# Universidade de São Paulo

## Instituto de Física


# Quantização BRST de Teorias com Simetria de Gauge Sp(2,$R$)


João Eduardo Frederico

Orientador: Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles


*Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Física para a obtenção do título de Doutor em Ciências*

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles (IFUSP)
Prof. Dr. Marcelo O. C. Gomes (IFUSP)
Prof. Dr. Adilson José da Silva (IFUSP)
Prof. Dr. Denis Dalmazi (FEG-UNESP)
Prof. Dr. Nelson Braga (UFRJ)


São Paulo
2009

Aos meus pais Reynaldo e Lourdes

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus a possibilidade de encerrar esta tese de doutorado.

E seguida, gostaria de agradecer aos meus pais Reynaldo e Lourdes, pelo apoio incondicional dado ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Gostaria de manifestar minha gratidão ao prof. Victor, pela amizade e cuidadosa orientação na realização deste trabalho.

As minhas irmãs Rosângela, Rosane e Rose, meus sobrinhos Samuel, Rafael, Gabriela,Rebeca e aos meus cunhados Eraldo e Paulo pelo apoio nos momentos mais difíceis.

Ao carinho e o apoio da Jacq, Sahra e Clara. A vocês meu carinho a amor.

A minha segunda família; Graça, Bete,Sãozinha,Naddia, Daiane,Dodô, Toti, Gê,Lúcio, Fatinha, Afonso, Lúcia, Carmem e a todos os meus sobrinhos, cunhados a minha gratidão pela compreensão da ausência em muitos momentos.

Aos amigos Wilson Sacramento, Marcia Hatae, Monica Kachio, Leonardo Sioufi, Marcia Mizoi, Fabiano César Cardoso, Guilhermo Lazo, Ulysses Carvalho agradeço o apoio.

Aos amigos do Johrei Center Butantã Cida Balduino, Margarida de Jesus, Yassuyo, Rosa Seiki, Fabiana Lima, Dri, Gerci, Irene, Sonia Vilela, Lourdes e todos os aqui não citados por falta de espaço. Também aos amigos do Johrei Center Poços de Caldas.

Aos funcionários do departamento de física matemática que muito contribuíram em minha estadia no departamento, Amélia, Simone, João, Sibele e Bete.

Aos demais funcionários da USP que conviveram comigo.

# Resumo

Neste trabalho empregamos a técnica de BFV para quantizar uma teoria com simetria de gauge $SP(2,\mathbb{R})$. Para isso em primeiro lugar, analisamos o critério de admissibilidade de Govaerts para as condições de gauge para a teoria da partícula relativística, cujo propagador é calculado nos gauges covariante, canônico e do cone de luz por meio da discretização da integral de trajetória e esta mostra que a ação discretizada perde a invariância por transformações de BRST; e para restaurar sua invariância é necessário modificar as transformaçoes de BRST.

Em segundo lugar, aplicamos a técnica de BFV para uma teoria com dois tempos e simetria de gauge $SP(2,\mathbb{R})$, em seguida, analisamos o efeito da discretização e mostramos que a ação discretizada perde a invariância por transformações de BRST. Neste caso, as modificações necessárias incluem termos de ordem $\frac{\Delta\tau}{N}$ nas transformações de BRST e estas passam a ser nilpotentes apenas on-shell. Ao fixarmos um tempo físico de duas formas diferentes obtivemos o propagador de uma partícula relativística em $d$ dimensões e de um oscilador harmônico invertido em $d-2$ dimensões espaciais.

# Abstract

In this work we employ the BFV technique to quantize a theory with gauge symmetry $Sp(2,\mathbb{R})$. First, we analyze the admissibility criterion of Govaerts for gauge conditions on the theory of a relativistic particle. The propagator for the relativistic particle is calculated in the covariant, canonical and light cone gauges. The discretization of the path integral shows that the discretized action looses invariance by the BRST transformations. To restore the invariance it is necessary to include modified transformations.

Secondly, we apply the BFV technique to a theory with two times and gauge symmetry $Sp(2,\mathbb{R})$. We analyze the effect of discretization and show that the discretized action looses the BRST invariance. In this case, it is necessary to change the transformations including terms of order $\frac{\Delta\tau}{N}$ , which become nilpotent only on-shell. Fixing the physical time in two different ways we get the propagator for a relativistic particle in $d$ dimensions and for an inverted harmonic oscillator in $d-2$ spatial dimensions.

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

A simetria conforme em um espaço com $d$ dimensões é realizada pelo grupo $SO(d,2)$ cuja ação nesse espaço ocorre de forma não linear. Entretanto, em 1936, Dirac [1] introduziu uma formulação para uma teoria de campos manifestamente covariante na qual esse grupo age de forma linear e essa nova formulação foi desenvolvida em um espaço com $d+2$ dimensões, com duas componentes temporais. Em função de uma simetria de gauge presente nesta formulação de Dirac, foi possível descrever teorias em um espaço com $d$ dimensões.

Na década de 70, Marnelius [2] ao estudar a formulação de uma teoria conforme em um espaço com $d+2$ dimensões mostrou a existência de uma equivalência entre uma partícula massiva em um espaço de Minkowski em $d$ dimensões e uma partícula sem massa que se propaga num espaço $AdS_{d-1}$, utilizando o formalismo introduzido por Dirac [1] e aplicado à teoria de uma partícula. Além disso, diversas generalizações foram feitas a fim de introduzir fermions na teoria [3, 2, 4]. A implementação da quantização desses modelos pela técnica de BRST (Bechi, Rouet,Stora,Tyltin)foi feita em [5].

Na década de 90, este modelo foi estudado num outro contexto por Montesinos [6, 7] o qual introduziu uma simetria de gauge $Sl(2,\mathbb{R})$ a fim de obter uma teoria que descrevesse a relatividade geral. Com isso, obteve as soluções clássicas que descrevem: uma partícula relativística com massa e um oscilador harmônico após resolver as equações de movimento para duas escolhas de gauge diferentes.

No final de década de 90, com os avanços das teoria das cordas no estudo dos aspectos não perturbativos, Bars e colaboradores, observaram evidências de que a descrição das teorias de unificação poderia incluir duas coordenadas temporais [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]. A partir desse momento, eles estudaram como implementar essas teorias [17, 18]. E em 1998, reformularam a teoria para uma partícula sem massa e introduzindo uma simetria de gauge

$Sp(2,\mathbb{R})$ e uma simetria global $SO(d,2)$ agindo linearmente num espaço com $d+2$ dimensões [19, 20, 21]. Desta forma, mostraram que esta teoria era capaz de descrever, em espaços com dimensão mais baixa, sistemas que aparentemente não são relacionados, como equivalentes: a partícula relativística com ou sem massa, o átomo de hidrogênio e o oscilador harmônico. Esses resultados permitiram a estes autores proporem que o modelo com dois tempos descrevesse de forma unificada estes sistemas. As transformações de gauge que conectam estes diversos sistemas foram chamadas dualidade e esta reformulação de física com dois tempos. A simetria de gauge torna a teoria unitária removendo os estado de norma negativa resultantes da introdução das duas coordenadas temporais. Em seguida, Bars e colaboradores generalizaram a formulação a fim de introduzir férmions o que implicou na existência de uma surpersimetria na linha mundo [22] e posteriormente no espaço-tempo [23]. Também foram realizadas por eles aplicações da formulação para teoria de cordas, branas e teoria M [24, 25, 26]. Em seguida, eles aplicaram o formalismo a fim de incluir campos de fundo gravitacionais e de gauge [27] e introduziram o formalismo de segunda quantização, ou seja, teoria de campos, descrito em [28, 29, 30, 31].

Em 2001, Bars e colaboradores começaram a estudar a relação da formulação de física com dois tempos [32, 33, 34, 35, 36] com os twistors propostos por Penrose [37] e em 2006, obtiveram uma formulação que descreve o modelo padrão das partículas como uma escolha de gauge da formulação com dois tempos[38].Outras aplicações da teoria com dois tempos foram obtidas em [39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49] e algumas revisões que discutem o desenvolvimento do formalismo estão descritas em [50, 51]. Entretanto, todos os resultados obtidos por esta formulação utilizam o método de quantização de operadores. Neste trabalho introduzimos o formalismo de integrais de trajetória para o modelo mais simples com dois tempos.

A formulação de integrais de trajetória para a mecânica quântica foi desenvolvida por Feynman [52] e posteriormente, no final da década de 60, Faddeev e Popov [53, 54] introduziram a formulação para uma teoria de gauge usando um par de variáveis grassmanianas: os fantasmas de Faddeev-Popov. Entretanto, esse método não funciona se a álgebra de gauge não é fechada,ou seja, as constantes de estrutura são funções das coordenadas. Uma forma de resolver esse problema é introduzir campos auxiliares, ou seja, campos que não possuem dinâmica [55, 56], mas não existe uma forma geral de introduzir estes campos auxiliares. Em vista disso, uma outra forma de implementação da integral de trajetória foi desenvolvida por Batalin, Fradkin e Vilkoviski [57, 58] que é denominada de método BFV e esta não sofre do problema apresentado pelo método de Faddeev. O formalismo BFV se baseia na invariancia de BRST [59, 60].

Quanto à implementação do formalismo BFV para uma teoria da partícula relativística esta foi realizada por Henneaux e Teitelboim[61]. Em seu trabalho, os autores calcularam o propagador da partícula relativística usando uma escolha de gauge covariante. Num outro trabalho, Teitelboim [62] mostrou que devido à simetria de gauge da teoria da partícula relativística, as únicas escolhas de gauge possíveis eram as do tipo covariante. Esse resultado excluiu as condições de gauge canônicas.

Na decada de 80, Govaerts [63, 64, 65] introduziu um outro critério de admissibilidade para as escolhas de gauge no formalismo BFV. Em seus trabalhos, ele propôs uma relação entre a admissibilidade e a existência de cópias de Gribov [66]. Ainda sobre o trabalho original de cópias de Gribov pode-se encontrar uma revisão em [67].

Num outro momento, Vergara e colaboradores desenvolveram um método para implementar as condições de gauge canônicas [68, 69] e uma outra abordagem foi feita por Ikemori[70]. Para calcular o propagador, ele analisou o comportamento da teoria após a discretização. Nessa análise, Ikemori observou que a ação discretizada perde a invariância em relação às transformações discretizadas de forma ingênua. Para solucionar esse problema, ele sugeriu modificar as transformações de gauge discretizadas. Essa idéia também foi aplicada a uma teoria dada em [71, 72]. Com essa análise, mostrou um cálculo explícito do propagador da partícula relativística num gauge canônico [70] sem as modificações feitas por Vergara e colaboradores.

Em nosso trabalho, vamos em primeiro lugar discuir o critério de admissibilidade proposto por Govaerts [63, 64, 65, 73]. Em seguida, calculamos o propagador da partícula relativística utilizando o método BFV e seguindo a análise introduzida por Ikemori [70]. Num segundo momento, aplicamos as técnicas usadas no caso da partícula relativística para o caso da teoria com dois tempos, ou seja, com simetria de gauge $Sp(2,\mathbb{R})$ [74].

No Capítulo 2, fazemos uma revisão dos conceitos da teoria de vínculos [75, 76], sua relação com as simetrias de gauge e discutimos sua quantização por meio da integração de trajetória. Em um primeiro momento, definimos a integral de trajetória para a mecânica quântica e depois apresentamos os métodos de Faddeev e Batalin, Fradkin e Vilkoviski.

No Capítulo 3, faremos a aplicação do método BFV para o caso da partícula relativística. Para isso, analisamos o critério proposto por Govaerts [64, 65, 73, 63] sobre a admissibilidade das escolhas de gauge. Em seguida, discretizamos a expressão do propagador e analisamos sua invariânça após a discretização do tempo. Finalizando esse capítulo, calculamos explicitamente os propagadores para a partícula relativística nos gauges covariante, canônico e do cone de luz.

No Capítulo 4, introduzimos a formulação da teoria com dois tempos [19] e analisamos sua estrutura de vínculos. Na sequência mostramos os resultados obtidos por Bars e colaboradores que descrevem a partícula relativística em $d$ dimensões e o oscilador harmônico em $d-2$ dimensões espaciais [20]. Em seguida, construimos o formalismo BFV e discretizamos o propagador, analisamos a invariância da ação após a discretizaçao e finalmente calculamos o propagador.

No Capítulo 5, analisamos as conclusões obtidas no capítulo 3 em relação ao critério proposto por Govaerts e os resultados obtidos no capítulo 4. Possíveis trabalhos futuros com relação à teoria com dois tempos são discutidos nesse trabalho.

# Capítulo 2

# Sistemas Hamiltonianos Vinculados

## 2.1 Formalismo Hamiltoniano

Vamos considerar um sistema físico com $N$ graus de liberdade descrito pela ação

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau L(x^i, \dot{x}^i, \tau), \quad i = 1, \cdots N, \tag{2.1}$$

onde L é função das coordenadas generalizadas $x^i$, das velocidades generalizadas $\dot{x}_i$ e do tempo $\tau$. As equações de movimento clássicas obtidas pela variação de (2.1), sujeitas às condições $\delta x^i = 0$ nos extremos, são

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0. \tag{2.2}$$

Podemos reescrever essas equações da seguinte forma

$$\frac{\partial^2 L}{(\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j)} \ddot{x}^j = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j} \dot{x}^j. \tag{2.3}$$

O termo

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}. \tag{2.4}$$

é chamado de matriz hessiana. Se o determinante desta matriz for nulo, dizemos que o sistema é singular ou vinculado [75, 76] e não poderemos determinar univocamente as acelerações em função das coordenadas generalizadas e de suas velocidades. Neste caso, existem diferentes evoluções temporais para uma mesma condição inicial.

A transição para o formalismo Hamiltoniano é feita definindo o momento canônico conjugado

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}. \tag{2.5}$$

Para sistemas vinculados não é possível expressar através da expressão (2.5) todas as velocidades $\dot{x}_i$ como função dos momentos e das coordenadas, ou seja, nem todos os momentos $p^i$ são independentes, mas existem relações

$$\phi_m(x,p) = 0, \quad m = 1, \cdots, M, \tag{2.6}$$

que seguem de (2.5) e que são chamados de vínculos primários. Esses vínculos definem uma hipersuperfície no espaço de fase denominada superfície de vínculos primários que denotaremos por $\Gamma_M$.

A hamiltoniana canônica é dada por

$$H = p_i \dot{x}^i - L(x^i, \dot{x}^i, \tau), \tag{2.7}$$

que devido à expressão (2.6) é válida somente na superfície de vínculos primários. Para estendermos esta definição para todo o espaço de fase, definimos outra hamiltoniana $H_T$ dada por

$$H_T = H + c^m \phi_m \tag{2.8}$$

onde os $c^m$ são funções arbitrárias de $x$ e $p$.

Como os vínculos $\phi_m$ podem ter colchetes de Poisson não nulos com alguma variável canônica, devemos calcular os colchetes antes de levarmos em conta as equações dos vínculos. Para lembrarmos deste fato, Dirac [75] introduziu a noção de igualdade fraca, escrevendo os vínculos como

$$\phi_m \approx 0. \tag{2.9}$$

Assim, podemos escrever as equações de movimento geradas por esta nova hamiltoniana da seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &\approx \{x_i, H\} + c^m \{x_i, \phi_m\} \\ \dot{p}^i &\approx \{p^i, H\} + c^m \{p^i, \phi_m\}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

A fim de construirmos uma teoria consistente, devemos impor a conservação temporal dos vínculos

$$\dot{\phi}_m \approx 0 \Rightarrow \{\phi_m, H\} + c^n \{\phi_m, \phi_n\} \approx 0. \tag{2.11}$$

Analisando esta equação, observamos três possibilidades:

1. a equação é identicamente satisfeita;
2. essa equação determina as funções arbitrárias $c^m$ univocamente;
3. essa equação pode dar origem a novos vínculos, os chamados vínculos secundários e neste caso, deve-se impor a consistência desses vínculos no tempo até que não haja mais vínculos.

Na análise, feita por Dirac [76], usamos uma classificação que divide os vínculos em primeira classe e segunda classe. Um vínculo, ou mais geralmente, uma função A(x,p) é dito de primeira classe se seus colchetes de Poisson com todos os vínculos são fracamente nulos, isto é

$$\{A, \phi_m\} \approx 0, \tag{2.12}$$

enquanto os de segunda classe, são aqueles que tem pelo menos um dos colchetes de Poisson da função A(x,p) com algum vínculo, não fracamente nulo

$$\{A(x,p), \phi_m\} \not\approx 0. \tag{2.13}$$

## 2.2 Vínculos de Primeira Classe e Transformações de Gauge

Vamos analisar a evolução temporal de sistemas com vínculos de primeira classe. Para isso, consideramos uma configuração inicial no espaço de fase $(x_0,\ p_0)$ em $t = t_0$. Esta evolução temporal de uma quantidade F(q,p) será dada por

$$\dot{F} = \{F, H\} + c^m\{F, \phi_m\}. \tag{2.14}$$

Devido a existência de funções arbitrárias nas equações de movimento concluimos que não poderemos determinar univocamente sua evolução temporal. Neste caso existem conjuntos de pontos dados por pares de $x$ e $p$ que correspondem à mesma configuração física. Este conjunto de pontos fisicamente equivalentes definem uma classe de equivalência. Surge então a seguinte pergunta: existe alguma transformação que conecte os pontos de uma mesma classe de equivalência? Para respondermos esta questão vamos calcular a variação entre dois conjuntos de pontos obtidas a partir de duas escolhas funções arbritárias. Na escolha da função arbitrária $c^m$, $F$ será dado por

$$F(\tau) = F(0) + \dot{F}\Delta\tau = F(0) + \{F, H\}\Delta\tau + c^m\{F, \phi_m\}\Delta\tau. \tag{2.15}$$

Já na escolha de uma outra função $u^m$, obtemos o valor de F

$$F'(\tau) = F(0) + \{F, H\}\Delta\tau + u^m\{F, \phi_m\}\Delta\tau. \tag{2.16}$$

Calculando a variação da função F obtemos

$$\delta F = F(\tau) - F'(\tau) = \delta v^m\{F, \phi_m\}, \tag{2.17}$$

onde $\delta v^m = (c^m - u^m)\Delta\tau$.

A partir desta expressão podemos concluir que os vínculos de primeira classe geram as transformações canônicas que conectam os diversos conjuntos de pontos dentro da classe de equivalência. Estas tranformações são chamadas de transformações de gauge hamiltonianas.

## 2.3 Fixação de Gauge

Como foi discutido nas seções anteriores, a existência de vínculos de primeira classe acarreta que os estados físicos podem ser descritos por mais de um conjunto de variáveis canônicas, causando ambigüidades na teoria. Para eliminarmos tais ambigüidades, impomos certas condições extras à nossa teoria, chamadas de condições de gauge. As condições de gauge podem ser:

1. condições Canônicas de Gauge: quando impomos restrições às variáveis canônicas do sistema. Ex.: Gauge de Coulomb na eletrodinâmica;

2. condições Covariantes de Gauge: quando restringimos a derivada temporal dos multiplicadores de Lagrange. Ex.: Gauge do tempo próprio na teoria da partícula relativística.

Para que as ambigüidades sejam eliminadas, nossas condições de gauge devem satisfazer

1. a acessibilidade da escolha de gauge, ou seja, dado um conjunto de variáveis canônicas, deve existir uma transformação de gauge que leve o conjunto inicial a outro que satisfaça a condição de gauge.

2. a fixação de gauge deve ser completa, ou seja, dada uma condição de gauge $\chi$, esta deve satisfazer a seguinte condição

$$\{\chi, \phi_m\} \not\approx 0. \tag{2.18}$$

Ao observarmos a expressão acima, notamos que após a fixação de gauge não há mais vínculos de primeira classe, ou melhor, o nosso sistema transfoma-se num sistema de segunda classe.

Por outro lado, analisando geometricamente o processo de fixação de gauge, observamos que as condições de gauge definem uma superfície no espaço de fase que intercepta as órbitas de gauge somente uma vez. Os resultados acima garantem somente que a fixação é completa localmente.

## 2.4 Quantização por Integrais de Trajetória em Mecânica Quântica

Na formulação de Feynman da mecânica quântica [52], o objeto fundamental é a amplitude de transição ou propagador, que mede a probabilidade de um sistema passar de um estado a outro, ou seja, descreve o processo quântico. Vamos construir este propagador a partir da formulação usual da mecânica quântica, em que a evolução temporal de um sistema é dada pela equação de Schrödinger

$$\hat{H}|\Psi;t\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi;t\rangle, \tag{2.19}$$

onde $|\Psi;t\rangle$ representa o estado do sistema num instante de tempo $t$. A solução desta equação pode ser escrita como

$$|\Psi;t\rangle = U(t,t_0)|\Psi;t_0\rangle, \tag{2.20}$$

em que o operador $U(t,t_0)$ é o chamado operador de evolução temporal. Se $\hat{H}$ não for explicitamente dependente do tempo, podemos representar o operador evolução por

$$U(t,t_0) = \exp -\frac{i}{\hbar}((t-t_0)\hat{H}), \tag{2.21}$$

que satisfaz as seguintes propriedades

1. $U(t_3,t_2)U(t_2,t_1) = U(t_3,t_1)$
2. $U(t_2,t_1)^\dagger = U^{-1}(t_2,t_1) = U(t_1,t_2)$.

Podemos então definir o propagador no espaço das coordenadas como

$$Z(x_N,x_0;t_N,t_0) = \langle x_N|U(t)|x_o\rangle, \tag{2.22}$$

onde os auto-estados da posição $|x_i\rangle$ são ortonormais, completos que satisfazem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \langle x|x^{'}\rangle &= \delta(x-x^{'}) \\ \int dx|x\rangle\langle x| &= 1 \\ \langle x|p\rangle &= \exp\frac{i}{\hbar}px \end{aligned} \tag{2.23}$$

Vamos representar este propagador em termos de integrais de trajetória. Para isto, dividimos o intervalo entre o instante final e o instante inicial em $N$ subintervalos infinitesimais intermediários de valor $\epsilon = \frac{\Delta\tau}{N} = \frac{\tau_N - \tau_0}{N}$. Portanto, utilizando a propriedade 1 podemos escrever o operador evolução temporal da seguinte forma:

$$U(t_N, t_0) = U(t_N, t_{N-1})U(t_{N-1}, t_{N-2}).......U(t_1, t_0). \tag{2.24}$$

O propagador pode ser escrito como

$$Z(x_N, x_0; t_N, t_0) = \langle x_N|U(t_N, t_{N-1})U(t_{N-1}, t_{N-2}).......U(t_1, t_0)|x_o\rangle. \tag{2.25}$$

Inserindo $N-1$ conjuntos intermediários completos de estados entre a posição inicial $x_0$ e final $x_N$ na expressão (2.25) temos

$$\begin{aligned} Z(x_N, x_0; t_N, t_0) &= \int dx_{N-1}dx_{N-2}....dx_1\langle x_N|U(t_N, t_{N-1})|x_{N-1}\rangle \\ &\quad \langle x_{N-1}|U(t_{N-1}, t_{N-2})|x_{N-2}\rangle..... \qquad (2.26) \\ &\quad \langle x_1|U(t_1, t_0)|x_0\rangle. \qquad (2.27) \end{aligned}$$

E inserindo entre estes N vezes a seguinte expressão

$$\int dp|p\rangle\langle p| = 1. \tag{2.28}$$

Podemos reescrever o propagador da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &Z(x_N, x_0; t_N, t_0) = \lim_{N\to\infty}\int dx_{N-1}dx_{N-2}......dx_1dp_{N-1}dp_{N-2}....dp_0 \\ &\langle x_N|U(t_N, t_{N-1})|p_{N-1}\rangle\langle p_{N-1}||x_{N-1}\rangle \\ &\langle x_{N-1}|U(t_{N-1}, t_{N-2})|p_{N-1}\rangle\langle p_{N-1}||x_{N-2}\rangle \\ &\langle x_{N-1}|U(t_{N-1}, t_{N-2})|p_{N-1}\rangle\langle p_{N-1}||x_{N-2}\rangle. \\ &...\langle x_1|U(t_1, t_0)|p_0\rangle\langle p_0||x_0\rangle. \end{aligned}$$

Mas usando o resultado abaixo

$$
\begin{aligned}
\langle x_{i+1}|U(t_N,t_{N-1})|p_i\rangle\langle p_i||x_i\rangle &= \langle x_{i+1}|\exp(\frac{i}{\hbar}\hat{H}\epsilon)|p_i\rangle\langle p_i||x_i\rangle \\
&= \langle x_{i+1}|(1-\frac{i}{\hbar}\hat{H})|p_i\rangle\langle p_i||x_i\rangle \\
&= (1-\frac{i}{\hbar}h_k)\exp(\frac{i}{\hbar}p_i(x_{i+1}-x_i)) \\
&= \exp\frac{i}{\hbar}(p_i(x_{i+1}-x_i)-h_i),
\end{aligned} \tag{2.29}
$$

podemos reescrever o propagador como

$$
\begin{aligned}
&Z(x_N,x_0;t_N,t_0) = \lim_{N\to\infty}\int\prod_{i=0}^{N-1}dp_i\prod_{i=1}^{N-1}dx_i exp\frac{i}{\hbar}\sum_{i=0}^{N-1}(p_i\,(x_{i+1}-x_i) \\
&-\epsilon h_i), \\
&=\int DxDp\exp\frac{i}{\hbar}\int dt(p_i\dot{x}^i-h),
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

onde $Dx$,$Dp$ é a medida funcional na integral de trajetória.

## 2.5 Quantização por Integrais de Trajetória em Teorias de Gauge

Para uma teoria de gauge, a formulação de integrais de trajetória fica um pouco mais complicada em função da simetria de gauge. Existem duas formas de implementar a formulação: o método de Faddeev-Popov[53] e o método BFV[58, 57].

### 2.5.1 Método de Faddeev-Popov

O primeiro método a incorporar vínculos na formulação de integrais de trajetória foi desenvolvido por Faddeev[53], para o qual se consideravam vínculos de primeira classe. Posteriormente, Senjanovic[77] generalizou este resultado para incluir vínculos de segunda classe. Em nossos sistemas estudados existem somente vínculos de primeira classe e, portanto, iremos somente discutir o resultado de Faddeev.

Considere um sistema de N graus de liberdade, que possui M vínculos de primeira classe $\phi_a$. Temos então de introduzir M fixações de gauge $\Omega_a$. Este sistema de vínculos e fixações devem satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \{\phi_a, \phi_b\} &\approx 0 \\ det\{\Omega_a, \phi_b\} &\neq 0, \end{aligned} \tag{2.31}$$

sobre a hipersuperfície dada por $\phi_a = 0$ e $\Omega_a = 0$. Podemos a partir daqui enunciar o teorema de Faddeev.

**Teorema**

O propagador é dado por

$$Z(x_N, X_0) = \int d\mu \exp \frac{i}{\hbar}(\int d\tau(p\dot{x} - H)), \tag{2.32}$$

em que a medida da integral é dada por

$$d\mu = det\{\Omega_a, \phi_a\} \prod_{a=1}^{M} \delta(\Omega_a)\delta(\phi_a) \prod_{i=1}^{N} dp_i dx^i. \tag{2.33}$$

### 2.5.2 Método BFV

Vamos considerar um sistema com $N$ graus de liberdade definido em um espaço de fase composto por variáveis que comutam e por variáveis de Grassmann. As variáveis que comutam têm paridade de Grassmann $\epsilon_a = 0$ e as variáveis de Grassmann têm paridade $\epsilon_a = 1$. Os vínculos de primeira classe são $\phi_a(a = 1....M)$ e satisfazem à seguinte álgebra

$$\begin{aligned} \{\phi_a, \phi_b\} &= f_{ab}^d \phi_d \\ \{H, \phi_a\} &= V_a^b \phi_b, \end{aligned} \tag{2.34}$$

onde $f_{ab}^d$e $V_a^b$ são as funções de estrutura .

O formalismo é implementado em dois passos. O primeiro consiste em promover os multiplicadores de Lagrange $\lambda_a$ a variáveis dinâmicas do espaço de fase e introduzir um momento canônico para o multiplicador de lagrange $\Pi_a$, satisfazendo a condição

$$\{\lambda^a, \Pi_b\} = \delta_b^a. \tag{2.35}$$

Para não modificarmos o conteúdo dinâmico da teoria, introduzimos um vínculo adicional

$$\Pi_a = 0. \tag{2.36}$$

Os vínculos $\phi$ e $\Pi$ formam um sistema de vínculos de primeira classe. No formalismo BFV este conjunto é denotado por $G_i (i = 1, 2, .....2M)$ que satisfaz

$$\begin{aligned} \{G_i, G_j\} &= f_{ij}^k G_k \\ \{H, G_i\} &= V_i^j G_j. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Num segundo passo, introduzimos novos graus de liberdade a fim de compensar o aumento do espaço de fase. Estes graus de liberdade adicionais são chamados de pares de fantasmas de BFV. Para cada vínculo de primeira classe introduzimos um par de fantasmas $(\eta_i, \mathcal{P}^i)$, mas com paridade de Grassman oposta ao correspodente vínculo de primeira classe, que satisfaz à seguinte álgebra

$$\{\mathcal{P}_i, \eta^j\} = -\delta_i^j, \tag{2.38}$$

e os outros colchetes de Poisson generalizados nulos. Portanto, nosso novo espaço de fase é $(x, p, \lambda^a, \Pi_a; \eta^i, \mathcal{P}_i)$. Neste novo espaço de fase, o número de graus de liberdade é dado por $2(N - M)$.

Neste espaço de fase estendido, a simetria original de gauge é substituída por uma simetria global gerada pela seguinte carga fermiônica $Q_B$

$$Q_B = \eta^i G_i - \frac{1}{2}\eta^j \eta^k f_{jk}^i \mathcal{P}_i, \tag{2.39}$$

que é anticomutativo e por construção satisfaz

$$\{Q_B, Q_B\} = 0. \tag{2.40}$$

Esta carga fermiônica recebe o nome de carga BRST. Esta carga gera as seguintes transformações

$$\begin{aligned} \delta_B x &= \{x, G_i\}\eta^i \\ \delta_B p &= \{p, G_i\}\eta^i \\ \delta_B \lambda^a &= \eta^a \\ \delta_B \Pi_a &= 0 \\ \delta_B \eta^i &= \frac{1}{2} f_{jk}^i \eta^j \eta^k \\ \delta_B \mathcal{P}_i &= -G_i + f_{ij}^k \eta^j \mathcal{P}_k. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Podemos agora escrever a ação invariante por BRST

$$S_{ef} = \int d\tau (\dot{x}p - \lambda^a \dot{\Pi}_a + \dot{\eta}^i \mathcal{P}_i - H - \{\Psi, Q_B\}), \tag{2.42}$$

onde $\Psi$ é uma função fermiônica arbitrária.

As equações de movimento provenientes desta ação devem ser suplementadas por condições de fronteira que sejam invariantes pela simetria de BRST. Existem várias condições invariantes que poderíamos adotar. Vamos introduzir um conjunto muito usado na literatura, e para implementá-lo, vamos primeiro decompor o par de fantasmas da seguinte forma

$$\begin{aligned} \eta^i &= (\mathcal{P}^a, C^a), \\ \mathcal{P}_i &= (\bar{C}_a, \bar{\mathcal{P}}_a), \end{aligned} \tag{2.43}$$

que satisfazem as seguintes relações

$$\begin{aligned} \{\mathcal{P}^a, \bar{C}_a\} &= -1, \\ \{C^a, \bar{\mathcal{P}}_a\} &= -1. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Podemos agora definir as condições de fronteira invariantes de BRST dadas por

$$\begin{aligned} \Pi_a(\tau_0) &= 0, \qquad \Pi_a(\tau_N) = 0, \\ C^a(\tau_0) &= 0, \qquad C^a(\tau_N) = 0, \\ \bar{C}_a(\tau_0) &= 0, \qquad \bar{C}_a(\tau_N) = 0, \\ x(\tau_0) &= x_0, \qquad x(\tau_N) = x_N. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Podemos definir agora o teorema BFV.

**Teorema** BFV

O propagador é dado por

$$Z(x_N, x_0) = \int D\mu \exp i \left( \int d\tau (\dot{x}p - \lambda^a \dot{\Pi}_a + \bar{\mathcal{P}}_a \dot{C}^a - \bar{C}_a \dot{\mathcal{P}}^a - H + \{\Psi, Q_B\}) \right), \tag{2.46}$$

é independente de $\Psi$ e $D\mu = DxDpD\lambda D\Pi D\bar{\mathcal{P}} D\mathcal{P} DC D\bar{C}$ é a medida de Liouville. As diversas escolhas de gauge são obtidas por diferentes escolhas da função arbitrária $\Psi$. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [57, 78, 79].

# Capítulo 3

# Quantização BRST da Partícula Relativística

## 3.1 Introdução

Neste capítulo, vamos analisar o caso de uma partícula relativística livre, de massa $m$, num espaço de Minkowski em $d$ dimensões. A ação que a descreve é

$$S = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{-\dot{x}^2(\tau)}, \tag{3.1}$$

e $\tau$ parametriza a linha mundo da partícula relativística. E a posição no espaço-tempo é descrita por $x^\mu(\tau)$ com $\mu = 0, 1, ...d-1$. Adotaremos a convenção $\eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1....1)$ para a métrica. Esta ação é invariante por reparametrização da linha mundo definida pelas transformações

$$\begin{aligned} &\tau \to \tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\tau), \\ &x^\mu(\tau) \to \tilde{x}^\mu(\tilde{\tau}) = x^\mu(\tau), \end{aligned} \tag{3.2}$$

ou seja, as coordenadas se transformam como escalares. As equações de movimento são

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m\dot{x}_\mu(\tau)}{\sqrt{-\dot{x}^2(\tau)}}\right) = 0, \tag{3.3}$$

sujeitas às condições de contorno $x^\mu(\tau_1) = x_1^\mu$ e $x^\mu(\tau_2) = x_2^\mu$ .

Passamos à formulação hamiltoniana calculando o momento canônico

$$
\begin{aligned}
p_\mu(\tau) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}, \\
&= \frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2(\tau)}}{}'
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

e utilizando a expressão acima, obtemos o vínculo primário

$$
\phi = \frac{1}{2}(p^2 + m^2) \approx 0. \tag{3.5}
$$

Então a hamiltoniana canônica é

$$
\begin{aligned}
H &= p_\mu \dot{x}^\mu - L, \\
&= \frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2(\tau)}}\dot{x}^\mu - L, \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

e, neste caso, a evolução temporal do sistema será governada pela hamiltoniana total $H_T$

$$
\begin{aligned}
H_T &= H + \lambda(\tau)\phi \\
&= \lambda(\tau)\phi,
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

onde $\lambda$ é o multiplicador de Lagrange. Impondo-se a consistência temporal do vínculo (3.5) temos

$$
\dot{\phi} = \lambda\{\phi, \phi\} \approx 0, \tag{3.8}
$$

o que permite concluir que $\phi$ é único e de primeira classe. Reescrevendo a ação na forma hamiltoniana obtemos

$$
S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left( p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2}\lambda(\tau)(p^2 + m^2) \right). \tag{3.9}
$$

As transformações de gauge gerados por (3.5) são

$$
\begin{aligned}
\delta x^\mu &= \epsilon(\tau) p^\mu, \\
\delta p_\mu &= 0, \\
\delta\lambda(\tau) &= \dot{\epsilon}(\tau),
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

onde $\epsilon(\tau)$ é o parâmetro da transformação. Tomando a variação da ação

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{d}{d\tau}\left(\epsilon(\tau)\frac{1}{2}(p^2-m^2)\right) \\ &= \epsilon(\tau)\frac{1}{2}(p^2-m^2)\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

concluimos que a invariância impõe o anulamento dos parâmetros de gauge nos extremos.

Vamos agora considerar o formalismo BFV. Num primeiro momento introduzimos um grau de liberdade $\Pi$ conjugado ao multiplicador de Lagrange $\lambda$, satisfazendo o seguinte colchete de Poisson

$$\{\lambda, \Pi\} = 1, \tag{3.12}$$

e para não alterarmos o conteúdo físico da teoria impomos

$$\Pi = 0. \tag{3.13}$$

Este vínculo adicional (3.13) forma um sistema de primeira classe com o vínculo $\phi$, que será denotado por $G_a \quad a = 1, 2$ da seguinte forma:

$$G_1 = \Pi, \qquad G_2 = \phi, \tag{3.14}$$

satisfazendo a seguinte álgebra:

$$\{G_a, G_b\} = 0, \qquad a, b = 1, 2 \tag{3.15}$$

$$\{H, G_a\} = 0, \tag{3.16}$$

onde $H$ é a hamiltoniana canônica.

Num segundo passo, introduzimos um par de fantasmas $(C, \bar{\mathcal{P}})$ e $(\mathcal{P}, \bar{C})$ associados aos vínculos dados em (3.14), respectivamente, satisfazendo os seguintes colchetes de Poisson:

$$\{C, \bar{\mathcal{P}}\} = \{\mathcal{P}, \bar{C}\} = -1, \tag{3.17}$$

e com os outros colchetes de Poisson nulos. A carga de BRST é

$$Q_B = \frac{1}{2}C\left(p^2 + m^2\right) + \mathcal{P}\Pi, \tag{3.18}$$

e gera as seguintes transformações de BRST

$$\begin{aligned} \delta x^{\mu} &= Cp^{\mu}, \qquad \delta p^{\mu} = 0, \\ \delta\lambda &= \mathcal{P}, \qquad \delta\Pi = 0, \\ \delta C &= 0, \qquad \delta\bar{C} = -\Pi, \\ \delta\bar{\mathcal{P}} &= -\frac{1}{2}(p^2 + m^2), \qquad \delta\mathcal{P} = 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Vamos analisar algumas escolhas de gauge no formalismo BFV.

### 3.1.1 Condição Covariante de Gauge $\dot{\lambda}(\tau) = f(\lambda)$

O primeiro caso a ser analisado é o da condição covariante de gauge e esta é implementada pela seguinte função grasmaniana

$$\Psi = \bar{C}f(\lambda) + \lambda\bar{\mathcal{P}}, \tag{3.20}$$

onde $f(\lambda)$ é uma função arbitrária dos multiplicadores de Lagrange. Calculando o colchetes de Poisson de $\Psi$ com a carga de BRST temos

$$\{\Psi, Q_B\} = -f(\lambda)\Pi + \bar{C}\mathcal{P}f^{'}(\lambda) + \bar{\mathcal{P}}\mathcal{P} - \frac{\lambda}{2}(p^2 + m^2), \tag{3.21}$$

em que $f^{'}(\lambda)$ é a derivada de $f$ em relação a $\lambda$. A ação efetiva é

$$\begin{aligned} S_{ef} = &\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (p_{\mu}\dot{x}^{\mu} + \Pi\dot{\lambda} + \bar{\mathcal{P}}\dot{C} + \bar{C}\dot{\mathcal{P}} - f(\lambda)\Pi + \bar{C}\mathcal{P}f^{'}(\lambda) \\ &+\bar{\mathcal{P}}\mathcal{P} - \frac{\lambda}{2}(p^2 + m^2)). \end{aligned} \tag{3.22}$$

As equações de movimento são

$$\begin{aligned} \dot{x}^{\mu} &= \lambda p^{\mu}, \qquad \dot{p}^{\mu} = 0, \\ \dot{\bar{C}} &= -\bar{\mathcal{P}}, \qquad \dot{C} = \mathcal{P}, \\ \dot{\lambda} &= f(\lambda), \qquad \dot{\Pi} = f^{'}(\lambda)\Pi + \bar{C}\mathcal{P}f^{''}(\lambda) - \frac{1}{2}(p^2 + m^2). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Resolvendo estas equações para o caso em que $f(\lambda) = 0$ e utilizando as condições de contorno (2.44), obtemos as seguintes soluções

$$\begin{aligned}
&x^\mu(\tau) = x_1^\mu + \frac{\Delta x^\mu}{\Delta\tau}(\tau - \tau_1), \qquad && p^\mu(\tau) = \frac{\Delta x^\mu}{\Delta\tau},\\
&\bar{C}(\tau) = 0, \qquad C(\tau) = 0, &&\\
&\mathcal{P}(\tau) = 0, \qquad \mathcal{P}(\tau) = 0, &&\\
&\lambda(\tau) = \lambda_0, \qquad \Pi(\tau) = 0, &&
\end{aligned} \tag{3.24}$$

onde $\Delta x^\mu = x_2^\mu - x_1^\mu$ e $\lambda_0$ é uma constante. Uma das consequências que podemos concluir é que o vínculo $\phi$ é satisfeito em qualquer instante. Utilizando a solução para $p^\mu$ obtemos que $(\Delta x)^2 = m^2(\Delta\tau)^2$.

### 3.1.2 Condição de Gauge Canônico $x^0 - \tau = 0$

Para analisarmos esta condição de gauge escreveremos $x^\mu = (x^0, \vec{x})$, onde $x^0$ é componente temporal e $\vec{x}$ corresponde as $d-1$ coordenadas espaciais. A função grasmaniana que implementa este gauge é

$$\Psi = \frac{1}{\beta}(x^0 - \tau)\bar{C} + \lambda\bar{\mathcal{P}}, \tag{3.25}$$

onde $\beta$ é uma constante real diferente de zero. Calculando-se o colchete de Poisson temos

$$\{\Psi, Q_B\} = \frac{1}{\beta}\Pi(x^0 - \tau) + \frac{1}{\beta}\bar{C}Cp_0 + \bar{\mathcal{P}}\mathcal{P} + \frac{\lambda}{2}(p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2). \tag{3.26}$$

Neste caso, a ação efetiva é

$$\begin{aligned}
S_{ef} = &\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau(-p^0\dot{x}^0 + \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} + \Pi\dot{\lambda} + \bar{\mathcal{P}}\dot{C} + \bar{C}\dot{\mathcal{P}} + \frac{1}{\beta}\Pi(x^0 - \tau)\\
&+\frac{1}{\beta}\bar{C}Cp_0 + \bar{\mathcal{P}}\mathcal{P} + \frac{\lambda}{2}(p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2)).
\end{aligned}$$

Para obtermos a fixação de gauge desejada temos que fazer a seguinte mudança de variáveis invariante por BRST $\Pi \to \beta\tilde{\Pi}$ e $\bar{C} \to \beta\tilde{\bar{C}}$ que reescreve a ação da seguinte forma

$$\begin{aligned}
S_{ef} = &\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau(-p^0\dot{x}^0 + \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} + \beta\tilde{\Pi}\dot{\lambda} + \bar{\mathcal{P}}\dot{C} + \beta\tilde{\bar{C}}\dot{\mathcal{P}} + \tilde{\Pi}(x^0 - \tau)\\
&+\tilde{\bar{C}}Cp_0 + \bar{\mathcal{P}}\mathcal{P} + \frac{\lambda}{2}(p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2)).
\end{aligned}$$

Tomando o limite $\beta \to 0$, e renomeando $\tilde{\Pi} \to \Pi$ e $\tilde{\bar{C}} \to \bar{C}$, podemos escrever a ação efetiva como

$$\begin{aligned} S_{ef} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau(-p^0\dot{x}^0 + \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} + \dot{C}\bar{\mathcal{P}} + \bar{C}Cp_0 - \Pi(x^0-\tau) \\ +\lambda(p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2) + \bar{\mathcal{P}}\mathcal{P}). \end{aligned} \tag{3.27}$$

As equações de movimento neste gauge são

$$\begin{aligned} \dot{x}^0 &= \lambda p^0, \qquad \dot{\vec{x}} = \lambda\vec{p}, \\ \dot{p}_0 &= \Pi, \qquad \dot{\vec{p}} = 0, \\ \dot{\bar{\mathcal{P}}} &= -\bar{C}p_0, \qquad \dot{C} = \mathcal{P}, \\ x^0 - \tau &= 0, \qquad p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Resolvendo as equações de movimento utilizando as condições de contorno dadas por (2.45), obtemos as soluções

$$\begin{aligned} & x^0(\tau) = \tau, \qquad \vec{x}(\tau) = \vec{x}_1 + \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta\tau}(\tau - \tau_1), \\ & p_0 = \pm\sqrt{p^2 + m^2}, \qquad \vec{p} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta\tau}, \\ & \lambda(\tau) = \frac{1}{p^0(\tau)}, \qquad \Pi(\tau) = 0, \\ & \bar{C}(\tau) = 0, \qquad C(\tau) = 0, \\ & \mathcal{P}(\tau) = 0, \qquad \mathcal{P}(\tau) = 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Estas soluções descrevem a mesma situação física do caso covariante.

### 3.1.3 Condição de Gauge do Cone de Luz $x^+ - \tau = 0$

Para estudarmos esta condição introduziremos o sistema de coordenadas do cone de luz, definindo

$$\begin{aligned} x^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^{d-1}), \\ x^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^{d-1}). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Neste caso podemos escrever $x^\mu = (x^+, x^-, \vec{x})$ onde $\vec{x}$ corresponde a $d-2$ coordenadas espaciais. A métrica de Minkowski neste sistema de coordenadas possui as seguintes componentes não nulas

$$\eta_{+-} = \eta_{-+} = -1, \qquad \eta_{ij} = \delta_{ij} \qquad i, j = 1, 2, ...d-2, \tag{3.31}$$

A condição de gauge do cone de luz é implementada pela seguinte função grasmaniana

$$\Psi = \frac{1}{\beta}(x^+ - \tau)\bar{C} + \lambda\bar{\mathcal{P}}, \tag{3.32}$$

onde $\beta$ é uma constante real diferente de zero. Calculando-se o colchete de Poisson

$$\begin{aligned}\{\Psi, Q_B\} = \frac{1}{\beta}\Pi(x^+ - \tau) + \frac{1}{\beta}\bar{C}Cp^+ + \bar{\mathcal{P}}\mathcal{P} \\ +\lambda(p^+p^- - \frac{1}{2}(\vec{p}^2 + m^2)).\end{aligned}$$

Neste caso, a ação efetiva é

$$\begin{aligned}S_{ef} &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau(-p^+\dot{x}^- - p^-\dot{x}^+ + \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} + \Pi\dot{\lambda} + \bar{\mathcal{P}}\dot{C} + \bar{C}\dot{\mathcal{P}} \\ &+\frac{1}{\beta}\Pi(x^+ - \tau) + \frac{1}{\beta}\bar{C}Cp^+ + \bar{\mathcal{P}}\mathcal{P} + \lambda(p^+p^- - \frac{1}{2}(p^2 + m^2)))\end{aligned}$$

Para obtermos a fixação de gauge desejada temos que fazer a seguinte mudança de variáveis invariante por BRST $\Pi \to \beta\tilde{\Pi}$ e $\bar{C} \to \beta\tilde{\bar{C}}$ que transforma a ação efetiva da seguinte forma

$$\begin{aligned}S_{ef} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau(p\dot{x}^+ + p^+\dot{x}^- - \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} + \beta\dot{\lambda}\tilde{\Pi} + \bar{\mathcal{P}}\dot{C} + \beta\tilde{\bar{C}}\dot{\mathcal{P}} \\ +\tilde{\Pi}(x^+ - \tau) + \tilde{\bar{C}}Cp^+ + \bar{\mathcal{P}}\mathcal{P} + \lambda(p^+p^- - \frac{1}{2}(\vec{p}^2 + m^2))),\end{aligned}$$

Novamente tomamos o limite $\beta \to 0$, e renomeando $\tilde{\Pi} \to \Pi$ e $\tilde{\bar{C}} \to \bar{C}$, podemos escrever a ação efetiva como

$$\begin{aligned}S_{ef} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau(p^-\dot{x}^+ + p^+\dot{x}^- - \vec{p}\cdot\vec{x} + \bar{\mathcal{P}}\dot{C} + \Pi(x^+ - \tau) \\ +\bar{C}Cp^+ + \bar{\mathcal{P}}\mathcal{P} + \lambda(p^+p^- - \frac{1}{2}(\vec{p}^2 + m^2))).\end{aligned} \tag{3.33}$$

As equações de movimento são

$$
\begin{aligned}
\dot{x}^- &= \lambda p^- - \bar{C}C, \qquad \dot{x}^+ = -\lambda p^+, \\
\dot{\vec{x}} &= \lambda\vec{p}, \qquad \dot{p}^+ = 0, \\
\dot{p}^- &= \Pi, \qquad \dot{\vec{p}} = 0, \\
\dot{\bar{\mathcal{P}}} &= -\bar{C}p^+, \qquad \dot{C} = \mathcal{P}, \\
\bar{\mathcal{P}} &= 0, \qquad Cp^+ = 0, \\
x^+ - \tau &= 0, \qquad p^+p^- - \frac{1}{2}(\vec{p}^2 + m^2) = 0,
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

cujas soluções são

$$
\begin{aligned}
& x^+(\tau) = \tau, \qquad x^-(\tau) = x_1^- + \frac{\Delta x^-}{\Delta\tau}(\tau - \tau_1), \\
& \vec{x}(\tau) = \vec{x}_1 + \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta\tau}(\tau - \tau_1), \qquad p^+ = \frac{\Delta x^+}{\Delta\tau}, \\
& p^- = \frac{\vec{p}^2 + m^2}{2p^+}, \qquad \vec{p} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta\tau}, \\
& \lambda(\tau) = \frac{1}{p^+} \qquad \Pi(\tau) = 0, \\
& \bar{C}(\tau) = 0, \qquad C(\tau) = 0, \\
& \mathcal{P}(\tau) = 0, \qquad \bar{\mathcal{P}}(\tau) = 0.
\end{aligned} \tag{3.35}
$$

Novamente estas soluções descrevem a mesma situação física dos casos anteriores.

## 3.2 Admissibilidade das Condições de Gauge

No final da década de 80 Govaerts [63, 64, 65, 73] analisou a implementação do formalismo BFV para a teoria da partícula relativística e sugeriu que a amplitude de transição calculada não era independente da escolha da função grasmaniana arbitrária $\Psi$. Para demonstrar este resultado ele definiu um critério que classificava quais funções $\Psi$ eram admissíveis, ou seja, quais condições de gauge poderiam ser implementadas .

Como foi descrito na seção 1.2, a existência de vínculos de primeira classe divide o espaço de fase em classes de equivalência, que também chamamos de órbitas de gauge. No caso da partícula relativística, usaremos o espaço das órbitas no espaço dos multiplicadores que chamaremos de espaço de Teichmuller. Podemos agora definir um critério neste espaço

- Uma fixação é dita admissível, se esta define uma hipersuperfície no espaço de Teichmuller que intercepta todas as órbitas uma única vez. Caso contrário diremos que é não admissível e que possui o problema de Gribov [66] .

Podemos classificar então o problema de Gribov em dois tipos. O problema de Gribov de tipo I é de carater local e acontece quando uma órbita é interceptada mais de uma vez. Um problema de Gribov do tipo II é de carater global e acontece quando nem todas as órbitas são interceptadas.

Para caracterizar o espaço de Teichmuller no caso da partícula relativística devemos encontrar uma quantidade invariante de gauge nesse espaço. Para tal introduzimos o tempo próprio dado por

$$T = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \lambda(\tau) d\tau, \tag{3.36}$$

que é invariante pelas transformações finitas de gauge

$$\begin{aligned} x'^{\mu}(\tau) &= x^{\mu}(\tau) + h(\tau) p^{\mu}(\tau), \\ p'^{\mu} &= p^{\mu}, \\ \lambda'(\tau) &= \lambda(\tau) + \frac{dh(\tau)}{d\tau}, \end{aligned} \tag{3.37}$$

que são obtidas a partir das transformações infinitesimais dadas em (3.10). Utilizando essas transformações podemos concluir que:

- Se dois multiplicadores $\lambda_1(\tau)$ e $\lambda_2(\tau)$, com tempos próprios dados por $T_1$ e $T_2$ respectivamente forem equivalentes de gauge, então $T_1 = T_2$.

- É sempre possível encontrar uma função $h(\tau)$ que relaciona um multiplicador $\lambda_1(\tau)$ com um multiplicador constante $\lambda_0$.

Esses dois resultados nos permitem concluir que o espaço de Teichmuller para a partícula relativística é dado pelo conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Vamos analisar diversas condições de gauge, seguindo os próximos passos para determinar sua admissibilidade.

1. Resolvendo a equação $\dot{\lambda} = f(\lambda)$ para uma determinada função $f(\lambda)$ a fim de obter o multiplicador de Lagrange $\lambda$ em função de uma constante de integração $\lambda_N$;

2. A partir da solução encontrada acima, calculamos o tempo próprio;

3. Avaliamos qual o comportamento do tempo próprio ao variarmos nossa constante de integração $\lambda_N$ no intervalo $[-\infty, +\infty]$. Se o domínio de $T$ também for $[-\infty, +\infty]$ dizemos que a condição de gauge é admissível, caso contrário, diremos que sofre do problema de Gribov.

Vamos analisar algumas escolhas particulares para a função $f(\lambda)$ descrita em [64],[73].

- O primeiro caso analisado foi $f(\lambda) = 0$, gerando a seguinte fixação de gauge

$$\dot{\lambda} = 0. \tag{3.38}$$

Resolvendo a equação acima, obtemos

$$\lambda(\tau) = \lambda_N, \tag{3.39}$$

onde $\lambda_N$ é uma constante de integração real. Ao calcularmos o tempo próprio utilizando a equação (3.36) obtemos

$$T(\lambda_N) = \lambda_N \Delta\tau. \tag{3.40}$$

Variando $\lambda_N$ no intervalo $[-\infty, +\infty]$, observamos que $T$ varia no intervalo $[-\infty, +\infty]$. Portanto esta escolha de gauge é admissível.

- Uma segunda condição de gauge é obtida tomando $f(\lambda) = \alpha\lambda^3$, onde $\alpha$ é uma constante real positiva. Neste caso a fixação é dada por

$$\dot{\lambda} = \alpha\lambda^3. \tag{3.41}$$

Resolvendo esta equação obtemos a seguinte solução

$$\lambda(\tau) = \frac{\lambda_N}{\sqrt{1 + 2\alpha\lambda_N^2(\tau_N - \tau)}}, \tag{3.42}$$

onde $\lambda_N$ é uma constante de integração real. Ao calcularmos o tempo próprio obtemos

$$T(\lambda_N) = \frac{[\sqrt{1 + 2\alpha\Delta\tau\lambda_N^2} - 1]}{\alpha\lambda_N}. \tag{3.43}$$

Variando $\lambda_N$ no intervalo $[-\infty, +\infty]$ encontramos que o domínio de $T$ é dado pelo intervalo $[-\sqrt{(\frac{2\Delta\tau}{\alpha})}, \sqrt{(\frac{2\Delta\tau}{\alpha})}]$. Como não obtemos o intervalo $[-\infty, +\infty]$, a fixação de gauge não é admissível pelo critério de Govarts, ou seja, essa condição sofre do problema de Gribov do tipo II, pois ela não intercepta todas as órbitas.

- Uma terceira condição gauge é a do tipo canônica

$$x^0 = \tau. \tag{3.44}$$

Neste caso obtemos o multiplicador de Lagrange através das equações de movimento (3.28) , obtendo

$$\lambda(\tau) = \frac{1}{p_0}, \tag{3.45}$$

onde $p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = cte$ e que $\vec{p}$ fará o papel de uma constante de integração real. Calculando o tempo próprio

$$T(\lambda) = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}. \tag{3.46}$$

Levando em conta que $\vec{p}^2$ pode variar no intervalo $[0, \infty]$ concluimos que $T$ varia no intervalo $[0, \frac{\Delta\tau}{m}]$. Novamente o intervalo de domínio de $T$ não é $[-\infty, \infty]$ e portanto a condição não é admissível e possui um problema de Gribov do tipo II.

- A última escolha de gauge é a do cone de luz. O multiplicador de Lagrange encontrado pelas equações (3.34) é

$$\lambda(\tau) = \frac{1}{p^+}. \tag{3.47}$$

O tempo próprio então é dado por

$$T(\lambda) = \frac{\Delta\tau}{p^+}, \tag{3.48}$$

onde $p^+$ é uma constante que varia no intervalo $[-\infty, \infty]$. Neste caso, o tempo próprio irá variar no intervalo $[-\infty, \infty]$ e portanto não possui problema de Gribov.

## 3.3 Propagador para a Partícula Relativística no Gauge $\dot{\lambda} = f(\lambda)$

Podemos construir o propagador

$$Z(x_N^\mu, x_0^\mu) = \int_{x_1}^{x_2} DpDxD\lambda D\Pi DCD\bar{C}D\mathcal{P}D\bar{\mathcal{P}} \exp(iS_{ef}), \tag{3.49}$$

onde $S_{ef}$ é dada pela expressão (3.22).

Vamos escrever este propagador na forma de uma integral de trajetória discretizada. Para isso dividimos o intervalo entre $\tau_2$ e $\tau_1$ em N intervalos infinitesimais $\epsilon = \frac{\Delta\tau}{N}$. Utilizamos também neste processo as condições de contorno dadas em (2.44). Podemos então escrever a ação dada em (3.22) em sua forma discretizada

$$S_{ef} = \sum_{i=0}^{N-1}(p_{\mu i}(x^{\mu}_{i+1} - x^{\mu}_{i}) - \lambda_i(\Pi_{i+1} - \Pi_i) - \mathcal{P}_i(\bar{C}_{i+1} - \bar{C}_i) + \bar{\mathcal{P}}_i(C_{i+1} - C_i)$$
$$+\bar{\mathcal{P}}_i\mathcal{P}_i\frac{\Delta\tau}{N} + \lambda_i\frac{1}{2}(p_i^2 + m^2)\frac{\Delta\tau}{N}) + \sum_{i=1}^{N-1}(f_i'(\lambda_i)\bar{C}_i\mathcal{P}_i\frac{\Delta\tau}{N} - f_i(\lambda_i)\Pi_i\frac{\Delta\tau}{N}) \quad (3.50)$$

### 3.3.1 Invariância da Acão Discretizada

Nesta seção estudamos o efeito da discretização sobre a invariança BRST da ação no caso da partícula relativística no gauge covariante. O desenvolvimento utilizado em nosso trabalho baseia-se nos resultados dados em [70, 71]. Em primeiro lugar discretizamos as transformações BRST de forma ingênua, obtendo

$$\begin{aligned}
\delta x^{\mu}_i &= C_i p^{\mu}_i, \qquad \delta p^{\mu} = 0, \\
\delta C_i &= 0, \qquad \delta\bar{C}_i = -\Pi_i, \\
\delta\bar{\mathcal{P}}_i &= -\frac{1}{2}(p_i^2 + m^2), \qquad \delta\lambda_i = -\mathcal{P}_i, \\
\delta\Pi_i &= 0, \qquad \delta\mathcal{P}_i = 0.
\end{aligned} \quad (3.51)$$

Variando a ação (3.50) em relação às transformações (3.51) obtemos

$$\begin{aligned}
\delta S_{ef} &= \sum_{i=0}^{N-1}\left(C_{i+1}(p_{i+1}^2 + m^2) - C_i(p_i^2 + m^2) - C_{i+1}(p_{i+1} - p_i)^2\right) \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} -C_{i+1}(p_{i+1} - p_i)^2 \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

mostrando que a ação deixa de ser invariante. A fim de restaurarmos a invariância, modificamos as transformações discretizadas (3.51) de forma que ao tomarmos o limite do caso contínuo obtemos as transformações usuais de BRST. As transformações modificadas ficam iguais a

$$
\begin{aligned}
\delta x_i^\mu &= C_i \frac{(p_i^\mu + p_{i-1}^\mu)}{2}, \qquad \delta p_i^\mu = 0, \\
\delta C_i &= 0, \qquad \delta \bar{C}_i = -\Pi_i, \\
\delta \bar{\mathcal{P}}_i &= -\frac{1}{2}(p_i^2 + m^2), \qquad \delta \lambda_i = -\mathcal{P}_i, \\
\delta \Pi_i &= 0, \qquad \delta \mathcal{P}_i = 0.
\end{aligned} \tag{3.52}
$$

Estas transformações são nilpotentes.

Variando a ação efetiva dada por (3.50) em relação a (3.52) obtemos

$$
\begin{aligned}
\delta S_{ef} &= \sum_{i=0}^{N-1} C_{i+1}(p_{i+1}^2 + m^2) - C_i(p_i^2 + m^2) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{3.53}
$$

levando em conta as condições de contorno para os $C$ dadas em (2.45).

### 3.3.2 Propagador Discretizado para o Gauge Covariante $\dot{\lambda} = f(\lambda)$

Discretizando a expressão do propagador (3.49) obtemos

$$
\begin{aligned}
Z(x_N^\mu, x_0^\mu) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dp_{\mu i} \prod_{i=1}^{N-1} dx_i^\mu \prod_{i=0}^{N-1} d\lambda_i \prod_{i=1}^{N-1} d\Pi_i \prod_{i=0}^{N-1} d\mathcal{P}_i \prod_{i=1}^{N-1} d\bar{C}_i \\
\prod_{i=0}^{N-1} d\bar{\mathcal{P}}_i \prod_{i=1}^{N-1} dC_i \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} [p_{\mu i}(x_{i+1}^\mu - x_i^\mu) - \lambda_i(\Pi_{i+1} - \Pi_i) - \mathcal{P}_i(\bar{C}_{i+1} - \bar{C}_i) \right. \\
+\bar{\mathcal{P}}_i(C_{i+1} - C_i) + \bar{\mathcal{P}}_i(C_{i+1} - C_i) + \bar{\mathcal{P}}_i\mathcal{P}_i\frac{\Delta\tau}{N} - \lambda_i\frac{1}{2}(p_i^2 + m^2)\frac{\Delta\tau}{N}] \\
\left. + \sum_{i=1}^{N-1}(f_i'(\lambda_i)\bar{C}_i\mathcal{P}_i\frac{\Delta\tau}{N} - f_i(\lambda_i)\Pi_i\frac{\Delta\tau}{N}) \right).
\end{aligned} \tag{3.54}
$$

Para fazermos os cálculos, note que podemos utilizar o seguinte resultado

$$
\sum_{i=0}^{N-1} \bar{\mathcal{P}}_i(C_{i+1} - C_i) = -\sum_{i=1}^{N-1}(\bar{\mathcal{P}}_i - \bar{\mathcal{P}}_{i-1})C_i. \tag{3.55}
$$

Pelas condições de contorno para os $C$, o termo de fronteira se anula. Integrando nos $C_i$ obtemos

$$Z(x_N^\mu, x_0^\mu) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dp_{\mu i} \prod_{i=1}^{N-1} dx_i^\mu \prod_{i=0}^{N-1} d\lambda_i \prod_{i=1}^{N-1} d\Pi_i \prod_{i=0}^{N-1} d\mathcal{P}_i$$
$$\prod_{i=1}^{N-1} d\bar{C}_i \prod_{i=0}^{N-1} d\bar{\mathcal{P}}_i \prod_{i=1}^{N-1} \delta(\bar{\mathcal{P}}_i - \bar{\mathcal{P}}_{i-1}) \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} [p_{\mu i}(x_{i+1}^\mu - x_i^\mu) - \lambda_i(\Pi_{i+1} - \Pi_i) \right.$$
$$-\mathcal{P}_i(\bar{C}_{i+1} - \bar{C}_i) + \bar{\mathcal{P}}_i \mathcal{P}_i \frac{\Delta\tau}{N} - \lambda_i \frac{1}{2}(p_i^2 + m^2)\frac{\Delta\tau}{N}] + \sum_{i=1}^{N-1} (f_i'(\lambda_i)\bar{C}_i \mathcal{P}_i \frac{\Delta\tau}{N}$$
$$\left. -f_i(\lambda_i)\Pi_i \frac{\Delta\tau}{N}) \right). \tag{3.56}$$

Integrando $N-1$ vezes em $\bar{\mathcal{P}}_i$ ficamos com uma integral ordinária em $\bar{\mathcal{P}}_{N-1}$. Usando a seguinte propriedade

$$\sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{P}_i(\bar{C}_{i+1} - \bar{C}_i) = -\sum_{i=1}^{N-1} \bar{C}_i(\mathcal{P}_i - \mathcal{P}_{i-1}), \tag{3.57}$$

podemos integrar $\bar{C}_i$ obtendo:

$$Z(x_N^\mu, x_0^\mu) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dp_{\mu i} \prod_{i=1}^{N-1} dx_i^\mu \prod_{i=0}^{N-1} d\lambda_i \prod_{i=1}^{N-1} d\Pi_i \prod_{i=0}^{N-1} d\mathcal{P}_i \int d\bar{\mathcal{P}}_{N-1}$$
$$\prod_{i=1}^{N-1} \delta(\mathcal{P}_{i-1} - \mathcal{P}_i(1 - f'(\lambda_i)\frac{\Delta\tau}{N})) \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} [p_{\mu i}(x_{i+1}^\mu - x_i^\mu) - \lambda_i(\Pi_{i+1} - \Pi_i) \right.$$
$$\left. +\bar{\mathcal{P}}_{N-1}\mathcal{P}_i \frac{\Delta\tau}{N} - \lambda_i \frac{1}{2}(p_i^2 + m^2)\frac{\Delta\tau}{N}] - \sum_{i=1}^{N-1} f_i(\lambda_i)\Pi_i \frac{\Delta\tau}{N} \right). \tag{3.58}$$

Integrando em $\mathcal{P}_i$ obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 &= \mathcal{P}_1(1 - f'(\lambda_1)\frac{\Delta\tau}{N}) \\ \mathcal{P}_1 &= \mathcal{P}_2(1 - f'(\lambda_2)\frac{\Delta\tau}{N}) \\ &. \\ &. \\ \mathcal{P}_{N-2} &= \mathcal{P}_{N-1}(1 - f'(\lambda_{N-1})\frac{\Delta\tau}{N}). \end{aligned} \tag{3.59}$$

Utilizando a expressão acima, podemos escrever o termo abaixo da seguinte forma

$$\sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{P}_i \frac{\Delta\tau}{N} = [1 + \sum_{i=1}^{N-2} \prod_{j=i+1}^{N-1} (1 - f'(\lambda_i)\frac{\Delta\tau}{N})] \frac{\Delta\tau}{N} \mathcal{P}_{N-1}. \tag{3.60}$$

Substituindo o resultado acima na expressão do propagador e integrando em $\bar{\mathcal{P}}_{N-1}$ e $\mathcal{P}_{N-1}$ obtemos

$$\begin{aligned} Z(x^\mu_N, x^\mu_0) &= \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dp_i \prod_{i=1}^{N-1} dx^\mu_i \prod_{i=0}^{N-1} d\lambda_i \prod_{i=1}^{N-1} d\Pi_i (1 + \sum_{i=1}^{N-2} \prod_{j=i+1}^{N-1} (1 - \\ &-f'(\lambda_i)\frac{\Delta\tau}{N}))\frac{\Delta\tau}{N}) \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} [p^\mu_i (x_{\mu i+1} - x_{\mu i}) - \lambda_i (\Pi_{i+1} - \Pi_i) - \lambda_i \frac{1}{2} (p_i^2 \right. \\ &\left. + m^2)\frac{\Delta\tau}{N}] - \sum_{i=1}^{N-1} f_i(\lambda_i)\Pi_i \frac{\Delta\tau}{N} \right). \end{aligned} \tag{3.61}$$

Para fazer as integrações que faltam, usamos os resultados abaixo

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} p_{\mu i}(x^\mu_{i+1} - x^\mu_i) &= -\sum_{i=1}^{N-1} x^\mu_i (p_{\mu i} - p_{\mu i-1}) - p_0 x_0 + p_{N-1} x_N, \\ \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i (\Pi_{i+1} - \Pi_i) &= -\sum_{i=1}^{N-1} \Pi_i (\lambda_i - \lambda_{i-1}). \end{aligned} \tag{3.62}$$

Integrando em $x^\mu_i$ obtemos

$$\begin{aligned} Z(x^\mu_N, x^\mu_0) &= \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dp_{\mu i} \prod_{i=0}^{N-1} d\lambda_i \prod_{i=1}^{N-1} d\Pi_i \prod_{i=1}^{N-1} \delta(p_{\mu i} - p_{\mu i-1}) \\ &[1 + \sum_{i=1}^{N-2} \prod_{j=i+1}^{N-1} (1 - f'(\lambda_i)\frac{\Delta\tau}{N})]\frac{\Delta\tau}{N} \exp i \left( \sum_{i=1}^{N-1} \left( -(\lambda_i - \lambda_{i-1})\Pi_i - f_i(\lambda_i)\Pi_i \frac{\Delta\tau}{N} \right) \right. \\ &\left. - \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i \frac{1}{2}(p_i^2 + m^2)\frac{\Delta\tau}{N} - p_{\mu 0} x^\mu_0 + p_{\mu N-1} x^\mu_N \right). \end{aligned} \tag{3.63}$$

Integrando em $p_{\mu_i}$ conseguimos

$$Z(x_N^\mu, x_0^\mu) = \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\mu 0} \int \prod_{i=0}^{N-1} d\lambda_i \prod_{i=1}^{N-1} d\Pi_i [1 + \sum_{i=1}^{N-2} \prod_{j=i+1}^{N-1} (1$$
$$-f'(\lambda_i)\frac{\Delta\tau}{N})]\frac{\Delta\tau}{N} \exp i \left( \sum_{i=1}^{N-1} \left( -(\lambda_i - \lambda_{i-1})\Pi_i + f_i(\lambda_i)\Pi_i \frac{\Delta\tau}{N} \right) \right.$$
$$\left. - \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i \frac{1}{2}(p_0^2 + m^2)\frac{\Delta\tau}{N} + p_{\mu 0}\Delta x^\mu \right). \tag{3.64}$$

Integrando em $\Pi_i$ obtemos

$$Z(x_N^\mu, x_0^\mu) = \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\mu 0} \prod_{i=0}^{N-1} d\lambda_i (1 + \sum_{i=1}^{N-2} \prod_{j=i+1}^{N-1} (1 - f'(\lambda_i)\frac{\Delta\tau}{N}))\frac{\Delta\tau}{N})$$
$$\prod_{i=1}^{N-1} \delta(-\lambda_i(1 - f_i(\lambda_i)\frac{\Delta\tau}{N}) + \lambda_{i-1}) \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i \frac{1}{2}(p_0^2 + m^2)\frac{\Delta\tau}{N} + p_{\mu 0}\Delta x^\mu \right) \tag{3.65}$$

Escrevendo

$$T = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i \frac{\Delta\tau}{N}. \tag{3.66}$$

Integrando em $\lambda_i$ obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \lambda_1 - f(\lambda_1)\frac{\Delta\tau}{N} \\ \lambda_1 &= \lambda_2 - f(\lambda_2)\frac{\Delta\tau}{N} \\ \lambda_2 &= \lambda_3 - f(\lambda_3)\frac{\Delta\tau}{N} \\ &. \\ &. \\ \lambda_{N-2} &= \lambda_{N-1} - f(\lambda_{N-1})\frac{\Delta\tau}{N}, \end{aligned} \tag{3.67}$$

que reduz a integração em $\lambda_i$ a uma integral em $\lambda_{N-1}$. Utilizando a relação (3.66) podemos calcular a seguinte relação

$$dT = \frac{\Delta\tau}{N} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{N-2} \prod_{j=i+1}^{N-1} (1 - f'(\lambda_i)\frac{\Delta\tau}{N}) \right] d\lambda_{N-1}, \tag{3.68}$$

o que permite reescrever o propagador da seguinte forma

$$Z(x_N^\mu, x_0^\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\mu 0} \int_{\mathcal{D}} dT \exp i \left( T\frac{1}{2}(p_0^2 + m^2) + p_{\mu 0}\Delta x^\mu \right), \qquad (3.69)$$

que é independente de $f(\lambda)$. Entretanto não conseguimos determinar o domínio $\mathcal{D}$ de integração em $T$. Para obtermos esta informação devemos calcular explicitamente o Jacobiano abaixo

$$J = \lim_{N\to\infty} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{N-2} \prod_{j=i+1}^{N-1} (1 - f'(\lambda_i)\frac{\Delta\tau}{N} \right] \frac{\Delta\tau}{N}. \qquad (3.70)$$

Portanto, o domínio de $T$ depende da $f(\lambda)$. Para funções que são admissíveis classicamente, o domínio $\mathcal{D}$ será o intervalo $[-\infty, \infty]$ e o propagador calculado em (3.69) é igual ao obtido por [61, 68] . Em caso contrário, o propagador sofrerá de problema de Gribov.

Analisando a expressão (3.66) com a ajuda das relações (3.67 ), podemos concluir que o domínio de integração do tempo próprio $T$ depende da função $f(\lambda)$. Esse resultado nos permite concluir que não é possível garantir a inexistência de problemas de Gribov e portanto o critério de Govaerts está correto quando aplicamos condições de gauge covariantes.

Entretanto, este propagador não é causal, pois não se anula se $\tau_2 < \tau_1$. Para implementarmos a causalidade devemos calcular o seguinte objeto

$$Z_F(x_N^\mu, x_0^\mu) =< x_2|\Theta(T)|x_1 >, \qquad (3.71)$$

onde $\Theta(T)$ é a função degrau de Heaviside. Escrevendo a integral de trajetória deste objeto obtemos

$$Z_F(x_N^\mu, x_0^\mu) = \int DpDxD\lambda D\Pi DCD\bar{C}D\mathcal{P}D\bar{\mathcal{P}}\Theta(T)\exp(iS_{ef}). \qquad (3.72)$$

Discretizando a expressão acima temos

$$Z(x_N^\mu, x_0^\mu) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dp_{\mu i} \prod_{i=1}^{N-1} dx_i^\mu \prod_{i=0}^{N-1} d\lambda_i \prod_{i=1}^{N-1} d\Pi_i \prod_{i=0}^{N-1} d\mathcal{P}_i \prod_{i=1}^{N-1} d\bar{C}_i$$
$$\prod_{i=0}^{N-1} d\bar{\mathcal{P}}_i \prod_{i=1}^{N-1} dC_i \Theta(\sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i \frac{\Delta\tau}{N}) \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} [p_{\mu i}(x_{i+1}^\mu - x_i^\mu) - \lambda_i(\Pi_{i+1} - \Pi_i) \right.$$
$$-\mathcal{P}_i(\bar{C}_{i+1} - \bar{C}_i) + \bar{\mathcal{P}}_i(C_{i+1} - C_i) + \bar{\mathcal{P}}_i\mathcal{P}_i\frac{\Delta\tau}{N} - \lambda_i\frac{1}{2}(p_i^2 + m^2)\frac{\Delta\tau}{N}]$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{N-1} [f_i'(\lambda_i)\bar{C}_i\mathcal{P}_i\frac{\Delta\tau}{N} - f_i(\lambda_i)\Pi_i\frac{\Delta\tau}{N}] \right). \qquad (3.73)$$

Comparando a expressão (3.73) com (3.54) concluimos que a única diferença entre elas é o termo da função de Heaviside. Integrando na mesma ordem feita anteriormente chegamos ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} Z(x^\mu_N, x^\mu_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\mu 0} \int_{-\infty}^{\infty} dT\Theta(T) \exp i(T\frac{1}{2}(p_0^2 + m^2) + p_{\mu 0}\Delta x^\mu) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\mu 0} \int_{0}^{\infty} dT \exp i(T\frac{1}{2}(p_0^2 + m^2) + p_{\mu 0}\Delta x^\mu), \end{aligned} \quad (3.74)$$

que é uma representação do propagador de Feynman $\Delta_F(x_2 - x_1)$ obtido em [61].

## 3.4 Propagador para a Partícula Relativística no Gauge $x^0 - \tau = 0$

O propagador neste gauge é dado por

$$Z(x^0_N, x^0_0; \vec{x}_N, \vec{x}_0) = \int Dp_0 D\vec{p} Dx^0 D\vec{x} D\lambda D\Pi DC D\bar{C} D\mathcal{P} D\bar{\mathcal{P}} \exp(iS_{ef}), \quad (3.75)$$

onde agora $S_{ef}$ é dado por (3.27)

De forma análoga ao caso da condição de gauge covariante da seção anterior, discretizamos a ação efetiva dada em (3.27) utilizando as condições de contorno (2.44) obtemos

$$\begin{aligned} S_{ef} = \sum_{i=0}^{N-1}(-p_{0i}(x^0_{i+1} - x^0_i) + \vec{p}_i(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) + \bar{\mathcal{P}}_i(C_{i+1} - C_i)) - \sum_{i=1}^{N-1}(\bar{C}_i C_i p_{0i}\frac{\Delta\tau}{N} \\ +\Pi_i(x^0_i - \tau_i)\frac{\Delta\tau}{N}) + \sum_{i=0}^{N-1}(-\lambda_i(p^2_{oi} - (\vec{p}_i^2 + m^2)\frac{\Delta\tau}{N} + \bar{\mathcal{P}}_i\mathcal{P}_i\frac{\Delta\tau}{N}). \end{aligned} \quad (3.76)$$

Aplicando as transformações discretizadas dadas em (3.51), observamos que a ação discretizada (3.76) também perde a invariância após a discretização. É possível mostrar que as modificações na transformações discretizadas são as mesmas do gauge covariante. Portanto as transformações discretizadas que mantém a invariância da ação acima são as mesmas dadas na equação (3.52).

Podemos então escrever o propagador como

$$Z(x_N^0, x_0^0; \vec{x}_N, \vec{x}_0) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dp_{0i} d\vec{p}_i \prod_{i=1}^{N-1} dx_i^0 d\vec{x}_i \prod_{i=0}^{N-1} d\lambda_i \prod_{i=1}^{N-1} d\Pi_i$$
$$\prod_{i=0}^{N-1} d\mathcal{P}_i \prod_{i=1}^{N-1} d\bar{C}_i \prod_{i=0}^{N-1} d\bar{\mathcal{P}}_i \prod_{i=1}^{N-1} dC_i \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} [-p_{0i}(x_{i+1}^0 - x_i^0) + \vec{p}_i(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) \right.$$
$$+\bar{\mathcal{P}}_i(C_{i+1} - C_i)] - \sum_{i=1}^{N-1} \left( \bar{C}_i C_i p_{0i} \frac{\Delta\tau}{N} + \Pi_i (x_i^0 - \tau_i) \frac{\Delta\tau}{N} \right)$$
$$\left. + \sum_{i=0}^{N-1} \left( -\lambda_i ((p_{oi}^2 - (\vec{p}_i^2 + m^2)) \frac{\Delta\tau}{N}) + \bar{\mathcal{P}}_i \mathcal{P}_i \frac{\Delta\tau}{N} \right) \right). \tag{3.77}$$

Fazendo todas as integrações chegaremos ao seguinte resultado

$$Z(x_2^0, x_1^0; \vec{x}_2, \vec{x}_1) = \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{p}_0 \frac{1}{w_0} \exp(i\vec{p}_0 \Delta\vec{x}) \left( \exp(w_0 \Delta\tau) \right.$$
$$\left. +(-1)^N \exp(-w_0 \Delta\tau) \right). \tag{3.78}$$

o que mostra uma dependência do número de intervalos utilizados na discretização. Uma forma de resolver este problema é introduzirmos uma função sinal $\varepsilon(p_0)$ na condição de gauge. Esta mudança não altera o resultado do propagador calculado no caso contínuo. Portanto a nova função grasmaniana fica

$$\Psi = \frac{1}{\beta} \varepsilon(p_0)(x^0 - \tau)\bar{C} + \lambda\bar{\mathcal{P}}, \tag{3.79}$$

que irá corresponder a seguinte ação efetiva discretizada

$$S_{ef} = \sum_{i=0}^{N-1} [-p_{0i}(x_{i+1}^0 - x_i^0) + \vec{p}_i(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) + \bar{\mathcal{P}}_i(C_{i+1} - C_i)] - \sum_{i=1}^{N-1} [\bar{C}_i C_i \epsilon(p_{0i}) p_{0i} \frac{\Delta\tau}{N}$$
$$+\Pi_i \epsilon(p_{0i})(x_i^0 - \tau_i) \frac{\Delta\tau}{N}] + \sum_{i=0}^{N-1} [-\lambda_i (p_{oi}^2 - (\vec{p}_i^2 + m^2) \frac{\Delta\tau}{N} + \bar{\mathcal{P}}_i \mathcal{P}_i \frac{\Delta\tau}{N}]. \tag{3.80}$$

Como a única modificação foi a inserção da função sinal, podemos concluir que esta nova ação efetiva é invariante pela mesmas transformações de BRST discretizadas do que aquela dada em (3.76). Portando, o propagador é escrito como

$$Z(x_N^0, x_0^0; \vec{x}_N, \vec{x}_0) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dp_{0i} d\vec{p}_i \prod_{i=1}^{N-1} dx_i^0 d\vec{x}_i \prod_{i=0}^{N-1} d\lambda_i \prod_{i=1}^{N-1} d\Pi_i \prod_{i=0}^{N-1} d\mathcal{P}_i$$
$$\prod_{i=1}^{N-1} d\bar{C}_i \prod_{i=0}^{N-1} d\bar{\mathcal{P}}_i \prod_{i=1}^{N-1} dC_i \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} \big( -p_{0i}(x_{i+1}^0 - x_i^0) + \vec{p}_i(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) + \bar{\mathcal{P}}_i(C_{i+1} - C_i) \big) \right.$$
$$- \sum_{i=1}^{N-1} \left( \bar{C}_i C_i \epsilon(p_{oi}) p_{0i} \frac{\Delta\tau}{N} + \Pi_i \epsilon(p_{0i})(x_i^0 - \tau_i) \frac{\Delta\tau}{N} \right) + \sum_{i=0}^{N-1} \left( -\lambda_i (p_{oi}^2 - (\vec{p}_i^2 + m^2) \frac{\Delta\tau}{N} \right.$$
$$\left.\left. + \bar{\mathcal{P}}_i \mathcal{P}_i \frac{\Delta\tau}{N} \right) \right) . \tag{3.81}$$

Integrando em $\Pi_i$ obtemos

$$\frac{1}{|\epsilon(p_{0i})|} (\frac{N}{\Delta\tau})^{N-1} \prod_{i=1}^{N-1} \delta(x_i^0 - \tau_i). \tag{3.82}$$

Integrando em $x_i^0$ temos

$$Z(x_N^0, x_0^0; \vec{x}_N, \vec{x}_0) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dp_{0i} d\vec{p}_i \prod_{i=1}^{N-1} d\vec{x}_i \prod_{i=0}^{N-1} d\lambda_i \prod_{i=0}^{N-1} d\mathcal{P}_i \prod_{i=1}^{N-1} d\bar{C}_i$$
$$\prod_{i=0}^{N-1} d\bar{\mathcal{P}}_i \prod_{i=1}^{N-1} dC_i \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} \big( -p_{0i}(\tau_{i+1} - \tau_i) + \vec{p}_i(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) + \bar{\mathcal{P}}_i(C_{i+1} - C_i) \big) \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{N-1} \bar{C}_i C_i |p_{0i}| \frac{\Delta\tau}{N} + \sum_{i=0}^{N-1} [-\lambda_i \left( (p_{oi}^2 - (\vec{p}_i^2 + m^2) \right) \frac{\Delta\tau}{N} + \bar{\mathcal{P}}_i \mathcal{P}_i \frac{\Delta\tau}{N}] \right) \tag{3.83}$$

Integrando em $\bar{C}_i$ e $C_i$ obtemos

$$(\frac{\Delta\tau}{N})^{N-1} \prod_{i=1}^{N-1} |p_{0i}|. \tag{3.84}$$

Portanto temos

$$Z(x_N^0, x_0^0; \vec{x}_N, \vec{x}_0) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dp_{0i} d\vec{p}_i \prod_{i=1}^{N-1} d\vec{x}_i \prod_{i=0}^{N-1} d\lambda_i \prod_{i=0}^{N-1} d\mathcal{P}_i \prod_{i=0}^{N-1} d\bar{\mathcal{P}}_i$$
$$(\frac{\Delta\tau}{N})^{N-1} \prod_{i=1}^{N-1} |p_{0i}| \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} [-p_{0i}(\tau_{i+1} - \tau_i) + \vec{p}_i(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) - \lambda_i(p_{oi}^2 - (\vec{p}_i^2 + m^2))\frac{\Delta\tau}{N} \right.$$
$$\left. + \bar{\mathcal{P}}_i \mathcal{P}_i \frac{\Delta\tau}{N}] \right). \tag{3.85}$$

Integrando em $\bar{\mathcal{P}}_i$ e $\mathcal{P}_i$ obtemos o seguinte termo

$$(\frac{\Delta\tau}{N})^N. \tag{3.86}$$

Portanto temos

$$Z(x_N^0, x_0^0; \vec{x}_N, \vec{x}_0) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dp_{0i} d\vec{p}_i \prod_{i=1}^{N-1} d\vec{x}_i \prod_{i=0}^{N-1} d\lambda_i \frac{1}{|\epsilon(p_{0i})|} (\frac{N}{\Delta\tau})^{N-1}$$
$$(\frac{\Delta\tau}{N})^{2N-1} \prod_{i=1}^{N-1} |p_{0i}| \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} [-p_{0i}(\tau_{i+1} - \tau_i) + \vec{p}_i(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) - \lambda_i(p_{oi}^2 - \right.$$
$$\left. (\vec{p}_i^2 + m^2))\frac{\Delta\tau}{N}] \right) \tag{3.87}$$

Agora podemos usar os seguintes fatos

$$\begin{aligned} |\epsilon(p_{oi})| &= 1, \\ (\tau_{i+1} - \tau_i) &= \frac{\Delta\tau}{N}, \end{aligned} \tag{3.88}$$

e integrando em $\lambda_i$ obtemos

$$Z(x_N^0, x_0^0; \vec{x}_N, \vec{x}_0) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dp_{0i} d\vec{p}_i \prod_{i=1}^{N-1} d\vec{x}_i \prod_{i=1}^{N-1} |p_{0i}| (\frac{\Delta\tau}{N})^N$$
$$\prod_{i=0}^{N-1} \delta \left( (p_{oi}^2 - (\vec{p}_i^2 + m^2))\frac{\Delta\tau}{N} \right) \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} (-p_{0i}\Delta\tau + \vec{p}_i(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i)) \right) \tag{3.89}$$

Utilizando a seguinte propriedade abaixo

$$\prod_{i=0}^{N-1} \delta\left((p_{oi}^2 - (\vec{p}_i^2 + m^2))\frac{\Delta\tau}{N}\right) = (\frac{N}{\Delta\tau})^N \prod_{i=0}^{N-1} |p_{oi}| \left(\delta(p_{oi} + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2})\right.$$
$$\left. + \delta(p_{oi} - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2})\right). \quad (3.90)$$

Podemos integrar em $p_{0i}$ ficando

$$Z(x_N^0, x_0^0; \vec{x}_N, \vec{x}_0) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} d\vec{p}_i \prod_{i=1}^{N-1} d\vec{x}_i \frac{1}{w_i} \exp i \sum_{i=0}^{N-1} \vec{p}_i(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i)\left(\exp(-w_i\Delta\tau)\right.$$
$$\left. + \exp(-w_i\Delta\tau)\right), \quad (3.91)$$

onde $w_i = \sqrt{\vec{p}_i^2 + m^2}$.

Fazendo uma integração por partes, podemos escrever

$$\sum_{i=0}^{N-1} \vec{p}_i(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) = \sum_{i=0}^{N-1} (\vec{p}_i - \vec{p}_{i-1})\vec{x}_i - \vec{p}_{N-1}\vec{x}_N + \vec{p}_0\vec{x}_0. \quad (3.92)$$

Ao substituirmos esta relação em nossa expressão e integrando em $\vec{x}_i$ obtemos

$$Z(x_N^0, x_0^0; \vec{x}_N, \vec{x}_0) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} d\vec{p}_i \frac{1}{w_i} \prod_{i=1}^{N-1} \delta(\vec{p}_i - \vec{p}_{i-1}) \exp i\left(\vec{p}_{N-1}\vec{x}_N - \vec{p}_0\vec{x}_0\right)$$
$$\left(\exp(w_i\Delta\tau) + \exp(-w_i\Delta\tau)\right). \quad (3.93)$$

Ao integrarmos em $N-1$ vezes em $\vec{p}_i$ obtemos o propagador

$$Z(x_N^0, x_0^0; \vec{x}_N, \vec{x}_0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{p}_0 \frac{1}{w_0} \exp i\left(\vec{p}_0 \Delta\vec{x}\right)\left(\exp(w_0\Delta\tau)\right.$$
$$\left. + \exp(-w_0\Delta\tau)\right),$$

que é uma representação da função $\Delta_1$ de Schwinger obtida em [68, 69]. Isto nos permite concluir que não existe um problema de Gribov neste gauge. Analogamente ao caso covariante, não obtemos o propagador causal. Para obtermos o propagador causal, calculamos o objeto da seguinte forma

$$Z_F(x_N^0, x_0^0; \vec{x}_N, \vec{x}_0) =< x_2|\Theta(T)|x_1 >, \quad (3.94)$$

com o tempo próprio dado por (3.45). Discretizando este propagador

$$Z(x_N^0, x_0^0; \vec{x}_N, \vec{x}_0) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dp_{0i} d\vec{p}_i \prod_{i=1}^{N-1} dx_i^0 d\vec{x}_i \prod_{i=0}^{N-1} d\lambda_i \prod_{i=1}^{N-1} d\Pi_i \prod_{i=0}^{N-1} d\mathcal{P}_i$$
$$\prod_{i=1}^{N-1} d\bar{C}_i \prod_{i=0}^{N-1} d\bar{\mathcal{P}}_i \prod_{i=1}^{N-1} dC_i \Theta(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{p_{0i}} \frac{\Delta\tau}{N}) \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} [-p_{0i}(x_{i+1}^0 - x_i^0) + \vec{p}_i(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) \right.$$
$$+ \bar{\mathcal{P}}_i(C_{i+1} - C_i)] - \sum_{i=1}^{N-1} \left( \bar{C}_i C_i \epsilon(p_{oi}) p_{0i} \frac{\Delta\tau}{N} + \Pi_i \epsilon(p_{0i})(x_i^0 - \tau_i) \frac{\Delta\tau}{N} \right)$$
$$\left. + \sum_{i=0}^{N-1} [-\lambda_i (p_{oi}^2 - (\vec{p}_i^2 + m^2) \frac{\Delta\tau}{N} + \bar{\mathcal{P}}_i \mathcal{P}_i \frac{\Delta\tau}{N}] \right). \quad (3.95)$$

As integrações são feitas na mesma ordem do caso do propagador anterior. Quando integramos em $p_{oi}$ usando a propriedade (3.90) a integral irá se dividir em duas partes.

$$Z(x_N^0, x_0^0; \vec{x}_N, \vec{x}_0) = \Theta(\frac{\Delta\tau}{w_0}) \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{p}_0 \frac{1}{w_0} \exp i \left( \vec{p}_0 \Delta\vec{x} + w_0 \Delta\tau \right)$$
$$+ \Theta(\frac{\Delta\tau}{-w_0}) \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{p}_0 \frac{1}{w_0} \exp i \left( \vec{p}_0 \Delta\vec{x} - w_0 \Delta\tau \right), \quad (3.96)$$

que é uma representação do propagador de Feynman obtida em [68].

## 3.5 Propagador para a Partícula Relativística no Gauge $x^+ - \tau = 0$

O propagador neste gauge é dado por

$$Z(x_2^+, x_1^+; x_2^-, x_1^-; \vec{x}_2, \vec{x}_1) = \int Dp^+ Dp^- D\vec{p} Dx^+ Dx^- D\vec{x} D\lambda D\Pi DC D\bar{C}$$
$$D\mathcal{P} D\bar{\mathcal{P}} \exp(iS_{ef}), \quad (3.97)$$

onde $S_{ef}$ é dada pela expressão (3.33). Este caso é semelhante ao caso do gauge canônico anterior. Devemos implementar a condição de gauge com uma função sinal $\varepsilon(p^+)$ adicional à condição de gauge. Portanto a função Grasmaniana é dada por

$$\Psi = \frac{1}{\beta} \varepsilon(p^+)(x^+ - \tau)\bar{C} + \lambda\bar{\mathcal{P}}. \quad (3.98)$$

A ação discretizada é dada por

$$S_{ef} = \sum_{i=0}^{N-1} \big(-p_i^+(x_{i+1}^- - x_i^-) - p^-(x_{i+1}^+ - x_i^+) + \vec{p}_i(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) + \bar{\mathcal{P}}_i(C_{i+1} - C_i)\big)$$
$$- \sum_{i=1}^{N-1}[\bar{C}_i C_i |p_i^+| \frac{\Delta\tau}{N} + \Pi_i \epsilon(p_i^+)(x_i^+ - \tau_i)\frac{\Delta\tau}{N}] + \sum_{i=0}^{N-1}\left(-\lambda_i(p_i^+ p_i^- - \frac{1}{2}(\vec{p}_i^{\,2} + m^2))\frac{\Delta\tau}{N}\right.$$
$$\left. + \bar{\mathcal{P}}_i \mathcal{P}_i \frac{\Delta\tau}{N}\right). \tag{3.99}$$

Ao analisarmos a invariância desta ação discretizada obtém-se os mesmos resultados anteriores, de forma que as transformações discretizadas que mantém a invariância são as mesmas dadas em (3.52). Discretizando o propagador obtemos

$$Z(x_N^+, x_0^+; x_N^-, x_0^-; \vec{x}_N, \vec{x}_0) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dp^+ dp^- d\vec{p}_i \prod_{i=1}^{N-1} dx_i^+ dx^- d\vec{x}_i \prod_{i=0}^{N-1} d\lambda_i$$
$$\prod_{i=1}^{N-1} d\Pi_i \prod_{i=0}^{N-1} d\mathcal{P}_i \prod_{i=1}^{N-1} d\bar{C}_i \prod_{i=0}^{N-1} d\bar{\mathcal{P}}_i \prod_{i=1}^{N-1} dC_i \exp i \sum_{i=0}^{N-1}[-p_i^+(x_{i+1}^- - x_i^-)$$
$$-p^-(x_{i+1}^+ - x_i^+) + \vec{p}_i(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) + \bar{\mathcal{P}}_i(C_{i+1} - C_i) + (-\lambda_i(p_i^+ p_i^- - \frac{1}{2}(\vec{p}_i^{\,2} + m^2))\frac{\Delta\tau}{N}$$
$$+\bar{\mathcal{P}}_i \mathcal{P}_i \frac{\Delta\tau}{N})] - \sum_{i=1}^{N-1}[\bar{C}_i C_i |p_i^+| \frac{\Delta\tau}{N} + \Pi_i \epsilon(p_i^+)(x_i^+ - \tau_i)\frac{\Delta\tau}{N}] \tag{3.100}$$

Integrando em $\Pi_i$ obtemos

$$\frac{1}{|\epsilon(p_i^+)|}(\frac{N}{\Delta\tau})^{N-1} \prod_{i=1}^{N-1} \delta(x_i^+ - \tau_i). \tag{3.101}$$

Integrando em $x_i^+$ temos

$$Z(x_N^+, x_0^+; x_N^-, x_0^-; \vec{x}_N, \vec{x}_0) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dp_i^+ dp_i^- d\vec{p}_i \prod_{i=1}^{N-1} dx_i^- d\vec{x}_i \prod_{i=0}^{N-1} d\lambda_i$$
$$\prod_{i=0}^{N-1} d\mathcal{P}_i \prod_{i=1}^{N-1} d\bar{C}_i \prod_{i=0}^{N-1} d\bar{\mathcal{P}}_i \prod_{i=1}^{N-1} dC_i \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} [-p_i^+(x_{i+1}^- - x_i^-) - p^-(\tau_{i+1}^+ - \tau_i^+) \right.$$
$$+\vec{p}_i(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) + \bar{\mathcal{P}}_i(C_{i+1} - C_i)] + \sum_{i=1}^{N-1} \bar{C}_i C_i |p_i^+| \frac{\Delta\tau}{N} + \sum_{i=0}^{N-1} [\lambda_i \left( p_i^+ p_i^- \right.$$
$$\left. \left. -\frac{1}{2}(\vec{p}_i^2 + m^2) \right) \frac{\Delta\tau}{N} + \bar{\mathcal{P}}_i \mathcal{P}_i \frac{\Delta\tau}{N}] \right). \tag{3.102}$$

Integrando em $\bar{C}_i$ e $C_i$ obtemos

$$(\frac{\Delta\tau}{N})^{N-1} \prod_{i=1}^{N-1} |p_i^+|. \tag{3.103}$$

Portanto temos

$$Z(x_N^+, x_0^+; x_N^-, x_0^-; \vec{x}_N, \vec{x}_0) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dp_i^+ dp_i^- d\vec{p}_i \prod_{i=1}^{N-1} dx_i^- d\vec{x}_i \prod_{i=0}^{N-1} d\lambda_i$$
$$\prod_{i=0}^{N-1} d\mathcal{P}_i \prod_{i=0}^{N-1} d\bar{\mathcal{P}}_i \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} [-p_i^+(x_{i+1}^- - x_i^-) - p^-(\tau_{i+1}^+ - \tau_i^+) + \vec{p}_i(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) \right.$$
$$\left. -\lambda_i \left( p_i^+ p_i^- - \frac{1}{2}(\vec{p}_i^2 + m^2) \right) \frac{\Delta\tau}{N} + \bar{\mathcal{P}}_i \mathcal{P}_i \frac{\Delta\tau}{N} \right). \tag{3.104}$$

Integrando em $\bar{\mathcal{P}}_i$ e $\mathcal{P}_i$ obtemos o seguinte termo

$$(\frac{\Delta\tau}{N})^N. \tag{3.105}$$

Portanto temos

$$Z(x_N^+, x_0^+; x_N^-, x_0^-; \vec{x}_N, \vec{x}_0) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dp_i^+ dp_i^- d\vec{p}_i \prod_{i=1}^{N-1} dx_i^- d\vec{x}_i \prod_{i=0}^{N-1} d\lambda_i$$
$$\frac{1}{|\epsilon(p_i^+)|} (\frac{N}{\Delta\tau})^{N-1} (\frac{\Delta\tau}{N})^{N-1} \prod_{i=1}^{N-1} |p_i^+| (\frac{\Delta\tau}{N})^N \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} [-p_i^+(x_{i+1}^- - x_i^-) \right.$$
$$\left. -p^-(\tau_{i+1}^+ - \tau_i^+) + \vec{p}_i(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) - \lambda_i \left( p_i^+ p_i^- - \frac{1}{2}(\vec{p}_i^2 + m^2) \right) \frac{\Delta\tau}{N}] \right) \tag{3.106}$$

Agora podemos usar os seguintes fatos:

$$\begin{aligned} |\epsilon(p_i^+)| &= 1, \\ (\tau_{i+1} - \tau_i) &= \frac{\Delta\tau}{N} \end{aligned} \tag{3.107}$$

e integrando em $\lambda_i$ obtemos

$$Z(x_N^+, x_0^+; x_N^-, x_0^-; \vec{x}_N, \vec{x}_0) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dp_i^+ dp_i^- d\vec{p}_i \prod_{i=1}^{N-1} dx_i^- d\vec{x}_i$$
$$\prod_{i=1}^{N-1} |p_i^+| (\frac{\Delta\tau}{N})^N \prod_{i=0}^{N-1} \delta((p_i^+ p_i^- - \frac{1}{2}(\vec{P}_i^2 + m^2))\frac{\Delta\tau}{N}) \exp i \sum_{i=0}^{N-1} (-p_i^+ (x_{i+1}^- - x_i^-)$$
$$-p^- \frac{\Delta\tau}{N} + \vec{p}_i(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i)). \tag{3.108}$$

Integrando em $p_i^-$ obtemos

$$\prod_{i=0}^{N-1} \delta\left((p_i^+ p_i^- - \frac{1}{2}(\vec{p}_i^2 + m^2))\frac{\Delta\tau}{N}\right) = (\frac{N}{\Delta\tau})^N \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{|p_i^+|} \delta(p_i^- - \frac{\vec{p}_i^2 + m^2}{2p_i^+}), \tag{3.109}$$

que substituindo na integral temos

$$Z(x_N^+, x_0^+; x_N^-, x_0^-; \vec{x}_N, \vec{x}_0) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dp^+ d\vec{p}_i \prod_{i=1}^{N-1} dx^{-i} d\vec{x}_i \frac{1}{|p^+|}$$
$$\exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} (-p_i^+ (x_{i+1}^- - x_i^-) - (\frac{\vec{p}_i^2 + m^2}{2p_i^+})\frac{\Delta\tau}{N} + \vec{p}_i(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) \right). \tag{3.110}$$

Fazendo uma integração por partes podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} -p_i^+ (x_{i+1}^- - x_i^-) &= \sum_{i=1}^{N-1} (p_i^+ - p_{i-1}^+) x_i^- - p_{N-1}^+ x_N^- + p_0^+ x_0^-, \\ \sum_{i=0}^{N-1} \vec{p}_i (\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) &= \sum_{i=0}^{N-1} (\vec{p}_i - \vec{p}_{i-1})\vec{x}_i - \vec{p}_{N-1}\vec{x}_N + \vec{p}_0 \vec{x}_0. \end{aligned} \tag{3.111}$$

Ao substituirmos esta relação em nossa expressão e integrarmos em $\vec{x}_i$e $x_i^-$ obtemos

$$Z(x_N^+, x_0^+; x_N^-, x_0^-; \vec{x}_N, \vec{x}_0) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dp^+ d\vec{p}_i \frac{1}{|p_0^+|} \prod_{i=1}^{N-1} \delta(\vec{p}_i - \vec{p}_{i-1})$$
$$\delta(p_i^+ - p_{i-1}^+) \exp i([-p_{N-1}^+ x_N^- + p_0^+ x_0^- + \vec{p}_{N-1}\vec{x}_N - \vec{p}_0\vec{x}_0$$
$$- \sum_{i=0}^{N-1} (\frac{\vec{p}_i^2 + m^2}{2p_i^+}) \frac{\Delta\tau}{N}]) \tag{3.112}$$

Ao integrarmos em $N-1$ vezes em $\vec{p}_i$ e $p_i^+$ obtemos o propagador

$$Z(x_N^+, x_0^+; x_N^-, x_0^-; \vec{x}_N, \vec{x}_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dp_0^+ d\vec{p}_0 \frac{1}{|p_0^+|} \exp i \Big( [-p_0^+ \Delta x^-$$
$$-(\frac{\vec{p}_i^2 + m^2}{2p_i^+}) \Delta\tau + \vec{p}\Delta\vec{x}] \Big), \tag{3.113}$$

que é uma representação da função $\Delta_1$ de Schwinger nas coordenadas do cone de luz obtido em [69].

Este resultado também nos permite concluir que o resultado obtido por Govaerts para o gauge canônico também não está correto e portanto este gauge também não possui problema de Gribov.

O propagador de Feynman é dado por

$$Z_F(x_N^+, x_0^+; x_N^-, x_0^-; \vec{x}_N, \vec{x}_0) =< x_2|\Theta(T)|x_1 >$$
$$= \int DpDxD\lambda D\Pi DCD\bar{C}D\mathcal{P}D\bar{\mathcal{P}}\Theta(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \lambda d\tau)$$
$$\exp(iS_{ef}), \tag{3.114}$$

onde $S_{ef}$ é dada por (3.33) e $T = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1}{p^+} d\tau$. Ao passarmos para o caso discretizado introduzimos a função sinal de $p^+$ adicional. Portanto o propagador é dado por

$$
Z(x_N^+, x_0^+; x_N^-, x_0^-; \vec{x}_N, \vec{x}_0) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dp^+ dp^- d\vec{p}_i \prod_{i=1}^{N-1} dx_i^+ dx^- d\vec{x}_i
$$
$$
\prod_{i=0}^{N-1} d\lambda_i \prod_{i=1}^{N-1} d\Pi_i \prod_{i=0}^{N-1} d\mathcal{P}_i \prod_{i=1}^{N-1} d\bar{C}_i \prod_{i=0}^{N-1} d\bar{\mathcal{P}}_i \prod_{i=1}^{N-1} dC_i \Theta(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{p_i^+} \frac{\Delta\tau}{N})
$$
$$
\exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} \left( -p_i^+ (x_{i+1}^- - x_i^-) - p^- (x_{i+1}^+ - x_i^+) + \vec{p}_i (\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) \right.\right.
$$
$$
\left. +\bar{\mathcal{P}}_i (C_{i+1} - C_i) \right) - \sum_{i=1}^{N-1} [\bar{C}_i C_i |p_i^+| \frac{\Delta\tau}{N} + \Pi_i \epsilon(p_i^+)(x_i^+ - \tau_i) \frac{\Delta\tau}{N})]
$$
$$
\left. + \sum_{i=0}^{N-1} [-\lambda_i \left( p_i^+ p_i^- - \frac{1}{2}(\vec{p}_i^2 + m^2) \right) \frac{\Delta\tau}{N} + \bar{\mathcal{P}}_i \mathcal{P}_i \frac{\Delta\tau}{N}] \right) . \tag{3.115}
$$

Fazendo todas as integrais na mesma ordem do caso anterior, obtem-se

$$
Z(x_N^-, x_0^-; \vec{x}_N, \vec{x}_0) = \Theta(\Delta\tau) \int_{-\infty}^{\infty} dp_0^+ d\vec{p}_0 \frac{1}{|p_0^+|} \exp i \left( -p_0^+ \Delta x^- + \vec{p} \Delta \vec{x} \right.
$$
$$
\left. -(\frac{\vec{p}_i^2 + m^2}{2p_i^+}) \Delta\tau \right) , \tag{3.116}
$$

que é uma representação para o propagador de Feynman nas coordenadas do cone de luz [69].

# Capítulo 4

# Quantização BRST e Simetria de Gauge $Sp(2,\mathbb{R})$

## 4.1 Introdução

Neste capítulo iremos estudar um modelo que possui uma simetria de gauge $Sp(2,\mathbb{R})$ no espaço de fase que atua em $X^M$ e $P^M$ com $M = 0', 1', 0, 1, .....d-1$ . Além desta simetria de gauge, o modelo ainda possui uma simetria global manifesta $SO(d,2)$ que age linearmente em $X^M$ quando o espaço possui duas coordenadas temporais. Devido a essa simetria de gauge esta teoria é equivalente a uma teoria com uma única coordenada temporal. Entretanto a escolha do tempo físico não é única. Para cada escolha de gauge associamos uma hamiltoniana diferente. Essas diversas escolhas dão origem, por exemplo, á descrição da partícula relativística em $d$ dimensões, átomo de hidrogênio em $d-1$ dimensões espaciais e oscilador harmônico em $d-2$ dimensões espaciais, como foi descrito por Bars em [19, 20, 21]. Como os sistemas físicos acima mencionados provém da mesma teoria em $d+2$ dimensões concluimos que houve uma descrição unificada desses sistemas por meio do modelo com simetria de gauge $Sp(2,\mathbb{R})$. Esta formulação é chamada de Física com Dois Tempos (Two-Time Physics). Devido a esses fatos, iremos aplicar o formalismo BFV a fim de compreendermos melhor esta teoria. Até a seção 4.2 iremos descrever os resultados obtidos por Bars e colaboradores.

## 4.2 Formulação Clássica

Vamos considerar uma partícula em movimento num espaço com coordenadas $X_i^M(\tau) = (X_1^M(\tau), X_2^M(\tau))$ com $M, = 0', 1', 0, 1, ...d-1$, que apresenta uma simetria de gauge $Sp(2,\mathbb{R})$ implementada da seguinte forma

$$\delta_\omega X_i^M(\tau) = \epsilon_{ik}\omega^{kl}(\tau)X_l^M, \qquad i,j,k = 1,2 \tag{4.1}$$

onde $\omega^{kl}(\tau)$ são os parâmetros da transformação de gauge, simétricos em $kl$, e $\epsilon_{ij}$ é o símbolo de Levi-Civita. Introduzindo um campo de gauge $A^{ij}(\tau)$, simétrico em $ij$ que transforma-se como

$$\delta_\omega A^{ij}(\tau) = \partial_\tau\omega^{ij}(\tau) + \omega^{ik}(\tau)\epsilon_{kl}A^{lj}(\tau) + \omega^{jk}(\tau)\epsilon_{kl}A^{il}(\tau), \tag{4.2}$$

podemos definir a derivada covariante da seguinte forma

$$D_\tau X_i^M(\tau) = \partial_\tau X_i^M(\tau) - \epsilon_{ik}A^{kl}(\tau)X_l^M(\tau). \tag{4.3}$$

A ação invariante pela simetria definida acima, proposta em [20, 19, 21] é

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(D_\tau X_i^M\right)\epsilon^{ij}X_j^N\eta_{MN} \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(\partial_\tau X_1^M X_2^N - \frac{1}{2}A^{ij}X_i^M X_j^N\right)\eta_{MN}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde a métrica do espaço-tempo $\eta_{MN}$ é plana com assinatura arbitrária.

Passamos para o formalismo hamiltoniano calculando os momentos canônicos

$$\begin{aligned} P_M &= \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_1^M} = X_2^M, \\ P_{ij} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_{ij}} = 0. \qquad i,j = 1,2 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Observando as relações dadas por (4.5) associamos a coordenada $X_2^M$ com o momento canônico de $X_1^M$. Portanto a partir de agora denotaremos $X_1^M = X^M$ e $P^M = X_2^M$. Além dessa identificação, o sistema ainda possui vínculos de primeira classe dados por

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{1}{2}X^2, \\ \phi_2 &= -P\cdot X, \\ \phi_3 &= -\frac{1}{2}P^2, \end{aligned} \tag{4.6}$$

e satisfazem a seguinte álgebra

$$\{\phi_a, \phi_b\} \;=\; f^d_{ab}\phi_d, \qquad a, b, d = 1, 2, 3 \tag{4.7}$$

com as seguintes constantes de estrutura

$$\begin{aligned} &f^1_{12} = -f^1_{21} = -2 \\ &f^2_{13} = -f^2_{31} = -1 \\ &f^3_{23} = -f^3_{32} = -2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Além da simetria de gauge, este modelo possui uma simetria global manifesta $SO(d, 2)$. Utilizando o teorema de Noether obtemos os seus geradores

$$L^{MN} = X^M P^N - P^M X^N, \tag{4.9}$$

que satisfazem a seguinte álgebra

$$\{L^{MN}, L^{RS}\} = \eta^{MR}L^{NS} + \eta^{NS}L^{MR} - \eta^{NR}L^{MS} - \eta^{MS}L^{NR}. \tag{4.10}$$

Estes geradores $L^{MN}$ são invariantes por transformações de gauge.

Ao resolver os vínculos (4.6) podemos considerar :

- que supondo a métrica do espaço tempo $\eta_{MN}$ euclidiana, encontramos a seguinte solução

$$\begin{aligned} &X^M(\tau) = 0, \\ &P^M(\tau) = 0, \end{aligned} \tag{4.11}$$

e consequetemente $L^{MN} = 0$. Como esses geradores são os invariantes de gauge da teoria, concluimos que a teoria definida pela solução acima é trivial.

- que se supusermos a métrica do espaço tempo sendo de Minkowski, obtemos

$$\begin{aligned} &X_0^2 = X_i X^i, \qquad\qquad i = 1, 2, ....d + 1 \\ &P_0 X^0 = P_i X^i, \\ &P_0^2 = P_i P^i, \end{aligned} \tag{4.12}$$

Podemos definir os seguintes vetores $\vec{X} = (X_1, X_2, ...X_{d+1})$ e $\vec{P} = (P_1, P_2, ....P_{d+1})$. Estes correspodem a parte espacial de um vetor no espaço com $d+2$ dimensões. Calculando o poduto escalar $X \cdot P$ obtemos

$$\vec{X} \cdot \vec{P} = |\vec{X}|.|\vec{P}| \cos\theta \tag{4.13}$$

onde $\theta$ é o angulo entre os vetores $\vec{X}$ e $\vec{P}$. Utilizando o resultado dado em (4.12) podemos escrever

$$\cos\theta = \frac{X_0 P_0}{\pm X_0 P_0} = \pm 1 \tag{4.14}$$

ou seja, os vetores $\vec{X}$ e $\vec{P}$ serão paralelos ou antiparalelos. Isto acarreta que os geradores $\vec{L}$ são nulos e consequentemente estão definindo uma teoria trivial.

- A fim de encontramos uma teoria não trivial, ou seja, com $\vec{L} \neq 0$ devemos considerar uma métrica plana $\eta_{MN} = diag(-1, 1, 1, ....., -1)$, ou seja, com uma coordenada temporal extra. Neste caso a solução para os vínculos é dada por

$$\begin{aligned}
&X_{0'}^2 + X_0^2 = X_i X^i \qquad i = 1, 2, , ....d \\
&X_{0'} P_{0'} + X_0 P_0 = P_i X^i \\
&P_{0'}^2 + P_0^2 = P_i P^i
\end{aligned}$$

De forma análoga ao caso anterior podemos definir os vetores $\vec{X} = (X_1, X_2, ..X_d)$ e $\vec{P} = (P_1, P_2, ...P_d)$. Considerando o produto escalar entre estes dois vetores, podemos concluir que

$$\cos\theta = \frac{\vec{X} \cdot \vec{P}}{\sqrt{X^2}\sqrt{P^2}} \tag{4.15}$$

onde $\theta$ é o ângulo entre os vetores. Utilizando as equações dos vínculos obtemos

$$\cos\theta = \frac{X_0 P_0 + X_{0'} P_{0'}}{\sqrt{X_0^2 + X_{0'}^2}\sqrt{P_0^2 + P_{0'}^2}} \tag{4.16}$$

Da expressão acima notamos que estes vetores não são paralelos, o que acarreta que os geradores $L^{MN} \neq 0$, ou seja, definem uma teoria não trivial.

Poderíamos considerar extensões dessa teoria com mais de uma coordenada temporal extra, entretanto, neste caso, a simetria de gauge $Sp(2, \mathbb{R})$ não definirá uma teoria quântica unitária, pois não removerá todos os estados de norma negativa que surgirão pela adição de mais de duas coordenadas temporais. Para definirmos teorias com mais de duas coordenadas temporais devemos encontrar uma nova simetria de gauge que remova todos os estados de norma negativa presentes na teoria quântica.

Reescrevendo a ação na forma hamiltoniana

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left( \partial_\tau X^M P^N - \frac{1}{2} A^{11} X^M X^N - A^{12} X^M P^N - \frac{1}{2} A^{22} P^M P^N \right) \eta_{MN}. \tag{4.17}$$

Podemos escrever as transformações de gauge geradas pelos vínculos de primeira classe (4.6) como

$$\begin{aligned}
\delta_\omega X^M &= \omega^{12}(\tau) X^M + \omega^{22}(\tau) P^M(\tau), \\
\delta_\omega P^M &= -\omega^{11}(\tau) X^M - \omega^{12}(\tau) P^M(\tau), \\
\delta_\omega A^{11} &= \partial_\tau \omega^{11}(\tau) + 2\omega^{11}(\tau) A^{12} - 2\omega^{12}(\tau) A^{11}, \\
\delta_\omega A^{12} &= \partial_\tau \omega^{12}(\tau) + \omega^{11}(\tau) A^{22} - \omega^{22}(\tau) A^{11}, \\
\delta_\omega A^{22} &= \partial_\tau \omega^{22}(\tau) + 2\omega^{21}(\tau) A^{22} - 2\omega^{22}(\tau) A^{12}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Variando a ação (4.17 ) com relação a (4.18 ) obtemos

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{2} \omega^{22}(\tau) P^2 - \frac{1}{2} \omega^{11}(\tau) X^2 \right) \\
&= \left( \frac{1}{2} \omega^{22}(\tau) P^2 - \frac{1}{2} \omega^{11}(\tau) X^2 \right) \Bigg|_{\tau_1}^{\tau_2},
\end{aligned} \tag{4.19}$$

demonstrando que a invariância da ação impõe o anulamento nos extremos dos parâmetros $\omega^{22}(\tau)$ e $\omega^{11}(\tau)$. Esse comportamento é análogo ao resultado obtido no caso da partícula relativística em relação a invariância da ação. Uma outra informação que inferimos a partir da expressão acima é que o parâmetro $\omega^{22}(\tau)$ está relacionado com uma invariância por reparametrização, enquanto que os parâmetros $\omega^{11}(\tau)$ e $\omega^{12}(\tau)$ estão relacionados com as simetrias locais que permitem reduzir o espaço com duas coordenadas temporais a espaços com uma única coordenada temporal efetiva.

Vamos analisar os resultados obtido por Bars [19, 20], nas próximas secções para os casos que descrevem a partícula relativística e o oscilador harmônico.

### 4.2.1 Partícula Relativística Livre

Vamos mostrar uma solução que descreve a partícula relativística livre sem massa em um espaço com $d$ dimensões espaço-temporais. Para isso devemos escolher o sistema de coordenadas $X^M = (X^{+'}, X^{-'}, X^+, X^-, X^i)$ no espaço tempo. As coordenadas do cone de luz são definidas em (3.30) e as componentes da métrica são $\eta^{+'-'} = \eta^{+-} = -1$ nas coordenadas do cone de luz e $\eta^{ij} = \delta^{ij}$ para as $d-2$ coordenadas espaciais restantes. Escolhendo as seguintes condições de gauge $X^{+'} = 1$, $P^{+'} = 0$ e $X^{+} = \tau$ , podemos resolver os vínculos a fim de eliminarmos os graus de liberdade não físicos da teoria, obtendo

$$\begin{aligned} X^M &= (1, \frac{1}{2}X^2, 0, X^-, X^i) \\ P^M &= (0, X \cdot P - X^-P^+, P^+, \frac{P^2}{2P^+}, P^i). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Substituindo a solução obtida acima na ação (4.17)

$$S = \int d\tau \left( \partial_\tau X^i P^i - \partial_\tau X^- P^+ - \frac{P^2}{2P^+} \right), \tag{4.21}$$

que corresponde a ação de uma partícula relativística de massa nula em $d$ dimensões. Portanto, podemos quantizar a teoria nesse gauge utilizando os graus de liberdade físicos presentes na ação dada por (4.21). Tomando $\tau = 0$, podemos construir operadores hermitianos da álgebra de $SO(d,2)$, neste gauge, da seguinte forma

$$\begin{aligned} &L^{ij} = X^iP^j - X^jP^i, \qquad L^{+i} = -X^ip^+, \\ &L^{-i} = X^-P^i - \frac{P^jX^iP^j}{2p^+}, \qquad L^{-+} = \frac{1}{2}(X^-P^+ + P^+X^-), \\ &L^{-'+} = \frac{1}{2}X^2P^+, \qquad L^{+'-'} = P^+, \qquad L^{+'-} = \frac{P^2}{2P^+}, \\ &L^{+'i} = P^i, \qquad L^{+-} = \frac{1}{2}(X^iP^i + P^iX^i - X^-P^+ - P^+X^-), \\ &L^{-'-} = \frac{1}{8P^+}(X^2P^2 + P^2X^2 - 2\alpha) - \frac{X^-}{2}(XP + PX) + X^-P^+X^-, \\ &L^{-'i} = \frac{1}{2}X^jP^iX^j - \frac{1}{2}(X \cdot P)X^i - \frac{1}{2}X^i(P \cdot X) + \frac{1}{2}X^i(X^-P^+ \\ &+P^+X^-), \end{aligned} \tag{4.22}$$

onde a constante $\alpha$ provem do fato de levarmos em conta o ordenamento de $X$ e $P$ . Para determinar seu valor, impomos que os operadores associados aos geradores de $SO(d,2)$ obedeçam à álgebra dada em (4.10).

Observando a estrutura destes operadores, podemos dividi-los nos seguintes subconjuntos: o primeiro subconjunto é $L^{\mu\nu} = (L^{ij}, L^{+i}, L^{-i}, L^{+-})$ que forma uma álgebra de Lorentz $SO(d-1,1)$ em $d$ dimensões espaço-temporais e o segundo forma o subgrupo das translações $p^\mu = (L^{+'-}, L^{+'+}, L^{+'i})$. Portanto o conjunto $(L^{\mu\nu}, p^\mu)$ forma uma álgebra de Poincaré $ISO(d-1,1)$. O subconjunto $K^\mu = (L^{-'+}, L^{-'-}, L^{-'i})$ gera as transformações conformes especiais e $D = L^{+'-'}$corresponde ao operador de dilatação. Uma outra possibilidade de decomposição do grupo $SO(d,2)$ é $SO(d-2) \otimes SO(2,2)$. Na próxima seção analisaremos esta segunda decomposição.

### 4.2.2 Oscilador Harmônico em $d-2$ Dimensões

A base de uma teoria quântica é a escolha da hamiltoniana que será diagonalizada. Como o modelo possui duas coordenadas temporais, a escolha do tempo físico corresponde a uma escolha da hamiltoniana como uma combinação de geradores do grupo $SO(d,2)$. No caso da partícula, escolhemos os geradores $(L^{+'+}, L^{+'i}, L^{+'-})$ para serem diagonalizados. Nesse caso a hamiltoniana é dada por $L^{+'-} = \frac{P^2}{2P^+}$ e os estados no espaço de Hilbert são descritos pelos vetores $|P^+, P^\mu>$. Entretanto existem outras possibilidades de escolha para a hamiltoniana em relação aos geradors de $SO(d,2)$. Por exemplo escolhendo o conjunto $(L^{ij}, L^{+'+}, (L^{+'-} + L^{-'+}))$ onde $L^{ij}$ descreve o momento angular em $d-2$ dimensões, $L^{+'+}$ correspnde ao momento na direção do cone de luz e que fará o papel de massa, enquanto que o último gerador $H = L^{+'-} + L^{-'+} = \frac{P^2}{2P^+} + \frac{1}{2}P^+X^2$ corresponderá à hamiltoniana de um oscilador harmônico em $d-2$ dimensões. O espectro desta hamiltoniana é semelhante ao de um oscilador harmônico em $d-2$ dimensões, em que a massa é dada por $P^+$ e frequência $\omega = 1$, é dado por

$$E_n = [n + \frac{1}{2}(d-2)], \tag{4.23}$$

Gostaríamos de relacionar o número quântico $l$ do momento angular em $d-2$ dimensões e o número quântico $n$ com a representação do grupo $SO(d,2)$. Para isso utilizaremos as representações dos subgrupos $SO(d-2)$ e $SO(2,2)$ para descrever a representação do grupo $SO(d,2)$. Da mesma forma podemos escrever $SO(2,2) = SL(2,R)_L \otimes SL(2,R)_R$. O próximo passo é mostrar que a hamiltoniana canônica do oscilador corresponde a um gerador compacto de $SL(2,R)_R$. Para isso escrevemos os geradores de $SL(2,R)_R$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
G_{2R} &= \frac{1}{2}(L^{+'-} - L^{+-}), \\
G_{0R} + G_{1R} &= L^{+'-}, \\
G_{0R} - G_{1R} &= L^{-'+}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Susbstituindo as expressões dos geradores correspondentes obtem-se

$$G_{2R} = \frac{1}{4}(\vec{X}\cdot\vec{P} + \vec{P}\cdot\vec{X}),$$
$$G_{0R} = \frac{1}{2}(\frac{\vec{P}^2}{2P^+} + \frac{1}{2}P^+\vec{X}^2),$$
$$G_{1R} = \frac{1}{2}(\frac{\vec{P}^2}{2P^+} - \frac{1}{2}P^+\vec{X}^2). \tag{4.25}$$

De forma que podemos concluir que

$$H = 2G_{0R}. \tag{4.26}$$

Calculando o operador de Casimir de $SL(2,R)_R$ podemos concluir que

$$\begin{aligned} C_2(SL(2,R)_R) &= G_{0R}^2 - G_{1R}^2 - G_{2R}^2 \\ &= \frac{1}{4}L^2 + \frac{1}{16}(d-2)(d-6), \end{aligned} \tag{4.27}$$

onde $L^2$ é o operador de Casimir para o subgrupo de $SO(d-2)$. Observe também que

$$\begin{aligned} C_2(SL(2,R)_R)|j,m> &= j_R(j_R+1)j,m>, \\ 2G_{0R}|j,m> &= 2m_R|j,m>. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Como $G_{0R}$ é positivo definido, a representação de $SL(2,R)_R$ é dada pela série positiva discreta caracterizada por

$$m_R = j_R + 1 + n_r, \qquad n_r = 0,1,2,3,.. \tag{4.29}$$

onde $n_r$ é positivo e interpretado como o número quântico radial do oscilador harmônico. Entretanto devemos encontrar quais são os valores permitidos para $j_R$. Da expressão (4.27) observamos que esse número quântico está relacionado com o momento angular orbital em $d-2$ dimensões da seguinte forma

$$\begin{aligned} n &= l + 2n_r \\ m_R &= \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}(d-2) \\ j_R &= j_L = \frac{1}{2}l + \frac{1}{4}d - \frac{3}{2}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Portanto os estados físicos são descritos no espaço de Hilbert pelos vetores $|l;\ j_L P^+, j_R, m_R>$.

Então mostramos que tanto a partícula relativística sem massa em $d$ dimensões como o oscilador harmônico em $d-2$ dimensões são descritos pela mesma teoria com simetria de gauge $Sp(2,\mathbb{R})$.

## 4.3 Quantização BRST Com Simetria de Gauge $Sp(2,\mathbb{R})$

Vamos considerar o formalismo BFV para a teoria $Sp(2,\mathbb{R})$ [74]. Em primeiro lugar adotamos a seguinte notação $A^a = (A^{11}, A^{12}, A^{22})$ com $a = 1,2,3$. Introduzimos os graus de liberdade $\Pi_a$ conjugados aos multiplicadores de Lagrange $A^a$ satisfazendo os colchetes de Poisson

$$\{A^a, \Pi_b\} = \delta^a_b. \tag{4.31}$$

Para não modificarmos o conteúdo físico impomos como vínculo

$$\Pi_a = 0. \tag{4.32}$$

O sistema formado pelos vínculos dados por (4.6) e (4.32) é um sistema de primeira classe, que será denotado por

$$G_{1a} = \phi_a \qquad G_{2a} = \Pi_a, \tag{4.33}$$

e satisfaz a seguinte álgebra

$$\begin{aligned} \{G_{1a}, G_{1b}\} &= f^d_{ab} G_{1d}, \\ \{G_{2a}, G_{2b}\} &= 0, \\ \{G_{1a}, G_{2b}\} &= 0. \end{aligned} \tag{4.34}$$

onde $f^d_{ab}$ é dado por (4.8).

Num segundo momento, introduzimos pares de fantasmas $(C^a, \bar{\mathcal{P}}_a)$ e $(\mathcal{P}^a, \bar{\mathcal{C}}_a)$ associados aos vínculos dados em (4.33) satisfazendo os colchetes de Poisson

$$\{C^a, \bar{\mathcal{P}}_b\} = \{\mathcal{P}^a, \bar{C}_b\} = -\delta^a_b. \tag{4.35}$$

A carga de BRST é

$$Q_B = C^1\phi_1 + C^2\phi_2 + C^3\phi_3 + \mathcal{P}^1\Pi_1 + \mathcal{P}^2\Pi_2 + \mathcal{P}^3\Pi_3 + \frac{1}{2} f^a_{bd} C^b C^d \bar{\mathcal{P}}_a, \tag{4.36}$$

e gera as seguintes transformações de BRST

$$
\begin{aligned}
&\delta X^M = -C^2X^M - C^3P^M, && \delta P^M = C^1X^M + C^2P^M,\\
&\delta A^a = \mathcal{P}^a, && \delta\Pi_a = 0,\\
&\delta\bar{C}_a = -\Pi_a, && \delta\mathcal{P}^a = 0,\\
&\delta C^a = -\frac{1}{2}f^a_{bd}C^b\bar{\mathcal{P}}_a, && \delta\bar{\mathcal{P}}_a = -\phi_a - f^d_{ab}C^b\bar{\mathcal{P}}_d.
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

Vamos agora estudar a implementação da quantização BRST. A condição de gauge é implementada pela seguinte função grasmaniana

$$
\Psi = \frac{1}{\beta}A^1\bar{C}_1 + \frac{1}{\beta}A^2\bar{C}_2 + A^1\bar{\mathcal{P}}_1 + A^2\bar{\mathcal{P}}_2 + A^3\bar{\mathcal{P}}_3, \tag{4.38}
$$

onde $\beta$ é uma constante real diferente de zero. O colchete de Poisson entre a carga de BRST e a função grasmaniana é dado por

$$
\begin{aligned}
\{\Psi, Q_B\} &= \frac{1}{\beta}\mathcal{P}^1\bar{C}_1 - \frac{1}{\beta}A^1\Pi_1 + \frac{1}{\beta}\mathcal{P}^2\bar{C}_2 - \frac{1}{\beta}A^2\Pi_2 + \mathcal{P}^1\bar{\mathcal{P}}_1 + \mathcal{P}^2\bar{\mathcal{P}}_2\\
&+\mathcal{P}^3\bar{\mathcal{P}}_3 - A^1(\frac{1}{2}X^2 - 2C^2\bar{\mathcal{P}}_1 - C^3\bar{\mathcal{P}}_2) + A^2(-P\cdot X - 2C^3\bar{\mathcal{P}}_3 + 2C^1\bar{\mathcal{P}}_1)\\
&+A^3(\frac{1}{2}P^2 + 2C^2\bar{\mathcal{P}}_3 + C^1\bar{\mathcal{P}}_2),
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

e a ação efetiva fica

$$
\begin{aligned}
S_{ef} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \Big( &P_M\dot{X}^M + \bar{\mathcal{P}}_1\dot{C}^1 + \bar{\mathcal{P}}_2\dot{C}^2 + \bar{\mathcal{P}}_3\dot{C}^3 - \Pi_1\dot{A}^1 - \Pi_2\dot{A}^2 - \Pi_3\dot{A}^3\\
&-\dot{\bar{C}}_1\mathcal{P}^1 - \dot{\bar{C}}_2\mathcal{P}^2 - \dot{\bar{C}}_3\mathcal{P}^3 - \frac{1}{\beta}\mathcal{P}^1\bar{C}_1 - \frac{1}{\beta}A^1\Pi_1 + \frac{1}{\beta}\mathcal{P}^2\bar{C}_2 - \frac{1}{\beta}A^2\Pi_2 + \mathcal{P}^1\bar{\mathcal{P}}_1\\
&+\mathcal{P}^3\bar{\mathcal{P}}_3 + \mathcal{P}^2\bar{\mathcal{P}}_2 + A^1(\frac{1}{2}X^2 - 2C^2\bar{\mathcal{P}}_1 - C^3\bar{\mathcal{P}}_2) + A^2(P\cdot X - 2C^3\bar{\mathcal{P}}_3 + 2C^1\bar{\mathcal{P}}_1)\\
&+A^3(\frac{1}{2}P^2 + 2C^2\bar{\mathcal{P}}_3 + C^1\bar{\mathcal{P}}_2)\Big).
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

De forma análoga ao gauge canônico da partícula relativística discutido no capítulo anterior, fazemos a seguinte transformação invariante por BRST

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &\to \beta\Pi_1,\\
\Pi_2 &\to \beta\Pi_2,\\
\bar{C}_1 &\to \beta\bar{C}_1,\\
\bar{C}_2 &\to \beta\bar{C}_2,
\end{aligned}
$$

de forma a reescrever a ação efetiva como

$$
\begin{aligned}
S_{ef} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \Big( & P_M \dot{X}^M + \bar{\mathcal{P}}_1 \dot{C} + \bar{\mathcal{P}}_2 \dot{C}^2 + \bar{\mathcal{P}}_3 \dot{C}^3 - \beta \tilde{\Pi}_1 \dot{A}^1 - \beta \tilde{\Pi}_2 \dot{A}^2 \\
& - \Pi_3 \dot{A}^3 - \beta \dot{\tilde{\bar{C}}}_1 \mathcal{P}^1 - \beta \dot{\tilde{\bar{C}}}_2 \mathcal{P}^2 - \dot{\bar{C}}_3 \mathcal{P}^3 - \frac{1}{\beta} \mathcal{P}^1 \tilde{\bar{C}}_1 - \frac{1}{\beta} A^1 \tilde{\Pi}_1 + \frac{1}{\beta} \mathcal{P}^2 \tilde{\bar{C}}_2 \\
& - \frac{1}{\beta} A^2 \tilde{\Pi}_2 + \mathcal{P}^1 \bar{\mathcal{P}}_1 + \mathcal{P}^2 \bar{\mathcal{P}}_2 + \mathcal{P}^3 \bar{\mathcal{P}}_3 + A^1 (\frac{1}{2} X^2 - 2C^2 \bar{\mathcal{P}}_1 - C^3 \bar{\mathcal{P}}_2) \\
& + A^2 (P \cdot X - 2C^3 \bar{\mathcal{P}}_3 + 2C^1 \bar{\mathcal{P}}_1) + \frac{1}{2} A^3 (P^2 + 2C^2 \bar{\mathcal{P}}_3 + C^1 \bar{\mathcal{P}}_2) \Big) , \qquad (4.41)
\end{aligned}
$$

Tomando o limite $\beta \to 0$

$$
\begin{aligned}
S_{ef} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \Big( & P_M \dot{X}^M + \bar{\mathcal{P}}_1 \dot{C} + \bar{\mathcal{P}}_2 \dot{C}^2 + \bar{\mathcal{P}}_3 \dot{C}^3 - \Pi_{3i} \dot{A}_i^3 - \dot{\bar{C}}_3 \mathcal{P}^3 \\
& - \mathcal{P}^1 \tilde{\bar{C}}_1 - A^1 \tilde{\Pi}_1 + \mathcal{P}^2 \tilde{\bar{C}}_2 - A^2 \tilde{\Pi}_2 + \mathcal{P}^1 \bar{\mathcal{P}}_1 + \mathcal{P}^2 \bar{\mathcal{P}}_2 + \mathcal{P}^3 \bar{\mathcal{P}}_3 + A^1 (\frac{1}{2} X^2 \\
& - 2C^2 \bar{\mathcal{P}}_1 - C^3 \bar{\mathcal{P}}_2) + A^2 (P \cdot X - 2C^3 \bar{\mathcal{P}}_3 + 2C^1 \bar{\mathcal{P}}_1) + \frac{1}{2} A^3 (P^2 \\
& + 2C^2 \bar{\mathcal{P}}_3 + C^1 \bar{\mathcal{P}}_2) \big) , \qquad (4.42)
\end{aligned}
$$

Fazendo a seguinte transformação invariante por transformações de BRST dada por

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Pi}_1 \to \Pi_1, \qquad & \tilde{\Pi}_2 \to \Pi_2, \\
\tilde{\bar{C}}_1 \to \bar{C}_1, \qquad & \tilde{\bar{C}}_2 \to \bar{C}_2,
\end{aligned}
$$

a ação efetiva é escrita da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
S_{ef} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \Big( & P_M \dot{X}^M + \bar{\mathcal{P}}_1 \dot{C}^1 + \bar{\mathcal{P}}_2 \dot{C}^2 + \bar{\mathcal{P}}_3 \dot{C}^3 - \Pi_3 \dot{A}^3 - \dot{\bar{C}}_3 \mathcal{P}^3 \\
& - \mathcal{P}^1 \bar{C}_1 - A^1 \Pi_1 + \mathcal{P}^2 \bar{C}_2 - A^2 \Pi_2 + \mathcal{P}^1 \bar{\mathcal{P}}_1 + \mathcal{P}^2 \bar{\mathcal{P}}_2 + \mathcal{P}^3 \bar{\mathcal{P}}_3 - C \bar{\mathcal{P}}_1 \\
& + A^1 (\frac{1}{2} X^2 - 2C^2 \bar{\mathcal{P}}_1 - C^3 \bar{\mathcal{P}}_2) + A^2 (P \cdot X - 2C^3 \bar{\mathcal{P}}_3 + 2C^1 \bar{\mathcal{P}}_1) \\
& + A^3 (\frac{1}{2} P^2 + 2C^2 \bar{\mathcal{P}}_3 + C^1 \bar{\mathcal{P}}_2) \Big) . \qquad (4.43)
\end{aligned}
$$

As equações de movimento são

$$
\begin{aligned}
\dot{P}^{\mathrm{M}} + A^1 X^M - A^2 P^M &= 0 \\
\dot{X}^M + A^2 X^M + A^3 P^M &= 0 \\
\dot{\bar{\mathcal{P}}}_1 - 2A^2\bar{\mathcal{P}}_1 - A^3\bar{\mathcal{P}}_2 &= 0 \\
\dot{\bar{\mathcal{P}}}_2 + 2A^1\bar{\mathcal{P}}_1 - 2A^3\bar{\mathcal{P}}_3 &= 0 \\
\dot{\bar{\mathcal{P}}}_3 - A^1\bar{\mathcal{P}}_2 + 2A^2\bar{\mathcal{P}}_3 &= 0 \\
\dot{C}^1 - \mathcal{P}^1 - 2A^1C^2 + 2A^2C^1 &= 0 \\
\dot{C}^2 + \mathcal{P}^2 - A^1C^3 + A^3C^1 &= 0 \\
\dot{C}^3 - \mathcal{P}^3 + 2A^3C^2 - 2A^2C^1 &= 0 \\
\mathcal{P}^a &= 0 \qquad a = 1,2 \\
\dot{\bar{C}}_3 - \bar{\mathcal{P}}_3 &= 0 \\
A^a &= 0 \qquad a = 1,2 \\
\bar{C}_2 + \bar{\mathcal{P}}_2 &= 0 \\
\dot{A}^3 &= 0 \\
\bar{C}_1 + \bar{\mathcal{P}}_1 &= 0 \\
\dot{\mathcal{P}}^3 &= 0 \\
-\dot{\Pi}_3 + \frac{1}{2}P^2 + 2C^2\bar{\mathcal{P}}_3 + C^1\bar{\mathcal{P}}_2 &= 0 \\
\Pi_1 - \frac{1}{2}X^2 + 2C^2\bar{\mathcal{P}}_1 + C^3\bar{\mathcal{P}}_2 &= 0 \\
\Pi_2 - \frac{1}{2}P\cdot X - 2C^1\bar{\mathcal{P}}_1 + 2C^3\bar{\mathcal{P}}_3 &= 0
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

Utilizando as condições de contorno dadas em (2.45) encontramos as seguintes soluções

$$
\begin{aligned}
& X^M(\tau) = X_1^M + \frac{\Delta X^M}{\Delta\tau}(\tau - \tau_1), \\
& A^3(\tau) = A_0^3, \\
& P^M = \frac{\Delta X^M}{\Delta\tau}, \\
& A^1 = A^2 = 0 \\
& \bar{C}_1 = \bar{C}_2 = \bar{C}_3 = 0 \\
& C^1 = C^2 = C^3 = 0 \\
& \mathcal{P}^1 = \mathcal{P}^2 = \mathcal{P}^3 = 0 \\
& \bar{\mathcal{P}}_1 = \bar{\mathcal{P}}_2 = \bar{\mathcal{P}}_3 = 0 \\
& \Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = 0
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

onde $A_0^3$ é uma constante real. Observando as soluções notamos que essas são semelhantes às encontradas para uma partícula relativística em $d$ dimensões dadas por (3.24).

## 4.4 Propagador no Formalismo BFV

O propagador, no formalismo BFV é dado por

$$Z(X_N^\mu, X_0^\mu) = \int DX^M DP^M DA^1 DA^2 DA^3 D\Pi_1 D\Pi_2 D\Pi_3$$
$$D\bar{C}_1 D\bar{C}_2 D\bar{C}_3 DC^1 DC^2 DC^3 D\bar{\mathcal{P}}_1 D\bar{\mathcal{P}}_2 D\bar{\mathcal{P}}_3 D\mathcal{P}^1 D\mathcal{P}^2 \exp(iS_{ef}), \quad (4.46)$$

com $S_{ef}$ é dado por (4.43). Para calcularmos este propagador, discretizamos a integral de trajetória utilizando as condições de contorno dadas em (2.45). Entretanto, antes de calcularmos o propagador explicitamente, devemos analisar o efeito da discretização sobre a invariância da ação discretizada. Isso será discutido na próxima seção com detalhes.

### 4.4.1 Invariância da Ação Discretizada

A ação dada em (4.43) é discretizada da seguinte forma

$$S_{ef} = \sum_{i=0}^{N-1} \Bigg( P_{Mi}(X_{i+1}^M - X_i^M)] + \sum_{i=0}^{N} \bar{\mathcal{P}}_{1i}(C_{i+1}^1 - C_i^1) + \sum_{i=0}^{N-1} \bar{\mathcal{P}}_{2i}(C_{i+1}^2 - C_i^2)$$
$$+\bar{\mathcal{P}}_{3i}(C_{i+1}^3 - C_i^3)\Big) + \sum_{i=1}^{N-1} [\bar{C}_{3i}(\mathcal{P}_{i+1}^3 - \mathcal{P}_i^3) + \Pi_{3i}(A_{i+1}^3 - A_i^3)]$$
$$+\frac{\Delta\tau}{N} \Bigg( - \sum_{i=1}^{N-1} (\mathcal{P}_i^1 \bar{C}_{1i} + \mathcal{P}_i^2 \bar{C}_{2i}) - \sum_{i=0}^{N} \mathcal{P}_i^1 \bar{\mathcal{P}}_{1i} - \sum_{i=1}^{N-1} (\mathcal{P}_i^2 \bar{\mathcal{P}}_{2i} + \mathcal{P}_i^3 \bar{\mathcal{P}}_{3i})$$
$$+ \sum_{i=1}^{N-1} (A_i^1 \Pi_{1i} + A_i^2 \Pi_{2i}) - \sum_{i=0}^{N} A_i^1 (\frac{1}{2} X_i^2 - 2C_i^2 \bar{\mathcal{P}}_{1i} - C_i^3 \bar{\mathcal{P}}_{2i}) - \sum_{i=1}^{N-1} A_i^2 (P_{Mi} X_i^M$$
$$+2C_i^1 \bar{\mathcal{P}}_{1i} - 2C_i^3 \bar{\mathcal{P}}_{3i}) - \sum_{i=1}^{N-1} A_i^3 (\frac{1}{2} P_i^2 - C_i^1 \bar{\mathcal{P}}_{2i} + 2C_i^2 \bar{\mathcal{P}}_{3i}) \Bigg). \quad (4.47)$$

Discretizando de forma ingênua as transformações de BRST dadas em (4.37), podemos escrever

$$
\begin{aligned}
&\delta X_i^M = -C_i^2 X_i^M - C_i^3 P^M, && \delta P_i^M = C_i^1 X_i^M + C_i^2 P_i^M,\\
&\delta A_i^a = \mathcal{P}_i^a, && \delta \Pi_{ai} = 0\\
&\delta \bar{C}_{ia} = -\Pi_a, && \delta \mathcal{P}_i^a = 0\\
&\delta C_i^a = -\frac{1}{2} f_{bd}^a C_i^b \bar{\mathcal{P}}_{ia} && \delta \bar{\mathcal{P}}_{ia} = -\phi_{ai} - f_{ab}^d C^b \bar{\mathcal{P}}_d,
\end{aligned} \tag{4.48}
$$

Variando a ação (4.47) em relação (4.48) obtem-se

$$
\begin{aligned}
\delta S_{ef} = &\sum_{i=0}^{N-1} \Bigg( C_i^1 X_i X_{i+1} - \frac{3}{2} C_i^1 X_i^2 - (C_{i+1}^2 - C_i^2) P_i (X_{i+1} - X_i)\\
&- C_{i+1}^3 P_i P_{i+1} + \frac{1}{2} C_i^3 P_i^2 + C_{i+1}^3 P_i^2 + \frac{1}{2} C_{i+1}^1 X_i^2 + f_{ab}^d \bar{\mathcal{P}}_{di} (C_i^b C_{i+1}^a - \frac{1}{2} C_{i+1}^b C_{i+1}^a\\
&- \frac{1}{2} C_i^b C_i^a \Bigg)\\
&\neq 0,
\end{aligned} \tag{4.49}
$$

ou seja, a ação perde a invariância após o processo de discretização. Para restaurarmos a sua invariância devemos modificar as transformações de forma que no limite do contínuo obtenhamos as transformações usuais de BRST (4.37). Introduzindo modificações de ordem zero em $\frac{\Delta\tau}{N}$ nas transformações, como foi feito no caso da partícula, não foi possível restaurar a invariância da ação discretizada. Nesse caso, precisamos introduzir termos de ordem $\frac{\Delta\tau}{N}$ nas transformações. As transformações de BRST discretizadas modificadas ficam da seguinte forma

$$
\delta X_i^M = -C_i^2 X_i^M - \frac{1}{2} C_i^3 (P_i^M + P_{i-1}^M) + \frac{\Delta\tau}{N} \left( \frac{1}{2} (A_i^1 X_i^M + A_i^2 P_i^M) C_i^3 \right),
$$

$$
\begin{aligned}
\delta P_i^M = &\frac{1}{2} C_i^1 (X_{i+1}^M + X_i^M) + C_i^2 P_i^M + \frac{\Delta\tau}{N} \Bigg( \frac{1}{2} \mathcal{P}_i^1 (X_{i+1}^M + X_i^M) + \mathcal{P}_i^2 P_i^M\\
&- A_i^1 C_i^2 (X_{i+1}^M + X_i^M) - A_i^1 C_i^3 P_i^M + A_i^2 C_i^1 (X_{i+1}^M + \frac{1}{2} X_i^M) + A_i^3 C_i^1 P_i^M \Bigg),
\end{aligned}
$$

$$\delta\bar{\mathcal{P}}_{1i} = \frac{1}{2}X^2_{i+1} - (C^2_{i+1} + C^2_i)\bar{\mathcal{P}}_{1i} - \frac{1}{2}(C^3_{i+1} + C^3_i)\bar{\mathcal{P}}_{2i} + \frac{\Delta\tau}{N}\Big(-\mathcal{P}^2_i\bar{\mathcal{P}}_{1i}$$
$$-\frac{1}{2}\mathcal{P}^3_i\bar{\mathcal{P}}_{2i} + A^1_iC^3_i\bar{\mathcal{P}}_{1i} + A^2_iC^3_i\bar{\mathcal{P}}_{2i} - A^3_iC^1_i\bar{\mathcal{P}}_{1i} - A^3_iC^2_i\bar{\mathcal{P}}_{2i}\Big),$$

$$\delta\bar{\mathcal{P}}_{2i} = P_{Mi}X^M_{i+1} + (C^1_{i+1} + C^1_i)\bar{\mathcal{P}}_{1i} - (C^3_{i+1} + C^3_i)\bar{\mathcal{P}}_{3i} + \frac{\Delta\tau}{N}\big(\mathcal{P}^1_i\bar{\mathcal{P}}_{1i}$$
$$-\mathcal{P}^3_i\bar{\mathcal{P}}_{3i} - 2A^1_iC^2_i\bar{\mathcal{P}}_{1i} + 2A^2_iC^1_i\bar{\mathcal{P}}_{1i} + 2A^2_iC^3_i\bar{\mathcal{P}}_{3i} - 2A^3_iC^2_i\bar{\mathcal{P}}_{3i}\big),$$

$$\delta\bar{\mathcal{P}}_{3i} = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}(C^1_{i+1} + C^1_i)\bar{\mathcal{P}}_{2i} + (C^2_{i+1} + C^2_i)\bar{\mathcal{P}}_{3i} + \frac{\Delta\tau}{N}\Big(\frac{1}{2}\mathcal{P}^1_i\bar{\mathcal{P}}_{2i}$$
$$+\mathcal{P}^2\bar{\mathcal{P}}_{3i} - A^1_iC^2_i\bar{\mathcal{P}}_{2i} - A^1_iC^3_i\bar{\mathcal{P}}_{3i} + A^2_iC^1_i\bar{\mathcal{P}}_{2i} + A^3_iC^1_i\bar{\mathcal{P}}_{3i}\big). \tag{4.50}$$

As outras transformações de BRST pemanecem inalteradas. Estas transformações são nilpotentes on-shell como é demonstrado no apêndice.

### 4.4.2 Propagador

Discretizando o propagador dado em (4.46) obtemos

$$Z(X^M_N, X^M_0) = \lim_{N\to\infty}\int\prod_{i=0}^{N-1}dP^M_i\prod_{i=1}^{N-1}dX^M_i\prod_{i=0}^{N}dA^1_i\prod_{i=1}^{N-1}dA^2_i\prod_{i=0}^{N}dA^3_i\prod_{i=1}^{N-1}d\Pi_{1i}$$
$$d\Pi_{2i}d\Pi_{3i}\prod_{i=1}^{N}dC^1_i\prod_{i=1}^{N-1}dC^2_idC^3_id\bar{C}_{1i}d\bar{C}_{2i}d\bar{C}_{3i}\prod_{i=0}^{N}d\mathcal{P}^1_i\prod_{i=1}^{N-1}d\mathcal{P}^2_i\prod_{i=1}^{N}d\mathcal{P}^3_i\prod_{i=0}^{N}d\bar{\mathcal{P}}_{1i}$$
$$\prod_{i=0}^{N-1}d\bar{\mathcal{P}}_{2i}d\bar{\mathcal{P}}_{3i}\exp(iS_{ef}), \tag{4.51}$$

onde $S_{ef}$ é a ação discretizada dada em (4.47).

Integrando o propagador em relação a $\Pi_{1i}$ e $\Pi_{2i}$ chegamos a

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{N-1}\delta(A^1_i\frac{\Delta\tau}{N}) &= (\frac{N}{\Delta\tau})^{N-1}\prod_{i=1}^{N-1}\delta(A^1_i),\\ \prod_{i=1}^{N-1}\delta(A^2_i\frac{\Delta\tau}{N}) &= (\frac{N}{\Delta\tau})^{N-1}\prod_{i=1}^{N-1}\delta(A^2_i),\end{aligned} \tag{4.52}$$

Integrando em $A^1_i$ e $A^2_i$ encontramos

$$Z(X_N^M, X_0^M) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dP_i^M \prod_{i=1}^{N-1} dX_i^M dA_0^1 dA_N^1 \prod_{i=1}^{N} dA_i^3 \prod_{i=1}^{N-1} d\Pi_{3i} \prod_{i=1}^{N} dC_i^1$$
$$\prod_{i=1}^{N-1} dC_i^2 dC_i^3 d\bar{C}_{1i} d\bar{C}_{2i} d\bar{C}_{3i} \prod_{i=0}^{N} d\mathcal{P}_i^1 \prod_{i=1}^{N-1} d\mathcal{P}_i^2 \prod_{i=1}^{N} d\mathcal{P}_i^3 \prod_{i=0}^{N} d\bar{\mathcal{P}}_{1i} \prod_{i=0}^{N-1} d\bar{\mathcal{P}}_{2i} d\bar{\mathcal{P}}_{3i}$$
$$(\frac{\Delta\tau}{N})^{-2(N-1)} \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} [P_{Mi}(X_{i+1}^M - X_i^M) + \sum_{i=0}^{N} \bar{\mathcal{P}}_{1i}(C_{i+1}^1 - C_i^1)] \right.$$
$$+ \sum_{i=0}^{N-1} [\bar{\mathcal{P}}_{2i}(C_{i+1}^2 - C_i^2) + \bar{\mathcal{P}}_{3i}(C_{i+1}^3 - C_i^3)] + \sum_{i=1}^{N-1} \big( \bar{C}_{3i}(\mathcal{P}_{i+1}^3 - \mathcal{P}_i^3)$$
$$+\Pi_{3i}(A_{i+1}^3 - A_i^3)\big) + \frac{\Delta\tau}{N} \left( - \sum_{i=1}^{N-1} (\mathcal{P}_i^1 \bar{C}_{1i} + \mathcal{P}_i^2 \bar{C}_{2i}) - \sum_{i=0}^{N} \mathcal{P}_i^1 \bar{\mathcal{P}}_{1i} + \sum_{i=1}^{N-1} (\mathcal{P}_i^2 \bar{\mathcal{P}}_{2i} \right.$$
$$\left.\left. +\mathcal{P}_i^3 \bar{\mathcal{P}}_{3i}) - \frac{1}{2}(A_0^1 X^2 + A_N^1 X_N^2) - \sum_{i=1}^{N-1} A_i^3 (\frac{1}{2} P_i^2 - C_i^1 \bar{\mathcal{P}}_{2i} + 2C_i^2 \bar{\mathcal{P}}_{3i}) \right) \right). \quad (4.53)$$

Integrando a expressão acima em relação a $\bar{C}_{1i}$ e em seguida em $\mathcal{P}_i^1$ chegamos a

$$Z(X_N^M, X_0^M) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dP_i^M \prod_{i=1}^{N-1} dX_i^M dA_0^1 dA_N^1 \prod_{i=1}^{N} dA_i^3 \prod_{i=1}^{N-1} d\Pi_{3i} \prod_{i=1}^{N} dC_i^1$$
$$\prod_{i=1}^{N-1} dC_i^2 dC_i^3 d\bar{C}_{2i} d\bar{C}_{3i} d\mathcal{P}_0^1 d\mathcal{P}_N^1 \prod_{i=1}^{N-1} d\mathcal{P}_i^2 \prod_{i=1}^{N} d\mathcal{P}_i^3 \prod_{i=0}^{N} d\bar{\mathcal{P}}_{1i} \prod_{i=0}^{N-1} d\bar{\mathcal{P}}_{2i} d\bar{\mathcal{P}}_{3i}$$
$$(\frac{\Delta\tau}{N})^{-(N-1)} \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} [P_{Mi}(X_{i+1}^M - X_i^M) + \sum_{i=0}^{N} \bar{\mathcal{P}}_{1i}(C_{i+1}^1 - C_i^1)] \right.$$
$$+ \sum_{i=0}^{N-1} [\bar{\mathcal{P}}_{2i}(C_{i+1}^2 - C_i^2) + \bar{\mathcal{P}}_{3i}(C_{i+1}^3 - C_i^3)] + \sum_{i=1}^{N-1} \big( \bar{C}_{3i}(\mathcal{P}_{i+1}^3 - \mathcal{P}_i^3)$$
$$+\Pi_{3i}(A_{i+1}^3 - A_i^3)\big) + \frac{\Delta\tau}{N} \left( - \sum_{i=1}^{N-1} (\mathcal{P}_i^2 \bar{C}_{2i}) - \mathcal{P}_0^1 \bar{\mathcal{P}}_{10} - \mathcal{P}_N^1 \bar{\mathcal{P}}_{1N} + \sum_{i=1}^{N-1} (\mathcal{P}_i^2 \bar{\mathcal{P}}_{2i} \right.$$
$$\left.\left. +\mathcal{P}_i^3 \bar{\mathcal{P}}_{3i}) + \frac{1}{2}(A_0^1 X^2 + A_N^1 X_N^2) - \sum_{i=1}^{N-1} A_i^3 (\frac{1}{2} P_i^2 - C_i^1 \bar{\mathcal{P}}_{2i} - 2C_i^2 \bar{\mathcal{P}}_{3i}) \right) \right). \quad (4.54)$$

Integrando o resultado acima em relação a $\bar{C}_{2i}$ e em seguida em $\mathcal{P}_i^2$ obtemos

$$
\begin{aligned}
Z(X_N^M, X_0^M) &= \lim_{N\to\infty}\int \prod_{i=0}^{N-1} dP_i^M \prod_{i=1}^{N-1} dX_i^M dA_0^1 dA_N^1 \prod_{i=1}^{N} dA_i^3 \prod_{i=1}^{N-1} d\Pi_{3i} \prod_{i=1}^{N} dC_i^1 \\
&\prod_{i=1}^{N-1} dC_i^2 dC_i^3 d\bar{C}_{3i} d\mathcal{P}_0^1 d\mathcal{P}_N^1 \prod_{i=1}^{N} d\mathcal{P}_i^3 \prod_{i=0}^{N} d\bar{\mathcal{P}}_{1i} \prod_{i=0}^{N-1} d\bar{\mathcal{P}}_{2i} d\bar{\mathcal{P}}_{3i} \exp i\Bigg(\sum_{i=0}^{N-1} P_{Mi}(X_{i+1}^M \\
&-X_i^M) + \sum_{i=0}^{N} \bar{\mathcal{P}}_{1i}(C_{i+1}^1 - C_i^1) + \sum_{i=0}^{N-1}[\bar{\mathcal{P}}_{2i}(C_{i+1}^2 - C_i^2) + \bar{\mathcal{P}}_{3i}(C_{i+1}^3 - C_i^3)] \\
&+\sum_{i=1}^{N-1}\big(\bar{C}_{3i}((\mathcal{P}_{i+1}^3 - \mathcal{P}_i^3) + \Pi_{3i}(A_{i+1}^3 - A_i^3)\big) + \frac{\Delta\tau}{N}\big((-\mathcal{P}_0^1\bar{\mathcal{P}}_{10} - \mathcal{P}_N^1\bar{\mathcal{P}}_{1N} + A_N^1 X_N^2) \\
&+\sum_{i=1}^{N-1}(\mathcal{P}_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i}) - \frac{1}{2}(A_0^1 X^2 + A_N^1 X_N^2) - \sum_{i=1}^{N-1} A_i^3(\frac{1}{2}P_i^2 - C_i^1\bar{\mathcal{P}}_{2i} - 2C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{3i} \\
&-2C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{3i})\big)\Bigg)
\end{aligned} \tag{4.55}
$$

Integrando em $\mathcal{P}_0^1$ e $\mathcal{P}_N^1$ concluimos que $\bar{\mathcal{P}}_{10} = \bar{\mathcal{P}}_{1N} = 0$ e podemos escrever a expressão do propagador como

$$
\begin{aligned}
Z(X_N^M, X_0^M) &= \lim_{N\to\infty}\int \prod_{i=0}^{N-1} dP_i^M \prod_{i=1}^{N-1} dX_i^M dA_0^1 dA_N^1 \prod_{i=1}^{N} dA_i^3 \prod_{i=1}^{N-1} d\Pi_{3i} \prod_{i=1}^{N} dC_i^1 \\
&\prod_{i=1}^{N-1} dC_i^2 dC_i^3 d\bar{C}_{3i} \prod_{i=1}^{N} d\mathcal{P}_i^3 \prod_{i=1}^{N-1} d\bar{\mathcal{P}}_{1i} \prod_{i=0}^{N-1} d\bar{\mathcal{P}}_{2i} d\bar{\mathcal{P}}_{3i} (\frac{\Delta\tau}{N})^2 \exp i\Bigg(\sum_{i=0}^{N-1} P_{Mi}(X_{i+1}^M \\
&-X_i^M) + \sum_{i=1}^{N-1} \bar{\mathcal{P}}_{1i}(C_{i+1}^1 - C_i^1) + \sum_{i=0}^{N-1}[\bar{\mathcal{P}}_{2i}(C_{i+1}^2 - C_i^2) + \bar{\mathcal{P}}_{3i}(C_{i+1}^3 - C_i^3)] \\
&\sum_{i=1}^{N-1}\big(\bar{C}_{3i}(\mathcal{P}_{i+1}^3 - \mathcal{P}_i^3) + \Pi_{3i}(A_{i+1}^3 - A_i^3)\big) + \frac{\Delta\tau}{N}\Bigg(+\sum_{i=1}^{N-1}(\mathcal{P}_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i}) - \frac{1}{2}(A_0^1 X^2 \\
&+A_N^1 X_N^2) - \sum_{i=1}^{N-1} A_i^3(\frac{1}{2}P_i^2 - C_i^1\bar{\mathcal{P}}_{2i} - 2C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{3i})\Bigg)\Bigg).
\end{aligned} \tag{4.56}
$$

Integrando em $\bar{\mathcal{P}}_{1i}(i = 1, ..\text{N-1})$ e em seguida em $C_i^1$ podemos reescrever o propagador como

$$Z(X_N^M, X_0^M) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dP_i^M \prod_{i=1}^{N-1} dX_i^M dA_0^1 dA_N^1 \prod_{i=1}^{N} dA_i^3 \prod_{i=1}^{N-1} d\Pi_{3i} dC_N^1 \prod_{i=1}^{N-1} dC_i^2$$
$$dC_i^3 d\bar{C}_{3i} \prod_{i=1}^{N} d\mathcal{P}_i^3 \prod_{i=0}^{N-1} d\bar{\mathcal{P}}_{2i} d\bar{\mathcal{P}}_{3i} (\frac{\Delta\tau}{N})^2 \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} P_{Mi}(X_{i+1}^M - X_i^M) + \sum_{i=0}^{N-1} [\bar{\mathcal{P}}_{2i}(C_{i+1}^2 \right.$$
$$-C_i^2) + \bar{\mathcal{P}}_{3i}(C_{i+1}^3 - C_i^3)] + \sum_{i=1}^{N-1} [\bar{C}_{3i}(\mathcal{P}_{i+1}^3 - \mathcal{P}_i^3) + \Pi_{3i}(A_{i+1}^3 - A_i^3)] + \frac{\Delta\tau}{N} [(\sum_{i=1}^{N-1} (\mathcal{P}_i^3 \bar{\mathcal{P}}_{3i})$$
$$\left. -\frac{1}{2}(A_0^1 X^2 + A_N^1 X_N^2) - \frac{1}{2}(A_0^1 X^2 + A_N^1 X_N^2) - \sum_{i=1}^{N-1} A_i^3 (\frac{1}{2} P_i^2 - C_N^1 \bar{\mathcal{P}}_{2i} - 2C_i^2 \bar{\mathcal{P}}_{3i})] \right) \quad (4.57)$$

Integrando em $\Pi_{3i}$ escrevemos

$$Z(X_N^M, X_0^M) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dP_i^M \prod_{i=1}^{N-1} dX_i^M dA_0^1 dA_N^1 \prod_{i=1}^{N} dA_i^3 dC_N^1 \prod_{i=1}^{N-1} dC_i^2 dC_i^3$$
$$d\bar{C}_{3i} \prod_{i=1}^{N} d\mathcal{P}_i^3 \prod_{i=0}^{N-1} d\bar{\mathcal{P}}_{2i} d\bar{\mathcal{P}}_{3i} \prod_{i=1}^{N-1} \delta(A_{i+1}^3 - A_i^3) (\frac{\Delta\tau}{N})^2 \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} P_{Mi}(X_{i+1}^M \right.$$
$$-X_i^M) + \sum_{i=0}^{N-1} [\bar{\mathcal{P}}_{2i}(C_{i+1}^2 - C_i^2) + \bar{\mathcal{P}}_{3i}(C_{i+1}^3 - C_i^3)] + \sum_{i=1}^{N-1} [\bar{C}_{3i}(\mathcal{P}_{i+1}^3 - \mathcal{P}_i^3)$$
$$+\frac{\Delta\tau}{N} \left( \sum_{i=1}^{N-1} (\mathcal{P}_i^3 \bar{\mathcal{P}}_{3i}) - \frac{1}{2}(A_0^1 X^2 + A_N^1 X_N^2) - \sum_{i=1}^{N-1} A_i^3 (\frac{1}{2} P_i^2 - C_N^1 \bar{\mathcal{P}}_{2i} \right.$$
$$\left.\left. -2C_i^2 \bar{\mathcal{P}}_{3i}) \right) \right) . \quad (4.58)$$

Integrando em $A_i^3$ obtemos

$$Z(X_N^M, X_0^M) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dP_i^M \prod_{i=1}^{N-1} dX_i^M dA_0^1 dA_N^1 dA_N^3 dC_N^1 \prod_{i=1}^{N-1} dC_i^2 dC_i^3 d\bar{C}_{3i}$$
$$\prod_{i=1}^{N} d\mathcal{P}_i^3 \prod_{i=0}^{N-1} d\bar{\mathcal{P}}_{2i} d\bar{\mathcal{P}}_{3i} (\frac{\Delta\tau}{N})^2 \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} P_{Mi}(X_{i+1}^M - X_i^M) + \sum_{i=0}^{N-1} [\bar{\mathcal{P}}_{2i}(C_{i+1}^2 \right.$$
$$-C_i^2) + \bar{\mathcal{P}}_{3i}(C_{i+1}^3 - C_i^3)] + \sum_{i=1}^{N-1} [\bar{C}_{3i}(\mathcal{P}_{i+1}^3 - \mathcal{P}_i^3) + \frac{\Delta\tau}{N} \left( + \sum_{i=1}^{N-1} (\mathcal{P}_i^3 \bar{\mathcal{P}}_{3i}) \right.$$
$$\left.\left. -\frac{1}{2}(A_0^1 X_0^2 + A_N^1 X_N^2) - \sum_{i=1}^{N-1} A_{N-1}^3 (\frac{1}{2} P_i^2 - C_N^1 \bar{\mathcal{P}}_{2i} - 2C_i^2 \bar{\mathcal{P}}_{3i}) \right) \right) . \quad (4.59)$$

Agora integrando em $\bar{\mathcal{P}}_{2i}(i = 1, ..N-1)$ e $C_i^2$ mostramos que

$$\begin{aligned}
C_1^2 &= C_2^2 + \frac{\Delta\tau}{N} A_2^3 C_N^1 \\
C_2^2 &= C_3^2 + \frac{\Delta\tau}{N} A_3^3 C_N^1 \\
&\vdots \\
C_{N-1}^2 &= \frac{\Delta\tau}{N} A_N^3 C_N^1.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Portanto podemos reescrever o propagador da seguinte forma

$$\begin{aligned}
Z(X_N^M, X_0^M) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dP_i^M \prod_{i=1}^{N-1} dX_i^M dA_0^1 dA_N^1 dA_N^3 dC_N^1 \prod_{i=1}^{N-1} dC_i^3 d\bar{C}_{3i} \\
\prod_{i=1}^{N} d\mathcal{P}_i^3 \prod_{i=0}^{N-1} d\bar{\mathcal{P}}_{3i} d\frac{\Delta\tau}{N})^2 \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} [P_{Mi}(X_{i+1}^M - X_i^M) + \bar{\mathcal{P}}_{3i}(C_{i+1}^3 - C_i^3)] \right. \\
+ \bar{\mathcal{P}}_{20} A_N^3 \Delta\tau + \sum_{i=1}^{N-1} \bar{C}_{3i}(\mathcal{P}_{i+1}^3 - \mathcal{P}_i^3) + \frac{\Delta\tau}{N} \left( \sum_{i=1}^{N-1} (\mathcal{P}_i^3 \bar{\mathcal{P}}_{3i}) \right. \\
\left.\left. - \frac{1}{2}(A_0^1 X_0^2 + A_N^1 X_N^2) - \sum_{i=1}^{N-1} A_N^3 (\frac{1}{2} P_i^2 - 2\frac{\Delta\tau}{N} A_N^3 C_N^1 \bar{\mathcal{P}}_{3i}) \right) \right).
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Integrando em $C_N^1$ e $\bar{\mathcal{P}}_{20}$ encontramos

$$\begin{aligned}
Z(X_N^M, X_0^M) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dP_i^M \prod_{i=1}^{N-1} dX_i^M dA_0^1 dA_N^1 dA_N^3 \prod_{i=1}^{N-1} dC_i^3 d\bar{C}_{3i} \prod_{i=1}^{N} d\mathcal{P}_i^3 \\
\prod_{i=0}^{N-1} d\bar{\mathcal{P}}_{3i} (\frac{\Delta\tau}{N})^2 A_N^3 \Delta\tau \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} [P_{Mi}(X_{i+1}^M - X_i^M) + \bar{\mathcal{P}}_{3i}(C_{i+1}^3 - C_i^3)] \right. \\
+ \sum_{i=1}^{N-1} [\bar{C}_{3i}(\mathcal{P}_{i+1}^3 - \mathcal{P}_i^3) + \frac{\Delta\tau}{N} \left( \sum_{i=1}^{N-1} (\mathcal{P}_i^3 \bar{\mathcal{P}}_{3i}) - \frac{1}{2}(A_0^1 X_0^2 + A_N^1 X_N^2) - \sum_{i=1}^{N-1} A_N^3 (\frac{1}{2} P^2 \right. \\
\left.\left. - 2\frac{\Delta\tau}{N} A_N^3 C_N^1 \bar{\mathcal{P}}_{3i}) \right) \right).
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Integrando em $\bar{C}_{3i}$ e em $\mathcal{P}_i^3$ podemos escrever

$$Z(X_N^M, X_0^M) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dP_{Mi} \prod_{i=1}^{N-1} dX_i^M dA_0^1 dA_N^1 dA_N^3 dC_N^1 \prod_{i=1}^{N-1} dC_i^3 d\mathcal{P}_N^3$$
$$\prod_{i=0}^{N-1} d\bar{\mathcal{P}}_{3i} (\frac{\Delta\tau}{N})^2 dA_N^3 \Delta\tau \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} [+P_{Mi}(X_{i+1}^M - X_i^M) + \bar{\mathcal{P}}_{3i}(C_{i+1}^3 - C_i^3)] \right.$$
$$+\frac{\Delta\tau}{N} \left( \sum_{i=1}^{N-1} (\mathcal{P}_N^3 \bar{\mathcal{P}}_{3i}) - \frac{1}{2}(A_0^1 X_0^2 + A_N^1 X_N^2) - \sum_{i=1}^{N-1} A_N^3 (\frac{1}{2} P_i^2 \right.$$
$$\left.\left. -2\frac{\Delta\tau}{N} A_N^3 C_N^1 \bar{\mathcal{P}}_{3i}) \right) \right). \tag{4.63}$$

Integrando em $C_i^3$ e $\bar{\mathcal{P}}_{3i}$ obtemos

$$Z(X_N^M, X_0^M) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dP_i^M \prod_{i=1}^{N-1} dX_i^M dA_0^1 dA_N^1 dA_N^3 d\mathcal{P}_N^3 d\bar{\mathcal{P}}_{30} (\frac{\Delta\tau}{N})^2 A_N^3 \Delta\tau$$
$$\exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} P_{Mi}(X_{i+1}^M - X_i^M) + \frac{\Delta\tau}{N} \left( \mathcal{P}_N^3 \bar{\mathcal{P}}_{30} - \frac{1}{2}(A_0^1 X_0^2 + A_N^1 X_N^2) \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sum_{i=1}^{N-1} A_N^3 (\frac{1}{2} P_i^2) - 2\frac{\Delta\tau}{N} (A_N^3)^2 C_N^1 \bar{\mathcal{P}}_{30}(N-1) \right) \right). \tag{4.64}$$

Integrando $\mathcal{P}_N^3$ e em seguida $\bar{\mathcal{P}}_{30}^1$ podemos escrever

$$Z(X_N^M, X_0^M) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=0}^{N-1} dP_i^M \prod_{i=1}^{N-1} dX_i^M dA_0^1 dA_N^1 dA_N^3 (\frac{\Delta\tau}{N})^2$$
$$A_N^3 (\Delta\tau)^2 \exp i \left( \sum_{i=0}^{N-1} P_{Mi}(X_{i+1}^M - X_i^M) + \frac{1}{2}(A_0^1 X_0^2 + A_N^1 X_N^2) \frac{\Delta\tau}{N} \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{N-1} A_N^3 (\frac{1}{2} P_i^2) \frac{\Delta\tau}{N} \right) \tag{4.65}$$

Integrando em $X_i^M$ e $P_i^M$ obtemos

$$Z(X_N^M, X_0^M) = \lim_{N\to\infty} \int dP_0^M dA_0^1 dA_N^1 dA_N^3 (\frac{\Delta\tau}{N})^2 A_N^3 (\Delta\tau)^2$$
$$\exp i \left( \frac{\Delta\tau}{N} (-\frac{1}{2} A_{N-1}^3 P_0^2 \Delta\tau - \frac{1}{2} A_N^1 X_N^2 - \frac{1}{2} A_0^1 X_0^2) + P_0^M \Delta X_M . \right) \tag{4.66}$$

Integrando em $A_0^1$ e $A_N^1$ encontramos

$$Z(X_N^M, X_0^M) = \delta(X_0^2)\delta(X_N^2)\int dP_0^M dA_N^3 A_N^3 (\Delta\tau)^2$$
$$\exp i\left(P_0^M \Delta X_M - \frac{1}{2}AP_0^2\Delta\tau\right). \quad (4.67)$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis $A_N^3 = \frac{\lambda}{\Delta\tau}$ podemos reescrever o propagador

$$Z(X_N^M, X_0^M) = \delta(X_0^2)\delta(X_N^2)\int dP_0^M d\lambda\ \lambda \exp i\left(P_0^M \Delta X_M - \frac{1}{2}\lambda P^2\right). \quad (4.68)$$

Integrando em $P_0^M$ escrevemos o propagador como

$$Z(X_N^M, X_0^M) = \delta(X_0^2)\delta(X_N^2)\int d\lambda\ \lambda^{\frac{D}{2}} \exp -i\left(\frac{1}{2\lambda}(\Delta X^M)^2\right). \quad (4.69)$$

Vamos agora mostrar que o propagador obtido acima satisfaz os vínculos. Aplicando o vínculo $X^2$ no propagador obtido concluimos que

$$\delta(X_0^2)\delta(X_N^2)\int X_0^2 d\lambda\ \lambda^{\frac{D}{2}} \exp -i\left(\frac{1}{2\lambda}(\Delta X^M)^2\right) = 0. \quad (4.70)$$

e portanto se anula devido à propriedade da função delta.

O segundo vínculo aplicado no propagador pode ser escrito como

$$\left(iX_0^M P_{M0} + iP_{M0}X_0^M\right) Z(x_2^M, x_1^M). \quad (4.71)$$

Utilizando a representação na qual $P_0^M = \frac{\partial}{\partial X_0^M}$ obtemos para o primeiro termo

$$\begin{aligned} iX_0^M \frac{\partial}{\partial X_0^M} Z &= iX_0^M \frac{\partial}{\partial X_0^M}\delta(X_0^2)\delta(X_N^2)\int d\lambda\ \lambda^{\frac{D}{2}} \exp -i\left(\frac{1}{2}\lambda X_0\cdot X_N\right) \\ &= 2X^2\delta'(X_0^2)\delta(X_N^2)I + \delta(X_0^2)\delta(X_N^2)\frac{\partial}{\partial X_0^M}I, \end{aligned} \quad (4.72)$$

onde $I$ é a parte que contém a integral em $\lambda$. Fazendo a derivada da expressão de $I$ chegamos a

$$\frac{\partial}{\partial X_0^M}I = -iX_N^M \int d\lambda\ \lambda^{-(\frac{D}{2}-1)} \exp -i\left(\frac{1}{2}\lambda X_0\cdot X_N\right). \quad (4.73)$$

A fim de reescrevermos a expressão acima de uma forma mais conveniente, é preciso observar que

$$\int d\lambda\ \lambda^{-(\frac{D}{2}-1)} \exp -i\left(\frac{1}{2}\lambda X_0\cdot X_N\right) = \frac{1}{X_0X_N}\frac{d}{d\alpha}\int d\lambda\ \lambda^{-(\frac{D}{2})}$$
$$\exp -i\left(\frac{1}{2\lambda}\alpha X_0\cdot X_N\right)\Bigg|_{\alpha=1}. \tag{4.74}$$

Fazendo a transformação $\lambda\rightarrow\alpha\lambda$ no lado direito da igualdade obtemos

$$\frac{1}{X_0X_N}\frac{d}{d\alpha}\int d\lambda\ |\alpha|\ \lambda^{-(\frac{D}{2})}\ \alpha^{-\frac{D}{2}} \exp -i\left(\frac{1}{2}\lambda X_0\cdot X_N\right)\Bigg|_{\alpha=1}. \tag{4.75}$$

Derivando em relação a $\alpha$ obtemos

$$\int d\lambda\ \lambda^{-(\frac{D}{2}-1)} \exp -i\left(\frac{1}{2}\lambda X_0\cdot X_N\right) = \frac{1}{X_0X_N}(1-\frac{D}{2})\int d\lambda\lambda^{-(\frac{D}{2})}$$
$$\exp -i\left(\frac{1}{2\lambda}X_0\cdot X_N\right). \tag{4.76}$$

Portanto podemos concluir que

$$\frac{\partial}{\partial X_0^M}I = \frac{X_N^M}{X_0X_N}(1-\frac{D}{2})I, \tag{4.77}$$

o que permite escrever

$$iX_0^M\frac{\partial}{\partial X_0^M}Z = -i(1+\frac{D}{2})I \tag{4.78}$$

O segundo termo é facilmente encontrado, obtendo-se

$$i\frac{\partial}{\partial X_0^A}X_0^M Z(x_2^\mu,x_1^\mu) = +i(1+\frac{D}{2})I. \tag{4.79}$$

Portanto concluimos que

$$\begin{aligned}\left(iX_0^M P_{M0}+iP_{M0}X_0^M\right)Z(x_2^\mu,x_1^\mu) &= -(1+\frac{D}{2})I+(1+\frac{D}{2})I\\ &= 0,\end{aligned} \tag{4.80}$$

o que demonstra que o propagador satisfaz o segundo vínculo.

Finalizando nossa análise, vamos verificar o último vínculo dado por

$$\begin{aligned}
P^2 Z(x_2^\mu, x_1^\mu) &= -\frac{\partial^2 Z}{\partial X_0^2} \\
&= -\frac{\partial}{\partial X_0^M}\left(X^2\delta'(X_0^2)\delta(X_N^2)I + \delta(X_0^2)\delta(X_N^2)\frac{\partial}{\partial X_0^M}I\right) \\
&= -[2(D+2)\delta'(X_0^2)\delta(X_N^2)I + 4\delta''(X_0^2)\delta(X_N^2)I + \\
&+ 4\delta'(X_0^2)\delta(X_N^2)X_0^M\frac{\partial}{\partial X_0^M}I + \delta(X_0^2)\delta(X_N^2)\frac{\partial^2 I}{\partial X_0^2}] \\
&= 0, \qquad (4.81)
\end{aligned}$$

o que nos permite concluir que o propagador satisfaz a todos os vínculos.

### 4.4.3 Propagador da Partícula Relativística em $d$ Dimensões

Introduzindo o sistema de coordenadas do cone de luz e escolhendo $X_0^{+'} = X_N^{+'} = 1$ podemos reescrever o propagador (4.69) da seguinte forma

$$Z(X_N^\mu, X_0^\mu) = \delta(-X_0^{-'} + \frac{1}{2}X_0^2)\delta(-X_N^{-'} + \frac{1}{2}X_N^2)\int d\lambda\lambda^{\frac{D}{2}}$$
$$\exp -i\left(\frac{1}{2\lambda}\cdot\Delta X_\mu \Delta X^\mu\right), \qquad (4.82)$$

onde $\mu = 0....d-1$ . E integrando em $X^{-'}$ obtemos

$$Z_{ef}(X_N^\mu, X_0^\mu) \;=\; \int dX_0^{-'} dX_N^{-'} Z(x_2^M, x_1^M), \qquad (4.83)$$

e substituindo a expressão (4.82) temos

$$Z_{ef}(X_N^\mu, X_0^\mu) = d\lambda\;\lambda^{\frac{D}{2}}\exp -i\left(\frac{1}{2\lambda}\cdot\Delta X_\mu\Delta X^\mu\right), \qquad (4.84)$$

que é o propagador para uma partícula relativística em $d$ dimensões. Este resultado é análogo ao calculado em [61]

### 4.4.4 Propagador para o Oscilador Harmônico em $d-2$ Dimensões

Vamos considerar o propagador (4.69) dado por

$$Z_{ef}(X_N^\mu, X_0^\mu) = \int dX_0^{-'} dX_N^{-'} \delta(X_0^2)\delta(X_N^2) \int d\lambda \lambda^{\frac{D}{2}}$$
$$\exp -i\left(\frac{1}{2\lambda}(\Delta X^M)^2\right). \tag{4.85}$$

Sabendo que $\Delta X^M = X_N^M - X_0^M$podemos reescrever a expressão acima como

$$Z_{ef}(X_N^\mu, X_0^\mu) = \int dX_0^{-'} dX_N^{-'} \delta(X_0^2)\delta(X_N^2) \int d\lambda \lambda^{\frac{D}{2}}$$
$$\exp -i\left(\frac{1}{2\lambda}(X_N^2 + X_0^2 - 2X_N^\mu X_0^\mu)\right). \tag{4.86}$$

Devido às funções deltas da expressão acima, podemos concluir que os termos quadráticos se anulam, e podemos reescrever

$$Z_{ef}(X_N^\mu, X_0^\mu) = \int dX_0^{-'} dX_N^{-'} \delta(X_0^2)\delta(X_N^2) \int d\lambda \lambda^{\frac{D}{2}} \exp -i\left(\frac{1}{\lambda}(X_N^M X_{0M})\right). \tag{4.87}$$

Escolhendo o sistema de coordenadas $X^M = (X^{+'}, X^{-'}, X^+, X^-, \vec{X})$ onde o vetor $\vec{X}$ possui $d-2$ componentes e fazendo a seguinte mudança de variávies $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ obtemos

$$Z_{ef}(X_N^+, X_0^+; X_N^-, X_0^-; X_N^i, X_0^i) = \int dX_0^{-'} dX_N^{-'} \delta(-2X_0^{+'} X_0^{-'} - 2X_0^+ X_0^- + X_0^2)$$
$$\delta(-2X_N^{+'} X_N^{-'} - 2X_N^+ X_N^- + X_N^2) \int d\alpha \; \alpha^{\frac{D}{2}-1} \exp\Big(-i\alpha(-X_N^{+'} X_0^{-'} - X_0^{+'} X_N^{-'}$$
$$-X_N^+ X_0^- - X_0^+ X_N^- + \vec{X}_0 \vec{X}_N^i)\Big). \tag{4.88}$$

Tomando $X_N^{+'}$e $X_0^{+'}$ fixos mas não constantes e integrando em $X_0^{-'}$e $X_N^{-'}$ podemos reescrever o propagador da seguinte forma

$$Z_{ef}(X_N^+, X_0^+; X_N^-, X_0^-; X_N^i, X_0^i) = \int d\alpha\ \alpha^{\frac{d}{2}-1} \exp -i\alpha \left( \left( \frac{1}{2} ( \frac{X_0^{+'}}{X_N^{+'}} \right) \vec{X}_N^2 \right.$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{X_N^{+'}}{X_0^{+'}}\right)\vec{X}_0^2 + \left(\frac{X_0^{+'}}{X_N^{+'}} - \frac{X_0^+}{X_N^+}\right) X_N^+ X_N^- + \left(\frac{X_N^{+'}}{X_0^{+'}} - \frac{X_N^+}{X_N^+}\right) X_0^+ X_0^-$$
$$\left. +\vec{X}_0 \vec{X}_N^i \right). \tag{4.89}$$

Fazendo em seguida uma translação em $X^-$ dada por

$$X^- = \frac{\tilde{X}^-}{X^+} + \frac{1}{4}\frac{\vec{X}^2}{X^+}, \tag{4.90}$$

o propagador fica

$$Z_{ef}(X_N^+, X_0^+; \tilde{X}_N^-, \tilde{X}_0^-; X_N^i, X_0^i) = \int d\alpha \alpha^{\frac{d}{2}-1} \exp -i\alpha \left( \frac{1}{4}\left[ \left(\frac{X_0^{+'}}{X_N^{+'}}\right) + \left(\frac{X_0^{+'}}{X_N^{+}}\right) \right] \vec{X}_N^2 \right.$$
$$\left[\frac{1}{4}\left(\frac{X_N^{+'}}{X_0^{+'}}\right) - \left(\frac{X_N^+}{X_0^+}\right)\right] \vec{X}_0^2 + \left(\frac{X_0^{+'}}{X_N^{+'}} - \frac{X_0^+}{X_N^+}\right) \tilde{X}_N^- + \left(\frac{X_N^{+'}}{X_0^{+'}} - \frac{X_N^+}{X_N^+}\right) \tilde{X}_0^-$$
$$\left. +\vec{X}_0 \vec{X}_N \right). \tag{4.91}$$

Então podemos definir

$$\tilde{Z}_{ef}(X_N^+, X_0^+; \tilde{X}_N^-, \tilde{X}_0^-; X_N^i, X_0^i) = \int d\tilde{X}_0^- d\tilde{X}_N^- \int d\alpha\ \alpha^{\frac{d}{2}-1}$$
$$\exp -i\alpha \left( \frac{1}{4}\left[ \left(\frac{X_0^{+'}}{X_N^{+'}}\right) + \left(\frac{X_0^{+'}}{X_N^{+}}\right) \right] \vec{X}_N^2 + \frac{1}{4}\left[ \left(\frac{X_N^{+'}}{X_0^{+'}}\right) + \left(\frac{X_N^{+}}{X_0^{+}}\right) \right] \vec{X}_0^2 \right.$$
$$+ \left(\frac{X_0^{+'}}{X_N^{+'}} - \frac{X_0^+}{X_N^+}\right) \tilde{X}_N^- + \left(\frac{X_N^{+'}}{X_0^{+'}} - \frac{X_N^+}{X_N^+}\right) \tilde{X}_0^- + \vec{X}_0 \vec{X}_N + p_0^+ \tilde{X}_0^-$$
$$\left. +p_N^+ \tilde{X}_N^- . \right) \tag{4.92}$$

No caso da partícula relativística, escolhemos fixar $X^{+'} = 1$ nos extremos. Para obtermos o propagador do oscilador harmônico devemos fazer a seguinte escolha a fim de definir o tempo físico

$$\frac{X_0^{+'}}{X_N^{+'}} = \frac{X_0^+}{X_N^+} = \exp(\omega \Delta\tau). \tag{4.93}$$

Substituindo a expressão acima no propagador e usando as definições das funções hiperbólicas é possível escrever

$$
\begin{aligned}
&\tilde{Z}_{ef}(X_N^+, X_0^+; \tilde{X}_N^-, \tilde{X}_0^-; X_N^i, X_0^i) = \int d\tilde{X}_0^- d\tilde{X}_N^- \, d\alpha \; \alpha^{\frac{d}{2}-1} \\
&\exp -i\alpha \left( \frac{1}{2}[\cosh(\omega\Delta\tau)(\vec{X}_N^2 + \vec{X}_0^2) + 2X_N^+ X_N^-] + \sinh(\omega\Delta\tau)\tilde{X}_0^- \right. \\
&\left. + \sinh(\omega\tau)\tilde{X}_N^- + p_0^+ \tilde{X}_0^- + p_N^+ \tilde{X}_N^- \right). \qquad (4.94)
\end{aligned}
$$

Integrando em $\tilde{X}_0^-$ obtemos

$$
\begin{aligned}
&\tilde{Z}_{ef}(X_N^+, X_0^+; \tilde{X}_N^-; X_N^i, X_0^i) = \int d\tilde{X}_N^- d\alpha \alpha^{\frac{d}{2}-1} \delta(p_0^+ - \alpha \sinh(\omega\Delta\tau)) \\
&\exp -i\alpha \left( \frac{1}{2}(\cosh(\omega\Delta\tau)(\vec{X}_N^2 + \vec{X}_0^2) + 2X_N^+ X_N^-) + \sinh(\omega\tau)\tilde{X}_N^- \right. \\
&\left. + p_N^+ \tilde{X}_N^- \right) \qquad (4.95)
\end{aligned}
$$

Integrando em $\alpha$ obtemos

$$
\begin{aligned}
&\tilde{Z}_{ef}(X_N^+, X_0^+; \tilde{X}_N^-; X_N^i, X_0^i) = \int d\tilde{X}_N \frac{1}{|\sinh(\omega\tau)|} \left(\frac{p_0^+}{\sinh(\omega\Delta\tau)}\right)^{\frac{d-2}{2}} \\
&\exp -i \left( \frac{p_0^+}{\sinh(\omega\Delta\tau)} \left(\frac{1}{2}[\cosh(\omega\Delta\tau)(\vec{X}_N^2 + \vec{X}_0^2) + 2X_N^+ X_N^-\right) \right. \\
&\left. + (p_0^+ + p_N^+)\tilde{X}_N^- \right) \qquad (4.96)
\end{aligned}
$$

Integrando em $\tilde{X}_N^-$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\tilde{Z}_{ef}(X_N^+, X_0^+; X_N^i, X_0^i) &= \frac{1}{|\sinh(\omega\tau)|} \left(\frac{p_0^+}{\sinh(\omega\Delta\tau)}\right)^{\frac{d-2}{2}} \delta(p_N^+ - p_0^+) \\
&\exp -i \left( \frac{p_0^+}{\sinh(\omega\Delta\tau)} \left(\frac{1}{2}[\cosh(\omega\Delta\tau)(\vec{X}_N^2 + \vec{X}_0^2) + 2X_N^+ X_N^- \right) \right). \qquad (4.97)
\end{aligned}
$$

Portanto o propagador do oscilador harmônico invertido é dado por

$$
\tilde{Z}_{Ho} \; = \; ip_0^+ \tilde{Z}_{ef}(X_N^+, X_0^+; X_N^i, X_0^i) \qquad (4.98)
$$

Para obtermos o oscilador harmônico usual devemos fazer a transformação $\omega \rightarrow i\omega$. Essa transformção equivale a esolhermos o tempo físico utilizando a seguinte relação

$$\frac{X_0^{+'}}{X_N^{+'}} = \frac{X_0^{+}}{X_N^{+}} = \exp(i\omega\Delta\tau), \tag{4.99}$$

o que torna as coordenadas $X^{+'}$e $X^{+}$ complexas e isto não é aceitável

Uma outra observação é que o espectro do oscilador harmônico invertido obtido é contínuo da mesma forma que a partícula livre. Representa um sistema instável, porém bem conhecido [80]. Isto é diferente do resultado obtido por Bars e que foi descrito na seção 4.2.

Como conclusão final deste capítulo, calculamos o propagador de uma partícula relativística sem massa em $d$ dimensões e o propagador de um oscilador harmônico invertido em $d-2$ dimensões espaciais partindo da mesma teoria de gauge.

# Capítulo 5

# Conclusão e Perspectivas

Neste trabalho [74] introduzimos o formalismo BFV para uma teoria com simetria de gauge $Sp(2,\mathbb{R})$ e calculamos o propagador de uma partícula que se propaga num espaço-tempo com $d+2$ dimensões. Para avaliarmos quais sistemas em dimensões mais baixas podem ser descritos pela teoria, escolhemos dois valores para a componente $X^{+'}$. Se tomarmos $X^{+'}=1$ descrevemos uma partícula relativística sem massa num espaço tempo com $d$ dimensões. Entretanto, escolhendo $X^{+'}$e $X^{+}$ como em (4.93), descrevemos um oscilador harmônico invertido em $d-2$ dimensões espaciais. Com este resultados pudemos concluir que a teoria $Sp(2,\mathbb{R})$ descreve esses dois sistemas descritos acima num espaço tempo em dimensão mais baixa e que aparentemente não estavam correlacionados.

Um outro resultado obtido nesse trabalho foi a análise de um critério de admissibilidade proposto por Govaerts que mostrava que existiam escolhas da função arbitrária $\Psi$ que não eram equivalentes. Como consequência, poderiam aparecer problemas de Gribov na teoria. Isso acarretava que nem todos os propagadores calculados por meio do formalismo BFV eram equivalentes. Ao calcularmos o propagador discretizado chegamos a uma expressão para o jacobiano na medida da integral de trajetória. E ao calcularmos explicitamente esse jacobiano no limite de $N$ grande mostramos que o resultado é uma constante.

Um outro resultado obtido foi a demonstração que a ação discretizada perde a invariância de BRST em relação às transformações discretizadas. Mostramos que é necessário uma modificação das transformações de BRST discretizadas para restaurar a invariância. Em funçãp da estrutura da teoria foi necessário introduzir termos de ordem $\frac{\Delta\tau}{N}$ nas transformações. A nilpotência das transformações de BRST discretizadas também foram analisadas. Como resultado dessa análise mostramos que a nilpotência é realizada somente on-shell.

Como perspectivas futuras desse trabalho podemos citar algumas linhas de estudo:

- estudar a generalização para teorias de campos. Bars e colaboradores desenvolveram generalizações para segunda quantização do modelo [28, 29, 30]. Uma das aplicações foi a formulação de um modelo em seis dimensões com simetria global $SO(4,2)$ que para uma escolha de gauge descreve o modelo padrão das partículas [81]. Uma generalização de nosso trabalho é introduzir a formulação de integral de trajetória nessa formulação para este modelo.

- Estudar generalizações que envolvam o formailismo com dois tempos para teoria de cordas e teoria M [25, 24, 82, 33, 36].

# Apêndice A

# Nilpotência das Transformações de BRST

Como foi descrito no Capítulo 4 as transformações de BRST discretizadas dadas em (4.48) não mantém a invariança da ação discretizada (4.47). Para restaurar a invariância, modificamos as transformações de BRST discretizadas de forma que no limite do contínuo estas se reduzem às transformações usuais do contínuo. No Capítulo 3, aplicamos estas idéias ao caso da partícula relativística. Nesse caso, somente os termos cinéticos da ação foram levados em conta para determinar quais modificações deveriam ser introduzidas nas transformações.

Entretanto, no caso da teoria $Sp(2,\mathbb{R})$, devemos analisar todos os termos presentes na ação discretizada. Por esse motivo, as modificações nas transformações devem conter termos de ordem $\frac{\Delta\tau}{N}$. Isso nos permite escrever as transformações da seguinte forma

$$\delta\phi = \delta_0\phi + \tilde{\delta}_1\phi, \tag{A.1}$$

onde $\delta_0$ é termo da transformação de ordem zero em $\frac{\Delta\tau}{N}$ e $\tilde{\delta}_1$ a modificação de ordem $\frac{\Delta\tau}{N}$ . As transformações de BRST dadas em (4.50) podem ser reescritas como

$$
\begin{aligned}
&\delta_0 X_i^M = -C_i^2 X_i^M - C_i^3 P_i^M + \frac{1}{2} C_i^3 (P_i^M - P_{i-1}^M),\\
&\tilde{\delta}_1 X_i^M = -\frac{\Delta\tau}{N}[\frac{1}{2} A_i^1 X_i^M C_i^3 + \frac{1}{2} A_i^2 P_i^M C_i^3],\\
&\delta_0 P^M = C_i^1 X_i^M + C_i^2 P_i^M + \frac{1}{2} C_i^1 (X_{i+1}^M - X_i^M),\\
&\tilde{\delta}_1 P_i^M = \frac{\Delta\tau}{N}[\frac{1}{2}\mathcal{P}_i^1 (X_{i+1}^M + X_i^M) + \mathcal{P}_i^2 P_i^M - A_i^1 C_i^2 (X_{i+1}^M + X_i^M) - A_i^1 C_i^3 P_i^M\\
&+A_i^2 C_i^1 (X_{i+1}^M + \frac{1}{2} X_i^M) + A_i^3 C_i^1 P_i^M],\\
&\delta_0 \bar{\mathcal{P}}_{1i} = \frac{1}{2} X_i^2 - 2C_i^2 \bar{\mathcal{P}}_{1i} - C_i^3 \bar{\mathcal{P}}_{2i} - (C_{i+1}^2 - C_i^2)\bar{\mathcal{P}}_{1i} - \frac{1}{2}(C_{i+1}^3 - C_i^3)\bar{\mathcal{P}}_{2i}\\
&+\frac{1}{2}(X_{i+1}^2 - X_i^2),\\
&\tilde{\delta}_1 \bar{\mathcal{P}}_{1i} = \frac{\Delta\tau}{N}[-\mathcal{P}_i^2 \bar{\mathcal{P}}_{1i} - \frac{1}{2}\mathcal{P}_i^3 \bar{\mathcal{P}}_{2i} + A_i^1 C_i^3 \bar{\mathcal{P}}_{1i} + A_i^2 C_i^3 - A_i^3 C_i^1 \bar{\mathcal{P}}_{1i} - A_i^3 C_i^2 \bar{\mathcal{P}}_{2i}],\\
&\delta_0 \bar{\mathcal{P}}_{2i} = P_{_i} \cdot X_i + 2C_i^1 \bar{\mathcal{P}}_{1i} - 2C_i^3 \bar{\mathcal{P}}_{3i} + (C_{i+1}^1 + C_i^1)\bar{\mathcal{P}}_{1i} - (C_{i+1}^3 + C_i^3)\bar{\mathcal{P}}_{3i}\\
&+P_i \cdot (X_{i+1} - X_{,i}),\\
&\tilde{\delta}_1 \bar{\mathcal{P}}_{2i} = \frac{\Delta\tau}{N}[\mathcal{P}_i^1 \bar{\mathcal{P}}_{1i} + \mathcal{P}_i^3 \bar{\mathcal{P}}_{3i} - 2A_i^1 C_i^2 \bar{\mathcal{P}}_{1i} + 2A_i^2 C_i^1 \bar{\mathcal{P}}_{1i} + 2A_i^2 C_i^3 \bar{\mathcal{P}}_{3i} - 2A_i^3 C_i^2 \bar{\mathcal{P}}_{3i}],\\
&\delta_0 \bar{\mathcal{P}}_{3i} = \frac{1}{2} P_i^2 + 2C_i^1 \bar{\mathcal{P}}_{2i} + 2C_i^2 \bar{\mathcal{P}}_{3i} + \frac{1}{2}(C_{i+1}^1 + C_i^1)\bar{\mathcal{P}}_{2i} + (C_{i+1}^2 + C_i^2)\bar{\mathcal{P}}_{3i},\\
&\tilde{\delta}_1 \bar{\mathcal{P}}_{3i} = \frac{\Delta\tau}{N}[\frac{1}{2}\mathcal{P}^1 \bar{\mathcal{P}}_{2i} + \mathcal{P}_i^2 \bar{\mathcal{P}}_{3i} - A_i^1 C_i^2 \bar{\mathcal{P}}_{2i} - A_i^1 C_i^3 \bar{\mathcal{P}}_{3i} + A_i^2 C_i^1 \bar{\mathcal{P}}_{2i} + A_i^3 C_i^1 \bar{\mathcal{P}}_{3i}],\\
&\delta_0 \mathcal{P}_i^a = 0, \qquad a = 1,2,3\\
&\tilde{\delta}_1 \mathcal{P}_i^a = 0,\\
&\delta_0 A_i^a = \mathcal{P}_i^a,\\
&\tilde{\delta}_1 A_i^a = 0,\\
&\delta_0 \Pi_{ai} = 0,\\
&\tilde{\delta}_1 \Pi_{ai} = 0,\\
&\delta_0 C_i^a = -\frac{1}{2} f_{bd}^a C_i^b C_i^d,\\
&\tilde{\delta}_1 C_i^a = 0,\\
&\delta_0 \bar{C}_{ai} = -\Pi_{ai}\\
&\tilde{\delta}_1 \bar{C}_{ai} = 0.
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

Vamos demonstrar a nilpotência destas transfomações on-shell. As equações de movimento que provém da ação discretizada são

$$
\begin{aligned}
(P_i^M - P_{i-1}^M) + \frac{\Delta\tau}{N}[-A_i^1 X^M - A^2 P_i^M] &= 0, \\
A_i^a &= 0, \qquad a = 1,2 \\
\mathcal{P}_i^a &= 0, \\
(X_{i+1}^M - X_i^M) + \frac{\Delta\tau}{N}[-A_i^2 X_i^M - A_i^3 P_i^M] &= 0, \\
\frac{\Delta\tau}{N}[\Pi_{1i} - \frac{1}{2}X_i^2 + 2C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{1i} + C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{2i}] &= 0, \\
\frac{\Delta\tau}{N}[\Pi_{2i} - P_i \cdot X_i - 2C_i^1\bar{\mathcal{P}}_{1i} + 2C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i}], &= 0, \\
-(\Pi_{3i} - \Pi_{i-1}) + \frac{\Delta\tau}{N}[-\frac{1}{2}P_i^2 - C_i^1\bar{\mathcal{P}}_{2i} - 2C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{3i}] &= 0, \\
(C_{i+1}^1 - C_i^1) + \frac{\Delta\tau}{N}[\mathcal{P}_i^1 - 2A_i^1 C_i^2 + 2A_i^2 C_i^1] &= 0, \\
(C_{i+1}^2 - C_i^2) + \frac{\Delta\tau}{N}[\mathcal{P}_i^2 - A_i^1 C_i^3 + A_i^3 C_i^1] &= 0, \\
(C_{i+1}^3 - C_i^3) + \frac{\Delta\tau}{N}[\mathcal{P}_i^3 - 2A_i^2 C_i^3 + 2A_i^3 C_i^2] &= 0, \\
(\bar{\mathcal{P}}_{1i} - \bar{\mathcal{P}}_{1i-1}) + \frac{\Delta\tau}{N}[-2A_i^2\bar{\mathcal{P}}_{1i} - A_i^3\bar{\mathcal{P}}_{2i}] &= 0, \\
(\bar{\mathcal{P}}_{2i} - \bar{\mathcal{P}}_{2i-1}) + \frac{\Delta\tau}{N}[2A_i^1\bar{\mathcal{P}}_{1i} - 2A_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i}] &= 0, \\
(\bar{\mathcal{P}}_{3i} - \bar{\mathcal{P}}_{3i-1}) + \frac{\Delta\tau}{N}[A_i^1\bar{\mathcal{P}}_{2i} - 2A_i^2\bar{\mathcal{P}}_{3i}] &= 0, \\
\frac{\Delta\tau}{N}[\bar{C}_{1i} + \bar{\mathcal{P}}_{1i}] &= 0, \\
\frac{\Delta\tau}{N}[\bar{C}_{2i} + \bar{\mathcal{P}}_{2i}] &= 0, \\
(\bar{C}_{3i+1} - \bar{C}_i^3) - \frac{\Delta\tau}{N}\bar{\mathcal{P}}_{3i} &= 0, \\
(\mathcal{P}_{3i} - \mathcal{P}_{3i-1}) &= 0, \\
(A_{i+1}^3 - A_i^3) &= 0, \qquad (A.3)
\end{aligned}
$$

A nilpotência é escrita como

$$
\begin{aligned}
\delta^2\phi &= \delta_0^2\phi + \delta_0\tilde{\delta}_1\phi + \tilde{\delta}_1\delta_0\phi + \tilde{\delta}_1^2\phi \\
&= \delta_0^2\phi + \delta_0\tilde{\delta}_1\phi + \tilde{\delta}_1\delta_0\phi, \qquad (A.4)
\end{aligned}
$$

onde $\phi$ representa uma coordenada do espaço de fase extendido. No resultado acima usamos o fato de que $\tilde{\delta}_1^2$ é da ordem de $(\frac{\Delta\tau}{N})^2$ e portanto pode ser desprezado em todos os cálculos . Vamos analisar cada uma das transformações modificadas dadas em (4.51). A primeira transformação a ser analisada é a de $X_i^M$. A nilpotência é dada por

$$\delta^2 X_i^M = \delta_0^2 X_i^M + \delta_0\tilde{\delta}_1 X_i^M + \tilde{\delta}_1\delta_0 X_i^M. \tag{A.5}$$

O primeiro termo fica

$$\delta_0^2 X_i^M = \delta[-C_i^2 X_i^M - C_i^3 P_i^M + \frac{1}{2}C_i^3(P_i^M - P_{i-1}^M)]. \tag{A.6}$$

Aplicando as transformações obtemos

$$\delta_0^2 X_i^M = -\delta_0 C_i^2 X_i^M + C_i^2\delta_0 X_i^M - \delta_0 C_i^3 P_i^M + C_i^3\delta_0 P_i^M + \frac{1}{2}\delta_0 C_i^3(P_i^M + P_{i-1}^M)$$
$$-\frac{1}{2}C_i^3(\delta_0 P_i^M - \delta_0 P_{i-1}^M). \tag{A.7}$$

Substituindo as transformações obtemos

$$\delta_0 X_i^2 = C_i^1 C_i^3 X_i^M + C_i^2 C_i^3 P_i^M + \frac{1}{2}C_i^2 C_i^3(P_i^M - P_{i-1}^M) + 2C_i^2 C_i^3 P_i^M + C_i^3 C_i^1 X_i^M$$
$$+C_i^3 C_i^2 P_i^M + \frac{1}{2}C_i^3 C_i^1(X_{i+1}^M - X_i^M) - C_i^2 C_i^3(P_i^M - P_{i-1}^M) - \frac{1}{2}C_i^3 C_i^1 X_i^M$$
$$-\frac{1}{2}C_i^3 C_i^2 P_i^M - \frac{1}{4}C_i^3 C_i^1(X_{i+1}^M - X_i^M) - \frac{1}{2}C_i^3 C_{i-1}^1 X_{i-1}^M - \frac{1}{2}C_i^3 C_{i-1}^2 P_{i-1}^M$$
$$-\frac{1}{4}C_i^3 C_{i-1}^1(X_i^M - X_{i-1}^M). \tag{A.8}$$

Simplificando a expressão acima podemos escrever

$$\delta_0 X_i^2 = +\frac{1}{2}C_i^2 C_i^3(P_i^M - P_{i-1}^M) + \frac{1}{2}C_i^3 C_i^1(X_{i+1}^M - X_i^M) - C_i^2 C_i^3(P_i^M - P_{i-1}^M)$$
$$-\frac{1}{2}C_i^3 C_i^1 X_i^M - \frac{1}{2}C_i^3 C_i^2 P_i^M - \frac{1}{4}C_i^3 C_i^1(X_{i+1}^M - X_i^M) - \frac{1}{2}C_i^3 C_{i-1}^1 X_{i-1}^M$$
$$-\frac{1}{2}C_i^3 C_{i-1}^2 P_{i-1}^M - \frac{1}{4}C_i^3 C_{i-1}^1(X_i^M - X_{i-1}^M). \tag{A.9}$$

Reescrevendo os seguintes termos como

$$C_i^3 C_{i-1}^1 X_{i-1}^M = C_i^3 C_i^1 X_{i-1}^M - C_i^3(C_i^1 - C_{i-1}^1)X_i^M,$$
$$C_i^3 C_{i-1}^2 P_{i-1}^M = C_i^3 C_i^2 P_{i-1}^M - C_i^3(C_i^2 - C_{i-1}^2)P_i^M. \tag{A.10}$$

podemos reescrever

$$\delta_0 X_i^2 = +\frac{1}{2}C_i^2C_i^3(P_i^M - P_{i-1}^M) + \frac{1}{2}C_i^3C_i^1(X_{i+1}^M - X_i^M) - C_i^2C_i^3(P_i^M - P_{i-1}^M)$$
$$-\frac{1}{2}C_i^3C_i^1(X_i^M - X_{i-1}^M) - C_i^2C_i^3(P_i^M - P_{i-1}^M) - \frac{1}{2}C_i^3C_i^1(X_i^M - X_{i-1}^M)$$
$$+\frac{1}{2}C_i^3(C_i^1 - C_{i-1}^1)X_i^M - \frac{1}{2}C_i^3C_i^2(P_i^M - P_{i-1}^M) - \frac{1}{2}C_i^3(C_i^2 - C_{i-1}^2)P_i^M$$
$$-\frac{1}{4}C_i^3C_i^1(X_{i+1}^M - X_i^M) + \frac{1}{4}C_i^3C_i^1(X_i^M - X_{i-1}^M). \quad (A.11)$$

Utilizando as equações de movimento e desprezando termos quadráticos em $\frac{\Delta\tau}{N}$ obtemos

$$\delta_0^2 X_i^M = -\frac{1}{2}\frac{\Delta\tau}{N}A_i^3P_i^MC_i^1C_i^3. \quad (A.12)$$

O segundo termo de (A.5) é dado por

$$\delta_0\tilde{\delta}_1 X_i^M = \delta_0[-\frac{\Delta\tau}{N}(\frac{1}{2}A^1X_i^MC_i^3 + \frac{1}{2}A_i^2P_i^MC_i^3). \quad (A.13)$$

Aplicando a variação em cada termo do lado direito da expressão acima podemos escrever

$$\delta_0\tilde{\delta}_1 X_i^M = -\frac{1}{2}\frac{\Delta\tau}{N}(\delta_0A_i^1X_i^MC_i^3 + A_i^1\delta_0X_i^MC_i^3 + A_i^1X_i^M\delta_0C_i^3 + \delta_0A_i^2P_i^MC_i^3$$
$$+A_i^2\delta_0P_i^MC_i^3 + A^2P_i^M\delta_0C_i^3). \quad (A.14)$$

Substituindo as transformações obtemos

$$\delta_0\tilde{\delta}_1 X_i^M = -\frac{\Delta\tau}{N}[[\mathcal{P}_i^1X_i^M + A_i^1(-C_i^2X_i^M + \frac{1}{2}\overset{3}{\underset{i}{C}}(P_i^M - P_{i-1}^M)) + \mathcal{P}_i^2P_i^M$$
$$+A_i^2(\frac{1}{2}C_i^1(X_{i+1}^M + X_i^M) + C_i^2P_i^M)]C_i^3 + [A_i^1X_i^M + A^2P_i^M](-2C_i^2C_i^3). (A.15)$$

Utilizando as equações de movimento chegamos a

$$\delta_0\tilde{\delta}_1 X_i^M = 0. \quad (A.16)$$

O último termo da nilpotência de $X_i^M$ é dado por

$$\tilde{\delta}_1\delta_0 X_i^M = \tilde{\delta}_1[-C_i^2X_i^M - C_i^3P_i^M + \frac{1}{2}C_i^3(P_i^M - P_{i-1}^M)]. \quad (A.17)$$

Aplicando as transformações encontramos

$$\tilde{\delta}_1\delta_0 X_i^M = -\tilde{\delta}_1 C_i^2 X_i^M + C_i^2\tilde{\delta}_1 X_i^M - \tilde{\delta}_1 C_i^3 P_i^M + C_i^3\tilde{\delta}_1 P_i^M + \frac{1}{2}\tilde{\delta}_1 C_i^3 (P_i^M - P_{i-1}^M)$$
$$-\frac{1}{2}C_i^3(\tilde{\delta}_1 P_i^M - \tilde{\delta}_1 P_{i-1}^M). \tag{A.18}$$

Substituindo as transformações temos

$$\tilde{\delta}_1\delta_0 X_i^M = C_i^2[-\frac{1}{2}\frac{\Delta\tau}{N}(A_i^1 X_i^M C_i^3 + A_i^2 C_i^3 P_i^M)] + C_i^3[\frac{\Delta\tau}{N}(-\frac{1}{2}\mathcal{P}_i^1(X_{i+1}^M + X_i^M)$$
$$\mathcal{P}_i^2 P_i^M + A_i^1 C_i^2(X_{i+1}^M + X_i^M) + A_i^1 C_i^2 P_i^M + A_i^2 C_i^1(X_{i+1}^M + X_i^M) - \frac{1}{2}A_i^3 C_i^1 P_i^M]$$
$$-\frac{1}{2}C_i^3[-\frac{1}{2}\mathcal{P}_{i-1}^1(X_i^M + X_{i-1}^M) - \mathcal{P}_{i-1}^2 P_{i-1}^M + A_{i-1}^1 C_{i-1}^2(X_i^M + X_{i-1}^M)$$
$$+A_{i-1}^1 C_{i-1}^2 P_{i-1}^M + A_{i-1}^2 C_{i-1}^1(X_i^M + X_{i-1}^M) - \frac{1}{2}A_{i-1}^3 C_{i-1}^1 P_{i-1}^M]. \tag{A.19}$$

Usando as equações de movimento obtemos

$$\tilde{\delta}_1\delta_0 X_i^M = \frac{1}{2}\frac{\Delta\tau}{N}A_i^3 P_i^M C_i^1 C_i^3. \tag{A.20}$$

Substituindo os resultados encontrados acima podemos concluir

$$\delta^2 X_i^M = 0. \tag{A.21}$$

A segunda transformação analisada é para $P_i^M$. A niltpotência é dada por

$$\delta^2 P_i^M = \delta_0^2 P_i^M + \delta_0\tilde{\delta}_1 P_i^M + \tilde{\delta}_1\delta_0 P_i^M. \tag{A.22}$$

O primeiro termo da expressão é calculado por

$$\delta_0^2 P_i^M = \delta_0[C_i^1 X_i^M + C_i^2 P_i^M + \frac{1}{2}C_i^1(X_{i+1}^M - X_i^M)]. \tag{A.23}$$

Aplicando as transformações chegamos a

$$\delta_0^2 P_i^M = \delta_0 C_i^1 X_i^M - C_i^1\delta_0 X_i^M + \delta_0 C_i^2 P_i^M - C_i^2\delta_0 P_i^M + \frac{1}{2}\delta_0 C_i^1(X_{i+1}^M - X_i^M)$$
$$+\frac{1}{2}C_i^1(\delta_0 X_{i+1}^M - \delta_0 X_i^M). \tag{A.24}$$

Substituindo as transformações obtemos

$$\delta_0^2 P_i^M = -2C_i^1 C_i^2 X_i^M + C_i^1 C_i^2 X_i^M + C_i^1 C_i^3 P_i^M - \frac{1}{2} C_i^1 C_i^3 (P_i^M - P_{i-1}^M)$$
$$C_i^1 C_i^3 P_i^M - C_i^2 C_i^1 X_i^M + \frac{1}{2} C_i^2 C_i^1 (X_{i+1}^M - X_i^M) - \frac{1}{2} C_i^1 C_i^2 (X_{i+1}^M - X_i^M)$$
$$+\frac{1}{2} C_i^1 C_{i+1}^2 X_{i+1}^M + C_i^1 C_{i+1}^3 P_{i+1}^M - \frac{1}{4} C_i^1 C_{i+1}^3 (P_{i+1}^M - P_i^M)$$
$$-\frac{1}{2} C_i^1 C_i^2 X_i^M - \frac{1}{2} C_i^1 C_i^3 P_i^M + \frac{1}{4} C_i^1 C_i^3 (P_i^M - P_{i-1}^M). \tag{A.25}$$

Simplificando a expressão acima e em seguida utilizando as equações de movimento, podemos escrever

$$\delta_0^2 P_i^M = -\frac{\Delta\tau}{N} A_i^3 P_i^M C_i^1 C_i^2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta\tau}{N} P_i^M C_i^1 \mathcal{P}_i^3. \tag{A.26}$$

O segundo termo de (A.21) é dado por

$$\delta_0 \tilde{\delta}_1 P_i^M = \delta_0 [\frac{\Delta\tau}{N} (\mathcal{P}_i^1 (X_{i+1}^M + X_i^M) + \mathcal{P}_i^2 P_i^M - A_i^1 (X_{i+1}^M + X_i^M) C_i^2$$
$$-A_i^1 P_i^M C_i^3 + A_i^2 (X_{i+1}^M + \frac{1}{2} X_i^M) C_i^1 + \frac{1}{2} A_i^3 C_i^1 P_i^M]. \tag{A.27}$$

Portanto podemos escrever

$$\delta_0 \tilde{\delta}_1 P_i^M = \delta_0 [\frac{\Delta\tau}{N} (\delta_0 \mathcal{P}_i^1 (X_{i+1}^M + X_i^M) - \mathcal{P}_i^1 (\delta_0 X_{i+1}^M + \delta_0 X_i^M) + \delta_0 \mathcal{P}_i^2 P_i^M$$
$$-\mathcal{P}_i^2 \delta_0 P_i^M - \delta_0 A_i^1 (X_{i+1}^M + X_i^M) C_i^2 - A_i^1 (\delta_0 X_{i+1}^M + \delta_0 X_i^M) C_i^2$$
$$+A_i^1 (X_{i+1}^M + X_i^M) \delta_0 C_i^2 - \delta_0 A_i^1 P_i^M C_i^3 - A_i^1 \delta_0 P_i^M C_i^3 - A_i^3 P_i^M \delta_0 C_i^3$$
$$+\delta_0 A_i^2 (X_{i+1}^M + \frac{1}{2} X_i^M) C_i^1 + A_i^2 (\delta_0 X_{i+1}^M + \frac{1}{2} \delta X_i^M) C_i^1 - A_i^2 (X_{i+1}^M + X_i^M) \delta_0 C_i^1$$
$$+\frac{1}{2} \delta_0 A_i^3 C_i^1 P_i^M] + A_i^3 \delta_0 C_i^1 P_i^M - A_i^3 C_i^1 \delta_0 P_i^M]. \tag{A.28}$$

Substituindo as transformações e em seguida usando as equações de movimento obtemos

$$\delta_0 \tilde{\delta}_1 P_i^M = -\frac{1}{2} \frac{\Delta\tau}{N} (-P_i^M C_i^1 \mathcal{P}_i^3 - 3A_i^3 P_i^M C_i^1 C_i^2), \tag{A.29}$$

cujo último termo da expressão (A.21) é dado por

$$\tilde{\delta}_1\delta_0 P_i^M = \tilde{\delta}_1[C^1 X_i^M + C_i^2 P_i^M + \frac{1}{2}C_i^1(X_{i+1}^M - X_i^M)]. \tag{A.30}$$

Desenvolvendo a expressão acima obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_1\delta_0 P_i^M &= \tilde{\delta}_1 C^1 X_i^M - C_i^1\tilde{\delta}_1 X_i^M + \tilde{\delta}_1 C_i^2 P_i^M - C_i^2\tilde{\delta}_1 P_i^M \\ &+\frac{1}{2}\tilde{\delta}C_i^1(X_{i+1}^M - X_i^M) + \frac{1}{2}C_i^1(\tilde{\delta}_1 X_{i+1}^M - \tilde{\delta}_1 X_i^M).\end{aligned} \tag{A.31}$$

Substituindo as transformações e utilizando as equações de movimento obtemos

$$\tilde{\delta}_1\delta_0 P^M = -\frac{1}{2}\frac{\Delta\tau}{N}A_i^3 P_i^M C_i^1 C_i^2. \tag{A.32}$$

De acordo com os resultados obtidos acima, podemos concluir

$$\delta^2 P_i^M = 0. \tag{A.33}$$

Vamos agora analisar as transformações dos momentos dos fantasmas. O primeiro é dado por

$$\delta^2\bar{\mathcal{P}}_{1i} = \delta_0^2\bar{\mathcal{P}}_{1i} + \delta_0\tilde{\delta}_1\bar{\mathcal{P}}_{1i} + \tilde{\delta}_1\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{1i}. \tag{A.34}$$

O primeiro termo da expressão acima é dado por

$$\begin{aligned}\delta_0^2\bar{\mathcal{P}}_{1i} &= \delta_0[\frac{1}{2}X^2 - 2C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{1i} - C^3\bar{\mathcal{P}}_{2i} + \frac{1}{2}(X_{i+1}^2 - X_i^2) - (C_{i+1}^2 - C_i^2)\bar{\mathcal{P}}_{1i} \\ &-\frac{1}{2}(C_{i+1}^3 - C_i^3)\bar{\mathcal{P}}_{3i}.\end{aligned} \tag{A.35}$$

Desenvolvendo a expressão acima obtemos

$$\begin{aligned}\delta_0^2\bar{\mathcal{P}}_{1i} &= \delta_0 X_i^M X_{Mi} - 2\delta_0 C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{1i} + 2C_i^2\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{1i} - \delta_0 C^3\bar{\mathcal{P}}_{2i} + C_i^3\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{2i} \\ &+(\delta_0 X_{i+1}^M X_{Mi+1} - \delta_0 X_i^M X_{Mi}) - (\delta_0 C_{i+1}^2 - \delta C_{)i}^2)\bar{\mathcal{P}}_{1i} + (C_{i+1}^2 - C_i^2)\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{1i} \\ &-\frac{1}{2}(\delta_0 C_{i+1}^3 - C_i^3)\bar{\mathcal{P}}_{3i} + \frac{1}{2}(C_{i+1}^3 - C_i^3)\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{3i}.\end{aligned} \tag{A.36}$$

Substituindo as transformações podemos escrever

$$\delta_0^2\bar{\mathcal{P}}_{1i} = X_i^M(-C^2X_i^M - C_i^3P_i^M + \frac{1}{2}C_i^3(P_i^M - P_{i-1}^M) + 2C_i^1C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{1i} + 2C_i^2(\frac{1}{2}X_i^2$$
$$-2C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{1i} - C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{2i} + \frac{1}{2}(X_{i+1}^2 - X_i^2) - (C_{i+1}^2 - C_i^2)\bar{\mathcal{P}}_{1i} - \frac{1}{2}(C_{i+1}^3 - C_i^3)\bar{\mathcal{P}}_{2i})$$
$$+2C_i^2C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{2i} + C_i^3(P_i \cdot X_i + 2C_i^1\bar{\mathcal{P}}_{2i} - 2C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i} + P_i \cdot (X_{i+1}^M - X_i^M) + (C_{i+1}^1$$
$$-C_i^1)\bar{\mathcal{P}}_{1i} - (C_{i+1}^3 - C_i^3)\bar{\mathcal{P}}_{3i} + X_{i+1}^M(-C_{i+1}^2X_{i+1}^M - C_{i+1}^3P_{i+1}^M + \frac{1}{2}C_{i+1}^3(P_{i+1}^M - P_i^M)$$
$$-X_i^M(-C_i^2X_i^M - C_i^3P_i^M + \frac{1}{2}C_i^3(P_i^M - P_{i-1}^M) + (2C_{i+1}^1C_{i+1}^3 - 2C_i^1C_i^3)\bar{\mathcal{P}}_{1i}$$
$$+(C_{i+1}^3 - C_i^3)[P_i \cdot X_i + 2C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{1i} - 2C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i} + P_i \cdot (X_{i+1} - X_i) + (C_{i+1}^2 - C_i^2)\bar{\mathcal{P}}_{1i}$$
$$-(C_{i+1}^3 - C_i^3)\bar{\mathcal{P}}_{3i}] + (C_{i+1}^2 - C_i^2)[\frac{1}{2}X_i^2 - 2C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{1i} - C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{2i} + \frac{1}{2}(X_{i+1}^2 - X_i^2)$$
$$-(C_{i+1}^2 - C_i^2)\bar{\mathcal{P}}_{1i} - \frac{1}{2}(C_{i+1}^3 - C_i^3)\bar{\mathcal{P}}_{2i}] + (C_{i+1}^2C_{i+1}^3 - C_i^2C_i^3)\bar{\mathcal{P}}_{2i}. \qquad (A.37)$$

Simplificando a expressão acima e em seguida usando as equações de movimento podemos escrever

$$\delta_0^2\bar{\mathcal{P}}_{1i} = \frac{\Delta\tau}{N}[\frac{1}{2}A_i^3C_i^1X_i^2 + \frac{1}{2}P_{Mi}X_i^M\mathcal{P}_i^3 + A_i^3P_{Mi}X_i^MC_i^2]. \qquad (A.38)$$

O segundo termo é escrito como

$$\delta_0\tilde{\delta}_1\bar{\mathcal{P}}_{1i} = \frac{\Delta\tau}{N}(\delta_0\mathcal{P}_i^2\bar{\mathcal{P}}_{1i} - \mathcal{P}_i^2\delta\bar{\mathcal{P}}_{1i} + \frac{1}{2}\delta_0\mathcal{P}_i^3\bar{\mathcal{P}}_{2i} - \frac{1}{2}\mathcal{P}_i^3\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{2i}$$
$$-\delta_0A_i^1C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{1i} - A_i^1\delta_0C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{1i} + A_i^1C_i^3\delta\bar{\mathcal{P}}_{1i} - \delta_0A_i^2C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{2i} - A_i^2\delta_0C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{2i} + A_i^2C_i^3\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{2i}$$
$$+\delta_0A_i^3C_i^1\bar{\mathcal{P}}_{1i} + A_i^3\delta_0C_i^1\bar{\mathcal{P}}_{1i} - A_i^3C_i^1\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{1i} + \delta_0A_i^3C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{2i} + A_i^3\delta_0C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{2i})$$
$$-A_i^3C_i^2\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{2i}). \qquad (A.39)$$

substituindo as transformações e em seguida usando as equações de movimento

$$\delta_0\tilde{\delta}_1\bar{\mathcal{P}}_{1i} = \frac{\Delta\tau}{N}[-\frac{1}{2}P_{Mi}X_i^M\mathcal{P}_i^3 - \frac{1}{2}A_i^3X_i^2C_i^1 - C_i^2\mathcal{P}_i^3\bar{\mathcal{P}}_{2i}$$
$$-A_i^3P_{Mi}X_i^MC_i^2 + 2A_i^3C_i^1C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{1i} - C_i^3\mathcal{P}_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i} + 2A_i^3C_i^2C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i}]. \qquad (A.40)$$

enquanto o terceiro termo é dado por

$$\tilde{\delta}_1\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{1i} = \tilde{\delta}_1[\frac{1}{2}X^2 - 2C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{1i} - C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{2i} + \frac{1}{2}(X_{i+1}^2 - X_i^2) - (C_{i+1}^2 - C_i^2)\bar{\mathcal{P}}_{1i}$$
$$-\frac{1}{2}(C_{i+1}^3 - C_i^3)\bar{\mathcal{P}}_{2i}]. \qquad (A.41)$$

Desenvolvendo o termo acima

$$\tilde{\delta}_1\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{1i} = [\tilde{\delta}_1 X\cdot X_i - 2\tilde{\delta}_1 C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{1i} + 2C_i^2\tilde{\delta}_1\bar{\mathcal{P}}_{1i} - \tilde{\delta}_1 C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{2i} + C_i^3\tilde{\delta}_1\bar{\mathcal{P}}_{2i}$$
$$(\tilde{\delta}_1 X_{i+1}\cdot X_{i+1} - \tilde{\delta}_1 X_i\cdot X_i) - (\tilde{\delta}_1 C_{i+1}^2 - \tilde{\delta}_1 C_i^2)\bar{\mathcal{P}}_{1i} + (C_{i+1}^2 - C_i^2)\tilde{\delta}_1\bar{\mathcal{P}}_{1i}$$
$$+\frac{1}{2}(\tilde{\delta}_1 C_{i+1}^3 - C_i^3)\bar{\mathcal{P}}_{2i} - \frac{1}{2}(C_{i+1}^3 - C_i^3)\tilde{\delta}_1\bar{\mathcal{P}}_{2i}]. \tag{A.42}$$

Substituindo as transformações e utilizando as equações de movimento obtemos

$$\tilde{\delta}_1\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{1i} = \frac{\Delta\tau}{N}[C_i^2\mathcal{P}_i^3\bar{\mathcal{P}}_{2i} - 2A_i^3C_i^1C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{1i} + C^3\mathcal{P}_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i} - 2A_i^3C_i^2C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i}. \tag{A.43}$$

Observando os resultados acima concluimos que

$$\delta_0^2\bar{\mathcal{P}}_{1i} = 0. \tag{A.44}$$

A segunda transformação para os fantasmas é de $\bar{\mathcal{P}}_{2i}$ . A nilpotência será dada por

$$\delta^2\bar{\mathcal{P}}_{2i} = \delta_0^2\bar{\mathcal{P}}_{2i} + \delta_0\tilde{\delta}_1\bar{\mathcal{P}}_{2i} + \tilde{\delta}_1\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{2i}. \tag{A.45}$$

Calculando o primeiro termo temos

$$\delta_0^2\bar{\mathcal{P}}_{2i} = \delta_0[P_i\cdot X_i + 2C_i^1\bar{\mathcal{P}}_{1i} - 2C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i} - P_i\cdot(X_{i+1}^M - X_i^M) + (C_{i+1}^1 - C_i^1)\bar{\mathcal{P}}_{1i}$$
$$-(C_{i+1}^3 - C_i^3)\bar{\mathcal{P}}_{3i}]. \tag{A.46}$$

que pode ser reescrito como

$$\delta_0^2\bar{\mathcal{P}}_{2i} = \delta_0 P_i\cdot X_i + P_i\cdot\delta_0 X_i + 2\delta_0 C_i^1\bar{\mathcal{P}}_{1i} - 2C_i^1\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{1i} - 2\delta_0 C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i} + C_i^3\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{3i}$$
$$-\delta_0 P_i\cdot(X_{i+1}^M - X_i^M) - P_i\cdot(\delta_0 X_{i+1} - \delta_0 X_i) + (\delta_0 C_{i+1}^1 - \delta_0 C_i^1)\bar{\mathcal{P}}_{1i}$$
$$-(C_{i+1}^1 - C_i^1)\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{1i} - (\delta_0 C_{i+1}^3 - \delta_0 C_i^3)\bar{\mathcal{P}}_{3i} + (C_{i+1}^3 - C_i^3)\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{3i}. \tag{A.47}$$

Substituindo as transformações e usando as equações de movimento chegamos a

$$\delta_0^2\bar{\mathcal{P}}_{2i} = \frac{\Delta\tau}{N}[\frac{1}{2}A_i^3C_i^1P_{Mi}X_i^M + \frac{1}{2}\mathcal{P}_i^2\mathcal{P}_i^3 + A_i^3P_i^2C_i^2]. \tag{A.48}$$

o segundo termo é calculado por

$$\delta_0\tilde{\delta}_1\bar{\mathcal{P}}_{2i} = \delta_0[\mathcal{P}_i^1\bar{\mathcal{P}}_{1i} - \mathcal{P}_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i} - 2A_i^1C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{1i} + 2A_i^3C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{1i} + 2A_i^2C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i}$$
$$-2A_i^3C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{3i}], \tag{A.49}$$

que é reescrito como

$$\delta_0\tilde{\delta}_1\bar{\mathcal{P}}_{2i} = \delta_0\mathcal{P}_i^1\bar{\mathcal{P}}_{1i} - \mathcal{P}_i^1\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{1i} - \delta_0\mathcal{P}_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i} + \mathcal{P}_i^3\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{3i} - 2\delta_0A_i^1C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{1i} - 2A_i^1\delta_0C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{1i}$$
$$+2A_i^1C_i^3\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{1i} + 2\delta_0A_i^3C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{1i} + 2A_i^3\delta_0C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{1i} - 2A_i^3C_i^3\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{1i} + 2\delta A_i^2C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i}$$
$$+2A_i^2\delta_0C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i} + 2A_i^2C_i^3\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{3i} - 2\delta_0A_i^3C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{3i} - 2A_i^3\delta_0C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{3i}$$
$$+2A_i^3C_i^2\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{3i}]. \tag{A.50}$$

Substituindo as transfomações na expressão acima e usando as equações de movimento obtemos

$$\delta_0\tilde{\delta}_1\bar{\mathcal{P}}_{2i} = \frac{\Delta\tau}{N}[-2A_i^3C_i^1C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i} - A_i^3C_i^2P_i^2 + 2A^3C_i^1C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{2i} - \frac{1}{2}\mathcal{P}_i^2\mathcal{P}_i^3 + C^1\mathcal{P}_i^3\bar{\mathcal{P}}_{2i}, \tag{A.51}$$

o terceiro termo é calculado por

$$\tilde{\delta}_1\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{2i} = \tilde{\delta}_1[P_i\cdot X_i + 2C_i^1\bar{\mathcal{P}}_{1i} - 2C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i} - P_i\cdot(X_{i+1} - X_i) +$$
$$+(C_{i+1}^1 - C_i^1)\bar{\mathcal{P}}_{1i} - (C_{i+1}^3 - C_i^3)\bar{\mathcal{P}}_{3i}]. \tag{A.52}$$

Desenvolvendo essa expressão e aplicando as equações de movimento

$$\tilde{\delta}_1\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{2i} = \frac{\Delta\tau}{N}[-\frac{1}{2}A_i^3P_{Mi}X_i^MC_i^1 - C_i^1\mathcal{P}_i^3\bar{\mathcal{P}}_{2i} - 2A_i^3C_i^1C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{2i} + 2A_i^3C_i^1C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i}]. \tag{A.53}$$

Os resultados permitem concluir que

$$\delta^2\bar{\mathcal{P}}_{2i} = 0. \tag{A.54}$$

Por fim, vamos analisar a última transformação dos fantasmas $\bar{\mathcal{P}}_{3i}$. A condição de nilpotência é escrita como

$$\delta^2\bar{\mathcal{P}}_{3i} = \delta_0^2\bar{\mathcal{P}}_{3i} + \delta_0\tilde{\delta}_1\bar{\mathcal{P}}_{3i} + \tilde{\delta}_1\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{3i}. \tag{A.55}$$

Substituindo as transformações obtemos

$$\delta_0^2\bar{\mathcal{P}}_{3i} = \delta_0[\frac{1}{2}P^2 + C_i^1\bar{\mathcal{P}}_{2i} + 2C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{3i} + \frac{1}{2}(C_{i+1}^1 - C_i^1)\bar{\mathcal{P}}_{2i}$$
$$(C_{i+1}^2 - C_i^2)\bar{\mathcal{P}}_{3i}], \tag{A.56}$$

que é reescrito como

$$\delta_0^2\bar{\mathcal{P}}_{3i} = \delta_0 P_i \cdot P_i + \delta_0 C_i^1 \bar{\mathcal{P}}_{2i} - C_i^1 \delta_0 \bar{\mathcal{P}}_{2i} + 2\delta_0 C_i^2 \bar{\mathcal{P}}_{3i} - 2C_i^2 \delta_0 \bar{\mathcal{P}}_{3i}$$
$$+\frac{1}{2}(\delta_0 C_{i+1}^1 - \delta_0 C_i^1)\bar{\mathcal{P}}_{2i} - \frac{1}{2}(C_{i+1}^1 - C_i^1)\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{2i} + (\delta_0 C_{i+1}^2 - \delta_0 C_i^2)\bar{\mathcal{P}}_{3i}$$
$$-(C_{i+1}^2 - C_i^2)\bar{\mathcal{P}}_{3i}, \tag{A.57}$$

e substituindo as transformações e em seguida utilizando as equações de movimento obtemos

$$\delta_0^2\bar{\mathcal{P}}_{3i} = 0. \tag{A.58}$$

O segundo termo fica

$$\delta_0\tilde{\delta}_1\bar{\mathcal{P}}_{3i} = \delta_0[\frac{1}{2}\mathcal{P}_i^1\bar{\mathcal{P}}_{2i} - \mathcal{P}_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i} + A_i^1 C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{2i} + A_i^1 C_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i} - A_i^2 C_i^1\bar{\mathcal{P}}_{2i} - A_i^3 C_i^1\bar{\mathcal{P}}_{3i}]. \tag{A.59}$$

Substituindo as transformações e usando as equações de movimento obtemos

$$\delta_0\tilde{\delta}_1\bar{\mathcal{P}}_{3i} = \frac{\Delta\tau}{N}[C_i^1\mathcal{P}_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i} + 4A_i^3 C_i^1 C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{3i} + \frac{1}{2}A_i^3 P_i^2 C_i^1], \tag{A.60}$$

e o terceiro termo é calculado pela expressão

$$\tilde{\delta}_1\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{3i} = \tilde{\delta}_1[\frac{1}{2}P_i^2 + C_i^1\bar{\mathcal{P}}_{2i} + 2C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{3i} + \frac{1}{2}(C_{i+1}^1 - C_i^1)\bar{\mathcal{P}}_{2i} + (C_{i+1}^2 - C_i^2)\bar{\mathcal{P}}_{3i}]. \tag{A.61}$$

Substituindo as transformações e usando as equações de movimento obtemos

$$\tilde{\delta}_1\delta_0\bar{\mathcal{P}}_{3i} = \frac{\Delta\tau}{N}[-\frac{1}{2}A^3 P_i^2 C_i^1 - C_i^1\mathcal{P}_i^3\bar{\mathcal{P}}_{3i} - 4A_i^3 C_i^1 C_i^2\bar{\mathcal{P}}_{3i}]. \tag{A.62}$$

Observando os resultados encontrados para essa última transformação concluimos que

$$\delta^2\mathcal{P}_{3i}\bar{} = 0. \tag{A.63}$$

As outras transformações não se modificam e portanto são nilpotentes como no caso contínuo. Portanto os resultados obtidos neste apêndice nos permitem concluir que as transformações são nilpotentes on-shell.

# Bibliografia

[1] P. A. M. Dirac, Annals Math. **37**, 429 (1936).

[2] R. Marnelius and B. E. W. Nilsson, Phys. Rev. **D20**, 839 ((1979)).

[3] R. Marnelius and U. Martensson, Nucl. Phys. **B335**, 395 (1990).

[4] R. Marnelius and U. Martensson, Int. J. Mod. Phys. **A6**, 807 (1991).

[5] U. Martensson, Int. J. Mod. Phys. **A8**, 5305 (1993).

[6] M. Montesinos, C. Rovelli, and T. Thiemann, Phys. Rev. **D60**, 044009 (1999), gr-qc/9901073.

[7] M. Montesinos and J. D. Vergara, Phys. Rev. **D65**, 064002 (2002), gr-qc/0111006.

[8] M. P. Blencowe and M. J. Duff, Nucl. Phys. **B310**, 387 (1988).

[9] J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998), hep-th/9711200.

[10] H. Nishino and E. Sezgin, Phys. Lett. **B388**, 569 (1996), hep-th/9607185.

[11] H. Nishino, Phys. Lett. **B426**, 64 (1998), hep-th/9710141.

[12] H. Ooguri and C. Vafa, Mod. Phys. Lett. **A5**, 1389 (1990).

[13] H. Ooguri and C. Vafa, Nucl. Phys. **B361**, 469 (1991).

[14] H. Ooguri and C. Vafa, Nucl. Phys. **B367**, 83 (1991).

[15] E. Sezgin, Phys. Lett. **B403**, 265 (1997), hep-th/9703123.

[16] C. Vafa, Nucl. Phys. **B469**, 403 (1996), hep-th/9602022.

[17] I. Bars and C. Kounnas, Phys. Rev. **D56**, 3664 (1997), hep-th/9705205.

[18] I. Bars and C. Kounnas, Phys. Lett. **B402**, 25 (1997), hep-th/9703060.

[19] I. Bars, (1998), hep-th/9809034.

[20] I. Bars, Phys. Rev. **D58**, 066006 (1998), hep-th/9804028.

[21] I. Bars, C. Deliduman, and O. Andreev, Phys. Rev. **D58**, 066004 (1998), hep-th/9803188.

[22] I. Bars and C. Deliduman, Phys. Rev. **D58**, 106004 (1998), hep-th/9806085.

[23] I. Bars, C. Deliduman, and D. Minic, Phys. Rev. **D59**, 125004 (1999), hep-th/9812161.

[24] I. Bars, C. Deliduman, and D. Minic, Phys. Lett. **B457**, 275 (1999), hep-th/9904063.

[25] I. Bars, C. Deliduman, and D. Minic, Phys. Lett. **B466**, 135 (1999), hep-th/9906223.

[26] I. Bars, Phys. Rev. **D59**, 045019 (1999), hep-th/9810025.

[27] I. Bars, Phys. Rev. **D62**, 085015 (2000), hep-th/0002140.

[28] I. Bars, Phys. Rev. **D62**, 046007 (2000), hep-th/0003100.

[29] I. Bars and S.-J. Rey, Phys. Rev. **D64**, 046005 (2001), hep-th/0104135.

[30] I. Bars, Phys. Rev. **D64**, 126001 (2001), hep-th/0106013.

[31] I. Bars and Y.-C. Kuo, Phys. Rev. **D74**, 085020 (2006), hep-th/0605267.

[32] I. Bars, Phys. Rev. **D70**, 104022 (2004), hep-th/0407239.

[33] I. Bars and M. Picon, Phys. Rev. **D73**, 064033 (2006), hep-th/0512348.

[34] I. Bars, AIP Conf. Proc. **767**, 3 (2005), hep-th/0502065.

[35] I. Bars and M. Picon, Phys. Rev. **D73**, 064002 (2006), hep-th/0512091.

[36] I. Bars, (2006), hep-th/0601091.

[37] R. Penrose and M. A. H. MacCallum, Phys. Rept. **6**, 241 (1972).

[38] I. Bars, AIP Conf. Proc. **903**, 550 (2007), hep-th/0610187.

[39] W. Chagas-Filho, (2006), hep-th/0601117.

[40] W. Chagas-Filho, (2006), hep-th/0607042.

[41] W. Chagas-Filho, (2006), hep-th/0604016.

[42] J. A. Nieto, (2005), hep-th/0506253.

[43] J. A. Nieto, L. Ruiz, J. Silvas, and V. M. Villanueva, AIP Conf. Proc. **857**, 249 (2006).

[44] J. M. Romero and A. Zamora, Phys. Rev. **D70**, 105006 (2004), hep-th/0408193.

[45] S. Vongehr, (1999), hep-th/9907077.

[46] I. Bars and G. Quelin, Phys. Rev. **D77**, 125019 (2008), 0802.1947.

[47] I. Bars and Y.-C. Kuo, (2008), 0808.0537.

[48] I. Bars and S.-H. Chen, (2008), 0811.2510.

[49] I. Bars, Phys. Rev. **D77**, 125027 (2008), 0804.1585.

[50] I. Bars, Class. Quant. Grav. **18**, 3113 (2001), hep-th/0008164.

[51] I. Bars, AIP Conf. Proc. **589**, 18 (2001), hep-th/0106021.

[52] R. P. Feynman, (1942).

[53] L. D. Faddeev, Theor. Math. Phys. **1**, 1 (1969).

[54] L. D. Faddeev and V. N. Popov, Phys. Lett. **B25**, 29 (1967).

[55] P. Van Nieuwenhuizen, Phys. Rept. **68**, 189 (1981).

[56] P. Van Nieuwenhuizen, In *Les Houches 1983, Proceedings, Relativity, Groups and Topology, Ii*, 823-932.

[57] E. S. Fradkin and G. A. Vilkovisky, Phys. Lett. **B55**, 224 (1975).

[58] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, Phys. Lett. **B69**, 309 (1977).

[59] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, Annals Phys. **98**, 287 (1976).

[60] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora, Commun. Math. Phys. **42**, 127 (1975).

[61] M. Henneaux and C. Teitelboim, Ann. Phys. **143**, 127 (1982).

[62] C. Teitelboim, Phys. Rev. **D25**, 3159 (1982).

[63] J. Govaerts, Int. J. Mod. Phys. **A4**, 173 (1989).

[64] J. Govaerts, Int. J. Mod. Phys. **A4**, 4487 (1989).

[65] J. Govaerts and W. Troost, Class. Quant. Grav. **8**, 1723 (1991).

[66] V. N. Gribov, Nucl. Phys. **B139**, 1 (1978).

[67] R. F. Sobreiro and S. P. Sorella, (2005), hep-th/0504095.

[68] M. Henneaux and J. D. Vergara, To appear in Proc. of 1st Int. A.D. Sakharov Conf. on Physics, Moscow, USSR, May 27-31, 1991.

[69] M. Henneaux, C. Teitelboim, and J. D. Vergara, Nucl. Phys. **B387**, 391 (1992), hep-th/9205092.

[70] H. Ikemori, Phys. Rev. **D40**, 3512 (1989).

[71] K. Shimizu and S. Wada, Int. J. Mod. Phys. **A7**, 1627 (1992).

[72] K. Shimizu, Mod. Phys. Lett. **A20**, 699 (2005).

[73] J. Govaerts, Leuven, Belgium: Univ. Pr. (1991) 371 p. (Leuven notes in mathematical and theoretical physics, B4).

[74] J. E. Frederico and V. O. Rivelles, em preparacao (2009).

[75] P. A. M. Dirac, Can. J. Math. **2**, 129 (1950).

[76] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. Lond. **A246**, 326 (1958).

[77] P. Senjanovic, Ann. Phys. **100**, 227 (1976).

[78] H. O. Girotti, p. 001 (1989), Lectures given at 5th Summer School Jorge Andre Swieca, Particle and Fields, Campos do Jordao, Brazil, Jan 8-21,1989.

[79] M. Henneaux, Phys. Rept. **126**, 1 (1985).

[80] G. Barton, Ann. Phys. **166**, 322 (1986).

[81] I. Bars, Phys. Rev. **D74**, 085019 (2006), hep-th/0606045.

[82] I. Bars, Phys. Lett. **B483**, 248 (2000), hep-th/0004090.