2+a^2)d\phi - adt\right].
\end{aligned}$$

Para r suficientemente grande, tem-se que

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \sim \;& q/r^2 dr \wedge (dt - asen^2\theta d\phi) + \\
& 2aqr^{-1}sen\theta\cos\theta d\theta \wedge d\phi + O(\tfrac{1}{r^3})
\end{aligned} \qquad (5.14)$$

O termo $q/r^2 dr \wedge dt$ corresponde ao campo Coulombiano gerado pela carga q, e o termo $2aqr^{-1}sen\theta\cos\theta d\theta \wedge d\phi$ corresponde ao momento de dipolo magnético.

É conveniente introduzir dois vetores nulos, l^μ e n^μ, cujas componentes são

$$\begin{aligned}
l^\mu &= \left(\frac{r^2+a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta}\right), \qquad (5.15)\\
n^\mu &= \left(\frac{r^2+a^2}{2\Sigma}, \frac{-\Delta}{2\Sigma}, 0, \frac{a}{2\Sigma}\right).
\end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes relações

$$l^\mu l_\mu = 0,\; n^\mu n_\mu = 0,\; l^\mu l_\mu = -1. \qquad (5.16)$$

Pode-se definir, então, o seguinte tensor de Killing

$$\xi_{\mu\nu} = 2\Sigma l_{(\mu}n_{\nu)} + r^2 g_{\mu\nu}. \qquad (5.17)$$

A métrica dada pela eq.(5.10) é estacionária e axialmente simétrica, e portanto, possui os seguintes vetores de Killing

$$\begin{aligned}
\xi^\mu &= (1,0,0,0), \\
\eta^\mu &= (0,0,0,1).
\end{aligned} \qquad (5.18)$$

Portanto, $\xi_{\mu\nu}$, ξ_μ, η^μ e $g_{\mu\nu}$ nos fornecem um conjunto de soluções independentes necessário para resolver o problema geodésico completamente [91].

Vamos agora exibir algumas propriedades físicas da métrica dada pela equação eq.(5.10). Obviamente para $a = 0$, a métrica reduz-se à solução de Reissner-Nordstrom.

Primeiramente vamos discutir o horizonte de eventos no espaço-tempo de Kerr. A métrica tem uma singularidade aparente quando $\Delta = 0$. O problema recai sobre três casos, distintos: $m^{2\cdot} > a^2$, $m^2 = a^2$ e $m^2 < a^2$. No último caso, não há horizonte de eventos, mas somente uma singularidade em $r = 0$. Uma tal solução é considerada não-física, e é usualmente excluída.

A solução extrema de Kerr, com $m = a$ é uma solução intermediária entre $m^2 < a^2$ e a solução física com $m^{2\cdot} > a^2$. Quando $m^2 = a^2$ existe um horizonte de eventos em $r = m$. Iremos nos concentrar no caso $m^{2\cdot} > a^2$. Aqui existem dois horizontes de eventos um em $r = r_+$ e outro em $r = r_-$, onde

$$r_\pm = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}. \tag{5.19}$$

Temos que provar que r_+ e r_- são horizontes de eventos, e não simplesmente pontos de singularidade da métrica ou da variedade. Primeiramente para provar que eles são horizontes temos que mostrar que são superfícies nulas. Isto significa que uma curva não-tipo-espaço dirigida para o futuro pode atravessá-lo somente em uma direção.

Considere a superfície $r =$ constante, logo $dr = 0$, então, nesta superfície

$$ds^2 = \Sigma d\theta^2 + (r^2 + a^2) sen^2\theta d\phi^2 - dt^2 + \frac{2mr}{\Sigma}(a sen^2\theta d\phi - dt)^2. \tag{5.20}$$

Se $\Delta = 0$, então $r^2 + a^2 = 2mr$ e

$$ds^2 = \Sigma d\theta^2 + \frac{sen^2\theta}{\Sigma}[adt - (r^2 + a^2)d\phi]^2. \tag{5.21}$$

Esta métrica é degenerada, isto é , ela tem um autovalor nulo. De fato, da expresão acima podemos ver diretamente que a forma diagonal de ds^2 na superfície $r = r_\pm$ tem dois autovalores não nulos. Então, $r = r_\pm$ são de fato hipersuperfícies nulas e são assim horizontes de eventos.

O comportamento singular do coeficiente de dr^2 na eq.(5.10)é precisamente o mesmo que o das métricas de Schwarzchild e Reissner-Nordstrom. Daí é claro que podemos resolver o problema da mesma maneira seguindo os observadores em queda livre ou raios de luz, através de $r = r_\pm$. Na verdade, a extensão analítica da solução de Kerr na vizinhaça de $r = r_\pm$ é idêntica à de Reissner-Nordstrom.

A sutileza na extensão analítica de métrica de Kerr ocorre em $r = 0$, e está indiretamente ligada ao fato de ser t uma coordenada mal comportada, e por causa da sua mistura com ϕ, o que nos leva naturalmente a substituí-las.

Considere, então, a mudança de coordenadas para (v, r, θ, ψ) onde [92]

$$\begin{aligned} dv &= dt + (r^2 + a^2)\Delta^{-1}dr, \\ d\psi &= d\phi + a\Delta^{-1}dr. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Neste sistema de coordenadas, a métrica reduz-se a

$$\begin{aligned} ds^2 = \; & \Sigma d\theta^2 - 2asen^2\theta dr d\psi + 2drdv + \\ & \Sigma^{-1}\left[(r^2 + a^2) - \Delta a^2 sen\theta\right] sen^2\theta d\psi^2 - \\ & 4a\Sigma^{-1} mvsen^2\theta d\psi dv - (1 - 2mr\Sigma^{-1})dv.^2 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Notemos que dv e $d\psi$ não são tangentes as trajetórias iniciais de raios nulos, e esta abordagem torna-se difícil por causa da rotação. Na verdade, dt é redefinido para remover a parte singular de dr.

Isto significa que $d\phi$ deve ser redefinida para eliminar outros termos singulares da métrica. Existe uma importante diferença entre o horizontes de eventos de Kerr e os da solução de Reissner-Nordstrom. Considere o vetor de Killing tipo-tempo $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$

$$\xi^\mu \xi_\mu = -\frac{1}{\Sigma}\left[\Delta - a^2 sen^2\theta\right]. \tag{5.24}$$

Sobre horizonte de eventos, $\Delta = 0$, e portanto, $\xi^\mu \xi_\mu = \frac{a^2}{\Sigma} sen^2\theta \geq 0$.

O vetor de Killing é nulo somente temos pólos norte e sul, (que não possuem rotação) e é tipo-espaço no horizonte de eventos. O horizonte de Killing (onde $\xi^\mu \xi_\mu = 0$) é dado por

$$(r - m)^2 = m^2 - a^2 \cos^2\theta, \tag{5.25}$$

e o horizonte de eventos é

$$(r - m)^2 = m^2 - a^2. \tag{5.26}$$

Note que o horizonte de Killing encontra-se fora do horizonte de eventos externo e eles necessariamente se encontram nos pólos. A região entre os horizontes, onde $\xi^\mu \xi_\mu > 0$, é chamada de ergoesfera.

Talvez o caminho mais interesante de escrever a métrica de Kerr seja na forma

$$ds^2 = \Sigma\left[\Delta^{-1}dr^2 + d\theta\right] + \frac{sen^2\theta}{\Sigma}\left[(r^2+a^2)d\phi - adt\right]^2 - \frac{\Delta}{\Sigma}\left[asen^2\theta d\phi - dt\right]^2. \quad (5.27)$$

Observe também que para r suficientemente grande a métrica torna-se

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) - dt^2, \quad (5.28)$$

e assim este sistema no infinito, reduz-se ao espaço regular de Minskowski em um referencial sem rotação. É por esta razão que não usamos outra combinação de $d\phi$ e dt como coordenadas.

Um caso particular interessante da métrica de Kerr é quando $m = 0$, $(a \neq 0)$. Neste caso ela torna-se

$$ds^2 = \left(\frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2+a^2}\right)dr^2 + (r^2 + a^2\cos^2\theta)d\theta^2 + (r^2+a^2)sen^2\theta d\phi^2 - dt^2. \quad (5.29)$$

Além disso, quando $r \to 0$

$$ds^2 \to \cos^2\theta[dr^2 + a^2d\theta^2] + a^2sen^2\theta d\phi^2 - dt^2, \quad (5.30)$$

que parece uma forma estranha. Para entender esta métrica deve-se primeiro notar que para $m = 0$ ela deveria tornar-se plana. O limite $r \to 0$, mostra, então, a natureza bizarra dessas coordenadas. De fato uma rápida análise mostra que elas são esferóidais, com $r =$ constante sendo uma superfície elíptica confocal e $\theta =$ constante corresponde a superfícies hiperbolóidais.

Podemos obter a métrica em coordenadas cartesianas fazendo:

$$\begin{aligned} x = &\ (r^2+a^2)^{1/2}sen\theta sen\phi \\ y = &\ (r^2+a^2)^{1/2}sen\theta\cos\phi \\ z = &\ r\cos\theta. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Então, a métrica de Kerr com $m = 0$ reduz-se a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2. \quad (5.32)$$

Notemos que :

(i) $r\psi - (x^2+y^2+z^2-a^2)r^2 - a^2z^2 = 0$

(ii) $r = 0 \Leftrightarrow z = 0$, $x = asen\theta sen\phi$, $y = asen\theta$, isto é um disco.

Retornando ao caso geral da métrica de Kerr com $m \neq 0$, consideremos o comportamento dessa métrica em $r = 0$. Se $\theta = \pi/2$ (plano equatorial), então $\Sigma = r^2$ e $\Sigma\Delta^{-1} = (1 - 2m/r + a^2/r^2)^{-1}$. Esta solução é muito parecida com a de Reissner-Nordstrom, e existe uma singularidade na curvatura em $r = 0$, $\theta = \pi/2$. Vamos supor, agora, que nos aproximamos de $r = 0$ partindo de um dos pólos, por exemplo $\theta = 0$. Então $\Sigma\Delta^{-1} \to 1$ quando $r \to 0$, e

$$ds^2 \to dr^2 + a^2 d\theta^2 - dt^2. \tag{5.33}$$

A aparente degenerescência na eq.(5.33) é a mesma de $d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2$ em $\theta = 0$. Não existe uma sugestão para remover a singularidade. Na verdade, a métrica só apresenta singularidade em $\Sigma = 0 \Leftrightarrow r = 0$ e $\theta = \pi/2$. O fato de que as coordenadas são colapsadas em $r = 0$ implica que não se pode ver o detalhe da estrutura da singularidade. Isto é a verdade, contudo, e como vimos anteriormente, este problema persiste no caso $m = 0$. A resolução na métrica de Kerr é a mesma, pois existe um anel de singularidade no plano equatorial até a borda do disco definido por $r = 0$. Algumas sugestões podem ser tiradas deste fato , olhando o comportamento da métrica de Kerr e a do espaço-tempo plano no limite quando $r \to 0, (\theta \neq \pi/2)$

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) - dt^2 \to dr^2 - dt^2 \tag{5.34}$$

$$ds^2_{Kerr} \to dr^2 + a^2 d\theta^2 - dt^2, \tag{5.35}$$

em $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. O termo $dr^2 + a^2 d\theta^2$ sugere um disco de raio a.

Exatamente como no espaço-plano no limite ($m = 0$) podemos resolver a estrutura de singularidade de $r = 0$ introduzindo um sistema de coordenadas mais apropriado, quase-cartesiano, definido por

$$\begin{aligned} x + iy &= (r + ia) sen\theta \exp i \int (d\phi + a\Delta^{-1} dr) \qquad (5.36) \\ z &= r\cos\theta \\ \bar{t} &= \int [dt + (r^2 + a^2)\Delta^{-1} dr] - r, \end{aligned}$$

que se reduz às coordenadas cartesianas usuais quando $m = 0$.

A métrica de Kerr reduz-se, então a

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - d\bar{t}^2 + 2mr^3(r^4 + a^2z^2)^{-1} \\ &\quad \times[(r(xdx + ydy) - a(xdy - ydx))(r^2 + a^2)^{-1} + \frac{zdz}{r} + d\bar{t}]^2 \end{aligned} \tag{5.37}$$

onde $r(x, y, z)$ é obtida implicitamente de $r^4 - (x + y^2 + z^2 - a^2)r^2 - a^2z^2 = 0$.

A superfície $r =$ constante, corresponde, neste caso, a uma elipse confocal em um novo sistema de coordenadas construído no plano equatorial. A superfície $r = 0$, agora, inscreve-se sobre o disco $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq a^2$. Neste sistema $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ sempre diverge em $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ (o anel de singularidade). O interior do disco $x^2 + y^2 < a^2$, $z = 0$ é perfeitamente regular.

A questão que surge é o que acontece a um observador que cai através da região regular no centro de um disco.Verifica-se que ele muda de lado continuamente através da superfície, mas como a continuidade analítica corresponde à continuidade da coordenada r para valores negativos, ele passa para uma nova região do espaço-tempo. Nesta nova região $r < 0$ e desta forma não existe horizontes (como $\Delta \neq 0$ para $r < 0$). Podemos pensar em tomar duas cópias do sistema $(x, y, z, \bar{t})$ e chamar a segunda de $(x', y', z', \bar{t}')$, com $r < 0$ e colá-las. Então, diferentes observadores podem migrar entre as regiões $r > 0$ e $r < 0$.

A cópia do espaço-tempo para $r \leq 0$ é bastante estranha, não existe claramente uma singularidade em $r = 0$, exceto para $r < 0$ contudo pequena, pois $d\phi$ é tipo-tempo perto do anel de singularidade. Portanto os círculos $r =$ constante, $\theta =$ constante e $\bar{t} =$ constante são linhas tipo-tempo fechadas, e assim existe uma violação da causalidade.

Finalizaremos esta seção afirmando que:

1) As soluções de Schwarzschild, Reissner-Nordstrom, Kerr e Kerr-Newman são métricas corretas para campos gravitacionais fora de uma distribuição de matéria do tipo apropriada com simetria esférica, simétria esférica e carga, rotação independente do tempo, ou rotação independe do tempo e carga, respectivamente. A métrica não necessariamente tem que corresponder a um buraco negro. Ela poderá ser a métrica exterior para uma estrela ou planeta.

2) Os teoremas *No Hair* [93] estabelecem que a métrica de Kerr é a única solução de

buraco negro estacionário, no vazio, das equações de Einstein. Essencialmente, a métrica de Kerr é a única de família conhecida com dois parâmetros das soluções das equações de Einstein no vazio. No entanto, os teoremas os *No Hair* estabelecem que um buraco negro estácionario não tem *cabelos*, o que significa dizer que o campo gravitacional não tem momentos de multipolo grandes, e sim o momento de monopolo (determinado pela massa) e momento de dipolo (determinado pelo momento angular). Eles também mostraram que um buraco negro estacionário deve, necessariamente, ser axialmente-simétrico, e que a classe de soluções estacionária no vazio axi-simétricas é necessariamente uma família de dois parâmetros. Esses dois parâmetros podem estar relacionados pela condição de contorno da métrica e podem ser interpretadas como a carga e o momento angular do buraco negro. Uma das contribuições interesantes desses teoremas foi a prova de que a interseção de dois horizontes de eventos de um buraco negro estacionário com uma superfície de Cauchy é topologicamente uma 2-esfera. Como a solução de Kerr esgota todos os possíveis valores desses parâmetros somos levados a concluir que a métrica de Kerr é a única solução estacionária das equações de Einstein no vazio correspondente a um buraco negro.

5.3 Holonomias no espaço-tempo de Kerr-Newman contendo uma corda cósmica.

Nesta seção faremos um estudo no espaço-tempo de Kerr-Newman com uma corda cósmica, onde calcularemos a holonomias linear e translacional para diferentes curvas. Particularizaremos os cálculos para os espaço-tempos de Kerr e Lense-Thirring e também para o de Schwazschild.

As soluções das equações de Einstein podem ser facilmente generalizadas [94] de modo a incluir defeitos cônicos. Os espaços-tempos correspondentes podem ser constrídos removendo-se um setor e identificando-se os lados remanescentes, isto é, exigindo-se que o ângulo azimutal em torno do eixo de simetria varie no intervalo $(0, 2\pi b)$, onde o parâmetro b é uma medida da quantidade que foi retirada do espaço-tempo. Dessa forma temos um espaço-tempo com uma corda ao longo do eixo de simetria. Em espaços-tempos dessa natureza vários estudos tem sido feitos para investigar diferentes aspectos da influência da corda cósmica sobre determinados sistemas físicos [95].

O espaço-tempo de Kerr-Newman com um defeito cônico (corda cósmica) nas coordenadas (t, r, θ, ϕ) é descrito pela métrica

$$\begin{aligned} ds^2 = \; & -[1-(2mr-q^2)\Sigma^{-1}]dt^2 - (2mr-q^2)2absen^2\theta dt d\phi + \Delta^{-1}\Sigma dr^2 \\ & +\Sigma d\theta^2 + \Sigma^{-1}[r^2+a^2+(2mr-q^2)a^2sen^2\theta]b^2sen^2\theta d\phi^2, \end{aligned} \tag{5.38}$$

onde $a^2 + q^2 \leq m^2$, m é a massa física do buraco negro, $q =$ carga, $a =$ momento angular por unidade de massa dividido pelo parâmetro de conicidade que é dado por $b = 1 - 4\mu$, μ a densidade linear de massa da corda. As expressões para Δ e Σ são

$$\begin{aligned} \Delta \; & \equiv r^2 - 2mr + a^2 + q^2 \\ \Sigma \; & \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta. \end{aligned}$$

Na presença da corda, a energia medida por um observador no infinito eo parâmetro de massa de Schwarzschild não são idênticos [96]. A massa, bem como o momento angular são alterados por um fator que corresponde ao inverso do parâmetro de conicidade. No caso da carga, o teorema de Gauss nos impõe que ela seja dividida também pelo parâmetro de conicidade. Portanto, os parâmetros m e q que aparecem na eq.(5.38) estão relacionados com as quantidades físicas, massa e carga e com a densidade linear de massa da corda. O parâmetro a não é alterado, pois a modificação na massa e no momento angular se cancelam.

Para calcular o fator de fase (holonomias) para diferentes curvas devemos encontrar as expressões para as conexões tetrádicas. Vamos, então, introduzir um conjunto de quatro vetores $e^{\mu}_{(a)}(a = 0, 1, 2, 3$ é o índice tetrádico), que é ortonormal em cada ponto com respeito à métrica de Minkowski, isto é, $g_{\mu\nu}e^{\mu}_{(a)}e^{\nu}_{(b)} = \eta_{ab} = diag(-1, 1, 1, 1)$. Admitindo que as matrizes $e^{\mu}_{(a)}$ possuam inversas, ou seja, que existem as matrizes $e^{(a)}_{\mu}$ tal que $e^{(a)}_{\mu}e^{\nu}_{(a)} = \delta^{\mu}_{\nu}$ e $e^{(a)}_{\mu}e^{\mu}_{(b)} = \delta^a_b$. Vamos definir a seguinte base tetrádica ω^a(1-formas)

$$\begin{aligned} \omega^0 \; & = \Delta^{1/2}\Sigma^{-1/2}dt - ab\Delta^{1/2}\Sigma^{-1/2}sen^2\theta d\phi, \\ \omega^1 \; & = \Delta^{-1/2}\Sigma^{1/2}dr, \\ \omega^2 \; & = \Sigma^{1/2}d\theta, \\ \omega^3 \; & = -a\Sigma^{-1/2}sen\theta dt + (a^2\Sigma^{-1/2}sen^2\theta + \Sigma^{1/2}sen\theta)bd\phi. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Então, no sistema de coordenadas ($x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta$ e $x^3 = \phi$), o referencial tetrádico definido por $\omega^a = e^{(a)}_\mu dx^\mu$ é dado por

$$
\begin{array}{ll}
e^{(0)}_0 = \Delta^{1/2}\Sigma^{-1/2}, & e^{(2)}_2 = \Sigma^{1/2}, \\
e^{(0)}_3 = -ab\Delta^{1/2}\Sigma^{-1/2}sen^2\theta, & e^{(3)}_0 = -a\Sigma^{-1/2}sen\theta, \\
e^{(1)}_1 = \Delta^{-1/2}\Sigma^{1/2}, & e^{(3)}_3 = -a\Sigma^{-1/2}sen^2\theta + \Sigma^{1/2}sen\theta.
\end{array}
$$

Usando as equações de estrutura de Cartan $d\omega^a = e^a_{\mu\|\nu}dx^\nu \wedge dx^\mu = -\omega^a_b \wedge \omega^b$, obtemos as seguintes expressões para as conexões tetrádicas

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{\mu 1}dx^\mu &= -\{m\Sigma^{-2}(r^2 - a^2\cos^2\theta - m^{-1}rq^2)dt \\
&\quad +\Sigma^{-2}absen^2\theta[(m-r)\Sigma - 2mr^2 + rq^2]d\phi\} = \Gamma^1_{\mu 0}dx^\mu, \\
\Gamma^0_{\mu 2}dx^\mu &= \Sigma^{-1}ab\Delta^{1/2}\cos\theta sen\theta d\phi = \Gamma^2_{\mu 0}dx^\mu, \\
\Gamma^0_{\mu 3}dx^\mu &= a\Delta^{-1/2}\Sigma^{-1}rsen\theta dr - a\Delta^{1/2}\Sigma^{-1}\cos\theta d\theta = \Gamma^3_{\mu 0}dx^\mu, \\
\Gamma^1_{\mu 2}dx^\mu &= -a^2\Delta^{-1/2}\Sigma^{-1}\cos\theta sen\theta dr - \tfrac{\Delta^{1/2}}{\Sigma}rd\theta = -\Gamma^2_{\mu 1}dx^\mu, \\
\Gamma^1_{\mu 3}dx^\mu &= -b\Delta^{1/2}\Sigma^{-1}rsen\theta d\phi = -\Gamma^3_{\mu 1}dx^\mu, \\
\Gamma^2_{\mu 3}dx^\mu &= a\cos\theta\Sigma^{-2}(2mr - q^2)dt - \\
&\quad b\cos\theta\Sigma^{-2}[\Sigma(r^2+a^2) + (2mr - q^2)a^2sen^2\theta]d\phi = -\Gamma^3_{\mu 2}dx^\mu.
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

Primeiramente vamos calcular a holonomia linear, dada pela eq.(1.89), no caso em que o contorno é um círculo com centro na origem com valores fixos de r, θ e t. Neste caso,

$$\Gamma_\mu dx^\mu = \Gamma_\phi d\phi \tag{5.41}$$

($dr = d\theta = dt = 0$).

Da eq.(5.40) obtemos

$$\Gamma_\phi = \begin{pmatrix} 0 & A & B & 0 \\ A & 0 & 0 & -C \\ B & 0 & 0 & -D \\ 0 & C & D & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.42}$$

onde

$A = -ab\Sigma^{-2}sen^2\theta\,[\Sigma(m-r) - 2mr^2 + rq^2]$,

$B = ab\Delta^{1/2}\Sigma^{-1}\cos\theta sen\theta$,

$C = b\Delta^{1/2}\Sigma^{-1}rsen\theta$,

$D = b\Sigma^{-2}\cos\theta\,[\Sigma(r^2+a^2) + (2mr - q^2)a^2sen^2\theta]$.

Como Γ_ϕ não depende de ϕ, então, da equação (1.89) temos

$$U(c) = P\exp\left[\int_{\phi_1}^{\phi_2} \Gamma_\phi d\phi\right] = \exp\left[\Gamma_\phi(\phi_2 - \phi_1)\right]. \tag{5.43}$$

Em particular para $\theta = \pi/2$ obtemos

$$\Gamma_\phi = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & -C \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.44}$$

onde

$$A = \frac{ab}{r}[1 + m/r - q^2/r^2] \text{ e } C = \frac{b\Delta^{1/2}}{r} \tag{5.45}$$

Notemos que, para, $a = 0$, $r = 2m$ (raio de Schwarzschild) e $q = 0$, temos $\Gamma_\phi = 0$ e $U \equiv$Identidade. De eq.(5.44) e eq.(5.45) podemos verificar que

$$(\Gamma_\phi)^3 = -(C^2 - A^2)\Gamma_\phi = -b^2r^{-2}\left[\Delta - a^2(1 + m/r - q^2/r^2)^2\right]\Gamma_\phi.$$

Seja

$$A_\phi = \frac{b}{r}\left[\Delta - a^2(1 + m/r - q^2/r^2)^2\right]^{1/2}. \tag{5.46}$$

Assim,

$$\begin{aligned} U &= \exp[\Gamma_\phi(\phi_2 - \phi_1)] \\ &= I + \frac{\Gamma_\phi}{A_\phi} sen[A_\phi(\phi_2 - \phi_1)] + \frac{\Gamma_\phi^2}{A_\phi^2}(1 - \cos[A_\phi(\phi_2 - \phi_1)]). \end{aligned} \tag{5.47}$$

Tomando o círculo equatorial C, e portanto $\phi_2 = 2\pi$ e $\phi_1 = 0$, a holonomia linear pode ser colocada na seguinte forma matricial

$$U_L = \begin{pmatrix} 1 + \frac{A^2}{A_\phi^2}(1-\xi) & \frac{A}{A_\phi}\zeta & 0 & -\frac{AC}{A_\phi^2}(1-\xi) \\ \frac{A}{A_\phi}\zeta & \xi & 0 & \frac{-C}{A_\phi}\zeta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{AC}{A_\phi^2}(1-\xi) & \frac{C}{A_\phi}\zeta & 0 & 1 - \frac{C^2}{A_\phi^2}(1-\xi) \end{pmatrix}, \tag{5.48}$$

onde $\xi = \cos(2\pi A_\phi)$ e $\zeta = sen(2\pi A_\phi)$.

Tomando o traço da eq.(5.10), obtemos o *loop* de Wilson gravitacional

$$W(C) = Tr(U_L) = Tr\exp(2\pi\Gamma_\phi) = 2(1+\cos(2\pi A_\phi)) \tag{5.49}$$

Se temos um sistema que apresenta torção, a qual contribui na holonomia total, esta contribuição é chamada de holonomia translacional . A holonomia translacional tem a mesma forma da equação eq.(1.88) onde o tensor de Riemann é trocado pelo tensor das torções [87], isto é,

$$U_T(C) = P(\exp\iint_D T^a_{bc}dx^b dx^c). \tag{5.50}$$

No entanto, esta expressão nem sempre é válida, por exemplo, no caso de Kerr-Newman o sistema não apresenta torção, no entanto, apresenta uma holonomia translacional devido o momento angular a qual se faz sentir pelo densenvolvimento da curva C, (caminho equatorial), em M (variedade Riemaniana). O desenvolvimento de curva [88] é um caso particular de transporte paralelo em fibrados, onde as fibras são os espaços tangentes afins. A motivação para se definir o desenvolvimento de curvas é bastante simples. Necessitamos isolar a influência local de geometria de uma variedade da aceleração de uma curva. A definição dada por Petti [88] é a seguinte:

Dada uma curva $C : [0,1] \to M$, o desenvolvimento da curva sobre a variedade plana M' é a curva $C' : [0,1] \to M'$ definida por

$$D'_u u' = A'(s)L\left[A(s)\right]^{-1} D_u u, \tag{5.51}$$

com $C'(0) = P'$ e $u'(0) = Lu(0)$, onde $P \in M$, $P' \in M'$. Sendo $A : T_{C(0)}M \to T_{C(s)}M$ o transporte paralelo ao longo da curva C, $L : T_pM \to T_{p'}M'$ uma isometria, e u e u' vetores tangentes de C e $C\ '$, respectivamente. D' e D são as derivadas covariantes em M' e M.

Vamos, então calcular a holonomia translacional, considerando o contorno equatorial $C(s) = (0, r, \pi/2, 2\pi s)$ para $s \in [0,1]$. O desenvolvimento de C no espaço plano de Minskowski M' nas coordenadas (t', x', y', z'), iniciando em $P' = (t'_0, x'_0, y'_0, z'_0)$, é

$$C'(s) = [t'(s), x'(s), y'(s), z'(s)], \tag{5.52}$$

onde

$$
\begin{aligned}
t'(s) = &\quad k_1 \cdot s + t'_0, \\
x'(s) = &\quad k_2 \cdot [\cos(2\pi v s) - 1] + x'_{0,} \\
y'(s) = &\quad k_2 \cdot sen(2\pi v s) + y'_0, \\
z'(s) = &\quad z'_0,
\end{aligned}
,
$$

sendo

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \frac{2\pi a}{v}\left[2m - \frac{q^2}{r} + (1 + \frac{a^2}{r^2})(m - \frac{q^2}{r})\right], \\
k_2 &= \frac{\Delta^{1/2}}{r v^2}\{r + \left[\frac{a^2}{r^2}(-m + \frac{q^2}{r}\right]\},
\end{aligned}
\tag{5.53}
$$

com

$$
\begin{aligned}
v = &\quad (c_2^2 - c_1^2)^{1/2} = A_\phi \\
c_1 = &\quad -\tfrac{a}{r^2}(r + m - q^2/r), \\
c_2 = &\quad \Delta^{1/2}/r.
\end{aligned}
\tag{5.54}
$$

A holonomia translacional [88] associada à curva C é

$$
U_T(C) = C'(1) - C'(0) = k_1 \tag{5.55}
$$

Substituindo as eqs.(5.53) e (5.54) em (5.55) e tomando o limite $1/r^2 \to 0$ obtemos que $U_T(C) = 6\pi ma/r$.

Logo a holonomia total $U = U_L + U_T$ no limite $1/r^2 \to 0$ será

$$
U = \begin{pmatrix}
1 + \mathbb{A} + 6\pi ma/r & \mathbb{B}\zeta & 0 & -\mathbb{C} \\
\mathbb{B}\zeta & \xi + 6\pi ma/r & 0 & -\mathbb{D}\zeta \\
0 & 0 & 1 + 6\pi ma/r & 0 \\
\mathbb{C} & \mathbb{D}\zeta & 0 & 1 - \mathbb{E} + 6\pi ma/r
\end{pmatrix}, \tag{5.56}
$$

onde

$$
\mathbb{A} = \frac{a^2[1 + 2m/r]}{[\Delta - a^2(1 + 2m/r)]}(1 - \xi);\ \mathbb{B} = \frac{a[1 + 2m/r]}{[\Delta - a^2(1 + 2m/r)]^{1/2}};
$$

$$
\mathbb{C} = \frac{a[1 + 2mr]\Delta^{1/2}}{[\Delta - a^2(1 + 2m/r)]}(1 - \xi); \mathbb{D} = \frac{\Delta^{1/2}}{[\Delta - a^2(1 + 2m/r)]^{1/2}};
$$

$$
\text{e } \mathbb{E} = \frac{\Delta}{[\Delta - a^2(1 + 2m/r)]}(1 - \xi).
$$

Este resultado completa e generaliza os cálculos feitos em [82], das holonomias para várias curvas no espaço-tempo de Kerr e que não considera a contribuição advinda da holonomia translacional. No caso particular em que $a^2 \to 0$, temos o universo de Lense-Thirring com defeito e neste caso a holonomia total torna-se

$$U(C) = \begin{pmatrix} 1+6\pi ma/r & \mathbb{F}\zeta & 0 & -\mathbb{F}(1-\xi) \\ \mathbb{F}\zeta & \xi+6\pi ma/r & 0 & -\zeta \\ 0 & 0 & 1+6\pi ma/r & 0 \\ \mathbb{F}(1-\xi) & \zeta & 0 & \xi+6\pi ma/r \end{pmatrix}, \tag{5.57}$$

onde $\mathbb{F} = a[1+m/r](r^2-2mr+q^2)^{-1/2}$ e $A_\phi = br^{-1}[1-2m/r]^{1/2}$.

Para o caso da métrica de Schwarzschild ($a=0$, $b=1$ e $q=0$) temos que $\mathbb{F}=0$ e a holonomia total para círculos situados em planos paralelos ao equatorial é a holonomia linear, que é dada por

$$U(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 & -\zeta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 & \xi \end{pmatrix} \tag{5.58}$$

com $A_\phi = b[1-2m/r]^{1/2}$.

As expressões para as holonomias correspondentes às demais curvas podem ser obtidas dos resultados de Kerr-Newman fazendo-se $a=0$ e $q=0$, como veremos mais adiante.

Notemos que o *loop* de Wilson dado pela eq.(1.92) é $W(C) = 2(1+\xi) = 2(1+\cos 2\pi A_\phi)$, e que para $A_\phi = 0$, isto implica que $r = 2m$ (raio de Scwarzschild) o *loop* de Wilson é $W(C) = 4$. Esta é uma condição nesessária mas não suficiente para o espaço seja plano. Mas a curvatura não é nula como sabemos. A curvatura está asociada com a derivada do *loop* de Wilson através das equações de Mandelstam [9]

$$\frac{\partial W}{\partial x^\mu} = \oint ds Tr\{R_{\nu\mu}U\}\frac{dy^\mu}{ds}. \tag{5.59}$$

Como os tensores de curvatura são

$$R^a_{13b} = bmsen\theta r^{-2}(1 - 2m/r)^{-1/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$R^{a}_{23b} = 2mbsen\theta r^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

podemos verificar que

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial r} &= \int_0^{2\pi} d\phi Tr(R_{13}U) = 2\pi Tr(R_{13}U), \\ \frac{\partial W}{\partial \theta} &= \int_0^{2\pi} d\phi Tr(R_{23}U) = 2\pi Tr(R_{23}U), \end{aligned}$$

e portanto $W(C)$ obdece a eq.(5.59), que é conhecida como relação de Mandelstam.

Para evidenciar que a holonomia depende fortemente do caminho tomado, vamos agora computar a holonomia para uma curva C onde $r = r(s)$ e $\theta = \theta(s)$, está contida no plano meridiano. Neste caso, temos que

$$\Gamma_s ds = \left(\Gamma_\theta \frac{d\theta}{ds} + \Gamma_r \frac{dr}{ds}\right) ds. \tag{5.60}$$

Da eq.(5.40) obtemos

$$\Gamma_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.61}$$

onde

$$\begin{aligned} f &= \frac{arsen\theta}{\Delta^{1/2}\Sigma}\frac{dr}{ds} - \frac{a\Delta^{1/2}}{\Sigma}\cos\theta\frac{d\theta}{ds}\ , \\ g &= \frac{-a^2}{\Delta^{1/2}\Sigma}\cos\theta sen\theta\frac{dr}{ds} - \frac{\Delta^{1/2}}{\Sigma}r\frac{d\theta}{ds}. \end{aligned}$$

Então,

$$P\exp[\int \Gamma_s ds] = \exp[\Gamma_s ds], \tag{5.62}$$

pois as matrizes Γ_s comutam para valores distintos de s. Em particular para a métrica de Schwarzschild, devido à simetria esférica, a propriedade dada pela eq.(5.62) vale para qualquer curva contida em um plano arbitrário. Vamos considerar o caso de um círculo meridiano $\frac{dr}{ds} = 0$ e $\frac{d\theta}{ds} = 1$. Então, temos

$$\Gamma_s = \Gamma_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.63}$$

onde $f = -a\Delta^{1/2}\cos\theta/\Sigma$ e $g = -\Delta^{-1/2}r/\Sigma$

E portanto, obtemos

$$\exp[\int \Gamma_\theta d\theta] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \exp(\alpha) \\ 0 & 0 & \exp(\beta) & 0 \\ 0 & \exp(-\beta) & 0 & 0 \\ \exp(\alpha) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.64}$$

onde $\alpha = \int_0^{2\pi} f d\theta$ e $\beta = \int_0^{2\pi} g d\theta$.

Fazendo integração por partes determinamos que

$$U(C) = \exp[\int_0^{2\pi} \Gamma_\theta d\theta] = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & f' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & f' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

onde $f' = \exp[2\pi\Delta^{1/2}(r^2 + a^2)^{-1/2}]$.

Como a matriz U acima tem a propriedade $U^3 = -U$, assim a holonomia linear que corresponde, neste caso à total, pois a translacional é nula [88], é dada por

$$U_L = I + Usen(2\pi A_\theta) + U^2(1 - \cos 2\pi A_\theta), \tag{5.65}$$

onde $A_\theta = \Delta^{1/2}/\sqrt{r^2 + a^2}$.

Assim $W(C) = Tr(U) = 2(1 + \cos 2\pi A_\theta)$. Notemos que para $a = 0, q = 0$ e $b = 1$ temos $A_\phi = A_\theta$.

Vamos fazer mais um cálculo de fator de fase considerando o caminho C como sendo o segmento radial, isto é, $\frac{d\theta}{ds} = 0$ e $\frac{dr}{ds} = 1$. Da eq.(5.40) temos que

$$\Gamma_s ds = \Gamma_r dr$$

e daí usando a eq.(5.60), obtemos

$$\Gamma_r = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{pmatrix}, \tag{5.66}$$

onde agora, $f = arsen\theta\Delta^{-1/2}\Sigma^{-1}$ e $g = a^2\Delta^{-1/2}\Sigma^{-1}\cos\theta sen\theta$. Portanto, o fator de fase para este caso é dado por

$$\begin{aligned} \exp[\int_{r_1}^{r_2}\Gamma_r dr] &= \begin{pmatrix} \exp[\int f dr] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp[-\int g dr] & 0 \\ 0 & \exp[\int g dr] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp[\int f dr] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \exp[f'] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp[-g'] & 0 \\ 0 & \exp[g'] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp[f'] \end{pmatrix} = U(C), \end{aligned} \tag{5.67}$$

onde $f' = asen\theta\int_{r_1}^{r_2} r\Delta^{-1/2}\Sigma^{-1}dr$ e $g' = a^2\cos\theta sen\theta\int_{r_1}^{r_2}\Delta^{-1/2}\Sigma^{-1}dr$.

Observa-se que para o caso em $b = 1$ e $a = 0$, espaço-tempo de Schwarzschild, temos $\Gamma_r = 0$ e daí, o fator de fase é trivial, para a curva considerada.

Para finalizar vamos fazer o cálculo do fator de fase para uma translação no tempo, isto é, $dr = d\theta = d\phi = 0$. Obtém-se, então, que

$$\Gamma_\mu dx^\mu = \Gamma_t dt.$$

Da eq.(5.40) temos

$$\begin{aligned} \Gamma_t = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} &= \alpha\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \alpha\Gamma_\alpha + \beta\Gamma_\beta \end{aligned} \tag{5.68}$$

onde $\alpha = -m\Sigma^{-2}\left[r^2 - a^2\cos^2\theta - rq^2/m\right]$ e $\beta = a\cos\theta^{-2}(2mr - q^2)\Sigma^{-2}$.

Como as matrizes Γ_α e Γ_β comutam, então

$$\begin{aligned} U(C) &= P\exp\left[\int_0^\tau \Gamma_t dt\right] \\ &= \exp\left[(\alpha\Gamma_\mu + \beta\Gamma_\beta)\tau\right] \\ &= \exp\left[\alpha\Gamma_\alpha\tau\right]\exp\left[\beta\Gamma_\beta\tau\right]. \end{aligned} \tag{5.69}$$

E como $(\Gamma_\alpha)^3 = \Gamma_\alpha$ e $(\Gamma_\beta)^3 = -\Gamma_\beta$, concluímos que o fator de fase para este caminho é

$$U = \Gamma_\alpha senh\alpha\tau + \Gamma_\beta sen\beta\tau + \Gamma_\alpha^2\cosh\alpha\tau - \Gamma_\beta^2\cos\beta\tau. \tag{5.70}$$

Se considerarmos o caso Schwarzschild e o caminho fechado formado por dois segmentos radiais(unitários) e dois segmentos temporais de raios r_1 e r_2, respectivamente, obtemos a holonomia

$$U = I + \Gamma_\alpha senh\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)m\tau + \Gamma_\alpha^2\left[\cosh\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)m\tau - 1\right]. \tag{5.71}$$

Deste resultado podemos calcular o *loop* de Wilson que é dado por

$$W(C) = 2\left[1 + \cosh\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)m\tau\right]. \tag{5.72}$$

Usando todos esses resultados correspondentes às holonomias no espaço-tempo de Schwarzschild, podemos escrever uma expressão geral para $U(C)$, que se escreve como

$$U(C) = P\exp\left(\frac{i}{2}\int_C \Gamma_\mu^{ab}(x)J_{ab}dx^\mu\right) \tag{5.73}$$

onde J_{ab} são os geradores do grupo de Lorentz $SO(3,1)$ e Γ_μ^{ab} são as conexões tetrádicas. Dos resultados obtidos neste caso, podemos concluir que as transformações holonômicas para o espaço-tempo estático, esfericamente simétrico em $(3+1)$-dimensòes, é um homomorfismo que mapeia a classe de homotopia de todas as curvas considerada sem rotações e *boosts* em $SO(3,1)$. Como os vetores ordinários estão no espaço-tempo tangente à variedade e para espaços-tempo estáticos não há translações no tempo, então as transformações que atuam nesse espaço são as transformções de Lorentz e portanto, as matrizes de transportes paralelo (fatores de fase) são elementos do grupo de Lorentz. Em geral, os $J_{ab's}$ geram a representação do grupo de Lorentz que atuam nas quantidades transportadas que podem ser vetores ou espinores. No caso de espinores, ao invés do grupo $SO(3,1)$ temos o grupo de cobertura deste grupo, e portanto, quando temos férmions os fatores de fase são elementos do grupo de cobertura do grupo de Lorentz.

Neste capítulo, apresentamos algumas considerações sobre a obtenção da métrica de Kerr, que é a única solução estacionária das equações de Einstein no vazio correspondente a um buraco negro com rotação. Fizemos cálculos dos fatores de fase para diferentes curvas no espaço-tempo de Kerr-Newman contendo uma corda cósmica. E no caso particular de Kerr, com a curva sendo o círculo equatorial, fizemos uma correção no cálculo da holonomia, pois acrescentamos a contribuição da parte translacional da holonomia. Verificamos que as expressões para as holonomias para o espaço-tempo de Schwarzschild podem ser obtidas dos resultados de Kerr-Newman fazendo-se $a = 0$ e $q = 0$. Finalmente, exprimimos de maneira suscinta a holonomia para um caminho qualquer no espaço-tempo de Schwarzschild, como um elemento do grupo de Lorentz $SO(3,1)$.

Conclusões

Calculamos a transformação de holonomia para curvas no plano perpendicular ao cilindro de matéria com rotação, emostramos que ela depende do momento angular da fonte, apesar desta grandeza não afetar o tensor de curvatura, na aproximação de campo fraco. Esta dependência do fator de fase com uma grandeza que não afeta a curvatura da região acessível a partícula denominamos de efeito Aharonov-Bohm gravitacional generalizado.

Encontramos uma solução para as equações de Einstein que corresponde a uma generalização do monopolo global, de Barriola e Vilenkin [34], e então, usando as variáveis de contorno calculamos o fator de fase para várias curvas no espaço-tempo do monopolo, e mostramos que o *loop* de Wilson gravitacional satisfaz à relação de Mandelstam. Calculamos ainda, para curvas no espaços-tempos de uma corda quiral e no da para multicorda quiral, o fator de fase para diversas curvas. Em seguida, apresentamos a caracterização global para o espaço-tempo de multicordas quirais paralelas, admitindo que uma delas posui uma velocidade em relação as demais. Mostramos, então, que do ponto de vista global o espaço-tempo de multicordas quirais equivale ao de uma única corda quiral com relações apropriadas entre os parâmetros (massa, momento angular e rotação), os quais caracterizam o sistema de cordas e o que lhe equivale. Esta abordagem nos fornece uma maneira de entender o espaço-tempo de N cordas, do ponto de vista dos aspectos globais.

Calculamos a fase de Berry para uma partícula escalar no espaço-tempo de uma corda cósmica quiral que é uma generalização do trabalho de Corichi e Pierri e calculamos, também, a fase de Berry para os espaços-tempos das multicordas quirais, do cilindro com rotação e em um universo isótropico e mostramos como esta fase depende das características desses espaços-tempos. Apresentamos também a fase geométrica em alguns modelos cosmológicos espacialmente homogêneos.

No contexto da teoria de Kaluza-Klein, verificamos que para o caso do solenóide, a contribuição da quinta componente é percebida pela holonomia quando circundamos o solenóide pela curva onde $dr = dt = dz = 0$,apesar da holonomia ter a mesma forma que a quadri-dimensional. No monopolo global, calculamos as transformações de holonomias, e mostramos que satisfazem às relações de Mandelstam. No caso da corda quiral magnética, demonstramos que a fase é não-trivial, e que é uma expressão dos efeitos Aharonov-Bohm eletromagnético e gravitacional combinados, que aparece como consequência da unificação de Kaluza-Klein.

Para o caso das multicordas quirais magnéticas calculamos a holonomia e obtivemos um resultado análogo, em que os efeitos eletromagnético e gravitacional aparecem simultaneamente e de maneira independente. E apresentamos a caracterização global para o espaço-tempo de multicordas, sendo que uma delas está submetida a um *boost*. Calculamos ainda, a fase de Berry associada a uma partícula escalar quântica, induzida pelos espaços-tempos de uma corda cósmica quiral magnética e o de N cordas quirais magnéticas na teoria de Kaluza-Klein, após a generalização da solução no contexto da teoria de Einstein para a teoria pentadimensional de Kaluza-Klein.

Calculamos os fatores de fase para diferentes curvas no espaço-tempo de Kerr-Newman contendo uma corda cósmica. E no caso particular de Kerr, com a curva sendo o círculo equatorial, fizemos uma correção no cálculo da holonomia, pois acrescentamos a contribuição da parte translacional da holonomia, e exprimimos de maneira suscinta a holonomia para um caminho qualquer no espaço-tempo de Schwarzschild, como um elemento do grupo de Lorentz $SO(3,1)$.

Bibliografia

[1] E. Schrödinger, Phys. **12,** 13 (1922). Para uma descrição ver C. N. Yang, *Complex Phases in Quantum Mechanics,* Proceednigs and Int. Symp. Foundations of Quantum Mechanics, 181 (1986).

[2] H. Weyl, Ann. Phys.Leipzig **59,**101 (1919).

[3] Y. Aharonov e D. Bohm, Phys. Rev. **D115**, 485 (1959); C.N. Yang ,Phys. Lett. **33**, 445 (1974).

[4] T. T. Wu e C. N. Yang, Phys. Rev. **D12**, 3843 (1975); Phys. Rev. **D14**, 437 (1976).

[5] G.'tHooft, Nucl. Phus. **B138**, 1 (1978); S. Mandelstam, Phys. Rev. **D19**, 2391 (1979).

[6] Y. Nambu, Phys. Lett. **B80**, 372 (1979); J. L. Gervais e A. Neven, ibid. **80B**, 255 (1979); A. M. Polyakov, ibid **82B**, 247 (1979); D. Foerster, ibid. **87B**, 87 (1979); S. Sakita, Phys. Rev. **D21**, 1067 (1980).

[7] Y. M. Makeenko e A. A Migdal, Phys. Lett., **B88**, 135 (1979); A. A. Migdal, Ann. Phys. **126**, 274 (1980).

[8] C. N. Yang, Phys. Rev. Lett. **33**, 445 (1974).

[9] S. Mandelstam, Ann. Phys. **19**, 1 (1962); Phys. Rev. **175**, 1604 (1968).

[10] M. I. Menskii, Lett. Math. Phys. **2**, 175 (1978).

[11] N. A. Voronov e Y. M. Makeenko, Sov. J. Nusl. Phys., **36**, 444 (1982).

[12] M. V. Berry, Proc. R. Soc. London, A **392**, 45 (1984).

[13] B. Simon, Phys. Rev. Lett. **51**, 2031 (1983).

[14] F. Wilczek e A. Zee, Phys. Rev. Lett. **52**, 2281 (1984).

[15] Y. Aharonov e J. Anandan, Phys. Rev. Lett. **58,** 1593 (1987).

[16] A. Corichi e M. Pierri, Phys. Rev. **D51**, 5870 (1995).

[17] Y. Q. Cai and G. Papini, Mod. Phys. Lett. **A4**, 1143 (1989); Class. Quant. Grav. **7,** 269 (1990).

[18] J. G. de Assis, C. Furtado e V.B. Bezerra, Phys. Rev. **D62**, 04500 3 (2000).

[19] Ali. Mostafazadeh, Cosmological Adiabatic Geometric Phase of a Scalar Field in a Bianchi Spacetime, Procerding of 9-th Regional conference on Mathematical Physics, In Istambul, August 1999.

[20] L. O′raifeartaingh et al, Comments Nucl. Part. Phys. **20**, 15 (1991).

[21] S. Solarin e I. Popesca, Rev. Math. Phys. **57**, 339 (1985).

[22] S. Azevedo e F. Moraes, Phys. Lett. **A246**, 374 (1985).

[23] V. I. Osipov, Phys. Lett. **A175**, 65 (1993); ibid **164**, 327 (1992).

[24] L. H. Ford e A. Vilenkin, J. Phys. **A14**, 2353 (1981).

[25] V. B. Bezerra, Phys. Rev. **D35**, 2031 (1987).

[26] V.P. Frolov, V. D. Skarzhinsky e R. W. John, II Nuovo Cim., **99B**, 67 (1987).

[27] Nakahara, Mikio. Geometry, Topology and Physics(Graduate Student Seris in Physics Great Britain, 1992)-S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundation of Differential Geometry (Wiley, New York, 1963) Vol I and II.-Carmo, Manfredo Perdigão do, Geometria Riemanniana. (I.M.P.A, Rio, Brasil. 1979)-O 'Nell, Barret, Elementos de Geometria Diferencial. (Limusa-Wiley, Mexico, 1972)-Lima, Elon Lages. Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento.(I.M.P.A. Rio, Brasil, 1993)-Croom, Fred H. Basic Concepts of Algebraic Topology. (Undergranduate Texts in

Mathematics, Spring-Verlag, N. York, 1978)-C. Von Westenholz, Differencial Forms in Mathematical Physics(North Holland, Amsterdam, 1981)

[28] C. N. Yang e R. L. Mills, Phys. Rev. **96**, 191(1954).

[29] R. Utiyama, Phys. Rev. **101** 1597 (1956).

[30] M. Christiane, Lett. in Math. Phys. **1**, 155-163 (1976).

[31] C.H. Oh, C.P Soo e C. H. Lai, J. Math. Phys. **29,** 1154 (1988).

[32] R. P. Feynman e A. R. Hibbs, Quantum Mechanic and Path Integrals(McGraw-Hill, N. York, 1965).

[33] T. T. Wu e C. N. Yang, Phys. Rev. **D12**, 3843 (1975); Phys. Rev. **D14**, 437 (1976);C. G. Bollini, J. J. Giambiagi e J. Tiomno, Rev. Bras. Phys. **9**, 22(1979), Phys. Lett. **B83**, 185 (1979); C. A. Romero Filho, "Cópias em teorias de gauge " dissertação de mestrado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro (1980).

[34] M. Barriola e A. Vilenkin, Phys. Rev. Lett. **63**, 341 (1984).

[35] G. Mondanese, Phys. Rev. **D49**, 12 (1994).

[36] J. K. Lawrence, D. Leiter e G. Szamosi, Il Nuovo Cim. **17B**, 113 (1973); V.B. Bezerra, J. Marh. Phys. **30,** 2895 (1989).

[37] J. S. Dowker, Nuovo Cim. **B 52**, 129 (1967); L. H. Ford e A. Vilenkin, J. Phys. A **14**, 2353 (1981); C. J.C. Burges, Phys. Rev. **D32**, 504 (1985); V. B. Bezerra, Phys. Rev. **D35**, 2031 (1987), Class. Quantum Grav. **8**, 1939 (1991); B. Jensen e J. Kucera, J. Math. Phys., **34**, 4975 (1993); Vu B. Ho e M. J. Morgan Aust. J. Phys. **47**, 245 (1994).

[38] D. V. Gal'tsov e P. S. Letelier, Phys. Rev. **D47**, 4273 (1993).

[39] V. B. Bezerra e P. S. Letelier, J. Math. Phys., **37**, 6271 (1996).

[40] A. Vilenkin, Phys. Rev. **D**23, 852 (1982); B. Linet, Gen. Rel. Grav. **17**, 1109 (!985); W. A. Hiscook, Phys. Rev. **D31**, 3288 (1985); J. R. Gott III, Astrophys. J. **288**, 422 (1985).

[41] P.O. Mazur, Phys. Rev. Lett. **57**, 929 (1986); **59**, 2380 (1987).

[42] S. Deser, R. Jackiw e G. t 'Hooft, Ann. Phys. **152**, 220 (1984).

[43] A. Ashtekar e A. Magnon, J. Math. Phys. **16**, 342 (1975).

[44] J. Anadan, Phys. Rev. **D53**, 779 (1996).

[45] E. Witten, Nucl. Phys. B311, 779(1996).

[46] J. G. de Assis, Silvanio B. de Oliveira e V. B. Bezerra, Mod. Phys. Lett. **A15**, 945 (2000).

[47] M. Rocek e R. M. Williams, Class. Quantum Grav. **2**, 701 (1985).

[48] D. Thouless et al., Phys. Rev. Lett. **49,** 405 (1983); ibid. J. Math. Phys. **35,** 5362 (1994); D. Arovas et al.,ibid. **53,** 722 (1984).

[49] F. S. Ham, Phys. Rev. Lett. **58,** 725 (1987).

[50] C. A. Mead, Phys. Rev. Lett., **59**, 161 (1987); B. Zygelman, Phys. Rev. Lett. **A125**, 476 (1987); id. Phys. Rev. Lett.. **64**, 256 (1990); Z. Tang and D. Finkelstein, Phys. Rev. Lett., **74**, 3134 (1995); B. Kendrick e C. A. Mesd, J. Chem. Phys. **102**, 4160 (1995).

[51] C.G. Gerry, Phys. Rev. **A39**, 3204 (1989); S. Chaturvedi et al, J. Phys. **A20**, L 1071 (1987);D. Ellixas et al, Phys. Rev. **A39**, 3228 (1989); A. Joshi et al, ibid. **A49**, 5131 (1994); T.Son et al, ibid. **A45**, 1371 (1992); J. Sergert, Ann. Phys. **179**, 294 (1987).

[52] R. Brout e G. Venturi, Phys. Rev. **D39**, 2436 (1989);R. Casadio e G. Venturi, Class. Quant. Grav. **12**, 1267 (1995); D. P. Datta, Phys. Rev. **D48**, 5746 (1993); Gen. Rel. Grav. **27**, 341 (1995); Mod. Phys. Lett. **A8**, 191 (1993); id., 601.

[53] Ali Mostafazadeh, J. Phys. **A31**, 7829 (1998).

[54] J. Anadan e L. Stodulsky, Phys. Rev. **D35**, 8 (1987).

[55] Patricio S. Letelier, J. Math. Phys. **36**, 6 (1995).

[56] J. Andretsch e G. Schäfer, Gen, Rel, Grav. **9**, 243 (1978); **9**, 489 (1978); L. Parker, Phys. Rev. **D22**, 1922 (1980); Phys. Rev. Lett. **44**, 1559 (1980); Gen. Rel. Grav. **13**, 307 (1981).

[57] S. Deser e R. Jackiw, Commun. Math. Phys.,**118**, 495 (1988); P. de Sousa Gerbert e R. Jackiw, ibid., **124**, 229 (1989); V.B. Bezerra, Class. Quantum Grav., **8**, 1939 (1991).

[58] E. Fishbach e S. Freeman, Phys. Rev. **D23**, 2157 (1981); L. Parker e L. O. Pimentel, ibid **D25**, 3180 (1982).

[59] H. R. Lewis e K. R. Symon, Phys. Fluids **27**, 192 (1984).

[60] N. A. Lemos e C. P. Natividade, Nuovo Cimento **B99**, 211 (1987).

[61] R. K. Colegrave e M. S. Abdalla, Opt. Acta **28**, 2208 (1981).

[62] B.K. Berger, Phys. Rev. **D23**, 1250 (1981); **D25**, 2208 (1982).

[63] B. L. Hu et al, Int. J. Mod. Phys. **A9**, 991 (1994).

[64] R. Manka e M. Mansour, Clas. Quantum Grav., 12, 3007 (1995).

[65] .I. A. Pedrosa e V. B. Bezerra, Mod. Phys. Lett. **A12**, 1111 (1997).

[66] H. R. Lewis, Jr e W. B. Riesenfeld, J. Math. Phys. **10**, 1458 (1969).

[67] Daniel A. Morales, J. Phys. A: Math. Gen. **24**, 819 (1988).

[68] L. Bianchi, Rend. Accad. Naz. Sci. XL, Mem Mat. **3**, 267 (1897).

[69] B. Wybourne, Classical Groups for Physicists, Wiley, NY, 1974.

[70] PH. de Sousa Gerbert, Ann. Phys. **189**, 155 (1989).

[71] B. L. Hu, Phys. Rev. **D8**, 2377 (1973).

[72] Th. Kaluza, Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Math. Phys. **k1**, 966 (1921).

[73] O. Klein, Z. Phys. **37**, 895 (1926).

[74] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).

[75] A. Salam, em Elementary Particle Theory, editado por N. Svartholm(Almquist and Forlag, Stocholm, 1968).

[76] H. M. Georgi e S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. **32**, 438 (1974).

[77] J. Scherk e J. H. Schwarz, Phys. Lett. **B57**, 463 (1975); ibid. **B82**, 60 (1979); id. Nucl. Phys. **B153**, 61 (1979).

[78] E. Cremmer e J. Schark, Nucl. Phys., **B108**, 409 (1976); ibid. **B118**, 61 (1977).

[79] David J. Toms, *Kaluza-Klein Thories*, em Proceedings of tha wirkshop on Kaluza-Klein Theories, ddit. por H. C. Lee, Ontario, 1983.(Para uma boa revisão sobre a teoria de Kaluza-Klein ver R. Hermann, Yang-Mills, Kaluza-Klein and the Einstein Program, Math. Sci. Press, Brooklmie, 1978.)

[80] José A. Ferrari, Gen. Rel. and Grav., **22**, 1 (1990).

[81] A. Baneejee, S. Chatterjee e A. Sen, Class. Quantum Grav. **13**, 3141 (1996).

[82] C. G. Bollini, J. J. Giambiagi e J. Tiomno, Lett. Nuevo. Cim. **31**, 13 (1981).

[83] A. Lichnerowicz, C. R. Sci.,**273**, 528 (1971).

[84] M. Azreg-Ainov e G. Clément, Class. Quantum Grav. **13**, 2635 (1996).

[85] H. Mandel, Z. Phys. 39, 136 (1926).

[86] J. G. Assis, C. Furtado, V. B. Bezerra e F. Moraes, Grav. and Cosmology, **6**,(2000).

[87] K. P. Tod, Class. Quantum Grav. **11**, 1331 (1994).

[88] Richard J. Petti, Gen. Rel. and Grav. **18**, 5 (1986)..

[89] B. Carter, Phys. Lett. A26, 399 (1968)

[90] B. Carter, Commum. Math. Phys. **10**, 280 (1968)

[91] J.M Bardeen, W.H. Press e S.A. Tenkolsky, Astrophys. J. **178**, 347 (1972).

[92] S.W. Hawking e G. F. R. Ellis, "The large-scale structure of space-time", Cambridge University Press,(Cambridge),1973.

[93] S.W. Hawking e R. Penrose, Proc. Roy. Soc. London , 529 (1970); B. Carter, Phys. Rev. Lett. **26**, 331 (1971);D. C. Robinson, Phys. Rev. Lett. **34**, 905 (1975).

[94] P. S. Shellard e A. Vilenkin. -Cosmic Strings and Other Topological Defects(Cambridge University, Cambridge, England, 1994).

[95] D.V. Gal'tsov e E. Massar, Class. Quantum Grav. **5**,1313 (1989); M. Germano, V.B. Bezerra e E.R. Bezerra de Mello, Class. Quantum Grav. **13**, 2663 (1996);P. C. W. Davies e V. Sahni, Class. Quantum Grav. **5**, 1 (1988); Wilson H. C. Freire, V. B. Bezerra e J. A. S. Lima, Braz. J. Phys., **30** (2000).

[96] M. Aryal, L. H. Ford e A. Vilenkin, Phys. Rev. **D34**, 2263 (1986).