

INSTITUT DE PHYSIQUE DES HAUTES ENERGIES, SERPUKHOV

Rapport IFVE SKU 68-47

CERN LIBRARIES, GENEVA



CM-P00100571

CARACTERISTIQUES DYNAMIQUES  
DU SYNCHROTRON A PROTONS DE 70 GeV

par

V.P. Dmitrievskij, V.V. Kol'ga, T.M. Prilipko

Traduit au CERN par A. Golovanoff  
(Original : russe)

(CERN Trans. 69-14)

Genève  
Mai 1969

## INTRODUCTION

Le synchrotron à protons d'une énergie de 70 GeV a été réalisé et mis en marche à l'Institut de Physique des hautes Energies.

Du fait du caractère unique de l'équipement créé - longueur de la chambre à vide voisine de 1,5 km, poids de l'aimant environ  $21.10^3$  t - on a effectué en 1964 des calculs multiples sur certaines parties du projet.

Le présent travail contient les résultats des calculs des caractéristiques dynamiques du synchrotron à protons. La majeure partie des calculs a été effectuée à l'aide de la machine à calculer du centre de calcul de l'IURN. On trouvera aussi une brève analyse des résultats obtenus. L'analyse théorique ainsi que les formules de calcul pour les effets étudiés ne sont pas données en règle générale.

1. Structure du champ magnétique de l'accélérateur et équation du mouvement

L'aimant de l'accélérateur est une structure de 12 périodes de 10 unités magnétiques chacune. Pour structure initiale de calcul, on a pris les longueurs de champ efficace des aimants et des sections.

TABIEAU 1

N° des unités et des sections	1	2	3	4	5
Longueur (m) du bloc	10,6123	10,6123	10,6123	9,4924	9,4924
Longueur (m) de la section	1,076	2,426	1,076	4,67	1,076

6	7	8	9	10
9,4924	9,4924	10,6123	10,6123	10,6123
4,67	1,076	2,426	1,076	2,426

Pour vérification, on a utilisé les longueurs correspondantes de gradient.

TABLEAU 2

N° des unités	1	2	3	4	5
Longueur du bloc	10,4928	10,4928	10,4928	9,3708	9,3708
Longueur (m) de la section	1,1956	2,5456	1,1956	4,7937	1,1956

6	7	8	9	10
9,3708	9,3708	10,4928	10,4928	10,4928
4,7937	1,1956	2,2456	1,1956	2,5456

Les dimensions géométriques de champ citées doivent correspondre aux dimensions suivantes de construction de l'accélérateur (Tableau 3).

TABLEAU 3

N° des unités	1	2	3	4	5
Longueur (m) du bloc	10,4166	10,4166	10,4166	9,2966	9,2966
Longueur (m) de la section	1,272	2,622	1,272	4,866	1,272

6	7	8	9	10
9,2966	9,2966	10,4166	10,4166	10,4166
4,866	1,272	2,622	1,272	2,622

Comme les données relatives aux longueurs de champ et de gradient efficaces des unités sont susceptibles d'être précisées ultérieurement lors des calibrages, les longueurs de gradient étaient comptées en valeur efficace  $n_o = \frac{R}{H} \left. \frac{dH}{dr} \right|_{r=R}$ .

Les demi-longueurs des unités suivant le champ étaient prises égales à :

$$\ell_H = \ell_K + \Delta \ell_H = \frac{\int_0^\infty H ds}{H_o(r)} \quad (1)$$

où  $\ell_K$  - demi-longueur constructive suivant le fer d'une unité,  
 $H_o(r)$  - intensité du champ au centre de l'unité.

La demi-longueur des unités suivant le gradient est égale à :

$$\ell_g = \ell_K + \Delta \ell_g = \frac{\int_0^\infty \frac{dH}{dr} ds}{\frac{dH_o(r)}{dr}} \quad (2)$$

où  $\frac{dH_o(r)}{dr}$  - valeur du gradient au centre de l'unité. Les intégrales dans (1) et (2) sont prises le long de la trajectoire  $r = \text{const.}$

Les additifs efficaces correspondants du champ et du gradient s'écrivent sous la forme :

$$\Delta H = \frac{\int_0^{\infty} H ds}{l_k} - H_0(r)$$

$$\Delta G = \frac{\int_0^{\infty} G ds}{l_k} - G_0, \quad G = \frac{dH}{dr}$$
(3)

La conversion des longueurs selon le champ et le gradient en valeurs efficaces du champ et du gradient dans l'approximation considérée peut être effectuée selon les formules :

$$\frac{\Delta l_H}{l_k} = \frac{\Delta H}{H_0(r)},$$

$$\frac{\Delta l_g}{l_k} = \frac{\Delta G}{G_0}$$
(4)

Avec les paramètres donnés de la chambre à vide, les tolérances sur les systèmes en relation avec la dynamique du mouvement sont déterminées par la grandeur de l'enveloppe des oscillations des particules pendant l'accélération. La structure périodique du champ magnétique permet de trouver les solutions périodiques correspondant à l'orbite fermée, ainsi que les solutions stables des équations du mouvement qui sont caractérisées par les plans de phase  $(r', r)$ ,  $(z', z)$  et qui sont considérées comme des oscillations libres au voisinage de l'orbite fermée. Elles déterminent la valeur de l'impulsion de courant des particules accélérées pour un injecteur donné.

Dans le champ magnétique homogène azimutalement d'une unité ayant un plan d'asymétrie  $H_z(r, -z) = H_z(r, z)$ ,  $H_\varphi = 0$ , les équations du mouvement sont de la forme :

$$\begin{aligned} r'' - \frac{2r'^2}{r} - r &= - \frac{\ell}{pc} (r^2 + r'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} \left[ \left(r + \frac{r'^2}{r}\right) H_z - \frac{z'r'}{r} H_z \right], \\ z'' - \frac{2r'z'}{r} &= \frac{\ell}{p\ell} (r^2 + z'^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}} \left[ \left(r + \frac{z'^2}{r}\right) H_r - \frac{z'r'}{r} H_z \right] \end{aligned} \quad (5)$$

Dans le plan de symétrie, il existe une orbite fermée composée d'arcs de cercle et de droites. La condition de fermeture de cette orbite

$$\frac{\ell}{c} \oint \frac{H}{p} ds = \sum_{i=1}^{120} \frac{\ell_H^i}{R} = 2\pi \quad (6)$$

permet de déterminer le rayon de courbure pour la construction des unités à partir de la condition :

$$\frac{\ell_{H_{\max}}}{cp_{\max}} = \frac{1}{R} \quad (7)$$

Les auteurs du projet ont fixé ce rayon à :

$$R = 19412,5 \text{ cm} \quad (8)$$

Les longueurs de champ des unités, correspondant à l'orbite fermée idéale de ce rayon, sont données au tableau 1. Les sections droites transforment les conditions initiales suivant les formules :

$$\begin{aligned}
 \varphi_{i+1} &= \varphi_i \\
 r_{i+1} &= r_i + \frac{r_i'}{r_i} l_i \\
 r_{i+1}' &= r_i' \\
 z_{i+1} &= z_i + \frac{z_i'}{z_i} l_i \\
 z_{i+1}' &= z_i'
 \end{aligned}
 \quad (') - \text{dérivée par rapport à l'angle} \quad (9)$$

où  $i$  correspond à l'entrée d'une section droite,  $i+1$  à sa sortie ;  
 le système de coordonnées correspond au centre de courbure de  
 l'orbite idéale de chaque unité (Fig. 1). Les composantes du champ  
 magnétique dans le volume de la chambre à vide :

$$\begin{aligned}
 H_z &= H(r) \left\{ 1 + n \frac{p}{R} + \frac{H_{qd}}{H} \left( \frac{p}{A} \right)^2 + \frac{H_{cub}}{H} \left( \frac{p}{A} \right)^3 - \right. \\
 &\quad \left. - \left[ \frac{1}{A^2} \frac{H_{qd}}{H} + 3 \frac{H_{cub}}{H} \frac{p}{A^3} + \frac{n}{2R^2} \frac{R}{R+p} \right] x^2 \right\}, \\
 H_z &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} d\varphi,
 \end{aligned} \quad (10)$$

sont tirées de la solution du Laplacien bidimensionnel.

Ici,  $A$  - distance du bord de la chambre à son axe ( $A=8,5$  cm);  
 $\frac{H_{qd}}{H}$ ,  $\frac{H_{cub}}{H}$  - écarts correspondants de l'intensité du champ magnétique  
 dus aux non-linéarités quadratique et cubique au bord de la chambre.



## 2. Déplacement dans le plan de symétrie du champ magnétique linéaire

Pour analyser le déplacement des particules dans l'accélérateur, qui est déterminé par les équations (5) dans le champ magnétique (10), il est avantageux de séparer les effets liés aux différentes composantes de la structure du champ. Ainsi, pour le mouvement  $z = 0$ ,  $H_r = 0$ , si les non-linéarités du champ sont petites ( $|\frac{H_{qd}}{H}| \approx 10^{-3}$  et  $|\frac{H_{cub}}{H}| \approx 10^{-3}$ ), le rapport  $n \frac{H_{qd}}{H} \frac{R}{A} \gg 100$ , c'est-à-dire qu'il y a lieu d'étudier le mouvement dans un champ magnétique linéaire :

$$\rho'' - \frac{2\rho'^2}{R+\rho} - R - \rho = -\frac{1}{R_1} \frac{[\rho'^2 + (R+\rho)^2]^{3/2}}{R+\rho} \left(1 \pm n \frac{\rho}{R}\right), \quad (11)$$

où  $\frac{1}{R_1} = \frac{\ell H(r)}{pc}$ , le signe de la grandeur "n" alternant d'une unité à l'autre.

Pour  $R_1 = R$  et des conditions initiales nulles, la solution de (11) correspond à l'orbite fermée idéale de rayon  $R$ .

Pour des conditions initiales non nulles, les plans des phases  $(\rho', \rho)$  pour une phase quelconque  $(\varphi_0)$  ont une forme voisine de l'ellipse (Fig. 2); pour ces plans, les fréquences propres des oscillations sont tirées de:

$$\Delta\varphi = \oint \frac{d\rho}{\rho'}, \quad Q_r = \frac{2\pi}{\Delta\varphi} \quad (12)$$

Les plans des phases ont été calculés sur un ordinateur avec un pas pour l'argument  $\varphi$  égal à  $0,0002 \frac{\pi}{6}$ , les résultats étaient donnés avec une période structurelle  $(\frac{\pi}{6})^{*})$ . L'existence de zéros de la fonction  $\rho'(\varphi)$  rend plus difficile la détermination de la fréquence à partir de (12). La méthode des points coïncidants s'avère plus simple. Si l'on désigne par  $m$  le nombre de périodes des oscillations (la période des oscillations correspond à l'accomplissement de la courbe du plan des phases) jusqu'au point coïncidant, et par  $\nu$  le nombre de périodes de la structure correspondant au nombre  $m$ , on aura :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{\nu \cdot \frac{\pi}{6}}{m} , \\ Q_r &= \frac{12 m}{\nu} \end{aligned} \quad (13)$$

Les corrections lors d'une coïncidence inexacte des points sont introduites, dans l'hypothèse que le plan des phases est une ellipse décalée d'un angle correspondant par rapport aux axes initiaux. Dans ce cas, le nombre d'oscillations libres varie d'une valeur

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\pm \Delta s}{2\pi \sqrt{a^2 \cos^2 \xi_0 + b^2 \sin^2 \xi_0}} , \quad (14)$$

---

\*) La diminution du pas d'intégration est sans influence sur les résultats donnés par la machine.

$\cos \xi_0 = \frac{\rho_0}{b}$ ,  $\rho_0$  - coordonnées du point correspondant au demi-axe "b",  $\Delta s$  - distance suivant l'arc de l'ellipse entre les points "coïncidents",  $a, b$  - longueurs des demi-axes de l'ellipse.

Pour déterminer la fréquence  $Q_r$  avec trois chiffres significatifs, 10 révolutions du proton sont généralement suffisantes. Le "centre" du plan des phases correspond aux conditions initiales de l'orbite fermée pour  $\varphi_0$  donné.

On distingue deux sortes d'effets dans les déformations de l'orbite fermée : les effets résonants et les effets non résonants. Il n'y a pas de différence de principe entre ces effets, puisqu'ils sont tous contenus dans les solutions de (11), mais cette distinction est commode dans l'étude des tolérances du champ magnétique et de l'impulsion.

Les effets non résonants de distorsion de l'orbite fermée dans le champ magnétique idéal sont provoqués par les oscillations et des phases des particules dans le processus d'accélération / par l'écart de l'impulsion qui en résulte par rapport à la valeur correspondant à la phase synchrone. Pour l'accélérateur considéré, la dispersion maximale des impulsions représente une valeur voisine de  $\frac{\Delta p}{p} = \pm 4.10^{-3}$ .

L'effet <sup>de</sup> l'écart de l'impulsion entraîne une modification du rayon moyen ( $R_1$ ) et l'apparition d'oscillations forcées d'amplitude maximale  $a_0$ . La figure 7 représente les résultats de la détermination du rayon moyen, ainsi que les amplitudes  $a_0$  pour les paramètres de l'accélérateur. Dans les limites de l'intervalle d'impulsions donné, les effets sont linéaires et caractérisés par les dérivées

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\frac{\Delta p}{p}} &= 280 \text{ cm} , \\ \frac{da_0}{d\frac{\Delta p}{p}} &= 96 \text{ cm} . \end{aligned} \tag{15}$$

Les conditions initiales de l'orbite fermée sont déterminées d'après le centre du plan des phases des oscillations libres. Pour  $\frac{\Delta p}{p} = 4 \cdot 10^{-3}$ , ces conditions correspondent à  $\varphi_0 = 1,25 \text{ cm}$ ,  $\varphi'_0 = 14,3 \text{ cm/rad}$ .

Un effet analogue apparaît lors d'une détermination erronée de la longueur de champ efficace des unités (erreur sur l'effet de bord). Si l'on désigne l'erreur sur la longueur efficace par  $\Delta \ell_i$  et l'on suppose qu'elle est identique pour toutes les unités, il résulte de la condition de fermeture de l'orbite (6) qu'il faut que le rayon  $R_1$  varie d'une longueur

$$\frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{\Delta \ell_i}{\ell_i} \tag{16}$$

Ainsi, l'une des variantes possibles d'estimation de cet effet revient à le rapporter à la valeur initiale de l'impulsion suivant la formule :

$$\frac{\Delta R}{R_1} = \frac{\Delta P}{P} \quad (17)$$

Par suite de l'action effective des résonances linéaires dans l'accélérateur, les fréquences propres des oscillations transversales doivent être comprises dans les intervalles  $N - 0,5 < Q_{r,z} < N$  ou  $N < Q_{r,z} < N + 0,5$ , où  $N$  est un nombre entier.

Pour l'accélérateur considéré, le premier intervalle et la valeur  $N = 10$  sont choisis.

La figure 2 représente un plan des phases typique de l'équation (11) pour les conditions initiales  $\rho_0 = 1 \text{ cm}$ ,  $\rho'_0 = 0$  et les valeurs suivantes des paramètres :  $R_1 = R$ ,  $n_e = 440,8$ . La figure 3 représente  $Q_r$  en fonction de  $n_e$ , dont résulte la linéarité de la fonction dans le domaine de fréquences qui nous intéresse, avec une pente

$$\frac{dQ_r}{dn_e} = 0,024 \quad (18)$$

Ainsi, pour l'accélérateur considéré, une variation de la grandeur  $n$  (ou  $a = \frac{R}{n}$ ) de 1 % entraîne un déplacement de la fréquence propre de 0,1. Il convient de remarquer que pour un champ magnétique

linéaire, l'amplitude des oscillations libres dans les limites de l'ouverture de la chambre est sans influence sur la valeur de la fréquence propre, à 0,1 % près. Le plan des phases est donné pour l'azimut correspondant à la fin de la période (Fig. 1). Les longueurs des sections droites sont tirées du Tableau 1. Pour déterminer les écarts de la fréquence liés à la variation de la longueur des sections droites, on a effectué le calcul suivant l'équation (11) pour la longueur des unités des Tableaux 1 et 2. Les résultats de ces calculs sont donnés sur la Figure 10. L'augmentation correspondante de la fréquence des oscillations propres avec l'augmentation de la longueur des sections droites est caractérisée, pour l'accélérateur considéré, par la dérivée:

$$\frac{dQ_{r,z}}{d\ell} \approx 5 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}} \quad (19)$$

dans l'approximation linéaire.

Pour une particule dont l'impulsion ne correspond pas à l'équilibre ( $R_1 \neq R$ ), la fréquence des oscillations libres varie : elle diminue avec l'augmentation de l'impulsion.

La figure 4 donne les valeurs des fréquences propres pour deux écarts de l'impulsion de la valeur d'équilibre, égaux à :

$$\frac{\Delta p}{p} = \pm 4 \cdot 10^{-3}.$$

Le point de travail de l'accélérateur dans ce calcul correspond à  $Q_z = 9,702$ ,  $Q_r = 9,771$ . La linéarité de l'effet permet d'écrire la dérivée caractéristique correspondante :

$$\frac{dQ_z}{d\frac{\Delta p}{p}} = \frac{dQ_r}{d\frac{\Delta p}{p}} = -10,3 \quad (20)$$

Les systèmes, voisins de la linéarité, à fréquences propres choisies sont le plus sensibles aux excitations résonantes. Les harmoniques de résonance fondamentales du champ magnétique de l'accélérateur sont :

- 1) la neuvième, la dixième et la onzième harmoniques dans la structure du champ;
- 2) la dix-neuvième harmonique dans la structure du gradient.

Les premières harmoniques provoquent une résonance simple, la dernière harmonique une résonance paramétrique. Avec le schéma de calcul utilisé, l'introduction de ces harmoniques dans la structure du champ magnétique de l'équation (11) ne présente pas de difficultés. La tolérance la plus sévère est liée à la dixième harmonique du champ, qui a été introduite sous la forme  $\mathcal{E}_{10} \sin 10\varphi$ . La figure 5 représente le plan des phases de la résonance simple pour  $\frac{\Delta p}{p} = 0$ ,  $n_e = 442$ ;  $\mathcal{E}_{10} = 4 \cdot 10^{-4}$ . Les résultats du calcul pour les deux cas les plus défavorables sont donnés sur la figure 6.

- 1)  $\frac{\Delta p}{p} = 0$ ,  $n_e = 442$  ( $Q_r = 9,79$ )
- 2)  $\frac{\Delta p}{p} = -4.10^{-3}$ ,  $n_e = 442$  ( $Q_r = 9,83$ ).

Il résulte des courbes de la figure 6 que l'augmentation de l'amplitude avec l'augmentation de la perturbation est linéaire jusqu'aux amplitudes égales à la demi-ouverture de la chambre. Comme le calcul est fait pour une section arbitraire et que c'est l'enveloppe des oscillations pour une période de structure qui nous intéresse, on a trouvé le coefficient de conversion au maximum de l'enveloppe. La conversion a été effectuée par deux procédés : a) détermination du plan des phases dans une section voisine du maximum de l'enveloppe; b) déduction de la solution pour un azimuth décalé de  $\frac{\pi}{60}$ .

Les deux procédés ont abouti à des rapports très voisins des amplitudes au maximum de l'enveloppe ( $a_{or}$ ) à l'amplitude pour l'azimut considéré. Ce rapport se révèle égal à :

$$\frac{a_{or}}{a_{max}} \approx 1,25 \quad (21)$$

Ainsi, les dérivées correspondantes sont numériquement égales à :

$$\begin{aligned} \frac{da_{or}}{d\epsilon_{10}} &= 1,60 \cdot 10^4 \text{ cm} & \text{pour} & \quad \frac{\Delta p}{p} = 0 \\ \frac{da_{or}}{d\epsilon_{10}} &= 2 \cdot 10^4 \text{ cm} & \text{pour} & \quad \frac{\Delta p}{p} = -4 \cdot 10^3. \end{aligned} \quad (22)$$



Il résulte directement de (22) qu'il faut prévoir des enroulements de correction de la dixième harmonique au cours du processus d'accélération.

On a calculé de façon analogue les dérivées pour la 9ème et la 11ème harmoniques pour  $Q_r = 9,697$  ( $n_e = 438$ ) et  $\frac{\Delta p}{p} = 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{da_0}{d\varepsilon_9} &= 4 \cdot 75 \cdot 10^3 \text{ cm} \\ \frac{da_0}{d\varepsilon_{11}} &= 2,5 \cdot 10^3 \text{ cm.} \end{aligned} \quad (23)$$

Pour un écart quadratique moyen du champ de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-4}$ , ces harmoniques ne seront pas dangereuses.

Comme la fréquence choisie des oscillations libres est voisine de 9,5 ( $Q_r = 9,5 + \delta$ ), il faut exclure pour le point de travail la possibilité de passer dans la bande de résonance paramétrique, qui est décrite par une équation de la forme :

$$\rho'' + (Q_r^2 - \Delta n \cos 19\varphi) \rho = 0 \quad (24)$$

Pour que le point de travail se trouve à l'extérieur de la bande de résonance de l'équation (24), il faut que l'inégalité suivante soit respectée :

$$\Delta n < 38 \delta \quad (25)$$

L'inégalité (25) introduit des conditions qui ne sont pas très sévères pour l'amplitude de la 19ème harmonique du gradient ( $\Delta n$ ) pour  $\delta = 0,2$ ;  $\Delta n = 7,6$ ; toutefois l'approche de la bande de

résonance entraîne aussi une augmentation de l'amplitude des oscillations, calculée selon l'équation (11) avec l'introduction de l'harmonique sous la forme  $\Delta n \sin 19\varphi$ . La courbe d'augmentation de l'enveloppe des amplitudes pour différents  $\Delta n$  avec  $\delta = 0,2$  est représentée sur la figure 8; il en résulte que l'amplitude de la 19ème harmonique du gradient dans la structure du champ ne doit pas dépasser la grandeur

$$\Delta n = 5 \quad (26)$$

### 3. Stabilité axiale dans l'accélérateur

L'étude de la stabilité axiale dans l'accélérateur amène à la nécessité de la résolution simultanée de l'équation (5). Pour un champ linéaire dans le plan  $z = 0$ , les composantes s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} H_R &= H(R) \left[ 1 + n \frac{\rho}{R} - \frac{1}{2} n \frac{R}{R+\rho} \left( \frac{R}{R} \right)^2 \right], \\ H_z &= H(R) \left[ \frac{H}{R} z + \frac{1}{6} n \left( \frac{R}{R} \right)^3 \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

En substituant (27) dans (5), nous obtenons le système suivant, dont l'analyse numérique est effectuée sur ordinateur :

$$\begin{aligned}
 \rho'' - \frac{2\rho'^2}{R+\rho} - R - \rho = & -\frac{1}{R_1} \left[ 1 + \left( \frac{\rho'}{R+\rho} \right)^2 + \left( \frac{\alpha'}{R+\rho} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \times \\
 & \times \left\{ \left[ (R+\rho)^2 + \rho'^2 \right] \left[ 1 + n \frac{\rho}{R} - \frac{1}{2} n \left( \frac{\alpha}{R} \right)^2 \right] - \right. \\
 & \left. - \left[ \frac{n}{2} \alpha + \frac{1}{6} n \left( \frac{\alpha}{R} \right)^3 \right] \alpha' \rho' \right\} \\
 \alpha'' - \frac{2\rho'\alpha'}{R+\rho} = & \frac{1}{R_1} \left[ 1 + \left( \frac{\rho'}{R+\rho} \right)^2 + \left( \frac{\alpha'}{R+\rho} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[ (R+\rho)^2 + \alpha'^2 \right] \times \right. \\
 & \left. \times \left[ \frac{n}{2} \alpha + \frac{1}{6} n \left( \frac{\alpha}{R} \right)^3 \right] - \left[ 1 + n \frac{\rho}{R} - \frac{1}{2} n \left( \frac{\alpha}{R} \right)^2 \right] \alpha' \rho' \right\}
 \end{aligned} \tag{28}$$

La figure 9 représente les plans typiques des phases  $(Z'Z, \rho'\rho)$  du système (28). On a calculé les différences des fréquences des oscillations propres dans le diapason des valeurs de travail de  $n_e$  (Fig. 10).

La dérivée caractéristique des oscillations axiales coïncide avec la dérivée pour les oscillations radiales (17)

$$\frac{dQ_Z}{dn_e} = 0,024 \tag{29}$$

#### 4. Influence des termes non linéaires dans la structure du champ sur les fréquences des oscillations propres

La présence de termes non linéaires dans la structure du champ provoque une modification de l'orbite fermée (pour les protons non résonants) et une variation des fréquences des oscillations libres . Le premier effet pour les valeurs des non linéarités qui nous

intéressent  $\angle (1-2) \cdot 10^{-3}$  est négligeable dans l'accélérateur considéré.

Le deuxième effet peut avoir une influence sensible sur le régime de travail de l'accélérateur, en particulier pour les champs d'injection (courant tourbillonnaire et champs résiduels) et pour les inductions maximales, lorsque la saturation de l'aimant se manifeste.

Le système d'équations de base pour l'étude des effets non linéaires s'obtient en substituant le champ magnétique sous la forme (10) dans l'équation (5) :

$$\begin{aligned}
 \rho'' - \frac{2\rho'^2}{R+\rho} - R \cdot \rho = & - \frac{1}{R_1} \left[ 1 + \frac{\rho'^2}{(R+\rho)^2} + \frac{\tilde{z}'^2}{(R+\rho)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ [(R+\rho)^2 + \rho'^2] \left[ 1 + n \frac{\rho}{R} + \right. \right. \\
 & + \frac{H_{qd}}{H} \frac{\rho^2}{A^2} + \frac{H_{cub}}{H} \frac{\rho^3}{A^3} - \frac{n}{2R^2} \tilde{z}^2 - \frac{H_{qd}}{H} \frac{\tilde{z}^2}{A^2} - 3 \frac{H_{cub}}{H} \frac{\rho \tilde{z}^2}{A^3} \left. \right] - \\
 & - \left( \frac{n}{R} + 2 \frac{H_{qd}}{H} \frac{\rho}{A^2} + 3 \frac{H_{cub}}{H} \frac{\rho^2}{A^3} \right) \tilde{z} \tilde{z}' \rho' + \frac{H_{cub}}{H} \frac{\tilde{z}^3}{A^3} \tilde{z}' \rho' \left. \right\} , \\
 \tilde{z}'' - \frac{2\rho' \tilde{z}'}{R+\rho} = & \frac{1}{R_1} \left[ 1 + \frac{\rho'^2}{(R+\rho)^2} + \frac{\tilde{z}'^2}{(R+\rho)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ [(R+\rho)^2 + \tilde{z}'^2] \left[ \left( \frac{n}{R} + 2 \frac{H_{qd}}{H} \frac{\rho}{A^2} + \right. \right. \right. \\
 & + 3 \frac{H_{cub}}{H} \frac{\rho^2}{A^3} \left. \right) \tilde{z} - \frac{H_{cub}}{H} \frac{\tilde{z}^3}{A^3} \left. \right] - \left( 1 + n \frac{\rho}{R} + \frac{H_{qd}}{H} \frac{\rho^2}{A^2} + \frac{H_{cub}}{H} \frac{\rho^3}{A^3} - \right. \\
 & - \frac{n}{2R^2} \tilde{z}^2 - \frac{H_{qd}}{H} \frac{\tilde{z}^2}{A^2} - 3 \frac{H_{cub}}{H} \frac{\rho \tilde{z}^2}{A^3} \left. \right) \tilde{z}' \rho' \left. \right\} ,
 \end{aligned} \tag{30}$$

où  $A = 8,5$  cm - distance radiale de l'orbite fermée idéale, à laquelle sont définies les valeurs des non-linéarités.

#### 4.1 Non-linéarité quadratique

Les effets liés à la non-linéarité quadratique ont été étudiés en résolvant le système (30) pour  $\frac{H_{\text{cub}}}{H} = 0$  et une valeur  $n_e = 440,8$  ( $Q_z = 9,7026$ ,  $Q_r = 9,771$  - théorie linéaire). Les paramètres étudiés étaient :  $a$  - amplitude des oscillations libres radiales,  $b$  - amplitude des oscillations libres axiales et  $\frac{\Delta p}{p}$  - écart de l'impulsion de la valeur résonante ( $R_1$  dans le système (30)).

Les résultats du calcul pour les particules résonantes ( $\frac{\Delta p}{p} = 0$ ) sont rassemblés au tableau 4 (où  $h$  - pas d'intégration du système (30)).

TABLEAU 4

N°	$\frac{H_{\text{qd}}}{H}$	$a(\text{cm})$	$b(\text{cm})$	$Q_r$	$Q_z$	$h$
1	$-10^{-3}$	2,36	$0(10^{-3})$	9,771	9,702	0,0002 $\frac{\pi}{6}$
2	$-4 \cdot 10^{-3}$	2,36	0	9,767	9,702	"
3	$-4 \cdot 10^{-3}$	9,6	0	9,714	9,777	"
4	$-2 \cdot 10^{-3}$	7,25	0	9,763	9,702	"
5	$-2 \cdot 10^{-3}$	0	$4,6^*)$	-	9,699	"

\*) L'amplitude des oscillations axiales est déterminée par la méthode décrite plus haut pour les oscillations radiales.

Il résulte du tableau 4 que la valeur du déplacement de la fréquence correspondante est décrite avec une assez bonne précision par la formule /1/ :

$$\Delta Q = - \frac{1}{2Q^3} \left( \frac{H_{qd}}{H} \right)^2 \frac{R^2 a^2}{A^4} \quad (31)$$

Dans l'ensemble, l'effet considéré pour l'accélérateur en question est négligeable si  $q \leq 2,5$  cm;  $b \leq 2,5$  cm et  $\frac{H_{qd}}{H} \leq 2 \cdot 10^{-3}$ .

Pour les particules dont l'impulsion ne correspond pas à l'équilibre, l'effet lié à la non-linéarité quadratique augmente sensiblement. On donne dans le tableau 5 le résultat de la résolution du système (30) pour l'écart maximal de l'impulsion  $\frac{\Delta p}{p} = \pm 4 \cdot 10^{-3}$ .

L'analyse des résultats du tableau 5 aboutit aux conclusions suivantes :

a) Oscillations radiales

Lorsque  $\frac{\Delta p}{p}$  et  $\frac{H_{qd}}{H}$  sont de même signe, la fréquence augmente à cause de la présence de la non-linéarité quadratique. Lorsque les signes de  $\frac{\Delta p}{p}$  et  $\frac{H_{qd}}{H}$  sont opposés, la fréquence diminue.

La variation de la fréquence dépend linéairement de la grandeur de la non-linéarité quadratique. Le coefficient de pente est approximativement le même dans les deux cas et égal à :

$$\frac{dQ_r}{d(H_{qd}/H)} = \pm (44 \pm 4) \quad (32)$$

TABLEAU 5

N°	$\frac{\partial P}{\partial}$	$\frac{H \partial b}{H}$	$\rho_0$	$\rho'_0$	$\varepsilon_0$	$\varepsilon'_0$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_{\text{нрвб.}}$	$h$	$Q_{\text{нрвб.}}$
1.	$4 \cdot 10^{-3}$	$+1 \cdot 10^{-3}$	0,1	0	0,1	0	9,778	9,623	9,817	$2 \cdot 10^{-4}$	9,862
2.	$-4 \cdot 10^{-3}$	$-1 \cdot 10^{-3}$	0,1	0	0,1	0	9,857	9,706	9,818	-"-	9,867
3.	$-4 \cdot 10^{-3}$	$-1 \cdot 10^{-3}$	-1,2	-16	0,1	0	9,857	9,706	9,818	-"-	9,867
4.	$4 \cdot 10^{-3}$	$-1 \cdot 10^{-3}$	1,2	1,2	0,1	0	9,692	9,702	9,731	-"-	9,741
5.	$-4 \cdot 10^{-3}$	$+1 \cdot 10^{-3}$	0,1	0	0,1	0	9,767	9,783	9,728	-"-	9,744
6.	$4 \cdot 10^{-3}$	$-1 \cdot 10^{-3}$	0,1	0	0,1	0	9,692	9,702	9,731	-"-	9,741
7.	$4 \cdot 10^{-3}$	$-2 \cdot 10^{-3}$	0,1	0	0,1	0	9,647	9,738	9,636	-"-	9,777
8.	$4 \cdot 10^{-3}$	$-1,5 \cdot 10^{-3}$	0,1	0	0,1	0	9,667	9,720	9,706	-"-	9,759

A cette approximation près, le résultat ne dépend pas de la valeur de l'amplitude des oscillations radiales (dans les limites d'ouverture de la chambre) par rapport à l'orbite fermée (condition initiale  $p_0 = \pm 1,2 \text{ cm}$   $p'_0 = \pm 13,4 \text{ cm/rad}$ ).

b) Oscillations axiales

Lorsque  $\frac{\Delta p}{p}$  et  $\frac{H_{qd}}{H}$  sont de même signe, la fréquence diminue à cause de la présence de la non-linéarité quadratique.

L'augmentation de la fréquence <sup>se</sup> produit lorsque  $\frac{\Delta p}{p}$  et  $\frac{H_{qd}}{H}$  sont de signes contraires.

La pente est voisine de celle qui est indiquée pour les fréquences des oscillations radiales et égale à :

$$\frac{dQ_z}{d(H_{qd}/H)} \quad (33)$$

Ainsi, la non-linéarité quadratique dans la structure du champ magnétique en présence d'oscillations synchrotroniques étend la valeur des fréquences propres d'une grandeur considérable. Indépendamment des signes de la non-linéarité quadratique, pour  $\frac{H_{qd}}{H} = 10^{-3}$  cette grandeur atteint 0,08. Comme l'étendue structurelle des fréquences est égale à 0,07, la différence totale des fréquences pour cette valeur de la non-linéarité quadratique atteindra :

$$Q_r - Q_z \approx 0,15 \quad (34).$$



#### 4.2 Non-linéarité cubique

Par analogie avec la non-linéarité quadratique, les effets liés à la non-linéarité cubique ont été étudiés par résolution du système (30) avec  $\frac{H_{qd}}{H} = 0$  et une valeur  $n_e = 440,8$ . Le signe de la non-linéarité cubique va en alternant d'une unité magnétique à l'autre. Les résultats du calcul sont rassemblés au tableau 6.

TABLEAU 6

N°	$\frac{\Delta p}{p}$	$\frac{H_{cub}}{H}$	$\rho_o (cm)$	$(\rho'_o)$ (cm)	$Z_o$ (cm)	$Z'_o$ (cm)	a(cm)	b(cm)	$Q_r$	$Q_z$
1	0	$10^{-3}$	1	0	$10^{-2}$	0	2,15	$10^{-2}$	9,776	9,702
2	0	$10^{-3}$	3	0	$10^{-2}$	0	6,5	$10^{-2}$	9,815	9,702
3	0	$2 \cdot 10^{-3}$	3	0	$10^{-2}$	0	6,5	$10^{-2}$	9,846	9,702
4	0	$10^{-3}$	$10^{-2}$	0	2	0	$10^{-2}$	4,2	9,771	9,684
5	0	$2 \cdot 10^{-3}$	1	0	$10^{-2}$	0	2,15	$10^{-2}$	9,781	9,702
6	$4 \cdot 10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	0	$10^{-2}$	0	$10^{-2}$	$10^{-2}$	9,739	9,662
7	$4 \cdot 10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	0	$10^{-2}$	0	$10^{-2}$	$10^{-2}$	9,818	9,743

Il ressort de l'examen du tableau 6 que les variations des fréquences propres sont approximativement proportionnelles au carré de l'amplitude des oscillations libres:

$$\begin{aligned} \Delta Q_r &\approx 1,0 \cdot \left| \frac{H_{cub}}{H} \right| \cdot a^2 \\ \Delta Q_z &\approx -1,0 \cdot \left| \frac{H_{cub}}{H} \right| \cdot b^2 \end{aligned} \quad (35)$$

La non-linéarité cubique dans la structure du champ, comme cela résulte de l'expression (35), étend encore les fréquences propres; toutefois, pour les amplitudes des oscillations libres  $a \leq 2,5$  cm,  $b \leq 2,5$  cm et des valeurs  $\frac{H_{\text{cub}}}{H} < 2 \cdot 10^{-3}$ , cet effet est petit.

Les oscillations synchrotroniques, en présence de non-linéarités cubiques, ont aussi une faible influence sur la variation des fréquences propres.

## 5. Energie critique

La période de révolution d'une particule d'équilibre diminue de façon monotone au cours du processus d'accélération (de 11,5 à 4,95  $\mu\text{sec}$ ), puisque

$$\frac{dT_s}{dP_s} = \frac{d}{dP_s} \left( \frac{L_o}{\beta_{sC}} \right) = - \frac{L_o}{\beta_{sP_sC}} \cdot \frac{E_o^2}{E_s^2}, \quad (36)$$

où  $L_o$  - longueur de l'orbite fermée d'équilibre ( $L_o = \text{const}$ ),

$P_s$ ,  $E_s$  - valeurs d'équilibre de l'impulsion et de l'énergie.

Pour les particules non en équilibre ( $P \neq P_s$ ), la longueur de l'orbite fermée dépend de l'énergie; alors, la variation de la période de révolution des particules est différente de (36)

$$\frac{dT}{dP} = \frac{L}{\beta_{\rho C}} \left( \frac{P}{L} \frac{dL}{dP} - \frac{E_o^2}{E^2} \right). \quad (37)$$

La grandeur  $\alpha = \frac{P}{L} \frac{dL}{dP}$ , coefficient d'élargissement de l'orbite - est déterminée par la structure du champ magnétique adoptée et constitue une grandeur constante pour l'accélérateur donné, lorsque l'impulsion s'écarte peu de la valeur d'équilibre (dans les limites des oscillations de phase).

Pour les structures à focalisation forte du champ magnétique,  $\alpha \ll 1$ , ce qui entraîne avec une énergie

$$E_{cr} = \frac{E_0}{\sqrt{\alpha}} \quad (38)$$

à l'indépendance entre la période de révolution des particules non en équilibre et l'impulsion ( $\frac{dT}{dP} = 0$ ) et, donc, à l'altération de la stabilité des phases, qui est décrite par l'équation

$$\frac{d}{dT} \left( \frac{E \dot{\varphi}}{\alpha - \frac{E_0^2}{E^2}} \right) = \frac{2 \pi C^2}{L_0^2} e V_0 (\cos \varphi - \cos \varphi_s), \quad (39)$$

où  $eV_0$  - valeur de l'amplitude de l'augmentation d'énergie par tour,

$\varphi$  - phase du passage de la particule dans les résonateurs,

$\varphi_s$  - valeur d'équilibre de la phase

$$\cos \varphi_s = \frac{e H L_0^2}{2 \pi C \cdot e V_0} = \frac{2 \pi R^2 \dot{H}}{e V_0} \quad (40)^{*})$$

---

\*) Dans les équations (39), (40), le point désigne la différentiation par rapport au temps.

Pour déterminer le coefficient  $\alpha$ , on a effectué les calculs numériques de l'équation (11) conjointement avec

$$L = \sum_{i=0}^{120} \left[ \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \sqrt{\rho^2 + (R+\rho)^2} d\varphi + \ell_{i+1} \sqrt{1 + \frac{1}{(R+\rho)_{i+1}^2} \left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)_{i+1}^2} \right] \quad (41)$$

Les résultats de ces calculs sont représentés sur la courbe de la figure 11. Il résulte de la figure 11 que l'énergie critique, correspondant à la transition de la phase d'équilibre  $\varphi_s$ , est égale à :

$$E_{cr} = 8,52 \text{ GeV} \quad (42)$$

et ne dépend pratiquement pas de l'amplitude des oscillations libres.

#### CONCLUSIONS

1. La prise en considération de la non-linéarité des termes dans les équations du mouvement modifie de façon insignifiante les résultats des calculs du processus dynamique.
2. L'importante extension des fréquences propres par la non-linéarité quadratique entraîne la nécessité d'une tolérance sévère pour  $\frac{H_{qd}}{H} \leq 10^{-3}$  ou l'utilisation d'une méthode de compensation. Une correction particulièrement minutieuse de la non-linéarité quadratique doit être effectuée dans le domaine des inductions d'injection (76-100) oe, / où l'on peut s'attendre à des différences

entre des cycles, par suite de la non-reproductibilité du champ résiduel.

3. Pour faciliter les travaux de mise au point, il est indiqué de déplacer le point de travail dans la zone  $Q_z = 9,6$ .

Les auteurs sont reconnaissants à A.A. Logunov pour la solution de la question relative à la nécessité de poser le problème dans l'approximation non linéaire de la théorie, ainsi qu'à Yu.M. Ado, D.G. Koshkarev et E.K. Tarasov pour l'examen des différents résultats du présent travail.

#### REFERENCE

1. R. Hagedorn et al. Symposium CERN, 1965, p. 237.



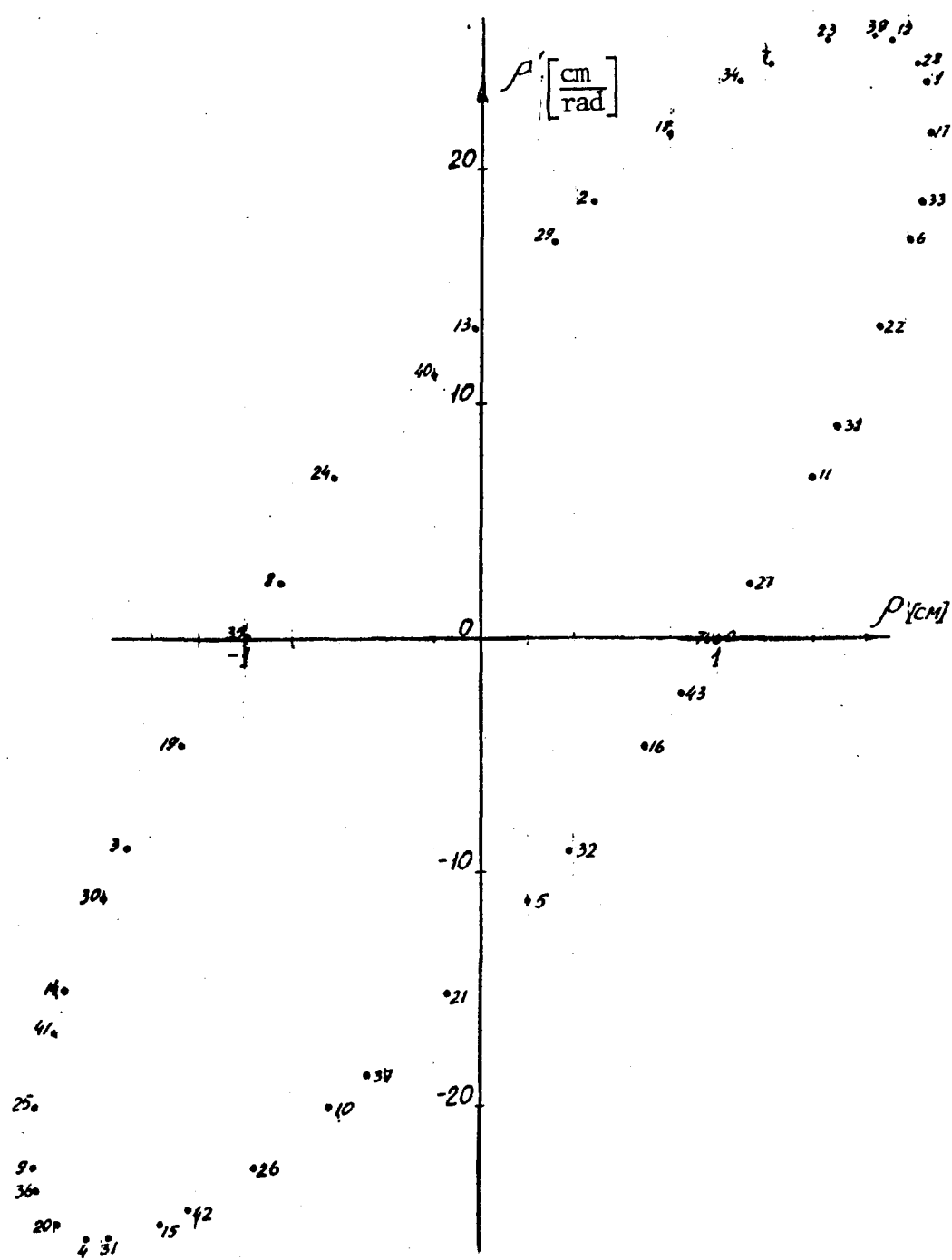


Fig. 2

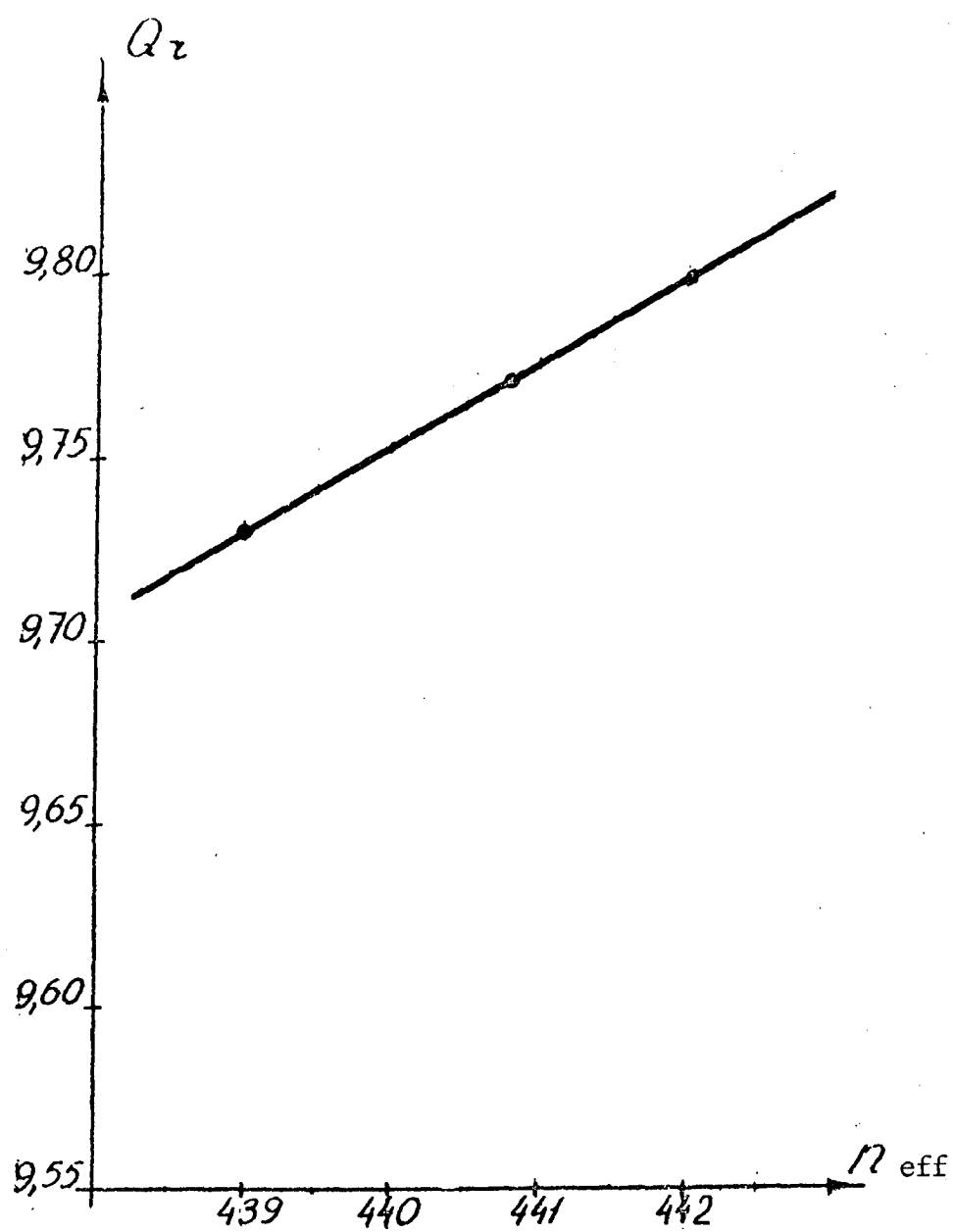


Fig. 3



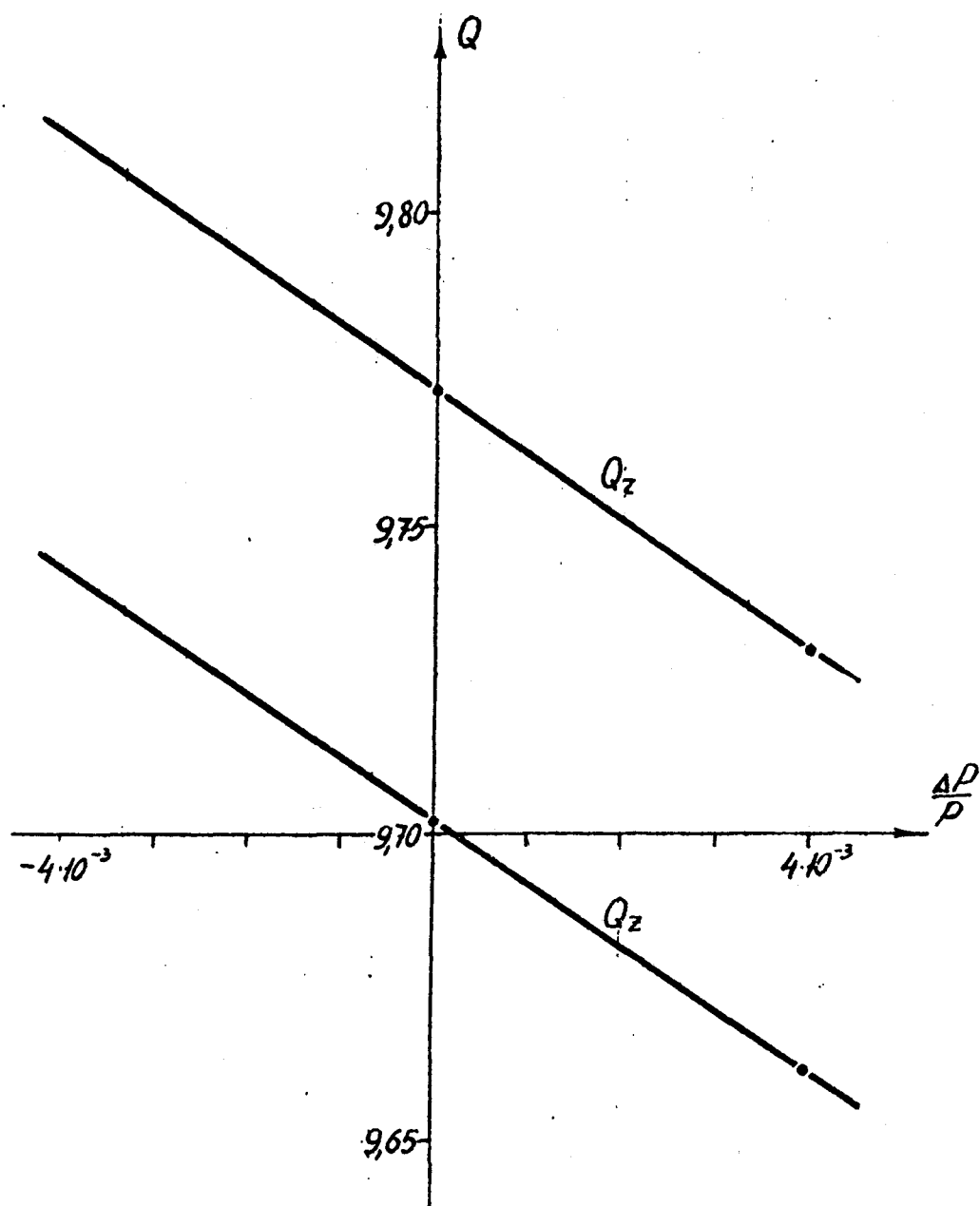


Fig. 4

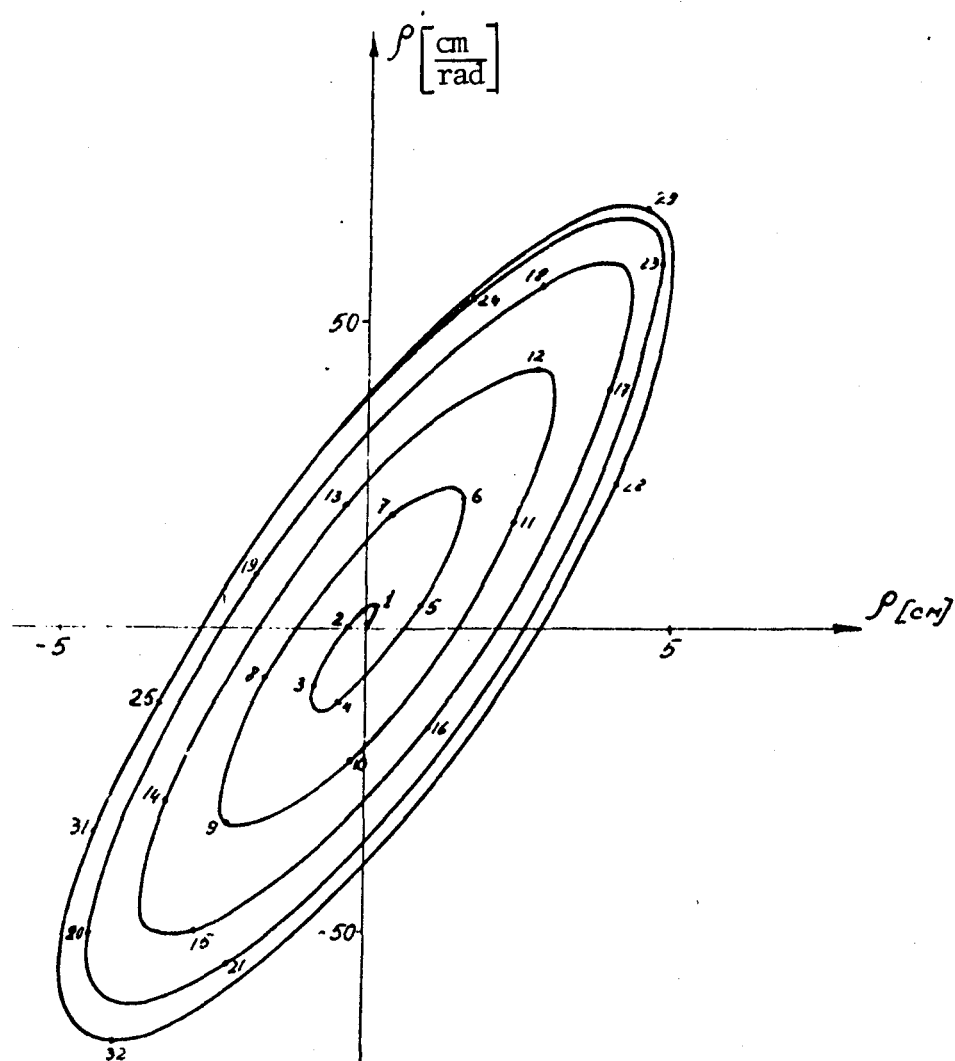


Fig. 5

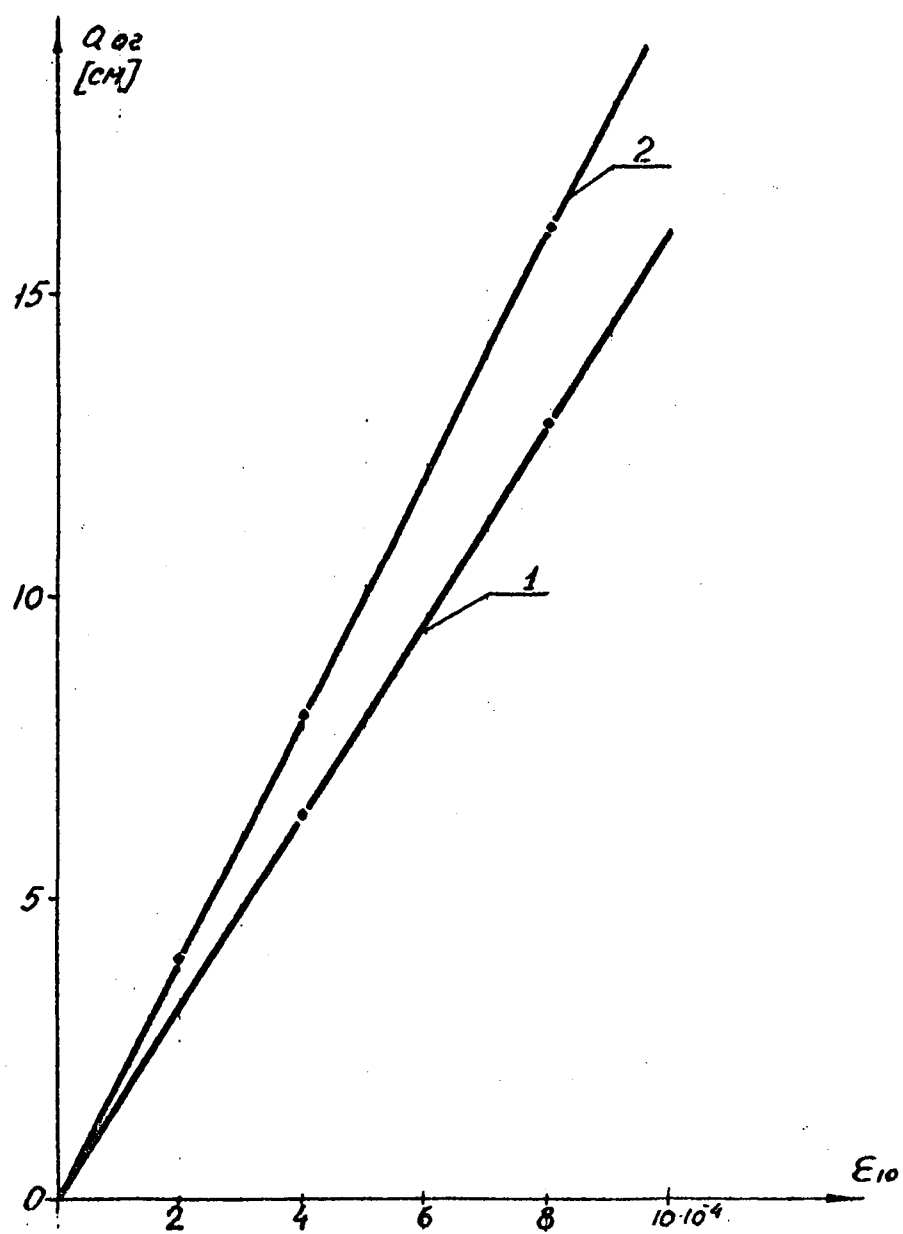


Fig. 6

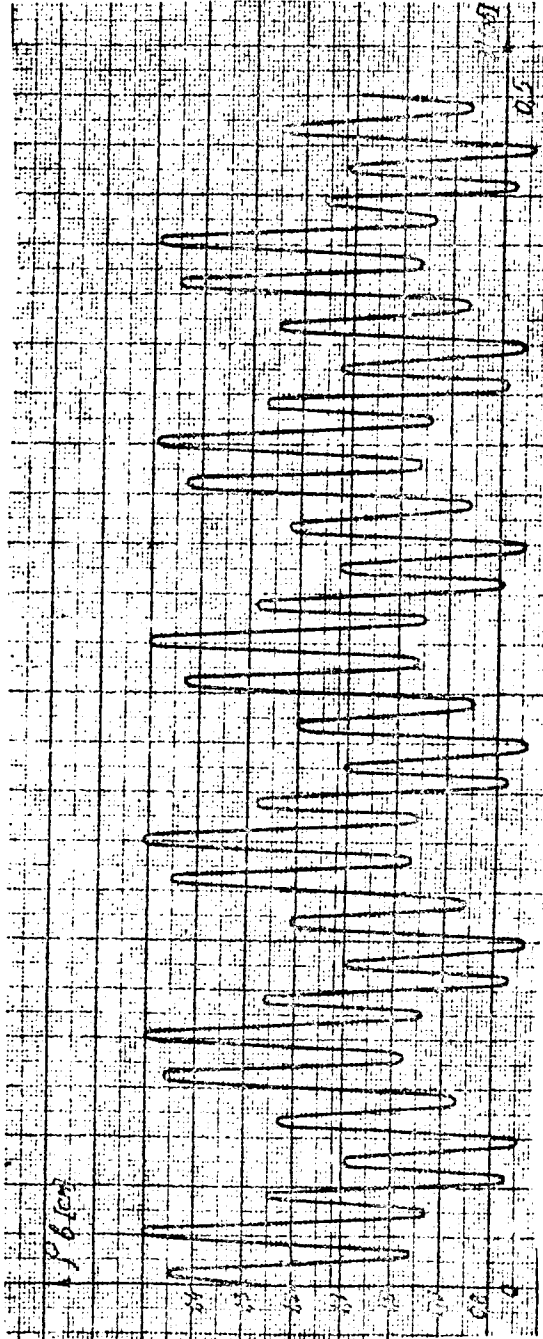


Fig. 7

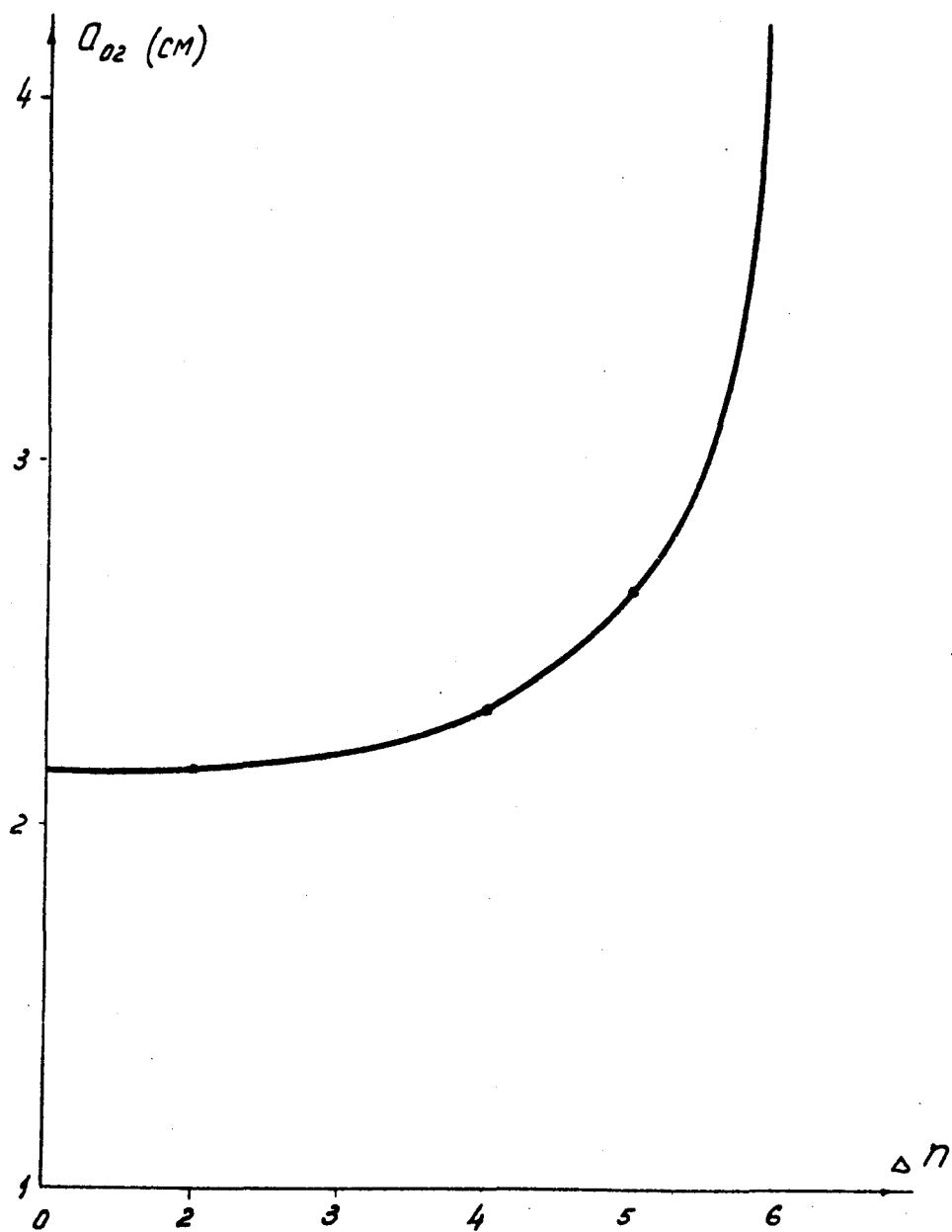


Fig. 8

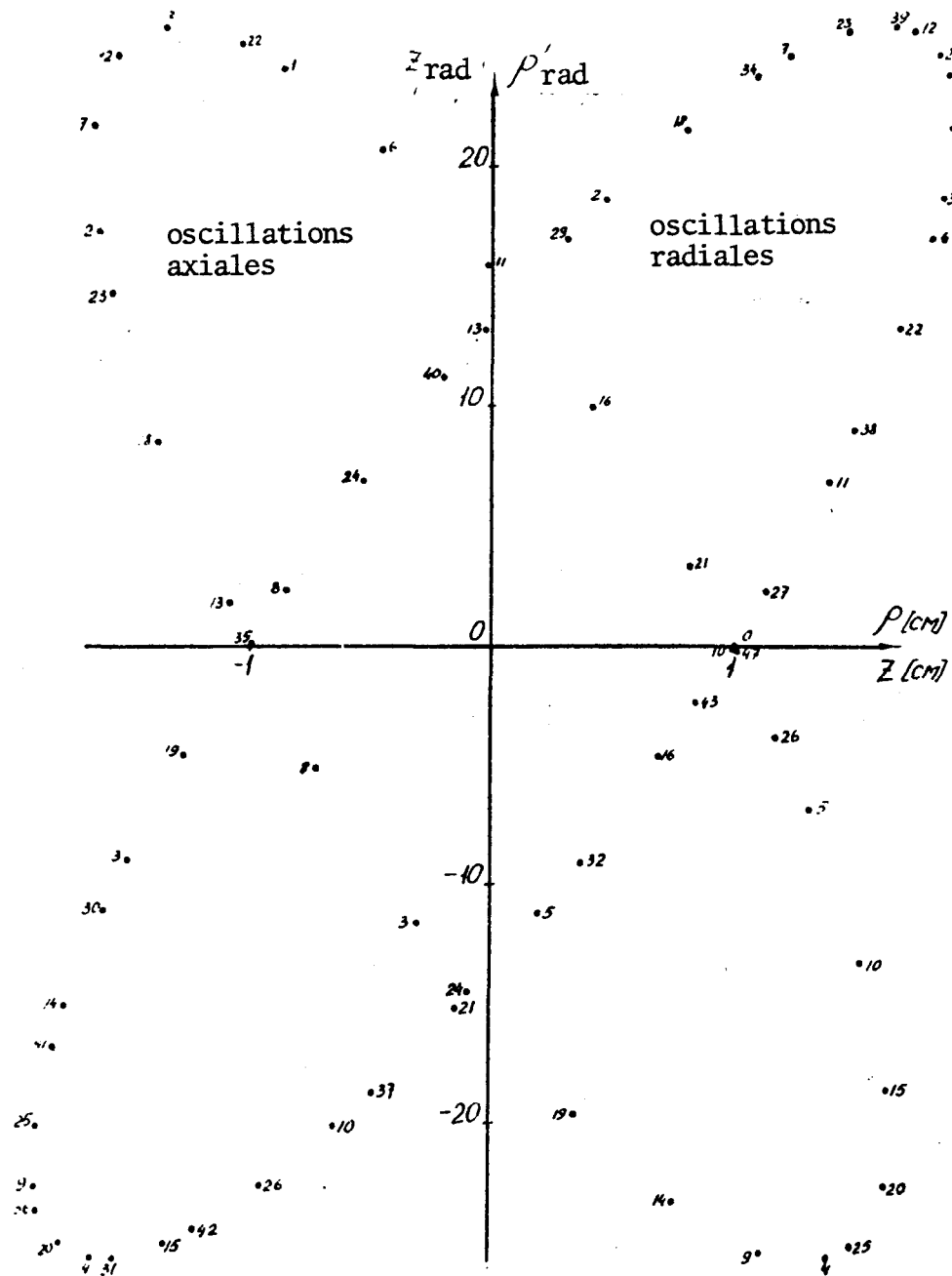


Fig. 9

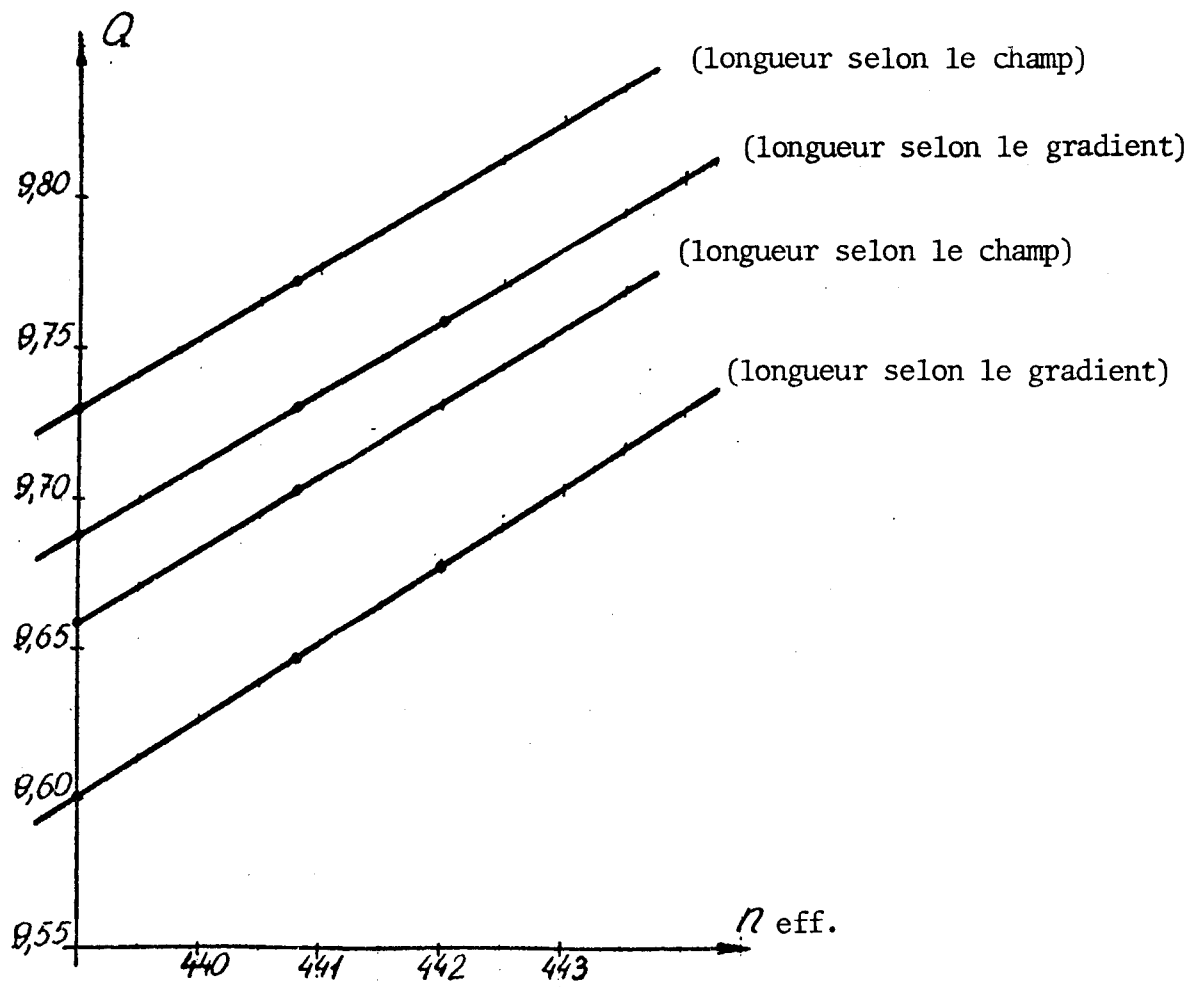


Fig. 10

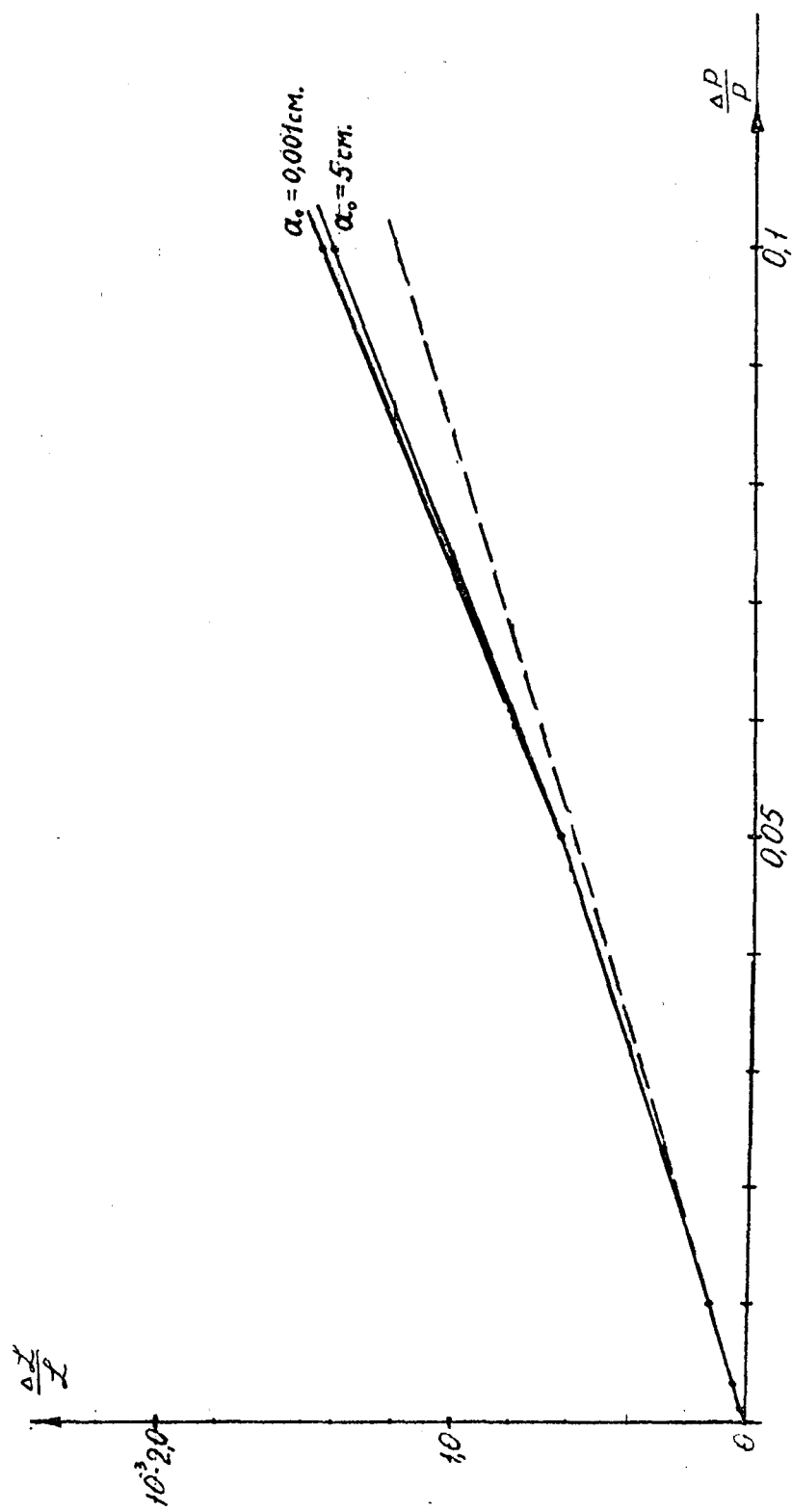


Fig. 11