

IFT

Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

---

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT–T.002/06

**Constante Cosmológica:  
Algumas Consequências Algébricas e Dinâmicas**

Juan Pablo Beltrán Almeida

Orientador

*José Geraldo Pereira*

Setembro de 2006

## Agradecimentos

Agradeço aos meus pais e aos meus familiares, que na distância continuam incondicionalmente depositando a sua confiança e esperança nos meus projetos.

Agradeço aos meus amigos e todas as pessoas que me acompanharam durante o doutorado, particularmente Héctor, Mario e Boris durante as primeiras etapas. Ao Oscar por ter me acompanhado e suportado durante todo o doutorado. Agradeço especialmente a amizade da Flávia, da Paula e da Viviane. Suas amizades foram vitais em diferentes momentos.

Agradeço ao grupo de gravitação do IFT, particularmente ao Professor Ruben Aldrovandi, e muito especialmente ao meu orientador José Geraldo Pereira. Não é possível agradecer o suficiente por todo o seu apoio, dedicação e a desmerecida confiança depositada em mim.

Agradeço ao Professor B. M. Pimentel pelo seu apoio pessoal.

Agradeço à agência de fomento CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual esta tese não teria sido elaborada.

Finalmente, um agradecimento muito especial para Isabel. O meu mundo hoje tem muita mais vida, amor e esperança graças a ela.

## Resumo

Nesta tese vamos estudar dois aspectos diferentes da física da constante cosmológica: a estrutura algébrica do grupo de de Sitter, e as suas implicações na dinâmica do Universo. Na primeira parte, apresentaremos uma descrição da estrutura geométrica do espaço de de Sitter, bem como uma discussão detalhada da estrutura do grupo de de Sitter. Revisaremos os limites do grupo de de Sitter obtidos por meio do processo de *contração de Inönü-Wigner*, e estudaremos o limite formal  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Neste limite, obtem-se um espaço-tempo singular, maximalmente simétrico, transitivo sob transformações conformes próprias, e com propriedades termodinâmicas que se ajustam à idéia de uma condição inicial para um Universo com “big-bang”. Ainda neste contexto, proporemos uma “relatividade restrita” baseada no grupo de de Sitter. Nesta teoria, a constante cosmológica introduz uma escala de comprimento invariante: o *raio de de Sitter*. A introdução desta escala invariante não implica numa violação da simetria de Lorentz, mas sim numa mudança na estrutura causal do espaço-tempo, bem como nas definições de momento e energia. Na segunda parte da tese, que trata das aplicações cosmológicas, apresentaremos um modelo dinâmico para a “constante” cosmológica. Neste modelo, como consequência das equações de Einstein, uma variação em  $\Lambda$  deve necessariamente ser compensada pela criação ou destruição de matéria, de modo que a energia total seja mantida constante. Um modelo particular para esta evolução da constante cosmológica é apresentado, o qual está baseado no *princípio holográfico*. Veremos como o modelo pode incorporar simultaneamente a expansão acelerada do Universo, e a coincidência na ordem de grandeza das densidades de energia escura e de matéria.

**Palavras Chaves:** Espaço de de Sitter; Constante Cosmológica; Contração de Inönü-Wigner; Princípio Holográfico.

**Áreas do conhecimento:** Gravitação e Cosmologia

## Abstract

In this thesis we study two different aspects of the physics of the cosmological constant: the algebraic structure of the de Sitter group, and its implications in the large scale dynamics of the Universe. In the first part we present a general description of the geometrical structure of de Sitter space, and a discussion about the structure of de Sitter group. We review the contraction limits of de Sitter group, obtained by means of the *Inönü-Wigner procedure*, and we study in detail the formal limit  $\Lambda \rightarrow \infty$ . In this limit, one obtains a maximally-symmetric, singular spacetime, transitive under proper conformal transformations, and with thermodynamic properties that agree with the idea of an initial condition for a “big-bang” Universe. In the same context, we propose a “special relativity” based on the de Sitter group. In this theory, the cosmological constant introduces an invariant length scale: *the de Sitter radius*. The introduction of this invariant scale does not imply a violation of the Lorentz symmetry, but simply a change in the causal structure of the spacetime, as well as in the basic notions of momentum and energy. In the second part of the thesis, that related with cosmological applications, a dynamic model for the cosmological “constant” will be presented. In this model, as a consequence of Einstein’s equations, a variation in  $\Lambda$  must necessarily be compensated by creation or destruction of matter-energy, in such a way that the total energy remains constant. A particular model allowing for the evolution of the cosmological constant is presented, which is based on the *holographic principle*. We will show how this model can accommodate simultaneously the accelerated expansion of the Universe and the coincidence in the magnitude of matter and dark energy densities.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação e objetivos . . . . .	1
1.1.1	Estrutura algébrica do grupo de de Sitter . . . . .	1
1.1.2	Relatividade especial . . . . .	2
1.1.3	Expansão acelerada e o futuro do Universo . . . . .	2
1.1.4	O problema da constante cosmológica . . . . .	3
1.2	Descrição do trabalho . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Geometria e aspectos semi-clássicos</b>	<b>5</b>
2.1	Introdução . . . . .	5
2.2	Geometria clássica . . . . .	5
2.2.1	Coordenadas globais $(\tau, \theta_i)$ . . . . .	6
2.2.2	Coordenadas planas ou inflacionárias $(t, x^i)$ . . . . .	8
2.2.3	Coordenadas hiperbólicas . . . . .	9
2.2.4	Coordenadas estáticas . . . . .	10
2.2.5	Coordenadas estereográficas . . . . .	12
2.3	Propriedades semi-clássicas . . . . .	13
2.3.1	Termodinâmica de buracos negros . . . . .	13
2.3.2	Horizontes cosmológicos . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Contrações do grupo de de Sitter</b>	<b>19</b>
3.1	Introdução . . . . .	19
3.2	Contração de grupos de Lie . . . . .	19
3.2.1	Definição . . . . .	20
3.2.2	Exemplos . . . . .	22
3.3	Os espaços e grupos de de Sitter . . . . .	23
3.3.1	Os espaços de de Sitter . . . . .	23
3.3.2	Os grupos cinemáticos . . . . .	25
3.4	Limites de contração . . . . .	26
3.4.1	Constante cosmológica nula . . . . .	26
3.4.2	Limite não relativístico: espaços de Newton–Hooke . . . . .	27
3.4.3	Constante cosmológica infinita . . . . .	28
3.5	O espaço cone . . . . .	29
3.5.1	Geometria . . . . .	30
3.5.2	Vetores de Killing . . . . .	30
3.5.3	Invariantes de Casimir . . . . .	31
3.5.4	Propriedades termodinâmicas . . . . .	32

<b>4</b>	<b>A relatividade de de Sitter</b>	<b>34</b>
4.1	Introdução . . . . .	34
4.2	A relatividade de de Sitter . . . . .	35
4.2.1	Transitividade e a noção de distância . . . . .	36
4.2.2	As transformações de de Sitter . . . . .	38
4.2.3	Os geradores de Lorentz . . . . .	39
4.2.4	Os geradores das “translações” de de Sitter . . . . .	42
4.2.5	Relações de energia-momento . . . . .	42
4.3	Observações finais . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Termo cosmológico dependente do tempo</b>	<b>47</b>
5.1	Introdução . . . . .	47
5.2	Energia escura dinâmica e as equações de Einstein . . . . .	47
5.3	Equações de Friedmann . . . . .	49
5.4	Análise da evolução . . . . .	50
5.4.1	Caso geral . . . . .	50
5.4.2	O caso plano . . . . .	52
5.5	Comentários . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Cosmologia e o princípio holográfico</b>	<b>56</b>
6.1	Introdução . . . . .	56
6.2	O princípio holográfico . . . . .	56
6.2.1	Limites da entropia . . . . .	57
6.2.2	Teorias efetivas e os limites da entropia . . . . .	58
6.3	Holografia e modelos com $\Lambda$ dependente do tempo . . . . .	60
6.4	Limites Holográficos . . . . .	61
6.4.1	Limites da energia . . . . .	61
6.4.2	Limites para a entropia . . . . .	63
6.4.3	Regime Acelerado . . . . .	64
6.5	Comentários . . . . .	64
<b>7</b>	<b>Conclusões e comentários finais</b>	<b>66</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>Geradores de simetria nos diferentes sistemas de coordenadas</b>	<b>68</b>
A.1	Coordenadas globais . . . . .	68
A.2	Coordenadas planas . . . . .	68
A.3	Coordenadas estáticas . . . . .	69
	<b>Referências</b>	<b>71</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação e objetivos

Dados observacionais recentes, provenientes das supernovas tipo Ia com elevado “redshift” [1], e de medidas da radiação cósmica de fundo [2], favorecem fortemente a existência de uma constante cosmológica positiva e pequena. Além disso, os dados sugerem que o Universo é espacialmente plano e se encontra numa fase de expansão acelerada [3]. Dadas estas características, o estudo do espaço de de Sitter torna-se muito relevante já que, nestas circunstâncias, a ausência de gravitação passa a ser representada por este espaço, e não mais por Minkowski. Uma motivação adicional relaciona-se ao período inflacionário, em que o Universo passou por uma fase de de Sitter, porém com uma constante cosmológica muito grande [4].

Com o interesse renovado na física do espaço de de Sitter, tem-se explorado recentemente muitas propriedades deste espaço em diferentes contextos. Nesta tese, vamos fazer um estudo da estrutura algébrica do grupo de de Sitter, principalmente no limite de grandes valores da constante cosmológica. Ao mesmo tempo, estudaremos algumas propriedades geométricas do espaço de de Sitter subjacente. Uma das principais consequências de se incorporar uma constante cosmológica na estrutura do espaço-tempo refere-se às mudanças nas definições de energia e momento. Apesar dessas mudanças serem pequenas para valores pequenos da constante cosmológica, as mudanças conceituais envolvidas são importantes. Em particular, elas implicam em novas relações entre energia e momento, com eventuais implicações para a gravitação quântica. Apresentamos a seguir uma breve descrição dos tópicos que serão abordados.

#### 1.1.1 Estrutura algébrica do grupo de de Sitter

Da mesma forma que o espaço de Minkowski, o espaço de de Sitter é um espaço maximalmente simétrico e homogêneo. Neste sentido, ele é uma generalização simples do espaço de Minkowski, quando existe curvatura não nula (constante cosmológica). A homogeneidade é uma propriedade que permite estabelecer uma relação estreita entre a estrutura dos grupos de simetria destes espaços, isto é, entre os grupos de Poincaré para o caso de Minkowski, e o grupo de de Sitter, que é o grupo de simetria do espaço de de Sitter.

A noção de transitividade existente no espaço de Minkowski se altera pela existência da curvatura. esta, por sua vez, pode ser associada com uma escala invariante de comprimento, o *raio de de Sitter*. A presença desta escala de comprimento introduz uma modificação nos conceitos de *translação, distância e causalidade* no espaço-tempo. Se pensássemos em modificar o grupo de simetrias do espaço-tempo para incluir a constante cosmológica, as noções fundamentais de energia e momento iriam mudar, e consequentemente outras noções importantes que dependem destas, como as relações de dispersão entre energia e momento de uma partícula clássica, e as relações de comutação e incerteza da mecânica quântica. Naturalmente, estas modificações são pequenas já que elas são proporcionais ao valor da constante cosmológica, a qual é pequena. Porém, estas modificações poderiam se tornar relevantes nas etapas iniciais do Universo, durante o período inflacionário, onde um espaço de de Sitter com constante cosmológica muito grande representa um quadro muito próximo das características desta época.

### 1.1.2 Relatividade especial

As modificações estruturais no grupo de simetrias devido à presença de uma constante cosmológica não nula implica em mudanças fundamentais na cinemática e na geometria do espaço-tempo. De fato, como na presença de  $\Lambda$  o espaço de Minkowski não é mais solução da equação de Einstein, a relatividade especial não será mais aquela baseada no grupo de Poincaré, que é o grupo de simetrias de Minkowski. De acordo com o presente formalismo, a relatividade especial deve ser aquela baseada no grupo de de Sitter. Esta relatividade inclui uma escala invariante de comprimento  $l$ . Como a velocidade da luz  $c$  também se mantém como uma escala invariante, este tipo de teoria apresenta duas escalas invariantes. Ela é, portanto, um novo tipo de “doubly (ou deformed) special relativity”, com a importante diferença de manter inalterada a simetria de Lorentz. Desenvolveremos esta nova relatividade, e estudamos algumas de suas possíveis aplicações físicas.

### 1.1.3 Expansão acelerada e o futuro do Universo

Como foi mencionado anteriormente, uma das características importantes das observações astronômicas recentes é a expansão acelerada do Universo. É freqüentemente argumentado que uma consequência desta expansão acelerada seria dirigir o Universo a um estado de esfriamento gradual e isolamento, ou a um estado de desintegração violenta, ou um “big rip” [5] como tem sido chamado; ou ainda a uma singularidade súbita no futuro [6]. Trabalhando no contexto de uma constante cosmológica dependente do tempo e interagindo com a matéria, iremos propor um novo tipo de estado de estado “final”, caracterizado pela presença de uma constante cosmológica infinita. Esta solução representa uma completa desconexão causal entre todos os pontos do espaço, o qual se torna transitivo sob transformações conformes próprias.

Ao mesmo tempo, é possível ter neste contexto outras características de interesse, como a “*coincidência*” entre as ordens de grandeza das densidades



de energia escura associada com a constante cosmológica e a de energia da matéria observada. O chamado *problema da coincidência cosmica* [7].

#### 1.1.4 O problema da constante cosmológica

Um dos maiores problemas da física contemporânea é a enorme diferença existente entre as estimativas teóricas e o valor observado da constante cosmológica [8]. Na atualidade, tem-se entendido que este parâmetro é uma medida da densidade de energia do vácuo dos campos quânticos que habitam o espaço-tempo: “o peso do vácuo”. Quando esta interpretação é aceita, enfrentamos um problema dramático devido à enorme discrepância das estimativas teóricas e os valores observados já que não existe nenhuma escala conhecida na física de partículas que seja capaz de explicar esta diferença. Por exemplo, aceitando a validade das estimativas da teoria quântica de campos até a escala de Planck,\* o valor esperado da densidade de energia do vácuo é

$$\rho_{\Lambda}^{(QFT)} \sim 2 \times 10^{110} \text{erg/cm}^3. \quad (1.1)$$

Entretanto, o valor oferecido pelas observações recentes é da ordem

$$\rho_{\Lambda}^{(obs)} \sim 2 \times 10^{-10} \text{erg/cm}^3. \quad (1.2)$$

A razão entre essas quantias dá a enorme diferença de  $10^{120}$  ordens de grandeza, o que faz o vácuo incrivelmente instável sob flutuações quânticas.

Uma alternativa recente para encarar este problema é por meio do *princípio holográfico* [9], o qual propõe, a grosso modo, que o número de graus de liberdade de uma região do espaço depende, não do volume da região, mas da área da superfície que contém a região. Esta proposta aponta que a origem da enorme diferença nas ordens de grandeza entre as estimativas e o valor observado da energia do vácuo está numa enorme sobre-contagem dos graus de liberdade da estimativa teórica, muitos deles instáveis gravitacionalmente. Assim, reduzindo drasticamente os graus de liberdade, as correções quânticas à energia do vácuo poderiam ser estabilizadas.

## 1.2 Descrição do trabalho

A tese está organizada da seguinte forma. No capítulo 2, vamos apresentar uma introdução à estrutura geométrica, bem como aos aspectos semi-clássicos do espaço de de Sitter. No capítulo 3, revisaremos o processo de contração de grupos de Inönü-Wigner [23], e aplicaremos este processo ao caso do espaço de de Sitter. Depois de estudar o limite para  $\Lambda$  pequeno, e o limite não relativístico, vamos nos concentrar no limite formal  $\Lambda \rightarrow \infty$ , bem como nas características geométricas do espaço-tempo resultante nesse limite. No capítulo 4, vamos apresentar uma generalização da relatividade restrita baseada no grupo de de Sitter. Nos capítulos 5 e 6, faremos aplicações dos estudos anteriores aos problemas da cosmologia atual. Apresentaremos um

---

\*Outras escalas da física de partículas podem ser invocadas, mas o problema continua sendo igualmente dramático

esquema consistente, embora muito simplificado, das consequências de um termo cosmológico dependente do tempo, que eventualmente pode realizar os limites estudados no processo de contração mediante um processo físico. No Capítulo 5, apresentamos o esquema em sua forma básica, e no capítulo 6 apresentamos uma proposta onde o comportamento da energia escura satisfaz a hipótese holográfica, a qual será revisada nesse capítulo. Ao longo da tese vamos manter as constantes dimensionais como  $G, c, k_B, \hbar$ , e o raio de de Sitter  $l$ . A assinatura utilizada para a métrica será  $(1, -1, -1, -1)$ .

## Capítulo 2

### Geometria e aspectos semi-clássicos

#### 2.1 Introdução

Neste capítulo vamos estudar a geometria do espaço de de Sitter. Para este propósito, vamos utilizar diferentes sistemas de coordenadas nas quais vamos ter diferentes perspectivas da estrutura deste espaço. Um ponto importante é a existência de um horizonte de eventos independente do observador, um *horizonte cosmológico*, assim chamado pela natureza do espaço em consideração. Vamos estudar a estrutura causal gerada pela presença deste horizonte, e vamos estabelecer as semelhanças deste horizonte cosmológico com os horizontes de eventos que aparecem nas soluções tipo buraco negro. Nos contextos clássico e semi-clássico, é encontrado que os horizontes de eventos dos buracos negros obedecem leis dinâmicas semelhantes com as leis da termodinâmica dos sistemas em equilíbrio. Por este motivo as leis da dinâmica dos buracos negros foram propostas como uma generalização das leis da termodinâmica para os casos que incluem sistemas interagindo com buracos negros. Vamos apresentar uma descrição breve destas leis, e a sua conseqüente generalização ao caso dos horizontes cosmológicos. Existem várias referências que discutem de forma mais detalhada os assuntos apresentados aqui, assim como outros aspectos relacionados; ver, por exemplo, as referências [10, 11, 12].

#### 2.2 Geometria clássica

O espaço de de Sitter é a solução de vácuo das equações de Einstein com termo cosmológico:

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3 \quad (2.1)$$

Um fato importante é que esta solução pode ser visualizada como o hiperbolóide

$$\eta_{AB} \chi^A \chi^B = -l^2, \quad A, B = 0, \dots, 4 \quad (2.2)$$

imerso no espaço ambiente  $\mathbf{E}^{4,1}$  com elemento de linha

$$ds^2 = \eta_{AB} d\chi^A d\chi^B = (d\chi^0)^2 - (d\chi^1)^2 - \dots - (d\chi^4)^2 \quad (2.3)$$

onde o raio de de Sitter  $l$  está relacionado com a constante cosmológica  $\Lambda$  pela relação:

$$\Lambda = \frac{3}{l^2} \quad (2.4)$$

A representação gráfica deste hiperbolóide pode ser vista na Figura 2.1.

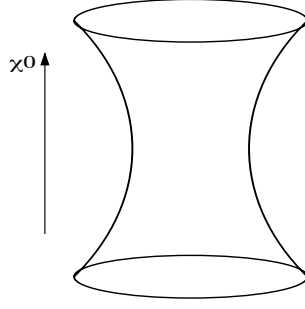


Figura 2.1: Representação gráfica do hiperbolóide (2.2).

Vamos começar nosso estudo da estrutura geométrica introduzindo diferentes parametrizações para o hiperbolóide (2.2). Em alguns dos sistemas de coordenadas que vamos utilizar, usaremos as coordenadas angulares  $\omega^a$  na esfera  $p$ -dimensional  $S^p$ :

$$\begin{aligned}\omega^1 &= \cos \theta_1 \\ \omega^2 &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ &\dots \\ \omega^{p-1} &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{p-2} \cos \theta_{p-1} \\ \omega^p &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{p-2} \sin \theta_{p-1}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

O domínio dos ângulos  $\theta_a$  é:  $0 \leq \theta_k < \pi$  para  $k = 1, \dots, p-2$ , e  $0 \leq \theta_{p-1} < 2\pi$ . As descrições apresentadas aqui podem ser generalizadas facilmente para um número arbitrário de dimensões.

### 2.2.1 Coordenadas globais $(\tau, \theta_i)$

Vamos introduzir a parametrização

$$\chi^0 = l \sinh(\tau/l) \ ; \ \chi^i = \omega^i l \cosh(\tau/l) \ ; \ i = 1, \dots, 4, \tag{2.6}$$

com  $-\infty < \tau < \infty$ . Esta parametrização descreve completamente o espaço de de Sitter (2.2). Por este motivo as coordenadas  $(\tau, \theta_i)$  são chamadas de globais. Substituindo em (2.3), o intervalo neste sistema de coordenadas toma a forma:

$$ds^2 = d\tau^2 - l^2 \cosh^2(\tau/l) d\Omega_3^2, \tag{2.7}$$

onde

$$d\Omega_3^2 = d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 d\theta_3^2.$$

Pode-se ver desta expressão que as seções  $\tau = \text{constante}$  são esferas, podendo ver o espaço de de Sitter como o produto Cartesiano  $R \times S^3$ , onde as esferas começam em  $\tau = -\infty$  com um raio infinito, contraem-se até atingir o raio  $l$  em  $\tau = 0$ , e expandem-se novamente até o infinito em  $\tau = \infty$ . As regiões assintóticas  $\mathcal{I}^\pm$ , caracterizadas por  $\tau = \pm\infty$ , são chamadas de passado e futuro infinito nulo, respectivamente. A transformação

$$\cosh(\tau/l) = \frac{1}{\cos(T/l)}, \tag{2.8}$$

leva o intervalo infinito  $-\infty < \tau < \infty$  no intervalo finito  $-\pi/2 < T/l < \pi/2$ , sendo possível representar o espaço de de Sitter por meio de coordenadas com domínio finito. A forma do intervalo invariante com esta nova coordenada é

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2(T/l)} [dT^2 - l^2 d\Omega_3^2]. \quad (2.9)$$

Esta forma do intervalo é particularmente útil se estamos interessados na estrutura causal dado que uma geodésica tipo luz (a qual descreve uma fronteira entre regiões causalmente conexas) com respeito ao intervalo (2.7), é também tipo luz com respeito ao intervalo

$$d\tilde{s}^2 = dT^2 - l^2 d\Omega_3^2. \quad (2.10)$$

Apesar de ter uma forma mais simples do que o intervalo (2.7), ele descreve igualmente a estrutura causal do espaço.

São de muito utilidade neste contexto os diagramas de Penrose, já que eles permitem visualizar num desenho compacto a conexão causal entre as diferentes regiões do espaço-tempo incluindo as regiões assintóticas  $\mathcal{I}^\pm$ , as quais estão representadas por  $T = \pm\pi/2$ . Apresentamos o diagrama de Penrose na Figura 2.2.

Neste ponto, começamos a ver uma diferença fundamental deste espaço com o espaço de Minkowski. A estrutura assintótica do espaço de Minkowski é tal que um observador ideal não acelerado eventualmente teria acesso causal a todo o espaço, sempre que a sua linha de mundo atingir o futuro assintótico infinito  $t = +\infty$ . Esta possibilidade fica excluída no espaço de de Sitter, dado que um observador inercial ideal em  $\tau = +\infty$  sempre vai ter regiões do espaço inacessíveis desde o seu passado (ver Fig. 2.2).

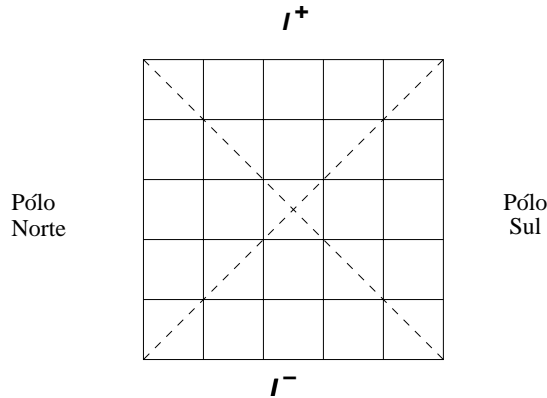


Figura 2.2: Diagrama de Penrose para as coordenadas globais. As linhas verticais são linhas  $\theta_1 = cte$ . Os pólos norte e sul estão representados por  $\theta_1 = \pi$  e  $\theta_1 = 0$  respectivamente. As linhas horizontais são linhas  $\tau = cte$ . As diagonais são geodésicas nulas que unem as regiões  $I^+$  onde  $\tau = \infty$ , e  $I^-$  onde  $\tau = -\infty$ . Todas as geodésicas nulas são paralelas às diagonais.

### 2.2.2 Coordenadas planas ou inflacionárias $(t, x^i)$

Agora, vamos introduzir as coordenadas

$$\begin{aligned}\chi^0 &= l \sinh(t/l) - l \frac{(x^i/l)^2}{2} \exp(-t/l) \\ \chi^i &= x^i \exp(-t/l) \quad i = 1, \dots, 3. \\ \chi^4 &= l \cosh(t/l) - l \frac{(x^i/l)^2}{2} \exp(-t/l)\end{aligned}\tag{2.11}$$

com  $-\infty < t < \infty$ ,  $-\infty < x^i < \infty$ . Nestas coordenadas o intervalo toma a forma:

$$ds^2 = dt^2 - l^2 \exp(-2t/l) dx_i dx^i.\tag{2.12}$$

Nestas coordenadas, as seções  $t = \text{constante}$  são planas, com um fator de contração  $\exp(-2t/l)$ . O espaço pode ser visto como um produto Cartesiano  $R \times R^3$ . Fazendo a transformação  $t \rightarrow -t$ , obtemos o intervalo

$$ds^2 = dt^2 - l^2 \exp(2t/l) dx_i dx^i,\tag{2.13}$$

o qual descreve um espaço em expansão, com fator de expansão exponencial  $\exp(2t/l)$ , próprio do período inflacionário. Em contraste com as coordenadas globais, estas coordenadas só cobrem a metade inferior da diagonal  $\chi^0 = \chi^4$  do hiperbolóide (2.2) devido ao fato que

$$-\chi^0 + \chi^4 = l \exp(-t/l) < 0.\tag{2.14}$$

Nestas coordenadas, para se construir o diagrama conforme de Penrose, introduzimos as coordenadas de Kruskal\*

$$U = \frac{r/l - \exp(t/l)}{2} \quad ; \quad V = \frac{2}{\exp(t/l) + r/l} \quad ; \quad (r^2 = x_i x^i),\tag{2.15}$$

bem como suas relações inversas

$$r/l = 1/V + U \quad ; \quad \exp(t/l) = 1/V - U.\tag{2.16}$$

Pode-se ver que estas coordenadas descrevem a região  $V > 0$ . A origem  $r = 0$  corresponde a  $UV = -1$ , o infinito passado e infinito futuro  $t \rightarrow \pm\infty$ , corresponde a  $V = 0$  e  $UV = 1$ , respetivamente. O infinito espacial  $r \rightarrow \infty$  corresponde a  $UV = 1$ . A métrica nestas coordenadas é:

$$ds^2 = \frac{4l^2}{(1 - UV)^2} [dU dV - (1 + UV)^2 d\Omega_2^2],\tag{2.17}$$

onde

$$d\Omega_2^2 = d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2.$$

---

\*A introdução das coordenadas de Kruskal segue a mesma motivação que tem a sua introdução na solução de Schwarzschild, onde elas permitem fazer uma continuação analítica da solução na região interna ao horizonte de eventos.

Ante às transformações  $U \rightarrow -U$  e  $V \rightarrow -V$ , esta métrica permanece invariante o que permite a extensão analítica para a região  $V < 0$ . Com esta métrica é possível então descrever o espaço  $dS_4$  completamente.

O passo seguinte consiste em colocar estas regiões num domínio finito por meio das transformações :

$$U = \tan\left(\frac{\varphi - \zeta}{2}\right) \quad ; \quad V = \tan\left(\frac{\varphi + \zeta}{2}\right), \quad (2.18)$$

as quais levam o espaço de de Sitter  $dS_4$  no domínio compacto  $|\zeta \pm \varphi| < \pi$ . O diagrama conforme resultante é apresentado na Figura 2.3.

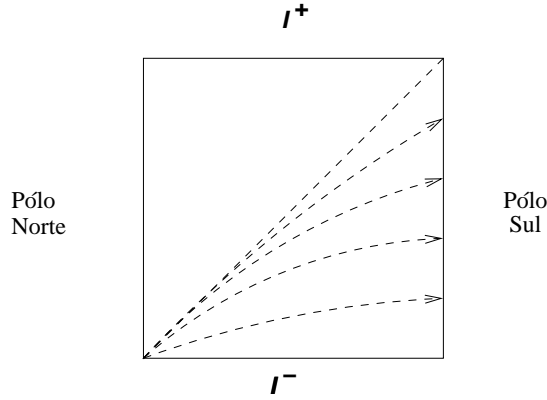


Figura 2.3: As linhas tracejadas são linhas com  $t = \text{cte}$ . A região assintótica  $I^-$  corresponde à  $t = -\infty$ . A diagonal representa  $t = \infty$ . O Pólo sul está em  $r = 0$ , e o Pólo norte em  $r = \infty$ .

### 2.2.3 Coordenadas hiperbólicas

As coordenadas hiperbólicas  $(\bar{\tau}, \psi, \theta_a)$  são descritas pela parametrização

$$\begin{aligned} \chi^0 &= l \sinh(\bar{\tau}/l) \cosh \psi \\ \chi^i &= l \omega^i \sinh(\bar{\tau}/l) \sinh \psi \quad i = 1, 2, 3 \\ \chi^4 &= l \cosh(\bar{\tau}/l), \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde  $-\infty < \bar{\tau} < \infty$ , e  $0 \leq \psi < \infty$ . Estas coordenadas parametrizam a região do espaço restrita pela condição

$$\cos \theta_1 \cosh(\bar{\tau}/l) \geq 1. \quad (2.20)$$

O intervalo, neste caso, assume a forma

$$ds^2 = -d\bar{\tau}^2 + \sinh^2(\bar{\tau}/l)[d\psi^2 + \sinh^2 \psi d\Omega_{d-2}^2]. \quad (2.21)$$

As seções  $\bar{\tau} = \text{cte}$ . são hiperbolóides abertos 3-dimensionais  $H^3$ , de tal forma que o espaço pode ser visto como a folhação  $R \times H^3$ . O diagrama de Penrose para estas coordenadas é mostrado na Figura 2.4.

Junto com os sistemas anteriores, podemos escrever a métrica do espaço de de Sitter na forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\Sigma_{k,3}^2, \quad (2.22)$$

onde a coordenada  $t$  é qualquer uma das coordenadas tipo-tempo usadas anteriormente, e

$$d\Sigma_{k,3}^2 = \begin{cases} l^2 d\Omega_3^2 & \text{para } k = 1 \\ dx_i dx^i & \text{para } k = 0 \\ l^2 d\Theta_3^2 & \text{para } k = -1 \end{cases}$$

O fator de escala é

$$a_k = \begin{cases} \cosh(t/l) & \text{para } k = 1 \\ \exp(-t/l) & \text{para } k = 0 \\ \sinh(t/l) & \text{para } k = -1. \end{cases}$$

As folhações anteriores também afetam a geometria das fronteiras nas regiões assintóticas, sendo estas dadas por  $S^3$ ,  $R^3$  e  $H^3$ , para  $k = 1, 0, -1$  respectivamente.

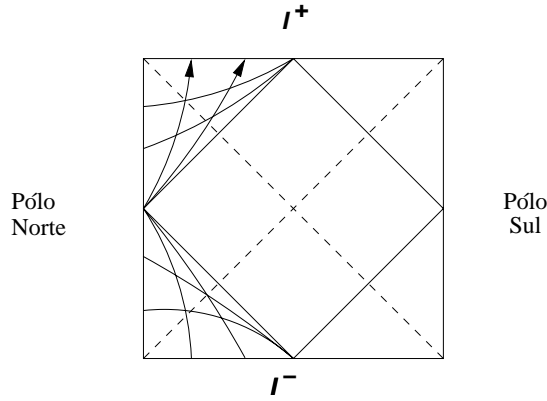


Figura 2.4: As coordenadas hiperbólicas descrevem só a parte na qual aparecem as linhas  $\bar{\tau} = \text{cte.}$ , as quais são hipérbolas abertas, que são representadas por meio das linhas com flecha.

#### 2.2.4 Coordenadas estáticas

Quando escrevemos<sup>†</sup>

$$\begin{aligned} \chi^0 &= l \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}} \sinh(t/l) \\ \chi^i &= r \omega^i \quad i = 1, \dots, d-1, \\ \chi^d &= l \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}} \cosh(t/l), \end{aligned} \quad (2.23)$$

com  $0 < r < l$ , a métrica induzida em (2.2) fica

$$ds^2 = - \left(1 - r^2/l^2\right) dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - r^2/l^2)} + r^2 d\Omega_2^2. \quad (2.24)$$

<sup>†</sup>A coordenada  $t$  aqui é diferente da coordenada utilizada nas coordenadas planas.



Estas coordenadas descrevem a região

$$-\chi^0 + \chi^d = l(1 - r^2/l^2)^{1/2} \exp(-t/l) > 0 \quad (2.25)$$

$$\chi^0 + \chi^d = l(1 - r^2/l^2)^{1/2} \exp(t/l) > 0. \quad (2.26)$$

Este sistema de coordenadas é particularmente útil pelo fato de apresentar manifestamente o horizonte de eventos em  $r = l$ , e o vetor de Killing  $\partial/\partial t$ . Apesar desse vetor ser um vetor tipo-tempo, deve-se observar que ele não preserva este caráter de maneira global, mas somente na região  $r < l$ . Para a construção do diagrama de Penrose, é necessário definir as coordenadas de Eddington-Finkelstein, as quais seguem trajetórias radiais tipo-luz. Elas estão definidas por meio da equação

$$dt = dx^\pm \pm \frac{dr}{1 - r^2/l^2}. \quad (2.27)$$

Resolvendo, obtemos

$$x^\pm = t \pm \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + r/l}{1 - r/l} \right) \quad ; \quad -\infty < x^\pm < \infty. \quad (2.28)$$

Vemos assim que a métrica toma a forma

$$ds^2 = (1 - r^2(x^+, x^-)/l^2) dx^+ dx^- - r^2 d\Omega_2^2, \quad (2.29)$$

com  $r = \tanh \frac{x^+ - x^-}{2}$ .

Para conseguir a extensão analítica completa do espaço  $dS_4$ , introduzimos as coordenadas de Kruskal

$$U = \exp(x^-/l) \quad ; \quad V = -\exp(-x^+/l), \quad (2.30)$$

nas quais a métrica assume a forma

$$ds^2 = \frac{l^2}{(1 - UV)^2} [dU dV - (1 + UV)^2 d\Omega_2^2]. \quad (2.31)$$

Finalmente, podemos levar tudo num diagrama compacto por meio da transformação

$$U = -\tan \left( \frac{\psi + \zeta}{2} \right) \quad ; \quad V = \tan \left( \frac{\psi - \zeta}{2} \right). \quad (2.32)$$

O resultado deste processo é apresentado no diagrama conforme da Figura 2.5.

O vetor de Killing:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{U}{l} \frac{\partial}{\partial U} - \frac{V}{l} \frac{\partial}{\partial V}, \quad (2.33)$$

divide o espaço  $dS_4$  em quatro regiões dependendo da sua norma

$$(\partial/\partial t)^2 = 4UV/(1 - UV)^2 \quad (2.34)$$

e o seu sentido. Na região representada pelo triângulo direito na figura 2.5, este vetor é tipo tempo e tem sentido orientado do passado para o futuro; por estas características é permitido pensar nele como uma espécie de operador Hamiltoniano, gerador da evolução temporal nessa região.

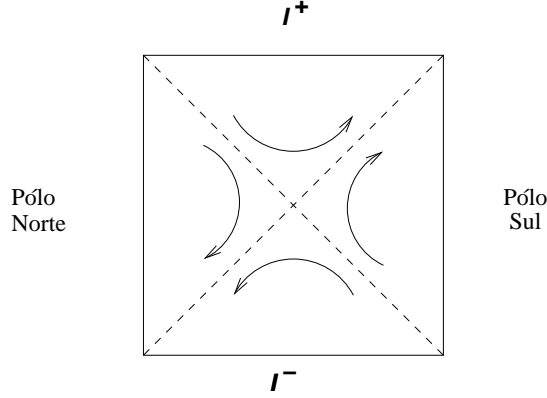


Figura 2.5: A maior extensão analítica das coordenadas estáticas. O horizonte está representado pelas diagonais  $r = l$  e divide o espaço  $dS_4$  em quatro regiões. As regiões representadas pelos triângulos esquerdo e direito incluem os pólos norte e sul, representados por  $r = 0$ . Os triângulos inferior e superior incluem as regiões assintóticas  $I^-$  e  $I^+$ , respectivamente. As linhas com seta indicam o sentido do vetor de Killing  $\partial/\partial t$  em cada região.

### 2.2.5 Coordenadas estereográficas

Estas coordenadas são obtidas da projeção estereográfica do hiperbolóide representado pela Eq. (2.2) no espaço de Minkowski de quatro dimensões com assinatura  $(1, -1, -1, -1)$ . Ela é dada por

$$\chi^\mu = \Omega x^\mu \quad ; \quad \chi^4 = -l\Omega \left( 1 + \frac{\sigma^2}{4l^2} \right) \quad (2.35)$$

onde

$$\Omega = \frac{1}{1 - \sigma^2/4l^2}, \quad (2.36)$$

onde  $\sigma^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$  e as  $x^\mu$  tomam valores no espaço de Minkowski onde a projeção estereográfica é feita. Nestas coordenadas, o intervalo de de Sitter assume uma forma conformalmente plana:

$$ds^2 = \Omega^2 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.37)$$

Estas coordenadas serão utilizadas sistematicamente nos capítulos seguintes. A importância delas está em que os geradores de simetria apresentam uma grande semelhança com os geradores de simetria do grupo de Poincaré. Por esta razão, elas são ideais para as aplicações no processo de contração que vamos definir no capítulo seguinte. Os geradores do grupo de simetria nos outros sistemas de coordenadas, que são de utilidade em outro tipo de aplicações—como o estudo das simetrias assintóticas e as cargas conservadas consistentes com estas simetrias, ou ainda no estudo das simetrias perto do horizonte de eventos—são apresentados no Apêndice A.

## 2.3 Propriedades semi-clássicas

Vamos agora entrar no terreno semi-clássico da física no espaço de de Sitter. Para este propósito, vamos fazer uso das semelhanças entre a solução de de Sitter e as soluções tipo buraco negro. Uma das características de maior interesse apresentadas na seção anterior é a presença de um horizonte de eventos neste espaço. Em particular, as coordenadas estáticas permitem estabelecer uma semelhança significativa com o horizonte de eventos presente na solução de Schwarzschild. A física dos buracos negros apresenta uma interessante interface entre os fenômenos clássicos e quânticos associados com o campo gravitacional. Para explorar um pouco melhor esta linha de interface, nesta seção vamos fazer uma revisão breve das leis clássicas e os efeitos semi-clássicos da física dos buracos negros. No final discutimos a generalização destas idéias para o caso do horizonte cosmológico do espaço de de Sitter.

### 2.3.1 Termodinâmica de buracos negros

Durante o final da década de 60 e início da década de 70, foram descobertas uma série de leis que descrevem o comportamento clássico dos horizontes de eventos nas soluções tipo buraco negro. Estes resultados foram chamados *as quatro leis da mecânica dos buracos negros* [13]. Estas leis apresentam uma estreita analogia com as leis que governam a termodinâmica de sistemas em equilíbrio, e por isso foram propostas como uma generalização das leis da termodinâmica em sistemas que interagem com buracos negros. Por este motivo, o posterior sucesso desta generalização promoveu a denominação de *leis da termodinâmica dos buracos negros*.

#### Lei zero

Em um horizonte de eventos existe uma grandeza chamada de *gravidade superficial*  $\kappa_H$  definida por meio da relação

$$K^\mu \nabla_\mu K^\nu = \kappa_H K^\nu, \quad (2.38)$$

onde  $K^\nu$  é um vetor de Killing tipo tempo. Esta grandeza assume um valor constante em toda a superfície do horizonte. Esta característica é semelhante à condição de equilíbrio térmico onde a temperatura é constante em todo o sistema.

#### Primeira lei e o teorema de “no-hair”

O teorema de “no-hair” é um teorema de unicidade para as soluções tipo buraco negro. Essencialmente, ele diz que *um buraco negro estacionário<sup>‡</sup> é caracterizado somente por três quantidades: massa  $M$ , momento angular  $J$  e carga  $Q$*  [14]. Em um processo geral envolvendo troca de matéria, energia

---

<sup>‡</sup>Um buraco negro estacionário é uma solução das equações de Einstein que apresenta um horizonte de eventos e um vetor de Killing tipo tempo no “infinito”.

e carga, os parâmetros que definem o buraco negro variam diferencialmente segundo a expressão

$$\delta M = \frac{\kappa_H}{8\pi} \delta A_H + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q, \quad (2.39)$$

sendo  $A_H$ ,  $\Omega_H$ , e  $\Phi_H$ , a área, velocidade angular e potencial elétrico do horizonte, respectivamente. A massa e o momento angular são calculadas usando as definições dos vetores de Killing tipo tempo  $K^\mu$ , e o vetor de Killing que reflete a simetria sob rotações da solução  $\varphi^\mu$ . Esta expressão é idêntica à primeira lei da termodinâmica quando pensamos em  $\kappa_H$  como um tipo de temperatura, e na área  $A_H$  como um tipo de entropia.

### Segunda lei

É conhecida como teorema da área [15]. Ele diz que *a área de um buraco negro nunca decresce no tempo*:

$$\delta A_H \geq 0. \quad (2.40)$$

Em particular, quando dois buracos negros colidem, a área do horizonte do buraco negro resultante é maior do que a soma das áreas dos buracos negros iniciais. Esta lei sugere uma analogia entre a área do horizonte de eventos com a entropia termodinâmica.

### Terceira lei

Em analogia com a lei termodinâmica que diz que é impossível chegar até uma temperatura zero em um sistema por meio de um processo físico, a terceira lei diz que *é impossível obter  $\kappa_H = 0$  por meio de um processo físico*.

As leis mencionadas acima oferecem uma analogia simples, mas ao mesmo tempo sugestiva, entre as leis da termodinâmica e a dinâmica dos buracos negros. Vamos examinar mais de perto algumas implicações dos enunciados anteriores.

### Relação entre entropia e área: segunda lei generalizada da termodinâmica

A entropia conta o número de estados acessíveis  $\Omega^\S$  de um sistema,

$$S = k_B \ln \Omega, \quad (2.41)$$

onde  $k_B$  é a constante de Boltzman. Quando um sistema material complexo, como por exemplo uma estrela, entra em processo de colapso gravitacional, o estado final do processo é, segundo o teorema de “no-hair”, um estado único caracterizado pelos parâmetros  $M$ ,  $J$  e  $Q$ . Este resultado entra em aberta contradição com a segunda lei da termodinâmica. O estado inicial de

---

<sup>§</sup>Vamos estar usando indistintamente os termos “graus de liberdade”, e “estados acessíveis” de um sistema.

sistema prévio ao colapso pode ter um número de estados acces veis muito grande, mas, o estado final somente tem só um estado acces vel, a entropia do sistema tem dimin ido no processo! A mesma situação acontece quando um sistema é jogado no interior de um buraco negro, aparentemente os graus de liberdade do sistema são “perdidos” atrás do horizonte. Para resolver esta contradição, Bekenstein [16, 17] propôs uma relação entre a entropia e a área do horizonte de um buraco negro, por meio da relação

$$S_{BH} = \eta A_H, \quad (2.42)$$

sendo  $\eta$  uma constante a ser determinada. A proposta de Bekenstein   que a entropia “perdida” de um sistema jogado no interior de um buraco negro, é compensada por um incremento na área do horizonte após o processo. Com isto, ele sugere que a área do horizonte é de fato a entropia do buraco negro. Para contornar a contradição entre a segunda lei da termodinâmica e o resultado clássico do teorema de “no-hair”, ele propôs uma generalização da segunda lei da termodinâmica para incluir processos envolvendo interação com buracos negros. Nesta proposta, a soma da entropia dos sistemas ordinários e a entropia associada com os horizontes dos buracos negros constitui a entropia total do sistema. Esta entropia obedece a *segunda lei generalizada da termodinâmica*:

$$\delta S_{total} = \delta(S_m + S_{BH}) \geq 0, \quad (2.43)$$

onde  $S_m$    a entropia do sistema interagindo com o buraco negro.

### Radiação de Hawking

Se a associação entre área e entropia proposta por Bekenstein é levada a sério, a expressão (2.39) leva a pensar em  $\kappa_H$  como um equivalente da temperatura do horizonte do buraco negro (salvo um fator numérico). Porém, se ele tivesse associada uma temperatura, ele deveria emitir algum tipo de radiação. No contexto puramente clássico, um buraco negro é um objeto que não emite nenhum tipo de radiação. Porém, considerando efeitos ao nível semi-clássico, Hawking calculou [18] que um observador longe do horizonte do buraco negro deteta um fluxo de partículas provenientes das vizinhanças do horizonte distribuídas em um espectro Planckiano de radiação térmica com temperatura

$$T_H = \frac{\hbar \kappa_H c^3}{2\pi G k_B}. \quad (2.44)$$

Com este resultado o papel de  $\kappa_H$  como uma temperatura fica bem estabelecido, e ao mesmo tempo é fixada a constante  $\eta$  da equação (2.42) como sendo  $1/4$ . Desta forma

$$S_{BH} = \frac{k_B A_H}{4l_P^2}, \quad (2.45)$$

(com  $l_P = (G\hbar/c^3)^{1/2} \approx 1.6 \times 10^{-33}\text{cm}$ , o raio de Planck)   a entropia do horizonte de um buraco negro. Este é a *equação de Bekenstein-Hawking* para a entropia de um buraco negro. Em termos destas quantidades, a equação (2.39) se escreve

$$\delta M = T_H \delta S_{BH} + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q. \quad (2.46)$$

Como exemplo, vamos tomar a solução de Schwarzschild:

$$ds^2 = (1 - 2GM/c^2r) dt^2 - \frac{dr^2}{(1 - 2GM/c^2r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.47)$$

Nesta solução,  $Q = J = 0$ , e  $\kappa_H = 1/4M$ . A área é  $A_H = 4\pi r_S^2$ , com  $r_S$  o raio de Schwarzschild  $r_S = 2GM/c^2$ . É fácil verificar que estes valores satisfazem (2.46).

### 2.3.2 Horizontes cosmológicos

Vimos na seção 2.2 que o espaço de de Sitter tem um horizonte de eventos para cada observador inercial. Nas coordenadas (2.23) foi fácil identificar o horizonte explicitamente e estabelecer algumas semelhanças com o horizonte da solução de Schwarzschild (2.47). Gibbons e Hawking [19] notaram que este horizonte também apresenta uma gravidade superficial, e por meio de técnicas Euclidianas semi-clássicas, também calcularam um espectro térmico de partículas provenientes do horizonte com temperatura

$$T_{dS} = \frac{1}{2\pi l}, \quad (2.48)$$

ou,  $T_{dS} = \hbar c / 2\pi l k_B$ , com todas as constantes dimensionais. Uma forma simples de entender este resultado é por meio da relação existente entre a temperatura e o período Euclidiano das funções de Green que descrevem um sistema termodinâmico. É um fato conhecido (veja-se por exemplo a seção 3.7 de [20]) que quando as funções de Green de um sistema possuem um período  $P$  no tempo imaginário, o sistema descrito tem uma temperatura associada  $T = 1/P$ . Para calcular o período Euclidiano no espaço de de Sitter, vamos usar a métrica nas coordenadas globais (2.7). Fazendo a continuação analítica ao tempo imaginário  $\tau \rightarrow i\tau$  desta métrica, obtemos

$$-ds^2 = c^2 d\tau^2 + l^2 \cos^2(c\tau/l) d\Omega_3^2, \quad (2.49)$$

a qual tem período  $P = 2\pi l$ , e consequentemente temperatura  $T_{dS} = 1/2\pi l$ .

Da mesma forma, uma entropia pode ser atribuída ao horizonte de de Sitter. Na métrica (2.24), a área do horizonte de de Sitter é  $A_{dS} = 4\pi l^2$ . A entropia, segundo a Eq. (2.45), é

$$S_{dS} = \frac{A_{dS}}{4} \equiv \pi l^2, \quad (2.50)$$

ou  $S_{dS} = k_B A_{dS} / 4l_P^2 \equiv \pi c^3 k_B l^2 / G\hbar$ , com todas as constantes dimensionais.

Até aqui, a analogia dos dois casos funciona muito bem, mas é um pouco mais sutil tentar ver se a primeira lei da termodinâmica funciona da mesma forma que no caso de um buraco negro. Numa solução tipo buraco negro é relativamente simples entender o significado do termo de massa-energia, dado que esta é a massa da fonte que origina a solução. Mas, no caso de de Sitter, esta fonte não existe dado que este espaço é uma solução de vácuo das equações de Einstein. Assim, não é imediato saber que termo colocar

no lado esquerdo da primeira lei da termodinâmica, equação (2.39). Para resolver esta dificuldade, vamos usar a identificação formal entre o termo cosmológico com um fluido perfeito, com equação de estado

$$p_{dS} = -\varepsilon_{dS} \equiv -\frac{E_{dS}}{V}, \quad (2.51)$$

sendo  $p_{dS}$  a pressão,  $E_{dS}$  e  $\varepsilon_{dS}$  a energia e a densidade de energia do termo cosmológico, e  $V$  o volume contido no interior do horizonte de de Sitter. Consequentemente, temos que adicionar um termo de trabalho na primeira lei da termodinâmica do horizonte de de Sitter, obtendo

$$\delta E_{dS} = T_{dS} \delta S_{dS} - p_{dS} \delta V. \quad (2.52)$$

Para um termo cosmológico constante, é considerando pouco plausível a possibilidade de uma evaporação do horizonte de de Sitter, imagem que sim é razoável no caso de um buraco negro. A energia, a entropia e o volume do horizonte de de Sitter são constantes de fato, e a equação anterior é satisfeita trivialmente. Agora, se considerássemos um termo cosmológico dependente do tempo, como vamos apresentar no capítulo 5, o raio de de Sitter, e todas as grandezas envolvidas na equação (2.52) tornam-se variáveis. Neste caso, usando que  $V \sim l^3$ , o qual implica

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{3}{l} \delta l,$$

a equação (2.52) pode ser resolvida para a energia, obtendo

$$E_{dS} = -\frac{c^4 l}{2G}. \quad (2.53)$$

Antes de continuar, vamos examinar a origem do sinal negativo na energia (2.53). Para começar, observemos que existe uma diferença fundamental entre as soluções de Schwarzschild e de Sitter: a solução de Schwarzschild é válida fora do horizonte de eventos, e o vetor de Killing tipo tempo, que é utilizado para calcular a energia da solução, está bem definido na região externa ao horizonte. Por outra parte, o vetor de Killing tipo tempo  $\partial/\partial t$ , utilizado na solução de de Sitter, está definido no interior do horizonte. Seu caráter e orientação, portanto, mudam nas regiões exteriores ao horizonte, da forma como foi explicado na figura 2.5. A energia (2.53) refere-se, então, à energia na região interior ao horizonte. Agora, se atribuíssemos uma energia negativa ao interior do horizonte, devido à mudança de orientação do vetor de Killing na região externa, nos vemos forçados a atribuir uma energia positiva na região externa.<sup>¶</sup> Feito isto, podemos fazer uma comparação com o caso de um horizonte de buraco negro, onde a solução é válida no exterior do horizonte. Baseados neste argumento, podemos afirmar que a expressão correta para a energia associada ao setor externo do horizonte de de Sitter é

$$E_{dS} = +\frac{c^4 l}{2G}. \quad (2.54)$$

---

<sup>¶</sup>Uma discussão detalhada deste ponto pode ser encontrada em [11].

É importante observar que a única grandeza que vai mudar de sinal ao ultrapassar o horizonte é a energia. A consistência deste resultado pode ser verificada observando que para uma energia positiva a equação de estado (2.51) dá origem a uma pressão negativa, como é requerido pela energia escura.

Utilizando agora a analogia com o caso do buraco negro, podemos esperar que a energia associada ao lado externo de horizonte coincida com a energia no interior do horizonte. Quando existe um vetor de Killing tipo tempo  $\xi^\mu = (1, \vec{0})$  associado com as translações no tempo  $\partial/\partial t$ , esta energia pode ser escrita na forma (veja-se por exemplo [21])

$$E_{dS} = \int_{r \leq l} \sqrt{h} T_{\mu\nu} \xi^\mu n^\nu d^3x, \quad (2.55)$$

sendo  $h$  o determinante da métrica induzida em uma seção  $t = \text{constante}$ ,  $T_{\mu\nu}$  representa a densidade de energia-momento do termo  $\Lambda$ , e  $n^\mu = \xi^\mu / \xi$ . Agora, no sistema de coordenadas estáticas (2.23), temos que

$$\xi \equiv |\xi^\mu| = (g_{\mu\rho} \xi^\mu \xi^\rho) = (g_{00})^{1/2} \quad \text{e} \quad \sqrt{h} = (g_{11})^{1/2} r^2 \sin \theta.$$

Fazendo uso da definição invariante da densidade de energia-momento

$$\varepsilon_{dS} = T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu,$$

é fácil ver que afim de obter a energia (2.54), devemos ter

$$\varepsilon_{dS} = \frac{3c^4}{8\pi G l^2}. \quad (2.56)$$

Desta expressão inferimos que a energia associada ao horizonte de de Sitter coincide com a densidade de energia escura relacionada com um termo cosmológico *positivo*. Note-se adicionalmente que a energia cresce linearmente com  $l$  entretanto que a densidade de energia decai com  $l^{-2}$ . Finalmente, é importante observar que um decaimento no termo cosmológico implica necessariamente criação de matéria no interior do horizonte [22] (este aspecto vai ser discutido no capítulo 5). Naturalmente, quando o Universo se expande e a matéria é criada, este deixa de ser um Universo de de Sitter. Porém, a noção de horizonte vai continuar existindo, e as propriedades termodinâmicas associadas com ele ainda vão estar bem definidas. É claro que um tratamento completo do problema requer da introdução das funções termodinâmicas da matéria criada.



## Capítulo 3

### Contrações do grupo de de Sitter

#### 3.1 Introdução

O espaço de de Sitter é semelhante ao espaço de Minkowski no sentido que compartilham a propriedade de serem espaços homogêneos e maximalmente simétricos. Neste capítulo, vamos explorar estas semelhanças e apresentar as implicações da presença da constante cosmológica  $\Lambda$  no grupo de simetria. O capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 3.2 vamos apresentar uma revisão geral do procedimento de contração de grupos de Lie [23, 24, 25]; na seção 3.3 vamos aplicar este procedimento ao caso particular do grupo de de Sitter e vamos obter os diferentes limites possíveis com os parâmetros  $c$  e  $\Lambda$ . Os limites não relativísticos que vamos revisar seguem as referências [26, 27]. No final desta seção, em 3.4.3, vamos nos concentrar no limite formal  $\Lambda \rightarrow \infty$  cujo resultado é o chamado *segundo grupo de Poincaré* [28]. Finalmente, vamos dedicar a seção 3.5 ao estudo das propriedades geométricas do espaço-tempo resultante neste limite [29, 30].

#### 3.2 Contração de grupos de Lie

O processo de contração de grupos consiste em obter de um grupo determinado  $G$ , um outro grupo  $G'$  não isomorfo ao primeiro por meio de um procedimento de limite. Uma das motivações originais para estudar o processo de contração, foi ver como o grupo de Galilei podia ser obtido como o limite não relativístico do grupo de Lorentz. É natural pensar que o grupo de Galilei aparece como o limite para uma velocidade da luz infinita, já que as transformações de Galilei são obtidas como limite das transformações de Lorentz neste limite. Porém, este processo de “tomar o limite” do grupo de Lorentz para obter o grupo de Galilei, deve ser definido de forma precisa, dado que o resultado pode depender da representação inicial escolhida. Para ter uma idéia de como isto acontece, vamos tomar a representação matricial do grupo de Poincaré em uma dimensão

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \lambda & \sinh \lambda & a_x \\ \sinh \lambda & \cosh \lambda & a_t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde

$$\sinh \lambda = \frac{1}{[1 - v^2/c^2]^{1/2}} \quad ; \quad \cosh \lambda = \frac{v/c}{[1 - v^2/c^2]^{1/2}}, \quad (3.1)$$

$v$  é a velocidade relativa entre os dois sistemas de referencia,  $c$  é a velocidade da luz e  $a_x$ ,  $a_t$  são as componentes de um vetor que representa as translações no espaço-tempo. Tomando o limite não relativístico  $c \rightarrow \infty$ , a representação anterior transforma-se em

$$\Lambda \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a qual é uma representação do grupo das translações em um espaço com uma dimensão espacial e uma translação no tempo, mas não é uma representação do grupo não homogêneo de Galilei em uma dimensão. Porém, se aplicássemos uma transformação de similaridade com a matriz dependente de  $c$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e redefiníssemos os parâmetros por meio de  $b_x = ca_x$ , e depois aplicássemos o limite  $c \rightarrow \infty$ , o resultado é

$$\mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & v & b_x \\ 0 & 1 & a_t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a representação apropriada do grupo de Galilei!.

Por meio deste exemplo simples, vemos que o processo de obter um grupo como caso limite de um outro não isomorfo requer uma parametrização apropriada das representações. Muitas vezes, como vamos ver no caso do grupo de de Sitter, é necessário fazer manipulações e redefinições apropriadas nos parâmetros e nos geradores do grupo para se obter o resultado desejado. Em seguida vamos revisar a definição precisa do processo de contração.

### 3.2.1 Definição

Considere-se um grupo de Lie  $n$ -dimensional  $G$ , com  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) e  $a^i$  os geradores e os parâmetros do grupo respectivamente. Os geradores satisfazem as relações de comutação :

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k, \quad (3.2)$$

sendo  $c_{ij}^k$  as constantes de estrutura do grupo. Agora vamos efetuar uma transformação linear não singular no grupo mediante a matriz  $U_i^j$ , obtendo os novos geradores:

$$Y_i = U_i^j X_j. \quad (3.3)$$

Neste processo também ficam redefinidos os parâmetros, as relações de comutação e as constantes de estrutura do grupo

$$a^i = U_j^i b^j \quad ; \quad [Y_i, Y_j] = C_{ij}^k Y_k \quad ; \quad C_{ij}^k = U_i^l U_j^m c_{lm}^k (U^{-1})_n^k. \quad (3.4)$$

Se a matriz  $U$  é não singular, a estrutura do grupo permanece inalterada, mas com  $U$  singular, a estrutura do grupo irá mudar, e vamos obter um novo grupo como resultado da transformação. Vamos considerar uma matriz  $U$  que depende linearmente num parâmetro  $\epsilon > 0$  na seguinte forma

$$U_i^j = u_i^j + \epsilon w_i^j, \quad (3.5)$$

e vamos supor que a matriz  $U$  é não singular quando  $\epsilon$  é finito, mais torna-se singular no limite em que  $\epsilon \rightarrow 0$ . Adicionalmente, vamos assumir que as matrizes  $u$  e  $w$  podem ser escritas na forma

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & I_{p \times p} \end{pmatrix},$$

onde  $v$  é uma matriz com posto  $r < n$ , e  $p = n - r$ . Nem sempre é possível escrever as matrizes da forma anterior, e assim uma condição para a possibilidade de efetuar o processo de contração é que esta decomposição possa ser feita. A fim de distinguir os geradores do subgrupo respeito do qual a contração é feita, vamos definir subíndices adicionais nos geradores  $X$  e  $Y$ . Assim, aplicando a transformação (3.5) da forma indicada acima, vamos obter

$$Y_{1\nu} = X_{1\nu} + \epsilon \sum_{\mu=1}^r v_{\nu}^{\mu} X_{1\mu} \quad (\nu = 1, \dots, r) \quad (3.6)$$

$$Y_{2\lambda} = \epsilon X_{2\lambda} \quad (\lambda = r + 1, \dots, n) \quad (3.7)$$

os parametros de grupo vão mudar da forma

$$a^{1\nu} = b^{1\nu} + \epsilon \sum_{\mu=1}^r b^{1\mu} v_{\mu}^{\nu} \quad (\nu = 1, \dots, r) \quad (3.8)$$

$$a^{2\lambda} = \epsilon b^{2\lambda} \quad (\lambda = r + 1, \dots, n), \quad (3.9)$$

se o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  resultasse bem definido, vemos como o grupo  $G$  vai ficar contraído ao subgrupo definido pelos parâmetros  $a^{1\lambda}$ . Isto explica o motivo do nome *contração* para este processo.

Agora, vamos analisar as condições nas quais este limite resulta de fato bem definido. Como vamos nos interessar só no limite em que  $\epsilon$  vai para zero, vamos manter só a parte singular em  $\epsilon$ . Por exemplo, fazemos isso nas relações de comutação

$$[Y_{1\mu}, Y_{1\nu}] = \sum_{\kappa=1}^r c_{1\mu,1\nu}^{1\kappa} Y_{1\kappa} + \frac{1}{\epsilon} \sum_{\lambda=r+1}^n c_{1\mu,1\nu}^{2\lambda} Y_{2\lambda} + O(\epsilon), \quad (3.10)$$

onde  $O(\epsilon)$  representa os termos lineares e de ordens maiores em  $\epsilon$ . A fim de obter um limite finito nas relações de comutação quando  $\epsilon$  vai para zero, devemos ter que

$$c_{1\mu,1\nu}^{2\lambda} = 0 \quad \mu, \nu = 1, \dots, r; \lambda = r + 1, \dots, n \quad (3.11)$$

isto é os geradores  $X_{1\mu}$  expandem um subgrupo em  $G$ . Pode-se verificar que de fato (3.11) é a única condição para o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  existir. Com a condição (3.11) as novas constantes de estrutura no limite  $\epsilon \rightarrow 0$  tomam os valores

$$C_{1\mu,1\nu}^{1\kappa} = c_{1\mu,1\nu}^{1\kappa}, C_{1\mu,1\nu}^{2\lambda} = C_{1\mu,1\nu}^{2\lambda} = 0 \quad (3.12)$$

$$C_{1\mu,2\lambda}^{1\kappa} = 0, C_{1\mu,2\lambda}^{2\lambda'} = C_{1\mu,2\lambda}^{2\lambda'} \quad (3.13)$$

$$C_{2\mu,2\nu}^{1\kappa} = C_{2\mu,2\nu}^{2\lambda} = 0 \quad (3.14)$$

as quais satisfazem a relação de Jacobi

$$C_{ij}^l C_{kl}^m + C_{jk}^l C_{il}^m + C_{ki}^l C_{jl}^m = 0, \quad (3.15)$$

que é a condição para formarem um grupo de Lie. No final do processo obtemos um novo grupo  $G'$  não isomorfo com o grupo inicial  $G$ , mas com o mesmo numero de dimensões. O grupo é contraído com respeito do grupo  $S$  expandido pelos geradores  $X_{1\mu}$ , e os geradores  $X_{2\lambda}$  tem sido contraídos. A relação (3.12) mostra que existe um subgrupo  $S' \subset G'$  isomorfo com  $S$ . As relações (3.13) e (3.14) expressam que existe um subgrupo invariante abeliano  $A$  em  $G$ . O subgrupo  $S$  é isomorfo ao grupo fator  $A$  em  $G'$ .

### 3.2.2 Exemplos

Agora, vamos revisar um par de exemplos com o objetivo de deixar mais clara a definição do processo. Os dois exemplos que vamos dar aqui, são a contração do grupo de rotações para o grupo de translações, e o segundo, a contração do grupo de Lorentz no grupo de Galilei.

#### Rotações

Os geradores do grupo de rotações em três dimensões  $J_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) satisfazem a álgebra

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k \quad (3.16)$$

Para maior clareza, vamos abrir a notação acima e vamos escrever a álgebra na forma explícita

$$[J_1, J_2] = J_3 \quad ; \quad [J_2, J_3] = J_1 \quad ; \quad [J_3, J_1] = J_2. \quad (3.17)$$

Vamos contrair o grupo respeito do subgrupo gerado pelo operador  $J_3$ , e vamos redefinir os geradores na seguinte forma

$$I_3 = J_3 \quad ; \quad I_1 = \varepsilon J_1 \quad ; \quad I_2 = \varepsilon J_2. \quad (3.18)$$

No limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , a álgebra (3.17) fica

$$[I_1, I_2] = 0 \quad ; \quad [I_2, I_3] = I_1 \quad ; \quad [I_3, I_1] = I_2. \quad (3.19)$$

Esta é a álgebra do grupo de translações e rotações no plano Euclidiano. O que esta acontecendo geometricamente neste exemplo pode ser entendido da seguinte forma: o gerador das rotações no eixo  $z$  permanece inalterado,

entanto que os geradores nos eixos  $x$  e  $y$  são restringidos para agir infinitesimalmente. Infinitesimalmente estes geradores agem como sendo translações no plano  $x - y$ , eles comutam entre si mas não com o gerador das rotações no eixo  $z$ . O parâmetro usado neste processo de contração é o ângulo de rotação nos eixos  $x$ , e  $y$ .

## Lorentz

O segundo exemplo que vamos ver é a contração do grupo de Lorentz respeito do grupo de rotações. O grupo é expandido pelos geradores  $L_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 0, \dots, 3$ ) que satisfazem a álgebra

$$[L_{ab}, L_{cd}] = \delta_{bc}L_{ad} + \delta_{ad}L_{bc} - \delta_{bd}L_{ac} - \delta_{ac}L_{bd} \quad (3.20)$$

$$[L_{a0}, L_{bc}] = \delta_{ab}L_{0c} - \delta_{ac}L_{0b} \quad (3.21)$$

$$[L_{a0}, L_{b0}] = L_{ba}, \quad (3.22)$$

onde  $(a, b, \dots = 1, 2, 3)$ . Redefinindo os geradores da forma

$$L_{ab} = L_{ab} \quad ; \quad T_a = \varepsilon L_{a0} \quad (3.23)$$

onde  $\varepsilon = 1/c$ . Indo para o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtemos a álgebra

$$[T_a, L_{bc}] = \delta_{ac}T_b - \delta_{ab}T_c \quad ; \quad [T_a, T_b] = 0 \quad (3.24)$$

que é a álgebra do grupo homogêneo de Galilei que contem as rotações, e as transformações a um sistema de referencia em movimento relativo em 3 dimensões. Desta forma vemos como no limite em que a velocidade da luz vai para infinito o grupo de invariância da relatividade especial *contraí-se* para o grupo de simetria da mecânica newtoniana. Um procedimento semelhante leva do grupo de Poincaré para o grupo não homogêneo de Galilei que inclui as translações no espaço e no tempo.

## 3.3 Os espaços e grupos de de Sitter

Nesta seção vamos nos concentrar nas propriedades algébricas do espaço de de Sitter. Para os nossos objetivos vai ser de particular interesse o uso das coordenadas estereográficas (2.35) definidas no capítulo anterior. Nestas coordenadas é possível ressaltar as semelhanças estruturais entre o grupo de Poincaré e os grupos de de Sitter e anti-de Sitter, os quais vamos tratar simultaneamente. O estudo das propriedades fundamentais do grupo de de Sitter, assim como as suas representações e a contração para o limite  $\Lambda \rightarrow 0$ , pode se encontrar no trabalho de Gürsey [31].

### 3.3.1 Os espaços de de Sitter

Espaços com curvatura escalar  $R$  constante são maximalmente simétricos, o que significa que eles têm o maior número possível de vetores de Killing, geradores do grupo de simetrias. Dada uma assinatura na métrica, existe um

único espaço para cada valor de  $R$  [32]. O espaço de Minkowski  $M$ , com curvatura escalar nula, é o exemplo mais simples. Seu grupo de simetrias é o grupo de Poincaré  $\mathcal{P} = \mathcal{L} \otimes \mathcal{T}$ , o produto semi-direto entre o grupo de Lorentz  $\mathcal{L} = SO(3, 1)$  e o grupo Abelian das translações  $\mathcal{T}$ . Este último age transitivamente em  $M$ , e a sua variedade de grupo pode ser identificada com  $M$ . De fato, o espaço de Minkowski é um espaço homogêneo sob  $\mathcal{P}$ , na verdade o quociente

$$M = \mathcal{P}/\mathcal{L}.$$

Entre os espaços curvos, o espaço de de Sitter, e o de anti-de Sitter são os únicos possíveis com curvatura escalar negativa e positiva respectivamente (o sinal da curvatura escalar depende da convenção na assinatura da métrica adotada.). Assim como foi apontado no capítulo anterior para o caso do espaço de de Sitter, estes espaços podem ser definidos como hipersuperfícies nos espaços “ambiente” pseudo-Euclidianos  $\mathbf{E}^{4,1}$  e  $\mathbf{E}^{3,2}$ , com coordenadas Cartesianas  $(\chi^A) = (\chi^0, \chi^1, \chi^2, \chi^3, \chi^4)$  satisfazendo respectivamente

$$\eta_{AB}\chi^A\chi^B \equiv (\chi^0)^2 - (\chi^1)^2 - (\chi^2)^2 - (\chi^3)^2 - (\chi^4)^2 = -l^2$$

e

$$\eta_{AB}\chi^A\chi^B \equiv (\chi^0)^2 - (\chi^1)^2 - (\chi^2)^2 - (\chi^3)^2 + (\chi^4)^2 = l^2.$$

Vamos usar o alfabeto Latino ( $a, b, c, \dots = 0, 1, 2, 3$ ) para denotar índices na álgebra e no espaço tangente. Utilizando a notação  $\eta_{ab}$  para a métrica de Minkowski  $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , e introduzindo a notação  $\mathbf{s} = \eta_{44}$ , podemos estudar os dois casos simultaneamente:

$$\eta_{ab}\chi^a\chi^b + \mathbf{s}(\chi^4)^2 = \mathbf{s}l^2. \quad (3.25)$$

Definindo a coordenada adimensional  $\chi'^4 = \chi^4/l$ , temos que

$$\frac{1}{l^2}\eta_{ab}\chi^a\chi^b + \mathbf{s}(\chi'^4)^2 = \mathbf{s}. \quad (3.26)$$

Para  $\mathbf{s} = -1$ , temos o espaço de de Sitter  $dS(4, 1)$ , cuja métrica é induzida da métrica pseudo-Euclidiana  $\eta_{AB} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1, -1)$ . Ele tem o grupo pseudo-ortogonal  $SO(4, 1)$  como grupo de simetrias. O caso  $\mathbf{s} = +1$  corresponde ao espaço de anti-de Sitter space, denotado por  $dS(3, 2)$ . Ele provem da métrica  $\eta_{AB} = (+1, -1, -1, -1, +1)$ , e tem  $SO(3, 2)$  como grupo de simetrias. Ambos são espaços homogêneos [33]:

$$dS(4, 1) = SO(4, 1)/\mathcal{L} \quad \text{e} \quad dS(3, 2) = SO(3, 2)/\mathcal{L}.$$

Adicionalmente, cada variedade de grupo é um fibrado com o correspondente espaço de de Sitter ou anti-de Sitter como espaço base, e o grupo de Lorentz  $\mathcal{L}$  como fibra [34]. Estes espaços são solução das equações de Einstein sem fontes, sempre que a constante cosmológica  $\Lambda$  e o parâmetro de de Sitter  $l$  estejam relacionados por

$$\Lambda = -\frac{3\mathbf{s}}{l^2}. \quad (3.27)$$

Nas coordenadas estereográficas (2.35) com métrica (2.37), a conexão de Christoffel assume a forma

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = [\delta^\lambda_\mu \delta^\sigma_\nu + \delta^\lambda_\nu \delta^\sigma_\mu - \eta_{\mu\nu} \eta^{\lambda\sigma}] \partial_\sigma [\ln \Omega(x)], \quad (3.28)$$

e o tensor de Riemann

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = -\frac{\Lambda}{3} [\delta^\mu_\rho g_{\nu\sigma} - \delta^\mu_\sigma g_{\nu\rho}]. \quad (3.29)$$

Consequentemente, o tensor de Ricci e a curvatura escalar são ,

$$R_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} \quad \text{and} \quad R = -4\Lambda. \quad (3.30)$$

Na convenção adotada aqui, o espaço de de Sitter (anti-de Sitter) possui curvatura escalar negativa (positiva).

### 3.3.2 Os grupos cinemáticos

O grupo de isometrias de um espaço tempo sempre vai ter um subgrupo que dá conta da isotropia do espaço e a equivalência de sistemas de referencia em movimento relativo. Além disso, existe uma parte do grupo de simetrias que é responsável da homogeneidade do espaço-tempo. Esta parte do grupo é chamada geralmente de *translações* a qual pode ser comutativa ou não. Isto acontece naturalmente na cinemática Galileana e outros tipos de cinemáticas não relativísticas concebível [35]. O caso melhor conhecido de cinemática relativística é o grupo de Poincaré  $\mathcal{P}$ . Ele está associado naturalmente com o espaço de Minkowski  $M$ , sendo seu grupo de simetria. O grupo de Poincaré está constituído pelo produto semi-direto do grupo de Lorentz  $\mathcal{L} = SO(3, 1)$  e o grupo das translações  $\mathcal{T}$ . Este último age de maneira transitiva em  $M$ . De fato, o espaço de Minkowski  $M$  é um espaço homogêneo sob  $\mathcal{P}$ , na verdade o quociente  $M \equiv \mathcal{T} = \mathcal{P}/\mathcal{L}$ . A invariância de  $M$  sob  $\mathcal{P}$  reflete a *uniformidade*. O subgrupo de Lorentz proporciona a noção de isotropia localmente, e a invariância sob translações faz que a simetria seja obtida em qualquer outro ponto do espaço. Este é o significado usual da noção de *uniformidade*, no qual  $\mathcal{T}$  é responsável pela equivalência entre todos os pontos do espaço-tempo.

Uma vez estabelecidas estas noções, vamos analisar o grupo de simetria dos espaços de de Sitter e anti-de Sitter. Nas coordenadas cartesianas  $\chi^A$ , os geradores das transformações infinitesimais são

$$J_{AB} = \eta_{AC} \chi^C \frac{\partial}{\partial \chi^B} - \eta_{BC} \chi^C \frac{\partial}{\partial \chi^A}, \quad (3.31)$$

que satisfazem as relações de comutação

$$[J_{AB}, J_{CD}] = \eta_{BC} J_{AD} + \eta_{AD} J_{BC} - \eta_{BD} J_{AC} - \eta_{AC} J_{BD}. \quad (3.32)$$

Em termos das coordenadas estereográficas  $\{x^a\}$ , estes geradores assumem a forma

$$J_{ab} \equiv L_{ab} = \eta_{ac} x^c P_b - \eta_{bc} x^c P_a \quad (3.33)$$

e

$$J_{4a} = -\mathfrak{s} \left( l P_a + \frac{\mathfrak{s}}{4l} K_a \right), \quad (3.34)$$

onde

$$P_a = \frac{\partial}{\partial x^a} \quad \text{and} \quad K_a = (2\eta_{ab}x^b x^c - \sigma^2 \delta_a^c) P_c \quad (3.35)$$

são respetivamente os geradores das translações e as transformações conformes *próprias*. Para  $\mathfrak{s} = -1$ , elas dão lugar ao grupo de de Sitter, e para  $\mathfrak{s} = +1$ , dão origem ao grupo de anti-de Sitter  $SO(3, 2)$ . Os geradores  $J_{ab}$  se referem ao subgrupo de Lorentz  $SO(3, 1)$ , em tanto que  $J_{a4}$  definem a transitividade nos correspondentes espaços homogêneos, e transformam como vetores sob transformações de Lorentz. Em termos da decomposição anterior, podemos ver explicitamente estas propriedades nas relações de comutação

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \eta_{bc}J_{ad} + \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{bd}J_{ac} - \eta_{ac}J_{bd}, \quad (3.36)$$

$$[J_{4a}, J_{bc}] = \eta_{ab}J_{4c} - \eta_{ac}J_{4b}, \quad (3.37)$$

$$[J_{4a}, J_{4b}] = -\mathfrak{s}J_{ab}. \quad (3.38)$$

Vemos na Eq. (3.34) que estes espaços são transitivos sob uma mistura de translações e transformações conformes próprias. A importância relativa destas duas componentes é pesada pelo valor da constante cosmológica. Em particular, para uma constante cosmológica nula, como vamos ver, os dois espaços de de Sitter e anti-de Sitter transformam-se no espaço de Minkowski  $M$  com o grupo de Poincaré como grupo de simetrias.

### 3.4 Limites de contração

Agora vamos apresentar os vários limites de contração dos grupos de de Sitter. Para obter os diferentes limites é necessário fazer redefinições apropriadas dos parâmetros e os geradores. Nestas redefinições vamos sempre levar em conta as duas constantes  $c$  e  $l$  e vamos apontar como elas entram na redefinição dos parâmetros, e o significado dos limites que estamos tomando. Uma ampla discussão dos aspectos algébricos e geométricos da contração no limite não relativístico encontra-se em [26].

#### 3.4.1 Constante cosmológica nula

Para o estudo do limite ( $l \rightarrow \infty$ ), é conveniente escrever os geradores de de Sitter na seguinte forma

$$J_{ab} \equiv L_{ab} = \eta_{ac}x^c P_b - \eta_{bc}x^c P_a, \quad (3.39)$$

e

$$\Pi_a \equiv \frac{J_{a4}}{l} = \mathfrak{s} \left( P_a + \frac{1}{4l^2} K_a \right). \quad (3.40)$$

Os geradores  $L_{ab}$  dão origem às transformações de Lorentz usuais agindo no espaço de Minkowski e satisfazem as relações de comutação

$$[L_{ab}, L_{cd}] = \eta_{bc}L_{ad} + \eta_{ad}L_{bc} - \eta_{bd}L_{ac} - \eta_{ac}L_{bd}. \quad (3.41)$$



As outras relações de comutação as quais descrevem o setor transitivo, escrevem-se

$$[\Pi_a, L_{bc}] = \eta_{ab}\Pi_c - \eta_{ac}\Pi_b, \quad (3.42)$$

$$[\Pi_a, \Pi_b] = -\frac{s}{l^2}L_{ab}. \quad (3.43)$$

Para  $l \rightarrow \infty$ , os geradores  $\Pi_a$  se reduzem às translações ordinárias, e o grupo de de Sitter contrai-se ao grupo de Poincaré  $\mathcal{P} = \mathcal{L} \circ \mathcal{T}$ . Junto com as modificações na álgebra e no grupo, o espaço de de Sitter transforma-se no espaço de Minkowski

$$M = \mathcal{P}/\mathcal{L},$$

o qual é transitivo sob translações ordinárias.

### 3.4.2 Limite não relativístico: espaços de Newton–Hooke

Os espaços de Newton–Hooke podem ser considerados como limites não relativísticos do espaço de de Sitter. A principal característica destes espaços é que apresentam uma curvatura constante não nula herdada do espaço de de Sitter. O efeito da curvatura aparece explicitamente nos geradores de translação. A redefinição apropriada neste caso é:

$$\mathbb{L}_{ab} \equiv J_{ab}, \quad \mathbb{L}_{i0} \equiv J_{a0}/c, \quad \mathbb{T}_a \equiv sJ_{a4}/c\tau, \quad \mathbb{T}_0 \equiv sJ_{04}/\tau, \quad (3.44)$$

onde  $a, b, \dots = 1, 2, 3$  são índices na álgebra, e  $\tau = l/c$  é mantido constante no processo. Estas redefinições nos geradores correspondem a modificar os parâmetros de grupo  $\omega^{\alpha\beta}$ , de tal forma que  $\omega^{ab} \rightarrow \omega^{ab}$ ;  $\omega^{a0} \rightarrow c\omega^{a0}$ ;  $\omega^a \rightarrow \epsilon c\tau\omega^a$ , e  $\omega^0 \rightarrow \epsilon\tau\omega^0$ . Os fatores são absorvidos nos parâmetros de grupo redefinidos, e estes adquirem dimensionalidade. Em termos dos geradores redefinidos, a álgebra de de Sitter resultante de (3.32) toma a forma

$$[\mathbb{L}_{ab}, \mathbb{L}_{de}] = \delta_{bd}\mathbb{L}_{ae} + \delta_{ae}\mathbb{L}_{bd} - \delta_{be}\mathbb{L}_{ad} - \delta_{ad}\mathbb{L}_{be} \quad (3.45)$$

$$[\mathbb{L}_{ab}, \mathbb{L}_{d0}] = \delta_{bd}\mathbb{L}_{a0} - \delta_{ad}\mathbb{L}_{b0} \quad (3.46)$$

$$[\mathbb{L}_{0b}, \mathbb{L}_{0e}] = \frac{1}{c^2}\mathbb{L}_{be} \quad (3.47)$$

$$[\mathbb{L}_{ab}, \mathbb{T}_d] = \delta_{bd}\mathbb{T}_a - \delta_{ad}\mathbb{T}_b \quad (3.48)$$

$$[\mathbb{L}_{a0}, \mathbb{T}_b] = \frac{1}{c^2}\delta_{ab}\mathbb{T}_0 \quad (3.49)$$

$$[\mathbb{L}_{a0}, \mathbb{T}_0] = -\mathbb{T}_a \quad (3.50)$$

$$[\mathbb{L}_{ab}, \mathbb{T}_0] = 0 \quad (3.51)$$

$$[\mathbb{T}_a, \mathbb{T}_b] = -\frac{s}{\tau^2 c^2}\mathbb{L}_{ab} \quad (3.52)$$

$$[\mathbb{T}_a, \mathbb{T}_0] = -\frac{s}{\tau^2}\mathbb{L}_{a0} \quad (3.53)$$

$$[\mathbb{T}_0, \mathbb{T}_0] = 0. \quad (3.54)$$

$$(3.55)$$

Esta é a parametrização apropriada para obter a álgebra do grupo de Newton–Hooke. Tomando o limite  $c \rightarrow \infty$  obtemos

$$[\mathbb{L}_{ab}, \mathbb{L}_{de}] = \delta_{bd}\mathbb{L}_{ae} + \delta_{ae}\mathbb{L}_{bd} - \delta_{be}\mathbb{L}_{ad} - \delta_{ad}\mathbb{L}_{be} \quad (3.56)$$

$$[\mathbb{L}_{ab}, \mathbb{L}_{d0}] = \delta_{bd}\mathbb{L}_{a0} - \delta_{ad}\mathbb{L}_{b0} ; \quad (3.57)$$

$$[\mathbb{L}_{0b}, \mathbb{L}_{0e}] = 0 ; \quad (3.58)$$

$$[\mathbb{L}_{ab}, \mathbb{T}_d] = \delta_{bd}\mathbb{T}_a - \delta_{ad}\mathbb{T}_b ; \quad (3.59)$$

$$[\mathbb{L}_{a0}, \mathbb{T}_b] = 0 ; \quad (3.60)$$

$$[\mathbb{L}_{a0}, \mathbb{T}_0] = -\mathbb{T}_a ; \quad (3.61)$$

$$[\mathbb{L}_{ab}, \mathbb{T}_0] = 0 ; \quad (3.62)$$

$$[\mathbb{T}_a, \mathbb{T}_b] = 0 ; \quad (3.63)$$

$$[\mathbb{T}_a, \mathbb{T}_0] = -\frac{\mathbf{s}}{\tau^2}\mathbb{L}_{a0} ; \quad (3.64)$$

$$[\mathbb{T}_0, \mathbb{T}_0] = 0, \quad (3.65)$$

o qual reproduz a álgebra do grupo de Galilei, com a importante diferença exibida na equação (3.64), que mostra a não comutatividade entre as translações espaciais e temporais. Este efeito é originado pela curvatura não -nula destes espaços herdada da curvatura do espaço de de Sitter [26]. É importante observar que  $\tau$  deve permanecer finito no processo para ter um resultado bem definido.

### 3.4.3 Constante cosmológica infinita

É importante enfatizar que o limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  deve de ser entendido como um limite formal puramente clássico já que neste caso estaríamos tomando valores arbitrariamente pequenos para o raio de de Sitter  $l$ . Para as escalas de comprimento implicadas neste limite, espera-se uma influencia importante de efeitos de natureza quântica, podendo aparecer como um impedimento para atingir escalas arbitrariamente pequenas. O interesse fundamental deste limite está em que ele proporciona um modelo consistente da estrutura algébrica do grupo de simetrias quando é introduzida uma escala de comprimento pequena, como por exemplo a escala de Planck, e pode ser de eventual relevância no estudo da física por trás desta escala.

Neste caso vamos rescrever os geradores da forma:

$$\bar{L}_{ab} = \sigma^{-4} J_{ab} = \bar{\eta}_{ac} x^c P_b - \bar{\eta}_{bc} x^c P_a \quad (3.66)$$

e

$$\bar{\Pi}_a \equiv 4l L_{a4} = \mathbf{s}(4l^2 P_a + \mathbf{s}K_a). \quad (3.67)$$

A diferença com relação às redefinições apresentadas anteriormente é que, neste caso, estamos introduzindo o fator  $\sigma^{-4}$  nos geradores de Lorentz. A justificativa para se introduzir este fator vai ser entendida melhor na seguinte seção na qual definimos uma métrica invariante conforme no espaço-tempo resultante no limite. De qualquer forma, a presença deste fator não vai alterar

as relações de comutação do setor de Lorentz, dado que ele é um invariante de Lorentz. Com estas redefinições, as relações de comutação (3.32) se escrevem

$$[\bar{L}_{ab}, \bar{L}_{cd}] = \bar{\eta}_{bc}\bar{L}_{ad} + \bar{\eta}_{ad}\bar{L}_{bc} - \bar{\eta}_{bd}\bar{L}_{ac} - \bar{\eta}_{ac}\bar{L}_{bd} \quad (3.68)$$

$$[\bar{\Pi}_a, \bar{\Pi}_b] = -\mathfrak{s}l^2 L_{ab} \quad (3.69)$$

$$[\bar{\Pi}_a, \bar{L}_{bc}] = \eta_{ab}\bar{\Pi}_c - \eta_{ac}\bar{\Pi}_b. \quad (3.70)$$

No limite  $l \rightarrow 0$ , os geradores  $\bar{\Pi}_a$  se transformam nos geradores das transformações especiais conformes  $K_a$ , e as relações de comutação (3.70) tomam a forma

$$[\bar{\Pi}_a, \bar{\Pi}_b] = 0 \quad ; \quad [\bar{\Pi}_a, \bar{L}_{bc}] = \eta_{ab}\bar{\Pi}_c - \eta_{ac}\bar{\Pi}_b, \quad (3.71)$$

entretanto, a parte correspondente as transformações de Lorentz permanecem iguais. O grupo resultante contrai-se para o chamado *segundo grupo de Poincaré* [28], o grupo de Poincaré *conforme*  $\bar{\mathcal{P}} = \bar{\mathcal{L}} \oslash \bar{\mathcal{T}}$ , isto é o produto semi-direto do grupo conforme de Lorentz  $\bar{\mathcal{L}}$  e o grupo coforme *proprio*  $\bar{\mathcal{T}}$ . Consequentemente, com a contração do grupo, o espaço de de Sitter transforma-se em

$$N = \bar{\mathcal{P}}/\bar{\mathcal{L}}.$$

Este é um novo tipo de espaço maximalmente simétrico [29], ao qual vamos nos referir como *espaço cone*  $N$ . Vamos estudar as suas propriedades geométricas na seção seguinte.

### 3.5 O espaço cone

Agora, vamos apresentar o enfoque geométrico das características do espaço-tempo resultante da contração formal  $\Lambda \rightarrow \infty$ . O primeiro que temos a dizer, é que desde o ponto de vista métrico, este espaço não resulta bem definido. O limite  $l \rightarrow 0$  na métrica (2.37) leva em

$$\lim_{l \rightarrow 0} g_{\mu\nu} = 0, \quad \lim_{l \rightarrow 0} g^{\mu\nu} \rightarrow \infty. \quad (3.72)$$

Porém, ainda é possível definir uma métrica compatível com este grupo de simetrias e que ao mesmo tempo reflete a estrutura métrica nas regiões assintóticas do limite  $l \rightarrow 0$ . A métrica que é invariante sob o grupo de simetrias  $\bar{\mathcal{P}}$  é\*

$$ds^2 \rightarrow d\bar{s}^2 = \bar{\eta}_{ab} dx^a dx^b, \quad (3.73)$$

onde

$$\bar{\eta}_{ab} = \sigma^{-4} \eta_{ab}, \quad \bar{\eta}^{ab} = \sigma^4 \eta^{ab}. \quad (3.74)$$

A invariância de (3.74) sob  $\bar{\mathcal{P}}$  vai ser mostrada explicitamente ao calcular os vetores de Killing. É interessante observar que os espaços de Minkowski  $M$  e o espaço cone  $N$  e os seus geradores de simetria podem ser relacionados por meio da inversão espaço-temporal

$$x^a \rightarrow -\frac{x^a}{\sigma^2}. \quad (3.75)$$

---

\*Vamos utilizar também os índices latinos para denotar coordenadas no espaço cone.

De fato, sob a inversão espaçotemporal (3.75), os pontos no infinito em  $M$ , são levados no vértice do cone  $N$ , e os pontos no cone de luz da origem em  $M$  são levados em pontos no infinito em  $N$ . Adicionalmente, utilizando esta inversão, o intervalo de  $M$  é levado no intervalo de  $N$

$$ds^2 \rightarrow d\bar{s}^2 = \bar{\eta}_{ab} dx^a dx^b. \quad (3.76)$$

Ao mesmo tempo, é um fato conhecido [36] que a inversão (3.75) relaciona as translações com as transformações conformes próprias:

$$P_a \rightarrow K_a. \quad (3.77)$$

Por último, é conveniente escrever os geradores das transformações de Lorentz em termos da métrica do espaço onde eles agem. Desta forma, como foi anunciado previamente na seção 3.4.3, estes geradores são definidos na forma

$$\bar{L}_{ab} = \sigma^{-4} J_{ab} = \bar{\eta}_{ac} x^c P_b - \bar{\eta}_{bc} x^c P_a. \quad (3.78)$$

Antes de continuar, vamos resumir algumas das características importantes deste espaço. Ele é transitivo sob transformações conformes próprias, representa um espaço-tempo vazio, onde toda a energia esta concentrada na forma de uma densidade de energia escura infinita [29]. Ele é resultado de um tratamento puramente clássico, e por esta razão, efeitos quânticos poderiam evitar que um processo determinado chegasse até este estado. Um esquema gráfico do que acontece no processo de contração apresenta-se na figura 3.1.

### 3.5.1 Geometria

A métrica (3.74) do espaço cone leva na conexão de Christoffel

$$\Gamma_{ab}^c = 2\sigma^{-2} x^d (\eta_{ad} \delta_b^c + \eta_{bd} \delta_a^c - \eta_{ab} \delta_d^c). \quad (3.79)$$

Em termos de  $\bar{\eta}_{ab}$ , escrevemos

$$\Gamma_{ab}^c \equiv \bar{\Gamma}_{ab}^c = 2\bar{\sigma}^{-2} x^d (\bar{\eta}_{ad} \delta_b^c + \bar{\eta}_{bd} \delta_a^c - \bar{\eta}_{ab} \delta_d^c), \quad (3.80)$$

onde  $\bar{\sigma}^2 = \bar{\eta}_{ab} x^a x^b$ . É fácil ver que os correspondentes tensores de Riemann e Ricci se anulam e consequentemente a curvatura escalar também se anula. Exceto na origem, onde a métrica é singular e o tensor de Riemann não pode ser definido, o espaço cone  $N$  é um espaço plano.

### 3.5.2 Vetores de Killing

Agora, vamos resolver a equação de Killing para a métrica invariante conforme (3.74). Os vetores de Killing resultantes  $\xi_a$ , serão chamados de *vetores de Killing conformes*.<sup>†</sup> A equação de Killing  $\mathcal{L}_\xi \bar{\eta}_{ab} = 0$ , pode se escrever da forma

$$\bar{\nabla}_a \xi_b + \bar{\nabla}_b \xi_a = 0, \quad (3.81)$$

---

<sup>†</sup>Estes vetores não devem de ser confundidos com os vetores solução da equação de Killing conforme  $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$ .

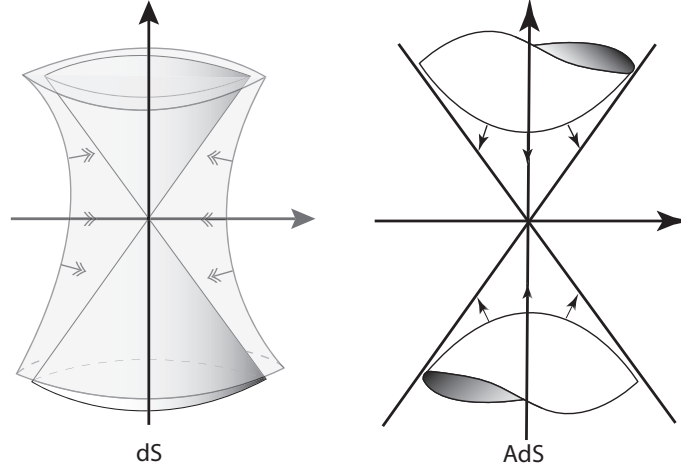


Figura 3.1: A figura dá uma idéia esquemática do que está acontecendo no processo de contração no limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Tanto dS como AdS se aproximam ao mesmo espaço cônico  $N$  no limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

onde  $\bar{\nabla}_a$  é a derivada covariante na conexão  $\bar{\Gamma}_{ab}^c$ . Usando a equação (3.80), esta pode se reescrever na forma

$$\bar{\eta}_{ac} \partial_b \xi^c + \bar{\eta}_{bc} \partial_a \xi^c + \bar{\eta}_{ab} \partial_c (\ln \bar{\sigma}^{-4}) \xi^c = 0. \quad (3.82)$$

A correspondente solução é

$$\xi^a(x) = \alpha^c (\bar{\sigma}^2 \delta_c^a - 2\bar{\eta}_{cd} x^d x^a) + \beta^{ac} x_c, \quad (3.83)$$

sendo  $\alpha^c$  and  $\beta^{ac} = -\beta^{ca}$  constantes de integração. Assim, os dez vetores de Killing

$$\xi_{(c)}^a(x) = \bar{\sigma}^2 \delta_c^a - 2\bar{\eta}_{cd} x^d x^a \quad (3.84)$$

e

$$\xi_{(cd)}^a(x) = \delta_c^a x_d - \delta_d^a x_c, \quad (3.85)$$

geram o conjunto de soluções da equação de Killing. Os quatro vetores  $\xi_{(c)}^a(x)$  representam as transformações conformes próprias, enquanto que os seis vetores  $\xi_{(cd)}^a(x)$  representam as “rotações” no espaço-tempo. A existência de dez vetores de Killing, mostra o caráter maximalmente simétrico do espaço  $N$ .

### 3.5.3 Invariantes de Casimir

Os campos relativísticos ordinários, e as partículas associadas a eles, estão classificadas como representações do grupo de Poincaré  $\mathcal{P} = \mathcal{L} \otimes \mathcal{T}$ . As representações estão determinadas pelo valor dos dois operadores invariantes de Casimir do grupo que estão associados com a massa ( $m$ ), e o spin ( $s$ ) de cada partícula. Entre todas as possíveis representações do grupo de Poincaré [38], a Natureza parece dar preferência às *séries discretas*, cujas representações se classificam segundo os autovalores dos dois operadores invariantes

$$C_2 = \gamma_{ab} P^a P^b = \square \equiv -m^2 c^2 \quad (3.86)$$

e

$$C_4 = \gamma_{ab} W^a W^b \equiv -m^2 c^2 s(s+1), \quad (3.87)$$

sendo  $W^a$  o vetor de Pauli-Lubanski

$$W^a = \frac{1}{2} \epsilon^{abcd} P_b S_{cd}. \quad (3.88)$$

Qualquer métrica  $\gamma_{ab}$  invariante sob a ação do grupo proporciona redefinições destes invariantes, porém a escolha mais direta é a métrica de Lorentz  $\eta_{ab}$ . O primeiro invariante de Casimir só envolve os geradores das translações, fixa a massa, define o operador Laplaciano, e a equação de Klein-Gordon que é satisfeita por todos os campos relativísticos, se escreve

$$(\square + m^2 c^2) \phi = 0, \quad (3.89)$$

O segundo invariante, é o quadrado do vetor de Pauli-Lubanski, o qual fixa o spin da partícula.

De maneira análoga, os operadores de Casimir do *grupo de Poincaré conforme*  $\bar{\mathcal{P}} = \bar{\mathcal{L}} \otimes \bar{\mathcal{T}}$  podem ser construídos com a métrica  $\gamma_{ab} = \eta_{ab}$  e os geradores  $S_{ab}$ , e  $K_a$ <sup>‡</sup>, resultando

$$\bar{C}_2 = \eta_{ab} K^a K^b = \square = -\bar{m}^2 c^2, \quad (3.90)$$

$\bar{m}$  é o *equivalente conforme* da massa. Identificando  $\partial^a \partial_a \equiv m^2$ , encontramos

$$\bar{m}^2 = \sigma^4 m^2. \quad (3.91)$$

Consequentemente, a *equação de Klein-Gordon conforme* é

$$(\square + \bar{m}^2 c^2) \phi = 0. \quad (3.92)$$

Por outra parte, o segundo invariante de Casimir é

$$\bar{C}_4 = \eta_{ab} \bar{W}^a \bar{W}^b = -\bar{m}^2 c^2 s(s+1), \quad (3.93)$$

sendo  $\bar{W}^a$  o *vetor de Pauli-Lubanski conforme*

$$\bar{W}^a = \frac{1}{2} \epsilon^{abcd} K_b S_{cd}. \quad (3.94)$$

### 3.5.4 Propriedades termodinâmicas

Vamos agora analisar o comportamento das propriedades termodinâmicas deste espaço limite. Segundo as noções introduzidas na seção 2.3.2, a temperatura (dstemp) torna-se infinita, enquanto a entropia (2.50) anula-se. Finalmente, a energia (2.53) associada com o horizonte de de Sitter também é nula neste limite. É importante enfatizar ainda que a energia é nula, sua densidade (2.56), torna-se infinita. A razão deste comportamento, é que o

---

<sup>‡</sup>Ou alternativamente, os operadores de Casimir podem ser obtidos tomando o limite  $l \rightarrow 0$  dos operadores de Casimir do grupo de de Sitter.

volume delimitado pelo horizonte, anula-se a uma velocidade maior do que a energia.

Pode-se dizer que as condições mencionadas acima correspondem muito bem com a idéia das condições iniciais para um Universo tipo big-bang. É interessante também observar o fato de que o espaço de Minkowski, sendo obtido no limite de uma constante cosmológica nula, apresenta temperatura nula, entropia infinita,<sup>§</sup> e energia infinita com densidade nula.

---

<sup>§</sup>O conceito de entropia está intimamente relacionado com a noção de informação acessível a um observador. A informação acessível a um observador no espaço de de Sitter está limitada pela presença de um horizonte de eventos. No espaço de Minkowski, a inexistência de um horizonte de eventos para um observador inercial permite dizer que a informação acessível para ele é ilimitada.

## Capítulo 4

### A relatividade de de Sitter

#### 4.1 Introdução

Neste capítulo, vamos apresentar as noções do que seria uma relatividade restrita baseada no grupo de de Sitter. Vamos manter sempre a analogia com o caso de relatividade restrita baseada no grupo de Poincaré, de tal forma que em cada passagem do estudo vamos estar revisando as noções usuais e comparando-as com as novas noções introduzidas.

Uma idéia assumida geralmente é que a escala de Planck representa um limite de interface entre os fenômenos gravitacionais e a mecânica quântica. Em particular, argumentos de consistência sustentam a idéia de que os efeitos quânticos da gravitação levam a uma quebra da simetria de Lorentz e consequentemente a relatividade restrita é invalidada perto desta escala [39]. A fim de obter este tipo de quebra da simetria de Lorentz perto da escala de Planck sem produzir modificações significativas na relatividade restrita longe desta escala, tem se apresentado recentemente a idéia de uma “relatividade deformada” [40]. Neste tipo de teoria, a simetria de Lorentz é deformada por meio da introdução de um parâmetro  $\kappa$  proporcional ao comprimento de Planck [41]. Esta deformação sugere que perto desta escala, o grupo de simetrias de uma teoria quântica da gravitação é este grupo “ $\kappa$ -deformado” o qual reduz para o grupo de Poincaré longe desta escala. Neste capítulo vamos apresentar uma abordagem diferente baseada no grupo de de Sitter, o qual incorpora de forma natural uma escala invariante de comprimento dentro de sua estrutura, mas não implica uma quebra da simetria de Lorentz (tratamentos semelhantes podem ser encontrados em [42, 43]).

Pare ter uma melhor idéia de como podemos pensar numa relatividade de de Sitter, vamos brevemente relembrar a relação existente entre os grupos de de Sitter e Galilei por meio do processo de contração visto no capítulo anterior e no processo inverso, o chamado processo de expansão [24, 25]. Podemos pensar que o grupo de Poincaré apresenta as conseqüências de se introduzir uma escala fundamental de velocidade no grupo de Galilei. Inversamente, o ultimo pode ser obtido do grupo de Poincaré tomando o limite formal, em que esta escala de velocidade tornasse infinita (o limite não relativístico). Da mesma forma, podemos pensar que o grupo de de Sitter apresenta as implicações de introduzir uma escala de comprimento e uma escala de velocidade invariantes dentro do grupo de Galilei. No limite formal em que dita



escala de comprimento tornasse infinita, o grupo de de Sitter, contrai-se ao grupo de Poincaré onde somente temos a escala de velocidade invariante. É interessante observar que a ordem em que os processos são efetuados não é relevante. Se introduzimos no grupo de Galilei uma escala invariante de comprimento, vamos obter como resultado o grupo de Newton-Hooke estudado na seção 3.4.2 (ou em [26]), o qual descreve uma cinemática não-relativística na presença de uma constante cosmológica (curvatura) [44]. Adicionando a este grupo a escala invariante de velocidade, vamos obter como resultado novamente o grupo de de Sitter. Inversamente, o limite de baixas velocidades do grupo de de Sitter dá como resultado o grupo de Newton-Hooke, o qual contrai-se para o grupo de Galilei no limite de uma constante cosmológica nula.

Uma propriedade crucial do grupo de de Sitter é que ele conserva o caráter de quociente e, portanto a noção de homogeneidade. Assim como na relatividade restrita, cujo espaço subjacente de Minkowski é o quociente dos grupos de Poincaré e Lorentz, o espaço subjacente da relatividade de de Sitter, é o quociente dos grupos de de Sitter e Lorentz, isto é o espaço de de Sitter [43]. Agora, um espaço é chamado de transitivo sob certo conjunto de transformações—ou homogêneo sob ele—quando qualquer par de pontos nele podem ser colocados em contato por meio de uma das transformações pertencentes ao conjunto. Por exemplo, o espaço de Minkowski é transitivo sob translações espaço-temporais. O espaço de de Sitter, por outra parte como foi mostrado no capítulo anterior, é transitivo sob uma mistura das translações e as transformações conformes próprias cuja importância relativa é determinada pelo valor da constante cosmológica.

Em termos muito gerais, a relatividade de de Sitter pode ser interpretada como a composição de duas relatividades diferentes: a relatividade ordinária que está relacionada com as translações, e um tipo de *relatividade conforme* que está relacionada com as transformações especiais conformes. Devido ao caráter de quociente, o espaço de de Sitter vai ser modificado quando acontecer alguma modificação no grupo de simetrias. Ao longo deste capítulo vamos desenvolver esta idéia, e explorar a relação existente entre a estrutura algébrica nos limites de contração, bem como a resposta destas modificações nos respectivos espaços subjacentes. A importância dos limites apresentados aqui, em particular o limite formal de  $\Lambda \rightarrow \infty$ , é que espera-se que o grupo de simetria seja de interesse para a física além da escala de Planck, no mesmo sentido que o limite não-relativístico descreve a cinemática por trás da mecânica clássica. É claro que esta expectativa é de caráter puramente especulativo, porém o fato dos grupo de simetria estarem bem definidos nestes limites permite considerar seriamente este tipo de expectativa.

## 4.2 A relatividade de de Sitter

Vamos começar a construção da uma relatividade restrita baseada no grupo de simetrias de de Sitter. Como foi apresentado no capítulo anterior, na reatividade especial o espaço de Minkowski subjacente aparece como um quociente entre o grupo de Poincaré e o grupo de Lorentz. De maneira

similar, numa relatividade de de Sitter o espaço subjacente é o quociente entre o grupo de de Sitter e o grupo de Lorentz. Este aspecto é crucial já que isto garante a permanência da noção de homogeneidade. Em vez do espaço de Minkowski, o espaço homogêneo aqui vai ser o espaço de de Sitter  $dS(4, 1) = SO(4, 1)/\mathcal{L}$ .

O alfabeto grego ( $\mu, \nu, \rho, \dots = 0, 1, 2, 3$ ) será usado para denotar os índices no espaço de de Sitter; assim, por exemplo,  $\{x^\mu\}$  denota as coordenadas do espaço. O alfabeto latino ( $a, b, c, \dots = 0, 1, 2, 3$ ) denota a álgebra quadridimensional de de Sitter, assim como em ambos limites do espaço de de Sitter, isto é no Minkowski  $M$ , e no espaço cone  $N$ . Isto permite a introdução de uma tetrada holonômica  $\delta^a{}_\mu$ , a qual satisfaz

$$\eta_{\mu\nu} = \delta^a{}_\mu \delta^b{}_\nu \eta_{ab}, \quad \bar{\eta}_{\mu\nu} = \delta^a{}_\mu \delta^b{}_\nu \bar{\eta}_{ab}. \quad (4.1)$$

Como consequência, podemos escrever também

$$\sigma^2 = \eta_{ab} x^a x^b = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (4.2)$$

e

$$\bar{\sigma}^2 = \bar{\eta}_{ab} x^a x^b = \bar{\eta}_{\mu\nu} x^\mu x^\nu, \quad (4.3)$$

onde temos identificado  $x^a = \delta^a{}_\mu x^\mu$ .

#### 4.2.1 Transitividade e a noção de distância

Os dois tipos de transformação concorrentes na definição dos geradores que definem a transitividade no espaço de de Sitter, dão origem a duas noções diferentes de distância: uma que está relacionada com as translações, e outra relacionada com as transformações especiais conformes. A importância relativa destas duas noções depende do valor de  $\Lambda$ . O valor de referência para estabelecer a magnitude relativa das escalas de comprimento vai ser a escala de Planck  $l_P$ ; assim no contexto de uma relatividade de Sitter, os limites de “altas e baixas energias” estarão caracterizados por  $\Lambda l_P^2 \rightarrow 1$  e  $\Lambda l_P^2 \rightarrow 0$ , respectivamente.

#### Distância translacional

A primeira noção de distância está relacionada com as translações. Esta noção como sabemos é importante para valores pequenos de  $\Lambda$ , para os quais as translações são a parte dominante nos geradores de transitividade. Neste regime, é apropriado utilizar a reparametrização proporcionada pela equação (3.26),

$$K_G \Omega^2(x) \sigma^2 + (\chi'^4)^2 = 1, \quad (4.4)$$

onde

$$K_G = -1/l^2 \quad (4.5)$$

representa a curvatura Gaussiana do espaço de de Sitter. Vamos introduzir a tetrada não-holônoma

$$h^a{}_\mu = \Omega \delta^a{}_\mu. \quad (4.6)$$

Se  $\eta_{ab}$  denota a métrica de Minkowski, a métrica de de Sitter neste caso pode-se escrever

$$g_{\mu\nu} \equiv h^a{}_{\mu} h^b{}_{\nu} \eta_{ab} = \Omega^2(x) \eta_{\mu\nu}. \quad (4.7)$$

Esta métrica define a noção de “distância translacional”, cujo intervalo é

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv \Omega^2(x) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (4.8)$$

Para  $l \rightarrow \infty$  ( $\Lambda \rightarrow 0$ ), ele reduz-se ao intervalo invariante de Minkowski:

$$d\tau^2 \rightarrow ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (4.9)$$

Por outra parte, para  $l \rightarrow 0$  ( $\Lambda \rightarrow \infty$ ), ele vira singular, o que significa que esta noção de distância não faz sentido no espaço cone  $N$ .

### Distância conforme

A segunda noção de distância é aquela relacionada com as transformações conformes próprias. Dado que estas transformações são de importância dominante no limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , seu estudo apropriado requer re-escrever a equação (3.26) na forma

$$\bar{K}_G \bar{\Omega}^2(x) \bar{\sigma}^2 + (\chi'^4)^2 = 1, \quad (4.10)$$

onde

$$\bar{\Omega}(x) \equiv \frac{\sigma^2}{4l^2} \Omega(x) = -\frac{1}{(1 - 4l^2/\sigma^2)} \quad (4.11)$$

é o novo fator conforme e

$$\bar{K}_G = -16l^2 \quad (4.12)$$

é a curvatura Gaussiana *conforme*. Introduzimos agora a tetrada não-holônoma

$$\bar{h}^a{}_{\mu} = \bar{\Omega}(x) \delta^a{}_{\mu}. \quad (4.13)$$

Se  $\bar{\eta}_{ab}$  denota a métrica do espaço cone, a correspondente métrica de de Sitter neste caso pode-se escrever

$$\bar{g}_{\mu\nu} \equiv \bar{h}^a{}_{\mu} \bar{h}^b{}_{\nu} \bar{\eta}_{ab} = \bar{\Omega}^2(x) \bar{\eta}_{\mu\nu}. \quad (4.14)$$

Esta define a noção de “distância conforme” no espaço de de Sitter, cujo intervalo invariante tem a forma

$$d\bar{\tau}^2 \equiv \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \bar{\Omega}^2(x) \bar{\eta}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (4.15)$$

Para  $l \rightarrow 0$  ( $\Lambda \rightarrow \infty$ ), de Sitter contrai-se para o espaço cone  $N$ , e  $d\bar{\tau}^2$  reduz-se ao intervalo invariante conforme em  $N$ :

$$d\bar{\tau}^2 \rightarrow d\bar{s}^2 = \bar{\eta}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (4.16)$$

Dada a noção de transitividade neste tipo de espaço, esta é a única noção de distância que pode ser introduzida de maneira consistente em  $N$ . Para  $l \rightarrow \infty$  ( $\Lambda \rightarrow 0$ ), ela torna-se singular, o que indica que esta noção de distância não faz sentido em Minkowski  $M$ .

## Duas métricas, uma curvatura

Como foi indicado no capítulo anterior, a conexão de Christoffel e o tensor de Riemann para a métrica de de Sitter  $g_{\mu\nu}$  são respetivamente,

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = [\delta^\lambda_\mu \delta^\sigma_\nu + \delta^\lambda_\nu \delta^\sigma_\mu - \eta_{\mu\nu} \eta^{\lambda\sigma}] \partial_\sigma [\ln \Omega(x)] \quad (4.17)$$

e

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = -\frac{1}{l^2} [\delta^\mu_\rho g_{\nu\sigma} - \delta^\mu_\sigma g_{\nu\rho}]. \quad (4.18)$$

Por outra parte, a conexão de Christoffel para a métrica  $\bar{g}_{\mu\nu}$  é

$$\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = [\delta^\lambda_\mu \delta^\sigma_\nu + \delta^\lambda_\nu \delta^\sigma_\mu - \bar{\eta}_{\mu\nu} \bar{\eta}^{\lambda\sigma}] \partial_\sigma [\ln \bar{\Omega}(x)]. \quad (4.19)$$

Similarmente, o tensor de Riemann é

$$\bar{R}^\mu_{\nu\rho\sigma} = -16l^2 [\delta^\mu_\rho \bar{g}_{\nu\sigma} - \delta^\mu_\sigma \bar{g}_{\nu\rho}]. \quad (4.20)$$

Os dois tensores de Riemann  $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$  e  $\bar{R}^\mu_{\nu\rho\sigma}$  representam a curvatura do espaço de de Sitter. A diferença está em que enquanto que  $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$  representa a curvatura apropriada para o limite de uma constante cosmológica pequena,  $\bar{R}^\mu_{\nu\rho\sigma}$  representa o tensor de curvatura apropriado para o outro limite. Pode-se ver que os dois limites levam a um espaço-tempo com curvatura nula. Isto indica que tanto  $M$  como  $N$  são espaços planos.

### 4.2.2 As transformações de de Sitter

As transformações de de Sitter podem ser pensadas como rotações em um espaço-tempo de cinco dimensões,

$$\chi'^C = \Lambda^C_D \chi^D, \quad (4.21)$$

onde  $\Lambda^C_D$  é o elemento do grupo na representação vetorial. Dado que estas transformações deixam invariante a forma quadrática

$$-\eta_{AB} \chi^A \chi^B = l^2, \quad (4.22)$$

elas deixam invariante o próprio parâmetro  $l$  (pela própria definição do grupo). A forma infinitesimal destas transformações é

$$\delta \chi^C = \frac{1}{2} \mathcal{E}^{AB} L_{AB} \chi^C, \quad (4.23)$$

onde  $\mathcal{E}^{AB}$  são os parâmetros do grupo, e  $L_{AB}$  os geradores.

### Constante cosmológica pequena

Para  $\Lambda$  pequena, analogamente com as identificações (3.33) e (3.40), definimos os parâmetros

$$\epsilon^{ab} = \mathcal{E}^{ab} \quad \text{e} \quad \epsilon^a = l \mathcal{E}^{a4}. \quad (4.24)$$

Neste caso, em termos das coordenadas estereográficas, as transformações infinitesimais assumem a forma

$$\delta x^c = \frac{1}{2} \epsilon^{ab} L_{ab} x^c + \epsilon^a \Pi_a x^c, \quad (4.25)$$

ou equivalentemente

$$\delta x^c = \epsilon^c{}_a x^a + \epsilon^a - \frac{\epsilon^b}{4l^2} (2x_b x^c - \sigma^2 \delta_b^c). \quad (4.26)$$

No limite  $\Lambda \rightarrow 0$ , estas transformações reduzem-se às transformações de Poincaré, como já vimos no capítulo anterior, as quais deixam invariante a forma quadrática

$$\eta_{ab} u^a u^b = 1, \quad (4.27)$$

sendo  $u^a = dx^a/ds$  a quadri-velocidade.

### Constante cosmológica grande

Para  $\Lambda$  grande, analogamente às identificações (3.66) e (3.67), definimos os parâmetros

$$\bar{\epsilon}^{ab} = \sigma^4 \mathcal{E}^{ab} \quad \text{and} \quad \bar{\epsilon}^a = \mathcal{E}^{a4}/4l. \quad (4.28)$$

Neste caso, em termos das coordenadas estereográficas, as transformações infinitesimais assumem a forma

$$\delta x^c = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^{ab} \bar{L}_{ab} x^c + \bar{\epsilon}^a \bar{\Pi}_a x^c, \quad (4.29)$$

ou equivalentemente

$$\delta x^c = \bar{\epsilon}^c{}_a x^a - \bar{\epsilon}^a (2x_b x^c - \sigma^2 \delta_b^c) + 4l^2 \bar{\epsilon}^a, \quad (4.30)$$

onde  $\bar{\epsilon}^c{}_a = \bar{\epsilon}^{cb} \bar{\eta}_{ba} \equiv \epsilon^c{}_a$ . No limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , elas reduzem a uma transformação conforme de Poincaré, as quais deixam invariante a forma quadrática

$$\bar{\eta}_{ab} \bar{u}^a \bar{u}^b = 1, \quad (4.31)$$

onde  $\bar{u}^a = dx^a/d\bar{s}$  é a quadri-velocidade conforme.

### 4.2.3 Os geradores de Lorentz

Até agora temos estudado as transformações de de Sitter em um espaço-tempo de Minkowski. Na sequência, iremos estudar a forma dos geradores correspondentes em um espaço de de Sitter, que é o espaço-tempo de uma relatividade especial de de Sitter. Isto será feito contraindo-se os geradores que agem no espaço-tempo de Minkowski com as tetradas apropriadas. Vamos começar considerando os geradores de Lorentz.

### Constante cosmológica pequena

Para  $\Lambda$  pequena, os geradores das transformações infinitesimais de Lorentz são (ver a seção 4.2.2)

$$L_{ab} = \eta_{ac} x^c P_b - \eta_{bc} x^c P_a. \quad (4.32)$$

Os correspondentes geradores agindo no espaço de de Sitter podem ser obtidos contraindo  $L_{ab}$  com a tetrada  $h^a{}_\mu$ , dada em (4.6):

$$\mathcal{L}_{\mu\nu} \equiv h^a{}_\mu h^b{}_\nu L_{ab} = g_{\mu\rho} x^\rho P_\nu - g_{\nu\rho} x^\rho P_\mu. \quad (4.33)$$

Equivalentemente, podemos escrever

$$\mathcal{L}_{\mu\nu} = \Omega^2 (\eta_{\mu\rho} x^\rho P_\nu - \eta_{\nu\rho} x^\rho P_\mu). \quad (4.34)$$

A correspondente matriz da representação vetorial é

$$(\mathcal{S}_{\mu\nu})_\lambda{}^\rho = g_{\mu\lambda} \delta_\nu{}^\rho - g_{\nu\lambda} \delta_\mu{}^\rho. \quad (4.35)$$

Por outra parte, a representação espinorial é

$$(\mathcal{S}_{\mu\nu})_\lambda{}^\rho = \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad (4.36)$$

onde  $\gamma_\mu = h^a{}_\mu \gamma_a$  são as matrizes de Dirac dependentes do ponto. Para  $l \rightarrow \infty$ , de Sitter reduz-se a Minkowski, e os correspondentes geradores de Lorentz reduzem-se aos geradores usuais das transformações de Lorentz em Minkowski.

Agora, os geradores  $\mathcal{L}_{\mu\nu}$  satisfazem as relações de comutação

$$[\mathcal{L}_{\mu\nu}, \mathcal{L}_{\rho\lambda}] = g_{\nu\rho} \mathcal{L}_{\mu\lambda} + g_{\mu\lambda} \mathcal{L}_{\nu\rho} - g_{\nu\lambda} \mathcal{L}_{\mu\rho} - g_{\mu\rho} \mathcal{L}_{\nu\lambda}. \quad (4.37)$$

Mesmo agindo no espaço de de Sitter, estes geradores apresentam uma estrutura algébrica bem definida, isomórfa à álgebra de Lie usual do grupo de Lorentz. Esta é uma propriedade fundamental no sentido que ela permite a construção de uma relatividade bem definida, no sentido algébrico, no espaço de de Sitter.

### Constante cosmológica grande

Para  $\Lambda$  grande, os geradores das transformações infinitesimais de Lorentz (ver a seção 4.2.2)

$$\bar{L}_{ab} = \bar{\eta}_{ac} x^c P_b - \bar{\eta}_{bc} x^c P_a. \quad (4.38)$$

Num espaço de de Sitter, sua forma explícita pode se obter contraindo (4.38) com a tetrada  $\bar{h}^a{}_\mu$ , dada pela equação (4.13):

$$\bar{\mathcal{L}}_{\mu\nu} \equiv \bar{h}^a{}_\mu \bar{h}^b{}_\nu \bar{L}_{ab} = \bar{g}_{\mu\rho} x^\rho P_\nu - \bar{g}_{\nu\rho} x^\rho P_\mu, \quad (4.39)$$

ou equivalentemente,

$$\bar{\mathcal{L}}_{\mu\nu} = \bar{\Omega}^2 (\bar{\eta}_{\mu\rho} x^\rho P_\nu - \bar{\eta}_{\nu\rho} x^\rho P_\mu). \quad (4.40)$$

Estes geradores satisfazem as relações de comutação

$$[\bar{\mathcal{L}}_{\mu\nu}, \bar{\mathcal{L}}_{\rho\lambda}] = \bar{g}_{\nu\rho} \bar{\mathcal{L}}_{\mu\lambda} + \bar{g}_{\mu\lambda} \bar{\mathcal{L}}_{\nu\rho} - \bar{g}_{\nu\lambda} \bar{\mathcal{L}}_{\mu\rho} - \bar{g}_{\mu\rho} \bar{\mathcal{L}}_{\nu\lambda}. \quad (4.41)$$

Da mesma forma que  $\mathcal{L}_{\mu\nu}$ , eles apresentam uma estrutura algébrica tipo Lorentz. A correspondente matriz da representação vetorial, é neste caso, dada por

$$(\bar{\mathcal{S}}_{\mu\nu})_{\lambda}{}^{\rho} = \bar{g}_{\mu\lambda} \delta_{\nu}{}^{\rho} - \bar{g}_{\nu\lambda} \delta_{\mu}{}^{\rho}, \quad (4.42)$$

enquanto a representação espinorial é

$$(\bar{\mathcal{S}}_{\mu\nu})_{\lambda}{}^{\rho} = \frac{i}{4} [\bar{\gamma}_{\mu}, \bar{\gamma}_{\nu}], \quad (4.43)$$

com  $\bar{\gamma}_{\mu} = \bar{h}^a{}_{\mu} \gamma_a$  as matrizes de Dirac dependentes do ponto. Para  $l \rightarrow 0$ , o espaço de de Sitter, reduz-se ao espaço cone  $N$ , e os correspondentes geradores de Lorentz reduzem-se aos geradores das transformações de Lorentz conformes.

### Relatividade conforme

A relatividade de de Sitter pode ser vista como a composição de dois tipos diferentes de relatividades: a usual, relacionada com as translações, e a conforme, relacionada com as transformações especiais conformes. É uma única relatividade que interpola estes dois casos extremos. No limite da contração de uma  $\Lambda$  nula, a relatividade de de Sitter reduz-se à relatividade restrita ordinária. O espaço subjacente reduz-se ao espaço de Minkowski  $M$ , o qual é transitivo somente sob translações. No limite de contração oposto, de uma  $\Lambda$  infinita, a relatividade de de Sitter reduz-se à relatividade conforme. O espaço subjacente vai ser o espaço cone  $N$ , o qual é transitivo somente sob transformações conformes próprias.

Podemos dizer que a relatividade conforme é o limite da relatividade de de Sitter para uma constante cosmológica infinita. Esta é a relatividade que governa a equivalência entre os sistemas de referência no espaço cone  $N$ . Note-se que esta é uma equivalência no sentido conforme. De fato, lembre-se que dois pontos no espaço cone não podem ser relacionados por meio de uma translação, mas somente por meio de uma transformação conforme própria. De acordo com isto, a cinemática será governada pelo chamado grupo conforme de Lorentz cujos geradores são

$$\bar{L}_{ab} = \bar{\eta}_{ac} x^c P_a - \bar{\eta}_{bc} x^c P_a. \quad (4.44)$$

As correspondentes representações vetorial e espinorial são os casos limites das expressões (4.42) e (4.43), e são dadas por

$$(\bar{S}_{ab})_d{}^c = \bar{\eta}_{ad} \delta_b{}^c - \bar{\eta}_{bd} \delta_a{}^c \quad (4.45)$$

e

$$\bar{S}_{ab} = \frac{i}{4} [\bar{\gamma}_a, \bar{\gamma}_b], \quad (4.46)$$

onde  $\bar{\gamma}_a = -\sigma^{-2} \gamma_a$  é um tipo de matiz conforme de Dirac. Observe-se que o anti-comutador das  $\bar{\gamma}_a$ 's gera a métrica do espaço cone:

$$\{\bar{\gamma}_a, \bar{\gamma}_b\} = 2 \bar{\eta}_{ab}. \quad (4.47)$$

Naturalmente, assim como o espaço cone  $N$ , esta teoria limite deve ser interpretada como puramente formal. Esta teoria é o que a física clássica conduziria, sendo então a relatividade clássica por trás da física quântica na escala de Planck.

#### 4.2.4 Os geradores das “translações” de de Sitter

Assim como no caso dos geradores de Lorentz, a forma dos geradores  $\Pi^a$  e  $\bar{\Pi}^a$  agindo no espaço de de Sitter pode ser obtida por meio das contrações com a tetrada apropriada. Para  $\Lambda$  pequena, eles são dados por

$$\Pi_\mu \equiv h^a{}_\mu \Pi^a = \Omega [P_\mu - (1/4l^2) K_\mu], \quad (4.48)$$

onde

$$P_\mu = \partial/\partial x^\mu \quad \text{e} \quad K_\mu = (2\eta_{\mu\rho} x^\rho x^\nu - \sigma^2 \delta_\mu{}^\nu) P_\nu. \quad (4.49)$$

Por outra parte, para  $\Lambda$  grande, eles são

$$\bar{\Pi}_\mu \equiv \bar{h}^a{}_\mu \bar{\Pi}^a = \bar{\Omega} (P_\mu - (1/4l^2) K_\mu). \quad (4.50)$$

Vemos destas expressões que o espaço de de Sitter é transitivo sob uma combinação dos geradores das translações e as transformações conformes próprias. Para  $\Lambda \rightarrow 0$ ,  $\Pi_\mu$  reduzem-se ao gerados das translações, as quais definem a transitividade em  $M$ , entretanto que para  $\Lambda \rightarrow 0$ ,  $\Pi_\mu$  reduzem-se ao gerados das transformações conformes próprias, os quais definem a transitividade em  $N$ .

#### 4.2.5 Relações de energia-momento

Agora, vamos considerar a mecânica das partículas pontuais no espaço de de Sitter. As correntes de Noether conservadas associadas com uma partícula de massa  $m$  são, neste caso, o momento angular em cinco dimensões [31]

$$\lambda^{AB} = mc \left( \chi^A \frac{d\chi^B}{d\tau} - \chi^B \frac{d\chi^A}{d\tau} \right), \quad (4.51)$$

com  $d\tau$  o elemento de linha de de Sitter (4.8). A fim de ter contato com as definições usuais de energia e momento, vamos re-escrever as correntes acima em termos das coordenadas estereográficas  $\{x^a\}$  e o elemento de linha de Minkowski  $ds$ . O resultado é

$$\lambda^{ab} = x^a p^b - x^b p^a \quad (4.52)$$

e

$$\lambda^{a4} = lp^a - (4l)^{-1} k^a, \quad (4.53)$$



onde

$$p^a = m c \Omega \frac{dx^a}{ds} \quad (4.54)$$

é o momento, e

$$k^a = (2\eta_{cb} x^c x^a - \sigma^2 \delta_b^a) p^b \quad (4.55)$$

é o chamado *momento conforme*. Sua forma no espaço de de Sitter pode ser obtida por meio da contração com as tetradas apropriadas.

### Limite de baixas energias

Para  $\Lambda l_P^2 \rightarrow 0$ , analogamente aos geradores, definimos o momento de de Sitter

$$\pi^a \equiv \frac{\lambda^{a4}}{l} = p^a - \frac{k^a}{4l^2}. \quad (4.56)$$

A correspondente versão espaço-temporal é

$$\pi^\mu \equiv h_a^\mu \pi^a = p^\mu - \frac{k^\mu}{4l^2}, \quad (4.57)$$

onde

$$p^\mu = m c \frac{dx^\mu}{ds} \quad (4.58)$$

é o momento de Poincaré, e

$$k^\mu = (2\eta_{\lambda\rho} x^\rho x^\mu - \sigma^2 \delta_\lambda^\mu) p^\lambda \quad (4.59)$$

é o correspondente momento conforme de Poincaré.\* Observamos que  $\pi^\mu$  é o momento de Noether conservado relacionado com as transformações geradas por  $\Pi_a$ . Sua componente zero

$$\pi^0 \equiv p^0 - \frac{k^0}{4l^2}, \quad (4.60)$$

representa a energia, enquanto as componentes espaciais ( $i, j, \dots = 1, 2, 3$

$$\pi^i \equiv p^i - \frac{k^i}{4l^2} \quad (4.61)$$

representam o momento. A presença da constante cosmológica, em consequência, muda as definições usuais de energia e momento [45]. Como resultado, as relações de energia-momento também vão ser modificadas [46].

De fato, a relação de energia-momento na relatividade de de Sitter vem dada por

$$g_{\mu\nu} \pi^\mu \pi^\nu = \Omega^2 \eta_{\mu\nu} \left( p^\mu p^\nu - \frac{1}{2l^2} p^\mu k^\nu + \frac{1}{16l^4} k^\mu k^\nu \right). \quad (4.62)$$

As componentes do momento de Poincaré  $p^\mu$  são

$$p^\mu = \left( \frac{\varepsilon_p}{c}, p^i \right), \quad (4.63)$$

---

\*Análoga à identificação  $p^\mu = T^{\mu 0}$ , com  $T^{\mu\nu}$  a corrente de energia-momento, o momento conforme  $k^\mu$  é definido por  $k^\mu = K^{\mu 0}$ , com  $K^{\mu\nu}$  a corrente conforme [36].

onde  $\varepsilon_p$  e  $p^i$  são respetivamente a energia e o momento usuais. Como é bem conhecido, eles satisfazem a relação  $\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = m^2 c^2$ , onde  $m^2 c^2$  é o primeiro Casimir do grupo de Poincaré. Analogamente, as componentes do momento conforme  $k^\mu$  são

$$k^\mu = \left( \frac{\varepsilon_k}{c}, k^i \right), \quad (4.64)$$

sendo  $\varepsilon_k$  a noção conforme de energia, e  $k^i$  as componentes espaciais do momento conforme. O momento conforme satisfaz  $\eta_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = \bar{m}^2 c^2$ , onde  $\bar{m}^2 c^2$  é o primeiro invariante de Casimir do grupo conforme de Poincaré. Utilizando as expressões acima, a relação (4.62) fica

$$\frac{\varepsilon_p^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 + \frac{1}{2l^2} \left[ \frac{\varepsilon_p \varepsilon_k}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{k} - m \bar{m} c^2 - \frac{1}{8l^2} \left( \frac{\varepsilon_k^2}{c^2} - k^2 - \bar{m}^2 c^2 \right) \right]. \quad (4.65)$$

Para valores pequenos de  $\Lambda$ , o parâmetro de de Sitter  $l$  é grande, e as modificações nas relações de energia-momento vão ser pequenas. Até primeira ordem em  $\Lambda$ , temos

$$\frac{\varepsilon_p^2}{c^2} - p^2 \simeq m^2 c^2 + \frac{1}{2l^2} \left[ \frac{\varepsilon_p \varepsilon_k}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{k} - m \bar{m} c^2 \right]. \quad (4.66)$$

No limite de  $\Lambda \rightarrow 0$ , as noções ordinárias de energia e momento são recuperadas, e a relatividade de de Sitter reduz-se à relatividade restrita ordinária, na qual a simetria de Poincaré é exata. A relação de energia-momento, neste caso, reduz-se à expressão usual

$$\frac{\varepsilon_p^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2. \quad (4.67)$$

### Limite de alta energia

Para  $\Lambda l_P^2 \rightarrow 1$ , em analogia com os geradores, definimos o momento de de Sitter

$$\pi^a \equiv 4l \lambda^{a4} = 4l^2 p^a - k^a. \quad (4.68)$$

A correspondente versão espaço-temporal é

$$\bar{\pi}^\mu \equiv \bar{h}_a{}^\mu \pi^a = \frac{4l^2}{\sigma^2} (4l^2 p^\mu - k^\mu). \quad (4.69)$$

Observamos que  $\bar{\pi}^\mu$  é o momento de Noether relacionado com as transformações geradas por  $\bar{\Pi}_a$ . Sua componente zero,

$$\bar{\pi}^0 = \frac{4l^2}{\sigma^2} (4l^2 p^0 - k^0), \quad (4.70)$$

representa a energia conforme, enquanto as componentes espaciais

$$\bar{\pi}^i = \frac{4l^2}{\sigma^2} (4l^2 p^i - k^i) \quad (4.71)$$

representam o momento conforme. A relação energia-momento neste caso é dada por

$$\bar{g}_{\mu\nu}\bar{\pi}^\mu\bar{\pi}^\nu = 16l^4\bar{\Omega}^2\sigma^{-8}\eta_{\mu\nu}\left[16l^4p^\mu p^\nu - 8l^2p^\mu k^\nu + k^\mu k^\nu\right]. \quad (4.72)$$

Em termos das componentes de energia e momento, ela fica

$$\frac{\varepsilon_k^2}{c^2} - k^2 = \bar{m}^2 c^2 + 8l^2 \left[ \frac{\varepsilon_p \varepsilon_k}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{k} - m\bar{m}c^2 - 2l^2 \left( \frac{\varepsilon_p^2}{c^2} - p^2 - m^2 c^2 \right) \right]. \quad (4.73)$$

Para valores grandes de  $\Lambda$ , o raio de de Sitter  $l$  é pequeno. Até primeira ordem em  $l^2$ , temos que

$$\frac{\varepsilon_k^2}{c^2} - k^2 \simeq \bar{m}^2 c^2 + 8l^2 \left[ \frac{\varepsilon_p \varepsilon_k}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{k} - m\bar{m}c^2 \right]. \quad (4.74)$$

No limite formal  $\Lambda l_P^2 \rightarrow \infty$ , somente permanecem as noções conformes da energia e do momento, e a relatividade de de Sitter reduz-se à relatividade conforme pura. Neste caso, a relação energia-momento fica

$$\frac{\varepsilon_k^2}{c^2} - k^2 = \bar{m}^2 c^2. \quad (4.75)$$

É importante observar que, dado que as noções de energia e momento mudam na presença da constante cosmológica, a mecânica quântica também muda [45]. Em particular, as relações de incerteza vão ser modificadas, e no limite acima, elas estarão dadas em termos das noções conformes de energia e momento.

### 4.3 Observações finais

Devido ao carácter homogêneo do espaço de de Sitter, existe um subgrupo isomorfo ao grupo de Lorentz. Neste sentido, este esquema de modificação do grupo de simetrias respeita a simetria de Lorentz como parte das simetrias. Da mesma forma que a introdução de uma escala invariante de velocidade na cinemática Galileana leva a uma estrutura causal por meio da introdução do cone de luz, a introdução de uma escala invariante de comprimento leva a uma modificação na estrutura causal do espaço-tempo. A maneira como é modificada a estrutura causal é por meio da introdução de um horizonte de eventos para cada observador inercial, na forma como foi apresentado no capítulo 2. Vimos que o horizonte tem uma descrição simples em termos das coordenadas estáticas: ele é a superfície com coordenada radial  $r = l$ . Em termos das coordenadas estereográficas que temos usado de maneira sistemática ao longo deste capítulo, a expressão para o horizonte de eventos é

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2/\Omega^2 \quad \text{and} \quad (x^0)^2 = l^2(2 - 1/\Omega)^2. \quad (4.76)$$

Para  $\Lambda$  pequeno, o “raio” do horizonte tende a infinito, e assim um observador tem acesso causal a uma região maior do espaço-tempo. No caso limite

de Minkowski, um observador inercial tem eventualmente acesso ao espaço-tempo inteiro. Por outra parte, para um  $\Lambda$  muito grande (isto é, para  $\Lambda l_P^2 \rightarrow 1$ ), esta região é da ordem da escala de Planck, onde espera-se mudanças profundas na estrutura causal do espaço-tempo. Em conclusão, a introdução de uma escala de comprimento invariante não leva a uma quebra da simetria de Lorentz, mas a sua presença reflete-se numa modificação no domínio causal para qualquer observador inercial neste espaço.

Na relatividade restrita existe um limite superior para a velocidade: a velocidade da luz. Na relatividade de de Sitter, o parâmetro  $l_P$  aparece como um limite inferior de distância. Diferentemente do caso do limite superior para a velocidade, este limite para  $l$  não aparece como consequência da cinemática ou da causalidade, mas sim como consequência de considerações quânticas. Para ver isto, observe que a área do horizonte de de Sitter é proporcional a  $l^2$ :

$$A_{dS} \simeq l^2. \quad (4.77)$$

Dado que a entropia associada com esta superfície é proporcional ao logaritmo do número de estados,

$$n = A_{dS}/l_P^2 \simeq \frac{l^2}{l_P^2}, \quad (4.78)$$

e dado que o mínimo valor atingível acontece com  $n = 1$ , vemos que o mínimo permitido para  $l$  está na ordem do comprimento de Planck.

Finalmente, é importante mencionar as mudanças na definição dos campos relativísticos. Se o grupo de simetria muda, isto deve se refletir no conceito de campo relativístico. Por exemplo, no contexto da relatividade de de Sitter, um campo escalar deve ser interpretado como uma representação singleto do grupo de de Sitter, e não do grupo de Lorentz. Entre outras consequências, a equação de Klein-Gordon vai ter uma forma diferente. Para  $\Lambda$  arbitrário, temos que

$$\square \phi + m^2 c^2 \phi - \frac{R}{6} \phi = 0, \quad (4.79)$$

onde  $\square$  é o operador de Laplace-Beltrami na métrica (4.7), e  $R = -12/l^2$ . Note-se que nesta expressão aparece naturalmente o termo  $R/6$ , o qual é interessante no caso em que  $m = 0$  já que as equações tornam-se invariantes sob transformações conformes da métrica [47]. É claro que no limite de uma constante cosmológica nula, vamos recuperar a equação ordinária de Klein-Gordon. Por outra parte, no limite de  $\Lambda$  muito grande, a equação anterior assume a forma

$$\square \phi + \bar{m}^2 c^2 \phi - \frac{\bar{R}}{6} \phi = 0, \quad (4.80)$$

onde  $\square$  é o operador de Laplace-Beltrami da métrica (4.14). No limite formal  $\Lambda \rightarrow \infty$ , ela se reduz à equação conforme de Klein-Gordon (3.92).

## Capítulo 5

### Termo cosmológico dependente do tempo

#### 5.1 Introdução

Nos capítulos 3 e 4 exploramos algumas consequências algébricas de tomar limites extremos da constante cosmológica. A motivação foi puramente cinemática e não pensamos em nenhum mecanismo que desse conta das possíveis mudanças no valor da constante cosmológica. Porém, observações recentes [1, 2] e a teoria inflacionária [4] sugerem que o Universo pode ser aproximado pela geometria do espaço de de Sitter, tanto no passado como no futuro remoto, com valores diferentes da constante cosmológica. Isto torna necessário pensar em algum tipo de mecanismo dinâmico para explicar a evolução do termo cosmológico. Neste capítulo vamos apresentar um modelo plausível e simples para um *termo cosmológico dinâmico* que consegue incorporar de forma consistente as características do Universo atual sugeridas pelas observações cosmológicas recentes.

#### 5.2 Energia escura dinâmica e as equações de Einstein

Vamos começar relembrando a forma das equações de Einstein na presença de uma constante cosmológica e uma fonte de matéria:

$$G^\mu{}_\nu \equiv R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\nu R = \frac{8\pi G}{c^4} \left[ T^\mu{}_\nu + \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} \delta^\mu{}_\nu \right], \quad (5.1)$$

onde  $T^\mu{}_\nu$  é o tensor de energia-momento do campo fonte. Estas equações, junto com a identidade de Bianchi

$$\nabla_\mu G^\mu{}_\nu = 0, \quad (5.2)$$

e a *lei covariante de conservação da fonte*

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0 \quad (5.3)$$

implicam que o termo cosmológico não admite nenhuma dependência nas coordenadas espaço-temporais, isto é,  $\Lambda$  é uma constante de fato. Por outro lado, dado que os modelos inflacionários requerem uma constante cosmológica muito grande nas etapas iniciais da evolução do universo [4], e as observações

recentes oferecem um valor muito menor na época atual [1, 2], esta constância aparece como um dos principais problemas da cosmologia atual [8].

Naturalmente, o cancelamento da uma divergência covariante, como na equação (5.3), não corresponde a uma “lei de conservação” já que ela não fornece uma “carga” conservada. O papel desta “lei de conservação” é regular o intercâmbio de energia-momento entre as diferentes fontes (chamada genericamente de matéria de agora em diante) e o campo gravitacional. Adicionalmente, esta “lei” não é necessariamente verdadeira em todas as circunstâncias. Ela não é válida, por exemplo, no caso em que matéria esteja sendo *criada* por alguma outra fonte independente. Como tem sido apontado na literatura (por exemplo [22]) um termo cosmológico decaindo, (ou energia do vácuo decaindo), poderia ser esta fonte independente.

Para começar, na presença de um termo cosmológico não constante, a imposição colocada pela identidade de Bianchi (5.2) nas equações de Einstein (5.1), em vez de ter a forma em (5.3), assume a forma

$$\nabla_\mu [T^\mu{}_\nu + \Lambda^\mu{}_\nu] = 0, \quad (5.4)$$

onde  $\Lambda^\mu{}_\nu = \varepsilon_\Lambda \delta^\mu{}_\nu$ , é o tensor de energia-momento associado com o termo cosmológico, sendo

$$\varepsilon_\Lambda = \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} \quad (5.5)$$

a correspondente densidade de energia, à qual vamos nos referir como densidade de energia escura. Em consequência, o tensor de energia-momento da matéria não é conservado covariantemente. Somente a soma com o tensor de energia-momento do termo cosmológico é que é conservado. A lei de conservação covariante (5.4) pode ser interpretada como uma restrição que regula o intercâmbio de energia-momento entre a matéria, a gravitação e a energia escura. Em outras palavras, ela expressa a forma como a energia escura é transformada em matéria, e vice-versa. Assumindo que  $\Lambda$  depende somente no “tempo cosmológico”  $t$ , a lei de conservação (5.4) equivale a\*

$$\nabla_\mu T^\mu{}_i = 0, \quad (5.6)$$

e

$$\nabla_\mu T^\mu{}_0 = -\frac{c^3}{8\pi G} \frac{d\Lambda}{dt}. \quad (5.7)$$

com  $i, j, k, = 1, 2, 3$ . Vemos na equação (5.7) que um termo com  $\Lambda$  decaindo no tempo implica um tensor de energia-momento não conservado covariantemente, e consequentemente matéria deve ser criada para compensar o decaimento do termo cosmológico. Note-se que a energia total desta solução é conservada, apesar da criação de matéria. Isto pode ser entendido melhor quando colocamos as equações de Einstein com termo cosmológico na forma *potencial* [48]

$$\partial_\rho (\sqrt{-g} \mathcal{S}^{\rho\mu}{}_\nu) = \frac{8\pi G}{c^4} [\sqrt{-g} (t^\mu{}_\nu + T^\mu{}_\nu + \Lambda^\mu{}_\nu)], \quad (5.8)$$

---

\*Não vamos considerar casos com dependência espacial que podem levar em espaços não isotrópicos.

onde  $\mathcal{S}^{\rho\mu}{}_{\nu} = -\mathcal{S}^{\mu\rho}{}_{\nu}$  é o chamado *superpotencial*, e  $t^{\mu}{}_{\nu}$  é o *pseudo-tensor de energia momento* do campo gravitacional. Devido à anti-simetria do superpotencial nos primeiros dois índices, a densidade total de energia-momento, a qual inclui o campo gravitacional, de matéria e do termo cosmológico, é conservada:

$$\partial_{\mu} [\sqrt{-g}(t^{\mu}{}_{\nu} + T^{\mu}{}_{\nu} + \Lambda^{\mu}{}_{\nu})] = 0. \quad (5.9)$$

Na verdade, esta é a lei de conservação de Noether devido à invariância sob transformações gerais de coordenadas.

É importante reforçar que a lei de conservação covariante (5.7) é diferente da que aparece nos modelos de quintessência [49] ou “phantom fields” [50], onde não existe criação de matéria pela interação com o termo cosmológico. Nestes modelos, de fato, o tensor de energia-momento do campo escalar que modela o termo cosmológico é a entidade conservada. Por último, apesar da criação continua de matéria neste cenário, devemos ressaltar que este mecanismo é diferente do apresentado pelo modelo do campo  $C$  introduzido por Hoyle e Narlikar [51], dado que neste modelo não se introduz um campo escalar como modelo para a evolução do termo cosmológico.

### 5.3 Equações de Friedmann

O ponto inicial das nossas considerações será um espaço-tempo preenchido somente com um termo cosmológico muito grande (possivelmente infinito [57]), com a possibilidade de decair e evoluir no tempo. As propriedades do espaço-tempo resultante do limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  foram já apresentadas na seção 3.5. Assumindo que a matéria criada pelo decaimento do termo cosmológico é isotrópica e homogênea na forma de um fluido ideal, é natural pensar que o tensor métrico resultante na presença deste tipo de campo gravitacional assume a forma da métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right],$$

onde  $a = a(t)$  é o fator de escala, e  $k$  é o parâmetro de curvatura das seções espaciais. As coordenadas são as de um observador co-móvel com as linhas de fluxo do fluido perfeito, cujo tensor de energia-momento tem a forma

$$T^{\mu}{}_{\nu} = (\varepsilon_m + p_m)u^{\mu}u_{\nu} - p_m\delta^{\mu}{}_{\nu}, \quad (5.10)$$

com  $p_m$  e  $\varepsilon_m$ , a pressão e a densidade de energia da matéria. Usando a notação  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$ , e  $x^3 = \phi$ , as componentes não nulas de (5.10) para este fluido serão

$$T^1{}_1 = T^2{}_2 = T^3{}_3 = -p_m,$$

$$T^0{}_0 = \varepsilon_m.$$

A lei de conservação (5.7), neste caso, fica

$$\frac{d\varepsilon_m}{dt} + 3H(\varepsilon_m + p_m) = -\frac{d\varepsilon_{\Lambda}}{dt}, \quad (5.11)$$

com

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$$

o parâmetro de Hubble. Esta é uma das equações de Friedmann. De fato, pode-se mostrar que esta equação é obtida das equações de Friedmann usuais

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \left[\frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_m + \frac{\Lambda c^2}{3}\right] a^2 - kc^2 \quad (5.12)$$

e

$$\frac{d^2a}{dt^2} = \left[\frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{4\pi G}{3c^2} (\varepsilon_m + 3p_m)\right] a, \quad (5.13)$$

sempre que  $\Lambda$  seja dependente do tempo. É importante enfatizar que neste tipo de modelo a matéria não é criada no momento do big bang: ela emerge gradualmente a medida que o termo cosmológico decai.

Vamos supor que a matéria criada neste processo de decaimento do termo cosmológico satisfaz uma equação de estado da forma

$$p_m = \omega_m \varepsilon_m, \quad (5.14)$$

onde  $0 \leq \omega_m \leq 1$  é um parâmetro que depende do tipo específico de matéria. É claro que o conteúdo de matéria do universo pode ter mais do que uma componente, cada uma com um parâmetro  $\omega$  diferente na equação. Estas possibilidades devem de ser consideradas quando se pretende uma descrição completa da evolução do universo. Aqui, longe de uma descrição detalhada da história térmica do universo, vamos considerar uma única componente. Neste caso, a equação (5.11) fica

$$\frac{d\varepsilon_m}{dt} + 3H(1 + \omega_m)\varepsilon_m = -\frac{d\varepsilon_\Lambda}{dt}. \quad (5.15)$$

Por outra parte, a segunda equação de Friedmann pode se escrever na forma

$$\frac{d^2a}{dt^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \left[ \varepsilon_\Lambda - \frac{1}{2} (1 + 3\omega_m) \varepsilon_m \right] a. \quad (5.16)$$

## 5.4 Análise da evolução

### 5.4.1 Caso geral

A equação de Friedmann (5.15) estabelece um vínculo na evolução de  $\varepsilon_m$  e  $\varepsilon_\Lambda$ . De fato, as duas densidades vão evoluir com a mesma dependência temporal através do fator de expansão  $a(t)$ . Em princípio, qualquer comportamento é possível para estas densidades, mas é usual supor que  $\varepsilon_m$  evolui com uma potência do fator de expansão,

$$\varepsilon_m = \alpha a^{-n}, \quad (5.17)$$



sendo  $\alpha$  uma constante de integração das equações, e  $n$  um número arbitrário, não necessariamente inteiro<sup>†</sup>. Neste caso, a equação (5.15) implica

$$\varepsilon_\Lambda = \frac{3(1 + \omega_m) - n}{n} \varepsilon_m, \quad (5.18)$$

onde estamos supondo uma constante de integração aditiva nula. Na presença de um termo cosmológico dinâmico, dependendo dos parâmetros  $n$  e  $\omega$ , as densidades de energia  $\varepsilon_m$  e  $\varepsilon_\Lambda$  podem eventualmente ter a mesma ordem de grandeza, como é claramente indicado pelas observações recentes [3]. É claro que estes parâmetros também podem levar a regimes em que as densidades são completamente diferentes. É interessante observar que o caso  $n = 0$ , que corresponderia a um equilíbrio entre a criação de matéria e a expansão ( $\varepsilon_m = \text{constante}$ ), é excluído pelas equações de Friedmann. Note-se adicionalmente que para  $\varepsilon_\Lambda$  constante, a equação (5.15) fornece a solução  $\varepsilon_m \sim a^{-3(1+\omega_m)}$ . Não entanto, para uma  $\varepsilon_\Lambda$  decaindo no tempo, é requerido que  $n$  esteja no intervalo

$$0 < n < 3(1 + \omega_m). \quad (5.19)$$

Dado que a matéria esta sendo criada continuamente, é natural para  $\varepsilon_m$  evoluir a uma velocidade menor do que  $a^{-3(1+\omega_m)}$ , o qual seria seu comportamento se a matéria não estivesse sendo criada.

Por outro lado, usando a equação (5.14), assim como as relações (5.17) e (5.18), a equação de Friedmann (5.16) fica

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \frac{3(1 + \omega_m)\beta^2}{2} \left( \frac{2 - n}{n} \right) a^{1-n}, \quad (5.20)$$

onde  $\beta^2 = 8\pi G\alpha/3c^2$ . Desta equação podemos ver que para  $n = 2$ ,  $n > 2$  e  $n < 2$ , a expansão acelerada do universo seria respectivamente zero, negativa e positiva. Esta propriedade explicaria eventualmente porque a aceleração era negativa no passado, e positiva hoje, como é também sugerido pelas observações recentes. Adicionalmente, no caso de uma aceleração positiva ( $n < 2$ ), os intervalos  $n > 1$  e  $n < 1$  representam respectivamente casos em que a aceleração é decrescente ou crescente, com o valor  $n = 1$  representando um universo com expansão acelerada constante, determinada por

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \frac{3(1 + \omega_m)\beta^2}{2}.$$

Neste caso,  $a \sim t^2$ , e temos as relações

$$\Lambda \sim a^{-1} \sim H^2 \sim t^{-2}.$$

Finalmente notamos que, dado que os parâmetros  $\omega_m$  e  $n$  têm intervalos muito limitados, não se espera uma mudança sensível nos resultados anteriores se  $\omega_m$  varia adiabaticamente com o tempo, ou se o conteúdo de matéria de universo tem mais de uma componente.

---

<sup>†</sup>A solução (5.17) é certamente imposta a mão, mas é uma extrapolação do caso em que  $\Lambda$  é constante e  $n = 3\omega_m$ .

### 5.4.2 O caso plano

Observações recentes favorecem o valor  $k = 0$  para as seções espaciais. Neste caso, é possível encontrar explicitamente a dependência temporal do termo cosmológico, a qual é válida para qualquer valor dos parâmetros  $n$  e  $\omega_m$ . De fato, para  $k = 0$ , a equação de Friedmann (5.12) pode se escrever na forma

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{3\beta^2(1 + \omega_m)}{n} a^{2-n}, \quad (5.21)$$

ou equivalentemente

$$a^{n/2-1} da = \left(\frac{3(1 + \omega_m)\beta^2}{n}\right)^{1/2} dt. \quad (5.22)$$

Assumindo a constante de integração nula (escolha da origem do tempo), a solução fica

$$a = \left(\frac{3n(1 + \omega_m)\beta^2}{4}\right)^{2/n} t^{2/n}. \quad (5.23)$$

Consequentemente, as densidades de energia apresentam o comportamento<sup>‡</sup>

$$\varepsilon_m \sim \varepsilon_\Lambda \sim t^{-2}. \quad (5.24)$$

Devido à relação (5.5), e usando a equação de Einstein, temos também que

$$\Lambda \sim R \sim t^{-2}. \quad (5.25)$$

Esta dependência é válida para qualquer valor dos parâmetros  $n$  e  $\omega_n$ . Deste comportamento podemos observar que tanto  $\Lambda$  como  $R$  divergem no tempo inicial, o qual aponta para a existência de uma singularidade inicial.

Como exemplo relacionado com o período inicial do Universo, vamos assumir a hipótese na qual a matéria criada satisfaz a equação de estado ultra-relativística (radiação) [32]

$$\varepsilon_m = 3p_m, \quad (5.26)$$

que corresponde a  $\omega_m = 1/3$ . Neste caso, o traço da equação de Einstein fica

$$R = -4\Lambda, \quad (5.27)$$

onde usamos que  $T \equiv T^\mu{}_\mu = \varepsilon_m - 3p_m = 0$ . Quando é criada somente matéria ultrarelativística, a curvatura escalar é determinada de pelo valor de  $\Lambda$ , e neste sentido este tipo de Universo pode ser considerado uma fase aproximadamente de de Sitter. Deve-se enfatizar que, dado que o termo cosmológico não é constante, este caso não corresponde a um espaço de de Sitter no sentido usual. Em termos do parâmetro de de Sitter  $l$ , no caso de uma constante cosmológica positiva, a curvatura escalar vem dada por  $R = -12/l^2$ , e a densidade de energia escura (5.5) fica

$$\varepsilon_\Lambda = \frac{3c^4}{8\pi G l^2}. \quad (5.28)$$

---

<sup>‡</sup>Com a constante de proporcionalidade dependente dos parâmetros  $n$  e  $\omega_m$ .

Por outro lado, a equação de Friedmann (5.15) assume a forma

$$\frac{d\varepsilon_m}{dt} + 4H\varepsilon_m = -\frac{d\varepsilon_\Lambda}{dt}. \quad (5.29)$$

Para  $\varepsilon_\Lambda$  constante, obtém-se a solução usual  $\varepsilon_m \sim a^{-4}$ , enquanto que para uma  $\varepsilon_\Lambda$  dependente no tempo, temos a relação

$$\varepsilon_\Lambda = \frac{4-n}{n} \varepsilon_m, \quad (5.30)$$

onde agora  $0 < n < 4$ . As expressões (5.28) e (5.30) implicam que sempre que a matéria seja ultrarelativística, o raio e o horizonte de de Sitter  $l$  vai se expandir de acordo com

$$l^2 = \frac{c^2}{3\beta^2} \left( \frac{n}{4-n} \right) a^n. \quad (5.31)$$

## 5.5 Comentários

No contexto de uma cosmologia com constante cosmológica  $\Lambda$  não nula, podemos dizer que durante as épocas iniciais na evolução do Universo, isto é, durante o período inflacionário, a dinâmica do Universo foi regida por uma constante cosmológica positiva e muito grande. Num caso extremo de  $\Lambda$  indo para infinito ( $l \rightarrow 0$ ), este tipo de espaço poderia estar bem representado pelo espaço cone  $N$  que estudamos no capítulo 3. Flutuações quânticas, neste momento, poderiam dar origem a um espaço de de Sitter com raio finito  $l \neq 0$ . Se no tempo de Planck, por exemplo, o raio de de Sitter assume o valor  $l_P$ , o termo cosmológico assumiria o valor

$$\Lambda = 3/(l_P)^2 \simeq 1.2 \times 10^{66} \text{ cm}^{-2}.$$

A densidade de energia escura associada é

$$\varepsilon_\Lambda \simeq 10^{112} \text{ erg/cm}^3.$$

Nesse momento, a maior parte da energia do universo estaria na forma de energia escura. A idéia que quer se apresentar aqui é que o processo de decaimento da constante cosmológica em matéria, poderia eventualmente dar conta da diferença deste valor nas etapas primordiais, com o valor atual  $\varepsilon_\Lambda^0 \simeq 10^{-8} \text{ erg/cm}^3$ , sugerido pelas observações recentes. Neste processo,  $\Lambda$  decai, o Universo se expande, e a matéria é criada, dando origem assim a um Universo tipo FRW. Como já mencionado, a matéria não é criada num único instante no big bang, mas sim de maneira contínua durante o processo. Apesar do processo de criação de matéria, a energia total do sistema, que inclui a energia do termo cosmológico e a energia do campo gravitacional, é conservada durante o processo.

Modelos apresentando decaimento de  $\Lambda$  tem sido estudados extensamente na literatura [22]. A idéia principal desses trabalhos é oferecer um mecanismo plausível para explicar a diferença entre os valores do termo cosmológico nas

diferentes etapas da evolução do Universo, e a maioria deles tem um enfoque essencialmente fenomenológico do problema, baseado principalmente em argumentos dimensionais. No modelo apresentado aqui, não estamos abordando o problema baseados em argumentos fenomenológicos, mas apresenta-se um enfoque teórico baseado essencialmente nas equações de Friedmann, e na equação de estado para a matéria. Dado que um grau de liberdade dinâmico é adicionado, torna-se necessário um princípio adicional para regular a dinâmica deste grau de liberdade. Na forma apresentada neste capítulo, não temos este princípio adicional para completar o sistema de equações que regem a evolução do sistema. Desta forma, foi introduzida uma descrição plausível da evolução da densidade de energia com o fator de escala por meio da equação (5.17). No capítulo seguinte, vamos apresentar um princípio alternativo para justificar qualitativamente esta escolha.

Um ponto importante a observar é que a fim de permitir a formação das estruturas cósmicas da forma como as observamos na atualidade (galáxias, aglomerados de galáxias, etc), o Universo necessariamente tem que ter passado por um período de expansão não acelerada, o que indica que o termo cosmológico deve ter assumido valores pequenos nas etapas iniciais da história do Universo. Por outra parte, observações recentes indicam que o universo na atualidade apresenta um período de expansão acelerada. Apesar de não ter um entendimento apropriado dos princípios básicos que regulam a evolução do termo cosmológico, os fatos mencionados acima sugerem um Universo primordial caracterizado por um  $\Lambda$  muito grande, incluindo eventualmente a possibilidade de um  $\Lambda$  indo para infinito, seguido por uma época de decaimento de  $\Lambda$ , atingindo um valor mínimo mantido durante um certo período, e posteriormente entrando numa nova época de expansão acelerada, e um conseqüente incremento no valor de  $\Lambda$ .<sup>§</sup>

Agora, é frequentemente argumentado que se uma nova fase de expansão acelerada estivesse acontecendo de fato, o Universo poderia estar se dirigindo a um estado inóspito de solidão cósmica, ou eventualmente a um estado de completa desintegração, ou “big-rip” como tem sido chamado [5]. Porém, no esquema apresentado aqui, um crescimento em  $\Lambda$  implica que a matéria estaria sendo transformada em energia escura, e a continuar neste ritmo, este mecanismo poderia eventualmente levar em um estado em que toda a energia estaria em forma de energia escura. Em outras palavras, um crescimento em  $\Lambda$  não implica necessariamente que o Universo vai se dispersar, ou se esfriar, mas pode estar se dirigindo a um novo tipo de estado singular. Se vamos ao caso extremo de uma densidade infinita de energia escura, o estado do Universo estaria caracterizado por um espaço-tempo vazio, desconexo causalmente e conformalmente transitivo, como o espaço cone que descrevemos na seção 3.5. Naturalmente, se os efeitos quânticos excluem ou não a possibilidade do “colapso” total é uma questão em aberto.

Para finalizar, é claro que uma compreensão completa de todas as características que apontam as observações recentes, como por exemplo a coin-

---

<sup>§</sup>Naturalmente, afim de permitir um  $\Lambda$  crescente no tempo, o intervalo de valores para  $n$  necessariamente vai ser diferente da forma apresentada em (5.19).

cidência nas ordens de grandeza das densidades de energia  $\varepsilon_\Lambda$  e  $\varepsilon_m$  na atualidade, o porque da aceleração ter sido negativa no passado, e positiva hoje, requerem um modelo que de conta de forma precisa da evolução de  $\Lambda$ . O ponto importante a ser ressaltado aqui é que um termo cosmológico junto com uma prescrição apropriada para sua evolução temporal, tem suficientes parâmetros livres para permitir uma ampla variedade de cenários possíveis, incluindo as principais características apontadas pelas observações astronômicas, sem a necessidade de incluir qualquer outro ingrediente ou estrutura exótica para descrever de forma consistente a dinâmica da evolução do Universo.

## Capítulo 6

### Cosmologia e o princípio holográfico

#### 6.1 Introdução

Neste capítulo vamos continuar discutindo a dinâmica de uma cosmologia com um termo cosmológico dependente do tempo. Vamos interpretar a energia escura, não como um fluido, mas como uma quantidade puramente geométrica. Neste caso, não é introduzida uma equação de estado associada com o termo cosmológico já que ela tem um sentido puramente formal [10]. Esta hipótese está baseada no fato notável de que a equação de Einstein tem uma solução *sem fontes* com curvatura não nula: a solução de de Sitter. Que este espaço não esteja relacionado com nenhuma fonte material pode ser entendido como consequência de ele não ser assintoticamente chato. Dado que um espaço curvo tem uma densidade de energia intrínseca, isto significa que o espaço-tempo pode armazenar energia por si próprio. Esta energia armazenada, na forma de *energia escura*, não precisa estar ligada com uma fonte material. Adicionalmente, vamos implementar o *princípio holográfico* como um princípio adicional na descrição da dinâmica do termo cosmológico. Na seção 6.2, vamos introduzir o princípio holográfico, discutir os limites na entropia de um sistema, e motivar a relevância no contexto da cosmologia. Nas seções posteriores, vamos aplicar o modelo holográfico à energia escura, e analisar as características gerais das soluções resultantes no cenário do termo cosmológico interagindo com a matéria. Vamos mostrar como dentro deste modelo, podem ter cabida algumas das características das observações astronômicas recentes como a coincidência nas ordens de grandeza das densidades de energia escura e matéria ordinária, e a expansão acelerada do Universo. O interessante do modelo é que ele oferece um esquema simples para discutir as características observáveis sem ter que utilizar estruturas de maior complexidade, e ao mesmo tempo oferece possibilidades interessantes ao respeito do problema da constante cosmológica.

#### 6.2 O princípio holográfico

Nesta seção vamos discutir uma proposta para incorporar apropriadamente os efeitos da gravitação no contexto quântico. A idéia está baseada no comportamento termodinâmico peculiar dos buracos negros, particularmente na relação existente entre área e entropia e a consequente generalização da segunda

lei da termodinâmica. A generalização da segunda lei da termodinâmica implica mudanças significativas no comportamento da entropia para os sistemas macroscópicos e para as teorias efetivas que descrevem os graus de liberdade destes sistemas. Existem numerosas revisões do princípio holográfico na literatura recente com os mais diversos enfoques, uma revisão excelente com numerosas referencias encontra-se em [58].

### 6.2.1 Limites da entropia

Como foi discutido na seção 2.3.1, a segunda lei generalizada apresenta-se como uma solução ao problema da “perda” dos graus de liberdade de um sistema que é jogado no interior de um buraco negro. Para ter uma idéia de como a segunda lei generalizada leva num limite para a entropia de um sistema material, vamos pensar num processo em que um objeto é absorvido completamente por um buraco negro. Desta forma, para um observador externo os graus de liberdade do sistema material perdem-se no interior do horizonte. Porém, esta “perda” vem acompanhada de um acréscimo na área do horizonte compensando a entropia  $S_m$  do sistema absorvido. Para este tipo de processo, a segunda lei generalizada eq. (2.43), estabelece que

$$S_{final} = S_{BH} + \delta S_{BH} \geq S_{inicial} = S_{BH} + S_m,$$

isto é

$$S_m \leq \delta S_{BH}.$$

Para sistemas ordinários gravitacionalmente estáveis num espaço assintoticamente plano, Bekenstein argumentou que a segunda lei generalizada implica

$$S_m \leq 2\pi k_B ER/\hbar c, \quad (6.1)$$

sendo  $E$  a energia do sistema, e  $R$  o raio da menor esfera que circunscreve o sistema. A expressão (6.1) é conhecida como *limite de Bekenstein* para a entropia de um sistema material. É importante observar que o limite de Bekenstein é uma restrição para o número de graus de liberdade de um sistema material arbitrário contido dentro de uma região com raio característico  $R$  independente da sua natureza ou complexidade. Este limite é consequência direta da segunda lei da termodinâmica.

Um outro tipo de processo no qual um sistema arbitrário sofre colapso gravitacional e se transforma num buraco negro leva a um outro tipo de limite dado por

$$S_m \leq k_B A/4l_P^2, \quad (6.2)$$

onde  $A$  é a área da menor esfera que circunscreve o sistema\*. Este limite chamado de *limite esférico*, é mais próximo da formulação moderna do *limite covariante* [53], o qual em vez de contar o número de graus de liberdade dentro da região espacial, conta o número de graus de liberdade dentro da região

---

\*Deve-se notar o imenso valor que acompanha a área. Esta expressão pode ser entendida como se a área  $A$  estivesse sendo dividida em pequenas celas cuja área é da ordem da área de Planck  $A_P \sim l^2$

espaço-temporal das *folhas de luz* gerada pela borda da região contendo o sistema. Este limite é mais apropriado para aplicações na cosmologia [52, 53].

Independente dos detalhes técnicos envolvidos, o que se deve ser observado nestes limites é que eles implicam uma restrição para o conteúdo de graus de liberdade de um sistema restrito pela área da superfície da região espaço-temporal que contem o sistema. Isto aponta para a existência de um vínculo entre o número de graus de liberdade de um sistema e uma característica geométrica da região espaço-temporal que o contém. Naturalmente, é de se esperar que uma região espaço-temporal não tenha uma capacidade arbitrária para a armazenagem de graus de liberdade, mas o que se espera também é que o conteúdo de informação de um sistema seja extensivo e limitado pelo volume, não pela área da superfície que contém o sistema, como sugere a expressão (6.2) por exemplo. Este tipo de restrição no conteúdo de informação dentro de uma região do espaço-tempo é o que está por trás do *princípio holográfico*, formulado inicialmente por 't Hooft e Susskind [9]. A proposta indica que as teorias de campo locais, as quais apresentam um comportamento extensivo na entropia, fazem uma sobrecontagem excessiva dos graus de liberdade quânticos do sistema.

### 6.2.2 Teorias efetivas e os limites da entropia

Vamos discutir as implicações do princípio holográfico na descrição das teorias efetivas que descrevem a física de partículas. A discussão apresentada nesta seção está baseada fundamentalmente na ref. [54].

É importante sinalar que a descrição dos fenômenos físicos fundamentais pode ser obtida mediante uma teoria efetiva de campos com um “cutoff” ultravioleta (UV) menor do que a escala de Planck sempre que todos os momentos envolvidos sejam suficientemente pequenos comparados com uma potência apropriada deste cutoff. Para teoria efetiva numa caixa com comprimento característico  $L$  e um cutoff UV  $\Lambda_{UV}$  a entropia escala de forma extensiva com o volume da caixa  $S_M \sim L^3 \Lambda_{UV}^3$ . Porém, como foi discutido antes, em sistemas onde os efeitos gravitacionais são dominantes, o limite proposto para a entropia apresenta o comportamento não extensivo  $S_m \sim L^2$ . Para conciliar estas duas visões, Cohen *et al* [54] propuseram uma relação entre o cutoff UV e o cutoff infravermelho (IV) nas teorias de campo efetivas. O argumento é como segue: o limite holográfico da entropia deve ser satisfeito numa teoria de campos efetiva se o volume do sistema é limitado de acordo com

$$L^3 \Lambda_{UV}^3 \lesssim S_{BH} \equiv \pi L^2 M_P^2, \quad (6.3)$$

sendo  $S_{BH}$  a entropia de um buraco negro de raio  $L$ , e  $M_P$  a massa de Planck. Para obedecer esta restrição, o comprimento  $L$  que age como um cutoff IV, não pode ser mais escolhido independente do cutoff UV. Sendo assim, existe uma relação de escala entre estes dois cutoffs na forma

$$L \sim \Lambda_{UV}^{-3}.$$

Apesar do limite (6.3) ser pouco convencional, é de se esperar que as teorias locais efetivas não sejam apropriadas para descrever estados de partículas



cujo volume seja menor do que o volume correspondente ao seu raio de Schwarzschild. Uma teoria efetiva local que satura a relação (6.3) necessariamente vai incluir estados cujo raio de Schwarzschild é muito maior do que o tamanho do parâmetro da caixa  $L$ . Para ver isto, temos que ter em conta que uma teoria efetiva descreve razoavelmente bem um sistema a temperatura finita  $T$ , sempre que  $T \leq \Lambda_{UV}$ ; assim, quando  $T \gg 1/L$ , este sistema possui energia térmica  $E \sim L^3 T^4$  (a relação de Steffan-Boltzman), e a entropia ( $S_m = \partial E / \partial T$ ) escala com  $S_m \sim L^3 T^3$ . Assim, quando a expressão (6.3) é saturada em  $T \sim (M_P^2/L)^{1/3}$ , o correspondente raio de Schwarzschild ( $L_S = 2M/M_P^2$ ) do sistema seria  $L_S \sim L(LM_P)^{2/3} \gg L$ .

Para contornar este problema, Cohen *et al* propuseram um limite ainda mais restritivo ao cutoff IV  $1/L$  de forma todos os estados dentro do raio de Schwarzschild sejam excluídos. A energia contida no interior do raio de Schwarzschild é  $E_S = L_S M_P^2/2$ , a máxima energia (isto é quando  $T = \Lambda_{UV}$ ) do sistema em uma teoria efetiva é  $E_{eff} \sim L^3 \Lambda_{UV}^4$ . Desta forma, a condição de excluir todos os estados dentro do raio de Schwarzschild se expressa da seguinte forma:

$$L^3 \Lambda_{UV}^4 \lesssim L M_P^2. \quad (6.4)$$

Em termos da densidade de energia, ele assume a forma

$$\varepsilon \lesssim M_P^2/L^2. \quad (6.5)$$

A imposição deste tipo de limites implica uma restrição na contagem de graus de liberdade na descrição de um sistema. Vimos que a motivação principal destes limites é poder levar em conta de forma apropriada os efeitos da gravitação na descrição de um sistema ao nível quântico. Ao mesmo tempo, esta diminuição no número de graus de liberdade relevantes é de especial interesse no *problema da constante cosmológica*, onde aparece uma diferença enorme entre as estimativas teóricas calculadas com teorias efetivas locais e o valor observado atualmente para a energia do vácuo. Esta possibilidade foi apontada em [54, 59].

Este tipo de comportamento na densidade de energia exibido na relação (6.5) levou ao Li [55] propor um modelo para a densidade de energia escura exibindo este comportamento: *um modelo holográfico para a energia escura!* Posteriormente, Pavón e Zimdhal [56] consideraram este tipo de modelo num cenário com energia escura interagindo com a matéria, e mostraram que escolhendo o parâmetro característico do sistema como sendo o inverso do parâmetro de Hubble  $H$ , podia-se dar conta da coincidência nas ordens de grandeza da energia escura e da matéria na atualidade.

Continuando nesta linha, vamos utilizar o *modelo holográfico para a energia escura* no cenário de um termo cosmológico puramente geométrico e dependente no tempo como foi indicado na introdução deste capítulo.

### 6.3 Holografia e modelos com $\Lambda$ dependente do tempo

Vamos iniciar lembrando as equações de FRW no contexto de um termo cosmológico dependente no tempo:

$$\dot{a}^2 = \kappa^2 c^2 [\varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda] a^2 \quad (6.6)$$

$$\ddot{a} = \kappa^2 c^2 [\varepsilon_\Lambda - \frac{1}{2}(1 + 3\omega)\varepsilon_m] a \quad (6.7)$$

$$\dot{\varepsilon}_m + 3H(1 + \omega)\varepsilon_m = -\dot{\varepsilon}_\Lambda. \quad (6.8)$$

Como foi enfatizado no capítulo anterior, este sistema apresenta três variáveis independentes e só duas equações independentes. No capítulo anterior fizemos uma escolha “plausível” para o comportamento da densidade de energia da matéria por meio da equação (5.17), mas foi enfatizado que esta é uma escolha feita à mão pela semelhança com a solução do caso com termo cosmológico constante. Segundo a idéia do princípio holográfico apresentada na seção anterior, vamos usar um modelo no qual a densidade de energia escura escala com a área da superfície que delimita o sistema, em vez de ter dependência com o volume. Desta forma, vamos assumir o comportamento

$$\varepsilon_\Lambda \leq b \kappa^{-2} L^{-2} \quad (6.9)$$

para a densidade de energia escura. Aqui  $b$  é um parâmetro adimensional livre, e  $L$  é um parâmetro de comprimento característico do sistema. A fim de ter uma densidade de energia escura positiva, a condição  $b > 0$  deve ser satisfeita. O passo seguinte é a escolha de  $L$ . Uma escolha natural seria identificá-lo com o inverso do raio de Hubble:  $L = cH^{-1}$ . Além de ser a escolha mais simples, ele fornece um valor para a densidade de energia do vácuo que é comparável com as observações atuais [59]. Neste caso, a condição (6.9) pode se expressar na forma

$$\varepsilon_\Lambda \leq b c^{-2} \kappa^{-2} H^2. \quad (6.10)$$

Usando o fato de que  $b$  é um parâmetro livre, é possível saturar a desigualdade impondo restrições adicionais a  $b$ . Desta forma, uma equação adicional é obtida, e o sistema de equações (6.6-6.8) pode ser resolvido de forma fechada em termos do parâmetro holográfico  $b$ . A solução para as densidades de matéria e de energia escura é, em consequência,

$$\varepsilon_m = \alpha a^{-3(1+\omega)(1-b)} \quad (6.11)$$

e

$$\varepsilon_\Lambda = \frac{b}{1-b} \alpha a^{-3(1+\omega)(1-b)}, \quad (6.12)$$

com  $\alpha$  uma constante de integração. Elas satisfazem a relação

$$\varepsilon_m = \frac{1-b}{b} \varepsilon_\Lambda. \quad (6.13)$$

Agora, a fim de preservar a positividade de  $\varepsilon_m$ , vemos que da Eq. (6.13) obtemos a restrição  $b < 1$ . O parâmetro holográfico  $b$  fica então restrito no intervalo

$$0 < b < 1. \quad (6.14)$$

Para um valor apropriado de  $b$  dentro deste intervalo, a relação (6.13) pode incorporar como uma característica do modelo a igualdade na ordem de grandeza das densidades de energia escura e a matéria, conhecida como o *problema da coincidência*.

Para completar o análise anterior, vamos apresentar a forma explícita das expresões para a evolução da função de Hubble e do fator de escala, as quais são dadas por

$$H = \frac{H_0}{1 + \frac{3}{2}H_0(1+\omega)(1-b)(t-t_0)} \quad (6.15)$$

e

$$a = a_0 \left[ 1 + \frac{3}{2}H_0(1+\omega)(1-b)(t-t_0) \right]^{2/[3(1+\omega)(1-b)]}. \quad (6.16)$$

Como consequência, as densidades de matéria e energia escura escalam da forma

$$\varepsilon_m \sim \varepsilon_\Lambda \sim \left[ 1 + \frac{3}{2}H_0(1+\omega)(1-b)(t-t_0) \right]^{-2}. \quad (6.17)$$

## 6.4 Limites Holográficos

Vamos analisar agora as restrições impostas pelo princípio holográfico nos parâmetros do modelo, em particular no parâmetro arbitrário  $b$  introduzido no termo para a energia escura (6.9), e no parâmetro  $\omega$  da equação de estado da matéria. Enfatizamos que não vamos supor nenhuma restrição *a priori* no parâmetro  $\omega$ , o qual é livre para assumir valores arbitrários, inclusive na época atual. Desta forma, não estamos supondo que na época atual a dinâmica do Universo esteja sendo regida por um fluido em forma de poeira. Adicionalmente, vamos supor que estas equações são válidas para qualquer época da história do Universo, e consequentemente para qualquer fluido, ou ainda qualquer mistura de fluidos interagentes com o termo cosmológico. Isso significa que os limites que vamos obter têm validade em qualquer época da história do Universo. Deve ser enfatizado que a energia escura não será interpretada como um fluido, senão como uma entidade puramente geométrica para a qual não ha necessário de introduzir uma equação de estado [10].

### 6.4.1 Limites da energia

Impondo condições razoáveis ao sistema matéria + energia escura, vamos encontrar novos limites para os parâmetros livres do modelo. O primeiro conjunto de restrições são as assim chamadas *condições da energia*,<sup>†</sup> as quais no cenário de  $\Lambda$  interagindo com a matéria, devem se aplicar ao tensor de energia-momento total

$$\Theta_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu\nu}, \quad (6.18)$$

---

<sup>†</sup>Veja, por exemplo, [61]

onde

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon_m u_\mu u_\nu + p_m (g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) \quad (6.19)$$

é o tensor de energia-momento da matéria, e

$$\Lambda_{\mu\nu} = -\varepsilon_\Lambda g_{\mu\nu} \quad (6.20)$$

é o tensor de energia-momento associado ao termo cosmológico. Como consequência da identidade de Bianchi (5.3), temos que

$$\nabla_\mu \Theta^\mu{}_\nu = \nabla_\mu [T^\mu{}_\nu + \Lambda^\mu{}_\nu] = 0. \quad (6.21)$$

Usando a equação de estado da matéria  $p_m = \omega \varepsilon_m$ , assim como as equações (6.13), pode-se escrever

$$\Theta_{\mu\nu} = \varepsilon_m (1 + \omega) u_\mu u_\nu + \varepsilon_m \left( \omega - \frac{b}{1-b} \right) g_{\mu\nu}. \quad (6.22)$$

Como é bem conhecido, as condições para a energia são [61]:

1. *Condição nula para a energia:* para todo vetor tipo luz  $n^\nu$ ,

$$\Theta_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \geq 0, \quad (6.23)$$

o que significa que os raios de luz são enfocados pela matéria.

2. *Condição fraca para a energia:* para todo vetor tipo tempo  $v^\nu$ ,

$$\Theta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \geq 0. \quad (6.24)$$

3. *Condição Causal para a energia:* para todo vetor tipo tempo  $v^\nu$ ,

$$\Theta^\mu{}_\nu v_\mu \Theta^\nu{}_\alpha v^\alpha \leq 0, \quad (6.25)$$

que a grosso modo expressa o fato da matéria-energia não poder viajar mais rápido do que a luz.

Aplicadas ao tensor de energia-momento (6.22), obtemos da condição nula que

$$\omega \geq -1, \quad (6.26)$$

que é o resultado usual para matéria normal. Por outra parte, das condições fraca e causal, obtemos, respectivamente,

$$\Theta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = \varepsilon_m (1 + \omega) (u^\mu v_\mu)^2 + \varepsilon_m \left( \omega - \frac{b}{1-b} \right) v^2 \geq 0 \quad (6.27)$$

e

$$\begin{aligned} \Theta^\mu{}_\nu v_\mu \Theta^\nu{}_\alpha v^\alpha &= \varepsilon_m^2 \left[ (1 + \omega)^2 u^2 (u^\mu v_\mu)^2 + \right. \\ &\quad \left. 2(1 + \omega) \left( \omega - \frac{b}{1-b} \right) (u^\mu v_\mu)^2 + \left( \omega - \frac{b}{1-b} \right)^2 v^2 \right] \leq 0. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Dado que estas relações são válidas para qualquer vetor tipo-tempo  $v^\mu$ , as duas condições implicam que

$$\omega \leq \frac{b}{1-b}. \quad (6.29)$$

Esta é uma característica nova do modelo holográfico interagente. De fato, no contexto da relatividade geral sem o termo holográfico interagente, a condição de positividade da energia requer que  $\omega < 1$  afim de preservar a causalidade. Em consequência é obtido um novo tipo de restrição causal regulada pelo parâmetro holográfico  $b$ . O fato do termo cosmológico variável modificar a estrutura causal pode ser entendido melhor se observarmos que os horizontes causais de todo observador devem mudar quando a constante cosmológica decai, dando origem à criação de matéria.

#### 6.4.2 Limites para a entropia

Existem outros limites e relações para os parâmetros  $b$  e  $\omega$  que podem ser obtidos do princípio holográfico. Como exemplo, apresentamos nesta seção o limite holográfico para a entropia seguindo o esquema adotado em [52] para soluções cosmológicas homogêneas. Para o horizonte de partícula

$$R_H(t) = \int_0^t \frac{dt}{a(t)}, \quad (6.30)$$

o princípio holográfico afirma que a entropia total  $\sigma + \sigma_m = \sigma_\Lambda$  dentro do horizonte não excede a área do horizonte:

$$\sigma R_H^3 < (a R_H)^2. \quad (6.31)$$

Utilizando o fator de escala  $a(t)$  da equação (6.16), este princípio implica que

$$\frac{\sigma}{a_0^3} H_0 \beta (\beta - 1) (1 + H_0 \beta t)^{\frac{3(\beta-1)}{\beta}-2} < 1, \quad (6.32)$$

onde  $\beta = 3(1 + \omega)(1 - b)/2$ . Agora, supondo uma densidade de entropia na forma (em [62] pode-se encontrar a expressão para o caso de  $\Lambda$  constante)

$$\sigma \sim \varepsilon^{\gamma/(1+\omega)} \sim a^{-3\gamma(1-b)}, \quad (6.33)$$

onde  $\gamma > 0$  é outro parâmetro indeterminado. Esta expressão vale indistintamente para  $\varepsilon = \varepsilon_m$  ou para  $\varepsilon = \varepsilon_\Lambda$ . Juntando tudo obtemos

$$\frac{k_0}{a_0^3} H_0 \beta (\beta - 1) a_0^{-3\gamma(1-b)} (1 + H_0 \beta t)^{-2 + \frac{3(\beta-1)}{\beta} - \frac{3\gamma(1-b)}{\beta}} < 1, \quad (6.34)$$

onde  $k_0$  é uma constante conhecida determinada pelos outros parâmetros do modelo. No limite em que o tempo vai para o infinito (afim de garantir a validade do limite para um tempo arbitrariamente alto), obtemos que:

$$\omega < \frac{b}{1-b} + \frac{1}{1-b} + 2\gamma. \quad (6.35)$$

Dado que  $\gamma > 0$ , este limite para  $\omega$  é menos restritivo que aquele que foi obtido com as condições para a energia, e não vamos, por esta razão, considerá-lo.

### 6.4.3 Regime Acelerado

Tomando a segunda derivada no tempo do fator de escala (6.16), e supondo que ela seja positiva, obtemos que

$$\omega < \frac{b}{1-b} - \frac{1}{3(1-b)}. \quad (6.36)$$

Esta é a condição para um Universo em expansão acelerada. É interessante notar que no presente caso, o parâmetro  $\omega$  não é necessariamente nulo, o que significa que a expansão acelerada pode acontecer em qualquer época, mesmo quando a matéria dominante não é poeira.<sup>‡</sup> Dado que  $b < 1$ , o segundo termo no lado direito da equação (6.36) é positivo, e consequentemente ele sempre obedece os limites obtidos das condições para a energia e para a entropia. O ponto importante para ressaltar aqui é que a expansão acelerada não está determinada somente pela energia escura, como acostuma se argumentar; a expansão acelerada é obtida como uma consequência do carácter interagente e holográfico da energia escura. De fato, a condição para a expansão acelerada na desigualdade (6.36) é regulada pelo parâmetro holográfico  $b$ . Desta forma, vemos que para os parâmetros dentro dos limites impostos pelas restrições na energia e na entropia, é possível obter um regime de expansão acelerada, como é indicado pelas observações experimentais. Finalmente, podemos observar que no caso  $b < 1/3$ , o parâmetro  $\omega$  torna-se negativo. Porém, esta situação a qual representa um tipo de matéria exótica com pressão negativa, não é necessária para produzir aceleração. De fato, para  $1/3 < b < 1$ ,  $\omega$  é negativo e a aceleração é ainda positiva.

## 6.5 Comentários

O resultado principal deste capítulo, é que a energia escura interagindo com a matéria pode eventualmente “responder” algumas das perguntas-chaves da cosmologia contemporânea desde que se adote a hipótese de que a energia escura tem um comportamento “holográfico”. De fato, nas equações (6.13) e (6.36) pode-se observar que para alguns valores permitidos dos parâmetros do modelo é possível obter simultaneamente a “coincidência” na ordem de grandeza das densidades de energia escura e matéria e o regime de expansão acelerada do Universo. Não são necessárias estruturas adicionais além do carácter holográfico da energia escura. Adicionalmente, dado que a energia escura está sendo interpretada como uma entidade geométrica, não é necessário introduzir uma equação de estado de um fluido exótico. Neste modelo, energia escura e matéria podem se transformar uma na outra, geometria em matéria e vice-versa. Em particular, é possível conceber que tal cenário dinâmico para a energia escura pode estar conectado com uma configuração inicial para o Universo do tipo descrito pela geometria do espaço cone  $N$ .

---

<sup>‡</sup>Esta é uma diferença importante com relação aos trabalhos anteriores [55, 56], nos quais se assume que  $\omega = 0$ .

Finalmente, é necessário mencionar que este modelo somente aponta uma perspectiva para encaixar num marco consistente e simples algumas das características da cosmologia atual. Não é um modelo completo, mas apresenta suficientes características interessantes para motivar um estudo mais detalhado no futuro.

## Capítulo 7

### Conclusões e comentários finais

Nesta tese, estudamos alguns aspectos fundamentais relacionados à constante cosmológica. Um primeiro resultado importante é que a presença de uma constante cosmológica modifica a noção de transitividade do espaço-tempo. De fato, em vez das translações, o espaço de de Sitter é transitivo sob uma combinação de translações e transformações conformes próprias. Como consequência, as noções de momento e energia, as quais estão intimamente relacionadas ao espaço-tempo, vão ser modificadas. Naturalmente que, devido ao pequeno valor da constante cosmológica, estas modificações são pequenas. No entanto, mesmo pequenas, são mudanças conceituais que se propagam por todas as áreas da Física.\* Por exemplo, a definição de campo relativístico muda: em vez de ser uma representação do grupo de Poincaré, um campo deve ser entendido como uma representação do grupo de de Sitter. A mecânica estatística também deve mudar, bem como a própria mecânica quântica, cujas relações de incerteza passam a envolver novos termos vindos das mudanças das definições de energia e momento [45].

Além das mudanças descritas acima, ocorre também uma mudanças fundamentais na cinemática e na geometria do espaço-tempo. De fato, como na presença de  $\Lambda$  o espaço de Minkowski não é mais solução da equação de Einstein, a relatividade especial não é mais aquela baseada no grupo de Poincaré, mas sim uma relatividade baseada no grupo de de Sitter. Um ponto crucial é que esta relatividade inclui uma escala invariante de comprimento  $l$ . Como a velocidade da luz  $c$  também se mantém como uma escala invariante, este tipo de teoria apresenta duas escalas invariantes. Ela é, portanto, um novo tipo de “doubly (ou deformed) special relativity”, com a importante diferença de manter inalterada a simetria de Lorentz. Desenvolvemos esta nova relatividade, e estudamos algumas de suas aplicações e consequências físicas [30].

Numa tentativa de entender o comportamento das noções físicas relevantes nos regimes de grandes valores de  $\Lambda$ , estudamos o limite formal  $\Lambda \rightarrow \infty$  [29]. O resultado é um espaço-tempo maximalmente simétrico, transitivo sob transformações conformes próprias, onde a noção métrica usual não existe. Consequentemente, a noção de causalidade neste espaço também é indefi-

---

\*Além disso, se o Universo passou por uma fase de grandes valores da constante cosmológica, como parece ter sido o caso durante a fase inflacionária, essas mudanças podem ter desempenhado um papel importante.



nida, dado que o horizonte causal do espaço de de Sitter adquire um raio nulo, reduzindo o domínio causal de todos os observadores neste espaço a um único ponto. Este espaço apresenta características interessantes desde o ponto de vista termodinâmico. É um espaço com temperatura infinita, entropia zero, e densidade de energia infinita. Com estas características ele se ajusta muito bem ao que se esperaria de um estado inicial singular para o Universo no modelo do big bang. Porém, como enfatizamos anteriormente, este é simplesmente um limite formal, pois efeitos quânticos podem evitar que este limite seja atingido.

Tendo em mente que o termo cosmológico, na atualidade, apresenta um valor muito menor do valor adquirido no período inflacionário, é natural procurar um mecanismo de decaimento, ou em termos mais gerais, uma dinâmica para ele. Estudamos assim um modelo simples baseado numa interpretação geométrica para o termo cosmológico, permitindo a interação entre matéria e energia escura, mantendo a energia total constante. Vimos que os parâmetros introduzidos são suficientes para dar conta das principais características assinaladas pelas observações recentes, sem necessidade de considerar estruturas adicionais na descrição da evolução do termo cosmológico. Ainda neste contexto, apresentamos uma nova possibilidade de caminho ao “colapso gravitacional” onde o estado final da evolução do Universo é representado por um espaço-tempo singular cônico, onde toda a energia encontra-se na forma de energia escura [37].

Finalmente, incorporamos uma proposta recente que limita o valor da energia escura por meio do *princípio holográfico* [63]. A principal característica deste modelo é que ele introduz uma modificação nas condições causais que limitam a equação de estado para a matéria. Esta modificação é de caráter intrinsecamente holográfico, já que ela depende diretamente do parâmetro holográfico introduzido no modelo. Ao mesmo tempo, a incorporação do princípio holográfico na descrição da energia escura abre uma nova possibilidade para estabilizar as flutuações da energia do vácuo, diminuindo de maneira drástica o número de graus de liberdade que contribuem com a energia do vácuo. Naturalmente, este não é um modelo completo para a dinâmica do Universo. O interesse fundamental dele é criar um marco consistente, onde podem ser discutidas as principais características e problemas da cosmologia atual. Certamente, é necessário ainda muito trabalho para incorporar de forma completa e consistente todos os dados observacionais.

## Apêndice A

### Geradores de simetria nos diferentes sistemas de coordenadas

Aqui, vamos apresentar expressões explícitas para os geradores de simetria nas coordenadas globais, planas e estáticas descritas no capítulo 1. Eles são de relevância no estudo da estrutura assintótica e na definição de condições de fronteira consistentes com as cargas conservadas no espaço. Também apresentam utilidade no estudo da geometria perto do horizonte de eventos.

#### A.1 Coordenadas globais

Neste sistema de coordenadas, os geradores do grupo de simetria  $J_{AB}$  tomam a forma:

$$J_{ij} = \left( \omega^i \frac{\partial}{\partial \omega^j} - \omega^j \frac{\partial}{\partial \omega^i} \right),$$

com  $(i, j = 1, \dots, 4)$ . Por outra parte, os geradores  $J_{0i}$  são

$$\begin{aligned} J_{01} &= -\tanh(c\tau/l) \sin \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{l}{c} \cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial \tau} \\ J_{02} &= \tanh(c\tau/l) \left( \cos \theta_1 \cos \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) + \frac{l}{c} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \frac{\partial}{\partial \tau} \\ J_{03} &= \tanh(c\tau/l) \left( \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_3}{\sin \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \theta_3}{\sin \theta_1 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \right) + \frac{l}{c} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \frac{\partial}{\partial \tau} \\ J_{04} &= \tanh(c\tau/l) \left( \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\cos \theta_2 \sin \theta_3}{\sin \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} - \right. \\ &\quad \left. \frac{\sin \theta_3}{\sin \theta_1 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \right) + \frac{l}{c} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \frac{\partial}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

#### A.2 Coordenadas planas

Nestas coordenadas, os  $J_{AB}$  podem ser classificados da forma  $(J_{ij}, J_{0i}, J_{4i}, J_{04})$  com  $i, j, \dots = 1, 2, 3$ . Desta forma temos:

$$J_{ij} = x_i \frac{\partial}{\partial x^j} - x_j \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\begin{aligned}
J_{0i} &= -\frac{1}{2l}(x^2\delta_i^k - 2x_i x^k)\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{l}{2}(\exp(2ct/l) - 1)\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{x_i}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\
J_{4i} &= \frac{1}{2l}(x^2\delta_i^k - 2x_i x^k)\frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{l}{2}(\exp(2ct/l) + 1)\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{x_i}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\
J_{04} &= \frac{l}{c}\frac{\partial}{\partial t} + x^k\frac{\partial}{\partial x^k}.
\end{aligned}$$

O operador  $J_{04}$  apresenta uma mistura entre as translações no tempo e as transformações de escala. Ele gera a simetria  $t \rightarrow t + \alpha$ ,  $\vec{x} \rightarrow \exp(c\alpha/l)\vec{x}$ . Também são úteis as combinações lineares:

$$\begin{aligned}
L_{i+} &= J_{4i} + J_{0i} = -l\partial_i \\
L_{i-} &= J_{4i} - J_{0i} = -\frac{1}{l}(x^2\delta_i^k - 2x_i x^k)\frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{2x_i}{c}\frac{\partial}{\partial t} + l\exp(ct/l)\frac{\partial}{\partial x^i}.
\end{aligned}$$

### A.3 Coordenadas estáticas

Vamos fazer uma decomposição igual ao caso anterior para os  $J_{AB}$ . Para os  $J_{ij}$ , os quais refletem a simetria sob rotações, temos

$$\begin{aligned}
J_{12} &= \cos\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_1} - \sin\theta_2\cot\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_2} \\
J_{13} &= \cos\theta_2\cot\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_2} + \sin\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_1} \\
J_{23} &= \frac{\partial}{\partial\theta_2}.
\end{aligned}$$

Para os  $J_{0i}$  temos:

$$\begin{aligned}
J_{01} &= -lH(r)\sinh(ct/l)\left(\cos\theta_1\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) - \\
&\quad - \frac{r\cos\theta_1}{cH(r)}\cosh(ct/l)\frac{\partial}{\partial t} \\
J_{02} &= lH(r)\sinh(ct/l)\left[\sin\theta_1\cos\theta_2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\left(\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2} - \cos\theta_2\cos\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)\right] - \\
&\quad - \frac{r\sin\theta_1\cos\theta_2}{cH(r)}\cosh(ct/l)\frac{\partial}{\partial t} \\
J_{03} &= -lH(r)\sinh(ct/l)\left[\sin\theta_1\sin\theta_2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2} + \sin\theta_2\cos\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)\right] - \\
&\quad - \frac{r\sin\theta_1\sin\theta_2}{cH(r)}\cosh(ct/l)\frac{\partial}{\partial t},
\end{aligned}$$

onde  $H(r) = (1 - r^2/l^2)^{1/2}$ . Para os  $J_{4i}$  temos:

$$\begin{aligned}
J_{41} &= lH(r)\cosh(ct/l)\left(\cos\theta_1\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) + \\
&\quad + \frac{r\cos\theta_1}{cH(r)}\sinh(ct/l)\frac{\partial}{\partial t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{42} &= lH(r) \cosh(ct/l) \left[ \sin \theta_1 \cos \theta_2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \left( \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} - \cos \theta_2 \cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) \right] + \\
&\quad + \frac{r \sin \theta_1 \cos \theta_2}{cH(r)} \sinh(ct/l) \frac{\partial}{\partial t} \\
J_{43} &= lH(r) \cosh(ct/l) \left[ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \sin \theta_2 \cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) \right] + \\
&\quad + \frac{r \sin \theta_1 \sin \theta_2}{cH(r)} \sinh(ct/l) \frac{\partial}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Finalmente, o gerador das translações no tempo é

$$J_{04} = \frac{l}{c} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Também são de interesse as combinações lineares:  $J_{i\pm} = J_{0i} \pm J_{4i}$ :

$$\begin{aligned}
J_{1\pm} &= \exp(\mp ct/l) \left[ \pm lH(r) \left( \cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) - \frac{r \cos \theta_1}{cH(r)} \frac{\partial}{\partial t} \right] \\
J_{2\pm} &= \pm \exp(\mp ct/l) lH(r) \left[ \sin \theta_1 \cos \theta_2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \left( \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} - \cos \theta_2 \cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) \right] - \\
&\quad - \exp(\mp ct/l) \frac{r \sin \theta_1 \cos \theta_2}{cH(r)} \frac{\partial}{\partial t} \\
J_{3\pm} &= \pm \exp(\mp ct/l) lH(r) \left[ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \sin \theta_2 \cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) \right] - \\
&\quad - \exp(\mp ct/l) \frac{r \sin \theta_1 \sin \theta_2}{cH(r)} \frac{\partial}{\partial t}.
\end{aligned}$$

## Referências

- [1] A.G. Riess *et al*, Astron. J. **116**, 1009 (1998); S. Perlmutter *et al*, Astrophys. J. **517**, 565 (1999); A. G. Riess *et al*, Astrophys. J. **607**, 665 (2004); P. Astier *et al*, Astron. Astrophys. **447**, 31 (2006).
- [2] A.D. Miller *et al*, Ap. J. Lett. **524**, (1999) L1; S. Hanany *et al*, Ap. J. Lett. **545**, 5 (2000) (MAXIMA); P. de Bernardis *et al*, Nature **404**, 955 (2000) (BOOMERanG); D. N. Sperger *et al*, Ap. J. Supp. **148**, 175 (2003)(WMAP); D. N. Sperger *et al*, *Wilkinson microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Results: Implications for Cosmology*, arXiv: astro-ph/0603449.
- [3] S. M. Carroll, “Why is the Universe Accelerating?”, *in Measuring and Modeling the Universe*, ed. by W. L. Freedman, (Cambridge University Press, Cambridge, 2003), arXiv: astro-ph/0310342.
- [4] A. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology* (Harwood, New York, 1990); E. Kolb and M. Turner, *The Early Universe* (Reading, Addison Wesley, 1990); A. Liddle and D. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [5] R.R. Caldwell, M. Kamionkowski and N.N. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 071301 (2003).
- [6] J. D. Barrow, Class. Quant. Grav. **21**, L79 (2004); J. D. Barrow, Class. Quant. Grav. **21**, 5619 (2004).
- [7] P. J. Steinhardt, in *Critical Problems in Physics* ed. by V.L. Fitch, D.R. Marlow (Princeton University Press, Princeton, 1977).
- [8] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989); S. M. Carroll, W. H. Press and E. L. Turner, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **30**, 499 (1992); V. Sahni and A. Starobinsky, Int. J. Mod. Phys. **D 9**, 373 (2000); S. M. Carroll, Liv. Rev. Rel. **4**, 1 (2001); P. J. Peebles and B. Ratra, Rev. Mod. Phys. **75**, 559 (2003).
- [9] G.’t Hooft, *Dimensional Reduction in Quantum Gravity*, in *Salam Festschrift: A Collection of Talks*, ed. by A. Ali, J. Ellis, S. Randjbar-Daemi (World Scientific, Singapore, 1993) arXiv: gr-qc/9310026; L. Susskind, J. Math. Phys. **36**, 6377 (1995), arXiv: hep-th/9409089.

- [10] S.W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [11] M. Spradlin, A. Strominger and A. Volovich, *Les Houches Lectures on de Sitter Space* (Section 3), in *Unity from Duality: Gravity, Gauge Theory and Strings*, LXXVI Les Houches Summer School, August 2001, arXiv: hep-th/0110007.
- [12] Y. Kim, C. Young Oh, N. Park, *Classical Geometry of De Sitter Spacetime : An Introductory Review*, arXiv: hep-th/0212326.
- [13] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, Commun. Math. Phys.**31**, 161 (1973).
- [14] W. Israel, Phys. Rev. **164**, 1776 (1967); W. Israel, Commun. Math. Phys. **8**, 245 (1968); B. Carter, Phys. Rev. Lett. **26**, 331 (1970); S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **25**, 152 (1972).
- [15] S. W. Hawking, Phys. Rev. Lett. **26**, 1344 (1971).
- [16] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **7**, 2333 (1973); J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **9**, 3292 (1974).
- [17] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **7**, 2333 (1973).
- [18] S. W. Hawking, Comm. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [19] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, Phys. Rev. D **15**, 2738 (1977).
- [20] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer* 2nd ed. (Addison-Wesley, Redwood, 1989).
- [21] E. Mottola, Phys. Rev. D **33**, 1616 (1986); R. Bousso, *Adventures in the Sitter Space* (Section 3), contribution to the Festschrift honoring S. Hawking on his 60th birthday, arXiv: hep-th/0205177.
- [22] O. Bertolami, N. Cim. **B 93**, 36 (1986); J. C. Carvalho, J. A. S. Lima and I. Waga, Phys. Rev. D **46**, 2404 (1992); L. P. Chimento and D. Pavon, Gen. Rel. Grav. **30**, 643 (1998); J. M. Overduin and F.I. Cooperstock, Phys. Rev. D **58**, 043506 (1998); T. Harco and M. K. Mak, Gen. Rel. Grav. **31**, 849 (1999); R. G. Vishwakarma, Class. Quant. Grav. **18**, 1159 (2001); R. G. Vishwakarma, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **331**, 776 (2002); R. G. Vishwakarma, Class. Quant. Grav. **19**, 4747 (2002); S. Carneiro, *Decaying Lambda Cosmology with Varying G*, talk presented at 10th Marcel Grossmann Meeting, Rio de Janeiro, Brazil, July, 20-26/2003, arXiv: gr-qc/0307114.
- [23] E. İnönü and E. P. Wigner, Proc. Natl. Acad. Scien. **39**, 510 (1953).
- [24] E. İnönü in *Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics*, ed. by F. Gürsey, Istanbul Summer School of Theoretical Physics (New York: Gordon and Breach)

- [25] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications* (New York: Wiley, 1974)
- [26] R. Aldrovandi, A. L. Barbosa, L. C. B. Crispino and J. G. Pereira, *Class. Quant. Grav.* **16**, 495 (1999).
- [27] R. Aldrovandi, A. L. Barbosa, M. Calçada and J. G. Pereira, *Found. Phys.* **33**, 613 (2003), arXiv: gr-qc/0105068.
- [28] R. Aldrovandi and J. G. Pereira *A Second Poincaré Group*, in *Topics in Theoretical Physics: Festschrift for A. H. Zimerman*, ed. by H. Aratyn *et al* (São Paulo: Fundação IFT, 1998), arXiv: gr-qc/9809061.
- [29] R. Aldrovandi, J. P. Beltrán Almeida and J. G. Pereira, *J. Geom. Phys.* **56**, 1042 (2006), arXiv: gr-qc/0403099.
- [30] R. Aldrovandi, J. P. Beltrán Almeida and J. G. Pereira, *de Sitter special relativity*, arXiv: gr-qc/0606122.
- [31] F. Gürsey, in *Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics*, ed. by F. Gürsey, Istanbul Summer School of Theoretical Physics (New York: Gordon and Breach, 1962)
- [32] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972).
- [33] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics* (Singapore: World Scientific, 1995).
- [34] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* (Interscience, New York, 1963).
- [35] H. Bacry and J. M. Lévy-Leblond, *J. Math. Phys.* **9**, 1605 (1967)
- [36] S. Coleman, *Aspects of Symmetry* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985)
- [37] R. Aldrovandi, J. P. Beltrán Almeida and J. G. Pereira, *Grav. Cosmol.* **11**, 277 (2005), arXiv: gr-qc/0312017.
- [38] E. Wigner, *Ann. Math.* **40**, 39 (1939).
- [39] G. Amelino-Camelia, *Lect. Not. Phys.* **541**, 1 (2000), arXiv: gr-qc/9910089; R. J. Protheroe and H. Meyer, *Phys. Lett.* **B 493**, 1 (2000); S. Sarkar, *Mod. Phys. Lett.* **A 17**, 1025 (2002), arXiv: gr-qc/0204092; D. V. Ahluwalia, *Mod. Phys. Lett.* **A 17**, 1135 (2002), arXiv: gr-qc/0205121; T. Jacobson, S. Liberati and D. Mattingly, *Phys. Rev.* **D 66**, 081302 (2002), arXiv: hep-ph/0112207; R. C. Myers and M. Pospelov, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 211601 (2003), arXiv: hep-ph/0301124; R. H. Brandenberger and J. Martin, *Int. J. Mod. Phys.* **A 17**, 3663 (2002), arXiv: hep-th/0202142.

- [40] G. Amelino-Camelia, Phys. Lett. **B 510**, 255 (2001), arXiv: hep-th/0012238; G. Amelino-Camelia, Int. J. Mod. Phys. **D 11**, 35 (2002), arXiv: gr-qc/0012051.
- [41] J. Kowalski-Glikman, in *Planck Scale Effects in Astrophysics and Cosmology*, ed. by G. Amelino-Camelia and J. Kowalski-Glikman, *Lect. Not. Phys.* **669**, 131 (2005), arXiv: hep-th/0405101; J. Kowalski-Glikman, in *Approaches to quantum gravity - toward a new understanding of space, time, and matter*, ed. by D. Oriti (2006), arXiv: gr-qc/0603022.
- [42] H. Y. Guo, C. G. Huang, Z. Xu and B. Zhuo, Phys. Lett. **A 331**, 1 (2004), arXiv: hep-th/0403171.
- [43] J. Kowalski-Glikman and S. Nowak, Class. Quant. Grav. **20**, 4799 (2003), arXiv: hep-th/0304101.
- [44] G. W. Gibbons and C. E. Patricot, Class. Quant. Grav. **20**, 5225 (2003), arXiv: hep-th/0308200.
- [45] R. Aldrovandi, J. P. Beltrán Almeida and J. G. Pereira, Int. J. Mod. Phys. **D 13**, 2241 (2004), arXiv: gr-qc/0405104.
- [46] S. Hossenfelder, Class. Quant. Grav. **23**, 1815 (2006), arXiv: hep-th/0510245.
- [47] A. J. Accioly, R. Aldrovandi, S. F. Novaes, D. Spehler and H. Mukai, Prog. Theor. Phys. **97**, 121 (1997).
- [48] C. Møller, *Ann. Phys. (NY)* **4**, 347 (1958).
- [49] B. Ratra and P. J. E. Peebles, Phys. Rev. **D 37**, 3406 (1998); J. Frieman, C. T. Hill and R. Watkins, Phys. Rev. **D 46**, 1226 (1992); J. Frieman, C. T. Hill, A. Stebbins and I. Waga, Phys. Rev. Lett. **75**, 2077 (1995); R. R. Caldwell, R. Dave and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **80**, 1582 (1998); I. Slatev, L. Wang and P.J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **82**, 896 (1999); P. Brax and J. Martin, Phys. Rev. **D 61**, 103502 (2000); A. Albrecht and C. Sorkis, Phys. Rev. Lett. **84**, 2076 (2000); V. Sahni and A. A. Starobinsky, Int. J. Mod. Phys. **D 9**, 373 (2000); L. Boyle, R. R. Caldwell and M. Kamionkowski, Phys. Lett. **B 545**, 17 (2002).
- [50] A.A. Starobinsky, Grav. Cosmol. **6**, 157 (2000); A. Shulz and M. J. White, Phys. Rev. **D 64**, 043514 (2001); R. R. Caldwell, Phys. Lett. **B 545**, 23 (2002); J. Hao and X. Li, Phys. Rev. **D 67**, 107303 (2003); L. P. Chimento and R. Lazkoz, Phys. Rev. Lett. **91**, 211301 (2003); S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Lett. **B562**, 147 (2003); P. Singh, M. Sami and N. Dadhich, Phys. Rev. **D 68**, 023522 (2003); J. Hao and X. Li, Phys. Rev. **D 68**, 083514 (2003); P. Elizalde and J. Quiroga, Mod. Phys. Lett. **A 19**, 29 (2004); P.F. González-Díaz, Phys. Lett. **B**



- 586**, 1 (2004); A. Feinstein and S. Jhingan, *Mod. Phys. Lett.* **A 19**, 457 (2004); E. Elizalde, S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rev.* **D 70**, 043539 (2004).
- [51] F. Hoyle and J.V. Narlikar, *Proc. Roy. Soc.* **A 290**, 162 (1966); J.V. Narlikar, *Introduction to Cosmology*, 3rd edition, (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
  - [52] R. Fischler and L. Susskind, *Holography and Cosmology*, arXiv: hep-th/9806039.
  - [53] R. Bousso, *JHEP* **06**, 028 (1999), arXiv: hep-th/9906022.
  - [54] A.G. Cohen, D.B. Kaplan and A.E. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4971 (1999).
  - [55] M. Li, *Phys. Lett.* **B603**, 1 (2004).
  - [56] D. Pavón and W. Zimdahl, *Phys. Lett.* **B 628**, 206 (2005); D. Pavón and W. Zimdahl, Holographic dark energy and present cosmic acceleration, Proceedings of the XXVIII Spanish Relativity Meeting, arXiv: hep-th/0511053.
  - [57] B. Mashhoon and P.S. Wesson, *Class. Quant. Grav.* **21**, 3611 (2004); E. Alvarez, “The infinite curvature limit of AdS/CFT”, arXiv: gr-qc/0401097.
  - [58] R. Bousso, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 825 (2002), arXiv:hep-th/0203101.
  - [59] S. Thomas, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 081301 (2002).
  - [60] R. Bousso, *JHEP* **11**, 038 (2000).
  - [61] R. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).
  - [62] W. Fischler, A. Loewy and S. Paban, *JHEP* **09**, 024 (2003).
  - [63] J. P. Beltrán Almeida and J. G. Pereira, *Phys. Lett.* **B 636**, 75 (2006), arXiv: gr-qc/0602103

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)