



Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Specialistica in Fisica Teorica

Tesi di Laurea

Funzioni di risposta neutrino-nucleo

Laureanda

Chiara Benedetta Mezzetti

Relatore

Prof. Claudio Ciofi degli Atti

Anno Accademico 2005-2006

Al mio papà

Indice

Introduzione	1
1 La funzione di risposta degli adroni a sonde elettrodeboli: formalismo generale	7
1.1 Il neutrino e le sue proprietà	7
1.1.1 Esperimenti	12
1.2 Elettroni e neutrini e funzioni di risposta	13
1.3 L'interazione elettrodebole	14
1.4 Correnti di quarks e correnti di adroni	15
2 Diffusione di elettroni da nucleoni	21
2.1 Diffusione elastica $N(e, e')N$ e fattori di forma del nucleone	22
2.2 Diffusione anelastica e profondamente anelastica	26
3 Diffusione di neutrini da nucleoni	35
3.1 Diffusione elastica da correnti cariche $N(\nu_\mu, \mu)N'$	37
3.2 Diffusione elastica da correnti neutre $N(\nu, \nu)N$	41
4 Diffusione di elettroni e neutrini da nuclei	45
4.1 Diffusione quasi-elastica inclusiva di elettroni $A(e, e')X$	45
4.2 Diffusione quasi-elastica semi-inclusiva di elettroni $A(e, e'p)X$	47
4.3 Diffusione quasi-elastica inclusiva di neutrini $A(\nu_\mu, \mu)X$	50
5 Modelli teorici per la diffusione inclusiva di elettroni e neutrini da nuclei	55
5.1 L'approssimazione impulsiva	55
5.1.1 La funzione spettrale del nucleone	57
5.1.2 Distribuzione di momento del nucleone	59
5.2 L'interazione nello stato finale	61
5.2.1 Approssimazione WKB	61
5.2.2 Approssimazione Eikonale	62
5.2.3 Teoria della diffusione multipla di Glauber	65
5.2.4 Il modello ottico	68
6 Calcolo dei processi inclusivi quasi-elastici in approssimazione impulsiva indotti da elettroni e neutrini	71
6.1 Diffusione quasi-elastica di leptoni	71

Indice

6.2	Diffusione quasi-elastica di elettroni	75
6.3	Diffusione quasi-elastica di neutrini	79
7	Conclusioni	83
	Appendici	84
A	Sezioni d'urto	85
B	Matrici di Dirac e matrici di Gell-Mann	89
	Ringraziamenti	91
	Bibliografia	93

Introduzione

I processi di diffusione rappresentano un potente mezzo sperimentale per studiare le proprietà sia delle particelle incidenti che del sistema bersaglio. In questa tesi ci occuperemo della diffusione di leptoni (elettroni (e) e neutrini (ν)) da sistemi adronici (nucleoni (N) e nuclei (\mathcal{N})). Mentre le proprietà degli elettroni sono ben note, non altrettanto note sono le proprietà del neutrino. Pertanto, mentre i processi di diffusione eN e $e\mathcal{N}$ sono esclusivamente rivolti allo studio della struttura adronica, la diffusione νN e $\nu\mathcal{N}$ è finalizzata, come vedremo, allo studio delle proprietà sia del neutrino che degli adroni.

L'elemento chiave per la comprensione della struttura e della dinamica della materia adronica è rappresentato dalla determinazione della sua risposta ad una sonda esterna.

Le sonde leptoniche presentano il notevole vantaggio che, nella maggioranza dei casi, la sezione d'urto leptone-adrone fattorizza in una parte, in genere nota, che descrive l'interazione elettromagnetica con l'adrone, ed un'altra, detta appunto *funzione di risposta*, che descrive la struttura adronica, che è generalmente la grandezza in esame.

Le sonde leptoniche hanno inoltre il vantaggio che esse interagiscono con l'adrone senza perturbarne fortemente la struttura, pertanto sono preferibili alle sonde adroniche, che sono caratterizzate da sezioni d'urto maggiori, ma presentano lo svantaggio di disturbare fortemente la struttura del bersaglio nucleare.

I processi di diffusione leptone-adrone possono essere classificati in base alle diverse possibilità di determinare gli stati finali prodotti. Nel seguito indicheremo con l un leptone, con A , B , C ecc. dei nuclei in precisi stati energetici e con X un generico stato adronico non identificato. Indicando tra parentesi le particelle rivelate, con A l'adrone bersaglio e con X gli stati adronici non rivelati, si ottiene la seguente classificazione:

- *Processo inclusivo* $A(l, l')X$: si rivela soltanto il leptone diffuso l' .
- *Processo semi-inclusivo* $A(l, l' h)X$: si rivela sia il leptone diffuso l' , che un generico adrone h prodotto nel processo di diffusione.
- *Processo esclusivo*: tutti gli stati finali sono noti. La diffusione $A(e, e'h)B$ e la diffusione elastica $A(l, l')A$ sono esempi di processi esclusivi.

Il potere risolutivo con cui la sonda può indagare la struttura adronica è legato alla lunghezza d'onda di De Broglie ¹ λ dalla relazione [1]

$$\lambda = \frac{1}{|\vec{q}|}$$

dove \vec{q} è il tri-impulso trasferito dal bosone virtuale scambiato nell'interazione.

Da questa espressione risulta evidente la necessità di aumentare il valore di $q \equiv |\vec{q}|$ al fine di ottenere una maggiore risoluzione spaziale e quindi una panoramica più ampia della struttura adronica. Ciò può essere fatto semplicemente richiedendo una considerevole perdita di energia della particella incidente.

I processi di diffusione inclusiva possono essere suddivisi in varie regioni, contraddistinte dai diversi valori del quadrato del quadri-impulso trasferito Q^2 e della variabile di Bjorken $x = Q^2/2M\nu$, che misura pertanto l'anelasticità del processo.

Considerando un generico nucleo A di massa M_A , avremo tre principali regioni:

- regione *elastica* ($Q^2 = 2M_A\nu$, $x = A$): l'interazione avviene con le distribuzioni di carica e di magnetizzazione del nucleo nel suo complesso;
- regione *quasi elastica* ($Q^2 \simeq 2M_A\nu$, $x = 1$): l'interazione avviene elasticamente con i nucleoni del nucleo visti come quasi-liberi;
- regione *profondamente anelastica* (DIS^2) ($Q^2 \ll 2M_A\nu$, $x < 1$): l'interazione avviene con i costituenti del nucleone legato.

Considerando un generico nucleone N di massa M , invece, avremo le seguenti regioni principali:

- regione *elastica* ($Q^2 = 2M\nu$, $x = 1$): l'interazione avviene con le distribuzioni di carica e di magnetizzazione del nucleone nel suo complesso;
- regione *anelastica* ($Q^2 < 2M\nu$, $0 < x < 1$): l'interazione eccita gli stati del nucleone;
- regione *profondamente anelastica* ($Q^2 \ll 2M\nu$, $x = 0$): l'interazione avviene con i partoni del nucleone, ovvero con i quark.

L'accuratezza con cui la sonda riesce ad indagare la struttura adronica impone l'applicazione di metodi di approssimazione differenti. A distanze internucleoniche dell'ordine di qualche Fermi è sufficiente l'applicazione del modello a shell. I nuclei sono infatti descritti realisticamente dall'approssimazione di campo medio, in accordo alla quale i partoni dei nuclei sono nucleoni che si muovono indipendentemente l'uno dall'altro con un momento medio $\bar{p} \simeq 0.2 \text{ GeV}$, corrispondente a ($\bar{v}/c \simeq 0.03$), ed in accordo, quindi, con una descrizione non relativistica. Portando la scala delle distanze fino all'ordine del raggio del nucleone ($\simeq 0.8 \text{ fm}$), è necessario abbandonare la descrizione di campo medio, in quanto devono essere presi in considerazione effetti quali le correlazioni nucleone-nucleone, le possibili eccitazioni del nucleone nel

¹ Nelle formule presentate in questa tesi si è adottata la convenzione $\hbar = c = 1$.

²Dall'inglese Deep Inelastic Scattering

mezzo, e la struttura a quark del nucleone.

I primi esperimenti di diffusione profondamente anelastica sul nucleone hanno messo in evidenza, per la prima volta, che la struttura interna del nucleone è composta da particelle puntiformi, i partoni. Questa scoperta ha portato alla formulazione del Modello Standard, in cui i partoni sono particelle di spin $1/2$ dette quark e le interazioni tra adroni sono spiegate attraverso le interazioni tra i rispettivi quark costituenti. Questo modello risultò molto soddisfacente nel descrivere i primi esperimenti DIS ma, all'aumentare delle energie in gioco e con la scoperta del gluone quale mediatore delle interazioni forti, si dovette ricorrere a sostanziali modifiche, introducendo la Cromo-Dinamica-Quantistica (QCD), una teoria di gauge non abeliana in cui i gluoni sono i quanti dell'interazione, contraddistinti dal fatto che possono interagire anche tra loro stessi.

La QCD riesce a descrivere la fenomenologia delle interazioni forti solo per distanze inferiori alle dimensioni di un nucleone ($\simeq 0.8 \text{ fm}$), quando l'interazione forte diminuisce ed un quark può considerarsi quasi-libero, rientrando nel cosiddetto regime di libertà asintotica. In questo contesto la costante di accoppiamento $\alpha_s(Q^2)$ permette uno sviluppo perturbativo della QCD, così da ottenere risultati confrontabili, per precisione, con quelli della Elettro-Dinamica-Quantistica (QED).

Le sonde leptoniche ad alte energie rappresentano un potente mezzo per indagare i dettagli della struttura nucleare legati all'interazione forte.

La grande attenzione rivolta ai processi ad alte energie su nuclei bersagli in ambito teorico, è motivata dal fatto che una rapida collisione nucleare costringe il proiettile ad interagire con tutta la materia adronica in un periodo di tempo estremamente breve e ciò permette di comprendere la cinematica delle reazioni elementari ad alte energie, per piccole distanze e per tempi immediatamente successivi all'urto. La scala temporale relativa ai processi adronici è dell'ordine di 10^{-23} s , equivalente al tempo necessario alla luce per attraversare un adrone, mentre quella relativa ai processi di diffusione su nuclei varia in base alla velocità del proiettile ed alle dimensioni del nucleo lungo la direzione del moto del proiettile.

I bersagli nucleari possono quindi essere considerati come "rivelatori" dell'evoluzione spazio-temporale dei processi adronici, non rivelabili negli esperimenti che usano come bersagli il singolo nucleone.

In questo lavoro di tesi si è considerata la diffusione di elettroni e neutrini, alla luce del fatto che le informazioni ottenute attraverso le interazioni deboli e l'interazione elettromagnetica sono spesso complementari tra loro. In particolar modo l'interazione debole ($V - A$) sonda le proprietà della QCD, prestando particolare attenzione alla struttura assiale del nucleone, difficilmente rivelabile attraverso la diffusione di elettroni o fotoni.

Il neutrino è la più elusiva delle particelle nucleari e le prove della sua esistenza sono per la maggior parte alquanto indirette. I neutrini sono i membri neutri della famiglia dei leptoni e furono postulati da Pauli nel 1930, per rendere conto dell'energia e del momento angolare mancanti nel decadimento β . La conferma della loro esistenza necessita di altri 23 anni ed è da attribuire all'esperimento di Cowan e Reines, con il quale si mostrarono proprietà del neutrino al di là di quelle richieste dalle leggi di conservazione, ma implicite nella teoria di Fermi.

Nel Modello Standard, i neutrini sono considerati particelle stabili, prive di massa

e campi sinistrorsi. Recenti esperimenti, quali SNO [2] e SK [3], hanno tuttavia convinto la comunità scientifica che i neutrini oscillano tra i loro differenti stati di sapore, dimostrando quindi di possedere una massa non nulla e richiedendo in tal modo la necessità di un'estensione del Modello Standard. La vera massa del neutrino rimane pertanto uno degli enigmi della fisica delle particelle elementari ancora irrisolti. Sono numerosi gli interrogativi ancora senza risposta che si affollano attorno ai neutrini: qual è il valore assoluto della loro massa? Il neutrino è una particella di Dirac o di Majorana? Il neutrino ha un momento magnetico? I neutrini sono leptoni rappresentativi della violazione CP? Quale importanza ha questa particella nell'asimmetria materia-antimateria dell'universo?

L'interesse per i neutrini va al di là dello studio delle proprietà intrinseche della particella e si estende ad una varietà di problematiche di carattere astrofisico e di fisica adronica. Tipici esempi in ambito astrofisico riguardano la comprensione della produzione dell'energia solare e le nucleosintesi del neutrino. L'influenza dei neutrini si estende anche a questioni cosmologiche, quali il ruolo degli stessi nell'asimmetria materia-antimateria dell'universo.

In fisica adronica e nucleare, l'uso di sonde di neutrini è ancora scarsamente sfruttato, in quanto, nonostante i neutrini siano ovunque, interagiscono molto debolmente con la materia, e possono essere osservati soltanto rivelando le particelle secondarie che intervengono nei processi di diffusione, rendendo gli esperimenti di difficile realizzazione. A causa della bassa sezione d'urto νN , gli esperimenti con neutrini vengono effettuati utilizzando quindi quantità di materia, cioè nuclei atomici. E' pertanto necessario conoscere con accuratezza la sezione d'urto $\nu \mathcal{N}$. Come abbiamo già detto, formalmente questa dipende dalle *funzioni di risposta* νN e $\nu \mathcal{N}$.

Per comprendere pienamente le proprietà dei neutrini sono necessari esperimenti che implicano elevati standard di precisione, e ciò richiede una profonda conoscenza teorica della sezione d'urto neutrino-nucleo. Per questo motivo attualmente vengono studiati molto accuratamente gli effetti nucleari nei processi di diffusione neutrino-nucleo, e già da diversi anni le comunità internazionali di fisica delle alte energie e di fisica nucleare organizzano un workshop comune dedicato totalmente alle interazioni neutrino-nucleo [4].

Il motivo è molto semplice: l'errore sui valori sperimentali delle oscillazioni dei neutrini attribuito alle incertezze di origine nucleare, è stato stimato essere del 20% [5]. Poichè tali stime sono state effettuate con modelli molto primitivi del nucleo (modello a Gas di Fermi) è evidente l'urgenza di determinarne l'attendibilità.

L'interazione di neutrini è mediata dai bosoni carichi W^\pm o dal bosone neutro Z^0 e proprio per questa ragione lo studio della diffusione di neutrini fornisce informazioni non accessibili a sonde leptoniche cariche, quali elettroni e muoni. Le interazioni di neutrini vengono classificate come processi a correnti cariche (CC) o a correnti neutre (NC)³ a seconda che il bosone scambiato sia W^\pm o Z^0 . Nel primo caso, nell'interazione νN viene emesso un leptone diverso dal neutrino, mentre nel secondo il neutrino conserva la sua identità. L'esistenza e la natura delle correnti neutre gioca un ruolo molto importante nello stabilire la validità del Modello Standard delle interazioni elettrodeboli. Sfortunatamente gli studi sperimentali delle interazioni NC di

³Nel seguito della tesi ci riferiremo ai processi di diffusione carica con l'abbreviazione CC (Charged Current), mentre ai processi di diffusione neutra con NC (Neutral Current).

neutrini sono piuttosto ardui da concretizzare, in quanto le sezioni d'urto relative ai processi NC sono ancora più piccole di quelle per i processi CC, ed inoltre il neutrino diffuso non lascia segnale, così che l'identificazione dell'evento dipende dalla rivelazione di uno o più adroni. Misure di processi NC quasi-elastici, con conseguente produzione di pioni, sono state effettuate al Brookhaven National Laboratory [6], all'Argonne National Laboratory [7] in USA, ed al CERN di Ginevra [8] usando bersagli di deuterio o targhette più pesanti come il carbonio, l'alluminio o una mistura di propano-freon.

Le interazioni NC neutrino-nucleo sono particolarmente rilevanti per indagare il contributo del quark strano allo spin dei nucleoni. I processi CC, d'altra parte, non dipendono dal fattore di forma strano, pertanto poichè un fattore di forma assiale strano non nullo cambia la sezione d'urto quasi-elastica NC su protoni o neutroni, il rapporto di queste due sezioni d'urto è sensibile allo spin strano. L'esperimento FINESS [9] si propone di misurare il rapporto $R(\text{NC/CC})$.

Di seguito sono elencati alcuni dei numerosi esempi di diffusione di neutrini su bersagli nucleari (per maggiori dettagli vedi [10]):

- rivelazione dei neutrini solari: questi esperimenti coinvolgono ν_e alle energie più basse;
- segnali nei rivelatori KARMEN [11] e LSND [12]: le sorgenti coinvolgono neutrini ad alte energie, provenienti ad esempio dal decadimento di pioni e muoni a riposo, mentre il bersaglio è uno scintillatore liquido contenente nuclei di idrogeno e ^{12}C ;
- rivelazione dei neutrini atmosferici: si tratta di processi ad energie piuttosto elevate su nuclei di ^{16}O ;
- processi di nucleosintesi: i neutrini di tutti i sapori ad energie intermedie interagiscono con nuclei instabili;
- rivelazione di ν_μ e ν_τ nelle supernovae: questi neutrini interagiscono solo per mezzo di correnti neutre e possono essere rivelati eccitando nuclei ^{16}O nei rivelatori ad acqua di Čerenkov.

Come già ricordato, gli effetti nucleari nei processi di interazione $\nu\mathcal{N}$ sono stati considerati per lungo tempo a partire da un ben noto lavoro nell'ambito del modello a Gas di Fermi [13]. Tale semplice modello tuttavia si è dimostrato totalmente inadatto ad interpretare i dati sperimentali di diffusione $e\mathcal{N}$ ad energie incidenti dell'ordine del GeV . Le discrepanze tra dati sperimentali e calcoli teorici vengono oggi attribuite ad effetti non presenti nel modello a Gas di Fermi, quali le code ad alto impulso delle distribuzioni di momento e l'energia di legame. Negli ultimi anni sono stati fatti enormi progressi nella soluzione del problema di molti corpi nucleare ed attualmente sono a disposizione funzioni d'onda che contengono gli effetti delle correlazioni tra nucleoni e funzioni di particella singola realistiche. Si conosce quindi con buona certezza la probabilità di trovare nel nucleo un nucleone con impulso \vec{p} ed energia di rimozione E , rappresentata dalla *Funzione Spettrale* $P(p, E)$ del nucleone.

Attualmente, quindi, ci si sta orientando nel trattare gli effetti nucleari nei processi $\nu\mathcal{N}$ in termini di funzione spettrale e questo verrà anche discusso nella nostra tesi, il cui scopo principale è presentare criticamente i calcoli esistenti dei processi $e\mathcal{N}$ e $\nu\mathcal{N}$ effettuati usando la funzione spettrale e confrontarli con i risultati dei calcoli preliminari, oggetto della tesi, effettuati con la funzione spettrale sviluppata nell'ambito dell'attività del gruppo di Fisica Adronica di Perugia. Lo scopo ultimo è quello di arrivare alla realizzazione di un programma di calcolo della sezione d'urto $\nu\mathcal{N}$ da poter essere utilizzato nei programmi di simulazione Monte Carlo per gli esperimenti con neutrini.

La tesi è strutturata come segue:

- nel primo capitolo si introducono le proprietà fondamentali del neutrino e degli elettroni e si presenta una breve descrizione dell'interazione elettrodebole;
- nel secondo capitolo vengono derivate le sezioni d'urto elettrone-nucleone, distinguendo tra i diversi processi di diffusione inclusiva elastica, anelastica e profondamente anelastica;
- nel terzo capitolo vengono derivate le sezioni d'urto neutrino-nucleone, distinguendo tra i processi quasi-elastici da correnti cariche ed i processi elastici a correnti neutre e vengono introdotti i fattori di forma assiale, pseudo-scalare e strano;
- nel quarto capitolo vengono derivate le sezioni d'urto leptone-nucleo;
- nel quinto capitolo si presenta la teoria dell'approssimazione impulsiva, illustrando le motivazioni che portano a preferire una descrizione degli effetti nucleari in termini di funzione spettrale piuttosto a quella basata sul modello a Gas di Fermi;
- nel sesto capitolo si presentano i risultati di calcoli della sezione d'urto inclusiva $^{16}O(e, e')X$, $^{16}O(\nu_\mu, \mu)X$ e $^{16}O(\nu_e, e)X$, basati su diversi modelli della funzione spettrale e si mostrano i risultati preliminari dei calcoli della sezione d'urto sulla base dell'approccio presentato in [14].

Capitolo 1

La funzione di risposta degli adroni a sonde elettrodeboli: formalismo generale

1.1 Il neutrino e le sue proprietà

Nel Modello Standard i neutrini sono fermioni neutri, sinistrorsi ed a massa nulla, che non risentono dell'interazione forte ed interagiscono solo debolmente. Per esempio [15, 16], i neutrini prodotti in un reattore nucleare con energia $E_\nu \sim 1 \text{ MeV}$ hanno una sezione d'urto $\sigma \sim 10^{-44} \text{ cm}^2$, corrispondente ad una probabilità $\sim 10^{-18}$ di interagire in un rivelatore solido di spessore 1 m , o ad una probabilità $\sim 10^{-11}$ di interagire all'interno della Terra, percorrendo una traiettoria passante per il suo centro. Un valore talmente esiguo della sezione d'urto richiede l'impiego di rivelatori molto massivi per ottenere un tasso di eventi apprezzabile, ma nello stesso tempo rappresenta un potente mezzo per sondare approfonditamente ogni forma di materia senza lasciare traccia.

I neutrini sono particelle elusive e come tali possono essere osservate soltanto rivelando i prodotti della loro interazione con la materia. Per questo motivo negli esperimenti di diffusione di neutrini vengono utilizzati nuclei pesanti come bersagli, così da ottenere un valore relativamente grande per la sezione d'urto.

Le informazioni derivanti dall'impiego di neutrini ed elettroni sono complementari, basti infatti pensare ai fotoni solari, che vengono emessi dalla superficie con uno spettro di corpo nero, mentre i neutrini, proveniendo dal centro del sole, forniscono informazioni sulle reazioni di fusione che sono alla base della luminosità solare.

Famiglie di neutrini

I neutrini possono interagire, nei processi a correnti neutre, mediante il bosone neutro Z^0 , che ne cambia il quadri-impulso mantenendone inalterata l'identità, oppure, nei processi a correnti cariche, con lo scambio del bosone W^\pm , che li trasforma in un leptone carico. E' proprio sulla base dei processi CC che si può introdurre il concetto di *sapore* dei neutrini.

Il sapore di un neutrino è semplicemente il tipo, ovvero la massa, del leptone carico

legato allo stesso vertice di corrente carica.

Nel Modello Standard, pertanto, neutrini ed anti-neutrini sono classificati in tre famiglie di sapori, come riportato in tabella (1.1), contraddistinte per il diverso leptone carico a cui fanno riferimento.

neutrini	anti-neutrini	leptoni
ν_e	$\bar{\nu}_e$	e
ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	μ
ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	τ

Tabella 1.1: Classificazione di neutrini, anti-neutrini e leptoni nel Modello Standard

Sperimentalmente questa classificazione è confermata dal decadimento

$$Z^0 \longrightarrow \nu_\alpha + \bar{\nu}_\alpha \quad (1.1)$$

dove α indica il sapore del neutrino.

L'ampiezza parziale del decadimento, calcolata nel Modello Standard è

$$\Gamma_{\nu\bar{\nu}} = 166.9 \text{ MeV} \quad (1.2)$$

da cui risulta che

$$\Gamma_{invisible} = N_\nu \Gamma_{\nu\bar{\nu}} \quad (1.3)$$

dove N_ν è il numero dei sapori del neutrino con massa minore di quella del bosone Z^0 .

L'ampiezza invisibile può essere ottenuta sperimentalmente, sottraendo i contributi di tutti i canali visibili dalla misura dell'ampiezza totale

$$\Gamma_{invisible} = \Gamma_{tot} - \Gamma_{vis} = 498 \pm 4.2 \text{ MeV} \quad (1.4)$$

pertanto il decadimento del bosone Z^0 conferma che il numero dei sapori dei neutrini è pari a

$$N_\nu = \frac{\Gamma_{inv}}{\Gamma_{\nu\bar{\nu}}} = 2.994 \pm 0.012 \quad (1.5)$$

Si ipotizza inoltre l'esistenza di *neutrini sterili*, ovvero creati attraverso il fenomeno dell'oscillazione dei sapori, che non partecipano all'interazione debole e che pertanto non sono rivelabili dal decadimento del bosone Z^0 . Questa ipotesi è supportata dall'esperimento Liquid Scintillator Neutrino Detector [12], ma i risultati attuali non sono stati ancora in grado di confermarla o smentirla.

Elicità

Si consideri una particella con spin \mathbf{s} ed impulso \mathbf{p} .

Una proprietà che contraddistingue le particelle elementari è rappresentata dall'elicità

$$\lambda = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad (1.6)$$

ovvero dalla proiezione dello spin lungo la direzione del moto, che per i fermioni può assumere i valori $\lambda = \pm 1/2$. In analogia con la luce polarizzata, stati con elicità positiva o negativa sono indicati rispettivamente come *destrorsi* o *sinistrorsi*.

Nel 1950 si è scoperto che ν e $\bar{\nu}$ esistono soltanto nello stato sinistrorso e destrorso rispettivamente, ma essendo l'elicità una quantità pseudo-scalare, applicando l'operatore di parità si deve verificare che

$$\mathbf{P} : \lambda \longrightarrow -\lambda \quad (1.7)$$

e ciò si riflette nella violazione della parità nell'interazione debole.

E' possibile che neutrini destrorsi ed anti-neutrini sinistrosi non esistano, ma in caso contrario le loro proprietà si ipotizzano profondamente differenti da quelle di neutrini e anti-neutrini osservabili. A differenza di quest'ultimi, infatti, dovrebbero essere particelle molto pesanti, o che non partecipano all'interazione debole, oppure che soddisfino entrambe queste proprietà.

Nel Modello Standard i leptoni ed i quark sono particelle di Dirac, ovvero distinte dalle corrispondenti anti-particelle, ciascuna con due stati di elicità. In altre parole, obbediscono all'equazione di Dirac e sono descritti da spinori complessi a 4 componenti.

Nel 1937, Majorana ipotizzò l'esistenza di una particella con elicità opposta rispetto alla sua anti-particella. La scoperta sperimentale dei soli neutrini sinistrorsi è la motivazione alla base dell'ipotesi per cui ν e $\bar{\nu}$ possono essere considerati i due differenti stati di spin della stessa particella di Majorana.

Oscillazioni di neutrini

I neutrini, prodotti o rivelati, hanno sempre un sapore ben definito, ma sperimentalmente si è dimostrato che queste particelle possono oscillare fra i tre sapori, ovvero migrare da una famiglia all'altra. Questo importante fenomeno smentisce l'ipotesi di massa nulla del neutrino ed implica anche masse differenti per i tre tipi di neutrini. L'origine del fenomeno di oscillazione risiede nel fatto che gli autostati di sapore del neutrino

$$|\nu_j\rangle \quad \{j = e, \mu, \tau\} \quad (1.8)$$

sono differenti dagli autostati di massa del neutrino

$$|\nu_i\rangle \quad \{i = 1, 2, 3\} \quad (1.9)$$

e sono legati tra loro dalla relazione

$$\begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_\tau\rangle \end{pmatrix} = U^{PMNS} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \\ |\nu_3\rangle \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

dove U^{PMNS} è la matrice di Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata.

La matrice di mixing è l'equivalente della matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa

(CKM) per il settore leptónico e si parametrizza come

$$\begin{aligned}
U^{PMNS} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta} & c_{13}s_{23} \end{pmatrix} \quad (1.11)
\end{aligned}$$

con la notazione $c_{jk} = \cos \theta_{jk}$, $s_{jk} = \sin \theta_{jk}$, θ angolo di mixing.

L'ipotesi del fenomeno di oscillazione dei neutrini fu introdotto da Pontecorvo e si può spiegare considerando, per semplicità, un sistema di due neutrini.

In questo caso la relazione (1.10) si scrive come

$$\begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

In $t = 0$ si ha un autostato debole puro $|\nu(0)\rangle = |\nu_\mu\rangle$, mentre dopo un tempo t lo stato del neutrino si scrive

$$|\nu(t)\rangle = -|\nu_1\rangle s e^{-iE_1 t} + |\nu_2\rangle c e^{-iE_2 t} \quad (1.13)$$

con

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \simeq p + \frac{m_i^2}{2p} \simeq E + \frac{m_i^2}{2p} \quad i = 1, 2 \quad (1.14)$$

e dove la differenza di fase delle due componenti si concretizza nell'evoluzione del sapore del neutrino.

La probabilità di trovare ν_e è data da

$$\begin{aligned}
P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e; t) &= |\langle \nu_e | \nu(t) \rangle|^2 = \\
&= \sin^2 \theta \cos^2 \theta | -e^{-iE_1 t} + e^{-iE_2 t} |^2 = \\
&= \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 t}{4E} \right) = \\
&= \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right) \quad (1.15)
\end{aligned}$$

dove $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$, $E = p$ e l'ultima uguaglianza è valida solo per particelle ultra-relativistiche che percorrono la distanza L .

E' importante sottolineare che nell'espressione precedente compare la differenza in quadratura delle masse, pertanto misurare la probabilità di oscillazione di un neutrino, riportata in Figura 1.1, non fornisce il valore assoluto della massa del neutrino, ma può soltanto confermare che almeno una delle due particelle ha massa diversa da zero.

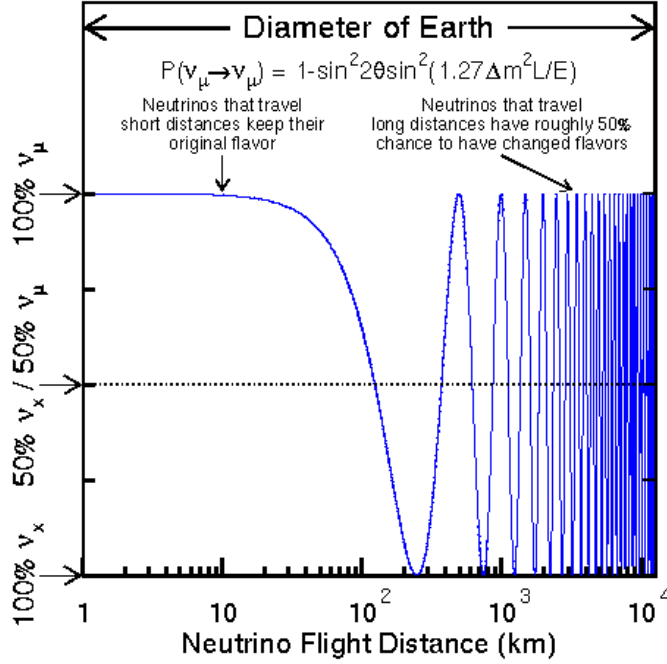


Figura 1.1: Probabilità di oscillazione di un neutrino in funzione della distanza percorsa. Adattato Ref. [17]

Massa limite dei neutrini

Il limite superiore più stringente per le masse dei neutrini è imposto dalla cosmologia [18]: la teoria del Big Bang prevede l'esistenza di un rapporto fisso tra il numero di neutrini ed il numero di fotoni nella radiazione cosmica di fondo. Se l'energia totale dei tre tipi di neutrini avesse ecceduto una media di 50 eV per neutrino, la massa nell'universo sarebbe stata molto maggiore di quella collassata. Questo limite può essere superato assumendo che il neutrino sia instabile, ma quest'ipotesi non è prevista nel Modello Standard.

Un vincolo maggiore proviene da un'accurata analisi dei dati cosmologici, quali il red-shift, da cui risulta che la somma delle masse dei neutrini deve essere minore di 0.3 eV . Nel 1998 i risultati dell'esperimento SK [3] hanno confermato l'oscillazione dei neutrini e hanno riportato $\Delta m^2 < 0.05 \text{ eV}$. Pertanto, combinando i dati, il neutrino più pesante deve essere di circa 0.05 eV , ma non maggiore di 0.3 eV .

Nel 2005 l'esperimento KamLAND [19] ha prodotto la miglior stima per la differenza in quadratura degli autostati di massa ν_1 e ν_2 , pari a $\Delta m_{21}^2 = 0.000079 \text{ eV}^2$, mentre nel 2006 l'esperimento MINOS [20] ha fornito $\Delta m_{23}^2 = 0.0031 \text{ eV}^2$, risultato consistente con i dati risultanti dall'esperimento SK [3].

Come già ricordato, l'incertezza determinata dagli effetti nucleari negli esperimenti di oscillazione è stimata essere del 20% [5].

Sorgenti di neutrini

I neutrini sono particelle molto numerose ed altrettanto numerose sono le sorgenti da cui hanno origine:

- Big-Bang: i neutrini reduci dall'evoluzione dell'universo hanno una densità di circa 56 cm^{-3} per ogni sapore ed uno spettro di corpo nero con temperatura $T_\nu \simeq 1.947 \text{ K}$, corrispondente ad una energia cinetica $E_\nu \simeq 5 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$.
- Stelle: numerosi sono i neutrini prodotti nei processi di fusione termonucleare



che avvengono nelle stelle ed in particolar modo nel sole. I neutrini prodotti in questi processi sono caratterizzati da basse energie, al di sotto di 0.41 MeV , anche se una piccola componente raggiunge anche valori di 14 MeV .

- Terra: questi neutrini hanno origine dalla naturale radioattività terrestre e vengono prodotti in numero di $6 \cdot 10^6$ al secondo per cm^2 .
- Raggi solari: quando un raggio cosmico penetra l'atmosfera, interagisce con particelle secondarie come pioni e kaoni carichi, che decadendo generano i così detti neutrini atmosferici. Ne sono un esempio i decadimenti

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu \qquad \mu^+ \longrightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \quad (1.17)$$

- Apparatı sperimentali: sperimentalmente i neutrini possono essere prodotti ad alte energie negli acceleratori di particelle, ed a basse energie nei reattori nucleari. I primi, la cui energia si aggira intorno ai 100 GeV , sono generati per studiare la struttura dei nucleoni e l'interazione debole. I secondi hanno energie intorno ai 4 MeV e sono stati i primi ad essere rivelati e ad essere usati per porre dei limiti alle oscillazioni dei neutrini.

1.1.1 Esperimenti

Alcuni degli attuali esperimenti sui neutrini sono:

- **OPERA** [21]: è un esperimento realizzato per la ricerca delle oscillazioni ν_μ - ν_τ nell'atmosfera, e si basa sull'emulsione nucleare per la rivelazione del decadimento τ prodotto nelle reazioni CC del ν_τ . L'esperimento prevede l'utilizzo del fascio di neutrini CNGS¹ [22], di energia $E_\nu = 17 \text{ GeV}$, lanciato dal CERN verso i laboratori del Gran Sasso.
- **CHORUS** [23]: questo esperimento è realizzato nei laboratori del CERN e si prefigge di cercare le oscillazioni ν_μ - ν_τ attraverso la rilevazione della topologia caratteristica del decadimento del leptone τ in ν_τ negli eventi CC, con un fascio incidente di energia $E_\nu = 27 \text{ GeV}$.

¹Dall'inglese CERN Neutrinos to Gran Sasso

- **FINeSSE** (Fermilab Intense Neutrino Scattering Experiment)[9]: consiste di un rivelatore di 10 ton collocato a 100 metri dalla sorgente di neutrini Booster, presso il Fermilab [24] di Chicago, e di un fascio di neutrini di energia $E_\nu = 700 \text{ MeV}$. Questo esperimento potrebbe misurare definitivamente il contributo del quark strano allo spin del nucleone. Inoltre, potrebbe investigare la diffusione quasi-elastica neutrino-nucleone a correnti cariche, la diffusione elastica NC, le reazioni CC e NC per la produzione di pioni e la diffusione elastica neutrino-elettrone. Questo rivelatore dovrebbe fornire risultati complementari al già esistente esperimento MiniBooNE [25], che si prefigge di misurare queste tre sezioni d'urto.

Il ruolo giocato dai quark strani nelle proprietà del nucleone non è ancora compreso. La diffusione profondamente anelastica di neutrini su nucleoni indica che una frazione consistente del momento del nucleone è trasportata dai quark strani. In ogni caso, gli ultimi risultati di violazione della parità provenienti dalla diffusione di elettroni nei laboratori del MIT/BATES (Boston, USA) [26] e Jeffersonlab (Newport News, USA) [27] mostrano, sia pur con grandi incertezze, che il contributo del quark strano al momento magnetico del nucleone è consistente con zero.

- **MINER ν A** (Main Injector Neutrino Experiment $\nu - A$) [28]: questo esperimento utilizza il fascio di neutrini NuMI al Fermilab e si prefigge di misurare le interazioni dei neutrini a basse energie sia per cercare le oscillazioni che per studiare la dinamica forte dei nucleoni e dei nuclei propri di queste interazioni.
- **Super-Kamiokande** [3]: si tratta di un rivelatore ad acqua di Cerenkov per particelle cosmiche, che si prefigge di determinare il rapporto tra i neutrini atmosferici $R = \nu_\mu/\nu_e$, il cui valore teorico è ~ 2 , con un fascio di neutrini incidenti di $E_\nu = 1.33 \text{ GeV}$.

Le sezioni d'urto quasi-elastiche $\nu\mathcal{N}$, negli esperimenti mirati a rivelare il fenomeno di oscillazione dei neutrini, sono note con un'incertezza stimata dell'ordine del 20% [5]. Ciò non solo rende difficoltosa un'accurata analisi dei risultati sperimentali, ma impedisce anche di rivelare e misurare ulteriori proprietà dell'interazione debole, come la violazione CP. Si rende pertanto necessaria una conoscenza teorica della sezione d'urto $\nu\mathcal{N}$ per i processi quasi-elastici, al fine di comprendere pienamente i risultati sperimentali.

In questo lavoro di tesi ci occuperemo proprio di questo problema, fornendo una descrizione teorica dei processi di diffusione $e\mathcal{N}$ e $\nu\mathcal{N}$ per energie incidenti da 0.5 GeV a qualche GeV .

1.2 Elettroni e neutrini e funzioni di risposta

Elettroni e neutrini sono leptoni che interagiscono entrambi con gli adroni per mezzo dell'interazione elettrodebole [29, 30, 31], l'elettrone mediante lo scambio di un fotone virtuale γ^* , il neutrino mediante lo scambio del bosone massivo Z^0 (correnti neutre) o dei bosoni W^+ o W^- (correnti cariche).

Gli elettroni e gli altri leptoni carichi interagiscono principalmente scambiando fotoni con massa nulla, sebbene una piccola componente dell'ampiezza di probabilità derivi dallo scambio di bosoni Z^0 . Questa componente porta ad una piccola violazione della parità che può essere sfruttata per verificare la validità del Modello Standard.

Per estrarre informazioni sulla struttura dei nucleoni, quali le funzioni di distribuzione dei partoni, si possono combinare i risultati provenienti dagli esperimenti che coinvolgono i quattro scambi bosonici (diffusione di un leptone carico, diffusione carica e neutra di neutrini ed antineutrini).

Una differenza importante nella diffusione di questi due tipi di leptoni risiede nella definizione dei propagatori, rispettivamente $1/Q^2$ per l'elettrone e $1/(Q^2 - M_{Z,W}^2)$ per il neutrino. Ciò comporta molteplici implicazioni come il fatto che, per $Q^2 \ll M_{Z,W}^2$, la sezione d'urto è molto maggiore per l'elettrone che non per il neutrino. Inoltre, mentre la sezione d'urto totale associata alla diffusione di neutrini è finita per qualsiasi energia della particella incidente, quella associata alla diffusione di elettroni diverge per piccoli angoli di diffusione.

1.3 L'interazione elettrodebole

Nel Modello Standard l'interazione elettrodebole è descritta dalla Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{g}{2\sqrt{2}}\mathcal{J}_\alpha^{CC}W^\alpha - \frac{g}{2\cos\theta_W}\mathcal{J}_\alpha^{NC}Z^\alpha - \mathcal{J}_\alpha^{EM}A^\alpha \quad (1.18)$$

dove \mathcal{J}_α^{CC} e \mathcal{J}_α^{NC} rappresentano rispettivamente gli operatori di corrente debole carica e neutra, mentre \mathcal{J}_α^{EM} è l'operatore di corrente elettromagnetica.

$$\mathcal{L}_{int}^{leptonic} = \underbrace{\begin{array}{c} l \\ \diagdown \\ \text{---} W \\ \diagup \\ \nu_l \end{array}}_{CC} + \underbrace{\left(\begin{array}{c} l \\ \diagdown \\ \text{---} Z \\ \diagup \\ l \end{array} + \begin{array}{c} \nu_l \\ \diagdown \\ \text{---} Z \\ \diagup \\ \nu_l \end{array} \right)}_{NC} + \underbrace{\begin{array}{c} l \\ \diagdown \\ \text{---} \gamma \\ \diagup \\ l \end{array}}_{EM}$$

Figura 1.2: Termine leptonic della \mathcal{L}_{int} , con $l = e, \mu, \tau$. Adattato dalla ref. [32]

L'eq. (1.18) è invariante rispetto alla simmetria locale $SU(2)_L \otimes U(1)_W$, dove gli indici² W e L indicano che l'interazione debole ha luogo solo con le componenti sinistrorse del campo.

Le correnti possono essere considerate come la somma di un contributo leptonic e di uno adronico:

$$\mathcal{J}_\alpha = j_\alpha + J_\alpha \quad (1.19)$$

²Dall'inglese *weak* e *left*

Correnti leptoniche

Le correnti leptoniche cariche

$$j_\alpha^{CC} = \bar{\nu}\gamma_\alpha(1 - \gamma_5)l \quad (1.20)$$

sono mediate dai bosoni W^\pm e cambiano un generico leptone carico l in un neutrino e viceversa, lasciando inalterato il sapore della particella.

Le correnti leptoniche neutre

$$j_\alpha^{NC} = \frac{1}{2}\bar{\nu}\gamma_\alpha(1 - \gamma_5)\nu_l - \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2\theta_W)\bar{l}\gamma_\alpha(1 - \gamma_5)l + \sin^2\theta_W\bar{l}\gamma_\alpha(1 + \gamma_5)l \quad (1.21)$$

sono mediate dal bosone Z_0 e lasciano inalterata la natura della particella incidente. La corrente elettromagnetica

$$j_\alpha^{EM} = \bar{l}\gamma_\alpha l \quad (1.22)$$

è infine mediata dal fotone virtuale γ^* .

1.4 Correnti di quarks e correnti di adroni

Nell'ipotesi che i quarks siano particelle puntiformi di Dirac, è possibile esplicitare le correnti adroniche attraverso le seguenti relazioni:

$$J_\alpha^{EM} = \bar{q}Q\gamma_\alpha q = \frac{2}{3}\bar{u}\gamma_\alpha u - \frac{1}{3}(\bar{d}\gamma_\alpha d + \bar{s}\gamma_\alpha s) \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} J_\alpha^{NC} &= \bar{u}\gamma_\alpha\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3}2\sin^2\theta_W - \frac{1}{2}\gamma_5\right]u - \bar{d}\gamma_\alpha\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3}2\sin^2\theta_W - \frac{1}{2}\gamma_5\right]d \\ &\quad - \bar{s}\gamma_\alpha\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3}2\sin^2\theta_W - \frac{1}{2}\gamma_5\right]s \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$J_\alpha^{CC} = \begin{cases} \bar{u}\gamma_\alpha(1 - \gamma_5)d \cos\theta_c & W^+ \\ \bar{d}\gamma_\alpha(1 - \gamma_5)u \cos\theta_c & W^- \end{cases} \quad (1.25)$$

dove θ_c è l'angolo di Cabibbo, con valore standard $\cos\theta_c = 0.98$, $Q = I_3 + Y/2$ è la carica, definita dalla terza componente dell'isospin I_3 e dall'ipercarica Y , con

$$Q = \text{diag} \left(\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad -\frac{1}{3} \right) \quad (1.26)$$

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \quad T_z = \begin{pmatrix} +1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} +1/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} . \quad (1.27)$$

Nell'espressione per la corrente debole carica J_{CC}^α , si è ommesso il termine proporzionale a $\sin\theta_c \sim 0.22$.

In queste espressioni è inclusa un'implicita somma sul colore ed una regione di validità legata alle basse energie della QCD.

Corrente vettoriale

La simmetria locale di colore $SU(3)$ non è l'unica simmetria per cui la QCD risulta invariante. Non bisogna infatti tralasciare l'importanza delle simmetrie unitarie globali e delle correnti conservate ad esse associate, che impongono vincoli sulle dinamiche dei sistemi che interagiscono fortemente, sia che si tratti di quark, di gluoni oppure di adroni.

Nell'ipotesi di simmetria di isospin ($m_u = m_d = m_s$), la Lagrangiana risulta invariante per

$$q \longrightarrow \exp\left(i\theta^a \frac{\lambda_a}{2}\right)q \quad (1.28)$$

ed alla simmetria globale di sapore $SU(3)$ sono associate le correnti conservate di Noether

$$V_\alpha^a = \bar{q}\gamma_\alpha \frac{\lambda_a}{2}q \quad (1.29)$$

dove λ_a indica le matrici di Gell-Mann elencate in appendice, θ_a gli angoli di rotazione infinitesima ed $a = 1, \dots, 8$.

E' importante notare che la simmetria è rotta per

$$\partial^\alpha V_\alpha^a = i\bar{q}\left[m, \frac{\lambda_a}{2}\right]q \quad (1.30)$$

Nel termine di corrente elettromagnetico sono presenti queste combinazioni di correnti di sapore, peranto si può riscrivere l'eq. (1.23) inserendo l'operatore di carica

$$Q = \frac{Y}{2} + I_3 \quad (1.31)$$

e l'ipercarica

$$Y = B + S = \frac{\lambda_8}{\sqrt{3}} = \text{diag}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \quad (1.32)$$

dove B è il numero barionico, S la stranezza e la terza componente dell'isospin

$$I_3 = \frac{\lambda_3}{2} \quad (1.33)$$

In questo modo la corrente elettromagnetica si scrive come

$$J_\alpha^{EM} = \frac{1}{2}J_\alpha^Y + V_\alpha^3 \quad (1.34)$$

con

$$V_\alpha^3 = \bar{q}\gamma_\alpha \frac{\lambda_3}{2}q \quad (1.35)$$

e

$$J_\alpha^Y = \bar{q}\gamma_\alpha \frac{\lambda_8}{\sqrt{3}}q \quad (1.36)$$

rispettivamente corrente isovettoriale e corrente isoscalare.

Anche il termine vettoriale della corrente carica può essere espresso come combinazione lineare delle correnti dei sapori:

$$\begin{aligned} V_\alpha^{CC} &= \bar{u}\gamma_\alpha d = \bar{q}\gamma_\alpha \frac{\lambda_1 + i\lambda_2}{2} q = \\ &= \bar{q}\gamma_\alpha \frac{\lambda_+}{2} q = V_\alpha^1 + iV_\alpha^2 . \end{aligned} \quad (1.37)$$

Per quanto riguarda il termine vettoriale della corrente neutra si ha:

$$V_\alpha^{NC} = (1 - 2\sin^2 \theta_W) V_\alpha^3 - 2\sin^2 \theta_W \frac{1}{2} J_\alpha^Y - \frac{1}{2} J_\alpha^S \quad (1.38)$$

dove V_α^3 e J_α^Y sono gli stessi di prima, mentre

$$J_\alpha^S = \bar{s}\gamma_\alpha s . \quad (1.39)$$

Ciò dimostra che il termine isovettoriale della corrente elettromagnetica e quello vettoriale delle correnti deboli non sono altro che diverse componenti della stessa corrente vettoriale conservata³ $SU(3)_f$.

Corrente assiale

Si consideri il limite in cui i quarks sono considerati a massa nulla.

In questo caso la QCD presenta una simmetria addizionale, nota come simmetria chirale e la Lagrangiana risulta invariante per le trasformazioni

$$q_L \longrightarrow \exp\left(i\theta_L^a \frac{\lambda_a}{2}\right) q_L \quad \text{e} \quad q_R \longrightarrow \exp\left(i\theta_R^a \frac{\lambda_a}{2}\right) q_R \quad (1.40)$$

dove q_L e q_R indicano rispettivamente i campi destrorsi e sinistrorsi dei quarks, definiti come

$$q_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)q \quad q_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)q \quad (1.41)$$

a cui sono associate le correnti di Noether

$$J_\alpha^{a,L} = \bar{q}_L \gamma_\alpha \frac{\lambda_a}{2} q_L \quad \text{e} \quad J_\alpha^{a,R} = \bar{q}_R \gamma_\alpha \frac{\lambda_a}{2} q_R . \quad (1.42)$$

Dalla somma e dalla sottrazione di quest'ultime si ottengono la corrente vettoriale (1.29)

$$V_\alpha^a = J_\alpha^a = J_\alpha^{a,L} + J_\alpha^{a,R} = \bar{q}\gamma_\alpha \frac{\lambda_a}{2} q \quad (1.43)$$

e la corrente assiale

$$A_\alpha^a = J_\alpha^{a,R} - J_\alpha^{a,L} = \bar{q}\gamma_\alpha \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q . \quad (1.44)$$

³ Solitamente ci si riferisce alla conservazione della corrente vettoriale con l'abbreviazione CVC, dall'inglese Conserved Vector Current.

La simmetria chirale è esplicitamente rotta dal fatto che i quarks hanno una massa diversa da zero, e la divergenza della corrente assiale diventa

$$\partial^\alpha A_\alpha^a = i\bar{q}\left\{m, \frac{\lambda_a}{2}\right\}\gamma_5 q \quad (1.45)$$

Nella rappresentazione di Gell-Mann soltanto le matrici γ_3 e γ_8 sono diagonali, pertanto sono le sole a conservare il sapore e per le quali si può riscrivere la corrente elettromagnetica come

$$J_\alpha^{EM} = V_\alpha^3 + V_\alpha^S \quad (1.46)$$

dove V_α^3 è la corrente di spin isovettoriale, mentre

$$V_\alpha^S = \bar{q}\gamma_\alpha \frac{\lambda_8}{2\sqrt{3}}q \quad (1.47)$$

è la corrente iso-scalare.

Per quanto riguarda la corrente debole neutra, si può scrivere:

$$J_\alpha^{NC} = V_\alpha^{NC} + A_\alpha^{NC} \quad (1.48)$$

con

$$V_\alpha^{NC} = (1 - 2\sin^2\theta_W)V_\alpha^3 - 2\sin^2\theta_W V_\alpha^S - \frac{1}{2}\bar{s}\gamma^\alpha s \quad (1.49)$$

e

$$A_\alpha^{NC} = A_\alpha^3 + \frac{1}{2}A_\alpha^S \quad (1.50)$$

dove

$$A_\alpha^a = \bar{q}\gamma_\alpha \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2}q \quad (1.51)$$

e

$$A_\alpha^S = \bar{s}\gamma_\alpha \gamma_5 s \quad (1.52)$$

In modo analogo la corrente carica debole si scrive come

$$J_\alpha^{CC} = V_\alpha^{CC} + A_\alpha^{CC} \quad (1.53)$$

dove

$$V_\alpha^{CC} = \bar{q}\gamma_\alpha \frac{\lambda_\pm}{2}q \quad (1.54)$$

e

$$A_\alpha^{CC} = \bar{u}\gamma_\alpha \gamma_5 d = \bar{q}\gamma_\alpha \gamma_5 \frac{\lambda_\pm}{2}q = A_\alpha^1 + iA_\alpha^2$$

con la divergenza

$$\partial^\alpha A_\alpha^{CC} = \frac{1}{2}i(m_u + m_d)\bar{u}\gamma_5 d \quad (1.55)$$

da cui si evince che la corrente assiale debole si conserva nel limite in cui sia m_u che m_d tendono a zero.

Analogamente al caso vettoriale, si conclude che i termini assiali della corrente neutra (A_α^3) e della corrente carica (A_α^1 e A_α^2) appartengono alla stessa corrente assiale conservata⁴ $SU(3)_f$.

In ogni caso stavolta non è possibile stabilire alcuna connessione con il caso elettromagnetico. E' inoltre importante notare che le espressioni ricavate sono vincolate soltanto dall'ipotesi di simmetria di isospin dell'interazione forte e risultano quindi indipendenti dai dettagli della struttura adronica.

⁴In questo caso l'abbreviazione è PCAC, dall'inglese Partially Conserved Axial Current.

Capitolo 2

Diffusione di elettroni da nucleoni

Per descrivere l'interazione leptone-nucleone, in questa tesi si ricorre all' *approssimazione di singolo fotone*¹, nella quale, separando la parte relativa al leptone da quella relativa al nucleone, si considera un solo fotone come mediatore dell'interazione e si trascurano lo scambio multiplo e tutte le correzioni radiative.

Con questa approssimazione, la sezione d'urto associata alla diffusione di un elettrone incidente e su un nucleone N si scrive [33] come

$$d\sigma = \frac{M \cdot m_e}{(P_i \cdot k)} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i + k - k' - P_f) \left| \langle k' | \hat{j}^\mu(0) | k \rangle \frac{1}{Q^2} \langle P_i | \hat{J}_\mu(0) | P_f \rangle \right|^2 \frac{m_e d^3 k'}{E' (2\pi)^3} d\tau_f \quad (2.1)$$

dove $\hat{j}^\mu(0)$ e $\hat{J}_\mu(0)$ sono i quadri-operatori di corrente elettromagnetica rispettivamente leptonic ed adronico, $M(E_i, P_i)$ e $m_e(E, k)$ le masse (energia totale, quadri-impulso) del nucleone e dell'elettrone nello stato iniziale, k' (P_f) il quadri-impulso dell'elettrone (nucleone) nello stato finale, $Q^2 = -q^2 = -(k - k')^2 = \vec{q}^2 - \nu^2 = 4EE' \sin^2(\theta/2) > 0$ il quadrato del quadri-impulso trasferito (con $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$, $\nu = E - E'$ e $\theta \equiv \theta_{\widehat{\vec{k}\vec{k}'}}$) e $d\tau_f$ il volume dello spazio delle fasi di tutte le particelle nello stato finale, ad esclusione dell'elettrone diffuso.

La sezione d'urto (2.1) può essere riformulata in modo da risultare proporzionale alla contrazione di due tensori, leptonic ed adronico. Quest'ultimo risulta particolarmente importante, in quanto nei processi di interazione leptone-adrone la struttura del tensore leptonic è sempre lo stesso, mentre quella del tensore adronico, riflettendo la struttura interna dell'adrone, cambia a seconda dell'adrone in esame e del meccanismo di diffusione. A seguito della contrazione, come vedremo, la sezione d'urto fattorizza in un termine elettromagnetico ed in un termine adronico, completamente descritto dalle funzioni di risposta.

In un processo di diffusione il numero di variabili cinematiche indipendenti n è fissato dalla relazione

$$n = 3N - 10 \quad (2.2)$$

dove N è il numero delle particelle che prendono parte all'interazione. In un processo inclusivo e nella diffusione elastica $n = 2$, e di solito la scelta cade sugli scalari

¹ OPEA, dall'inglese One Photon Exchange Approximation

invarianti di Lorentz

$$Q^2 \stackrel{lab}{=} -q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\frac{P_i \cdot q}{M} \stackrel{lab}{=} \nu \quad (2.3)$$

dove P_i ed M sono il quadri-impulso e la massa del nucleone bersaglio. In questo contesto si definisce la *massa invariante* dello stato adronico finale

$$W^2 = (q + P_i)^2 = -Q^2 + M^2 + 2M\nu \quad (2.4)$$

in funzione della quale è possibile classificare i diversi processi di diffusione:

- diffusione *elastica*: $W^2 = M^2$;
- diffusione *anelastica*: $W^2 = M^{*2}$, dove M^* indica la massa del nucleone eccitato;
- diffusione *profondamente anelastica*: $W^2 \gg M^2$.

Presentiamo di seguito una breve descrizione dei processi di diffusione appena elencati.

2.1 Diffusione elastica $N(e, e')N$ e fattori di forma del nucleone

Il diagramma in Figura 2.1, descrive il processo di diffusione esclusiva elastica

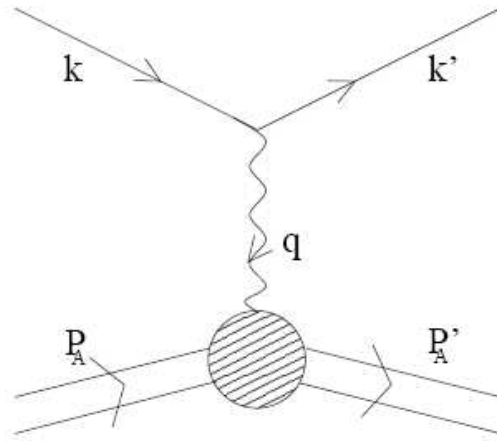


Figura 2.1: Diagramma OPEA della diffusione esclusiva elettrone-adrone. In questa figura $P_A \equiv P_i$ e $P_A' \equiv P_f$

$$e + A \longrightarrow e' + A \quad (2.5)$$

in cui vengono rivelati tutti gli stati finali.

In questo caso $W^2 = M^2$, pertanto ν e Q^2 non sono variabili indipendenti, ma legate dalla relazione

$$\nu = \frac{Q^2}{2M} \quad . \quad (2.6)$$

Per calcolare la sezione d'urto è necessario determinare un'espressione per il vertice nucleone-fotone, la cui struttura è fortemente vincolata dalle richieste base di invarianza di Lorentz, invarianza di gauge, conservazione della parità ed invarianza temporale e che si scrive [34, 35, 36, 37] come

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu F_1(Q^2) + i \frac{\kappa}{2M} F_2(Q^2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu \quad (2.7)$$

dove $F_1(Q^2)$ e $F_2(Q^2)$ sono i *fattori di forma* rispettivamente di *Dirac* e di *Pauli*, κ è il momento magnetico anomalo del nucleone, che assume i valori

$$\kappa_p = 1.79 \longrightarrow \text{protone} \quad (2.8)$$

$$\kappa_n = -1.91 \longrightarrow \text{neutrone} \quad (2.9)$$

e $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$.

La sezione d'urto esclusiva elastica è nota come *formula di Rosenbluth* ed è definita come

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \frac{E'}{E} \left[(F_1^2(Q^2) + \tau \kappa^2 F_2^2(Q^2)) + 2\tau (F_1(Q^2) + \kappa F_2(Q^2))^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (2.10)$$

con $\tau = \frac{Q^2}{4M_N^2}$ e $\frac{E'}{E} = \{1 + 2\frac{E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}\}^{-1}$ fattore di rinculo.

L'identità di Gordon

$$\bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) = \bar{u}(k') \left[\frac{(k + k')_\mu}{2M} + \frac{i \sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2M} \right] u(k) \quad (2.11)$$

permette di riscrivere il vertice adrone-fotone

$$\Gamma_\mu = G_M(Q^2) \gamma_\mu + \frac{G_E(Q^2) - G_M(Q^2)}{1 - \tau} \cdot \frac{(k + k')_\mu}{2M} \quad (2.12)$$

e la formula di Rosenbluth

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \frac{E'}{E} \left[\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} + 2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \cdot \tau G_M^2(Q^2) \right] \quad (2.13)$$

in funzione di $G_E(Q^2)$ e $G_M(Q^2)$, rispettivamente *fattore di forma di Sachs elettro-nico* e *magnetico*, legati alle funzioni di struttura come segue:

$$G_E = F_1 + \tau \kappa F_2 \quad G_M = F_1 + \kappa F_2 \quad . \quad (2.14)$$

La dipendenza dei fattori di forma da Q^2 è osservabile sperimentalmente [1] e permette di ricavare informazioni sulla distribuzione radiale di carica e sul momento

magnetico dei nucleoni.

Particolarmente interessante è il caso $Q^2 \rightarrow 0$, limite in cui

$$G_E(Q^2 = 0) = \frac{Q}{e} \quad G_M(Q^2 = 0) = \frac{\mu}{\mu_N} \quad (2.15)$$

dove Q , μ e μ_N indicano rispettivamente la carica ed il momento magnetico del nucleone ed il magnetone nucleare.

Si trovano i seguenti valori:

$$\begin{aligned} G_M^n(Q^2 = 0) &= -1.91 & G_M^p(Q^2 = 0) &= 2.79 \\ G_E^n(Q^2 = 0) &= 0 & G_E^p(Q^2 = 0) &= 1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Dalla definizione (2.14) si osserva che l'importanza dei fattori di forma cambia notevolmente in base al valore di Q^2 ed è pertanto possibile identificare le tre regioni seguenti:

- $Q^2 \ll 4M^2$: in questa regione G_E domina la sezione d'urto e si può misurare con precisione il raggio della carica elettrica

$$r_E = (0.85 \pm 0.02) \text{ fm};$$

- $(0.02 \leq Q^2 \leq 3) \text{ GeV}^2$: in questa regione G_E e G_M forniscono entrambe un contributo importante;
- $Q^2 \geq 3 \text{ GeV}^2$: in questa regione la sezione d'urto è dominata dal contributo di G_M e G_E diventa trascurabile;

I fattori di forma $G_E(Q^2)$ e $G_M(Q^2)$ si estrapolano facilmente dai dati sperimentali mediante un procedimento noto come *Rosenbluth plot*, che consiste nel graficare σ_2/σ_{Mott} in funzione di $\tan^2 \frac{\theta}{2}$ per valori fissati di ν e Q^2 , con $\sigma_2 = \left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} \right)_{sper}$.

In questo caso l'intercetta fornisce $(G_E^2 + \tau G_M^2)$, mentre la pendenza della retta dà G_M^2 , come si può vedere nell'esempio in Figura 2.2.

Bisogna sottolineare che questo metodo è proprio dell'approssimazione di scambio di un solo fotone.

Sperimentalmente si è trovato che i fattori di forma tendono rapidamente a zero al crescere di Q^2 e si può dimostrare che questo comportamento è dovuto all'invarianza relativistica che genera i due termini dei fattori di forma F_1, F_2 .

In Figura 2.3 è riportato questo comportamento, descritto dall'approssimazione di *andamento di dipolo* [38]:

$$G^{dipolo}(Q^2) = \frac{1}{(1 + \frac{Q^2}{M_V^2})^2} \quad (2.17)$$

dove $M_V = 0.843 \text{ GeV}$

In questa approssimazione i fattori di Sachs si scrivono:

$$G_E^p(Q^2) = G^{dipolo}(Q^2) \quad (2.18)$$

$$G_E^n(Q^2) = 0 \quad (2.19)$$

$$G_M^p(Q^2) = \mu_p G^{dipolo}(Q^2) \quad (2.20)$$

$$G_M^n(Q^2) = \mu_n G^{dipolo}(Q^2) \quad (2.21)$$

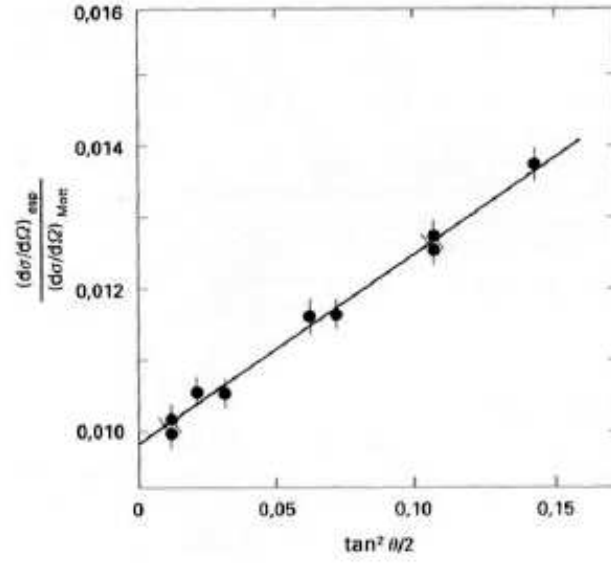


Figura 2.2: $\sigma_{sper}/\sigma_{Mott}$ in funzione di $\tan^2(\theta/2)$ per $Q^2 = 2.5 \text{ GeV}^2$. Adattato dalla Ref. [1]

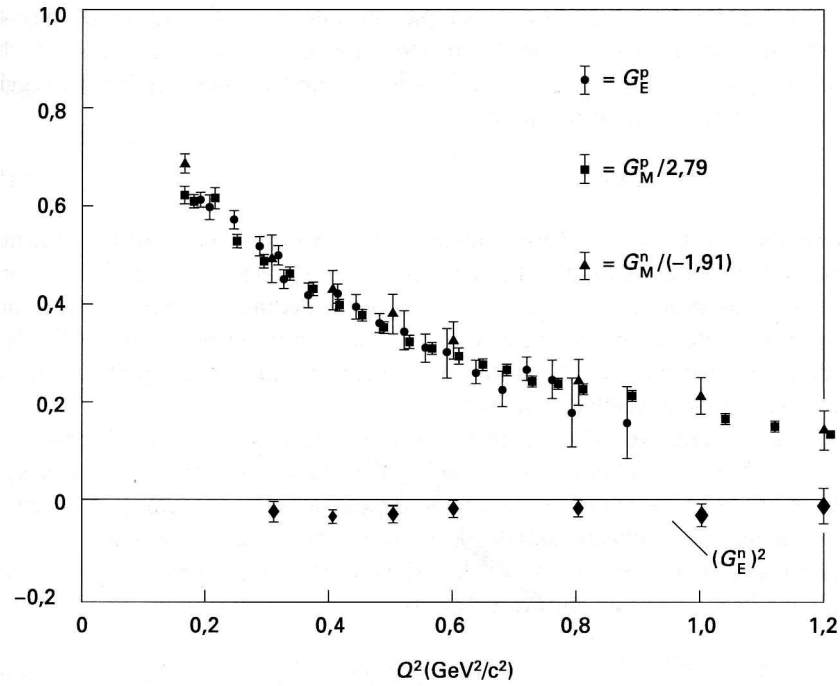


Figura 2.3: Fattori di forma di Sachs del neutrone e del protone in funzione di Q^2 . I valori sperimentali sono stati divisi per i fattori indicati nel diagramma, implicando la sovrapposizione dei punti e mostrando quindi l'andamento globale di tipo dipolare. Adattato alla Ref. [1]

dove si nota che hanno tutti valore positivo, ad eccezione di G_M^n , in quanto $\mu_p = 2.792847$ e $\mu_n = -1.913043$.

La sezione d'urto (2.13) è scritta in funzione dei fattori di forma, pertanto tende a rapidamente a zero al crescere di Q^2 , come $1/Q^4$.

2.2 Diffusione anelastica e profondamente anelastica

I processi di diffusione elastica evidenziano le deviazioni di un nucleone da una particella puntiforme, ma per indagare la struttura interna dei nucleoni è necessario passare ai processi di diffusione profondamente anelastica, in cui possono essere eccitati i gradi di libertà interni dei nucleoni.

La sezione d'urto inclusiva nel sistema del laboratorio si ottiene sostituendo $f \equiv X$ e $d\tau_f = 1$ nell'eq. (2.1), e si scrive come [33, 39]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega' dE'} = \frac{4\alpha^2}{Q^4} \frac{E'}{E} \frac{1}{2} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^N \quad (2.22)$$

con

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137} \quad (2.23)$$

costante di struttura fine e dove, trascurando la massa dell'elettrone, il *tensore leptónico* ed il *tensore adronico* nel sistema di riferimento dell'adrone a riposo sono

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma_e \sigma_{e'}} [\bar{u}(k') \gamma_\mu u(k)]^\dagger [\bar{u}(k) \gamma_\nu u(k')] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma_e \sigma_{e'}} | \langle k' | \hat{j}^\mu(0) | k \rangle |^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

e

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^N &= \frac{1}{4\pi} \overline{\sum_{\alpha_N}} \sum_X (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i + q - P_X) \\ &< \alpha_N, \vec{P}_i = 0 | \hat{J}_\mu^N(0) | \alpha_X, \vec{P}_X > < \alpha_X, \vec{P}_X | \hat{J}_\nu^N(0) | \alpha_N, \vec{P}_i = 0 > \end{aligned} \quad (2.25)$$

dove $\overline{\sum_{\alpha_N}}$ rappresenta la media sui numeri quantici dello stato iniziale del bersaglio, \sum_X la somma su tutti gli stati discreti ed un integrale su quelli continui dello stato finale non rivelato, mentre il tensore metrico è definito come

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Le proprietà delle matrici gamma permettono di riscrivere il tensore leptónico come

$$L_{\mu\nu} = k_\mu k'_\nu + k'_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} (k \cdot k') . \quad (2.26)$$

L'equazione di continuità associata alla conservazione della corrente è verificata dalla seguente uguaglianza

$$\partial_\mu \hat{j}_{fi}^\mu = q_\mu [\bar{u}(k') \gamma_\mu u(k)] = 0 \quad (2.27)$$

confermata dall'identità di Ward

$$q_\mu L_{\mu\nu} = q_\nu L_{\nu\mu} = 0 \quad (2.28)$$

da cui si evince facilmente la simmetria del tensore leptonico, ovvero il fatto che

$$L_{\mu\nu} = L_{\nu\mu} \quad . \quad (2.29)$$

Il calcolo del tensore adronico risulta molto più complesso, in quanto presuppone la conoscenza della struttura dell'adrone stesso; per questa ragione nella sua formulazione si introducono le *funzioni di struttura* o *funzioni di risposta* W_i^N , misurabili sperimentalmente, che descrivono la composizione interna dell'adrone, che in questo caso è un nucleone.

Dalla conservazione dell'impulso si evince che per determinare il numero di queste ultime, è necessario considerare i tre scalari invarianti di Lorentz $P_i \cdot q$, q^2 e P_i^2 e tutti i possibili tensori di rango due derivanti dalle loro combinazioni. Osservando che

$$W_{\mu\nu} = W_{\nu\mu} \quad (2.30)$$

in perfetta analogia con il tensore leptonico, e che per l'invarianza di gauge

$$q_\mu W^{\mu\nu} = q_\nu W^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (2.31)$$

ed imponendo inoltre l'invarianza per inversione temporale e la conservazione della parità, il numero delle funzioni di struttura per un processo inclusivo si riduce a 2. Quest'ultime sono espresse in funzione delle due variabili indipendenti (2.3), pertanto il tensore adronico per il nucleone si scrive come

$$W_{\mu\nu}^N = W_1^N(\nu, Q^2) \left[g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] + \frac{W_2^N(\nu, Q^2)}{M^2} \tilde{P}_\mu^i \tilde{P}_\nu^i \quad (2.32)$$

con

$$\tilde{P}_\mu^i = P_\mu^i + \frac{q_\mu (P^i \cdot q)}{Q^2} \quad .$$

Nel caso di diffusione elastica le funzioni di struttura sono note e si scrivono come

$$\begin{aligned} W_2^{N, el}(\nu, Q^2) &= \frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right) \\ W_1^{N, el}(\nu, Q^2) &= \tau G_M^2(Q^2) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

altrimenti è necessario assumere qualche modello per la corrente adronica per esplicitare W_i^N .

Il calcolo della sezione d'urto differenziale richiede la contrazione dei tensori leptonico ed adronico, e si scrive come

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega'dE'} = \sigma_{Mott} \left[W_2^N(\nu, Q^2) + 2W_1^N(\nu, Q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (2.34)$$

dove

$$\sigma_{Mott} = \left(\frac{\alpha \cos \frac{\theta}{2}}{2E \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \quad (2.35)$$

è la sezione d'urto di Mott, che descrive la diffusione su bersagli puntiformi.

L'eq. (2.34) può essere riformulata in funzione di ν e Q^2 [39]:

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{\pi}{E E'} \sigma_{Mott} \left[W_2^N(\nu, Q^2) + 2W_1^N(\nu, Q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] . \quad (2.36)$$

Le funzioni di struttura che compaiono nelle eqq. (2.34) e (2.36) si estrapolano dai dati sperimentali ancora una volta attraverso il metodo del *Rosenbluth plot*, in cui i valori di W_1 e W_2 sono espressi rispettivamente dal coefficiente angolare e dall'intercetta. Introducendo R_L e R_T , componente longitudinale e trasversale delle funzioni risposta, la sezione d'urto inclusiva si scrive come

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'dE'} = \sigma_{Mott} \{ V_L R_L(\nu, Q^2) + V_T R_T(\nu, Q^2) \} \quad (2.37)$$

con

$$\begin{aligned} V_L &= \frac{Q^4}{|\vec{q}|^4} & V_T &= \frac{Q^2}{2|\vec{q}|^2} + \tan^2 \frac{\theta}{2} \\ R_L &= -\frac{\vec{q}^2}{Q^2} W_1 + \frac{\vec{q}^4}{Q^4} W_2 & R_T &= 2W_1 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ancora una volta è possibile risalire alle risposte longitudinale e trasversa mediante il metodo del Rosenbluth plot.

Le W_i hanno le dimensioni fisiche di $[energia]^{-1}$ e sono abitualmente sostituite con le funzioni adimensionali [1]

$$\begin{aligned} MW_1(Q^2, \nu) &= F_1(\nu, Q^2) \\ \nu W_2(Q^2, \nu) &= F_2(\nu, Q^2) \end{aligned} \quad (2.39)$$

che si rivelano particolarmente importanti nello studio della diffusione profondamente anelastica.

Come abbiamo visto, per valori della massa invariante di $W^2 = M^{*2}$ si parla di diffusione inclusiva anelastica. Questo tipo di processi è contraddistinto da energie tali da eccitare i gradi di libertà interni dei bersagli, rendendo quindi possibile un'analisi accurata della loro struttura interna. In Figura 2.4, è illustrata la dipendenza della sezione d'urto dall'energia trasferita, dove, in aggiunta al picco elastico, si può notare una serie di ulteriori picchi, corrispondenti all'eccitazione di specifici livelli dello spettro discreto del bersaglio, che nel caso in esame è un protone. L'esistenza di questi picchi è fondamentale, in quanto dimostra che il protone è un sistema

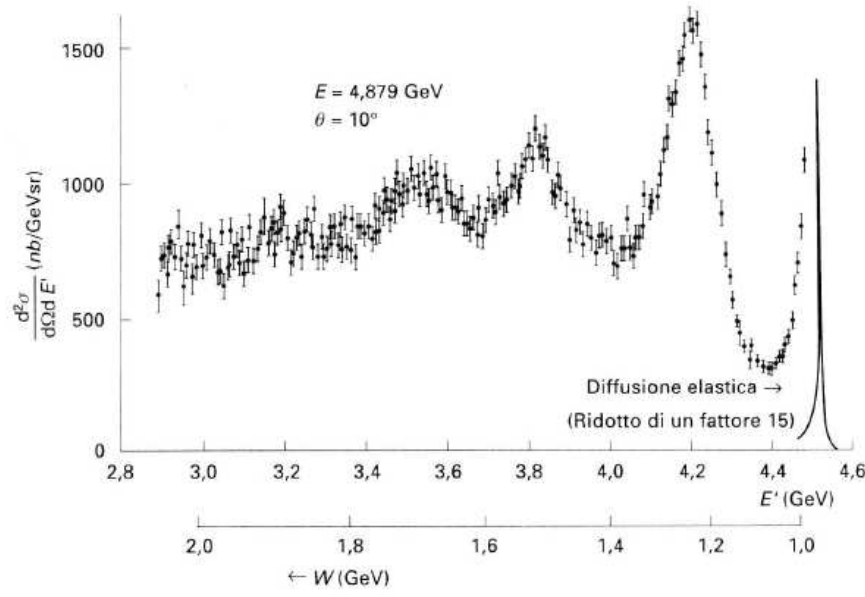


Figura 2.4: Sezione d'urto differenziale doppia per la diffusione di elettroni, con energia iniziale $E = 4.879 \text{ GeV}$, su idrogeno, disegnata in funzione dell'energia E' degli elettroni diffusi rivelati a $\theta = 10^\circ$ e in funzione della massa invariante del sistema adronico non osservato, W . Adattato ref. [1].

composito.

Per valori moderati dell'energia trasferita, si possono eccitare solo gli stati discreti di eccitazione del nucleone (vedi fig. 2.4), per esempio lo stato Δ nel processo $e + p \rightarrow e + \Delta \rightarrow e + p + \pi^0$.

Gli stati del continuo del nucleone possono invece essere eccitati solo per valori dell'energia trasferita molto elevati, ($W^2 \gg M^2$), ed in questo caso nello stato finale si possono creare tutti i possibili frammenti adronici. Si parla allora di diffusione profondamente anelastica.

Nella regione profondamente anelastica è utile introdurre le variabili adimensionali di Bjorken x , frazione dell'energia del leptone incidente portata dal fotone virtuale, ed y , frazione dell'impulso totale del nucleone portata dal partone colpito:

$$\begin{aligned} x &= \frac{q^2}{2(P^i \cdot q)} \stackrel{\text{lab}}{=} \frac{Q^2}{2M\nu} \\ y &= \frac{P^i \cdot q}{P^i \cdot k} \stackrel{\text{lab}}{=} \frac{\nu}{E} . \end{aligned} \quad (2.40)$$

Gli intervalli cinematici permessi per le due variabili sono:

$$\begin{aligned} 0 < x &\leq 1 \\ 0 < y &< \frac{1}{1 + xM/2E} < 1 . \end{aligned} \quad (2.41)$$

Si definisce inoltre il *limite di Bjorken*

$$Q^2 \longrightarrow \infty \quad \nu \longrightarrow \infty \quad x = \frac{Q^2}{2M\nu} \text{ fissato} \quad (2.42)$$

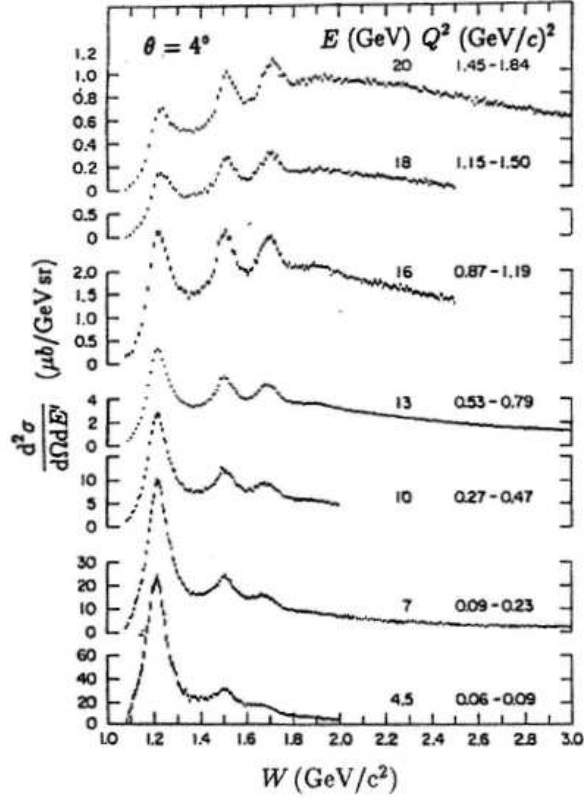


Figura 2.5: Spettro di eccitazione per la diffusione profondamente anelastica elettrone-protone in funzione della massa invariante W . Sono da notare le differenti scale dell'asse y. Le misure sono state prese ad un angolo fissato $\theta = 4^\circ$. L'intervallo di variabilità dei dati in Q^2 cresce all'aumentare dell'energia E del fascio incidente. Le risonanze, in particolare la prima ($W = 1.232$ GeV), diventano sempre meno pronunciate, mentre il continuo ($W \geq 2.5$ GeV) decresce solo lentamente.

in cui è importante analizzare il comportamento asintotico delle F_i :

$$\begin{aligned} \lim_{Q^2, \nu \rightarrow \infty} MW_1(Q^2, \nu) &\longrightarrow F_1(x) \\ \lim_{Q^2, \nu \rightarrow \infty} \nu W_2(Q^2, \nu) &\longrightarrow F_2(x) . \end{aligned} \quad (2.43)$$

Si può notare infatti che nel limite di Bjorken le F_i perdono la loro dipendenza da ν e Q^2 , diventando funzioni della sola variabile x . Questa proprietà è nota come *scaling di Bjorken*, poichè le quantità sono indipendenti da Q^2 , che definisce

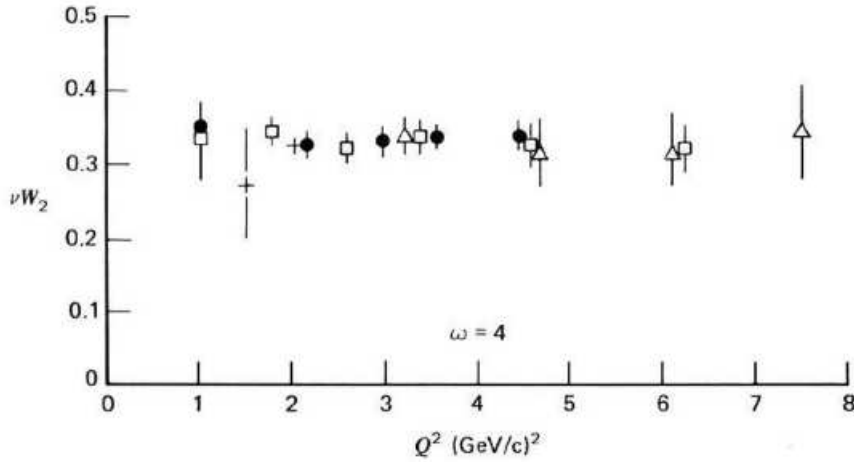


Figura 2.6: Andamento di $F_2 = \nu W_2$ in funzione di Q^2 per $x = 0.25$. Adattato dalla Ref. [1]

la scala energetica dell'interazione, ed è riscontrabile nel grafico in Figura 2.6, che rappresenta un risultato molto importante per la fisica delle particelle elementari, in quanto implica che la diffusione avviene su costituenti puntiformi, denominati *partoni*.

Dalla Figura 2.7 si può osservare che per $10^{-5} \leq x \leq 0.65$, F_2 risulta indipendente da Q^2 , confermando la validità dello scaling, ma a valori molto bassi di x le correzioni radiative della QCD si impongono fortemente, portando ad una violazione di scala. Pertanto, pur ritenendo sempre valido il fenomeno di scaling, bisogna porre dei limiti inferiori al valore di x .

La funzione di struttura $F_1(x)$ è legata all'interazione magnetica e si annulla quando la diffusione ha luogo su particelle con spin zero, mentre nel caso di particelle di Dirac è legata alla $F_2(x)$ dalla *relazione di Callan-Gross* (Figura 2.8):

$$2xF_1(x) = F_2(x) . \quad (2.44)$$

Nel regime non relativistico i fattori di forma corrispondono alle trasformate di Fourier della densità di carica e di magnetizzazione dovute soltanto al momento magnetico anomalo.

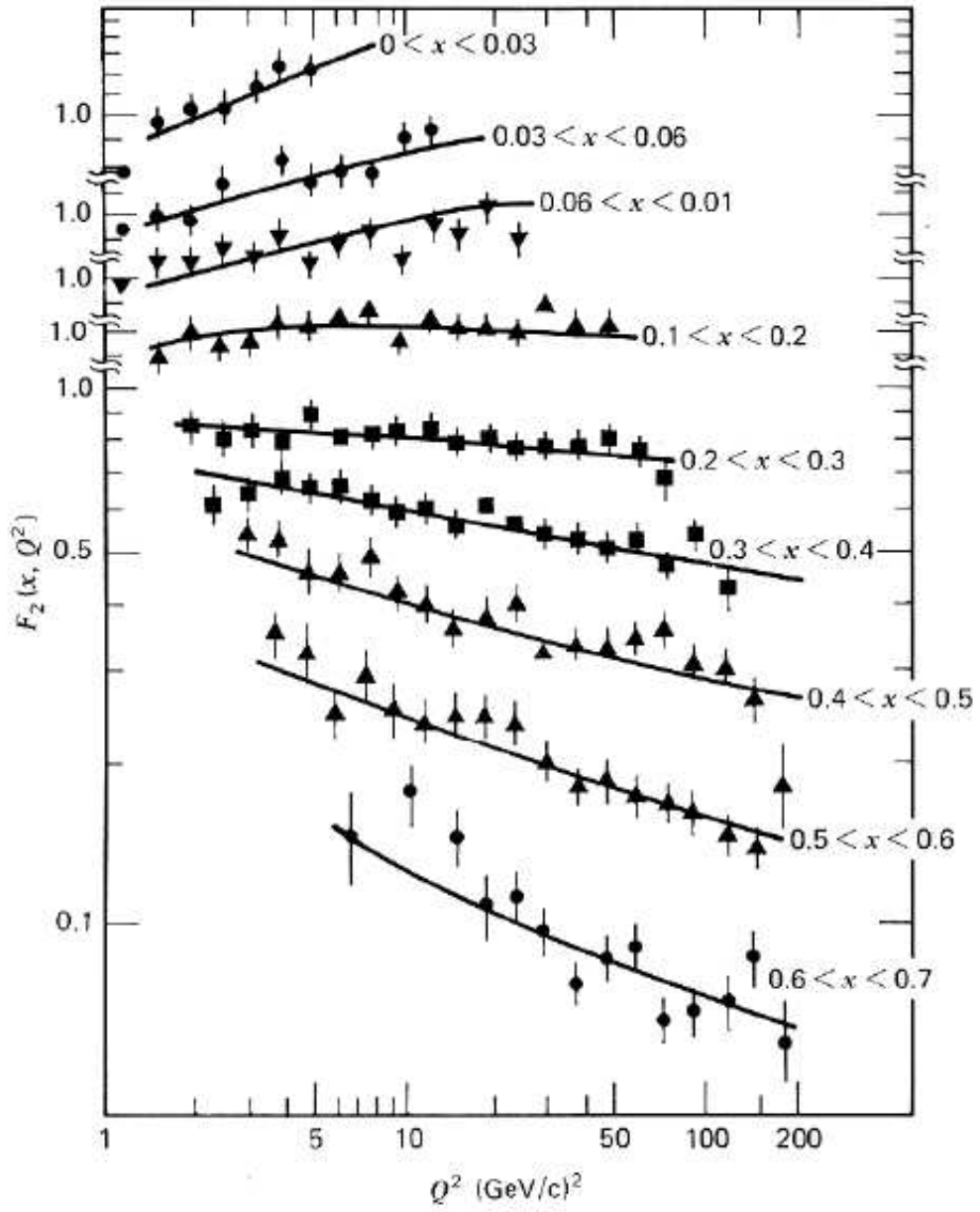


Figura 2.7: Funzione di struttura F_2 del protone in funzione di Q^2 per vari valori di x . Deviazione dal fenomeno di scala. Adattato dalla ref. [40]

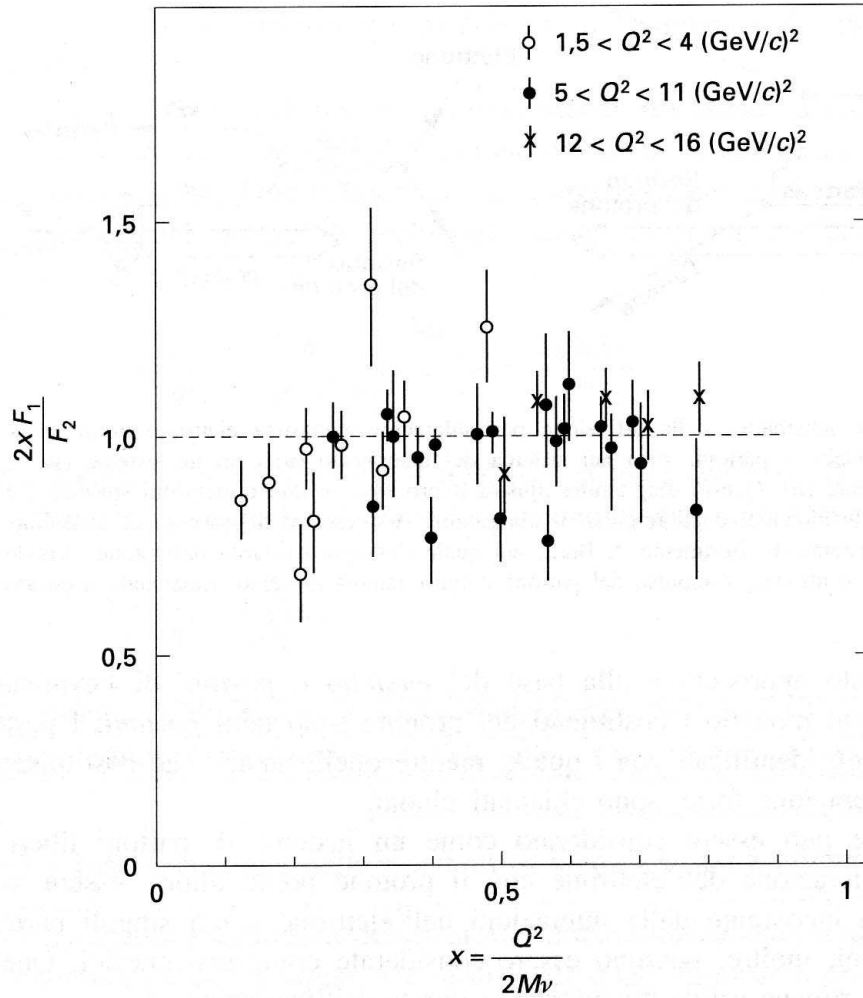


Figura 2.8: Rapporto tra le funzioni di struttura $2xF_1(x)$ e $F_2(x)$. I dati sperimentali sono stati raccolti a SLAC. Adattato dalla Ref. [1]

Capitolo 3

Diffusione di neutrini da nucleoni

Si è già sottolineato che nel Modello Standard il neutrino è considerato una particella con massa nulla e che i risultati sperimentali hanno smentito questa ipotesi. Tuttavia il valore assoluto della massa del neutrino rappresenta un'incognita, ma è comunque trascurabile nel calcolo della sezione d'urto νN e $\nu \mathcal{N}$, senza perdita di generalità. Pertanto in questo lavoro di tesi si assumerà $m_\nu = 0$.

Siano $k_\alpha = (E_\nu, \vec{k})$ e $k'_\alpha = (E_l, \vec{k}')$ il quadri-impulso rispettivamente del neutrino incidente e del leptone diffuso che, a seconda del processo in esame, sarà un neutrino (diffusione NC) o un altro leptone (diffusione CC). Siano inoltre $M(E_i, P_i)$ la massa (energia totale, quadri-impulso) del nucleone bersaglio e $q = (E_q = E_\nu - E_l, \vec{q} = \vec{k} - \vec{k}')^1$ il quadri-impulso trasferito dal proiettile al bersaglio.

Analogamente alla diffusione di elettroni, nel sistema di riferimento del nucleone a riposo si introduce la *massa invariante*

$$W^2 = (q + P_i)^2 = M^2 - Q^2 + 2E_q M \quad (3.1)$$

in funzione della quale è ancora una volta possibile distinguere tra i diversi processi di diffusione:

- diffusione *elastica*: $W^2 = M^2$;
- diffusione *anelastica*: $W^2 = M^{*2}$;
- diffusione *DIS*: $W^2 \gg M^2$.

La cinematica del processo risulta completamente determinata dall'energia del neutrino E_ν e dal quadrato del quadri-impulso trasferito Q^2 , una volta fissato il valore di W^2 .

Nell'ipotesi in cui il neutrino incidente abbia impulso parallelo all'asse z , il quadri-impulso del neutrino incidente è

$$k_\alpha = (E_\nu, 0, 0, E_\nu) \quad (3.2)$$

e l'impulso del leptone diffuso è

$$|\vec{k}'| = \sqrt{E_l^2 - m_l^2} \quad (3.3)$$

¹Per evitare confusione tra il neutrino ν e l'energia trasferita $\nu = E_\nu - E_l$, nel caso di diffusione di neutrini si è preferito indicare l'energia trasferita con la notazione E_q .

dove $E_l = E_\nu - E_q$.

L'angolo compreso tra \vec{k} e \vec{k}' è dato da

$$\cos \theta_{lab} = -\frac{Q^2 + m_l^2 - 2E_\nu E_l}{2E_\nu |\vec{k}'|} \quad (3.4)$$

mentre l'angolo ϕ è scelto arbitrariamente per un dato evento, e definisce il versore

$$\vec{e}_l = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (3.5)$$

del leptone diffuso.

Per il quadri-impulso del leptone diffuso si ottiene

$$k'_\alpha = (E_l, |\vec{k}'| \vec{e}_l) \quad (3.6)$$

e quindi il quadri-impulso del bosone mediatore si scrive

$$k_\alpha - k'_\alpha = (E_\nu - E_l, \vec{k} - \vec{k}') \quad (3.7)$$

Pertanto conoscere E_ν , Q^2 e M_f^2 implica l'immediata conoscenza di k, k' e q .

Decomposizione della sezione d'urto

In perfetta analogia con la diffusione eN , l'interazione tra neutrini e nucleoni può dare origine a processi elastici ($W^2 = M^2$), anelastici ($W^2 = M^{*2}$) e profondamente anelastici ($W^2 \gg M^2$) [32], [41], [42].

Il termine elastico assume un significato diverso dalla diffusione di elettroni, infatti nei processi CC il neutrino incidente si trasforma nel suo corrispondente leptone carico, mentre nelle reazioni NC il neutrino mantiene la sua identità. Questo fenomeno è causato dal diverso bosone mediatore che partecipa all'interazione, Z_0 con massa $M_{Z_0} = 91.188$ GeV e W^\pm con $M_{W^\pm} = 80.1$ GeV rispettivamente per i processi NC e CC.

La diffusione elastica è quindi caratterizzata dai seguenti processi:

$$\begin{cases} \nu(\bar{\nu}) + N \longrightarrow \nu(\bar{\nu}) + N & \text{diffusione NC} \\ \nu + N \longrightarrow l^- + N' \\ \bar{\nu} + N \longrightarrow l^+ + N' & \text{diffusione CC} \end{cases} \quad .$$

La sezione d'urto elastica per processi di diffusione neutrino-nucleone si scrive come

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} \propto \frac{M^2 G_F^2}{8\pi E_\nu^2} \quad (3.8)$$

Una formulazione più accurata della diffusione elastica necessita la distinzione tra processi CC ed NC.

Nella diffusione anelastica possiamo avere:

$$\begin{cases} \nu(\bar{\nu}) + N \longrightarrow \nu(\bar{\nu}) + N^* & \text{diffusione NC} \\ \nu + N \longrightarrow l + N^* & \text{diffusione CC} \end{cases} \quad (3.9)$$

Nella regione anelastica l'energia del neutrino si aggira intorno ai 2 GeV.
Nei processi inclusivi profondamente anelastici possiamo avere:

$$\begin{aligned}\nu(\bar{\nu}) + N &\longrightarrow \nu(\bar{\nu}) + X && \text{diffusione NC} \\ \nu(\bar{\nu}) + N &\longrightarrow l^\mp + X && \text{diffusione CC} \quad .\end{aligned}\tag{3.10}$$

Nei grafici in Figura 3.1 è rappresentato l'andamento della sezione d'urto in funzione dell'energia del neutrino nelle regioni appena descritte.

Per valori delle energie intorno ai 1.5 GeV, le reazioni sono dominate dai processi quasi-elastico e risonante.

3.1 Diffusione elastica da correnti cariche $N(\nu_\mu, \mu)N'$

Il tensore adronico è definito dalla corrente [32, 43]

$$J_\alpha^{CC} = \langle p(p') | J_\alpha^{CC}(0) | n(p) \rangle \tag{3.11}$$

dove $|n(p)\rangle$ rappresenta un neutrone di momento p e $\langle p(p')|$ un protone di momento p' . La trasformazione di un neutrone in un protone è definita dal passaggio di un quark down in un quark up e questo spiega la presenza dell'angolo di Cabibbo nell'espressione

$$J_\alpha^{CC} = \cos \theta_C (V_\alpha^{CC} - A_\alpha^{CC}) \tag{3.12}$$

con

$$V_\alpha^{CC} = \bar{u}_p(p') \left[\gamma_\alpha F_1^V(Q^2) + \frac{i}{2M} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta F_2^V(Q^2) + \frac{q_\alpha}{M} F^S(Q^2) \right] u_n(p) \tag{3.13}$$

$$-A_\alpha^{CC} = \bar{u}_p(p') \left[\gamma_\alpha \gamma_5 F_A(Q^2) + \frac{i}{2M} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta \gamma_5 F_T(Q^2) + \frac{q_\alpha}{M} \gamma_5 F_P(Q^2) \right] u_n(p) \tag{3.14}$$

dove F_A , F_T e F_P indicano rispettivamente i fattori di forma assiale, tensoriale e pseudo-scalare.

L'invarianza temporale implica che questi siano funzioni reali di Q^2 e che

$$F^S = 0 \tag{3.15}$$

$$F_T = 0. \tag{3.16}$$

La corrente adronica per reazioni CC può quindi essere scritta

$$J_\alpha^{CC} = \cos \theta_C \bar{u}_p(p') \left[\gamma_\alpha F_1^V + \frac{i}{2M} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta F_2^V + \gamma_\alpha \gamma_5 F_A + \frac{q_\alpha}{M} \gamma_5 F_P \right] u_n(p) \tag{3.17}$$

da cui segue la derivazione della sezione d'urto

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{M^2 G_F^2 \cos^2 \theta_C}{8\pi E_\nu^2} \left[A(Q^2) \mp \frac{(s-u)}{M^2} B(Q^2) + \frac{(s-u)^2}{M^4} C(Q^2) \right] \tag{3.18}$$

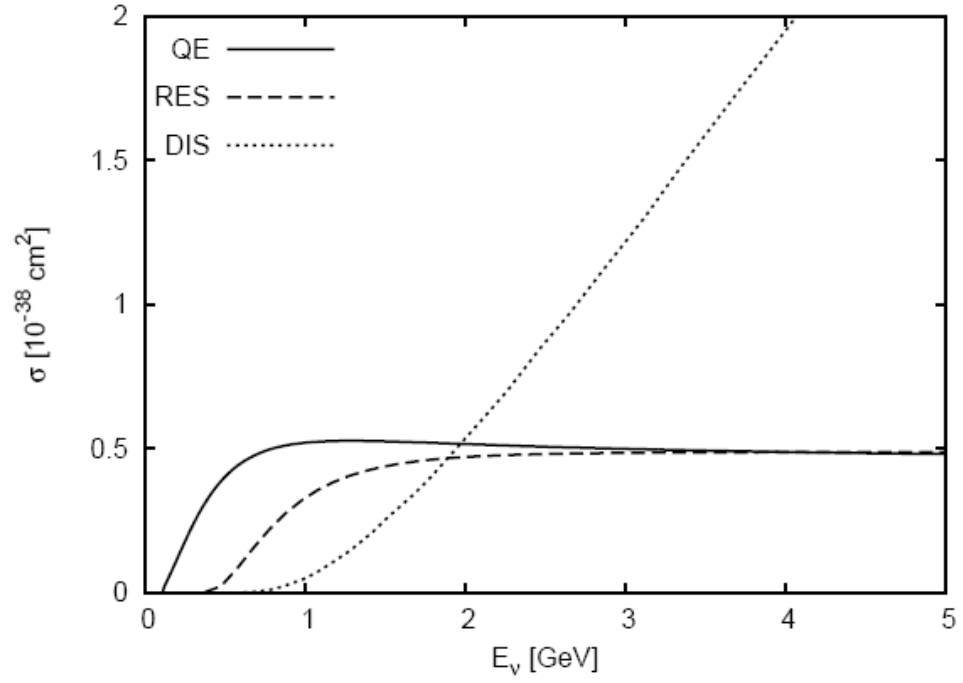
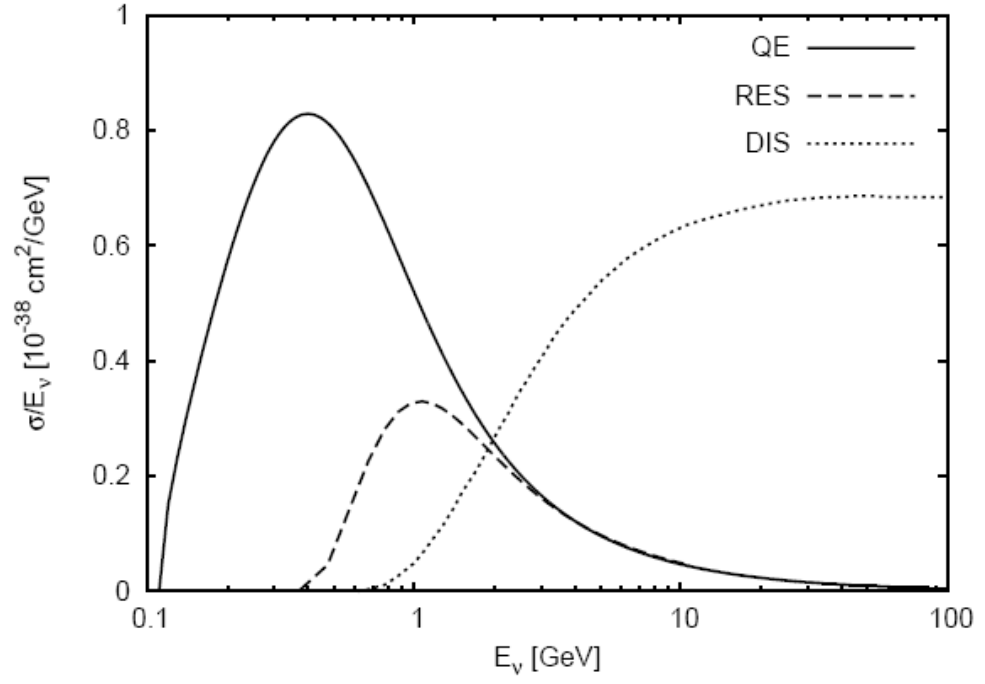


Figura 3.1: Decomposizione della σ_{tot} in funzione di E_ν relativa al processo inclusivo $\nu_\mu N \rightarrow \mu^- + X$. Adattato Ref. [32]

dove

$$(s - u) = 4ME_\nu - Q^2 - m_l^2 \quad (3.19)$$

$$\tau = \frac{Q^2}{4M^2} \quad (3.20)$$

$$A = \frac{(m_l^2 + Q^2)}{M^2} [(1 + \tau)F_A^2 - (1 - \tau)(F_1^V)^2 + \tau(1 - \tau)(F_2^V)^2 + 4\tau F_1^V F_2^V +$$

$$- \frac{m_l^2}{4M^2} ((F_1^V + F_2^V)^2 + (F_A + 2F_P)^2 - \left(\frac{Q^2}{M^2} + 4\right) F_P^2)] \quad (3.21)$$

$$B = \frac{Q^2}{M^2} F_A (F_1^V + F_2^V) \quad (3.22)$$

$$C = \frac{1}{4} (F_A^2 + (F_1^V)^2 + \tau(F_1^V)^2) \quad (3.23)$$

con $Q^2 = -q^2$.

L'unica differenza tra la diffusione di neutrini ed antineutrini risiede nel segno davanti al termine B, in quanto la simmetria di carica impone che i fattori di forma siano gli stessi per entrambi i processi.

Nell'ipotesi di conservazione della corrente vettoriale, i fattori di forma $F_{1,2}^V$ possono essere correlati a quelli della diffusione di elettroni.

Il termine elettromagnetico della corrente adronica, per $u = \begin{pmatrix} u_p & u_n \end{pmatrix}^T$ risulta pari a:

$$J_\alpha^{EM} = \bar{u}_p(p') \left[\gamma_\alpha F_1^p + \frac{i}{2M} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta F_2^p \right] u_p(p) +$$

$$+ \bar{u}_n(p') \left[\gamma_\alpha F_1^n + \frac{i}{2M} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta F_2^n \right] u_n(p) \quad (3.24)$$

dove $F_{1,2}^{p,n}$ sono i fattori di forma del nucleone di Dirac e Pauli.

Abbiamo già mostrato che il termine elettromagnetico della corrente adronica può essere scomposta in un contributo iso-vettoriale ed in uno iso-scalare:

$$J_\alpha^{EM} = V_\alpha^3 + \frac{1}{2} J_\alpha^Y \quad (3.25)$$

dove

$$V_\alpha^3 = \bar{u}_n(p') \left[\gamma_\alpha F_1^v + \frac{i}{2M} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta F_2^v \right] \frac{\tau_3}{2} u_n(p) \quad (3.26)$$

$$\frac{1}{2} J_\alpha^Y = \bar{u}_n(p') \left[\gamma_\alpha F_1^s + \frac{i}{2M} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta F_2^s \right] \frac{1}{2} u_n(p) \quad (3.27)$$

e quindi

$$F_{1,2}^{v,s} = F_{1,2}^p \mp F_{1,2}^n \quad . \quad (3.28)$$

Riscrivendo la parte vettoriale della corrente carica in termini del doppietto di isospin del nucleone si ottiene:

$$V_\alpha^{CC} = \bar{u} = \left[\gamma_\alpha F_1^V + \frac{i}{2M} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta F_2^V \right] \frac{\tau_+}{2} u \quad (3.29)$$

Per la conservazione della corrente vettoriale, le eqq. (3.26) e (3.29) sono componenti dello stesso multipletto di isospin, perciò per i fattori di forma si ottiene che

$$F_{1,2}^v = F_{1,2}^V \quad (3.30)$$

e di conseguenza anche la corrente vettoriale debole si conserva:

$$F_{1,2}^V = F_{1,2}^p - F_{1,2}^n \quad (3.31)$$

dove $F_{1,2}^{p,n}$ sono i fattori di forma di Dirac e Pauli per il nucleone.

Proseguendo l'analogia con la diffusione elettromagnetica, si introducono i fattori di forma di Sachs, legati ai precedenti dalle relazioni:

$$G_M^{p,n} = F_1^{p,n} + F_2^{p,n} \quad (3.32)$$

$$G_E^{p,n} = F_1^{p,n} - \frac{Q^2}{4M^2} F_2^{p,n} \quad (3.33)$$

da cui si ottiene [44]

$$F_1^V(Q^2) = \frac{G_E^V(Q^2) + \frac{Q^2}{4M^2} G_M^V(Q^2)}{1 + \tau} \quad (3.34)$$

$$F_2^V(Q^2) = \frac{G_M^V(Q^2) - G_E^V(Q^2)}{1 + \tau} \quad (3.35)$$

dove G_M e G_E rappresentano rispettivamente i fattori di forma magnetico ed elettrico del nucleone e

$$\begin{aligned} G_E^V &= G_E^p(Q^2) - G_E^n(Q^2) \\ G_M^V &= G_M^p(Q^2) - G_M^n(Q^2) \quad . \end{aligned} \quad (3.36)$$

In Figura 3.2 è riportato l'andamento dei fattori di forma in funzione di Q^2 .

Il termine di corrente assiale può essere scritto come

$$A_\alpha^{CC} = \bar{u} \left[\gamma_\alpha \gamma_5 F_A + \frac{q_\alpha}{M} \gamma_5 F_P \right] \frac{\tau_+}{2} u \quad . \quad (3.37)$$

Nel limite chirale la corrente assiale si conserva, pertanto il fattore di forma pseudoscalare si scrive come

$$F_P(Q^2) = \frac{2M^2}{Q^2 + m_\pi^2} F_A(Q^2) \quad (3.38)$$

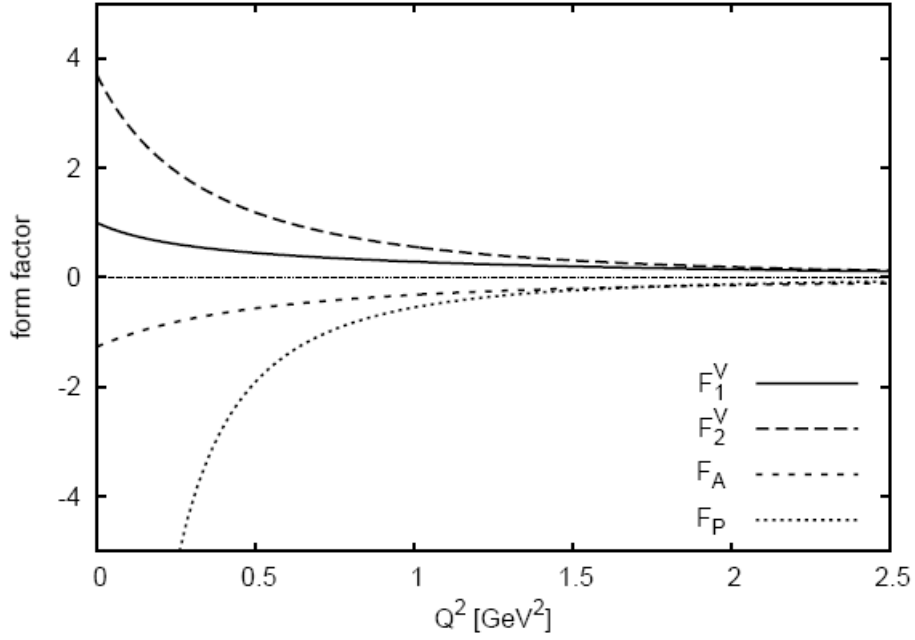


Figura 3.2: Fattori di forma CC correlati ai fattori di forma di Sachs dalle eq. (3.34) e (3.35) nella parametrizzazione dei fattori di forma BBA-2003. Adattato Ref. [32]

ed anche per il fattore di forma assiale è possibile definire una *approssimazione di dipolo*, per la quale risulta che

$$F_A(Q^2) = \frac{g_A}{\left(1 + \frac{Q^2}{M_A^2}\right)^2} \quad (3.39)$$

dove $g_A = -1.267$ e con il valore medio mondiale $M_A = 1.026 \pm 0.020 \text{ GeV}$.

Gli esperimenti condotti sui neutrini forniscono valori differenti per M_A a seconda dei valori di g_A e dei fattori di forma elettromagnetici ipotizzati nel processo di estrazione.

3.2 Diffusione elastica da correnti neutre $N(\nu, \nu)N$

Per processi di diffusione quasi-elastica NC il tensore adronico $W^{\alpha\beta}$ è definito dalla corrente [44, 45, 46, 47, 48]

$$\begin{aligned} J_\alpha^{QE} &= \langle N | J_\alpha^{NC}(0) | N \rangle = \\ &= \langle N | (V_\alpha^{NC} - A_\alpha^{NC})(0) | N \rangle = \\ &= \bar{u}(p') B_\alpha u(p) \end{aligned} \quad (3.40)$$

con $N = p, n$, $q_\alpha = p'_\alpha$ e

$$B_\alpha = \left(\gamma_\alpha - \frac{\gamma q q_\alpha}{q^2} \right) \tilde{F}_1^N + \frac{i}{2M_N} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta \tilde{F}_2^N + \gamma_\alpha \gamma_5 \tilde{F}_A^N + \frac{q_\alpha}{M_N} \gamma_5 \tilde{F}_P^N \quad (3.41)$$

dove M_N indica la massa del nucleone, $\tilde{F}_{1,2}^N$, \tilde{F}_A^N e \tilde{F}_P^N rispettivamente i fattori di forma vettoriale, assiale e pseudo-scalare, funzioni reali di Q^2 come conseguenza

dell'invarianza temporale.

La seconda uguaglianza in (3.40) è permessa dall'invarianza di Lorentz e la forma $(V - A)$ è dettata dalla violazione della parità.

Le correnti vettoriali ed assiali nella loro espressione più generale si scrivono rispettivamente:

$$V_{\alpha}^{NC} = \bar{u}_N \left[\gamma_{\alpha} \tilde{F}_1^N(Q^2) + \frac{i}{2M} \sigma_{\alpha\beta} q^{\beta} \tilde{F}_2^N(Q^2) \right] u_N \quad (3.42)$$

$$A_{\alpha}^{NC} = \bar{u}_N \left[\gamma_{\alpha} \gamma_5 \tilde{F}_A^N(Q^2) + \frac{q^{\alpha}}{M} \gamma_5 \tilde{F}_P^N(Q^2) \right] u_N \quad (3.43)$$

E' importante notare che i fattori di forma \tilde{F} differiscono da quelli associati ai processi CC.

La sezione d'urto per processi quasi-elastici NC si scrive come

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{M^2 G_F^2}{8\pi E_{\nu}^2} \left[A \mp \frac{(s-u)}{M^2} B + \frac{(s-u)^2}{M^4} C \right] \quad (3.44)$$

dove

$$(s-u) = 4ME_{\nu} - Q^2 \quad (3.45)$$

$$\tau = \frac{Q^2}{4M^2} \quad (3.46)$$

e con

$$A = \frac{Q^2}{M^2} [(1+\tau)(\tilde{F}_A^N)^2 - (1-\tau)(\tilde{F}_1^N)^2 + \tau(1-\tau)(\tilde{F}_2^N)^2 + 4\tau\tilde{F}_1^N\tilde{F}_2^N] \quad (3.47)$$

$$B = \frac{Q^2}{M^2} \tilde{F}_A^N (\tilde{F}_1^N + \tilde{F}_2^N) \quad (3.48)$$

$$C = \frac{1}{4} \left((\tilde{F}_A^N)^2 + (\tilde{F}_1^N)^2 + (\tilde{F}_2^N)^2 \right) \quad (3.49)$$

La sezione d'urto è indipendente dal sapore del neutrino; in essa inoltre non compare il fattore di forma pseudo scalare, come conseguenza della massa nulla del fascio incidente. L'unica differenza tra la sezione d'urto di neutrini ed antineutrini risiede nel segno davanti al termine B.

In (3.44) è possibile trascurare il fattore di forma pseudoscalare \tilde{F}_P^N perchè è moltiplicato per la massa del neutrino, mentre il termine $(\gamma q q_{\alpha})/q^2$ garantisce la conservazione della corrente vettoriale anche se le masse dei nucleoni iniziale e finale differiscono, eventualità legata alla presenza di un campo potenziale nucleare medio dipendente dall'impulso.

Il tensore adronico assume quindi la seguente formulazione:

$$W_{QE}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(\not{p} + M) \tilde{B}^{\alpha} (\not{p}' + M) B^{\beta} \right] \quad (3.50)$$

dove

$$\tilde{B}_\alpha = \gamma_0 B_\alpha^* \gamma_0 \quad (3.51)$$

e dove $M = M' = M_N$ nel caso di nucleoni liberi.

La corrente vettoriale si scrive come

$$V_\alpha^{NC} = (1 - 2 \sin^2 \theta_W) V_\alpha^3 - 2 \sin^2 \theta_W \frac{1}{2} J_\alpha^Y - \frac{1}{2} J_\alpha^s \quad (3.52)$$

dove θ_W è l'angolo debole di Weinberg ($\sin^2 \theta_W = 0.2228$), V_α^3 è la terza componente della corrente isovettoriale, J_α^Y la corrente isoscalare (ipercarica) e J_α^s rappresenta il contributo strano. Inoltre

$$V_\alpha^3 = \bar{u} \left[\gamma_\alpha F_1^v + \frac{i}{2M} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta F_2^v \right] \frac{\tau_3}{2} u \quad (3.53)$$

$$\frac{1}{2} J_\alpha^Y = \bar{u} \left[\gamma_\alpha F_1^s + \frac{i}{2M} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta F_2^s \right] \frac{1}{2} u \quad (3.54)$$

dove

$$F_{1,2}^{v,s} = F_{1,2}^p \mp F_{1,2}^n \quad (3.55)$$

con $F_1^{p,n}$ e $F_2^{p,n}$ sono i fattori di forma del nucleone di Dirac e Pauli.

Per quanto riguarda la parte strana si ha che

$$\frac{1}{2} J_\alpha^2 = \bar{u} \left[\gamma_\alpha F_1^S + \frac{i}{2M} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta F_2^S \right] \frac{1}{2} u \quad (3.56)$$

dove $F_{1,2}^2$ sono i fattori di forma vettoriali strani.

Le tre correnti hanno la stessa struttura di Dirac ed i fattori di forma per processi NC risultano:

$$\tilde{F}_{1,2}^p = \left(\frac{1}{2} - 2 \sin^2 \theta_W \right) F_{1,2}^p - \frac{1}{2} F_{1,2}^n - \frac{1}{2} F_{1,2}^s \quad (3.57)$$

$$\tilde{F}_{1,2}^n = \left(\frac{1}{2} - 2 \sin^2 \theta_W \right) F_{1,2}^n - \frac{1}{2} F_{1,2}^p - \frac{1}{2} F_{1,2}^s \quad (3.58)$$

espressi in termini dei fattori di forma dei nucleoni di Dirac e Pauli $F_{1,2}^{p,n}$ e della componente strana $F_{1,2}^s$.

Analogamente la formulazione della corrente

$$A_\alpha^{NC} = A_\alpha^3 + \frac{1}{2} A_\alpha^s \quad (3.59)$$

implica che

$$\tilde{F}_A^{p,n} = \pm \frac{1}{2} F_A + \frac{1}{2} F_A^s \quad (3.60)$$

dove F_A indica il fattore di forma assiale per la diffusione quasi-elastica di correnti cariche (differente in segno per protoni e neutroni) e dove F_A^s è il fattore di forma assiale strano.

La diffusione di neutrini NC risulta poco sensibile ai fattori di forma vettoriali, ma

estremamente sensibile a quelli assiali, quindi per semplicità si possono imporre le seguenti condizioni di uguaglianza:

$$F_{1,2}^s(0) = 0 \quad (3.61)$$

$$F_A^s(Q^2) = \frac{\Delta_s}{\left(1 + \frac{Q^2}{M_A^2}\right)^2} \quad (3.62)$$

assumendo che la massa assiale strana sia uguale a quella non strana.

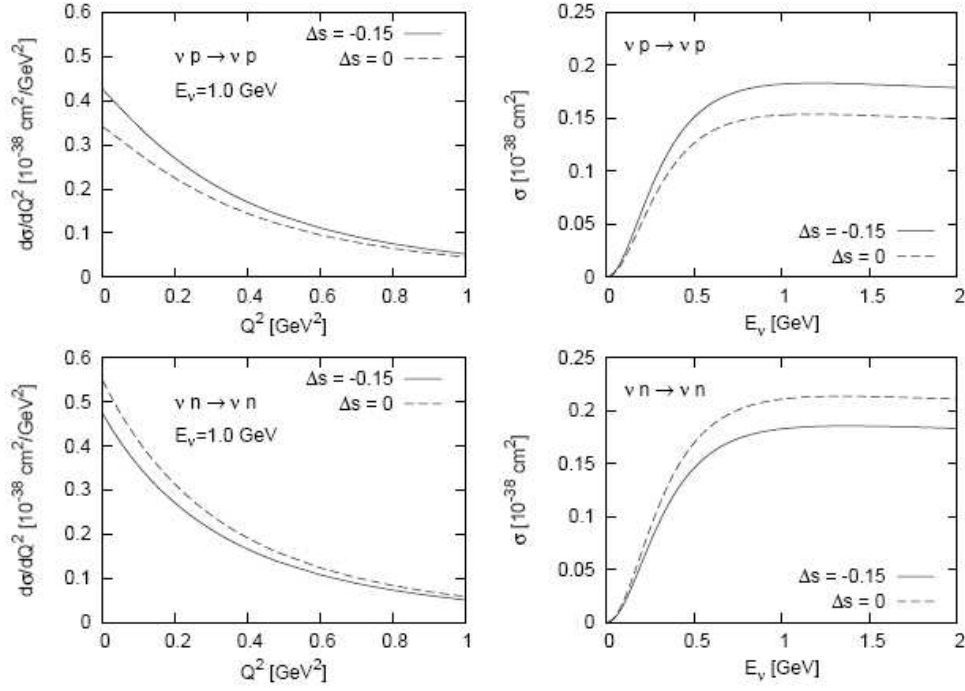


Figura 3.3: Sezione d'urto dei processi NC su protoni e neutroni in funzione del quadri-impulso trasferito e dell'energia del neutrino. La linea continua rappresenta risultati per $\Delta_s = -0.15$, la linea tratteggiata per $\Delta_s = 0$. Adattato dalla Ref. [32]

In Figura 3.3 viene mostrata la dipendenza della sezione d'urto elastica dal fattore di forma assiale.

E' importante notare come il segno opposto per protoni e neutroni nell'espressione (3.60) si rifletta nella sezione d'urto.

Capitolo 4

Diffusione di elettroni e neutrini da nuclei

4.1 Diffusione quasi-elastica inclusiva di elettroni $A(e, e')X$

In Figura 4.1 è rappresentato il processo di diffusione inclusiva

$$e + A \longrightarrow e' + X \quad (4.1)$$

in cui viene rivelato soltanto l'elettrone diffuso e' .

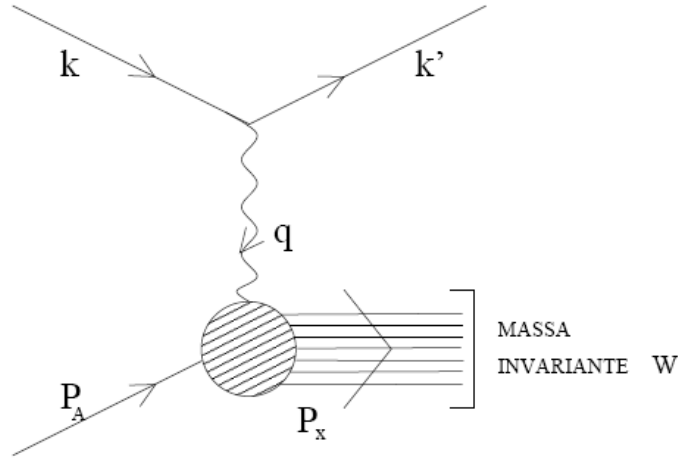


Figura 4.1: Diagramma OPA della diffusione inclusiva elettrone-nucleo.

La sezione d'urto inclusiva nel sistema del laboratorio si ottiene sostituendo N con A nell'eq.(2.22) e si scrive come [33]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega' dE'} = \frac{4\alpha^2}{Q^4} \frac{E'}{E} \frac{1}{2} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^A \quad (4.2)$$

con

$$\alpha = \frac{e \cdot e_A}{4\pi} \quad (4.3)$$

dove il tensore leptonico è lo stesso della diffusione eN , mentre il tensore adronico diventa

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^A &= \frac{1}{4\pi} \overline{\sum_{\alpha_A}} \sum_X (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_A + q - P_X) \\ &< \alpha_A, \vec{P}_A = 0 | J_\mu^A(0) | \alpha_X, \vec{P}_X > < \alpha_X, \vec{P}_X | J_\nu^A(0) | \alpha_A, \vec{P}_A = 0 > \end{aligned} \quad (4.4)$$

dove ancora una volta $\overline{\sum_{\alpha_A}}$ rappresenta la media sui numeri quantici dello stato iniziale del bersaglio, \sum_X la somma su tutti gli stati discreti ed un integrale su quelli continui dello stato finale non rivelato.

In analogia con l'eq. (2.34), la sezione d'urto inclusiva si scrive come

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega' dE'} = \sigma_{Mott} \left[W_2^A(\nu, Q^2) + 2W_1^A(\nu, Q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (4.5)$$

e separando le componenti longitudinale e trasversa delle funzioni risposta si ottiene nuovamente l'eq. (2.37)

Nel caso di diffusione elastica, $W^2 = M_A^2$, $\nu = \frac{Q^2}{2M_A}$ e le risposte longitudinale e trasversa si scrivono come

$$\begin{aligned} R_L^A(\nu, Q^2) &= F_L^2(Q^2) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M_A}\right) \\ R_T^A(\nu, Q^2) &= F_T^2(Q^2) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M_A}\right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

dove F_L e F_T sono i fattori di forma nucleari longitudinale e trasversa, che possono essere scritti in funzione dei multipoli di carica (C) e magnetico (M) come

$$\begin{aligned} F_L^2 &= \sum_{J \geq 0} |F_J^C|^2 \\ F_T^2 &= \sum_{J > 0} |F_J^M|^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

dove l'indice delle sommatorie J soddisfa la conservazione del momento angolare $0 \leq J \leq 2J_1$ e della parità $\pi_i \pi_f = (-1)^{J+\lambda}$, con J_1 spin del bersaglio e $\lambda = 0, 1$ rispettivamente per multipoli coulombiani e magnetici.

La sezione d'urto elastica si scrive pertanto come

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{Mott} \frac{E'}{E} \left\{ \frac{Q^4}{\bar{q}^4} F_L^2(Q^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{\bar{q}^2} + 2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) F_T^2(Q^2) \right\} . \quad (4.8)$$

Nella diffusione eN si è introdotta la variabile di Bjorken $x = \frac{Q^2}{2M\nu}$, che per un nucleone risulta compresa nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$, mentre per un nucleo si ha

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu} \frac{M_A}{M_A} = \frac{Q^2}{2M_A\nu} \frac{M_A}{M} \simeq \frac{Q^2}{2M_A\nu} A \equiv x_A \cdot A \quad (4.9)$$

e pertanto $0 \leq x \leq A$.

In Figura 4.2 è riportato l'andamento qualitativo delle sezioni d'urto eN e $e\mathcal{N}$ proprio in funzione della variabile di Bjorken x .

In *a*) il bersaglio è un nucleone. Il picco in $x = 1$ corrisponde alla diffusione elastica, mentre i picchi in $x < 1$ rappresentano eccitazioni coerenti delle risonanze nucleoniche. Il picco in $x = 1/3$ rappresenta infine l'accoppiamento fotone-quark, ovvero la diffusione quasi-elastica sui partoni del nucleone, di massa $\tilde{M} = \frac{M}{3}$.

In *b*) il bersaglio è un nucleo. Il picco elastico è centrato in $x = A$, mentre le eccitazioni coerenti dei livelli discreti in $x < A$. In $x = 1$ compare il picco quasi-elastico, relativo alla diffusione su nucleoni legati, mentre i picchi in $x < 1$ rappresentano le risonanze nucleoniche ed eventualmente processi DIS su nucleoni legati.

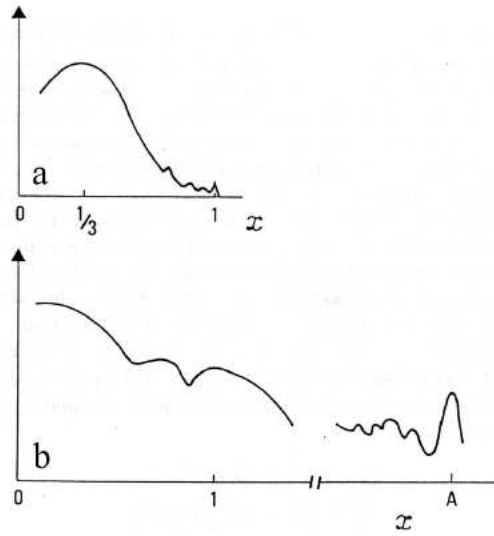


Figura 4.2: Andamento qualitativo della sezione d'urto in funzione della variabile di Bjorken $x = Q^2/2M\nu$ per un nucleone bersaglio (*a*) e per un nucleo bersaglio (*b*). Adattato dalla Ref. [36]

4.2 Diffusione quasi-elastica semi-inclusiva di elettroni $A(e, e'p)X$

In Figura 4.3 è rappresentato il processo di diffusione semi-inclusiva

$$e + A \longrightarrow e' + p + X \quad (4.10)$$

in cui vengono rivelati sia l'elettrone e' , che il protone p diffusi.

In base alla relazione (2.2), per determinare univocamente lo stato finale bisogna affiancare altre tre variabili, determinate dall'adrone prodotto, alle già note x e Q^2 . Di solito la scelta cade sulla frazione di energia portata dall'adrone rispetto a quella del fotone virtuale

$$z \simeq \frac{E_p}{\nu} \quad (4.11)$$

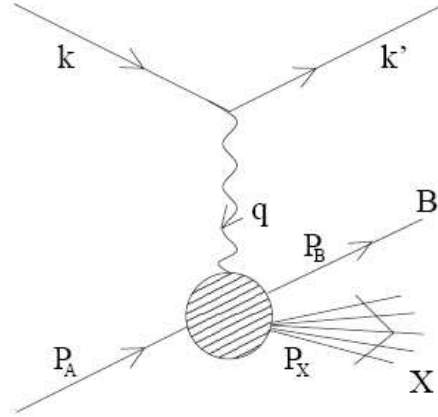


Figura 4.3: Diagramma OPA della diffusione semi-inclusiva elettrone-adrone bersaglio. In questa figura $B \equiv h$.

lungo la componente trasversa dell'impulso dell'adrone, \vec{P}_{A_T} , rispetto alla direzione di \vec{q} , e sull'angolo azimutale ϕ determinato dal piano degli impulsi dei leptoni incidente e diffuso con il piano degli impulsi del fotone virtuale e dell'adrone prodotto. Sostituendo $f \equiv (p, X)$ e $d\tau_f = \frac{M_B d^3 P_p}{E_p (2\pi)^3}$ in (2.1) si ottiene la sezione d'urto per il processo semi-inclusivo [33, 49]:

$$\frac{d^4 \sigma}{d\Omega' dE' dE_p d\Omega_p} = \frac{4\alpha^2}{Q^4} \frac{E'}{E} \frac{|\vec{P}_p| E_p}{M_p} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^{A,s.i.} \quad (4.12)$$

con

$$P_p \equiv (P_p^0, \vec{P}_p), \quad P_p^0 = \sqrt{(M_p + E_p^*)^2 + \vec{P}_p^2}.$$

Il tensore leptonic è nuovamente definito dall'espressione (2.24), mentre quello adronico si scrive come

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^{A,s.i.} &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha_A} \sum_{\alpha_p, X} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_A + q - P_p - P_X) \\ &\quad \langle \alpha_A \vec{P}_A = 0 | J_\mu^A(0) | \alpha_X \vec{P}_X, \alpha_p \vec{P}_p E_p^* \rangle \\ &\quad \langle \alpha_p \vec{P}_p E_p^*, \alpha_X \vec{P}_X | J_\nu^A(0) | \alpha_A \vec{P}_A = 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.13)$$

dove \sum_X rappresenta una somma sugli stati discreti ed un'integrazione sui numeri quantici continui, mentre il vettore $|\alpha_X \vec{P}_X, \alpha_p \vec{P}_p E_p^* \rangle$ consiste asintoticamente di un nucleo p con momento \vec{P}_p ed energia di eccitazione intrinseca E_p^* .

Rispettando le richieste di invarianza di gauge e di inversione temporale e di conservazione della carica, la parametrizzazione del tensore adronico per un processo semi-leptonico richiede l'introduzione di 4 funzioni di struttura:

$$W_{\mu\nu}^{A,s.i.} = -W_1^A g_{\mu\nu} + \frac{W_2^A}{M^2} P_\mu^A P_\nu^A + W_3^A \frac{1}{(P_P \cdot P_A)} \frac{1}{2} (P_\mu^A P_\nu^P + P_\nu^A P_\mu^P) + \frac{W_4^A}{M^2} P_\mu^P P_\nu^P$$

$$(4.14)$$

Una formulazione alternativa e fisicamente più trasparente è fornita in funzione dei quadri-vettori di polarizzazione del fotone virtuale:

$$\epsilon_{\pm}^{\mu} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0), \quad \epsilon_0^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{Q^2}}(|\vec{q}|, 0, 0, q_0) \quad (4.15)$$

dove

$$\epsilon_{\mu} q^{\mu} = 0, \quad \sum_{\lambda} \epsilon_{\lambda}^{*\mu} \epsilon_{\lambda}^{\nu} = -g_{\mu\nu} + \frac{q^{\mu} q^{\nu}}{q^2}, \quad \epsilon_{\lambda} = (-1)^{\lambda} \epsilon_{-\lambda}, \quad \lambda = \pm, 0$$

Con questa notazione la contrazione tra il tensore leptónico ed il tensore adronico si scrive come

$$L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^{A,s.i.} = \sum_{\lambda\lambda'} L_{\lambda\lambda'} W_{\lambda\lambda'} \quad (4.16)$$

con

$$L_{\lambda\lambda'} = \epsilon_{\lambda}^{\mu} L_{\mu\nu} \epsilon_{\lambda'}^{*\nu} \quad \text{e} \quad W_{\lambda\lambda'} = (-1)^{\lambda+\lambda'} \epsilon_{\lambda'}^{*\mu} W_{\mu\nu}^{A,s.i.} \epsilon_{\lambda}^{\nu} \quad (4.17)$$

L'invarianza temporale e la conservazione della parità restringono a quattro il numero di combinazioni indipendenti di $\lambda\lambda'$ nell'eq. (4.16):

$$\begin{aligned} W_L^A &= \frac{|\vec{q}|^2}{Q^2} W_{00} \\ W_T^A &= W_{11} + W_{-1-1} \\ W_{LT}^A &= \frac{|\vec{q}|}{\sqrt{Q^2}} 2\text{Re}[W_{01} - W_{0-1}] \\ W_{TT}^A &= -2\text{Re}W_{1-1} \end{aligned} \quad (4.18)$$

definite rispettivamente come funzione di risposta nucleare longitudinale (L), trasversa (T), di interferenza longitudinale-trasversa (LT) e trasversa-trasversa (TT). Si introduce il *tensore adronico ridotto*

$$L_{\lambda\lambda'} = 4EE' \cos^2 \frac{\theta}{2} l_{\lambda\lambda'} \quad (4.19)$$

da cui si ricava:

$$\begin{aligned} l_{00} &= \frac{Q^2}{|\vec{q}|^2} \\ l_{11} &= \frac{Q^2}{2|\vec{q}|^2} + \tan^2 \frac{\theta}{2} \\ l_{1-1} &= -\frac{Q^2}{2|\vec{q}|^2} \end{aligned} \quad (4.20)$$

La sezione d'urto semi-inclusiva si può quindi scrivere come

$$\frac{d^4\sigma}{d\Omega' dE' dE_P d\Omega_P} = \sigma_{mott} |\vec{P}_P| E_P \sum_i V_i W_i^A(\nu, Q^2, \vec{P}_P, E_P^f) \quad (4.21)$$

con $i = \{L, T, LT, TT\}$ e

$$\begin{aligned}
V_L &= \frac{Q^4}{|\vec{q}|^4} \\
V_T &= \frac{Q^2}{2|\vec{q}|^2} + \tan^2 \frac{\theta}{2} \\
V_{LT} &= \frac{Q^2}{\sqrt{2}|\vec{q}|^2} \left(\frac{Q^2}{|\vec{q}|^2} + \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
V_{TT} &= \frac{Q^2}{2|\vec{q}|^2}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

noti come *fattori cinematici*.

4.3 Diffusione quasi-elastica inclusiva di neutrini

$A(\nu_\mu, \mu)X$

In Figura 4.4 sono rappresentati processi di diffusione inclusiva neutrino-nucleo, in

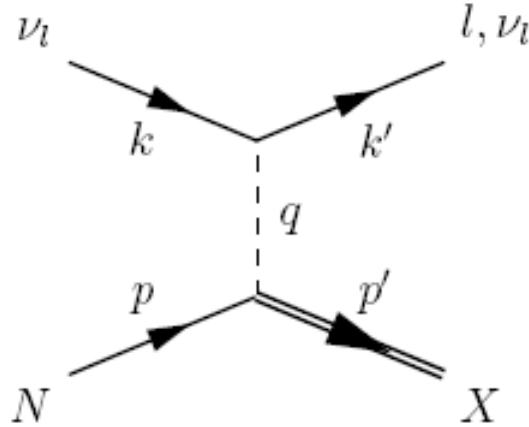


Figura 4.4: Diagramma di Feynman corrispondente alla diffusione inclusiva neutrino-nucleo

cui soltanto il leptone finale è osservato.

Nell'approssimazione di scambio di un solo bosone la sezione d'urto nel sistema del laboratorio si scrive come [32, 50, 51]

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_l} = \frac{G_F^2}{4\pi^2} \frac{|\vec{k}|}{|\vec{k}'|} L_{\alpha\beta} W^{\alpha\beta} \tag{4.23}$$

dove $d\Omega = d\cos\theta d\phi$, θ è l'angolo di diffusione, E_l l'energia del leptone diffuso e $G_F = \frac{\sqrt{2}g^2}{8M_W^2} = 1.16637 \cdot 10^{-5} GeV^{-2}$ è la costante di Fermi.

Per procedere nella parametrizzazione dei tensori leptonico ed adronico è necessario distinguere tra processi CC ed NC.

Correnti cariche

Il tensore leptónico nella sua formulazione di carattere più generale è definito come

$$L_{\alpha\beta} = \sum_s \sum_{s'} [\bar{u}_l(k') \gamma_\alpha (1 + h\gamma_5) u_\nu(k)]^* [\bar{u}_l(k') \gamma_\beta (1 + h\gamma_5) u_\nu(k)] \quad (4.24)$$

dove s ed s' sono gli spin iniziali e finali del leptone, mentre h corrisponde all'elicità della particella incidente.

Per il neutrino $h = 1$:

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta} &= \sum_s \sum_{s'} [\bar{u}_l(k') \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_\nu(k)]^* [\bar{u}_l(k') \gamma_\beta (1 - \gamma_5) u_\nu(k)] = \\ &= Tr[(\not{k}' + m_l) \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) (\not{k}' + m_l) \gamma_\beta (1 - \gamma_5)] = \\ &= 8[k_{\alpha'} k_\beta + k_\alpha k_{\beta'} - g_{\alpha\beta} k \cdot k' + i\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} k^\rho k'^\sigma] = \\ &= L_{\alpha\beta}^S + iL_{\alpha\beta}^A \end{aligned} \quad (4.25)$$

dove gli apici S ed A si riferiscono alla simmetria per scambio degli indici di Lorentz α e β . Per gli antineutrini il termine asimmetrico è proporzionale al tensore totalmente antisimmetrico $\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}$.

La forma generale del tensore associato al neutrino è quindi la seguente:

$$L_{\alpha\beta}^{\nu,\bar{\nu}} = L_{\alpha\beta}^S \pm iL_{\alpha\beta}^A \quad (4.26)$$

E' importante sottolineare che il contributo asimmetrico è strettamente legato alla diffusione di neutrini e per questo risulta assente nella esplicitazione del tensore elettromagnetico incontrato nella diffusione di elettroni.

Per determinare il tensore adronico elettromagnetico si è ricorsi alla conservazione di parità e di carica e all'invarianza di Lorentz. Nell'interazione debole l'unico vincolo imponibile è quello relativo all'invarianza di Lorentz

$$W_{\nu,\bar{\nu}}^{\alpha\beta} = L_S^{\alpha\beta} \pm iL_A^{\alpha\beta} \quad (4.27)$$

dove gli indici sono ancora una volta rappresentativi della simmetria del tensore. Nella sua formulazione più generale, il tensore adronico debole risulta proporzionale a sei funzioni di struttura indipendenti:

$$\begin{aligned} W^{\alpha\beta} &\equiv \frac{1}{2\pi} \int e^{iq \cdot z} d^4z \langle N | J^\alpha(z) J^\beta(0) | N \rangle = \\ &= \frac{1}{\pi} \text{Disc} \int e^{iq \cdot z} d^4z \langle N | iT(J^\alpha(z) J^\beta(0)) | N \rangle = \\ &= (-g^{\alpha\beta}) W_1 + \frac{p^\alpha p^\beta}{M^2} W_2 + i\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} \frac{p_\rho p_\sigma}{M^2} W_3 + \frac{q^\alpha q^\beta}{M^2} W_4 + \\ &+ \frac{p^\alpha q^\beta + q^\alpha p^\beta}{2M^2} W_5 + \frac{i(p^\alpha q^\beta - q^\alpha p^\beta)}{2M^2} W_6 \end{aligned} \quad (4.28)$$

dove [52] l'integrale si svolge inserendo un set completo di stati

$$1 = \sum_X |X\rangle\langle X| \quad (4.29)$$

in cui

$$\begin{aligned}
|X\rangle &= |N\rangle && \text{regione quasi-elastica} \\
|X\rangle &= |Nn\pi\rangle && \text{regione risonante/poche particelle} \\
|X\rangle &= |\text{multiparticelle}\rangle && \text{regione DIS}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Le W_i sono funzioni reali che dipendono dagli scalari di Lorentz $\nu = p \cdot q$ e q^2 ed anche in questo caso possono essere scalate nelle più convenzionali F_i .

La presenza di W_3 e W_6 è indotta dalla violazione della parità, mentre W_4 e W_5 sono determinate dalla mancata conservazione della corrente.

Sostituendo i tensori (4.24) e (4.28) nell'eq. (4.23) si ottiene la sezione d'urto differenziale doppia per correnti cariche

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega dE_l} &= \frac{|\vec{k}'| E_l M G_F^2}{\pi^2} \left\{ 2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - W_3 \frac{E_\nu + E_l}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\
&\frac{m_l^2}{E_l(E_l + |\vec{k}'|)} \left[W_1 \cos \theta - \frac{W_2}{2} \cos \theta + \frac{W_3}{2} \left(\frac{E_l + |\vec{k}'|}{M} - \frac{E_\nu + E_l}{M} \cos \theta \right) + \right. \\
&\left. \left. + \frac{W_4}{2} \left(\frac{m_l^2}{M^2} \cos \theta + \frac{2E_l(E_l + |\vec{k}'|)}{M^2} \sin^2 \theta \right) - W_5 \frac{E_l + |\vec{k}'|}{2M} \right] \right\} \tag{4.31}
\end{aligned}$$

dove M è la massa del nucleone. E' importante sottolineare che se il fascio incidente è composto da antineutrini bisogna cambiare il segno davanti a W_3 e che nel risultato non compare la funzione di struttura W_6 , in quanto si annulla nella contrazione dei tensori leptonico ed adronico.

Nel caso di diffusione inclusiva profondamente anelastica la sezione d'urto può essere esplicitata rispetto alle variabili $\{x, y, Q^2\}$, con $Q^2 = 2M_N E_\nu xy$:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{\nu(\bar{\nu})}}{dx dy} &= \frac{G_F^2 M_N E_\nu}{\pi(1 + Q^2/M_W^2)^2} \left\{ (y^2 x + \frac{m_\tau^2 y}{2E_\nu M_N}) F_1^{W\pm} + \left[\left(1 - \frac{m_\tau^2}{4E_\tau^2}\right) - \left(1 + \frac{M_N x}{2E_\nu}\right) y \right] F_2^{W\pm} \pm \right. \\
&\pm \left[xy \left(1 - \frac{y}{2}\right) - \frac{m_\tau^2 y}{4E_\nu M_\nu} \right] F_3^{W\pm} + \frac{m_\tau^2 (m_\tau^2 + Q^2)}{4E_\nu^2 M_N^2} x F_4^{W\pm} - \frac{m_\tau^2}{E_\nu M_N} F_5^{W\pm} \left. \right\}. \tag{4.32}
\end{aligned}$$

Nell'espressione precedente si sono trascurati i fattori $m_\tau^2/2M_N E_\nu \cdot Q^2/M_W^2$ provenienti dal termine $q^\mu q^\nu/M_W^2$ del propagatore bosonico massivo. Una loro reintroduzione è resa possibile dalla sostituzione

$$\mathcal{F}_i^{W\pm} \longrightarrow F_i^{W\pm} \cdot (1 + \epsilon_i) \tag{4.33}$$

dove

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \frac{m_\tau^2(Q^2 + 2M_W^2)}{2M_W^4} \\
\epsilon_2 &= -\frac{E_\nu^2 m_\tau^2 y [4M_W^2 + y(Q^2 + m_\tau^2)]}{M_W^4 [4(y-1)E_\tau^2 + m_\tau^2 + Q^2]} \\
\epsilon_3 &= 0 \\
\epsilon_4 &= \frac{Q^2(Q^2 + 2M_W^2)}{M_W^4} \\
\epsilon_5 &= \frac{Q^2}{M_W^2} + \frac{(M_W^2 + Q^2)(m_\tau^2 + Q^2)y}{2M_W^4} \tag{4.34}
\end{aligned}$$

Nell' eq. (4.32) le funzioni di struttura F_4 e F_5 sono potenze della massa del leptone carico e quindi possono essere trascurate.

Nell'ordine principale, queste sono correlate alle funzioni di struttura usuali attraverso le *relazioni di Albright-Jarlskog*, generalizzazione delle relazioni di Callan-Gross definite nel caso elettronico:

$$\begin{aligned} F_4 &= 0 \\ 2xF_5 &= F_2 . \end{aligned} \quad (4.35)$$

Nell'eq.(4.32) e nella definizione delle F_i sono presenti correzioni alla massa del bersaglio, perciò per la diffusione di neutrini è convenzione riscrive le F_i in termini delle

$$\mathcal{F}_i = (1 - \delta_{i4})q(x, Q^2) \quad (4.36)$$

espressioni relative all'ordine principale, in cui si trascura la massa della targhetta.

Correnti neutre

I tensori adronico e leptónico sono gli stessi appena discussi, con $m_l = 0$, in quanto il neutrino mantiene la sua identità nei processi NC, e la sezione d'urto differenziale per correnti neutre si scrive come [32] [53]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega' dE'} = \frac{|\vec{k}'| E_l M G_F^2}{\pi^2} \left\{ 2W_1^A \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2^A \cos^2 \frac{\theta}{2} - W_3^A \frac{E_\nu + E_l}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (4.37)$$

Anche questa volta per fasci di antineutrini è sufficiente cambiare il segno davanti al termine W_3 .

La sezione d'urto può essere espressa anche in funzione del momento trasferito

$$Q^2 = 2E_\nu E_l - 2|\vec{k}||\vec{k}'| \cos \theta - m_l^2$$

e della massa invariante dello stato adronico finale

$$W^2 = M^2 + 2M(E_\nu - E_l) - Q^2$$

da cui si ottiene

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 dW} = \frac{\pi W}{M|\vec{k}||\vec{k}'|} \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_l}$$

La sezione d'urto totale per un neutrino incidente con energia nota si scrive quindi

$$\sigma(E_\nu) = \int_{W_{min}}^{W_{max}} dW \int_{Q_m^2}^{Q_{max}^2} dQ^2 \frac{d\sigma}{dQ^2 dW} \quad (4.38)$$

con i seguenti estremi di integrazione

$$\begin{aligned} W_{min} &= M \\ W_{max} &= \sqrt{s} - m_l \end{aligned} \quad (4.39)$$

dove \sqrt{s} è la massa invariante del sistema iniziale $\nu\mathcal{N}$.

Una volta fissato W , Q^2 risulta compreso tra i seguenti valori:

$$Q_{min}^2 = -m_l^2 + 2E_\nu(E_l - |\vec{k}_f|) \quad (4.40)$$

$$Q_{max}^2 = -m_l^2 + 2E_\nu(E_l + |\vec{k}_f|) \quad (4.41)$$

Sia per la reazione CC che NC si è studiato il processo di diffusione νN , ma quanto detto si adatta facilmente al caso $\nu\mathcal{N}$, ponendo $N = A$ e sostituendo alle funzioni di struttura del nucleone quelle del nucleo, in perfetta analogia con il caso di diffusione di elettroni. Anche in questo caso, pertanto, per esplicitare le funzioni di struttura è necessario ricorrere a dei modelli di approssimazione.

Capitolo 5

Modelli teorici per la diffusione inclusiva di elettroni e neutrini da nuclei

L'interazione leptone-nucleo viene in genere scomposta in due fasi: l'interazione del leptone con un nucleone legato, seguita dalla propagazione nel mezzo nucleare di quest'ultimo.

La descrizione teorica di tale processo richiede quindi la soluzione di un complesso problema a molti corpi, sia per lo stato legato del nucleo bersaglio, che per gli stati corrispondenti ad un nucleone nel continuo.

Il problema, ovviamente, non può essere risolto esattamente e l'uso di varie approssimazioni ricorre frequentemente. Una tra le più diffuse è l'approssimazione impulsiva con onde piane (PWIA¹), che viene descritta nel paragrafo che segue.

5.1 L'approssimazione impulsiva

E' utile a questo punto ricondurre il processo semi-inclusivo descritto nel paragrafo 4.2. Il processo inclusivo si ottiene da quello semi-inclusivo, eq. (4.21), integrando sull'energia e sull'angolo solido del nucleone emesso e non rivelato.

La PWIA, che permette di calcolare le funzioni di risposta che appaiono nella (4.21), si basa sulle seguenti ipotesi principali:

- la corrente nucleare è data dalla somma delle correnti dei singoli nucleoni (approssimazione impulsiva) [49]:

$$\hat{J}_\mu^A = \sum_{i=1}^A \hat{J}_\mu^{N_i}$$

- lo stato finale adronico si riduce al prodotto di due sistemi non interagenti, rappresentati da onde piane:

$$\Psi_{A-1, \vec{p}_N} = \hat{\mathcal{A}} \left\{ e^{i\vec{p}_N \cdot \vec{r}} |\Phi_{A-1}^f \rangle \right\} \equiv |f_{A-1}, \vec{p}_N \rangle$$

¹Dall'inglese Plane Wave Impulse Approximation

dove $\hat{\mathcal{A}}$ è l'operatore di antisimmetrizzazione tra l'onda piana e Φ_{A-1}^f , introdotto poiché lo stato finale di barione singolo può essere generato da uno qualunque dei nucleoni iniziali; inoltre $\vec{p}_N = \vec{p} + \vec{q}$ e Φ_{A-1}^f costituisce un set completo di autostati di \hat{H}_{A-1} : $\hat{H}_{A-1}|\Phi_{A-1}^f\rangle = E_{A-1}^f|\Phi_{A-1}^f\rangle$;

- non c'è interazione tra i due fattori dello stato finale, cioè si trascura l'interazione tra particella colpita e sistema spettatore, ma si tiene conto delle interazioni interne al sistema di (A-1) nucleoni.

Il processo in approssimazione PWIA è illustrato graficamente in Figura 5.1 e la sezione d'urto quasi-elastica (Figura 5.1 (1)) può essere ridotta alla seguente espressione:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega'dE'} = \sigma_{Mott} \left\{ \left[\frac{Q^2}{\vec{q}^2} \right]^2 R_L(\nu, Q^2) + \frac{1}{2} \left[\frac{Q^2}{\vec{q}^2} + 2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] R_T(\nu, Q^2) \right\} \quad (5.1)$$

con

$$R_{L(T)}(q, \nu) = G_{L(T)}(q, \nu) I(q, \nu) \quad (5.2)$$

dove

$$\begin{aligned} G_L(q, \nu) &= \left[ZG_E^{p^2} + NG_E^{n^2} \right] \left(1 - \frac{q^2}{4M^2} \right) \\ G_T(q, \nu) &= \left[ZG_M^{p^2} + NG_M^{n^2} \right] \frac{q^2}{2M^2} \end{aligned} \quad (5.3)$$

sono le funzioni di struttura del nucleone e

$$I(q, \nu) = \int dE \int d^3p P(p, E) \delta \left(\nu - \frac{(\vec{p} + \vec{q})^2}{2M} - \frac{\vec{p}^2}{2(A-1)M} - E \right) \quad (5.4)$$

è la funzione di struttura nucleare, dove $P(p, E)$ è la funzione spettrale, che rappresenta la probabilità di trovare in un nucleo un nucleone con momento $|\vec{p}|$ ed energia E .

Nel caso del grafico in Figura 5.1(2), le funzioni elastiche (5.3) vengono rimpiazzate dalle corrispondenti funzioni anelastiche, dipendenti da fattori di forma anelastici del nucleone. Il vertice adronico dipende quindi dalla funzione spettrale, le cui proprietà sono descritte nel seguito.

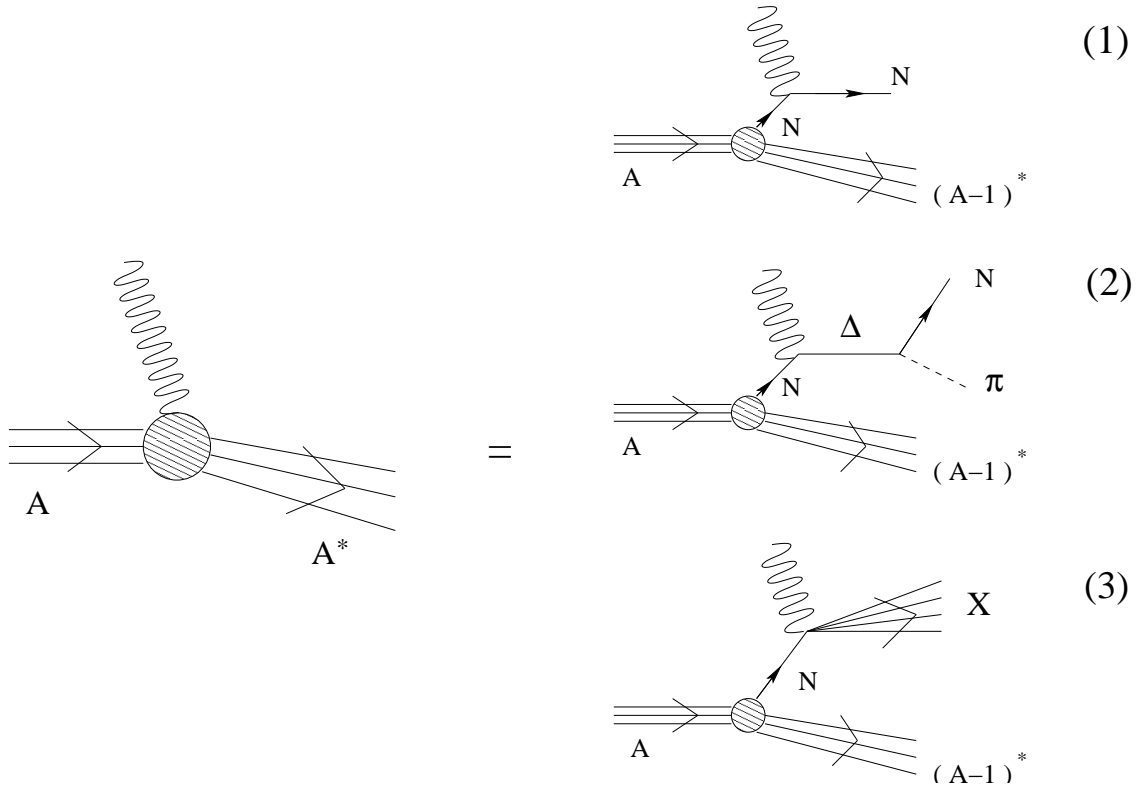


Figura 5.1: Alcune reazioni al vertice adronico in approssimazione PWIA: 1) quasi elastica, 2) anelastica, 3) profondamente anelastica.

5.1.1 La funzione spettrale del nucleone

In ambito non relativistico si definisce la *funzione spettrale del nucleone* [14, 33, 49, 54]

$$P_N(p, E) = \frac{1}{2J_0 + 1} \sum_{M_0 \sigma} \langle \psi_A^0 | a_{\vec{p}, \sigma}^* + \delta(E - (H - E_A)) a_{\vec{p}, \sigma} | \psi_A^0 \rangle \quad (5.5)$$

che rappresenta la probabilità congiunta di trovare in un nucleo un nucleone con momento $|\vec{p}|$ ed energia di rimozione

$$E = |E_A| - |E_{A-1}| + E_{A-1}^* \quad (5.6)$$

dove E_{A-1}^* è l'energia di eccitazione (sempre positiva) del nucleo residuo $(A - 1)$ misurata rispetto al suo stato fondamentale, E_A ed E_{A-1} l'energia di legame rispettivamente del nucleo A , $A - 1$.

In (5.5) $a_{\vec{p}, \sigma}^*$ e $a_{\vec{p}, \sigma}$ indicano l'operatore di creazione ed annichilazione di un nucleone con momento \vec{p} e spin σ ; ψ_A^0 è l'autofunzione intrinseca dello stato fondamentale dell'Hamiltoniana nucleare H , con autovalore E_A , momento angolare totale J_0 e proiezione M_0 .

Dalle espressioni precedenti si ottiene una definizione alternativa ma equivalente della funzione spettrale, che si identifica nella probabilità che il nucleo residuo $(A - 1)$

abbia energia di eccitazione E_{A-1}^* .

Inserendo la relazione di completezza per gli stati finali del sistema residuo

$$\sum_f |\psi_{A-1}^f\rangle\langle\psi_{A-1}^f| = 1 \quad (5.7)$$

dove

$$\sum_f \equiv \sum_{f_{discreto}} \int_{f_{continuo}} \quad (5.8)$$

nella funzione spettrale (5.5) si ottiene

$$P_N(p, E) = \frac{1}{2J_0 + 1} \sum_{M_0\sigma} \sum_f \left| \langle \psi_{A-1}^f | a_{\vec{p},\sigma} | \psi_A^0 \rangle \right|^2 \delta(E - (E_{A-1}^f - E_A)) \quad (5.9)$$

dove ψ_{A-1}^f è l'autofunzione intrinseca dello stato finale f dell'Hamiltoniana H_{A-1} , con autovalore $E_{A-1}^f = E_{A-1} + E_{A-1}^*$.

Si definisce l'integrale di sovrapposizione tra le funzioni d'onda dello stato fondamentale del nucleo A e lo stato finale f del nucleo residuo $A - 1$

$$G_{f_0}^\sigma(\vec{z}) \equiv \int d\vec{x} \dots d\vec{y} [\chi_\sigma^{1/2} \psi_{A-1}^f(\vec{x} \dots \vec{y})]^* \psi_A^0(\vec{x} \dots \vec{y}, \vec{z}) \quad (5.10)$$

con $\chi_\sigma^{1/2}$ spinore a due componenti di Pauli del nucleone.

In questo modo la funzione spettrale diventa

$$P_N(p, E) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2J_0 + 1} \sum_{M_0\sigma} \sum_f \left| \int d\vec{z} G_{f_0}^\sigma(\vec{z}) \right|^2 \delta(E - (E_{A-1}^f - E_A)) \quad (5.11)$$

e può essere scomposta in

$$P_N(p, E) = P_0(p, E) + P_1(p, E) \quad (5.12)$$

con

$$P_0(p, E) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2J_0 + 1} \sum_{M_0\sigma} \sum_{f < c} \left| \int d\vec{z} G_{f_0}^\sigma(\vec{z}) \right|^2 \delta(E - (E_{A-1}^f - E_A)) \quad (5.13)$$

e

$$P_1(p, E) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2J_0 + 1} \sum_{M_0\sigma} \sum_{f > c} \left| \int d\vec{z} G_{f_0}^\sigma(\vec{z}) \right|^2 \delta(E - (E_{A-1}^f - E_A)) \quad (5.14)$$

dove le sommatorie sono ristrette agli stati finali del sistema residuo corrispondenti allo spettro discreto per $P_0(p, E)$ ed allo spettro continuo per $P_1(p, E)$.

Nel modello a shell la funzione spettrale si scrive come

$$P_0^{SM}(p, E) = \frac{1}{4\pi A} \sum_\alpha A_\alpha n_\alpha^{SM}(p) \delta[E - |\epsilon_\alpha|] \quad (5.15)$$

e

$$P_1^{SM}(p, E) = 0 \quad (5.16)$$

dove A_α è il numero dei nucleoni nello stato α ($\sum_\alpha A_\alpha = A$) e la sommatoria su α copre tutti gli stati del bersaglio.

La probabilità di occupazione si scrive come

$$S_\alpha^{SM} \equiv \int_0^\infty dp p^2 n_\alpha^{SM}(p) = \begin{cases} 1 & \alpha < \alpha_F \\ 0 & \alpha > \alpha_F \end{cases} .$$

Nel limite in cui $A \rightarrow \infty$ la funzione spettrale per un Gas di Fermi non interagente si scrive come

$$P_0^{FG}(p, E) = \frac{3}{4\pi p_F^3} \theta(p_f - p) \delta\left[E + \frac{p^2}{2M}\right] \quad (5.17)$$

e

$$P_1^{FG}(p, E) = 0 \quad (5.18)$$

che implica che la probabilità di occupazione

$$S^{FG} = \begin{cases} 1 & p \leq p_F \\ 0 & p > p_F \end{cases} .$$

Purtroppo definire la funzione spettrale richiede la conoscenza dello spettro delle autofunzioni dello stato fondamentale e del continuo di A nucleoni interagenti, noto solamente per $A = 2$ e $A = 3$, perciò per studiare sistemi più complessi si deve ricorrere a modelli che tengano conto, in particolare, delle correlazioni NN tra i nucleoni all'interno del nucleo.

Attualmente esistono, infatti, solo due modelli che descriveremo nel seguito. Entrambi sono legati al concetto di distribuzioni di momento, illustrato nel paragrafo che segue.

5.1.2 Distribuzione di momento del nucleone

La funzione spettrale è legata alla *distribuzione di momento del nucleone* $n(p)$, ovvero alla densità di probabilità che una particella abbia un dato impulso \vec{p} , dalla relazione

$$n(p) = 4\pi \int_{E_{min}}^{+\infty} dE P_N(p, E) = \frac{1}{2\pi^2} \int d\vec{z} d\vec{z}' e^{i\vec{p} \cdot (\vec{z} - \vec{z}')} \rho(\vec{z}, \vec{z}') \quad (5.19)$$

dove $E_{min} \equiv |E_A| - |E_{A-1}|$ è l'energia minima necessaria per rimuovere un nucleone dal nucleo, mentre la distribuzione d'impulso è definita come la trasformata di Fourier della matrice densità ad un corpo non diagonale

$$\rho(\vec{z}, \vec{z}') \equiv \int d\vec{x} \dots d\vec{y} [\psi_A^0(\vec{x} \dots \vec{y}, \vec{z})]^* \psi_A^0(\vec{x} \dots \vec{y}, \vec{z}') . \quad (5.20)$$

Inserendo in quest'ultima la relazione di completezza

$$\sum_f |\psi_{A-1}^f\rangle\langle\psi_{A-1}^f| = 1 \quad (5.21)$$

e ricordando l'eq. (5.11), si ottiene nuovamente l'eq. (5.19)

La distribuzione di momento riduce il problema alla conoscenza di una forma esplicita della funzione d'onda nel suo stato fondamentale, soluzione del problema a molti corpi.

Si è già anticipato che la funzione spettrale contiene informazioni sulle correlazioni NN , ma per estrarle è necessario un modello realistico relativo al calcolo della sezione d'urto, capace di tenere sotto controllo il meccanismo di reazione e tutte le implicazioni teoriche.

Distribuzione di momento nel modello a Gas di Fermi

Nel modello gas di Fermi le particelle sono considerate indipendenti e confinate in un volume Ω e le autofunzioni di particella singola sono semplicemente autofunzioni dell'impulso, ovvero onde piane

$$\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}}{\sqrt{\Omega}} \quad (5.22)$$

Antisimmetrizzando queste autofunzioni si ottiene la funzione d'onda di tutto il sistema. Proprietà fondamentale di questo modello è che alla temperatura $T = 0$, gli impulsi possono assumere soltanto valori inferiori all'impulso di Fermi p_F .

La relazione

$$\sum_{\mathbf{p}} \longrightarrow \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \quad (5.23)$$

definisce il passaggio da livelli discreti al continuo, mentre la densità del sistema

$$\rho(r) = S \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} = \frac{S}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{S}{6\pi^2} p_F^3 = \rho_0 \quad (5.24)$$

assume un valore costante, dipendente dal valore dell'impulso di Fermi, e dove S indica la molteplicità.

La matrice densità ad un corpo non diagonale si scrive come

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{S}{2\pi^2} \frac{J_1(p_F |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{p_F |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} p_F^3 \quad (5.25)$$

dove J_1 è la funzione di Bessel del primo ordine.

Anche la distribuzione d'impulso

$$n_0^{FG}(p) = \frac{S\Omega}{A(2\pi)^3} \theta(p_F - p) \quad (5.26)$$

assume un valore costante e risulta inoltre normalizzata ad uno. Dividendo infatti per A il numero di particelle $S\Omega/(2\pi)^3$, con un dato impulso \mathbf{p} , si ottiene una corretta normalizzazione all'unità.

La funzione spettrale del modello a Gas di Fermi dà quindi

$$P(p, E)^{FG} = n_0^{FG}(p) \delta\left(E - \frac{p^2}{2M}\right) \quad (5.27)$$

5.2 L'interazione nello stato finale

Si è visto che l'approssimazione impulsiva trascura l'interazione tra il nucleone colpito e gli $(A - 1)$ nucleoni spettatori.

E' stato mostrato [55], che la PWIA sottostima notevolmente la sezione d'urto inclusiva e che ciò deve essere imputato all'assenza di interazione nello stato finale (FSI²), cioè l'interazione delle particelle diffuse con il mezzo.

Esistono vari tentativi per tener conto di FSI [56, 57, 58].

5.2.1 Approssimazione WKB

Un metodo di approssimazione è rappresentato dalla teoria semiclassica WKB, che si applica nella regione $ka \gg 1$, in cui la distanza necessaria al potenziale per cambiare in modo apprezzabile il suo valore è molto maggiore rispetto alla lunghezza d'onda di De Broglie $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\mu(E-V)}}$.

Si può dimostrare che, per grandi valori dell'energia cinetica della particella incidente, la diffusione si concentra entro piccoli angoli.

Sia p il momento della particella incidente, tale che

$$p_{\parallel} = p \cos \theta = \Delta p \quad (5.28)$$

$$p_{\perp} = p \sin \theta \sim p\theta \sim 0. \quad (5.29)$$

L'angolo di scattering θ risulta quindi

$$\theta \sim \frac{\Delta p}{p} \sim \frac{\int F dt}{p} \quad (5.30)$$

dove F è la forza che agisce sulla particella, per cui vale la relazione

$$F \sim \frac{V}{a}$$

dove a è il raggio d'azione del potenziale.

Per quanto riguarda il tempo in cui la particella transita nel potenziale

$$t = \int dt \sim \frac{a}{v}$$

e quindi

$$\theta \sim \frac{V}{ap} \int dt \sim \frac{V a}{ap v} = \frac{V}{pv} = \frac{V}{E} \quad (5.31)$$

Come volevasi dimostrare, per energie sufficientemente alte la diffusione ha luogo principalmente attraverso angoli piccoli.

In ambito quantistico l'incertezza sul momento è si scrive come

$$\delta p \sim \frac{1}{a} \quad (5.32)$$

²Dall'inglese Final State Interaction

da cui risulta

$$\delta\theta \sim \frac{\Delta p}{p} \sim \frac{1}{ap} . \quad (5.33)$$

Ciò implica che nel limite in cui la traiettoria della particella è definita, ovvero quando l'incertezza sull'angolo di diffusione è minore dell'angolo stesso

$$\frac{\theta}{\delta\theta} \sim \frac{V}{E} ap \gg 1 \quad (5.34)$$

la regione di validità della teoria WKB è limitata a quei valori che soddisfano

$$\frac{Va}{v} \gg 1 . \quad (5.35)$$

5.2.2 Approssimazione Eikonale

Un'ottima alternativa all'approssimazione WKB, caratterizzata, come si è visto, da forti limiti di applicabilità, è rappresentata dall'*approssimazione eikonale* (dal greco *eikon*, *immagine*), largamente utilizzata nella trattazione dei problemi di diffusione ad alte energie [59], [60], [61].

Considerando inizialmente il caso unidimensionale, il processo di diffusione può avere luogo in due sole direzioni, o preservando il senso del moto senza che la particella incidente venga deflessa, o mandandola all'indietro.

I limiti di validità della teoria sono imposti dall'assunzione che l'energia della particella incidente sia molto più grande rispetto al modulo del potenziale $V(\vec{r})$ e che la sua lunghezza d'onda sia molto più piccola della larghezza a della buca di potenziale:

$$\frac{V}{E} \ll 1 \quad ka \gg 1 \quad (5.36)$$

E' importante notare che quest'ultimi risultano meno restrittivi dei limiti imposti dall'approssimazione di Born ($kaV/E \ll 1$), in quanto indipendenti l'uno dall'altro. Sotto queste condizioni è lecito assumere che le particelle si propaghino essenzialmente in avanti e che quindi il momento trasferito sia solo trasverso rispetto all'asse \vec{z} . Nel caso tridimensionale, invece, sia l'asse \vec{z} parallelo alla direzione del moto, ovvero $\vec{z} \parallel \hat{k}$ e sia inoltre \vec{b} il parametro d'urto perpendicolare a \vec{k} . Si può quindi scomporre il vettore posizione \vec{r} nelle sue componenti parallela ed ortogonale alla direzione \hat{z} , cioè

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z = (\vec{b}, z) = \vec{b} + \hat{k}z . \quad (5.37)$$

In base a questa notazione la funzione d'onda ψ diventa:

$$\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-\frac{i}{v} \int_{-\infty}^z V(\vec{b}, z') dz'} \quad (5.38)$$

Anche nel caso tridimensionale le condizioni al contorno di φ implicano una variazione della quantità di moto $(\vec{k} - \vec{k}') = q = 2k \sin(\theta/2)$ molto piccola, motivo per cui si può considerare la sola componente trasversale del momento trasferito, trascurando

quella longitudinale ($\vec{q} \cdot \vec{r} \simeq \vec{q} \cdot \vec{b}$).

L'ampiezza di scattering diventa:

$$\begin{aligned}
f(\vec{k}, \vec{k}') &= -\frac{\mu}{2\pi} \int e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}} V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d^3r \\
&= -\frac{\mu}{2\pi} \int d^2b e^{i\vec{q} \cdot \vec{b}} \int dz V(\vec{b}, z) e^{-\frac{i}{v} \int_{-\infty}^z V(\vec{b}, z') dz'} dz \\
&= \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{i\vec{q} \cdot \vec{b}} \left\{ 1 - e^{-\frac{i}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\vec{b}, z') dz'} \right\} \\
&= \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{i\vec{q} \cdot \vec{b}} \left\{ 1 - e^{i\chi(\vec{b})} \right\}
\end{aligned} \tag{5.39}$$

dove

$$\chi(\vec{b}) = -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\vec{b}, z) dz \tag{5.40}$$

rappresenta l'*eikonale*, ovvero l'integrale del potenziale lungo z con parametro d'urto \vec{b} fissato.

L'ampiezza di diffusione è quindi ottenibile integrando su tutti i valori di \vec{b} e risulta generalmente complessa, in totale accordo con il teorema ottico, nonostante l'eikonale sia puramente reale per potenziali reali.

Si definisce la *funzione profilo*

$$\Gamma(\vec{b}) = 1 - e^{i\chi(\vec{b})} \tag{5.41}$$

in termini della quale l'ampiezza di scattering assume la forma definitiva

$$f(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{b}} \Gamma(\vec{b}) d^2b \tag{5.42}$$

La relazione (5.41) non è altro che la trasformata di Fourier dell'ampiezza di scattering:

$$\Gamma(\vec{b}) = \frac{1}{2\pi ik} \int e^{-i\vec{q} \cdot \vec{b}} f(\vec{q}) d^2q \tag{5.43}$$

perciò conoscere la funzione profilo equivale a conoscere $f(\vec{q})$ e viceversa.

Nel caso di diffusione elastica nucleone-nucleone, l'ampiezza di scattering assume la forma gaussiana

$$f_{el}(\vec{q}) = \frac{ik}{4\pi} \sigma_{tot} (1 - i\alpha) e^{-\frac{1}{2} b_0^2 q_0^2} \tag{5.44}$$

dove b_0 è un parametro che individua la pendenza di $f(\vec{q})$, $\alpha = \frac{\text{Re } f(0)}{\text{Im } f(0)}$ e $\sigma_{tot} = 2 \int \text{Re } \Gamma(\vec{b}) d^2b$.

La trasformata di Fourier di una gaussiana è ancora una gaussiana, per cui non è difficile ricavare

$$\Gamma_{el}(b^2) = \frac{\sigma_{tot}(1 - i\alpha)}{4\pi b_0^2} e^{-\frac{b^2}{2b_0^2}} \tag{5.45}$$

In questo contesto rivestono particolare importanza i processi con potenziali a simmetria azimutale, per la loro stretta analogia con i problemi di diffrazione.

[58, 57] L' esempio più semplice è fornito da un potenziale assorbente ($\text{Im}V(r) < 0$) confinato in una sfera opaca di raggio a . Per produrre questo effetto il valore assoluto del potenziale immaginario non deve essere necessariamente molto grande, in quanto anche un potenziale debolmente assorbente risulta opaco se il suo raggio d'azione è sufficientemente grande.

Rimanendo nell'ipotesi di piccoli angoli di diffusione, valgono le seguenti relazioni:

$$\vec{q} \cdot \vec{b} \simeq qb \cos \phi = 2kb \sin(\theta/2) \cos \phi \quad (5.46)$$

dove θ è l'angolo di diffusione, mentre ϕ è l'angolo spazzato da b .

L'ampiezza di diffusione si scrive

$$f(\theta) = ik \int_0^{+\infty} J_0(2kb \sin(\theta/2)) \{1 - e^{i\chi(\vec{b})}\} b db \quad (5.47)$$

con

$$J_0(2kb \sin(\theta/2)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2ikb \sin(\theta/2) \cos \phi} d\phi \quad (5.48)$$

funzione di Bessel di ordine zero e

$$\begin{cases} e^{i\chi(\vec{b})} = 0 & b < a \\ e^{i\chi(\vec{b})} = 1 & b > a \end{cases} \quad (5.49)$$

Ricordando la proprietà delle funzioni di Bessel al primo ordine per cui

$$zJ_0 = \frac{d}{dz} zJ_1 z \quad (5.50)$$

il modulo quadro dell'ampiezza di diffusione diventa

$$|f(\theta)|^2 = (ka^2)^2 \frac{J_1^2(2ka \sin(\theta/2))}{[2ka \sin(\theta/2)]^2} \quad (5.51)$$

in perfetta analogia con i risultati ottenuti in ottica per la diffusione diffrattiva da un disco completamente assorbente. La diffusione a piccoli angoli ha l'andamento di una tipica figura di diffrazione con un massimo centrale e massimi secondari più piccoli.

La sezione d'urto totale è quindi uguale a

$$\sigma_{tot} = 2 \int (1 - \text{Re } e^{i\chi(\vec{b})}) d^2b = 2\pi a^2 \quad (5.52)$$

che è il doppio di quello classico ed a cui contribuisce per metà la riflessione diretta, pari alla proiezione dell'area geometrica, e per l'altra metà la diffusione diffrattiva che deve accompagnare la formazione di un'ombra dietro l'ostacolo. Va inoltre sottolineato che dalle formule ricavate si evince l'indipendenza della seconda metà della sezione d'urto totale dalla forma particolare del diffusore, almeno nel limite di piccole lunghezze d'onda. Gli esperimenti ad alta energia, se effettuati in modo tale da poter valutare correttamente l'intenso picco in avanti delle sezioni d'urto differenziali, mostrano che effetti diffrattivi intorno alla sfera bersaglio hanno realmente luogo e suffragano il risultato quantistico per valori grandi ma finiti di ka .

5.2.3 Teoria della diffusione multipla di Glauber

[59] Le condizioni di validità della teoria eikonale appena esposta

$$\frac{V}{E} \ll 1 \quad ka \gg 1 \quad (5.53)$$

non impongono restrizioni sul numero di particelle del sistema bersaglio, motivo per cui questa trattazione può essere estesa in maniera naturale allo studio di sistemi complessi, dando luogo alla *teoria di Glauber*, o *teoria diffrattiva dello scattering da sistemi compositi*. Problemi oggetto di questo metodo di approssimazione sono gli attuali esperimenti di diffusione, in cui le particelle della targhetta sono libere di muoversi e di rinculare per effetto dell'assorbimento dell'impulso.

Nell'approssimazione eikonale la funzione d'onda si scrive nella forma

$$\psi_{\vec{k},i}(\vec{r}, \vec{q}) = \exp \left[i\vec{k} \cdot \vec{r} - \frac{i}{v} \int_{-\infty}^z V(\vec{b} + \hat{k}z' - \vec{q}) dz' \right] u_i(q) \quad (5.54)$$

che descrive l'interazione della particella solo lungo la sua direzione di propagazione. La corrispondente ampiezza di diffusione diviene

$$\begin{aligned} F_{fi}(\vec{k}', \vec{k}) &= -\frac{2\mu}{4\pi} \int e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}} u_f^*(\vec{q}) V(\vec{r} - \vec{q}) \psi_{\vec{k},i}(\vec{r}, \vec{q}) d\vec{r} d\vec{q} \\ &= \frac{k}{2\pi i} \int d^2b e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{b}} \int d\vec{q} u_f^*(\vec{q}) \left[e^{i\chi(\vec{b} - \vec{s})} - 1 \right] u_i(\vec{q}) \end{aligned} \quad (5.55)$$

con lo sfasamento dato da

$$\chi(\vec{b} - \vec{s}) = -\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\vec{b} - \vec{s} + \hat{k}z) dz \quad (5.56)$$

dove l'integrazione sull'intervallo $[-\infty, +\infty]$ implica l'indipendenza dalla coordinata longitudinale del bersaglio ($\hat{k} \cdot \vec{q}$), e dove il parametro d'impatto relativo ad un centro fissato è sostituito da

$$\vec{s} = \vec{q} - \hat{k}(\hat{k} \cdot \vec{q}) \quad (5.57)$$

che è la componente di \vec{q} perpendicolare alla direzione di propagazione \vec{k} .

Non resta che estendere la trattazione al processo di diffusione ad alte energie di una particella su un sistema a molti corpi. Si consideri il processo di diffusione su atomi o nuclei bersaglio. Le particelle inizialmente si trovano in un certo stato legato da cui transitano verso altri stati, liberi o legati, a seguito della diffusione.

Si consideri un sistema composto da N particelle e la corrispondente funzione d'onda ad esso associata

$$u(\vec{q}) \longrightarrow u(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_N) \quad (5.58)$$

Anche in questo caso l'impulso trasferito è piccolo, ma stavolta ciò oltre ad implicare piccoli angoli di diffusione, impone che anche l'energia ceduta sia piccola. Si assuma per di più che le velocità individuali delle particelle bersaglio siano minori rispetto

alla velocità del proiettile incidente.

Nel sistema di riferimento del laboratorio il bersaglio è fermo ed il potenziale d'interazione si scrive come:

$$V(\vec{q} - \vec{q}_1; \dots; \vec{q} - \vec{q}_N) = V(\vec{b} - \vec{s}_1, z - z_1; \dots; \vec{b} - \vec{s}_N, z - z_N) \quad (5.59)$$

dove \vec{q}_i è la coordinata i-esima della i-esima particella targhetta, \vec{s}_i la sua proiezione lungo \vec{b} , $\vec{r} = \vec{b} + \hat{k}z$ la coordinata del proiettile.

Il numero dei costituenti la targhetta è molto elevato ed impostare il problema rispetto alle coordinate relative del sistema risulta piuttosto complicato, perciò Glauber propose alcune ipotesi semplificative:

- il proiettile incidente interagisce con le particelle bersaglio attraverso forze a due corpi, così che lo sfasamento totale si riduce alla somma degli sfasamenti delle singole particelle:

$$\chi_{tot}(\vec{b}) \equiv \chi(\vec{b}; \vec{s}_1; \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_N) = \sum_{i=1}^N \chi_i(\vec{b} - \vec{s}_i) \quad (5.60)$$

- le particelle bersaglio possono essere pensate come *congelate* nelle loro posizioni istantanee durante il passaggio della particella incidente, così che l'interazione della particella i-esima con la particella incidente non dipende dall'interazione delle rimanenti $N - 1$ particelle con l'i-esima;
- la traiettoria della particella incidente è rettilinea, anche durante l'interazione.

Sulla base di queste ipotesi l'ampiezza di diffusione diventa:

$$F_{fi}(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{b}} \int u_f^*(\vec{q}_1 \dots \vec{q}_N) \left[1 - e^{i\chi_{tot}(\vec{b})} \right] u_f(\vec{q}_1 \dots \vec{q}_N) \prod_j d\vec{q}_j \quad (5.61)$$

espressione valida per particelle bersaglio distanti $R \ll kd^2$ l'una dall'altra, condizione sempre soddisfatta per scattering su nuclei, in quanto $kd \gg 1$.

Nel caso di diffusione elastica

$$F_{ii}(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{b}} \langle i | \left[1 - e^{i\chi_{tot}} \right] | i \rangle d^2b \quad (5.62)$$

dove

$$\chi_{tot} = \sum_{i=1}^N \chi(\vec{b} - \vec{s}_i) \quad (5.63)$$

e

$$\chi(\vec{b} - \vec{s}_i) = -\frac{m}{k} \int_{-\infty}^{-\infty} V(\vec{b} - \vec{s}_i, z_i) dz_i \quad (5.64)$$

in cui $V(\vec{b} - \vec{s}_i, z_i)$ è il potenziale dovuto all'i-esima particella.

E' ora necessario introdurre la *funzione profilo totale*

$$\Gamma_{tot}(\vec{b}, \vec{s}_1, \dots, \vec{s}_A) = 1 - e^{i \sum_{i=1}^N \chi(\vec{b} - \vec{s}_i)} = 1 - \prod_{i=1}^N (1 - \Gamma(\vec{b} - \vec{s}_i)) \quad (5.65)$$

Svolgendo la produttoria si giunge ad una formulazione più pratica:

$$\Gamma_{tot} = 1 - (1 - \Gamma_1) \cdot (1 - \Gamma_2) \cdot \dots \cdot (1 - \Gamma_A) = \sum \Gamma - \sum \Gamma\Gamma + \sum \Gamma\Gamma\Gamma - \dots \quad (5.66)$$

dove

$$\begin{aligned} \sum \Gamma &= \sum_{i=1}^A \Gamma(\vec{b} - \vec{s}_i) \\ \sum \Gamma\Gamma &= \sum_{i < j} \Gamma(\vec{b} - \vec{s}_i) \Gamma(\vec{b} - \vec{s}_j) \end{aligned} \quad (5.67)$$

e così via.

La prima sommatoria contiene informazioni sulla *diffusione singola*, in cui ogni particella interagisce con quella incidente indipendentemente dalle altre $N - 1$, $\sum_{j \neq l} \Gamma_j \Gamma_l$ indica lo *scattering doppio*, in cui la condizione $j \neq l$ impedisce che una particella bersaglio possa essere colpita più volte, e così do seguito. Ciò si visualizza in modo più immediato attraverso l'*operatore di Glauber*

$$\hat{S}_G(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_N) = \prod_{j=2}^N G(\vec{b}, \vec{q}_1, \vec{q}_j) = \prod_{j=1}^N [1 - \Gamma_j(\vec{b} - \vec{s}_j)] = \prod_{j=2}^N [1 - \Theta(z_j - z) \Gamma_j(\vec{b} - \vec{s}_j)] \quad (5.68)$$

dove la presenza della funzione Theta di Heaviside vincola la particella bersaglio urtata ad interagire solo con le particelle in avanti rispetto alla sua direzione di propagazione rettilinea.

L'ampiezza (5.62) si riscrive come:

$$\begin{aligned} F_{ii}(\vec{q}) &= \frac{ik}{2\pi} \int e^{i\vec{q}\vec{b}} \langle i | [1 - e^{i\sum_{i=1}^N \chi(\vec{b} - \vec{s}_i)}] | i \rangle d^2b = \\ &= \frac{ik}{2\pi} \int e^{i\vec{q}\vec{b}} \langle i | [1 - \prod_{i=1}^N e^{i\chi(\vec{b} - \vec{s}_i)}] | i \rangle d^2b \\ &= \frac{ik}{2\pi} \int e^{i\vec{q}\vec{b}} \langle i | [1 - \prod_{i=1}^N (1 - \Gamma(\vec{b} - \vec{s}_i))] | i \rangle d^2b = \end{aligned}$$

che è nota come *serie dello scattering multiplo di Glauber*

$$= \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{i\vec{q}\vec{b}} \left\{ 1 - \int |\psi(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_N)|^2 \prod_{i=1}^A [1 - \Gamma(\vec{b} - \vec{s}_i)] \prod_{i=1}^N d\vec{q}_i \right\} \quad (5.69)$$

Per giungere ad una formulazione dell'ampiezza di scattering più semplice è necessario riscrivere la funzione d'onda mediante il *modello a particelle indipendenti*:

$$|\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)|^2 \simeq \prod_{i=1}^N \rho(\vec{r}_i) \quad (5.70)$$

dove

$$\rho(\vec{r}_i) = |\phi(\vec{r}_i)|^2 \quad (5.71)$$

Nel limite di grandi N l'ampiezza di scattering si scrive:

$$\begin{aligned} F_{ii}(\vec{q}) &= \frac{ik}{2\pi} \int d^2b \, e^{i\vec{q}\vec{b}} \left\{ 1 - \int \prod_{i=1}^N \rho(\vec{r}_i) \prod_{i=1}^N [1 - \Gamma(\vec{b} - \vec{s}_i)] \prod_{i=1}^N d\vec{q}_i \right\} = \\ &= \frac{ik}{2\pi} \int d^2b \, e^{i\vec{q}\vec{b}} \left\{ 1 - \left\{ \int \rho(\vec{r}_i) [1 - \Gamma(\vec{b} - \vec{s})] d\vec{q} \right\}^N \right\} = \\ &= \frac{ik}{2\pi} \int d^2b \, e^{i\vec{q}\vec{b}} \left\{ 1 - \left[1 - \int \rho(\vec{r}) \Gamma(\vec{b} - \vec{s}) d^3r \right]^N \right\} = \\ &= \frac{ik}{2\pi} \int d^2b \, e^{i\vec{q}\vec{b}} \left\{ 1 - e^{-N \int \rho(\vec{r}) \Gamma(\vec{b} - \vec{s}) d^3r} \right\} \end{aligned} \quad (5.72)$$

La teoria di Glauber, che si rivela più completa dell'approssimazione di Born, ha avuto un grande successo nell'interpretazione teorica della diffusione di particelle di alta ed altissima energia su nuclei. Recentemente è stata generalizzata per poter essere applicata ai processi esclusivi $A(e, e'p)B$, per descrivere lo scattering multiplo che il protone colpito subisce nell'attraversare il mezzo nucleare, formato dal nucleo residuo $(A - 1)$.

In Figura 5.2, si può notare l'elevata accuratezza con cui vengono riprodotti i recenti dati sperimentali ottenuti al Jlab sul processo ${}^3\text{He}(e, ep){}^2\text{H}$.

Sono attualmente in corso vari tentativi per poter applicare il metodo di Glauber ai processi inclusivi; la teoria in questo caso è più complessa in quanto, rivelando solo l'elettrone diffuso, non è dato sapere se il nucleone colpito subisce, oltre a diffusione elastica, anche diffusione anelastica. Per questo motivo, nella diffusione inclusiva, gli effetti della FSI vengono trattati con diverse versioni del modello ottico.

5.2.4 Il modello ottico

In questo modello, si suppone che il nucleo residuo generi un potenziale medio complesso

$$V_{opt}(r) = V_0(r) + iW_0(r) \quad (5.73)$$

nel quale la particella colpita si propaga subendo diffusione elastica da parte di V_0 e diffusione anelastica da parte di W_0 . Mentre la diffusione elastica influisce solo sulla direzione del moto della particella, la diffusione da parte di W_0 porta, a causa dei processi anelastici, ad una riduzione del flusso delle particelle.

In un processo inclusivo il flusso deve però conservarsi e quindi l'effetto di W_0 sarà quello di ridistribuire il flusso in regioni cinematiche diverse mantenendolo però costante.

Il potenziale ottico viene introdotto nel propagatore energetico del nucleone e si arriva, sulla base della teoria della funzione di Green e della rappresentazione eikonale del propagatore, al seguente risultato.

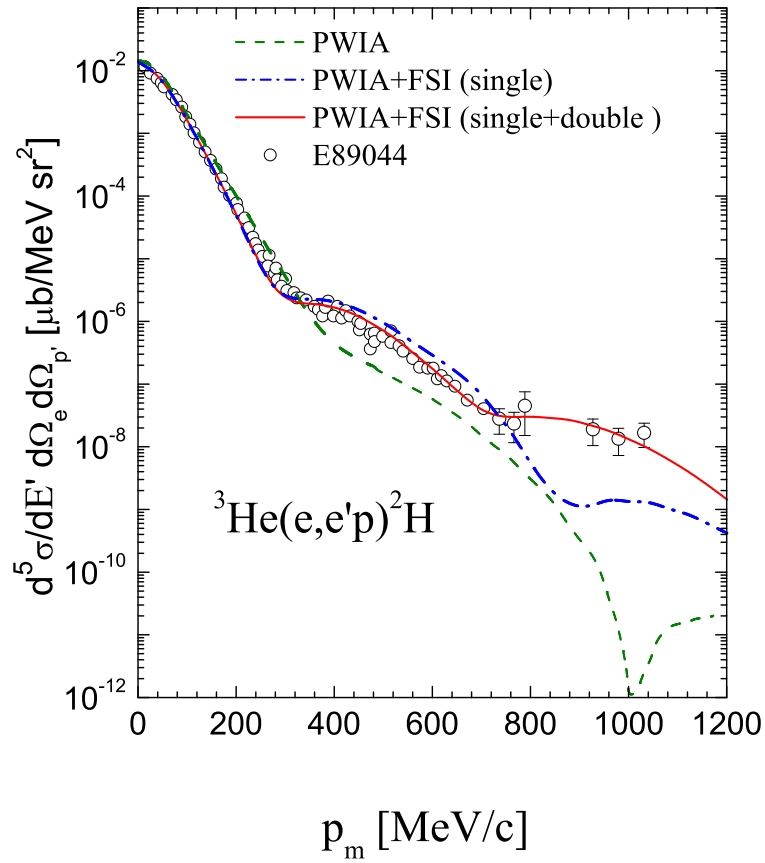


Figura 5.2: Sezione d'urto del processo ${}^3\text{He}(e,e'p){}^2\text{H}$. La linea tratteggiata corrisponde alla PWIA. Le altre curve includono l'interazione nello stato finale calcolata nell'ambito di una teoria di Glauber generalizzata, cioè tenendo conto del processo di diffusione multipla del nucleone colpito con i nucleoni di ${}^2\text{H}$. Linea a tratto punto: PWIA più diffusione singola; linea continua: PWIA + diffusione singola + diffusione doppia. Dati sperimentali da [62].

Sia ν l'energia trasferita, \vec{q} il tri-impulso trasferito e $p = (p_0, \vec{p})$ il quadri-impulso iniziale del nucleone all'interno del nucleo.

Per la conservazione dell'energia si può scrivere

$$\nu + M_A = \sqrt{(\vec{p} + \vec{q})^2 + M^2} + \sqrt{M_{A-1}^{*2} + \vec{p}^2} \quad (5.74)$$

dove

$$M_A = p_0 + \sqrt{M_{A-1}^{*2} + \vec{p}^2} \quad (5.75)$$

e quindi

$$p_0 = M_A - \sqrt{M_{A-1}^{*2} + \vec{p}^2} \quad (5.76)$$

con M , M_A e M_{A-1}^* rispettivamente massa del nucleone, del nucleo iniziale e del sistema eccitato di $(A - 1)$ nucleoni.

L'eq. (5.74) può essere riformulata come segue:

$$\nu + M_A - \sqrt{M_{A-1}^{*2} + \vec{p}^2} = \nu + p_0 = \sqrt{(\vec{p} + \vec{q})^2 + M^2} . \quad (5.77)$$

La PWIA può quindi essere scritta nella forma (vedi paragrafo 5.1)

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega' dE'} = \sum_{N=1}^A \int d\vec{p} dE \sigma_{eN} P(p, E) \delta(\nu + p_0 - E_{\vec{p}+\vec{q}}) \quad (5.78)$$

dove ricordiamo che σ_{eN} è la sezione d'urto elastica eN e $P(p, E)$ è la funzione spettrale.

L'introduzione del potenziale ottico conduce alla seguente espressione:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega' dE'} = \sum_{N=1}^A \int d\vec{p} dE \sigma_{eN} P(p, E) \frac{\nu + p_0}{q} \Delta(p)_{opt} \quad (5.79)$$

dove

$$\Delta(p)_{opt} = - \int_{E_p^+}^{E_p^-} dE_p \frac{E_p}{\pi(\nu + p_0)} \frac{Im V_{opt}}{[\nu + p_0 - E_p - Re V_{opt}]^2 + [Im V_{opt}]^2} . \quad (5.80)$$

I limiti di integrazione si ottengono dalla conservazione dell'energia ed il potenziale V_{opt} dalla teoria dello scattering multiplo, che fornisce

$$V_{opt} = \rho v_N \sigma_{NN} \frac{(i + \alpha)}{2} \quad (5.81)$$

dove ρ è la densità nucleare, v_N la velocità del nucleone colpito, σ_{NN} la sezione d'urto nucleone-nucleone ed α il rapporto tra la parte reale e quella immaginaria del potenziale.

Tutti questi parametri sono noti da altri processi [63].

Nel seguito useremo questo modello per poter tenere conto della FSI.

Capitolo 6

Calcolo dei processi inclusivi quasi-elastici in approssimazione impulsiva indotti da elettroni e neutrini

Ricordiamo che l'interazione leptone-nucleo è intesa come una somma delle singole interazioni leptone-nucleone, così come la corrente nucleare debole è una somma di correnti nucleoniche deboli.

Pertanto in un primo momento il leptone interagisce con un nucleone del nucleo, il quale possiede impulso ed energia determinati dalla struttura nucleare; dopo l'interazione iniziale, il nucleone si propaga nel mezzo nucleare dando origine alla FSI.

La descrizione di questi processi richiede l'utilizzo di modelli teorici, sia per la struttura nucleare (Funzione Spettrale del nucleone), che per i meccanismi di propagazione di un nucleone nel mezzo nucleare (FSI). A questo fine utilizzeremo vari modelli che sono descritti nel seguito.

Mostriamo i risultati del calcolo dei processi di diffusione $^{16}O(e, e')X$, $^{16}O(\nu_\mu, \mu)X$ e $^{16}O(\nu_e, e)X$. A tal fine abbiamo utilizzato la teoria di [14] per la Funzione Spettrale e quella di [64] per la FSI. Confronteremo i nostri risultati con quelli ottenuti utilizzando una teoria diversa per entrambe le grandezze [65, 66]. In entrambi i casi si confronteranno i risultati con quelli ottenuti con il Gas di Fermi, per chiarire se il processo neutrino-nucleo, ed eventualmente la misura delle oscillazioni dei neutrini, sono sensibili, e in che misura, ai dettagli della struttura nucleare.

6.1 Diffusione quasi-elastica di leptoni

Come sappiamo, la sezione d'urto quasi-elastica inclusiva lN di un generico leptone l si scrive [67]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega' dE'} = \frac{k'}{8(2\pi)^4 M_A E} \int d^3p dE P(p, E) |\mathcal{M}_{lN}|^2 \delta(\nu + p_0 - E_{p+q}) \quad (6.1)$$

dove E è l'energia del leptone incidente, M_A e p_0 la massa e l'energia iniziale del nucleo bersaglio, E' e k' rispettivamente energia ed impulso del leptone diffuso,

$P(p, E)$ la funzione spettrale e $|\mathcal{M}_{lN}|^2$ è il quadrato dell'ampiezza invariante, che nel caso di elettroni incidenti si scrive

$$|\mathcal{M}_{eN}|^2 = \sum_n \sigma_{eN} \quad (6.2)$$

dove σ_{eN} è la sezione d'urto elastica eN , mentre per neutrini incidenti si scrive

$$|\mathcal{M}_{\nu N}|^2 = \frac{G^2}{2} (A(t) - (s - u)B(t) + (s - u)^2 C(t)) \quad (6.3)$$

La costante di accoppiamento è $G = 1.12 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$, mentre $A(t)$, $B(t)$ e $C(t)$ si scrivono in funzione delle variabili di Mandelstam e dei fattori di forma vettoriale ($F_1(t), F_2(t)$), pseudo-scalare ($F_p = 0$) ed assiale ($F_A(t)$), già menzionati nel capitolo 3, come

$$\begin{aligned} A(t) = & -4M^2(t - m^2) \left[\left(4 - \frac{t}{M^2}\right) F_A^2 - \left(4 + \frac{t}{M^2}\right) F_1^2 - \frac{t}{M^2} \left(1 + \frac{t}{M^2}\right) F_2^2 - \right. \\ & \left. - \left(\frac{4t}{M^2}\right) F_1 F_2 - \frac{m^2}{M^2} \{(F_1 + F_2)^2 + F_A^2 + t F_p^2 - 4M F_A F_p\} \right] \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$B(t) = 16t F_A (F_1 + F_2) \quad (6.5)$$

$$C(t) = 4 \left\{ F_1^2 - \left(\frac{t}{4M^2}\right) F_2^2 + F_A^2 \right\} \quad (6.6)$$

La sezione d'urto quasi-elastica lN può essere scritta anche in funzione dell'energia trasferita ν e dell'angolo di diffusione θ come

$$\frac{d\sigma}{d\nu d\cos\theta} = \frac{k'}{4(2\pi)^3 M_A^2 E} \int d^3p dE P(p, E) |\mathcal{M}_{lN}|^2 \delta(\nu + p_0 - E_{p+q}) \quad (6.7)$$

I fattori di forma e tutte le grandezze che compaiono nelle eq. (6.1) e (6.7) sono note dai dati sperimentali eN e νN ; le uniche incognite sono le funzioni spettrali $P(p, E)$ e per esplicitarle è necessario ricorrere a dei modelli teorici.

Funzione spettrale

Modello a Gas di Fermi

Il Modello a Gas di Fermi è molto diffuso per la facilità con cui si utilizza nei processi di simulazione Monte Carlo, nonostante fornisca risultati piuttosto approssimati. Questo modello, infatti, dà una buona descrizione della sezione d'urto totale, ma non descrive altrettanto accuratamente le sezioni d'urto longitudinale e trasversa. Nel modello a Gas di Fermi si ha

$$P(p, E) = n_0^{FG} \delta(E - E_p) \quad (6.8)$$

dove

$$E_p = \sqrt{p^2 + M^2} - E_B \quad (6.9)$$

è l'energia iniziale del nucleone con massa M ed energia media di legame E_B e n_0^{FG} è la distribuzione di momento (5.26) definita nel paragrafo 5.1.2.

L'eq. (6.8) mostra che i nucleoni sono considerati non interagenti e con energia $E_B = \text{cost.}$

I valori dei parametri E_B e P_F dipendono dal modello teorico scelto e dal nucleo in esame. Nel caso del nucleo ^{16}O , sono stati utilizzati i valori $P_F = 225 \text{ MeV}$ e $E_B = 25 \text{ MeV}$ [69].

Modello della densità locale

Come già sottolineato nell'eq. (5.11), la funzione spettrale, che include le correlazioni tra nucleoni, può essere scritta nella forma

$$P(p, E) = P_0(p, E) + P_1(p, E) \quad . \quad (6.10)$$

Mentre P_0 è legata al modello a shell, la P_1 è nota solo per sistemi a pochi nucleoni [14] e per la materia nucleare infinita [64].

In [75], è stata usata l'approssimazione della densità locale per ottenere P_1 per un nucleo finito, scrivendo

$$P_1(p, E) = \int d^3r \rho_A(\vec{r}) P_1^{NM}(p, E; \rho = \rho_A(\vec{r})) \quad (6.11)$$

dove ρ_A è la distribuzione di densità nucleare e P_1^{NM} è la componente della funzione spettrale per la materia nucleare uniforme a densità $\rho = \rho_A$.

Modello delle correlazioni a due corpi

Il modello delle correlazioni a due corpi, sviluppato nella sua forma più semplice in [76] ed in quella più avanzata in [14], ipotizza che le correlazioni a corto raggio dipendano dalle proprietà locali dei nuclei e che quindi, essenzialmente, le loro caratteristiche siano indipendenti dal numero di massa A .

In questo quadro, nel modello più semplice, il nucleone "1" con elevato impulso \vec{p}_1 è correlato con il nucleone "2" con impulso $\vec{p}_2 \sim -\vec{p}_1$, cosicchè, per la conservazione dell'impulso

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \sum_{i=3}^A \vec{p}_i = 0 \quad (6.12)$$

avremo

$$\vec{p}_{A-2} = \sum_{i=3}^A \vec{p}_i \simeq 0 \quad . \quad (6.13)$$

In questo caso, in base alla conservazione dell'energia incidente ed indicando $\vec{p}_1 \equiv \vec{p}$, possiamo scrivere la relazione

$$\frac{p^2}{2M} = \frac{p^2}{2M_{A-1}} + E_{A-1}^* \quad (6.14)$$

da cui si ottiene l'energia di eccitazione del sistema $A - 1$ come

$$E_{A-1}^* = \frac{A-2}{A-1} \frac{p^2}{2M} . \quad (6.15)$$

Verifichiamo quindi che l'energia di rimozione

$$E = |E_A| - |E_{A-1}| + E_{A-1}^* \quad (6.16)$$

è correlata con l'impulso del nucleone p .

Nel modello avanzato di [14] si tiene conto che il nucleone equilibria il proprio impulso sia con il nucleone 2 che con $A - 2$, ottenendo per la funzione spettrale

$$P(p, E) = P_0(p, E) + P_1(p, E) \quad (6.17)$$

con $P_0(p, E)$ della nota forma, eq. (5.15), e

$$P_1(p, E) = \int d\vec{p}_3 \delta \left[E - \frac{A-2}{2M(A-1)} \left(\vec{p} + \frac{A-1}{A-2} \vec{p}_3 \right)^2 \right] n_{rel} \left(\left| \vec{p} + \frac{\vec{p}_3}{2} \right| \right) n_{CM}(|\vec{p}_3|) \quad (6.18)$$

dove $\vec{p}_3 \equiv -\vec{p}_{A-2}$ e n_{rel} e n_{CM} descrivono il moto relativo e quello del baricentro della coppia correlata. Tali quantità sono disponibili da calcoli a molti corpi con potenziali realistici [14].

I due modelli di funzione spettrale per nuclei finiti che abbiamo descritto, sono gli unici attualmente disponibili e sono stati largamente usati per il calcolo della diffusione di elettroni.

Il primo modello è stato anche usato recentemente per trattare la diffusione neutrino-nucleo, ed in questa tesi applicheremo per la prima volta al calcolo dell'interazione neutrino-nucleo il secondo modello di funzione spettrale.

Interazione nello stato finale

Modello ottico

Per considerare l'interazione nello stato finale si può ricorrere al modello ottico già discusso in precedenza nel paragrafo 5.2.4 e di cui ne riportiamo l'espressione:

$$V_{opt} = \rho v_n \sigma_{NN} \frac{(i + \alpha)}{2} \quad (6.19)$$

dove ρ è la densità nucleare, v_n la velocità del nucleone colpito, σ_{NN} la sezione d'urto nucleone-nucleone ed α il rapporto tra la parte reale e quella immaginaria del potenziale.

Ricordiamo inoltre che questi parametri sono noti dai dati sperimentali sulla diffusione NN [63].

6.2 Diffusione quasi-elastica di elettroni

Modelli teorici a confronto

In questo paragrafo si confrontano i modelli teorici appena discussi, utilizzando due differenti modelli per la funzione spettrale.

Nei grafici in Figura 6.1 ed in Figura 6.2, è rappresentata la sezione d'urto sperimentale $^{16}\text{O}(e, e')X$ [68] inclusiva in funzione dell'energia trasferita ω : il primo picco rappresenta la diffusione quasi-elastica localizzata a $\nu \sim \frac{Q^2}{2M}$, ed il secondo la produzione della prima risonanza nucleonica $\Delta(1236)$. Nelle figure sono indicati i valori dell'energia incidente dell'elettrone, E , e l'angolo di diffusione θ . La linea tratteggiata rappresenta il modello a Gas di Fermi, mentre le linee continua e punteggiata indicano, rispettivamente, il modello della funzione spettrale [66] in IA, senza e con gli effetti di FSI.

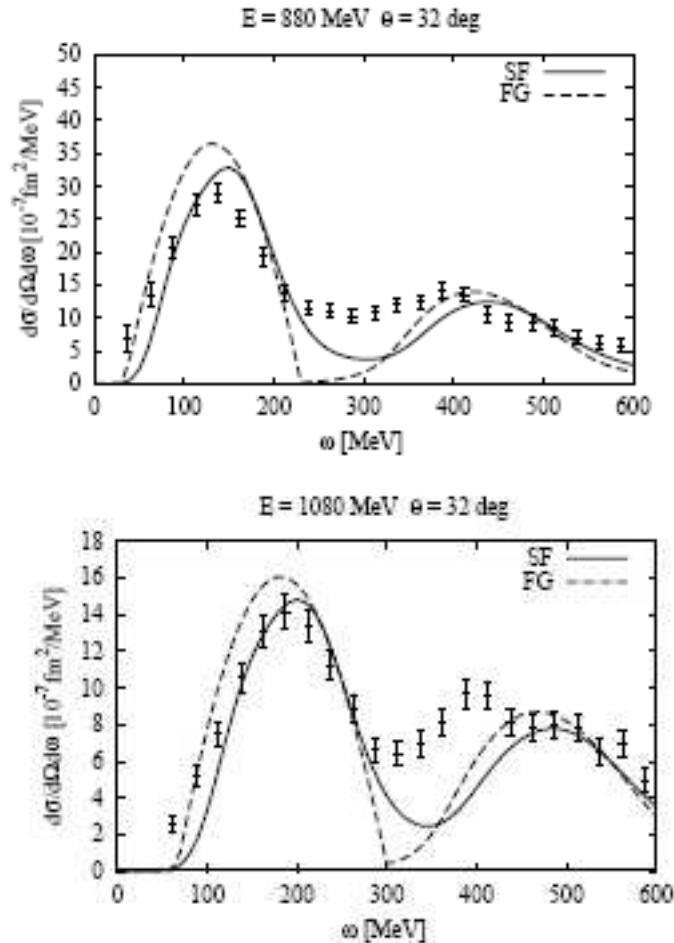


Figura 6.1: Sezioni d'urto inclusive $^{16}\text{O}(e, e')X$ in funzione dell'energia trasferita ω , per due diversi valori dell'energia incidente E ed angolo di diffusione fisso $\theta = 32^\circ$. I dati sperimentali sono da [68]. I calcoli teorici rappresentano le previsioni del Gas di Fermi (FG) e della teoria spettrale nell'approssimazione della densità locale, eq. (6.10), (SF). Adattato ref.[69]

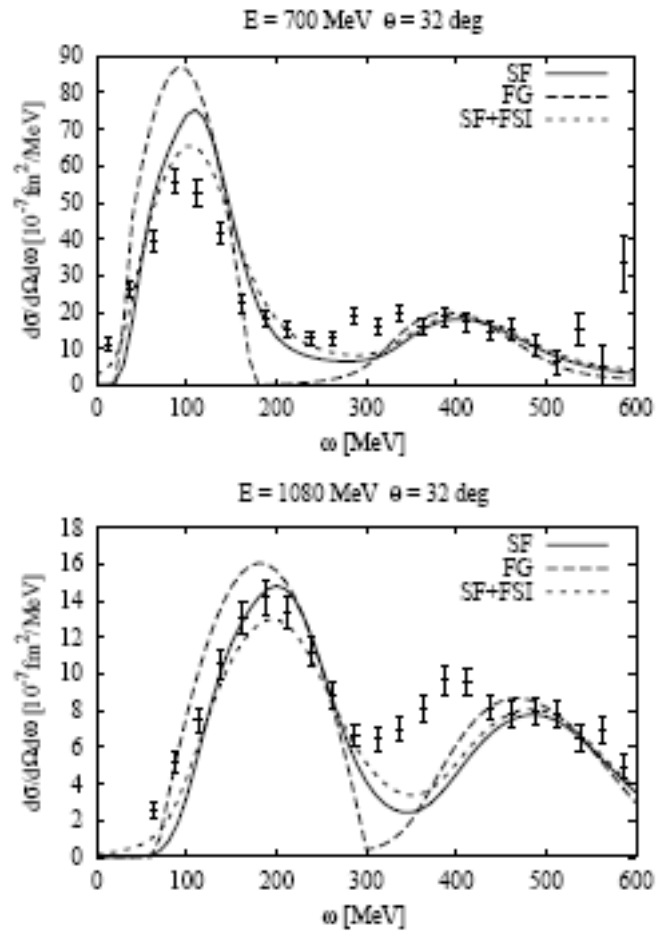


Figura 6.2: Stesso grafico della Figura 6.1, con l'aggiunta degli effetti di FSI per la funzione spettrale (linea punteggiata SF+FSI) [69].

Nelle figure sono mostrati i contributi quasi-elastico ($W^2 = M^2$) e della produzione della $\Delta(1236)$ ($W^2 = M_\Delta^2$), a cui corrispondono rispettivamente il picco a basse e ad alte energie.

Nella regione quasi-elastica, la funzione spettrale è in accordo con i dati sperimentali anche nel caso in cui vengano trascurati gli effetti di interazione nello stato finale, mentre il modello a Gas di Fermi sovrastima i risultati sperimentali per qualsiasi valore dell'energia del fascio incidente. L'introduzione degli effetti di FSI comporta un maggiore accordo con i dati sperimentali soltanto per energie inferiori a 1 GeV . Per qualsiasi valore dell'energia del fascio incidente, la funzione spettrale presenta delle code ad alte energie trasferite, generate dalle correlazioni NN a corto raggio, non previste nel modello a Gas di Fermi.

Al di là della regione quasi-elastica, soprattutto nella regione di transizione, le sezioni d'urto calcolate risultano sempre in disaccordo con i dati sperimentali.

Nei grafici in Figura 6.3, gli stessi dati vengono confrontati con la teoria di [14]

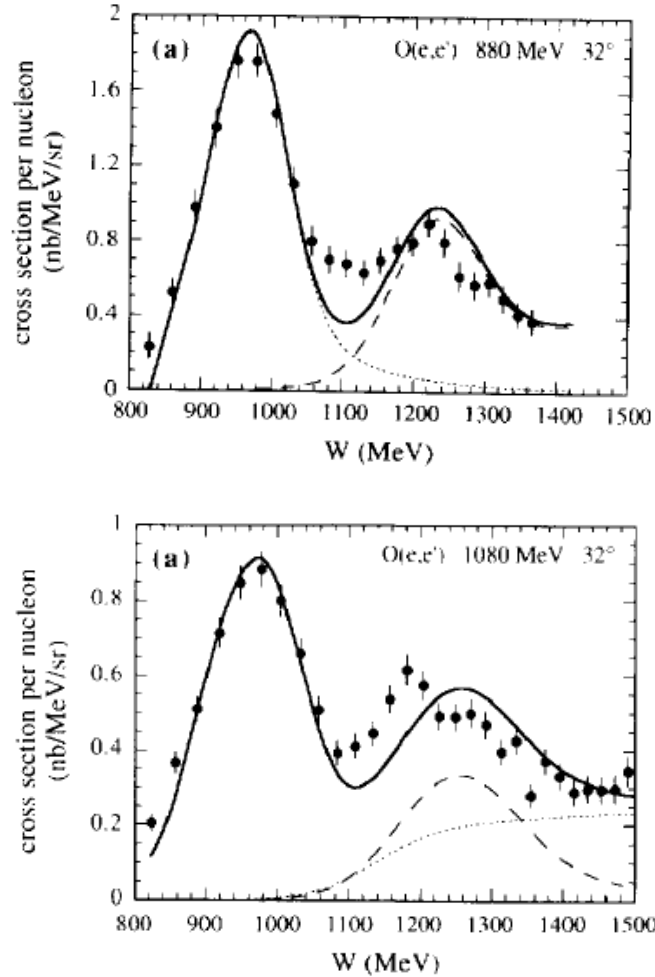


Figura 6.3: Stessi dati sperimentali della Figura 6.1 e della Figura 6.2 in funzione della massa invariante $W = \sqrt{M^2 + Q^2(1/x - 1)}$. I calcoli teorici si basano sulla funzione spettrale della FSI di ref.[14]

dove si usa la funzione spettrale del modello delle correlazioni a 2 corpi descritto nel

paragrafo 6.1.

Nella regione quasi-elastica si osserva un ottimo accordo tra calcoli teorici e risultati sperimentali.

Possiamo concludere che la teoria di [14] fornisce un migliore accordo con i dati sperimentali. Ciò è corroborato dai risultati mostrati in Figura 6.4, dove si può notare un buon accordo con i dati sperimentali ad alte energie.

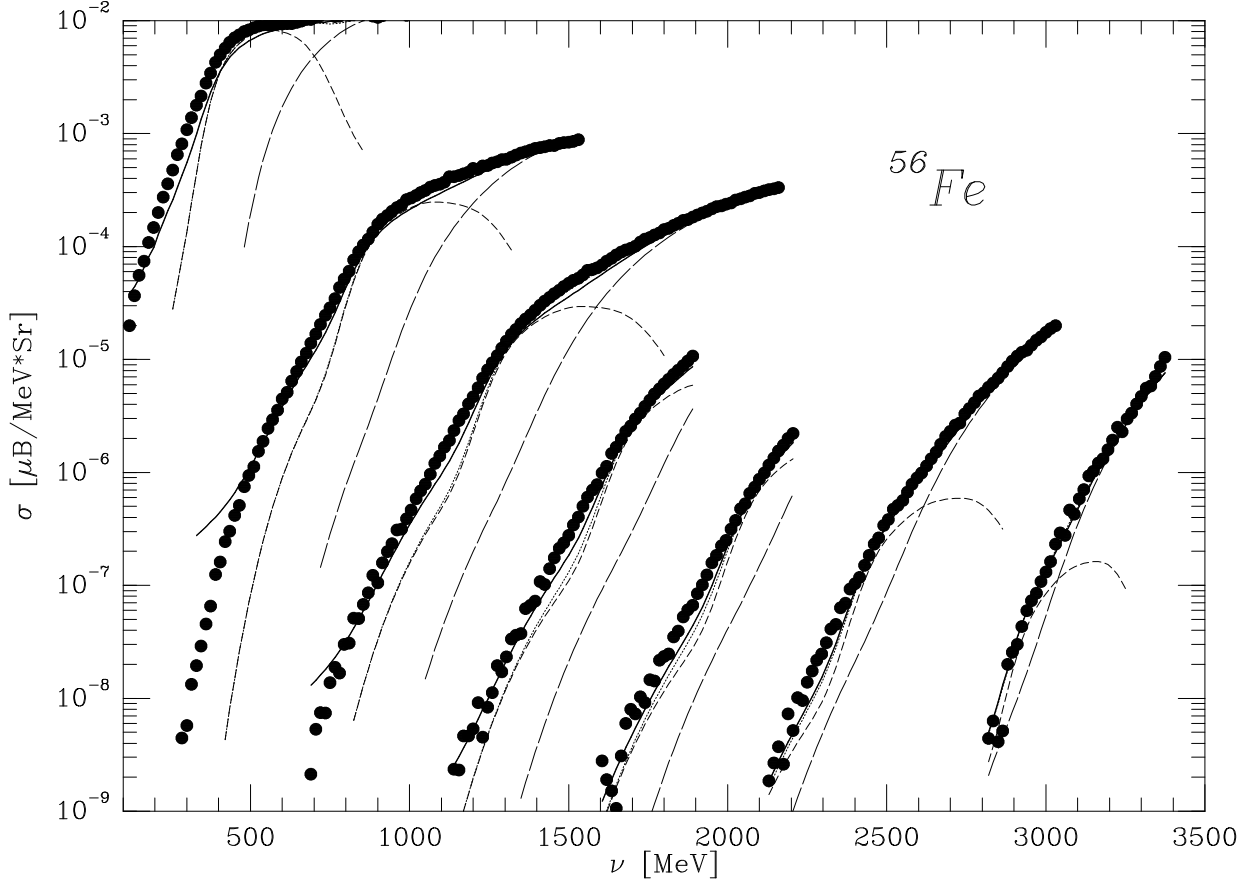


Figura 6.4: Sezione d'urto $\sigma = d\sigma/d\Omega'dE'$ ottenuta al CEBAF E89-008 con elettroni incidenti di $E = 4 \text{ GeV}$, confrontata con i calcoli teorici di [70, 71]. I valori di Q^2 nei vari gruppi di dati sperimentali sono circa costanti e corrispondono, da sinistra verso destra, a $Q^2 = 0.97, 1.94, 2.78, 2.353, 4.24, 4.92, 5.75 \text{ GeV}$. La curva a tratteggio lungo rappresenta il contributo anelastico PWIA, mentre il contributo quasi-elastico PWIA è mostrato con la linea a tratteggio corto, il contributo PWIA totale con la linea punteggiata ed il contributo PWIA+FSI con la linea continua.

6.3 Diffusione quasi-elastica di neutrini

Modelli teorici a confronto

In modo del tutto analogo al paragrafo precedente, presentiamo un confronto dei modelli teorici appena discussi, applicati alla diffusione dei neutrini.

Nelle Figure 6.5 e 6.6 è mostrata la sezione d'urto del processo $^{16}\text{O}(\nu_\mu, \mu)X$ in funzione dell'energia del muone diffuso, sia per il modello a Gas di Fermi che per la funzione spettrale¹.

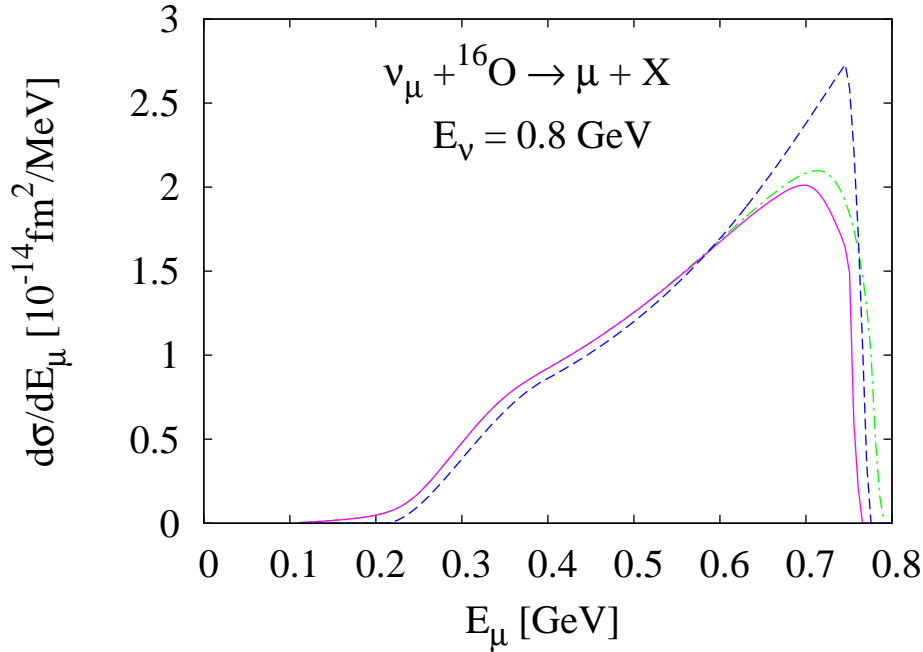


Figura 6.5: Diffusione quasi-elastica $^{16}\text{O}(\nu_\mu, \mu^-)X$ in funzione dell'energia del muone diffuso, con energia del neutrino incidente pari a $E = 0.8 \text{ GeV}$. Le sezioni d'urto riportate sono calcolate usando la funzione spettrale SF con o senza il blocco di Pauli (linea continua e linea tratteggiata) ed il Gas di Fermi, linea punteggiata. Adattato Ref.[69]

Si può notare che nel modello a Gas di Fermi il valore della sezione d'urto nel picco è molto maggiore di quello ottenuto con la funzione spettrale. Questo fatto è facilmente comprensibile se si considera che le correlazioni a corto raggio creano una "coda" di componenti di alto impulso nella funzione spettrale, assenti nel modello a Gas di Fermi; in conseguenza di ciò, aumenta la probabilità di avere nello stato finale muoni di grande energia, ovvero di avere una sezione d'urto incrementata a piccoli valori dell'energia trasferita $\nu = E_\nu - E_\mu$: per conservazione della probabilità ($\int \frac{d\sigma}{d\Omega' dE'} dE' = \text{cost}$) la sezione d'urto nel picco decresce. Quindi la diffusione quasi-elastica di neutrini, così come quella di elettroni, ad energie $E_\nu \sim 1 \text{ GeV}$ risulta essere sensibile ai dettagli della struttura nucleare, quale la presenza delle correlazioni internucleoniche.

Secondo gli autori della ref. [65], la differenza di circa il 30% nel picco, sarà di

¹Si noti che l' ^{16}O [72] sarà il nucleo bersaglio principale nelle targhette degli esperimenti SK [3] e K2K [73]

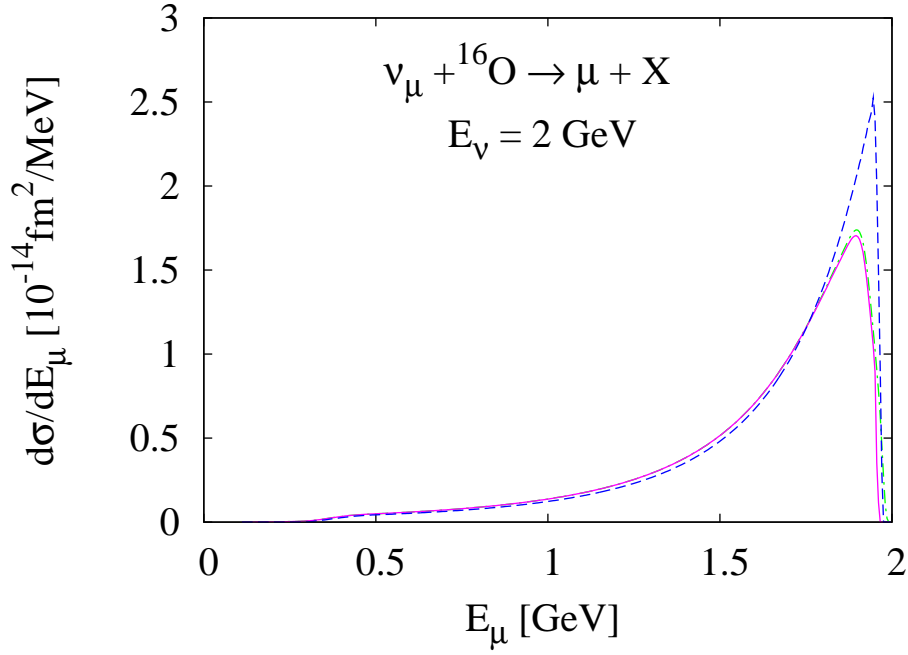


Figura 6.6: Stesso grafico della Figura 6.5, ma con energia incidente $E = 2.0 \text{ GeV}$. Adattato Ref.[69]

primaria importanza nell'interpretazione dei risultati dei futuri esperimenti sulle oscillazioni del neutrino.

Alla luce di ciò, diventa urgente chiarire in che misura i modelli della struttura nucleare e della FSI, influenzano la sezione d'urto $\nu\mathcal{N}$. E' proprio questo lo scopo che ci siamo prefissi con il nostro lavoro di tesi.

Nelle Figure 6.7 e 6.8 sono mostrati i risultati preliminari del calcolo della sezione d'urto $\frac{d\sigma}{dE_\mu}$ per il processo $^{16}\text{O}(\nu_\mu, \mu)X$ e della sezione d'urto $\frac{d\sigma}{d\Omega' d\nu}$ per il processo $^{16}\text{O}(\nu_e, e)X$, effettuati usando il secondo modello di funzione spettrale attualmente esistente, ovvero quello delle correlazioni a due nucleoni descritto nel pragrafo 6.1.

I nostri risultati (2NC), ottenuti nel presente lavoro di tesi con un programma di calcolo [74] basato sull'approccio di [64], sono confrontati con quelli ottenuti in [75], dove si è usata la funzione spettrale nell'approssimazione della densità locale (DL).

Si può notare che i due approcci possono differire fino al 15%.

Quanto tali differenze possano influenzare le misure sulle proprietà dei neutrini, che vengono pianificate con una precisione del 1%, potrà essere stabilito dai risultati di simulazioni di Monte Carlo basato su gli approcci alla sezione d'urto del tipo descritto.

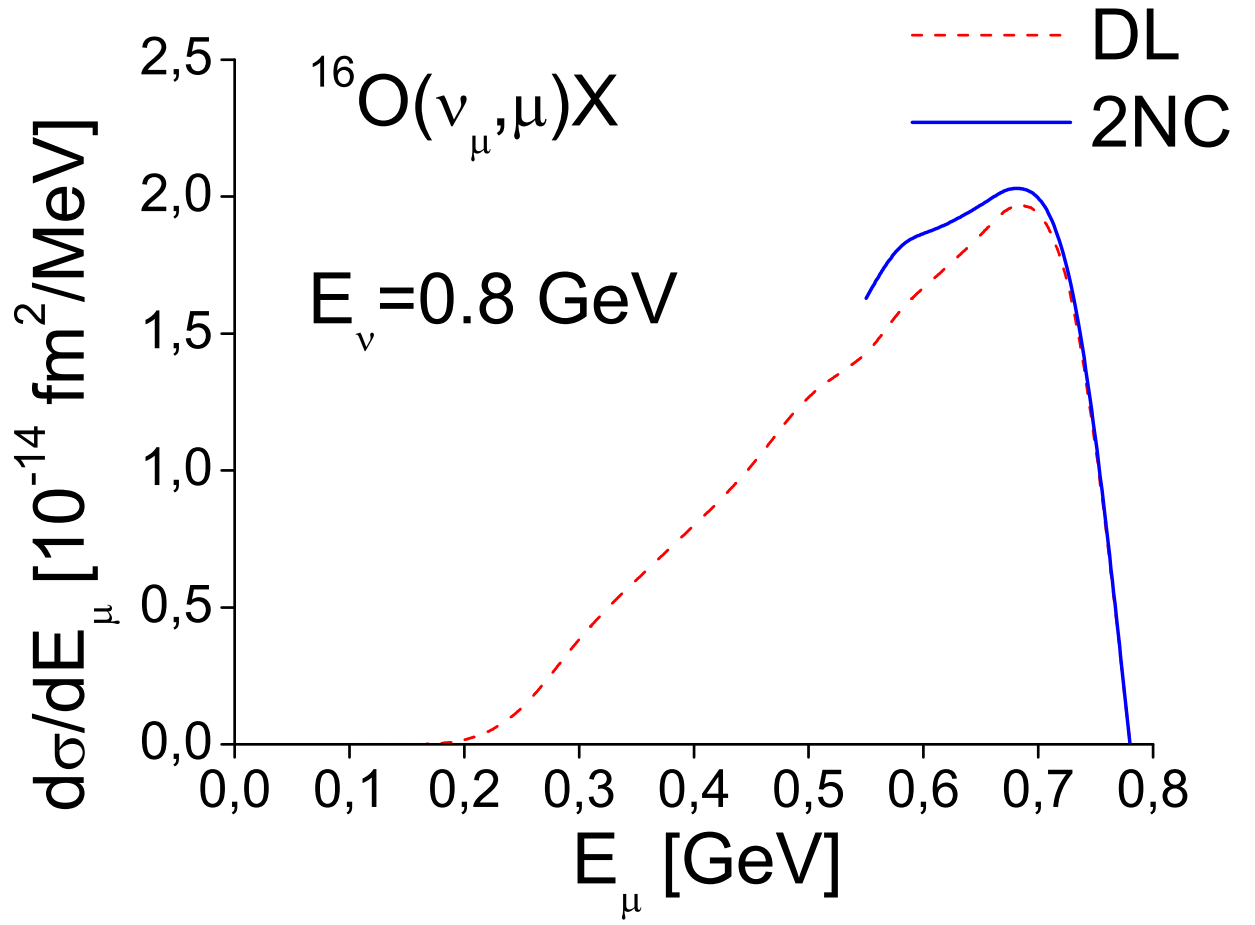


Figura 6.7: Confronto tra i risultati preliminari dei nostri calcoli per la sezione d'urto del processo $^{16}\text{O}(\nu_{\mu}, \mu)X$ ottenuti con la funzione spettrale di [64] ed i risultati di [75]. La sezione d'urto è rappresentata in funzione dell'energia del muone per energia del neutrino incidente pari a $E_{\nu} = 0.8 \text{ GeV}$.

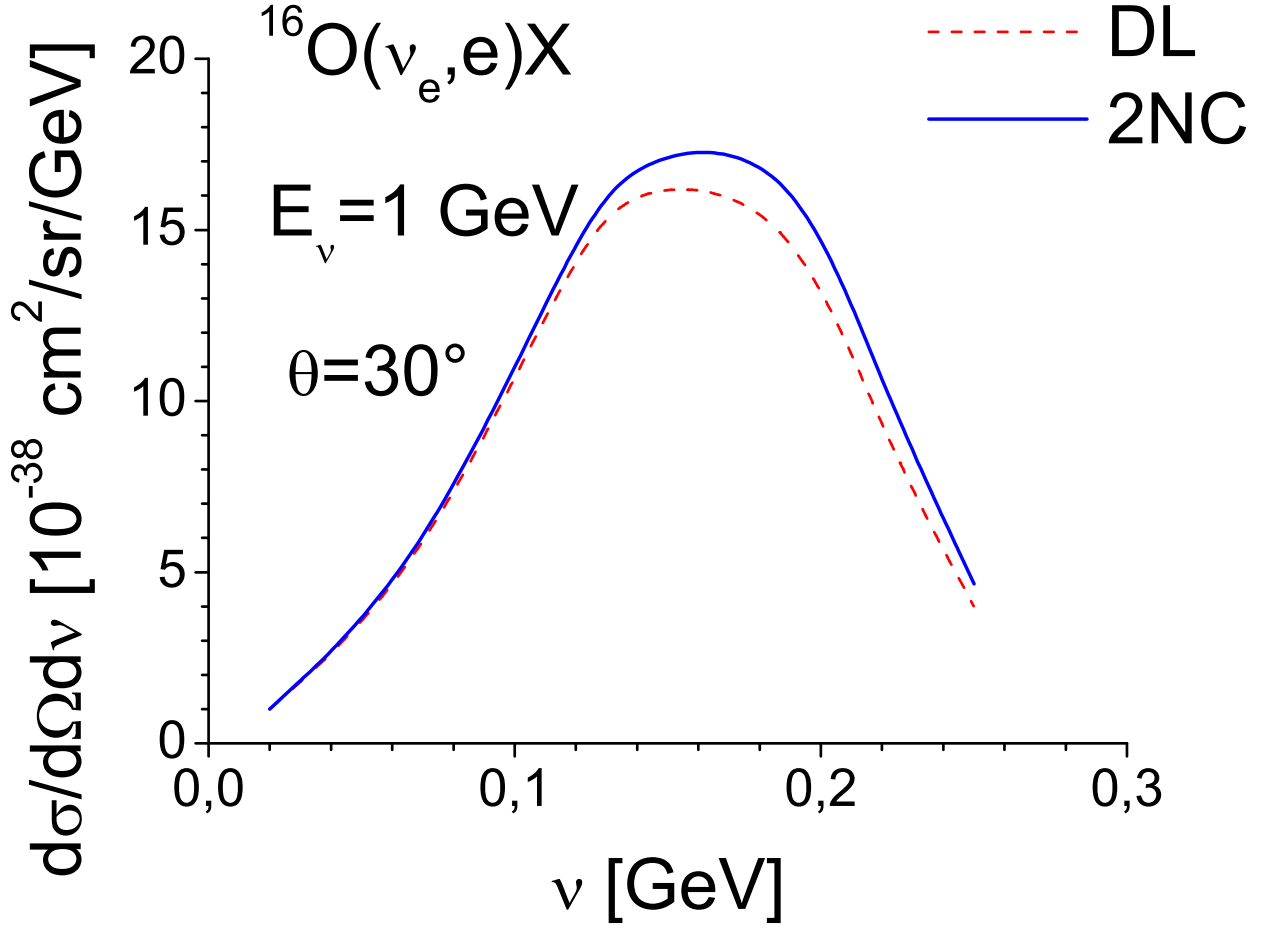


Figura 6.8: Confronto tra i risultati preliminari dei nostri calcoli per la sezione d'urto del processo $^{16}\text{O}(\nu_e, e)X$ ottenuti nel presente lavoro di tesi con la funzione spettrale di [64] ed i risultati di [75]. La sezione d'urto è rappresentata in funzione dell'energia trasferita $\nu = E_\nu - E_\mu$, per energia del neutrino incidente pari a $E_\nu = 1 \text{ GeV}$ ed angolo di diffusione $\theta = 30^\circ$.

Capitolo 7

Conclusioni

In questo lavoro di tesi ci siamo occupati dell'interazione dei neutrini con i nuclei atomici, tema che è oggetto di grande attenzione da parte della comunità scientifica che si occupa dello studio delle proprietà del neutrino, in particolare dei valori della loro massa e delle loro oscillazioni. Infatti, dopo la verifica sperimentale delle oscillazioni dei neutrini, è aumentato l'interesse sia teorico che sperimentale verso queste particelle, nonchè il numero di interrogativi intorno ad esse.

Sono già pianificati, in laboratori di vari paesi, esperimenti mirati non solo a ridurre l'errore sulla determinazione del parametro di oscillazione, ma anche per poter determinare con altissima precisione le masse dei neutrini.

Poichè tali esperimenti sono basati sull'interazione dei neutrini con nuclei, e poichè la stima dell'errore (20%) sul parametro di oscillazione dovuta agli effetti nucleari è stata effettuata sulla base di calcoli teorici della sezione d'urto neutrino-nucleo trattando quest'ultimo in termini di Gas di Fermi, modello alquanto obsoleto, diversi gruppi, anche a seguito delle richieste della comunità dei fisici delle alte energie, stanno calcolando la sezione d'urto neutrino-nucleo in termini di modelli realistici della struttura nucleare.

In questa tesi abbiamo presentato i risultati preliminari dei calcoli delle sezioni d'urto elettrone-nucleo e neutrino-nucleo sulla base di un approccio che include sia le correlazioni dinamiche tra nucleoni, che l'interazione nello stato finale del nucleone colpito dal leptone incidente. Il confronto dei nostri risultati preliminari con quelli ottenuti con un altro approccio, che considera comunque gli stessi fenomeni da noi considerati (correlazioni e FSI), mostra una differenza che arriva sino al 15%.

Riteniamo che tali differenze possano manifestarsi sull'errore degli esperimenti programmati per la misura delle proprietà del neutrino.

Rimane quindi ancora del lavoro da fare per arrivare ad una conoscenza teorica del processo neutrino-nucleo con una precisione sulle proprietà del neutrino quale quella richiesta dai futuri esperimenti e da quelli in corso.

Appendice A

Sezioni d'urto

L'approssimazione di scambio di un solo fotone è resa possibile dal valore della costante di struttura fine $\alpha \simeq \frac{1}{137}$ associata all'elettrodinamica quantistica (QED), teoria nell'ambito della quale rientra il processo d'interazione in esame.

La matrice di diffusione [77, 35]

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \int \cdots \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_n T \left\{ \hat{\mathcal{H}}_I(x_1) \hat{\mathcal{H}}_I(x_2) \cdots \hat{\mathcal{H}}_I(x_n) \right\} \quad (\text{A.1})$$

al primo ordine della teoria perturbativa si riduce a

$$\hat{S} = -i \int d^4x \hat{\mathcal{H}}_I(x) \quad (\text{A.2})$$

dove $\mathcal{H}_I(x)$ rappresenta la densità d'Hamiltoniana di interazione, $x \equiv x_\mu \equiv (t, \vec{x})$. In questo caso

$$\hat{\mathcal{H}}_I(x) = -\mathcal{L}_I(x) = -e \hat{j}_\mu(x) \hat{A}^\mu(x) \quad (e > 0)$$

dove la tetra-corrente elettronica

$$\hat{j}_\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)$$

è descritta dalle funzioni d'onda dell'elettrone

$$\psi(x) = \sqrt{\left(\frac{m_e}{\epsilon_i}\right)} u(k_i, s_i) e^{-ik_i \cdot x} \quad \bar{\psi}(x) = \sqrt{\left(\frac{m_e}{\epsilon_f}\right)} \bar{u}(k_f, s_f) e^{-ik_f \cdot x}$$

corrispondenti ad energie positive, mentre la tetra-corrente adronica $\hat{J}^\mu(x)$ ed il quadri-potenziale $\hat{A}^\mu(x)$ soddisfano l'equazione

$$\square \hat{A}^\mu(x) = e_A \hat{J}^\mu(x) .$$

Integrando quest'ultima si ottiene

$$\hat{A}^\mu(x) = e_A \int d^4y D_F(x-y) \hat{J}^\mu(y) \quad (e_A > 0)$$

con $D_F(x - y)$ funzione di Green del fotone, tale che

$$\square D_F(x - y) = \delta^{(4)}(x - y)$$

Nello spazio dei impulsi risulta

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{iq(x-y)} \frac{-1}{q^2 + i\epsilon} e^{iq(x-y)} \hat{J}^\mu(y)$$

Sostituendo l'Hamiltoniana d'interazione appena descritta nella matrice di diffusione (2) si ottiene

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -ie_A \int d^4 x A_\mu(x) J^\mu(x) = -ie_A \int j_\mu(x) \frac{1}{Q^2} J^\mu(x) = \\ &= -ie_A \int j^\mu \left(\frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} \right) J^\nu(x) d^4 x \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

dove $\frac{-g_{\mu\nu}}{q^2}$ è il propagatore fotonico, $g_{\mu\nu}$ il tensore metrico, j_μ e J_μ rispettivamente gli elementi di matrice degli operatori densità di corrente elettronica ed adronica

$$\begin{aligned} j_\mu(x) &\equiv \langle \phi_f | \hat{j}_\mu(x) | \phi_i \rangle \\ J_\mu(x) &\equiv \langle \Psi_f | \hat{J}_\mu(x) | \Psi_i \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

L'invarianza di Lorentz assicura la validità della seguente uguaglianza

$$J_\mu(x) \equiv \langle \Psi_f | \hat{J}_\mu(x) | \Psi_i \rangle = \langle \Psi_f | \hat{J}_\mu(0) | \Psi_i \rangle e^{i(P_f - P_i) \cdot x} = J_\mu e^{i(P_f - P_i) \cdot x}$$

ed analogamente per $j_\mu(x)$. Inoltre

$$\int d^4 x J_\mu(x) e^{iq \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i - q) J_\mu$$

per cui si può riscrivere l'eq.(A.3) come

$$S_{fi} = -ie_A j^\mu \left(\frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} \right) J^\nu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i - q)$$

oppure in funzione dell'ampiezza di scattering invariante \mathcal{M}_{fi}

$$S_{fi} = -i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_i + P_i - k_f - P_f) \mathcal{M}_{fi}$$

Da quest'ultima si ottiene

$$|S_{fi}|^2 = (2\pi)^8 [\delta^{(4)}(k_i + P_i - k_f - P_f)]^2 |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \quad (\text{A.5})$$

$$= (2\pi)^8 \left[\frac{V \cdot T}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(k_i + P_i - k_f - P_f) \right] |\mathcal{M}_{fi}|^2 \quad (\text{A.6})$$

Per studiare il processo di scattering leptone-adrone è necessario ricorrere al concetto di sezione d'urto, che rappresenta una misura della probabilità d'interazione tra le

particelle incidenti ed il bersaglio ed è definita dalla seguente formula di carattere generale

$$d\sigma = \frac{\omega_{fi} dQ}{F} \quad (\text{A.7})$$

dove

$$F = \frac{1}{V}$$

è il flusso delle particelle incidenti per densità della targhetta nel sistema del laboratorio,

$$\omega_{fi} = \lim_{T, V \rightarrow \infty} \frac{|S_{fi}|^2}{T \cdot V} \quad (\text{A.8})$$

rappresenta la probabilità di transizione per unità di tempo e di volume, mentre il fattore invariante dello spazio delle fasi

$$dQ = \prod_{f=1}^n \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 P_f}{2E_f} \quad (\text{A.9})$$

indica il numero di stati finali accessibili nel volume V , con impulso compreso tra \vec{P}_f e $\vec{P}_f + d\vec{P}_f$. E_f ed n rappresentano rispettivamente l'energia ed il numero delle particelle nello stato finale.

Dalla definizione di probabilità di transizione eq. (A.8) e dall'eq. (A.5) si ottiene

$$\omega_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_i + P_i - k_f - P_f) |\mathcal{M}_{fi}|^2$$

Nella maggior parte degli esperimenti le particelle incidenti non sono polarizzate e la polarizzazione delle particelle finali non è osservata; è quindi necessario effettuare la seguente sostituzione

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 \longrightarrow \overline{\sum_i} \sum_f |\mathcal{M}_{fi}|^2$$

che permette di sommare sugli stati finali di spin e mediare su quelli iniziali.

L'eq. (A.7) si può quindi riscrivere come

$$d\sigma = \frac{1}{2E_i \, 2\epsilon_i \, |(\vec{k}_i/m) - (\vec{P}_i/m)|} \prod_f \frac{d^3 P_f}{(2\pi)^3 2E_f} |\mathcal{M}_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i + k_i - P_f - k_f)$$

Appendice B

Matrici di Dirac e matrici di Gell-Mann

Matrici di Dirac

Il tensore di Dirac si scrive come

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (\text{B.1})$$

Per le matrici di Dirac si è usata la seguente rappresentazione:

$$\gamma^\alpha = (\gamma^0, \vec{\gamma}) \quad (\text{B.2})$$

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \vec{\sigma} \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

dove $\mathbf{1}$ è la matrice unitaria 2×2 e

$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \quad (\text{B.5})$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

sono le matrici di spin di Pauli.

Si introducono inoltre le combinazioni di queste matrici, ovvero

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] . \quad (\text{B.7})$$

Matrici di Gell-Mann

La rappresentazione standard delle matrici di Gell-Mann per i generatori $SU(3)$ si scrive come

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

con $\lambda_{\pm} = (\lambda_1 \pm i\lambda_2)$.

Ringraziamenti

Devo dire la verità, meglio di così non poteva proprio andare.

Sembra ieri, eppure sono trascorsi cinque anni, tra corse e rincorse, attimi di panico, sfinimenti, paure, stanchezza, ma soprattutto soddisfazioni, divertimenti, follie, ambizioni e chi più ne ha più ne metta.

Ed ora viene la parte più bella. I ringraziamenti. In fin dei conti se non avessi nessuno da ringraziare non credo che questo viaggio sarebbe stato altrettanto bello. Il primo ringraziamento è rivolto al prof. Claudio Ciofi degli Atti, per le interessantissime e coinvolgenti lezioni, per avermi seguita passo dopo passo in questi mesi di lavoro e per essere stato disponibile in ogni momento e da qualsiasi luogo.

Ringrazio Francesco Paolo per l'ospitalità e la simpatia, Massimiliano per avermi aiutato con i grafici (e non solo!) e Francesca per avermi spiegato con pazienza ogni singola istruzione dei programmi e per l'assistenza offerta in questi ultimi giorni di delirio.

Ma come posso non ringraziare la mia famiglia? Il mio papà, che mi ha mostrato i due lati folli della mia vita, il violino e la fisica, e che ne sa sempre una più di me. La mia mamma, eterna tassista nei miei innumerevoli tragitti casa-uni, uni-conservatorio, conservatorio-uni e...vabbè, la lista è troppo lunga! Il mio fratellone Raffaele, l'ingegnere di casa (del resto nessuno è perfetto...e poi già ci sono io!). La mia sorellina Francesca, futura dottoressa in ... boh, ancora non lo so, ma tanto lei è la numero uno in tutto. Il mio cagnolino Artù, l'unico rimasto alzato a tenermi compagnia in queste infinite notti insonni.

E poi Silvio, la mia formula perfetta. Che mi ha aperto gli occhi verso una dimensione al di là del tempo e dello spazio.

Infine vorrei ringraziare anche tutti quei simpaticissimi vecchietti e quei fin troppo furbi bambini, sconosciuti o meno, che mi hanno regalato e a volte strappato un sorriso nel breve (ma a volte davvero infinito) cammino casa-facoltà.

Insomma, meglio di così non poteva proprio andare.

Bibliografia

- [1] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetche, *Particelle e nuclei: un'introduzione ai concetti fisici*", Bollati Boringhieri (1998)
- [2] <http://www.sno.phy.queensu.ca/>
- [3] <http://neutrino.phys.washington.edu/superk/>
- [4] <http://www.ps.uci.edu/~nuint/>
- [5] P. Lipari *Neutrino oscillation studies and the neutrino cross section*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **112** (2002) 274
- [6] <http://bnl.gov/world/>
- [7] <http://www.anl.gov>
- [8] <http://www.nu.to.infn.it/exp/all/gargamelle>
- [9] <http://www-finesse.fnal.gov/>
- [10] P. Vogel, *Neutrino nucleus scattering*, Nucl. Phys. A **652** 91 (1999)
- [11] <http://www-ik.fzk.de/karmen/karmen.html>
- [12] S.P-Ruiz, *Sterile neutrino decay and the LSND experiment*, arxiv.org/abs/hep-ph/0602083
- [13] R.A. Smith, E.J. Monitz *Neutrino reactions on nuclei targets*, Nucl. Phys. B **43** (1972) 605-622
- [14] C. Ciofi degli Atti, S. Simula, *Realistic model of the nucleon spectral function in few- and many-nucleon systems*, Phys. Rev. C **53** 1689-1710 (1996)
- [15] P. Lipari, *Introduction to neutrino physics*, CERN Yellow Report (2003)
- [16] W.M. Alberico, S.M. Bilenky, *Neutrino oscillations, masses and mixing*, hep-ph/0306239v1 (2003)
- [17] <http://hep.bu.edu/~superk/osc.html>
- [18] <http://en.wikipedia.org/wiki/Neutrino#Mass>
- [19] <http://kamland.lbl.gov/>

- [20] <http://www.numi.fnal.gov/>
- [21] <http://operaweb.web.cern.ch/operaweb/index.shtml>
- [22] <http://proj-cnsgs.web.cern.ch/proj-cnsgs/>
- [23] <http://choruswww.cern.ch/Public/welcome1.html>
- [24] <http://www.fnal.gov/>
- [25] <http://www-boone.fnal.gov/>
- [26] <http://www.npl.uiuc.edu/exp/sample/sampleMain.html>
- [27] <http://www.jlab.org/>
- [28] <http://minerva.fnal.gov/>
- [29] S.A. Wood, *Neutrino/Electron Scattering Comparison*, NuInt (2002)
- [30] F.J. Gilman, *Leptons as a probe of hadronic structure*, Summer Inst. on Particle Phys., Stanford (1995)
- [31] D. Drell, *Theoretical Aspects of Lepton-Hadron Scattering*, Summer Inst. on Particle Phys., Stanford (1992)
- [32] T.J. Leitner, *Neutrino Interactions with Nucleons and Nuclei* PhD Thesis, (2005)
- [33] C. Ciofi degli Atti, *Electromagnetic Interactions with hadronic systems* Perspective on Theoretical Physics, Edizioni ETS (1999)
- [34] E. Leader, E. Predazzi, *Gauge theories and 'new physics'*, Cambridge University Press (1982)
- [35] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books (1995)
- [36] B. Desplanque, D. Goutte, *Hadronic physics with multi-GeV electrons*, Nova Science Publishers (1991)
- [37] F.E. Close, *An introduction to quarks and partons*, Academic Press (1979)
- [38] E. Segrè, *Nuclei e particelle*, Zanichelli (1982)
- [39] I.J.R. Aitchison, A.J.G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics*, Adam Hilger (1989)
- [40] F. Halzen, A.D. Martin, *Quarks and Leptons: an introductory course in modern particle physics*, Wiley and Sons, New York (1984)
- [41] F. Cavanna, *NuInt: Neutrino Interactions in the Intermediate energy range*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **139** 9-14 (2005)

- [42] K.S. Kuzmin, V.V. Lyubushkin, V.A. Naumov, *How to Sum Contributions into the Total Charged-Current Neutrino-Nucleon Cross Section*, hep-ph/0511308v1 (2005)
- [43] D. Bailin, *Weak interactions*, Graduate student series in physics (1977)
- [44] H. Budd, A. Bodek, J. Arrington, *Modeling Quasi-elastic Form Factors for Electron and Neutrino Scattering*, hep-rx/0308007 (2003)
- [45] T. Leitner, L. Alvarez-Ruso, U. Mosel, *Neutral current neutrino-nucleus interactions at intermediate energies*, nucl-th/0606058 (2006)
- [46] A. Meucci, C. Giusti, F.D. Pacati, *Relativistic approach to neutrino-nucleus quasielastic scattering*, nucl-th/0501047 (2005)
- [47] L. Alvarez-Ruso, T. Leitner, U. Mosel, *Neutrino interactions with nucleons and nuclei at intermediate energies*, Phys. Rev. C **73** 065502 (2006)
- [48] S.K. Singh, *Electroweak Form Factors*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **112** 77-85 (2002)
- [49] C. Ciofi degli Atti, L.P. Kaptari, S. Scopetta, *Semi-inclusive deep inelastic scattering off complex nuclei* Eur Phys. J. A **5** 191-207 (1999)
- [50] W.M. Alberico, *Neutrino scattering as a probe for the strange content of the nucleon*, hep-ph/0605340 (2006)
- [51] M. Valverde, J. Nieves, J.E. Amaro, *Quasi-Elastic Neutrino-Nucleus Reactions*, hep-ph/0602053 (2006)
- [52] S. Kretzer, M.H. Reno, *Deep Inelastic Neutrino Interactions*, hep-ph/0306307 (2003)
- [53] J. Nieves, J.E. Amaro, M. Valverde, *Inclusive quasielastic charged-current neutrino-nucleus reactions*, Phys. Rev. C **70** 055503 (2004)
- [54] C. Ciofi degli Atti, B.Z. Kopeliovich, *Final-state interaction in semi-inclusive DIS off nuclei*, Eur. Phys. J. A **17** 133-144 (2003)
- [55] C. Ciofi degli Atti, S. Liuti, S. Simula, *Nucleon spectral function in complex nuclei and nuclear matter and inclusive quasielastic electron scattering*, Phys. Rev. C **41** R2474 - R2478 (1990)
- [56] A.S. Davydov, *Meccanica quantistica*, Edizioni Mir (1981)
- [57] C. Rossetti, *Istituzioni di fisica teorica*, ed. Levrotto & Bella (1990)
- [58] Jackson, *Elettrodinamica classica*, Zanichelli (1984)
- [59] R.J. Glauber, *High Energy Collision Theory*, Colorado Ther. Phys. Inst. (1958)
- [60] R.P. Feynman, *Very high-collisions of hadrons*, (1969)

- [61] J.Speth, B.G. Zakharov, *Glauber theory of final-state interactions in $A(e, e' p)$ scattering*, American Inst. of Phys. (1996)
- [62] C. Ciofi degli Atti, L. P. Kaptari, Phys. Rev. Lett. **9** (2005) 052502
- [63] R.A. Arndt et al, *Partial-Wave analysis facility (SAID)*, <http://said.phys.vt.edu/>
- [64] C. Ciofi degli Atti, S. Simula, *Nucleon-nucleon correlations and final state interaction in inclusive quasi-elastic electron scattering off nuclei $x > 1$* , Phys. Lett. **B 325** (1994) 276-282
- [65] H. Nakamura, E. Seki, M. Sakuda, *Electron- and neutrino-nucleus cross sections using spectral function*,
- [66] O. Benhar, A. Fabrocini, S. Fantoni, S. Sick, Nucl. Phys. A **579** (1994) 493
- [67] H. Nakamura, R. Seki, *Neutrino-nucleus cross section: fermi gas model vs. spectral function*
- [68] M. Anghinolfi et al, Nucl. Phys. A **602** (1996) 405
- [69] H. Nakamura, R. Seki, M. Sakuda, *Comparison of electron-nucleus quasi-elastic cross sections using spectral functions with (e, e') data from 0.5 GeV to 1.5 GeV and effects on neutrino quasi-elastic cross sections*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **139** (2005) 201-207
- [70] C. Ciofi degli Atti, G.B. West, Phys. Lett. **C53** (1999) 1686
- [71] D. Faralli, C. Ciofi degli Atti, G.B. West, *Inclusive electron scattering from nuclei: y scaling and final state interaction*, Perspectives in Hadronic Physics, World Scientific (1999)
- [72] O. Benhar, N. Farina, *Neutrino-nucleus cross section in the impulse approximation regime*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **139** (2005) 230-233
- [73] <http://neutrino.kek.jp/>
- [74] F. Focaia, *La funzione di risposta inclusiva adronica: sviluppi recenti*, Tesi di laurea 2002-2003
- [75] O. Benhar, *Electron- and neutrino-nucleus scattering*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **139** (2005) 15 – 20
- [76] L. Frankfurt, M.I. Strikman, Phys. Rep. **160**, (1988) 235
- [77] J.D. Bjorken, S.D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, N.Y. McGraw-Hill (1995)