

Grundlagen der Flavorphysik in fünfdimensionaler Anti-de Sitter-Raumzeit

Diplomarbeit von
Torsten Pfoh

Johannes-Gutenberg-Universität Mainz
Dezember 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	5
2 Das Randall-Sundrum-Modell	11
2.1 Ansatz und Lösung der Metrik	11
2.2 Beseitigung des Hierarchieproblems	14
2.3 5D-Felder und Kaluza-Klein-Zerlegung	17
2.3.1 Skalare Felder	17
2.3.2 Fermionen	18
2.3.3 Eichbosonen	23
3 Bulk-Fermionen	27
3.1 Herleitung der Fermionprofile	27
3.2 Yukawakopplungen	31
3.3 Diagonalisierung der Massenmatrix	32
3.3.1 Entwicklung in erster Ordnung	33
3.3.2 Entwicklung in zweiter Ordnung	36
3.3.3 Interpretation	40
4 5D-Eichtheorien	43
4.1 Zerlegung des 5D-Eichfeldes	43
4.2 5D-Eichtransformationen	44
4.3 Eichtheorie mit gebrochener Symmetrie	45
4.3.1 Zerlegung der Wirkung	45
4.3.2 Eichfixierung und Feldredefinition	48
4.3.3 Diagonalisierung der Massenmatrizen	51
4.4 Feynmanregeln	58
4.4.1 Propagatoren	58
4.4.2 Vertizes der nichtabelschen Eichtheorie	59
4.4.3 Vertizes der Eichkopplungen	62
4.5 Bemerkungen	65

5 Eichinvarianz und Modenmischung	67
5.1 Eichinvarianz auf Baumgraphenniveau	67
5.2 Boxgraph	70
6 Ausblick	73

Kapitel 1

Einleitung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, Eichkopplungen und Grundlagen der Flavorphysik im Rahmen des Randall-Sundrum Modells zu studieren. Da wir es hierbei mit einer Erweiterung des wohlvertrauten Standardmodells (SM) der Elementarteilchenphysik zu tun haben, stellt sich zunächst die Frage, warum generell eine Erweiterung nötig sein sollte.

Das SM beschreibt die uns heute bekannten Teilchen und ihre Austauschwechselwirkungen konsistent bis zu beliebig hohen Energien, jedoch macht es keine Aussage darüber, welche Rolle Quantengravitationseffekte in diesem Zusammenhang spielen, die im Energiebereich der Planckskala auftreten. Des Weiteren enthält es eine große Anzahl freier Parameter, die man sozusagen von außen in die Theorie einführen muss, um eine korrekte Beschreibung der Natur zu erhalten. So enthalten z.B. die Fermion ihre Masse durch Kopplung an das skalare Higgs-Feld. Die Stärke der Kopplung ist zunächst völlig beliebig. Man gleicht daher die Kopplungskonstanten den gemessenen Fermionmassen an, ohne eine Erklärung für deren Massenhierarchie zu haben.

Die elektromagnetische, die starke und die schwache Wechselwirkung haben ihre Ursache in der Forderung nach lokaler Eichinvarianz der Theorie unter den jeweiligen Symmetriegruppen. Ausgangspunkt ist die $SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Symmetrie welche durch Kopplung der elektroschwachen Eichfelder an das Higgsboson (Dublett unter $SU(2)_L$) auf die verbleibende $SU(3) \times U(1)_{e.m.}$ Restsymmetrie heruntergebrochen wird. Die Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung, die W- und Z-Bosonen, erhalten hierbei Massen proportional zum Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes. Man sagt, der Symmetriebruch erfolgt bei der schwachen Skala m_W (die Masse des W-Bosons).

Der Erfolg der elektroschwachen Vereinheitlichung veranlasste Georgi und Glashow [1], eine Vereinheitlichung aller drei Eichwechselwirkungen in eine ursprüngliche $SU(5)$ -Symmetrie bei hohen Energien vorzuschlagen. Die Skala, bei der der Symmetriebruch auf die $SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Symmetrie des Standardmodells erfolgen soll, ist als GUT-Skala (grand unified theory) bekannt. Diese liegt bei etwa 10^{15} GeV, da hier die laufenden Kopplungen von starker und elektroschwacher Wechselwirkung von der selben Größenordnung sind. Wenn man also in der Lage wäre, solche Energien im Experiment zu erzeugen (was sicher-

lich nie der Fall sein wird), so würde man massive Eichbosonen dieser höheren Symmetriegruppe produzieren. Das Standardmodell erschien in diesem Licht als effektive Theorie, deren Cut-Off durch die GUT-Skala gegeben ist. Auch wenn eine direkte Produktion möglicher neuer Eichbosonen nicht möglich ist, so würden sie dennoch als virtuelle Teilchen in Wechselwirkungen auftreten und Quarks an Leptonen koppeln. Auf diese Weise könnte ein Proton zerfallen. Dieser Effekt wäre aber, da es sich effektiv um einen 4-Fermionprozess handelt, mit dem inversen Quadrat der GUT-Skala unterdrückt (zum Vergleich: die Kopplungsstärke der schwachen Wechselwirkung ist durch $1/m_W^2$ gegeben).

Andererseits stellt sich die Frage, ob in der Natur weitere schwere Materiefelder außer den uns bekannten existieren. Wenn ja, dann sind diese entweder in leichtere (uns bekannte) Materie zerfallen, oder sie wechselwirken im besten Fall nur schwach und sind daher für uns unsichtbar. Ihre Präsenz würde sich jedoch durch ihre gravitative Wechselwirkung bemerkbar machen. Wir wissen heute, dass es solche dunkle Materie im Universum geben muss, da die sichtbare Masse zu gering ist, um die Rotationsgeschwindigkeiten von Galaxien zu erklären.

Man hat also gute Gründe anzunehmen, dass der Feldgehalt des Standardmodells nicht ausreicht. Die oben genannten stellen jedoch nur eine Auswahl dar. Es gibt noch weitere Fragen, die das Standardmodell nicht beantwortet. Darüberhinaus wäre es ohnehin äußerst gewagt, davon auszugehen, dass zwischen den heute im Experiment erreichbaren Energien (etwa 100GeV) und Energien im Bereich der zweiten fundamentalen Skala in der Natur, der Planckskala (etwa 10^{19} GeV), keine neuen Effekte auftreten. Vom experimentellen Standpunkt hat man es demnach mit 17 Größenordnungen unerforschten Niemandsland zu tun! Eine Erweiterung des Standardmodells ist zwar gut motiviert, bringt aber konzeptionelle Probleme mit sich. Wenn man annimmt, dass es weitere Materiefelder jenseits der schwachen Skala gibt, so werden auch deren Massen durch sogenannte Yukawakopplungen mit dem Higgsfeld erzeugt. Massenterme der Art $m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L)$ sind nämlich a priori nicht eichinvariant, da links- und rechtshändige Felder sich unterschiedlich unter SU(2)-Transformationen verhalten. Die Masse des Higgsbosons selbst hingegen ist ein fundamentaler Parameter der Theorie ($m^2\phi^\dagger\phi$ ist eichinvariant). Der Higgs-Propagator enthält nun Schleifenkorrekturen durch alle Felder, die an das Higgs koppeln. Den größten Anteil haben hierbei Fermionschleifen. Diese erzeugen eine quadratische Divergenz, welche sich durch Renormierung aus der Theorie entfernen lässt. Wenn es aber Teilchen gibt, die viel schwerer sind als das Higgs, so ist hierbei eine enorme Feinjustierung der Parameter von Nöten, um die Higgsmasse in der Nähe der schwachen Skala zu fixieren. Eine winzige Änderung der Parameter hätte ein Anwachsen der Higgsmasse in die Größenordnung der Massen der neuen Teilchen zur Folge. Die Notwendigkeit einer Feinjustierung wird demnach als unnatürlich empfunden. Allgemein sagt man, dass alle fundamentalen Massenparameter einer Theorie, die bis zu einer Skala Λ gültig ist, von der selben Größenordnung sein müssen, damit die Theorie natürlich ist. Wenn man nun eine Erweiterung des Standardmodells formuliert, welche neue Physik bis zur Planckskala mit sich bringt, so muss man sich Mechanismen überlegen, welche die Higgsmasse stabilisieren, wenn man vermeiden will, dass die Theorie unnatürlich ist. Das eben beschriebene Problem wird in der Literatur als Hierarchie-Problem bezeichnet und resultiert aus der Tatsache, dass die schwache Skala so

verschieden von der Planckskala ist. Es ist sozusagen die Schwäche der Gravitation im Vergleich zu den anderen Wechselwirkungen, die uns wiedereinmal Kopfzerbrechen bereitet.

Die populärste Erweiterung des Standardmodells, welche zugleich das Hierarchieproblem löst, ist die Supersymmetrie. Sie ordnet jedem Fermion einen bosonischen Superpartner und umgekehrt zu. Ich möchte jedoch nicht weiter darauf eingehen. Ein wesentlich radikaleres Konzept wurde 1998 von Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos und Gia Dvali vorgeschlagen. Im ADD Modell [2] wird die Planckskala als fundamentale Skala der Natur eliminiert. Während die Physik der schwachen Wechselwirkung bei Energien der elektroschwachen Skala experimentell wohl erprobt ist, ist dies für die Gravitation im Bezug auf die Planckskala keineswegs der Fall. Das $1/r$ Potential der Newton'schen Theorie war zu diesem Zeitpunkt bis auf Abstände von etwa 1cm geprüft (heute $\sim 100\mu m$). Die Annahme, die Planckskala sei fundamentaler Natur, setzt voraus, dass sich an diesem Potentialverlauf bis hin zu Abständen der Plancklänge ($\sim 10^{-35} m$) nichts ändert. Mit anderen Worten: Man extrapoliert die experimentelle Bestätigung des Gravitationsgesetzes um 33 Größenordnungen! Im ADD-Modell wird angenommen, dass es in der Natur n zusätzliche kompaktifizierte Raumdimensionen mit Radius R gibt, durch welche allerdings nur das Graviton propagieren darf. Sämtliche Standardmodell-Teilchen bleiben in der gewöhnlichen vierdimensionalen Raumzeit lokalisiert. Diese bildet eine Hyperfläche (sog. *Brane*) im höherdimensionalen Raum. Die fundamentale $(4+n)$ dimensionale Planckskala soll nun in etwa von der Größenordnung der elektroschwachen Skala sein. Sei $r \ll R$ der Abstand zweier Testmassen, dann gilt für das Gravitationspotential nach dem Gauss'schen Gesetz

$$V(r) \sim \frac{m_1 m_2}{M_{Pl(4+n)}^{n+2}} \frac{1}{r^{n+1}} \quad (r \ll R). \quad (1.1)$$

Für $(r \gg R)$ erhält man hingegen

$$V(r) \sim \frac{m_1 m_2}{M_{Pl(4+n)}^{n+2}} R^n \frac{1}{r} \quad (r \gg R). \quad (1.2)$$

Demnach gilt für die effektive 4D Planckskala

$$M_{Pl}^2 \sim M_{Pl(4+n)}^{n+2} R^n. \quad (1.3)$$

Der Radius ergibt sich hieraus zu

$$R \sim \frac{1}{M_{Pl(4+n)}} \left(\frac{M_{Pl}}{M_{Pl(4+n)}} \right)^{\frac{2}{n}}. \quad (1.4)$$

Für $n = 1$ findet man $R \sim 10^{11} - 10^{12}$ m. Dies ist gänzlich ausgeschlossen, da man sonst seit Newton ein $1/r^2$ -Potential gemessen hätte. Der Fall $n = 2$ liefert $R \sim 100\mu\text{m}-1\text{mm}$. Auch diese Möglichkeit ist nach den neuesten Messdaten ausgeschlossen. Mit der Wahl $n = 3$ liegt der Radius der zusätzlichen Dimensionen bereits im Nanometerbereich. Eine experimentelle Überprüfung des Gravitationsgesetzes in diesem Bereich dürfte nahezu ausgeschlossen sein, jedoch hätte das Modell weitere phänomenologische Konsequenzen: Sperrt man ein Teilchen in eine kompaktifizierte Dimension, so bildet sich unter Verwendung der Randbedingungen in Analogie zum harmonischen Oszillator eine Kaskade an möglichen Zuständen aus. Man findet ein äquidistantes, nahezu kontinuierliches Spektrum von sogenannten Kaluza-Klein-Gravitonen der Masse m_k :

$$m_k = \frac{k \pi}{R} = k \pi M_{Pl(4+n)} \left(\frac{M_{Pl(4+n)}}{M_{Pl}} \right)^{\frac{2}{n}} \approx k \pi M_{EW} \cdot 10^{1-\frac{30}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

Hierbei wurde $M_{Pl(4+n)} \sim 1\text{TeV}$ angenommen. Der Grundzustand entspricht hierbei dem gewöhnlichen Graviton und bleibt masselos. Betrachtet man nun Prozesse bei der Energie $E = \sqrt{s}/2$, bei denen Gravitonen emmitiert werden, so ist die Anzahl der möglichen Zustände $\sim (ER)^n$. Für den Wirkungsquerschnitt gilt somit

$$\sigma \sim \frac{1}{M_{Pl(4+n)}^2} (ER)^n. \quad (1.6)$$

Setzt man nun versuchsweise $M_{Pl(4+n)} = E = M_{EW}$, so findet man $\sigma \sim 1/M_{EW}^2$. In einem Collider-Experiment hätte man es demnach mit fehlender Energie aufgrund der Abstrahlung von Kaluza-Klein-Gravitonen zu tun. Hieraus kann man Bedingungen an $M_{Pl(4+n)}$ und n herleiten [4]. Weitere Einschränkungen findet man durch astrophysikalische Effekte, beispielsweise das Herunterkühlen der Supernova SN1987A [5]. Die Analyse ergab:

$$n = 3 \quad M_{Pl(7)} \geq 4\text{TeV},$$

$$n = 4 \quad M_{Pl(8)} \geq 1\text{TeV}.$$

Auch wenn dieser verblüffende Ansatz der sogenannten *Large Extra Dimensions* durch geeignete Wahl der Parameter den Experimenten angepasst werden kann, so löst er bei genauerer Betrachtung nicht wirklich das Hierarchieproblem. Vielmehr wird die Frage nach dem Grund der Hierarchie zwischen M_{Pl} und M_{EW} umformuliert in die Frage, warum die zusätzlichen Dimensionen so groß sind im Vergleich zu $1/M_{Pl}$, der natürlichen Längenskala einer Theorie, welche bis zur Planckskala gültig ist. Dieses neue Problem würde jedoch im Limes $n \rightarrow \infty$ verschwinden.

Die Idee der zusätzlichen Raumdimensionen zur Lösung des Hierarchieproblems wurde im Oktober 1999 in dem Artikel *Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension* [7] von Lisa Randall und Raman Sundrum aufgegriffen. Im Gegensatz zu ADD gehen die Autoren von einer einzigen zusätzlichen Raumdimension von der Größenordnung der Plancklänge aus. Die Besonderheit besteht darin, dass sich Längen- bzw. Energieskalen ändern,

wenn man in die 5. Dimension vordringt. Dies wird durch das Einführen einer nichtfaktorisierenden fünfdimensionalen Metrik erreicht, welche die Raumzeitkoordinaten mit der Koordinate der 5. Dimension verknüpft. Auch in diesem (RS1-) Modell bleiben die SM-Felder auf der *Brane* lokalisiert.

Die Arbeit ist nun wie folgt gegliedert: Im nachfolgenden Kapitel werden die Grundideen des RS-Modells und die damit verbundene Beseitigung des Hierarchieproblems erläutert. Daraufhin entlassen wir die Felder in den Bulk und studieren deren Kaluza-Klein-Zerlegung. Kapitel 3 beschäftigt sich mit der Herleitung der Fermionprofile aus den Resultaten des vorangegangenen Kapitels. Weiterhin werden Yukawakopplungen an ein branelokalisiertes Higgsfeld und die daraus hervorgehende unendlichdimensionale Massenmatrix erörtert. Diese wird dann im Rahmen eines Entwicklungsverfahrens diagonalisiert. Kapitel 4 widmet sich den verallgemeinerten fünfdimensionalen Eichtheorien mit dem Ziel, die zugehörigen Feynmanregeln aufzustellen. Hierbei wird es bei der Herleitung der Propagatoren in beliebiger R_ξ -Eichung zu einem Zusammenspiel der Goldstone-Bosonen mit den Komponenten A_5 des Eichfeldes kommen, welches die Eichinvarianz der abgeleiteten vierdimensionalen Theorie garantiert. Dieses soll in Kapitel 5 anhand zweier Beispiele auf Baumgraphen- und Schleifenniveau konkret überprüft werden. Die Arbeit schließt mit einigen Bemerkungen über die Herangehensweise bei der Herleitung der Lagrangedichte einer effektiven Theorie, bei der die Kaluza-Klein-Felder aus der Sichtweise des Pfadintegralformalismus ausintegriert werden.

Diese Version der Arbeit wurde auf Tippfehler korrigiert. In den Formeln (4.52), (4.54) sowie (4.61) und (4.62) wurde jeweils das fordere Feld in den bilinearen Termen nachträglich komplex konjugiert. Stand vom 14.06.2008

Kapitel 2

Das Randall-Sundrum-Modell

2.1 Ansatz und Lösung der Metrik

Das Herzstück des RS-Modells [7] bildet die nichtfaktorisierende fünfdimensionale Metrik, welche durch das folgende Linienelement gegeben ist

$$ds^2 = e^{-2\sigma(\phi)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r^2 d\phi^2. \quad (2.1)$$

Hierbei ist r der Radius der 5. Dimension, ϕ stammt aus dem Intervall $[-\pi, \pi]$. Randall und Sundrum verwenden die Konvention $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Die Punkte (x, ϕ) und $(x, -\phi)$ werden identifiziert. Hierzu führt man eine Paritätsoperation ein, so dass $P(\phi) = -\phi$ gilt. Man spricht von einer S^1/Z_2 -Orbifold (angelehnt an den engl. Begriff *manifold*). Die Punkte $\phi = 0, \pi$ werden hierdurch mit sich selbst identifiziert. An diese Fixpunkte werden nun vierdimensionale Unterräume, sog. 3-Branen angeheftet (die Zahl 3 bezieht sich auf die Anzahl der räumlichen Komponenten).

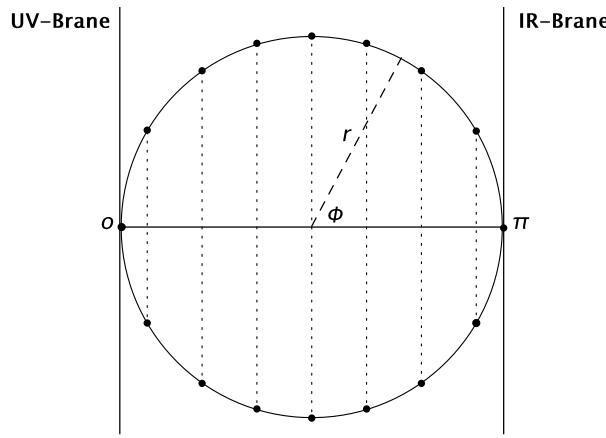


Abbildung 2.1: S^1/Z_2 -Orbifold

Die Gravitation soll nun auf der sog. Planck- oder UV-Brane bei $\phi = 0$ residieren, die

Standardmodell-Teilchen leben auf der TeV- oder IR-Brane. Die Namensgebung ist in der obigen Exponentialfunktion begründet, die auf den Namen *Warpfaktor* getauft wurde. Wie wir später zeigen werden, ist $\sigma(\phi) \propto |\phi|$. Demnach verschwindet der Warpfaktor bei der Planckbrane und sorgt für eine Vergrößerung der Längenskalen auf der TeV-Brane. Sei nun G_{MN} die fünfdimensionale Metrik mit krummlinigen Koordinaten, dann ergeben sich die induzierten vierdimensionalen Metriken auf den Branen zu

$$g_{\mu\nu}^{IR}(x) \equiv G_{\mu\nu}(x, \phi = \pi), \quad (2.2)$$

$$g_{\mu\nu}^{UV}(x) \equiv G_{\mu\nu}(x, \phi = 0). \quad (2.3)$$

Betrachten wir nun die 5D-Wirkung:

$$\begin{aligned} S = & \int d^4x \int d\phi \sqrt{-G} \{2M^3 R - \Lambda\} \\ & + \int d^4x \sqrt{-g^{IR}} \{\mathcal{L}_{IR} - V_{IR}\} + \int d^4x \sqrt{-g^{UV}} \{\mathcal{L}_{UV} - V_{UV}\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Hierbei bezeichnet R den Ricci-Skalar und Λ die kosmologische Konstante der 5D Theorie. V_{IR} und V_{UV} sind die kosmologischen Konstanten der vierdimensionalen Unterräume. Diese werden in der Literatur als *brane tensions* bezeichnet. Variiert man die Wirkung nach der jeweiligen Metrik, so erhält man die 5D-Einsteingleichungen. Im Vakuum, also ohne Materiefelder, lauten sie

$$\begin{aligned} \sqrt{-G}(R_{MN} - \frac{1}{2}G_{MN}R) = & -\frac{1}{4M^3}\Lambda\sqrt{-G} G_{MN} \\ & -\frac{1}{4M^3} \left(V_{IR}\sqrt{-G^{IR}}g_{\mu\nu}^{IR}\delta_M^\mu\delta_N^\nu\delta(\phi - \pi) + V_{UV}\sqrt{-G^{UV}}g_{\mu\nu}^{UV}\delta_M^\mu\delta_N^\nu\delta(\phi) \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Der oben gegebene Ansatz (2.1) respektiert die 4D-Poincaré-Invarianz der Theorie entlang der Koordinaten x^μ an jeder Koordinate ϕ . Wir berechnen die zugehörigen Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{MN}^R = \frac{1}{2}G^{RS}(G_{NS,M} + G_{MS,N} - G_{MN,S}) \quad (2.6)$$

wobei das Komma für eine partielle Ableitung steht ($\partial_M G_{NS} \equiv G_{NS,M}$) und $\partial_5 = \partial_\phi$. Man findet

$$\Gamma_{00}^5 = -\Gamma_{ii}^5 = -\frac{\sigma'}{r^2}e^{-2\sigma}, \quad (2.7)$$

$$\Gamma_{05}^0 = \Gamma_{50}^0 = \Gamma_{i5}^i = \Gamma_{5i}^i = -\sigma', \quad (2.8)$$

bzw. in kompakter Notation

$$\Gamma_{\mu 5}^\mu = \Gamma_{5\mu}^\mu = -\sigma', \quad \Gamma_{\mu\mu}^5 = \eta_{\mu\mu} \frac{\sigma'}{r^2} e^{-2\sigma}. \quad (2.9)$$

Alle anderen Christoffel-Symbole sind Null. Für den Ricci-Tensor

$$R_{MN} = \partial_K \Gamma_{NM}^K - \partial_N \Gamma_{KM}^K + \Gamma_{KL}^K \Gamma_{NM}^L - \Gamma_{NL}^K \Gamma_{KM}^L \quad (2.10)$$

erhält man somit die nicht verschwindenden Komponenten

$$R_{00} = -R_{ii} = \frac{1}{r^2} e^{-2\sigma} (4\sigma'^2 - \sigma''), \quad (2.11)$$

$$R_{55} = 4(\sigma'' - \sigma'^2). \quad (2.12)$$

Letzlich berechnet man den Ricci-Skalar zu

$$R = R_N^N = G^{NM} R_{MN} = -\frac{4}{r^2} (5\sigma'^2 - 2\sigma''). \quad (2.13)$$

Setzt man die obigen Resultate in die linke Seite der Einsteingleichungen (2.5) ein und vergleicht mit der rechten Seite, so findet man:

$$R_{55} - \frac{1}{2} G_{55} R = 6\sigma'^2 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{4M^3} \Lambda r^2 \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\mu} - \frac{1}{2} G_{\mu\mu} R &= \eta_{\mu\mu} \frac{1}{r^2} (6\sigma'^2 - 3\sigma'') e^{-2\sigma} \\ &\stackrel{!}{=} -\eta_{\mu\mu} e^{-2\sigma} \frac{1}{4M^3} \left(\Lambda + V_{IR} \frac{1}{r} \delta(\phi - \pi) + V_{UV} \frac{1}{r} \delta(\phi) \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Hierbei wurde auf der rechten Seite $\sqrt{-G} = \sqrt{-g} r$ benutzt. Vereinfacht man (2.15) durch Einsetzen von (2.14), so bleiben die Gleichungen

$$\sigma'^2 = -r^2 \frac{\Lambda}{24M^3}, \quad (2.16)$$

$$\sigma'' = \frac{r}{12M^3} \left(V_{IR} \delta(\phi - \pi) + V_{UV} \delta(\phi) \right). \quad (2.17)$$

Da ferner $\sigma(\phi) = \sigma(-\phi)$ gilt, folgt aus (2.16)

$$\sigma = r|\phi| \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}} \quad (2.18)$$

und somit $\Lambda < 0$. Die zugrundeliegende 5D-Raumzeit ist demnach ein Anti de Sitter Raum. Da man die Metrik als periodische Funktion in der Koordinate ϕ begreift (siehe Abb.2.1), folgt aus (2.18)

$$\sigma'' = 2r \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}} \left(\delta(\phi) - \delta(\phi - \pi) \right). \quad (2.19)$$

Durch Vergleich mit Gl. (2.17) findet man

$$V_{UV} = -V_{IR} = 24M^3 k, \quad \Lambda = -24M^3 k^2. \quad (2.20)$$

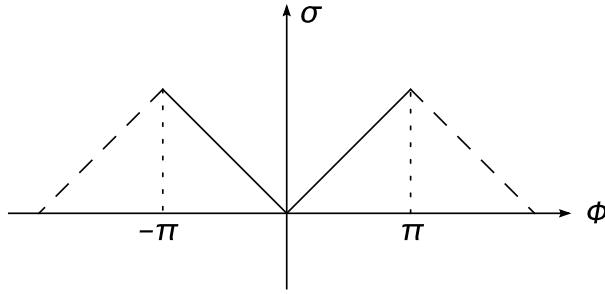


Abbildung 2.2: Warpfaktor und Randbedingungen

Hierbei ist k eine Energieskala, die, wie wir später sehen werden, die fundamentale 5D-Planckskala M mit der bekannten 4D-Planckskala M_{Pl} verknüpft. Setzen wir dieses Resultat in Gl. (2.18) ein, so erhalten wir

$$\sigma = kr|\phi|. \quad (2.21)$$

Hätte man im Gegensatz zu Randall und Sundrum die Konvention $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ gewählt, wäre das 5D-Linienelement durch

$$ds^2 = e^{-2\sigma(\phi)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - r^2 d\phi^2 \quad (2.22)$$

gegeben (man beachte den Vorzeichenwechsel in der 5. Komponente). Die nichtverschwindenden Christoffelsymbole sowie der Riccitensor blieben unverändert (es gilt nachwievor $\partial_5 = \partial_\phi$). Der Ricciskalar und die Funktionaldeterminante hingegen wechseln ihr Vorzeichen. Man würde daher in der 5D-Wirkung (2.4) das Vorzeichen vor der kosmologischen Konstanten Λ ändern. Dies garantiert ferner, dass die Beziehung (2.16) sich nicht ändert, wir es also nach wie vor mit einer Anti-de Sitter-Raumzeit zu tun haben.

Da wir in Zukunft effektive vierdimensionale Feldtheorie betreiben wollen, empfiehlt es sich, von nun an die Konvention $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ zu benutzen, da dies in der Phänomenologie des Standardmodells üblich ist.

2.2 Beseitigung des Hierarchieproblems

Bevor wir den nächsten Schritt unternehmen und die Standardmodellfelder in den Bulk entlassen, wollen wir zunächst verstehen, wie der Ansatz (2.22) das Hierarchieproblem eliminiert. Zunächst einmal benötigt man eine Relation zwischen den Skalen M , k und M_{Pl} . Hierzu ziehen wir den Warpfaktor aus der Metrik heraus:

$$g_{\mu\nu}^{IR} = e^{-2kr\pi} g_{\mu\nu}. \quad (2.23)$$

Im Vakuum gilt somit

$$g_{\mu\nu}^{IR} = e^{-2kr\pi} \eta_{\mu\nu}. \quad (2.24)$$

Wie sieht nun der effektive Krümmungsskalar R_4 aus? Aus vierdimensionaler Sicht tragen alle Ableitungen nach $|\phi|$ zu Potentialtermen bei (siehe [7], [28]), welche man absepariert. Aus den Gleichungen (2.6), (2.10) und (2.13) folgt nun die Beziehung $R = e^{-2\sigma} R_4$. Somit gilt für die effektive Wirkung

$$S_{eff} \supset \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{-g} r e^{-2kr|\phi|} 2M^3 R_4 \equiv \int d^4x \sqrt{-g} 2M_{Pl}^2 R_4 . \quad (2.25)$$

Aus

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-2kr|\phi|} = \frac{1}{kr}(1 - e^{-2kr\pi}) \quad (2.26)$$

folgt somit

$$M_{Pl}^2 = \frac{M^3}{k}(1 - e^{-2kr\pi}). \quad (2.27)$$

Betrachten wir nun ein fundamentales Higgsfeld, welches auf der IR-Brane leben soll. Die zugehörige 4D-Wirkung enthält unter anderem folgende Terme:

$$S_{eff} \supset \int d^4x e^{-4kr\pi} (g^{\mu\nu} e^{2kr\pi} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda(|H|^2 - v_0^2)^2) . \quad (2.28)$$

Hierbei bezeichnet v_0 eine fundamentale Massenskala. Um den kinetischen Term kanonisch zu normieren, führen wir eine Reskalierung des Higgsfeldes durch, $H \rightarrow e^{kr\pi} H$. Dieses führt auf

$$S_{eff} \supset \int d^4x (g^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda(|H|^2 - e^{-2kr\pi} v_0^2)^2) . \quad (2.29)$$

Wir identifizieren nun effektiven Vakuumerwartungswert des Higgsfeldes v durch

$$v \equiv e^{-kr\pi} v_0 . \quad (2.30)$$

Dieses Resultat lässt sich im Übrigen auf jeden fundamentalen Massenparameter m_0 der 5D-Theorie verallgemeinern. Sei nun v_0 von der Größenordnung der Planckskala, dann generiert die Relation (2.30) den physikalischen Higgs-Vakuumerwartungswert $v \simeq 246\text{GeV}$ für $kr \approx 12$. Andererseits ist nach (2.27) k in etwa von der Größenordnung M , falls $M \approx M_{Pl}$ gilt. Wir finden somit, dass keine großen Hierarchien zwischen den fundamentalen Parametern v_0 , M , k und r^{-1} existieren. Andererseits liegen alle abgeleiteten 4D-Massenparameter bei der elektroschwachen Skala.

Im Gegensatz zum ADD-Modell ist das Spektrum der Kaluza-Klein-Anregungen des Gravitons nicht nahezu kontinuierlich. Die Masse der ersten Anregung liegt im TeV-Bereich [11]. Demnach skaliert die Stärke der gravitativen Kopplung für KK-Gravitonen mit der

Größenordnung $1/\text{TeV}$ statt mit $1/M_{Pl}$. Dies hat zur Folge, dass sie einerseits individuell am Beschleuniger als Spin-2-Resonanzen detektiert werden können, andererseits erfordert die Präsenz von stark wechselwirkenden Gravitonen die Einführung einer Quantengravitation bereits im TeV-Bereich! Das Randall-Sundrum-Modell ist in diesem Sinne der niederenetrische Limes eben dieser Quantengravitation, wie auch immer diese beschaffen sei. Man versteht jetzt, wie das RS-Modell das Hierarchieproblem löst. Beschränkt man sich auf Energien unterhalb der Schwelle zur Quantengravitation, so hat man einen Spielraum von einigen wenigen TeV. Jegliche neue Physik, die in diesem Energiebereich möglicherweise noch auftaucht, hat keinen besorgniserregenden Einfluss auf die Higgsmasse, das heißt, man kann den Effekt der neu hinzugekommenen Schleifenkorrekturen ohne drastische Feinjustierung der Parameter korrigieren.

2.3 5D-Felder und Kaluza-Klein-Zerlegung

Als natürliche Verallgemeinerung zum RS1-Modell bietet es sich an, die Standardmodellfelder im Bulk propagieren zu lassen. Den Anstoß hierzu lieferten Golberger und Wise, indem sie dieses Szenario für skalare Teilchen studierten [9]. Darüberhinaus schlugen sie vor, den Radius r der fünften Dimension mithilfe eines skalaren Feldes dynamisch zu stabilisieren [10]. Befassen wir uns nun mit dem Konzept der Kaluza-Klein-Zerlegung.

2.3.1 Skalare Felder

Als Ausgangspunkt dient die Wirkung

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \int d\phi \sqrt{G} (G^{AB} \partial_a \Phi \partial_B \Phi - m^2 \Phi^2), \quad (2.31)$$

wobei m von der Größenordnung der fundamentalen Skala M sein soll. Nach Einsetzen der Metrik (2.22) und partieller Integration erhält man

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \int r d\phi \left(e^{-2\sigma} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \frac{1}{r^2} \Phi \partial_\phi \left(e^{-4\sigma} \partial_\phi \Phi \right) - m^2 e^{-4\sigma} \Phi \right). \quad (2.32)$$

Wir zerlegen nun das Feld $\Phi(x, \phi)$ in eine Summe von 4D-Feldern $\Phi^{(n)}(x)$ multipliziert mit je einer reellwertigen Funktion der 5. Dimension $f^{(n)}(\phi)$. Diese bilden einen vollständigen, orthonormierten Satz von Funktionen im Intervall $[-\pi, \pi]$. Dieses ist gerade die vielfach erwähnte Kaluza-Klein-Zerlegung:

$$\Phi(x, \phi) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{(n)}(x) f^{(n)}(\phi). \quad (2.33)$$

Der Vorfaktor $(\sqrt{r})^{-1}$ ist Konvention und kürzt nach Einsetzen der Zerlegung den Faktor r im Integrationsmaß. Wählt man die Orthonormierungsbedingung zu

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-2\sigma(\phi)} f^{(n)}(\phi) f^{(m)}(\phi) = \delta_{mn} \quad (2.34)$$

und fordert

$$\frac{1}{r^2} \partial_\phi \left(e^{-4\sigma} \partial_\phi f^{(n)}(\phi) \right) - m^2 e^{-4\sigma} f^{(n)}(\phi) = -m_n^2 e^{-2\sigma} f^{(n)}(\phi), \quad (2.35)$$

so vereinfacht sich die Wirkung (2.32) zu einer kanonischen 4D-Wirkung für skalare Felder

$$S_{eff} = \frac{1}{2} \int d^4x \sum_n \left(\partial_\mu \Phi^{(n)} \partial^\mu \Phi^{(n)} - m_n^2 \Phi^{(n)}{}^2 \right). \quad (2.36)$$

Um die Profile $f^{(n)}(\phi)$ zu bestimmen, führt man in Gl. (2.35) die Variablensubstitution $z_n = m_n e^\sigma / k$ durch und ersetzt $f^{(n)} \rightarrow e^{-2\sigma} f_n$. Dies führt auf die Bessel'sche Differentialgleichung

$$z_n^2 \frac{d^2 f_n}{dz_n^2} + z_n \frac{df_n}{dz_n} + \left(z_n^2 - \left(4 + \frac{m^2}{k^2}\right) \right) f_n = 0, \quad (2.37)$$

welche unter Berücksichtigung der Randbedingungen $\partial_\phi \hat{f}^{(n)}|_{\pi} = 0$ zu lösen ist. Man wählt Neumann-Randbedingungen, da die Punkte $\phi = \pm\pi$ miteinander identifiziert sind. Man kann zeigen [33], dass nur dann eine Nullmode existiert, wenn man die Wirkung um branelokalisierte Massenterme ergänzt. In diesem Fall kann man das hergeleitete Profil durch Wahl der zugehörigen Massenparameter nach Belieben modellieren. Wir wollen an dieser Stelle jedoch nicht ins Detail gehen. Das einzige skalare Teilchen in dieser Arbeit ist nämlich das Higgsfeld, welches wir der Einfachheit halber auf der IR-Brane lokalisieren. Entlässt man das Higgsteilchen in den Bulk, so muss man dafür sorgen, dass das zugehörige Profil sein Maximum bei der IR-Brane findet. Andernfalls würde man das Hierarchieproblem wieder einführen. Wir kommen nun zur Zerlegung der Spin-1/2- und Spin-1-Felder. Die Pionierarbeiten dieser beiden Resorts sind [14] und [12].

2.3.2 Fermionen

Wir beginnen mit der Wirkung für ein 5D-Dirac-Fermion der Masse m von der Größenordnung der fundamentalen Skala M . Hierzu führen das d-dimensionale Vielbein $E_M^m(x)$ über die Definition

$$E_M^m(x) \eta_{mn} E_N^n(x) = G_{MN}(x) \quad (2.38)$$

ein, wobei η_{mn} die d-dimensionale Minkowskimetrik bezeichnet (siehe z.B. [3]). Desweiteren benötigen wir eine Darstellung der 5D-Clifford-Algebra

$$\{\Gamma_m, \Gamma_n\} = 2\eta_{mn}. \quad (2.39)$$

Hierbei ist darauf zu achten, dass man nun zwischen γ_5 und γ^5 zu unterscheiden hat, da gilt

$$\gamma^5 = \eta^{55} \gamma_5 = -\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Wir setzen

$$\Gamma^m = (\gamma^\mu, i\gamma^5) \quad \text{bzw.} \quad \Gamma_m = (\gamma_\mu, -i\gamma^5) \quad (2.41)$$

Diese Verallgemeinerung hat jedoch zur Folge, dass 5D-Fermionen vierkomponentige Dirac-Spinoren sind. Um aber nach KK-Zerlegung die Nullmode mit dem SM-Teilchen identifizieren zu können, muss diese einem zweikomponentigen Weyl-Spinor entsprechen. Dies ist

ein weiterer Grund aus dem wir Anfangs die Z_2 -Parität eingeführt haben. Wie wir später sehen werden, hat die Nullmode immer gerade Z_2 -Parität. Setzen wir jetzt $\psi = \psi_L + \psi_R$ und fordern

$$P(\psi_L) = +\psi_L, \quad P(\psi_R) = -\psi_R, \quad (2.42)$$

wobei P den Paritätsoperator bezeichnet, so gilt $\psi^{(0)} = \psi_L^{(0)}$. Die eben dargebrachte Lösung des Problems führt jedoch auf ein Neues. Es stellt sich nämlich die Frage, wie eine Yukawa-kopplung aus dem Higgsdublett, dem links- und dem rechtshändigen Fermion zu verwirklichen ist, wenn das Rechtshändige keine Nullmode besitzt. Diesem Problem wird man jedoch Herr, wenn man einen zweiten Satz von 5D-Fermionen einführt und diesen mit dem entgegengesetzten Z_2 -Verhalten ausstattet. Wir schreiben $\psi = (\psi^+, \psi^-)^T$ [18], $\psi^\pm = \psi_L^\pm + \psi_R^\pm$ wobei

$$P(\psi^\pm) = \pm \gamma_5 \psi^\pm. \quad (2.43)$$

Es ist also immer entweder ψ_L oder ψ_R eine gerade Funktion der Koordinate ϕ . Weitere Details hierzu sind Gegenstand des dritten Kapitels. Kommen wir nun zur 5D-Wirkung. Sie lautet

$$S = \int d^4x \int d\phi \sqrt{G} \left(\frac{i}{2} \bar{\psi} E_m^M \gamma^m \left(\partial_M - \overleftrightarrow{\partial}_M + \frac{1}{4} \omega_M^{ab} [\gamma_a, \gamma_b] \right) \psi - m \operatorname{sgn}(\phi) \bar{\psi} \psi \right). \quad (2.44)$$

Das Signum vor dem Massenterm ist notwendig, da dieser sonst aufgrund der Z_2 -Symmetrie der Felder verschwinden würde. Das inverse Vielbein $E_m^M = \operatorname{diag}(e^\sigma, e^\sigma, e^\sigma, e^\sigma, 1/r)$ bildet Elemente aus dem Minkowskiraum (Index m) in den Tangentialraum der Mannigfaltigkeit (Index M) ab. Den Spinzusammenhang ω_M leitet man wie folgt her [42]: Sei v^N ein Tangentialvektor, dann gilt

$$\begin{aligned} D_M v^N &= \partial_M v^N + \Gamma_{MK}^N v^K = \partial_M E_a^N v^a + \Gamma_{MK}^N E_a^K v^a \\ &= E_a^N \partial_M v^a + (\partial_M E_a^N) v^a + \Gamma_{MK}^N E_a^K v^a \\ &\equiv E_a^N (\partial_M v^a + \omega_M^{ab} v_b) := E_a^N D_M v^a. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Hieraus folgt

$$\omega_M^{ab} v_b v_a = E_a^c (\partial_M E_c^N + \Gamma_{MK}^N E_c^K) v^c v_a. \quad (2.46)$$

Die Größen v_a und v_b sind nun durch Gamma-Matrizen γ_a, γ_b zu ersetzen. Verwenden wir die Christoffelsymbole des Vakuums (2.9) und beachten den Wechsel in der Konvention der Metrik $\eta_{\mu\nu}$, so findet man

$$M = 5 : \quad e^{-\sigma} (\partial_\phi e^\sigma) \gamma^\mu \gamma_\mu + e^{-\sigma} (-\sigma') e^\sigma \gamma^\mu \gamma_\mu = 0, \quad (2.47)$$

$$M = \mu : \quad e^{-\sigma} (-\sigma') \frac{1}{r} i \gamma^5 \gamma_\mu - r (\eta_{\mu\mu} \frac{\sigma'}{r^2} e^{-2\sigma}) e^\sigma \gamma^\mu i \gamma_5 = -2 \frac{\sigma'}{r} e^\sigma i \gamma^5 \gamma_\mu. \quad (2.48)$$

Andererseits gilt

$$\omega_M^{ab} \gamma_a \gamma_b = E_N^a (\partial_M E_c^N + \Gamma_{MK}^N E_c^K) \gamma_a \gamma^c = -2 \frac{\sigma'}{r} e^\sigma i \gamma^5 \gamma_\mu, \quad (2.49)$$

so dass wir mit $\sigma' = kr \operatorname{sgn}(\phi)$ und

$$\omega_M := \frac{1}{8} \omega_M^{ab} [\gamma_a, \gamma_b] \quad (2.50)$$

das Resultat

$$\omega_\mu = -i \frac{k}{2} \operatorname{sgn}(\phi) e^\sigma \gamma^5 \gamma_\mu, \quad \omega_5 = 0 \quad (2.51)$$

erhalten. Der Spinzusammenhang im Vakuum ist somit eine ungerade Funktion der Koordinate ϕ , verschwindet somit bei Ausintegration der 5. Dimension und liefert keinen Beitrag zur Wirkung (2.44). Diese notieren wir erneut, separieren aber nach den Indizes μ und 5. Mit $\gamma^5 = \operatorname{diag}(-1, 1)$ und $\Psi_{L,R} \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\Psi$ erhalten wir

$$S = \int d^4x \int r d\phi \left\{ e^{-3\sigma} (\bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L + \bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R) - e^{-4\sigma} m \operatorname{sgn}(\phi) (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) + \frac{i^2}{2r} \left(\bar{\psi}_L e^{-4\sigma} \partial_\phi \psi_R - e^{-4\sigma} (\bar{\psi}_L \not{\partial}_\phi \psi_R) - (L \leftrightarrow R) \right) \right\}. \quad (2.52)$$

Nach partieller Integration ergibt sich die letzte Zeile zu

$$-\frac{1}{2r} \left(\bar{\psi}_L (e^{-4\sigma} \partial_\phi + \partial_\phi e^{-4\sigma}) \psi_R - (L \leftrightarrow R) \right). \quad (2.53)$$

Wir folgen dem Papier [14] und wählen die Zerlegung

$$\psi_{L,R}(x, \phi) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_n \psi_{L,R}^{(n)}(x) e^{2\sigma} \hat{f}_{L,R}^{(n)}(\phi). \quad (2.54)$$

Dies führt auf

$$S = \int d^4x \int d\phi \sum_{m,n} \left\{ e^\sigma (\bar{\psi}_L^{(m)} i \not{\partial} \psi_L^{(n)} \hat{f}_L^{(m)*} \hat{f}_L^{(n)} + \bar{\psi}_R^{(m)} i \not{\partial} \psi_R^{(n)} \hat{f}_R^{(m)*} \hat{f}_R^{(n)}) - m \operatorname{sgn}(\phi) (\bar{\psi}_L^{(m)} \psi_R^{(n)} \hat{f}_L^{(m)*} \hat{f}_R^{(n)} + \bar{\psi}_R^{(m)} \psi_L^{(n)} \hat{f}_R^{(m)*} \hat{f}_L^{(n)}) - \frac{1}{2r} \left(\bar{\psi}_L^{(m)} \hat{f}_L^{(m)*} \underbrace{(e^{-2\sigma} \partial_\phi e^{2\sigma} + e^{2\sigma} \partial_\phi e^{-2\sigma})}_{=2\sigma'+\partial_\phi-2\sigma'+\partial_\phi=2\partial_\phi} \hat{f}_R^{(n)} \psi_R(n) - (L \leftrightarrow R) \right) \right\}. \quad (2.55)$$

Die kanonische 4D-Wirkung lautet

$$S = \sum_n \int d^4x (\bar{\psi}^{(n)}(x) i \not{\partial} \psi^{(n)}(x) - m_n \bar{\psi}^{(n)}(x) \psi^{(n)}(x)), \quad (2.56)$$

wobei $\psi^{(n)} = \psi_L^{(n)} + \psi_R^{(n)}$ und die Nullmode jeweils nur für eines der beiden Felder existiert. Demnach gibt es keinen Massenterm für m_0 woraus sofort folgt, dass die Nullmode masselos ist. Um nun das Resultat (2.55) auf die obige Form zu bringen, fordert man

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^\sigma \hat{f}_{L,R}^{(m)*}(\phi) \hat{f}_{L,R}^{(n)}(\phi) = \delta_{mn}, \quad (2.57)$$

$$\left(\pm \frac{1}{r} \partial_\phi - m \operatorname{sgn}(\phi) \right) \hat{f}_{L,R}^{(n)}(\phi) = -m_n e^\sigma \hat{f}_{R,L}^{(n)}. \quad (2.58)$$

Die erste Gleichung ist die Orthonormierungsbedingung für die Fermionprofile $\hat{f}_{L,R}^{(n)}$, aus der zweiten Gleichung erhält man deren konkrete Form. Dies ist unter Anderem Gegenstand des nächsten Kapitels. Die Randbedingungen $\hat{f}_L^{(m)*}(0)\hat{f}_R^{(n)}(0) = \hat{f}_L^{(m)*}(\pi)\hat{f}_R^{(n)}(\pi) = 0$, welche aus dem unterschiedlichen Z_2 -Verhalten der Felder folgen, gewährleisten die Hermitizität des Operators $(\pm \frac{1}{r} \partial_\phi - \operatorname{sgn}(\phi)m)$ und die m_n sind somit reell. Bevor wir die obige Prozedur für Eichbosonen wiederholen, lohnt es sich, die Kopplung der Fermionfelder an die Gravitation zu studieren und die Beziehung (2.27) zwischen den Skalen M_{Pl} , M und k nocheinmal daraus herzuleiten. Wir benötigen hierzu den Energie-Impuls-Tensor T , dessen Komponenten durch die Gleichung

$$\delta \int d^4x \int d\phi \sqrt{G} \mathcal{L} = \int d^4x \int d\phi \sqrt{G} T^{MN}(\delta G_{MN}) \quad (2.59)$$

definiert sind. Die nachfolgende Rechnung orientiert sich an [37]. Es ist

$$\delta \int d^4x \int d\phi \sqrt{G} \mathcal{L} = \int d^4x \int d\phi \left((\delta \sqrt{G}) \mathcal{L} + \sqrt{G} \delta \mathcal{L} \right). \quad (2.60)$$

Es lässt sich zeigen, dass $\delta G = G G^{KL} \delta G_{KL}$ gilt. Somit ist

$$\delta \sqrt{G} = \frac{1}{2} \frac{\delta G}{\sqrt{G}} = \frac{1}{2} G^{KL} \sqrt{G} \delta G_{KL}. \quad (2.61)$$

Die Variation der Lagrangedichte liefert

$$\delta \mathcal{L} = \delta G^{MN} E_N^m \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_m (\partial_M - \overleftrightarrow{\partial}_M) \psi. \quad (2.62)$$

Aus der Variation von $G^{ML} G_{LK} = \delta_K^M$ folgt $\delta G^{MN} = -G^{ML} G^{KN} \delta G_{KL}$ und wir erhalten aus (2.61) und (2.62) die linke Seite von (2.59)

$$\begin{aligned} \int d^4x \int d\phi \sqrt{G} & \left\{ \frac{1}{2} G^{KL} \left(E_m^M \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^m (\partial_M - \overleftrightarrow{\partial}_M) \psi - m \operatorname{sgn}(\phi) \bar{\psi} \psi \right) \right. \\ & \left. - G^{ML} G^{KN} E_N^m \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_m (\partial_M - \overleftrightarrow{\partial}_M) \psi \right\} \delta G_{KL}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Durch Vergleich mit der rechten Seite finden wir schließlich

$$T^{KL} = \frac{1}{2} \left((G^{KL} E_m^M - 2G^{ML} E_m^K) \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^m (\partial_M - \overleftrightarrow{\partial}_M) \psi - G^{KL} m \operatorname{sgn}(\phi) \bar{\psi} \psi \right). \quad (2.64)$$

Betrachten wir nun Fluktuationen um die klassische Lösung der Einstein-Gleichungen (2.22) und setzen (siehe [7])

$$ds^2 = e^{-2kT(x)|\phi|}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x))dx^\mu dx^\nu - T^2(x)d\phi^2. \quad (2.65)$$

Hierbei entspricht $h_{\mu\nu}(x)$ dem physikalischen masselosen 4D Graviton und gleichzeitig der Nullmode der KK-Zerlegung

$$h_{\mu\nu}(x, \phi) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_n h_{\mu\nu}^{(n)}(x) \chi^{(n)}(\phi). \quad (2.66)$$

Der Kompaktifizierungsradius r ist gerade der Vakuumerwartungswert des skalaren Feldes $T(x)$. Die Wirkung für die Kopplung der Fermionen an die Gravitation lautet

$$S_{int} = \frac{1}{M^3} \int d^4x \int d\phi \sqrt{G} T^{\mu\nu}(x, \phi) h_{\mu\nu}(x)/N. \quad (2.67)$$

N einem Normierungsfaktor, den wir in Kürze berechnen. Wählen wir die Eichung $h_\mu^\mu = h^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = 0$ und setzen die KK-Zerlegung (2.54) ein, so verbleibt

$$\begin{aligned} S_{int} &= \frac{1}{M^3} \sum_{m,n} \int d^4x \int d\phi e^\sigma \hat{f}_{L,R}^{(m)*} \hat{f}_{L,R}^{(n)} \frac{i}{2} \bar{\psi}^{(m)} \gamma^\mu (\partial^\nu - \overleftrightarrow{\partial}^\nu) \psi^{(n)} h_{\mu\nu}(x)/N \\ &= \frac{1}{M^3 N} \sum_n \int d^4x \bar{\psi}^{(n)} \frac{i}{2} \gamma^\mu (\partial^\nu - \overleftrightarrow{\partial}^\nu) \psi^{(n)} h_{\mu\nu}(x). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Hierbei haben wir Gebrauch von der Orthonormierungsbedingung (2.57) gemacht. Den Normierungsfaktor N erhalten wir, indem wir den Vakuumerwartungswert des Warpfaktors $e^{-2kT(x)|\phi|}$, den wir in (2.65) herausgezogen haben, über die 5. Dimension integrieren:

$$N = \int_{-\pi}^{\pi} r d\phi e^{-2\sigma} = \frac{1}{k} (1 - e^{-2kr\pi}). \quad (2.69)$$

Aus der Fordeung

$$\frac{1}{M^3 N} = \frac{1}{M_{Pl}^2} \quad (2.70)$$

folgt die Relation (2.27). Der nächste Schritt bestünde nun in der Herleitung der Fermionprofile aus Gl. (2.58). Dies wollen wir jedoch ausführlich im nächsten Kapitel tun. Schließlich betrachten wir noch die KK-Zerlegung der Eichbosonen und die daraus folgenden Bedingungen an deren Profile.

2.3.3 Eichbosonen

Wir studieren zunächst den einfachsten Fall eines $U(1)$ -Eichfeldes. Die Verallgemeinerung auf nichtabelsche Eichtheorien ist Gegenstand des vierten Kapitels. Das fünfdimensionale Eichfeld A_M setzt sich zusammen aus dem Spin1-Feld A_μ und dem skalaren Feld A_5 . Da sich herausstellen wird, dass die Nullmode eine gerade Funktion der Koordinate ϕ ist und wir $A_\mu^{(0)}$ mit dem Photon identifizieren wollen, muss A_μ gerade Z_2 -Parität besitzen. Es gibt nun Modelle, in denen das Higgs-Teilchen als fünfte Komponente des Eichfeldes identifiziert wird (Gauge-Higgs-Unification, siehe z.B. [25]). In diesem Fall würde man dem Feld A_5 ebenfalls gerade Z_2 -Parität zuweisen. Wir wollen diesen Weg jedoch nicht beschreiten und wählen negative Parität:

$$P(A_\mu) = A_\mu, \quad P(A_5) = -A_5. \quad (2.71)$$

In diesem Fall besitzt A_5 keine Nullmode. Als weitere Vereinfachung wählen wir zunächst die Eichung $A_5 = 0$. Der Feldstärketensor ist gegeben durch

$$F_{MN} = D_M A_N - D_N A_M = \partial_M A_N - \partial_N A_M. \quad (2.72)$$

Hierbei haben wir im zweiten Schritt die Antisymmetrie des Feldstärketensors ausgenutzt, welche bewirkt, dass die beiden zusätzlichen Terme aus dem affinen Zusammenhang sich kürzen (die Christoffel sind symmetrisch in den unteren beiden Indizes). Die 5D-Wirkung lautet in diesem Fall

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4} \int d^4x \int d\phi \sqrt{G} G^{MK} G^{NL} F_{MN} F_{KL} \\ &= -\frac{1}{4} \int d^4x \int r d\phi \left(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 2e^{-2\sigma} \frac{1}{r^2} \partial_\phi A_\mu \partial_\phi A^\mu \right). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Für die KK-Zerlegung wählen wir nun

$$A_\mu(x, \phi) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=0} A_\mu^{(n)}(x) \chi^{(n)}(\phi). \quad (2.74)$$

Fordern wir

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \chi^{(m)}(\phi) \chi^{(n)}(\phi) = \delta_{mn}, \quad (2.75)$$

$$\frac{-1}{r^2} \frac{d}{d\phi} \left(e^{-2\sigma} \frac{d}{d\phi} \chi^{(n)} \right) = m_n^2 \chi^{(n)}, \quad (2.76)$$

so erhalten wir die kanonische 4D-Wirkung

$$S = \sum_n \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(n)} F^{(n)\mu\nu} + \frac{1}{2} m_n^2 A_\mu^{(n)} A^{(n)\mu} \right). \quad (2.77)$$

Für die Nullmode gilt nun $m_n = 0$. In Gl. (2.76) verschwindet somit die rechte Seite. Ungerade Funktionen müssen nun an den Orbifoldfixpunkten 0 und π verschwinden, da wir Periodizität in der 5. Dimension fordern. Eine solche Lösung existiert jedoch nicht. Für gerade Funktionen muss nun die Ableitung nach ϕ an den besagten Stellen verschwinden. Die Lösung ist schlicht $\chi^{(0)} = \text{const.}$ Die Orthonormierung (2.75) liefert schließlich

$$\chi^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (2.78)$$

In Analogie zu den skalaren Feldern setzen wir $z_n = \frac{m_n}{k} e^\sigma$ und $\tilde{\chi}^{(n)} = e^{-\sigma} \chi^{(n)}$. Es ist somit

$$\frac{d}{d\phi} = \sigma' z_n \frac{d}{dz_n}. \quad (2.79)$$

Dieses zusammen mit den obigen Definitionen in (2.76) eingesetzt, ergibt

$$-m_n k z_n \frac{d}{dz_n} \left(\frac{1}{z_n} + \frac{d}{dz_n} \right) \tilde{\chi}^{(n)} = m_n k z_n \tilde{\chi}^{(n)} \quad (2.80)$$

($\sigma'^2 = k^2 r^2$), beziehungsweise

$$\left(z_n^2 \frac{d^2}{dz_n^2} + z_n \frac{d}{dz_n} + (z_n^2 - 1) \right) \tilde{\chi}^{(n)} = 0. \quad (2.81)$$

Dies ist eine Bessel'sche Differentialgleichung erster Ordnung, deren allgemeinste Lösung nach Rücksubstitution auf $\chi^{(n)}$ durch

$$\chi^{(n)}(\phi) = \frac{e^\sigma}{N_n} \left(J_1\left(\frac{m_n}{k} e^\sigma\right) + \beta_n Y_1\left(\frac{m_n}{k} e^\sigma\right) \right) \quad (2.82)$$

gegeben ist. Hierbei bezeichnet N_n eine Normierungskonstante. Den Koeffizienten β_n bestimmt man aus den Randbedingungen

$$\frac{d}{d\phi} \chi^{(n)} \Big|_{0,\pi} = 0, \quad (2.83)$$

welche die Hermitizität des Differentialoperators in (2.76) garantieren, und findet

$$J_1(x_n) + x_n J'_1(x_n) + \beta_n \left(Y_1(x_n) + x_n Y'_1(x_n) \right) = 0, \quad (2.84)$$

wobei $x_n = \frac{m_n}{k}$ für $\phi = 0$, bzw. $x_n = \frac{m_n}{k} e^{kr\pi}$ für $\phi = \pi$ gilt. Die Gleichung für $\phi = 0$ liefert den Koeffizienten β_n für ein gegebenes Verhältnis $\frac{m_n}{k}$. Entwickeln wir

$$\beta_n = -\frac{J_1\left(\frac{m_n}{k}\right) + \frac{m_n}{k} J'_1\left(\frac{m_n}{k}\right)}{Y_1\left(\frac{m_n}{k}\right) + \frac{m_n}{k} Y'_1\left(\frac{m_n}{k}\right)} \quad (2.85)$$

nach $\frac{m_n}{k} \ll 1$ und setzen ab sofort $x_n = \frac{m_n}{k} e^{kr\pi}$, so erhalten wir

$$\beta_n \approx -\frac{\pi}{2(\ln(\frac{m_n}{2k}) + \gamma_E)} = -\frac{\pi}{2(\ln(\frac{x_n}{2}) - kr\pi + \gamma_E)}. \quad (2.86)$$

Für $k \sim 10^{18}\text{GeV}$ ergibt sich $\beta_1 \approx 0,1$. Die Gleichung für $\phi = \pi$ ist nun lösbar für diskrete Werte \tilde{x}_n und wir erhalten das Spektrum der KK-Massen

$$m_n = k e^{-kr\pi} \tilde{x}_n. \quad (2.87)$$

Einige numerische Werte finden sich in [12]. Im Gegensatz zu einem Szenario mit einer zusätzlichen flachen Extradimension (siehe z.B. [32]), ist das Spektrum nicht äquidistant.

Kapitel 3

Bulk-Fermionen

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die Massenmatrix der Fermionen, welche sich aus Yukawa-terms und KK-Massen zusammensetzt, zu diagonalisieren um somit die Masseneigenwerte der frei propagierenden Zustände zu bestimmen. Hierbei wird man neben der aus dem Standardmodell bekannten Flavormischung zusätzlich eine Mischung der KK-Moden finden.

3.1 Herleitung der Fermionprofile

Die Herleitung der Fermionprofile erfolgt im Grunde demselben Verfahren, welches für die Eichbosonen verwendet haben. Wir orientieren uns jedoch an der Arbeit von Grossman und Neubert [14], in welcher durch geschickte Umdefinition der Variablen das Ergebnis eine einfache, numerisch gut zu handhabende Form annimmt. Da die Wirkung gerade unter Z_2 -Parität ist, wird zunächst die Integration über ϕ auf das Intervall $[0, \pi]$ eingeschränkt. Will man die Felder über den gesamten Orbifold normieren, multipliziert man das Integral mit einem Faktor 2. Daraufhin führt man die Variable $t = \epsilon e^\sigma \in [\epsilon, 1]$ mit $\epsilon = e^{-kr\pi} \approx 10^{-16}$ ein, und reskaliert das Fermionprofil $\hat{f}_{L,R}^{(n)}(\phi) \rightarrow \sqrt{kr\epsilon} f_{L,R}^{(n)}(t)$. Des Weiteren definiert man

$$c = \frac{m}{k}, \quad x_n = \frac{m_n}{\epsilon k} = \frac{m_n}{k} e^{kr\pi}. \quad (3.1)$$

Die zweite Definition ist uns bereits durch die Eichbosonen vertraut. Die Relationen (2.57) und (2.58) nehmen nun mit $d\phi = (kr)^{-1} dt$ folgende Gestalt an:

$$2 \int_\epsilon^1 dt f_{L,R}^{(m)*}(t) f_{L,R}^{(n)}(t) = \delta_{mn}, \quad (3.2)$$

$$(\pm t \partial_t - c) f_{L,R}^{(n)}(t) = -x_n t f_{R,L}^{(n)}(t). \quad (3.3)$$

Die Randbedingungen lauten $f_L^{(m)*}(\epsilon) f_R^{(n)}(\epsilon) = f_L^{(m)*}(1) f_R^{(n)}(1) = 0$. Für die Nullmode ist $x_n = 0$ und die Differentialgleichung Gl.(3.3) entkoppelt. Da sie reell ist, kann man die Profile o.B.d.A. ebenfalls reell wählen und findet

$$f_{L,R}^{(0)}(t) = f_{L,R}^{(0)}(1) t^{\pm c}. \quad (3.4)$$

Den Vorfaktor bestimmt man aus der Orthonormierungsbedingung:

$$f_{L,R}^{(0)}(1)^{-2} = 2 \int_{\epsilon}^1 dt t^{\pm 2c} = 2 \frac{1 - e^{1 \pm 2c}}{1 \pm 2c} \quad (3.5)$$

$$\Rightarrow f_{L,R}^{(0)}(t) = \sqrt{\frac{1/2 \pm c}{1 - e^{1 \pm 2c}}} t^{\pm c}. \quad (3.6)$$

In der Tat hat das Profil der Nullmode gerade Z_2 -Parität, da $t \propto e^\sigma$ mit $\sigma = kr|\phi|$ gilt. Die Parameter c werden durch die Theorie nicht festgelegt (der Massenparameter m in der Wirkung ist beliebig). Demnach müssen wir deren Werte von Hand festlegen. Als Referenz dienen hierbei die im Experiment ermittelten Massen der Elementarteilchen. Die Komplikation besteht nun darin, dass auch die Profile der KK-Anregungen von c abhängig sind und die physikalischen Standardmodellfelder sich als Überlagerung der Nullmode mit den KK-Moden ergeben. Es wird also eine numerische Rechnung mit einer trunzierten Massenmatrix von Nöten sein, um realistische Werte zu erhalten.

Um die Profile der KK-Moden zu berechnen, multiplizieren wir Gl. (3.3) von links mit $(\pm t\partial_t + c)$. Es folgt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\left[t^2 \partial_t^2 + x_n^2 t^2 - c(c \mp 1) \right] f_{L,R}^{(n)}(t) = 0 \quad (3.7)$$

Setzen wir nun $f(t) = \sqrt{t} g(t)$, so folgt

$$t^2 \partial_t^2 g(t) + t \partial_t g(t) + x_n^2 t^2 g(t) - \left[\frac{1}{4} + c(c \mp 1) \right] g(t) = 0, \quad (3.8)$$

bzw. nach Reskalierung der Variablen

$$x_n^2 t^2 g''(x_n t) + x_n t g'(x_n t) + \left[x_n^2 t^2 - (c \mp \frac{1}{2})^2 \right] g(x_n t) = 0. \quad (3.9)$$

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $c \neq \frac{1}{2} + n$, wobei n eine natürliche Zahl sein soll. In diesem Fall lautet die allgemeinste Lösung

$$f_{L,R}^{(n)}(t) = \sqrt{t} \left[a_{L,R}^{(n)} J_{\frac{1}{2} \mp c}(x_n t) + b_{L,R}^{(n)} J_{-\frac{1}{2} \pm c}(x_n t) \right]. \quad (3.10)$$

Die Lösungen $f_L^{(n)}$ und $f_R^{(n)}$ sind nun über Gl. (3.3) miteinander verknüpft, aus der wir nun eine Beziehung zwischen den Koeffizienten $a_{L,R}^{(n)}$ und $b_{L,R}^{(n)}$ herleiten. Hierzu setzen wir $z_n = x_n t$ und erhalten

$$\begin{aligned} & \left[\pm z_n \frac{d}{dz_n} - c \right] \sqrt{z_n} g_{L,R}^{(n)}(z_n) = -z_n^{3/2} g_{R,L}^{(n)}(z_n) \\ \Leftrightarrow & \pm \underbrace{\left[z_n \frac{d}{dz_n} + \frac{1}{2} \mp c \right]}_{\equiv k} g_{L,R}^{(n)}(z_n) + z_n g_{R,L}^{(n)}(z_n) = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Benutzen wir die Identität

$$\frac{d}{dz} \left[z^k J_k(z) \right] = z^k J_{k-1}(z) \quad (3.12)$$

so erhalten wir nach Ausführung der Ableitung auf der linken Seite

$$z J'_k(z) + k J_k(z) = z J_{k-1}(z). \quad (3.13)$$

Andererseits gilt

$$\frac{d}{dz} \left[z^k J_{-k}(z) \right] = -z^k J_{-k+1}(z) \quad (3.14)$$

und wir erhalten

$$z J'_{-k}(z) + k J_{-k}(z) = -z J_{-k+1}(z). \quad (3.15)$$

Zur Probe kann man in (3.15) $-k$ durch k ersetzen und die daraus resultierende Gleichung von (3.13) abziehen. In der Tat gilt

$$2k J_k(z) = z \left[J_{k-1}(z) + J_{k+1}(z) \right]. \quad (3.16)$$

Setzten wir den Ansatz

$$g_{L,R}^{(n)} = a_{L,R}^{(n)} J_{\frac{1}{2} \mp c}(z_n) + b_{L,R}^{(n)} J_{-\frac{1}{2} \pm c}(z_n) \quad (3.17)$$

in (3.11) ein und verwenden die beiden obigen Resultate, so erhalten wir nach Koeffizientenvergleich $b_L^{(n)} = a_R^{(n)}$, sowie $b_R^{(n)} = -a_L^{(n)}$ und damit

$$f_L^{(n)}(t) = \sqrt{t} \left[a_L^{(n)} J_{\frac{1}{2}-c}(x_n t) + a_R^{(n)} J_{-\frac{1}{2}+c}(x_n t) \right], \quad (3.18)$$

$$f_R^{(n)}(t) = \sqrt{t} \left[a_R^{(n)} J_{\frac{1}{2}+c}(x_n t) - a_L^{(n)} J_{-\frac{1}{2}-c}(x_n t) \right]. \quad (3.19)$$

Um nun die Koeffizienten $a_{L,R}^{(n)}$ zu bestimmen, benötigen wir die Randbedingungen, welche aus Z_2 -Parität der Felder resultieren. So gilt für ungerade Felder

$$f^{(n)}(\epsilon) = f^{(n)}(1) = 0. \quad (3.20)$$

Nun sind entweder die linkshändigen oder die rechtshändigen Felder ungerade (entspricht ψ^- bzw. ψ^+) und wir müssen die Lösung für beider Sätze separat bestimmen. Hierzu nutzen wir das asymptotische Verhalten der Besselfunktion $J_k(x) \rightarrow x^k$ für $x \rightarrow 0$. Man sieht, dass im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ für gegebenes c jeweils ein Koeffizient verschwinden muss, damit die Bedingung (3.20) erfüllt wird. Es verbleibt eine Gleichung, aus welcher man die Parameter x_n bestimmt. Der Limes $\epsilon \rightarrow 0$ ist eine ausgezeichnete Näherung, es sei denn, wir betrachten Überlappintegrale der Profile $f_{L,R}^{(n)}$, die Gewichtsfunktionen enthalten, welche für

Fall	$a_L^{(n)}$	$a_R^{(n)}$	Gleichung für x_n	Nullmode
$\psi^-, c > +\frac{1}{2}$	0	$N_{\frac{1}{2}+c}(x_n)$	$J_{c-\frac{1}{2}}(x_n) = 0$	R
$\psi^-, c < +\frac{1}{2}$	$N_{\frac{3}{2}-c}(x_n)$	0	$J_{\frac{1}{2}-c}(x_n) = 0$	R
$\psi^+, c > -\frac{1}{2}$	0	$N_{\frac{3}{2}+c}(x_n)$	$J_{\frac{1}{2}+c}(x_n) = 0$	L
$\psi^+, c < -\frac{1}{2}$	$N_{\frac{1}{2}-c}(x_n)$	0	$J_{-\frac{1}{2}-c}(x_n) = 0$	L

Abbildung 3.1: Lösungen für Bulk-Fermionen im Limes $e^{-kr\pi} \rightarrow 0$

$t \rightarrow 0$ divergieren. Den verbleibenden Koeffizienten bestimmt man durch Normierung. Es gilt

$$2 \int_0^1 dt t J_k(x_n t)^2 = J_{k+1}(x_n)^2 \quad (3.21)$$

und wir definieren $|N_a(x_n)|^2 = J_a(x_n)^{-2}$. Die Ergebnisse sind in der obigen Tabelle zusammengefasst. Zum Schluss notieren wir die Profile.

Profile mit gerader Z_2 -Parität:

$$f_L^{+(n)}(t) = \sqrt{t} \frac{J_{-1/2+c}(x_n t)}{|J_{3/2+c}(x_n)|} \quad \text{für } c > -\frac{1}{2}, \quad (3.22)$$

$$f_L^{+(n)}(t) = \sqrt{t} \frac{J_{1/2-c}(x_n t)}{|J_{1/2-c}(x_n)|} \quad \text{für } c < -\frac{1}{2}, \quad (3.23)$$

$$f_R^{-(n)}(t) = \sqrt{t} \frac{J_{1/2+c}(x_n t)}{|J_{1/2+c}(x_n)|} \quad \text{für } c > +\frac{1}{2}, \quad (3.24)$$

$$f_R^{-(n)}(t) = -\sqrt{t} \frac{J_{-1/2-c}(x_n t)}{|J_{3/2-c}(x_n)|} \quad \text{für } c < +\frac{1}{2}. \quad (3.25)$$

Profile mit ungerader Z_2 -Parität:

$$f_R^{+(n)}(t) = \sqrt{t} \frac{J_{1/2+c}(x_n t)}{|J_{3/2+c}(x_n)|} \quad \text{für } c > -\frac{1}{2}, \quad (3.26)$$

$$f_R^{+(n)}(t) = -\sqrt{t} \frac{J_{-1/2-c}(x_n t)}{|J_{1/2-c}(x_n)|} \quad \text{für } c < -\frac{1}{2}, \quad (3.27)$$

$$f_L^{-(n)}(t) = \sqrt{t} \frac{J_{-1/2+c}(x_n t)}{|J_{1/2+c}(x_n)|} \quad \text{für } c > +\frac{1}{2}, \quad (3.28)$$

$$f_L^{-(n)}(t) = \sqrt{t} \frac{J_{1/2-c}(x_n t)}{|J_{3/2-c}(x_n)|} \quad \text{für } c < +\frac{1}{2}. \quad (3.29)$$

Wie man sieht, ergeben sich die Eigenwerte x_n als Nullstellen von Besselfunktionen. Die Ergebnisse haben Gültigkeit für $t \in [\epsilon, 1]$, also $\phi \in [0, \pi]$. Dies hat zur Folge, dass man bei

Rücksubstitution auf die alten Koordinaten und Verallgemeinerung auf den kompletten Orbifold, die Profile ungerader Parität antisymmetrisieren muss. Im Folgenden betrachten wir Massenterme, welche durch Yukawakopplung an das Higgsfeld zustande kommen.

3.2 Yukawakopplungen

Zunächst einmal wollen wir das Symmetrieverhalten unserer Fermionfelder unter $SU(2)$ -Transformationen angeben. Hierzu müssen wir die Diracfermionen ψ^+ und ψ^- einer Kaluza-Klein-Zerlegung unterziehen. Das Feld ψ^+ zerfällt hierbei in ein linkshändiges Weylfermion (Nullmode) und eine Kaskade von links- und rechtshändigen KK-Anregungen, welche Mode für Mode einen Diracspinor bilden. Das Feld ψ^- liefert eine rechtshändige Nullmode. Schematisch gilt also

$$\psi^\pm \rightarrow \psi_L^{\pm(0)}, \quad \psi_L^{\pm(n)} + \psi_R^{\pm(n)}. \quad (3.30)$$

Betrachten wir zunächst eine Generation, so erhalten wir die folgenden Quarkfelder:

$$\begin{aligned} \psi^+ \rightarrow \text{Dubletts } Q_L & \quad q_L^{(0)} = \begin{pmatrix} u_L^{(0)} \\ d_L^{(0)} \end{pmatrix}, \quad q_L^{(n)} = \begin{pmatrix} u_L^{(n)} \\ d_L^{(n)} \end{pmatrix} + q_R^{(n)} = \begin{pmatrix} u_R^{(n)} \\ d_R^{(n)} \end{pmatrix} \\ \psi^- \rightarrow \text{Singuletts} & \quad u_R^{c(0)}, \quad d_R^{c(0)}, \quad u_L^{c(n)} + u_R^{c(n)}, \quad d_L^{c(n)} + d_R^{c(n)}. \end{aligned}$$

Die Felder $q_R^{(n)}$, $u_L^{c(n)}$ und $d_L^{c(n)}$ haben hierbei negative Z_2 -Parität. Aufgrund der Existenz dreier Generationen führt man weitere Indizes i und j ein. Da wir das Higgsfeld auf der Brane lokalisieren, gibt es nur Kopplungen mit Feldern gerader Z_2 -Parität. Die 4D-Yukawa-Massenterme in der Lagrangedichte lauten

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = - \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{G} \left(\sum_{m,n} \sum_{i,j} (\lambda_{d5}^{ij} \bar{Q}_{Li}^{(m)} \Phi d_{Rj}^{c(n)} + \lambda_{u5}^{ij} \bar{Q}_{Li}^{(m)} \Phi^C u_{Rj}^{c(n)}) + h.c. \right) \delta(\phi - \pi) \quad (3.31)$$

mit $\Phi^C = i\sigma_2 \Phi^*$. Wir erhalten somit eine unendlich dimensionale Massenmatrix, deren Einträge zu festem n und m durch 3×3 -Matrizen $(M^{(m,n)})_{ij}$ gegeben sind. Nach Reskalierung des Higgsfeldes $H \rightarrow \frac{1}{\sqrt{r}} e^{kr\pi} H$ ergibt sich

$$(M^{(m,n)})_{ij} = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \frac{v}{\sqrt{2}} \frac{\lambda_5^{ij}}{\sqrt{r}} e^{kr\pi} \delta(\phi - \pi) \hat{f}_{Li}^{+(m)}(\phi) \hat{f}_{Rj}^{-(n)}(\phi) \quad (3.32)$$

wobei v den (4D-) Higgserwartungswert bezeichnet. Die Profile $f_R^{+(n)}$ und $f_L^{-(n)}$ verschwinden an den Orbifoldfixpunkten. Wir können daher die Integration auf das halbe Intervall einschränken und den obigen Koordinatenwechsel vollziehen und erhalten somit

$$(M^{(m,n)})_{ij} = 2 \int_{-\epsilon}^1 \frac{dt}{krt} \frac{v}{\sqrt{2}} \frac{\lambda_5^{ij}}{\sqrt{r}} kr \delta(t-1) \frac{1}{\epsilon} \hat{f}_{Li}^{+(m)}(t) \hat{f}_{Rj}^{-(n)}(t) = kr \lambda^{ij} \frac{v}{\sqrt{2}} f_{Li}^{+(m)}(1) f_{Rj}^{-(n)}(1), \quad (3.33)$$

wobei wir in der zweiten Zeile $\lambda^{ij} = \lambda_5^{ij}/\sqrt{r}$ gesetzt haben. Die 3×3 -Untermatrizen zu festem m und n haben somit eine Produktstruktur (siehe auch [24]). Setzen wir alle λ_{ij} gleich, so ergibt sich beispielsweise

$$(M^{(0,0)})_{ij} \sim \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}, \quad a_i = f_{Li}^{+(m)}(1), \quad b_j = f_{Rj}^{-(m)}(1). \quad (3.34)$$

Diese Matrix hat die Eigenwerte $(0, 0, \sum_i a_i b_i)$. Lässt man jetzt verschiedene Kopplungskonstanten der gleichen Größenordnung zu, so ist die Matrix nichtsingulär, hat jedoch eine starke Hierarchie in den Eigenwerten $\lambda_1 \ll \lambda_2 \ll \lambda_3$. Wenn man jetzt noch bedenkt, dass man den Wert der Fermionprofile bei der TeV-Brane durch geringfige Variationen der Massenparameter c_i signifikant verändern kann, so erscheint die bisher unverstandene Fermionmassenhierarchie als völlig natürliche Konsequenz des Modells.

Unglücklicherweise steht die obige Matrix $(M^{(0,0)})_{ij}$ nicht in Eins zu Eins Korrespondenz mit dem Standardmodell. Der Grund hierfür ist die oben erwähnte Beimischung der KK-Moden nach Diagonalisierung der gesamten, unendlich dimensionalen Massenmatrix. Dies soll nun im nächsten Abschnitt bewerkstelligt werden.

3.3 Diagonalisierung der Massenmatrix

Die Lagrangedichte (3.31) enthält Massenmatrizen für Up- und Down-Quarks verschiedener Generationen. Wir betrachten nun den Up-Quark Sektor (die Rechnung für Down-Quarks läuft völlig analog). Der Massenterm hat die Gestalt $\bar{\Psi}_L^T M \Psi_R$, wobei

$$\Psi_L = (u_L^{(0)}, c_L^{(0)}, t_L^{(0)}, u_L^{(1)}, c_L^{(1)}, t_L^{(1)}, u_L^{c(1)}, c_L^{c(1)}, t_L^{c(1)}, \dots)^T, \quad (3.35)$$

$$\Psi_R = (u_R^{c(0)}, c_R^{c(0)}, t_R^{c(0)}, u_R^{(1)}, c_R^{(1)}, t_R^{(1)}, u_R^{c(1)}, c_R^{c(1)}, t_R^{c(1)}, \dots)^T. \quad (3.36)$$

Man beachte an dieser Stelle, dass eine Mischung von $SU(2)_L$ -Dublets mit $SU(2)_L$ -Singletts nach elektroschwacher Symmetriebrechung zulässig ist, wenn diese die gleiche Ladung unter $U(1)_{e.m.}$ besitzen. Die Massenmatrix

$$M = \begin{pmatrix} M^{(0,0)} & 0_{3 \times 3} & M^{(0,1)} & 0_{3 \times 3} & M^{(0,2)} & \dots \\ M^{(1,0)} & M_{Q1} & M^{(1,1)} & 0_{3 \times 3} & M^{(1,2)} & \dots \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & M_{U1} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \dots \\ M^{(2,0)} & 0_{3 \times 3} & M^{(2,1)} & M_{Q2} & M^{(2,2)} & \dots \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & M_{U2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

enthält außer den Yukawatermen (3.33) die Matrizen M_{Qn} und M_{Un} für die KK-Moden der $SU(2)_L$ -Dublets und Singulette [24]. Diese kann man als Diagonalmatrizen ansetzen, was der Wahl einer speziellen Basis entspricht [30]. Anstatt die Eigenwerte über das charakteristische Polynom zu bestimmen (was für die obige unendlich dimensionale Matrix

recht kompliziert ist), wollen wir die Diagonalisierungsmatrizen durch eine Entwicklung in Potenzen des Skalenverhältnisses $\frac{M_{EW}}{M_{KK}}$ herleiten. Da M nicht hermitesch ist, gibt es keine unitäre Transformation, die M diagonalisiert. Man kann die Diagonalgestalt jedoch durch eine biunitäre Transformation erreichen. Es sei daher

$$\tilde{M} = U_L^\dagger M U_R \quad (3.38)$$

eine Diagonalmatrix, wobei U_L und U_R unitäre Matrizen bezeichnen. Bilden wir

$$\tilde{M} \tilde{M}^\dagger = U_L^\dagger M U_R U_R^\dagger M^\dagger U_L = U_L^\dagger M M^\dagger U_L, \quad (3.39)$$

so sehen wir, dass eine unitäre Transformation des Produktes $M M^\dagger$ die quadratischen Masseneigenwerte der linkshändigen Zustände liefert ($M M^\dagger$ ist hermitesch für jede nicht-singuläre Matrix M). Andererseits gilt

$$\tilde{M}^\dagger \tilde{M} = U_R^\dagger M^\dagger M U_R, \quad (3.40)$$

und wir erhalten die Massenquadrate der rechtshändigen Zustände.

3.3.1 Entwicklung in erster Ordnung

Es sind nun alle Yukawaterme von der Größenordnung $M_{EW} \approx 100\text{GeV}$ und demnach um mindestens eine Größenordnung kleiner als die unteren KK-Anregungen ($\approx (3 - 10)\text{TeV}$). Um die Buchhaltung zu erleichtern, versehen wir diese Terme mit einem Ordnungsparameter ϵ , den man jederzeit in Gedanken gleich Eins setzen kann. Des Weiteren ist eine vorläufige Trunkierung der Massenmatrix von Nötien. Wir beginnen mit einer 3×3 -Matrix, erweitern auf 5×5 und schließen auf den allgemeinen Fall. Da die KK-Massen auf der Diagonalen von M zu finden sind, wählen wir den Ansatz

$$U_L = \begin{pmatrix} U_{00} & \epsilon U_{01} & \epsilon U_{02} \\ \epsilon U_{10} & U_{11} & \epsilon U_{12} \\ \epsilon U_{20} & \epsilon U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

und bilden $U_L^\dagger M M^\dagger U_L$. Im Folgenden sei $M_{m,n} = M^{(m,n)}$. Wir finden

$$\begin{pmatrix} O(\epsilon^2) & \epsilon U_{10}^\dagger M_Q M_Q^\dagger U_{11} + O(\epsilon^2) & \epsilon(U_{20}^\dagger M_U M_U^\dagger \\ & + U_{00}^\dagger M_{01} M_U^\dagger) U_{22} + O(\epsilon^2) \\ \epsilon U_{11}^\dagger M_Q M_Q^\dagger U_{10} + O(\epsilon^2) & U_{11}^\dagger M_Q M_Q^\dagger U_{11} + O(\epsilon^2) & \epsilon(U_{11}^\dagger M_Q M_Q^\dagger U_{12} \\ & + U_{21}^\dagger M_U M_U^\dagger U_{22} \\ & + U_{11}^\dagger M_{1,1} M_U^\dagger U_{22}) + O(\epsilon^2) \\ \epsilon U_{22}^\dagger (M_U M_U^\dagger U_{20} \\ & + M_U M_{0,1}^\dagger U_{00}) + O(\epsilon^2) & \epsilon(U_{12}^\dagger M_Q M_Q^\dagger U_{11} \\ & + U_{22}^\dagger M_U M_U^\dagger U_{21} \\ & + U_{22}^\dagger M_U M_{1,1}^\dagger U_{11}) + O(\epsilon^2) & U_{22}^\dagger M_U M_U^\dagger U_{22} + O(\epsilon^2) \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Die Forderung nach Diagonalität in erster Ordnung verlangt, dass diejenigen Einträge in den Nebendiagonalelementen, die nicht von $O(\epsilon^2)$ oder höherer Ordnung sind, verschwinden. Es gilt somit:

$$U_{10}^\dagger M_Q M_Q^\dagger U_{11} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow U_{10}^\dagger = 0 \quad \text{bzw.} \quad U_{10} = 0. \quad (3.43)$$

Aus der Forderung nach Unitarität folgt, dass U_{01} in erster Ordnung ebenfalls verschwindet. Aus $UU^\dagger \stackrel{!}{=} \text{diag}(1, 1, 1)$ erhält man die Gleichungen

$$U_{00}U_{20}^\dagger + U_{02}U_{22}^\dagger \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.44)$$

$$U_{11}U_{21}^\dagger + U_{12}U_{22}^\dagger \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.45)$$

$$U_{20}U_{00}^\dagger + U_{22}U_{02}^\dagger \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.46)$$

$$U_{21}U_{11}^\dagger + U_{22}U_{12}^\dagger \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.47)$$

Außerdem gilt $U_{ii}U_{ii}^\dagger = \mathbf{1}$, d.h. die Diagonaleinträge sind in der betrachteten Näherung unitär. Kehren wir nun zu der Analyse der quadrierten Massenmatrix zurück. Der Eintrag in der 3. Zeile, 1. Spalte verlangt

$$\begin{aligned} U_{22}^\dagger(M_U M_U^\dagger U_{20} + M_U M_{0,1}^\dagger U_{00}) &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow U_{20} &= -(M_U^\dagger)^{-1} M_{0,1}^\dagger U_{00}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Löst man Gleichung (3.44) nach U_{02} auf, setzt die Adjungierte von Gl. (3.48) ein, so findet man

$$U_{02} = M_{0,1} M_U^{-1} U_{22}. \quad (3.49)$$

Schließlich betrachten wir den Eintrag 3. Zeile, 2. Spalte (Eintrag 2,3 liefert die gleiche Bedingung, lediglich h.c.):

$$U_{21} = -(U_{22}^\dagger M_U M_U^\dagger)^{-1} U_{12}^\dagger M_Q M_Q^\dagger U_{11} - (M_U^\dagger)^{-1} M_{1,1}^\dagger U_{11}. \quad (3.50)$$

Einsetzen von (3.47) liefert

$$U_{21} = (M_U M_U^\dagger)^{-1} U_{21} U_{11}^\dagger M_Q M_Q^\dagger U_{11} - (M_{1,1} M_U^{-1})^\dagger U_{11}. \quad (3.51)$$

Desweiteren findet man

$$U_{12} = M_Q M_Q^\dagger U_{12} (U_{22}^\dagger M_U M_U^\dagger U_{22})^{-1} + M_{1,1} M_U^{-1} U_{22}. \quad (3.52)$$

In einer Basis, in der die KK-Moden bereits diagonal sind, werden U_{11} und U_{22} in erster Ordnung der Einheitsmatrix entsprechen (desweiteren gilt $M = M^\dagger$). Man erhält die Bestimmungsgleichungen

$$-U_{12} M_U M_U^\dagger + M_Q M_Q^\dagger U_{12} + M_{1,1} M_U^\dagger = 0. \quad (3.53)$$

Diese lassen sich mit $U_{12} = -U_{21}^\dagger \equiv X$ zu einer Gleichung zusammenfassen und die Diagonalsierungsmatrix U_L ergibt sich zu

$$U_L = \begin{pmatrix} U_{00}^L & 0 & M_{0,1}M_U^{-1} \\ 0 & 1_{3 \times 3} & X \\ -(M_{0,1}M_U^{-1})^\dagger U_{00}^L & -X^\dagger & 1_{3 \times 3} \end{pmatrix},$$

$$-XM_U M_U^\dagger + M_Q M_Q^\dagger X + M_{1,1} M_U^\dagger = 0. \quad (3.54)$$

Auf die selbe Art und Weise diagonalisiert man $M^\dagger M$ und erhält die zweite Diagonalsierungsmatrix

$$U_R = \begin{pmatrix} U_{00}^R & (M_Q^{-1} M_{1,0})^\dagger & 0 \\ -M_Q^{-1} M_{10} U_{00}^R & 1_{3 \times 3} & -\tilde{X}^\dagger \\ 0 & \tilde{X} & 1_{3 \times 3} \end{pmatrix},$$

$$-\tilde{X} M_Q^\dagger M_Q + M_U^\dagger M_U \tilde{X} + M_{1,1}^\dagger M_Q = 0. \quad (3.55)$$

Schließlich wiederholen wir die Rechnung unter Einbeziehung der ersten beiden KK-Moden und erhalten

$$U_L = \begin{pmatrix} U_{00}^L & 0 & M_{0,1}M_{U1}^{-1} & 0 & M_{0,2}M_{U2}^{-1} \\ 0 & 1_{3 \times 3} & X_{1,1} & 0 & X_{1,2} \\ -(M_{0,1}M_{U1}^{-1})^\dagger U_{00}^L & -X_{1,1}^\dagger & 1_{3 \times 3} & -X_{2,1}^\dagger & 0 \\ 0 & 0 & X_{2,1} & 1_{3 \times 3} & X_{2,2} \\ -(M_{0,2}M_{U2}^{-1})^\dagger U_{00}^L & -X_{1,2}^\dagger & 0 & -X_{2,2}^\dagger & 1_{3 \times 3} \end{pmatrix},$$

$$M_{Qm} M_{Qn}^\dagger X_{m,n} - X_{m,n} M_{Un} M_{Un}^\dagger + M_{mn} M_{Un}^\dagger = 0. \quad (3.56)$$

$$U_R = \begin{pmatrix} U_{00}^R & (M_{Q1}^{-1}m_{10})^\dagger & 0 & (M_{Q2}^{-1}M_{2,0})^\dagger & 0 \\ -M_{Q1}^{-1}M_{1,0}U_{00}^R & 1_{3 \times 3} & -\tilde{X}_{1,1}^\dagger & 0 & -\tilde{X}_{1,2}^\dagger \\ 0 & \tilde{X}_{1,1} & 1_{3 \times 3} & \tilde{X}_{2,1} & 0 \\ -M_{Q2}^{-1}M_{2,0}U_{00}^R & 0 & -\tilde{X}_{2,1}^\dagger & 1_{3 \times 3} & -\tilde{X}_{2,2}^\dagger \\ 0 & \tilde{X}_{1,2} & 0 & \tilde{X}_{2,2} & 1_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

$$M_{Um}^\dagger M_{Um} \tilde{X}_{m,n} - \tilde{X}_{m,n} M_{Qn}^\dagger M_{Qn} + M_{n,m}^\dagger M_{Qn} = 0. \quad (3.57)$$

Die Gleichungen (3.56) und (3.57) gelten bereits allgemein und die zugehörigen Matrizen lassen sich leicht fortsetzen.

3.3.2 Entwicklung in zweiter Ordnung

Um die Diagonalisierungsmatrizen in zweiter Ordnung zu bestimmen, wählt man den Ansatz

$$U = \begin{pmatrix} U_{00} & \epsilon^2 U_{01} & \epsilon U_{02} & \epsilon^2 U_{03} & \epsilon U_{04} \\ \epsilon^2 U_{10} & 1_{3 \times 3} - \epsilon^2 s_{11} & \epsilon U_{12} & \epsilon^2 U_{13} & \epsilon U_{14} \\ \epsilon U_{20} & \epsilon U_{21} & 1_{3 \times 3} - \epsilon^2 s_{22} & \epsilon U_{23} & \epsilon^2 U_{24} \\ \epsilon^2 U_{30} & \epsilon^2 U_{31} & \epsilon U_{32} & 1_{3 \times 3} - \epsilon^2 s_{33} & \epsilon U_{34} \\ \epsilon U_{40} & \epsilon U_{41} & \epsilon^2 U_{42} & \epsilon U_{43} & 1_{3 \times 3} - \epsilon^2 s_{44} \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Da sich die Bestimmungsgleichungen für die in erster Ordnung von Null verschiedenen Terme nicht ändern, gilt nach wie vor:

$$U_{12} = -U_{21}^\dagger = X_{1,1}, \quad U_{14} = -U_{41}^\dagger = X_{1,2} \quad (3.59)$$

$$U_{20} = -(M_{0,1}M_{U1}^{-1})^\dagger U_{00}, \quad U_{40} = -(M_{0,2}M_{U2}^{-1})^\dagger U_{00} \quad (3.60)$$

$$U_{02} = M_{0,1}M_{U1}^{-1}, \quad U_{04} = M_{0,2}M_{U2}^{-1} \quad (3.61)$$

$$U_{32} = -U_{23}^\dagger = X_{2,1}, \quad U_{34} = -U_{43}^\dagger = X_{2,2}. \quad (3.62)$$

Desweiteren findet man nun

$$\begin{aligned} -M_{Q1}M_{Q1}^\dagger U_{10} &= (M_{1,0}M_{0,0}^\dagger + M_{1,1}M_{0,1}^\dagger + M_{1,2}M_{0,2}^\dagger)U_{00} + M_{1,1}M_{U1}^\dagger U_{20} \\ &+ U_{21}^\dagger M_{U1}(M_{0,1}U_{00} + M_{U1}^\dagger U_{20}) + M_{1,2}M_{U2}^\dagger U_{40} + U_{41}^\dagger M_{U2}(M_{0,2}^\dagger U_{00} + M_{U2}^\dagger U_{40}). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Mit Hilfe der obigen Relationen vereinfacht sich die rechte Seite zu $M_{10}M_{00}^\dagger U_{00}$. Es gilt somit

$$U_{10} = -(M_{Q1}M_{Q1}^\dagger)^{-1}M_{1,0}M_{0,0}^\dagger U_{00}, \quad (3.64)$$

$$U_{30} = -(M_{Q2}M_{Q2}^\dagger)^{-1}M_{2,0}M_{0,0}^\dagger U_{00}, \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} U_{01} &= -U_{00}U_{10}^\dagger - U_{02}U_{12}^\dagger - U_{04}U_{14}^\dagger \\ &= M_{0,0}M_{1,0}^\dagger(M_{Q1}M_{Q1}^\dagger)^{-1} - M_{0,1}M_{U1}^{-1}X_{1,1}^\dagger - M_{0,2}M_{U2}^{-1}X_{1,2}^\dagger, \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} U_{03} &= -U_{00}U_{30}^\dagger - U_{02}U_{32}^\dagger - U_{04}U_{34}^\dagger \\ &= M_{0,0}M_{2,0}^\dagger(M_{Q2}M_{Q2}^\dagger)^{-1} - M_{0,1}M_{U1}^{-1}X_{2,1}^\dagger - M_{0,2}M_{U2}^{-1}X_{2,2}^\dagger. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Die verbleibenden Nebendiagonalelemente sind erneut durch Matrixgleichungen gegeben, die man komponentenweise lösen muss:

$$U_{31} = -U_{13}^\dagger - X_{2,1}X_{1,1}^\dagger - X_{2,2}X_{1,2}^\dagger = Y_{1,2}, \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} &-Y_{2,1}M_{Q1}M_{Q1}^\dagger + M_{Q2}M_{Q2}^\dagger Y_{2,1} - (X_{2,1}X_{1,1}^\dagger + X_{2,2}X_{1,2}^\dagger)M_{Q1}M_{Q1}^\dagger \\ &+ M_{20}M_{10}^\dagger + M_{21}M_{11}^\dagger + M_{22}M_{12}^\dagger - M_{21}M_{U1}^\dagger X_{1,1}^\dagger - M_{22}M_{U2}^\dagger X_{1,2}^\dagger - X_{2,1}M_{U1}M_{11}^\dagger \\ &- X_{2,2}M_{U2}M_{12}^\dagger + X_{2,1}M_{U1}M_{U1}^\dagger X_{1,1}^\dagger + X_{2,2}M_{U2}M_{U2}^\dagger X_{1,2}^\dagger = 0, \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$U_{42} = -U_{24}^\dagger - (M_{01}M_{U1}^{-1})^\dagger M_{02}M_{U2}^{-1} - X_{1,1}^\dagger X_{1,2} - X_{2,1}^\dagger X_{2,2} = Z_{2,1}, \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} &-Z_{2,1}M_{U1}M_{U1}^\dagger + M_{U2}M_{U2}^\dagger Z_{2,1} - (X_{1,2}^\dagger X_{1,1} + X_{2,2}^\dagger X_{2,1})M_{U1}M_{U1}^\dagger \\ &+ M_{U2}M_{02}^\dagger M_{01}M_{U1}^{-1} + M_{U2}M_{12}^\dagger X_{1,1} + M_{U2}M_{22}^\dagger X_{2,1} + X_{1,2}^\dagger M_{11}M_{U1}^\dagger \\ &+ X_{2,2}^\dagger M_{21}M_{U1}^\dagger + X_{1,2}^\dagger M_{Q1}M_{Q1}^\dagger X_{1,1} + X_{2,2}^\dagger M_{Q2}M_{Q2}^\dagger X_{2,1} = 0. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Um die Korrekturen auf der Diagonalen berechnen zu können benötigt man $UU^\dagger \stackrel{!}{=} \mathbf{1}$. Man erkennt jetzt, dass in dieser Ordnung U_{00} nicht unitär sein kann, da

$$U_{00}U_{00}^\dagger + \sum_{i=1}^2 (M_{0i}M_{Ui}^{-1})U_{00}U_{00}^\dagger (M_{0i}M_{Ui}^{-1})^\dagger \stackrel{!}{=} \mathbf{1}_{3 \times 3} \quad (3.72)$$

gilt. Des Weiteren findet man Bestimmungsgleichungen für die s_{ii} :

$$s_{11} + s_{11}^\dagger = X_{1,1}X_{1,1}^\dagger + X_{1,2}X_{1,2}^\dagger, \quad (3.73)$$

$$s_{33} + s_{33}^\dagger = X_{2,1}X_{2,1}^\dagger + X_{2,2}X_{2,2}^\dagger, \quad (3.74)$$

$$s_{22} + s_{22}^\dagger = X_{1,1}^\dagger X_{1,1} + X_{2,1}^\dagger X_{2,1} + (M_{01}M_{U1}^{-1})^\dagger M_{01}M_{U1}^{-1}, \quad (3.75)$$

$$s_{44} + s_{44}^\dagger = X_{1,2}^\dagger X_{1,2} + X_{2,2}^\dagger X_{2,2} + (M_{02}M_{U2}^{-1})^\dagger M_{02}M_{U2}^{-1}. \quad (3.76)$$

Der letzte Schritt besteht nun in der Verallgemeinerung auf den kompletten Tower. Man findet

$$U_{n0} = -(M_{0\frac{n}{2}} M_{U\frac{n}{2}}^{-1})^\dagger U_{00} \quad n \text{ gerade}, \quad (3.77)$$

$$U_{n0} = -(M_{Q\frac{n+1}{2}} M_{Q\frac{n+1}{2}}^\dagger)^{-1} M_{\frac{n+1}{2}0} M_{00}^\dagger U_{00} \quad n \text{ ungerade}, \quad (3.78)$$

$$U_{0n} = M_{0\frac{n}{2}} M_{U\frac{n}{2}}^{-1} \quad n \text{ gerade}, \quad (3.79)$$

$$U_{0n} = M_{00} M_{\frac{n+1}{2}0}^\dagger (M_{Q\frac{n+1}{2}} M_{Q\frac{n+1}{2}}^\dagger)^{-1} - \sum_{k=1} M_{0k} M_{Uk}^{-1} X_{\frac{n+1}{2},k}^\dagger \quad n \text{ ungerade}, \quad (3.80)$$

$$U_{mn} = -U_{nm}^\dagger = X_{\frac{m+1}{2},\frac{n}{2}} \quad m, n > 0, \quad m \text{ ungerade}, \quad n \text{ gerade}, \quad (3.81)$$

$$U_{mn} = -U_{nm}^\dagger - \sum_{k=1} X_{\frac{m+1}{2},k} X_{\frac{n+1}{2},k}^\dagger = Y_{\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}}, \quad (3.82)$$

$$m, n \text{ ungerade wobei } m > n > 0 \quad (3.83)$$

$$U_{mn} = -U_{nm}^\dagger - (M_{0,\frac{m}{2}} M_{U\frac{m}{2}}^{-1})^\dagger M_{n0,\frac{n}{2}} M_{U\frac{n}{2}}^{-1} - \sum_{k=1} X_{k,\frac{m}{2}}^\dagger X_{k,\frac{n}{2}} = Z_{\frac{m}{2},\frac{n}{2}}, \quad (3.84)$$

$$n, m \text{ gerade wobei } n > m > 0, \quad (3.85)$$

$$s_{n,n} + s_{n,n}^\dagger = \sum_{h=1} X_{\frac{n+1}{2},h} X_{\frac{n+1}{2},h}^\dagger \quad n \text{ ungerade}, \quad (3.86)$$

$$s_{n,n} + s_{n,n}^\dagger = \sum_{h=1} X_{h,\frac{n}{2}}^\dagger X_{h,\frac{n}{2}} + (M_{0,\frac{n}{2}} M_{U\frac{n}{2}}^{-1})^\dagger M_{0,\frac{n}{2}} M_{U\frac{n}{2}}^{-1} \quad n \text{ gerade}, \quad (3.87)$$

$$U_{00} U_{00}^\dagger + \sum_{h=1} M_{0,h} M_{Uh}^{-1} (M_{0,h} M_{Uh}^{-1})^\dagger \stackrel{!}{=} \mathbf{1}. \quad (3.88)$$

Um zu sehen, wie sich die Einträge $Y_{m,n}$ und $Z_{m,n}$ verallgemeinern, muss man die Rechnung auf die ersten drei Anregungen erweitern. Man findet schließlich

$$\begin{aligned} & -Y_{m,n} M_{Qn} M_{Qn}^\dagger + M_{Qm} M_{Qm}^\dagger Y_{m,n} + \sum_{k=0} M_{m,k} M_{n,k}^\dagger \\ & + \sum_{h=1} (M_{Qm} M_{Qm}^\dagger X_{m,h} X_{n,h}^\dagger - X_{m,h} M_{Uh} M_{Uh}^\dagger X_{n,h}^\dagger) = 0, \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} & -Z_{m,n} M_{Un} M_{Un}^\dagger + M_{Um} M_{Um}^\dagger Z_{m,n} + M_{Um} M_{0,m}^\dagger M_{0,n} M_{Un}^{-1} \\ & + \sum_{h=1} (M_{Um} M_{Um}^\dagger X_{h,m}^\dagger X_{h,n} - X_{h,m}^\dagger M_{Qh} M_{Qh}^\dagger X_{h,n}) = 0. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Zerlegt man U_{00} in das Produkt einer hermiteschen Matrix H mit einer unitären Matrix U (dies ist möglich für jede nichtsinguläre Matrix M), so ergibt sich H aus

$$U_{00}U_{00}^\dagger = HUU^\dagger H^\dagger = HH^\dagger = H^\dagger H \stackrel{!}{=} \mathbf{1} - \sum_{h=1} M_{0,h}M_{Uh}^{-1}(m_{0h}M_{Uh}^{-1})^\dagger$$

zu

$$H = H^\dagger = \mathbf{1} - \frac{1}{2} \sum_{h=1} M_{0,h}M_{Uh}^{-1}(M_{0,h}M_{Uh}^{-1})^\dagger. \quad (3.91)$$

Rechtshändige Felder

Die Einträge der Matrix U_R seien mit W_{mn} bezeichnet. Aus den Forderungen $U_R U_R^\dagger = \mathbf{1}$ und $U_R^\dagger M^\dagger M U_R = \text{diag}$ erhält man:

$$W_{n0} = -M_{Q\frac{n+1}{2}}^{-1} M_{\frac{n+1}{2},0} W_{00} \quad n \text{ ungerade}, \quad (3.92)$$

$$W_{n0} = -(M_{U\frac{n}{2}}^\dagger M_{U\frac{n}{2}})^{-1} M_{0,\frac{n}{2}} M_{0,0} W_{00} \quad n \text{ gerade}, \quad (3.93)$$

$$W_{0n} = (M_{Q\frac{n+1}{2}}^{-1} M_{\frac{n+1}{2},0})^\dagger \quad n \text{ ungerade}, \quad (3.94)$$

$$W_{0n} = M_{00}^\dagger M_{0,\frac{n}{2}} (M_{U\frac{n}{2}}^\dagger M_{U\frac{n}{2}})^{-1} - \sum_{k=1} (M_{Qk}^{-1} m_{k0})^\dagger \tilde{X}_{\frac{n}{2}k}^\dagger \quad n \text{ gerade}, \quad (3.95)$$

$$W_{mn} = -W_{nm}^\dagger = \tilde{X}_{\frac{m}{2},\frac{n+1}{2}} \quad m, n > 0, \quad m \text{ gerade}, \quad n \text{ ungerade}, \quad (3.96)$$

$$W_{mn} = -W_{nm}^\dagger - \sum_{k=1} \tilde{X}_{\frac{m}{2},k} \tilde{X}_{\frac{n}{2},k}^\dagger = \tilde{Y}_{\frac{m}{2},\frac{n}{2}} \quad m, \quad n \text{ gerade wobei } m > n > 0, \quad (3.97)$$

$$W_{mn} = -W_{nm}^\dagger - M_{Q\frac{m+1}{2}}^{-1} M_{\frac{m+1}{2},0} (M_{Q\frac{n+1}{2}}^{-1} M_{\frac{n+1}{2},0})^\dagger - \sum_{k=1} \tilde{X}_{k,\frac{m+1}{2}}^\dagger \tilde{X}_{k,\frac{n+1}{2}}, \quad (3.98)$$

$$= \tilde{Z}_{\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}} \quad m, \quad n \text{ ungerade wobei } m > n > 0.$$

Hierbei gilt

$$\begin{aligned} & -\tilde{Y}_{m,n} M_{Un}^\dagger M_{Un} + M_{Um}^\dagger M_{Um} \tilde{Y}_{m,n} + \sum_{k=0} M_{k,m}^\dagger M_{kn} \\ & + \sum_{h=1} (M_{Um}^\dagger M_{Um} \tilde{X}_{m,h} \tilde{X}_{n,h}^\dagger - \tilde{X}_{m,h} M_{Qh}^\dagger M_{Qh} \tilde{X}_{n,h}^\dagger) = 0, \end{aligned} \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned} & -\tilde{Z}_{m,n} M_{Qn}^\dagger M_{Qn} + M_{Qm}^\dagger M_{Qm} \tilde{Z}_{m,n} + M_{Qm}^\dagger M_{m,0} (M_{Qn}^{-1} M_{n,0})^\dagger \\ & + \sum_{h=1} (M_{Qm}^\dagger M_{Qm} \tilde{X}_{h,m}^\dagger \tilde{X}_{h,n} - \tilde{X}_{h,m}^\dagger M_{Uh}^\dagger M_{Uh} \tilde{X}_{h,n}) = 0, \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$\tilde{s}_{n,n} + \tilde{s}_{n,n}^\dagger = \sum_{h=1} \tilde{X}_{\frac{n}{2},h} \tilde{X}_{\frac{n}{2},h}^\dagger \quad n \text{ gerade}, \quad (3.101)$$

$$\tilde{s}_{n,n} + \tilde{s}_{n,n}^\dagger = \sum_{h=1} \tilde{X}_{h,\frac{n+1}{2}}^\dagger \tilde{X}_{h,\frac{n+1}{2}} + M_{Q\frac{n+1}{2}}^{-1} M_{\frac{n+1}{2},0} (M_{Q\frac{n+1}{2}}^{-1} M_{\frac{n+1}{2},0})^\dagger \quad n \text{ ungerade}, \quad (3.102)$$

$$W_{00} W_{00}^\dagger + \sum_{h=1} (M_{Qh}^{-1} M_{h,0})^\dagger M_{Qh}^{-1} M_{h,0} \stackrel{!}{=} \mathbf{1}. \quad (3.103)$$

3.3.3 Interpretation

Abschließend wollen wir die Struktur der Diagonalisierungsmatrizen studieren. Bleibt man in erster Ordnung ϵ , so sieht man, dass beispielsweise die linkshändigen Nullmode, die dem $SU(2)$ -Dublett zuzuordnen ist, nur Beimischungen von $SU(2)$ -Singulett Moden erhalten. Ebenso erfahren die zum Dublett gehörenden KK-Moden nur Beimischungen von Singulett-Zuständen. Umgekehrt erhalten diejenigen KK-Moden, die zum $SU(2)$ -Singulett gehören, nur Beimischungen von Dublett-Zuständen. Die Beimischungen zu einer beliebigen Mode mit gegebener Chiralität sind demnach unabhängig voneinander, das heißt, sie mischen nicht untereinander. Analoge Betrachtungen gelten für rechtshändige Zustände. Hier mischen zu der Nullmode, die nun dem $SU(2)$ -Singulett entspricht, nur Dublett-Zustände. Auch diese mischen nicht untereinander und liefern somit unabhängige Beiträge. Die Masseneigenzustände der physikalischen Nullmoden (SM-Fermionen) ergeben sich nun zu

$$\psi_L'^{(0)} = U_{00}^\dagger \left(\psi_L^{(0)} - \sum_{k=1} \left(M_{0,k} M_{Uk}^{-1} \psi_L^{c(k)} + M_{k,0} M_{0,0}^\dagger (M_{Qk} M_{Qk}^\dagger)^{-1} \psi_L^{(k)} \right) \right), \quad (3.104)$$

$$\psi_R'^{(0)} = W_{00}^\dagger \left(\psi_R^{(0)} - \sum_{k=1} \left((M_{Qk}^{-1} M_{k,0})^\dagger \psi_R^{c(k)} + M_{0,k}^\dagger M_{0,0} (M_{Uk}^\dagger M_{Uk})^{-1} \psi_R^{(k)} \right) \right). \quad (3.105)$$

Berechnet man die Feynmanregeln für die Eichkopplung zwischen linkshändigen Fermionen, so erhält man die entsprechende Regeln für rechtshändige Felder, indem man die folgenden Ersetzungsregeln anwendet, welche man durch Vergleich der Einträge von U_L und U_R erhält:

$$n \rightarrow n+1, \quad n+1 \rightarrow n \quad (\text{gilt nicht für Laufindizes}) \quad (3.106)$$

$$M_{U/Q} \rightarrow M_{Q/U}^\dagger \quad (3.107)$$

$$M \rightarrow M^\dagger \quad + \text{Vertauschung der Indizes sowie Ersetzung (3.106)} \quad (3.108)$$

Wir erinnern an dieser Stelle noch einmal daran, dass aufgrund der angesetzten Diagonalität der KK-Moden im Flavor-Raum die Matrizen $M_{Q/U}$ gleich ihrem hermitesch Konjugierten

sind. Die obigen Regeln implizieren ferner $X, Y, Z \rightarrow \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$.

Um die Feynmanregeln für die Eichkopplung hinschreiben zu können, benötigen wir den Zusammenhang zwischen Massen- und Wechselwirkungseigenzustand des Eichbosons. Für Photonen und Gluonen sind diese identisch, da die Massenmatrix keine Nebendiagonaleinträge enthält. Die massiven Eichbosonen werden jedoch eine Mischung der Moden in Analogie zu den Fermionen erfahren. Wir widmen daher das nächste Kapitel dem Studium des elektroschwachen Eichsektors.

Kapitel 4

5D-Eichtheorien

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die fünfdimensionale Yang-Mills Theorie der elektroschwachen Bulk-Eichbosonen auf eine 4D-Theorie zu reduzieren und Feynmanregeln für Propagatoren und die Selbstkopplung herzuleiten. Während man die reine Yang-Mills-Theorie für alle Symmetriegruppen simultan studieren kann, ist bei der Herleitung der Propagatoren im Falle massiver Eichbosonen der symmetriebrechende Mechanismus zu berücksichtigen. In unserem Fall wird die abgeleitete 4D-Theorie durch Kopplung an ein *Brane-Higgs* gebrochen.

4.1 Zerlegung des 5D-Eichfeldes

Zunächst benötigen wir die allgemeine Kaluza-Klein-Zerlegung des fünfdimensionalen nichtabelschen Eichfeldes $A_M \equiv A_M^a(x, \phi) \tau^a$. Sie lautet

$$A_\mu(x, \phi) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=0} A_\mu^{(n)a}(x) \tau^a \chi^{(n)}(\phi) \equiv \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=0} A_\mu^{(n)} \chi^{(n)} \quad (4.1)$$

$$A_5(x, \phi) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=1} A_5^{(n)a}(x) \tau^a \frac{1}{m_n} \partial_\phi \chi^{(n)}(\phi) \equiv \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=1} A_5^{(n)} \frac{1}{m_n} \partial_\phi \chi^{(n)} \quad (4.2)$$

Die Zerlegung des Feldes A_5 hat aufgrund der Ableitung nach der fünften Koordinate negative Z_2 -Parität, wie in Kapitel 2 gefordert. Es hat nun $A_\mu(x, \phi)$ die Massendimension $3/2$ und $A_5(x, \phi)$ die Massendimension $1/2$ ¹. Der Faktor $1/m_n$ sorgt nun dafür, dass $A_5^{(n)}$ genau wie $A_\mu^{(n)}$ die Massendimension Eins hat. Andererseits besitzt $A_5^{(n)} = g^{55} A_5^{(n)}$ die Massendimension 3. Die Ursache hierfür ist durch unserem Ansatz der Metrik (2.22) begründet. Würde man die 5. Dimension durch ein dimensionsbehaftetes Wegelement $dy = rd\phi$ parametrisieren, so hätten, da man ∂_ϕ durch ∂_y ersetzen würde, $A_5^{(n)}$ und $A^{(n)5}$ in Analogie zu $A_\mu^{(n)}$ und $A^{(n)\mu}$ die Massendimension Eins. In der Tat wird diese Art der Parametrisierung

¹Die Massendimensionen der Felder einer D-dimensionalen Theorie sind gerade so, dass der kinetische Term die Massendimension D besitzt. Diese wird durch das D-dimensionale Raumzeitintegral gekürzt und die Wirkung hat somit Massendimension Null.

in der Literatur häufig verwendet. Oftmals geht man sogar noch einen Schritt weiter und verwendet homogene Koordinaten $z = z(y)$. Hierzu substituiert man im Linienelement

$$ds^2 = e^{-2\sigma(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2 \quad (4.3)$$

die fünfte Komponente durch

$$e^{-\sigma(y)} dz = dy \quad (4.4)$$

und erhält mit $\sigma(y) = k|y|$

$$z = \operatorname{sgn}(y) \frac{1}{k} e^{k|y|} \iff e^{-2\sigma} = \left(\frac{1}{kz}\right)^2 \quad (4.5)$$

und somit

$$ds^2 = \left(\frac{1}{kz}\right)^2 (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2). \quad (4.6)$$

Die neue Metrik ist nun konform flach, d.h. sie kann mittels einer konformen Transformation

$$g_{MN} = \left(\frac{1}{kz}\right)^2 \tilde{g}_{MN} \quad \text{mit} \quad \tilde{g}_{MN} = \eta_{MN} \quad (4.7)$$

in die Minkowskimetrik überführt werden (siehe z.B. [22], [28]). Die Tatsache, dass in unserer Konvention die Felder $A_5^{(n)}(x)$ und $A^{5(n)}(x)$ unterschiedliche Massendimensionen haben, bereitet jedoch keine Schwierigkeiten, da in der Wirkung alle Indizes kontrahiert werden. Bevor wir die 5D-Eichtheorie mit gebrochener Symmetrie behandeln, wollen wir zunächst das Verhalten der 5D-Felder unter Eintransformation studieren und dieses dann auf 4D-Niveau reduzieren.

4.2 5D-Eichtransformationen

Sei θ eine skalare Funktion aller Raumzeitkoordinaten

$$\theta \equiv \theta^a(x, \phi) \tau^a, \quad \Omega = \exp(i\theta) \quad (4.8)$$

und

$$A_M \rightarrow A'_M = \Omega \left(A_M + \frac{i}{g_5} \partial_M \right) \Omega^{-1} = \frac{i}{g_5} \Omega D_M \Omega^\dagger \quad (4.9)$$

die zugehörige Eichtransformation, wobei

$$\theta(x, \phi) = \sum_{n=0} \theta^{(n)a}(x) \tau^a \chi^{(n)}(\phi) \equiv \sum_{n=0} \theta^{(n)} \chi^{(n)}. \quad (4.10)$$

Setzt man die obigen KK-Zerlegungen (4.1) und (4.2) ein, so zerfällt die Transformation in

$$\begin{aligned} \sum_{n=0} A_\mu^{(n)} \chi^{(n)} &\rightarrow \frac{i}{g_5} \exp(i \sum_{m=0} \theta^{(m)} \chi^{(m)}) \left(\partial_\mu - i \frac{g_5}{\sqrt{r}} \sum_{n=0} A_\mu^{(n)} \chi^{(n)} \right) \exp(-i \sum_{m=0} \theta^{(m)} \chi^{(m)}), \\ \sum_{n=1} A_5^{(n)} \frac{1}{m_n} \partial_\phi \chi^{(n)} &\rightarrow \frac{i}{g_5} \exp(i \sum_{m=0} \dots) \left(\partial_\phi - i \frac{g_5}{\sqrt{r}} \sum_{n=1} A_5^{(n)} \frac{1}{m_n} \partial_\phi \chi^{(n)} \right) \exp(-i \sum_{m=0} \dots). \end{aligned}$$

Beschränkt man sich auf infinitesimale Transformationen, dann sieht man sofort, dass die Transformationen der einzelnen Komponenten der adjungierten Darstellung durch

$$A_\mu^{(n)a} \rightarrow A_\mu^{(n)a} + \frac{1}{\sqrt{2\pi} g_4} \partial_\mu \theta^{(n)a} + f^{abc} \sum_{m=0} \theta^{(m)b} \chi^{(m)} A_\mu^{(n)c}, \quad (4.11)$$

$$A_5^{(n)a} \rightarrow A_5^{(n)a} + \frac{1}{\sqrt{2\pi} g_4} m_n \theta^{(n)a} + f^{abc} \sum_{m=0} \theta^{(m)b} \chi^{(m)} A_5^{(n)c} \quad (4.12)$$

gegeben sind. Dieses Ergebnis wird benötigt, wenn wir eine Eichfixierung vornehmen. Im folgenden studieren wir die $SU(2) \times U(1)$ -Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung. Die Übertragung der Ergebnisse auf die Yang-Mills-Theorie der $SU(3)$ -Symmetrie ist absolut unproblematisch, da diese aufgrund der ungebrochenen Symmetrie formal wesentlich einfacher ist.

4.3 Eichtheorie mit gebrochener Symmetrie

4.3.1 Zerlegung der Wirkung

Ausgangspunkt ist die folgende 5D-Wirkung

$$\begin{aligned} S_{5D} = \int d^4x \int d\phi \sqrt{G} & \left(G^{KM} G^{LN} \left(-\frac{1}{4} W_{MN}^a W_{KL}^a - \frac{1}{4} B_{MN} B_{KL} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} |D_M \Phi_{5D}|^2 \delta(\phi - \pi) - V(\Phi_{5D}) \delta(\phi - \pi) + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

wobei

$$\begin{aligned} W_{MN}^a &= \partial_M W_N^a - \partial_N W_M^a + g f^{abc} W_M^b W_N^c, \\ B_{MN} &= \partial_M B_N - \partial_N B_M, \\ D_M &= \partial_M - i g_5 W_M^a \tau^a - i g'_5 Y B_M, \quad D_5 \Phi_5(x) = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Multipliziert man die Feldstärketensoren aus, so erhält man beispielsweise für den vorderen kinetischen Term

$$\begin{aligned} & -G^{MK}G^{LN}\left(\frac{1}{2}(\partial_M W_N^a \partial_K W_L^a - \partial_N W_M^a \partial_K W_L^a)\right. \\ & \left. + \frac{1}{2}g_5 f^{abc} W_M^b W_N^c (\partial_K W_L^a - \partial_L W_K^a) + \frac{1}{4}g_5^2 f^{abc} f^{ade} W_M^b W_N^c W_K^d W_L^e\right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Im Folgenden richten wir unser Augenmerk auf die bezüglich der Felder quadratischen Terme. Aus ihnen wird der Propagator konstruiert. Die kubischen und quartischen Terme, welche die Wechselwirkungen der Eichbosonen untereinander beschreiben, werden gegen Ende des Kapitels behandelt.

Der quadratische Anteil des obigen Ausdrucks zerfällt nach partieller Integration in

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}e^{4\sigma}\left(W_\nu^a \partial_\mu \partial^\mu W^{a\nu} - W_\mu^a \partial^\mu \partial_\nu W^{a\nu}\right. \\ & \left. + g^{55} e^{2\sigma}(-\partial_\phi W_\mu^a \partial_\phi W^{a\mu} + W_5^a \partial_\mu \partial^\mu W_5^a + 2\partial_\phi W_\mu^a \partial^\mu W_5^a)\right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Hierbei gilt aufgrund von (2.22) $g^{55} = -1/r^2$. Die Berechnungen für den zweiten kinetischen Term laufen analog. Bevor wir jedoch die KK-Zerlegung einsetzen und die 5. Dimension ausintegrieren, analysieren wir zunächst den Higgs-Sektor. Die kanonische Normierung des Higgsfeldes liefert

$$\Phi_{5D}(x) = \frac{1}{\sqrt{r}} e^{kr\pi} \Phi(x), \quad |D_M \Phi|^2 = |D_m \Phi|^2. \quad (4.17)$$

Die Integration über die fünfte Raumkomponente ist trivial:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int d\phi \sqrt{G} |D_m \Phi_{5D}|^2 \delta(\phi - \pi) \\ & = \frac{1}{2} \left| (\partial_\mu - ig_5 W_\mu^a \tau^a - ig'_5 Y B_\mu) \Phi \right|_{\phi=\pi}^2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Das Higgspotential $V(\Phi)$ liefert nach Entwicklung um den Vakuumerwartungswert v des Feldes Φ die Higgsmasse. Wir wollen darauf jedoch nicht näher eingehen, sondern konzentrieren uns auf die Eichbosonen. Es empfiehlt sich, eine neue Notation einzuführen (siehe auch [39]). Man definiert hierzu den vierkomponentigen Vektor A^a , $a = 1, 2, 3, Y$:

$$A^a = (W^1, W^2, W^3, B)^T, \quad \tau^i = \frac{\sigma^i}{2}, \quad \tau^Y = Y = \frac{1}{2}. \quad (4.19)$$

Die Generatoren der $SU(2)$ -Felder sind gegeben durch die halben Pauli-Matrizen, der Generator des $U(1)$ -Feldes kann als 1 notiert werden. Des Weiteren definieren wir

$$T^a = -i\tau^a, \quad g_5^{(a)} = \begin{cases} g_5 & \text{für } a = 1, 2, 3 \\ g'_5 & \text{für } a = Y \end{cases} \quad (4.20)$$

sowie das Higgsdublett

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i(\varphi_1(x) - i\varphi_2(x)) \\ v + (h(x) + i\varphi_3(x)) \end{pmatrix}, \quad \Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Die Goldstonebosonen φ_i beschreiben Feldfluktuationen entlang des Minimums. Das physikalische Higgsfeld h hingegen beschreibt diejenige Fluktuation, die die Feldkonfiguration aus dem Minimum herausführt. Man berechnet nun die Produkte

$$\begin{aligned} T^1 \Phi_0 &= \frac{v}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{v}{2\sqrt{2}} n_1, \\ T^2 \Phi_0 &= \frac{v}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{v}{2\sqrt{2}} n_2, \\ T^3 \Phi_0 &= \frac{v}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \equiv \frac{v}{2\sqrt{2}} n_3, \\ T^Y \Phi_0 &= \frac{v}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} \equiv -\frac{v}{2\sqrt{2}} n_3. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Hierbei bezeichnen die n_i Einheitsvektoren entlang der Feldfluktuationen φ_i . Die Komponenten des Higgs-Dubletts sollen nun einheitlich durch einen Satz von skalaren Feldern ϕ_i beschrieben werden. Das Higgsfeld erhält einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert (VEV), der VEV der Goldstonebosonen ist Null. Wir notieren

$$\langle \phi_i \rangle = (\phi_0)_i. \quad (4.23)$$

Demnach ergibt sich

$$\phi_i(x) = \phi_{0i} + \chi_i(x), \quad (4.24)$$

wobei χ_i die obigen Feldfluktuationen bezeichnet. Es gilt somit $\chi_i = \varphi_i$ für $i = 1, 2, 3$. Betrachten wir nun die kovariante Ableitung

$$D_\mu \phi_i = \partial_\mu \phi_i + g_5 A_\mu^a T_{ij}^a \phi_j. \quad (4.25)$$

Die partielle Ableitung generiert kinetische Terme für die Goldstonebosonen und das Higgs. Die Wirkung der Kopplungsterme auf den Vakuumerwartungswert ist oben berechnet (4.22). Indem wir

$$F_i^a = T_{ij}^a \phi_{0j} \quad (4.26)$$

definieren, erhalten wir

$$g_5^{(a)} F_i^a = \frac{v}{2} \begin{pmatrix} g_5 & 0 & 0 \\ 0 & g_5 & 0 \\ 0 & 0 & g_5 \\ 0 & 0 & -g'_5 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Substituieren wir nun die Felder in (4.18) durch (4.19) und (4.24) und verwenden die Definition (4.26), so erhalten wir

$$\begin{aligned} S_{4D}^{Higgs} = & \frac{1}{2} \int d^4x \left((\partial_\mu \chi)^2 - 2 \sum_{n=0} \frac{g_5^{(a)}}{\sqrt{r}} F_i^a \varphi_i \partial^\mu A_\mu^{(n)a} \chi^{(n)}(\pi) \right. \\ & \left. + \sum_{m,n} \frac{g_5^{(a)} g_5^{(b)}}{r} F_i^a F_i^b A_\mu^{(m)a} g^{\mu\nu} A_\nu^{(n)b} \chi^{(m)}(\pi) \chi^{(n)}(\pi) + V(\phi) \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Wir setzen nun

$$(m^{(m,n)^2})^{ab} = \frac{g_5^{(a)} g_5^{(b)}}{r} F_i^a F_i^b \chi^{(m)}(\pi) \chi^{(n)}(\pi) = \frac{g_5^{(a)} g_5^{(b)}}{r} (FF^T)^{ab} \chi^{(m)}(\pi) \chi^{(n)}(\pi) \quad (4.29)$$

und notieren die Wirkung (4.13) erneut, wobei wir das Higgsfeld ignorieren und die Relation (2.76) verwenden:

$$\begin{aligned} S_{4D} = & \frac{1}{2} \int d^4x \left(\sum_{m,n} A_\mu^{(m)a} ((\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu + m_n^2 g^{\mu\nu}) \delta_{mn} \delta_{ab} + (m^{(m,n)^2})^{ab} g^{\mu\nu}) A_\nu^{(n)b} \right. \\ & - \sum_{n=1} (A_5^{(n)a} \partial^2 A_5^{(n)a} - 2m_n A_5^{(n)a} \partial^\mu A_\mu^{(n)a}) - 2 \sum_{n=0} \frac{g_5^{(a)}}{\sqrt{r}} F_i^a \varphi_i \partial^\mu A_\mu^{(n)a} \chi^{(n)}(\pi) \\ & \left. + (\partial_\mu \varphi)^2 + \mathcal{L}_{GF} \right) + S_{FP}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Die Mischterme sind nun durch die Wahl einer passenden Eichfixierung zu entfernen.

4.3.2 Eichfixierung und Feldredefinition

Gegeben sei die folgende eichfixierende Funktion:

$$G^{(n)a}(x) = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(\partial^\mu A_\mu^{(n)a}(x) - \xi \left(\frac{g_5^{(a)}}{\sqrt{r}} F_i^a \varphi_i(x) \chi^{(n)}(\pi) - m_n A_5^{(n)a}(x) \right) \right). \quad (4.31)$$

Auf diese wenden wir nun eine Eichtransformation an. Hierzu verwenden wir die Ergebnisse (4.11) und (4.12). Definiert man ferner

$$\left(D_{\mu,5}^{(m,n)}(x, \phi) \right)^{ab} = (\partial_\mu, m_n) \delta_{mn} \delta^{ab} + \frac{g_5^{(a)}}{\sqrt{r}} f^{abc} \chi^{(m)}(\phi) A_{\mu,5}^{(n)c}(x), \quad (4.32)$$

so erhält man nach kurzer Rechnung (die x -Abhängigkeit lassen wir außen vor):

$$G^{(n)a} \rightarrow G^{(n)a} + \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(\frac{\sqrt{r}}{g_5^{(a)}} \partial^\mu \left(D_\mu^{(m,n)}(\phi) \right)^{ab} + \xi m_n \left(D_5^{(m,n)}(\phi) \right)^{ab} \right) \theta^{(m)b}. \quad (4.33)$$

Die Zusatzterme, die aus der Eichtransformation hervorgehen, sollen nun durch die Wirkung sogenannter Geist-Felder kompensiert werden. Nähere Erläuterungen hierzu findet man beispielsweise in [38] oder [39]. Man definiert daher

$$\left(M_{FP}^{(m,n)}(x, \phi)\right)^{ab} = \frac{\delta G^{(n)a}}{\delta \theta^{(m)b}} = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(\frac{\sqrt{r}}{g_5^{(a)}} \partial^\mu \left(D_\mu^{(m,n)}(\phi)\right)^{ab} + \xi m_n \left(D_5^{(m,n)}(\phi)\right)^{ab} \right) \quad (4.34)$$

und erhält die Wirkung der Faddeev-Popov-Geister

$$S_{FP} = - \int d^4x \int d\phi \sqrt{G} \sum_{m,n} \sum_{a,b} c_a^{(m)\dagger}(x) \left(M_{FP}^{(m,n)}(x, \phi)\right)^{ab} c_b^{(n)}(x), \quad (4.35)$$

wobei das Vorzeichen für die erwünschte Kompensation sorgt. Der eichfixierende Term in der Wirkung sei nun $\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0} (G^{(n)a})^2$. Nach Einsetzen von (4.31) und partieller Integration findet man

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{GF} = & \frac{1}{2} \sum_{n=0} \left\{ \frac{1}{\xi} A_\mu^{(n)a} \partial^\mu \partial^\nu A_\nu^{(n)a} + 2 \left(\frac{g_5^{(a)}}{\sqrt{r}} F_i^a \varphi_i \chi^{(n)}(\pi) - m_n A_5^{(n)a} \right) \partial^\mu A_\mu^{(n)a} \right. \\ & \left. - \xi \left(\frac{g_5^{(a)}{}^2}{r} F_i^a F_j^a \varphi_i \varphi_j (\chi^{(n)}(\pi))^2 + m_n^2 (A_5^{(n)a})^2 - \frac{2 g_5^{(a)}}{\sqrt{r}} F_i^a \varphi_i \chi^{(n)}(\pi) m_n A_5^{(n)a} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Definieren wir

$$\left(m^{(n,n)}\right)_{ij} = \frac{g_5^{(a)}{}^2}{r} F_i^a F_j^a (\chi^{(n)}(\pi))^2 = \frac{g_5^{(a)}{}^2}{r} \left(F^T F\right)_{ij} (\chi^{(n)}(\pi))^2, \quad (4.37)$$

und setzen den Eichfixierungsterm in (4.30) ein, so heben sich die obigen Mischterme weg und es bleibt

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{2} \int d^4x \left(\sum_{m,n} A_\mu^{(m)a} \left((\partial^2 g^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi}) \partial^\mu \partial^\nu + m_n^2 g^{\mu\nu}) \delta_{mn} \delta^{ab} + (m^{(m,n)}\right)^{ab} g^{\mu\nu} \right) A_\nu^{(n)b} \\ & - \sum_{n=1} A_5^{(n)a} \partial^2 A_5^{(n)a} - \varphi_i \partial^2 \varphi_i + 2\mathcal{L}_{mass}^\xi \right) + S_{FP} \end{aligned} \quad (4.38)$$

wobei

$$\mathcal{L}_{mass}^\xi = -\frac{\xi}{2} \left(\sum_{n=0} \varphi_i \left(m^{(n,n)}\right)_{ij} \varphi_j + A_5^{(n)a} m_n^2 A_5^{(n)a} - 2 \frac{g_5^{(a)}}{\sqrt{r}} F_i^a \varphi_i \chi^{(n)}(\pi) m_n A_5^{(n)a} \right). \quad (4.39)$$

Zunächst könnte man darüber besorgt sein, dass die Eichfixierung einen neuen Mischterm zwischen den Goldstonebosonen φ_i und den $A_5^{(n)}$ produziert hat. In der Tat hat aber alles seine Richtigkeit, wie sich später herausstellen wird.

Für die nachfolgenden Überlegungen halten wir die KK-Indizes fest und richten unser Augenmerk auf die Massenterme $(m^{(n,n)^2})_{ij}$ und $(m^{(m,n)^2})^{ab}$, welche durch die Gleichungen (4.37) und (4.29) definiert sind. Wir bezeichnen g_5 ab sofort als g und berechnen

$$g^{(a)^2} F_i^a F_j^a = g^{(a)^2} (F^T F)_{ij} = \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g^2 & 0 & 0 \\ 0 & g^2 & 0 \\ 0 & 0 & g^2 + g'^2 \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

sowie

$$g^{(a)} g^{(b)} F_i^a F_i^b = g^{(a)} g^{(b)} (FF^T)^{ab} = \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^2 & -gg' \\ 0 & 0 & -gg' & g'^2 \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

Auch der Mischterm kann explizit angegeben werden:

$$g^{(a)} A_5^{(n)a} F_i^a \varphi_i = \frac{v}{2} g (A_5^{(n)1} \varphi_1 + A_5^{(n)2} \varphi_2) + \frac{v}{2} (g A_5^{(n)3} - g' A_5^{(n)Y}) \varphi_3. \quad (4.42)$$

Die Massenmatrix der Goldstonebosonen ist bereits diagonal. Es gilt also $(m^{(n,n)^2})_{ij} = (m^{(n,n)^2})_{ii} \delta_{ij}$. Die Massenmatrix der Eichfelder wird durch Redefinition der Felder $A_\mu^{(n)3}$ und $A_\mu^{(n)Y}$ auf Diagonalgestalt bezüglich der Indizes a, b gebracht. Diese Vorgehensweise ist uns aus dem Standardmodell wohlvertraut. Schließlich unterzieht man auch die Felder $A_\mu^{(n)1}$ und $A_\mu^{(n)2}$ bzw. $A_5^{(n)1}$ und $A_5^{(n)2}$ einer Redefinition. Wir setzen

$$W_{\mu,5}^{(n)\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_{\mu,5}^{(n)1} \mp i A_{\mu,5}^{(n)2}), \quad (4.43)$$

$$A_{\mu,5}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g A_{\mu,5}^{(n)3} + g' A_{\mu,5}^{(n)Y}), \quad (4.44)$$

$$Z_{\mu,5}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g A_{\mu,5}^{(n)3} - g' A_{\mu,5}^{(n)Y}), \quad (4.45)$$

$$\varphi^\pm = \frac{\mp i}{\sqrt{2}} (\varphi_1 \pm i \varphi_2), \quad (4.46)$$

$$\varphi^0 = \varphi_3. \quad (4.47)$$

Wenn wir die Gleichungen (4.43) und (4.46) umkehren,

$$A_{\mu,5}^{(n)1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_{\mu,5}^{(n)+} + W_{\mu,5}^{(n)-}), \quad A_{\mu,5}^{(n)2} = \frac{i}{\sqrt{2}} (W_{\mu,5}^{(n)+} - W_{\mu,5}^{(n)-}), \quad (4.48)$$

$$\varphi^1 = \frac{i}{\sqrt{2}} (\varphi^+ - \varphi^-), \quad \varphi^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi^+ + \varphi^-), \quad (4.49)$$

und dieses in (4.42) einsetzen, erhalten wir

$$\frac{v}{2} \left(g (W_5^{(n)+} \varphi^+ - W_5^{(n)-} \varphi^-) + \sqrt{g^2 + g'^2} Z_5^{(n)} \varphi^0 \right). \quad (4.50)$$

Man kann nun die Wirkung (4.38) in vier separate Wirkungen für die Felder $W^{(n)\pm}$, $Z^{(n)}$ und $A^{(n)}$ zerlegen. Hierbei darf man die Feldbezeichnung \pm am KK-Index vorbeiziehen, welcher ab sofort wieder variabel sein soll. Der nächste Schritt besteht nämlich darin, die einzelnen Massenmatrizen der neuen Felder $W^{\pm(n)}$, $Z^{(n)}$ und $A^{(n)}$ bezüglich des KK-Indexes zu diagonalisieren. Hierbei wird man beobachten, dass im Zuge der Diagonalisierung die verschiedenen Moden miteinander mischen. Insofern ist auch der Mischterm zwischen $A_5^{(n)}$ und φ nichts ungewöhnliches, da man das Goldstoneboson als Nullkomponente eines Vektors $A_5 = (\varphi, A_5^{(1)}, A_5^{(2)}, \dots)^T$ interpretieren kann. Das Photonfeld hat kein korrespondierendes Goldstoneboson. Daher bleibt seine Nullmode masselos. Man erhält also folgenden Satz von Spin-1-und Spin-0-Feldern:

$$\begin{pmatrix} W_\mu^{\pm(0)} \\ W_\mu^{\pm(1)} \\ W_\mu^{\pm(2)} \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^\pm \\ W_5^{\pm(1)} \\ W_5^{\pm(2)} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Z_\mu^{(0)} \\ Z_\mu^{(1)} \\ Z_\mu^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^0 \\ Z_5^{(1)} \\ Z_5^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_\mu^{(0)} \\ A_\mu^{(1)} \\ A_\mu^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ A_5^{(1)} \\ A_5^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

4.3.3 Diagonalisierung der Massenmatrizen

Wir studieren im Folgenden die Wirkung der W-Felder. Man erhält mit den obigen Substitutionen

$$\begin{aligned} S_{4D}^\pm &= \frac{1}{2} \int d^4x \left(\sum_{m,n} W_\mu^{\pm(m)*} \left((\partial^2 g^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi}) \partial^\mu \partial^\nu) \delta_{mn} + (m^{(m,n)}{}^2 + m_n^2 \delta_{mn}) g^{\mu\nu} \right) W_\nu^{\pm(n)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1} W_5^{\pm(n)*} \partial^2 W_5^{\pm(n)} - \varphi^{\pm*} \partial^2 \varphi^\pm + 2\mathcal{L}_{mass}^{\xi\pm} \right) + S_{FP}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

wobei

$$\mathcal{L}_{mass}^{\xi\pm} = -\frac{\xi}{2} \sum_{n=0} \left(\varphi^{\pm*} m^{(n,n)}{}^2 \varphi^\pm + W_5^{\pm(n)*} m_n^2 W_5^{\pm(n)} - \frac{g_5}{\sqrt{r}} \frac{v}{2} m_n (\varphi^{\pm*} W_5^{\pm(n)} + W_5^{\pm(n)*} \varphi^\pm) \chi^{(n)}(\pi) \right).$$

Setzen wir

$$W_5^\pm = (\varphi^\pm, W_5^{\pm(1)}, W_5^{\pm(2)}, \dots)^T, \quad (4.53)$$

so lässt sich $\mathcal{L}_{mass}^{\xi\pm}$ durch einen einzigen Term notieren:

$$\mathcal{L}_{mass}^{\xi\pm} = -\frac{\xi}{2} W_5^{\pm\dagger} M_{\xi}^{\pm 2} W_5^{\pm}. \quad (4.54)$$

$M_{\xi\pm}^2$ bezeichnet hierbei die gemeinsame Massenmatrix der Spin-0-Felder. Sie lautet explizit

$$M_{\xi\pm}^2 = \begin{pmatrix} \sum_{n=0} m^{(n,n)^2} & -m^{(1,1)}m_1 & -m^{(2,2)}m_2 & -m^{(3,3)}m_3 & \cdots \\ -m^{(1,1)}m_1 & m_1^2 & 0 & 0 & \cdots \\ -m^{(2,2)}m_2 & 0 & m_2^2 & 0 & \cdots \\ -m^{(3,3)}m_3 & 0 & 0 & m_3^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

Hierbei gilt

$$m^{(m,n)^2} = \frac{g_5^2 v^2}{4 r} \chi^{(m)}(\pi) \chi^{(n)}(\pi). \quad (4.56)$$

Desweiteren lesen wir aus der obigen Wirkung die Massenmatrix M_{\pm}^2 der W-Felder ab und finden

$$M_{\pm}^2 = \begin{pmatrix} m^{(0,0)^2} & m^{(0,1)^2} & m^{(0,2)^2} & m^{(0,3)^2} & \cdots \\ m^{(1,0)^2} & m_1^2 + m^{(1,1)^2} & m^{(1,2)^2} & m^{(1,3)^2} & \cdots \\ m^{(2,0)^2} & m^{(2,1)^2} & m_2^2 + m^{(2,2)^2} & m^{(2,3)^2} & \cdots \\ m^{(3,0)^2} & m^{(3,1)^2} & m^{(3,2)^2} & m_3^2 + m^{(3,3)^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

Setzen wir nun $g_4 = g = \frac{g_5}{\sqrt{2\pi r}}$, $m_W = gv/2$ und $\alpha_n = \sqrt{2\pi}\chi^{(n)}(\pi)$ ($\alpha_0 = 1$), so ergeben sich die obigen Matrizen zu

$$M_{\xi\pm}^2 = m_W^2 \begin{pmatrix} \sum_{n=0} \alpha_n^2 & -\alpha_1 \frac{m_1}{m_W} & -\alpha_2 \frac{m_2}{m_W} & -\alpha_3 \frac{m_3}{m_W} & \cdots \\ -\alpha_1 \frac{m_1}{m_W} & \frac{m_1^2}{m_W^2} & 0 & 0 & \cdots \\ -\alpha_2 \frac{m_2}{m_W} & 0 & \frac{m_2^2}{m_W^2} & 0 & \cdots \\ -\alpha_3 \frac{m_3}{m_W} & 0 & 0 & \frac{m_3^2}{m_W^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

$$M_{\pm}^2 = m_W^2 \begin{pmatrix} \alpha_0^2 & \alpha_0 \alpha_1 & \alpha_0 \alpha_2 & \alpha_0 \alpha_3 & \cdots \\ \alpha_1 \alpha_0 & \frac{m_1^2}{m_W^2} + \alpha_1^2 & \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_1 \alpha_3 & \cdots \\ \alpha_2 \alpha_0 & \alpha_2 \alpha_1 & \frac{m_2^2}{m_W^2} + \alpha_2^2 & \alpha_2 \alpha_3 & \cdots \\ \alpha_3 \alpha_0 & \alpha_3 \alpha_1 & \alpha_3 \alpha_2 & \frac{m_3^2}{m_W^2} + \alpha_3^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

Um nun die physikalischen Massen der Bosonen zu bestimmen, müssen die beiden Matrizen diagonalisiert werden. Hierbei kommt es zu der oben erwähnten Mischung der Moden. Sei B diejenige Matrix, welche die Eichbosonen diagonalisiert und B_ξ das entsprechende Pendant für die Goldstonebosonen (im Folgenden werden auch die Felder $A_5^{(n)}$ als Goldstonebosonen bezeichnet, da sich herausstellen wird, dass auch ihre Masse proportional zum Eichfixierungsparameter ξ ist). Definiert man ferner den Vektor

$$W_\mu^\pm = (W_\mu^{\pm(0)}, W_\mu^{\pm(1)}, W_\mu^{\pm(2)}, \dots)^T, \quad (4.60)$$

so gilt

$$W_\mu^{\pm\dagger} M_\pm^2 W_\mu^\pm = W_\mu^{\pm\dagger} BB^T M_\pm^2 BB^T W_\mu^\pm = W_\mu^{\pm'\dagger} \tilde{M}_\pm^2 W_\mu^{\pm'}, \quad (4.61)$$

$$W_5^{\pm\dagger} M_{\xi\pm}^2 W_5^\pm = W_5^{\pm\dagger} B_\xi B_\xi^T M_{\xi\pm}^2 B_\xi B_\xi^T W_5^\pm = W_5^{\pm'\dagger} \tilde{M}_{\xi\pm}^2 W_5^{\pm'}. \quad (4.62)$$

Hierbei sind die diagonalisierten Matrizen durch eine Tilde, Masseneigenzustände durch einen Strich gekennzeichnet.

Für die Feynmanregeln der Propagatoren benötigt man nun die Masseneigenwerte λ_n . In der Tat werden wir beweisen, dass die Matrizen (4.59) und (4.58) dieselben Eigenwerte besitzen. Dies ist ohnehin unabdingbar, wenn die Amplitude eines beliebigen Prozesses unabhängig von dem Eichfixierungsparameter sein soll, da nämlich der ξ -abhängige Anteil im Graphen des Eichfeldes durch den Graphen des zugehörigen Goldstonebosons kompensiert werden muss.

Aufgrund des regelmäßigen Aufbaus der Massenmatrizen, bietet es sich an, dieselben zu trükkieren (etwa bei $n = 3$) und das resultierende charakteristische zu Polynom bestimmen. Daraufhin extrapoliert man das Resultat für den Fall beliebiger n 's. Für die Eichbosonmassenmatrix (4.59) findet man

$$\det(M_\pm^2 - \lambda \mathbf{1}) = \prod_{n=0} (m_n^2 - \lambda) + m_W^2 \sum_{n=0} \alpha_n^2 \prod_{k \neq n} (m_k^2 - \lambda). \quad (4.63)$$

Verwendet man $m_0 = 0$ und $\alpha_0 = 1$, so erhält man nach wenigen Schritten

$$\det(M_\pm^2 - \lambda \mathbf{1}) = \left(\prod_{n=1} (m_n^2 - \lambda) \right) \left(m_W^2 - \lambda - \lambda m_W^2 \sum_{n=1} \frac{\alpha_n^2}{m_n^2 - \lambda} \right). \quad (4.64)$$

Die Matrix $M_{\xi\pm}^2$ liefert das charakteristische Polynom

$$\det(M_{\xi\pm}^2 - \lambda \mathbf{1}) = m_W^2 \left(\left(1 + \sum_{n=1} \alpha_n^2 - \frac{\lambda}{m_W^2} \right) \prod_{n=1} (m_n^2 - \lambda) - \sum_{n=1} \alpha_n^2 m_n^2 \prod_{k \neq n} (m_k^2 - \lambda) \right). \quad (4.65)$$

Nach Ausklammern des Produkts erhält man

$$\det(M_{\xi\pm}^2 - \lambda \mathbf{1}) = \left(\prod_{n=1} (m_n^2 - \lambda) \right) \left(m_W^2 - \lambda + m_W^2 \sum_{n=1} \alpha_n^2 \left(1 - \frac{m_n^2}{(m_n^2 - \lambda)} \right) \right). \quad (4.66)$$

Die rechte Seite ist jedoch äquivalent zum charakteristischen Polynom (4.64) und die Eigenwerte sind somit identisch. Da nun die KK-Massen m_n von den Masseneigenwerten verschieden sind, erfüllen sämtliche Eigenwerte die transzendenten Gleichung

$$m_W^2 - \lambda - \lambda m_W^2 \sum_{n=1} \frac{\alpha_n^2}{m_n^2 - \lambda} = 0. \quad (4.67)$$

Diese lässt sich zwar analytisch nicht exakt lösen, jedoch können wir uns die Tatsache zu Nutze machen, dass wir es mit zwei verschiedenen Massenskalen $m_W \approx 100 \text{ GeV}$ und m_n mit $m_1 \approx (3 - 10) \text{ TeV}$ zu tun haben. So wird beispielsweise der nullte Eigenwert von der Gestalt m_W^2 plus Korrekturen in Potenzen von m_W^2/m_n^2 sein, wobei über alle n zu summieren ist. Versieht man in Gl. (4.67) die W-Masse mit einem Ordnungsparameter ϵ , setzt

$$\lambda_0 = \epsilon^2 m_W^2 + \epsilon^4 c \quad (4.68)$$

in die transzendenten Gleichung ein und entwickelt nach ϵ , so findet man

$$c = -m_W^4 \sum_{n=1} \frac{\alpha_n^2}{m_n^2}. \quad (4.69)$$

Indem man den Ansatz auf

$$\lambda_0 = \epsilon^2 m_W^2 + \epsilon^4 c_2 + \epsilon^6 c_3 + \dots \quad (4.70)$$

verallgemeinert, kann man λ_0 prinzipiell bis zu jeder gewünschten Ordnung in ϵ bestimmen. Es kommen nur gerade Potenzen in Frage, da m_W und m_n jeweils nur quadratisch in der Massenmatrix auftreten. Das gleiche Rezept kann man auch auf die Masseneigenwerte der KK-Moden anwenden. Hierzu setzen wir

$$\lambda_n = m_n^2 + \epsilon^2 c_1^{(n)} + \epsilon^4 c_2^{(n)} + \dots \quad (4.71)$$

und erhalten

$$c_1^{(n)} = m_W^2 \alpha_n^2 \quad (4.72)$$

$$c_2^{(n)} = m_W^4 \alpha_n^2 \left(\frac{1}{m_n^2} + \sum_{k \neq n} \frac{\alpha_k^2}{m_n^2 - m_k^2} \right). \quad (4.73)$$

Kennt man die Eigenwerte, so kann man die Diagonalisierungsmatrizen B und B_ξ berechnen. Wir beginnen mit der Ersteren:

$$(M_\pm^2 - \lambda \mathbf{1}) E^\lambda = 0. \quad (4.74)$$

Wir orientieren uns an [40] und wählen den Ansatz $E^\lambda = (1, \hat{E}^\lambda)$. Dieser liefert

$$m_W^2 - \lambda m_W^2 + m_W^2 \sum_{j=1} \alpha_j \hat{E}_j^\lambda = 0, \quad (4.75)$$

$$m_W^2 \begin{pmatrix} \frac{m_1^2}{m_W^2} + \alpha_1^2 - \lambda & \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_1 \alpha_3 & \dots \\ \alpha_2 \alpha_1 & \frac{m_2^2}{m_W^2} + \alpha_2^2 - \lambda & \alpha_2 \alpha_3 & \dots \\ \alpha_3 \alpha_1 & \alpha_3 \alpha_2 & \frac{m_3^2}{m_W^2} + \alpha_3^2 - \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \hat{E}_j^\lambda = -m_W^2 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (4.76)$$

Sei die obige Matrix durch A bezeichnet, so erhält man die Eigenvektoren \hat{E}_j^λ durch Anwendung der Cramerschen Regel. Es ist

$$\hat{E}_j^\lambda = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}. \quad (4.77)$$

Hierbei entspricht A_j der Matrix A , wobei die die j -te Spalte durch die rechte Seite von Gl. (4.76) ersetzt wird. Wir berechnen

$$\det(A) = \prod_{n=1} \left(m_n^2 - \lambda \right) \left(1 + m_W^2 \sum_{n=1} \frac{\alpha_n^2}{m_n^2 - \lambda} \right) = \prod_{n=1} \left(m_n^2 - \lambda \right) \frac{m_W^2}{\lambda}, \quad (4.78)$$

$$\det(A_j) = -m_W^2 \alpha_j \prod_{n \neq j} \left(m_n^2 - \lambda \right) = - \prod_{n=1} \left(m_n^2 - \lambda \right) \frac{m_W^2 \alpha_j}{m_j^2 - \lambda}. \quad (4.79)$$

Hierbei wurde oben Gl. (4.67) verwendet. Man erhält daher

$$\hat{E}_j^\lambda = \frac{\lambda \alpha_j}{\lambda - m_j^2} \quad \text{bzw.} \quad \hat{E}_j^{(n)} = \frac{\tilde{M}_n^2 \alpha_j}{\tilde{M}_n^2 - m_j^2}. \quad (4.80)$$

Setzt man dieses Ergebnis in (4.75) ein, so ergibt sich gerade die transzendenten Gleichung (4.67). Schließlich berechnet man aus $E^{(n)} = (1, \hat{E}^{(n)})^T$ den normierten Eigenvektor $E_{norm}^{(n)}$:

$$\begin{aligned} E_{j,norm}^{(n)} &= \frac{E_j^{(n)}}{|E^{(n)}|} = \frac{\tilde{M}_n^2 \alpha_j}{\tilde{M}_n^2 - m_j^2} \left(1 + \sum_{k=1} \left(\frac{\tilde{M}_n^2 \alpha_k}{\tilde{M}_n^2 - m_k^2} \right)^2 \right)^{-1/2} \\ &= \frac{\tilde{M}_n^2 \alpha_j}{\tilde{M}_n^2 - m_j^2} E_{j,norm}^{(0)} \equiv B_{jn}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Mit \tilde{M}_n^2 bezeichnen wir den n -ten Eintrag der Diagonalmatrix \tilde{M}_\pm^2 . Hätte man den Ansatz $E^{(n)} = (-1, -\hat{E}^{(n)})^T$ gewählt, so würde das obige Ergebnis sein Vorzeichen ändern. Die Diagonaleinträge wären demnach negativ. Da diese für Drehmatrizen aber positiv sein

sollen, war der Ansatz gerechtfertigt. Schließlich ist man in der Lage, auch dieses Resultat in Potenzen von $\epsilon = m_W/m_n$ zu entwickeln. Mit (4.68) und (4.69) erhält man

$$\tilde{M}_0^2 = m_W^2 \left(1 - m_W^2 \sum_{n=1} \frac{\alpha_n^2}{m_n^2} \right) \quad (4.82)$$

und somit nach Entwicklung in ϵ bis zur vierten Ordnung beispielsweise

$$B_{00} = E_{0,norm}^{(0)} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=1} \alpha_n^2 \frac{m_W^4}{m_n^4} \quad (4.83)$$

$$B_{j0} = E_{j,norm}^{(0)} = -\alpha_j \frac{m_W^2}{m_j^2} \left(1 + \frac{m_W^2}{m_j^2} - \sum_{n=1} \alpha_n^2 \frac{m_W^2}{m_n^2} \right). \quad (4.84)$$

Man überprüft, dass die führenden Terme in den Entwicklungen von B_{jn} und $B_{jn}^T = B_{nj}$ entgegengesetztes Vorzeichen haben. Setzen wir $O(\epsilon^4) = 0$, so hat die Diagonalisierungsmatrix B eine sehr einfache Gestalt und ist explizit gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \frac{m_W^2}{m_1^2} & \alpha_2 \frac{m_W^2}{m_2^2} & \alpha_3 \frac{m_W^2}{m_3^2} & \dots \\ -\alpha_1 \frac{m_W^2}{m_1^2} & 1 & \frac{\alpha_1 \alpha_2 m_W^2}{m_2^2 - m_1^2} & \frac{\alpha_1 \alpha_3 m_W^2}{m_3^2 - m_1^2} & \dots \\ -\alpha_2 \frac{m_W^2}{m_2^2} & -\frac{\alpha_1 \alpha_2 m_W^2}{m_2^2 - m_1^2} & 1 & \frac{\alpha_2 \alpha_3 m_W^2}{m_3^2 - m_2^2} & \dots \\ -\alpha_3 \frac{m_W^2}{m_3^2} & -\frac{\alpha_1 \alpha_3 m_W^2}{m_3^2 - m_1^2} & -\frac{\alpha_2 \alpha_3 m_W^2}{m_3^2 - m_2^2} & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.85)$$

Schließlich berechnen wir noch die Eigenvektoren der Matrix $M_{\xi^\pm}^2$ (4.58), aus denen sich die Diagonalisierungsmatrix B_ξ ergibt. Zu lösen ist also die Gleichung

$$(M_{\xi^\pm}^2 - \lambda \mathbf{1}) E_\xi^\lambda = 0. \quad (4.86)$$

Der Ansatz $E_\xi^\lambda = (\pm 1, \pm \hat{E}_\xi^\lambda)$ liefert

$$\pm m_W^2 \left(\sum_{j=0} \alpha_j^2 - \lambda - \sum_{j=1} \alpha_j \frac{m_j}{m_W} \hat{E}_{\xi j}^\lambda \right) = 0, \quad (4.87)$$

$$\begin{pmatrix} m_1^2 - \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & m_2^2 - \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & m_3^2 - \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \hat{E}_{\xi j}^\lambda = m_W \begin{pmatrix} \alpha_1 m_1 \\ \alpha_2 m_2 \\ \alpha_3 m_3 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (4.88)$$

Die Anwendung der Cramerschen Regel ergibt

$$\hat{E}_{\xi j}^\lambda = \frac{m_W m_j \alpha_j}{m_j^2 - \lambda} \quad \text{bzw.} \quad \hat{E}_{\xi j}^{(n)} = \frac{m_W m_j \alpha_j}{m_j^2 - \tilde{M}_n^2}. \quad (4.89)$$

Hierbei wurde bereits ausgenutzt, dass $\tilde{M}_\pm^2 = \tilde{M}_{\xi^\pm}^2$ gilt. Setzt man dieses Ergebnis in (4.87) ein, erhält man wiederum die Bestimmungsgleichung (4.67) für die Eigenwerte. Wir wählen nun $E_\xi^{(n)} = (1, \hat{E}_\xi^{(n)})$ für $n = 0$ und $E_\xi^{(n)} = (-1, -\hat{E}_\xi^{(n)})$ für $n \geq 1$. Diese Wahl garantiert einerseits ein positives Vorzeichen der führenden Terme der Diagonaleinträge und sorgt andererseits für das erwünschte relative Vorzeichen bezüglich der Nichtdiagonalelemente. Wir erhalten somit

$$E_{\xi_0, \text{norm}}^{(0)} = \left(1 + \sum_{k=1} \left(\frac{m_W m_k \alpha_k}{m_k^2 - \tilde{M}_0^2} \right)^2 \right)^{-1/2}, \quad (4.90)$$

$$E_{\xi_j, \text{norm}}^{(0)} = \frac{m_W m_j \alpha_j}{m_j^2 - \tilde{M}_0^2} E_{\xi_0, \text{norm}}^{(0)}, \quad (4.91)$$

$$E_{\xi_0, \text{norm}}^{(n)} = - \left(1 + \sum_{k=1} \left(\frac{m_W m_k \alpha_k}{m_k^2 - \tilde{M}_0^2} \right)^2 \right)^{-1/2}, \quad (4.92)$$

$$E_{\xi_j, \text{norm}}^{(n)} = \frac{m_W m_j \alpha_j}{m_j^2 - \tilde{M}_n^2} E_{\xi_0, \text{norm}}^{(n)}, \quad n \geq 1. \quad (4.93)$$

Setzen wir wiederum $O(\epsilon^4) = 0$, erhalten wir hieraus

$$B_\xi = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} m_W^2 \sum_{n=1} \frac{\alpha_n^2}{m_n^2} & -\alpha_1 \frac{m_W}{m_1} - b_{01} & -\alpha_2 \frac{m_W}{m_2} - b_{02} & -\alpha_3 \frac{m_W}{m_3} - b_{03} & \cdots \\ \alpha_1 \frac{m_W}{m_1} + b_{10} & 1 - \frac{1}{2} m_W^2 \frac{\alpha_1^2}{m_1^2} & -\frac{m_1}{m_2} \frac{\alpha_1 \alpha_2 m_W^2}{m_1^2 - m_2^2} & -\frac{m_1}{m_2} \frac{\alpha_1 \alpha_2 m_W^2}{m_1^2 - m_2^2} & \cdots \\ \alpha_2 \frac{m_W}{m_2} + b_{20} & \frac{m_2}{m_1} \frac{\alpha_1 \alpha_2 m_W^2}{m_1^2 - m_2^2} & 1 - \frac{1}{2} m_W^2 \frac{\alpha_2^2}{m_2^2} & -\frac{m_2}{m_3} \frac{\alpha_2 \alpha_3 m_W^2}{m_2^2 - m_3^2} & \cdots \\ \alpha_3 \frac{m_W}{m_3} + b_{30} & \frac{m_3}{m_1} \frac{\alpha_1 \alpha_3 m_W^2}{m_1^2 - m_3^2} & \frac{m_3}{m_2} \frac{\alpha_2 \alpha_3 m_W^2}{m_2^2 - m_3^2} & 1 - \frac{1}{2} m_W^2 \frac{\alpha_3^2}{m_3^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (4.94)$$

wobei

$$b_{0n} = -\frac{1}{2} \alpha_n^3 \frac{m_W^3}{m_n^3} + \alpha_n \left(\frac{m_W^3}{m_n^3} + \frac{m_W}{m_n} \sum_{k \neq n} \frac{\alpha_k^2 m_W^2}{m_n^2 - m_k^2} \right), \quad (4.95)$$

$$b_{n0} = -\frac{1}{2} \alpha_n^3 \frac{m_W^3}{m_n^3} + \alpha_n \left(\frac{m_W^3}{m_n^3} - \frac{1}{2} \frac{m_W}{m_n} \sum_{k \neq n} \frac{\alpha_k^2 m_W^2}{m_k^2} \right). \quad (4.96)$$

Man bestätigt, dass die expliziten Ausdrücke für B und B_ξ die Matrizen (4.59) und (4.58) in dritter Ordnung diagonalisieren.

4.4 Feynmanregeln

4.4.1 Propagatoren

Wir beginnen mit der Herleitung der Propagatoren. Sei $A_{\mu,5}^{'(n)}$ die n -te Mode des Masseneigenzustandes eines beliebiges Spin-1/0-Feldes, also W^\pm , Z , A oder G^a . Es gilt daher

$$A_\mu^{'(n)} = (B^T A_\mu)^{(n)}, \quad (4.97)$$

$$A_5^{'(n)} = (B_\xi^T A_5)^{(n)}, \quad (4.98)$$

wobei $A_5^{'(0)} = \varphi'$. Für Photonen und Gluonen ist die Massenmatrix von vornherein diagonal, wobei der nullte Eintrag verschwindet und der n -te Eintrag gerade gleich der KK-Masse m_n ist. Das zugehörige B bzw. B_ξ entspricht einer Einheitsmatrix und es gilt $A_{\mu,5}^{'(n)} = A_{\mu,5}^{(n)}$. Wir betrachten die bezüglich der KK-Moden diagonalisierte Wirkung

$$\begin{aligned} S_{4D} = & \frac{1}{2} \int d^4x \left(\sum_n A_\mu^{'(n)} \left(\partial^2 g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu + \tilde{M}_n^2 g^{\mu\nu} \right) A_\nu^{'(n)} \right. \\ & \left. - \sum_{n=1} A_5^{'(n)} (\partial^2 + \xi \tilde{M}_n^2) A_5^{'(n)} - \varphi' (\partial^2 + \xi \tilde{M}_0^2) \varphi' \right) + S_{FP} \end{aligned} \quad (4.99)$$

und wechseln von der Orts- in die Impulsraumdarstellung. Demnach ist ∂^2 durch $-k^2$ und $\partial^\mu \partial^\nu$ durch $-k^\mu k^\nu$ zu ersetzen. Definieren wir

$$\tilde{K}^{(n)\mu\nu} = -k^2 g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\mu k^\nu + \tilde{M}_n^2 g^{\mu\nu},$$

so erhalten wir den Propagator $D_{\nu\sigma}^{(n)}(k)$ für das Eichfeld $A_\mu^{'(n)}$ aus der Forderung

$$\tilde{K}^{(n)\mu\nu} \tilde{D}_{\nu\sigma}^{(n)}(k) = i\delta_\nu^\mu. \quad (4.100)$$

Der Ansatz

$$\tilde{D}_{\nu\sigma}^{(n)}(k) = ag_{\nu\sigma} + bk_\nu k_\sigma \quad (4.101)$$

liefert schließlich

$$\mu \bullet \sim \sim \sim \sim \sim \sim \bullet \nu \quad k$$

$$D^{(n)\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 - \tilde{M}_n^2} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi \tilde{M}_n^2} \right) \quad (4.102)$$

$$= \frac{-i}{k^2 - \tilde{M}_n^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{\tilde{M}_n^2} \right) + \frac{-i}{k^2 - \xi \tilde{M}_n^2} \frac{k^\mu k^\nu}{\tilde{M}_n^2}. \quad (4.103)$$

Die Masseneigenwerte \tilde{M}_n^2 ergeben sich im Falle der W^\pm und Z -Bosonen aus der transzenten Gleichung (4.67), für Photonen und Gluonen sind sie direkt aus der Massenmatrix abzulesen. Die Herleitung der Propagatoren für $A_5^{(n)}$ bzw. φ' läuft analog. Wir finden

$$\mu \bullet - - \xrightarrow{k} \nu$$

$$D_\varphi^{(0)}(k) = \frac{i}{k^2 - \xi \tilde{M}_0^2}, \quad (4.104)$$

$$D_5^{(n)}(k) = \frac{i}{k^2 - \xi \tilde{M}_n^2}. \quad (4.105)$$

Man sieht an dieser Stelle sehr schön, dass die Feldkomponenten $A_5^{(n)}$ sich wie Goldstonebosonen verhalten.

4.4.2 Vertizes der nichtabelschen Eichtheorie

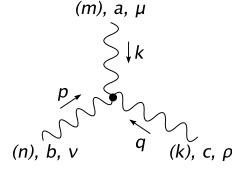
Die Feynmanregeln für die Kopplung der Eichbosonen untereinander sowie die Kopplung an Goldstonebosonen im elektroschwachen Sektor sind im Wesentlichen die gleichen wie im Standardmodell. Neu im Repertoire sind jedoch die Kopplungen an die Spin-0-Feldkomponente $A_5^{(n)}$. Der Einfachheit halber betrachten wir Gluonen. Wir rekapitulieren zunächst die Kopplungsterme der 5D-Wirkung:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= -\frac{1}{2} \int d\phi \sqrt{-G} G^{KM} G^{LN} \\ &\quad \left\{ g_5 f^{abc} A_M^b A_N^c (\partial_K A_L^a - \partial_L A_K^a) + \frac{1}{2} g_5^2 f^{abc} f^{ade} A_M^b A_N^c A_K^d A_L^e \right\} \\ &= \int d\phi \sqrt{-G} \left\{ -\frac{g_5}{2} f^{abc} \left(A_m^a A_n^b (\partial^m A^{cn} - \partial^n A^{cm}) \right. \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-2\sigma}}{r^2} (\partial_m A_5^a - \partial_a A_m^a) A^{bm} A_5^c - \frac{e^{-2\sigma}}{r^2} (\partial_\phi A_n^a - \partial_n A_5^a) A_5^b A^{cn} \right) \\ &\quad \left. - \frac{g_5^2}{4} f^{abc} f^{ade} \left(A_m^b A_n^c A^{dm} A^{en} - \frac{e^{-2\sigma}}{r^2} A_m^b A_5^c A^{dm} A_5^e - \frac{e^{-2\sigma}}{r^2} A_5^b A_n^c A_5^d A^{en} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.106)$$

Aufgrund der Antisymmetrie von f^{abc} und f^{ade} gibt es keine 3- oder 4 A_5 -Vertizes (siehe auch [22]). Als nächstes sind die KK-Zerlegungen der Felder einzusetzen. Im Gluonensektor wird jedoch nicht über die Moden summiert, da die Massenmatrix von vornherein diagonal ist und somit keine Mischungen auftreten. Im elektroschwachen Sektor hingegen werden die

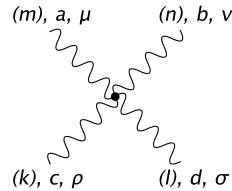
Mischungsmatrizen B in den Vertexregeln auftauchen. Hier ist dann jeweils eine Summation über alle Moden durchzuführen.

Mit $g_5 = \sqrt{2\pi r} g_4$ findet man, dass die Feynmanregeln für 3- und 4-Gluonvertizes die des Standardmodells sind, welche um entsprechende Überlappintegrale zu ergänzen sind. Der 3-Gluonen-Vertex lautet



$$g_4 f^{abc} [g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu] \sqrt{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \chi^{(m)}(\phi) \chi^{(n)}(\phi) \chi^{(k)}(\phi), \quad (4.107)$$

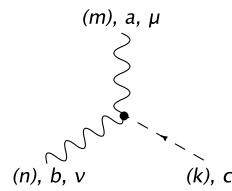
der 4-Gluonen-Vertex ist durch



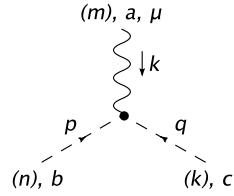
$$-ig_4^2 N_{abcd}^{\mu\nu,\rho\sigma} 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \chi^{(m)}(\phi) \chi^{(n)}(\phi) \chi^{(k)}(\phi) \chi^{(l)}(\phi) \quad (4.108)$$

$$N_{abcd}^{\mu\nu,\rho\sigma} = f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})$$

gegeben. Schließlich erhalten wir noch Vertizes für die Kopplungen $A^{(m)\mu} A^{(n)\nu} A_5^{(k)}$ und $A^{(m)\mu} A_5^{(n)} A_5^{(k)}$

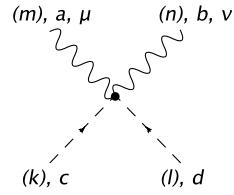


$$g_4 f^{abc} g^{\mu\nu} \frac{\sqrt{2\pi}}{m_k} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \frac{e^{-2\sigma}}{r^2} ((\partial_\phi \chi^{(m)}) \chi^{(n)} - \chi^{(m)} (\partial_\phi \chi^{(n)})) \partial_\phi \chi^{(k)}, \quad (4.109)$$



$$g_4 f^{abc} (p^\mu - q^\mu) \frac{\sqrt{2\pi}}{m_m m_n} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \frac{e^{-2\sigma}}{r^2} \chi^{(m)} \partial_\phi \chi^{(n)} \partial_\phi \chi^{(k)}, \quad (4.110)$$

sowie für $A^{(m)\mu} A^{(n)\nu} A_5^{(k)} A_5^{(l)}$



$$g_4^2 (f^{eab} f^{ecd} + f^{ead} f^{ecb}) g^{\mu\nu} \frac{2\pi}{m_k m_l} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \frac{e^{-2\sigma}}{r^2} \chi^{(m)} \chi^{(n)} \partial_\phi \chi^{(k)} \partial_\phi \chi^{(l)}. \quad (4.111)$$

Bei der Herleitung der letzten Regel hat man die Symmetrie der entsprechenden Terme in der Wirkung unter Umbenennung der Farbindizes benutzt. Man überprüft, dass die Ausdrücke (4.109) und (4.110) in Analogie zu (4.107) Massendimension Eins haben und der Ausdruck (4.111) die Massendimension Null.

Die Herleitung aller Feynmanregeln des elektroschwachen Sektors ist sehr umfangreich, folgt aber demselben Rezept: Man nehme die Feynmanregel des Standardmodells¹, ergänze sie um einen Faktor $\sqrt{2\pi}$ für kubische bzw. 2π für quartische Wechselwirkung und notiere das entsprechende Überlappintegral, welches aus der Kaluza-Klein-Zerlegung der Felder folgt. Des Weiteren kann man jedes Eichboson durch seine 5. Komponente ersetzen, es sei denn, der resultierende Graph verschwindet aus Symmetriegründen (siehe oben). In diesem Fall wird der Integrand um einen Faktor $e^{-2\sigma}/r^2$ ergänzt. Für den elektroschwachen Sektor muss man nun zusätzlich die Mischung der KK-Moden berücksichtigen, d.h. man erweitert die Vertexregel um die entsprechenden Einträge der Drehmatrizen B bzw. B_ξ und summiert über alle Moden.

¹Eine vollständige Auflistung findet sich in [38].

4.4.3 Vertizes der Eichkopplungen

Zum Schluss dieses Kapitels sollen die Feynmanregeln für die Eichkopplung an Fermionen angegeben werden. Da diese Überlappintegrale der Fermion- und Bosonprofile enthalten werden, führen wir für Letztere ebenfalls den Koordinatenwechsel $\phi \rightarrow t = \epsilon e^{\sigma(\phi)}$ aus Kapitel (3.1) ein. Die Gleichung (2.82) geht somit über in

$$\chi^{(n)}(t) = \frac{t}{\epsilon N_n} (J_1(x_n t) + \beta_n Y_1(x_n t)). \quad (4.112)$$

Vernachlässigen wir den zweiten Term (für höhere Moden ist dies sicherlich zulässig, da $\beta_n \ll 1$), so ergibt sich für die Normierungskonstante zu

$$N^2 \approx 2 \int_0^\pi d\phi e^{2\sigma} J_1\left(\frac{m_n}{k} e^\sigma\right)^2 \approx 2 \int_0^1 \frac{dt}{krt} \left(\frac{t}{\epsilon}\right)^2 J_1(x_n t)^2 = \frac{1}{kr\epsilon^2} J_2(x_n)^2. \quad (4.113)$$

Hierbei wurde im letzten Schritt Gl. (3.21) benutzt. Somit gilt

$$\chi^{(n)}(t) \approx \sqrt{kr} t \frac{J_1(x_n t)}{J_2(x_n)}. \quad (4.114)$$

Die Vertexregeln (4.107) bis (4.111) lassen sich mit $d\phi = (krt)^{-1} dt$ problemlos auf die neue Variable umschreiben, indem man die Integration auf den halben Orbifold ($\phi \in [0, \pi]$) einschränkt und mit 2 multipliziert. Bezuglich der Quarkfelder führen wir die Notation

$$q^{(n)} = (q^{(0)}, q^{(1)}, q^{c(1)}, q^{(2)}, q^{c(2)}, \dots)^T \quad (4.115)$$

ein. Hierbei ist jeder Eintrag von q ein Dreervektor im Generationenraum. Wir kennzeichnen dies durch einen zusätzlichen Index i . Es ist also beispielsweise $q_i^{(4)}$ die zweite KK-Mode des Singlett-Quarks q_i^c . Dieses kann aufgrund des zweiten Satzes an Fermionen sowohl rechtshändig, als auch linkshändig sein. Den Farbindex haben wir weggelassen. Leptonische Felder notiert man auf die gleiche Art und Weise. Die effektiv vierdimensionale Lagrangedichte für die Kopplung an Photonen lautet

$$\mathcal{L}_{int} = ig_4 \sqrt{2\pi} \bar{q}_{L,R}^{(\tilde{m}) i} U_{L,R}^{\dagger(\tilde{m}, m)}(x) \gamma^\mu I_{L,R}^{(m, n, k)} A_\mu^{(k)}(x) U_{L,R}^{(n, \tilde{n}) j} \bar{q}_{L,R}^{(\tilde{n}) j}(x), \quad (4.116)$$

wobei über doppelte Indizes summiert wird,

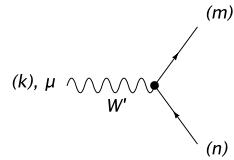
$$I_{L,R}^{(m, n, k)} = \int_{-\pi}^\pi d\phi e^\sigma \hat{f}_{L,R}^{(m)}(\phi) \hat{f}_{L,R}^{(n)}(\phi) \chi^{(k)}(\phi) \quad (4.117)$$

das Überlappintegral bezeichnet und die gestrichenen Spinooren für Masseneigenzustände stehen. Wechseln wir in die t-Notation, so erhalten wir

$$I_{L,R}^{(m, n, k)} = 2 \int_0^1 dt f_{L,R}^{(m)}(t) f_{L,R}^{(n)}(t) \chi^{(k)}(t). \quad (4.118)$$

An dieser Stelle muss man jedoch vorsichtig sein. Der Ausdruck (4.117) verschwindet, wenn der Integrand negative Z_2 -Parität besitzt. Beschränkt man hingegen die Integration auf den halben Orbifold, so ist das Ergebnis ungleich Null. Solche Terme sind dann in den neuen Koordinaten von Hand Null zu setzen.

Im Falle eines Gluonenaustauschs benötigt man in der obigen Lagrangedichte zusätzliche Farbindizes und einen Generator der $SU(3)$ t_a , $a = 1\dots 8$. Die Diagonalisierungsmatrizen $U_{L,R}$ sind in Kapitel 3 gegeben. Im Falle eines W-Bosonen-Austauschs gibt es zwei Verschiedene, eine für Quarks vom Typ Up, eine für Quarks vom Typ Down. Des Weiteren benötigen wir nun die Mischungsmatrix B (4.85) für massive Eichbosonen. Die allg. Vertexregel für die Eichkopplung an ein (KK-)W-Boson lautet



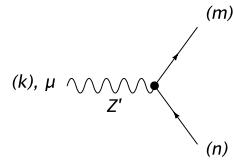
$$i \frac{g_W \sqrt{2\pi}}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) G_W^{(m,n,k)}, \quad (4.119)$$

$$G_W^{(m,n,k)} = U_L^{\dagger(m,\tilde{m})} I_{ll}^{(\tilde{m},\tilde{n},\tilde{k})} D_L^{(\tilde{n},n)} B^{(\tilde{k},k)}. \quad (4.120)$$

Für Z Bosonen muss man bei der Herleitung der Diagonalisierungsmatrix B die W-Masse m_W durch $m_W / \cos \theta_W$ ersetzen. Die Dirac-Struktur der Kopplung lautet

$$\gamma^\mu (g_V + g_A \gamma^5) = \frac{1}{2} (g_V \gamma^\mu ((1 + \gamma^5) + (1 - \gamma^5)) + g_A \gamma^\mu ((1 + \gamma^5) - (1 - \gamma^5))). \quad (4.121)$$

Somit finden wir für den Z-Vertex mit $g_V = \frac{1}{2} T_3^f - Q_f \sin^2 \theta_w$, $g_A = -\frac{1}{2} T_3^f$



$$i \frac{g_W \sqrt{2\pi}}{2 \cos \theta_w} \gamma^\mu ((g_V + g_A)(1 + \gamma^5) G_{ZR u,d ij}^{(n,m,k)} + (g_V - g_A)(1 - \gamma^5) G_{ZL u,d ij}^{(m,n,k)}), \quad (4.122)$$

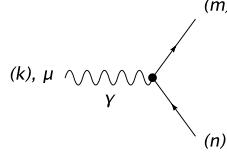
$$G_{ZL u ij}^{(m,n,k)} = U_L^{\dagger(m,\tilde{m})} I_{ll}^{(\tilde{m},\tilde{n},\tilde{k})} U_L^{(\tilde{n},n)} B_Z^{(\tilde{k},k)},$$

$$G_{ZL d ij}^{(m,n,k)} = D_L^{\dagger(m,\tilde{m})} I_{ll}^{(\tilde{m},\tilde{n},\tilde{k})} D_L^{(\tilde{n},n)} B_Z^{(\tilde{k},k)},$$

$$G_{ZR u ij}^{(m,n,k)} = U_R^{\dagger(m,\tilde{m})} I_{ll}^{(\tilde{m},\tilde{n},\tilde{k})} U_R^{(\tilde{n},n)} B_Z^{(\tilde{k},k)},$$

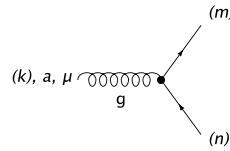
$$G_{ZR d ij}^{(m,n,k)} = D_R^{\dagger(m,\tilde{m})} I_{ll}^{(\tilde{m},\tilde{n},\tilde{k})} D_R^{(\tilde{n},n)} B_Z^{(\tilde{k},k)}. \quad (4.123)$$

Die Kopplungen an Photonen sind durch



$$ie \gamma^\mu \sqrt{2\pi} G_{L,R u,d ij}^{(m,n,k)}, \quad (4.124)$$

die Kopplung an Gluonen durch



$$ig_s t_a \gamma^\mu \sqrt{2\pi} G_{L,R u,d ij}^{(m,n,k)} \quad (4.125)$$

gegeben, wobei man B_Z in $G_{L,R}$ durch **1** ersetzt. Für den Austausch von Photon- und Gluon-Nullmoden kürzen sich die zugehörigen Überlappintegrale unter Verwendung von Gl. (2.78) und der Orthonormierung (2.75) mit dem Vorfaktor $\sqrt{2\pi}$ und man erhält die Vertexregeln des Standardmodells. Im Folgenden wollen wir exemplarisch die Kopplung von zwei Fermion-Nullmoden an eine beliebige Eichbosonmode durch Einsetzen der Diagonalisierungsmatrizen konkret ausarbeiten. Für Photonen bzw. Gluonen erhält man bei gegebener Chiralität

$$\begin{aligned} G_{ij}^{(0,0,k)} &= (U_{00}^\dagger)_{il} I_{ll}^{(0,0,k)} (U_{00})_{lj} + \sum_{m,n=1}^{\infty} (U_{00}^\dagger)_{il} (M_{0,m} M_{Um}^{-1})_{gl} I_{ll}^{(2m,2n,k)} (M_{0,n} M_{Un}^{-1})_{lh}^\dagger (U_{00})_{hj} \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \left((U_{00}^\dagger)_{ig} (M_{n,0} M_{Qn}^{-1})_{gl} I_{ll}^{(0,2n-1,k)} (M_{0,0} M_{Qn}^{-1})_{lh}^\dagger (U_{00})_{hj} + h.c. \right). \end{aligned} \quad (4.126)$$

Hierbei wird über mehrfach vorkommende Indizes summiert und berücksichtigt, dass Terme $\sim I_{L,R ll}^{(2m,2n+1,k)}$ bzw. $\sim I_{L,R ll}^{(2m+1,2n,k)}$ aufgrund der Z_2 -Symmetrie verschwinden. Für den W-Bosonenaustausch kommt nur die Kopplung an linkshändige $SU(2)$ -Dubletts in Frage. Dies sind Terme mit einem ungeraden Index n bzw. m . Der zweite Term im obigen Ausdruck wird daher für den geladenen Strom verschwinden. Für das Überlappintegral $I_{L,R ii}^{(0,0,k)}$ im

führenden Term sind wir in der Lage, einen analytischen Ausdruck anzugeben. Mit den Gleichungen (3.6) und (4.114) erhält man

$$I_{L,R}^{(0,0,k)} \approx \frac{\sqrt{kr}}{J_2(x_n)} \frac{1 \pm 2c_{L,R}}{1 - e^{1 \pm 2c_{L,R}}} \int_0^1 dt t^{1 \pm 2c_{L,R}} J_1(x_n t) \quad (4.127)$$

und somit

$$I_L^{(0,0,k)} = \frac{\sqrt{kr}}{J_2(x_n)} \frac{1 + 2c_L}{2(3 + 2c_L)} {}_1F_2\left[\frac{3}{2} + c_L ; 2, \frac{5}{2} + c_L ; -\frac{x_n^2}{4}\right] \text{ für } c_L > -\frac{1}{2}, \quad (4.128)$$

$$I_R^{(0,0,k)} = \frac{\sqrt{kr}}{J_2(x_n)} \frac{1 - 2c_R}{2(1 + 2c_R)} {}_1F_2\left[\frac{1}{2} + c_R ; 2, \frac{3}{2} + c_R ; -\frac{x_n^2}{4}\right] \text{ für } -\frac{1}{2} < c_R < \frac{1}{2}. \quad (4.129)$$

Für $c_L < -\frac{1}{2}$ bzw. $c_R > \frac{1}{2}$ geht $I_L^{(0,0,k)}$ bzw. $I_R^{(0,0,k)}$ gegen Null. Die anderen Überlappintegrale lassen sich leider nicht in solch einer geschlossenen Form angeben.

4.5 Bemerkungen

Aus den oben hergeleiteten Feynmanregeln folgen einige interessante neue Effekte. Man geht davon aus, dass verschiedene Fermionen q_i bzw. l_i unterschiedlich im Bulk lokalisiert sind, und somit unterschiedliche Überlappe mit dem Higgsfeld besitzen. So sind die leichten Fermionen eher bei der IR-Brane, die schweren eher bei der UV-Brane anzutreffen. Wir diskutieren kurz zwei Konsequenzen dieser Annahme.

Verschiedene Massenparameter c_i führen zu verschiedenen Überlappintegralen in den Vertexregeln. Die Vertexregeln (4.125), (4.124) und (4.122) induzieren flavorverletzende neutrale Ströme (FCNC) bereits auf Baumgraphenniveau durch den Austausch von KK-Gluonen, KK-Photonen, Z- und KK-Z-Bosonen². Diese stehen in Konkurrenz zu den Box- und Penguin-Diagrammen des Standardmodells³, die ihrerseits im RS-Modell zusätzlich mit ausschließlich neutralen Eichbosonen konstruiert werden können. Der Beitrag dieser neuen Physik ist, da es sich effektiv um 4-Fermion-Prozesse handelt, mit dem inversen Quadrat der Kaluza-Klein-Massen unterdrückt. Da er aber bereits in erster Ordnung der Störungstheorie auftritt, sollte er, falls es diese Effekte gibt, im Rahmen von Präzessionsmessungen zu erfassen sein.

Die Vertexregel für den geladenen Strom enthält den Term (4.120), der als verallgemeinerte, unendlich dimensionale Version der CKM-Matrix verstanden werden kann. Aufgrund

²Für Eichbosonen des Standardmodells bzw. Nullmoden mit flachen 5D-Profil gibt es keine solchen Effekte als Folge des GIM-Mechanismus.

³Diese enthalten geladene Eichbosonen.

der nichtuniversellen Kopplung ist diese Matrix nicht unitär, was einige Berechnungen mit Bulk-Fermionen in Schleifen erschwert. Dieses soll am Beispiel des Boxgraphen im nächsten Kapitel demonstriert werden.

Kapitel 5

Eichinvarianz und Modenmischung

In diesem Kapitel sollen einfache Streuprozesse der abgeleiteten 4D-Theorie studiert werden. Insbesondere wollen wir zeigen, wie der Eichparameter ξ in der Berechnung der Amplitude verschwindet. Es wird sich herausstellen, dass die transzendentale Gleichung (4.67) der Schlüssel zum Gelingen dieses Vorhabens ist. Wir werden jedoch die Theorie vereinfachen, indem wir die Fermionen bei $\phi = \pi$ lokalisieren. Dies erspart uns die Berechnung von komplizierten Überlappintegralen. Man muss jedoch die Fermionen über die 5. Dimension normieren. Hierzu reskalieren wir $\psi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{r}} e^{3/2kr\pi} \psi$. Dies bewirkt, dass der kinetische Term in der 4D-Wirkung frei von Warp faktoren ist (man beachte, dass auch das inverse Vielbein einen Faktor $e^{kr\pi}$ liefert). Die Eichbosonen bleiben selbstverständlich im Bulk. Andernfalls hätte man es mit einer trivialen Erweiterung des Standardmodells zu tun.

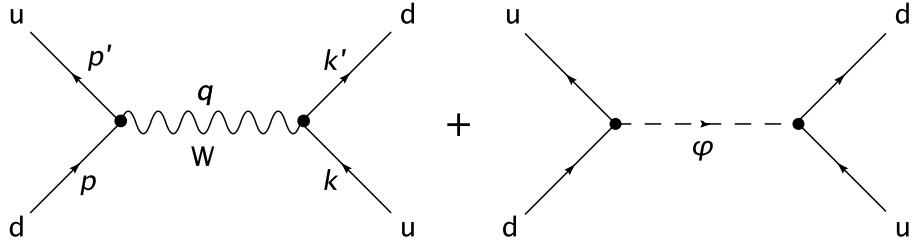
5.1 Eichinvarianz auf Baumgraphenniveau

Gegeben sei die Amplitude eines Streuprozesses, bei dem ein W^- zwischen den beteiligten Quarks ausgetauscht wird (siehe Abb. 5.1). Wir erinnern an dieser Stelle noch einmal daran, dass der Zustand der freien Propagation durch eine Überlagerung aller Moden der Eigenzustände der Wechselwirkung gegeben ist. Es werden daher in jedem Vertex die Einträge B_{n0} der Diagonalisierungsmatrix auftreten, welche durch $E_n^{(0)}$ (siehe Gl. (4.81)) gegeben sind. Der Propagator (4.103) generiert einen von ξ abhängigen Term in der Amplitude:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_W^{(0)}(\xi) &= -i \frac{g_5^2}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \bar{d}_a(k') \gamma_\mu \frac{1 - \gamma^5}{2} u_b(k) \frac{q^\mu q^\nu}{(q^2 - \xi \tilde{M}_0^2) \tilde{M}_0^2} \bar{u}_c(p') \gamma_\nu \frac{1 - \gamma^5}{2} d_d(p) \\ &\quad \cdot \sum_{n,n'} B_{n0} \chi^{(n)}(\pi) B_{n'0} \chi^{(n')}(\pi) \cdot V_{cd}(V^\dagger)_{ba}. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen a, b, c, d Generationenindizes. Es ist

$$\begin{aligned} q^\nu \bar{u}(p') \gamma_\nu (1 - \gamma^5) d(p) &= \bar{u}(p') ((p' - p') - (p' - p') \gamma^5) d(p) \\ &= \bar{u}(m_d - m_u) d + \bar{u}(m_u + m_d) \gamma^5 d \end{aligned} \tag{5.1}$$

Abbildung 5.1: Kompensation der ξ -Abhangigkeit auf Tree-Level

und somit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_W^{(0)}(\xi) = & \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \frac{-i2\pi g_4^2}{(q^2 - \xi \tilde{M}_0^2)\tilde{M}_0^2} V_{cd} V_{ab}^* \sum_{n,n'} B_{n0} \chi^{(n)}(\pi) B_{n'0} \chi^{(n')}(\pi) \\ & \cdot ((m_{u,b} - m_{d,a}) \bar{d}_a u_b + (m_{u,b} + m_{d,a}) \bar{d}_a \gamma^5 u_b) \\ & \cdot ((m_{d,d} - m_{u,c}) \bar{u}_c d_d + (m_{u,c} + m_{d,d}) \bar{u}_c \gamma^5 d_d). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Da wir die Fermionen auf die Brane gesetzt haben, gibt es keine Kopplungen mit den $A_5^{(n)}$ -Beimischungen zu φ . Des Weiteren sind die Feynmanregeln bis auf einen Faktor B_{00} und die Massenkorrektur diejenigen des Standardmodells (nachzuschlagen in [38]). Vergleicht man

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\varphi^-} = & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{v^2} \frac{-i}{q^2 - \xi \tilde{M}_0^2} \bar{d}_a (m_{d,a}(1 - \gamma^5) - m_{u,b}(1 + \gamma^5)) u_b \\ & \cdot \bar{u}_c (m_{u,c}(1 - \gamma^5) - m_{d,d}(1 + \gamma^5)) d_d V_{cd} V_{ab}^* B_{\xi 00}^2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

mit (5.2), so findet man

$$\mathcal{M}_W^{(0)} + \mathcal{M}_{\varphi^-} = 0 \quad (5.4)$$

falls

$$\frac{2\pi g_4^2}{\tilde{M}_0^2} \sum_{n,n'} B_{n0} \chi^{(n)}(\pi) B_{n'0} \chi^{(n')}(\pi) = \frac{4}{v^2} B_{\xi 00}^2. \quad (5.5)$$

Mit $g_4 v = 2 m_W$, $\alpha_n = \sqrt{2\pi} \chi^{(n)}(\pi)$ und $\lambda_k = \tilde{M}_k^2$ vereinfacht man die obige Bedingung zu

$$\frac{m_W}{\sqrt{\lambda_0}} \sum_{n=0} B_{n0} \alpha_n = B_{\xi 00}. \quad (5.6)$$

Auf die gleiche Art und Weise berechnet man die Amplituden $\mathcal{M}_W^{(k)}$ und $\mathcal{M}_5^{(k)}$, wobei $k \geq 1$. Hierbei koppeln die $W_5^{(n)}$ lediglich durch ihre φ -Beimischung. Die resultierende Bedingung lautet

$$\frac{m_W}{\sqrt{\lambda_k}} \sum_{n=0} B_{nk} \alpha_n = B_{\xi 0k}. \quad (5.7)$$

Man sieht, dass die obige Bedingung (5.6) mit (5.7) identisch ist, wenn man $k = 0$ setzt. Mit $E_{n,norm}^{(k)} \equiv E_n^{(k)} = B_{nk}$ gilt also zu zeigen, dass

$$\frac{m_W}{\sqrt{\lambda_k}} \sum_{n=0} E_n^{(k)} \alpha_n = E_{\xi_0}^{(k)} \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.8)$$

erfüllt ist. Einsetzen von (4.81) und (4.92) liefert

$$\frac{m_W}{\sqrt{\lambda_k}} \sum_{n=0} \frac{\lambda_k \alpha_n^2}{\lambda_k - m_n^2} \left(1 + \sum_{l=1} \left(\frac{\lambda_k \alpha_l}{\lambda_k - m_l^2} \right)^2 \right)^{-1/2} = -(-)^{\delta_{k0}} \left(1 + \sum_{l=1} \left(\frac{m_W m_l \alpha_l}{\lambda_k - m_l^2} \right)^2 \right)^{-1/2}. \quad (5.9)$$

Betrachten wir nun die linke Seite der Gleichung. Es ist

$$\sum_{n=0} \frac{\lambda_k \alpha_n^2}{\lambda_k - m_n^2} = 1 + \sum_{n=1} \frac{\lambda_k \alpha_n^2}{\lambda_k - m_n^2} = \frac{\lambda_k}{m_W^2}. \quad (5.10)$$

Hierbei haben wir Gebrauch von Gl. (4.67) gemacht. Setzen wir dieses in (5.9) ein, quadrieren und bilden die Inverse, so erhalten wir

$$\frac{m_W^2}{\lambda_k} \left(1 + \sum_{l=1} \left(\frac{\lambda_k \alpha_l}{\lambda_k - m_l^2} \right)^2 \right) = 1 + m_W^2 \sum_{l=1} \left(\frac{m_l \alpha_l}{\lambda_k - m_l^2} \right)^2 \quad (5.11)$$

bzw.

$$\frac{m_W^2}{\lambda_k} - 1 + m_W^2 \sum_{l=1} \left(\frac{\alpha_l^2 (\lambda_k - m_l^2)}{(\lambda_k - m_l^2)^2} \right) = 0. \quad (5.12)$$

Dies entspricht jedoch gerade der transzenden Gleichung (4.67) und die Bedingung (5.8) ist erfüllt. In der Tat geschieht die Kompensation der Beiträge Ordnung für Ordnung. Hierzu blicken wir zurück auf Gl. (5.5). Entwickeln wir $\tilde{M}_0^{-2} = \lambda_0^{-1}$ unter Verwendung von (4.68), so ergibt sich

$$\frac{1}{\tilde{M}_0^2} = \frac{1}{m_W^2} \left(1 + \sum_j \frac{m_W^2 \alpha_j^2}{m_j^2} + O(\epsilon^4) \right) = \frac{1}{g^2 v^2} \left(1 + \sum_j \frac{m_W^2 \alpha_j^2}{m_j^2} + O(\epsilon^4) \right). \quad (5.13)$$

Setzen wir ferner die entsprechenden Einträge aus (4.85) und (4.94) in die linke Seite der Bedingung (5.5) ein, beobachten wir in der Tat, dass sich die Beiträge in gegebener Ordnung wegheben:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \sum_j \alpha_j^2 \frac{m_W^2}{m_j^2} \right) \left(1 - \sum_n \alpha_n^2 \frac{m_W^2}{m_n^2} \right) \left(1 - \sum_{n'} \alpha_{n'}^2 \frac{m_W^2}{m_{n'}^2} \right) - \left(1 - \frac{1}{2} m_W^2 \sum_n \frac{\alpha_n^2}{m_n^2} \right)^2 \\ & \left(1 + \sum_n \alpha_n^2 \frac{m_W^2}{m_n^2} \right) \left(1 - 2 \sum_n \alpha_n^2 \frac{m_W^2}{m_n^2} \right) - \left(1 - m_W^2 \sum_n \frac{\alpha_n^2}{m_n^2} \right) + O(\epsilon^4) \\ & = 0 + O(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Für den Austausch von KK-Eichbosonen ist die Bedingung

$$\frac{2\pi g_4^2}{\tilde{M}_k^2} \sum_{n,n'} B_{nk}\chi^{(n)}(\pi) B_{n'k}\chi^{(n')}(\pi) - \frac{1}{v^2} B_{\xi 0k}^2 = 0 \quad (5.15)$$

zu erfüllen. Wir entwickeln

$$\frac{1}{\tilde{M}_k^2} = \frac{1}{m_k^2 + \alpha_k^2 m_W^2 + \dots} = \frac{1}{m_k^2} \left(1 - \alpha_k^2 \frac{m_W^2}{m_k^2} + O(\epsilon^4) \right) \quad (5.16)$$

und erhalten nach Einsetzen der Komponenten aus den Diagonalisierungsmatrizen

$$\frac{m_W^2}{m_k^2} \alpha_k^2 - \alpha_k^2 \frac{m_W^2}{m_k^2} = 0 + O(\epsilon^4). \quad (5.17)$$

Zuguterletzt wollen wir noch einen Schleifenprozess studieren, nämlich den Boxgraphen.

5.2 Boxgraph

Im Standardmodell liefert der Boxgraph mit zwei W-Bosonen beispielsweise den führenden Beitrag zur $B\bar{B}$ -Mischung. Wir wollen nun zum Vergleich die Eichinvarianz für den Ausstausch von Nullmoden (Masseneigenzustand) prüfen. Diese entsprechen aufgrund der Mischung mit den KK-Anregungen nicht dem SM-W-Boson. Da wir in führender Ordnung $1/M_{KK}^2$ rechnen, dürfen wir alle äußeren Impulse Null setzen um somit die Amplitude zu vereinfachen. Wir bezeichnen den Schleifenimpuls mit k . Die Fermionen sind erneut bei der TeV-Brane lokalisiert. Die Spinoare sind aufgrund der verschwindenden äußeren Impulse nur Zuschauer in der folgenden Rechnung, welche somit bis auf die Einträge der CKM-Matrix für beliebige äußere Quarkfelder gilt.

Wir betrachten das Beispiel der B_d^0 - \bar{B}_d^0 -Mischung und definieren $\Gamma_\mu = \gamma_\mu(1 - \gamma^5)$, sowie $\lambda_i = V_{ib}^* V_{id}$. Konzentrieren wir uns wiederrum ausschließlich auf den von ξ abhängigen Teil des Propagators, so erhalten wir nach Einsetzen der Zerlegung und Auswertung des Überlappintegrals durch die Delta-Distribution

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= (2\pi)^2 \left(\frac{g_4}{2\sqrt{2}} \right)^4 \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \sum_{n,n',m,m'} B_{n0}\chi^{(n)} B_{n'0}\chi^{(n')} B_{m0}\chi^{(m)} B_{m'0}\chi^{(m')} \quad (5.18) \\ &\cdot \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\bar{b} \Gamma_\mu(k' + m_i) \Gamma_\sigma d \bar{b} \Gamma_\tau(k' + m_j) \Gamma_\nu d}{(k^2 - m_i^2)(k^2 - m_j^2)} \left\{ \frac{k^\mu k^\nu k^\sigma k^\tau}{(k^2 - \xi \tilde{M}_0^2)^2 \tilde{M}_0^4} \right. \\ &\left. + \frac{1}{(k^2 - \tilde{M}_0^2)(k^2 - \xi \tilde{M}_0^2)} \left(g^{\mu\nu} \frac{k^\sigma k^\tau}{\tilde{M}_0^2} + g^{\sigma\tau} \frac{k^\mu k^\nu}{\tilde{M}_0^2} - 2 \frac{k^\mu k^\nu k^\sigma k^\tau}{\tilde{M}_0^4} \right) \right\}. \end{aligned}$$

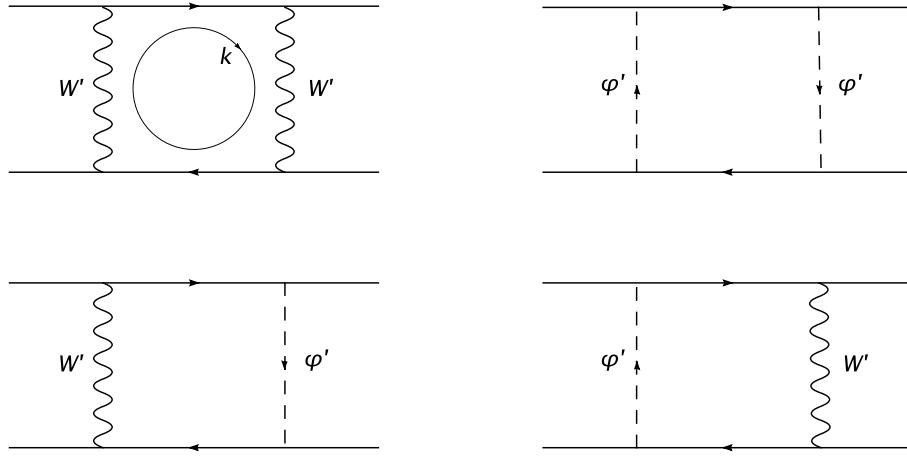


Abbildung 5.2: Kompensationsschema für den Boxgraphen: Nullmodensektor

Den oberen Ausdruck vereinfacht man durch Verwendung der Relationen $\not{k}^2 = k^2$ und

$$k^\mu k^\nu \gamma_\mu \otimes \gamma_\nu = \frac{1}{D} k^2 g^{\mu\nu} \gamma_\mu \otimes \gamma_\nu. \quad (5.19)$$

Des Weiteren nutzt man aus, dass der Boxgraph endlich ist. Rechnet man in dimensionaler Regularisierung, so kürzen sich die Pole heraus. Aus diesem Grund dürfen wir eine weitere Identität für $D = 4$ verwenden:

$$\Gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma_\tau \otimes \gamma^\tau \gamma^\sigma \Gamma^\mu = \gamma_\tau \gamma_\sigma \Gamma_\mu \otimes \gamma^\sigma \gamma^\tau \Gamma^\mu = 4 \Gamma_\mu \otimes \Gamma^\mu, \quad (5.20)$$

wobei $\Gamma_\mu = \gamma_\mu(1 - \gamma^5)$ [36]. Als Resultat erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{WW} &= (2\pi)^2 \left(\frac{g_4}{2\sqrt{2}} \right)^4 \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \sum_{n,n',m,m'} B_{n0} \chi^{(n)} B_{n'0} \chi^{(n')} B_{m0} \chi^{(m)} B_{m'0} \chi^{(m')} \\ &\quad \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{4 \bar{b} \Gamma_\mu d \bar{b} \Gamma^\mu d}{(k^2 - m_i^2)(k^2 - m_j^2)} \left\{ 2f_\xi(\tilde{M}_0^2) + g_\xi(\tilde{M}_0^2) \right\} \frac{k^4}{\tilde{M}_0^4}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\text{mit } f_\xi(\tilde{M}_0^2) = \frac{\tilde{M}_0^2 - k^2/D}{(k^2 - \tilde{M}_0^2)(k^2 - \xi \tilde{M}_0^2)}, \quad g_\xi(\tilde{M}_0^2) = \frac{k^2/D}{(k^2 - \xi \tilde{M}_0^2)^2}. \quad (5.22)$$

Für die erwünschte Kompensation sorgen nun eine Box mit zwei Goldstone-Bosonen sowie zwei Boxen mit je einem Goldstone- und einem W-Boson (siehe Abb. 5.2). Die erste liefert

$$\mathcal{M}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{v^4} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^4 \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j B_{\xi00}^4 \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{4 \bar{b} \Gamma_\mu d \bar{b} \Gamma^\mu d}{(k^2 - m_i^2)(k^2 - m_j^2)} g_\xi(\tilde{M}_0^2) m_i^2 m_j^2, \quad (5.23)$$

die beiden anderen jeweils (man beachte das Vorzeichen)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{W\varphi} = & -2\pi \frac{g_4^2}{v^2} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^4 \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j B_{\xi 00}^2 \sum_{n,n'} B_{n0} \chi^{(n)} B_{n'0} \chi^{(n')} \\ & \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{4 \bar{b} \Gamma_\mu d \bar{b} \Gamma^\mu d}{(k^2 - m_i^2)(k^2 - m_j^2)} \left\{ f_\xi(\tilde{M}_0^2) + g_\xi(\tilde{M}_0^2) \right\} \frac{m_i^2 m_j^2}{\tilde{M}_0^2}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Machen wir nun von Gl. (5.5) Gebrauch, die wir oben bewiesen haben, so kompensieren sich die verschiedenen Beiträge gerade dann, wenn

$$\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \frac{k^4 - m_i^2 m_j^2}{(k^2 - m_i^2)(k^2 - m_j^2)} = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \left(1 + \frac{m_i^2}{k^2 - m_i^2} + \frac{m_j^2}{k^2 - m_j^2} \right) = 0 \quad (5.25)$$

erfüllt ist. In der Tat gilt aufgrund der Unitarität der CKM-Matrix für Brane-Fermionen die Beziehung

$$\sum_i \lambda_i = \sum_j \lambda_j = 0 \quad (5.26)$$

und der obige Ausdruck verschwindet. Man erahnt an dieser Stelle, dass sich die Rechnung für Bulk-Fermionen wesentlich schwieriger gestaltet. So wird man eine transzendentale Gleichung für die Fermionen in Analogie zu (4.67) benötigen und die Bedingung (5.5) verallgemeinert sich in einer nichttrivialen Art und Weise. Ferner ist die verallgemeinerte CKM-Matrix nicht unitär, so dass die Beziehung (5.26) durch ein inhomogenes Gleichungssystem ersetzt wird.

Man kann nun für Baumgraphenrechnungen die unitäre Eichung verwenden. In diesem Fall verschwinden die unphysikalischen Freiheitsgrade aus der Theorie und der Propagator für ein KK-Eichboson lautet

$$D^{(n)\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 - \tilde{M}_n^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{\tilde{M}_n^2} \right). \quad (5.27)$$

Für Schleifenprozesse führt diese Eichung, die den Grenzfall $\xi \rightarrow \infty$ beschreibt, in der Regel zu offenkundig falschen Ergebnissen. Als Indiz hierfür dient das Skalenverhalten. So ist ein effektiver 4-Fermion-Prozess, dessen innere (ausintegrierte) Freiheitsgrade Kaluza-Klein-Teilchen enthalten, nach den Prinzipien der effektiven Feldtheorie mit dem inversen Quadrat der zugehörigen KK-Masse unterdrückt. Rechnet man Schleifenprozesse in unitärer Eichung, so vernachlässigt man die Beiträge des Schleifenintegrals für $k \rightarrow \infty$. Dies führt in der Regel zu einer falschen Unterdrückung im Resultat.

Kapitel 6

Ausblick

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir untersucht, wie man eine vierdimensionale Theorie aus der allgemeineren 5D Theorie ableitet. Die gefundenen Feynmanregeln erlauben es nun, die Phänomenologie des Randall-Sundrum-Modells zu untersuchen. Hierbei bieten sich Methoden der effektiven Feldtheorie an. In dieser wird die Lagrangedichte als unendliche Summe lokaler Operatoren Q_i dargestellt, welche die Symmetrien der Theorie respektieren, und somit in der Amplitude eines beliebigen Prozesses den Übergang vom Ausgangs- in den Endzustand vermitteln. So gilt

$$\mathcal{L}_{eff} = \sum_i C_i(\mu) Q_i .$$

Da der GIM-Mechanismus für sämtliche KK-Eichbosonen aufgrund ihres nicht flachen 5D Profils außer Kraft gesetzt ist, wird eine größere Anzahl an Operatoren erlaubt sein, als dies im Standardmodell der Fall ist. So sind FCNC-Prozesse beispielsweise nicht mehr auf den Austausch von W-Bosonen beschränkt, und es gibt zusätzliche Operatoren, die jetzt auch rechtshändige Felder als äußere Zustände zulassen. Da diese Prozesse in der Regel bei Energien stattfinden werden, die geringer sind als die Ruhemassen der Kaluza-Klein-Teilchen, entfernt man diese durch Ausintegration der entsprechenden Freiheitsgrade in der Wirkung aus der Theorie. Um das Hochenergieverhalten der Theorie aufzufangen, versieht man die Operatoren mit individuellen Koeffizienten C_i , welche die Physik oberhalb des gewählten Cut-Offs μ beinhalten. Die Bestimmung dieser sogenannten Wilson-Koeffizienten ist die Aufgabe, der es sich zu widmen gilt. Für die führende Ordnung der oben erwähnten flavorverändernden neutralen Ströme ist dies trivial, da sie auf Baumgraphenniveau stattfinden. Geht man in der Bestimmung der Koeffizienten eine Ordnung höher, so empfiehlt es sich, die Impulse der äußeren Teilchen Null zu setzen. Dies ist zulässig, da die Wilson-Koeffizienten nur die Physik oberhalb des Cut-Offs beschreiben und somit unabhängig von den gewählten Infrarotregulatoren sind. Als Konsequenz werden Schleifenintegrale die Gestalt

$$\int d^D k k^{-n}$$

annehmen. Dieser Ausdruck verschwindet aber in dimensionaler Regularisierung und die effektive Theorie enthält nur Baumgraphen. Der Vergleich mit der Amplitude der vol-

len Theorie, welche auf Einschleifenniveau nun sehr viele Terme enthält, liefert die Koeffizienten. Die Ergebnisse müssen dann auf ihre Verträglichkeit mit den Messdaten geprüft werden. Hierbei hat man allerdings einen gewissen Spielraum in der Wahl der Parameter, so ist z.B. der Wert des Produktes kr , welches im Warpfaktor auftaucht, nicht fest vorgegeben. Auch die Massenparameter c_i der Fermionen sind zunächst beliebig. Darüberhinaus bieten sich andere Möglichkeiten, dass Modell zu erweitern. So könnte man beispielsweise dem Bulk eine allgemeinere Symmetriegruppe $SO(4) \times U(1)_{B-L} \sim SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ zuordnen, welche durch Randbedingungen an den Orbifold-fixpunkten auf die $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Eichgruppe des Standardmodells heruntergebrochen wird [27]. Man hat also einen gewissen Spielraum, um realistische Theorien zu konstruieren. Das letzte Wort hat jedoch das Experiment.

Literaturverzeichnis

- [1] H. Georgi and S.L. Glashow, Phys. Rev. Lett. **23**, 338 (1974).
- [2] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, Phys. Lett. B **429** (1998) 263 [arXiv:hep-ph/9803315].
- [3] R. Sundrum, Phys. Rev. D **59** (1999) 085009 [arXiv:hep-ph/9805471].
- [4] E. A. Mirabelli, M. Perelstein and M. E. Peskin, Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 2236 [arXiv:hep-ph/9811337].
- [5] S. Cullen and M. Perelstein, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 268 [arXiv:hep-ph/9903422].
- [6] T. Han, J. D. Lykken and R. J. Zhang, Phys. Rev. D **59** (1999) 105006 [arXiv:hep-ph/9811350].
- [7] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370 [arXiv:hep-ph/9905221].
- [8] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4690 [arXiv:hep-th/9906064].
- [9] W. D. Goldberger and M. B. Wise, Phys. Rev. D **60** (1999) 107505 [arXiv:hep-ph/9907218].
- [10] W. D. Goldberger and M. B. Wise, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4922 [arXiv:hep-ph/9907447].
- [11] H. Davoudiasl, J. L. Hewett and T. G. Rizzo, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 2080 [arXiv:hep-ph/9909255].
- [12] H. Davoudiasl, J. L. Hewett and T. G. Rizzo, Phys. Lett. B **473** (2000) 43 [arXiv:hep-ph/9911262].
- [13] S. Chang, J. Hisano, H. Nakano, N. Okada and M. Yamaguchi, Phys. Rev. D **62**, 084025 (2000) [arXiv:hep-ph/9912498].
- [14] Y. Grossman and M. Neubert, Phys. Lett. B **474** (2000) 361 [arXiv:hep-ph/9912408].
- [15] T. Gherghetta and A. Pomarol, Nucl. Phys. B **586** (2000) 141 [arXiv:hep-ph/0003129].

- [16] F. del Aguila and J. Santiago, Phys. Lett. B **493** (2000) 175 [arXiv:hep-ph/0008143].
- [17] S. J. Huber and Q. Shafi, Phys. Rev. D **63** (2001) 045010 [arXiv:hep-ph/0005286].
- [18] S. J. Huber and Q. Shafi, Phys. Lett. B **498** (2001) 256 [arXiv:hep-ph/0010195].
- [19] H. Georgi, A. K. Grant and G. Hailu, Phys. Lett. B **506** (2001) 207 [arXiv:hep-ph/0012379].
- [20] V. A. Rubakov, Phys. Usp. **44** (2001) 871 [Usp. Fiz. Nauk **171** (2001) 913] [arXiv:hep-ph/0104152].
- [21] S. J. Huber, C. A. Lee and Q. Shafi, Phys. Lett. B **531** (2002) 112 [arXiv:hep-ph/0111465].
- [22] L. Randall and M. D. Schwartz, JHEP **0111** (2001) 003 [arXiv:hep-th/0108114].
- [23] A. Muck, A. Pilaftsis and R. Ruckl, Lect. Notes Phys. **647** (2004) 189 [arXiv:hep-ph/0209371].
- [24] S. J. Huber, Nucl. Phys. B **666** (2003) 269 [arXiv:hep-ph/0303183].
- [25] R. Contino, Y. Nomura and A. Pomarol, Nucl. Phys. B **671** (2003) 148 [arXiv:hep-ph/0306259].
- [26] K. Agashe, A. Delgado, M. J. May and R. Sundrum, JHEP **0308** (2003) 050 [arXiv:hep-ph/0308036].
- [27] C. Csaki, C. Grojean, L. Pilo and J. Terning, Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 101802 [arXiv:hep-ph/0308038].
- [28] C. Csaki, arXiv:hep-ph/0404096.
- [29] G. Burdman, Phys. Lett. B **590** (2004) 86 [arXiv:hep-ph/0310144].
- [30] K. Agashe, G. Perez and A. Soni, Phys. Rev. D **71** (2005) 016002 [arXiv:hep-ph/0408134].
- [31] K. Agashe, G. Perez and A. Soni, Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 201804 [arXiv:hep-ph/0406101].
- [32] R. Sundrum, arXiv:hep-th/0508134.
- [33] T. Gherghetta, arXiv:hep-ph/0601213.
- [34] K. Agashe, G. Perez and A. Soni, Phys. Rev. D **75** (2007) 015002 [arXiv:hep-ph/0606293].
- [35] B. Batell and T. Gherghetta, Phys. Rev. D **75** (2007) 025022 [arXiv:hep-th/0611305].

- [36] A. J. Buras, arXiv:hep-ph/9806471.
- [37] N. Straumann, *Allgemeine Relativitätstheorie und relativistische Astrophysik*, Springer Lecture Notes 150.
- [38] T.-P. Cheng and L.-F. Lee, *Gauge Theory of elementary particle physics*, Oxford University Press, New York, 1984.
- [39] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, 1995.
- [40] A. Mück, Diplomarbeit,
<http://theorie.physik.uni-wuerzburg.de/TP2/publications/diplomarbeiten>.
- [41] A. Mück, Dissertation,
<http://www.opus-bayern.de/uni-wuerzburg/volltexte/2004/1059/>.
- [42] J.-E. Daum, Diplomarbeit,
<http://wwwthep.physik.uni-mainz.de/site/research/publications/theses/dip/>.
- [43] S. Weinzierl,
Introduction to theoretical particle physics, Mathematical Aspects of particle physics,
<http://wwwthep.physik.uni-mainz.de/~stefanw/>.

Danksagung

Zunächst einmal danke ich meinem Betreuer Herrn Prof. Dr. Matthias Neubert für seine Geduld mit einem weitgehend bezüglich der Kenntnisse in Quantenfeldtheorie und Phänomenologie unbefleckten Studenten. Dieser hat im Zuge der Anfertigung dieser Arbeit aufgrund der kompetenten Betreuung vermutlich mehr dazugelernt, als während seines gesamten Hauptstudiums. Vielen herzlichen Dank!

Einen großen Beitrag hierzu leisteten auch die Professoren Dr. Florian Scheck, Dr. Hubert Spiesberger sowie Dr. Stefan Weinzierl, sei es durch Kursvorlesungen zur theoretischen Physik, Spezialvorlesung zur Feldtheorie und Allgemeinen Relativitätstheorie oder durch direkte Gespräche zu speziellen Fragesstellungen.

Großen Dank schulde ich auch meinem Gefährten an der Front, Florian Goertz, für das Auffinden meiner unzähligen Rechenfehler, die vielen fruchtbaren Diskussionen und zuletzt dafür, dass er mich ausgehalten hat.

An dieser Stelle möchte ich auch meine alten Lehrer Heinz Bolender(\dagger) und Frank Weitzel nicht unerwähnt lassen. Diese schufen sozusagen das Fundament und weckten mein Interesse für Physik.

Für das Korrekturlesen dieser Arbeit bedanke ich mich ganz herzlich bei Nicole Nieraad, Michael Benzke, meiner Mutter sowie meiner Schwester Nadja.

Ein herzliches Dankeschön gilt auch meinen Freunden, die mich trotz allem (hoffentlich) nicht für einen Verrückten halten. Wer denkt schon freiwillig über fünfdimensionale Raumzeiten nach? Da es sehr viele an der Zahl sind, sage ich kollektiv: Habt Dank, ihr Narren!

Den größten Dank schulde ich jedoch meinen Eltern Ute und Heribert Pfoh, welche mich immer vorbehaltlos unterstützt und somit mein Studium ermöglicht haben.