

Coalescence de trous noirs en relativité générale & Le problème de la matière noire en astrophysique

Alexandre Le Tiec

► To cite this version:

Alexandre Le Tiec. Coalescence de trous noirs en relativité générale & Le problème de la matière noire en astrophysique. Physique mathématique [math-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2010. Français. tel-00521645

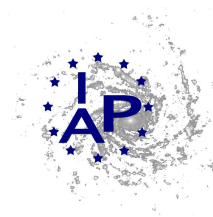
HAL Id: tel-00521645

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00521645>

Submitted on 28 Sep 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**Thèse de Doctorat de
l'Université Pierre et Marie Curie**

Spécialité : Astrophysique

**Présentée par
M. Alexandre LE TIEC**

**Pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie**

**Coalescence de trous noirs en relativité générale &
Le problème de la matière noire en astrophysique**

Soutenue le 27 septembre 2010, devant le jury composé de

M.	Pierre	BINÉTRUY	(Président du jury)
M.	Luc	BLANCHET	(Directeur de thèse)
M ^{me}	Alessandra	BUONANNO	(Rapporteur)
M ^{me}	Françoise	COMBES	(Examinatrice)
M.	Éric	GOURGOULHON	(Examineur)
M.	Mordehai	MILGROM	(Rapporteur)
M.	Clifford	WILL	(Examineur)

*À mes parents,
à Nicole.*

REMERCIEMENTS

LES tous premiers vont bien naturellement à mon directeur de thèse, Luc Blanchet. Au cours de ces trois dernières années, sa porte m'a toujours été grande ouverte, ce qui m'a permis d'abuser un peu de sa bonne humeur indéfectible et de son vaste savoir. Luc a su me guider d'une main invisible dans les arcanes du monde de la recherche, et m'a progressivement laissé prendre mon envol. Je mesure la chance qui fut la mienne d'apprendre le métier de chercheur à ses côtés. J'espère conserver sa confiance et sa sympathie.

J'ai bénéficié d'un excellent environnement de travail à l'Institut d'Astrophysique de Paris ; pas seulement en raison de la qualité scientifique des chercheurs qui y circulent, mais également grâce aux qualités humaines et professionnelles du personnel qui y travaille. Merci à eux tous, et plus particulièrement à Lysiane Bauby, Patrick Boissé, Georges Debève, Gilles Esposito-Farèse, Guillaume Faye, Sylvie Sebban, et Jean-Philippe Uzan, pour diverses raisons.

Je remercie vivement Clifford Will pour sa disponibilité et ses conseils lors de mes visites à l'université Washington à St. Louis ; son accueil amical a su tempérer des conditions climatiques pour le moins hostiles. Je tiens également à remercier Steven Detweiler et Bernard Whiting, avec qui j'ai eu l'occasion de collaborer sur des problèmes passionnants.

Je suis très reconnaissant à Pierre Binétruy, Françoise Combes, Éricourgoulhon et Clifford Will d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse, et tout particulièrement à Alessandra Buonanno et Moti Milgrom, qui sont venus de loin pour rapporter sur une thèse partiellement écrite dans une langue qui n'est pas la leur. Un grand merci à eux.

Une évidence, mais qui mérite toutefois d'être soulignée : rien de tout cela n'aurait été possible sans le support de ma famille, et tout particulièrement de mes parents, au fil des années. Je ne saurais exprimer ici mon immense gratitude envers eux.

Le mot de la fin revient à mon potiron, qui a su me soutenir à merveille lorsque j'en avais le plus besoin. Merci de m'avoir appris qu'il y a une vie à côté de celle de l'esprit, et merci d'avoir choisi de partager la tienne avec moi.

Paris, le 23 juillet 2010.

SOMMAIRE

Introduction	xi
Notations et conventions	xv
I Coalescence de trous noirs en relativité générale	1
1 Ondes gravitationnelles	3
1.1 Existence des ondes gravitationnelles	3
1.2 Cadre descriptif : champ faible	6
1.3 Génération d'ondes gravitationnelles	9
1.4 Sources astrophysiques et cosmologiques	12
1.5 Détection des ondes gravitationnelles	17
2 Développements post-newtoniens	23
2.1 Calculs de patrons d'ondes	23
2.2 Équations d'Einstein sous forme relaxée	26
2.3 Formalisme de génération d'ondes	27
2.4 Application au cas d'un système binaire compact	29
2.5 Équations du mouvement post-newtoniennes	31
3 Perturbations de trous noirs et force propre gravitationnelle	35
3.1 Calculs de patrons d'ondes	35
3.2 Théorie des perturbations d'un trou noir	37
3.3 Formalisme de la force propre gravitationnelle	38
3.4 Comparaison avec les développements post-newtoniens	41
4 Calcul post-newtonien de la force propre gravitationnelle I	43
4.1 Comment comparer les formalismes ?	43
4.2 Calcul post-newtonien de la métrique régularisée	45
4.3 Comparaison avec le calcul perturbatif	47
<i>Article : Post-Newtonian and numerical calculations of the gravitational self-force for circular orbits in the Schwarzschild geometry</i>	<i>49</i>
4.4 Introduction	50
4.5 Self-force overview	54

4.6	Post-Newtonian calculation	59
4.7	Post-Newtonian results	68
4.8	Comparison of post-Newtonian and self-force results	74
5	Calcul post-newtonien de la force propre gravitationnelle II	85
5.1	Contributions logarithmiques	85
5.2	Ajustement du résultat perturbatif	87
	<i>Article : High-order post-Newtonian fit of the gravitational self-force for circular orbits in the Schwarzschild geometry</i>	<i>89</i>
5.3	Motivation and summary	90
5.4	General structure of logarithmic terms	92
5.5	The 4PN and 5PN near-zone logarithms	99
5.6	Logarithms in the equations of motion and energy	104
5.7	The gauge invariant redshift observable	108
5.8	Numerical evaluation of post-Newtonian coefficients	110
6	Métrie post-newtonienne dans l'approximation de limite proche	123
6.1	Approximation de limite proche	123
6.2	Application au cas de la métrie post-newtonienne	124
6.3	Évolution numérique des équations d'onde	125
	<i>Article : The close-limit approximation for black hole binaries with post-Newtonian initial conditions</i>	<i>127</i>
6.4	Introduction	128
6.5	The 2PN metric in close-limit form	130
6.6	The 2PN metric in Regge-Wheeler-Zerilli formalism	139
6.7	Verification of the Einstein field equations	143
6.8	Numerical evolution of the perturbation	146
6.9	Conclusion	153
7	Recul gravitationnel des systèmes binaires de trous noirs	161
7.1	Effet de recul gravitationnel	161
7.2	Historique des travaux sur le sujet	163
7.3	Recul gravitationnel pendant la phase de vibration	164
	<i>Article : The gravitational-wave recoil of coalescing black hole binaries</i>	<i>167</i>
7.4	Introduction and summary	168
7.5	Gravitational recoil from the inspiral, plunge and ringdown phases	170
7.6	Conclusions	173
II	Le problème de la matière noire en astrophysique	175
8	Modèle de concordance en cosmologie	177
8.1	Un Univers homogène et isotrope	177
8.2	Contenu énergétique de l'Univers	179
8.3	Le paradigme de la matière noire froide	183

9	Phénoménologie de la dynamique newtonienne modifiée	185
9.1	Observations à l'échelle galactique	185
9.2	La dynamique newtonienne modifiée	187
9.3	Extensions relativistes de MOND	190
10	Matière noire et polarisation gravitationnelle	193
10.1	Analogie avec les milieux diélectriques	193
10.2	Modèle relativiste de matière noire dipolaire	194
10.3	Limite non relativiste et principaux résultats	196
	<i>Article : Model of dark matter and dark energy based on gravitational polarization</i> . .	197
10.4	Introduction	198
10.5	Dipolar fluid in general relativity	201
10.6	Cosmological perturbations at large scales	208
10.7	Dipolar dark matter at galactic scales	219
10.8	Summary and conclusion	228
	<i>Article : Dipolar dark matter and dark energy</i>	235
10.9	Introduction and motivation	236
10.10	Model of dipolar dark matter and dark energy	237
10.11	Recovering the standard cosmological model and MOND	240
10.12	Conclusion	243
	Conclusion et perspectives	245
	Bibliographie	249

INTRODUCTION

LES travaux rapportés dans ce manuscrit ont été conduits à l’Institut d’Astrophysique de Paris, au sein du groupe de recherche $\mathcal{G}\mathcal{R}\mathcal{E}\mathcal{C}\mathcal{O}$ (Gravitation et Cosmologie), sous la direction de Luc Blanchet. Ils sont le fruit de collaborations avec Luc Blanchet, Steven Detweiler, Bernard F. Whiting et Clifford M. Will, et portent sur deux sujets bien distincts : la génération d’ondes gravitationnelles par les systèmes binaires coalescents de trous noirs d’une part, et les possibles liens entre matière noire et dynamique newtonienne modifiée d’autre part.

Coalescence de trous noirs en relativité générale

La théorie de la relativité générale, parachevée par Albert Einstein en 1915, est parfois décrite comme la plus importante création intellectuelle jamais enfantée par un seul homme. Quelque dix années après les bouleversements conceptuels introduits par la relativité restreinte, Einstein parvint à décrire la force de gravitation dans un cadre relativiste. Jusqu’à ce jour, la relativité générale a passé avec succès tous les tests expérimentaux auxquels elle a été soumise ; elle a également prédit l’existence de nombreux phénomènes « exotiques » absents de la théorie newtonienne de la gravitation, parmi lesquels les trous noirs, les ondes gravitationnelles, et le caractère dynamique de l’Univers.

En quelques mots, les ondes gravitationnelles sont des oscillations dans la courbure de l’espace-temps, générées par les corps en mouvement, et se propageant à la vitesse de la lumière. La présence d’ondes de gravité est inéluctable dans une théorie relativiste de la gravitation : la vitesse à laquelle les informations peuvent se propager étant limitée, la force de gravitation elle-même ne peut se propager instantanément. L’existence des ondes gravitationnelles a été confirmée indirectement, et ce à plusieurs reprises, par la mesure de leurs effets sur la dynamique de systèmes binaires d’étoiles à neutrons, dont l’une est observable comme pulsar.

Ces découvertes ont motivé une communauté de physiciens et d’astrophysiciens à bâtir des détecteurs d’ondes gravitationnelles qui permettront dans un futur proche d’observer ces ondes directement. Les détecteurs interférométriques terrestres actuels devraient atteindre au cours de la prochaine décennie la sensibilité suffisante pour mesurer de manière routinière le passage d’ondes gravitationnelles en provenance de sources astrophysiques. En raison de la très faible interaction des ondes gravitationnelles avec la matière, le défi technologique est toutefois de taille : pour une source astrophysique typique, il s’agit de parvenir à détecter une variation relative de longueur du détecteur $\lesssim 10^{-21}$, induite lors du passage de l’onde.

Afin d’extraire un signal aussi faible des nombreuses sources de bruit (sismique, thermique, de photon, etc.) dans les détecteurs, il est nécessaire de connaître par avance la forme d’onde

émise par la source. Cette contrainte expérimentale justifie un travail théorique de longue haleine, débuté à la fin des années 80, et visant à modéliser avec grande précision la dynamique des sources d'ondes gravitationnelles anticipées, ainsi que le rayonnement gravitationnel qui en résulte. La première partie de ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre de la modélisation de l'une des sources d'ondes gravitationnelles les plus prometteuses pour les détecteurs actuels et futurs : les systèmes binaires coalescents de trous noirs, ou, éventuellement, d'étoiles à neutrons.

Si la très faible interaction des ondes gravitationnelles avec la matière est un calvaire pour les expérimentateurs s'efforçant de les détecter, il s'agit au contraire d'une bénédiction du point de vue de l'astronomie, de l'astrophysique et de la cosmologie. En effet, contrairement aux ondes électromagnétiques qui sont absorbées, réfléchies, réfractées et diffusées au cours de leur propagation, les ondes gravitationnelles nous parviennent « intactes », et contiennent donc une mine de renseignements sur leurs sources. L'astronomie gravitationnelle naissante nous fournira ainsi une pléthore d'informations nouvelles sur l'Univers, informations complémentaires de celles collectées par l'astronomie conventionnelle basée sur le rayonnement électromagnétique, et auxquelles nous n'aurions pas accès autrement. Historiquement, l'observation du ciel dans une nouvelle bande de fréquence du spectre électromagnétique a toujours donné lieu à des découvertes inattendues : noyaux actifs de galaxies et pulsars avec les ondes radios, fond diffus cosmologique avec les micro-ondes, binaires X et sursauts γ avec les rayons du même nom, etc. Gageons que grâce aux ondes gravitationnelles, l'ouverture d'une nouvelle fenêtre d'observation sur l'Univers apportera également son lot de surprises !

La première partie de cette thèse est organisée de la façon suivante : le chapitre 1, intitulé *Ondes gravitationnelles*, introduit le concept d'onde gravitationnelle, esquisse le mécanisme de génération de ces ondes, et liste les diverses sources anticipées, ainsi que les moyens de détection actuels et futurs. Les chapitres 2 & 3, *Développements post-newtoniens* et *Perturbations de trous noirs et force propre gravitationnelle*, présentent deux méthodes d'approximation permettant d'étudier la dynamique des systèmes binaires coalescents de trous noirs, ainsi que le rayonnement gravitationnel qui en résulte, lorsque la vitesse orbitale ou le rapport de masse sont adaptés à un traitement perturbatif.

Les quatre chapitres qui suivent présentent des travaux de recherche à proprement parler. Les chapitres 4 & 5, *Calcul post-newtonien de la force propre gravitationnelle I & II*, détaillent une comparaison entre le formalisme post-newtonien et celui de la force propre : une fonction invariante de jauge définie pour un système binaire de trous noirs en orbite circulaire est calculée analytiquement à un ordre post-newtonien élevé d'une part, et numériquement dans le cadre de la théorie des perturbations d'un trou noir de Schwarzschild d'autre part. On y démontre la cohérence des résultats ainsi obtenus lorsqu'ils sont comparés dans leur domaine de validité commun, et la complémentarité de ces deux méthodes perturbatives.

Le chapitre 6, *Métrie post-newtonienne dans l'approximation de limite proche*, présente un travail où la métrie post-newtonienne d'un système binaire de trous noirs est développée dans l'approximation dite de « limite proche », puis identifiée à la métrie d'un trou noir de Schwarzschild perturbé. Ceci permet de modéliser la phase de vibration du trou noir final résultant de la coalescence d'un système binaire de trous noirs. L'application de ce formalisme au calcul de l'effet de recul gravitationnel, et la comparaison avec les résultats exacts issus de la relativité numérique, sont détaillées dans le chapitre 7, intitulé *Recul gravitationnel des systèmes binaires de trous noirs*.

Le problème de la matière noire en astrophysique

La théorie de la relativité générale est testée avec une précision sans cesse croissante, en champ faible dans le système solaire, et en champ fort avec les pulsars binaires. Presque cent ans après sa genèse, elle reste compatible avec toutes ces contraintes observationnelles, et demeure la meilleure théorie de la gravitation dont nous disposons. Toutefois, certaines observations à grande échelle ont très tôt pointé quelques anomalies : dès les années 30, les astronomes ont constaté que la masse dynamique des amas de galaxies (telle que déduite du mouvement des galaxies) excède de plusieurs ordres de grandeur leur masse visible (telle que déduite de la luminosité des galaxies). Plus récemment, ce problème de masse manquante a également été observé à l'échelle des galaxies elles-mêmes. Une solution possible consiste à postuler l'existence d'une grande quantité de matière non baryonique, invisible car interagissant très peu avec la matière ordinaire : la matière noire. La conjonction des mesures cosmologiques les plus récentes concorde vers la nécessité d'introduire environ six fois plus de matière noire que de matière baryonique.

Par ailleurs, la mesure de la magnitude des supernovæ de type Ia en fonction de leur décalage spectral a mis en évidence l'accélération de l'expansion de l'Univers, ce qui requiert l'introduction d'une nouvelle forme d'énergie, dont la pression négative s'oppose à l'attraction gravitationnelle engendrée par la densité d'énergie de la matière. Cette énergie noire, potentiellement sous forme d'une constante cosmologique Λ , compte pour environ 73% du budget énergétique de l'Univers.

Le modèle de concordance cosmologique, ou modèle Λ -CDM, est compatible avec un très grand nombre d'observations indépendantes, de l'échelle des amas de galaxies jusqu'aux échelles cosmologiques. Les nombres paramétrisant ce modèle sont mesurés avec une précision de l'ordre du pourcent, ce qui confère désormais à la cosmologie le statut de science quantitative. Néanmoins, la matière baryonique — dont la majeure partie échappe toujours à l'observation — ne représente que 4% du contenu énergétique de l'Univers. La cosmologie moderne se trouve donc dans une situation inédite : nous disposons d'une paramétrisation apparemment très précise d'un Univers dont le contenu nous est essentiellement inconnu.

Ce constat peut provoquer l'exaltation en vu de l'importance des questions auxquelles il reste à répondre : sachant qu'aucune des particules élémentaires du modèle standard ne peut jouer le rôle de la matière noire, quelle est sa nature ? Si l'énergie noire prend la forme d'une constante cosmologique, alors comment réconcilier sa valeur mesurée avec la valeur prédite par la théorie quantique des champs ? Alternativement, ce constat peut tout aussi bien susciter la méfiance, et pousser à reconsidérer les bases du raisonnement conduisant à postuler l'existence de substances inconnues comptant pour 96% du contenu énergétique de l'Univers ; la présence de la matière noire et de l'énergie noire n'étant inférée que par leurs seuls effets gravitationnels, peut-être faut-il remettre en cause la théorie de la gravitation elle-même ?

La seconde partie de cette thèse traite du problème de la matière noire depuis l'échelle galactique jusqu'aux échelles cosmologiques. Le chapitre 8, *Modèle de concordance en cosmologie*, résume les principaux aspects du modèle de concordance, en insistant sur le contenu énergétique de l'Univers, et sur les succès rencontrés par l'hypothèse de la matière noire. Le chapitre 9, *Phénoménologie de la dynamique newtonienne modifiée*, discute certaines des difficultés rencontrées par le paradigme de la matière noire à l'échelle galactique, et présente une alternative possible : la dynamique newtonienne modifiée (MOND), qui postule une modification de la loi fondamentale de la gravité en l'absence de matière noire.

Le chapitre 10, *Matière noire et polarisation gravitationnelle*, détaille les résultats de travaux de recherche visant à concilier les succès respectifs du modèle de concordance et de la phénoménologie de MOND aux échelles cosmologique et galactique respectivement. On y développe un modèle de matière noire et d'énergie noire basé sur le concept de « polarisation gravitationnelle ». Ce manuscrit s'achève sur quelques remarques conclusives et perspectives de recherche.

Le travail de thèse présenté dans ce manuscrit a donné lieu aux publications suivantes, listées par ordre chronologique :

- L. BLANCHET et A. LE TIEC – « Model of dark matter and dark energy based on gravitational polarization », *Phys. Rev. D* **78** (2008), p. 024031, [arXiv:0804.3518 \[astro-ph\]](#).
- L. BLANCHET et A. LE TIEC – « Phenomenology of the modified Newtonian dynamics and the concordance cosmological scenario », *Comptes-rendus des 43^e rencontres de Moriond* (J. Dumarchez, Y. Giraud-Héraud et J. Trân Thanh Vân, éd.), The Gioi Publishers, 2009, p. 257, [arXiv:0807.1200 \[astro-ph\]](#).
- L. BLANCHET et A. LE TIEC – « Dipolar dark matter and dark energy », *Phys. Rev. D* **80** (2009), p. 024031, [arXiv:0901.3114 \[astro-ph.CO\]](#).
- L. BLANCHET, S. DETWEILER, A. LE TIEC et B. F. WHITING – « Post-Newtonian and numerical calculations of the gravitational self-force for circular orbits in the Schwarzschild geometry », *Phys. Rev. D* **81** (2010), p. 064004, [arXiv:0910.0207 \[gr-qc\]](#).
- A. LE TIEC et L. BLANCHET – « The close-limit approximation for black hole binaries with post-Newtonian initial conditions », *Class. Quant. Grav* **27** (2010), p. 045008, [arXiv:0910.4593 \[gr-qc\]](#).
- A. LE TIEC, L. BLANCHET et C. M. WILL – « The gravitational-wave recoil from the ring-down phase of coalescing black hole binaries », *Class. Quant. Grav* **27** (2010), p. 012001, [arXiv:0910.4594 \[gr-qc\]](#).
- L. BLANCHET, S. DETWEILER, A. LE TIEC et B. F. WHITING – « High-order post-Newtonian fit of the gravitational self-force for circular orbits in the Schwarzschild geometry », *Phys. Rev. D* **81** (2010), p. 084033, [arXiv:1002.0726 \[gr-qc\]](#).
- L. BLANCHET, S. DETWEILER, A. LE TIEC et B. F. WHITING – « High-accuracy comparison between the post-Newtonian and self-force dynamics of black-hole binaries », *Mass and motion in general relativity* (L. Blanchet, A. Spallicci et B. F. Whiting, éd.), Fundamental Theories of Physics, vol. 162, Springer, 2010, [arXiv:1007.2614 \[gr-qc\]](#).

NOTATIONS ET CONVENTIONS

- Les indices latins i, j, k , etc. sont à valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ des trois coordonnées spatiales x^1, x^2, x^3 .
- Les indices grecs μ, ν, ρ , etc. sont à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$ des quatre coordonnées spatio-temporelles, avec x^0 la coordonnée temporelle.
- Sauf indication contraire, les indices répétés sont sommés.
- Les indices symétrisés (resp. antisymétrisés) sont entourés de parenthèses (resp. de crochets), par exemple $u_{(i}v_{j)} = \frac{1}{2}(u_i v_j + u_j v_i)$ et $u_{[i}v_{j]} = \frac{1}{2}(u_i v_j - u_j v_i)$.
- Les vecteurs spatiaux sont souvent représentés en gras, par exemple $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$.
- La dérivée par rapport au temps est souvent notée avec un point, par exemple $\dot{f} = \frac{df}{dt}$.
- Les conventions pour la signature de la métrique et le tenseur de Riemann sont celles de la référence [298], *i.e.* $(-, +, +, +)$ et $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu_{\rho\alpha} \Gamma^\rho_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\rho\beta} \Gamma^\rho_{\nu\alpha}$.
- La métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ est couramment écrite dans un système de coordonnées cartésien, auquel cas elle a pour composantes $\eta_{00} = -1$, $\eta_{0i} = 0$ et $\eta_{ij} = \delta_{ij}$.

⊠

Première partie

Coalescence de trous noirs en relativité générale

ONDES GRAVITATIONNELLES

QUELQUES mois après l'écriture des équations de champ de la théorie de la relativité générale, Einstein prédit l'existence de « petites » oscillations dans la courbure de l'espace-temps, générées par les corps en mouvement, et se propageant à la vitesse de la lumière [159, 160] : les ondes gravitationnelles. La première observation *directe* de ces ondes par les détecteurs interférométriques terrestres actuels est désormais imminente : vers 2015, date de mise en service de la configuration dite avancée de ces détecteurs. L'astronomie gravitationnelle nous fournira de très nombreuses informations sur l'Univers, informations complémentaires de celles collectées par l'astronomie conventionnelle basée sur le rayonnement électromagnétique [365].

Ce chapitre se veut un bref aperçu de ce domaine en pleine expansion, afin de présenter le cadre du travail effectué durant cette thèse. Pour de plus amples détails, nous renvoyons le lecteur aux revues [401, 402] traitant de la génération et de la propagation des ondes gravitationnelles, aux revues [128] et [232, 350] pour les aspects liés aux sources et à la détection respectivement, ainsi qu'à l'ouvrage récent [275] pour un traitement exhaustif.

1.1 Existence des ondes gravitationnelles

La prédiction des ondes gravitationnelles remonte à 1916, mais leur existence a longtemps été sujet à controverse. En raison du caractère intrinsèquement non linéaire de la théorie de la relativité générale, il fut envisagé que l'apparente propagation d'une perturbation de l'espace-temps de Minkowski résultait d'un « mauvais » choix de système de coordonnées. D'un point de vue théorique, la situation fut clarifiée au cours des années 50 par Pirani [330] et Bondi [92] qui démontrèrent le caractère physique des ondes gravitationnelles, et le fait qu'elles transportent de l'énergie susceptible d'être déposée sur un détecteur. Le lecteur intéressé trouvera un récit passionnant de l'histoire des ondes gravitationnelles, ainsi que des controverses ayant longtemps pesé sur leur existence dans le livre [234].

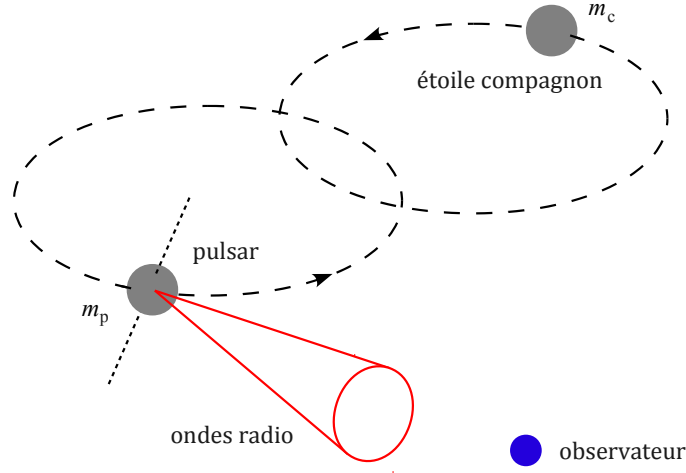


FIG. 1.1: Schéma du pulsar binaire PSR 1913+16. Un pulsar de masse m_p orbite une étoile compagne de masse m_c . Tel un phare cosmique, il émet des flashes d'ondes radio à intervalles réguliers détectés par un observateur distant. La fréquence de ces flashes est modulée par le mouvement orbital du système binaire.

L'argument décisif venant appuyer l'existence de ces ondes fut la découverte du pulsar binaire PSR 1913+16 en 1974 par Hulse et Taylor [216], et qui valu à ses auteurs l'attribution du prix Nobel de physique en 1993. Comme son nom l'indique, ce système binaire est composé d'un pulsar (une étoile à neutrons en rotation rapide, fortement magnétisée, et dont on détecte le rayonnement radio) en orbite autour d'une étoile compagne (voir Fig. 1.1). L'orbite est une ellipse quasi-keplerienne de période $P \simeq 7^{\text{h}} 45^{\text{min}}$ et d'excentricité $e \simeq 0,617$. De la mesure de la fréquence d'arrivée des flashes d'ondes radio, Taylor et Weisberg parvinrent à déduire que la période orbitale du système décroît au rythme $\dot{P} \simeq -2,42 \times 10^{-12} \text{ s/s}$ [397, 415].

Cette observation s'explique très bien si l'on suppose que la binaire perd de l'énergie de liaison par émission d'ondes gravitationnelles. Une analyse détaillée de la dynamique orbitale relativiste du pulsar binaire [136, 137] (voir également [398, 146]), et en particulier des effets de réaction au rayonnement, fournit l'expression théorique du taux de variation de la période orbitale :

$$\dot{P} = -\frac{192\pi}{5c^5} \left(\frac{2\pi G}{P} \right)^{5/3} \frac{m_p m_c}{(m_p + m_c)^{1/3}} \frac{1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4}{(1 - e^2)^{7/2}}, \quad (1.1)$$

où m_p et m_c sont les masses du pulsar et de l'étoile compagne respectivement. Cette analyse permet également de déduire des formules similaires pour deux autres effets relativistes mesurables dans le système binaire : le taux d'avance du périastre $\dot{\omega}$, et une combinaison du décalage vers le rouge gravitationnel et de la dilatation temporelle (effet Doppler du second ordre), mesurée par un paramètre γ . Ces deux dernières observations permettent de déterminer très précisément les masses des étoiles : $m_p = 1,4414(2)M_{\odot}$ et $m_c = 1,3867(2)M_{\odot}$.

Ces valeurs peuvent alors être reportées dans la prédiction (1.1), et le résultat comparé à la décroissance de la période orbitale mesurée¹. Ceci fournit un test de la relativité générale, qui se

¹Une fois soustraite la correction induite par l'accélération relative de la binaire par rapport au système solaire [145]. Cet effet impose d'ailleurs aujourd'hui la limite la plus contraignante sur la précision du test.

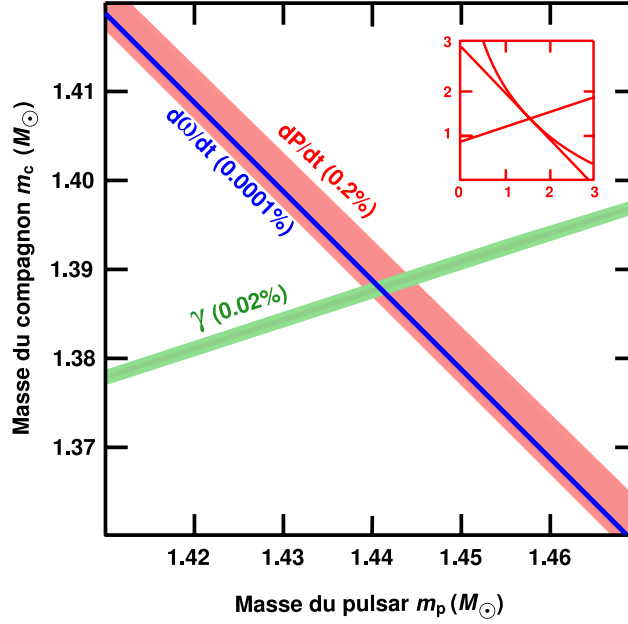


FIG. 1.2: L'observation de deux paramètres post-keplériens ($\dot{\omega}$ et γ) permet de mesurer les masses du pulsar et de l'étoile compagnon. La mesure d'un troisième effet relativiste (la décroissance de la période orbitale $\dot{P}$) fournit alors un test de la relativité générale. *Figure adaptée de [417], avec la permission de C. Will.*

trouve ainsi être confirmée à mieux que 0,2% (voir Fig. 1.2). Cette preuve indirecte acheva de convaincre la communauté scientifique de l'existence des ondes gravitationnelles², ouvrant ainsi la voie à la construction des détecteurs interférométriques terrestres actuels, qui devraient nous fournir la première preuve directe de l'existence de ces ondes (voir § 1.5 ci-après).

Historiquement, la validité de la formule (1.1) a elle-même été sujet à controverse. Ce résultat a d'abord été obtenu par un argument heuristique de balance d'énergie à partir de la formule du quadrupôle d'Einstein (cf. § 1.3 ci-après), appliquée par Peters et Mathews [329] au cas de deux particules ponctuelles sur une orbite elliptique quasi-keplérienne. La balance d'énergie postule que la décroissance de l'énergie de liaison gravitationnelle de la binaire — et donc la décroissance de la période orbitale — est directement reliée au flux d'énergie emportée par les ondes gravitationnelles. Quoique intuitif, cet argument ne découle pas des principes fondamentaux de la relativité générale. La justification rigoureuse de l'applicabilité de la formule (1.1) au cas du pulsar binaire remonte au travail séminal de Damour et Deruelle [135, 131, 149, 132], qui l'ont obtenue à partir du calcul des équations du mouvement de la binaire développées dans l'approximation post-newtonienne, jusqu'à l'ordre d'apparition des effets de réaction au rayonnement gravitationnel (voir chapitre 2). Ne faisant appel à aucune notion mal définie en relativité générale, ce travail a mis fin à la controverse, permettant ainsi d'affirmer que l'observation de la décroissance de la période orbitale du pulsar binaire PSR 1913+16 est en accord avec la prédiction de la relativité générale. Voir [234] pour de plus amples détails sur la controverse de la formule du quadrupôle.

²Depuis lors une dizaine d'autres pulsars binaires ont été découverts ; en particulier le double pulsar PSR J0737-3039 promet de tester la relativité générale en champ fort avec une précision inégalée [249, 250].

1.2 Cadre descriptif : champ faible

La théorie de la relativité générale relie la géométrie de l'espace-temps, mesurée par le tenseur de courbure de Riemann $R_{\mu\nu\alpha\beta}$, au contenu en matière-énergie, caractérisé par le tenseur-énergie impulsion $T_{\mu\nu}$, *via* les équations d'Einstein³

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

où $R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}$ et $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ sont les tenseur et scalaire de Ricci respectivement. Ces grandeurs géométriques sont fonctions de la seule *métrique* d'espace-temps $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$, qui permet de mesurer l'intervalle $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ entre deux événements. Les théories alternatives de la gravitation postulent l'existence de champs supplémentaires propageant la gravité, comme par exemple un champ scalaire ϕ dans les théories tenseur-scalaire. À ce jour, la relativité générale a passé avec succès tous les tests auxquels elle a été soumise, en champ faible dans le système solaire, et en champ fort avec les pulsars binaires (voir [417] pour une revue).

Équations d'Einstein linéarisées

En champ faible, il peut être conceptuellement fructueux de penser la métrique $g_{\mu\nu}$ comme celle d'un espace-temps plat de Minkowski faiblement perturbé ; dans un système de coordonnées cartésien, on écrira donc

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

où la métrique de Minkowski a pour composantes $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\rho\sigma} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, et la perturbation $h_{\mu\nu}$ vérifie $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Celle-ci peut être vue comme un champ se propageant en espace-temps plat. En introduisant (1.3) dans l'expression explicite du tenseur de Ricci, et en ne gardant que les termes linéaires dans la perturbation $h_{\mu\nu}$, on obtient

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\Box_\eta h_{\mu\nu} - 2\partial_{(\mu} H_{\nu)} + \partial_\mu \partial_\nu h), \quad (1.4)$$

où $\Box_\eta \equiv \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma = -c^{-2} \partial_t^2 + \Delta$ est l'opérateur d'alembertien en espace-temps plat, $h \equiv \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ désigne la trace de la perturbation, et $H_\mu \equiv \partial^\nu h_{\mu\nu}$ sa divergence. On calcule de même le scalaire de Ricci R en prenant la trace (minkowskienne à cet ordre) de l'équation (1.4). Le tenseur d'Einstein résultant $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ dépendant explicitement de la trace h , il est commode d'introduire la perturbation dite « à trace renversée »

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h, \quad (1.5)$$

car vérifiant $\bar{h} \equiv \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = -h$. En termes de la variable $\bar{h}_{\mu\nu}$, les équations d'Einstein linéarisées prennent alors la forme

$$\Box_\eta \bar{h}_{\mu\nu} - 2\partial_{(\mu} \bar{H}_{\nu)} + \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \bar{H}_\rho = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.6)$$

³Il est possible d'ajouter un terme de la forme $\Lambda g_{\mu\nu}$ à l'équation (1.2), où Λ est la *constante cosmologique*. Au vu des observations actuelles, cette constante est non nulle, mais son effet est négligeable à l'échelle des phénomènes que l'on va étudier dans la première partie de cette thèse. Nous l'introduirons de nouveau à partir du chapitre 8.

Jauge harmonique

L'invariance par difféomorphisme $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu(x^\lambda)$ de la relativité générale se traduit par l'invariance de jauge $\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} - 2\partial_{(\mu}\epsilon_{\nu)} + \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\epsilon^\rho$ des équations d'Einstein linéarisées (1.6). Mettant à profit cette invariance de jauge, il est toujours possible d'imposer la contrainte dite de *jauge harmonique* (ou jauge de Lorenz⁴, ou encore jauge de de Donder)

$$\bar{H}_\mu \equiv \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (1.7)$$

Celle-ci peut être vue comme la restriction à une classe particulière de systèmes de coordonnées cartésiens. Dans cette jauge, les équations d'Einstein linéarisées (1.6) prennent donc la forme simplifiée

$$\square_\eta \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

Cette équation d'onde décrit la propagation à la vitesse de la lumière c de la perturbation $\bar{h}_{\mu\nu}$ (ou de manière équivalente $h_{\mu\nu}$), éventuellement générée par une source $T_{\mu\nu}$, dans un espace-temps plat ; il s'agit des ondes gravitationnelles. Dans le chapitre suivant, nous verrons comment traiter les non linéarités des équations d'Einstein dans le même cadre conceptuel, où la métrique $g_{\mu\nu}$ est vue comme une déviation non linéaire de la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$.

Jauge transverse et sans trace

Considérons par simplicité un espace-temps vide de matière⁵, et se comportant « bien » à l'infini spatial i^0 [411]. La condition de jauge harmonique (1.7) ne fixe pas complètement le système de coordonnées ; il reste des degrés de liberté non physiques associés au libre choix du système de coordonnées. En particulier, on peut passer d'un système de coordonnées harmoniques à un autre en effectuant une transformation de jauge avec un vecteur de jauge ϵ^μ satisfaisant $\square_\eta \epsilon^\mu = 0$. Il est possible de choisir un tel vecteur de jauge de façon à imposer les quatre contraintes supplémentaires

$$\bar{h}_{0i} = 0, \quad (1.9a)$$

$$\bar{h} = 0. \quad (1.9b)$$

La jauge est dite TT pour « transverse » et « sans trace ». La perturbation à trace renversée (1.5) coïncide alors avec la perturbation $h_{\mu\nu}$, de sorte que la condition de jauge harmonique (1.7) permet d'imposer $h_{00} = 0$ (on ignore la composante statique de l'onde gravitationnelle). Ainsi, toute l'information physique sur les ondes gravitationnelles est contenue dans les composantes spatiales h_{ij}^{TT} .

Loin de la source, et sur des échelles petites par rapport à la distance à cette source, les ondes gravitationnelles sont très bien approximées par des ondes planes. On peut toujours orienter les axes du système de coordonnées cartésien de sorte que les ondes se propagent le long de l'un de

⁴Il s'agit du physicien danois Ludvig Lorenz, et non du physicien hollandais Hendrik Lorentz, dont les fameuses transformations et la non moins fameuse force portent le nom.

⁵Dans le cas d'un espace-temps avec une source à support compact, il est également possible d'isoler les degrés de liberté radiatifs du champ gravitationnel ; voir par exemple [179].

ces axes, par exemple l'axe des z . La perturbation h_{ij}^{TT} est alors fonction du temps retardé $t - z/c$ uniquement. La condition de jauge harmonique (1.7) impose $h_{iz}^{\text{TT}} = 0$, de sorte que les deux composantes indépendantes du champ de gravitation sont données par

$$h_{xx}^{\text{TT}} = -h_{yy}^{\text{TT}} = h_+(t - z/c), \quad (1.10a)$$

$$h_{xy}^{\text{TT}} = h_{yx}^{\text{TT}} = h_\times(t - z/c). \quad (1.10b)$$

Les quantités h_+ et $h_\times$ sont les deux *modes de polarisation* de l'onde gravitationnelle.

Effets d'une onde gravitationnelle sur la matière

Considérons deux particules-test, c'est-à-dire deux masses soumises à la seule action du champ gravitationnel, et n'influant pas elles-mêmes sur celui-ci. Dans un système de coordonnées de Fermi $\{t, x^i\}$ centré sur la ligne d'univers de l'une des particules, nous noterons ξ^i la position spatiale de la seconde. Dans un tel système de coordonnées, la métrique est plate à des corrections quadratiques près, *i.e.* $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^2)$, de sorte qu'en première approximation $L^2 = \delta_{ij}\xi^i\xi^j$ coïncide avec la distance propre entre les deux particules.

L'équation de déviation des géodésiques permet alors de calculer l'évolution de la distance ξ^i lors du passage d'une onde gravitationnelle ; on montre que le mouvement de la seconde particule par rapport à la première obéit à l'équation⁶

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\partial_t^2 h_{ij}^{\text{TT}} \xi^j, \quad (1.11)$$

où la perturbation est évaluée à l'origine spatiale du système de coordonnées. L'onde gravitationnelle h_{ij}^{TT} peut donc être vue comme responsable de l'apparition d'une « force newtonienne » modifiant la distance propre entre les deux particules au cours du temps. L'équation différentielle (1.11) s'intègre aisément au premier ordre en h_{ij}^{TT} , avec comme résultat

$$\xi^i(t) = \xi^i(0) + \frac{1}{2}h_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{0})\xi^j(0). \quad (1.12)$$

Lors du passage d'une onde gravitationnelle d'amplitude typique h , la distance propre L entre deux particules-test subit donc une variation relative de longueur $\delta L/L \sim \frac{1}{2}h$. On parvient à la même conclusion en considérant l'expression de l'intervalle d'espace-temps dans un système de coordonnées TT.

Considérons une onde gravitationnelle purement sinusoïdale, de période T , et se propageant le long de l'axe des z . Alors en introduisant l'équation (1.10) dans (1.12), on peut déterminer successivement les effets des deux modes de polarisation h_+ et $h_\times$ de l'onde sur la matière. Le résultat est représenté schématiquement sur la Fig. 1.3, pour un anneau de matière initialement au repos autour de la particule centrale.

⁶Ce résultat newtonien néglige les effets de retard dus à la propagation de l'onde, et n'est donc valable que si la distance L entre les particules est négligeable devant la longueur d'onde λ du rayonnement gravitationnel. Cette condition est bien vérifiée par les détecteurs interférométriques terrestres de taille kilométrique (cf. § 1.5), qui présentent leur maximum de sensibilité au voisinage de 10^2 Hz, de sorte que $L \sim 10^{-3}\lambda$.

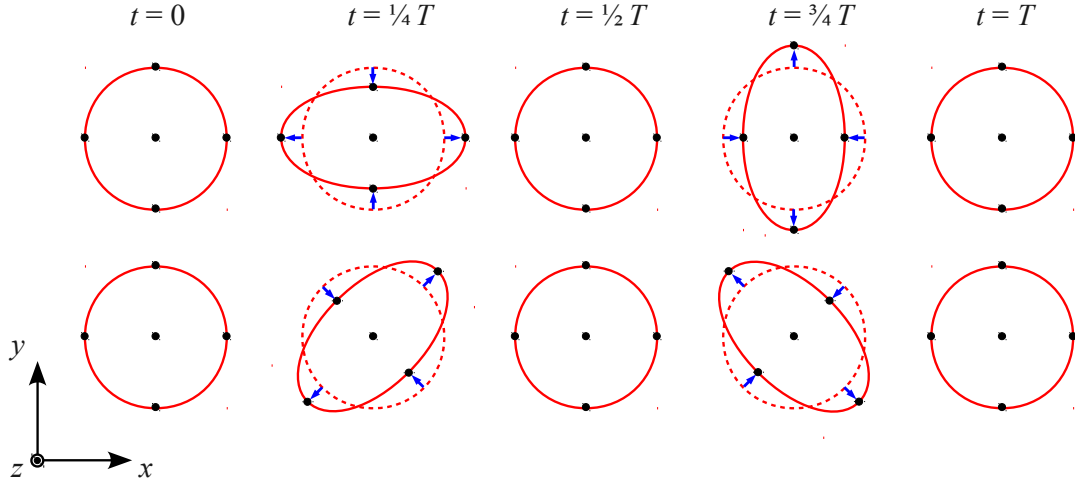


FIG. 1.3: Les effets respectifs des modes de polarisation h_+ (en haut) et $h_\times$ (en bas) d'une onde gravitationnelle sinusoïdale de période T , se propageant le long de l'axe de z , sur un anneau de particules-test initialement au repos.

1.3 Génération d'ondes gravitationnelles

Formule du quadrupôle

Considérons une source matérielle $\mathcal{S}$ à support compact, de masse M , de taille caractéristique R , et décrite par un tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. Nous supposons la source faiblement auto-gravitante, $GM/(Rc^2) \ll 1$, sans quoi les équations d'Einstein linéarisées (1.6) ne sont plus valables, les corrections non linéaires $\sim h^2$ ou plus ne pouvant plus être négligées. D'après la troisième loi de Kepler, la vitesse interne caractéristique v de la source vérifie $v^2 \sim GM/R$; une source faiblement auto-gravitante est donc également non relativiste, $v \ll c$.

L'équation d'onde (1.8) stipule que la source $\mathcal{S}$ génère une perturbation $h_{\mu\nu}$ de la métrique de Minkowski. En jauge harmonique, chaque composante de la perturbation à trace renversée s'exprime donc à l'aide d'une intégrale retardée :

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \frac{4G}{c^4} \int_{\mathcal{S}} \frac{T_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}'. \quad (1.13)$$

Nous avons supposé des conditions d'absence d'ondes rentrantes venant de sources « à l'infini ». Utilisons un système de coordonnées transverse et sans trace (TT) centré sur la source $\mathcal{S}$, et plaçons-nous à grande distance $r = |\mathbf{x}|$ de celle-ci, c'est-à-dire $r \gg R$. Alors quelques manipulations algébriques [298] conduisent à la première *formule du quadrupôle d'Einstein*

$$h_{ij}^{\text{TT}}(\mathbf{x}, t) = \frac{2G}{c^4 r} \left\{ \mathcal{P}_{ijkl}(\mathbf{n}) \frac{d^2 Q_{kl}}{dt^2}(\tau) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c}\right) \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (1.14)$$

qui relie la forme d'onde $h_{ij}^{\text{TT}}(\mathbf{x}, t)$ au point $\mathbf{x}$ et à l'instant t , au moment quadrupolaire newto-

nien (et sans trace) de la source

$$Q_{ij}(t) = \int_S \rho(\mathbf{x}', t) \left(x'_i x'_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathbf{x}'^2 \right) d^3 \mathbf{x}' \quad (1.15)$$

à l'instant retardé $\tau \equiv t - r/c$. La densité de masse newtonienne de la source est donnée en première approximation par $\rho = T^{00}/c^2$. L'opérateur de projection transverse et sans trace $\mathcal{P}_{ijkl} = \mathcal{P}_{ik}\mathcal{P}_{jl} - \frac{1}{2}\mathcal{P}_{ij}\mathcal{P}_{kl}$ est défini à partir du projecteur $\mathcal{P}_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j$ sur le plan orthogonal à la direction $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$. À des ordres d'approximation *post-newtoniens* plus élevés, *i.e.* en incluant des corrections en puissances de $1/c$, la formule (1.14) fait intervenir des moments multipolaires d'ordre de multipolarité plus élevés que le quadrupôle : l'octupôle de masse, le quadrupôle de courant, etc. [400, 65].

Flux d'énergie gravitationnelle

Lorsque la longueur d'onde typique des ondes gravitationnelles λ est très petite devant l'échelle caractéristique de variation de la courbure de l'espace-temps $\mathcal{R}$, on peut définir un tenseur énergie-impulsion (effectif) associé aux ondes gravitationnelles : le *tenseur d'Isaacson* [97, 217, 218]

$$t_{\mu\nu} \equiv \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{ij}^{\text{TT}} \partial_\nu h_{ij}^{\text{TT}} \rangle, \quad (1.16)$$

les crochets $\langle \cdot \rangle$ indiquant une moyenne sur plusieurs longueurs d'onde (voir par exemple [108] pour plus de détails). C'est d'ailleurs cette séparation d'échelle qui permet de définir la notion d'onde gravitationnelle. Une perturbation de l'espace-temps plat de Minkowski correspond au cas limite $\mathcal{R} \rightarrow +\infty$. En introduisant la première formule du quadrupôle d'Einstein (1.14) dans l'expression de la composante 00 du tenseur d'Isaacson, et en intégrant le résultat sur une sphère entourant la source $\mathcal{S}$, on trouve la seconde formule du quadrupôle d'Einstein, qui relie le flux d'énergie $\mathcal{L}$ émis par la source sous forme d'ondes gravitationnelles, ou *luminosité gravitationnelle*, au moment quadrupolaire (1.15) selon

$$\mathcal{L} = \frac{G}{5c^5} \left\{ \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right) \right\}. \quad (1.17)$$

Ordres de grandeur

Afin d'estimer grossièrement la puissance qu'une source quelconque est susceptible d'émettre sous forme d'ondes gravitationnelles, effectuons un calcul d'ordre de grandeur. D'après les Éqs. (1.15) et (1.17), une source périodique de fréquence caractéristique ω et de masse M est susceptible d'émettre une luminosité gravitationnelle caractéristique

$$\mathcal{L} \sim \frac{G}{5c^5} (2\omega)^6 M^2 R^4 s^2, \quad (1.18)$$

où s est un facteur d'asymétrie mesurant l'écart de la distribution de matière de la source à la symétrie sphérique (typiquement $s \lesssim 1$ avec $s = 0$ pour une source à symétrie sphérique). On peut aisément se convaincre à l'aide de cette formule qu'aucune source terrestre ne peut rayonner

une quantité appréciable d'ondes gravitationnelles, de sorte que pour espérer détecter ces ondes, il faut se tourner vers des sources d'origine astrophysique. Introduisant l'échelle relativiste de puissance $c^5/G = 3,6 \times 10^{52} \text{ W}$ et la vitesse caractéristique $v \sim R\omega$ de la source, on calcule aisément au prix de quelques réarrangements la formule alternative⁷

$$\mathcal{L} \sim \frac{16}{5} \frac{c^5}{G} \left(\frac{v}{c}\right)^6 \left(\frac{2GM}{Rc^2}\right)^2. \quad (1.19)$$

Cette expression indique clairement que dans le cas d'une source compacte (de taille caractéristique R voisine de son rayon de Schwarzschild $2GM/c^2$) et relativiste (de vitesse caractéristique v voisine de c), la puissance émise sous forme d'ondes gravitationnelles est de l'ordre de 10^{53} W , soit plus de 10^{26} fois la luminosité du Soleil dans le domaine électromagnétique ! Il s'agit donc là potentiellement d'un des mécanismes les plus énergétiques connus.

Un calcul d'ordre de grandeur semblable dans le cas de la première formule du quadrupôle (1.14) permet d'estimer qu'à une distance r de la source, l'amplitude des ondes gravitationnelles est de l'ordre de

$$h \sim \frac{8GM}{rc^2} \left(\frac{v}{c}\right)^2. \quad (1.20)$$

L'amplitude des ondes est donc d'autant plus grande que la source est massive et son mouvement relativiste. Pour une source astrophysique relativiste typique ($v \lesssim c$ et $M \sim 10M_\odot$) dans l'Univers proche ($r \sim 200 \text{ Mpc}$), on trouve ainsi $h \lesssim 10^{-21}$. D'après l'équation (1.12), le passage d'une onde gravitationnelle d'amplitude typique h induit une variation relative de longueur entre deux particules tests

$$\frac{\delta L}{L} \sim \frac{1}{2}h, \quad (1.21)$$

de sorte que la détection des ondes gravitationnelles est un véritable défi technologique, toutefois en passe d'être relevé (cf. § 1.5).

Les formules du quadrupôle (1.14) et (1.17) telles que présentées ici dans l'approximation linéaire ne sont en fait valables que pour des sources non auto-gravitantes, c'est-à-dire dont la dynamique n'est pas dominée par leur propre gravité. En effet, la conservation du tenseur énergie-impulsion à l'ordre linéarisé, $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$, impose à la matière de la source de suivre des géodésiques de l'espace-temps de Minkowski. En toute rigueur, les calculs précédents ne peuvent donc pas être appliqués à la génération d'ondes gravitationnelles par les systèmes binaires stellaires. Mais l'extension au cas faiblement auto-gravitant — où la dynamique orbitale de la binaire est newtonienne — laisse le résultat inchangé ; elle sera décrite au chapitre suivant, où nous considérerons l'effet des non linéarités du champ gravitationnel.

Remarquons enfin qu'une description précise de la forme d'onde émise par les systèmes binaires compacts coalescents nécessite l'extension des équations (1.14) et (1.17) à des ordres post-newtoniens plus élevés⁸. Ils s'agit là d'une tâche longue et complexe, nécessaire à la détection et l'analyse des ondes gravitationnelles en provenance de ces sources, et qui a été en grande partie menée à bien (voir chapitre 2).

⁷On posera $s = 1$ en se souvenant que la source doit être fortement asymétrique.

⁸Bien que décrivant un effet relativiste, les formules du quadrupôle d'Einstein sont newtoniennes, au sens où elles ne font intervenir que le moment quadrupolaire newtonien (1.15), et les équations du mouvement newtoniennes de la source, utilisées dans l'évaluation des dérivées temporelles.

1.4 Sources astrophysiques et cosmologiques

Dans la perspective de la détection des ondes gravitationnelles, il est crucial de connaître la fréquence caractéristique du signal attendu en plus de son amplitude. La dynamique de la plupart des sources d'ondes gravitationnelles est dominée par leur propre gravité. Par conséquent, la fréquence typique des ondes émises est donnée par l'inverse du temps d'effondrement gravitationnel de ces systèmes, à savoir

$$f \sim \sqrt{G\bar{\rho}}, \quad (1.22)$$

où $\bar{\rho} = M/R^3$ est la densité moyenne d'une source de masse M et de taille caractéristique R . À titre d'exemple, dans le cas de la coalescence d'un binaire compact conduisant à la formation d'un trou noir, $R \gtrsim 2GM/c^2$, de sorte que $f \lesssim c^3/(GM)$. La fréquence des ondes émises est donc d'autant plus basse que leur source est massive. Le spectre des ondes gravitationnelles s'étend de 10^{-16} Hz pour les ondes gravitationnelles générées pendant la phase d'inflation cosmique jusqu'à quelques 10^4 Hz pour les systèmes binaires coalescents d'étoiles à neutrons.

La nature périodique ou non du signal influe considérablement sur la stratégie de détection des ondes gravitationnelles. Leurs sources sont donc fréquemment classées dans les trois catégories suivantes :

- **Les sources périodiques** (ou quasi-périodiques) qui sont bien localisées dans l'espace, et émettent un rayonnement régulier et durable. On distingue la phase spiralante des systèmes binaires compacts (trous noirs ou étoiles à neutrons), et les oscillations individuelles de ces mêmes objets (trou noir perturbé résultant de la fusion de deux objets compacts, ou étoile à neutrons en rotation rapide).
- **Les sursauts** (*bursts* en anglais) sont également des sources bien localisées dans l'espace, mais qui émettent une bouffée très brève d'ondes gravitationnelles. On distingue la coalescence des systèmes binaires compacts des supernovæ à effondrement de cœurs.
- **Les fonds stochastiques**, générés par de très nombreuses sources non cohérentes entre elles. On distingue la contribution des systèmes binaires de naines blanches galactiques de celles de diverses sources plus spéculatives d'origine cosmologique (inflation, transition de phase dans l'Univers primordial, cordes cosmiques, etc.).

Nous allons par la suite présenter succinctement quelques-unes de ces sources, sans nous tenir à une classification aussi rigide.

Systèmes binaires compacts coalescents

Les systèmes binaires compacts coalescents sont formés de deux objets compacts de masses comparables, et résultent de l'évolution de systèmes binaires d'étoiles massives ($M \gtrsim 10M_\odot$). Les objets compacts en question sont des étoiles à neutrons ou des trous noirs de masse stellaire⁹. La masse d'une étoile à neutrons est voisine de la masse de Chandrasekhar, soit environ $1,4M_\odot$. La masse d'un trou noir résultant de l'effondrement du cœur d'une étoile massive est typiquement de l'ordre de $10M_\odot$. D'après l'estimation (1.22), la fréquence des ondes gravitationnelles émises par une binaire d'étoiles à neutrons (resp. de trous noirs) juste avant coalescence est donc voisine

⁹Les naines blanches sont également des objets compacts. Mais les binaires de naines blanches ne coalescent pas, au sens où elles n'admettent pas de dernière orbite stable en raison de leur grande taille, de l'ordre du rayon terrestre.

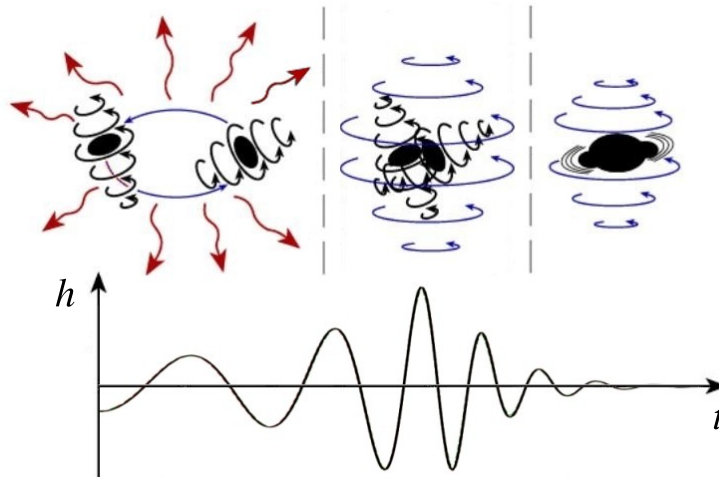


FIG. 1.4: Schéma décrivant les trois stades de l'évolution d'un système binaire de trous noirs : (i) le lent spiralement adiabatique est suivi de (ii) la phase de fusion, rapide et fortement non linéaire, après quoi (iii) le trou noir nouvellement formé relaxe vers un trou noir de Kerr en émettant des modes quasi-normaux. *Adapté de K. Thorne.*

de 10^4 Hz (resp. 10^3 Hz). L'évolution temporelle des systèmes binaires compacts coalescents est couramment divisée en trois phases (voir la Fig. 1.4) :

- **La phase de spiralement**, au cours de laquelle les deux corps suivent des orbites elliptiques sur un temps dynamique, mais voient leurs paramètres orbitaux évoluer de manière adiabatique en raison de la force de réaction au rayonnement gravitationnel. L'orbite est rapidement circularisée par l'émission d'ondes gravitationnelles, qui emportent du moment cinétique orbital [328]. Les *développements post-newtoniens* sont particulièrement bien adaptés au traitement de cette phase (voir chapitre 2).
- **La phase de fusion**, très rapide et fortement non linéaire. En principe, seule la *relativité numérique* — où l'espace-temps est entièrement simulé sur grille — permet de calculer avec exactitude (moyennant l'erreur numérique) la forme d'onde durant cette phase ; voir par exemple [342, 213] pour des revues détaillant les progrès récents dans ce domaine.
- **La phase de vibration**, au cours de laquelle le trou noir nouvellement formé rayonne des ondes gravitationnelles sous forme de modes quasi-normaux, de façon à relaxer vers un trou noir de Kerr. La *théorie des perturbations* d'un trou noir fournit une description analytique de cette dernière phase (voir chapitre 3).

Les systèmes binaires d'étoiles à neutrons sont les sources d'ondes gravitationnelles les plus prometteuses pour le réseau de détecteurs interférométriques terrestres (voir § 1.5). Les modèles d'évolution stellaire prédisent un taux de coalescence compris entre quelques événements et plusieurs centaines d'événements par an dans une sphère de rayon 200 Mpc autour de notre galaxie¹⁰ [267]. Cela représente au moins quelques détections par an pour la future génération de détecteurs interférométriques terrestres [1]. Les taux de coalescences de binaires mixtes ou de trous noirs sont bien plus incertains. Voir le tableau 1.1 pour plus de détails.

¹⁰Le premier chiffre représente une borne inférieure, déduite de l'observation de pulsars binaires dans notre galaxie, comme par exemple PSR 1913+16.

Systèmes binaires de trous noirs super-massifs

Un nombre croissant d'observations indique que le centre de chaque galaxie massive abrite très probablement un trou noir dit super-massif dont la masse, comprise entre $10^6 M_\odot$ et $10^9 M_\odot$ [346], est fortement corrélée aux propriétés du bulbe galactique [171, 187]. Par ailleurs, de nombreux indices suggèrent que les galaxies croissent essentiellement par fusion au cours de l'évolution cosmologique. Une telle fusion de galaxies conduit au rapprochement de leurs trous noirs super-massifs respectifs par friction dynamique avec le milieu galactique jusqu'à une distance ~ 1 pc. Si les processus astrophysiques d'interaction avec les étoiles environnantes parviennent à réduire cette distance d'un facteur ~ 100 , alors la binaire finit par coalescer en une durée de l'ordre d'un temps de Hubble par émission de rayonnement gravitationnel [293].

L'évolution des systèmes binaires de trous noirs super-massifs est qualitativement identique à celle des binaires de trous noirs de masses stellaires (cf. Fig. 1.4). Quantitativement, les grandeurs physiques pertinentes (amplitude et fréquence des ondes, luminosité gravitationnelle, etc.) doivent être ajustées en fonction de la masse de la source. Ainsi, d'après l'estimation (1.22), la fréquence des ondes gravitationnelles émises par un système binaire de trous noirs super-massifs est comprise entre 10^{-5} Hz et 10^{-2} Hz juste avant la coalescence. Ces sources sont donc de très bons candidats pour le détecteur interférométrique spatial LISA (voir § 1.5). De plus, en raison de leur très grande masse, LISA pourra les détecter jusqu'à des décalages spectraux z cosmologiques avec un très grand rapport signal sur bruit.

Le nombre de coalescences détectables par LISA jusqu'à $z = 10 - 12$ est estimé entre quelques dizaines et quelques centaines au cours des trois ans de la mission [372] ; le nombre exact de coalescences observées permettra de contraindre les scénarios de croissance des trous noirs super-massifs. Par ailleurs, la détection de ces ondes gravitationnelles donnera accès à la distance-luminosité de leur source, tandis que l'observation d'une éventuelle contre-partie optique permettra de mesurer le décalage spectral de l'événement. L'observation de coalescences de binaires de trous noirs super-massifs par LISA ouvre donc la voie à une cosmologie de précision basée sur l'astronomie gravitationnelle [368, 130].

De manière générique, les ondes gravitationnelles émises par de telles sources emportent de la quantité de mouvement, de sorte que par conservation de la quantité de mouvement totale, le trou noir super-massif résultant de la fusion est susceptible d'être éjecté de sa galaxie hôte ; il s'agit de l'effet de recul gravitationnel, dont les conséquences astrophysiques sont potentiellement très importantes ; voir le chapitre 7 pour plus de détails.

Binaires à rapport de masses extrême

Par le jeu des interactions gravitationnelles à trois corps, un trou noir super-massif parvient occasionnellement à capturer un astre compact orbitant dans le voisinage du cœur galactique. Cet objet compact de masse stellaire, typiquement comprise entre $1,4 M_\odot$ et $10 M_\odot$, orbite alors autour du trou noir super-massif sur une orbite fortement elliptique [8]. Il se forme une binaire spirale à rapport de masses extrême, ou EMRI pour *Extreme Mass Ratio Inspiral* en anglais.

Les EMRIs sont parmi les sources d'ondes gravitationnelles les plus prometteuses pour le détecteur interférométrique spatial LISA [8]. La fréquence de telles captures est estimée à une par an dans une sphère de rayon 1 Gpc autour de la Terre [376]. L'intégration du signal au cours de la dernière année avant coalescence devrait suffire pour détecter ces sources avec un rapport

signal sur bruit supérieur à 10 ; le nombre exact dépend beaucoup de la masse et du spin du trou noir super-massif, ainsi que de la masse de l'astre compact [175].

La forme d'onde générique résultant du mouvement du petit corps compact dans le champ gravitationnel du trou noir super-massif est particulièrement complexe ; voir la Fig 3.1 pour une illustration. Ces ondes gravitationnelles encodent donc une mine d'informations sur l'espace-temps fortement relativiste au voisinage du trou noir super-massif. Leur détection permettra de tester la relativité générale en champ fort, et en particulier le théorème de calvitie des trous noirs¹¹, avec une précision inégalée [352, 353]. Les chapitres 4 et 5 apportent une contribution à la modélisation de ces sources d'ondes gravitationnelles.

Effondrements gravitationnels et supernovæ

Les supernovæ de type II, Ib et Ic résultent de l'effondrement gravitationnel de cœurs d'étoiles massives très évoluées. Les modèles théoriques et l'observation de la supernova SN 1987A suggèrent que $\sim 99\%$ de l'énergie potentielle gravitationnelle libérée lors de l'effondrement est convertie en neutrinos, $\sim 1\%$ en énergie cinétique de l'éjecta, et une fraction $\sim 10^{-4}$ en rayonnement électromagnétique.

La simulation des supernovæ à effondrement de cœurs est un domaine très actif de l'astrophysique numérique. Cependant, la complexité du problème ne permet pas encore d'inclure toute la physique mise en jeu : relativité générale, magnéto-hydrodynamique relativiste, transports des neutrinos et radiatif, traitement microphysique des interactions nucléaire et faible, etc. Les simulations actuelles ont d'ailleurs beaucoup de difficulté à inverser le flot de matière afin de produire une explosion en accord avec la puissance et les courbes de lumière des supernovæ observées ; le mécanisme (ou la combinaison de mécanismes) responsable de l'explosion demeure inconnu.

Historiquement, ces supernovæ figuraient parmi les sources d'ondes gravitationnelles les plus prometteuses [174]. Les premières estimations de l'amplitude des ondes ainsi générées et de la luminosité gravitationnelle se sont toutefois avérées trop optimistes. Les simulations numériques récentes montrent que la dynamique de l'effondrement gravitationnel et du rebond présente un faible écart à la symétrie sphérique, de sorte que seule une fraction comprise entre 10^{-7} et 10^{-5} de l'énergie disponible est convertie en ondes gravitationnelles [303].

Celles-ci interagissant très peu avec la matière, elles nous parviennent essentiellement telles qu'engendrées au cœur de l'étoile, et contiennent donc de précieuses informations sur la dynamique de l'effondrement gravitationnel, informations auxquelles ni les photons, ni même les neutrinos, ne permettraient d'accéder. Au vu de la faible amplitude des signaux attendus, il faudra toutefois attendre la prochaine génération de détecteurs interférométriques terrestres pour observer des supernovæ dans le groupe local de galaxies, à une distance ~ 1 Mpc, à raison de quelques événements par siècle [317].

¹¹En relativité générale, le champ gravitationnel extérieur d'un trou noir stationnaire est entièrement caractérisé par les seuls masse, charge électrique, et moment cinétique intrinsèque (ou spin) du trou noir. Cette propriété remarquable est à l'origine de la célèbre formule selon laquelle « les trous noirs n'ont pas de cheveux ».

Étoiles à neutrons en rotation

Les étoiles à neutrons résultant de l'effondrement de cœurs d'étoiles massives en fin de vie sont, de manière générique, en rotation. Tout comme les étoiles ordinaires, les étoiles à neutrons possèdent de nombreuses familles de modes propres de pulsation. Une grande diversité de processus physiques peut conduire à l'instabilité d'un ou plusieurs de ces modes [11]. L'apparition d'un moment quadrupolaire variable (ou de multipôles d'ordre de multipolarité plus élevé) résulte alors dans l'émission périodique ou quasi-périodique d'ondes gravitationnelles. Le signal attendu est typiquement bien inférieur au niveau de bruit des détecteurs d'ondes gravitationnelles. Mais comme le rapport signal sur bruit croît proportionnellement à la racine carrée du nombre de cycles observés, ces sources peuvent être détectées par la méthode de corrélation croisée, moyennant un temps d'observation suffisamment long.

La surface des pulsars peut également être déformée par l'influence de leur fort champ magnétique, ou par des contraintes mécaniques s'exerçant sur la croûte [91, 231]. L'écart (relatif) à la symétrie axiale résultant est caractérisé par un paramètre d'ellipticité ϵ , analogue au paramètre s introduit dans l'Éq. (1.18). Les détecteurs interférométriques terrestres ont déjà pu poser des limites sur la taille de telles « montagnes ». Ainsi, en supposant que la décroissance observée de la période de rotation du pulsar du Crabe, PSR J0534+2200, est entièrement due à la perte de moment cinétique engendrée par l'émission d'ondes gravitationnelles, on a pu poser la contrainte $\epsilon < 1,8 \times 10^{-4}$ pour ce pulsar¹² [2].

La détection d'ondes gravitationnelles en provenance d'étoiles à neutrons en rotation nous renseignera sur la structure interne de ces objets compacts, et en particulier sur l'équation d'état de la matière à très haute densité (supérieure à 4 fois la densité nucléaire) [205], impossible à mesurer sur Terre.

Fonds stochastiques d'origines cosmologiques

L'émission de rayonnement gravitationnel par de très nombreuses sources incohérentes entre elles est responsable de l'apparition d'un fond stochastique d'ondes gravitationnelles. De nombreux mécanismes physiques plus ou moins spéculatifs en cosmologie primordiale sont susceptibles de produire de tels fonds stochastiques : inflation cosmique, transition de phase du premier ordre, cordes cosmiques, etc. Voir par exemple [7, 274, 103] pour quelques revues sur le sujet.

Le contenu spectral et énergétique d'un fond stochastique est fréquemment caractérisé par la grandeur adimensionnée

$$\Omega_{\text{OG}}(f) = \frac{f}{\rho_c} \frac{d\rho_{\text{OG}}}{df}, \quad (1.23)$$

où f est la fréquence des ondes, $d\rho_{\text{OG}}/df$ la densité d'énergie par intervalle de fréquence, et $\rho_c = 3H_0^2/(8\pi G)$ la densité critique de l'Univers (cf. chapitre 8), avec H_0 la constante de Hubble actuelle. La contribution d'un fond stochastique au budget énergétique de l'Univers est donnée par l'intégrale $\Omega_{\text{OG}} = \int \Omega_{\text{OG}}(f) d(\ln f)$. De manière générale, les spectres $\Omega_{\text{OG}}(f)$ de fonds stochastiques produits par des mécanismes physiques distincts présentent des caractéristiques différentes (fréquence et amplitude du maximum, pentes avant et après le maximum), ce

¹²Ce résultat présuppose un certain modèle pour le pulsar ; en particulier la valeur de son moment d'inertie, ainsi que le rapport entre la fréquence de rotation et la fréquence des ondes gravitationnelles émises.

qui permettra en principe de les distinguer lors de leur éventuelle détection. L'absence de détection par les antennes gravitationnelles terrestres LIGO/VIRGO a déjà permis de poser la limite $\Omega_{\text{OG}}(f) < 6,9 \times 10^{-6}$ (intervalle de confiance à 95%) au voisinage de 100 Hz [3], ce qui représente une amélioration notable des bornes supérieures inférées de l'observation du fond diffus cosmologique et de la théorie de la nucléosynthèse primordiale.

Le paradigme inflationnaire prédit l'existence d'un fond stochastique d'ondes gravitationnelles primordiales, générées à partir des fluctuations quantiques de la composante tensorielle du champ gravitationnel, et dont la longueur d'onde a été dilatée jusqu'à des échelles macroscopiques lors de la phase d'inflation cosmique [257]. Dans les modèles d'inflation les plus simples, le spectre des ondes gravitationnelles ainsi générées est presque invariant d'échelle, tout comme le spectre des perturbations scalaires générées par l'inflaton. La détection directe de ces ondes, ainsi que la vérification d'une relation de cohérence entre les indices spectraux des perturbations scalaires et tensorielles, sont des tests cruciaux du paradigme inflationnaire.

En raison de la très faible interaction des gravitons avec la matière et le rayonnement, ces ondes gravitationnelles se sont découplées très tôt du plasma primordial. L'observation du fond stochastique associé par les détecteurs terrestres LIGO/VIRGO (resp. spatial LISA) ouvrirait ainsi une fenêtre sur la physique de l'Univers primordial, quelques 10^{-22} s (resp. 10^{-14} s) après le Big-Bang.

1.5 Détection des ondes gravitationnelles

Le fonctionnement de la plupart des détecteurs d'ondes gravitationnelles est basé sur la mesure d'une variation de distance propre entre deux masses-test (cf. § 1.2). L'amplitude typique de l'effet induit lors du passage d'une onde gravitationnelle étant extrêmement faible, il convient d'atténuer les sources de bruit, et d'amplifier le signal par divers protocoles expérimentaux. Pour la majorité des sources d'ondes gravitationnelles, ces précautions ne suffisent pas pour extraire le signal du bruit ; il est nécessaire de connaître la forme du signal par avance, et de corrélérer les patrons d'ondes ainsi construits avec la sortie du détecteur. Cette dernière remarque justifie l'intérêt (pratique) des travaux présentés dans les chapitres 4, 5 et 6.

Barres résonantes

La toute première tentative de détection directe des ondes gravitationnelles remonte au début des années 60, lorsque Joseph Weber a mis au point les premières barres résonantes, dont il établit au préalable le principe de fonctionnement [412]. Son travail de pionnier, à une époque où l'on en savait encore très peu sur les possibles sources d'ondes gravitationnelles, a conduit par la suite au développement de barres plus sophistiquées. Les barres résonantes sont des cylindres métalliques (alliages à base d'aluminium) de quelques tonnes, dont les caractéristiques géométriques sont déterminées de façon à ce que les fréquences de résonance (typiquement deux) soient voisines de 1 kHz, fréquence caractéristique attendue pour de nombreuses sources d'ondes gravitationnelles.

Le passage d'une onde gravitationnelle induit une modification de la longueur propre de la barre, conformément à l'Éq. (1.21). Celle-ci est mesurée à l'aide de transducteurs qui convertissent la contrainte mécanique en signal électrique, qui est ensuite amplifié. L'effet est d'autant plus important que la fréquence de l'onde gravitationnelle est voisine de l'une des fréquences de

résonance de la barre. La bande passante de ces détecteurs est étroite : de l'ordre de 100 Hz autour des fréquences de résonance. Afin d'augmenter la sensibilité des barres résonantes, il est nécessaire de réduire les principales sources de bruit : le bruit de conversion du signal acoustique en signal électrique, et le bruit thermique dû à l'agitation des atomes de la barre ; ce dernier est diminué en refroidissant les barres à très basse température, typiquement entre 100 mK et quelques K.

À l'heure actuelle, trois barres sont en fonctionnement, *i.e.* prennent des données ou sont « mises à jour » : AURIGA [22] et NAUTILUS [306] en Italie, près de Padoue et de Rome respectivement, et EXPLORER [165] au CERN, en Suisse. Leur sensibilité permet de détecter des sursauts d'amplitude typique $h \sim 10^{-19}$ [167]. Cette sensibilité autorise en principe l'observation de la supernova du siècle¹³, ou la coalescence d'une binaire compacte située dans l'amas local. Les recherches actuelles s'orientent vers des masses résonantes de forme sphérique (les projets MiniGRAIL [294] près de Leiden, en Hollande, et le détecteur « Mário Schenberg » [201] à São Paulo, au Brésil) qui présentent l'avantage de pouvoir détecter des ondes gravitationnelles dans toutes les directions, et de mesurer leur position avec précision, ainsi que vers les résonateurs doubles, dont la bande passante est de l'ordre du kHz [115].

Interféromètres au sol

Les détecteurs interférométriques d'ondes gravitationnelles sont essentiellement des interféromètres de Michelson-Morlay, dont les bras mesurent de quelques centaines de mètres à plusieurs kilomètres de long : un faisceau laser est scindé en deux par un miroir séparateur semi-réfléchissant ; les faisceaux orthogonaux résultants parcourent chacun un bras de l'interféromètre, puis sont recombinaés sur une photodiode, où l'on observe une figure d'interférence (cf. Fig. 1.5). Le passage d'une onde gravitationnelle affecte différemment la longueur des bras, induisant ainsi une variation de chemin optique, qui se traduit par un écart à la frange sombre, sur laquelle est réglé l'interféromètre « au repos ». L'utilisation de cavités Fabry-Perot dans chaque bras permet de multiplier par un facteur ~ 100 la distance parcourue par les photons avant qu'ils n'interfèrent. On gagne ainsi deux ordres de grandeur sur la sensibilité de la mesure, proportionnelle à la taille effective des bras. D'après l'estimation (1.21), la détection d'une onde gravitationnelle d'amplitude typique $h \sim 10^{-21}$ par un interféromètre de taille physique $L = 2$ km requiert tout de même de parvenir à mesurer une variation de longueur $\delta L \sim 10^{-16}$ m, soit un dixième de la taille d'un noyau atomique¹⁴ !

Les interféromètres sont des détecteurs large bande, de bande bassante typiquement comprise entre 10 Hz et quelques kHz. Le maximum de sensibilité se situe entre 100 Hz et 500 Hz. Cette large bande passante permet d'étudier de nombreuses sources d'ondes gravitationnelles, parmi lesquelles les systèmes binaires d'objets compacts de masses stellaires, les supernovæ, et les étoiles à neutrons en rotation (cf. § 1.4). La bande passante des détecteurs interférométriques terrestres est contrainte par trois principales sources de bruit : le bruit sismique à basse fréquence, le bruit de comptage de photons, ou bruit de grenaille (*shot noise* en anglais) à haute fréquence, et le bruit thermique à fréquence intermédiaire. La réduction de ces bruits requiert l'utilisation de

¹³C'est ainsi qu'est surnommée la prochaine supernova qui aura lieu dans notre galaxie, la physique stellaire prédisant un taux moyen de deux supernovæ par siècle dans les galaxies équivalentes à la Voie Lactée [55].

¹⁴Cette ambition ne se heurte pas à la mécanique quantique, car la mesure de position est effectuée sur un degré de liberté macroscopique : la position moyenne d'un miroir contenant un très grand nombre d'atomes.

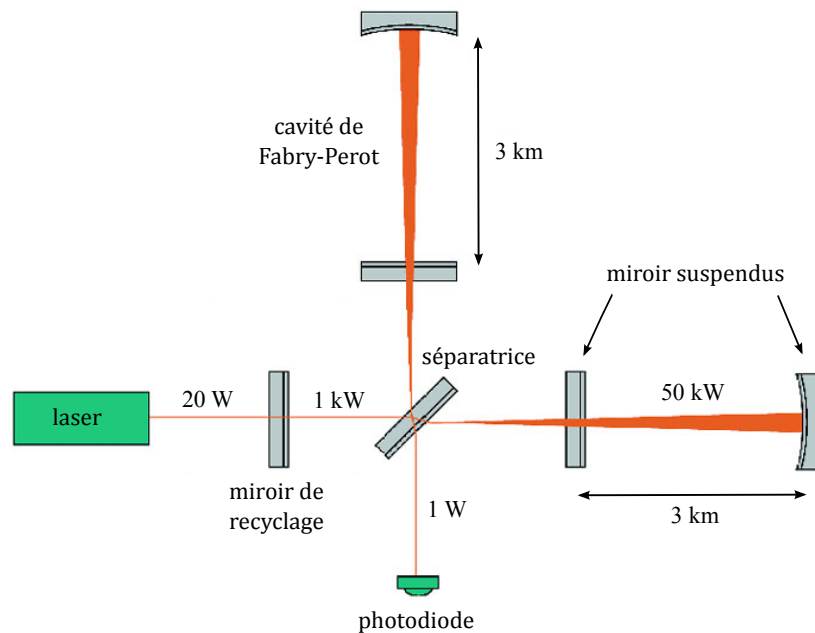


FIG. 1.5: Schéma de fonctionnement des détecteurs interférométriques terrestres d'ondes gravitationnelles. Les caractéristiques techniques sont celles du détecteur franco-italien VIRGO. Adapté d'une figure tirée de la page Web <http://www.ego-gw.it/virgodescription/index.html>.

suspensions antisismiques pour les miroirs, d'un laser stable de grande puissance (typiquement quelques dizaines de Watts), d'un système de recyclage de la lumière, le tout fonctionnant sous vide ; une véritable prouesse technologique est nécessaire afin de réaliser un exploit scientifique.

Il existe actuellement six interféromètres opérationnels répartis sur le globe :

- **LIGO** (*Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory*) [265] regroupe trois interféromètres situés sur le territoire américain : l'un à Livingston, en Louisiane, dont les bras mesurent 4 km de long, et deux à Hanford, dans l'état de Washington, de 4 km et 2 km.
- **VIRGO** [410] est un interféromètre franco-italien de 3 km, situé à Cascina, près de Pise, en Italie. Il est similaire aux détecteurs américains, mais bénéficie d'une isolation sismique plus sophistiquée, ce qui lui confère une plus grande sensibilité à basse fréquence : sa bande passante s'étend jusqu'à 10 Hz au lieu de 60 Hz pour LIGO.
- **GEO** [191] est un interféromètre germano-britannique de 600 m situé près de Hanovre, en Allemagne. Malgré sa taille plus réduite, sa sensibilité est comparable, quoique inférieure, à celle des détecteurs de taille kilométrique. On y développe les technologies d'avant-garde ensuite implémentées sur les détecteurs de taille kilométrique.
- **TAMA** [394] est un interféromètre japonais de 300 m situé près de Tokyo, au Japon, considéré comme un prototype en vue de la construction de l'interféromètre de taille kilométrique LCGT (*Large-scale Cryogenic Gravitational-wave Telescope*) [260].

Type de binaire	LIGO (initial)	LIGO (avancé)
EN-EN	$2 \times 10^{-4} - 7 \times 10^{-1}$	$1 - 4 \times 10^2$
EN-TN	$2 \times 10^{-3} - 7 \times 10^{-2}$	$9 - 4 \times 10^2$
TN-TN	$0 - 2$	$0 - 8 \times 10^3$

TAB. 1.1: Les nombres de coalescences de systèmes binaires compacts observables par an par les détecteurs LIGO (initial ou avancé), tels que prédits par les modèles d'évolution stellaire. Les incertitudes sur les processus astrophysiques conduisant à la formation de systèmes binaires compacts se reflètent dans les incertitudes sur les taux de coalescences attendus. Légende : EN pour étoile à neutrons, et TN pour trou noir. *Tableau tiré de [46].*

Le projet AIGO (*Australian International Gravitational Observatory*) [5] envisage la construction du premier détecteur interférométrique de taille kilométrique dans l'hémisphère sud, en Australie. L'existence d'un réseau mondial d'antennes gravitationnelles présente de nombreux avantages, parmi lesquels une meilleure couverture du ciel, une mesure plus précise de la position des sources, et la détection en coïncidence, qui facilite l'exclusion de faux candidats.

Les premières détections directes d'ondes gravitationnelles devraient avoir lieu grâce aux détecteurs interférométriques, en raison de leur sensibilité à des signaux d'amplitude $h \sim 10^{-22}$, trois ordres de grandeur supérieure à celle des barres résonantes. D'après le tableau 1.1, la détection d'une coalescence de binaire compacte est peu probable avec la première génération de détecteurs interférométriques (*Initial* LIGO et VIRGO), mais elle est pratiquement certaine avec la seconde (*Advanced* LIGO et VIRGO+), le nombre d'événements attendus par an permettant même de faire des statistiques sur les propriétés des sources.

Interféromètre spatial

Afin d'accéder à des fréquences inférieures à 10 Hz, il est nécessaire de s'affranchir du bruit de gradient de gravité terrestre, et par conséquent d'utiliser un détecteur spatial. Le projet LISA (*Laser Interferometer Space Antenna*) [268], développé conjointement par les agences spatiales européenne (ESA) et américaine (NASA), consiste à envoyer dans l'espace trois satellites contenant chacun deux masses-test en chute libre. Ces vaisseaux forment un triangle équilatéral de 5×10^6 km de côté, incliné de 60° par rapport au plan de l'écliptique, et dont le centre de masse orbite autour du Soleil sur l'orbite terrestre, 20° derrière la Terre (voir Fig. 1.6). Cette configuration permet (en première approximation) de conserver la forme triangulaire au cours du mouvement orbital, le triangle effectuant une révolution autour du Soleil et une rotation sur lui-même chaque année. La modulation du signal gravitationnel induite par le mouvement orbital du détecteur présente l'avantage de faciliter la localisation de la source.

Chaque satellite possède deux bras, chacun disposant d'une masse-test et d'un faisceau laser pointant vers l'un des deux autres satellites. Le principe de détection des ondes gravitationnelles est basé sur la mesure de la distance entre les masses-test à l'aide des six faisceaux lasers. Contrairement au fonctionnement des interféromètres terrestres, la lumière laser n'est pas renvoyée d'un satellite à l'autre à l'aide de miroirs¹⁵, mais reçue, asservie en phase, puis amplifiée avant d'être ré-

¹⁵La perte d'énergie causée par la diffraction du faisceau laser serait bien trop importante.

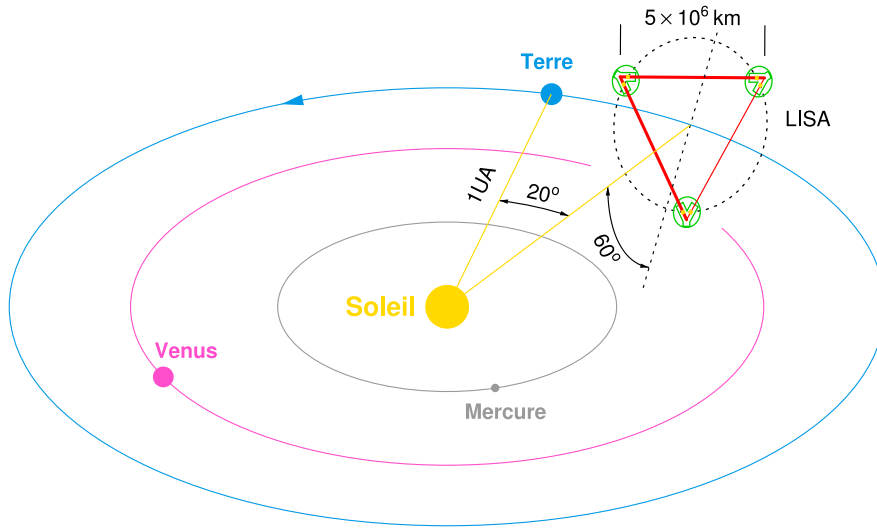


FIG. 1.6: Vue schématique de l'orbite de LISA, un projet de détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles dans l'espace. La taille des bras est magnifiée d'un facteur 10 sur cette illustration. *Figure adaptée de [147].*

émise. La configuration triangulaire de LISA permet de construire trois interféromètres de Michelson indépendants, autorisant ainsi la mesure directe des deux états de polarisation des ondes gravitationnelles.

Les masses-test sont protégées des perturbations d'origine non gravitationnelles induites par l'environnement (pression de radiation solaire, pression exercée par le vent solaire, etc.) à l'aide des vaisseaux eux-mêmes grâce à un système de compensation de traînée : les vaisseaux corrigent leurs positions en permanence à l'aide de micro-propulseurs¹⁶ de façon à suivre le mouvement de chute libre des masses-test. La sensibilité de LISA est limitée par le bruit instrumental sur les accéléromètres à basse fréquence, par la capacité à transmettre des signaux sur de si grandes distances à haute fréquence, et par le bruit de grenaille à fréquence intermédiaire ; voir par exemple [147] pour plus de détails.

La bande de fréquence de LISA, typiquement comprise entre 10^{-4} Hz et 10^{-1} Hz, avec un maximum de sensibilité vers 1 mHz, est complémentaire de celle des détecteurs terrestres. LISA devrait donc détecter des ondes gravitationnelles en provenance de sources plus massives : systèmes binaires de trous noirs super-massifs, EMRIs, et fonds stochastiques d'origines cosmologiques. La sensibilité de cette antenne gravitationnelle est comparable à celle des détecteurs terrestres, mais les sources étant bien plus massives, elle observera de nombreux événements jusqu'à des distances cosmologiques avec un rapport signal sur bruit de 1000, voire plus. LISA est pour grande part une mission de physique fondamentale ; elle permettra de tester la description einsteinienne du rayonnement gravitationnel, d'explorer l'espace-temps en champ fort au voisinage de trous noirs super-massifs grâce aux EMRIs, et de faire de la cosmographie : mesurer le taux d'expansion de l'Univers, contraindre la variabilité temporelle de l'énergie noire, etc. [369].

¹⁶Un des enjeux technologiques majeurs du projet LISA est le développement de réacteurs capables de délivrer une poussée continue dans l'intervalle 0 – 100 μ N, avec une résolution de 0,1 μ N [284].

La mission LISA Pathfinder, qui devrait être lancée courant 2014, vise à démontrer la faisabilité technologique du projet. Si elle y parvient, alors LISA devrait voler aux alentours de 2020.

☒

DÉVELOPPEMENTS POST-NEWTONIENS

Le problème à deux corps, si simple à résoudre en gravitation newtonienne, n'admet pas de solution exacte en relativité générale. Tout travail analytique doit alors tôt ou tard faire appel à une approximation, où les équations d'Einstein sont typiquement développées en puissances d'un « petit » paramètre. Dans ce chapitre, nous évoquons quelques généralités sur l'un des schémas d'approximation les plus connus et fructueux en relativité générale : les développements post-newtoniens, car l'ensemble de ce travail de thèse sur la modélisation des sources d'ondes gravitationnelles est basé (à des degrés divers) sur cette méthode de résolution des équations d'Einstein. Nous renvoyons le lecteur à la revue [61] pour de bien plus amples détails. On pourra également se référer aux travaux historiques, parmi lesquels [269, 161, 180, 116, 119, 118].

2.1 Calculs de patrons d'ondes

La détection des ondes gravitationnelles relève de la prouesse technologique en raison de la petitesse de l'effet à détecter : $\delta L/L \sim \frac{1}{2}h \lesssim 10^{-21}$. Les systèmes binaires d'objets compacts (de masses stellaires) sont parmi les sources d'ondes gravitationnelles les plus prometteuses pour les détecteurs interférométriques terrestres. La méthode d'analyse des données maximisant les chances de détection d'une binaire compacte est la corrélation croisée : on calcule le produit de convolution du signal de sortie du détecteur avec un *patron d'onde*, c'est-à-dire avec la prédiction théorique de la relativité générale, censée représenter le signal physique, le tout pondéré par la fonction de réponse du détecteur (la puissance spectrale du bruit dans le détecteur), qui rend compte de la plus ou moins grande sensibilité du détecteur selon la fréquence. Il est donc nécessaire d'avoir en main une représentation théorique (sous forme analytique ou numérique) aussi fidèle que possible du signal réel à détecter. Durant la phase de spiralement adiabatique (voir Fig. 1.4), le mouvement orbital de la binaire, et l'émission d'ondes gravitationnelles qui en résulte, peuvent être calculés avec grande précision grâce à l'une des grandes classes de schémas d'approximation en relativité générale : les développements post-newtoniens.

Développements post-newtoniens

Si la vitesse orbitale typique v de la source est faible devant celle de la lumière, $v \ll c$, et si le potentiel gravitationnel U vérifie $U \ll c^2$, alors on peut résoudre les équations d'Einstein en cherchant une solution sous la forme d'un développement en puissances du « petit » paramètre post-newtonien

$$\varepsilon_{\text{PN}} \sim \frac{v^2}{c^2} \sim \frac{Gm}{Rc^2}, \quad (2.1)$$

la dernière égalité valant pour un système auto-gravitant de masse m , et de taille caractéristique R . Le domaine de validité de l'approximation post-newtonienne est limité à la *zone proche* $r \ll \lambda$, où $\lambda \sim cT \sim cR/v \gg R$ est la longueur d'onde typique des ondes gravitationnelles émises par une source évoluant sur un temps caractéristique T . En effet, l'approximation post-newtonienne traite systématiquement les effets de retard dus à la propagation des ondes comme de petites corrections à une propagation instantanée, et par conséquent diverge dans la zone d'onde $r \gtrsim \lambda$, comme l'illustre de manière schématique le développement post-newtonien d'une onde sphérique scalaire retardée :

$$\frac{S(t - \frac{r}{c})}{r} = \frac{S(t)}{r} - \frac{1}{c} \dot{S}(t) + \frac{1}{2c^2} \ddot{S}(t) r - \frac{1}{6c^3} \dddot{S}(t) r^2 + \dots \quad (2.2)$$

Dans ce chapitre, nous garderons en tête l'application d'un formalisme général, valable pour une source post-newtonienne quelconque, au cas d'un système binaire d'objets compacts.

Afin de produire des patrons d'onde de précision suffisante pour la détection et l'analyse des ondes gravitationnelles émises durant la phase spiraleante des binaires compacts, il est nécessaire de pousser les calculs jusqu'à un ordre post-newtonien très élevé : au moins 3PN [126], c'est-à-dire qu'il faut inclure toutes les corrections post-newtoniennes jusqu'à l'ordre $1/c^6$ inclus au-delà du résultat newtonien. *Infine*, on souhaite disposer d'expressions pour l'amplitude et la phase des deux états de polarisation h_+ et $h_\times$ des ondes gravitationnelles en fonction du temps coordonnée local t , en fonction des paramètres intrinsèques de la source (masses, spins, etc.) et des paramètres extrinsèques (distance, position dans le ciel, etc.). En particulier, la connaissance de la phase orbitale $\phi(t)$ du système binaire à l'ordre, disons, 3.5PN est cruciale, le patron d'onde devant rester en phase avec le signal physique durant toute la durée d'intégration par le détecteur.

L'effet dominant de la réaction au rayonnement gravitationnel sur le mouvement orbital d'une source post-newtonienne intervient à l'ordre 2.5PN au-delà du résultat newtonien, c'est-à-dire que la force gravitationnelle newtonienne est corrigée par une force de réaction au rayonnement proportionnelle à $(v/c)^5$. Le travail effectué par cette force de freinage est responsable d'une perte d'énergie orbitale, précisément égale à l'énergie emportée par les ondes gravitationnelles générées, telle que calculée à l'aide de la seconde formule du quadrupôle (1.17).

En utilisant la définition (1.16) du tenseur énergie-impulsion effectif associé aux ondes gravitationnelles, on peut montrer que ces dernières emportent également du moment cinétique, de sorte que la binaire se circularise très rapidement [328]. Lorsque la fréquence du signal commence à entrer dans la bande passante des détecteurs interférométriques terrestres ($f \sim 10$ Hz), les deux corps sont déjà sur des orbites quasi-circulaires, c'est-à-dire qui seraient circulaires en l'absence du spiralement adiabatique rentrant dû à la réaction au rayonnement. À titre d'exemple, pour le pulsar binaire PSR 1913+16, on trouve ainsi une excentricité résiduelle $e \simeq 5,3 \times 10^{-6}$, sachant que la valeur actuelle mesurée est $e_0 \simeq 0,617$.

Balance d'énergie

En principe, l'évolution de la phase orbitale $\phi(t)$ de la source à l'ordre 3.5PN peut se déduire de la connaissance de toutes les corrections relatives jusqu'à l'ordre 3.5PN à la force de réaction au rayonnement dominante à 2.5PN dans le mouvement de la source ; en pratique, le calcul des corrections au mouvement newtonien jusqu'à l'ordre 6PN est une tâche insurmontable. Nous sommes donc conduits à *postuler* la validité de l'équation de balance d'énergie¹

$$\frac{dE}{dt} = -\mathcal{L}, \quad (2.3)$$

qui traduit le fait que l'énergie orbitale E du système binaire décroît par émission d'ondes gravitationnelles, ces dernières emportant avec elles une énergie $\mathcal{L}$ par unité de temps. Bien que le bilan énergétique (2.3) paraisse « naturel » physiquement, il faut garder à l'esprit qu'il n'existe aucune preuve générale de sa validité qui soit basée sur les principes fondamentaux de la relativité générale. Cependant, cette relation a été vérifiée explicitement pour une source post-newtonienne quelconque à l'ordre 1.5PN au-delà de la formule du quadrupôle d'Einstein [66, 59].

La détermination de la phase orbitale $\phi(t)$ à l'ordre 3.5PN requiert alors le calcul de la luminosité gravitationnelle $\mathcal{L}$ émise par un système binaire compact à l'ordre 3.5PN au-delà de la formule du quadrupôle d'Einstein, ainsi que le calcul de l'énergie de liaison gravitationnelle E de la binaire à l'ordre 3PN (le terme 3.5PN étant nul pour une orbite quasi-circulaire). Le calcul de la luminosité gravitationnelle $\mathcal{L}$ nécessite de généraliser les formules du quadrupôle d'Einstein (1.14) et (1.17) à des ordres post-newtoniens élevés, et donc l'utilisation d'un *formalisme de génération d'ondes* capable de relier la perturbation de l'espace-temps de Minkowski en un point quelconque aux moments multipolaires caractérisant la source. D'autre part, l'énergie de liaison gravitationnelle E du système binaire s'obtient à partir des *équations du mouvement*, elles aussi calculées à un ordre post-newtonien élevé. Nous allons présenter succinctement ces deux aspects dans les paragraphes qui suivent. Pour des orbites quasi-circulaires, l'évolution de la phase orbitale $\phi(t)$ à l'ordre 3.5PN se déduit alors de l'équation de balance énergétique (2.3) selon

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{\mathcal{L}(\Omega)}{E'(\Omega)}, \quad (2.4)$$

où $\Omega = d\phi/dt$ est la fréquence instantanée de l'onde gravitationnelle telle que mesurée par un observateur distant, et $E'(\Omega) = dE/d\Omega$. Cette équation permet d'exprimer t sous forme d'un développement en puissances de Ω . Inversant ce développement et intégrant Ω par rapport au temps, on trouve ainsi l'évolution temporelle de la phase orbitale $\phi(t)$.

Pour un système binaire circularisé d'objets compacts sans spins, la phase de l'onde est connue à l'ordre 3.5PN [77, 68], et les amplitudes des modes de polarisation à l'ordre 3PN [78, 83, 18]. La généralisation au cas d'orbites excentriques quasi-keplériennes est connue à l'ordre 3PN [19, 20]. Pour des objets compacts en rotation, l'influence du couplage spin-orbite sur la phase de l'onde a été calculée à l'ordre 1PN au-delà de l'effet dominant [170, 64] (voir également [21]).

¹Pour une orbite quasi-circulaire, la balance d'énergie est suffisante pour calculer la phase orbitale. Pour une orbite elliptique quasi-keplérienne, il faut lui adjoindre la balance de moment cinétique.

2.2 Équations d'Einstein sous forme relaxée

Nous choisissons de *définir* comme variable perturbative la quantité²

$$h^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g} g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

où $g^{\mu\nu}$ et $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ sont respectivement l'inverse et le déterminant de la métrique covariante $g_{\mu\nu}$. Tout comme dans le cas linéaire traité au chapitre 1, on choisit d'imposer la condition de jauge harmonique

$$\partial_\nu h^{\mu\nu} = 0. \quad (2.6)$$

On montre alors que, généralisant le résultat (1.8), les équations d'Einstein en jauge harmonique prennent la forme d'une équation d'onde inhomogène en espace-temps plat, à savoir

$$\square_\eta h^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} |g| T^{\mu\nu} + \Lambda^{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

La perturbation $h^{\mu\nu}$ n'est toutefois plus générée uniquement par le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ de la source $\mathcal{S}$, mais également par le pseudo-tenseur énergie-impulsion $\Lambda^{\mu\nu}$ associé au champ gravitationnel, et qui admet pour expression explicite, incluant toutes les non linéarités (cf. Éq. (4.41) pour la généralisation à d dimensions d'espace)

$$\begin{aligned} \Lambda^{\mu\nu} = & -h^{\rho\sigma} \partial_{\rho\sigma}^2 h^{\mu\nu} + \partial_\rho h^{\mu\sigma} \partial_\sigma h^{\nu\rho} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\rho\sigma} \partial_\lambda h^{\rho\tau} \partial_\tau h^{\sigma\lambda} \\ & - g^{\mu\rho} g_{\sigma\tau} \partial_\lambda h^{\nu\tau} \partial_\rho h^{\sigma\lambda} - g^{\nu\rho} g_{\sigma\tau} \partial_\lambda h^{\mu\tau} \partial_\rho h^{\sigma\lambda} + g_{\rho\sigma} g^{\lambda\tau} \partial_\lambda h^{\mu\rho} \partial_\tau h^{\nu\sigma} \\ & + \frac{1}{8} (2g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}) (2g_{\lambda\tau} g_{\epsilon\pi} - g_{\epsilon\tau} g_{\lambda\pi}) \partial_\rho h^{\lambda\pi} \partial_\sigma h^{\tau\epsilon}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Les équations d'Einstein en jauge harmonique écrites sous la forme *exacte* (2.7)–(2.8) sont dites relaxées, car on cherche à les résoudre formellement sous forme de fonctionnelles des variables décrivant la source matérielle. Le mouvement de cette dernière est alors donné par la conservation du tenseur énergie-impulsion, $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$, dont on peut montrer qu'elle est équivalente à la condition de jauge harmonique (2.6).

Cette formulation des équations d'Einstein est due à Landau et Lifshitz [256], et présente le grand avantage de faire intervenir l'opérateur de propagation $\square_\eta$ en espace-temps *plat* ; opérateur que l'on sait (au moins formellement) inverser pour obtenir la perturbation $h^{\mu\nu}$ en fonction du pseudo-tenseur énergie-impulsion $\tau^{\mu\nu} \equiv |g| T^{\mu\nu} + \frac{c^4}{16\pi G} \Lambda^{\mu\nu}$ selon

$$h^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = -\frac{4G}{c^4} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\tau^{\mu\nu}(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}'. \quad (2.9)$$

Il faut toutefois prendre garde au fait que, contrairement au cas linéaire où l'intégration se fait sur la source à support compact $\mathcal{S}$ uniquement, elle est ici à effectuer sur tout l'espace tridimensionnel $\mathbb{R}^3$, car les non linéarités contenues dans $\Lambda^{\mu\nu}$ ne sont en général pas à support compact. Un développement post-newtonien « naïf » de la source $\tau^{\mu\nu}$ du type (2.2) se heurte alors à

²On remarquera que dans l'approximation linéaire, la perturbation $h^{\mu\nu}$ ainsi définie coïncide avec l'opposé de la perturbation à trace renversée introduite au chapitre 1 [cf. Éq. (1.5)].

l'apparition d'intégrales divergentes à l'infini ; il s'agit là du célèbre problème de divergence IR des intégrales intervenant dans les développements post-newtoniens. Nous rencontrerons ce problème et une solution possible (l'introduction d'un facteur régulateur afin de régulariser la source à l'infini) au chapitre 4, lors du calcul de la métrique d'espace-temps générée par deux objets compacts modélisés par des particules ponctuelles de masses m_1 et m_2 , à l'ordre 3PN.

La formulation (2.7)–(2.8), ou de manière équivalente (2.9), des équations d'Einstein se prête bien à une résolution itérative, où l'on cherche une solution sous la forme d'un développement en puissances d'un paramètre perturbatif ε (intensité de l'interaction gravitationnelle G , inverse de la vitesse de la lumière $1/c$, taille de la source L , etc.) du type

$$h^{\mu\nu} = h_0^{\mu\nu} + \varepsilon h_1^{\mu\nu} + \varepsilon^2 h_2^{\mu\nu} + \dots, \quad (2.10)$$

et où l'on détermine la perturbation au n^{e} ordre, $h_n^{\mu\nu}$, à partir de la connaissance des $n - 1$ ordres d'approximation précédents $h_0^{\mu\nu}, \dots, h_{n-1}^{\mu\nu}$. Une méthode efficace de résolution des équations d'Einstein fait typiquement appel à un savant cocktail de tels schémas d'approximation (développements post-newtonien, post-minkowskien, multipolaire, etc.).

2.3 Formalisme de génération d'ondes

Un formalisme de génération d'ondes est censé permettre le calcul de la perturbation³ h , pour une source donnée, à partir des équations (2.7)–(2.8), ou de manière équivalente de l'équation intégral-différentielle (2.9). Nous allons brièvement présenter le formalisme de génération d'ondes développé par Blanchet et Damour [65, 56, 60] (voir [275] pour une présentation moins sommaire et [61] pour une revue détaillée). Un autre formalisme de génération d'ondes reposant sur des travaux antérieurs de Epstein et Wagoner [163] et Thorne [400] a été développé par Will, Wiseman et Pati [418, 322]. L'équivalence entre ces deux formalismes a été démontrée en toute généralité [61]. Schématiquement, les grandes lignes du formalisme de Blanchet et Damour sont les suivantes (voir la Fig. 2.1 pour une illustration) :

- (i) À l'extérieur de la source, c'est-à-dire pour $r > R$, la perturbation h est solution des équations d'Einstein (2.7) dans le vide ($T^{\mu\nu} = 0$). Elle y est développée sous la forme d'une série multipolaire (opération que l'on notera symboliquement par un $\mathcal{M}$) post-minkowskienne $G \rightarrow 0$ du type

$$h_{\text{ext}} = \mathcal{M}(h) = \sum_{k \geq 1} G^k h_k^{\text{ext}}. \quad (2.11)$$

Les fonctions h_k^{ext} sont calculées itérativement à l'aide d'intégrales retardées et régularisées à l'origine (où le développement multipolaire diverge), en imposant la condition de stationnarité de la source dans le passé⁴. Ces fonctions dépendent d'un jeu de moments multipolaires dits canoniques⁵ $\{M_L, S_L\}$ dépendants du temps t , indéterminés à ce stade, et caractérisant (à l'ordre linéaire en G) l'espace-temps à l'extérieur de la source.

³Dans ce paragraphe nous omettons les indices spatio-temporels afin d'alléger les notations.

⁴Cette condition d'absence d'ondes gravitationnelles avant une date fixe dans le passé ($t \leq T$) facilite beaucoup l'implémentation du formalisme ; on vérifie à la fin que la limite $T \rightarrow -\infty$ garde un sens dans les applications.

⁵On utilise la notation standard L pour représenter collectivement un jeu de ℓ indices spatiaux $i_1 \dots i_\ell$.

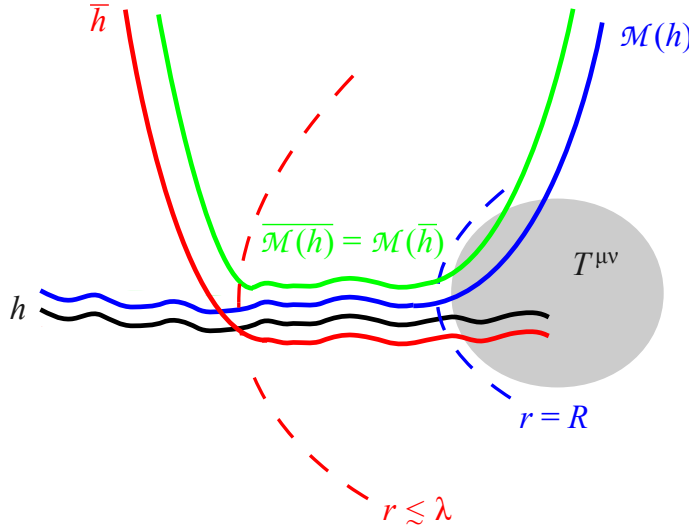


FIG. 2.1: Une source $T^{\mu\nu}$ de taille caractéristique R crée une perturbation h de la métrique de Minkowski, qui admet un développement multipolaire post-minkowskien $\mathcal{M}(h)$ à l'extérieur de la source (pour $r > R$), et un développement post-newtonien $\bar{h}$ dans la zone proche $r \ll \lambda$. Une source post-newtonienne émet des ondes gravitationnelles de longueur d'onde typique $\lambda \gg R$, de sorte qu'il existe une zone tampon $R < r \ll \lambda$ où l'on peut identifier les deux développements, i.e. $\overline{\mathcal{M}(h)} = \mathcal{M}(\bar{h})$. Inspiré de [338].

- (ii) Dans la zone proche $r \ll \lambda$, la perturbation h est solution des équations d'Einstein (2.7) avec source ($T^{\mu\nu} \neq 0$). Elle y est développée sous la forme d'une série post-newtonienne (notée symboliquement avec une barre haute) $c \rightarrow +\infty$ du type

$$h_{\text{zp}} = \bar{h} = \sum_{n \geq 0} c^{-n} h_n^{\text{zp}}. \quad (2.12)$$

Les fonctions h_n^{zp} sont calculées itérativement à l'aide d'intégrales de Poisson instantanées et régularisées à l'infini (où le développement post-newtonien diverge), et dépendent d'un jeu de moments multipolaires dits sources $\{I_L, J_L\}$ caractérisant la source⁶, et incluant les non linéarités du champ gravitationnel dans la zone proche.

- (iii) Dans le cas d'une source post-newtonienne, il existe une zone tampon $R < r \ll \lambda$ où les deux développements sont valables, de sorte que l'égalité numérique $\mathcal{M}(h) = h = \bar{h}$ y est vérifiée. En se référant à la théorie du raccordement des séries asymptotiques [254], on exige de plus que l'égalité fonctionnelle

$$\overline{\mathcal{M}(h)} = \mathcal{M}(\bar{h}) \quad (2.13)$$

y soit également vérifiée, au sens des séries formelles. Cette équation de raccord impose des relations *fonctionnelles* entre les coefficients h_k^{ext} et h_n^{zp} des développements multipolaires post-minkowskien et post-newtonien. Elle permet d'établir le lien entre les moments

⁶Les fonctions h_n^{zp} dépendent également d'un jeu de moments multipolaires dits de jauge $\{W_L, X_L, Y_L, Z_L\}$ associés au libre choix du système de coordonnées.

multipolaires $\{I_L, J_L\}$ caractérisant la source, et les moments multipolaires $\{M_L, S_L\}$ décrivant l'espace-temps à l'extérieur de la source.

- (iv) Dans un dernier temps, les moments canoniques $\{M_L, S_L\}$ sont reliés à des moments multipolaires dits radiatifs $\{U_L, V_L\}$ adaptés à la description du champ d'onde tel que mesuré par un observateur lointain (en particulier dans un voisinage de $\mathcal{I}^+$). Le raccord asymptotique permet donc *in fine* de relier le mouvement d'une source post-newtonienne quelconque aux ondes gravitationnelles qu'elle génère, telles que mesurées par un observateur distant.

Nous utiliserons ce formalisme de génération d'ondes aux chapitres 4 et 5, lors d'une comparaison avec le formalisme de la force propre gravitationnelle, basé sur la théorie des perturbations d'un trou noir (voir chapitre suivant).

2.4 Application au cas d'un système binaire compact

La construction de patrons d'ondes gravitationnelles pour les systèmes binaires d'objets compacts requiert l'application du formalisme de génération d'ondes précédent au cas particulier d'une telle source. Toutefois, celui-ci n'est *a priori* valable que pour des sources post-newtoniennes, c'est-à-dire dont le champ gravitationnel doit vérifier $U \ll c^2$ partout, ce qui n'est pas le cas au voisinage d'une étoile à neutrons ou d'un trou noir.

Il est possible de contourner ce problème en invoquant le fait que la théorie de la relativité générale obéit au *principe d'équivalence fort*, qui étend le principe d'équivalence faible au cas des corps dont l'énergie de cohésion gravitationnelle constitue une part importante de leur énergie propre (comme par exemple la Terre et la Lune). Ainsi, aussi intense le champ gravitationnel propre des objets compacts soit-il, le mouvement de chacun d'eux dans le champ gravitationnel de l'autre ne peut dépendre que de leurs seules masses⁷ ; en particulier, il ne doit dépendre ni de leur composition interne, ni de leur compacité, *i.e.* du paramètre $\kappa = Gm/(Rc^2)$, où m est la masse de l'objet compact, et R sa taille caractéristique.

Plus quantitativement, cette propriété remarquable de la théorie d'Einstein a été vérifiée de manière générale à l'ordre 1PN à l'aide du formalisme post-newtonien paramétrisé (voir par exemple [416] pour une revue), ainsi qu'à l'ordre 2PN dans le cas particulier du mouvement de deux étoiles modélisées par des boules de fluide à symétrie sphérique dans le référentiel inertiel momentanément comouvant de chaque corps [202, 246]. Dans ce dernier cas, on montre en effet qu'il est possible de renormaliser la masse de chaque corps de façon à absorber les termes d'énergie interne et d'énergie potentielle propre, et leurs corrections post-newtoniennes, de sorte que les équations post-newtoniennes résultantes s'expriment en fonction de ces seules masses renormalisées. (Voir également [299] pour une preuve de la renormalisation de la masse d'une classe de termes d'énergie propre dans les équations du mouvement à l'ordre 2PN dans le cas de boules de fluide de forme quelconque.) Expérimentalement, le principe d'équivalence fort a été vérifié à mieux que 2×10^{-13} , grâce aux expériences de *Lunar Laser Ranging* permettant d'étudier le mouvement de la Terre et de la Lune dans le champ gravitationnel du Soleil [417].

⁷Cela peut également se comprendre à l'aide du théorème de Birkhoff.

Problèmes posés par l'utilisation de particules ponctuelles

Afin de simplifier les calculs, il est commode (et courant) de modéliser les deux objets compacts par deux particules ponctuelles caractérisées par leurs seules masses m_1 et m_2 . Cette modélisation pose toutefois deux problèmes conceptuels importants : (i) une description de la source en termes de masses ponctuelles néglige les multipôles de chaque corps autres que le monopôle (quadrupôle, octupôle, etc.), lesquels peuvent *a priori* avoir une influence importante sur le mouvement orbital, et donc sur la forme d'onde résultante⁸ ; de plus, (ii) l'utilisation de particules ponctuelles en théorie des champs nécessite l'introduction d'une méthode de régularisation visant à soustraire le champ propre divergeant de chaque particule. Nous discuterons ce dernier point plus en détails dans le § 2.5 dédié aux équations du mouvement.

Afin de simplifier la discussion du premier problème, considérons (seulement dans ce §) deux objets compacts de même masse m et de taille caractéristique R , séparés par une distance typique D . L'effet dominant sur le mouvement de la source des multipôles d'ordres plus élevés que le monopôle est dû au quadrupôle induit : le champ de marée de l'un des corps est responsable de l'apparition d'une déformation relative $\epsilon \sim (R/D)^3$ sur le second corps, de sorte que le quadrupôle induit $Q \sim mR^5/D^3$ du second corps est à l'origine d'une force quadrupolaire induite $F_{\text{quad}} \sim Gm^2R^5/D^7$ sur le mouvement du centre de masse du premier corps ; cette force est comparativement d'ordre $F_{\text{quad}}/F_{\text{newt}} \sim (R/D)^5$ par rapport à la force newtonienne $F_{\text{newt}} \sim Gm^2/D^2$. Pour des corps compacts, $R \sim Gm/c^2$, de sorte que cette correction est formellement d'ordre 5PN.

Cette correction d'ordre post-newtonien très élevé est négligeable durant la majeure partie du mouvement orbital de la binaire d'objets compacts, et ne commence à se faire sentir que lors des dernières orbites, juste avant la fusion des deux corps [241]. Le fait que le mouvement orbital de deux objets compacts ne dépende essentiellement que de leur seules masses est une propriété remarquable des équations d'Einstein. Damour l'a baptisée le *principe d'effacement* de la structure interne sur le mouvement externe. Nous référons le lecteur à [132] (voir également [133]) pour une généralisation de la discussion newtonienne précédente au cas relativiste.

Luminosité gravitationnelle à l'ordre 3.5PN

Le formalisme de génération d'ondes décrit dans le § 2.3 généralise les formules du quadrupôle d'Einstein (1.14) et (1.17), et permet en particulier de calculer la luminosité gravitationnelle $\mathcal{L}$ d'une source à un ordre post-newtonien élevé. L'application au cas d'un système binaire d'objets compacts modélisés par deux particules ponctuelles de masses m_1 et m_2 sur une orbite quasi-circulaire s'exprime sous la forme d'un développement en puissances d'un paramètre post-newtonien adimensionné x , dont la valeur numérique est de l'ordre de $\epsilon_{\text{PN}} \sim v^2/c^2$, mais qui présente l'avantage d'être directement relié à la fréquence orbitale Ω de l'orbite quasi-circulaire de la binaire, et par conséquent d'être invariant de jauge. Ce paramètre est défini par :

$$x \equiv \left(\frac{Gm\Omega}{c^3} \right)^{2/3}, \quad (2.14)$$

⁸Dans le cas des binaires de trous noirs (super-massifs ou non), l'influence des moments cinétiques intrinsèques, ou spins, est potentiellement très importante, et doit également être prise en compte en plus des masses individuelles des corps. Voir par exemple [170, 64, 143] pour des calculs post-newtoniens récents incluant les effets des spins.

où $m \equiv m_1 + m_2$ est la masse totale de la binaire. Le résultat, valable à l'ordre 3.5PN, est donné par la formule⁹

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{32c^5}{5G} v^2 x^5 \left\{ 1 + \left(-\frac{1247}{336} - \frac{35}{12}v \right) x + 4\pi x^{3/2} + \left(-\frac{44711}{9072} + \frac{9271}{504}v + \frac{65}{18}v^2 \right) x^2 \right. \\ + \left(-\frac{8191}{672} - \frac{583}{24}v \right) \pi x^{5/2} + \left(\frac{6643739519}{69854400} + \frac{16}{3}\pi^2 - \frac{1712}{105}C - \frac{856}{105}\ln(16x) \right. \\ + \left[-\frac{134543}{7776} + \frac{41}{48}\pi^2 \right] v - \frac{94403}{3024}v^2 - \frac{775}{324}v^3 \Big) x^3 + \left(-\frac{16285}{504} + \frac{214745}{1728}v \right. \\ \left. \left. + \frac{193385}{3024}v^2 \right) \pi x^{7/2} + \mathcal{O}(c^{-8}) \right\}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

où $C = 0,577 \dots$ est la constante d'Euler-Mascheroni, et $v \equiv m_1 m_2 / m^2$ le rapport de masse symétrique, qui varie entre $\frac{1}{4}$ dans le cas d'une binaire de masses égales, et $v \rightarrow 0$ pour un système de rapport de masse extrême. Les termes en facteur d'une puissance demi-entière du paramètre x dans (2.15) correspondent aux effets de sillage d'onde (*tails* en anglais), *i.e.* résultant de la diffusion du rayonnement gravitationnel par la courbure de fond générée par la masse de la source. Lorsque l'on songe au fait que le premier terme dans l'expression (2.15) correspond à l'application de la seconde formule du quadrupôle d'Einstein (1.17) au cas d'un système de deux masses ponctuelles sur une orbite quasi-circulaire, on prend mieux conscience de la prouesse que constitue un tel calcul.

2.5 Équations du mouvement post-newtoniennes

Les équations du mouvement post-newtoniennes sont couramment écrites sous une forme quasi-newtonienne : pour chaque corps, on définit un centre de masse $\mathbf{y}_A$ ($A = 1, 2$), et on exprime son accélération en fonction des positions $\mathbf{y}_A$ et des vitesses coordonnées $\mathbf{v}_A = d\mathbf{y}_A/dt$. Pour le corps 1, le résultat prend la forme schématique¹⁰

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = -\frac{Gm_2}{r_{12}^2} \mathbf{n}_{12} + \frac{\mathbf{A}_{1PN}}{c^2} + \frac{\mathbf{A}_{2PN}}{c^4} + \frac{\mathbf{A}_{2.5PN}}{c^5} + \frac{\mathbf{A}_{3PN}}{c^6} + \frac{\mathbf{A}_{3.5PN}}{c^7} + \mathcal{O}(c^{-8}), \quad (2.16)$$

où $r_{12} = |\mathbf{r}_{12}| = |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|$ est la distance euclidienne entre les deux corps, et $\mathbf{n}_{12} = \mathbf{r}_{12}/r_{12}$ le vecteur unitaire pointant de 2 vers 1. L'équation du mouvement du corps 2 se déduit de (2.16) par l'opération de substitution $1 \leftrightarrow 2$.

Le problème du mouvement en relativité générale a une très longue histoire (voir [133] pour une revue historique du problème du mouvement en gravitation newtonienne et relativiste). Les corrections 1PN au mouvement newtonien ont été calculées quelques années seulement après l'écriture des équations de champ de la relativité générale. La découverte du pulsar binaire PSR 1913+16 au cours de années 70 a renouvelé l'intérêt pour ce problème auparavant un peu

⁹Il est nécessaire d'utiliser les équations du mouvement du système binaire pour obtenir ce résultat (cf. § suivant).

¹⁰Voir l'équation (168) de la revue [61] pour les expressions explicites des coefficients vectoriels $\mathbf{A}_{1PN}, \dots, \mathbf{A}_{3.5PN}$ dans un système de coordonnées harmoniques.

académique : la comparaison de la décroissance de la période orbitale observée avec la prédiction de la relativité générale (voir chapitre 1) a nécessité d'établir rigoureusement les corrections post-newtoniennes aux équations du mouvement jusqu'à l'ordre 2.5PN inclus [45, 135, 131, 149, 132], ordre auquel apparaissent les effets dominants de la réaction au rayonnement gravitationnel sur le mouvement orbital. Les corrections 1PN à cette réaction au rayonnement dominante ont depuis été calculées de nombreuses manières différentes [223, 323, 245, 312, 220].

Équations du mouvement à l'ordre 3PN

La détection et l'analyse des ondes gravitationnelles en provenance des systèmes binaires compacts requièrent toutefois les équations du mouvement à l'ordre 3PN au moins, et donc en particulier la connaissance des corrections 3PN au mouvement newtonien. Nous allons donner quelques détails sur leur calcul, car il s'agit d'un travail récent, de longue haleine, dont nous ferons en grande partie usage au chapitre 4. Le calcul des corrections 3PN aux équations du mouvement d'un système de deux objets compacts en relativité générale a été mené à bien de manière indépendante par trois groupes :

- Jaranowski et Schäfer [229] puis Damour, Jaranowski et Schäfer [139, 140] ont utilisé la formulation hamiltonienne de la relativité générale, afin de calculer l'hamiltonien de deux particules ponctuelles en jauge ADM. Le champ propre divergent des particules est soustrait à l'aide de la régularisation d'Hadamard [204].
- Blanchet et Faye ont utilisé une itération post-newtonienne des équations d'Einstein en jauge harmonique [74, 75], et ont également modélisé les objets compacts par des particules ponctuelles, dont le champ propre divergent est soustrait à l'aide d'une régularisation d'Hadamard étendue [73, 76] visant, entre autres, à respecter l'invariance de Lorentz des équations du mouvement.
- Itoh et Futamase [221, 219] (voir également [185] pour une revue) ont étendu la méthode d'intégrale de surface introduite par Einstein, Infeld et Hoffmann [161], combinée à une limite champ fort/particule test [184] adaptée à la description d'objets compacts.

Dans les deux premières méthodes, l'utilisation de particules ponctuelles est un artifice mathématique permettant de simplifier les calculs. Toutefois, cette simplification vient au prix de l'introduction d'une méthode de régularisation visant à soustraire le champ propre divergent de ces particules. Historiquement, la régularisation d'Hadamard [204] a été privilégiée, et s'est montrée parfaitement satisfaisante jusqu'à l'ordre 2.5PN [79].

Cependant, une ambiguïté est apparue à l'ordre 3PN dans le second calcul¹¹, *i.e.* l'apparition d'une constante, notée λ par Blanchet et Faye, indépendante de la structure des corps (d'après le principe d'effacement de la structure interne), dont la valeur ne pouvait pas être calculée dans le cadre de leur schéma de régularisation. Par la suite, l'utilisation de la *régularisation dimensionnelle* a permis de lever cette ambiguïté, fixant sa valeur à [141, 67]

$$\lambda = -\frac{1987}{3080}. \quad (2.17)$$

Dans le chapitre 4, nous ferons usage de la régularisation dimensionnelle dans le cadre de notre comparaison du formalisme de la force propre au formalisme post-newtonien à l'ordre 3PN.

¹¹Une ambiguïté équivalente est apparue dans le calcul de Jaranowski et Schäfer [229], notée ω_{static} par ces derniers. Les deux constantes sont reliées par la relation algébrique $\omega_{\text{static}} = -\frac{11}{3}\lambda - \frac{1987}{840}$ [12, 142].

Nous confirmerons au passage l'insuffisance de la régularisation d'Hadamard à des ordres post-newtoniens aussi élevés.

In fine, les résultats de ces trois calculs sont en parfait accord, confirmant la validité des équations du mouvement à l'ordre 3PN. En particulier, la méthode de Itoh et Futamase ne fait pas appel aux notions de particule ponctuelle et de régularisation, de sorte que leur résultat est non ambigu, confirmant ainsi de manière indépendante la valeur de la constante λ .

Énergie orbitale à l'ordre 3PN

Les équations du mouvement post-newtoniennes (2.16) permettent de calculer l'énergie orbitale d'un système binaire d'objets compacts, nécessaire à l'obtention des patrons d'onde¹². Les termes $\mathbf{A}_{1\text{PN}}$, $\mathbf{A}_{2\text{PN}}$ et $\mathbf{A}_{3\text{PN}}$ en facteur d'une puissance paire de $1/c$ dans (2.16) sont respectivement les corrections conservatives 1PN, 2PN et 3PN à la dynamique newtonienne. Ces corrections étant conservatives, il existe une énergie conservée E à l'ordre 3PN, qui est une intégrale première du mouvement. Dans le cas d'une binaire sur une orbite quasi-circulaire, on trouve ainsi [74, 75, 139, 140]

$$E = -\frac{\mu c^2}{2} x \left\{ 1 + \left(-\frac{3}{4} - \frac{\nu}{12} \right) x + \left(-\frac{27}{8} + \frac{19}{8} \nu - \frac{\nu^2}{24} \right) x^2 + \left(-\frac{675}{64} + \left[\frac{34445}{576} - \frac{205}{96} \pi^2 \right] \nu - \frac{155}{96} \nu^2 - \frac{35}{5184} \nu^3 \right) x^3 + \mathcal{O}(c^{-8}) \right\}, \quad (2.18)$$

où $\mu \equiv m_1 m_2 / m = m \nu$ est la masse réduite, et x le paramètre post-newtonien défini précédemment par (2.14). Le premier terme dans cette expression correspond tout simplement à l'énergie de liaison gravitationnelle newtonienne de deux corps sur une orbite circulaire.

Les termes $\mathbf{A}_{2.5\text{PN}}$ et $\mathbf{A}_{3.5\text{PN}}$, en facteur de $1/c^5$ et $1/c^7$ respectivement dans (2.16), ne sont pas symétriques par renversement du temps $t \rightarrow -t$, et sont donc directement associés à la perte d'énergie orbitale par émission d'ondes gravitationnelles. Cette séparation nette entre termes conservatifs pairs (en puissances de $1/c$) et termes dissipatifs impairs disparaît à partir de l'ordre 4PN, à cause de l'apparition de termes dissipatifs dus au sillage d'onde (effet relatif d'ordre $1/c^3$) de la force de réaction au rayonnement dominante (effet d'ordre $1/c^5$) [66].

Nous verrons au chapitre 5, dans le cadre de notre comparaison à la force propre, qu'à partir de l'ordre 4PN les équations du mouvement, ainsi que l'énergie associée à leur partie conservative, n'admettent plus un développement sous forme de série entière (en puissances de x), mais qu'à cet ordre apparaissent des termes logarithmiques du type $x^n \ln x$, avec $n \geq 5$, dus à ces effets de sillage d'ondes.

☒

¹²Elles présentent par ailleurs un intérêt intrinsèque, et sont par exemple utilisées pour modéliser la dynamique des trous noirs super-massifs lors de la fusion de galaxies [48], ou plus proche de nous, pour calculer le mouvement des planètes dans le système solaire [173].

PERTURBATIONS DE TROUS NOIRS ET FORCE PROPRE GRAVITATIONNELLE

LORSQU'UN objet compact de masse stellaire est en orbite autour d'un trou noir super-massif, les méthodes perturbatives sont particulièrement bien adaptées à l'étude des ondes gravitationnelles émises, le corps de petite masse induisant une perturbation de la métrique de fond générée par le corps de grande masse. Cette perturbation conduit elle-même à une modification de la trajectoire du corps perturbateur, qui ne suit plus une géodésique de la métrique de fond. L'état de l'art consiste à calculer cet effet dit de force propre gravitationnelle. Les comparaisons avec le formalisme post-newtonien démontrent un très bon accord entre les deux schémas d'approximation.

3.1 Calculs de patrons d'ondes

La détection et l'analyse des ondes gravitationnelles en provenance de nombreuses sources astrophysiques requièrent des patrons d'ondes très précis, qui doivent rester en phase avec le signal physique pendant toute la durée d'intégration par le détecteur. Nous avons vu que le formalisme post-newtonien est particulièrement bien adapté à la description de la phase spirale de systèmes binaires compacts coalescents. La théorie des perturbations d'un trou noir est l'outil idéal pour calculer ces patrons d'ondes dans les deux autres situations suivantes :

- Lorsque le trou noir résultant de la fusion de deux objets compacts de masses comparables se désexcite en émettant des ondes gravitationnelles sous forme de modes quasi-normaux, dont la fréquence et le temps d'amortissement portent l'empreinte de la masse et du spin du trou noir de Kerr final.
- Lorsqu'un objet compact de masse stellaire (une étoile à neutrons ou un trou noir) orbite autour d'un trou noir super-massif au cœur d'une galaxie. Pour ces EMRIs, le rapport de masse extrême $\sim 10^{-9} - 10^{-5}$ autorise un traitement perturbatif avec grande précision.

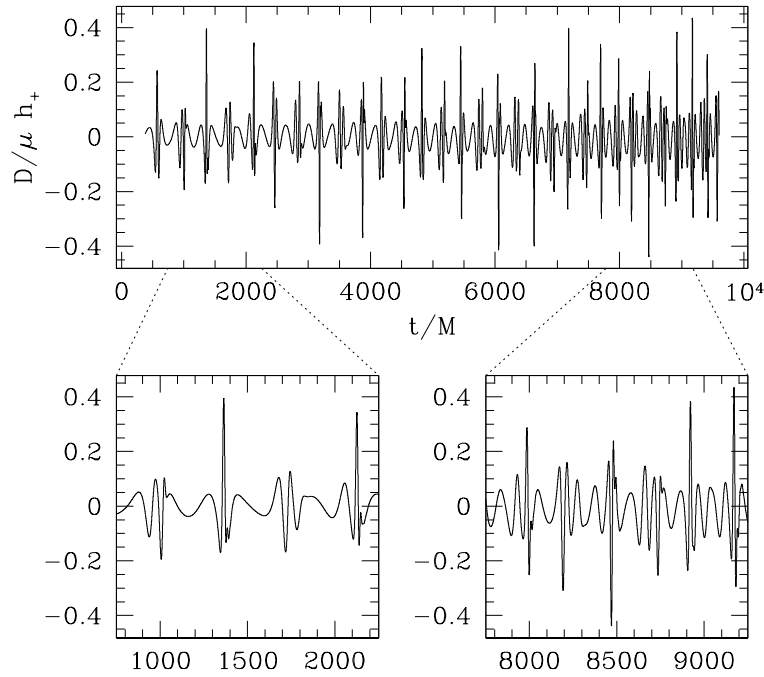


FIG. 3.1: Une illustration de la complexité de la forme d'onde générique émise par les EMRIs : un mode de l'état de polarisation h_+ , normalisé par le rapport D/μ , où D est la distance à la source et μ la masse du corps perturbateur, est tracé en fonction du temps coordonnée t , lui-même normalisé par la masse M du trou noir super-massif. Ce dernier est en rotation, avec un paramètre de Kerr $a = 0,5M$. L'orbite initiale de la particule est caractérisée par une excentricité $e = 0,5$, un semi-latus rectum $p = 10M$, et un angle $\theta = 0,5$ rad par rapport au plan équatorial. Le rapport de masse du système vaut $q \equiv \mu/M = 0,016$. *Figure tirée de [387].*

La forme d'onde émise dans le premier cas de figure est désormais bien connue grâce à de très nombreux travaux, depuis l'article fondateur de Regge et Wheeler sur la stabilité d'un trou noir de Schwarzschild [347], jusqu'aux simulations de coalescence de trous noirs en relativité numérique, qui reproduisent les modes quasi-normaux du trou noir de Kerr final.

Le calcul des patrons d'ondes pour les EMRIs est un travail toujours en cours ; voir par exemple [156] pour une revue des différentes méthodes utilisées. La forme d'onde typique est extrêmement complexe (cf. Fig. 3.1 pour une illustration), et ce par opposition à celle émise par les binaires compactes de masses comparables. Toutes deux doivent cependant être connues avec grande précision [126]. Le détecteur spatial LISA intégrera le signal en provenance des EMRIs sur une durée de trois à cinq ans. Cela représente quelques 10^5 périodes de l'onde dans la bande passante de ce détecteur interférométrique [107].

L'approximation consistant à traiter le corps perturbateur comme une particule test, et à calculer la forme d'onde résultant de son mouvement géodésique dans la métrique du trou noir super-massif ne permet pas d'atteindre la précision de 10^{-5} requise. Il est nécessaire d'aller au-delà de cette approximation, et de calculer l'effet de la perturbation sur le mouvement du corps perturbateur lui-même, puis de tenir compte de cette information pour déterminer la correction induite sur la forme d'onde. Il s'agit du programme de calcul de la *force propre*, dont nous décrirons les grandes lignes au § 3.3.

3.2 Théorie des perturbations d'un trou noir

Afin d'exploiter l'idée selon laquelle l'espace-temps est « proche » de celui décrivant un trou noir, on décompose la métrique sous la forme

$$g_{\mu\nu} = \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \quad (3.1)$$

où $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ est une solution supposée connue des équations d'Einstein décrivant un trou noir, par exemple la solution de Schwarzschild ou celle de Kerr, et $h_{\mu\nu}$ une perturbation de cette solution. Cette perturbation peut être générée par un objet compact de masse stellaire orbitant un trou noir super-massif, ou encore représenter l'écart à la solution de Kerr faisant suite à la coalescence de deux objets compacts de masses comparables.

De manière similaire au cas d'une perturbation linéaire de l'espace-temps de Minkowski traité dans le chapitre 1, en introduisant l'expression (3.1) de la métrique dans les équations de champs (1.2), en ne gardant que les termes linéaires dans la perturbation $h_{\mu\nu}$, en exprimant le résultat en termes de la perturbation à trace renversée $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}h$ (avec $h = \overset{\circ}{g}^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$), et en imposant la condition de jauge harmonique¹ $\nabla^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$, on trouve que la perturbation obéit à l'équation d'onde²

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} + 2R^\alpha{}_\mu{}^\beta{}_\nu \bar{h}_{\alpha\beta} = -16\pi T_{\mu\nu} . \quad (3.2)$$

Cette équation fait intervenir l'opérateur des ondes $\square \equiv \overset{\circ}{g}^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ en espace courbe, où ∇_μ est la dérivée covariante compatible avec la métrique de fond, *i.e.* $\nabla_\lambda \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} = 0$. On observe également un couplage de la perturbation au tenseur de Riemann $R_{\alpha\mu\beta\nu}$ associé à la métrique de fond. L'équation d'onde (3.2) se réduit bien évidemment à (1.8) dans le cas où la métrique de fond est minkowskienne, c'est-à-dire lorsque $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

Perturbations d'un trou noir de Schwarzschild

Afin de résoudre cette équation, il est possible d'exploiter les éventuelles symétries de la métrique de fond. Dans la suite de cette thèse, nous allons nous restreindre à l'étude de perturbations d'un trou noir de Schwarzschild, de sorte que la métrique de fond est à symétrie sphérique. Résumons les grandes lignes du formalisme de la théorie des perturbations (du premier ordre) d'un trou noir de Schwarzschild ; voir les § 6.6.1 et 6.8.1 du chapitre 6, ainsi que les références qui s'y trouvent, pour plus de détails.

Considérons un trou noir de Schwarzschild de masse M , et travaillons dans un système de coordonnées $\{t, r, \theta, \varphi\}$, où r est la coordonnée radiale de Schwarzschild. La symétrie sphérique de la métrique de fond permet de décomposer la perturbation sur une base d'harmoniques sphé-

¹On notera que la classe de systèmes de coordonnées ainsi définie diffère de celle introduite au chapitre 1, car cette condition de jauge harmonique fait intervenir la métrique de fond *courbe* dans la dérivée covariante, ainsi que dans la définition de la perturbation à trace renversée.

²Dans ce chapitre nous poserons $G = c = 1$.

riques tensorielles $(e_{\mu\nu}^{A,\ell,m})_{A=1,\dots,10}$ selon³

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{A=1}^{10} \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} h_{A,\ell,m}(t, r) e_{\mu\nu}^{A,\ell,m}(\theta, \varphi). \quad (3.3)$$

Injectant la décomposition (3.3) dans (3.2), on observe que les coordonnées angulaires (θ, φ) se découplent, de sorte que l'équation d'onde (3.2) se réduit à la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles par rapport aux variables (t, r) pour les coefficients $h_{A,\ell,m}$. Pour chaque mode (ℓ, m) , il est possible de construire deux champs scalaires $\Psi_{\ell,m}^{(e)}$ et $\Psi_{\ell,m}^{(o)}$ condensant toute l'information contenue dans les dix coefficients $h_{A,\ell,m}$. Ces champs scalaires obéissent à une équation d'onde avec source dans un potentiel $\mathcal{V}_{\ell}^{(e)}$ ou $\mathcal{V}_{\ell}^{(o)}$ respectivement,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + \mathcal{V}_{\ell}^{(e,o)} \right) \Psi_{\ell,m}^{(e,o)} = \mathcal{S}_{\ell,m}^{(e,o)}, \quad (3.4)$$

où $\mathcal{S}_{\ell,m}^{(e,o)}$ sont deux sources construites à partir des coefficients de la projection du tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ sur la base d'harmoniques sphériques tensorielles, et $r_* = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$ est la coordonnée radiale dite « tortue ». Loin de la source, il est possible de reconstruire les états de polarisation de l'onde gravitationnelle à partir de ces deux champs scalaires :

$$h_+ - i h_{\times} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} \left(\Psi_{\ell,m}^{(e)} + i \Psi_{\ell,m}^{(o)} \right) {}_{-2}Y_{\ell,m} + \mathcal{O}(r^{-2}), \quad (3.5)$$

où les fonctions angulaires ${}_{-2}Y_{\ell,m}$ sont les harmoniques sphériques de spin -2 .

Dans le chapitre 6, nous utiliserons ce formalisme afin d'étudier la dernière phase de l'évolution d'un système binaire compact coalescent, au cours de laquelle le trou noir résultant de la fusion se désexcite par émission de modes quasi-normaux. Afin de calculer les ondes gravitationnelles émises lors de cette phase de vibration, nous évoluerons les équations d'onde (3.4) sans source, en utilisant des conditions initiales calculées à partir de la métrique 2PN développée dans l'approximation dite de « limite proche », où l'on fait formellement tendre la distance entre les deux corps vers zéro.

3.3 Formalisme de la force propre gravitationnelle

Le formalisme de la force propre gravitationnelle est discuté en détails sous ses aspects théoriques et calculatoires dans les revues [335, 150, 31]. Nous donnons ici un bref aperçu du problème, ainsi que des méthodes employées afin de la résoudre.

³Afin d'étudier les perturbations d'un trou noir en rotation, le formalisme de Teukolsky [399], qui fait usage des scalaires de Newman-Penrose [309], autorise une décomposition similaire en exploitant la symétrie cylindrique résiduelle de la métrique de Kerr.

L'équation MiSaTaQuWa

Une particule ponctuelle de masse μ est caractérisée par son action $S = -\mu \int_{\gamma} d\tau$, où τ est le temps propre paramétrisant la ligne d'univers γ de la particule. Variant cette action par rapport à la métrique $g_{\mu\nu}$, on obtient le tenseur énergie-impulsion de la particule, source du champ gravitationnel. Au premier ordre dans le paramètre perturbatif $q \equiv \mu/M$, on trouve ainsi

$$T^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \mu u^{\mu} u^{\nu} \frac{\delta[\mathbf{x} - \mathbf{z}(t)]}{\sqrt{-\overset{\circ}{g}(\mathbf{x})} u^t}, \quad (3.6)$$

où δ est la distribution de Dirac usuelle, $\mathbf{z}(t)$ la trajectoire spatiale de la particule dans le système de coordonnées $\{t, x^i\}$ considéré, u^{μ} sa quadrivitesse normalisée par rapport à la métrique de fond, et $\overset{\circ}{g}$ le déterminant de cette dernière.

La perturbation générée par le mouvement de la particule autour du trou noir *via* l'équation d'onde (3.2) se propage à $\mathcal{J}^+$, où l'on mesure les états de polarisation h_+ et $h_{\times}$ de l'onde gravitationnelle. Mais elle agit également *localement* sur la source elle-même, modifiant son état de mouvement. Celui-ci n'est plus géodésique par rapport à la métrique de fond $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$, mais accéléré, dû à la présence d'une force : la force propre (*self-force* en anglais). L'expression explicite de la force propre a été établie de nombreuses manières différentes [296, 344, 200], en partant de l'équation d'onde (3.2) avec le tenseur énergie-impulsion (3.6). L'équation résultante, dite équation MiSa-TaQuWa en l'honneur de Misao, Sasaki, Tanaka, Quinn, et Wald, stipule que l'accélération de la particule est donnée par

$$\frac{du^{\mu}}{d\tau} = -\frac{1}{2} (\overset{\circ}{g}^{\mu\nu} + u^{\mu} u^{\nu}) (2\nabla_{\rho} h_{\nu\sigma}^R - \nabla_{\nu} h_{\rho\sigma}^R) u^{\rho} u^{\sigma}. \quad (3.7)$$

Le membre de droite de cette équation est une force agissant sur la particule, proportionnelle à la perturbation, et donc à la masse μ du corps perturbateur lui-même⁴. Dans la limite $q \rightarrow 0$, on retrouve bien évidemment l'équation des géodésiques $du^{\mu}/d\tau = 0$ par rapport à la métrique de fond.

Régularisation de la perturbation

L'équation (3.7) ne fait pas intervenir la solution retardée $h_{\mu\nu}^{\text{ret}}$ de l'équation d'onde (3.2), car celle-ci est singulière sur la ligne d'univers de la particule, tout comme son gradient, rendant ainsi l'évaluation de la force propre exprimée en termes de $h_{\mu\nu}^{\text{ret}}$ impossible. Il s'agit là du problème induit par le champ propre divergent d'une particule ponctuelle, problème déjà rencontré au chapitre 2 dans le cadre du formalisme post-newtonien. La solution passe une fois encore par l'utilisation d'une méthode de régularisation visant à soustraire le champ propre divergent $h_{\mu\nu}^S$ de la particule. La perturbation responsable de la modification de l'état de mouvement de la particule est alors la perturbation dite « régulière »

$$h_{\mu\nu}^R = h_{\mu\nu}^{\text{ret}} - h_{\mu\nu}^S. \quad (3.8)$$

⁴Il s'agit dans nos notations d'une force par unité de masse. Nous garderons toutefois la dénomination force propre par la suite.

On montre qu'il est possible de construire la perturbation « singulière » $h_{\mu\nu}^S$ de sorte qu'elle soit également une solution de l'équation d'onde (3.2), et présente le même caractère singulier que la solution retardée $h_{\mu\nu}^{\text{ret}}$ au voisinage de la ligne d'univers de la particule. Ainsi, la perturbation $h_{\mu\nu}^R$ est régulière sur la particule⁵, et se trouve être une solution de l'équation d'onde homogène associée à (3.2) [153].

Le mouvement de la particule peut donc être décrit de manière équivalente, soit comme accéléré par rapport à la métrique de fond $\mathring{g}_{\mu\nu}$ à cause de la force propre dans (3.7), soit comme géodésique dans la métrique régularisée $\mathring{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^R$. Dans ce dernier cas, l'espace-temps peut être vu comme la métrique de fond perturbée par une onde gravitationnelle (solution des équations d'Einstein linéarisées dans le vide) produite par le mouvement de la particule dans son passé. C'est cette dernière description que nous adopterons dans les chapitres 4 et 5.

Dans le cadre du calcul de la force propre s'exerçant sur une particule ponctuelle en orbite autour d'un trou noir de Schwarzschild, la régularisation par somme de modes (*mode-sum regularization* en anglais) [33, 30, 32] est la méthode de régularisation la plus couramment employée. L'idée consiste une fois encore à exploiter la symétrie sphérique de la métrique de fond. Conformément à la décomposition (3.3), on écrit la perturbation singulière sous la forme d'une somme de modes d'harmoniques sphériques, *i.e.*

$$h_{\mu\nu}^S = \sum_{\ell=2}^{+\infty} h_{\mu\nu}^{S(\ell)}, \quad (3.9)$$

et de même pour la solution retardée $h_{\mu\nu}^{\text{ret}}$. Une analyse détaillée de l'équation d'onde (3.2), et en particulier la connaissance de ses fonctions de Green retardée et avancée, permet de calculer sous forme analytique l'expression du mode ℓ de la perturbation singulière dans un voisinage de la particule. Évaluant le résultat sur la ligne d'univers de la particule elle-même, on trouve ainsi

$$h_{\mu\nu}^{S(\ell)} = B_{\mu\nu} + \frac{C_{\mu\nu}}{\ell + \frac{1}{2}} + \frac{D_{\mu\nu}}{(\ell - \frac{1}{2})(\ell + \frac{3}{2})} + \mathcal{O}(\ell^{-4}), \quad (3.10)$$

où les « paramètres de régularisation » $B_{\mu\nu}$, $C_{\mu\nu}$, $D_{\mu\nu}$, etc., sont des fonctions de la trajectoire de la particule calculables analytiquement [152]. Chaque mode $h_{\mu\nu}^{S(\ell)}$ pris individuellement est fini lorsque évalué à la position de la particule, tandis que la somme $\sum_{\ell} h_{\mu\nu}^{S(\ell)}$ diverge. Il en va de même pour la perturbation retardée $h_{\mu\nu}^{\text{ret}}$.

Pour chaque mode ℓ , on peut calculer (sous forme numérique) la contribution $h_{\mu\nu}^{\text{reg}(\ell)}$ à la perturbation retardée $h_{\mu\nu}^{\text{ret}}$ en résolvant l'équation d'onde (3.2). Par construction, cette solution présente le même comportement divergent au voisinage de la particule que la solution singulière $h_{\mu\nu}^S$, de sorte que le mode $h_{\mu\nu}^{\text{ret}(\ell)}$ admet également le développement (3.10) à la position de la particule. La perturbation régularisée est alors donnée par la somme de différences

$$h_{\mu\nu}^R = \sum_{\ell=2}^{+\infty} \left(h_{\mu\nu}^{\text{ret}(\ell)} - h_{\mu\nu}^{S(\ell)} \right). \quad (3.11)$$

⁵La perturbation $h_{\mu\nu}^R$ est même $\mathcal{C}^\infty$ [150], ce qui permet de calculer son gradient, puis d'évaluer le résultat à la position de la particule afin de calculer la force propre dans (3.7).

Afin de calculer la perturbation régularisée numériquement, cette dernière forme est bien plus commode que l'expression (3.8), car il s'agit d'ajouter un grand nombre de petites contributions plutôt que de soustraire deux fonctions divergentes dans une certaine limite. Les travaux détaillés dans les chapitres 4 et 5 font usage de cette méthode de régularisation. Le calcul de la force propre dans l'équation MiSaTaQuWa (3.7) nécessite d'appliquer cette régularisation au gradient de la perturbation plutôt qu'à la perturbation elle-même.

Notons enfin qu'il faut prendre garde au fait que la force propre n'est pas une grandeur invariante de jauge. En effet, on peut toujours se ramener à $du^\mu/d\tau = 0$ par un changement adéquat de système de coordonnées [34]. L'information contenue dans la force propre (3.7) est à combiner avec de l'information provenant de la perturbation $h_{\mu\nu}$ elle-même, afin de fabriquer une grandeur invariante de jauge, seule susceptible d'interprétation physique, comme par exemple les états de polarisations h_+ et $h_\times$ de l'onde gravitationnelle.

3.4 Comparaison avec les développements post-newtoniens

Dans le cadre de la théorie des perturbations d'un trou noir, il est possible d'établir l'équation de balance énergétique [151]

$$\mathcal{L}_\infty + \mathcal{L}_\bullet = -\frac{\mu}{2u^t} u^\mu u^\nu \partial_t h_{\mu\nu}, \quad (3.12)$$

traduisant le fait que le travail effectué par la partie dissipative de la force propre (responsable de la réaction au rayonnement) est égal à la somme des flux d'ondes gravitationnelles $\mathcal{L}_\infty$ et $\mathcal{L}_\bullet$ rayonnées à l'infini et à travers l'horizon du trou noir respectivement. Dans le cas d'une particule orbitant un trou noir de Schwarzschild sur une orbite quasi-circulaire, la contribution dominante dans $\mathcal{L}_\bullet$ est d'ordre 4PN relativement à la contribution dominante dans $\mathcal{L}_\infty$ [336]. Numériquement, pour une orbite au-delà de la dernière orbite circulaire stable, $\mathcal{L}_\bullet \lesssim 10^{-3} \mathcal{L}_\infty$ [276, 35]. Par conséquent, le flux rayonné à l'infini représente essentiellement le travail effectué par la partie dissipative de la force propre.

Des calculs basés sur la théorie des perturbations d'un trou noir ont permis de calculer analytiquement le flux $\mathcal{L}_\infty$ rayonné à l'infini jusqu'à un ordre post-newtonien très élevé. Pour une orbite quasi-circulaire, le résultat s'exprime en fonction du paramètre post-newtonien adimensionné

$$y \equiv \left(\frac{GM\Omega}{c^3} \right)^{2/3}, \quad (3.13)$$

mieux adapté que le paramètre $x = y(1+q)^{2/3}$ [cf. Éq. (2.14)] dans la limite $q \rightarrow 0$. Dans le cas d'une particule test orbitant un trou noir de Schwarzschild sur une orbite quasi-circulaire, le calcul a été poussé jusqu'à l'ordre 5.5PN, avec pour résultat la formule [392, 395]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\infty = & \frac{32}{5} q^2 y^5 \left\{ 1 - \frac{1247}{336} y + 4\pi y^{3/2} - \frac{44711}{9072} y^2 - \frac{8191}{672} \pi y^{5/2} \right. \\ & \left. + \left(\frac{6643739519}{69854400} + \frac{16}{3} \pi^2 - \frac{1712}{105} C - \frac{856}{105} \ln(16y) \right) y^3 - \frac{16285}{504} \pi y^{7/2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{323105549467}{3178375200} - \frac{1369}{126}\pi^2 + \frac{232597}{4410}C \right. \\
& \quad \left. + \frac{39931}{294}\ln 2 - \frac{47385}{1568}\ln 3 + \frac{232597}{8820}\ln y \right) y^4 \\
& + \left(\frac{265978667519}{745113600} - \frac{6848}{105}C - \frac{3424}{105}\ln(16y) \right) \pi y^{9/2} \\
& + \left(-\frac{2500861660823683}{2831932303200} - \frac{424223}{6804}\pi^2 + \frac{916628467}{7858620}C \right. \\
& \quad \left. - \frac{83217611}{1122660}\ln 2 + \frac{47385}{196}\ln 3 + \frac{916628467}{15717240}\ln y \right) y^5 \\
& + \left(\frac{8399309750401}{101708006400} + \frac{177293}{1176}C \right. \\
& \quad \left. + \frac{8521283}{17640}\ln 2 - \frac{142155}{784}\ln 3 + \frac{177293}{2352}\ln y \right) \pi y^{11/2} + \mathcal{O}(c^{-12}) \Big\}. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

En effectuant la substitution $\mu \rightarrow m_1$ et $M \rightarrow m_2$, on observe que la restriction 3.5PN du résultat perturbatif (3.14) (les deux premières lignes) est en parfait accord avec la limite $q \rightarrow 0$ du résultat post-newtonien (2.15)⁶. Négligeant le flux $\mathcal{L}_\bullet$ à travers l'horizon du trou noir dans le bilan (3.12), cette comparaison peut être vue comme un test de consistance entre la partie dissipative de la force propre et le formalisme post-newtonien. Les deux chapitres qui suivent ont pour vocation une comparaison similaire, cette fois-ci entre le formalisme post-newtonien et la partie *conservative* de la force propre.

Enfin, on remarquera la présence de termes logarithmiques de type zone d'onde à partir de l'ordre 3PN dans (3.14). Nous verrons au chapitre 5, dans le cadre de notre comparaison entre la partie conservative de la force propre et le formalisme post-newtonien, que des logarithmes de type zone proche commencent à apparaître à partir de l'ordre 4PN.

⁶Des calculs similaires ont également été effectués pour une particule test en orbite circulaire autour d'un trou noir de Kerr [373, 393], ainsi que pour des orbites légèrement excentriques [390, 295] (voir [364] pour une revue). Chaque fois que la comparaison avec le formalisme post-newtonien s'est avérée possible, les calculs sont en accord.

CALCUL POST-NEWTONNIEN DE LA FORCE PROPRE GRAVITATIONNELLE I

DANS un système binaire compact, lorsque l'un des corps est considérablement moins massif que le second, et orbite à distance suffisante de sorte que sa vitesse reste faible devant celle de la lumière, il est possible de comparer les prédictions du formalisme post-newtonien à celles de la théorie des perturbations d'un trou noir (voir la Fig. 4.2). En considérant un effet induit par la partie conservative de la force propre sur le mouvement du petit corps, nous avons mené à bien une telle comparaison à l'ordre 3PN.

4.1 Comment comparer les formalismes ?

La dynamique d'un système binaire compact coalescent combine des effets conservatifs et des effets dissipatifs. Nous avons vu au cours du chapitre précédent que les effets dissipatifs induits par la force propre se comparent très bien avec les résultats du formalisme post-newtonien. Nous souhaitons effectuer une comparaison similaire pour la partie *conservative* de la force propre.

Dans le formalisme de la force propre, il est possible de séparer de manière univoque ces deux contributions ; voir par exemple [31]. Dans le formalisme post-newtonien, les termes associés à des effets conservatifs (resp. dissipatifs) dans la dynamique d'un système binaire compact sont en facteur de puissances paires (resp. impaires) de $1/c$, et ce jusqu'à l'ordre 3.5PN inclus¹.

Si l'on néglige les effets dissipatifs induits par la réaction au rayonnement gravitationnel sur le mouvement orbital d'une binaire en orbite quasi-circulaire, alors l'orbite est exactement circulaire. Formellement, cela revient à supposer l'existence d'un champ de vecteur de Killing hélicoïdal k^μ . La métrique est alors invariante dans la direction de ce vecteur, *i.e.*

$$\mathcal{L}_k g_{\mu\nu} = 0, \quad (4.1)$$

¹Voir le chapitre suivant pour l'identification des termes conservatifs à partir de l'ordre 4PN.

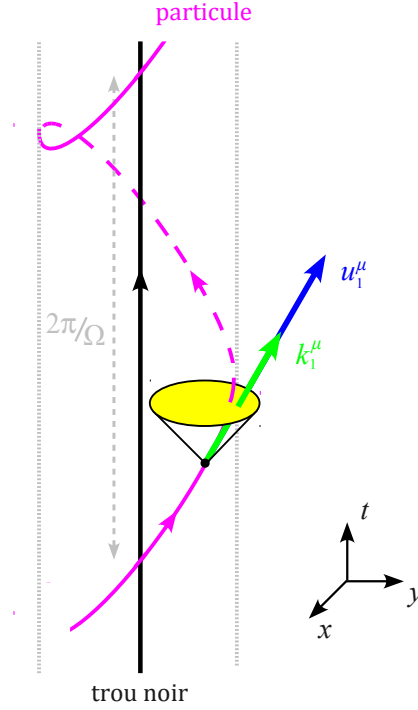


FIG. 4.1: Diagramme d'espace-temps schématisant le mouvement d'une particule autour d'un trou noir, sur une orbite circulaire de fréquence angulaire Ω . L'espace-temps admet un champ de vecteur de Killing hélicoidal k^μ . La quadrivitesse u_1^μ de la particule est colinéaire à k_1^μ , le vecteur de Killing évalué à la position de la particule.

où $\mathcal{L}$ est la dérivée de Lie. Un vecteur de Killing n'est défini qu'à un coefficient multiplicatif près. Nous imposerons la normalisation du vecteur de Killing k^μ en exigeant qu'à l'infini spatial,

$$k^\mu \partial_\mu = \partial_t + \Omega \partial_\varphi, \quad (4.2)$$

où ∂_α est la base naturelle associée à un système de coordonnées sphériques asymptotiquement plat $\{t, r, \theta, \varphi\}$, et $\Omega = d\varphi/dt$ est la vitesse angulaire relative de l'orbite circulaire de la binaire, telle que mesurée par un observateur distant inertiel.

Afin de comparer les résultats du calcul perturbatif à ceux du calcul post-newtonien, nous ne considérerons que la restriction de ces derniers, valables pour un rapport de masse quelconque, au cas d'une binaire de rapport de masse extrême. Dans cette perspective, nous conviendrons donc d'appeler le corps 1 de masse m_1 la particule, et le corps 2 de masse m_2 le trou noir. La particule en chute libre autour du trou noir n'observe aucune modification apparente de la métrique, de sorte que sa quadrivitesse u_1^μ est nécessairement colinéaire au vecteur de Killing évalué à cette position (voir la Fig. 4.1 pour une illustration) :

$$u_1^\mu = u_1^T k_1^\mu, \quad (4.3)$$

où l'on dénote par u_1^T le coefficient de proportionnalité.

En relativité générale, la comparaison entre deux calculs indépendants est toujours une opération délicate, en raison de l'invariance par difféomorphisme de la théorie. Afin de s'affranchir de cette difficulté, il est commode de comparer des grandeurs *scalaires*, c'est-à-dire dont la valeur numérique est indépendante du système de coordonnées utilisé pour la calculer². Pour des orbites circulaires, le coefficient de proportionnalité u_1^T défini par (4.3) est un tel scalaire. La fréquence orbitale Ω du système binaire est également un scalaire³. La fonction $u_1^T(\Omega)$ se prête donc bien à la comparaison d'un effet conservatif induit par la force propre sur le mouvement de la particule, avec la prédiction du formalisme post-newtonien.

De plus, la grandeur u_1^T admet une interprétation physique simple : dans un système de coordonnées tel que l'expression (4.2) du vecteur de Killing est valable partout (et pas seulement à l'infini spatial i^0), on doit avoir en particulier $k^t = 1$ à la position de la particule. D'après (4.3), le facteur multiplicatif u_1^T coïncide alors avec la composante temporelle de la quadrivitesse de la particule, *i.e.*

$$u_1^T \equiv u_1^t = \left(-(g_{\mu\nu})_1 \frac{v_1^\mu v_1^\nu}{c^2} \right)^{-1/2}, \quad (4.4)$$

où $(g_{\mu\nu})_1$ est la métrique *régularisée* sur la particule, et $v_1^\mu = (c, \mathbf{v}_1)$, avec $\mathbf{v}_1 = d\mathbf{y}_1/dt$ la vitesse de coordonnée de cette dernière. Le calcul de la fonction $u_1^T(\Omega)$ pour des orbites circulaires requiert donc au préalable l'évaluation de la métrique régularisée $(g_{\mu\nu})_1$.

Steven Detweiler et Bernard Whiting ont procédé au calcul perturbatif, valable au premier ordre de perturbation dans le rapport de masse $q = m_1/m_2$, en régularisant la perturbation à l'aide de la régularisation par somme de modes (voir chapitre 3). Luc Blanchet et moi-même nous sommes attelés au calcul post-newtonien de la métrique régularisée jusqu'à l'ordre 3PN inclus, valable pour tout rapport de masse.

4.2 Calcul post-newtonien de la métrique régularisée

La détermination des équations du mouvement d'un système binaire compact à l'ordre 3PN a nécessité le calcul du gradient de la métrique régularisée $(\partial_\lambda g_{\mu\nu})_1$ à cet ordre [75]. Afin de mener à bien notre comparaison avec le formalisme de la force propre, nous avons besoin de calculer la métrique régularisée $(g_{\mu\nu})_1$ elle-même, à l'ordre 3PN ; il s'agit du cœur du travail présenté dans ce chapitre.

Lors du calcul des équations du mouvement à l'ordre 3PN, la régularisation d'Hadamard s'est avérée insatisfaisante, en raison de l'apparition d'une ambiguïté (voir chapitre 2). Afin d'obtenir une expression non ambiguë de la métrique régularisée à l'ordre 3PN, nous avons donc adopté une méthode de régularisation plus puissante : la *régularisation dimensionnelle*.

La méthode de régularisation dimensionnelle a été introduite dans les années 70 par 't Hooft et Veltman [214], afin de régulariser des intégrales divergentes intervenant en théorie quantique des champs perturbative, tout en respectant l'invariance de jauge. Dans le cadre du problème à

²En théorie des perturbations, on parle également de grandeurs *invariantes de jauge*. Un changement de système de coordonnées se ramène à l'ordre linéarisé à une transformation de jauge.

³Au moins pour la classe des systèmes de coordonnées « raisonnables » pour lesquels (4.2) est vérifiée asymptotiquement. Les systèmes de coordonnées couramment utilisés dans le formalisme post-newtonien sont raisonnables en ce sens.

deux corps relativiste, son utilisation vise à respecter l'invariance de jauge associée à l'invariance par difféomorphisme de la relativité générale.

La régularisation dimensionnelle est basée sur le prolongement analytique dans la dimension d'espace d ; celle-ci est promue au rang de paramètre à valeur dans le plan complexe $\mathbb{C}$. La méthode de prolongement analytique permet de donner un sens à certaines intégrales en-dehors de leur domaine de définition initial. Par ailleurs, le caractère unique de l'extension est garanti grâce à l'unicité du prolongement analytique (voir par exemple [132] pour une discussion introductive).

Nous supposons donc que la gravitation est correctement décrite par la théorie de la relativité générale en dimension $d = 3 + \varepsilon$, avec $\varepsilon \in \mathbb{C}$. À l'ordre post-newtonien le plus bas, le potentiel newtonien généré par deux particules ponctuelles de masses m_1 et m_2 est donné par l'intégrale de Poisson de la densité de masse $\rho(\mathbf{x}) = \frac{2(d-2)}{d-1} [m_1 \delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1) + m_2 \delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_2)]$, où $\delta^{(d)}$ est la distribution de Dirac d -dimensionnelle telle que $\int \delta^{(d)}(\mathbf{x}) d^d \mathbf{x} = 1$. Ainsi, en dimension d quelconque, le potentiel newtonien [tel que $g_{00}^{(d)} = -1 + 2V^{(d)}/c^2 + \mathcal{O}(c^{-4})$] prend la forme

$$V^{(d)}(\mathbf{x}) = \frac{2(d-2)}{d-1} k \left(\frac{G^{(d)} m_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_1|^{d-2}} + \frac{G^{(d)} m_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_2|^{d-2}} \right), \quad (4.5)$$

où $k \equiv \Gamma(\frac{d-2}{2})/\pi^{\frac{d-2}{2}}$, et $G^{(d)} \equiv G \ell_0^\varepsilon$ est la constante de gravitation en dimension d , avec ℓ_0 une longueur caractéristique associée à la régularisation dimensionnelle. Dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on retrouve bien $k \rightarrow 1$ et $G^{(d)} \rightarrow G$. Pour $d = 3$, le potentiel newtonien (4.5) n'est pas défini dans la limite $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}_1$, à cause du champ propre divergent de la particule m_1 . Au contraire, grâce au prolongement analytique, il est toujours possible de choisir $\Re(d) < 2$ de sorte que le potentiel newtonien (4.5) admette une limite bien définie lorsque $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}_1$, soit

$$V^{(d)}(\mathbf{y}_1) = \frac{2(d-2)}{d-1} k \frac{G^{(d)} m_2}{|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|^{d-2}}. \quad (4.6)$$

On peut ensuite passer à la limite $d \rightarrow 3$ en invoquant l'unicité du prolongement analytique, avec comme résultat

$$V(\mathbf{y}_1) = \frac{G m_2}{|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|}. \quad (4.7)$$

L'exemple précédent est trivial, mais l'idée reste la même lorsque les calculs sont étendus à des ordres post-newtoniens plus élevés. Il apparaît toutefois une difficulté supplémentaire à l'ordre 3PN : en coordonnées harmoniques, la métrique régularisée $(g_{\mu\nu})_1$ fait alors intervenir des pôles, *i.e.* des termes $\propto (d-3)^{-1}$ qui divergent dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Schématiquement, le résultat prend donc la forme (cf. Éq. (4.69) pour l'expression explicite)

$$(g_{\mu\nu})_1 = \frac{1}{\varepsilon} g_{\mu\nu}^{(-1)}(\mathbf{y}_1) + g_{\mu\nu}^{(0)}(\mathbf{y}_1) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (4.8)$$

où $g_{\mu\nu}^{(-1)}(\mathbf{y}_1)$ est la partie polaire, d'ordre 3PN exclusivement, et $g_{\mu\nu}^{(0)}(\mathbf{y}_1)$ la partie finie. Les calculs de la métrique régularisée à l'aide de la régularisation d'Hadamard sont parfaitement satisfaisants jusqu'à l'ordre 2.5PN inclus, le résultat ne faisant intervenir aucune ambiguïté. Jusqu'à cet ordre, les deux méthodes de régularisation sont équivalentes, et le résultat est donné par la partie finie $g_{\mu\nu}^{(0)}(\mathbf{y}_1)$. L'apparition de pôles à l'ordre 3PN en régularisation dimensionnelle est associée

à la présence de divergences logarithmiques UV en dimension 3, à l'origine des ambiguïtés qui interviennent dans les calculs faisant appel à la régularisation d'Hadamard.

Une fois la métrique régularisée (4.8) calculée à l'ordre 3PN, le résultat, valable pour une orbite générique dans un référentiel quelconque, est inséré dans l'expression (4.4) de u_1^t . En passant dans le référentiel du centre de masse et en considérant la restriction au cas d'une orbite circulaire, on a la satisfaction d'observer la simplification de tous les pôles $\propto \varepsilon^{-1}$, de sorte que l'on peut passer à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ afin d'obtenir le résultat tridimensionnel. La simplification des pôles est attendue, car leur présence est spécifique au calcul en jauge harmonique, et le résultat $u_1^t(\Omega)$ est invariant de jauge pour une orbite circulaire. Dans le cas du calcul des équations du mouvement à l'ordre 3PN, il a été montré que les pôles peuvent être absorbés par une renormalisation de la trajectoire des corps [67], et doivent donc disparaître des quantités physiques invariantes de coordonnées.

4.3 Comparaison avec le calcul perturbatif

Le calcul post-newtonien de la fonction $u_1^t(\Omega)$ est valable pour un rapport de masse symétrique $v = m_1 m_2 / m^2$ quelconque. À l'ordre 3PN, le résultat se présente donc sous la forme d'un développement du type⁴ (cf. Éq. (4.77) pour l'expression explicite)

$$u_1^t(x) = 1 + \sum_{n=0}^3 a_n(v) x^{n+1} + \mathcal{O}(x^5), \quad (4.9)$$

où le paramètre post-newtonien x , défini par l'Éq. (2.14), est d'ordre $\varepsilon_{\text{PN}} \sim v^2/c^2$, mais présente l'avantage d'être invariant de jauge, car relié à la fréquence orbitale Ω de la binaire.

In fine, nous souhaitons toutefois comparer le résultat du calcul post-newtonien à celui du calcul perturbatif, qui inclue l'effet de la force propre, et n'est donc valable qu'au premier ordre dans le rapport de masse $q = m_1/m_2$. Dans la limite $q \ll 1$ qui convient pour un système binaire de rapport de masse extrême, il est donc commode de remplacer x au profit du paramètre post-newtonien

$$y \equiv \left(\frac{G m_2 \Omega}{c^3} \right)^{2/3} = x (1 + q)^{-2/3}, \quad (4.10)$$

et de remplacer le rapport de masse symétrique v en faveur du rapport de masse q , en utilisant la relation $v = q/(1 + q)^2$. La fonction $u_1^t(\Omega)$ admet de manière générale un développement en puissances du rapport de masse q de la forme

$$u_1^t = u_{\text{Schw}}^t + q u_{\text{SF}}^t + q^2 u_{\text{PSF}}^t + \mathcal{O}(q^3), \quad (4.11)$$

où $u_{\text{Schw}}^t = (1 - 3y)^{-1/2}$ est le résultat exact obtenu pour une particule test en orbite circulaire autour d'un trou noir de Schwarzschild, le terme $q u_{\text{SF}}^t$ est la contribution due à la force propre (théorie des perturbations du premier ordre), et $q^2 u_{\text{PSF}}^t$ est la correction post-self-force, calculable en principe à l'aide de la théorie des perturbations du second ordre.

⁴Nous verrons au cours du chapitre suivant qu'à partir de l'ordre 4PN apparaissent des termes logarithmiques, de sorte qu'en toute généralité la fonction $u_1^t(x)$ n'admet pas un développement en série entière.

Le formalisme de la force propre permet de calculer exactement (modulo l'erreur numérique) la contribution $u_{\text{SF}}^t(y)$ induite par la force propre. La comparaison du résultat ainsi obtenu à la prédiction post-newtonienne a été initiée par Steven Detweiler, à partir de l'expression connue de la métrique régularisée $(g_{\mu\nu})_1$ à l'ordre 2PN [79]. On trouve ainsi [151]

$$u_{\text{SF}}^t(y) = -y - 2y^2 - 5y^3 + \mathcal{C}_{3\text{PN}}y^4 + \mathcal{O}(y^5), \quad (4.12)$$

où les coefficients newtonien, 1PN et 2PN se déduisent immédiatement des résultats connus à l'ordre 2PN. Le calcul sous forme analytique du coefficient inconnu $\mathcal{C}_{3\text{PN}}$ résulte de l'extension de ces résultats à l'ordre 3PN, et en particulier du calcul de la métrique régularisée (4.8) à l'ordre 3PN, à l'aide de la régularisation dimensionnelle. On trouve ainsi

$$\mathcal{C}_{3\text{PN}} = -\frac{121}{3} + \frac{41}{32}\pi^2 = -27,6879\dots. \quad (4.13)$$

Par ailleurs, le calcul perturbatif fournit le résultat exact pour la contribution $u_{\text{SF}}^t(\Omega)$ due à la force propre. En ajustant cette fonction par une série post-newtonienne du type (4.12), on parvient à estimer la valeur du coefficient 3PN :

$$\mathcal{C}_{3\text{PN}}^{\text{SF}} = -27,677 \pm 0,005. \quad (4.14)$$

L'accord entre les valeurs (4.13) et (4.14) pour le coefficient 3PN est très bon : les deux calculs sont compatibles à 2σ , avec 5 chiffres significatifs. Ce résultat est un test convaincant de la validité des différentes méthodes de régularisation utilisées afin de soustraire le champ propre divergent des particules (régularisation par somme de modes pour la force propre, et régularisation dimensionnelle pour le formalisme post-newtonien). La figure 4.3 illustre la convergence des approximations post-newtoniennes successives vers le résultat exact. Au cours du chapitre suivant, nous verrons qu'il est possible d'améliorer cet accord en tenant compte du fait qu'à partir de l'ordre 4PN, le développement post-newtonien de la fonction $u_{\text{SF}}^t(y)$ fait intervenir des contributions logarithmiques liées au sillage d'onde.

La suite de ce chapitre est un article publié dans le journal *Physical Review D* [72].

Post-Newtonian and Numerical Calculations of the Gravitational Self-Force for Circular Orbits in the Schwarzschild Geometry

Luc Blanchet¹, Steven Detweiler², Alexandre Le Tiec¹ and Bernard F. Whiting²

¹ *G_{RECO}*, Institut d'Astrophysique de Paris — UMR 7095 du CNRS,
Université Pierre et Marie Curie, 98^{bis} boulevard Arago, 75014 Paris, France

² Institute for Fundamental Theory, Department of Physics,
University of Florida, Gainesville, FL 32611-8440, USA

Abstract

The problem of a compact binary system whose components move on circular orbits is addressed using two different approximation techniques in general relativity. The post-Newtonian (PN) approximation involves an expansion in powers of $v/c \ll 1$, and is most appropriate for small orbital velocities v . The perturbative self-force (SF) analysis requires an extreme mass ratio $m_1/m_2 \ll 1$ for the components of the binary. A particular coordinate-invariant observable is determined as a function of the orbital frequency of the system using these two different approximations. The post-Newtonian calculation is pushed up to the third post-Newtonian (3PN) order. It involves the metric generated by two point particles and evaluated at the location of one of the particles. We regularize the divergent self-field of the particle by means of dimensional regularization. We show that the poles $\propto (d-3)^{-1}$ appearing in dimensional regularization at the 3PN order cancel out from the final gauge invariant observable. The 3PN analytical result, through first order in the mass ratio, and the numerical SF calculation are found to agree well. The consistency of this cross cultural comparison confirms the soundness of both approximations in describing compact binary systems. In particular, it provides an independent test of the very different regularization procedures invoked in the two approximation schemes.

4.4 Introduction

4.4.1 Motivation

The detection and analysis of the gravitational radiation from black hole binaries by the ground-based LIGO–VIRGO and space-based LISA observatories requires very accurate theoretical predictions, for use as gravitational wave templates [402]. There are two main approximation schemes available for performing such calculations in general relativity: (i) The *post-Newtonian* expansion, well suited to describe the inspiralling phase of arbitrary mass ratio compact binaries in the slow motion and weak field regime ($c^{-1} \equiv v/c \ll 1$),¹ and (ii) the perturbation-based *self-force* approach, which gives an accurate description of extreme mass ratio binaries ($q \equiv m_1/m_2 \ll 1$) even in the strong field regime.

For the moment the post-Newtonian (PN) templates for compact binary inspiral have been developed to 3.5PN order in the phase [82, 77, 68, 69] and 3PN order in the amplitude [240, 78] (see [61] for a review). These are suitable for the inspiral of two neutron stars in the frequency bandwidth of LIGO and VIRGO detectors. For detection of black hole binaries (with higher masses) the PN templates have to be matched with full numerical simulations for the merger phase and the ringdown of the final black hole. The matching between the PN approximation and numerical relativity has turned out to be very successful [104, 95].

On the other hand, gravitational self-force (SF) analysis [296, 344, 153, 200, 335] is expected to provide templates for extreme mass ratio inspirals (EMRIs) anticipated to be present in the LISA frequency bandwidth. SF analysis is a natural extension of first order perturbation theory, and the latter has a long history of comparisons with post-Newtonian analysis [332, 127, 333, 391, 334, 395, 393, 336]. SF analysis, itself, is just now mature enough to present some limited comparisons with PN analysis, but it is not yet ready for template generation.

In this paper we shall compare the PN and SF analyses in their common domain of validity, that of the slow motion weak field regime of an extreme mass ratio binary (see illustration of various methods in Fig. 4.2). The problem was tackled by Detweiler [151], who computed numerically within the SF a certain gauge invariant quantity, defined by (4.17) below for an extreme mass ratio binary, and compared it with the 2PN prediction extracted from existing PN results [79]. Here we shall go one step further, and extend the comparison up to 3PN order. This will require an improvement in the numerical resolution of the SF calculation in order to distinguish more accurately the 3PN self-force from the self-force at higher PN orders. However, our primary difficulty is that the PN results for the metric have not previously been available at 3PN order, and will have to be carefully derived. We shall demonstrate an excellent agreement between the extreme mass ratio case ($q \ll 1$) of the analytical 3PN result and the numerical SF result.

4.4.2 Method

Let us consider a system of two (non-spinning) compact objects with masses m_1 and m_2 , and moving on slowly inspiralling quasi-circular orbits. In the PN analysis, let m_1 and m_2 be arbi-

¹By a slight abuse of notation we denote by c^{-1} the standard PN estimate, where c is the speed of light. As usual we refer to n PN as the order equivalent to terms $\mathcal{O}(c^{-2n})$ in the equations of motion beyond the Newtonian acceleration.

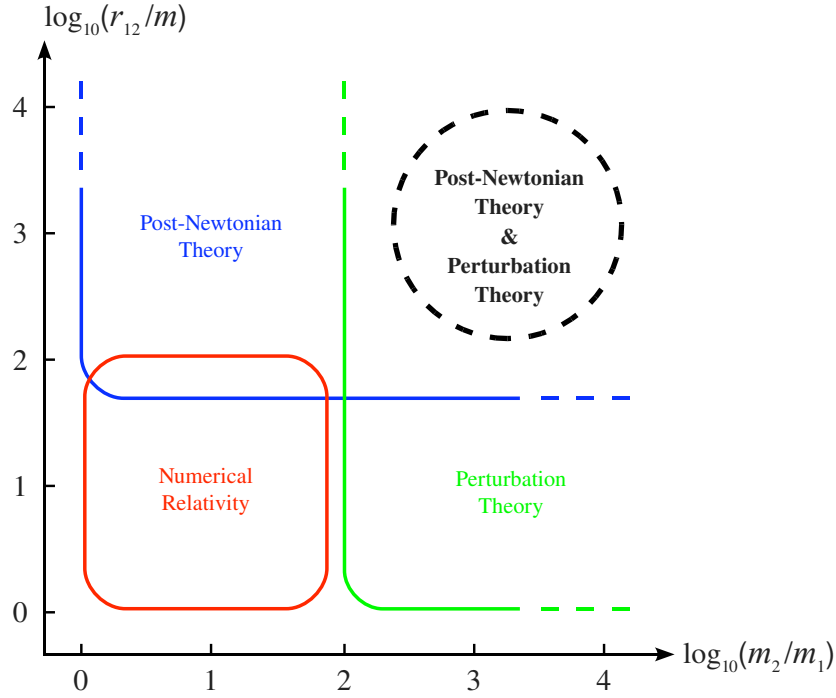


Figure 4.2: Different analytical approximation schemes and numerical techniques are used to study black hole binaries, depending on the mass ratio m_1/m_2 and the orbital velocity $v^2 \sim Gm/r_{12}$, where $m = m_1 + m_2$. The post-Newtonian theory and black hole perturbation theory can be compared in the slow motion regime ($v \ll c$ equivalent to $r_{12} \gg Gm/c^2$ for circular orbits) of an extreme mass ratio ($m_1 \ll m_2$) binary.

trary; in the SF analysis, further assume that $m_1 \ll m_2$. We can then call m_1 the “particle”, and m_2 the “black hole”.

Self-force analysis shows that the dissipative parts of the self-force for a circular orbit are the t and φ components. These result in a loss of energy and angular momentum from the small mass at the same precise rate as energy and angular momentum are radiated away [151]. In addition, earlier perturbative calculations of energy and angular momentum fluxes [332, 127, 333, 391, 334, 395, 393, 336] for this situation show them to be equivalent to the results of the PN analysis in their common domain of validity. Hence, by invoking an argument of energy and angular momentum balance, we know that the PN results also agree with the dissipative parts of the SF in their domain of common validity, and further comparison can reveal nothing new.

For our PN-SF comparison, we shall thus neglect the dissipative, radiation-reaction force responsible for the inspiral, and restrict ourselves to the conservative part of the dynamics. In PN theory this means neglecting the dissipative radiation-reaction force at 2.5PN and 3.5PN orders, and considering only the conservative dynamics at the even-parity 1PN, 2PN and 3PN orders. This clean separation between conservative even-parity and dissipative odd-parity PN terms is correct up to 3.5PN order.² In SF theory there is also a clean split between the dissipative and conservative parts of the self-force. This split is particularly transparent for a quasi-circular orbit,

²However, this split merges at 4PN order, since at that approximation arises a contribution of the radiation-reaction force, which originates from gravitational wave tails propagating to infinity [66].

where the r component is the only non-vanishing component of the conservative self-force.

Henceforth, the orbits of both masses are assumed to be and to remain circular, because we are ignoring the dissipative radiation-reaction effects. For our comparison we require two physical quantities which are precisely defined in the context of each of our approximation schemes. The orbital frequency Ω of the circular orbit as measured by a distant observer is one such quantity. The second requires further explanation.

With circular orbits and no dissipation, the geometry has a helical Killing vector field k^α . A Killing vector is only defined up to an overall constant factor. In our case k^α extends out to a large distance where the geometry is essentially flat. There $k^\alpha \partial_\alpha = \partial_t + \Omega \partial_\phi$ in any natural coordinate system which respects the helical symmetry [355]. We let this equality define the overall constant factor, thereby specifying the Killing vector field uniquely.

An observer moving with the particle m_1 , while orbiting the black hole m_2 , would detect no change in the local geometry. Thus the four-velocity u_1^α of the particle is tangent to the Killing vector k^α evaluated at the location of the particle, which we denote by k_1^α . A second physical quantity is then defined as the constant of proportionality, call it u_1^T , between these two vectors, namely

$$u_1^\alpha = u_1^T k_1^\alpha. \quad (4.15)$$

The four-velocity of the particle is normalized so that $(g_{\alpha\beta})_1 u_1^\alpha u_1^\beta = -1$; $(g_{\alpha\beta})_1$ is the *regularized* metric at the particle's location, whereas the metric itself is formally singular at the particle m_1 in both PN and SF approaches. The gauge invariant quantity u_1^T is thus given by:

$$u_1^T = \left(-(g_{\alpha\beta})_1 u_1^\alpha k_1^\beta \right)^{-1} = \left(-(g_{\alpha\beta})_1 k_1^\alpha k_1^\beta \right)^{-1/2}. \quad (4.16)$$

It is important to note that this quantity is precisely defined in both PN and SF frameworks, and it does not depend upon the choice of coordinates or upon the choice of perturbative gauge; however, it very definitely depends upon using a valid method of regularization. Furthermore, for any coordinate system u_1^T has a pleasant physical interpretation as being the rate of change of time at a large distance, with respect to the proper time on the particle m_1 , and it could in principle be measured by a redshift experiment as described in [151].

If we happen to choose a convenient coordinate system where $k^\alpha \partial_\alpha = \partial_t + \Omega \partial_\phi$ everywhere, then in particular $k_1^t = 1$, and thus $u_1^T \equiv u_1^t$, the t component of the four velocity of m_1 . The Killing vector on the particle is then $k_1^\alpha = u_1^\alpha / u_1^t$, and simply reduces to the particle's ordinary post-Newtonian coordinate velocity v_1^α / c . In such a coordinate system, the description of the invariant quantity we are thus considering is

$$u_1^T \equiv u_1^t = \left(-(g_{\alpha\beta})_1 \frac{v_1^\alpha v_1^\beta}{c^2} \right)^{-1/2}. \quad (4.17)$$

In the PN calculation we shall evaluate u_1^T using a particular harmonic coordinate system. We shall make no restriction on the mass ratio $q = m_1/m_2$, but shall eventually compute the small mass ratio limit $q \ll 1$ for comparison with the SF result.

The regularized metric $(g_{\alpha\beta})_1$ is defined with very different prescriptions in the SF and PN approaches. Both analyses require subtle treatment of singular fields at the location of the masses. Subtracting away the infinite part of a field while carefully preserving the part which is desired

is always a delicate task. Our comparison will rely on the principle of the *physical equivalence* of the regularized SF and PN metrics, at least in the vicinity of the particle, i.e. that they are isometric — they differ by a coordinate transformation. In fact the cross cultural comparison of the invariant u_1^T is a test of the isometry of the two regularized metrics and is, thus, a test of the two independent (and very different) regularization procedures in use.

In the SF prescription, the regularized metric reads

$$g_{\alpha\beta}^{\text{SF}}(x) = \bar{g}_{\alpha\beta}(x) + h_{\alpha\beta}^{\text{R}}(x), \quad (4.18)$$

where $\bar{g}_{\alpha\beta}$ denotes the background Schwarzschild metric of the black hole, and where the “Regular” perturbation $h_{\alpha\beta}^{\text{R}}$ is smooth in a neighborhood of the particle, and follows from the Detweiler-Whiting prescription [153] for removing the infinite part of the field, as described below in Sec. 4.5.2. In particular the metric (4.18) is regular at the particle’s position y_1^α , and we simply have

$$(g_{\alpha\beta}^{\text{SF}})_1 = g_{\alpha\beta}^{\text{SF}}(y_1). \quad (4.19)$$

In the perturbative SF analysis we are only working through first order in $q = m_1/m_2$, and at that level of approximation $h_{\alpha\beta}^{\text{R}} = \mathcal{O}(q)$. Then u_1^T can be computed accurately to the same perturbative order and compares well with the post-Newtonian result to 2PN order [151]. The regularized 2PN metric is known [79], and therefore the comparison is straightforward.

In the present paper we shall obtain the 3PN regularized metric which will be the core of our calculation, and will be partly based on existing computations of the equations of motion at 3PN order using Hadamard [75] and dimensional [67] regularizations. Using an iterative PN procedure, one first considers the post-Newtonian metric $g_{\alpha\beta}^{\text{PN}}(\mathbf{x}, t)$ at any field point outside the particle, in a coordinate system $x^\alpha = \{ct, x^i\}$. That metric is generated by the two particles, and includes both regular and singular contributions around each particle. Then we compute the PN regularized metric at the location of the particle by taking the limit when $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}_1(t)$, where $\mathbf{y}_1(t)$ is the particle’s trajectory. In 3 spatial dimensions, that limit is singular. In order to treat the infinite part of the field, we extend the computation in d spatial dimensions, following the prescription of *dimensional regularization*, which is based on an analytic continuation (AC) in the dimension d viewed as a complex number. Considering the analytic continuation in a neighborhood of $\varepsilon \equiv d - 3 \rightarrow 0$, we define

$$(g_{\alpha\beta}^{\text{PN}})_1 = \text{AC} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_{\alpha\beta}^{\text{PN}}(\mathbf{x}, t) \right]. \quad (4.20)$$

The limit $\varepsilon \rightarrow 0$ does not exist in general due to the presence of poles $\propto \varepsilon^{-1}$ occurring at 3PN order; we compute the singular Laurent expansion when $\varepsilon \rightarrow 0$, and we shall see that the poles disappear from the final gauge invariant results. Previous work on equations of motion and radiation field of compact binaries has shown that dimensional regularization is a powerful regularization method in a PN context. In particular this regularization is free of the ambiguities plaguing the Hadamard regularization at the third post-Newtonian order [141, 67, 68, 69].

The plan of this paper is as follows: Sec. 4.5 is devoted to an overview of the SF formalism. The circular geodesics of the perturbed Schwarzschild geometry are described in Sec. 4.5.1, where we also give an explicitly gauge invariant relationship between Ω and u_1^T for the particle m_1 . We use the mode-sum regularization procedure of Barack and Ori [33, 32] to perform the

delicate subtraction of the singular field $h_{\alpha\beta}^S$ from the retarded metric perturbation $h_{\alpha\beta}^{\text{ret}}$. We give a brief description of our application of this process in Sec. 4.5.2. In Sec. 4.5.3 we describe some of the details of the numerical analysis which yields our value for u_1^T as a function of Ω , and provide a brief discussion of the numerical determination of the 3PN effect on u_1^T . Most of the details concerning the 3PN calculation are presented in Sec. 4.6. We focus mainly on the issues regarding our implementation of the dimensional self-field regularization which is described in Secs. 4.6.1 and 4.6.2. The post-Newtonian results are presented in Sec. 4.7. We give the fully-fledged regularized 3PN metric in Sec. 4.7.1, and present our final result for u_1^T in Sec. 4.7.2. We finally investigate the small mass ratio limit $q \ll 1$ of the post-Newtonian result, and compare with the self-force calculation in Sec. 4.8. Two appendices provide further details on the PN calculation: An alternative derivation using the Hadamard regularization is discussed in Appendix A, and the choice of the center-of-mass frame and the reduction to quasi-circular orbits at 3PN order within dimensional regularization are investigated in Appendix B.

4.5 Self-force overview

Previously we described the truly coordinate and perturbative-gauge independent properties of Ω and u_1^T . In this section we use Schwarzschild coordinates, and we refer to “gauge invariance” as a property which holds within the restricted class of gauges for which $k^\alpha \partial_\alpha = \partial_t + \Omega \partial_\phi$ is a helical Killing vector. In all other respects, the gauge choice is arbitrary. With this assumption, no generality is lost, and a great deal of simplicity is gained.

The regularized metric perturbation $h_{\alpha\beta}^R = h_{\alpha\beta}^{\text{ret}} - h_{\alpha\beta}^S$ is the difference between the retarded metric perturbation $h_{\alpha\beta}^{\text{ret}}$ and the singular field $h_{\alpha\beta}^S$. A Hadamard expansion of Green’s functions in curved spacetime provides an expansion for $h_{\alpha\beta}^S$ [153]. In a neighborhood of the particle with a special, locally-inertial coordinate system, $h_{\alpha\beta}^S$ appears as the m_1/r part³ of the particle’s Schwarzschild metric along with its tidal distortion caused by the background geometry of the large black hole. Details of the expansion are given in Sec. 6.1 of [150]. The special locally inertial coordinates for a circular geodesic in the Schwarzschild metric are given as functions of the Schwarzschild coordinates in Appendix B of [152].

4.5.1 Circular geodesics of the perturbed Schwarzschild geometry

The effect of the gravitational self-force is most easily described as having m_1 move along a geodesic of the regularized metric $\bar{g}_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}^R$. We are interested in circular orbits and let u^α be the four-velocity of m_1 .⁴ This differs from the four-velocity $\bar{u}^\alpha$ of a geodesic of the straight Schwarzschild geometry at the same radial coordinate r by an amount of $\mathcal{O}(q)$. Recall that we are describing perturbation analysis with $q \ll 1$, therefore $h_{\alpha\beta}^R = \mathcal{O}(q)$, and all equations in this section necessarily hold only through first order in q .

It is straightforward to determine the components of the geodesic equation for the metric $\bar{g}_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}^R$ [151], and then to find the components of the four-velocity u^α of m_1 when it is in a circular orbit at Schwarzschild radius r . We reiterate that the four-velocity is to be normalized

³In all of Sec. 4.5 we set $G = c = 1$.

⁴Since we are clearly interested in the motion of the small particle m_1 , we remove the index 1 from u_1^α .

with respect to $\bar{g}_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}^R$ rather than $\bar{g}_{\alpha\beta}$, and that $h_{\alpha\beta}^R$ is assumed to respect the symmetry of the helical Killing vector. In this case we have

$$(u^t)^2 = \frac{r}{r - 3m_2} \left[1 + \bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^R - \frac{r}{2} \bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta \partial_r h_{\alpha\beta}^R \right], \quad (4.21a)$$

$$(u^\varphi)^2 = \frac{r - 2m_2}{r(r - 3m_2)} \left[\frac{m_2(1 + \bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^R)}{r(r - 2m_2)} - \frac{1}{2} \bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta \partial_r h_{\alpha\beta}^R \right]. \quad (4.21b)$$

A consequence of these relations is that the orbital frequency of m_1 in a circular orbit about a perturbed Schwarzschild black hole of mass m_2 is, through first order in the perturbation, given by

$$\Omega^2 = \left(\frac{u^\varphi}{u^t} \right)^2 = \frac{m_2}{r^3} - \frac{r - 3m_2}{2r^2} \bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta \partial_r h_{\alpha\beta}^R. \quad (4.22)$$

The angular frequency Ω is a physical observable and is independent of the gauge choice. However the perturbed Schwarzschild metric does not have spherical symmetry, and the radius of the orbit r is not an observable and does depend upon the gauge choice. That is to say, an infinitesimal coordinate transformation of $\mathcal{O}(q)$ might change $\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta \partial_r h_{\alpha\beta}^R$. But if it does, then it will also change the radius r of the orbit in just such a way that Ω^2 as determined from (4.22) remains unchanged. Both $u^t \equiv u^T$ and $u^\varphi \equiv \Omega u^T$ are gauge invariant as well.

Our principle interest is in the relationship between Ω and u^T , which we now establish directly using (4.21a) and (4.22), writing all equations through first order. First, we can rearrange (4.22) to get:

$$\left(\frac{m_2}{r} \right)^3 = (m_2 \Omega)^2 + \left(\frac{m_2}{r} \right)^2 \left(1 - \frac{3m_2}{r} \right) \left(\frac{r}{2} \bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta \partial_r h_{\alpha\beta}^R \right). \quad (4.23)$$

Next, we take the cube root of both sides and expand on the right-hand-side (RHS) to obtain:

$$\frac{m_2}{r} = (m_2 \Omega)^{2/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{m_2}{r} \frac{1}{(m_2 \Omega)^{2/3}} \right)^2 \left(1 - \frac{3m_2}{r} \right) \left(\frac{r}{2} \bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta \partial_r h_{\alpha\beta}^R \right). \quad (4.24)$$

The second term on the RHS of (4.24) is already first order in q . Thus, in the first two bracketed expressions in this second term, we can replace m_2/r by the leading approximation to m_2/r from just the first term on the RHS of (4.24), giving:

$$\frac{m_2}{r} = (m_2 \Omega)^{2/3} + \frac{1}{3} \left(1 - 3(m_2 \Omega)^{2/3} \right) \left(\frac{r}{2} \bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta \partial_r h_{\alpha\beta}^R \right). \quad (4.25)$$

Following [151], we next introduce the gauge invariant measure of the orbital radius

$$R_\Omega \equiv \left(\frac{m_2}{\Omega^2} \right)^{1/3} \implies (m_2 \Omega)^{2/3} = \frac{m_2}{R_\Omega}. \quad (4.26)$$

Now we use this in its second form and substitute back into (4.25):

$$\frac{m_2}{r} = \frac{m_2}{R_\Omega} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{3m_2}{R_\Omega} \right) \left(\frac{r}{2} \bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta \partial_r h_{\alpha\beta}^R \right). \quad (4.27)$$

Multiplying overall by -3 and adding 1 to both sides before dividing through, we find:

$$\frac{1}{1 - 3m_2/r} \left(1 - \frac{r}{2} \bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta \partial_r h_{\alpha\beta}^R \right) = \frac{1}{1 - 3m_2/R_\Omega}. \quad (4.28)$$

This is exactly what we need in (4.21a) in order to establish a first order, gauge invariant, algebraic relationship between u^T (to which u^t evaluates in our gauge) and R_Ω (or equivalently Ω), namely:

$$(u^T)^2 = \left(1 - \frac{3m_2}{R_\Omega} \right)^{-1} \left(1 + \bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^R \right). \quad (4.29)$$

The lowest order term on the RHS is identical to what is obtained for a circular geodesic of the unperturbed Schwarzschild metric. Indeed, recall that the Schwarzschild part of u^T is known exactly as $u_{\text{Schw}}^T = (1 - 3m_2/R_\Omega)^{-1/2}$. Thus, if we write

$$u^T \equiv u_{\text{Schw}}^T + q u_{\text{SF}}^T + \mathcal{O}(q^2), \quad (4.30)$$

the first order term in (4.29) gives:

$$q u_{\text{SF}}^T = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3m_2}{R_\Omega} \right)^{-1/2} \bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^R, \quad (4.31)$$

which is $\mathcal{O}(q)$, and contains the effect of the “gravitational self-force” on the relationship between u^T and Ω , even though it bears little resemblance to a force. We shall henceforth focus our attention on the calculation of the combination $\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^R$.

4.5.2 Mode sum regularization

Both the retarded metric perturbation $h_{\alpha\beta}^{\text{ret}}$ and the singular field $h_{\alpha\beta}^S$ are singular at m_1 . However, we actually determine $h_{\alpha\beta}^{\text{ret}}$ by using the inherent symmetries of the problem to separate variables and to decompose the components of $h_{\alpha\beta}^{\text{ret}}$ in terms of tensor spherical harmonics. Each ℓ, m component $h_{\alpha\beta}^{\text{ret}(\ell, m)}$ is then finite and determined using a standard numerical differential equation solver. Only the sum over modes diverges.

For our problem, we treat the divergence of the singular field $h_{\alpha\beta}^S$ in a related manner. The singular behavior is represented in the known expansion of $h_{\alpha\beta}^S$ about the particle, and is also amenable to a decomposition in terms of spherical harmonics. This procedure is stylistically quite similar to the expansion of the Coulomb field of a point charge, displaced from the origin, in terms of spherical harmonics centered on the origin; this results in the coefficients being proportional to either $1/r^{\ell+1}$ or r^ℓ , depending upon whether the field point is inside or outside the charge. In SF analysis, the spherical harmonic coefficients determine the *regularization parameters* of $h_{\alpha\beta}^S$.

Following the original prescription of Barack and Ori [33, 30] and extending it as in [152], we first perform the sum over m for the retarded field at the particle

$$\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^{\text{ret}(\ell)} \equiv \sum_{m=-\ell}^{\ell} \bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^{\text{ret}(\ell, m)}. \quad (4.32)$$

Then we use the recognition that the decomposition of the singular field is of the form

$$\begin{aligned} \bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^{S(\ell)} = & B + \frac{C}{\ell + 1/2} + \frac{D}{(2\ell - 1)(2\ell + 3)} \\ & + \frac{E_1}{(2\ell - 3)(2\ell - 1)(2\ell + 3)(2\ell + 5)} + \mathcal{O}(\ell^{-6}), \end{aligned} \quad (4.33)$$

where B, C, D, E_1 (and the subsequent E_2, E_3 , etc) are regularization parameters. The particular ℓ dependence of the coefficients accompanying the parameters D and E_n is related to the expansion of $(1 - \cos \theta)^{n+1/2}$ in terms of Legendre polynomials $P_\ell(\cos \theta)$; details are derived and described in Appendix D of [152].

The regular field at the particle is finally given by

$$\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^R = \sum_\ell (\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^{\text{ret}(\ell)} - \bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^{S(\ell)}), \quad (4.34)$$

and the sum is guaranteed to be convergent as long as B and C are known. In practice, the regularization parameters are difficult to determine. For our problem it is known analytically that $C = 0$ and

$$B = \frac{2m_1}{r} \left[\frac{r - 3m_2}{r - 2m_2} \right]^{1/2} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{m_2}{r - 2m_2} \right), \quad (4.35)$$

where ${}_2F_1$ is a hypergeometric function, and r is the Schwarzschild radial coordinate of the circular orbit. This knowledge of B and C , but not D , implies that the sum in (4.34) converges as $1/\ell$. To increase the rate of convergence, we augment our knowledge of B and C by numerically determining further regularization parameters [152]: We use the fact that the behavior of $\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^{\text{ret}(\ell)}$, evaluated at the particle, must match $\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^{S(\ell)}$ as given in (4.33) for large ℓ . This allows us to fit the numerical data to determine the additional regularization parameters D and E_n up to, say, E_3 . Knowledge of these additional parameters results in a sum which converges as $1/\ell^9$. In our numerical work we typically fit for three or four extra parameters. We calculate up to $\ell = 40$, fit in the range $\ell = 13 - 40$, and then sum to $\ell \rightarrow +\infty$, with errors at the full level of our calculational precision.

In earlier work [151, 354, 355] the accuracy of the numerical integration used was adequate for the purposes then at hand. For the comparisons presented here it became obvious that we should investigate pushing our integration procedure to enable us to obtain the highest precision practicable. By adjusting the effective step size as ℓ changed,⁵ we found that it was possible to achieve this without encountering any other numerical difficulties (such as an unreasonable accumulation of round-off error). Subsequent fitting, to obtain the numerical determination of the higher order regularization parameters $D, \dots, E_3$ as described above, allowed us to reduce residuals to the level of the computational precision which had controlled our integration procedure. Monte Carlo calculations based on these residuals gave us systematic estimates of the errors to associate with our fit parameters. Using these, we find relative errors of order 10^{-13} in u_{SF}^T (the loss in precision being due to the regularization). The corresponding results are presented in Table 4.1.

⁵We used an integration procedure that contained an adjustable parameter, ϵ , which controlled the precision of the numerical result. We chose ϵ small enough so that further reduction would not cause relative changes in the result larger than 10^{-15} .

R_Ω/m_2	$\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^R/q$	u_{SF}^T
200	−0.0100252390238679	−0.00505064245513028
220	−0.00911174844278219	−0.00458725834137915
240	−0.00835083080996084	−0.00420175898117037
260	−0.00770720725494635	−0.00387603022007156
280	−0.00715569723937482	−0.00359717107497568
300	−0.00667784659538770	−0.00335574417643231
320	−0.00625982212277844	−0.00314468649077390
340	−0.00589105041112645	−0.00295860680303681
360	−0.00556331104384481	−0.00279331869895365
380	−0.00527011654983391	−0.00264552181684313
400	−0.00500627861027562	−0.00251257921031088
420	−0.00476759835869862	−0.00239235862943596
440	−0.00455064124356486	−0.00228311728867935
460	−0.00435257068802445	−0.00218341682793388
480	−0.00417102337921533	−0.00209205962311231
500	−0.00400401451882955	−0.00200804044413982

Table 4.1: Summary of the gravitational self-force effects for a variety of radii R_Ω . Approximately 13 digits are believed to be accurate.

After the regularization procedure is complete we have in hand $\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^R$, and hence u_{SF}^T , for an orbit at a given radius R_Ω . At this point, we have solved our self-force problem — we have found the effect, u_{SF}^T , of the self-force on u^T for a specific Ω .

4.5.3 Post-Newtonian fit of u_{SF}^T

The improved quality of the data in Table 4.1 fed directly into the next stage, that of fitting u_{SF}^T as a function of Ω (or R_Ω) to determine the higher order post-Newtonian coefficients. In order to proceed to our post-Newtonian fit of u_{SF}^T , we introduce a special notation for the convenient gauge invariant PN parameter defined in (4.26), which is $\mathcal{O}(c^{-2})$ and reads

$$y \equiv (m_2 \Omega)^{2/3} = \frac{m_2}{R_\Omega}. \quad (4.36)$$

The post-Newtonian expansion of the self-force effect given in (4.31) was determined explicitly up to 2PN order in [151], and found to be

$$u_{\text{SF}}^T = -y - 2y^2 - 5y^3 + \mathcal{C}_{\text{3PN}}^{\text{SF}} y^4 + \mathcal{O}(y^5), \quad (4.37)$$

where $\mathcal{C}_{\text{3PN}}^{\text{SF}}$ represents the 3PN coefficient (unknown at the time of [151]), and higher-order 4PN terms are neglected. The author of Ref. [151] also performed a numerical fit of u_{SF}^T to the polynomial (4.37) in order to determine the numerical value of $\mathcal{C}_{\text{3PN}}^{\text{SF}}$. He expected that the post-Newtonian derivation of this coefficient would be unavailable for some time, and the numerical

fit was done in a cursory fashion using a range in R_Ω from $20 m_2$ to $50 m_2$, not generally optimal for PN comparison. It is now time to improve upon that early analysis.

The process of fitting terms in the ℓ -sum for the regularization parameters is relatively easy. Convergence in the ℓ -sum increases by two orders with each additional regularization parameter, and is very rapid. By contrast, the low order PN series for u_{SF}^T is effectively a power series in $1/R_\Omega$ and is relatively slowly convergent. Moreover, if we tried to fit higher terms, we could rapidly encounter the situation where, for some large R_Ω , contributions would be below our error estimates, while for smaller R_Ω , the same contributions would still be significant. This situation complicated both the choice of the range of R_Ω over which we could effectively fit, and the choice of the number of additional PN coefficients we should use to improve the characterization of our available data, consistent with the error estimates we had previously established. For this paper, we settled on a compromise, namely, we used values of R_Ω generally in the range $200 m_2$ to $500 m_2$ and, surprisingly, somewhere between 3 and 6 additional PN coefficients. Following these procedures, our numerical determination of the 3PN coefficient in the self-force effect upon u^T was found to be

$$C_{3\text{PN}}^{\text{SF}} = -27.677 \pm 0.005. \quad (4.38)$$

If we do not use a sufficient number of additional coefficients, our fitting procedure will compensate by systematically attempting to approximate the missing terms by adjusting the fitting parameters we do use. This effect, which determines the error term in (4.38), turns out to dominate the random error from our numerically determined data points. We can estimate this effect by our choice of the range of data and the number of coefficients used in the fitting process. This proves to be adequate for our comparison while also suggesting that further work is warranted. In particular, we shall show in separate work [71] that the PN expansion involves in higher orders some logarithmic terms, and that the prior knowledge of the coefficients of the logarithms appearing at 4PN and 5PN orders (computed in [71] from PN theory) will improve very much the accuracy of the PN fit to the SF result.⁶ This study is beyond our current scope, but will be extensively reported in [71].

4.6 Post-Newtonian calculation

In this section, our aim is to compute the 3PN regularized metric (4.20) by direct post-Newtonian iteration of the Einstein field equations in the case of singular point mass sources. Previous work on the 3PN equations of motion and radiation field of point particles [141, 67, 68, 69] has shown that the appropriate regularization to remove the infinite self-field of point particles in this context is dimensional regularization [214, 90].

In the dimensional regularization (DR) scheme, we look for the solution of the Einstein field equations in $D = d + 1$ space-time dimensions, with a matter source made of point particles. We treat the space dimension as an arbitrary complex number, $d \in \mathbb{C}$, and interpret any intermediate formula in the PN iteration of those equations by analytic continuation in d . Then we

⁶Accordingly, the $\mathcal{O}(y^5)$ symbol for remainders in Eq. (4.37) and similar equations below should rather be understood as the Landau $o(y^4)$ symbol.

analytically continue d down to the value of interest (namely 3), posing

$$d \equiv 3 + \varepsilon. \quad (4.39)$$

In most of the calculations we neglect terms of order ε or higher, i.e. we retain the finite part and the eventual poles.

Defining the gravitational field variable $h^{\alpha\beta} \equiv \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\beta}$,⁷ and adopting the harmonic coordinate condition $\partial_\mu h^{\alpha\mu} = 0$, we can write the “relaxed” Einstein field equations in the form of ordinary d’Alembert equations, namely

$$\square h^{\alpha\beta} = \frac{16\pi G^{(d)}}{c^4} |g| T^{\alpha\beta} + \Lambda^{\alpha\beta}[h, \partial h, \partial^2 h], \quad (4.40)$$

where $\square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ is the *flat*-spacetime d’Alembertian operator in D space-time dimensions. The gravitational source term $\Lambda^{\alpha\beta}$ in (4.40) is a functional of $h^{\mu\nu}$ and its first and second space-time derivatives, and reads as

$$\begin{aligned} \Lambda^{\alpha\beta} = & -h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu h^{\alpha\beta} + \partial_\mu h^{\alpha\nu} \partial_\nu h^{\beta\mu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \partial_\rho h^{\mu\sigma} \partial_\sigma h^{\nu\rho} \\ & - g^{\alpha\mu} g_{\nu\sigma} \partial_\rho h^{\beta\sigma} \partial_\mu h^{\nu\rho} - g^{\beta\mu} g_{\nu\sigma} \partial_\rho h^{\alpha\sigma} \partial_\mu h^{\nu\rho} + g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \partial_\rho h^{\alpha\mu} \partial_\sigma h^{\beta\nu} \\ & + \frac{1}{4} (2g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}) \left(g_{\rho\sigma} g_{\epsilon\pi} - \frac{1}{d-1} g_{\sigma\epsilon} g_{\rho\pi} \right) \partial_\mu h^{\rho\pi} \partial_\nu h^{\sigma\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Note the explicit dependence on the space dimension d of this expression. The matter stress-energy tensor $T^{\alpha\beta}$ will be composed of Dirac delta-functions in d dimensions, say $\delta^{(d)}[\mathbf{x} - \mathbf{y}_a]$, where $\mathbf{x}$ is the field point and $\mathbf{y}_a$ are the source points labeled by a . Finally the d -dimensional gravitational constant $G^{(d)}$ is related to the usual Newton constant G by

$$G^{(d)} = G \ell_0^\varepsilon, \quad (4.42)$$

where ℓ_0 denotes the characteristic length associated with dimensional regularization. We shall check in Sec. 4.7 that this length scale never appears in the final 3-dimensional result.

4.6.1 Post-Newtonian metric in d dimensions

The 3PN metric is given in expanded form for general matter sources in terms of some “elementary” retarded potentials (sometimes called near-zone potentials) V , V_i , K , $\hat{W}_{ij}$, $\hat{R}_i$, $\hat{X}$, $\hat{Z}_{ij}$, $\hat{Y}_i$ and $\hat{T}$, which were introduced in Ref. [75] for 3 dimensions [see Eqs. (3.24) there] and generalized to d dimensions in Ref. [67]. All these potentials have a finite non-zero post-Newtonian limit when $c \rightarrow +\infty$ and parameterize the successive PN approximations. Although this decomposition in terms of near-zone potentials is convenient, such potentials have no physical meaning by themselves. Let us first define the combination

$$\mathcal{V} \equiv V - \frac{2}{c^2} \left(\frac{d-3}{d-2} \right) K + \frac{4\hat{X}}{c^4} + \frac{16\hat{T}}{c^6}. \quad (4.43)$$

⁷Here $g^{\alpha\beta}$ is the contravariant metric, inverse of the covariant metric $g_{\alpha\beta}$ of determinant $g = \det(g_{\alpha\beta})$, and $\eta^{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ represents an auxiliary Minkowski metric in Cartesian coordinates.

Then the 3PN metric components can be written in the rather compact form [67]⁸

$$g_{00}^{\text{PN}} = -e^{-2\mathcal{V}/c^2} \left(1 - \frac{8V_i V_i}{c^6} - \frac{32\hat{R}_i V_i}{c^8} \right) + \mathcal{O}(c^{-10}), \quad (4.44a)$$

$$g_{0i}^{\text{PN}} = -e^{-\frac{(d-3)\mathcal{V}}{(d-2)c^2}} \left(\frac{4V_i}{c^3} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d-1}{d-2} \frac{V}{c^2} \right)^2 \right] + \frac{8\hat{R}_i}{c^5} + \frac{16}{c^7} \left[\hat{Y}_i + \frac{1}{2} \hat{W}_{ij} V_j \right] \right) + \mathcal{O}(c^{-9}), \quad (4.44b)$$

$$g_{ij}^{\text{PN}} = e^{\frac{2\mathcal{V}}{(d-2)c^2}} \left(\delta_{ij} + \frac{4}{c^4} \hat{W}_{ij} + \frac{16}{c^6} \left[\hat{Z}_{ij} - V_i V_j + \frac{1}{2(d-2)} \delta_{ij} V_k V_k \right] \right) + \mathcal{O}(c^{-8}). \quad (4.44c)$$

The successive PN truncations of the field equations (4.40)–(4.41) give us the equations satisfied by all the above potentials up to 3PN order. We conveniently define from the components of the matter stress-energy tensor $T^{\alpha\beta}$ the following density, current density, and stress density

$$\sigma \equiv \frac{2}{d-1} \frac{(d-2)T^{00} + T^{ii}}{c^2}, \quad (4.45a)$$

$$\sigma_i \equiv \frac{T^{0i}}{c}, \quad (4.45b)$$

$$\sigma_{ij} \equiv T^{ij}, \quad (4.45c)$$

where $T^{ii} \equiv \delta_{ij} T^{ij}$. The leading-order potentials in the metric obey

$$\square V = -4\pi G^{(d)} \sigma, \quad (4.46a)$$

$$\square V_i = -4\pi G^{(d)} \sigma_i, \quad (4.46b)$$

$$\square K = -4\pi G^{(d)} \sigma V, \quad (4.46c)$$

$$\square \hat{W}_{ij} = -4\pi G^{(d)} \left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\sigma_{kk}}{d-2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{d-1}{d-2} \right) \partial_i V \partial_j V. \quad (4.46d)$$

These potentials evidently include many PN corrections. The potentials V and V_i have a compact support (i.e. their source is localized on the isolated matter system) and will admit a finite limit when $\varepsilon \rightarrow 0$ without any pole. With the exception of the potential K which has also a compact support,⁹ all other potentials have, in addition to a compact-support part, a non-compact support contribution, such as that generated by the term $\propto \partial_i V \partial_j V$ in the source of $\hat{W}_{ij}$. This is the non-compact support piece which is the most delicate to compute because it typically generates some poles $\propto 1/\varepsilon$ at the 3PN order. The d'Alembert equations satisfied by all higher-order PN potentials, whose sources are made of non-linear combinations of lower-order potentials, are

⁸This particular exponentiated form is to be consistently reexpanded at 3PN order.

⁹Actually the compact-support potential K does not contribute to the present calculation. Indeed, it will always be multiplied by a factor $\varepsilon = d - 3$, and being compact does not generate any pole; so it does not exist in 3 dimensions.

reported here for completeness:

$$\begin{aligned} \square \hat{R}_i = & -\frac{4\pi G^{(d)}}{d-2} \left(\frac{5-d}{2} V \sigma_i - \frac{d-1}{2} V_i \sigma \right) \\ & - \frac{d-1}{d-2} \partial_k V \partial_i V_k - \frac{d(d-1)}{4(d-2)^2} \partial_t V \partial_i V, \end{aligned} \quad (4.47a)$$

$$\begin{aligned} \square \hat{X} = & -4\pi G^{(d)} \left[\frac{V \sigma_{ii}}{d-2} + 2 \left(\frac{d-3}{d-1} \right) \sigma_i V_i + \left(\frac{d-3}{d-2} \right)^2 \sigma \left(\frac{V^2}{2} + K \right) \right] \\ & + \hat{W}_{ij} \partial_{ij} V + 2 V_i \partial_t \partial_i V + \frac{1}{2} \left(\frac{d-1}{d-2} \right) V \partial_t^2 V \\ & + \frac{d(d-1)}{4(d-2)^2} (\partial_t V)^2 - 2 \partial_i V_j \partial_j V_i, \end{aligned} \quad (4.47b)$$

$$\begin{aligned} \square \hat{Z}_{ij} = & -\frac{4\pi G^{(d)}}{d-2} V \left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\sigma_{kk}}{d-2} \right) - \frac{d-1}{d-2} \partial_t V_{(i} \partial_{j)} V + \partial_i V_k \partial_j V_k \\ & + \partial_k V_i \partial_k V_j - 2 \partial_k V_{(i} \partial_{j)} V_k - \frac{\delta_{ij}}{d-2} \partial_k V_m (\partial_k V_m - \partial_m V_k) \\ & - \frac{d(d-1)}{8(d-2)^3} \delta_{ij} (\partial_t V)^2 + \frac{(d-1)(d-3)}{2(d-2)^2} \partial_{(i} V \partial_{j)} K, \end{aligned} \quad (4.47c)$$

$$\begin{aligned} \square \hat{Y}_i = & -4\pi G^{(d)} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{d-1}{d-2} \right) \sigma \hat{R}_i - \frac{(5-d)(d-1)}{4(d-2)^2} \sigma V V_i + \frac{1}{2} \sigma_k \hat{W}_{ik} + \frac{1}{2} \sigma_{ik} V_k \right. \\ & \left. + \frac{1}{2(d-2)} \sigma_{kk} V_i - \frac{d-3}{(d-2)^2} \sigma_i \left(V^2 + \frac{5-d}{2} K \right) \right] \\ & + \hat{W}_{kl} \partial_{kl} V_i - \frac{1}{2} \left(\frac{d-1}{d-2} \right) \partial_t \hat{W}_{ik} \partial_k V + \partial_i \hat{W}_{kl} \partial_k V_l - \partial_k \hat{W}_{il} \partial_l V_k \\ & - \frac{d-1}{d-2} \partial_k V \partial_i \hat{R}_k - \frac{d(d-1)}{4(d-2)^2} V_k \partial_i V \partial_k V - \frac{d(d-1)^2}{8(d-2)^3} V \partial_t V \partial_i V \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{d-1}{d-2} \right)^2 V \partial_k V \partial_k V_i + \frac{1}{2} \left(\frac{d-1}{d-2} \right) V \partial_t^2 V_i + 2 V_k \partial_k \partial_t V_i \\ & + \frac{(d-1)(d-3)}{(d-2)^2} \partial_k K \partial_i V_k + \frac{d(d-1)(d-3)}{4(d-2)^3} (\partial_t V \partial_i K + \partial_i V \partial_t K), \end{aligned} \quad (4.47d)$$

$$\begin{aligned} \square \hat{T} = & -4\pi G^{(d)} \left[\frac{1}{2(d-1)} \sigma_{ij} \hat{W}_{ij} + \frac{5-d}{4(d-2)^2} V^2 \sigma_{ii} + \frac{1}{d-2} \sigma V_i V_i - \frac{1}{2} \left(\frac{d-3}{d-2} \right) \sigma \hat{X} \right. \\ & - \frac{1}{12} \left(\frac{d-3}{d-2} \right)^3 \sigma V^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{d-3}{d-2} \right)^3 \sigma V K + \frac{(5-d)(d-3)}{2(d-1)(d-2)} \sigma_i V_i V \\ & \left. + \frac{d-3}{d-1} \sigma_i \hat{R}_i - \frac{d-3}{2(d-2)^2} \sigma_{ii} K \right] + \hat{Z}_{ij} \partial_{ij} V + \hat{R}_i \partial_t \partial_i V \\ & - 2 \partial_i V_j \partial_j \hat{R}_i - \partial_i V_j \partial_t \hat{W}_{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{d-1}{d-2} \right) V V_i \partial_t \partial_i V + \frac{d-1}{d-2} V_i \partial_j V_i \partial_j V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d(d-1)}{4(d-2)^2} V_i \partial_t V \partial_i V + \frac{1}{8} \left(\frac{d-1}{d-2} \right)^2 V^2 \partial_t^2 V + \frac{d(d-1)^2}{8(d-2)^3} V (\partial_t V)^2 \\
& - \frac{1}{2} (\partial_t V_i)^2 - \frac{(d-1)(d-3)}{4(d-2)^2} V \partial_t^2 K - \frac{d(d-1)(d-3)}{4(d-2)^3} \partial_t V \partial_t K \\
& - \frac{(d-1)(d-3)}{4(d-2)^2} K \partial_t^2 V - \frac{d-3}{d-2} V_i \partial_t \partial_i K - \frac{1}{2} \left(\frac{d-3}{d-2} \right) \hat{W}_{ij} \partial_{ij} K. \quad (4.47e)
\end{aligned}$$

Many of the latter potentials have already been computed for compact binary systems, and we shall extensively use these results from [75, 67]. Notably, all the compact-support potentials such as V and V_i , and all the compact-support parts of other potentials, have been computed for any field point $\mathbf{x}$, and then at the source point $\mathbf{y}_1$ following the regularization. However, the most difficult non-compact support potentials such as $\hat{X}$ and $\hat{T}$ could not be computed at any field point $\mathbf{x}$, and were regularized directly on the particle's world-line. Since for the equations of motion we needed only the *gradients* of these potentials, only the gradients were regularized on the particle, yielding the results for $(\partial_i \hat{X})(\mathbf{y}_1)$ and $(\partial_i \hat{T})(\mathbf{y}_1)$ needed in the equations of motion. However the 3PN metric requires the values of the potentials themselves regularized on the particles, i.e. $\hat{X}(\mathbf{y}_1)$ and $\hat{T}(\mathbf{y}_1)$. For the present work we have therefore to compute, using the tools developed in [75, 67], the difficult non-linear potentials $\hat{X}(\mathbf{y}_1)$ and $\hat{T}(\mathbf{y}_1)$, and especially the non-compact support parts therein. Unfortunately, the potential $\hat{X}$ is always the most tricky to compute, because its source involves the cubically-non-linear and non-compact-support term $\hat{W}_{ij} \partial_{ij} V$, and it has to be evaluated at relative 1PN order.

In this calculation we also meet a new difficulty with respect to the computation of the 3PN equations of motion. Indeed, we find that the potential $\hat{X}$ is divergent because of the bound of the Poisson-like integral at *infinity*.¹⁰ Thus the potential $\hat{X}$ develops an IR divergence, in addition to the UV divergence due to the singular nature of the source and which is cured by dimensional regularization. The IR divergence is a particular case of the well-known divergence of Poisson integrals in the PN expansion for general (regular) sources, linked to the fact that the PN expansion is a singular perturbation expansion, with coefficients typically blowing up at spatial infinity. The IR divergence will be treated in Sec. 4.6.2.

The 3PN metric 4.44 is valid for a general isolated matter system, and we apply it to the case of a system of N point-particles with “Schwarzschild” masses m_a and without spins (here $a = 1, \dots, N$). In this case we have

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = \sum_a \tilde{\mu}_a \delta^{(d)}[\mathbf{x} - \mathbf{y}_a(t)], \quad (4.48a)$$

$$\sigma_i(\mathbf{x}, t) = \sum_a \mu_a v_a^i \delta^{(d)}[\mathbf{x} - \mathbf{y}_a(t)], \quad (4.48b)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \sum_a \mu_a v_a^i v_a^j \delta^{(d)}[\mathbf{x} - \mathbf{y}_a(t)], \quad (4.48c)$$

where $\delta^{(d)}$ denotes the Dirac density in d spatial dimensions such that $\int d^d \mathbf{x} \delta^{(d)}(\mathbf{x}) = 1$. We

¹⁰However the other potential $\hat{T}$, which is merely Newtonian, is convergent at infinity.

defined the effective time-varying masses of the particles by

$$\mu_a(t) = \frac{m_a}{\sqrt{(g g_{\alpha\beta})(\mathbf{y}_a, t) v_a^\alpha v_a^\beta / c^2}}, \quad (4.49)$$

together with $\tilde{\mu}_a = \frac{2}{d-1} [d - 2 + \mathbf{v}_a^2 / c^2] \mu_a$.

4.6.2 Dimensional regularization of Poisson integrals

In the PN approximation we break the hyperbolic d'Alembertian operator $\square$ in Eqs. (4.46)–(4.47) into the elliptic Laplacian operator Δ and the small PN retardation term $c^{-2} \partial_t^2$, which is put in the RHS of the equation and iterated. Neglecting the radiation-reaction effects, this means that we solve the d'Alembert equations by means of the symmetric Green function

$$\square_{\text{sym}}^{-1} = \Delta^{-1} + \frac{1}{c^2} \Delta^{-2} \partial_t^2 + \mathcal{O}(c^{-4}). \quad (4.50)$$

We consider only the 1PN retardation because the potentials $\hat{X}$ and $\hat{T}$ which are the only ones to be computed are to be evaluated at 1PN order at most. We are thus led to define the dimensional regularization of Poisson or twice-iterated Poisson integrals.

Let $F(\mathbf{x})$ be the generic form of the functions representing the PN potentials in d dimensions. For simplicity we shall treat only the case of the non-compact support terms. Compact support potentials or compact part of potentials, such as V or the first term in the source of $\hat{W}_{ij}$ do not generate poles in d dimensions and were dealt with in Ref. [67]. Also, we consider only Poisson integrals and refer to [67] for the procedure for iterated Poisson integrals. So we want to compute a typical Poisson potential

$$P(\mathbf{x}') = \Delta^{-1} [F(\mathbf{x})] \equiv -\frac{k}{4\pi} \int d^d \mathbf{x} \frac{F(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{d-2}}. \quad (4.51)$$

We employ the Green function $u = k |\mathbf{x}|^{2-d}$ of the Laplace operator in d -dimensions, satisfying $\Delta u = -4\pi \delta^{(d)}(\mathbf{x})$, where

$$k \equiv \frac{\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}{\pi^{\frac{d-2}{2}}} \quad (4.52)$$

is defined from the standard Eulerian gamma function.¹¹ Furthermore we want to evaluate the Poisson integral $P(\mathbf{x}')$ on one of the singular points, say $\mathbf{x}' = \mathbf{y}_a$. As we shall see the Poisson potential we have to deal with will not only be divergent on the singularities but also at infinity, i.e. when the source point $r \equiv |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$. To delineate these problems we introduce a constant radius $\mathcal{R} > 0$, and split the Poisson potential into a near-zone integral corresponding to $r < \mathcal{R}$, and a far-zone one such that $r > \mathcal{R}$:

$$P(\mathbf{x}') = P_{<}(\mathbf{x}') + P_{>}(\mathbf{x}'). \quad (4.53)$$

The near-zone integral $P_{<}$ will contain the local or ultra-violet (UV) singularities, due to the singular nature of the point-mass source, while the far-zone integral $P_{>}$ will have an infra-red (IR) divergence at infinity, which is actually a general feature of the PN expansion for any post-Newtonian source.

¹¹The constant k tends to 1 when $d \rightarrow 3$, and was formerly denoted $\tilde{k}$ in Ref. [67].

UV divergence

The UV divergences will be dealt with using dimensional regularization. Non-compact support terms are generated by a generic function $F(\mathbf{x})$ which extends to all space. For all needed cases we can assume that F is smooth everywhere except at the singular points $\mathbf{y}_a$, around which it admits a singular expansion in powers of $r_a \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{y}_a|$ when $r_a \rightarrow 0$, of the type

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{p=p_0}^P \sum_{q=q_0}^{q_1} r_a^{p+q\varepsilon} f_{p,q}(\mathbf{n}_a) + o(r_a^P), \quad (4.54)$$

for any $P \in \mathbb{N}$. The coefficients $f_{p,q}(\mathbf{n}_a)$ are functions of the unit direction $\mathbf{n}_a = (\mathbf{x} - \mathbf{y}_a)/r_a$, and depend on the dimension through $\varepsilon = d - 3$, and also on the DR length scale ℓ_0 .¹² The powers of r_a are of the type $p + q\varepsilon$, where p and q are relative integers ($p, q \in \mathbb{Z}$) with values limited as indicated. The singular expansion (4.54) will yield some UV-type divergence of the Poisson potential (4.51). Relying on analytic continuation, we can evaluate F at the location of particle a simply by taking the limit $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}_a$. Indeed, we can check that the dimension d can always be chosen such that F is non-singular in this limit. Thus,

$$F(\mathbf{y}_a) = \text{AC} \left[\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}_a} F(\mathbf{x}) \right], \quad (4.55)$$

and we may then consider the expansion when $\varepsilon \rightarrow 0$. From now on the analytic continuation process will be implicitly assumed without indication.

The near-zone part of the Poisson integral of the generic function F outside the singularities is defined by

$$P_{<}(\mathbf{x}') = -\frac{k}{4\pi} \int_{r < \mathcal{R}} d^d \mathbf{x} \frac{F(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{d-2}}, \quad (4.56)$$

in which the upper bound of the integral is set at the intermediate radius $\mathcal{R}$. The singular behavior of this integral at the source points, i.e. when $\mathbf{x} = \mathbf{y}_a$, is automatically taken care of by dimensional continuation down to $d = 3$. Next we evaluate the integral at the singular point $\mathbf{x}' = \mathbf{y}_a$ itself. The result is easy in DR,¹³ as we are allowed to simply replace $\mathbf{x}'$ by $\mathbf{y}_a$ into (4.56). Thus,

$$P_{<}(\mathbf{y}_a) = -\frac{k}{4\pi} \int_{r < \mathcal{R}} d^d \mathbf{x} \frac{F(\mathbf{x})}{r_a^{d-2}}, \quad (4.57)$$

which is the main result of DR, as applied to UV divergences.

In practical calculations we are interested in the three-dimensional limit, so we perform the Laurent expansion of the previous result when $\varepsilon = d - 3 \rightarrow 0$. As we know from previous work [67], the expression (4.57) is finite for any of the non-compact potentials up to 2.5PN order, but will develop a simple pole $\propto 1/\varepsilon$ at the 3PN order. The poles correspond to the occurrence of logarithmic divergences in the three-dimensional calculation [75], and are in fact associated with our particular coordinate choice. Indeed, similar calculations performed at the 3PN level in ADM-like coordinates within DR are pole-free [141]. The information we shall need is the

¹²More precisely, the coefficients depend on ℓ_0 as $f_{p,q} \propto \ell_0^{-q\varepsilon}$, as can be seen from the expansion (4.54).

¹³This is in contrast with the difficult formulation necessary in Hadamard's regularization; see Refs. [75, 67].

pole part followed by the associated finite part when $\varepsilon \rightarrow 0$; we shall usually leave aside the remainder term $\mathcal{O}(\varepsilon)$.¹⁴ We thus consider the expansion

$$P_{<}(\mathbf{y}_a) = \frac{1}{\varepsilon} P_{<}^{(-1)}(\mathbf{y}_a) + P_{<}^{(0)}(\mathbf{y}_a) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (4.58)$$

and we look for the pole-part $P_{<}^{(-1)}(\mathbf{y}_a)$ and finite-part $P_{<}^{(0)}(\mathbf{y}_a)$ coefficients. Beware that our terminology is slightly misleading, because we shall conveniently include in the pole part $P_{<}^{(-1)}(\mathbf{y}_a)$ some dependence in ε , which will of course be thought as being expanded when $\varepsilon \rightarrow 0$ up to first order in ε , therefore yielding a finite contribution $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ to be added to the finite part $P_{<}^{(0)}(\mathbf{y}_a)$. Combining previous results in Sec. IV of [67], we find that the pole part is explicitly given by

$$P_{<}^{(-1)}(\mathbf{y}_a) = -\frac{1}{1+\varepsilon} \sum_{q=q_0}^{q_1} \left[\frac{1}{q} \langle f_{-2,q} \rangle + \frac{1}{q+1} \sum_{b \neq a} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-)^\ell}{\ell!} \partial_{i_1 \dots i_\ell} \left(\frac{1}{r_{ab}^{1+\varepsilon}} \right) \langle n_b^{i_1 \dots i_\ell} f_{-(\ell+3),q} \rangle \right]. \quad (4.59)$$

The first term is the contribution of the singularity a which is clearly singled out, while the second term comes from all the other singularities $b \neq a$. The bracket notation in (4.59) refers to the angular average performed in d dimensions, i.e.

$$\langle f_{p,q} \rangle \equiv \int \frac{d\Omega_{d-1}(\mathbf{n}_a)}{\Omega_{d-1}} f_{p,q}(\mathbf{n}_a), \quad (4.60)$$

where the volume Ω_{d-1} of the $(d-1)$ -dimensional sphere is given by

$$\Omega_{d-1} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} = \frac{4\pi}{k(d-2)}. \quad (4.61)$$

We observe that the pole part (4.59) depends on the behavior of the function F only for $\mathbf{x}$ in a neighborhood of the singularities, through the singular expansion coefficients ${}_a f_{p,q}$ with $p \leq -2$. The result for the pole part heavily relies on DR, and depends on the DR scale ℓ_0 introduced in (4.42). However, as it is “localized” on the singularities, the pole part is independent of the radius $\mathcal{R}$.

On the contrary, the finite part coefficient $P_{<}^{(0)}(\mathbf{y}_a)$ depends on all the “bulk” of the integration outside the particle’s world-lines and in particular on the radius $\mathcal{R}$. This finite part essentially corresponds to what we would naively compute in 3 dimensions, i.e. by simply replacing $d = 3$ into (4.57); the result, however, would be ill-defined as it stands. In DR the finite part coefficient in (4.58) has a precise meaning, and we find that it agrees with the so-called Hadamard *partie finie* integral [204, 370]

$$P_{<}^{(0)}(\mathbf{y}_a) = -\frac{1}{4\pi} \text{Pf}_{\ell_0} \int_{r < \mathcal{R}} d^3\mathbf{x} \frac{F^{(0)}(\mathbf{x})}{r_a}, \quad (4.62)$$

¹⁴Although those remainders $\mathcal{O}(\varepsilon)$ present in Newtonian terms will be kept because they might get multiplied by some poles ε^{-1} at the 3PN order, therefore yielding finite contributions at 3PN order.

where $F^{(0)}$ is the function F computed with $\varepsilon = 0$. Here “Pf $_{\ell_0}$ ” stands for the partie finie which depends on the arbitrary scale ℓ_0 playing here the role of the Hadamard regularization scales. Thus, all the Hadamard regularization scales, one for each particles (they were previously denoted $s_1, \dots, s_N$ in [75]), are to be replaced by the unique scale ℓ_0 . For instance, in the equivalent representation of Hadamard’s partie finie as an analytic continuation, making explicit the presence of those arbitrary constant scales, we have

$$P_{<}^{(0)}(\mathbf{y}_a) = -\frac{1}{4\pi} \text{FP} \int_{r < \mathcal{R}} d^3\mathbf{x} \left(\frac{r_1}{\ell_0}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{r_N}{\ell_0}\right)^{\alpha_N} \frac{F^{(0)}(\mathbf{x})}{r_a}, \quad (4.63)$$

where the symbol FP is understood as the finite part of the Laurent expansion of the integral when all of the α_a ’s tend to zero. The Hadamard partie finie (4.62) or (4.63) is extremely convenient to implement in practical computations.

IR divergence

Next we have also to worry about the IR-type divergence of the Poisson potential P , due to the behavior of the source F at spatial infinity, when $r \rightarrow +\infty$. Indeed, we find that the near-zone potential $\hat{X}$ we have to evaluate (and which is to be computed at 1PN relative order) is given by an iterated Poisson integral which is divergent at infinity. The appearance of a divergent near-zone potential $\hat{X}(\mathbf{y}_a)$ is a novel feature of the present calculation; indeed the problem did not arise in the previous computation of the 3PN equations of motion because we needed instead the *gradient* $(\partial_i \hat{X})(\mathbf{y}_a)$, which is convergent.

Fortunately, the problem of IR divergences has been solved in the general case, for any isolated PN source and at any PN order. Here we shall follow the formalism of Ref. [339] which uses systematically a regularized version of the Poisson integral which is appropriate for solving the hierarchy of PN equations. The idea is to introduce inside the Poisson integral a regularization factor $(r/r_0)^B$, where B is a complex number, and where r_0 is an arbitrary IR scale (as ℓ_0 is an arbitrary UV scale). The regularized Poisson integral is then defined as the finite part (FP) coefficient, i.e. the coefficient of the zeroth power of B , in the Laurent expansion of the integral when $B \rightarrow 0$. It was proved in [339] that the latter regularized Poisson integral is a solution of the Poisson equation for a general regular (smooth) source, and is amenable to iteration up to any PN order.

In principle the latter procedure is defined in 3 dimensions. However since we are here solving the d -dimensional field equations, we shall first define it in d dimensions, so that the far-zone part of the Poisson potential reads

$$P_{>}(\mathbf{x}') = -\frac{k}{4\pi} \text{FP} \int_{r > \mathcal{R}} d^d\mathbf{x} \left(\frac{r}{r_0}\right)^B \frac{F(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{d-2}}, \quad (4.64)$$

where FP refers to the finite part when $B \rightarrow 0$. The precise meaning of considering the FP process on a d -dimensional integral has been discussed in [69].¹⁵ Here, since we consider only

¹⁵It could be possible to use dimensional regularization to cure not only the UV divergences but also the IR ones (without the FP when $B \rightarrow 0$). However this would imply major modifications of the PN iteration scheme for a general source; this has not been attempted.

the far-zone part of the integral free of UV divergences, we can immediately take the limiting case $\varepsilon = 0$ and get

$$P_{>}^{(0)}(\mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi} \text{FP} \int_{r>\mathcal{R}} d^3\mathbf{x} \left(\frac{r}{r_0}\right)^B \frac{F^{(0)}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (4.65)$$

The result will depend both on the IR cut-off scale r_0 and intermediate radius $\mathcal{R}$, but we shall check that these constants disappear in the final results. At the point $\mathbf{y}_a$ we have

$$P_{>}^{(0)}(\mathbf{y}_a) = -\frac{1}{4\pi} \text{FP} \int_{r>\mathcal{R}} d^3\mathbf{x} \left(\frac{r}{r_0}\right)^B \frac{F^{(0)}(\mathbf{x})}{r_a}. \quad (4.66)$$

Finally, the sum of the near-zone integral (4.63) and far-zone one (4.66) gives our complete prescription for the finite part of the dimensionally regularized Poisson integral as

$$P^{(0)}(\mathbf{y}_a) = -\frac{1}{4\pi} \text{FP} \int d^3\mathbf{x} \left(\frac{r}{r_0}\right)^B \left(\frac{r_1}{\ell_0}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{r_N}{\ell_0}\right)^{\alpha_N} \frac{F^{(0)}(\mathbf{x})}{r_a}. \quad (4.67)$$

We do not detail how this integral is computed in practice but refer to previous works [75] and, for the treatment of the bound at infinity, Sec. IV C of [81]. We checked that the sum of the resulting UV and IR-regularized Poisson integral is independent of the arbitrary constant length-scale $\mathcal{R}$.

4.7 Post-Newtonian results

4.7.1 The regularized 3PN metric

The post-Newtonian metric is generated by a system of two point particles, and computed at the location of the particle 1 following the prescription (4.20). Here we shall somewhat abusively simply denote this metric $g_{\alpha\beta}(\mathbf{y}_1, t)$, or in short $g_{\alpha\beta}(y_1)$, and similarly for other quantities evaluated at the location of particle 1, so that

$$g_{\alpha\beta}(y_1) \equiv \text{AC} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_{\alpha\beta}^{\text{PN}}(\mathbf{x}, t) \right]. \quad (4.68)$$

We compute all the required near-zone potentials $V, V_i, \dots, \hat{X}, \hat{T}$ at point 1 (actually, only $\hat{X}$ and $\hat{T}$ are new in the present computation with respect to Ref. [67]) and regularize them according to the procedure of the previous section. The regularized metric in harmonic coordinates is

now obtained in closed analytic form up to 3PN order as¹⁶

$$\begin{aligned}
g_{00}(y_1) = & -1 + \frac{2Gm_2}{c^2 r_{12}} + \frac{Gm_2}{c^4 r_{12}} \left[4v_2^2 - (n_{12}v_2)^2 - 3\frac{Gm_1}{r_{12}} - 2\frac{Gm_2}{r_{12}} \right] \\
& + \frac{Gm_2}{c^6 r_{12}} \left[\frac{3}{4}(n_{12}v_2)^4 - 3(n_{12}v_2)^2 v_2^2 + 4v_2^4 + \frac{Gm_2}{r_{12}} \left(3(n_{12}v_2)^2 - v_2^2 + 2\frac{Gm_2}{r_{12}} \right) \right. \\
& + \frac{Gm_1}{r_{12}} \left(-\frac{87}{4}(n_{12}v_1)^2 + \frac{47}{2}(n_{12}v_1)(n_{12}v_2) - \frac{55}{4}(n_{12}v_2)^2 - \frac{39}{2}(v_1v_2) + \frac{23}{4}v_1^2 \right. \\
& + \left. \left. \frac{47}{4}v_2^2 - \frac{Gm_1}{r_{12}} + \frac{17}{2}\frac{Gm_2}{r_{12}} \right) \right] + \frac{Gm_2}{c^8 r_{12}} \left[-\frac{5}{8}(n_{12}v_2)^6 - 5(n_{12}v_2)^2 v_2^4 + 3(n_{12}v_2)^4 v_2^2 \right. \\
& + 4v_2^6 + \frac{Gm_2}{r_{12}} \left(-4(n_{12}v_2)^4 + 5(n_{12}v_2)^2 v_2^2 - v_2^4 \right) + \frac{Gm_1}{r_{12}} \left(-\frac{617}{24}(n_{12}v_1)^4 \right. \\
& + \frac{491}{6}(n_{12}v_1)^3(n_{12}v_2) - \frac{225}{4}(n_{12}v_1)^2(n_{12}v_2)^2 + \frac{41}{2}(n_{12}v_1)(n_{12}v_2)^3 + \frac{53}{8}(n_{12}v_2)^4 \\
& - \frac{79}{4}(n_{12}v_1)^2(v_1v_2) + 42(n_{12}v_1)(n_{12}v_2)(v_1v_2) + \frac{101}{4}(n_{12}v_2)^2(v_1v_2) + \frac{49}{4}(v_1v_2)^2 \\
& - \frac{27}{8}(n_{12}v_1)^2 v_1^2 + \frac{23}{4}(n_{12}v_1)(n_{12}v_2)v_1^2 - \frac{273}{8}(n_{12}v_2)^2 v_1^2 - 25(v_1v_2)v_1^2 + \frac{39}{8}v_1^4 \\
& - \frac{305}{8}(n_{12}v_1)^2 v_2^2 + \frac{139}{4}(n_{12}v_1)(n_{12}v_2)v_2^2 - \frac{291}{8}(n_{12}v_2)^2 v_2^2 - 62(v_1v_2)v_2^2 + \frac{77}{2}v_1^2 v_2^2 \\
& + \left. \frac{235}{8}v_2^4 \right) + \frac{G^2 m_1^2}{r_{12}^2} \left(\ln \left(\frac{r_{12}}{r_0} \right) \left\{ 32(n_{12}v_{12})^2 - \frac{32}{3}v_{12}^2 \right\} + (n_{12}v_1)^2 \left\{ \frac{12021}{100} + \frac{182}{5\varepsilon} \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{546}{5} \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) \right\} + (n_{12}v_1)(n_{12}v_2) \left\{ -\frac{2873}{50} - \frac{292}{5\varepsilon} + \frac{876}{5} \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) \right\} \right. \\
& + (n_{12}v_2)^2 \left\{ -\frac{21}{4} + \frac{22}{\varepsilon} - 66 \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) \right\} + (v_1v_2) \left\{ \frac{16349}{450} + \frac{292}{15\varepsilon} \right. \\
& - \left. \frac{292}{5} \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) \right\} + v_1^2 \left\{ -\frac{38573}{900} - \frac{182}{15\varepsilon} + \frac{182}{5} \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) \right\} + v_2^2 \left\{ -\frac{125}{36} \right. \\
& - \left. \frac{22}{3\varepsilon} + 22 \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) \right\} + \frac{Gm_1}{r_{12}} \left\{ \frac{719}{36} + \frac{22}{3\varepsilon} - \frac{88}{3} \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) + \frac{32}{3} \ln \left(\frac{r_{12}}{r_0} \right) \right\} \Big) \\
& + \frac{G^2 m_1 m_2}{r_{12}^2} \left(\ln \left(\frac{r_{12}}{r_0} \right) \left\{ 32(n_{12}v_{12})^2 - \frac{32}{3}v_{12}^2 \right\} + (n_{12}v_1)^2 \left\{ -\frac{109}{12} - \frac{141}{16}\pi^2 \right\} \right. \\
& + (n_{12}v_1)(n_{12}v_2) \left\{ -\frac{197}{6} + \frac{177}{8}\pi^2 \right\} + (n_{12}v_2)^2 \left\{ \frac{391}{6} - \frac{213}{16}\pi^2 \right\} + (v_1v_2) \left\{ \frac{812}{9} \right. \\
& - \left. \frac{59}{8}\pi^2 \right\} + v_1^2 \left\{ -\frac{299}{18} + \frac{47}{16}\pi^2 \right\} + v_2^2 \left\{ -\frac{1097}{18} + \frac{71}{16}\pi^2 \right\} + \frac{Gm_1}{r_{12}} \left\{ -\frac{769}{36} - \frac{15}{8}\pi^2 \right\}
\end{aligned}$$

¹⁶The masses m_1 and m_2 have an arbitrary mass ratio. As usual we denote by $r_{12} = |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|$ the relative distance between the two particles in harmonic coordinates, by $\mathbf{n}_{12} = (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)/r_{12}$ the direction from particle 2 to particle 1, and by $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ the relative velocity, where $\mathbf{v}_a = d\mathbf{y}_a/dt$ is the coordinate velocity of particle a . The Euclidean scalar product between two vectors $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ is $(\mathbf{A}\mathbf{B})$. Parentheses around indices are used to indicate symmetrization, i.e. $A^{(i}B^{j)} \equiv \frac{1}{2}(A^iB^j + A^jB^i)$.

$$\begin{aligned}
& + \frac{22}{3\varepsilon} - \frac{88}{3} \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) + \frac{64}{3} \ln \left(\frac{r_{12}}{r_0} \right) \Big\} + \frac{Gm_2}{r_{12}} \left\{ -\frac{586}{9} - \frac{15}{8} \pi^2 - \frac{22}{3\varepsilon} \right. \\
& + \left. \frac{88}{3} \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) + \frac{32}{3} \ln \left(\frac{r_{12}}{r_0} \right) \right\} + \frac{G^2 m_2^2}{r_{12}^2} \left(-(n_{12} v_2)^2 + 2v_2^2 - 2 \frac{Gm_2}{r_{12}} \right) \Big] \\
& + \mathcal{O}(c^{-10}), \tag{4.69a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{0i}(y_1) = & -\frac{4Gm_2}{c^3 r_{12}} v_2^i + \frac{Gm_2}{c^5 r_{12}} \left[v_2^i \left(2(n_{12} v_2)^2 - 4v_2^2 - 2 \frac{Gm_1}{r_{12}} + \frac{Gm_2}{r_{12}} \right) + 4 \frac{Gm_1}{r_{12}} v_1^i \right. \\
& + n_{12}^i \left(\frac{Gm_1}{r_{12}} \{ 10(n_{12} v_1) + 2(n_{12} v_2) \} - \frac{Gm_2}{r_{12}} (n_{12} v_2) \right) \Big] + \frac{Gm_2}{c^7 r_{12}} \left[v_2^i \left(-\frac{3}{2} (n_{12} v_2)^4 \right. \right. \\
& + 4(n_{12} v_2)^2 v_2^2 - 4v_2^4 + \frac{Gm_1}{r_{12}} \left\{ 48(n_{12} v_1)^2 - 44(n_{12} v_1)(n_{12} v_2) + 10(n_{12} v_2)^2 \right. \\
& + 40(v_1 v_2) - 16v_2^2 - 26v_1^2 \Big\} + \frac{Gm_2}{r_{12}} \left\{ -2(n_{12} v_2)^2 + v_2^2 - 2 \frac{Gm_2}{r_{12}} \right\} \\
& + \left. \frac{G^2 m_1 m_2}{r_{12}^2} \left\{ \frac{95}{6} - \frac{3}{4} \pi^2 \right\} + \frac{G^2 m_1^2}{r_{12}^2} \left\{ -\frac{1102}{75} - \frac{12}{5\varepsilon} + \frac{36}{5} \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) \right\} \right) \\
& + v_1^i \left(\frac{Gm_1}{r_{12}} \left\{ -\frac{17}{2} (n_{12} v_1)^2 - 15(n_{12} v_1)(n_{12} v_2) + \frac{43}{2} (n_{12} v_2)^2 + 3(v_1 v_2) + \frac{17}{2} v_1^2 \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{15}{2} v_2^2 \right\} + \frac{G^2 m_1 m_2}{r_{12}^2} \left\{ -\frac{57}{2} + \frac{3}{4} \pi^2 \right\} + \frac{G^2 m_1^2}{r_{12}^2} \left\{ \frac{1852}{75} + \frac{12}{5\varepsilon} - \frac{36}{5} \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) \right\} \right) \\
& + n_{12}^i \left(\frac{Gm_1}{r_{12}} \left\{ \frac{21}{2} (n_{12} v_1)^3 - \frac{43}{2} (n_{12} v_1)^2 (n_{12} v_2) - \frac{29}{2} (n_{12} v_1)(n_{12} v_2)^2 + \frac{3}{2} (n_{12} v_2)^3 \right. \right. \\
& - 11(n_{12} v_1)(v_1 v_2) - 19(n_{12} v_2)(v_1 v_2) + \frac{1}{2} (n_{12} v_1) v_1^2 + \frac{39}{2} (n_{12} v_2) v_1^2 + \frac{41}{2} (n_{12} v_1) v_2^2 \\
& + \left. \frac{3}{2} (n_{12} v_2) v_2^2 \right\} + \frac{Gm_2}{r_{12}} (n_{12} v_2) \left\{ 2(n_{12} v_2)^2 - v_2^2 - 2 \frac{Gm_2}{r_{12}} \right\} + \frac{G^2 m_1 m_2}{r_{12}^2} \left\{ \frac{51}{2} (n_{12} v_1) \right. \\
& - \frac{97}{2} (n_{12} v_2) - \frac{9}{4} \pi^2 (n_{12} v_{12}) \Big\} + \frac{G^2 m_1^2}{r_{12}^2} \left\{ -\frac{2337}{25} (n_{12} v_1) + \frac{1237}{25} (n_{12} v_2) \right. \\
& - \left. \left. \frac{36}{5\varepsilon} (n_{12} v_{12}) + \frac{108}{5} (n_{12} v_{12}) \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) \right\} \right) \Big] + \mathcal{O}(c^{-9}), \tag{4.69b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{ij}(y_1) = & \delta^{ij} + \frac{2Gm_2}{c^2 r_{12}} \delta^{ij} + \frac{Gm_2}{c^4 r_{12}} \left[\delta^{ij} \left(-(n_{12} v_2)^2 + \frac{Gm_1}{r_{12}} + \frac{Gm_2}{r_{12}} \right) + 4v_2^i v_2^j \right. \\
& + n_{12}^i n_{12}^j \left(-8 \frac{Gm_1}{r_{12}} + \frac{Gm_2}{r_{12}} \right) \Big] + \frac{Gm_2}{c^6 r_{12}} \left[\delta^{ij} \left(\frac{3}{4} (n_{12} v_2)^4 - v_2^2 (n_{12} v_2)^2 \right. \right. \\
& - \left. \frac{Gm_2}{r_{12}} (n_{12} v_2)^2 + \frac{Gm_1}{r_{12}} \left\{ -\frac{71}{4} (n_{12} v_{12})^2 + \frac{47}{4} v_{12}^2 - 9 \frac{Gm_1}{r_{12}} + \frac{25}{6} \frac{Gm_2}{r_{12}} \right\} \right) \\
& + \left. v_2^i v_2^j \left(4v_2^2 - 2(n_{12} v_2)^2 - 10 \frac{Gm_1}{r_{12}} - \frac{Gm_2}{r_{12}} \right) + 24 \frac{Gm_1}{r_{12}} v_1^{(i} v_2^{j)} - 16 \frac{Gm_1}{r_{12}} v_1^i v_1^j \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + n_{12}^i n_{12}^j \left(\frac{Gm_1}{r_{12}} \left\{ -16(n_{12}v_1)^2 + 32(n_{12}v_1)(n_{12}v_2) - 12v_{12}^2 + 28\frac{Gm_1}{r_{12}} \right\} \right. \\
& + \left. \frac{Gm_2}{r_{12}} \left\{ -2(n_{12}v_2)^2 + 3\frac{Gm_1}{r_{12}} + 2\frac{Gm_2}{r_{12}} \right\} \right) + 40\frac{Gm_1}{r_{12}}(n_{12}v_{12})n_{12}^{(i}v_1^{j)} \\
& + n_{12}^{(i}v_2^{j)} \left(\frac{Gm_1}{r_{12}} \{ -60(n_{12}v_1) + 36(n_{12}v_2) \} + 2\frac{Gm_2}{r_{12}}(n_{12}v_2) \right) \Big] + \mathcal{O}(c^{-8}). \quad (4.69c)
\end{aligned}$$

We indicate explicitly the post-Newtonian remainders $\mathcal{O}(c^{-n})$. This metric agrees up to 2PN order with the already known result obtained in [79], and recently used in [151] for obtaining the self-force at 2PN order. Because of the helical Killing symmetry we did not include here the 2.5PN radiation-reaction terms; these can be found in Eqs. (7.6) of [79].

In some logarithmic terms at 3PN order ℓ_0 denotes the arbitrary constant length scale associated with dimensional regularization, which relates the d -dimensional gravitational constant $G^{(d)}$ to the usual Newton constant G through (4.42). This scale appears conjointly with the numerical combination

$$p \equiv \sqrt{4\pi} e^{C/2}, \quad (4.70)$$

where $C = 0.5772 \dots$ is the Euler–Mascheroni constant.¹⁷

Notice the important feature that the metric in harmonic coordinates involves some *poles* $\propto 1/\varepsilon$ at the 3PN order in the 00 and 0i components, where ε is related to the spatial dimension d by $d \equiv 3 + \varepsilon$ (see Sec. 4.6), and formally tends to zero. The results presented in Eqs. (4.69) include the pole part $\sim \varepsilon^{-1}$ and the complete finite part $\sim \varepsilon^0$, and neglect the terms tending to zero when $\varepsilon \rightarrow 0$; for simplicity we do not indicate the remainders $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

However there is an exception to the above rule, in that we have to re-introduce the correction terms $\mathcal{O}(\varepsilon)$ in the *Newtonian* part of the metric. Indeed, when we shall reduce the metric to the center-of-mass frame and then to circular orbits, these corrections will be multiplied by poles at 3PN order, and will contribute *in fine* to the finite part at 3PN order. Such corrections will be necessary only in the 00 component of the metric, where the 3-dimensional Newtonian potential at the location of the particle 1, namely $V_N(y_1) = Gm_2/r_{12}$, is to be replaced by its d -dimensional version¹⁸

$$V_N^{(d)}(y_1) = \frac{Gm_2}{r_{12}} \left\{ 1 + \varepsilon \left[\frac{1}{2} - \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) \right] \right\}. \quad (4.71)$$

The poles $\propto \varepsilon^{-1}$ in the metric (4.69) could be removed by a coordinate transformation and a suitable shift of the two particle's world-lines. This is discussed in Appendix A where we compute the regularized 3PN metric using the alternative Hadamard regularization. There we show that, modulo some assumptions necessary to overcome the known drawbacks of Hadamard's regularization (*viz* the presence of ambiguities at 3PN order), the regularized metrics in the two regularization schemes are *physically equivalent*, in the sense that they differ by a coordinate transformation plus the additional effect of some shifts of the world-lines of the particles. In particular we find complete agreement with the shifts necessary to link together the 3PN equations

¹⁷The number p appears in the expansion when $\varepsilon \rightarrow 0$ of the parameter k defined by Eq. (4.52) as $k = 1 - \varepsilon \ln p + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

¹⁸Terms $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ are neglected. See (4.101) and (4.102) for the exact expressions of the Newtonian potential and acceleration in d dimensions.

of motion computed in Hadamard [75] and dimensional [67] regularizations. However, for the present purpose it is better to leave as they are the poles $\propto \varepsilon^{-1}$ in the metric (4.69), because we are going to compute a gauge invariant quantity, and the poles will ultimately be automatically cancelled in the final result.

Finally we note that the metric depends also on the extra arbitrary constant r_0 , present in some logarithmic terms of the 00 component of the metric at 3PN order. This constant comes from the IR regularization of the metric at spatial infinity, as discussed in Sec. 4.6.2, and it shall also disappear in the final gauge invariant result.

As an important check of the metric (4.69) we have verified that it is invariant under a general Lorentz boost, considered in a perturbative 3PN sense. The Lorentz invariance permits checking most of the 2PN terms and also the dynamical 3PN ones. The only terms which are not checked by a 3PN Lorentz boost are the 3PN static ones — those that do not depend on velocities.

4.7.2 The gauge invariant quantity u^T

To compute the gauge invariant quantity u^T (associated with particle 1 for stationary, circular orbits), we adopt its coordinate form as given by (4.17), namely

$$u^t = \left(-g_{\alpha\beta}(y_1) \frac{v_1^\alpha v_1^\beta}{c^2} \right)^{-1/2}, \quad (4.72)$$

and plug into it the 3PN regularized metric explicitly obtained in (4.69). To begin with, this yields the expression of u^t at 3PN order for an arbitrary mass ratio $q = m_1/m_2$, and for a generic non-circular orbit in a general reference frame.

We then choose the frame of the *center of mass* (CM), which is consistently defined at the 3PN order by the nullity of the 3PN center-of-mass integral of the motion deduced from the 3PN equations of motion [12]. We want to express the individual positions $\mathbf{y}_a \equiv \mathbf{y}_a^{\text{CM}}$ and velocities $\mathbf{v}_a \equiv \mathbf{v}_a^{\text{CM}}$ (with $a = 1, 2$ labelling the particles) relatively to the center of mass in terms of the relative position $\mathbf{y}_{12}$ and relative velocity $\mathbf{v}_{12}$. We know how to do this at 3PN order in Hadamard regularization [80], and we know that the particle's trajectories in Hadamard regularization differ by a shift of world-lines from those computed with dimensional regularization [67]. So in order to get $\mathbf{y}_a^{\text{CM}}$ and $\mathbf{v}_a^{\text{CM}}$ in dimensional regularization we apply directly the shift of world-lines on the known expressions in Hadamard regularization; this is detailed in Appendix B.

Having replaced the positions and velocities by their CM expressions $\mathbf{y}_a^{\text{CM}}[\mathbf{y}_{12}, \mathbf{v}_{12}]$ and $\mathbf{v}_a^{\text{CM}}[\mathbf{y}_{12}, \mathbf{v}_{12}]$, the quantity u^t becomes a functional of $\mathbf{y}_{12}$ and $\mathbf{v}_{12}$ which we now reduce to the case of *circular orbits*. This means that $(n_{12}v_{12}) = 0$ exactly,¹⁹ and that the relative orbital velocity squared v_{12}^2 takes a specific expression in terms of the relative separation r_{12} or, rather, in terms of the particular dimensionless post-Newtonian parameter defined by

$$\gamma \equiv \frac{G m}{r_{12} c^2}, \quad (4.73)$$

¹⁹Consistently with the helical Killing symmetry we neglect radiation-reaction effects.

where $m = m_1 + m_2$ is the total mass of the binary.²⁰ We find in Appendix B that the required relation, valid in dimensional regularization, is

$$\begin{aligned} \frac{v_{12}^2}{c^2} = & \gamma \left\{ 1 + \varepsilon \left[\frac{3}{2} - \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) \right] + (-3 + v) \gamma + \left(6 + \frac{41}{4} v + v^2 \right) \gamma^2 \right. \\ & + \left(-10 + \left[-\frac{2987}{24} + \frac{41}{64} \pi^2 - \frac{11}{\varepsilon} + 44 \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) \right] v + \frac{19}{2} v^2 + v^3 \right) \gamma^3 \\ & \left. + \mathcal{O}(\gamma^4) \right\}, \end{aligned} \quad (4.74)$$

where $v \equiv m_1 m_2 / m^2$ is the symmetric mass ratio, related to the asymmetric mass ratio q by $v = q / (1 + q)^2$. From now on we assume that $m_1 \leq m_2$ to prepare the ground for the small mass ratio case $m_1 \ll m_2$ in which $v = q + \mathcal{O}(q^2)$. Notice the presence of a pole $\propto 1/\varepsilon$ at the 3PN order in (4.74), and recall that ℓ_0 is the dimensional regularization scale, and that p is defined by (4.70). Note also that we have included the $\mathcal{O}(\varepsilon)$ correction in the Newtonian approximation of the expression (4.74); this is crucial because multiplying that Newtonian term $\mathcal{O}(\varepsilon)$ by a quantity having a pole at 3PN will yield a finite part contribution at 3PN order. The last step of the calculation consists of replacing γ by its expansion in powers of the convenient alternative dimensionless gauge invariant PN parameter x , directly related to the orbital frequency $\Omega \equiv v_{12}/r_{12}$ by

$$x \equiv \left(\frac{G m \Omega}{c^3} \right)^{2/3}. \quad (4.75)$$

To find γ as a power series in x to 3PN order we invert (4.74) and obtain

$$\begin{aligned} \gamma = & x \left\{ 1 + \varepsilon \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) \right] + \left(1 - \frac{v}{3} \right) x + \left(1 - \frac{65}{12} v \right) x^2 \right. \\ & + \left(1 + \left[-\frac{251}{72} - \frac{41}{192} \pi^2 + \frac{11}{3\varepsilon} - \frac{55}{9} \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) \right] v + \frac{229}{36} v^2 + \frac{v^3}{81} \right) x^3 \\ & \left. + \mathcal{O}(x^4) \right\}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

When finally replacing γ by x we discover most satisfactorily that all the poles $\propto 1/\varepsilon$ cancel out in the final expression for u^t , as well as the associated constant ℓ_0 (and the pure number p). Furthermore, the IR constant r_0 also disappears from the result when parameterized by the frequency-related parameter x . No matter what the mass ratio, our final result for a 3PN, alge-

²⁰Recall that the orbital separation r_{12} is here defined in harmonic coordinates, and differs from the Schwarzschild coordinate distance r used in the SF calculation of Sec. 4.5.

braic relationship between u^T (to which u^t now evaluates) and x (or equivalently Ω), is:

$$\begin{aligned}
u^T = & 1 + \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\Delta - \frac{\nu}{2} \right) x + \left(\frac{27}{16} + \frac{27}{16}\Delta - \frac{5}{2}\nu - \frac{5}{8}\Delta\nu + \frac{\nu^2}{24} \right) x^2 \\
& + \left(\frac{135}{32} + \frac{135}{32}\Delta - \frac{37}{4}\nu - \frac{67}{16}\Delta\nu + \frac{115}{32}\nu^2 + \frac{5}{32}\Delta\nu^2 + \frac{\nu^3}{48} \right) x^3 \\
& + \left(\frac{2835}{256} + \frac{2835}{256}\Delta - \left[\frac{2183}{48} - \frac{41}{64}\pi^2 \right] \nu - \left[\frac{12199}{384} - \frac{41}{64}\pi^2 \right] \Delta\nu \right. \\
& \left. + \left[\frac{17201}{576} - \frac{41}{192}\pi^2 \right] \nu^2 + \frac{795}{128}\Delta\nu^2 - \frac{2827}{864}\nu^3 + \frac{25}{1728}\Delta\nu^3 + \frac{35}{10368}\nu^4 \right) x^4 \\
& + \mathcal{O}(x^5), \tag{4.77}
\end{aligned}$$

where we denote $\Delta \equiv (m_2 - m_1)/m = \sqrt{1 - 4\nu}$, so that the test-mass limit of particle 1 corresponds to $\nu \rightarrow 0$. The expression (4.77) is a polynomial in x with coefficients depending only on the symmetric mass ratio ν ; it is therefore clearly gauge invariant. While it has been shown in [151] (see also Sec. 4.4.2 above) that u^T is gauge invariant at any PN order, in the extreme mass ratio limit $\nu \ll 1$, here we find that it is also gauge invariant for *any* mass ratio up to 3PN order.²¹

4.8 Comparison of post-Newtonian and self-force results

We now reduce the 3PN expression (4.77) in the small mass ratio regime $q = m_1/m_2 \ll 1$. We express the result in terms of the non-symmetric PN parameter introduced in (4.36), which is more suited than x to the small mass ratio limit of particle 1, namely

$$y \equiv \left(\frac{G m_2 \Omega}{c^3} \right)^{2/3} = \frac{G m_2}{R_\Omega c^2}. \tag{4.78}$$

Using $x = y(1 + q)^{2/3}$ and $\nu = q/(1 + q)^2$ we obtain, up to say the quadratic order in q ,

$$\begin{aligned}
u^T = & 1 + \left(\frac{3}{2} - q + q^2 \right) y + \left(\frac{27}{8} - 2q + 3q^2 \right) y^2 + \left(\frac{135}{16} - 5q + \frac{97}{8}q^2 \right) y^3 \\
& + \left(\frac{2835}{128} + \left[-\frac{121}{3} + \frac{41}{32}\pi^2 \right] q + \left[\frac{725}{12} - \frac{41}{64}\pi^2 \right] q^2 \right) y^4 + \mathcal{O}(q^3, y^5). \tag{4.79}
\end{aligned}$$

This is to be compared with the result of SF calculations, which take the general form

$$u^T = u_{\text{Schw}}^T + q u_{\text{SF}}^T + q^2 u_{\text{PSF}}^T + \mathcal{O}(q^3), \tag{4.80}$$

with self-force and post-self-force coefficients u_{SF}^T and u_{PSF}^T respectively. From (4.79) we thus recover the 3PN expansion of the Schwarzschildian result, i.e.

$$u_{\text{Schw}}^T = (1 - 3y)^{-1/2} = 1 + \frac{3}{2}y + \frac{27}{8}y^2 + \frac{135}{16}y^3 + \frac{2835}{128}y^4 + \mathcal{O}(y^5). \tag{4.81}$$

²¹As a test of the initial expression of u^t for a generic orbit in a general frame (i.e. before going to the CM frame), we checked that $du^t/dt = 0$ after reduction to circular orbits, as required by the helical symmetry, i.e. neglecting the radiation-reaction.

Next, we obtain the self-force contribution u_{SF}^T up to 3PN order as

$$u_{\text{SF}}^T = -y - 2y^2 - 5y^3 + \left(-\frac{121}{3} + \frac{41}{32}\pi^2\right)y^4 + \mathcal{O}(y^5). \quad (4.82)$$

The 2PN result is in agreement with (4.37) as it should. For the much more difficult 3PN coefficient, whose value depends on subtle issues regarding the self-field regularization (see Sec. 4.6), we thus find

$$C_{3\text{PN}} = -\frac{121}{3} + \frac{41}{32}\pi^2. \quad (4.83)$$

We get also the 3PN expansion of the post-self-force, which could be compared with future SF analyses with second-order black hole perturbations,²²

$$u_{\text{PSF}}^T = y + 3y^2 + \frac{97}{8}y^3 + \left(\frac{725}{12} - \frac{41}{64}\pi^2\right)y^4 + \mathcal{O}(y^5), \quad (4.84)$$

as well as all higher post-self-force effects up to 3PN order.

Numerically, the 3PN coefficient in the self-force is $C_{3\text{PN}} = -27.6879 \dots$. This shows a remarkable agreement between the post-Newtonian prediction and the result of the numerical SF calculation reported in (4.38), namely $C_{3\text{PN}}^{\text{SF}} = -27.677 \pm 0.005$. The two results are consistent at the 2σ level with five significant digits. This agreement can also be visualized in Fig. 4.3, where we show the SF contribution u_{SF}^T to u^T as a function of y^{-1} , as well as the successive Newtonian, 1PN, 2PN and 3PN approximations to u_{SF}^T . Observe notably the nice convergence of the successive PN approximations toward the exact SF result. The 3PN approximation is roughly 1% accurate up to $y^{-1} = 10$, and roughly 5% accurate up to $y^{-1} = 7$, not very far from the highly relativistic Schwarzschild innermost stable circular orbit (ISCO) for which $y_{\text{ISCO}}^{-1} = 6$.²³

This successful comparison between SF and PN calculations confirms the soundness of both approximations in describing compact binary systems. In the post-Newtonian calculation, this encompasses the post-Newtonian expansion as applied to the binary equations of motion [229, 75], and includes the treatment of the issues associated with the UV divergencies using dimensional regularization [141, 67]. In addition, the IR divergences, too, in the PN calculation (see Sec. 4.6.2) are seen to be correctly treated, since their effects vanish in the final result (4.77). In the perturbative self-force calculation embodied in (4.37)–(4.38), this includes the delicate handling of gauge and the numerically taxing split of the metric near the particle into singular and regular pieces following the prescriptions in [153]. In this light, it would be interesting to address the opposite question, namely that of estimating the accuracy of the black hole perturbation formalism by comparing several truncated self-force series to the “exact” PN result in the slow motion limit. This would require at least a second-order perturbative SF calculation.

Our post-Newtonian calculation contains additional results which have not been used in this paper. For example, it already contains some of these higher-order self-force terms, as evidenced by (4.84). Similarly, our numerical self-force calculation actually contains much more information than is indicated by the numerical coefficient we give in (4.38). This is most simply

²²Notice that $u_{\text{SF}}^T < 0$ and $u_{\text{PSF}}^T > 0$ (at least up to 3PN order). The effect of the self-force is to reduce the value of u^T , while the post-self-force tends to increase it.

²³See [36] for a recent calculation of the shift of the Schwarzschild ISCO induced by the conservative part of the self-force.

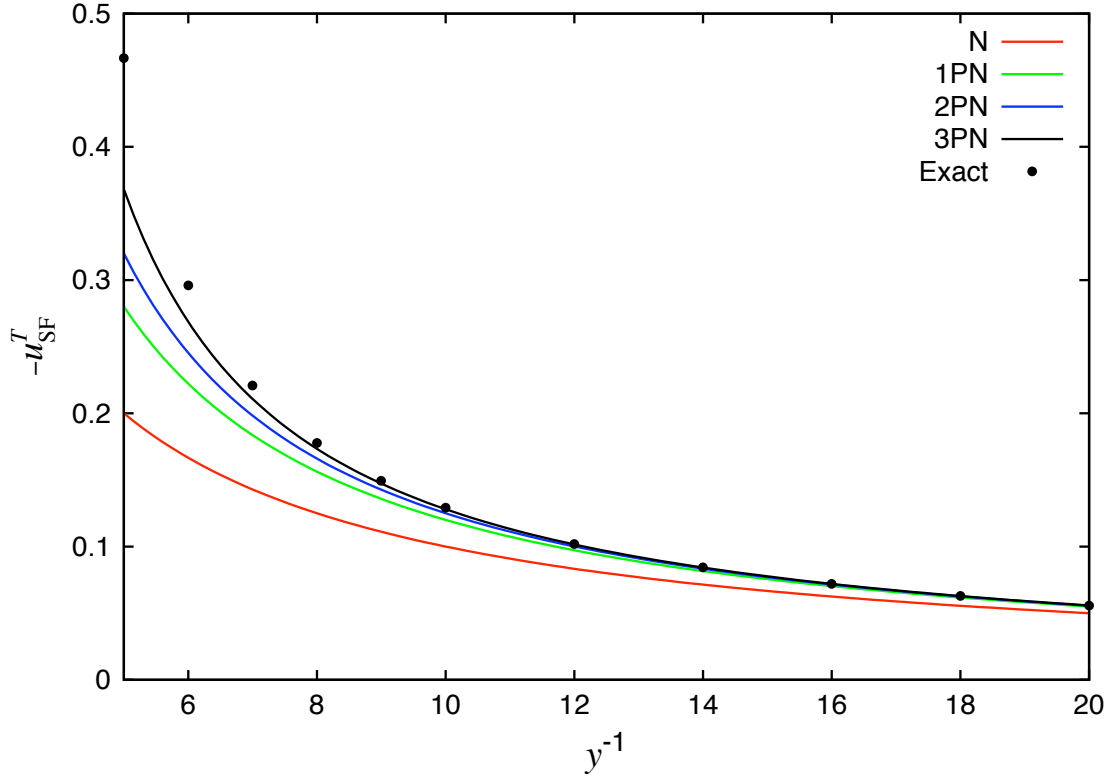


Figure 4.3: The self-force contribution u_{SF}^T to u^T plotted as a function of the gauge invariant variable y^{-1} . Note that y^{-1} is equal to R_{Ω}/m_2 , an invariant measure of the orbital radius, scaled by the black hole mass m_2 [cf. Eq. (4.36)]. The “exact” numerical points are taken from Ref. [151].

illustrated in Fig. 4.4, where we show, over the large- R_{Ω} range used for our numerical fitting, the full 2PN and 3PN residuals, that is, the residuals after the known 2PN and (now) 3PN terms have been subtracted from our numerical data. In fact, we have gone to considerable lengths to ensure that we would have high quality numerical data to work with here. The smooth curve of 3PN residuals, several orders of magnitude below the 2PN curve, is a testament to this data quality and represents the starting point for an investigation which more adequately explains the appropriate higher order PN nature of our numerical data; especially the presence of logarithmic terms in higher PN approximations. The pressing need for this explanation is strong motivation for further work [71].

Acknowledgements SD and BFW acknowledge support through grants PHY-0555484 and PHY-0855503 from the National Science Foundation. LB thanks the University of Florida for a visit supported by the Programme International de Coopération Scientifique (CNRS–PICS). All authors acknowledge the 2008 Summer School on Mass and Motion, organized by A. Spallicci and supported by the University of Orléans and the CNRS, through which we experienced an extensive opportunity to understand each other’s perspective and make rapid progress on this work.

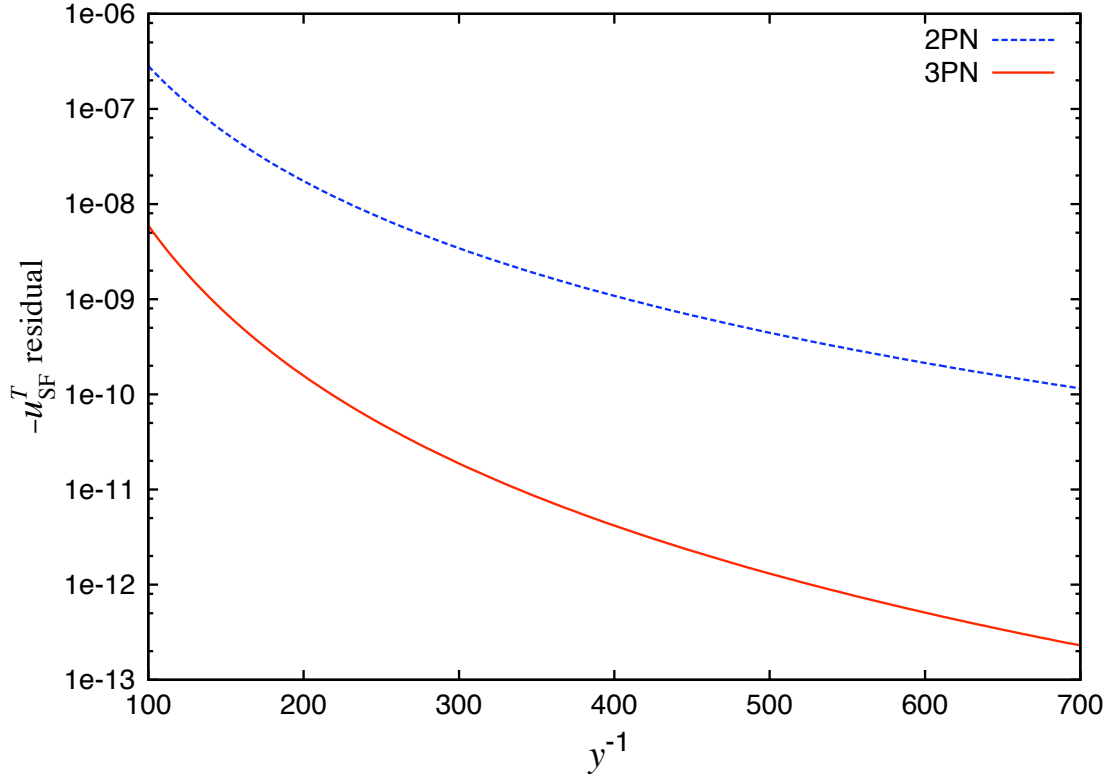


Figure 4.4: Numerically derived residuals, i.e., after removal of the 2PN and 3PN self-force contributions to u_{SF}^T , plotted as a function of the gauge invariant variable y^{-1} . Compare with scales in Fig. 4.3. Note that y^{-1} is equal to R_{Ω}/m_2 , an invariant measure of the orbital radius, scaled by the black hole mass m_2 [cf. (4.36)].

Appendix A: Relation to Hadamard regularization

As an important check of the DR calculation of u^T , we have also performed the complete calculation using the alternative Hadamard regularization (HR), in the variant proposed in [75] and called the “extended Hadamard regularization”. The HR is essentially based on the Hadamard partie finie integral (4.62). Unfortunately we know that the HR, even in the extended variant, is not entirely satisfying and cannot give a completely consistent picture at the 3PN order [229, 75]. In particular it yields some ambiguities in the form of a small number of arbitrary parameters which cannot be computed within this regularization. However, the HR gives the correct answer provided that the ambiguity parameters are specified by some external arguments, or fixed by comparison with some non-ambiguous calculations. Then it becomes a non trivial check to show that it is possible to adjust a few HR ambiguity parameters so that the *complete* result, which is generally made of many more terms, agrees with the result of DR.

The ambiguity parameters in HR come from the unknown relations between two sets of arbitrary length scales denoted s_a and r'_a (where a labels the particles). Here the scales s_a are introduced into the Hadamard partie finie [204, 370] of Poisson integrals with singular sources, when computed at any field point $\mathbf{x}'$ different from the singularities $\mathbf{y}_a$. The s_a ’s appear when the Poisson integrals develop logarithmic divergences on the singular points (i.e. when the source

point $\mathbf{x}$ over which one integrates equals $\mathbf{y}_a$). The other scales r'_a come from the singular limit of the Poisson potential when the *field* point $\mathbf{x}'$ itself tends toward the singularity $\mathbf{y}_a$; hence we have in fact $r'_a = |\mathbf{x}' - \mathbf{y}_a|$ which shows up in the form of some “constant” $\ln r'_a$ which is formally infinite. It was shown that the relation between the scales s_a and r'_a must involve the masses m_a (and $m \equiv \sum_b m_b$), and is necessarily of the type [75]

$$\ln \left(\frac{r'_a}{s_a} \right) = \alpha + \beta \frac{m}{m_a}. \quad (4.85)$$

Here α and β denote some purely numerical constants and are called *ambiguity parameters*. After imposing the link (4.85) to get rid of the scales s_a , it was shown that the remaining scales r'_a are gauge constants which can be removed by a change of gauge.²⁴ In the case of the 3PN equations of motion (EOM), and for the extended variant of HR, it was found that the correct values are [67]²⁵

$$\alpha_{\text{EOM}} = \frac{159}{308} \quad \text{and} \quad \beta_{\text{EOM}} = -\frac{1987}{3080}. \quad (4.86)$$

In the case of the 3PN mass quadrupole (MQ) moment needed to compute the 3PN radiation field, the values using the same extended HR turned out to be [81, 68]²⁶

$$\alpha_{\text{MQ}} = -\frac{9451}{9240} \quad \text{and} \quad \beta_{\text{MQ}} = 0. \quad (4.87)$$

The fact that the MQ values are different from the EOM values already shows that the HR is not satisfying: Two different computations give inconsistent determinations of the ambiguity parameters. For the present computation of the quantity u^T and comparison with SF calculations, we have shown that the extended variant of HR reproduces exactly the result of DR [i.e. (4.77) above] *if and only if* we have the still different values

$$\alpha_{\text{SF}} = -\frac{65}{154} \quad \text{and} \quad \beta_{\text{SF}} = \frac{129}{440}. \quad (4.88)$$

Although this result shows again that the Hadamard regularization is not consistent at 3PN order, we argue that it constitutes a powerful check of our calculation, because for the complete agreement we have to adjust no more than two unknown coefficients. In particular we find that the HR constants r'_a , which remain after imposing the relation (4.85), cancel out properly in the final result. The HR calculation is also interesting because it corresponds to a different harmonic coordinate system and a different definition of the particle’s world-lines. Since we have the regularized 3PN metric in both HR and DR, we can now study in detail their difference — adopting the values (4.88) in the HR scheme.

We shall find that the two metrics differ by an infinitesimal 3PN coordinate transformation in the “bulk”, i.e. outside the particle’s world-lines, and also by an intrinsic *shift* of these world-lines. In particular we shall recover the total shift obtained at the level of the equations of motion

²⁴Hence the fact that $\ln r'_a$ is actually “infinite” does not really matter.

²⁵More precisely, α_{EOM} was determined by requiring that the equations of motion should derive from a Lagrangian formulation, but β_{EOM} (which was denoted λ in Refs. [75, 67]) had to wait until its value was fixed by DR.

²⁶The coefficients α_{MQ} and β_{MQ} were respectively denoted ξ and κ in Refs. [81, 68].

in Ref. [67], but shall prove that this shift is made of the latter intrinsic shift, plus the shift induced by the coordinate transformation. Let the coordinate transformation between the two metrics be $\delta x^\alpha = \epsilon^\alpha(x)$, where $\epsilon^0 = \mathcal{O}(c^{-7})$ and $\epsilon^i = \mathcal{O}(c^{-6})$ as appropriate to 3PN order. The transformation of the bulk metric is (for simplicity we omit the PN remainders)

$$\delta_\epsilon g_{00} = -2\partial_0 \epsilon_0 - \epsilon^i \partial_i g_{00} - \epsilon^i(y_1) \frac{\partial g_{00}}{\partial y_1^i} - \epsilon^i(y_2) \frac{\partial g_{00}}{\partial y_2^i}, \quad (4.89a)$$

$$\delta_\epsilon g_{0i} = -2\partial_{(0}\epsilon_{i)}, \quad (4.89b)$$

$$\delta_\epsilon g_{ij} = -2\partial_{(i}\epsilon_{j)}. \quad (4.89c)$$

The terms involving partial derivatives with respect to the source points y_a take into account the shifts of the trajectories $\epsilon(y_a)$ through a modification of the source dependence of the metric $g_{\alpha\beta}(x; y_a, v_a)$; we use the notation $y_a \equiv (ct, \mathbf{y}_a)$ and $v_a \equiv (c, \mathbf{v}_a)$. Since ϵ^α is of order 3PN, the g_{00} 's in the RHS of (4.89a) are simply Newtonian. At the point 1 we get²⁷

$$\delta_\epsilon g_{00}(y_1) = -2\partial_0 \epsilon_0(y_1) - \epsilon^i(y_1) \frac{\partial}{\partial y_1^i} [g_{00}(y_1)] - \epsilon^i(y_2) \frac{\partial}{\partial y_2^i} [g_{00}(y_1)], \quad (4.90a)$$

$$\delta_\epsilon g_{0i}(y_1) = -2\partial_{(0}\epsilon_{i)}(y_1), \quad (4.90b)$$

$$\delta_\epsilon g_{ij}(y_1) = -2\partial_{(i}\epsilon_{j)}(y_1). \quad (4.90c)$$

Now we have found that in order to relate the two metrics one must additionally perform a shift κ_a of the particle's trajectories at the 3PN order, i.e. $\kappa_a = \mathcal{O}(c^{-6})$. Such shift will be “*intrinsic*” in the sense that it will not be induced by any coordinate transformation of the bulk metric. It yields the additional change of the metric components evaluated at point y_1 :

$$\delta_\kappa g_{00}(y_1) = -\kappa_1^i \frac{\partial g_{00}}{\partial y_1^i}(y_1) - \kappa_2^i \frac{\partial g_{00}}{\partial y_2^i}(y_1), \quad (4.91)$$

while there is no change in the other components at that order, i.e. $\delta_\kappa g_{0i}(y_1) = \delta_\kappa g_{ij}(y_1) = 0$. Our final result is that the two regularized metrics at point 1 are related through

$$g_{\alpha\beta}^{\text{DR}}(y_1) = g_{\alpha\beta}^{\text{HR}}(y_1) + \delta_\epsilon g_{\alpha\beta}(y_1) + \delta_\kappa g_{\alpha\beta}(y_1). \quad (4.92)$$

This relation is a functional equality relating the two metric functionals at point 1, whose coordinates y_1^α can be seen as dummy variables.

An important check of our finding (4.92) is that it contains the previous result derived at the level of the 3PN equations of motion (not considering the bulk metric), namely that the DR and HR equations of motion merely differ by some shifts ξ_a of the particle's world-lines. This result established the physical equivalence of HR and DR at the level of the equations of motion [67]. Indeed, we discover that the *total* shift found here, which is made up of the shift $\epsilon(y_a)$ induced by the coordinate transformation plus the intrinsic shift κ_a , is precisely equal to the shift of the world-lines of the particles found in [67]. Thus,

$$\xi_a = \epsilon(y_a) + \kappa_a. \quad (4.93)$$

²⁷Note that our too compact notation $g_{00}(y_1)$ stands in fact for $g_{00}(y_1; y_a, v_a)$; thus we have used the obvious relations $\partial[g_{00}(y_1)]/\partial y_1^i = (\partial_i g_{00})(y_1) + (\partial g_{00}/\partial y_1^i)(y_1)$ and $\partial[g_{00}(y_1)]/\partial y_2^i = (\partial g_{00}/\partial y_2^i)(y_1)$.

So we have proved that ξ_a is partly intrinsic and partly induced by a coordinate transformation of the bulk metric. Since there is no physics involved in a coordinate transformation, it can be argued that only the intrinsic part of the shift κ_a corresponds to the physical process of renormalization which was performed in [67].

We give now the explicit expressions. The coordinate transformation at any field point $x = (ct, \mathbf{x})$ reads

$$\begin{aligned} \epsilon_0(x) = & \frac{7}{5} \frac{G^3 m_1 m_2^2}{c^7} \partial_t \left(\frac{k}{r_1^{1+\varepsilon}} \right) + \frac{12}{5} \frac{G^3 m_1 m_2^2}{c^7} \\ & \times v_{12}^i \partial_i \left(\frac{k}{r_1^{1+\varepsilon}} \left[\frac{1}{\varepsilon} - 2 \ln \left(\frac{r'_2 p}{\ell_0} \right) - \frac{301}{180} \right] \right) + 1 \leftrightarrow 2 + f_1(t), \end{aligned} \quad (4.94a)$$

$$\epsilon_i(x) = \frac{7}{5} \frac{G^3 m_1 m_2^2}{c^6} \partial_i \left(\frac{k}{r_1^{1+\varepsilon}} \right) + 1 \leftrightarrow 2. \quad (4.94b)$$

Remind that the DR-related quantities p , ℓ_0 and k are defined by Eqs. (4.70), (4.42) and (4.52) respectively, while r'_2 is an HR constant of particle 2. The symbol $1 \leftrightarrow 2$ means adding the previous expression [i.e. *excluding* the term $f_1(t)$ in (4.94a)], but with all particle labels exchanged (thus r'_2 would be changed to r'_1). Note that r'_1 and r'_2 are considered as true constants in (4.94). The function $f_1(t)$ is given by

$$f_1(t) = \frac{91}{15} \frac{G^3 m_1^2 m_2}{c^7} \frac{k(1+\varepsilon)}{r_{12}^{2+\varepsilon}} (n_{12} v_{12}) \left[\frac{1}{\varepsilon} - 2 \ln \left(\frac{r'_1 p}{\ell_0} \right) + \frac{1642}{1365} \right]. \quad (4.95)$$

Notice that because of the presence of $f_1(t)$ in (4.94a), the time component of the gauge vector $\epsilon_0(x)$ is not symmetric by exchange $1 \leftrightarrow 2$. This coordinate transformation satisfies the harmonic gauge condition $\square \epsilon^\alpha = 0$ in d dimensions at the 3PN accuracy. We note also that the time component ϵ_0 of the coordinate transformation has a pole part $\propto \varepsilon^{-1}$, as well as a pole-independent part, but that the space component ϵ_i is pole-free.

Beware that strictly speaking (4.94) is not the coordinate transformation between the HR metric $g_{\alpha\beta}^{\text{HR}}(x)$ and the DR metric $g_{\alpha\beta}^{\text{DR}}(x)$ in the bulk. It is solely the restriction $\epsilon^\alpha(y_1)$ of this gauge transformation at the location of particle 1 that correctly relates the two regularized metrics $g_{\alpha\beta}^{\text{HR}}(y_1)$ and $g_{\alpha\beta}^{\text{DR}}(y_1)$ at that location. Indeed, if the gauge transformation (4.94) was to be valid in the bulk, it would induce poles in the 00 and $0i$ components of $g_{\alpha\beta}^{\text{DR}}(x)$. But it was shown in [67], based on diagrammatic arguments, that such poles, at 3PN order, can only be present in the 00 component $g_{00}^{\text{DR}}(x)$ of the DR metric. However, the restriction $\epsilon^\alpha(y_1)$ at the location of particle 1 of the pole-free gauge transformation in the bulk does generate poles in the $0i$ component of the DR metric at y_1 [see Eq. (4.69b)].

The shift induced by this coordinate transformation is pole-free, and we immediately get from (4.94b) [up to a correction $\mathcal{O}(\varepsilon)$]

$$\epsilon(y_a) = \frac{7}{5} \frac{G^2 m_a^2}{c^6} \mathbf{a}_a^{\text{N}}, \quad (4.96)$$

where $\mathbf{a}_a^{\text{N}}$ is the d -dimensional Newtonian acceleration of body a given by (4.102) below. Because $\epsilon(y_a)$ does not contain any pole, we observe from (4.90c) that the spatial part of the regularized metric will be free of poles at 3PN order as well [cf. Eq. (4.69c)]. Next we find that the

additional shift κ_a does contain a pole, and explicitly reads

$$\kappa_a = \frac{11}{3} \frac{G^2 m_a^2}{c^6} \left[\frac{1}{\varepsilon} - 2 \ln \left(\frac{r'_a p}{\ell_0} \right) - \frac{183}{308} \right] \mathbf{a}_a^N, \quad (4.97)$$

so that the total shift as defined by (4.93) is given by

$$\xi_a = \frac{11}{3} \frac{G^2 m_a^2}{c^6} \left[\frac{1}{\varepsilon} - 2 \ln \left(\frac{r'_a p}{\ell_0} \right) - \frac{327}{1540} \right] \mathbf{a}_a^N, \quad (4.98)$$

in perfect agreement with the result of [67].

For completeness we now give the result for the difference between the two regularized metrics, $\delta g_{\alpha\beta}(y_1) \equiv g_{\alpha\beta}^{\text{DR}}(y_1) - g_{\alpha\beta}^{\text{HR}}(y_1)$. Combining (4.90)–(4.92) with (4.94)–(4.97) we get

$$\begin{aligned} \delta g_{00}(y_1) = & \frac{G^3 m_1^2 m_2}{c^8 r_{12}^3} \left\{ \frac{2308}{25} (n_{12} v_1)^2 - \frac{4738}{25} (n_{12} v_1)(n_{12} v_2) + \frac{444}{5} (n_{12} v_2)^2 \right. \\ & - \frac{6014}{225} v_1^2 + \frac{12754}{225} (v_1 v_2) - \frac{1222}{45} v_2^2 + \left[\frac{1}{\varepsilon} - 3 \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) + 2 \ln \left(\frac{r_{12}}{r'_1} \right) \right] \times \\ & \left(\frac{182}{5} \left[(n_{12} v_1)^2 - \frac{1}{3} v_1^2 \right] - \frac{292}{5} \left[(n_{12} v_1)(n_{12} v_2) - \frac{1}{3} (v_1 v_2) \right] \right. \\ & \left. + 22 \left[(n_{12} v_2)^2 - \frac{1}{3} v_2^2 \right] \right) + \frac{22}{3} \frac{Gm}{r_{12}} \left[\frac{1717}{330} + \frac{1}{\varepsilon} - 4 \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) \right. \\ & \left. + 2 \ln \left(\frac{r_{12}}{r'_1} \right) \right] \left. \right\} - \frac{22}{3} \frac{G^4 m_1 m_2^3}{c^8 r_{12}^4} \left[\frac{4293}{1540} + \frac{1}{\varepsilon} - 4 \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) + 2 \ln \left(\frac{r_{12}}{r'_2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.99a)$$

$$\begin{aligned} \delta g_{0i}(y_1) = & \frac{G^3 m_1^2 m_2}{c^7 r_{12}^3} \left\{ \frac{61}{25} (n_{12} v_1) n_{12}^i + \frac{149}{25} (n_{12} v_2) n_{12}^i - \frac{121}{75} v_1^i - \frac{89}{75} v_2^i \right. \\ & \left. + \frac{12}{5} \left[v_{12}^i - 3 (n_{12} v_{12}) n_{12}^i \right] \left[\frac{1}{\varepsilon} - 3 \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) + 2 \ln \left(\frac{r_{12}}{r'_1} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.99b)$$

$$\delta g_{ij}(y_1) = \frac{14}{5} \frac{G^3 m_1^2 m_2}{c^6 r_{12}^3} \left(\delta^{ij} - 3 n_{12}^i n_{12}^j \right). \quad (4.99c)$$

The end result for the Hadamard regularized 3PN metric, $g_{\alpha\beta}^{\text{HR}}(y_1)$, then follows from combining the previous difference with the explicit expression (4.69) for the DR metric. One can check while performing the sum that all poles $\propto 1/\varepsilon$ and the associated ℓ_0 -dependent logarithmic terms cancel out, so that the HR result only depends on the UV gauge constants r'_a and also, of course, on the IR regularization constant r_0 .

Note that the DR metric (4.92) is really the metric experienced by the particle in $d = 3 + \varepsilon$ dimensions. It is thus very important to include in that metric all corrections of order ε which could yield finite contributions after multiplication by quantities involving poles. As already mentioned, for the problem of computing u^T for circular orbits we have to write the Newtonian part of the 00 component of the metric as $g_{00}^{\text{DR}} = -1 + 2V_N^{(d)}/c^2 + \mathcal{O}(c^{-4})$, where the

Newtonian potential satisfying the d -dimensional Poisson equation $\Delta V_N^{(d)} = -4\pi G^{(d)}\sigma_N$ with Newtonian source density $\sigma_N = \frac{2(d-2)}{d-1} \sum_a m_a \delta_a^{(d)}$ is given by

$$V_N^{(d)}(x) = \frac{2(d-2)}{d-1} k \sum_a \frac{G^{(d)} m_a}{r_a^{d-2}}, \quad (4.100)$$

with DR value at point a [see also (4.71)]

$$V_N^{(d)}(y_a) = \frac{2(d-2)}{d-1} k \sum_{b \neq a} \frac{G^{(d)} m_b}{r_{ab}^{d-2}}. \quad (4.101)$$

In the same vein the Newtonian acceleration in (4.97)–(4.98) should read

$$\mathbf{a}_a^N = \nabla V_N^{(d)}(y_a) = -\frac{2(d-2)^2}{d-1} k \sum_{b \neq a} \frac{G^{(d)} m_b}{r_{ab}^{d-1}} \mathbf{n}_{ab}. \quad (4.102)$$

Appendix B: Circular orbits in d dimensions

In this Appendix we describe our way to reduce a general d -dimensional expression such as the regularized metric (4.69) —valid for arbitrary binary orbits and in a general frame (in harmonic coordinates)— to the center-of-mass (CM) frame and then to circular orbits. The relevant formulas to do so have been worked out at 3PN order within HR (see [61] for more details), and we need here the corresponding formulas valid in DR. Basically we shall rely on the HR results and apply to them the known shifts of the particle’s world-lines to deduce the corresponding DR results.

The 3PN equations of motion of compact binaries using HR turned out to depend on one, and only one, ambiguity parameter called λ (denoted β_{EOM} in Appendix A) [75], and to be physically equivalent to the DR equations of motion if and only if $\lambda = -\frac{1987}{3080}$ [67].²⁸ This means that the difference between the DR and HR accelerations of body 1 (say) is exclusively due to a shift of the world-lines of the particles $\mathbf{y}_a \rightarrow \mathbf{y}_a + \boldsymbol{\xi}_a$ through

$$\mathbf{a}_1^{\text{DR}} = \mathbf{a}_1^{\text{HR}}|_{\lambda=-\frac{1987}{3080}} + \delta_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{a}_1. \quad (4.103)$$

The explicit λ -dependent expression of the 3PN-accurate acceleration $\mathbf{a}_1^{\text{HR}}$ can be found in Eq. (7.16) of [75]. The effect of the shifts $\boldsymbol{\xi}_a$ on the acceleration of body 1 is

$$\delta_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{a}_1 = \ddot{\boldsymbol{\xi}}_1 - \xi_{12}^i \frac{\partial \mathbf{a}_1^N}{\partial y_1^i} + \mathcal{O}(c^{-8}), \quad (4.104)$$

where $\xi_{12}^i \equiv \dot{\xi}_1^i - \dot{\xi}_2^i$, and the dot stands for a derivative with respect to coordinate time t . The shift $\boldsymbol{\xi}_a$ has been given in (4.98) above; recall the presence therein of a pole $\propto \varepsilon^{-1}$. To be consistent one needs to include in the Newtonian acceleration $\mathbf{a}_1^N$ the corrections of order ε , and the correct expression to do so is given by (4.102).

²⁸This result is equivalent to the one of Ref. [141]; see also [221, 219] for an alternative, ambiguity-free derivation of the 3PN equations of motion.

By definition, the CM frame is such that the center of mass position $\mathbf{G}$ vanishes. Within HR, we have $\mathbf{G}^{\text{HR}} = \mathbf{0}$ when the individual positions of the particles $\mathbf{y}_a$ are given as some functionals of the relative position $\mathbf{y}_{12}$ and velocity $\mathbf{v}_{12}$ according to $\mathbf{y}_a = \mathbf{y}_a^{\text{HR}}[\mathbf{y}_{12}, \mathbf{v}_{12}]$. The explicit expression of the functionals $\mathbf{y}_a^{\text{HR}}[\mathbf{y}_{12}, \mathbf{v}_{12}]$ up to 3PN order can be found in Eqs. (3.6)–(3.7) of [80]. Similarly, within DR we shall have $\mathbf{G}^{\text{DR}} = \mathbf{0}$ when the individual positions of the particles are related to the relative position and velocity according to some new functional relations

$$\mathbf{y}_a = \mathbf{y}_a^{\text{DR}}[\mathbf{y}_{12}, \mathbf{v}_{12}], \quad (4.105)$$

which we want to determine. Now, by the effect of the shifts of the world-lines the expression of the center of mass position in DR will be different from that in HR, and be given by $\mathbf{G}^{\text{DR}} = \mathbf{G}^{\text{HR}} + \delta_\xi \mathbf{G}$ where

$$\delta_\xi \mathbf{G} = -m_1 \boldsymbol{\xi}_1 - m_2 \boldsymbol{\xi}_2 + \mathcal{O}(c^{-8}). \quad (4.106)$$

Therefore we find that the DR functionals $\mathbf{y}_a^{\text{DR}}[\mathbf{y}_{12}, \mathbf{v}_{12}]$ are related to the HR functionals $\mathbf{y}_a^{\text{HR}}[\mathbf{y}_{12}, \mathbf{v}_{12}]$ through $\mathbf{y}_a^{\text{DR}} = \mathbf{y}_a^{\text{HR}} + \delta_\xi \mathbf{y}_a$,²⁹ with the same shift for both particles given by

$$\delta_\xi \mathbf{y}_a = \frac{m_1}{m} \boldsymbol{\xi}_1 + \frac{m_2}{m} \boldsymbol{\xi}_2 + \mathcal{O}(c^{-8}). \quad (4.107)$$

The DR expressions (4.105) are thus easily determined from the HR results.

Next, from the DR equations of motion (4.103)–(4.104) in a general frame, we go to the CM frame by replacing the individual positions and velocities by the relative ones according to $\mathbf{y}_a = \mathbf{y}_a^{\text{DR}}[\mathbf{y}_{12}, \mathbf{v}_{12}]$ and also $\mathbf{v}_a = \dot{\mathbf{y}}_a^{\text{DR}}[\mathbf{y}_{12}, \mathbf{v}_{12}]$. Turning off the well-known 2.5PN radiation-reaction terms, and restricting the result to circular orbits [thus $(y_{12}v_{12}) = 0$], we get the relative acceleration of the binary within DR in the form $\mathbf{a}_{12}^{\text{DR}} = -\Omega^2 \mathbf{y}_{12}$, where the orbital frequency Ω can then be computed iteratively as an expansion in powers of the PN parameter $\gamma \equiv Gm/(r_{12}c^2)$, with $r_{12} = |\mathbf{y}_{12}|$. To 3PN order we find

$$\begin{aligned} \Omega^2 = & \frac{Gm}{r_{12}^3} \left\{ 1 + \varepsilon \left[\frac{3}{2} - \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) \right] + (-3 + \nu) \gamma + \left(6 + \frac{41}{4} \nu + \nu^2 \right) \gamma^2 \right. \\ & + \left(-10 + \left[-\frac{2987}{24} + \frac{41}{64} \pi^2 - \frac{11}{\varepsilon} + 44 \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) \right] \nu + \frac{19}{2} \nu^2 + \nu^3 \right) \gamma^3 \\ & \left. + \mathcal{O}(c^{-8}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.108)$$

As in the Hadamard case, we invert this relation to express γ as a PN series in powers of the gauge invariant parameter $x \equiv (Gm\Omega/c^3)^{2/3}$, with result

$$\begin{aligned} \gamma = & x \left\{ 1 + \varepsilon \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) \right] + \left(1 - \frac{\nu}{3} \right) x + \left(1 - \frac{65}{12} \nu \right) x^2 \right. \\ & + \left(1 + \left[-\frac{251}{72} - \frac{41}{192} \pi^2 + \frac{11}{3\varepsilon} - \frac{55}{9} \ln \left(\frac{r_{12} p}{\ell_0} \right) \right] \nu + \frac{229}{36} \nu^2 + \frac{\nu^3}{81} \right) x^3 \\ & \left. + \mathcal{O}(c^{-8}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.109)$$

²⁹Note that we mean by this a *functional* equality, valid for any dummy variables $\mathbf{y}_{12}$ and $\mathbf{v}_{12}$.

The equations (4.108)–(4.109) are the DR equivalent of Eqs. (188) and (191) in [61], which are valid in the coordinate system used in the HR case. Of course the results coincide up to 2PN order as they should. Notice however that we kept the terms proportional to ε in the Newtonian terms of (4.108)–(4.109), because in the process of computing u^T the Newtonian terms will get multiplied by some poles ε^{-1} occurring at 3PN order, and these corrections will contribute to the final result. We are done for the results necessary for the computation of u^T for circular orbits as reported in Sec. 4.7.

As a useful check, we compute the total energy of the binary for circular orbits within DR, making use of Eqs. (4.107)–(4.109). For a generic orbit and in a general frame, the DR energy functional is related to the HR one through $E^{\text{DR}} = E^{\text{HR}} + \delta_\xi E$. The effect of the shifts ξ_a on the energy explicitly reads

$$\delta_\xi E = -m_1 v_1^i \dot{\xi}_1^i - m_2 v_2^i \dot{\xi}_2^i + \xi_{12} \frac{\partial U_N^{(d)}}{\partial y_{12}^i} + \mathcal{O}(c^{-8}), \quad (4.110)$$

where the Newtonian gravitational potential energy in d dimensions is

$$U_N^{(d)} = \frac{2(d-2)}{d-1} k \frac{G^{(d)} m_1 m_2}{r_{12}^{d-2}}. \quad (4.111)$$

At this stage, we use the expression of the total energy E^{HR} as computed within HR, and given e.g. by Eq. (170) of [61], and add to it the term $\delta_\xi E$ defined by (4.110)–(4.111). Our first check is that this 3PN-accurate energy E^{DR} for a generic orbit in a general frame within DR is conserved, i.e. $\dot{E}^{\text{DR}} = 0$ when neglecting the 2.5PN radiation-reaction terms. This requires consistently order reducing the result, i.e. replacing the accelerations in the time derivative of E^{DR} using the DR equations of motion (4.103)–(4.104).

Now, we obtain the expression E^{DR} in the center-of-mass frame by replacing the individual positions and velocities by their expressions $\mathbf{y}_a^{\text{DR}}[\mathbf{y}_{12}, \mathbf{v}_{12}]$ and $\dot{\mathbf{y}}_a^{\text{DR}}[\mathbf{y}_{12}, \mathbf{v}_{12}]$. Restricting ourselves to circular orbits, the resulting CM energy depends only on $v_{12}^2 = r_{12}^2 \Omega^2$ and γ . Then we replace v_{12}^2 by its PN expansion in powers of γ using (4.108), and finally replace γ by its PN expansion (4.109) in powers of x . We find that all poles $\propto \varepsilon^{-1}$ disappear in the process; therefore we can take the limit $\varepsilon \rightarrow 0$, and get the gauge invariant expression

$$E^{\text{DR}} = -\frac{m v c^2}{2} x \left\{ 1 + \left(-\frac{3}{4} - \frac{\nu}{12} \right) x + \left(-\frac{27}{8} + \frac{19}{8} \nu - \frac{\nu^2}{24} \right) x^2 \right. \\ \left. + \left(-\frac{675}{64} + \left[\frac{34445}{576} - \frac{205}{96} \pi^2 \right] \nu - \frac{155}{96} \nu^2 - \frac{35}{5184} \nu^3 \right) x^3 + \mathcal{O}(c^{-8}) \right\}, \quad (4.112)$$

which coincides with the well-known 3PN expression of the total energy for circular orbits as given e.g. by Eq. (192) of [61].

CALCUL POST-NEWTONNIEN DE LA FORCE PROPRE GRAVITATIONNELLE II

LA comparaison des formalismes post-newtonien et de la force propre introduite au chapitre précédent est étendue et affinée. Le calcul préalable des contributions logarithmiques aux ordres 4PN et 5PN dans la fonction $u_{\text{SF}}^t(\Omega)$ permet d'ajuster avec plus grande précision le résultat exact issu du calcul perturbatif. On parvient ainsi à mesurer des coefficients post-newtoniens inconnus jusqu'à l'ordre 7PN.

5.1 Contributions logarithmiques

Dans le chapitre 4, nous avons calculé la métrique régularisée sur l'un des corps à l'ordre 3PN. Le résultat [cf. Éq. (4.69)] s'exprime sous forme d'un développement en puissances de $1/c$. Toutefois, la métrique post-newtonienne dans la zone proche n'admet pas un tel développement en série de manière générale. La structure du résultat est connue à un ordre post-newtonien quelconque, et prend la forme schématique [65]

$$h \sim \sum_{p,q} \frac{(\ln c)^p}{c^q}, \quad (5.1)$$

où p et q sont des entiers naturels. L'apparition de contributions logarithmiques dans la métrique zone proche est dû au sillage d'onde : à partir de l'ordre 4PN, la métrique à l'instant t ne dépend pas seulement de la dynamique de la source à l'instant retardé $t - r/c$, où $r = |\mathbf{x}|$ est la distance au centre de la source, mais de tout le passé de la source, à cause du rayonnement gravitationnel diffusé par la courbure de fond de l'espace-temps générée par la masse de la source [66]. Il existe une partie conservative associée à ces termes de sillage d'onde, et notre objectif est de calculer les contributions dominantes aux ordres 4PN et 5PN.

Pour ce faire, nous utilisons le formalisme de génération d'onde décrit succinctement dans le chapitre 2. La métrique à l'extérieur de la source est calculée itérativement à l'aide d'un développement post-minkowskien multipolaire du type $h = \sum_n G^n h_n$. À chaque ordre n dans l'itération post-minkowskienne, il faut résoudre une équation de d'Alembert du type

$$\square h_n = S_n[h_1, \dots, h_{n-1}], \quad (5.2)$$

où $\square$ est l'opérateur des ondes en espace-temps plat, et la source S_n est fonction des $n - 1$ ordres d'approximation précédents $h_1, \dots, h_{n-1}$.

Afin d'isoler la partie conservative de la dynamique, et donc en particulier les contributions logarithmiques conservatives associées aux termes de sillage d'onde, ces équations de d'Alembert sont intégrées à l'aide du propagateur dit « des potentiels instantanés »¹

$$\mathcal{I}^{-1} \equiv \text{PF}_{B=0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\partial}{c \partial t} \right)^{2k} \Delta^{-k-1} \left(\frac{r}{\lambda} \right)^B. \quad (5.3)$$

Le formalisme de génération d'onde fait usage de développements multipolaires, de sorte que les sources S_n des équations de d'Alembert (5.2) divergent à l'origine (en $r = 0$). Leur régularisation requiert l'introduction d'un facteur régulateur $(r/\lambda)^B$, où $\lambda = 2\pi c/\Omega$ est la longueur d'onde associée à la fréquence orbitale Ω de l'orbite circulaire.

Tout comme au chapitre précédent, nous utilisons la méthode de prolongement analytique : la constante B (nulle avant régularisation) est promue au rang de paramètre à valeur dans le plan complexe $\mathbb{C}$; le résultat de l'intégration est donné par la partie finie ($\text{PF}_{B=0}$) du développement de Laurent en puissances de B au voisinage de 0, *i.e.* par le terme en facteur de B^0 . Mathématiquement, les termes logarithmiques sont associés à l'apparition de pôles $\propto B^{-1}$ au cours du processus itératif, et les puissances de logarithmes à des pôles multiples.

Après avoir identifié les contributions logarithmiques conservatives dominantes dans la zone d'onde, nous utilisons la méthode du raccord des séries asymptotiques pour calculer les contributions associées dans la zone proche, et en particulier dans la source. Finalement, on obtient ainsi les contributions logarithmiques conservatives aux ordres 4PN et 5PN dans la métrique d'espace-temps $g_{\mu\nu}$ pour une source post-newtonienne quelconque. En considérant l'application au cas d'un système binaire compact sur une orbite circulaire, on calcule les contributions associées dans la fonction $u_1^t(x)$ à l'aide de la relation (4.4). Enfin, en développant le résultat en puissances du rapport de masse $q = m_1/m_2$, on obtient la contribution $u_{\text{SF}}^t(y)$ due à la force propre.

Combinant ces nouveaux résultats avec ceux présentés dans le chapitre 4, on trouve ainsi

$$\begin{aligned} u_{\text{SF}}^t(y) = & -y - 2y^2 - 5y^3 + \left(-\frac{121}{3} + \frac{41}{32}\pi^2 \right) y^4 \\ & + \left(\alpha_4 - \frac{64}{5} \ln y \right) y^5 + \left(\alpha_5 + \frac{956}{105} \ln y \right) y^6 + o(y^6). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Les contributions logarithmiques 4PN et 5PN sont les termes en facteur de $y^5 \ln y$ et $y^6 \ln y$ respectivement. Notons que les coefficients polynomiaux 4PN α_4 et 5PN α_5 seraient très difficiles à calculer par les méthodes post-newtoniennes standards.

¹Afin de résoudre le problème physique, *i.e.* en conservant les effets dissipatifs associés au rayonnement gravitationnel, il convient d'utiliser le propagateur retardé $\square_R^{-1}$, qui est donné par l'intégrale retardée habituelle.

5.2 Ajustement du résultat perturbatif

Le formalisme de la force propre permet de calculer la fonction $u_{\text{SF}}^t(y)$ de manière exacte (modulo l'erreur numérique). Nous souhaitons ajuster ce résultat par une série post-newtonienne de la forme²

$$u_{\text{SF}}^t(y) = \sum_{k \geq 0} \alpha_n y^{k+1} + \ln y \sum_{k \geq 4} \beta_n y^{k+1}, \quad (5.5)$$

afin de déterminer les valeurs de nombreux coefficients post-newtoniens inconnus (en particulier les coefficients α_4 et α_5). D'après le résultat (5.4) issu de calculs post-newtoniens détaillés dans [151, 72, 71], les coefficients polynomiaux α_k sont connus jusqu'à l'ordre 3PN, et les coefficients logarithmiques β_k aux ordres 4PN et 5PN. Nous allons voir que l'ajustement du résultat exact issu du calcul perturbatif permet de calculer les coefficients polynomiaux jusqu'à l'ordre 7PN, ainsi que le coefficient logarithmique 6PN.

Mais dans un premier temps, nous souhaitons vérifier que la connaissance préalable des contributions logarithmiques aux ordres 4PN et 5PN permet d'améliorer considérablement (par rapport au résultat présenté au chapitre 4) l'accord sur la valeur du coefficient 3PN. Le résultat exact, issu du calcul de la métrique régularisée à l'ordre 3PN, est

$$\alpha_3 = -\frac{121}{3} + \frac{41}{32}\pi^2 = -27,6879026 \dots. \quad (5.6)$$

En utilisant les valeurs exactes des coefficients polynomiaux newtonien α_0 , 1PN α_1 et 2PN α_2 , ainsi que les contributions logarithmiques dominantes 4PN β_4 et 5PN β_5 , l'ajustement de la fonction $u_{\text{SF}}^t(y)$ par une série post-newtonienne du type (5.5) permet d'estimer la valeur du coefficient polynomial 3PN, avec pour résultat

$$\alpha_3^{\text{SF}} = -27,6879034 \pm 0,0000004. \quad (5.7)$$

L'accord entre les deux calculs est particulièrement impressionnant : les deux résultats sont compatibles à 2σ avec 9 chiffres significatifs.

La valeur du coefficient 3PN désormais confirmée avec grande précision, nous l'incluons dans la formule (5.5) afin d'obtenir le meilleur ajustement possible du résultat numérique issu du calcul perturbatif de $u_{\text{SF}}^t(y)$. Les valeurs des coefficients post-newtoniens inconnus α_4 , α_5 , etc. ainsi calculés sont résumées dans le tableau 5.1 ci-après. On notera la très grande précision obtenue dans la détermination de certains coefficients, comme par exemple le coefficient polynomial 4PN α_4 , obtenu avec 8 chiffres significatifs. La convergence des approximations post-newtoniennes successives vers le résultat exact est apparente sur la figure 5.2.

Ce travail illustre clairement la complémentarité des approches post-newtonienne et perturbative, la comparaison des deux formalismes dans leur domaine de validité commun permettant d'obtenir des informations sur l'un des schémas d'approximation qu'il serait très difficile, voire impossible, d'obtenir autrement.

²L'analyse détaillée de la structure de la métrique zone proche permet d'établir que les contributions logarithmiques du type $(\ln y)^2$ n'apparaissent pas avant l'ordre 5.5PN. De telles contributions aux ordres 5.5PN et 6.5PN seraient toutefois associées à la partie dissipative de la dynamique. La première contribution conservative du type $(\ln y)^2$ n'apparaît probablement pas avant l'ordre 7PN. Nous n'incluons pas de puissances de logarithmes dans la formule (5.5), car la séparation des contributions polynomiale α_7 et logarithmique β_7 à l'ordre 7PN est déjà difficile.

Coefficient	Valeur
α_4	$-114,34747(5)$
α_5	$-245,53(1)$
α_6	$-695(2)$
β_6	$+339,3(5)$
α_7	$-5837(16)$

TAB. 5.1: Les valeurs des coefficients α_k et β_k du développement post-newtonien (5.5) de la fonction $u_{\text{sf}}^t(y)$, obtenues jusqu'à l'ordre 7PN en ajustant le résultat exact issu du calcul perturbatif. Les chiffres entre parenthèses indiquent l'incertitude sur la ou les dernière(s) décimale(s). Le coefficient α_7 inclut très probablement une contribution due au terme logarithmique 7PN.

La suite de ce chapitre est un article publié dans le journal *Physical Review D* [71]. Un résumé des travaux présentés dans ce chapitre, ainsi que dans le chapitre précédent, a été publié dans le livre *Mass and Motion in General Relativity* [70].

High-Order Post-Newtonian Fit of the Gravitational Self-Force for Circular Orbits in the Schwarzschild Geometry

Luc Blanchet¹, Steven Detweiler², Alexandre Le Tiec¹ and Bernard F. Whiting²

¹ *GRÉCO*, Institut d'Astrophysique de Paris — UMR 7095 du CNRS,
Université Pierre et Marie Curie, 98^{bis} boulevard Arago, 75014 Paris, France

² Institute for Fundamental Theory, Department of Physics,
University of Florida, Gainesville, FL 32611-8440, USA

Abstract

We continue a previous work on the comparison between the post-Newtonian (PN) approximation and the gravitational self-force (SF) analysis of circular orbits in a Schwarzschild background. We show that the numerical SF data contain physical information corresponding to extremely high PN approximations. We find that knowing analytically determined appropriate PN parameters helps tremendously in allowing the numerical data to be used to obtain higher order PN coefficients. Using standard PN theory we compute analytically the leading 4PN and the next-to-leading 5PN logarithmic terms in the conservative part of the dynamics of a compact binary system. The numerical perturbative SF results support well the analytic PN calculations through first order in the mass ratio, and are used to accurately measure the 4PN and 5PN non-logarithmic coefficients in a particular gauge invariant observable. Furthermore we are able to give estimates of higher order contributions up to the 7PN level. We also confirm with high precision the value of the 3PN coefficient. This interplay between PN and SF efforts is important for the synthesis of template waveforms of extreme mass ratio inspirals to be analysed by the space-based gravitational wave instrument LISA. Our work will also have an impact on efforts that combine numerical results in a quantitative analytical framework so as to generate complete inspiral waveforms for the ground-based detection of gravitational waves by instruments such as LIGO and Virgo.

5.3 Motivation and summary

This paper is the follow up of previous work [72] (hereafter Paper I) where we demonstrated a very good agreement between the analytical post-Newtonian (PN) approximation and the numerical gravitational self-force (SF) for circular orbits in the perturbed Schwarzschild geometry. The first step had been taken by Detweiler [151] who showed agreement at 2PN order using the existing PN metric [79].¹ Motivated by this result we pushed the PN calculation in Paper I up to the 3PN level. This is particularly interesting because the 3PN approximation necessitates an extensive use of dimensional regularization to treat the divergent self-field of point particles. The successful comparison reported in Paper I confirmed the soundness of both the traditional PN expansion (see e.g. [61]) and the perturbative SF analysis [296, 344, 153, 200, 335] in describing the dynamics of compact binary systems — notably, regarding subtleties associated with the self-field regularizations in use in both approaches. This comparison dealt with the conservative part of the dynamics, but previous comparisons between the PN and the SF had checked dissipative effects [332, 127, 333, 391, 334, 393, 395, 336].

In Paper I we also showed that the quality of the numerical SF data is such that substantial physical information remains far beyond 3PN order, i.e. is contained within the numerically derived residuals obtained after subtracting the known 3PN terms from the data (see Fig. 3 of Paper I). In the present paper we explore further the higher-order PN nature of the numerical data. We point out that knowing analytically determined appropriate PN parameters helps tremendously in allowing our numerical data to be used to obtain higher order PN terms. In particular, we show that prior analytic information from PN theory regarding the presence of *logarithmic* terms in the PN expansion is crucial for efficiently extracting from the SF data the numerical values of higher order PN coefficients.

The occurrence of logarithmic terms in the PN expansion has been investigated in many previous works [9, 236, 237, 10, 186, 183, 65, 66]. Notably Anderson *et al.* [10] found that the dominant logarithm arises at the 4PN order, and Blanchet & Damour [66] (see also [57]) showed that this logarithm is associated with gravitational wave tails modifying the usual 2.5PN radiation-reaction damping at the 1.5PN relative order. Furthermore the general structure of the PN expansion is known [65]: it is of the type $\sum (v/c)^k [\ln(v/c)]^q$, where k and q are positive integers, involving only powers of logarithms; more exotic terms such as $[\ln(\ln(v/c))]^q$ cannot arise. In the present paper we shall determine the leading 4PN logarithm and the next-to-leading 5PN logarithm in the conservative part of the dynamics of a compact binary system.

Consider two compact objects with masses m_1 and m_2 (without spins) moving on exactly circular orbits. The dissipative effects associated with gravitational wave emission are neglected, which is formalized by assuming the existence of a helical Killing vector field $K^\alpha(x)$, being null on the light cylinder associated with the circular motion, time-like inside the light cylinder (for instance at the particle's location) and space-like outside (including a neighborhood of spatial infinity). Then we consider a particular gauge invariant observable quantity [151] defined as the constant of proportionality between the four-velocity of one of the masses, say m_1 , and the helical Killing vector evaluated at the location of that particle, i.e. $K_1^\alpha \equiv K^\alpha(y_1)$,

$$u_1^\alpha = u_1^T K_1^\alpha. \quad (5.8)$$

¹As usual the n PN order refers to terms equivalent to $(v/c)^{2n}$ beyond Newtonian theory, where v is a typical internal velocity of the material system and c is the speed of light.

The quantity u_1^T represents the redshift of light rays emitted from the particle and received on the helical symmetry axis perpendicular to the orbital plane [151]; we shall sometimes refer to it as the redshift observable. Adopting a coordinate system in which the helical Killing vector field reads $K^\alpha \partial_\alpha = \partial_t + \Omega \partial_\phi$, where Ω denotes the orbital frequency of the circular motion, we find that the redshift observable reduces to the t component $u_1^t \equiv dt/d\tau_1$ of the particle's four-velocity, namely

$$u_1^T = u_1^t = \left(-g_{\alpha\beta}(y_1) \frac{v_1^\alpha v_1^\beta}{c^2} \right)^{-1/2}. \quad (5.9)$$

Here $v_1^\alpha \equiv dy_1^\alpha/dt = (c, v_1^i)$ is the ordinary coordinate velocity used in PN calculations, and $g_{\alpha\beta}(y_1)$ denotes the metric being evaluated at the particle's location by means of an appropriate self-field regularization, i.e. mode-sum regularization in the SF approach, and dimensional regularization in the PN context.

The point is that u_1^T can be computed as a function of the orbital frequency Ω in both the PN approach for any mass ratio, and in the perturbative SF framework when the mass m_1 is much smaller than m_2 . Summarizing the analytical 3PN result of Paper I and present computation of the 4PN and 5PN logarithmic terms in Secs. 5.4–5.7, we obtain the SF contribution to the redshift observable (5.9) as²

$$\begin{aligned} u_{\text{SF}}^T = & -y - 2y^2 - 5y^3 + \left(-\frac{121}{3} + \frac{41}{32}\pi^2 \right) y^4 \\ & + \left(\alpha_4 - \frac{64}{5} \ln y \right) y^5 + \left(\alpha_5 + \frac{956}{105} \ln y \right) y^6 + o(y^6), \end{aligned} \quad (5.10)$$

where $y = (Gm_2\Omega/c^3)^{2/3}$ is a PN parameter associated with the lighter mass m_1 , and α_4 and α_5 denote some purely numerical coefficients left out in the PN calculation. However, having obtained theoretical predictions for the 4PN and 5PN logarithmic terms, we are able to perform an efficient fit to the numerical SF data and to accurately measure the other non-logarithmic 4PN and 5PN coefficients. We find $\alpha_4 = -114.34747(5)$ and $\alpha_5 = -245.53(1)$ where the uncertainty in the last digit is in parenthesis. Furthermore we can also measure the 6PN coefficients α_6 and β_6 (such that $\alpha_6 + \beta_6 \ln y$ is the factor of y^7), and give an estimate of the total contribution of the 7PN coefficient (including both logarithmic and non-logarithmic terms); see Table 5.6 and Fig. 5.1 in Sec. 5.8.4. The 3PN coefficient $\alpha_3 = -\frac{121}{3} + \frac{41}{32}\pi^2$ is also found to be in agreement with the SF data with high precision.

The non-logarithmic coefficients $\alpha_4, \alpha_5, \dots$ would be extremely difficult to obtain with standard PN methods. Their computation would require in particular having a consistent self-field regularization scheme; for instance it is not guaranteed that dimensional regularization which has been so successful at 3PN order could be applied with equal success at much higher orders. Nevertheless these coefficients are obtained here for the first time with reasonable precision up to the impressive 7PN order. This emphasizes the powerfulness of the perturbative SF approach and its ability to describe the strong field regime of compact binary systems, which is inaccessible to the PN method. Of course, the limitation of the SF approach is the small mass-ratio limit; in this respect it is taken over by the PN method.

²Inspired by our earlier work [72], the easy calculation of the 4PN logarithm has already been given in [134].

The analytical and numerical results obtained in this paper up to 7PN order could be used for the synthesis and calibration of template waveforms of extreme mass ratio inspirals (EMRIs) to be observed by the space-based gravitational wave detector LISA. They are also relevant to analyses that combine numerical computations in a quantitative analytical framework for the generation of inspiral waveforms for the ground-based LIGO and Virgo detectors.

The remainder of this paper is organized as follows: In Sec. 5.4 we perform a detailed analysis of the occurrence of logarithmic terms in the near-zone expansion of an isolated source. This general discussion is followed in Sec. 5.5 by the explicit computation of the leading order 4PN and next-to-leading order 5PN logarithmic terms in the near-zone metric of an arbitrary post-Newtonian source, and then of a compact binary system. We proceed in Sec. 5.6 with the computation of these terms in the acceleration of the compact binary, as well as in the binary's conserved energy, and consider the restriction to circular orbits. This allows us to derive intermediate results necessary for the computation of the 4PN and 5PN logarithmic terms in the redshift observable (5.9) for circular orbits; this is detailed in Sec. 5.7. Finally, Sec. 5.8 is devoted to a high-order PN fit of our numerical data for the SF effect on the redshift variable. The Appendix provides general formulas for the computation of logarithmic terms in PN theory.

5.4 General structure of logarithmic terms

5.4.1 Near-zone expansion of the exterior metric

In this Section we study in a general way the PN orders at which logarithmic terms occur in the near-zone expansion of the metric of an isolated source. Our main tool will be the multipolar-post-Minkowskian (MPM) analysis of the vacuum field outside the compact support of the source [65, 66, 57, 60, 339]. The starting point is the general solution of the linearized vacuum Einstein field equations in harmonic coordinates, which takes the form of a multipolar expansion parametrized by mass-type M_L and current-type S_L multipole moments [400]³

$$h_1^{00} = -\frac{4}{c^2} \sum_{\ell \geq 0} \frac{(-)^\ell}{\ell!} \partial_L \left[\frac{1}{r} M_L(u) \right], \quad (5.11a)$$

$$h_1^{0i} = \frac{4}{c^3} \sum_{\ell \geq 1} \frac{(-)^\ell}{\ell!} \left\{ \partial_{L-1} \left[\frac{1}{r} M_{iL-1}^{(1)}(u) \right] + \frac{\ell}{\ell+1} \varepsilon_{iab} \partial_{aL-1} \left[\frac{1}{r} S_{bL-1}(u) \right] \right\}, \quad (5.11b)$$

$$h_1^{ij} = -\frac{4}{c^4} \sum_{\ell \geq 2} \frac{(-)^\ell}{\ell!} \left\{ \partial_{L-2} \left[\frac{1}{r} M_{ijL-2}^{(2)}(u) \right] + \frac{2\ell}{\ell+1} \partial_{aL-2} \left[\frac{1}{r} \varepsilon_{ab(i} S_{j)bL-2}^{(1)}(u) \right] \right\}. \quad (5.11c)$$

³Our notation is as follows: $L = i_1 \cdots i_\ell$ denotes a multi-index composed of ℓ multipolar spatial indices $i_1, \dots, i_\ell$ (ranging from 1 to 3); $\partial_L = \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_\ell}$ is the product of ℓ partial derivatives $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$; $x_L = x_{i_1} \cdots x_{i_\ell}$ is the product of ℓ spatial positions x_i ; similarly $n_L = n_{i_1} \cdots n_{i_\ell}$ is the product of ℓ unit vectors $n_i = x_i/r$; the symmetric-trace-free (STF) projection is indicated with a hat, i.e. $\hat{x}_L \equiv \text{STF}[x_L]$, $\hat{n}_L \equiv \text{STF}[n_L]$, $\hat{\partial}_L \equiv \text{STF}[\partial_L]$, or sometimes using brackets surrounding the indices, i.e. $x_{(L)} \equiv \hat{x}_L$. In the case of summed-up (dummy) multi-indices L , we do not write the ℓ summations from 1 to 3 over their indices. The totally antisymmetric Levi-Civita symbol is denoted ε_{ijk} ; symmetrization over indices is denoted $(ij) = \frac{1}{2}(ij + ji)$; time-derivatives of the moments are indicated by superscripts (n) .

The multipole moments M_L and S_L are symmetric and trace-free (STF) with respect to all their indices and depend on the retarded time $u \equiv t - r/c$ in harmonic coordinates. They describe a general isolated source and are unconstrained except that the mass monopole M and current dipole S_i are constant, and the mass dipole M_i is varying linearly with time.

Starting from h_1 we define a full non-linear MPM series for the “gothic” metric deviation $h^{\alpha\beta} \equiv \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\beta}$ (where $g^{\alpha\beta}$ and g denote the inverse and determinant of the usual covariant metric respectively, and where $\eta^{\alpha\beta}$ is the Minkowski metric) as

$$h^{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^{+\infty} G^n h_n^{\alpha\beta}, \quad (5.12)$$

where the Newton constant G serves at labelling the successive post-Minkowskian orders. Plugging this series into the (vacuum) Einstein field equations in harmonic coordinates we find at each order $\partial_\mu h_n^{\alpha\mu} = 0$, together with

$$\square h_n^{\alpha\beta} = N_n^{\alpha\beta}, \quad (5.13)$$

where $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ is the flat d’Alembertian operator, and where N_n denotes the n -th non-linear gravitational source term depending on previous iterations $h_1, \dots, h_{n-1}$. An explicit “algorithm” has been proposed in [65] for solving (5.13) and the condition of harmonic coordinates at any post-Minkowskian order n .

We are interested in the expansion of the solution of (5.13) in the near-zone (NZ), i.e. formally when $r \rightarrow 0$ (but still outside the compact supported source). The general structure of that expansion is known [57]. For the source term we have (the NZ expansion being indicated with an overbar)

$$\overline{N}_n^{\alpha\beta} = \sum_{E_n} \frac{1}{c^{3n + \sum_{i=1}^n \underline{\ell}_i + 2}} \sum_{\substack{\ell, p, q \\ q \leq n-2}} F_{Lpq}^{\alpha\beta}(t) \hat{n}_L \left(\frac{r}{c}\right)^p \left[\ln\left(\frac{r}{\lambda}\right)\right]^q. \quad (5.14)$$

We see that besides the normal powers of r we have also powers of logarithms of r ; p is an integer ($p \in \mathbb{Z}$) bounded from below by some p_0 depending on E_n , and q is a positive integer ($q \in \mathbb{N}$). We pose $\lambda = 2\pi c/\Omega$, with Ω a typical frequency scale in the source to be identified later with the orbital frequency of the binary’s circular orbit. We denote by $E_n = \{M_{L_1}, M_{L_2}, \dots, \varepsilon_{ai_{\ell_n+1}i_{\ell_n}} S_{aL_n-1}\}$ a set of n multipole moments, with the current moments endowed with their natural Levi-Civita symbol. We pose $\underline{\ell}_i = \ell_i$ for mass moments and $\underline{\ell}_i = \ell_i + 1$ for current moments, so that $\sum_{i=1}^n \underline{\ell}_i$ is the total number of indices carried by the moments of the set E_n . On the other hand ℓ is the number of indices carried by the STF multipolar factor $\hat{n}_L$. The multipole functions in (5.14) admit the general structure [57]

$$F_{Lpq}^{\alpha\beta}(t) = \int du_1 \dots \int du_n \mathcal{K}_{L\underline{L}_1 \dots \underline{L}_n}^{\alpha\beta}(t, u_1, \dots, u_n) M_{L_1}^{(a_1)}(u_1) \dots \varepsilon_{ai_{\ell_n+1}i_{\ell_n}} S_{aL_n-1}^{(a_n)}(u_n), \quad (5.15)$$

where the kernel $\mathcal{K}$ has an index structure made only of Kronecker symbols and is only a function of time variables: the current time t , the n integration arguments u_i (satisfying $u_i \leq t$) and the period $P = \lambda/c$ of the source. Then with this convention we see that the powers of $1/c$ in

(5.14) are set by dimensionality. A useful lemma [57] is the fact that the multipolar order ℓ is necessarily constrained by the following two inequalities:

$$-\sum_{i=1}^n \ell_i + 4 - s \leq \ell \leq \sum_{i=1}^n \ell_i + s. \quad (5.16)$$

Here s is the number of spatial indices among α and β , i.e. the “spin” given by $s = 0, 1, 2$ according to $\alpha\beta = 00, 0i, ij$.

The lemma (5.16) will serve at controlling the PN order of “branches” of logarithmic terms arising in the MPM iteration of the external field. Already we know [65] that the powers of the logarithms are limited to $q \leq n - 2$ in the source term $\bar{N}_n$. After integration of the source term $\bar{N}_n$ we shall find the corresponding solution $\bar{h}_n$ which will admit the same type of NZ expansion as its source. However the maximal power of the logarithms in the solution will be increased by one unit with respect to the source and is thus limited by $n - 1$, i.e. $q \leq n - 1$ in $\bar{h}_n$. For instance this means that logarithms squared cannot arise before the cubic non-linear order $n = 3$.

To control the occurrence of logarithms in the near-zone it will be sufficient to integrate the source (5.14) by means of the integral of the “instantaneous” potentials defined by formal PN iteration of the inverse Laplace operator Δ^{-1} , say $\square^{-1} = \Delta^{-1} + c^{-2} \partial_t^2 \Delta^{-2} + \dots$. This is because any homogeneous solution to be added to that particular solution will have the structure of a free multipolar wave (retarded or advanced) whose near-zone expansion cannot contain any logarithms. However, when acting on a multipolar expanded source term, valid only in the exterior of the matter source and becoming singular in the formal limit $r \rightarrow 0$, we must multiply the source term by a regulator $(r/\lambda)^B$, where B is a complex number and $\lambda = cP$ is the length scale associated with the orbital motion. After applying the instantaneous propagator we take the finite part (FP) of the Laurent expansion when $B \rightarrow 0$. Thus the solution reads as

$$\bar{h}_n^{\alpha\beta} = \text{FP}_{B=0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\partial}{c \partial t} \right)^{2k} \Delta^{-k-1} \left[\left(\frac{r}{\lambda} \right)^B \bar{N}_n^{\alpha\beta} \right] + \bar{H}_n^{\alpha\beta}. \quad (5.17)$$

Later, in (5.26) below, we shall denote by $\mathcal{I}^{-1}$ the particular “instantaneous” regularized propagator appearing in (5.17). The term $\bar{H}_n$ denotes the NZ expansion of an homogeneous solution of the d’Alembert equation. In the general case this solution will be a mixture of purely retarded and advanced multipolar waves, say of the type $\sum \hat{\partial}_L \{R_L(t - r/c)/r\}$ and $\sum \hat{\partial}_L \{A_L(t + r/c)/r\}$, but the point is that the NZ expansion of $\bar{H}_n$ when $r \rightarrow 0$ clearly does not contain any logarithms. So in order to control the logarithms we can ignore the homogeneous piece $\bar{H}_n$.

As argued in [57] the use of the latter “instantaneous” propagator, say $\mathcal{I}^{-1}$, corresponds to keeping only the conservative part of the dynamics, i.e. neglecting the dissipative part associated with gravitational radiation-reaction. Below we shall implement the restriction to the conservative case by looking at circular orbits with helical Killing symmetry. We expect that a solution admitting this symmetry should be given by (5.17) where the homogeneous part $\bar{H}_n$ is of the symmetric type $\sum \hat{\partial}_L \{[S_L(t - r/c) + S_L(t + r/c)]/r\}$. In this “symmetric” situation, where the radiation-reaction is neglected, the solution should depend on the length scale λ appearing in the first term of (5.17). Indeed this length scale is introduced in the problem by our assumption of having the helical Killing symmetry with Killing vector $K^\alpha \partial_\alpha = \partial_t + \Omega \partial_\phi$ where $\Omega = 2\pi c/\lambda$.

5.4.2 Near-zone versus far-zone logarithms

Inserting the general form of the source term (5.14) into (5.17), and ignoring from now on the homogeneous term $\bar{H}_n$ which does not contain logarithms, we obtain (dropping the space-time indices $\alpha\beta$ for clarity)

$$\bar{h}_n = \sum_{E_n} \frac{1}{c^{3n+\sum_{i=1}^n \ell_i+2}} \sum_{\substack{\ell,p,q \\ q \leq n-2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{F_{Lpq}^{(2k)}(t)}{c^{p+2k}} \text{FP}_{B=0} \Delta^{-k-1} \left\{ \left(\frac{r}{\lambda} \right)^B \hat{n}_L r^p \left[\ln \left(\frac{r}{\lambda} \right) \right]^q \right\}. \quad (5.18)$$

We can explicitly integrate the iterated Poisson integral and find

$$\Delta^{-k-1} \left\{ \left(\frac{r}{\lambda} \right)^B \hat{n}_L r^p \left[\ln \left(\frac{r}{\lambda} \right) \right]^q \right\} = \left(\frac{\partial}{\partial B} \right)^q \left[\alpha_{\ell,p,k}(B) \left(\frac{r}{\lambda} \right)^B \hat{n}_L r^{p+2+2k} \right], \quad (5.19)$$

with B -dependent coefficients

$$\alpha_{\ell,p,k}(B) = \prod_{i=0}^k \frac{1}{(B+p+2+2i-\ell)(B+p+3+2i+\ell)}. \quad (5.20)$$

We shall now control the occurrence of a pole $\propto 1/B$ in the latter expression which, after taking the finite part in (5.18), will generate a logarithm $\ln r$. Actually, since we have to differentiate q times with respect to B , the pole in $\alpha_{\ell,p,k}(B)$ (which is necessarily a simple pole) will yield multiple poles $\propto 1/B^m$, and we shall finally end up with powers of logarithms $(\ln r)^m$, where here $m \leq q+1$ — hence the increase by one of the powers of logarithms from the source to the solution, as discussed previously.

Inspection of Eq. (5.20) readily shows that there are two types of poles. First we have the poles for which $p+2 = \ell-2i$. These will be qualified as “near-zone poles”, and the structure of the solution for these poles reads

$$\left(\bar{h}_n \right)_{\text{NZ pole}} = \sum_{\substack{\ell,j \geq 0 \\ m \leq n-1}} \frac{1}{c^{3n+\sum_{i=1}^n \ell_i+\ell}} G_{Ljm}(t) \hat{x}_L \left(\frac{r}{c} \right)^{2j} \left[\ln \left(\frac{r}{\lambda} \right) \right]^m, \quad (5.21)$$

where $j = k-i \geq 0$ and the functions $G_{Ljm}(t)$ have a structure similar to (5.15). Note that (5.21) is perfectly regular when $r \rightarrow 0$ [at least when $\ell+j \geq 1$] and will therefore be valid (after matching) inside the matter source. On the other hand the “far-zone poles” for which $p+2 = -\ell-1-2i$ have the structure

$$\left(\bar{h}_n \right)_{\text{FZ pole}} = \sum_{\substack{\ell,j \geq 0 \\ m \leq n-1}} \frac{1}{c^{3n+\sum_{i=1}^n \ell_i-\ell-1}} K_{Ljm}(t) \hat{\partial}_L \left(\frac{1}{r} \right) \left(\frac{r}{c} \right)^{2j} \left[\ln \left(\frac{r}{\lambda} \right) \right]^m. \quad (5.22)$$

These poles become singular when $r \rightarrow 0$. We shall argue later that the associated logarithms do not contribute to the PN expansion of quantities we compute in this paper (like the redshift observable or the conserved energy of a compact binary system).

We can now easily control the PN order of these poles. Taking into account all the powers of $1/c$ and the fact that $j \geq 0$, we obtain

$$\left(\bar{h}_n\right)_{\text{NZ pole}} = \sum_{\ell} \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^{3n+\sum_{i=1}^n \ell_i + \ell}}\right). \quad (5.23)$$

Next, the inequality in the left of the lemma (5.16) provides a uniform bound of the PN order of each of the terms in (5.23), leading to

$$\left(\bar{h}_n\right)_{\text{NZ pole}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^{3n+4-s}}\right). \quad (5.24)$$

This means that the NZ poles in the n -th non-linear metric are produced at least at the $\frac{3n+2}{2}$ PN level; note that the power of $1/c$ in the ij components of the perturbation $\bar{h}_n$, such that $s = 2$, gives immediately the PN order. Similarly we find, using now the inequality on the right of (5.16), that the FZ poles are produced at the level

$$\left(\bar{h}_n\right)_{\text{FZ pole}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^{3n-1-s}}\right), \quad (5.25)$$

corresponding to (at least) the $\frac{3n-3}{2}$ PN order. Notice that the far-zone poles come earlier than the near-zone ones in the PN iteration.

We use these general results to control the occurrence of (powers of) logarithms in the PN expansion. First be careful that our findings do not mean that all the logarithms at some n -th non-linear order will have the PN orders (5.24) and (5.25); it states that whenever *new logarithms* appear they are necessarily produced at least at these PN levels. However, once a “new” logarithm has been produced in $\bar{h}_n$, it will contribute in the source term $\bar{N}_{n+1}$ of the next iteration, and therefore will also appear in the corresponding solution $\bar{h}_{n+1}$ where it needs not to be associated with a pole occurring at that order. In fact we expect that the vast majority of logarithms only come from the iteration of original logarithms seeded by poles. Such “iterated” logarithms will escape the rules (5.24) and (5.25).

Given a logarithm at order n coming from a NZ pole and being thus at least of order $\frac{3n+2}{2}$ PN, we can check that it will generate iterated logarithms at any subsequent non-linear order $n + p$, with $p \geq 1$, and that those will be at least of order $\frac{3n+2p}{2}$ PN. We can therefore always bound the PN order of the complete family of iterated NZ logarithms by the order $\frac{3n+2}{2}$ PN of the “seed” logarithm.⁴ The same reasoning applies for the PN orders of the iterated FZ logarithms which are bounded from below by the $\frac{3n-3}{2}$ PN order of the seed.

When $n = 2$ we find from (5.24) that there is a family of NZ logarithms starting at the 4PN order. We know that the 4PN logarithmic term is associated with gravitational wave tails; it has been computed for general matter sources in [66]. Conjointly with this 4PN logarithm there

⁴When $p = 1$ we get the same PN order as the seed logarithm because according to (5.24) the ij component of the metric perturbation $h_n^{\alpha\beta}$ is of order $1/c^{3n+2}$, and hence generates at the next iteration a term of order $1/c^{3n+4}$ in the 00 component of the metric perturbation $h_{n+1}^{\alpha\beta}$ (via the non-linear source term $h_n^{ij} \partial_i \partial_j h_1^{00}$), which is still of $\frac{3n+2}{2}$ PN order. We shall use later the trick that by gauging away the ij component of the metric perturbation we can greatly simplify the computation of the subsequent iteration.

will be also logarithms at 5PN and higher orders, all of them at quadratic order $n = 2$, and all these quadratic logarithms will have to be iterated at the next cubic order $n = 3$, and so on. As we discussed this defines a complete family of NZ logarithms, and this family will be sufficient to control all the NZ logarithms at 4PN and 5PN orders. Indeed, we expect that at cubic order $n = 3$ a new family of NZ logarithms will appear, but according to the result (5.24) this new family will be of order 5.5PN at least. In particular this reasoning shows that the dominant NZ logarithm *squared* $[\ln(r/\lambda)]^2$ is at least 5.5PN order. Such 5.5PN logarithm would be time odd in a time reversal and belongs to the dissipative radiation-reaction part of the dynamics so we shall ignore it. Similarly the next family coming at the quartic approximation $n = 4$ will be at least 7PN — thus the dominant $[\ln(r/\lambda)]^3$ is expected to appear at least at 7PN order.

We shall now argue that only the family of NZ logarithms starting at the 4PN order needs to be considered for the present computation, because quite generally the FZ logarithms cannot contribute to the conserved part of the dynamics of a compact binary system.

5.4.3 Argument that far-zone logarithms give zero contribution

The FZ logarithms are generated by seeds whose PN order is controlled by the estimate (5.25). First one can check that due to the particular structure of the quadratic metric $n = 2$ there is no FZ pole at the quadratic order [66]. The FZ logarithms come only at the cubic order $n = 3$ and from the estimate (5.25) we see that they arise dominantly at 3PN order, i.e. earlier than the NZ logarithms at 4PN order. The 3PN far-zone logarithms have been investigated in [66] and also in previous work [10]. However we do not need to consider these and other FZ logarithms in the present calculation as the following argument shows.

The NZ and FZ logarithms were investigated using the operator of the “instantaneous” potentials defined by [see Eq. (5.17)]

$$\mathcal{I}^{-1} [\bar{N}_n] = \text{FP}_{B=0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\partial}{c \partial t} \right)^{2k} \Delta^{-k-1} \left[\left(\frac{r}{\lambda} \right)^B \bar{N}_n \right]. \quad (5.26)$$

This propagator depends on the length scale λ . Now our basic assumption is that in order to treat the conservative part of the dynamics, admitting the helical Killing vector $K^\alpha \partial_\alpha = \partial_t + \Omega \partial_\varphi$ in the two-body case, one should integrate the field equations with the propagator (5.26) in which we set $\lambda = 2\pi c / \Omega$. In this way the conservative dynamics will fundamentally depend on the scale λ coming from the Killing symmetry and explicitly introduced through the propagator (5.26).

By contrast, in a physical problem where we look for the complete dynamics including both conservative and dissipative (radiation-reaction) effects, there is no preferred scale such as λ — indeed, nothing suggests that the dynamics should depend on some pre-defined scale λ . In this case we integrate the field equations using the standard retarded integral, i.e.

$$\square_R^{-1} [N_n] = \text{FP}_{B=0} \frac{-1}{4\pi} \int \frac{d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left(\frac{|\mathbf{x}'|}{\lambda} \right)^B N_n(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c). \quad (5.27)$$

The non-linear source term N_n is in unexpanded form since we integrate in all the exterior of the source and not only in the NZ as in (5.26). But, as in (5.26), we have introduced a regulator

$(|\mathbf{x}'|/\lambda)^B$ and a finite part to cure the divergencies of the multipole expansion at the origin of the coordinates. Because of this regulator, the retarded integral (5.27) depends on the scale λ which must therefore be *cancelled* by other terms in the physical metric. What happens is that the dependence on λ coming from integrating the non-linearities using (5.27) is cancelled by a related dependence on λ of the multipole moments of the source which parametrize the linear (retarded) approximation. The source multipole moments can be written as integrals over the pseudo stress-energy tensor of the matter and gravitational fields [60]. Because of the non-compactness of the gravitational field the integral extends up to infinity and involves a similar regulator $(|\mathbf{x}'|/\lambda)^B$ dealing with the boundary of the integral at infinity. The final independence of the physical metric on λ can be checked by formally differentiating the general expression of the metric found in [60]. The cancellation of λ has been explicitly verified up to the 3PN order in the case of compact binaries [82].

What is the difference between the physical situation and the “unphysical” one in which we would use the propagator (5.26)? To compare the two situations we expand the retarded integral (5.27) in the near-zone. Recalling that the overbar refers to the NZ expansion, we obtain [57, 339]

$$\overline{\square_R^{-1} [N_n]} = \mathcal{I}^{-1} [\overline{N_n}] + \sum_{\ell \geq 0} \frac{(-)^\ell}{\ell!} \hat{\partial}_L \left\{ \frac{T_L(t - r/c) - T_L(t + r/c)}{2r} \right\}, \quad (5.28)$$

showing that the two solutions differ by an homogeneous solution of the wave equation which is of the anti-symmetric type (i.e. retarded minus advanced) and is therefore *regular* in the source. We know that the multipolar functions $T_L(u)$ parametrizing this solution are associated with non-linear tails and their expressions can be found in [57, 339]. In the physical case, the homogeneous solution in (5.28) will remove the λ -dependence located in the NZ logarithms appearing from the first term, and which have the symbolic NZ structure $\sim \hat{x}_L \ln(r/\lambda)$. On the other hand the λ -dependence in the FZ logarithms $\sim \hat{\partial}_L(1/r) \ln(r/\lambda)$, is removed by the retarded homogeneous solution we start with at the linear approximation.

Now in the unphysical situation we shall want to subtract the anti-symmetric solution in (5.28) in order to use the instantaneous propagator $\mathcal{I}^{-1}$. Therefore the scale λ will no longer be cancelled from the *near-zone* logarithms $\sim \hat{x}_L \ln(r/\lambda)$ which will thus remain as they are. Suppose that they are evaluated at the location of a body in a two-body system, then the NZ logarithms become $\sim \hat{y}_1^L \ln(|\mathbf{y}_1|/\lambda)$ where $\mathbf{y}_1$ is the position of the body, and hence $\sim \hat{y}_1^L \ln(r_{12}/\lambda)$ in the frame of the center of mass, where r_{12} is the two-body’s separation. Using Kepler’s law the logarithm becomes $\ln(r_{12}/\lambda) = \frac{1}{2} \ln \gamma$ where $\gamma = Gm/(r_{12}c^2)$ is a standard PN parameter, showing that the NZ logarithms do contribute to the final result.

On the contrary the FZ logarithms $\sim \hat{\partial}_L(1/r) \ln(r/\lambda)$ will not. Indeed the scale λ therein will still be cancelled out by the linear retarded solution.⁵ This means that in the application to binary systems the final FZ logarithms are scaled not by λ but rather by the size r_{12} of the orbit, and become some $\sim \hat{\partial}_L(1/r) \ln(r/r_{12})$. When considered at the location of one of the bodies we get $\sim \hat{\partial}_L(1/|\mathbf{y}_1|) \ln(|\mathbf{y}_1|/r_{12})$ which clearly does not contribute in the center-of-mass frame. The latter reasoning is rather formal because the multipole expansion is valid only

⁵The argument could be extended to an unphysical solution which would be truly symmetric in time, i.e. which would start with a symmetric (retarded plus advanced) linear approximation and integrate the non-linearities by means of the propagator $\mathcal{I}^{-1}$.

outside the source and it does not *a priori* make sense to apply it “at the location of one particle.” However the reasoning may be better justified from a matching argument suggesting that the multipole expansion is valid “everywhere”, in a restricted sense of formal asymptotic series.

Our conclusion is that we do not need to consider the FZ logarithms. From the previous investigation we see that it is sufficient to consider the family of iterated NZ logarithms generated at the quadratic order $n = 2$, and to compute the 4PN and 5PN logarithms within this family. We devote the next Section to this task.

5.5 The 4PN and 5PN near-zone logarithms

5.5.1 External near-zone post-Newtonian metric

Following [66, 57] we know that the dominant logarithms in the near-zone metric are coming from “tails” generated by quadratic coupling between the constant total mass M of the system (i.e. the ADM mass) and the time varying multipole moments M_L or S_L . Let us define $z_1^{\alpha\beta}(\mathbf{n}, u)$ as being the coefficient of the leading $1/r$ piece in the non-stationary or “dynamical” part $(h_1^{\alpha\beta})_{\text{dyn}}$ of the linearized metric given by (5.11), i.e. such that $(h_1^{\alpha\beta})_{\text{dyn}} = r^{-1} z_1^{\alpha\beta} + \mathcal{O}(r^{-2})$. This quantity is a functional of the time varying moments (i.e. having $\ell \geq 2$) evaluated at retarded time $u = t - r/c$, and explicitly reads

$$z_1^{00} = -4 \sum_{\ell \geq 2} \frac{n_L}{c^{\ell+2} \ell!} M_L^{(\ell)}(u), \quad (5.29a)$$

$$z_1^{0i} = -4 \sum_{\ell \geq 2} \left[\frac{n_{L-1}}{c^{\ell+2} \ell!} M_{iL-1}^{(\ell)}(u) - \frac{\ell}{c^{\ell+3} (\ell+1)!} \varepsilon_{iab} n_{aL-1} S_{bL-1}^{(\ell)}(u) \right], \quad (5.29b)$$

$$z_1^{ij} = -4 \sum_{\ell \geq 2} \left[\frac{n_{L-2}}{c^{\ell+2} \ell!} M_{ijL-2}^{(\ell)}(u) - \frac{2\ell}{c^{\ell+3} (\ell+1)!} n_{aL-2} \varepsilon_{ab(i} S_{j)L-2}^{(\ell)}(u) \right]. \quad (5.29c)$$

All the logarithms in the quadratic metric $h_2^{\alpha\beta}$ will be generated from the leading $1/r^2$ piece in the quadratic source, defined by $N_2^{\alpha\beta} = r^{-2} Q_2^{\alpha\beta}(\mathbf{n}, u) + \mathcal{O}(r^{-3})$. The coefficient is computed from the quantity (5.29) as $Q_2^{\alpha\beta} = \frac{4M}{c^4} {}^{(2)}z_1^{\alpha\beta} + \frac{k^\alpha k^\beta}{c^2} \sigma$, where the first term will generate the tails, and the second term is associated with the stress-energy of gravitational waves, with $k^\alpha = (1, \mathbf{n})$ the Minkowskian outgoing null vector, and $\sigma = \frac{1}{2} {}^{(1)}z_1^{\mu\nu(1)} z_{1\mu\nu} - \frac{1}{4} {}^{(1)}z_1^\mu {}^{(1)}z_{1\mu} {}^{(1)}z_1^\nu$. Now, as shown in the Appendix, the logarithms produced by the second term $\propto k^\alpha k^\beta$ are pure gauge, so only the first term dealing with tails is responsible for the near-zone logarithms. Hence the part of the NZ expansion of the quadratic metric $\bar{h}_2$ containing those logarithms is given by

$$\delta \bar{h}_2^{\alpha\beta} = \text{FP}_{B=0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\partial}{c \partial t} \right)^{2k} \Delta^{-k-1} \left[\left(\frac{r}{\lambda} \right)^B \frac{4M}{r^2 c^4} {}^{(2)}z_1^{\alpha\beta}(\mathbf{n}, u) \right]. \quad (5.30)$$

We substitute the explicit expression (5.29) into (5.30), expand the retardation $u = t - r/c$ in the source term when $r \rightarrow 0$, and integrate using Eqs. (5.19)–(5.20). Then we look for the poles $\propto 1/B$ and after applying the finite part get the logarithms. Some general formulas for

obtaining the logarithms directly from the unexpanded source are relegated to the Appendix. We readily recover that the dominant logarithms arise at 4PN order. We limit our computation to the leading order 4PN and next-to-leading order 5PN logarithms, and find

$$\delta \bar{h}_2^{00} = -\frac{8M}{15c^{10}} \left\{ x^{ab} \left[M_{ab}^{(6)} + \frac{1}{14} \frac{r^2}{c^2} M_{ab}^{(8)} \right] - \frac{1}{21} \frac{x^{abc}}{c^2} M_{abc}^{(8)} \right\} \ln \left(\frac{r}{\lambda} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^{14}} \right), \quad (5.31a)$$

$$\delta \bar{h}_2^{0i} = \frac{8M}{3c^9} \left\{ x^a \left[M_{ai}^{(5)} + \frac{1}{10} \frac{r^2}{c^2} M_{ai}^{(7)} \right] - \frac{1}{15} \frac{x^{ab}}{c^2} M_{abi}^{(7)} + \frac{2}{15} \varepsilon_{iab} \frac{x^{ac}}{c^2} S_{bc}^{(6)} \right\} \ln \left(\frac{r}{\lambda} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^{13}} \right), \quad (5.31b)$$

$$\delta \bar{h}_2^{ij} = -\frac{8M}{c^8} \left\{ M_{ij}^{(4)} + \frac{1}{6} \frac{r^2}{c^2} M_{ij}^{(6)} - \frac{1}{9} \frac{x^a}{c^2} M_{aij}^{(6)} + \frac{4}{9} \frac{x^a}{c^2} \varepsilon_{ab(i} S_{j)b}^{(5)} \right\} \ln \left(\frac{r}{\lambda} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^{12}} \right). \quad (5.31c)$$

The mass-type quadrupole moment M_{ij} , mass octupole moment M_{ijk} and current quadrupole S_{ij} in Eqs. (5.31) are functions of coordinate time t . The indicated PN remainders $\mathcal{O}(c^{-p})$ refer only to the logarithmic terms.

We now want to iterate the expressions (5.31) at higher non-linear order in order to get the complete family of logarithms generated by that “seed”. To do that it is very convenient to perform first a change of gauge. Starting from (5.31), which is defined in some harmonic gauge, we pose $\bar{k}_2^{\alpha\beta} = \bar{h}_2^{\alpha\beta} + 2\partial^{(\alpha} \xi_2^{\beta)} - \eta^{\alpha\beta} \partial_\mu \xi_2^\mu$ with gauge vector

$$\xi_2^0 = \frac{M}{c^9} \left\{ \frac{2}{3} x^{ab} M_{ab}^{(5)} + \frac{1}{21} \frac{r^2}{c^2} x^{ab} M_{ab}^{(7)} - \frac{2}{135} \frac{x^{abc}}{c^2} M_{abc}^{(7)} \right\} \ln \left(\frac{r}{\lambda} \right), \quad (5.32a)$$

$$\xi_2^i = \frac{M}{c^8} \left\{ 4x^a M_{ai}^{(4)} + \frac{2}{3} \frac{r^2}{c^2} x^a M_{ai}^{(6)} - \frac{2}{3} \frac{x^{iab}}{c^2} M_{ab}^{(6)} - \frac{2}{9} \frac{x^{ab}}{c^2} M_{abi}^{(6)} + \frac{16}{9} \varepsilon_{iab} \frac{x^{ac}}{c^2} S_{bc}^{(5)} \right\} \times \ln \left(\frac{r}{\lambda} \right). \quad (5.32b)$$

This gauge transformation will have the effect of moving many 4PN logarithmic terms into the 00 component of the (ordinary covariant) metric. As a result the implementation of the non-linear iteration in that new gauge will be especially simple. Since our aim is to compute the gauge invariant quantity (5.9) we can work in any convenient gauge. Our chosen gauge is very similar to the generalization of the Burke-Thorne gauge introduced in [59] to deal with higher-order (2.5PN and 3.5PN) radiation-reaction effects. We obtain

$$\delta \bar{k}_2^{00} + \delta \bar{k}_2^{ii} = \frac{M}{c^{10}} \left\{ -\frac{16}{5} x^{ab} M_{ab}^{(6)} - \frac{8}{35} \frac{r^2}{c^2} x^{ab} M_{ab}^{(8)} + \frac{16}{189} \frac{x^{abc}}{c^2} M_{abc}^{(8)} \right\} \ln \left(\frac{r}{\lambda} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^{14}} \right), \quad (5.33a)$$

$$\delta \bar{k}_2^{0i} = \frac{M}{c^{11}} \left\{ \frac{16}{21} \hat{x}^{iab} M_{ab}^{(7)} - \frac{64}{45} \varepsilon_{iab} x^{ac} S_{bc}^{(6)} \right\} \ln \left(\frac{r}{\lambda} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^{13}} \right), \quad (5.33b)$$

$$\delta \bar{k}_2^{ij} = \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^{12}} \right). \quad (5.33c)$$

In this gauge the iteration at cubic non-linear order is very simple. To control all the 5PN logarithmic terms at cubic order $n = 3$ we need only to solve the Poisson equation $\Delta[\delta\bar{k}_3^{00} + \delta\bar{k}_3^{ii}] = -2\partial_j\bar{h}_1^{00}\partial_j\delta\bar{k}_2^{00} + \mathcal{O}(c^{-14})$, where $\bar{h}_1^{00}$ denotes the NZ expansion of the linearized metric (5.11a), and we can use for $\delta\bar{k}_2^{00}$ the leading 4PN approximation given by the first term in (5.33a). Posing $\bar{h}_1^{00} = -4\bar{U}/c^2 + \mathcal{O}(c^{-4})$, the latter equation is integrated as⁶

$$\delta\bar{k}_3^{00} + \delta\bar{k}_3^{ii} = -\frac{64M}{5c^{12}}\bar{U}x^{ab}M_{ab}^{(6)}\ln\left(\frac{r}{\lambda}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^{14}}\right), \quad (5.34)$$

with the explicit expression

$$\bar{U} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-)^\ell}{\ell!} M_L \partial_L \left(\frac{1}{r}\right). \quad (5.35)$$

We readily check that the quartic and higher non-linear iterations ($n \geq 4$) are not needed for controlling the 4PN and 5PN logarithmic terms (cf. the discussion at the end of Sec. 5.4.2).

5.5.2 Internal near-zone post-Newtonian metric

The metric we computed so far is in the form of a multipolar expansion valid in the exterior of an isolated source. We now want to deduce from it the metric *inside* the matter source. First of all, since the expressions (5.33) are regular at the origin $r \rightarrow 0$, we find using a matching argument that they are necessarily also valid inside the matter source. On the other hand it is clear that the expression (5.34) will also be valid inside the source provided that we match the multipole expansion $\bar{U}$ given by (5.35) with the actual Newtonian potential of the source. From the known Newtonian limit of the multipole moments $M_L = \int d^3x \hat{x}^L \rho(\mathbf{x}, t) + \mathcal{O}(c^{-2})$, where ρ is the Newtonian source density in the source, we get $G\bar{U} = U + \mathcal{O}(c^{-2})$ where

$$U = G \int \frac{d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rho(\mathbf{x}', t). \quad (5.36)$$

From the latter arguments we therefore obtain the piece of the inner metric of any isolated source (coming back to the usual covariant metric $g_{\alpha\beta}$) that depends logarithmically on the distance r

⁶Actually the integration yields in addition to the near-zone 5PN logarithm (5.34) the extra far-zone 5PN logarithmic contribution

$$\left(\delta\bar{k}_3^{00} + \delta\bar{k}_3^{ii}\right)_{\text{FZ}} = -\frac{64M}{c^{12}}M_{ab}^{(6)}\ln\left(\frac{r}{\lambda}\right)\sum_{\ell \geq 0} \frac{(-)^\ell}{(2\ell+5)\ell!}\partial_L\left(\frac{1}{r}\right)M_{Lab}.$$

We argued on general grounds in Sec. 5.4.3 that FZ logarithms do not have to be considered for the present computation, so we drop this term out in the following.

to the source's center at 4PN and 5PN orders as

$$\delta' g_{00} = \frac{G^2 M}{c^{10}} \left[\frac{8}{5} \left(1 - \frac{2U}{c^2} \right) x^{ab} M_{ab}^{(6)} + \frac{4}{35c^2} r^2 x^{ab} M_{ab}^{(8)} - \frac{8}{189c^2} x^{abc} M_{abc}^{(8)} \right] \times \ln \left(\frac{r}{\lambda} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^{14}} \right), \quad (5.37a)$$

$$\delta' g_{0i} = \frac{G^2 M}{c^{11}} \left[\frac{16}{21} \hat{x}^{iab} M_{ab}^{(7)} - \frac{64}{45} \varepsilon_{iab} x^{ac} S_{bc}^{(6)} \right] \ln \left(\frac{r}{\lambda} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^{13}} \right), \quad (5.37b)$$

$$\delta' g_{ij} = \frac{G^2 M}{c^{10}} \left[\frac{8}{5} x^{ab} M_{ab}^{(6)} \delta_{ij} \right] \ln \left(\frac{r}{\lambda} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^{12}} \right), \quad (5.37c)$$

where U is the Newtonian potential (5.36) valid all over the source.

However we now discuss other pieces of the inner metric whose near-zone expansion does not explicitly depend on the logarithms of r but which involve new inner potentials integrating over a logarithmically modified source density. The first of these pieces comes from the fact that the 4PN modification of the metric given by the first term in (5.37a) implies a modification of the stress-energy tensor of the matter fluid at the 5PN order; in particular the fluid's source density, say $\sigma = T^{00}/c^2$, gets modified by the amount

$$\frac{\delta\sigma}{\rho} = -\frac{4}{5} \frac{G^2 M}{c^{10}} x^{ab} M_{ab}^{(6)} \ln \left(\frac{r}{\lambda} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^{12}} \right). \quad (5.38)$$

On the other hand the 4PN term of the metric will induce a 4PN change in the acceleration of the fluid motion given by

$$\delta a^i = \frac{8}{5} \frac{G^2 M}{c^8} x^a M_{ai}^{(6)} \ln \left(\frac{r}{\lambda} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^{10}} \right). \quad (5.39)$$

When computing the inner metric at the 1PN order we have to take into account the retardation due to the propagation of gravity, using say $\square^{-1} = \Delta^{-1} + c^{-2} \partial_t^2 \Delta^{-1} + \mathcal{O}(c^{-4})$. The time derivatives at 1PN order will yield an acceleration and the modification of the acceleration (5.39) will give a contribution at 5PN order. We find that the sum of the two effects gives the following extra contribution to the inner metric at 5PN order

$$\delta'' g_{00} = -\frac{8}{5} \frac{G^3 M}{c^{12}} x^a M_{ab}^{(6)} \int \frac{d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rho' x'^b \ln \left(\frac{r'}{\lambda} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^{14}} \right). \quad (5.40)$$

This 5PN contribution is present only in the 00 component of the metric.⁷ The complete logarithmic contributions we shall consider in this paper are thus given by

$$\delta g_{\alpha\beta} = \delta' g_{\alpha\beta} + \delta'' g_{\alpha\beta}. \quad (5.41)$$

These contributions exhaust the possibilities of having 4PN and 5PN near-zone logarithmic terms in the gauge invariant observable quantity (5.9).

⁷Interestingly, it was found in Ref. [223] (following [222]) that a similar looking contribution must also be taken into account when computing the higher-order (3.5PN) radiation-reaction force for compact binary systems from a near-zone radiation-reaction formalism defined in [59]. Actually the 2.5PN+3.5PN near-zone radiation-reaction formalism [59] (see in particular Eqs. (2.16) there) is quite similar to the present 4PN+5PN near-zone conservative logarithm formalism.

5.5.3 Application to compact binary systems

Let us now apply the previous results to the specific problem of a system of two point particles. The Newtonian mass density in that case is $\rho = \sum_a m_a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}_a)$ where δ is the Dirac delta function. The trajectory of the a -th particle ($a=1,2$) is denoted $\mathbf{y}_a(t)$; the ordinary coordinate velocity will be $\mathbf{v}_a = d\mathbf{y}_a/dt$. The two masses m_a have sum $m = m_1 + m_2$, reduced mass $\mu = m_1 m_2 / m$ and symmetric mass ratio $\nu = \mu / m$. The Newtonian potential of the system reduces to

$$U = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2}, \quad (5.42)$$

where $r_a = |\mathbf{x} - \mathbf{y}_a|$ is the distance from particle a . The regularized value of that potential at the location of particle 1 is simply

$$U_1 = \frac{Gm_2}{r_{12}}, \quad (5.43)$$

where $r_{12} = |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|$. Similarly we evaluate the logarithmic contributions at the location of particle 1. Concerning the first piece (5.37) we find (no longer mentioning the PN remainder)

$$\begin{aligned} \delta' g_{00}(\mathbf{y}_1) &= \frac{G^2 M}{c^{10}} \left[\frac{8}{5} \left(1 - \frac{2U_1}{c^2} \right) y_1^{ab} M_{ab}^{(6)} + \frac{4}{35c^2} y_1^2 y_1^{ab} M_{ab}^{(8)} - \frac{8}{189c^2} y_1^{abc} M_{abc}^{(8)} \right] \\ &\quad \times \ln \left(\frac{|\mathbf{y}_1|}{\lambda} \right), \end{aligned} \quad (5.44a)$$

$$\delta' g_{0i}(\mathbf{y}_1) = \frac{G^2 M}{c^{11}} \left[\frac{16}{21} \hat{y}_1^{iab} M_{ab}^{(7)} - \frac{64}{45} \varepsilon_{iab} y_1^{ac} S_{bc}^{(6)} \right] \ln \left(\frac{|\mathbf{y}_1|}{\lambda} \right), \quad (5.44b)$$

$$\delta' g_{ij}(\mathbf{y}_1) = \frac{G^2 M}{c^{10}} \left[\frac{8}{5} y_1^{ab} M_{ab}^{(6)} \delta_{ij} \right] \ln \left(\frac{|\mathbf{y}_1|}{\lambda} \right), \quad (5.44c)$$

which involves the logarithm $\ln(r/\lambda)$ evaluated on the particle 1, i.e. $\ln(|\mathbf{y}_1|/\lambda)$. As for the second piece (5.40) we compute the Poisson integral using $\rho = \sum_a m_a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}_a)$ and perform a regularization on the particle 1 to obtain

$$\delta'' g_{00}(\mathbf{y}_1) = -\frac{8}{5} \frac{G^2 M}{c^{12}} U_1 y_1^a y_2^b M_{ab}^{(6)} \ln \left(\frac{|\mathbf{y}_2|}{\lambda} \right), \quad (5.45)$$

which is proportional to the logarithm $\ln(|\mathbf{y}_2|/\lambda)$ associated with the other particle. These results are valid in a general frame. However we shall later specify the origin of the coordinate system to be the center of mass of the binary system. In that case we have $\ln(|\mathbf{y}_a|/\lambda) = \ln(r_{12}/\lambda) + \ln(\mu/m_a) + \mathcal{O}(c^{-2})$, where the PN remainder does not involve any logarithmic term, and the logarithm of the mass ratio is a constant, and is therefore clearly irrelevant to our search of logarithmic terms; so $\ln(r_{12}/\lambda)$ is in fact the only relevant logarithm and we shall now systematically replace all $\ln(|\mathbf{y}_a|/\lambda)$'s by $\ln(r_{12}/\lambda)$. Finally we end up with the following contributions of the 4PN and 5PN logarithms to the near-zone metric evaluated at the location of

particle 1 in our chosen gauge,

$$\delta g_{00}(\mathbf{y}_1) = \frac{G^2 M}{c^{10}} \left[\frac{8}{5} \left(1 - \frac{2U_1}{c^2} \right) y_1^{ab} M_{ab}^{(6)} - \frac{8}{5c^2} U_1 y_1^a y_2^b M_{ab}^{(6)} + \frac{4}{35c^2} y_1^2 y_1^{ab} M_{ab}^{(8)} - \frac{8}{189c^2} y_1^{abc} M_{abc}^{(8)} \right] \ln \left(\frac{r_{12}}{\lambda} \right), \quad (5.46a)$$

$$\delta g_{0i}(\mathbf{y}_1) = \frac{G^2 M}{c^{11}} \left[\frac{16}{21} \hat{y}_1^{iab} M_{ab}^{(7)} - \frac{64}{45} \varepsilon_{iab} y_1^{ac} S_{bc}^{(6)} \right] \ln \left(\frac{r_{12}}{\lambda} \right), \quad (5.46b)$$

$$\delta g_{ij}(\mathbf{y}_1) = \frac{G^2 M}{c^{10}} \left[\frac{8}{5} y_1^{ab} M_{ab}^{(6)} \delta_{ij} \right] \ln \left(\frac{r_{12}}{\lambda} \right). \quad (5.46c)$$

Note that this result is complete but not fully explicit because we have still to replace all the multipole moments M_L and S_L by their expressions valid for point mass binary systems. In particular the quadrupole mass moment M_{ij} should be given with 1PN relative precision as ($1 \leftrightarrow 2$ means adding the same terms for particle 2)

$$M_{ij} = m_1 \left\{ \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{3}{2} v_1^2 - \frac{Gm_2}{r_{12}} \right) \right] \hat{y}_1^{ij} + \frac{1}{14c^2} \frac{d^2}{dt^2} \left(y_1^2 \hat{y}_1^{ij} \right) - \frac{20}{21c^2} \frac{d}{dt} \left(v_1^k \hat{y}_1^{ijk} \right) \right\} + 1 \leftrightarrow 2, \quad (5.47)$$

and its time derivatives should consistently use the 1PN equations of motion. Besides M_{ij} we also need the constant mass monopole or total mass M at 1PN order, namely

$$M = m_1 \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v_1^2 - \frac{Gm_2}{2r_{12}} \right) \right] + 1 \leftrightarrow 2. \quad (5.48)$$

All the other moments are only required at the Newtonian accuracy, and read

$$M_L = m_1 \hat{y}_1^L + 1 \leftrightarrow 2, \quad (5.49a)$$

$$S_L = m_1 \varepsilon^{ab(i\ell} y_1^{L-1)a} v_1^b + 1 \leftrightarrow 2. \quad (5.49b)$$

However in applications it is often better to postpone the (messy) replacements of the multipole moments by their explicit values (5.47)–(5.49) and to use more compact expressions such as (5.46).

5.6 Logarithms in the equations of motion and energy

5.6.1 General orbits

With the 4PN and 5PN logarithmic contributions in the near-zone metric (5.46) we now derive the corresponding terms in the acceleration of point particle binary systems. The computation is straightforward from the geodesic equation. A subtle point is that we must take into account the coupling between the 1PN terms in the metric and the 4PN logarithm to produce new 5PN logarithms. On the other hand one must be careful about the replacement of accelerations in

1PN terms by the 4PN acceleration to also produce 5PN logarithms. The final result, valid for generic (non-circular) orbits in an arbitrary frame, is

$$\begin{aligned} \delta a_1^i = & \frac{G^2 M}{c^8} \left[\frac{8}{5} y_1^a M_{ia}^{(6)} \right. \\ & + \frac{1}{c^2} \left(\frac{8}{5} v_1^2 y_1^a M_{ia}^{(6)} - \frac{32}{5} U_1 y_1^a M_{ia}^{(6)} + \frac{28}{5} U_1 y_2^a M_{ia}^{(6)} + \frac{16}{5} U_1 r_{12}^{-2} y_{12}^i y_1^{ab} M_{ab}^{(6)} \right. \\ & + \frac{4}{5} U_1 r_{12}^{-2} y_{12}^i y_1^a y_2^b M_{ab}^{(6)} - \frac{68}{105} y_1^{iab} M_{ab}^{(8)} + \frac{44}{105} y_1^2 y_1^a M_{ia}^{(8)} - \frac{4}{63} y_1^{ab} M_{ia}^{(8)} \\ & - \frac{32}{5} v_1^i y_1^a y_1^b M_{ab}^{(6)} - \frac{12}{5} v_1^i y_1^{ab} M_{ab}^{(7)} - \frac{32}{15} y_1^{ia} v_1^b M_{ab}^{(7)} + \frac{32}{15} (y_1 v_1) y_1^a M_{ia}^{(7)} \\ & \left. \left. + \frac{128}{45} \varepsilon_{iab} v_1^a y_1^c S_{bc}^{(6)} + \frac{64}{45} \varepsilon_{iab} y_1^a v_1^c S_{bc}^{(6)} - \frac{64}{45} \varepsilon_{abc} y_1^a v_1^c S_{ib}^{(6)} + \frac{64}{45} \varepsilon_{iab} y_1^{ac} S_{bc}^{(7)} \right) \right] \\ & \times \ln \left(\frac{r_{12}}{\lambda} \right), \end{aligned} \quad (5.50)$$

where the multipole moments are given by (5.47)–(5.49).

An important check of this result is that the acceleration should be purely *conservative*, by which we mean that there should exist some corresponding contributions at the 4PN and 5PN orders in the conserved energy, angular momentum, linear momentum and center-of-mass position of the binary system. Let us see how this works in the case of the energy. The modification at 4PN and 5PN of the energy, say δE , should be such that $d\delta E/dt$ exactly balances the replacement of accelerations by (5.50) in the time derivative of the known expression of the energy up to 1PN order (say E_{1PN}). This requirement yields

$$\frac{d\delta E}{dt} = -m_1 \left[v_1^i + \frac{1}{c^2} \left(\frac{3}{2} v_1^2 v_1^i + \frac{Gm_2}{r_{12}} \left[-\frac{1}{2} (n_{12} v_2) n_{12}^i + 3v_1^i - \frac{7}{2} v_2^i \right] \right) \right] \delta a_1^{i+1} \leftrightarrow 2. \quad (5.51)$$

Plugging (5.50) into (5.51) and using the expressions of the multipole moments (5.47)–(5.49), we indeed find that the right-hand-side of (5.51) takes the form of a total time derivative, and we are thus able to infer the contribution to the energy,

$$\begin{aligned} \delta E = & \frac{G^2 M}{c^8} \left[-\frac{4}{5} M_{ab}^{(5)} M_{ab}^{(1)} + \frac{4}{5} M_{ab}^{(4)} M_{ab}^{(2)} - \frac{2}{5} M_{ab}^{(3)} M_{ab}^{(3)} \right. \\ & + \frac{1}{c^2} \left(\frac{4}{189} M_{abc}^{(7)} M_{abc}^{(1)} - \frac{4}{189} M_{abc}^{(6)} M_{abc}^{(2)} + \frac{4}{189} M_{abc}^{(5)} M_{abc}^{(3)} - \frac{2}{189} M_{abc}^{(4)} M_{abc}^{(4)} \right. \\ & + \frac{64}{45} S_{ab}^{(6)} S_{ab} - \frac{64}{45} S_{ab}^{(5)} S_{ab}^{(1)} + \frac{64}{45} S_{ab}^{(4)} S_{ab}^{(2)} - \frac{32}{45} S_{ab}^{(3)} S_{ab}^{(3)} + \frac{12}{5} M_{ab}^{(6)} Q_{ab} \\ & \left. \left. + \frac{2}{35} M_{ab}^{(6)} H_{ab}^{(2)} - \frac{2}{35} M_{ab}^{(7)} H_{ab}^{(1)} - \frac{16}{21} M_{ab}^{(6)} K_{ab}^{(1)} + \frac{16}{21} M_{ab}^{(7)} K_{ab} \right) \right] \ln \left(\frac{r_{12}}{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (5.52)$$

In addition to the standard multipole moments (5.47)–(5.49), we have also introduced the sup-

plementary moments (needed only at Newtonian accuracy)

$$H_L = m_1 y_1^2 \hat{y}_1^L + 1 \leftrightarrow 2, \quad (5.53a)$$

$$K_L = m_1 v_1^i \hat{y}_1^{iL} + 1 \leftrightarrow 2, \quad (5.53b)$$

$$Q_L = m_1 v_1^2 \hat{y}_1^L + 1 \leftrightarrow 2. \quad (5.53c)$$

By the same method we have also computed the modification of another integral of the motion, namely the center-of-mass position G^i . The result is

$$\begin{aligned} \delta G^i = & \left[\frac{2GM}{c^3} M_i^{(1)} + \frac{G^2 M}{c^8} \left(\frac{16}{5} M_a^{(1)} M_{ai}^{(3)} - \frac{8}{5} M_a M_{ai}^{(4)} \right) \right. \\ & + \frac{G^2 M}{c^{10}} \left(\frac{68}{105} M_{ab}^{(6)} M_{iab} - \frac{20}{63} M_{ab}^{(5)} M_{iab}^{(1)} + \frac{16}{63} M_{ab}^{(4)} M_{iab}^{(2)} - \frac{4}{21} M_{ab}^{(3)} M_{iab}^{(3)} \right. \\ & + \frac{4}{21} M_{ab}^{(2)} M_{iab}^{(4)} - \frac{8}{63} M_{ab}^{(1)} M_{iab}^{(5)} + \frac{4}{63} M_{ab} M_{iab}^{(6)} - \frac{64}{45} \varepsilon_{iab} M_{ac} S_{bc}^{(5)} \\ & + \frac{32}{45} \varepsilon_{iab} M_{ac}^{(1)} S_{bc}^{(4)} + \frac{32}{45} \varepsilon_{iab} M_{ac}^{(4)} S_{bc}^{(1)} - \frac{64}{45} \varepsilon_{iab} M_{ac}^{(5)} S_{bc} \\ & \left. \left. - \frac{32}{15} S_a S_{ia}^{(4)} - \frac{4}{25} H_a M_{ia}^{(6)} \right) \right] \ln \left(\frac{r_{12}}{\lambda} \right), \quad (5.54) \end{aligned}$$

and will be useful when restricting our general result for the redshift observable — valid for a generic orbit in an arbitrary frame — to circular orbits described in the center-of-mass frame.

5.6.2 Circular orbits

Let us now focus our attention on the case of circular orbits. We look for the 4PN and 5PN logarithms δa_{12}^i in the relative acceleration $a_{12}^i = a_1^i - a_2^i$ of the particles for circular orbits. The first contribution to δa_{12}^i will evidently come from the difference $\delta a_1^i - \delta a_2^i$. We insert the center-of-mass relations $y_a^i = Y_a^i[\mathbf{y}_{12}, \mathbf{v}_{12}]$, expressing the individual positions in terms of the relative position $y_{12}^i = y_1^i - y_2^i$ and relative velocity $v_{12}^i = v_1^i - v_2^i = dy_{12}^i/dt$. At 1PN order and for circular orbits these expressions simply reduce to the Newtonian relations $y_1^i = X_2 y_{12}^i$ and $y_2^i = -X_1 y_{12}^i$, where $X_a = m_a/m$. All the multipole moments and their time derivatives are replaced by their expressions for circular orbits given in terms of y_{12}^i and v_{12}^i (and masses). However there is also another contribution which comes from the known relative acceleration at 1PN order (say a_{1PN}^i) when reduced to circular orbits. As usual we perform an iterative computation: knowing first δa_{12}^i at 4PN order we use the result to find the next order 5PN correction. In this computation we use the fact that the center-of-mass relations $y_a^i = Y_a^i[\mathbf{y}_{12}, \mathbf{v}_{12}]$ are not modified by logarithmic terms before the 5PN order. This is checked using the modification of the integral of the center-of-mass δG^i given in (5.54) (see also the result (5.62) for circular orbits below, which is clearly a 5PN effect). Finally the modification of the acceleration is found to be of the form

$$\delta a_{12}^i = -\delta \Omega^2 y_{12}^i, \quad (5.55)$$

where the total change in the orbital frequency (squared) for circular orbits due to 4PN and 5PN logarithms reads

$$\delta\Omega^2 = \frac{Gm}{r_{12}^3} \left[\frac{128}{5} + \left(-\frac{8572}{35} - 112\nu \right) \gamma \right] \nu \gamma^4 \ln \gamma. \quad (5.56)$$

The orbital separation is $r_{12} = |\mathbf{y}_{12}|$, and we have introduced the convenient post-Newtonian parameter (where $m = m_1 + m_2$)

$$\gamma = \frac{Gm}{r_{12}c^2}. \quad (5.57)$$

From (5.56) we have the relation between the orbital frequency and the parameter γ . Inverting this relation we obtain γ as a function of the orbital frequency or, rather, of the parameter x defined by

$$x = \left(\frac{Gm\Omega}{c^3} \right)^{2/3}. \quad (5.58)$$

We find that the 4PN and 5PN logarithms in γ as a function of x are

$$\delta\gamma = \left[-\frac{128}{15} + \left(\frac{508}{105} + \frac{944}{15}\nu \right) x \right] \nu x^5 \ln x. \quad (5.59)$$

We have taken into account in (5.56) and (5.59) the important fact that the length scale $\lambda = cP$ is related to the period $P = 2\pi/\Omega$, and hence contributes to the logarithm. As already mentioned, using Kepler's third law we have $\frac{r_{12}}{\lambda} = \frac{\sqrt{\gamma}}{2\pi}$, so that $\ln(\frac{r_{12}}{\lambda}) = \frac{1}{2} \ln \gamma$ plus an irrelevant constant. Post-Newtonian corrections to Kepler's law do not change the argument, which applies with x as well as with γ . Recall that $\lambda = 2\pi c/\Omega$ was introduced in the problem when we assumed the existence of the helical Killing vector $K^\alpha \partial_\alpha = \partial_t + \Omega \partial_\phi$ to describe exactly circular orbits. Then this scale entered explicitly into the propagator we used to integrate the field [see (5.17) or (5.30)], and it is thus no surprise that it contributes to the final result. Of course we could have chosen any other scale proportional to λ without changing the result which concerns only the logarithmic dependence.

To be clearer about formulas such as (5.56) and (5.59) we would need to give the more complete formulas including also the known contributions up to 3PN order. However we must be careful since these formulas depend on the gauge. Thus $\delta\Omega^2$ and $\delta\gamma$ are to be added to the 3PN expressions given by Eqs. (188) and (191) in [61] when working in Hadamard regularization gauge, or by Eqs. (B6) and (B7) in Paper I when working in dimensional regularization gauge. Also the 4PN and 5PN terms computed in (5.56) and (5.59) themselves depend on the choice of gauge at the 4PN and 5PN orders (see Sec. 5.5).

It is much better to turn to gauge invariant quantities. The most obvious one is the conserved energy E for circular orbits as a function of the orbital frequency Ω . As for the previous computation of the acceleration we have two contributions, one coming directly from the general-orbit modification of the energy given by (5.52), and one coming from the circular-orbit reduction of the 1PN energy $E_{1\text{PN}}$. We first express the results entirely in terms of the parameter γ using (5.56) and then replace all the γ 's by functions of the x 's using (5.59). The result for the 4PN and 5PN logarithms is (where $\mu = m_1 m_2 / m$)

$$\delta E = -\frac{1}{2} \mu c^2 x \left[\frac{448}{15} + \left(-\frac{4988}{35} - \frac{1904}{15}\nu \right) x \right] \nu x^4 \ln x. \quad (5.60)$$

Beware that δE here has not the same meaning as in (5.52) because of the additional terms coming from the circular-orbit reduction of the 1PN energy $E_{1\text{PN}}$.

Since the energy as a function of x is a gauge invariant relation, let us also provide the complete result including all the known terms up to 3PN order, and also the 4PN and 5PN terms in the test-mass limit for one of the particles known from the exact result $\lim_{v \rightarrow 0} E/(\mu c^2) = (1 - 2x)(1 - 3x)^{-1/2} - 1$. We have

$$\begin{aligned}
 E = -\frac{1}{2}\mu c^2 x & \left\{ 1 + \left(-\frac{3}{4} - \frac{v}{12}\right)x + \left(-\frac{27}{8} + \frac{19}{8}v - \frac{v^2}{24}\right)x^2 \right. \\
 & + \left(-\frac{675}{64} + \left[\frac{34445}{576} - \frac{205}{96}\pi^2\right]v - \frac{155}{96}v^2 - \frac{35}{5184}v^3\right)x^3 \\
 & + \left(-\frac{3969}{128} + v e_4(v) + \frac{448}{15}v \ln x\right)x^4 \\
 & \left. + \left(-\frac{45927}{512} + v e_5(v) + \left[-\frac{4988}{35} - \frac{1904}{15}v\right]v \ln x\right)x^5 \right\}. \quad (5.61)
 \end{aligned}$$

Here $e_4(v)$ and $e_5(v)$ denote some unknown 4PN and 5PN coefficients which are some polynomials in the symmetric mass ratio v — this can be proved from the fact that the energy function for general orbits (i.e. before restriction to circular orbits) must be a polynomial in the two separate masses m_1 and m_2 . This 5PN accurate formula could be used to compute the location of the innermost circular orbit (ICO) in the comparable mass regime, which also coincides with the innermost stable circular orbit (ISCO) in the extreme mass ratio regime. The shift of the Schwarzschild ISCO due to the conservative part of the self-force has been recently computed [36]. A high-order PN comparison with this result would be interesting, but requires at least the evaluation of the coefficients $e_4(v)$ and $e_5(v)$ in the extreme mass ratio regime, i.e. the knowledge of $e_4(0)$ and $e_5(0)$.

5.7 The gauge invariant redshift observable

We are now ready to implement our computation of the gauge invariant redshift observable (5.9). We replace the 4PN and 5PN logarithmic terms in the metric coefficients evaluated on the particle (5.46) into (5.9). We are careful at including also the metric up to 1PN order because of the coupling between 1PN and 4PN orders which produce 5PN terms. The result is valid for any orbit in a general frame. Next we go to the frame of the center-of-mass defined by $G^i = 0$, where G^i is the conserved integral of the center of mass. We have found the 4PN and 5PN logarithms in G^i in Eq. (5.54), and from this we compute the displacement of the center of mass for circular orbits. As already used in Sec. 5.6 we find that the first logarithmic terms in the center-of-mass integral for circular orbits arise only at 5PN order. We obtain

$$\delta G^i = -\frac{324}{7} m v^2 \Delta \gamma^5 \ln \gamma y_{12}^i, \quad (5.62)$$

where $\Delta = (m_2 - m_1)/m = \sqrt{1 - 4v}$ is the relative mass difference. The correction to the individual center-of-mass positions will thus be given by $\delta y_a^i = -\delta G^i/m$ for $a=1,2$ (see

e.g. the Appendix B in Paper I), and similarly $\delta v_a^i = -\delta \dot{G}^i/m$ for the individual center-of-mass velocities. We already notice that because of the factor v^2 in (5.62) this correction will not influence the SF limit. Next we reduce the latter expression to circular orbits, replacing all orbital frequencies by their expressions in terms of γ , and then replacing all γ 's by their expressions in terms of x . The formulas (5.56) and (5.59) for the 4PN and 5PN logarithms play of course the crucial role. Finally we end up with the full correction due to the 4PN and 5PN logarithmic terms for circular orbits in our redshift observable u^T as (removing now the index 1 indicating the smaller mass)

$$\delta u^T = \left[-\frac{32}{5} - \frac{32}{5} \Delta + \frac{64}{15} \nu + \left(\frac{478}{105} + \frac{478}{105} \Delta + \frac{1684}{21} \nu + \frac{4388}{105} \Delta \nu - \frac{3664}{105} \nu^2 \right) x \right] \times \nu x^5 \ln x. \quad (5.63)$$

This correction is valid for any mass ratio $q = m_1/m_2$ and is to be added to the 3PN expression for u^T obtained in Eq. (4.10) of Paper I. Being proportional to the symmetric mass ratio ν , the correction (5.63) vanishes in the test-mass limit, which is to be expected since the Schwarzschild result for $u^T(\Omega)$ does not involve any logarithm.

We now investigate the small mass ratio regime $q \ll 1$. As in Paper I we introduce a convenient PN parameter appropriate to the small mass limit of particle 1:

$$y \equiv \left(\frac{G m_2 \Omega}{c^3} \right)^{2/3}. \quad (5.64)$$

We immediately obtain, up to say the quadratic order in q , and keeping only the relevant logarithmic terms,

$$\delta u^T = q \left[-\frac{64}{5} + \left(\frac{956}{105} + \frac{4588}{35} q \right) y \right] y^5 \ln y + \mathcal{O}(q^3). \quad (5.65)$$

Our complete redshift observable, expanded through post-self-force order, is of the type

$$u^T = u_{\text{Schw}}^T + q u_{\text{SF}}^T + q^2 u_{\text{PSF}}^T + \mathcal{O}(q^3), \quad (5.66)$$

where the Schwarzschild result is known in closed form as $u_{\text{Schw}}^T = (1 - 3y)^{-1/2}$. Adding back the 3PN results of Paper I (see Eq. (5.5) there), we thus find that the self-force contribution is given by⁸

$$u_{\text{SF}}^T = -y - 2y^2 - 5y^3 + \left(-\frac{121}{3} + \frac{41}{32} \pi^2 \right) y^4 + \left(\alpha_4 - \frac{64}{5} \ln y \right) y^5 + \left(\alpha_5 + \frac{956}{105} \ln y \right) y^6 + o(y^6). \quad (5.67)$$

The expansion (5.67) was determined up to 2PN order $\propto y^3$ in [151] based on the Hadamard-regularized 2PN metric given in [79]. The result at 3PN order $\propto y^4$ was obtained in Paper I using the powerful dimensional regularization (as opposed to Hadamard's regularization which

⁸For clarity we add the Landau o symbol for remainders which takes the standard meaning.

found its limits at that order). By contrast our analytic determination of the logarithmic terms at 4PN and 5PN orders depends only marginally on the regularization scheme.

The coefficients α_4 and α_5 denote some unknown purely numerical numbers which would be very difficult to compute with PN methods, and should depend crucially on having a consistent regularization scheme. By comparing the expansion (5.67) with our accurate numerical SF data for u_{SF}^T , we shall be able to measure these coefficients with at least 8 significant digits for the 4PN coefficient α_4 , and 5 significant digits for the 5PN coefficient α_5 . These results, as well as the estimation of even higher-order PN coefficients, will be detailed in Sec. 5.8.

Similarly, adding up the results of Paper I for the post-self-force term, we get

$$u_{\text{PSF}}^T = y + 3y^2 + \frac{97}{8}y^3 + \left(\frac{725}{12} - \frac{41}{64}\pi^2\right)y^4 + \epsilon_4 y^5 + \left(\epsilon_5 + \frac{4588}{35} \ln y\right)y^6 + o(y^6). \quad (5.68)$$

Note that there is no logarithm at 4PN order in the post-self-force term, as is also seen from Eq. (5.65); the next 4PN logarithm would arise at cubic order q^3 , i.e. at the post-post-SF level. The coefficients ϵ_4 and ϵ_5 in (5.68) are unknown, and unfortunately they are expected to be extremely difficult to obtain, not only analytically in the standard PN theory, but also numerically as they require a second-order perturbation SF scheme.

5.8 Numerical evaluation of post-Newtonian coefficients

In the self-force limit, the SF effect u_{SF}^T on the redshift observable u^T is related to the regularized metric perturbation $h_{\alpha\beta}^{\text{R}}$ at the location of the particle through

$$u_{\text{SF}}^T = \frac{1}{2}(1 - 3y)^{-1/2} \bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^{\text{R}}, \quad (5.69)$$

where $\bar{u}^\alpha$ is the background four-velocity of the particle. Beware that here $h_{\alpha\beta}^{\text{R}}$ stands in fact for the perturbation *per unit mass ratio*, denoted $h_{\alpha\beta}^{\text{R}}/q$ in Paper I (cf. Eq. (2.11) there). In SF analysis, the combination $\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^{\text{R}}$ arises more naturally than u_{SF}^T ; this is the quantity we shall be interested in fitting in this Section. However our final results in Table 5.6 will include the corresponding values of the coefficients for the redshift variable u_{SF}^T . We refer to Sec. II of Paper I for a discussion of the computation of the regularized metric perturbation $h_{\alpha\beta}^{\text{R}}$, and the invariant properties of the combination $\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^{\text{R}}$ with respect to the choice of perturbative gauge. In this Section we often use $r = 1/y$, a gauge invariant measure of the orbital radius scaled by the black hole mass m_2 [see Eq. (5.64)].

Our earlier numerical work, partially reported in [151] and in Paper I, provided values of the function $\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^{\text{R}}(r)$ which cover a range in r from 4 to 750. Following a procedure described in [152], we have used Monte Carlo analysis to estimate the accuracy of our values for $\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^{\text{R}}$. As was reported in Paper I, this gives us confidence in these base numbers to better than one part in 10^{13} . We denote a standard error σ representing the numerical error in $\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^{\text{R}}$ by

$$\sigma \simeq |\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^{\text{R}}| \times \text{E} \times 10^{-13}, \quad (5.70)$$

where $E \simeq 1$ is being used as a placeholder to identify our estimate of the errors in our numerical results.

5.8.1 Overview

A common task in physics is creating a functional model for a set of data. In our problem we have a set of N data points f_i and associated uncertainties σ_i , with each pair evaluated at an abscissa r_i . We wish to represent this data as some model function $f(r)$ which consists of a linear sum of M basis functions $F_j(r)$ such that

$$f(r) = \sum_{j=1}^M c_j F_j(r). \quad (5.71)$$

The numerical goal is to determine the M coefficients c_j which yield the best fit in a least squares sense over the range of data. That is, the c_j are to be chosen such that

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^N \left[\frac{f_i - \sum_{j=1}^M c_j F_j(r_i)}{\sigma_i} \right]^2 \quad (5.72)$$

is a minimum under small changes in the c_j . For our application we choose the basis functions $F_j(r)$ to be a set of terms which are typical in PN expansions, such as r^{-1} , r^{-2} , ..., and also terms such as $r^{-5} \ln(r)$.

Our analysis depends heavily upon Ref. [340]; we use both the methods and the computer code for solving systems of linear algebraic equations as described therein. While we do employ standard, least squares methods for solving a system of linear equations to determine the c_j , we also recognize that a solution to this extremum problem is not guaranteed to provide an accurate representation of the data (r_i, f_i, σ_i) . The quality of the numerical fit is measured by χ^2 as defined in Eq. (5.72). If the model of the data is a good one, then the χ^2 statistic itself has an expectation value of the number of degrees of freedom in the problem, $N - M$, with an uncertainty (standard deviation) of $\sqrt{2(N - M)}$. In particular, a large residual χ^2 would correspond to under-fitting the data whereas a χ^2 that is too small corresponds to over-fitting the data, which amounts to fitting randomness in the residuals.

The numerical evaluation of the fitting coefficient c_j includes a determination of its uncertainty Σ_j which depends upon i) the actual values of r_i in use, ii) all of the σ_i , and iii) the set of basis functions $F_j(r)$. In fact, the estimate of the Σ_j depends solely upon the design matrix

$$A_{ij} \equiv \frac{F_j(r_i)}{\sigma_i}, \quad (5.73)$$

and not at all on the data (or residuals) being fitted. However, the estimates of the Σ_j are only valid if the data are well represented by the set of basis functions. For emphasis: the Σ_j depend upon $F_j(r_i)$ and upon σ_i but *are completely independent* of the f_i . Only if the fit is considered to be good, could the Σ_j give any kind of realistic estimate for the uncertainty in the coefficients c_j . If the fit is not of high quality (unacceptable χ^2), then the Σ_j bear no useful information [340]. We will come back to this point in the discussion below.

A further remark concerning the meaning of the Σ_j is appropriate. Fitting the data as described to determine the coefficients is a standard, well defined statistical procedure. If we were to change the integration routine used to generate the $\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^R(r_i)$, which are the set of input data values f_i , with the restriction that we maintained the same numerical accuracy then the f_i would each change in a random way governed by σ_i . If the coefficients c_j were then determined for this second data set, the statistical analysis ensures that the Σ_j associated with this second data set would be identical to those of the first set and the newly determined estimates of the c_j would differ from the initial ones in a statistical fashion governed by the Σ_j . Recall that the Σ_j depend upon the choice of the r_i , upon the σ_i for the individual data points and upon the set of basis functions $F_j(r)$. The Σ_j are completely independent of the data values f_i .

Now we consider two other possible changes. If we add an extra data point, or if we add another basis function not orthogonal to the others (this would be typical over a finite set of data points, unless we carefully engineered otherwise) the design matrix changes accordingly, all estimated coefficients c_j change accordingly, and the estimated Σ_j change in ways which are not easily related to the previous results. In particular, if we add an additional basis function F_{M+1} to the previous set, so there is now one more coefficient c_{M+1} to be fit, and we compare the first M values of the new c_j to their earlier values, their differences need not be closely related to either the first or second set of Σ_j . Thus, a change in the design matrix of the problem leads to an inability to make any intuitive prediction about what to expect for the new c_j , and there is no reason to expect that the differences of the c_j respect the values of the Σ_j for these two different statistical problems.

We also should remark that the task of determining coefficients in the $1/r$ characterization of our numerical data is almost incompatible with the task of determining an asymptotic expansion of $\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^R$ from an analytic analysis. Analytically, the strict $r \rightarrow +\infty$ limit is always technically possible, whereas numerically, not only is that limit *never* attainable, but we must always contend with function evaluations at just a finite number of discrete points, obtained within a finite range of the independent variable, and computed with finite numerical precision. Nevertheless, this is what we intend to do.

In practice, the numerical problem is even more constrained. At large r , even though the data may still be computable there, the higher order terms for which we are interested in evaluating PN coefficients rapidly descend below the error level of our numerical data. This is clearly evident in Fig. 5.1 below. For small r , the introduction of so many PN coefficients is necessary that it becomes extremely difficult to characterize our numerical data accurately. Thus, in practice, we find ourselves actually working with less than the full range of our available data. At large r we could effectively drop points because they contribute so little to any fit we consider. At the other extreme, the advantage of adding more points in going to smaller r is rapidly outweighed by the increased uncertainty in every fitted coefficient. This results from the need to add more basis functions in an attempt to fit the data at small r . Further details will become evident in Sec. 5.8.4 below.

5.8.2 Framework for evaluating PN coefficients numerically

In a generic fashion we describe an expansion of $\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^R$ in terms of PN coefficients a_j and b_j with

$$\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^R = \sum_{j \geq 0} \frac{a_j}{r^{j+1}} - \ln r \sum_{j \geq 4} \frac{b_j}{r^{j+1}}, \quad (5.74)$$

where a_0 is the Newtonian term, a_1 is the 1PN term and so on. Similarly, for use in applications involving u^T we also introduce the coefficients α_j and β_j in the expansion of the SF contribution

$$u_{\text{SF}}^T = \sum_{j \geq 0} \frac{\alpha_j}{r^{j+1}} - \ln r \sum_{j \geq 4} \frac{\beta_j}{r^{j+1}}. \quad (5.75)$$

These series allow for the possibility of logarithmic terms, which are known not to start before the 4PN order. We also concluded in Sec. 5.4 that $(\ln r)^2$ terms cannot arise before the 5.5PN order. Since we are computing a conservative effect, possible time-odd logarithmic squared contributions at the 5.5PN or 6.5PN orders do not contribute. But there is still the possibility for a conservative 7PN $(\ln r)^2$ effect, probably originating from a tail modification of the dissipative 5.5PN $(\ln r)^2$ term. However, we shall not permit for such a small effect in our fits. As discussed below in Sec. 5.8.4, we already have problems distinguishing the 7PN linear $\ln r$ term from the 7PN non-logarithmic contribution.

The analytically determined values of the coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 and $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ computed in Ref. [151] and Paper I are reported in Table 5.2, together with the new results $b_4 = -\frac{128}{5}, b_5 = \frac{5944}{105}$ and $\beta_4 = -\frac{64}{5}, \beta_5 = \frac{956}{105}$ of the present work.

coeff.	value	coeff.	value
a_0	-2	α_0	-1
a_1	-1	α_1	-2
a_2	$-\frac{7}{4}$	α_2	-5
a_3	$-\frac{1387}{24} + \frac{41}{16}\pi^2$	α_3	$-\frac{121}{3} + \frac{41}{32}\pi^2$
b_4	$-\frac{128}{5}$	β_4	$-\frac{64}{5}$
b_5	$+\frac{5944}{105}$	β_5	$+\frac{956}{105}$

Table 5.2: The analytically determined PN coefficients for $\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^R$ (left) and u_{SF}^T (right).

5.8.3 Verifying analytically determined PN coefficients

In this Section we investigate the use of our data for $\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^R$ and the fitting procedures we have described above (and expanded upon in the beginning of Sec. 5.8.4). We will begin by fitting for enough of the other PN coefficients to be able to verify numerically the various coefficients a_3, b_4 and b_5 now known from PN analysis. We choose a starting point for the inner boundary of the range, and each range continues out to $r = 700$. The results of a series of fits are displayed in Tables 5.3 and 5.4. First we remark that bringing the outer boundary inward as far as to 300

has very little effect on the outcome of any of these fits, except that the χ^2 statistic decreases as expected with the number of degrees of freedom.

As a first step in this Section, we will complete the task we began in Paper I, namely, the numerical determination of the coefficient a_3 (and α_3), this time taking fully into account the known logarithmic terms at 4PN and 5PN order. For illustrative purposes only, these results are given in Table 5.3. We were able to obtain a fit with six undetermined parameters, and could include data from $r = 700$ down to $r = 35$. Note that, with the inclusion of the b_4 and b_5 coefficients, the precision of our tabulated value for a_3 has increased by more than four orders of magnitude from Paper I, although our accuracy is still no better than about 2Σ . Such a discrepancy is not uncommon. The uncertainty, Σ , reflects only how well the data in the given, finite range can be represented by a combination of the basis functions. It is not a measure of the quality of a coefficient when considered as a PN expansion parameter, which necessarily involves an $r \rightarrow +\infty$ limiting process.

coeff.	value
a_3	$-32.5008069(7)$
a_4	$-121.30254(30)$
a_5	$-42.99(5)$
a_6	$-228(6)$
b_6	$+677(2)$
a_7	$-8226(27)$

Table 5.3: The results of a numerical fit for a set of coefficients which includes the analytically known a_3 . Thus this is *not* the best-fit of our data possible, but it allows for a comparison with Table 5.6. The uncertainty in the last digit or two is in parentheses. The range runs from $r = 35$ to $r = 700$, with 266 data points and a respectable χ^2 of 264.

Our next step is to include the known value for a_3 and to use our numerical data to estimate values for the b_4 and b_5 coefficients. Our best quality numerical result was obtained with five fitted parameters, over a range from $r = 700$ down to only $r = 65$, and is given in the first row of Table 5.4. Notice that while our b_4 is determined relatively precisely, it has only about 6Σ accuracy. The higher order coefficient b_5 is more difficult to obtain and, at this point, it is very poorly determined. It corresponds to a term which falls off rapidly with increasing r and is significant over a relatively small inner part of the fitted range.

We can of course use the known value of b_4 in order to improve the accuracy for b_5 . If we do this without adding another parameter to fit, we immediately get a fit of very poor quality, since we have moved b_4 far from its best-fit value; as shown in the second row of Table 5.4, we must move the inner boundary out to $r = 85$ to re-establish a good fit.

$r_{\min}$	deg.	χ^2	a_4	b_4	a_5	b_5	a_6	b_6	a_7
65	231	222	-121.40(1)	-25.6116(20)	-102(1)	45.5(3)	-2081(9)		
85	212	207	-121.3180(7)		-91.45(70)	48.48(15)	-2170(8)		
65	231	222	-121.313(1)		-79(2)	50.6(4)	-1868(44)	131(21)	
40	255	247	-121.3052(6)		-47(1)	55.7(2)	-359(41)	625(15)	-7722(162)

Table 5.4: The numerically determined PN coefficients for $\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^R$. Each row represents a different fit. The first three columns give the starting point $r_{\min}$ at the inner boundary of the fitting range, the degrees of freedom of the fit, $N - M$, and the χ^2 statistic for the chosen fit. If a value for a coefficient is not shown, then either that parameter was not included in that particular fit (far right) or its analytically known value was used (e.g., b_4). The formal uncertainty of a coefficient in the last digit or two is in parentheses. The outer boundary is 700 in each case.

The inclusion of basis functions for the higher order coefficients, b_6 and a_7 , as shown in the third and fourth rows, respectively, allows the inner boundary for the fit to move to smaller r where the higher PN terms are more important. The third row of the table shows that adding another parameter allows us to move the inner boundary to $r = 65$, while the final row shows that we can now add one further fitted parameter, and obtain a good quality fit by pushing the inner boundary to $r = 40$. Only in this row is the b_5 parameter close to its known value, but it is still off by around 4.5Σ (see Table 5.5 below). Moreover, we have reached a limit for treating our data in this way, adding further parameters and inner points does not result in any higher quality fit.

By now we have presented enough to show that we have data which allows high precision, with an accuracy that we now have some experience in relating to the computed error estimates. This experience will be valuable when we come to discuss further results in the next Section. For convenience, we summarize the relevant information further, in Table 5.5, referring just to our estimates of known PN parameters, and relating our error estimates to the observed accuracy.

source	coeff.	estimate	accuracy	exact result
Paper I	α_3	$-27.677(5)$	$\rightarrow (11)$	$-27.6879\dots$
Table 5.3	a_3	$-32.5008069(7)$	$\rightarrow (15)$	$-32.5008054\dots$
Table 5.4	b_4	$-25.6116(20)$	$\rightarrow (116)$	-25.6
Table 5.4	b_5	$+55.7(2)$	$\rightarrow (9)$	$+56.6095\dots$

Table 5.5: Comparing the analytically known PN coefficients (column 5) with their numerically determined counterparts (column 3), and comparing the numerically determined error estimates (column 3) with the apparent accuracy (column 4). The source of the data is given in column 1.

5.8.4 Determining higher order PN terms numerically

In this Section we turn our attention to using our numerical SF data and fitting procedures to obtain as many as possible unknown PN coefficients, by making maximum use of the coefficients which are already known. We find that in our *best fit* analysis we can use a set of five basis functions corresponding to the unknown coefficients a_4, a_5, a_6, b_6 and a_7 .

In Table 5.6, we describe the numerical fit of our data over a range in r from 40 to 700. The χ^2 statistic is 259 and slightly larger than the degrees of freedom, 256, which denotes a good fit. Further, we expect that a good fit would be insensitive to changes in the boundaries of the range of data being fit, and we find, indeed, that if the outer boundary of the range decreases to 300 then essentially none of the data in the Table changes, except for χ^2 and the degrees of freedom which decrease in a consistent fashion. Figure 5.1 shows that in the outer part of the range $\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^R$ is heavily dominated by only a few lower order terms in the PN expansion — those above the lower black double-dashed line in the figure.

The inner edge of the range is more troublesome. The importance of a given higher order PN term decreases rapidly with increasing r . Moving the inner boundary of the range outward might move a currently well determined term into insignificance. This could actually lead to a smaller

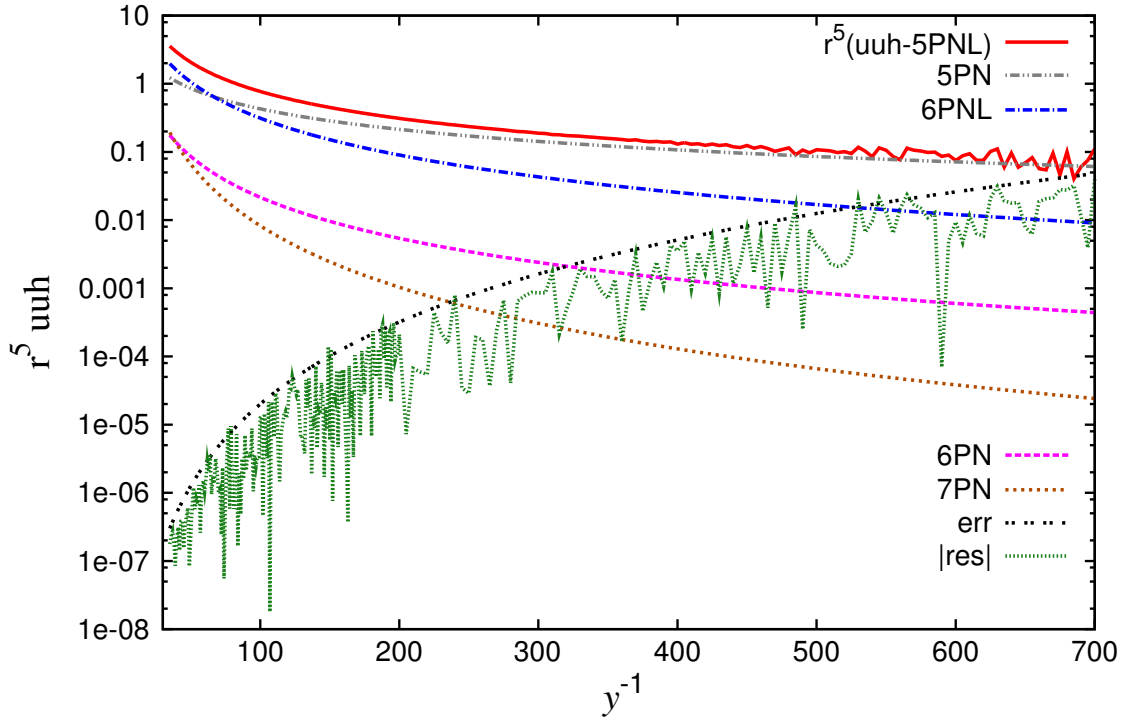


Figure 5.1: The absolute value of the contributions of the numerically determined post-Newtonian terms to $r^5 \tilde{u}^\alpha \tilde{u}^\beta h_{\alpha\beta}^R$. Here PNL refers to just the logarithm term at the specified order. The contribution of a_4 is not shown but would be a horizontal line (since the 4PN terms behaves like r^{-5}) at approximately 121.3. The remainder after a_4 and all the known coefficients are removed from $r^5 \tilde{u}^\alpha \tilde{u}^\beta h_{\alpha\beta}^R$ is the top (red) continuous line. The lower (black) dotted line labelled “err” shows the uncertainty in $r^5 \tilde{u}^\alpha \tilde{u}^\beta h_{\alpha\beta}^R$, namely $2E r^4 \times 10^{-13}$. The jagged (green) line labelled “|res|” is the absolute remainder after all of the fitted terms have been removed. The figure reveals that, with regard to the uncertainty of the calculated $\tilde{u}^\alpha \tilde{u}^\beta h_{\alpha\beta}^R$, the choice $E \simeq 1$ was slightly too large.

χ^2 , but it would also lead to an increase in the Σ_j of every coefficient. Moving the inner edge of the range inward might require that an additional higher order term be added to the fit. This extra term loses significance quickly with increasing r so the new coefficient will be poorly determined and also result in an overall looser fit with an increase of Σ_j for all of the coefficients. If the inner boundary and the set of basis functions are chosen properly, then a robust fit is revealed when the parameters being fit are insensitive to modest changes in the boundaries of the range. The fit described in Table 5.6 appears to be robust. The parameters in this Table are consistent with all fits with the inner boundary of the range varying from 35 to 45 and the outer boundary varying from 300 to 700.

If an additional term, with coefficient b_7 , is added to the basis functions then, for identical ranges, each of the Σ_j increases by a factor of about ten, and the changes in a_4 and a_5 are within this uncertainty. The coefficient a_6 changes sign and b_6 and a_7 change by an amount significantly larger than the corresponding Σ_j . And the new coefficient b_7 is quite large. In the context of fitting data to a set of basis functions these are recognized symptoms of over-fitting and imply that the extra coefficient degrades the fit.

How should we (and others) interpret the data in Table 5.6? To guide our discussion of this

coeff.	value	coeff.	value
a_4	$-121.30310(10)$	α_4	$-114.34747(5)$
a_5	$-42.89(2)$	α_5	$-245.53(1)$
a_6	$-215(4)$	α_6	$-695(2)$
b_6	$+680(1)$	β_6	$+339.3(5)$
a_7	$-8279(25)$	α_7	$-5837(16)$

Table 5.6: The numerically determined values of higher-order PN coefficients for $\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta h_{\alpha\beta}^R$ (left) and for u_{SF}^T (right). The uncertainty in the last digit or two is in parentheses. The range runs from $r = 40$ to $r = 700$, with 261 data points being fit. The χ^2 statistic is 259. We believe that a contribution from a b_7 term piggybacks on the a_7 coefficient. Both terms fall off rapidly and have influence over the fit only at small r . And the radial dependence of these two terms only differ by a factor of $\ln r$ [or possibly $(\ln r)^2$] which changes slowly over their limited range of significance.

very important question, we assemble together into Table 5.7 all the relevant results from the earlier fits of Sec. 5.8.3 which relate to the best prior estimates we have there for a_4, a_5, a_6, b_6 and a_7 which we have finally calculated here. As was shown in Table 5.5 and is now evident in Table 5.7, our numerical accuracy tends to be in the range of $2 - 6\Sigma$, both when comparing the best results for a_4, a_5, a_6, b_6 and a_7 from Sec. 5.8.3 with those obtained here and, we would suggest, for the purposes of comparing the results of this Section with future PN coefficients.

coeff.	Table 5.6 (best)	Table 5.3	Table 5.4
a_4	$-121.30310(10)$	$-121.30254(30) \rightarrow (56)$	$-121.3052(6) \rightarrow (21)$
a_5	$-42.89(2)$	$-42.99(5) \rightarrow (10)$	$-47(1) \rightarrow (4)$
a_6	$-215(4)$	$-228(6) \rightarrow (13)$	$-359(41) \rightarrow (144)$
b_6	$+680(1)$	$+677(2) \rightarrow (3)$	$+625(15) \rightarrow (55)$
a_7	$-8279(25)$	$-8226(27) \rightarrow (53)$	$-7722(162) \rightarrow (557)$

Table 5.7: Comparing the “best fit” numerical values and statistical uncertainties of the estimated PN coefficients in Table 5.6 to other numerical evaluations of these same quantities in Sec. 5.8.3.

5.8.5 Summary

Our best fit can be visualized in Fig. 5.2, where we plot the self-force effect u_{SF}^T on the redshift variable u^T as a function of $r = y^{-1}$, as well as several truncated PN series up to 7PN order, based on the analytically determined coefficients summarized in Table 5.2, as well as our best fit of the higher-order PN coefficients reported in Table 5.6. Observe in particular the smooth convergence of the successive PN approximations towards the exact SF results. Note, though, that there is still a small separation between the 7PN curve and the exact data in the very relativistic regime shown at the extreme left of Fig. 5.2.

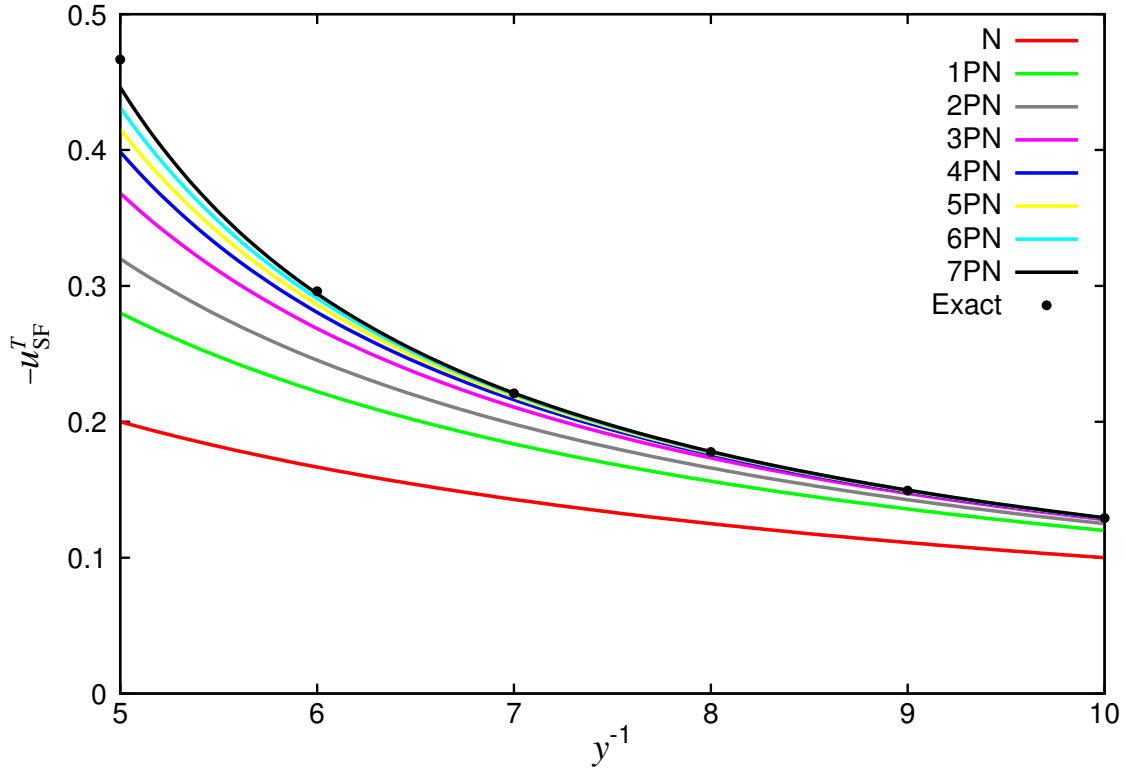


Figure 5.2: The self-force contribution u_{SF}^T to u^T plotted as a function of the gauge invariant variable y^{-1} . Note that y^{-1} is an invariant measure of the orbital radius scaled by the black hole mass m_2 [see Eq. (5.64)]. The “exact” numerical points are taken from Ref. [151]. Here, PN refers to all terms, including logarithms, up to the specified order (however recall that we did not include in our fit a log-term at 7PN order).

We have found that our data in the limited range of $35 \leq r \leq 700$ can be extremely well characterized by a fit with five appropriately chosen (basis) functions. That is, the coefficients in Table 5.6 are well determined, with small uncertainties, and small changes in the actual details of the fit result in coefficients lying within their error estimates. Fewer coefficients would result in a very poor characterization of the same data while more coefficients result in large uncertainties in the estimated coefficients, which themselves become overly sensitive to small changes in specific details (such as the actual choice of points to be fitted). In practice, over the data range we finally choose, and with the five coefficients we fit for, we end up with exceedingly good results for the estimated coefficients, and with residuals which sink to the level of our noise. We have a very high quality fit which is quite insensitive to minor details. Nevertheless, as Tables 5.5 and 5.7 hint, error estimates for these highest order coefficients should be regarded with an appropriate degree of caution.

Acknowledgements SD and BFW acknowledge support through grants PHY-0555484 and PHY-0855503 from the National Science Foundation. LB and ALT acknowledge support from the Programme International de Coopération Scientifique (CNRS–PICS).

Appendix: Formulas to compute the PN logarithms

In Sec. 5.5 we looked for poles generating near-zone logarithms when integrating the field equations at quadratic non-linear order. We used the propagator of the “instantaneous” potentials defined by

$$\mathcal{I}^{-1} \equiv \text{FP} \sum_{B=0}^{+\infty} \left(\frac{\partial}{c \partial t} \right)^{2k} \Delta^{-k-1} \left(\frac{r}{\lambda} \right)^B, \quad (5.76)$$

and acting on a source term of the type $r^{-2} F(\mathbf{n}, u)$ where $u = t - r/c$; see Eq. (5.30). We consider here a single multipolar piece in the source term, say $r^{-2} \hat{n}_L F(u)$. The function F is typically a product of the mass with some time derivatives of multipole moments. We recall that the propagator (5.76) depends on the length scale $\lambda = cP$, where P is the period of the source; we thus consider

$$\Phi_L = \mathcal{I}^{-1} \left[\frac{\hat{n}_L}{r^2} F(u) \right]. \quad (5.77)$$

In this Appendix we shall provide a general and compact formula giving all the logarithms in the near-zone expansion of the solution (5.77). The logarithms come from expanding the retardation $u = t - r/c$ in the source when $r/c \rightarrow 0$, integrating each of the terms using the formulas (5.19)–(5.20), and finally taking the finite part (FP) associated with the poles $\propto B^{-1}$. Our compact formula gives the result of all these operations as

$$\delta \Phi_L = \frac{(-c)^{\ell+1}}{2} \ln \left(\frac{r}{\lambda} \right) \hat{\partial}_L \left\{ \frac{F^{(-\ell-1)}(t - r/c) - F^{(-\ell-1)}(t + r/c)}{r} \right\}, \quad (5.78)$$

where $F^{(-\ell-1)}$ denotes the $(\ell + 1)$ -th time anti-derivative of the function F . By $\delta \Phi_L$ we mean the contribution of logarithms in Φ_L ; thus all the other terms in Φ_L besides $\delta \Phi_L$ admit an expansion when $r \rightarrow 0$ in simple powers of r without logarithms. Note that the factor of the logarithm in Eq. (5.78) is a multipolar antisymmetric homogeneous solution of the wave equation which is regular at the origin, when $r \rightarrow 0$. The logarithms in (5.78) are thus of the NZ type; no FZ logarithms are generated from a source term $r^{-2} \hat{n}_L F(u)$. We recall also from Sec. 5.4 that the FZ logarithms start to arise at the cubic $n = 3$ non linear iteration, and that they do not contribute to the conservative part of the dynamics of compact binaries.

The formal near-zone expansion of $\delta \Phi_L$ reads

$$\delta \Phi_L = (-)^{\ell} \ln \left(\frac{r}{\lambda} \right) \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\hat{n}_L r^{2i+\ell}}{2^i i! (2i + 2\ell + 1)!!} \frac{F^{(2i+\ell)}(t)}{c^{2i+\ell}}. \quad (5.79)$$

At the 1PN relative order required for our computation in (5.30)–(5.31), we have

$$\delta \Phi_L = \frac{(-)^{\ell} \hat{x}_L}{(2\ell + 1)!! c^{\ell}} \left[F^{(\ell)}(t) + \frac{r^2}{2c^2(2\ell + 3)} F^{(\ell+2)}(t) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{c^4} \right) \right] \ln \left(\frac{r}{\lambda} \right). \quad (5.80)$$

The result (5.78) can be generalized in the following sense that the same type of result will hold also for non-STF sources. Namely, if we define $\delta \Phi_L$ to be non-STF in L , i.e. having $n_L = n_{i_1} \cdots n_{i_{\ell}}$ in place of the STF product $\hat{n}_L$ in (5.77), then we can easily prove that the log-terms

are given by (5.78) with $\partial_L = \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_\ell}$ in place of the STF product $\hat{\partial}_L$. Of course all the other terms will be different, but the structure of the log-terms will be the same. Then it is trivial to show that the formula applies as well to a product of Minkowskian outgoing null vectors $k^\alpha = (1, \mathbf{n})$ representing the direction of propagation of gravitational waves, and satisfying $\eta_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0$. Considering

$$\Phi_{\alpha_1 \cdots \alpha_\ell} = \mathcal{I}^{-1} \left[\frac{k_{\alpha_1} \cdots k_{\alpha_\ell}}{r^2} F(u) \right], \quad (5.81)$$

where $k_\alpha = (-1, \mathbf{n})$, we find indeed that the contribution of logarithms in the near-zone expansion of this object is given by

$$\delta \Phi_{\alpha_1 \cdots \alpha_\ell} = \frac{(-c)^{\ell+1}}{2} \ln \left(\frac{r}{\lambda} \right) \partial_{\alpha_1 \cdots \alpha_\ell} \left\{ \frac{F^{(-\ell-1)}(t - r/c) - F^{(-\ell-1)}(t + r/c)}{r} \right\}. \quad (5.82)$$

We use this result to show that a family of logarithms not considered in Sec. 5.5 is actually pure gauge. We showed there that all the 4PN and 5PN near-zone logarithms come from iterating the leading-order $1/r^2$ part of the quadratic source, namely $Q_2^{\alpha\beta} = \frac{4M}{c^4} {}^{(2)}z_1^{\alpha\beta} + \frac{k^\alpha k^\beta}{c^2} \sigma$. However we computed only the first term $\propto {}^{(2)}z_1^{\alpha\beta}$, which is associated with tails, but we left out the second term $\propto k^\alpha k^\beta$. Now thanks to the structure $\propto k^\alpha k^\beta$ the logarithms appear in the form of a gauge transformation and will never contribute to a gauge invariant result. This was already shown at the level of the dominant 4PN log-term in [66]. By expanding σ on the basis of STF tensors $\hat{n}_L$ (or rather $\hat{n}_{L-2}$) we need only to prove this for each of the individual multipolar pieces in the source which have the structure

$$\Phi_{L-2}^{\alpha\beta} = \mathcal{I}^{-1} \left[k^\alpha k^\beta \frac{\hat{n}_{L-2}}{r^2} F(u) \right]. \quad (5.83)$$

Applying (5.82) the logarithms are given by

$$\delta \Phi_{L-2}^{\alpha\beta} = \frac{(-c)^{\ell+1}}{2} \ln \left(\frac{r}{\lambda} \right) \partial^\alpha \partial^\beta \hat{\partial}_{L-2} \left\{ \frac{F^{(-\ell-1)}(t - r/c) - F^{(-\ell-1)}(t + r/c)}{r} \right\}, \quad (5.84)$$

and can readily be put in the form of a gauge transformation with gauge vector

$$\xi_{L-2}^\alpha = \frac{(-c)^{\ell+1}}{4} \ln \left(\frac{r}{\lambda} \right) \partial^\alpha \hat{\partial}_{L-2} \left\{ \frac{F^{(-\ell-1)}(t - r/c) - F^{(-\ell-1)}(t + r/c)}{r} \right\}. \quad (5.85)$$

Indeed we have $\delta \Phi_{L-2}^{\alpha\beta} = 2\partial^{(\alpha} \xi_{L-2}^{\beta)} - \eta^{\alpha\beta} \partial_\mu \xi_{L-2}^\mu$ modulo some terms which are free of logarithms. Therefore the “seed” logarithms generated in this way at quadratic order can be removed by a gauge transformation, and we conclude that the whole family of logarithms coming from the iteration at cubic and higher orders can be removed by a non-linear deformation of the gauge transformation, namely by a coordinate transformation. Thus we do not have to consider these logarithms in our computation of a gauge invariant quantity; only those coming from the first term $\propto {}^{(2)}z_1^{\alpha\beta}$ in $Q_2^{\alpha\beta}$ will contribute as computed in Sec. 5.5.

□

MÉTRIQUE POST-NEWTONNIENNE DANS L'APPROXIMATION DE LIMITE PROCHE

LA métrique post-newtonnienne générée par deux corps compacts, à l'ordre 2PN, est développée dans l'approximation de limite proche. Le résultat est identifié à la métrique d'un trou noir de Schwarzschild perturbé. La perturbation résultante est utilisée pour construire des conditions initiales, dont l'évolution génère les ondes gravitationnelles rayonnées par le trou noir pendant la phase de vibration. Les formes d'ondes sont calculées dans le cas d'une collision frontale, et pour des orbites circulaires.

6.1 Approximation de limite proche

L'approximation dite de *limite proche* consiste à traiter deux trous noirs « très proches », et recouverts d'un horizon des événements communs, comme une perturbation d'un seul trou noir. Cette idée a été introduite au milieu des années 90 par Price & Pullin [343], afin d'étudier la collision frontale de deux trous noirs par des méthodes semi-analytiques, à des fins de comparaison avec les seules simulations numériques alors existantes.

Les deux trous noirs initiaux sont décrits à l'aide des géométries de Misner [297] ou de Brill-Lindquist [98], deux solutions exactes des équations de contraintes de la relativité générale, qui diffèrent par leur topologie. En développant formellement ces métriques en puissances d'une mesure de la distance entre les deux trous noirs, L , on parvient ainsi à identifier la métrique d'un seul trou noir de Schwarzschild perturbé. La perturbation résultante est alors utilisée pour construire des conditions initiales, qui sont ensuite évoluées à l'aide du formalisme standard de la théorie des perturbations d'un trou noir de Schwarzschild (voir chapitre 3).

Par comparaison avec les résultats exacts issus de la relativité numérique [379, 17], le domaine de validité de l'approximation de limite proche s'est avéré bien plus étendu qu'escompté : le résultat du calcul perturbatif de l'énergie rayonnée ne commence à différer significativement

du résultat exact que pour une distance initiale $L/M \gtrsim 3 - 4$, où M est la masse ADM de l'espace-temps de Misner ou de Brill-Lindquist [4]. Toutefois, les conditions initiales de Misner ou de Brill-Lindquist décrivent deux trous noirs initialement au repos avant la collision frontale, et ne peuvent donc pas être utilisées dans le cas astrophysique de la coalescence d'une binaire de trous noirs faisant suite à la phase spiralante.

La communauté de la relativité numérique n'est parvenue que tout récemment à simuler la coalescence de deux trous noirs — des quelques orbites précédant la fusion jusqu'à la fin de la phase de vibration du trou noir de Kerr final — suite à la percée de Pretorius [341] en 2005. Quelques années plus tôt, le projet *Lazarus* [24] a fait usage de l'approximation de limite proche, en raccordant un calcul de relativité numérique de la forme d'onde générée au cours de la coalescence à un calcul perturbatif avec des conditions initiales générées numériquement.

Plus récemment, Sopuerta *et al.* [381, 382] ont utilisé l'approximation de limite proche avec des conditions initiales de type Bowen-York, puis appliqué le résultat au calcul de l'effet de recul gravitationnel. La perturbation ainsi obtenue dérive d'une métrique conformément plate, ce qui entre en contradiction avec les résultats post-newtoniens, d'après lesquels la métrique spatiale n'est plus conformément plate à partir de l'ordre 2PN. Les calculs de Sopuerta *et al.* ne sont donc pas cohérents, au sens où la perturbation calculée dans l'approximation de limite proche n'est pas solution des équations d'Einstein linéarisées (en un sens post-newtonien).

6.2 Application au cas de la métrique post-newtonienne

Ceci nous a conduit à reconsidérer le problème, mais en utilisant des conditions initiales issues de la métrique post-newtonienne. Éliminant la phase de fusion en raccordant directement les phases post-newtonienne et de vibration, cette méthode peut sembler non physique ; mais les résultats récents de la relativité numérique [341, 25, 111] montrent en fait que la phase de fusion est très brève, et les ondes gravitationnelles émises parfaitement « régulières », de sorte que la phase post-newtonienne semble se raccorder presque directement avec la phase de vibration (cf. [311] pour une argumentation similaire). Les résultats que nous obtenons dans le cadre de l'application à l'effet de recul gravitationnel (voir chapitre 7) sont en bon accord avec les résultats exacts issus de la relativité numérique, justifiant *a posteriori* le fait que notre méthode contient l'essentiel de la physique du problème.

Le point de départ de notre calcul est la métrique 2PN¹ générée par deux objets compacts de masses m_1 et m_2 . De plus, on ne conserve que les termes linéaires dans la constante de couplage G , par souci de cohérence avec la théorie des perturbations du premier ordre d'un trou noir de Schwarzschild, les termes d'ordre G^2 ou plus dans la métrique post-newtonienne correspondant à une perturbation d'ordre plus élevé.

Nous développons ensuite cette métrique post-newtonienne en puissances du paramètre perturbatif de l'approximation limite proche, *i.e.* la distance (de coordonnée) r_{12} entre les deux trous noirs. La métrique résultante est identifiée à celle d'un trou noir de Schwarzschild perturbé, la perturbation étant paramétrisée par les masses m_1 et m_2 des trous noirs initiaux, et par la distance r_{12} (cf. Fig. 6.1). Mathématiquement, cela revient à postuler l'existence d'une bijection

¹La métrique post-newtonienne n'est pas connue dans tout l'espace à l'ordre 3PN ; le calcul de la métrique régularisée sur les particules à l'ordre 3PN est précisément l'objet du travail détaillé dans le chapitre 4.

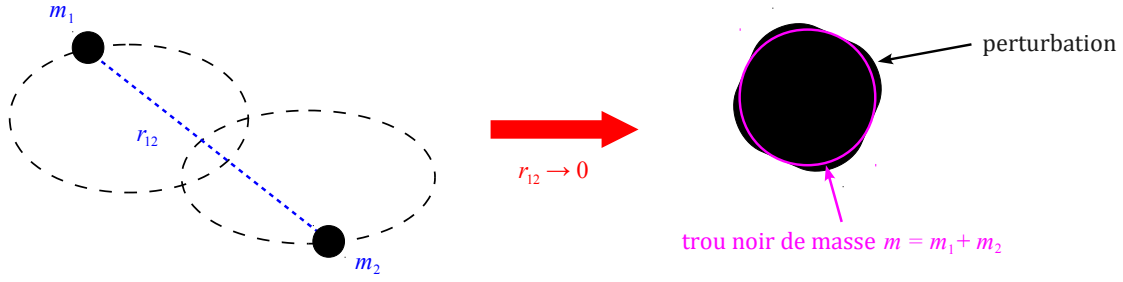


FIG. 6.1: La métrique post-newtonienne décrivant deux trous noirs de masses m_1 et m_2 , et distants de r_{12} , est développée dans l'approximation de limite proche ($r_{12} \rightarrow 0$). La métrique résultante peut être identifiée à celle décrivant un trou noir perturbé de masse $m = m_1 + m_2$.

entre l'espace-temps post-newtonien décrivant les deux objets compacts, et l'espace-temps d'un trou noir de Schwarzschild perturbé :

$$g_{\mu\nu}^{\text{PN}} = g_{\mu\nu}^{\text{Schw}} + h_{\mu\nu}, \quad (6.1)$$

où $g_{\mu\nu}^{\text{PN}}$ est la métrique post-newtonienne, $g_{\mu\nu}^{\text{Schw}}$ la métrique d'un trou noir de Schwarzschild de masse $m = m_1 + m_2$, et $h_{\mu\nu}$ une perturbation de cette dernière. On peut alors vérifier que la perturbation $h_{\mu\nu}$ vérifie bien les équations d'Einstein linéarisées à l'ordre 2PN ; en particulier avec un terme non conformément plat dans la partie spatiale de la métrique. Utilisant le formalisme de la théorie des perturbations d'un trou noir de Schwarzschild, nous construisons ainsi des conditions initiales pour les deux champs scalaires $\Psi_{\ell,m}^{(e,o)}$, qui condensent toute l'information sur la perturbation (voir chapitre 3).

6.3 Évolution numérique des équations d'onde

Ces champs scalaires obéissent aux équations d'onde homogènes associées à (3.4). Une fois les conditions initiales $\Psi_{\ell,m}^{(e,o)}(0, r_*)$ et $\partial_t \Psi_{\ell,m}^{(e,o)}(0, r_*)$ calculées à l'aide de la métrique 2PN développée dans l'approximation de limite proche, nous évoluons les champs scalaires en résolvant numériquement les équations aux dérivées partielles

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + \mathcal{V}_\ell^{(e,o)} \right) \Psi_{\ell,m}^{(e,o)} = 0. \quad (6.2)$$

Pour ce faire, nous utilisons un schéma explicite, aux différences finies, du second ordre, codé en Fortran 90 spécialement pour l'occasion. La convergence au second ordre du code a été vérifiée (voir Fig. 6.3). Ce code a également été testé par comparaison avec des travaux antérieurs². Les résultats sont présentés sur les Figs. 6.4–6.7 pour les modes polaires $\Psi_{\ell,m}^{(e)}$ et axiaux $\Psi_{\ell,m}^{(o)}$, dans le cas d'une collision frontale, et pour des orbites circulaires. L'application de ces résultats au calcul de l'effet de recul gravitationnel est détaillée dans le chapitre suivant.

²La comparaison avec les travaux de Sopuerta *et al.* [381] a d'ailleurs permis d'identifier une erreur dans leurs calculs, ce qui a conduit les auteurs à publier un erratum.

La suite de ce chapitre est un article publié dans le journal *Classical and Quantum Gravity* [261].

The Close-Limit Approximation for Black Hole Binaries with Post-Newtonian Initial Conditions

Alexandre Le Tiec and Luc Blanchet

GReCO, Institut d'Astrophysique de Paris — UMR 7095 du CNRS,
Université Pierre & Marie Curie, 98^{bis} boulevard Arago, 75014 Paris, France

Abstract

The ringdown phase of a black hole formed from the merger of two orbiting black holes is described by means of the close-limit (CL) approximation starting from second-post-Newtonian (2PN) initial conditions. The 2PN metric of point-particle binaries is formally expanded in CL form and identified with that of a perturbed Schwarzschild black hole. The multipolar coefficients describing the even-parity (or polar) and odd-parity (axial) components of the linear perturbation consistently satisfy the 2PN-accurate perturbative field equations. We use these coefficients to build initial conditions for the Regge-Wheeler and Zerilli wave equations, which we then evolve numerically. The ringdown waveform is obtained in two cases: head-on collision with zero-angular momentum, composed only of even modes, and circular orbits, for which both even and odd modes contribute. In a separate work, this formalism is applied to the study of the gravitational recoil produced during the ringdown phase of coalescing binary black holes.

6.4 Introduction

Post-Newtonian (PN) methods have proved to be extremely efficient in describing the inspiral phase of compact binary systems, up to about the location of the innermost circular orbit (ICO). The PN inspiral signal has been developed up to 3.5PN order¹ for the orbital phase evolution [77, 68] and up to 3PN order [83, 18, 78] in the amplitude waveform (see [61] for a review). On the other hand, recent advances in numerical calculations of binary black holes [341, 111, 25] have provided a very accurate description of the subsequent merger and ringdown phases, say, from the ICO on. The comparison of the numerical-relativity and PN results is a crucial task that has been successfully achieved [104, 29, 51, 318, 207]. Their matching is currently under way [6] and should yield a complete and very accurate solution of the problem of binary coalescence.

Nevertheless, analytic and/or semi-analytic methods are still very useful for gaining more physical understanding of the relaxation of binary black holes toward their final equilibrium state (see e.g. [235] for a recent example). Of particular importance is the close-limit (CL) approximation method, pioneered by Price & Pullin [343] and Abrahams & Price [4]. The CL approximation permits the description of the last stage of evolution of a black hole binary, when the two black holes are close enough that they are surrounded by a common horizon, as a perturbation of a single (Schwarzschild or Kerr) black hole. Recent revisits of the CL approach made use of numerically generated initial data [24], and Bowen-York-type initial conditions [381, 382]. Alternative analytic or semi-analytic schemes for dealing with the same problem are based on the effective-one-body approach [105] (see [144] for a recent review).

In the present paper we shall implement the CL approximation starting from post-Newtonian initial conditions, appropriate for the initial inspiral phase of binary black holes. A physical motivation is that the results of numerical relativity [341, 111, 25] show that the pulse of radiation coming from the merger phase is very short and seems to connect smoothly to the previous inspiral and subsequent ringdown phases. It is thus reasonable to expect that PN initial conditions starting the CL evolution should essentially yield the right physics for the ringdown phase. The application of this formalism to the computation of the gravitational recoil effect or “kick” occurring during the ringdown phase will be presented in a separate work [263].

Let us outline the method. We conveniently distinguish several dimensionless ratios to describe a compact binary system. First, we introduce the “post-Minkowskian” (PM) ratio, measuring the internal gravity responsible for the dynamics of the system, and defined by

$$\varepsilon_{\text{PM}} \sim \frac{GM}{c^2 r_{12}}, \quad (6.3)$$

where r_{12} is the typical distance between the two compact bodies, and $M = m_1 + m_2$ is the sum of their masses. Second, a post-Newtonian expansion will essentially be an expansion in powers of the *a priori* distinct slowness parameter

$$\varepsilon_{\text{PN}} \sim \frac{v_{12}^2}{c^2}, \quad (6.4)$$

where v_{12} is the typical value of the orbital relative velocity. Recall that the PN expansion is only valid in the near zone defined by $r \ll \lambda$, where $\lambda \sim r_{12}/\sqrt{\varepsilon_{\text{PM}}}$ is the typical wavelength of the

¹As usual the n PN order refers either to the terms $\sim 1/c^{2n}$ in the equations of motion, with respect to the usual Newtonian acceleration, or in the radiation field, relatively to the standard quadrupolar waveform.

emitted gravitational waves, and r the distance from the field point to, say, the center of mass of the binary.

For a binary system moving on a circular orbit the two parameters ε_{PN} and ε_{PM} are comparable, $\varepsilon_{\text{PN}} \sim \varepsilon_{\text{PM}}$. In this case, if we limit the PN expansion to a few terms, we need $\varepsilon_{\text{PN}} \ll 1$ hence $r_{12} \gg GM/c^2$. However, it is often better to view ε_{PN} and ε_{PM} as independent parameters because if the binary system is moving on a highly eccentric bound orbit with eccentricity $e \lesssim 1$, the PN parameter can be much smaller than the PM one, since at the apoapsis of the orbit we have $\varepsilon_{\text{PN}} \sim (1 - e) \varepsilon_{\text{PM}} \ll \varepsilon_{\text{PM}}$. And, for an unbound orbit with eccentricity $e \gg 1$, we would have $\varepsilon_{\text{PN}} \sim (1 + e) \varepsilon_{\text{PM}} \gg \varepsilon_{\text{PM}}$ at the periapsis.

On the other hand, the close-limit approximation consists of an expansion in powers of the dimensionless ratio considered small²

$$\varepsilon_{\text{CL}} \sim \frac{r_{12}}{r}. \quad (6.5)$$

This expansion can formally be viewed as an expansion when the size of the source tends to zero, or multipolar expansion. Therefore, if we limit the expansion to a few terms, we need $\varepsilon_{\text{CL}} \ll 1$ and the CL approximation is expected to be valid in the domain $r \gg r_{12}$ (like a multipole expansion).

Clearly the PN and CL approximations that we intend to employ simultaneously have disconnected domains of validity. Indeed, the CL describes a slightly distorted black hole such that $r_{12} \gtrsim GM/c^2$, so that for circular orbits $\varepsilon_{\text{PN}} \lesssim 1$, which makes the near zone very small; in other words, the PN metric will only be valid very close to the source while the CL approximation requires $r \gg r_{12}$. Despite such apparent clash, we shall be inspired by the method of matched asymptotic expansions [254], which in principle allows one to get an analytic expression valid in the entire domain $0 \leq r < +\infty$. Of course, this method is based on the existence of an overlapping zone, where the two asymptotic expansions are simultaneously valid and can be matched together. But in the present context there is no such thing as a overlapping zone. Hence our use of the theory of matched asymptotic expansions to relate PN and CL approximations can at best be only *formal*.

Starting from the PN metric, already in the form of an expansion in powers of ε_{PN} , we shall restrict ourselves to the terms linear in ε_{PM} (i.e., essentially, linear in G). This is to be consistent later with the use of a linear black hole perturbation. Then, each of the coefficients of the PN metric will be expanded in powers of ε_{CL} , which will enable us to identify the Schwarzschild background metric (up to terms of order $\varepsilon_{\text{PM}}^2$) and the perturbation $h_{\mu\nu}$ of that background. Thus the perturbation will appear as a double expansion series of the type [cf. the explicit results (6.18a)–(6.18c)]

$$h_{\mu\nu} = \varepsilon_{\text{PM}} \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} h_{\mu\nu}^{(n,k)} \varepsilon_{\text{PN}}^n \varepsilon_{\text{CL}}^{k+1} + \mathcal{O}(\varepsilon_{\text{PM}}^2), \quad (6.6)$$

where n refers to the post-Newtonian order and k can be viewed as the multipolar order of the expansion.³ In principle, one could perform the expansions in the opposite way, i.e. expanding

²In the works [343, 4], the CL parameter is defined as $c^2 r_{12}/(GM)$. More recently, Sopuerta *et al.* [381] adopted the definition (6.5). In the formal limit $r_{12} \rightarrow 0$, these two definitions are equivalent.

³Our convention is that k represents the power of the separation r_{12} in the CL expansion, taking into account the inverse power of r_{12} hidden in the PM indicator ε_{PM} in front of (6.6).

first in powers of ε_{CL} , and then in powers of ε_{PN} . In the method of matched asymptotic expansions the result should be the same, i.e. term by term identical in the double expansion series. This would however require first the knowledge of the black hole perturbation metric in the CL approximation; such metric can only be computed numerically.

In the present paper, we shall implement the expansion (6.6), limiting ourselves to second post-Newtonian order. The reason is that the metric is needed in closed analytic form for any field point in the near zone, and that the 3PN metric is currently not known for any field point; only the 3PN metric when regularized at the very location of the particles is known [72]. One of our aims is the study reported in the separate work [263] of the gravitational recoil effect. The recoil is the reaction of the binary system to the linear momentum carried away by the gravitational waves, and results at leading order from the interaction between the $\ell = 2$ and the $\ell = 3$ modes, where ℓ is the azimuthal number of the decomposition of the black hole perturbation onto tensorial spherical harmonics; we shall thus push the CL expansion up to at least octupolar order, i.e. $k \geq 3$, to ensure that the modes $\ell = 2$ and 3 are both taken into account.

The present approach will be limited to the case of a slowly spinning black hole. The initial orbital angular momentum of the binary system, which is constant and supposed to give the spin of the final black hole, is considered as part of the perturbation of a Schwarzschild black hole, and is necessarily small. However we have learned from numerical calculations that the final black hole produced by coalescence is a rapidly spinning Kerr black hole [341, 111, 25]. The ringdown waveform that we shall compute in this paper will be that of a perturbed Schwarzschild black hole, and hence the quasi-normal mode frequencies will not include the effect of the black hole spin. To remedy this problem and get better agreement with numerical relativity would necessitate similar calculations using a Kerr black hole background.

The remainder of this paper is organized as follows: In Sec. 6.5 we consider the 2PN metric of two compact bodies at first post-Minkowskian order (to be consistent with first-order black hole perturbations) and formally re-expand it in the CL form. In Sec. 6.6 we first give a short recap of the theory of linear perturbations of a Schwarzschild black hole, and then use this formalism to identify the perturbation associated with the previously CL-expanded 2PN metric. In Sec. 6.7 we verify that the field equations for this metric are satisfied. Using the CL-expanded 2PN metric as initial data, we numerically evolve the Regge-Wheeler and Zerilli functions in Sec. 6.8, and present the resulting waveforms generated during the ringdown phase of coalescing black holes, for both even and odd-parity perturbations. Finally we conclude in Sec. 6.9. Some necessary details on black hole perturbation theory are relegated to the Appendix.

6.5 The 2PN metric in close-limit form

6.5.1 The 2PN metric for two point masses

In the present paper we shall solve numerically the Regge-Wheeler and Zerilli wave equations [see Eqs. (6.38) below] starting from post-Newtonian initial conditions. Thus we assume that the initial metric at the end of the inspiral phase is given by the standard PN metric generated by two point masses m_1 and m_2 modelling two non-spinning black holes. We adopt the 2PN precision because the 3PN metric in the near zone is not known in the “bulk”, i.e. for any field point outside the position of the particles.

Our calculation starts with the post-Newtonian metric $G_{\mu\nu}^{\text{PN}}$ written in a Cartesian harmonic coordinate system, and given as [79]⁴

$$G_{00}^{\text{PN}} = -1 + \frac{2Gm_1}{c^2 r_1} + \frac{1}{c^4} \left[\frac{Gm_1}{r_1} (-(n_1 v_1)^2 + 4v_1^2) - 2 \frac{G^2 m_1^2}{r_1^2} \right. \\ \left. + G^2 m_1 m_2 \left(-\frac{2}{r_1 r_2} - \frac{r_1}{2r_{12}^3} + \frac{r_1^2}{2r_2 r_{12}^3} - \frac{5}{2r_2 r_{12}} \right) \right] \\ + \frac{4G^2 m_1 m_2}{3c^5 r_{12}^2} (n_{12} v_{12}) + 1 \leftrightarrow 2 + \mathcal{O}(c^{-6}), \quad (6.7a)$$

$$G_{0i}^{\text{PN}} = -4 \frac{Gm_1}{c^3 r_1} v_1^i + \frac{1}{c^5} \left[n_1^i \left(-\frac{G^2 m_1^2}{r_1^2} (n_1 v_1) + \frac{G^2 m_1 m_2}{S^2} \left(-16(n_{12} v_1) + 12(n_{12} v_2) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 16(n_2 v_1) + 12(n_2 v_2) \right) \right) \right. \\ \left. + n_{12}^i G^2 m_1 m_2 \left(-6(n_{12} v_{12}) \frac{r_1}{r_{12}^3} - 4(n_1 v_1) \frac{1}{r_{12}^2} + 12(n_1 v_1) \frac{1}{S^2} \right. \right. \\ \left. \left. - 16(n_1 v_2) \frac{1}{S^2} + 4(n_{12} v_1) \frac{1}{S} \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{r_{12}} \right) \right) \right. \\ \left. + v_1^i \left(\frac{Gm_1}{r_1} (2(n_1 v_1)^2 - 4v_1^2) + \frac{G^2 m_1^2}{r_1^2} + G^2 m_1 m_2 \left(\frac{3r_1}{r_{12}^3} - \frac{2r_2}{r_{12}^3} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + G^2 m_1 m_2 \left(-\frac{r_2^2}{r_1 r_{12}^3} - \frac{3}{r_1 r_{12}} + \frac{8}{r_2 r_{12}} - \frac{4}{r_{12} S} \right) \right) \right] \\ + 1 \leftrightarrow 2 + \mathcal{O}(c^{-6}), \quad (6.7b)$$

$$G_{ij}^{\text{PN}} = \delta^{ij} + \frac{2Gm_1}{c^2 r_1} \delta^{ij} + \frac{1}{c^4} \left[\delta^{ij} \left(-\frac{Gm_1}{r_1} (n_1 v_1)^2 + \frac{G^2 m_1^2}{r_1^2} \right. \right. \\ \left. \left. + G^2 m_1 m_2 \left(\frac{2}{r_1 r_2} - \frac{r_1}{2r_{12}^3} + \frac{r_1^2}{2r_2 r_{12}^3} - \frac{5}{2r_1 r_{12}} + \frac{4}{r_{12} S} \right) \right) \right. \\ \left. + 4 \frac{Gm_1}{r_1} v_1^i v_1^j + \frac{G^2 m_1^2}{r_1^2} n_1^i n_1^j - 4G^2 m_1 m_2 n_{12}^i n_{12}^j \left(\frac{1}{S^2} + \frac{1}{r_{12} S} \right) \right]$$

⁴Greek indices take space-time values 0, 1, 2, 3. The indices $\mu, \nu, \dots$ indicate Cartesian coordinates $x^\mu = \{ct, x, y, z\}$, while $\alpha, \beta, \dots$ refer to spherical coordinates $x^\alpha = \{ct, r, \theta, \varphi\}$. Latin indices $i, j, \dots$ take spatial values 1, 2, 3. Bold-face notation is often used to denote ordinary spatial vectors, $\mathbf{x} = \{x^i\}$. The two black holes are often labeled by $A = 1, 2$. Parentheses around indices are used to indicate symmetrisation, e.g. $U^{(i} V^{j)} = \frac{1}{2} (U^i V^j + U^j V^i)$. The usual (Euclidean) scalar product between two 3-vectors $\mathbf{U}$ and $\mathbf{V}$ is denoted $(U V)$, e.g. $(n_1 v_1) = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v}_1$. To the terms given below in Eqs. (6.7a)–(6.7c), we have to add those ones corresponding to the relabeling $1 \leftrightarrow 2$ (with the obvious exception of the Minkowski metric which should not be counted twice).

$$\begin{aligned}
& + \frac{4G^2 m_1 m_2}{S^2} \left(n_1^{(i} n_2^{j)} + 2n_1^{(i} n_{12}^{j)} \right) \Big] \\
& + \frac{G^2 m_1 m_2}{c^5 r_{12}^2} \left(-\frac{2}{3} (n_{12} v_{12}) \delta^{ij} - 6(n_{12} v_{12}) n_{12}^i n_{12}^j + 8n_{12}^{(i} v_{12}^{j)} \right) \\
& + 1 \leftrightarrow 2 + \mathcal{O}(c^{-6}). \tag{6.7c}
\end{aligned}$$

The trajectory of the A^{th} black hole is denoted $\mathbf{y}_A$ and its ordinary velocity is $\mathbf{v}_A = d\mathbf{y}_A/dt$, where $t = x^0/c$ is the harmonic-coordinate time. The relative velocity is denoted $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$. The Euclidean distance between the black hole A and any field point is $r_A = |\mathbf{x} - \mathbf{y}_A|$. The unit vector pointing from A to the field point is $\mathbf{n}_A = (\mathbf{x} - \mathbf{y}_A)/r_A$, and the unit direction from body 2 to body 1 reads $\mathbf{n}_{12} = \mathbf{y}_{12}/r_{12}$, where $\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2$ and the binary's separation is denoted $r_{12} = |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|$. Several terms in (6.7a)–(6.7c) involve the particular combination $S \equiv r_1 + r_2 + r_{12}$. All these conventions can be visualized in Fig. 6.2.

In the following we shall restrict ourselves to those terms in the full 2PN metric (6.7a)–(6.7c) which are *linear* in the parameter ε_{PM} given by (6.3), or equivalently in the gravitational constant G .⁵ Indeed, our work will be based on the theory of first-order perturbations of a Schwarzschild black hole, and the corresponding terms in the PN framework will necessarily have to involve only linear powers of G to be consistent. Higher powers of G in the PN metric will correspond to higher-order perturbation theory. Since the part of the 2PN metric which is linear in G is obviously a solution of the Einstein field equations at 2PN order [up to terms $\mathcal{O}(G^2)$], the multipolar coefficients describing the perturbation in the CL approximation will satisfy the perturbative Einstein field equations, as checked in Sec. 6.7. This restriction to the terms linear in G in the PN metric appears therefore as necessary; the price we pay is that our initial conditions will not contain the full information encoded into the 2PN metric: for instance, all the terms involving S in (6.7a)–(6.7c) disappear. To include meaningfully the complete 2PN metric would require using the theory of second-order perturbations of a Schwarzschild black hole [99].

Neglecting the non-linear terms in G we end up with a comparatively much simpler metric, reading⁶

$$G_{00}^{\text{PN}} = -1 + \frac{2Gm_1}{c^2 r_1} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(2v_1^2 - \frac{1}{2}(n_1 v_1)^2 \right) \right] + 1 \leftrightarrow 2 + \mathcal{O}(G^2, c^{-6}), \tag{6.8a}$$

$$G_{0i}^{\text{PN}} = -\frac{4Gm_1}{c^3 r_1} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(v_1^2 - \frac{1}{2}(n_1 v_1)^2 \right) \right] v_1^i + 1 \leftrightarrow 2 + \mathcal{O}(G^2, c^{-6}), \tag{6.8b}$$

$$G_{ij}^{\text{PN}} = \left[1 + \frac{2Gm_1}{c^2 r_1} - \frac{Gm_1}{c^4 r_1} (n_1 v_1)^2 \right] \delta^{ij} + \frac{4Gm_1}{c^4 r_1} v_1^i v_1^j + 1 \leftrightarrow 2 + \mathcal{O}(G^2, c^{-6}). \tag{6.8c}$$

At this stage we could proceed with the CL expansion to identify the Schwarzschild background metric and the perturbation. However the PN metric is in harmonic coordinates so we would

⁵From now on it will be simpler to forget about the dimensionless estimates ε_{PM} , ε_{PN} and ε_{CL} defined in the Introduction for pedagogical reasons. We shall replace them by the dimensionful but more obvious constants G and c^{-2} , and parameter r_{12} , respectively.

⁶The remainder $\mathcal{O}(G^2, c^{-6})$ includes all terms which are at least of order G^2 or of order c^{-6} or both. Thus for instance the “radiation-reaction” terms present at order c^{-5} in G_{00}^{PN} and G_{ij}^{PN} are included in this remainder because they are also of order G^2 .

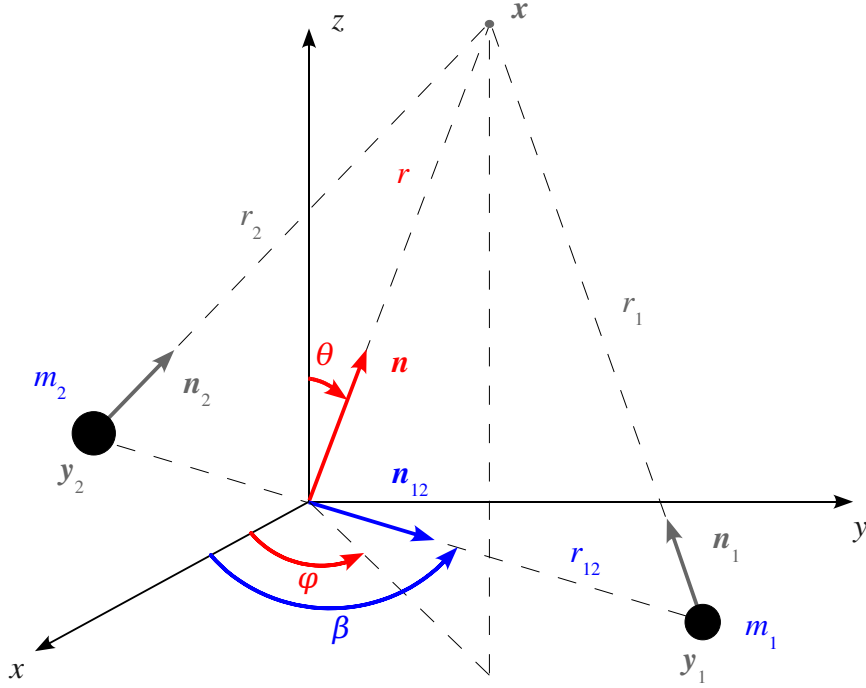


Figure 6.2: Two black holes of Schwarzschild masses $m_{1,2}$ in a Cartesian coordinate system $x^\mu = \{ct, x, y, z\}$ centered on the binary's center of mass, or the associated spherical coordinate system $x^\alpha = \{ct, r, \theta, \phi\}$.

obtain the Schwarzschild metric in harmonic coordinates; this is not convenient because the perturbation formalism is usually defined in standard Schwarzschild-Droste coordinates. We shall thus perform a suitable coordinate transformation such that after expanding the metric in the CL approximation we obtain directly the Schwarzschild background metric in Schwarzschild coordinates.

Since we are working at linear order in G it is sufficient to perform a linear gauge transformation at order G , say $\delta x^\mu = \xi^\mu$, where the gauge vector is $\xi^\mu = \mathcal{O}(G)$. Note that this gauge transformation is defined with respect to the Minkowski background. Later, when using black-hole perturbations, we shall perform a gauge transformation with respect to the Schwarzschild background. A suitable gauge transformation which fulfills our purpose is then

$$\xi^0 = -\frac{Gm_1}{c^3} (n_1 v_1) - \frac{Gm_2}{c^3} (n_2 v_2), \quad (6.9a)$$

$$\xi^i = \frac{Gm_1}{c^2} n_1^i + \frac{Gm_2}{c^2} n_2^i. \quad (6.9b)$$

Such gauge transformation does *not* satisfy the harmonic gauge condition $\square \xi^\mu = 0$, therefore our new coordinates will not be harmonic. Under this gauge transformation we have

$$G_{\mu\nu}^{\text{PN}}(x) = g_{\mu\nu}^{\text{PN}}(x) + 2\partial_{(\mu}\xi_{\nu)} + \mathcal{O}(G^2), \quad (6.10)$$

where $\xi_\mu \equiv \eta_{\mu\nu}\xi^\nu$, and the new metric components read now

$$g_{00}^{\text{PN}} = -1 + \frac{2Gm_1}{c^2 r_1} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(3v_1^2 - \frac{3}{2}(n_1 v_1)^2 \right) \right] + 1 \leftrightarrow 2 + \mathcal{O}(G^2, c^{-6}), \quad (6.11a)$$

$$g_{0i}^{\text{PN}} = -\frac{4Gm_1}{c^3 r_1} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(v_1^2 - \frac{1}{2}(n_1 v_1)^2 \right) \right] v_1^i + 1 \leftrightarrow 2 + \mathcal{O}(G^2, c^{-6}), \quad (6.11b)$$

$$g_{ij}^{\text{PN}} = \delta^{ij} + \frac{2Gm_1}{c^2 r_1} \left[n_1^i n_1^j + \frac{1}{c^2} \left(2v_1^i v_1^j - \frac{1}{2}(n_1 v_1)^2 \delta^{ij} \right) \right] + 1 \leftrightarrow 2 + \mathcal{O}(G^2, c^{-6}). \quad (6.11c)$$

We shall start our perturbative CL setup from that PN metric.

It is important to comment on the post-Newtonian counting we are adopting for the 2PN metric in (6.11a)–(6.11c). The accuracy of this metric is really 2PN only for the geodesic motion of “photons” rather than of massive particles. Indeed, we did not include here the term of order $\mathcal{O}(c^{-6})$ in the 00 component of the metric, although it is known from [79]. This term would be needed for describing the 2PN motion of massive bodies. It will turn out to be essential to expand both g_{00}^{PN} and g_{ij}^{PN} at the same post-Newtonian order —namely up to $\sim c^{-4}$ for both components in (6.11a) and (6.11c)— because only then can we be consistent with the linear black hole perturbation. Physically this results from the fact that the CL approximation is assuming that the metric is a small deformation of that of a black hole, therefore when expanding (6.11a)–(6.11c) in the CL form we shall have $r_{12} \gtrsim GM/c^2$, so the orbital velocities are going to be very relativistic, i.e. $|\mathbf{v}_A| \lesssim c$, and thus the g_{00}^{PN} , g_{ij}^{PN} and g_{0i}^{PN} components should give similar contributions to the line element ds^2 , and are therefore to be expanded up to the same PN order. This is thus similar to the accuracy needed for the geodesic motion of a photon where all the metric coefficients g_{00}^{PN} , g_{0i}^{PN} and g_{ij}^{PN} are to be given with the same PN accuracy. On the other hand, we shall see later that it is very important to include the gravitomagnetic field g_{0i}^{PN} up to order c^{-5} , because it will play a crucial role in generating the odd-parity or *axial* contributions to the perturbations.

6.5.2 Close-limit expansion of the 2PN metric

In the CL approximation, we expand the 2PN metric (6.11a)–(6.11c) in powers of the parameter (6.5), or equivalently of the relative distance $r_{12} = |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|$ when $r_{12} \rightarrow 0$. To do so we shall first express all variables in the frame of the center of mass defined at the required 1PN accuracy. The individual positions $\mathbf{y}_A$ of the particles in the center-of-mass frame are given in terms of their relative position $\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2$ and read at 1PN order [80]

$$\mathbf{y}_1 = \left[X_2 + \frac{\nu}{2c^2} \delta X \left(v_{12}^2 - \frac{GM}{r_{12}} \right) \right] \mathbf{y}_{12} + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (6.12)$$

together with 1 $\leftrightarrow$ 2 for the other particle. We introduced the total mass $M \equiv m_1 + m_2$, the relative mass ratios $X_A \equiv m_A/M$, and the symmetric mass ratio $\nu \equiv X_1 X_2 = m_1 m_2 / M^2$, such that $0 < \nu \leq \frac{1}{4}$, with $\nu = \frac{1}{4}$ for an equal-mass binary, and $\nu \rightarrow 0$ in the test-particle limit. We denote also the mass difference by $\delta M \equiv m_1 - m_2$, and the relative mass difference by $\delta X \equiv X_1 - X_2 = \delta M / M$, which can also be written in terms of the symmetric mass ratio as

$\delta X = \pm\sqrt{1-4v}$. As previously the relative velocity is $\mathbf{v}_{12} = d\mathbf{y}_{12}/dt = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, and $v_{12}^2 = (v_{12}v_{12})$. Note that the 1PN correction in (6.12) vanishes for circular orbits. Similarly, from the time derivatives of (6.12) we get the 1PN-accurate expression of the individual velocities as

$$\mathbf{v}_1 = \left[X_2 + \frac{v}{2c^2} \delta X \left(v_{12}^2 - \frac{GM}{r_{12}} \right) \right] \mathbf{v}_{12} - \frac{v}{2c^2} \frac{G\delta M}{r_{12}^2} (n_{12}v_{12}) \mathbf{y}_{12} + \mathcal{O}(c^{-4}). \quad (6.13)$$

The expressions (6.12)–(6.13) were derived in harmonic gauge, and we have still to check that they are also valid in the new gauge specified by (6.9a)–(6.9b). The center-of-mass frame is defined by the vanishing of the center of mass position $\mathbf{G}$. A generic gauge transformation ξ^μ will displace the position of the center of mass by the amount $\delta_\xi \mathbf{G} = -m_1 \xi_1 - m_2 \xi_2$, where ξ_A is the spatial gauge vector evaluated at the location of the particle A . The associated shift of the particle's individual positions with respect to the center of mass will then be given by $\delta_\xi \mathbf{y}_A = -\delta_\xi \mathbf{G}/M$ (the same for both particles). In the case of the gauge vector (6.9a)–(6.9b) we readily find $\xi_1 = Gm_2 \mathbf{n}_{12}/c^2$ and $\xi_2 = -Gm_1 \mathbf{n}_{12}/c^2$, so that $\delta_\xi \mathbf{G} = \mathbf{0}$ and thus $\delta_\xi \mathbf{y}_A = \mathbf{0}$. (See more details in the Appendix B of Ref. [72].)

We are now ready to write down the expansion of $r_A = |\mathbf{x} - \mathbf{y}_A|$ when the CL ratio r_{12}/r tends to zero, where $r_{12} = |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|$ is the binary separation and $r = |\mathbf{x}|$ is the distance of the field point to the center of mass properly defined at the 1PN order. Introducing the Legendre polynomials P_k and using (6.12), we thus have

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 + k X_1 \delta X \frac{v_{12}^2}{2c^2} \right) \left(X_2 \frac{r_{12}}{r} \right)^k P_k(nn_{12}) + \mathcal{O}(G, c^{-4}), \quad (6.14)$$

together with $1 \leftrightarrow 2$. Here the argument of the Legendre polynomial is (nn_{12}) , the scalar product between $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$ and $\mathbf{n}_{12} = \mathbf{y}_{12}/r_{12}$. Notice that the term proportional to G in Eq. (6.12) has consistently been neglected here. In addition, we see from Eqs. (6.11a)–(6.11c) that the scalar products $(n_A v_A)$ are only needed with Newtonian accuracy. Making use of (6.12)–(6.14), we get

$$(n_1 v_1) = X_2 \left[(nv_{12}) - X_2 \frac{r_{12}}{r} (n_{12}v_{12}) \right] \sum_{k=0}^{+\infty} \left(X_2 \frac{r_{12}}{r} \right)^k P_k(nn_{12}) + \mathcal{O}(G, c^{-2}). \quad (6.15)$$

We have a similar expansion for the term $n_1^i n_1^j / r_1$ appearing in the spatial metric g_{ij}^{PN} .

Combining those results, we obtain the CL expansion of the 2PN metric (6.11a)–(6.11c). In the companion paper [263] we shall use this expansion to compute the gravitational recoil generated during the ringdown phase. The gravitational recoil dominantly results from the coupling between the $\ell = 2$ and $\ell = 3$ multipole moments [367], where ℓ is the azimuthal number of the Schwarzschild perturbation. Thus we need to expand the 2PN metric at least up to octupolar order, i.e. up to $k = 3$. In fact it will turn out that it is necessary to push the CL expansion up to $k = 5$ if we want to control all the terms which are of order r_{12}^3 in the multipolar coefficients of the black hole perturbation in the Regge-Wheeler gauge. We shall discuss this point further in Sec. 6.6.2.

At the zero-th order in the CL expansion we evidently recover the Schwarzschild metric of a black hole with mass $M = m_1 + m_2$. Thanks to our gauge transformation (6.9a)–(6.9b) we

find it to be directly given in usual Schwarzschild coordinates, namely

$$g_{00}^{\text{Schw}} = -1 + \frac{2GM}{c^2 r}, \quad (6.16a)$$

$$g_{0i}^{\text{Schw}} = 0, \quad (6.16b)$$

$$g_{ij}^{\text{Schw}} = \delta^{ij} + \frac{2GM}{c^2 r} n^i n^j + \mathcal{O}(G^2), \quad (6.16c)$$

where $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$ is the unit vector in the direction of the field point $\mathbf{x}$. As expected, we find that the Schwarzschild metric is exactly recovered in the limit $v \rightarrow 0$, i.e. if one of the masses vanishes. Thus, we are now in a position to identify the 2PN metric expanded in the CL approximation with a perturbed Schwarzschild black hole with mass M , namely

$$g_{\mu\nu}^{\text{PN}} = g_{\mu\nu}^{\text{Schw}} + h_{\mu\nu}. \quad (6.17)$$

We find that the metric perturbation $h_{\mu\nu}$ expanded up to octupolar order in the CL approximation reads explicitly as

$$\begin{aligned} h_{00} = & v \frac{GM}{c^2 r} \frac{r_{12}^2}{r^2} [3(nn_{12})^2 - 1] - v \frac{G\delta M}{c^2 r} \frac{r_{12}^3}{r^3} (nn_{12}) [5(nn_{12})^2 - 3] \\ & + 3v \frac{GM}{c^4 r} [2v_{12}^2 - (nv_{12})^2] - v \frac{G\delta M}{c^4 r} \frac{r_{12}}{r} \left(6(nv_{12})(n_{12}v_{12}) + (nn_{12})[5v_{12}^2 - 9(nv_{12})^2] \right) \\ & + 3v(1-3v) \frac{GM}{c^4 r} \frac{r_{12}^2}{r^2} \left(v_{12}^2 [3(nn_{12})^2 - 1] - \frac{3}{2} (nv_{12})^2 [5(nn_{12})^2 - 1] \right. \\ & \quad \left. - (n_{12}v_{12})^2 + 6(n_{12}v_{12})(nv_{12})(nn_{12}) \right) \\ & - \frac{3}{2} v(2-5v) \frac{G\delta M}{c^4 r} \frac{r_{12}^3}{r^3} v_{12}^2 [5(nn_{12})^2 - 3] \\ & + 9v(1-2v) \frac{G\delta M}{c^4 r} \frac{r_{12}^3}{r^3} \left((nn_{12})(n_{12}v_{12})^2 + \frac{5}{6} (nn_{12})(nv_{12})^2 [7(nn_{12})^2 - 3] \right. \\ & \quad \left. - (nv_{12})(n_{12}v_{12}) [5(nn_{12})^2 - 1] \right) + \mathcal{O}(G^2, c^{-6}, r_{12}^4), \end{aligned} \quad (6.18a)$$

$$\begin{aligned} h_{0i} = & -4v \frac{GM}{c^3 r} \frac{r_{12}}{r} (nn_{12}) v_{12}^i + 2v \frac{G\delta M}{c^3 r} \frac{r_{12}^2}{r^2} [3(nn_{12})^2 - 1] v_{12}^i \\ & - 2v(1-3v) \frac{GM}{c^3 r} \frac{r_{12}^3}{r^3} (nn_{12}) [5(nn_{12})^2 - 3] v_{12}^i + 2v \frac{G\delta M}{c^5 r} [v_{12}^2 - (nv_{12})^2] v_{12}^i \\ & - 2v(1-3v) \frac{GM}{c^5 r} \frac{r_{12}}{r} \left(2(nv_{12})(n_{12}v_{12}) + (nn_{12})[2v_{12}^2 - 3(nv_{12})^2] \right) v_{12}^i \\ & + v(1-2v) \frac{G\delta M}{c^5 r} \frac{r_{12}^2}{r^2} \left(2(n_{12}v_{12}) [6(nv_{12})(nn_{12}) - (n_{12}v_{12})] \right. \\ & \quad \left. - 3(nv_{12})^2 [5(nn_{12})^2 - 1] \right) v_{12}^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + v(2 - 7v) \frac{G\delta M}{c^5 r} \frac{r_{12}^2}{r^2} v_{12}^2 [3(nn_{12})^2 - 1] v_{12}^i \\
& - 2v(1 - 7v + 13v^2) \frac{GM}{c^5 r} \frac{r_{12}^3}{r^3} v_{12}^2 [5(nn_{12})^2 - 3] v_{12}^i \\
& + v(1 - 5v + 5v^2) \frac{GM}{c^5 r} \frac{r_{12}^3}{r^3} \left(6(nn_{12})(n_{12}v_{12})^2 + 5(nn_{12})(nv_{12})^2 [7(nn_{12})^2 - 3] \right. \\
& \quad \left. - 6(nv_{12})(n_{12}v_{12}) [5(nn_{12})^2 - 1] \right) v_{12}^i + \mathcal{O}(G^2, c^{-6}, r_{12}^4), \quad (6.18b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{ij} = & 2v \frac{GM}{c^2 r} \frac{r_{12}^2}{r^2} \left(n_{12}^i n_{12}^j - 6(nn_{12}) n_{12}^{(i} n^{j)} + \frac{3}{2} [5(nn_{12})^2 - 1] n^i n^j \right) \\
& - 6v \frac{G\delta M}{c^2 r} \frac{r_{12}^3}{r^3} \left((nn_{12}) n_{12}^i n_{12}^j - [5(nn_{12})^2 - 1] n_{12}^{(i} n^{j)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{5}{6} (nn_{12}) [7(nn_{12})^2 - 3] n^i n^j \right) \\
& + v \frac{GM}{c^4 r} [4v_{12}^i v_{12}^j - (nv_{12})^2 \delta^{ij}] \\
& - v \frac{G\delta M}{c^4 r} \frac{r_{12}}{r} \left(2(nv_{12})(n_{12}v_{12}) \delta^{ij} + 2v_{12}^2 n_{12}^{(i} n^{j)} \right. \\
& \quad \left. - 3(nn_{12}) [(nv_{12})^2 \delta^{ij} + v_{12}^2 n^i n^j] + 4(nn_{12}) v_{12}^i v_{12}^j \right) \\
& + v(1 - 3v) \frac{GM}{c^4 r} \frac{r_{12}^2}{r^2} \left(2[3(nn_{12})^2 - 1] v_{12}^i v_{12}^j - \frac{3}{2} (nv_{12})^2 [5(nn_{12})^2 - 1] \delta^{ij} \right. \\
& \quad \left. + (n_{12}v_{12}) [6(nn_{12})(nv_{12}) - (n_{12}v_{12})] \delta^{ij} \right) \\
& + v(1 - 2v) \frac{G\delta M}{c^4 r} \frac{r_{12}^3}{r^3} \left(-2(nn_{12}) [5(nn_{12})^2 - 3] v_{12}^i v_{12}^j \right. \\
& \quad + \frac{5}{2} (nn_{12})(nv_{12})^2 [7(nn_{12})^2 - 3] \delta^{ij} \\
& \quad + 3(nn_{12})(n_{12}v_{12})^2 \delta^{ij} - 3(nv_{12})(n_{12}v_{12}) [5(nn_{12})^2 - 1] \delta^{ij} \\
& \quad + 9v_{12}^2 (nn_{12}) n_{12}^i n_{12}^j - 9v_{12}^2 [5(nn_{12})^2 - 1] n_{12}^{(i} n^{j)} \\
& \quad \left. + \frac{15}{2} v_{12}^2 (nn_{12}) [7(nn_{12})^2 - 3] n^i n^j \right) + \mathcal{O}(G^2, c^{-6}, r_{12}^4). \quad (6.18c)
\end{aligned}$$

Even though we have performed the CL expansion including all terms up to order r_{12}^5 , we only give in (6.18a)–(6.18c) the result up to octupolar order because of the proliferation of terms at higher orders. But we further stress that those terms proportional to r_{12}^4 and r_{12}^5 in Eqs. (6.18a)–(6.18c) are fully under control (in an algebraic computer program), and were needed and used to get the final results given by Eqs. (6.27a)–(6.27l) and (6.28a)–(6.28f) below.

If we come back for a moment to the three dimensionless scales ε_{PM} , ε_{PN} and ε_{CL} defined in the Introduction, we can check that indeed the metric perturbation $h_{\mu\nu}$ admits the general structure given by Eq. (6.6), in which the dimensionless coefficients $h_{\mu\nu}^{(n,k)}$ are only functions of

angles and mass ratios.

Although the identification (6.17) we are making is mathematically crystal clear, we recall that its physical justification is not completely straightforward. We invoke the theory of the matching of asymptotic series, but use it in a *formal* way, since, as commented in the Introduction, the overlapping region between the domains of validity of the PN and CL expansions does not exist. Physically, we also rely on the fact that the merger as observed in numerical simulations lasts a very short time, which makes us feeling that the physics is essentially “conserved” when going from a PN description of the system to a perturbation of the final black hole. In addition, the PN approximation has proved to be very powerful in several past studies, with a domain of validity which often turned out to be larger than the one expected from elementary estimates (see [72] for a recent example in the extreme mass ratio regime). Here we are assuming a rather extreme extension of the domain of validity of the PN expansion — one for which $r_{12} \gtrsim GM/c^2$, corresponding to the ultra-relativistic limit $\varepsilon_{\text{PN}} \lesssim 1$. Nevertheless we shall find below and in the application [263] that the PN approximation performs well.

In the next Section we shall describe our perturbation using the usual black hole perturbation formalism; for this we transform the coordinates from Cartesian $x^\mu \equiv \{ct, x, y, z\}$ to spherical $x^\alpha \equiv \{ct, r, \theta, \varphi\}$. This is appropriate for the spherically symmetric background, and the spherical coordinates are identified with the Schwarzschild(-Droste) coordinate system. Thus,

$$h_{\alpha\beta}(x^\gamma) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\beta} h_{\mu\nu}(x^\rho). \quad (6.19)$$

We then write the scalar products (nn_{12}) and (nv_{12}) in terms of them. Our conventions regarding orientations and various angles are explained in Fig. 6.2. The unit vector $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$ pointing from the center of mass to the field point, and the unit direction $\mathbf{n}_{12} = \mathbf{y}_{12}/r_{12}$ from body 2 to body 1 read

$$\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad (6.20a)$$

$$\mathbf{n}_{12} = (\cos \beta, \sin \beta, 0). \quad (6.20b)$$

Note our unconventional notation for the orbital phase angle β . For a generic non-circular orbit, we have (see Fig. 6.2)

$$(nn_{12}) = \sin \theta \cos(\varphi - \beta), \quad (6.21a)$$

$$(nv_{12}) = \sin \theta [\dot{r}_{12} \cos(\varphi - \beta) + r_{12} \omega_{12} \sin(\varphi - \beta)]. \quad (6.21b)$$

Here the relative angular velocity is $\omega_{12} \equiv \dot{\beta}$ with β being the orbital phase, and $\dot{r}_{12} \equiv (n_{12}v_{12})$ is the inspiral rate, where a dot stands for a derivative with respect to coordinate time t . Finally we find that all the components of the perturbation $h_{\alpha\beta}$ of the Schwarzschild metric $g_{\alpha\beta}^{\text{Schw}}$ (both written in spherical coordinates $x^\alpha = \{ct, r, \theta, \varphi\}$) are given as explicit functions of the spherical coordinates $\{r, \theta, \varphi\}$, and depend on time t through the orbital parameters $\beta, \omega_{12}, r_{12}$ and $\dot{r}_{12}$.

6.6 The 2PN metric in Regge-Wheeler-Zerilli formalism

6.6.1 Multipole decomposition of a Schwarzschild perturbation

We briefly remind (see e.g. [313, 277, 304, 194] for more details) the usual decomposition into multipoles of a first-order perturbation of a Schwarzschild black hole of mass M . As usual, we write the perturbation $h_{\alpha\beta}$ as the sum of two kinds of perturbations,

$$h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}^{(e)} + h_{\alpha\beta}^{(o)}, \quad (6.22)$$

where the even-parity perturbation $h_{\alpha\beta}^{(e)}$ essentially describes a perturbation along an (arbitrary) axis of the spherically symmetric Schwarzschild background, and where the odd-parity perturbation $h_{\alpha\beta}^{(o)}$ essentially describes a perturbation around that axis.⁷ Both perturbations are expanded with respect to a set of 10 tensorial spherical harmonics (cf. the Appendix).

Following Regge and Wheeler's [347] conventions, the even-parity perturbation multipole decomposition reads [194]

$$h_{00}^{(e)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sum_{\ell,m} H_0^{\ell,m} Y_{\ell,m}, \quad (6.23a)$$

$$h_{0r}^{(e)} = \sum_{\ell,m} H_1^{\ell,m} Y_{\ell,m}, \quad (6.23b)$$

$$h_{0\theta}^{(e)} = \sum_{\ell,m} h_0^{\ell,m} \partial_\theta Y_{\ell,m}, \quad (6.23c)$$

$$h_{0\varphi}^{(e)} = \sum_{\ell,m} h_0^{\ell,m} \partial_\varphi Y_{\ell,m}, \quad (6.23d)$$

$$h_{rr}^{(e)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \sum_{\ell,m} H_2^{\ell,m} Y_{\ell,m}, \quad (6.23e)$$

$$h_{r\theta}^{(e)} = \sum_{\ell,m} h_1^{\ell,m} \partial_\theta Y_{\ell,m}, \quad (6.23f)$$

$$h_{r\varphi}^{(e)} = \sum_{\ell,m} h_1^{\ell,m} \partial_\varphi Y_{\ell,m}, \quad (6.23g)$$

$$h_{\theta\theta}^{(e)} = r^2 \sum_{\ell,m} \left(K^{\ell,m} + G^{\ell,m} \partial_\theta^2 \right) Y_{\ell,m}, \quad (6.23h)$$

$$h_{\theta\varphi}^{(e)} = r^2 \sum_{\ell,m} G^{\ell,m} \left(\partial_\theta^2 \partial_\varphi - \cot \theta \partial_\varphi \right) Y_{\ell,m}, \quad (6.23i)$$

$$h_{\varphi\varphi}^{(e)} = r^2 \sum_{\ell,m} \left[K^{\ell,m} \sin^2 \theta + G^{\ell,m} \left(\partial_\varphi^2 + \sin \theta \cos \theta \partial_\theta \right) \right] Y_{\ell,m}, \quad (6.23j)$$

where the summations over the integers ℓ and m range from 2 to infinity, and from $-\ell$ to ℓ respectively. Note that the low multipoles $\ell = 0$ and $\ell = 1$ correspond to the non-radiating pieces

⁷The even-parity perturbation is often called the “polar” perturbation, while the odd-parity one is called the “axial” perturbation. (From now on we pose $G = c = 1$.)

of the perturbation $h_{\alpha\beta}$, and are not relevant to gravitational waves. For example, a monopolar perturbation ($\ell = 0$) would correspond to an infinitesimal shift of the black hole mass. (See e.g. [421, 277] for more details.) Similarly, the multipole decomposition of the odd-parity perturbation is

$$h_{0\theta}^{(\circ)} = - \sum_{\ell,m} k_0^{\ell,m} \frac{\partial_\varphi Y_{\ell,m}}{\sin \theta}, \quad (6.24a)$$

$$h_{0\varphi}^{(\circ)} = \sum_{\ell,m} k_0^{\ell,m} \sin \theta \partial_\theta Y_{\ell,m}, \quad (6.24b)$$

$$h_{r\theta}^{(\circ)} = - \sum_{\ell,m} k_1^{\ell,m} \frac{\partial_\varphi Y_{\ell,m}}{\sin \theta}, \quad (6.24c)$$

$$h_{r\varphi}^{(\circ)} = \sum_{\ell,m} k_1^{\ell,m} \sin \theta \partial_\theta Y_{\ell,m}, \quad (6.24d)$$

$$h_{\theta\theta}^{(\circ)} = \sum_{\ell,m} k_2^{\ell,m} \frac{1}{\sin \theta} (\partial_\theta - \cot \theta) \partial_\varphi Y_{\ell,m}, \quad (6.24e)$$

$$h_{\theta\varphi}^{(\circ)} = \frac{1}{2} \sum_{\ell,m} k_2^{\ell,m} \frac{1}{\sin \theta} (\partial_\varphi^2 + \cos \theta \sin \theta \partial_\theta - \sin^2 \theta \partial_\theta^2) Y_{\ell,m}, \quad (6.24f)$$

$$h_{\varphi\varphi}^{(\circ)} = - \sum_{\ell,m} k_2^{\ell,m} \sin \theta (\partial_\theta - \cot \theta) \partial_\varphi Y_{\ell,m}. \quad (6.24g)$$

Our convention for the scalar spherical harmonics $Y_{\ell,m}$ is given in Eq. (6.51) in the Appendix. In Eqs. (6.23a)–(6.23j) and (6.24a)–(6.24g) all the multipolar coefficients $H_0^{\ell,m}$, $H_1^{\ell,m}$, $H_2^{\ell,m}$, $K^{\ell,m}$, $G^{\ell,m}$, $h_0^{\ell,m}$, $h_1^{\ell,m}$, $k_0^{\ell,m}$, $k_1^{\ell,m}$ and $k_2^{\ell,m}$ are functions of $\{t, r\}$ in Schwarzschild coordinates, and are defined in an arbitrary perturbative gauge.

6.6.2 Computation of the multipole contributions

Given the metric perturbation $h_{\alpha\beta}$ obtained from the CL approximation in the previous Section, we can compute all the coefficients $H_0^{\ell,m}$, $H_1^{\ell,m}$, $\dots$, $k_2^{\ell,m}$. After some calculations consisting mostly of projections over the Zerilli-Mathews tensor spherical harmonics (using their orthonormality properties recalled in the Appendix), we obtain the even and odd multipolar coefficients in a particular gauge, which follows from the choice of gauge made in Eq. (6.9a)–(6.9b). We shall however change to the Regge-Wheeler gauge, where the multipolar coefficients $G^{\ell,m}$, $h_0^{\ell,m}$, $h_1^{\ell,m}$ and $k_2^{\ell,m}$ vanish; this makes the expressions of the Regge-Wheeler and Zerilli master functions much simpler [see Eqs. (6.36a)–(6.36b) below]. Note the difference between the choice of gauge (6.9a)–(6.9b), which was made for the PN metric before its CL expansion, and a choice of gauge within black hole perturbation theory, once the PN metric is in CL form. We transform the results to the Regge-Wheeler gauge by making the substitutions (see e.g. [194, 305] for general expressions):

$$H_0^{\ell,m} \longrightarrow \widetilde{H}_0^{\ell,m} = H_0^{\ell,m} - 2\partial_t h_0^{\ell,m} + r^2 \partial_t^2 G^{\ell,m} + \mathcal{O}(G^2), \quad (6.25a)$$

$$H_1^{\ell,m} \longrightarrow \widetilde{H}_1^{\ell,m} = H_1^{\ell,m} - \partial_r h_0^{\ell,m} - \partial_t h_1^{\ell,m} + r \partial_t G^{\ell,m} + r^2 \partial_{tr}^2 G^{\ell,m} + \mathcal{O}(G^2), \quad (6.25b)$$

$$H_2^{\ell,m} \longrightarrow \widetilde{H}_2^{\ell,m} = H_2^{\ell,m} - 2\partial_r h_1^{\ell,m} + 2r \partial_r G^{\ell,m} + r^2 \partial_r^2 G^{\ell,m} + \mathcal{O}(G^2), \quad (6.25c)$$

$$K^{\ell,m} \longrightarrow \widetilde{K}^{\ell,m} = K^{\ell,m} + r \partial_r G^{\ell,m} - 2h_1^{\ell,m}/r + \mathcal{O}(G^2), \quad (6.25d)$$

$$k_0^{\ell,m} \longrightarrow \widetilde{k}_0^{\ell,m} = k_0^{\ell,m} + \partial_t k_2^{\ell,m}/2, \quad (6.25e)$$

$$k_1^{\ell,m} \longrightarrow \widetilde{k}_1^{\ell,m} = k_1^{\ell,m} + \partial_r k_2^{\ell,m}/2 - k_2^{\ell,m}/r. \quad (6.25f)$$

We can now understand why it was necessary to expand the 2PN metric so as to include terms of order r_{12}^4 and r_{12}^5 in the initial perturbation (6.18a)–(6.18c). In the gauge transformation (6.25a)–(6.25f), the partial time derivatives of the multipolar coefficients in the initial gauge yield lower order powers of r_{12} in the expression of the new multipolar coefficients in Regge-Wheeler's gauge. For example, from (6.25a) we observe that terms like $G^{3,\pm 3} \sim r_{12}^5/c^2$ in the initial gauge produce terms like $c^{-2} \partial_t^2 G^{3,\pm 3} \sim \dot{r}_{12}^2 r_{12}^3/c^4$ in the multipolar coefficients $\widetilde{H}_0^{3,\pm 3}$ in the Regge-Wheeler gauge. Such contributions of order r_{12}^4 and r_{12}^5 in the multipolar coefficients describing the perturbation in the initial gauge need to be consistently included in order to control all terms of order r_{12}^3 in the multipolar coefficients describing the final perturbation in the Regge-Wheeler gauge.

As expected, we find that the simplest of the Einstein field equations in vacuum in the Regge-Wheeler gauge is satisfied [up to terms $\mathcal{O}(G^2, c^{-6}, r_{12}^4)$], namely

$$\widetilde{H}_0^{\ell,m} = \widetilde{H}_2^{\ell,m} \equiv \widetilde{H}^{\ell,m}. \quad (6.26)$$

Finally, we give below all the non-zero multipolar coefficients in the Regge-Wheeler gauge for all (ℓ, m) up to $\ell = 3$. All equations below are valid modulo remainder terms $\mathcal{O}(G^2, c^{-6}, r_{12}^4)$. For the even-parity perturbation,

$$\widetilde{H}^{2,0} = -2\sqrt{\frac{\pi}{5}} v \frac{M}{r} \left\{ \frac{r_{12}^2}{r^2} \left[1 + (1-3v) \left(\frac{9}{14} \dot{r}_{12}^2 + \frac{17}{14} r_{12}^2 \omega_{12}^2 \right) \right] + v_{12}^2 \right\}, \quad (6.27a)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{H}^{2,\pm 2} = & \sqrt{\frac{6\pi}{5}} v \frac{M}{r} \left\{ \frac{r_{12}^2}{r^2} \left[1 + (1-3v) \left(\frac{9}{14} \dot{r}_{12}^2 \mp \frac{10}{21} i r_{12} \omega_{12} \dot{r}_{12} + \frac{1}{6} r_{12}^2 \omega_{12}^2 \right) \right] \right. \\ & \left. + (\dot{r}_{12} \mp i r_{12} \omega_{12})^2 \right\} e^{\mp 2i\beta}, \end{aligned} \quad (6.27b)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{H}^{3,\pm 1} = & \mp \sqrt{\frac{3\pi}{7}} v \frac{\delta M r_{12}}{r^2} \left\{ \frac{r_{12}^2}{r^2} \left[1 + \frac{5}{6} \left(1 - \frac{19}{5} v \right) \dot{r}_{12}^2 \mp \frac{1}{3} (1-2v) i r_{12} \omega_{12} \dot{r}_{12} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{7}{6} \left(1 - \frac{23}{7} v \right) r_{12}^2 \omega_{12}^2 \right] + \left(\dot{r}_{12}^2 \mp \frac{2}{3} i r_{12} \omega_{12} \dot{r}_{12} + \frac{1}{3} r_{12}^2 \omega_{12}^2 \right) \right\} e^{\mp i\beta}, \end{aligned} \quad (6.27c)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{H}^{3,\pm 3} = & \pm \sqrt{\frac{5\pi}{7}} v \frac{\delta M r_{12}}{r^2} \left\{ \frac{r_{12}^2}{r^2} \left[1 + \frac{5}{6} \left(1 - \frac{19}{5} v \right) \dot{r}_{12}^2 \mp (1-2v) i r_{12} \omega_{12} \dot{r}_{12} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{6} (1+7v) r_{12}^2 \omega_{12}^2 \right] + (\dot{r}_{12} \mp i r_{12} \omega_{12})^2 \right\} e^{\mp 3i\beta}, \end{aligned} \quad (6.27d)$$

$$\widetilde{K}^{2,0} = -2\sqrt{\frac{\pi}{5}} v \frac{M}{r} \left\{ \frac{r_{12}^2}{r^2} \left[1 + (1-3v) \left(\frac{9}{14} \dot{r}_{12}^2 + \frac{17}{14} r_{12}^2 \omega_{12}^2 \right) \right] - v_{12}^2 \right\}, \quad (6.27e)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{K}^{2,\pm 2} = & \sqrt{\frac{6\pi}{5}} \nu \frac{M}{r} \left\{ \frac{r_{12}^2}{r^2} \left[1 + (1-3\nu) \left(\frac{9}{14} \dot{r}_{12}^2 \mp \frac{10}{21} i r_{12} \omega_{12} \dot{r}_{12} + \frac{1}{6} r_{12}^2 \omega_{12}^2 \right) \right] \right. \\ & \left. - (\dot{r}_{12} \mp i r_{12} \omega_{12})^2 \right\} e^{\mp 2i\beta}, \end{aligned} \quad (6.27f)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{K}^{3,\pm 1} = & \mp \sqrt{\frac{3\pi}{7}} \nu \frac{\delta M r_{12}}{r^2} \left\{ \frac{r_{12}^2}{r^2} \left[1 + \frac{5}{6} \left(1 - \frac{19}{5} \nu \right) \dot{r}_{12}^2 \mp \frac{1}{3} (1-2\nu) i r_{12} \omega_{12} \dot{r}_{12} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{7}{6} \left(1 - \frac{23}{7} \nu \right) r_{12}^2 \omega_{12}^2 \right] - \left(\dot{r}_{12} \mp \frac{2}{3} i r_{12} \omega_{12} \dot{r}_{12} + \frac{1}{3} r_{12}^2 \omega_{12}^2 \right) \right\} e^{\mp i\beta}, \end{aligned} \quad (6.27g)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{K}^{3,\pm 3} = & \pm \sqrt{\frac{5\pi}{7}} \nu \frac{\delta M r_{12}}{r^2} \left\{ \frac{r_{12}^2}{r^2} \left[1 + \frac{5}{6} \left(1 - \frac{19}{5} \nu \right) \dot{r}_{12}^2 \mp (1-2\nu) i r_{12} \omega_{12} \dot{r}_{12} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{6} (1+7\nu) r_{12}^2 \omega_{12}^2 \right] - (\dot{r}_{12} \mp i r_{12} \omega_{12})^2 \right\} e^{\mp 3i\beta}, \end{aligned} \quad (6.27h)$$

$$\widetilde{H}_1^{2,0} = 4 \sqrt{\frac{\pi}{5}} \nu \frac{M r_{12}}{r^2} \dot{r}_{12} \left[1 + \frac{9}{14} (1-3\nu) v_{12}^2 \right], \quad (6.27i)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_1^{2,\pm 2} = & -2 \sqrt{\frac{6\pi}{5}} \nu \frac{M r_{12}}{r^2} (\dot{r}_{12} \mp i r_{12} \omega_{12}) \left[1 + (1-3\nu) \left(\frac{9}{14} \dot{r}_{12}^2 \mp \frac{5}{21} i r_{12} \omega_{12} \dot{r}_{12} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{17}{42} r_{12}^2 \omega_{12}^2 \right) \right] e^{\mp 2i\beta}, \end{aligned} \quad (6.27j)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_1^{3,\pm 1} = & \pm 2 \sqrt{\frac{3\pi}{7}} \nu \frac{\delta M r_{12}^2}{r^3} \left[\dot{r}_{12} \mp \frac{1}{3} i r_{12} \omega_{12} + v_{12}^2 \left\{ \frac{5}{6} \left(1 - \frac{19}{5} \nu \right) \dot{r}_{12} \right. \right. \\ & \left. \left. \mp \frac{1}{2} (1-3\nu) i r_{12} \omega_{12} \right\} \right] e^{\mp i\beta}, \end{aligned} \quad (6.27k)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_1^{3,\pm 3} = & \mp 2 \sqrt{\frac{5\pi}{7}} \nu \frac{\delta M r_{12}^2}{r^3} (\dot{r}_{12} \mp i r_{12} \omega_{12}) \left[1 + \frac{5}{6} \left(1 - \frac{19}{5} \nu \right) \dot{r}_{12}^2 \right. \\ & \left. \mp \frac{2}{3} (1-2\nu) i r_{12} \omega_{12} \dot{r}_{12} + \frac{1}{6} (1-11\nu) r_{12}^2 \omega_{12}^2 \right] e^{\mp 3i\beta}, \end{aligned} \quad (6.27l)$$

where we made use of the relation $v_{12}^2 = \dot{r}_{12}^2 + r_{12}^2 \omega_{12}^2$ when convenient. Similarly, the non-zero multipolar coefficients for the odd-parity perturbation are

$$\begin{aligned} \widetilde{k}_0^{2,\pm 1} = & \pm 2 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \nu \frac{\delta M r_{12}^2}{r^2} r_{12} \omega_{12} \left[1 + \frac{9}{14} \left(1 - \frac{13}{3} \nu \right) \dot{r}_{12}^2 \mp \frac{5}{28} (1-2\nu) i r_{12} \omega_{12} \dot{r}_{12} \right. \\ & \left. + \frac{13}{28} \left(1 - \frac{68}{13} \nu \right) r_{12}^2 \omega_{12}^2 \right] e^{\mp i\beta}, \end{aligned} \quad (6.28a)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{k}_0^{3,0} = & -\sqrt{\frac{\pi}{7}} \nu \frac{M r_{12}^3}{r^3} r_{12} \omega_{12} \left[(1-3\nu) + \left(\frac{5}{6} - \frac{37}{6} \nu + \frac{73}{6} \nu^2 \right) \dot{r}_{12}^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{11}{18} - \frac{91}{18} \nu + \frac{199}{18} \nu^2 \right) r_{12}^2 \omega_{12}^2 \right], \end{aligned} \quad (6.28b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_0^{3,\pm 2} = & \frac{1}{3} \sqrt{\frac{15\pi}{14}} v \frac{Mr_{12}^3}{r^3} r_{12}\omega_{12} \left[(1-3v) + \left(\frac{5}{6} - \frac{37}{6}v + \frac{73}{6}v^2 \right) \dot{r}_{12}^2 \right. \\ & \left. \mp \left(\frac{8}{15} - \frac{8}{3}v + \frac{8}{3}v^2 \right) i r_{12}\omega_{12} \dot{r}_{12} + \left(\frac{3}{10} - \frac{7}{2}v + \frac{19}{2}v^2 \right) r_{12}^2 \omega_{12}^2 \right] e^{\mp 2i\beta}, \end{aligned} \quad (6.28c)$$

$$\tilde{k}_1^{2,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{8\pi}{15}} v \frac{\delta M r_{12}}{r} (\dot{r}_{12} \mp i r_{12}\omega_{12}) r_{12}\omega_{12} e^{\mp i\beta}, \quad (6.28d)$$

$$\tilde{k}_1^{3,0} = \sqrt{\frac{\pi}{7}} v \frac{Mr_{12}^2}{r^2} (1-3v) r_{12}\omega_{12} \dot{r}_{12}, \quad (6.28e)$$

$$\tilde{k}_1^{3,\pm 2} = -\sqrt{\frac{5\pi}{42}} v \frac{Mr_{12}^2}{r^2} (1-3v) (\dot{r}_{12} \mp i r_{12}\omega_{12}) r_{12}\omega_{12} e^{\mp 2i\beta}. \quad (6.28f)$$

One can check that any given multipolar coefficient $F^{\ell,m}$ in (6.27a)–(6.27l) and (6.28a)–(6.28f) satisfies the property $F^{\ell,-m} = (-1)^m \bar{F}^{\ell,m}$, where the overbar denotes the complex conjugation, consistently with the fact that the initial perturbation is real-valued. Furthermore, all the multipolar coefficients associated with the odd (or axial) perturbation vanish as expected in the zero angular momentum limit $\omega_{12} = 0$, which corresponds to purely radial infall. We shall consider such head-on collisions in Sec. 6.8.

6.7 Verification of the Einstein field equations

As an important check of the previous results, we now verify that all the perturbative Einstein equations are satisfied. This requires the computation of the partial time derivatives of the multipolar coefficients (6.27a)–(6.27l) and (6.28a)–(6.28f). Recall that a generic multipolar coefficient $F^{\ell,m}$ is function of the coordinate time t through the orbital phase $\beta(t)$, the orbital frequency $\omega_{12}(t) = \dot{\beta}(t)$, the distance $r_{12}(t)$, and the inspiral rate $\dot{r}_{12}(t)$. Therefore, we have

$$\partial_t F^{\ell,m} = \omega_{12} \frac{\partial F^{\ell,m}}{\partial \beta} + \dot{\omega}_{12} \frac{\partial F^{\ell,m}}{\partial \omega_{12}} + \dot{r}_{12} \frac{\partial F^{\ell,m}}{\partial r_{12}} + \ddot{r}_{12} \frac{\partial F^{\ell,m}}{\partial \dot{r}_{12}}. \quad (6.29)$$

The relative position, velocity, and acceleration of the two bodies can be expressed as

$$\mathbf{y}_{12} = r_{12} \mathbf{n}_{12}, \quad (6.30a)$$

$$\mathbf{v}_{12} = \dot{r}_{12} \mathbf{n}_{12} + r_{12} \omega_{12} \boldsymbol{\lambda}_{12}, \quad (6.30b)$$

$$\mathbf{a}_{12} = (\ddot{r}_{12} - r_{12} \omega_{12}^2) \mathbf{n}_{12} + (r_{12} \dot{\omega}_{12} + 2\dot{r}_{12} \omega_{12}) \boldsymbol{\lambda}_{12}, \quad (6.30c)$$

where we have introduced the Frenet frame $(\mathbf{n}_{12}, \boldsymbol{\lambda}_{12})$ defined by $\boldsymbol{\lambda}_{12} = \hat{\mathbf{L}} \times \mathbf{n}_{12}$, with $\hat{\mathbf{L}}$ being the unit vector orthogonal to the orbital plane, and in the same direction as the orbital angular momentum. Since we are working at linear order in G , the acceleration $\mathbf{a}_{12}$ which is proportional to G can be neglected here, and we have

$$\ddot{r}_{12} = \omega_{12}^2 r_{12} + \mathcal{O}(G), \quad (6.31a)$$

$$\dot{\omega}_{12} = -2\omega_{12} \frac{\dot{r}_{12}}{r_{12}} + \mathcal{O}(G). \quad (6.31b)$$

Introducing these expressions of $\ddot{r}_{12}$ and $\dot{\omega}_{12}$ into (6.29), and neglecting terms $\mathcal{O}(G^2, c^{-6}, r_{12}^4)$, we find for the even perturbation the non-zero partial time derivatives

$$\partial_t \widetilde{H}^{2,0} = -4\sqrt{\frac{\pi}{5}} v \frac{Mr_{12}}{r^3} \dot{r}_{12} \left[1 + \frac{9}{14}(1-3v)v_{12}^2 \right], \quad (6.32a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \widetilde{H}^{2,\pm 2} = & 2\sqrt{\frac{6\pi}{5}} v \frac{Mr_{12}}{r^3} (\dot{r}_{12} \mp i r_{12} \omega_{12}) \left[1 + (1-3v) \left(\frac{9}{14} \dot{r}_{12}^2 \mp \frac{5}{21} i r_{12} \omega_{12} \dot{r}_{12} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{17}{42} r_{12}^2 \omega_{12}^2 \right) \right] e^{\mp 2i\beta}, \end{aligned} \quad (6.32b)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \widetilde{H}^{3,\pm 1} = & \mp \sqrt{\frac{3\pi}{7}} v \frac{\delta M}{r^2} \left\{ \frac{r_{12}^2}{r^2} \left[(3\dot{r}_{12} \mp i r_{12} \omega_{12}) + \frac{5}{2} \left(1 - \frac{19}{5} v \right) v_{12}^2 \dot{r}_{12} \right. \right. \\ & \left. \left. \mp \frac{3}{2} (1-3v) v_{12}^2 i r_{12} \omega_{12} \right] + v_{12}^2 (\dot{r}_{12} \mp i r_{12} \omega_{12}) \right\} e^{\mp i\beta}, \end{aligned} \quad (6.32c)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \widetilde{H}^{3,\pm 3} = & \pm \sqrt{\frac{5\pi}{7}} v \frac{\delta M}{r^2} (\dot{r}_{12} \mp i r_{12} \omega_{12}) \left\{ \frac{r_{12}^2}{r^2} \left[3 + \frac{5}{2} \left(1 - \frac{19}{5} v \right) \dot{r}_{12}^2 \right. \right. \\ & \left. \left. \mp 2(1-2v) i r_{12} \omega_{12} \dot{r}_{12} + \frac{1}{2} (1-11v) r_{12}^2 \omega_{12}^2 \right] + (\dot{r}_{12} \mp i r_{12} \omega_{12})^2 \right\} e^{\mp 3i\beta}, \end{aligned} \quad (6.32d)$$

$$\partial_t \widetilde{K}^{2,0} = -4\sqrt{\frac{\pi}{5}} v \frac{Mr_{12}}{r^3} \dot{r}_{12} \left[1 + \frac{9}{14}(1-3v)v_{12}^2 \right], \quad (6.32e)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \widetilde{K}^{2,\pm 2} = & 2\sqrt{\frac{6\pi}{5}} v \frac{Mr_{12}}{r^3} (\dot{r}_{12} \mp i r_{12} \omega_{12}) \left[1 + (1-3v) \left(\frac{9}{14} \dot{r}_{12}^2 \mp \frac{5}{21} i r_{12} \omega_{12} \dot{r}_{12} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{17}{42} r_{12}^2 \omega_{12}^2 \right) \right] e^{\mp 2i\beta}, \end{aligned} \quad (6.32f)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \widetilde{K}^{3,\pm 1} = & \mp \sqrt{\frac{3\pi}{7}} v \frac{\delta M}{r^2} \left\{ \frac{r_{12}^2}{r^2} \left[(3\dot{r}_{12} \mp i r_{12} \omega_{12}) + \frac{5}{2} \left(1 - \frac{19}{5} v \right) v_{12}^2 \dot{r}_{12} \right. \right. \\ & \left. \left. \mp \frac{3}{2} (1-3v) v_{12}^2 i r_{12} \omega_{12} \right] - v_{12}^2 (\dot{r}_{12} \mp i r_{12} \omega_{12}) \right\} e^{\mp i\beta}, \end{aligned} \quad (6.32g)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \widetilde{K}^{3,\pm 3} = & \pm \sqrt{\frac{5\pi}{7}} v \frac{\delta M}{r^2} (\dot{r}_{12} \mp i r_{12} \omega_{12}) \left\{ \frac{r_{12}^2}{r^2} \left[3 + \frac{5}{2} \left(1 - \frac{19}{5} v \right) \dot{r}_{12}^2 \right. \right. \\ & \left. \left. \mp 2(1-2v) i r_{12} \omega_{12} \dot{r}_{12} + \frac{1}{2} (1-11v) r_{12}^2 \omega_{12}^2 \right] - (\dot{r}_{12} \mp i r_{12} \omega_{12})^2 \right\} e^{\mp 3i\beta}, \end{aligned} \quad (6.32h)$$

$$\partial_t \widetilde{H}_1^{2,0} = 4\sqrt{\frac{\pi}{5}} v \frac{M}{r^2} v_{12}^2 \left[1 + \frac{9}{14}(1-3v)v_{12}^2 \right], \quad (6.32i)$$

$$\partial_t \widetilde{H}_1^{2,\pm 2} = -2\sqrt{\frac{6\pi}{5}} v \frac{M}{r^2} (\dot{r}_{12} \mp i r_{12} \omega_{12})^2 \left[1 + \frac{9}{14}(1-3v)v_{12}^2 \right] e^{\mp 2i\beta}, \quad (6.32j)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \widetilde{H}_1^{3,\pm 1} = & \pm 4\sqrt{\frac{3\pi}{7}} v \frac{\delta M r_{12}}{r^3} (\dot{r}_{12} \mp i r_{12} \omega_{12}) \left[\dot{r}_{12} \pm \frac{1}{3} i r_{12} \omega_{12} \right. \\ & \left. + v_{12}^2 \left\{ \frac{5}{6} \left(1 - \frac{19}{5} v \right) \dot{r}_{12} \pm \frac{1}{6} (1-5v) i r_{12} \omega_{12} \right\} \right] e^{\mp i\beta}, \end{aligned} \quad (6.32k)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \widetilde{H}_1^{3,\pm 3} = & \mp 4 \sqrt{\frac{5\pi}{7}} \nu \frac{\delta M r_{12}}{r^3} (\dot{r}_{12} \mp i r_{12} \omega_{12})^2 \left[1 + \frac{5}{6} \left(1 - \frac{19}{5} \nu \right) \dot{r}_{12}^2 \right. \\ & \left. \mp \frac{1}{3} (1 - 2\nu) i r_{12} \omega_{12} \dot{r}_{12} + \frac{1}{2} (1 - 5\nu) r_{12}^2 \omega_{12}^2 \right] e^{\mp 3i\beta}, \end{aligned} \quad (6.32l)$$

and for the odd perturbation

$$\partial_t \widetilde{k}_0^{2,\pm 1} = \pm 2 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \nu \frac{\delta M r_{12}}{r^2} r_{12} \omega_{12} (\dot{r}_{12} \mp i r_{12} \omega_{12}) \left[1 + \frac{9}{14} \left(1 - \frac{13}{3} \nu \right) v_{12}^2 \right] e^{\mp i\beta}, \quad (6.33a)$$

$$\partial_t \widetilde{k}_0^{3,0} = -2 \sqrt{\frac{\pi}{7}} \nu \frac{M r_{12}^2}{r^3} r_{12} \omega_{12} \dot{r}_{12} \left[(1 - 3\nu) + \left(\frac{5}{6} - \frac{37}{6} \nu + \frac{73}{6} \nu^2 \right) v_{12}^2 \right], \quad (6.33b)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \widetilde{k}_0^{3,\pm 2} = & \frac{2}{3} \sqrt{\frac{15\pi}{14}} \nu \frac{M r_{12}^2}{r^3} r_{12} \omega_{12} (\dot{r}_{12} \mp i r_{12} \omega_{12}) \left[(1 - 3\nu) + \left(\frac{5}{6} - \frac{37}{6} \nu + \frac{73}{6} \nu^2 \right) \dot{r}_{12}^2 \right. \\ & \left. \mp \frac{4}{15} (1 - 5\nu + 5\nu^2) i r_{12} \omega_{12} \dot{r}_{12} + \left(\frac{17}{30} - \frac{29}{6} \nu + \frac{65}{6} \nu^2 \right) r_{12}^2 \omega_{12}^2 \right] e^{\mp 2i\beta}, \end{aligned} \quad (6.33c)$$

$$\partial_t \widetilde{k}_1^{3,0} = \sqrt{\frac{\pi}{7}} \nu \frac{M r_{12}}{r^2} (1 - 3\nu) v_{12}^2 r_{12} \omega_{12}, \quad (6.33d)$$

$$\partial_t \widetilde{k}_1^{3,\pm 2} = -\sqrt{\frac{5\pi}{42}} \nu \frac{M r_{12}}{r^2} (1 - 3\nu) (\dot{r}_{12} \mp i r_{12} \omega_{12})^2 r_{12} \omega_{12} e^{\mp 2i\beta}. \quad (6.33e)$$

We then check that the Einstein equations are satisfied for all (ℓ, m) up to $\ell = 3$ for a *generic non circular* orbit, up to terms $\mathcal{O}(G^2, c^{-6}, r_{12}^4)$. We give them here in the linear case for completeness (see e.g. [421, 194, 356] for general expressions). For the even perturbation, these seven equations read

$$\partial_t \widetilde{H}_1^{\ell,m} - \partial_r (\widetilde{H}^{\ell,m} - \widetilde{K}^{\ell,m}) = 0, \quad (6.34a)$$

$$\partial_t (\widetilde{H}^{\ell,m} + \widetilde{K}^{\ell,m}) - \partial_r \widetilde{H}_1^{\ell,m} = 0, \quad (6.34b)$$

$$\partial_t \left[\partial_r \widetilde{K}^{\ell,m} - \frac{1}{r} (\widetilde{H}^{\ell,m} - \widetilde{K}^{\ell,m}) \right] - \frac{\ell(\ell+1)}{2r^2} \widetilde{H}_1^{\ell,m} = 0, \quad (6.34c)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \left[\partial_t \widetilde{K}^{\ell,m} - \frac{2}{r} \widetilde{H}_1^{\ell,m} \right] + \frac{1}{r} \partial_r (\widetilde{H}^{\ell,m} - \widetilde{K}^{\ell,m}) \\ - \frac{(\ell-1)(\ell+2)}{2r^2} (\widetilde{H}^{\ell,m} - \widetilde{K}^{\ell,m}) = 0, \end{aligned} \quad (6.34d)$$

$$\begin{aligned} \partial_r^2 \widetilde{K}^{\ell,m} - \frac{1}{r} \partial_r (\widetilde{H}^{\ell,m} - 3\widetilde{K}^{\ell,m}) - \frac{(\ell-1)(\ell+2)}{2r^2} \widetilde{K}^{\ell,m} \\ - \left[\frac{\ell(\ell+1)}{2} + 1 \right] \frac{\widetilde{H}^{\ell,m}}{r^2} = 0, \end{aligned} \quad (6.34e)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \left[\partial_t (\tilde{H}^{\ell,m} + \tilde{K}^{\ell,m}) - 2 \left(\partial_r \tilde{H}_1^{\ell,m} + \frac{\tilde{H}_1^{\ell,m}}{r} \right) \right] + \partial_r^2 (\tilde{H}^{\ell,m} - \tilde{K}^{\ell,m}) \\ + \frac{2}{r} \partial_r (\tilde{H}^{\ell,m} - \tilde{K}^{\ell,m}) = 0, \end{aligned} \quad (6.34f)$$

together with Eq. (6.26). Note that these equations are not all independent. For example, if Eqs. (6.34a) and (6.34b) are satisfied, then Eq. (6.34f) is also satisfied. For the odd perturbation, the three remaining equations are

$$\partial_t \tilde{k}_0^{\ell,m} - \partial_r \tilde{k}_1^{\ell,m} = 0, \quad (6.35a)$$

$$\partial_t \left[\partial_r \tilde{k}_1^{\ell,m} + \frac{2}{r} \tilde{k}_1^{\ell,m} \right] - \partial_r^2 \tilde{k}_0^{\ell,m} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \tilde{k}_0^{\ell,m} = 0, \quad (6.35b)$$

$$\partial_t \left[\partial_t \tilde{k}_1^{\ell,m} - \partial_r \tilde{k}_0^{\ell,m} + \frac{2}{r} \tilde{k}_0^{\ell,m} \right] + \frac{(\ell-1)(\ell+2)}{r^2} \tilde{k}_1^{\ell,m} = 0. \quad (6.35c)$$

Assuming that all terms of a given equation in (6.34a)–(6.34f) and (6.35a)–(6.35c) are of the same order of magnitude, we can now understand by coming back to the initial metric decomposition (6.23a)–(6.23j) and (6.24a)–(6.24g) that it is necessary to expand g_{00}^{PN} , g_{0i}^{PN} and g_{ij}^{PN} at the same PN order in Eqs. (6.11a)–(6.11c), i.e. up to $\mathcal{O}(c^{-5})$ included. The previous verification of the field equations provides a good check of the algebra yielding the perturbation coefficients (6.27a)–(6.27l) and (6.28a)–(6.28f).

6.8 Numerical evolution of the perturbation

6.8.1 Regge-Wheeler and Zerilli master functions

From the multipolar coefficients $\tilde{H}^{\ell,m}$, $\tilde{H}_1^{\ell,m}$, $\tilde{K}^{\ell,m}$, $\tilde{k}_0^{\ell,m}$ and $\tilde{k}_1^{\ell,m}$ one can construct for any (ℓ, m) two gauge-invariant scalar fields, namely the Regge-Wheeler [347] function $\Psi_{\ell,m}^{(o)}$ and the Zerilli [421] function $\Psi_{\ell,m}^{(e)}$, which contain all the information about the perturbation of the Schwarzschild metric. Gauge-invariant expressions of $\Psi_{\ell,m}^{(e,o)}$ in terms of the multipolar coefficients in a general gauge are given e.g. in [277, 304, 351]. In the Regge-Wheeler gauge [347], the coefficients $\tilde{G}^{\ell,m}$, $\tilde{h}_0^{\ell,m}$, $\tilde{h}_1^{\ell,m}$ and $\tilde{k}_2^{\ell,m}$ vanish, so that these expressions get simplified and read

$$\Psi_{\ell,m}^{(e)} = \frac{r}{2(\lambda_\ell + 1)} \left(\tilde{K}^{\ell,m} + \frac{r - 2M}{\lambda_\ell r + 3M} \left[\tilde{H}^{\ell,m} - r \partial_r \tilde{K}^{\ell,m} \right] \right), \quad (6.36a)$$

$$\Psi_{\ell,m}^{(o)} = \frac{r}{2\lambda_\ell} \left(\partial_t \tilde{k}_1^{\ell,m} - \partial_r \tilde{k}_0^{\ell,m} + \frac{2}{r} \tilde{k}_0^{\ell,m} \right), \quad (6.36b)$$

where we introduced the widely used notation $\lambda_\ell \equiv \frac{1}{2}(\ell - 1)(\ell + 2)$ [117]. Note that the multipolar coefficient $\tilde{H}_1^{\ell,m}$ does not enter the expression of $\Psi_{\ell,m}^{(e)}$. Because we are considering linear perturbations, the master functions $\Psi_{\ell,m}^{(e,o)}$ are defined up to a scale factor. We use the same convention as in [304], emphasizing the link between $\Psi_{\ell,m}^{(e,o)}$ and the polarization states h_+ and

$h_{\times}$ of the gravitational waves at future null infinity; with our convention the two independent $+$ and $\times$ polarization states are given by

$$h_+ - i h_{\times} = \frac{1}{r} \sum_{\ell, m} \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} \left(\Psi_{\ell, m}^{(e)} + i \Psi_{\ell, m}^{(o)} \right) {}_{-2}Y_{\ell, m} + \mathcal{O}(r^{-2}), \quad (6.37)$$

where ${}_{-2}Y_{\ell, m}$ denotes the spin-weighted spherical harmonics of weight -2 . The asymptotic waveform is also related to the more fundamental Weyl scalar Ψ_4 , which admits a closed-form expression in terms of the master functions $\Psi_{\ell, m}^{(e,o)}$ (see the Appendix).

The two master functions satisfy a wave equation with specific potentials $\mathcal{V}_{\ell}^{(e,o)}$,

$$\left(\partial_t^2 - \partial_{r_*}^2 + \mathcal{V}_{\ell}^{(e,o)} \right) \Psi_{\ell, m}^{(e,o)} = 0, \quad (6.38)$$

where the so-called tortoise coordinate r_* is related to the Schwarzschild radial coordinate r by

$$r_* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right). \quad (6.39)$$

Notice that these wave equations are only valid in vacuum; otherwise one has to include a source term in the right-hand-side of (6.38), see e.g. [277, 304]. The Zerilli and Regge-Wheeler potentials read respectively

$$\mathcal{V}_{\ell}^{(e,o)} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \mathcal{U}_{\ell}^{(e,o)} \right), \quad (6.40)$$

with

$$\mathcal{U}_{\ell}^{(e)} = \frac{\lambda_{\ell}(\lambda_{\ell} + 2)r^2 + 3M(r - M)}{(\lambda_{\ell} r + 3M)^2}, \quad (6.41a)$$

$$\mathcal{U}_{\ell}^{(o)} = 1. \quad (6.41b)$$

One can easily prove that $\frac{5}{7} < \mathcal{U}_{\ell}^{(e)} < 2$ for all $\ell \geq 2$ and for all r such that $2M < r < +\infty$, showing that the potentials $\mathcal{V}_{\ell}^{(e)}$ and $\mathcal{V}_{\ell}^{(o)}$ are very similar [117].

6.8.2 Numerical evolution

The wave equations (6.38) are evolved numerically using the initial conditions at time $t = 0$ and for any tortoise radius r_* , namely $\Psi_{\ell, m}^{(e,o)}(0, r_*)$ and $\partial_t \Psi_{\ell, m}^{(e,o)}(0, r_*)$, derived from the CL expansion of the 2PN metric for compact (i.e. point-mass) binaries. These initial conditions are calculated by plugging Eqs. (6.27a)–(6.27l) and (6.28a)–(6.28f) and their partial time derivatives (6.32a)–(6.32l) and (6.33a)–(6.33e) into (6.36a)–(6.36b) and their partial time derivatives.

We use Dirichlet boundary conditions, setting $\Psi_{\ell, m}^{(e,o)}(t, r_*^{\min}) = \Psi_{\ell, m}^{(e,o)}(t, r_*^{\max}) = 0$ at some radii $r_*^{\min}$ and $r_*^{\max}$. We choose the radii $r_*^{\min}$ and $r_*^{\max}$ in such a way that these boundary conditions are causally disconnected from the computational domain, i.e. the spurious radiation generated on the boundaries $\{t, r_*^{\min, \max}\}$ does not have time to propagate up to the extraction

radius $r_*^{\text{ext}} \equiv \frac{1}{2}(r_*^{\text{max}} + r_*^{\text{min}})$ for $0 \leq t \leq t^{\text{max}}$, where $t^{\text{max}} \equiv \frac{1}{2}(r_*^{\text{max}} - r_*^{\text{min}})$. Extending the computational domain to $[r_*^{\text{min}}, r_*^{\text{max}}] \times \mathbb{R}_+$ would require using the Sommerfeld boundary conditions [380] $(\partial_t + \partial_{r_*})\Psi_{\ell,m}^{(e,o)}(t, r_*^{\text{max}}) = 0$ and $(\partial_t - \partial_{r_*})\Psi_{\ell,m}^{(e,o)}(t, r_*^{\text{min}}) = 0$, which are approximate boundary conditions, or even better some exact boundary conditions [259, 258]. The results below are based on computations where we have chosen $r_*^{\text{min}} = -60M$ and $r_*^{\text{max}} = 660M$, such that $r_*^{\text{ext}} = 300M$ and $t^{\text{max}} = 360M$.

A simple explicit second-order finite difference scheme has been used to evolve the wave equations (6.38). We always choose the spatial grid resolution δr_* and the time increment δt such that the so-called Courant-Friedrichs-Lewy condition $\delta t < \delta r_*$ is verified; therefore the code is stable. The results in Figs 6.4, 6.5, 6.6 and 6.7 below are based on computations where we used a spatial grid resolution $\delta r_* = 0.2M$, and a time increment $\delta t = 0.1M$.

In order to check the second-order convergence of the code, we computed (for example) the real part of the $(\ell, m) = (2, 2)$ mode of the Zerilli master function, $\psi \equiv \Re[\Psi_{2,2}^{(e)}]$, for different spatial grid resolutions $\delta r_* = 0.2M/h$, where $h = 1, 2, 4$, with a constant time increment $\delta t = 0.025M$, in the case of an unequal mass binary on circular orbit with $\nu = 0.185$, $r_{12} = 1.6M$ and $\beta = 0$. The good overlapping of the differences $\psi|_{h=1} - \psi|_{h=2}$ and $4(\psi|_{h=2} - \psi|_{h=4})$ as shown in Fig. 6.3 demonstrates the second-order accuracy of the code.

The numerical code was tested in several ways, and against previous published work as well as on some material presented in [263]:

1. Using the Misner initial data [297] as given by Price & Pullin [343], we reproduced in the case of head-on collision the waveform of their Fig. 2 and the associated radiated energy; cf. Eq. (16) in [343].
2. Using the initial data provided by Sopuerta *et al.* [381] (a conformally flat 3-metric with a Bowen-York extrinsic curvature and a Brill-Lindquist conformal factor), we reproduced their waveforms in Fig. 7, and the fluxes of energy, angular momentum and linear momentum of their Figs. 4, 5 and 8 respectively.⁸
3. Checking that the total energy, angular momentum and linear momentum radiated do not depend on the physically irrelevant initial phase β ; and that the components of the integrated linear momentum flux, or gravitational recoil, transform according to the usual law for vectors under a shift of the initial phase β .
4. Checking that the quasi-normal mode frequencies of the waveforms are in good agreement with theoretical values [313, 242, 50].

6.8.3 Ringdown waveforms for head-on collisions

We first consider head-on collisions for which the perturbation is purely polar, i.e. $\Psi_{\ell,m}^{(o)} = 0$. We thus show in Figs. 6.4 and 6.5 the real part of the Zerilli master function for even-parity (or polar) perturbations, $\Re[\Psi_{\ell,m}^{(e)}]$. Initial data for this case are obtained by setting $\omega_{12} = 0$ (no

⁸The updated plots of Fig. 7 and Fig. 8 of [381] (taking into account the corrections from their first Erratum) are available on the e-Print server arXiv.org. Fig. 7 actually shows the Zerilli-Moncrief and Cunningham-Price-Moncrief master functions, and not their time derivatives as stated.

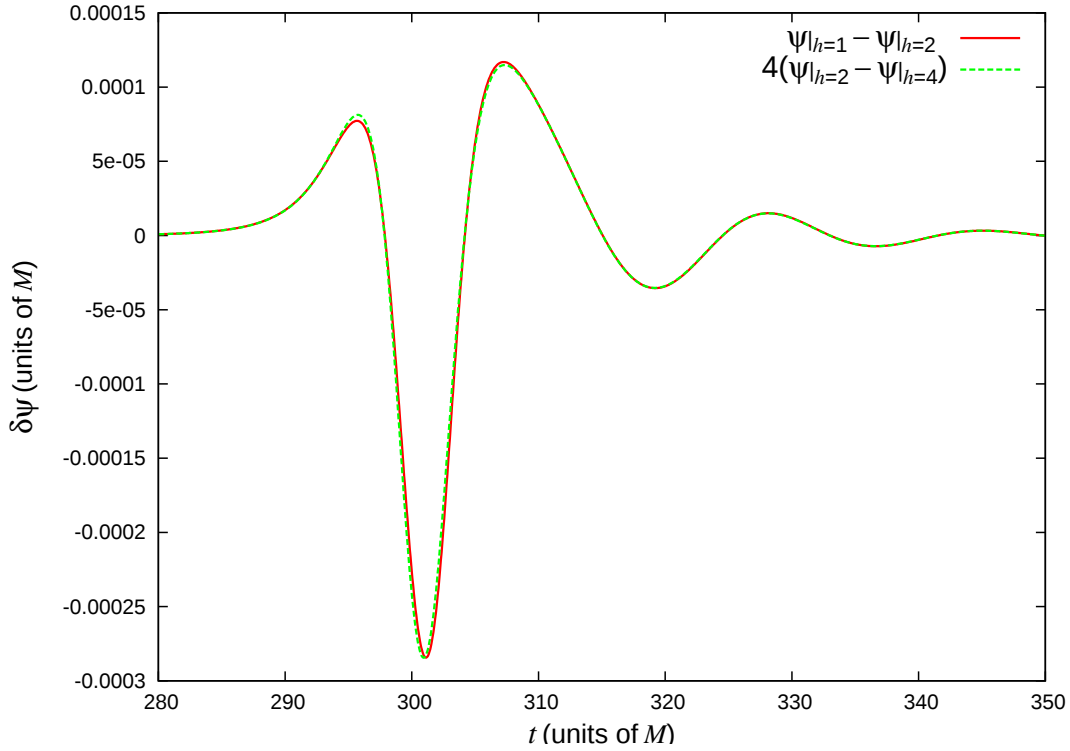


Figure 6.3: The good overlapping of the differences $\psi|_{h=1} - \psi|_{h=2}$ and $4(\psi|_{h=2} - \psi|_{h=4})$ demonstrates the second-order accuracy of the code.

orbital angular momentum) and $\dot{r}_{12} = 0$ (time-symmetric initial conditions) in the expressions (6.27a)–(6.27l) and (6.32a)–(6.32l) of the even-parity multipolar coefficients and their partial time derivatives.

In Fig. 6.4 we consider an equal mass binary ($\nu = \frac{1}{4}$), and compare our 2PN-accurate results to those of Abrahams & Price [4], who studied similar head-on collisions using Brill-Lindquist (BL) initial data [98]. We shall restrict the comparison to the $(\ell, m) = (2, 0)$ mode $\Psi_{2,0}^{(e)}$ for simplicity. This comparison requires a detailed discussion of the relation between the two notions of distance between the two bodies used in both initial data sets. Using our conventions for the perturbation and various angles, we find that the only non-vanishing multipolar coefficients in the BL geometry are

$$\widetilde{H}_{\text{BL}}^{2,0} = \widetilde{K}_{\text{BL}}^{2,0} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{ML^2}{R^3} \frac{1}{1 + \frac{M}{2R}}, \quad (6.42)$$

where $R = \frac{1}{4} \left(\sqrt{r} + \sqrt{r - 2M} \right)^2$ is the isotropic radial coordinate, and L is the distance between the two black holes of the BL solution. Because the multipolar coefficients $\widetilde{G}^{\ell,m}$, $\widetilde{h}_0^{\ell,m}$ and $\widetilde{h}_1^{\ell,m}$ vanish, the gauge in which the perturbation (6.42) is written coincides with the Regge-Wheeler gauge (hence our use of the symbol $\sim$ on the multipolar coefficients). Setting $\omega_{12} = 0$

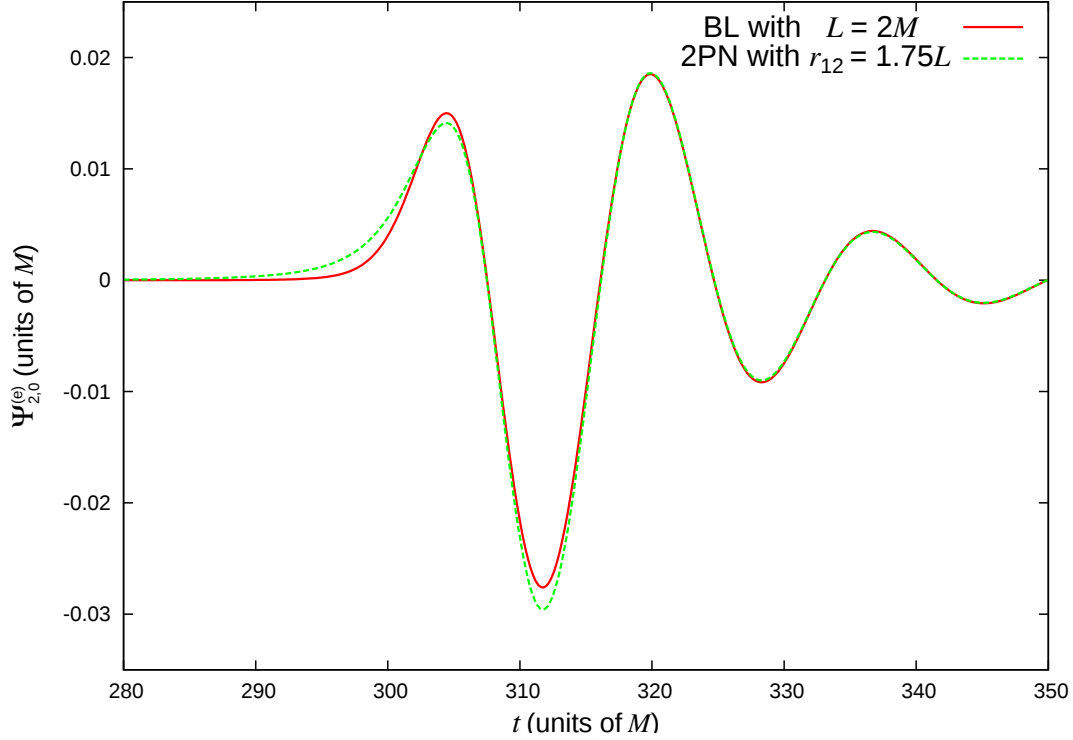


Figure 6.4: The real part of the mode $(2, 0)$ of the Zerilli master function for even-parity (or polar) perturbations, in the case of an equal mass ($\nu = \frac{1}{4}$) head-on collision, using Brill-Lindquist initial data as given in Ref. [4] with an initial distance $L = 2M$ (red), and our PN initial conditions with $r_{12} = 1.75L$ (green).

and $\dot{r}_{12} = 0$ in (6.27a) and (6.27e), we get for our PN initial conditions

$$\tilde{H}_{\text{PN}}^{2,0} = \tilde{K}_{\text{PN}}^{2,0} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{M r_{12}^2}{r^3} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{M r_{12}^2}{R^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{M}{2R}\right)^6}, \quad (6.43)$$

where we used $r = R \left(1 + \frac{M}{2R}\right)^2$. Observe first that if we set $r_{12} = L$, then the two perturbations (6.42) and (6.43) coincide as they should in the weak-field domain $R \gg M$. But in the strong field domain $R \gtrsim M/2$, the comparison of the initial distances L and r_{12} is difficult. It then becomes interesting to check if these two measures of the distance between the holes can be related in such a way that the two waveforms compare well.

Most of the perturbation $\Psi_{2,0}^{(e)}$ that propagates to future null infinity is generated around the maximum of the $\ell = 2$ potential $\mathcal{V}_2^{(e)}$ for polar perturbations, which is located around $r \simeq 3.1M$, or in terms of the isotropic coordinate $R \simeq 2M$. If we wish to identify the perturbations (6.42) and (6.43), it is then natural to impose the *definition*

$$\frac{r_{12}}{L} \equiv \left(1 + \frac{M}{2R}\right)^{5/2} \bigg|_{R \simeq 2M} \simeq 1.75. \quad (6.44)$$

We show in Fig. 6.4 the $(\ell, m) = (2, 0)$ mode of the Zerilli master function using both BL initial data with $L = 2M$, and our PN initial conditions with $r_{12} = 1.75L$. We observe that

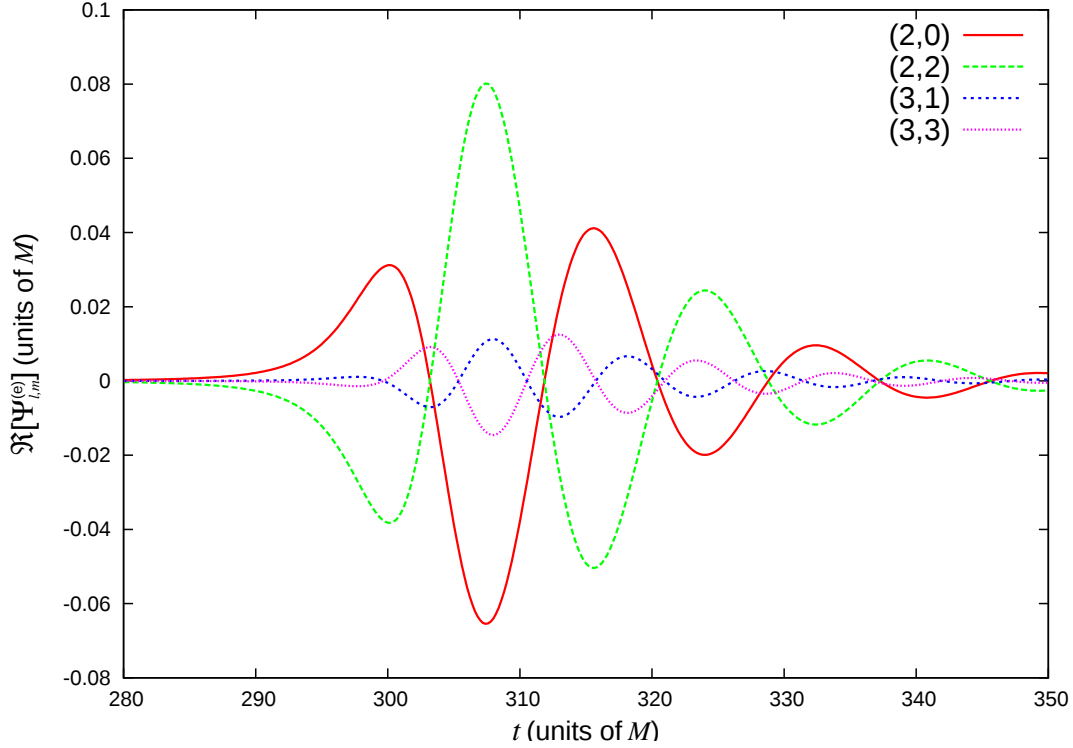


Figure 6.5: The real part of the non-vanishing modes (ℓ, m) of the Zerilli master function for even-parity (or polar) perturbations, up to $\ell = 3$, in the case of a head-on collision with $\nu = 0.2$ and $r_{12} = 4.4M$.

the waveforms compare very well, which means that our post-Newtonian initial conditions are essentially equivalent to the Brill-Lindquist initial data in the case of head-on collisions. We find that the waveform computed with PN initial conditions is slightly delayed with respect to the BL one. So in order to achieve this agreement we also had to translate in time the PN curve by an amount $\Delta t \simeq 4M$. We checked that this good agreement does not depend on the value of the initial distance L .

We now focus on the waveforms obtained from our CL approximation with 2PN-accurate initial data. In Fig. 6.5 we consider the head-on collision (with time-symmetric initial conditions) of an *unequal* mass binary with mass ratio $\nu = 0.2$, and show the real part of the non-vanishing modes of the Zerilli master function for even-parity perturbations, $\Re[\Psi_{\ell,m}^{(e)}]$, up to $\ell = 3$. We set the initial distance to a value twice larger than in the orbital case shown later, i.e. $r_{12} = 4.4M$, so that the Newtonian energy of the binary $E = -Gm_1m_2/r_{12}$ is identical to that of the circular orbit configuration with initial distance $r_{12} = 2.2M$. This configuration being axisymmetric, for a given ℓ all (ℓ, m) modes can be related to the $(\ell, 0)$ mode. For example we know from Ref. [203] that $\Psi_{2,2}^{(e)} = -\frac{\sqrt{6}}{2}\Psi_{2,0}^{(e)}$ and $\Psi_{3,3}^{(e)} = -\sqrt{\frac{5}{3}}\Psi_{3,1}^{(e)}$. We checked that the ratios of the amplitudes of the modes shown in Fig. 6.5 are in very good agreement with these theoretical values.

6.8.4 Ringdown waveforms for circular orbits

In the case of circular orbits, both even and odd perturbations contribute. In this case we simply have to set $\dot{r}_{12} = 0$ in Eqs. (6.27a)–(6.27l), (6.28a)–(6.28f), (6.32a)–(6.32l) and (6.33a)–(6.33e). Our initial data will therefore depend only on the (physically irrelevant) initial orbital phase β , the initial distance r_{12} and the initial orbital frequency ω_{12} . We know from the 1PN-accurate equations of motion that, for a circular orbit, the orbital frequency is related to the binary’s separation by the Kepler-like law [61]

$$\omega_{12}^2 = \frac{M}{r_{12}^3} \left[1 + (\nu - 3) \frac{M}{r_{12}} \right] + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (6.45)$$

so we have only one free parameter r_{12} . This initial orbital distance r_{12} will be an important parameter since it will be used in applications like [263] as a “*matching radius*” to connect the computation of the ringdown phase to the previous inspiral and/or plunge phases.

An important point is worth emphasizing at this stage. Recall that in our previous calculation of the initial data for the Regge-Wheeler and Zerilli equations we have systematically and consistently neglected the non-linear terms $\mathcal{O}(G^2)$. Thus the perturbation coefficients (6.27a)–(6.27l) and (6.28a)–(6.28f) we consider, and which are valid for general orbits, are linear. Now, by introducing the expression (6.45) of the orbital frequency ω_{12} (where $M \equiv GM$) into the results (6.27a)–(6.27l), (6.28a)–(6.28f), (6.32a)–(6.32l) and (6.33a)–(6.33e) for the multipoles and their time derivatives, we do obtain terms which are of order $\mathcal{O}(G^2)$ or more in the case of circular orbits. Those terms have to be kept as they are, because the result (6.45) comes from an independent calculation at the level of the equations of motion. That is, once we have proved (in Sec. 6.7) that the Einstein field equations are satisfied for *generic* non-circular orbits, we are allowed to reduce the solution to the particular case of a circular orbit by inserting (6.45); our point is that this adds new powers of G which constitute an integral part of our solution of the field equations. This being said, a more involved calculation making use of the theory of second-order perturbations of a Schwarzschild black hole would introduce other terms of the same order G^2 in the final solution. But we do not have access to these terms in this work, which is based on first-order perturbations.

We show in Fig. 6.6 the real part of the non-vanishing modes of the Zerilli master function for even-parity perturbations, $\Re[\Psi_{\ell,m}^{(e)}]$, up to $\ell = 3$, in the case of the unequal mass binary with mass ratio $\nu = 0.2$ (same as before), on a circular orbit with initial separation $r_{12} = 2.2M$ and initial phase $\beta = 0$. Notice the peculiar behaviour of the $\ell = 2$ modes which do not vanish asymptotically. This is because some terms in the CL-expanded 2PN metric (6.18a)–(6.18c) behave as $1/r$ in the far zone, therefore yielding non-vanishing asymptotic values for the quadrupolar modes of the Zerilli master function [see e.g. the third term in h_{00} in Eq. (6.18a)].

The Newtonian energy of the binary on a circular orbit in Fig. 6.6 is chosen to be the same as for the head-on collision shown in Fig. 6.5. Notice the difference in amplitude, which is typically a factor 2, between the orbital case and the head-on case; the even (polar) perturbation is stronger in the head-on collision case than in the orbital case for the same total energy. This is consistent with the fact that in the case of a circular orbit, we have also in addition to the even-parity perturbations, some odd-parity or axial perturbations.

The odd/axial modes for the circular orbits are described by the Regge-Wheeler master function $\Psi_{\ell,m}^{(o)}$. Notice that they can be computed with our PN initial conditions; Brill-Lindquist

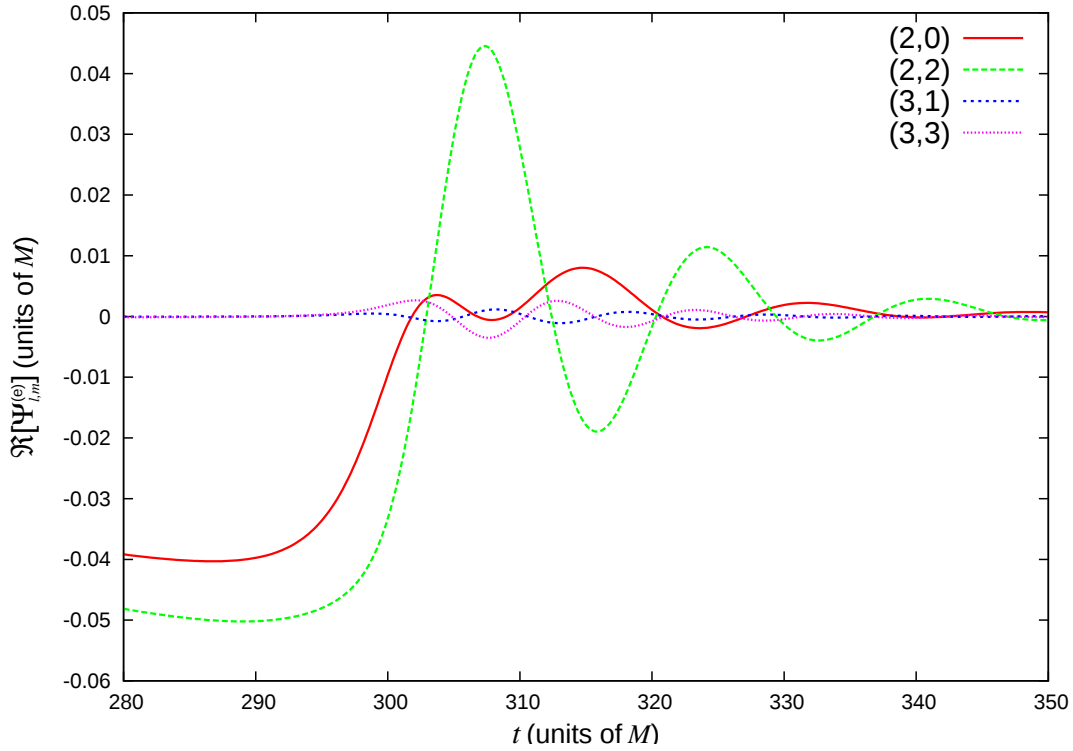


Figure 6.6: The real part of the non-vanishing modes (ℓ, m) of the Zerilli master function for even-parity (or polar) perturbations, up to $\ell = 3$, in the case of a circular orbit with $\nu = 0.2$, $r_{12} = 2.2M$ and $\beta = 0$.

(BL) and Misner-Lindquist (ML) initial conditions are time-symmetric and can be applied only to the polar modes of head-on collisions. (See [381, 382] for initial conditions generalizing BL and ML, and which also permit to compute the axial modes of circular orbits in the CL approximation.) It is therefore particularly interesting to compute the real part of the Regge-Wheeler function, $\Re[\Psi_{\ell,m}^{(o)}]$, as we do in Fig. 6.7 for the same unequal mass binary, and for the same initial conditions as for the polar modes shown in Fig. 6.6. Comparing Figs. 6.6 and 6.7 we find that the amplitude of the even modes is approximately one order of magnitude larger than the amplitude of the odd modes. The even modes, which were the only ones present for head-on collisions without angular momentum, still dominate when we turn on the orbital angular momentum and consider the circular orbits.

6.9 Conclusion

We have proposed an implementation of the close-limit (CL) approximation for binary black holes starting from post-Newtonian (PN) initial conditions developed at 2PN order. The 2PN metric generated by two point particles, when restricted to be linear in G in order to be consistent *in fine* with the linear black hole perturbation, was formally developed in CL form and identified with the metric of a linearly perturbed Schwarzschild black hole. We proved that the resulting multipolar coefficients describing the even-parity and odd-parity components of that perturba-

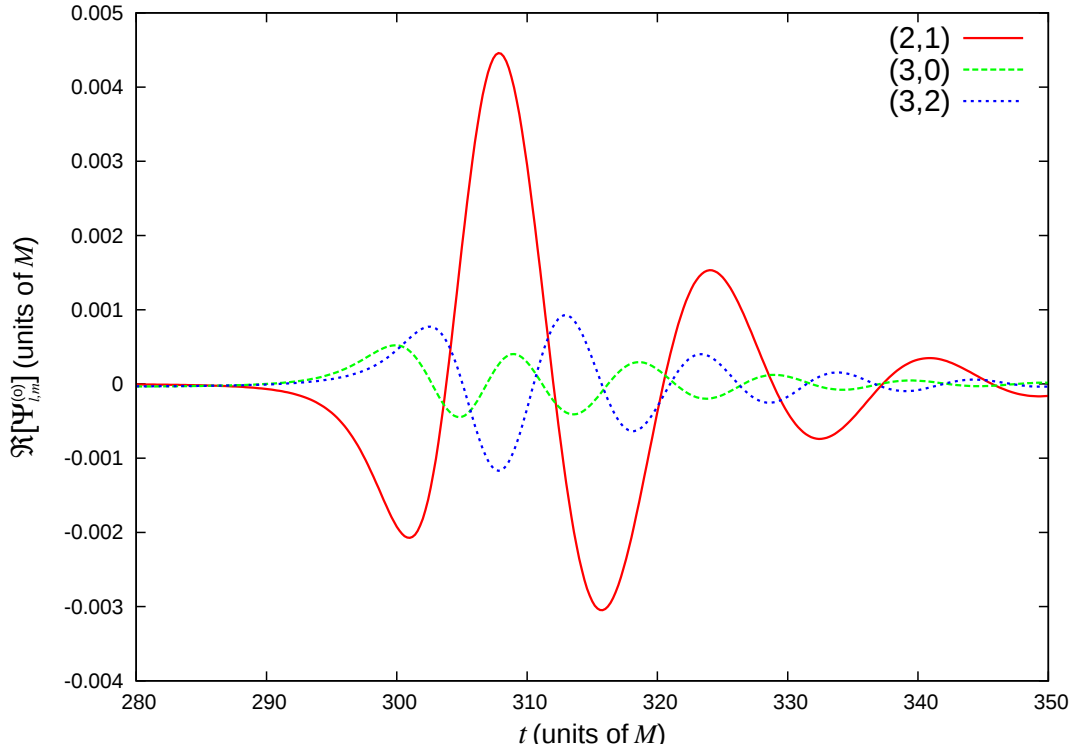


Figure 6.7: The real part of the non-vanishing modes (ℓ, m) of the Regge-Wheeler master function for odd-parity (or axial) perturbations, up to $\ell = 3$, in the case of a circular orbit with $\nu = 0.2$, $r_{12} = 2.2M$ and $\beta = 0$.

tion consistently satisfy the perturbative Einstein field equations for general non-circular binary orbits.

The post-Newtonian initial data was then specialized to the cases of head-on collisions and of circular orbits. We evolved numerically the Regge-Wheeler and Zerilli wave equations starting from those initial data, obtained the waveform generated during the ringdown phase, and compared these two cases. In a separate work [263], we apply this formalism to the computation of the gravitational recoil produced during the ringdown phase of circular-orbit compact binaries, and match it to a previous PN calculation of the recoil accumulated in the preceding inspiral and merger phases [87].

There are several ways in which this work could be extended. First, one may expand to a higher order in the CL approximation, to get higher multipoles of the perturbation, or include in the initial 2PN metric terms describing the effect of spins of the initial black holes. We could also include terms $\mathcal{O}(G^2)$ or higher in the initial post-Newtonian metric, but it would be necessary to use the theory of at least *second*-order perturbations of a Schwarzschild black hole [99].

An important limitation of the present calculation is the impossibility to treat perturbations of a highly spinning black hole. In this work the initial orbital angular momentum of the binary had to be included in the perturbation of the final non-rotating black hole. A solution would be to employ the Teukolsky formalism [399] to perform similar calculations using a Kerr background instead of a Schwarzschild one. This would allow for a better description of the ringdown phase of the final black hole which is known from numerical calculations to be a rapidly spinning

Kerr black hole [341, 111, 25].

Acknowledgments It is a pleasure to thank Bernard Whiting and Larry Price for their help in relating the Regge-Wheeler and Zerilli functions to the Weyl scalar Ψ_4 . We thank also Emanuele Berti, Alessandra Buonanno, Luciano Rezzola and Clifford Will for very useful discussions. Algebraic computations were done with the software *Mathematica*.

Appendix: Basic material for black hole perturbations

Although the material contained in this Appendix is well-known, we give in self-contained form the usual decomposition of an arbitrary linear perturbation $h_{\alpha\beta}$ of a Schwarzschild black hole onto the Zerilli-Mathews tensor spherical harmonics (correcting misprints frequently found in the literature), and recall the relation between the Weyl scalar Ψ_4 and the Regge-Wheeler and Zerilli master functions, from which we derive the asymptotic waveform in the form of its two polarization states $+$ and $\times$.

The basis of tensorial spherical harmonics

In order to perform practical calculations, it is particularly convenient, instead of using the decomposition (6.23a)–(6.23j) and (6.24a)–(6.24g) introduced in Sec. 6.6, to introduce the Zerilli-Mathews basis of tensor spherical harmonics $(e_{\alpha\beta}^{A,\ell,m})_{A=1,\dots,10}$, and to write the perturbation as

$$h_{\alpha\beta}(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{A=1}^{10} \sum_{\ell, m} h_{A,\ell,m}(t, r) e_{\alpha\beta}^{A,\ell,m}(\theta, \varphi), \quad (6.46)$$

where $x^\alpha = \{t, r, \theta, \varphi\}$ are the usual Schwarzschild spherical coordinates. This is because the tensor spherical harmonics $(e_{\alpha\beta}^{A,\ell,m})_{A=1,\dots,10}$ form an orthonormal basis [279, 421, 422], in the sense that

$$\langle e^{A,\ell,m} \cdot e^{A',\ell',m'} \rangle \equiv \int \xi^{\alpha\beta} \xi^{\gamma\delta} \bar{e}_{\alpha\gamma}^{A,\ell,m} e_{\beta\delta}^{A',\ell',m'} d\Omega = \delta_{AA'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (6.47)$$

where $\xi_{\alpha\beta}$ is the *Euclidean* metric written in spherical coordinates, δ_{ij} is the usual Kronecker symbol, the overbar denotes complex conjugation, and the integration is performed on the sphere of unit radius. This basis being orthonormal, each component $h_{A,\ell,m}$ of a given perturbation $h_{\alpha\beta}$ can be calculated by the projection

$$h_{A,\ell,m} = \langle e^{A,\ell,m} \cdot h \rangle, \quad (6.48)$$

from which we then deduce the multipolar coefficients $H_0^{\ell,m}, H_1^{\ell,m}, \dots, k_2^{\ell,m}$ defined by (6.52a)–(6.52j) below. This method was systematically used to get the results (6.27a)–(6.27l) and (6.28a)–(6.28f) from the information on the metric perturbation contained in Eqs. (6.18a)–(6.18c).

The Zerilli-Mathews basis of tensorial harmonics explicitly reads

$$e_{\alpha\beta}^{1,\ell,m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{\ell,m}, \quad (6.49a)$$

$$e_{\alpha\beta}^{2,\ell,m} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{\ell,m}, \quad (6.49b)$$

$$e_{\alpha\beta}^{3,\ell,m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{\ell,m}, \quad (6.49c)$$

$$e_{\alpha\beta}^{4,\ell,m} = i \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(\ell-1)!}{(\ell+1)!}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_\theta & 0 & 0 & 0 \\ \partial_\varphi & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{\ell,m}, \quad (6.49d)$$

$$e_{\alpha\beta}^{5,\ell,m} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(\ell-1)!}{(\ell+1)!}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ 0 & \partial_\theta & 0 & 0 \\ 0 & \partial_\varphi & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{\ell,m}, \quad (6.49e)$$

$$e_{\alpha\beta}^{6,\ell,m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^2 \end{pmatrix} Y_{\ell,m}, \quad (6.49f)$$

$$e_{\alpha\beta}^{7,\ell,m} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_1 \\ 0 & 0 & \mathcal{D}_1 & -s^2 \mathcal{D}_2 \end{pmatrix} Y_{\ell,m}, \quad (6.49g)$$

$$e_{\alpha\beta}^{8,\ell,m} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(\ell-1)!}{(\ell+1)!}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & s^{-1} \partial_\varphi & -s \partial_\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^{-1} \partial_\varphi & 0 & 0 & 0 \\ -s \partial_\theta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{\ell,m}, \quad (6.49h)$$

$$e_{\alpha\beta}^{9,\ell,m} = i \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(\ell-1)!}{(\ell+1)!}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^{-1} \partial_\varphi & -s \partial_\theta \\ 0 & s^{-1} \partial_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & -s \partial_\theta & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{\ell,m}, \quad (6.49i)$$

$$e_{\alpha\beta}^{10,\ell,m} = i \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^{-1} \mathcal{D}_1 & -s \mathcal{D}_2 \\ 0 & 0 & -s \mathcal{D}_2 & -s \mathcal{D}_1 \end{pmatrix} Y_{\ell,m}, \quad (6.49j)$$

where we introduced the convenient shortcut $s \equiv \sin \theta$, together with the angular operators

$$\mathcal{D}_1 \equiv 2 (\partial_\theta - \cot \theta) \partial_\varphi, \quad (6.50a)$$

$$\mathcal{D}_2 \equiv \partial_\theta^2 - \cot \theta \partial_\theta - s^{-2} \partial_\varphi^2, \quad (6.50b)$$

and where our convention regarding the spherical harmonics is

$$Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \equiv \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell,m}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (6.51)$$

with $P_{\ell,m}(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^m P_\ell(x)$ being the associated Legendre functions.

Finally, the coefficients $h_{A,\ell,m}$ of the arbitrary perturbation $h_{\alpha\beta}$ are related to the multipolar coefficients $H_0^{\ell,m}, H_1^{\ell,m}, \dots, k_2^{\ell,m}$ of the decomposition (6.23a)–(6.23j) and (6.24a)–(6.24g) through

$$h_{1,\ell,m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) H_0^{\ell,m}, \quad (6.52a)$$

$$h_{2,\ell,m} = -i\sqrt{2} H_1^{\ell,m}, \quad (6.52b)$$

$$h_{3,\ell,m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} H_2^{\ell,m}, \quad (6.52c)$$

$$h_{4,\ell,m} = -i\sqrt{2\frac{(\ell+1)!}{(\ell-1)!}} h_0^{\ell,m}, \quad (6.52d)$$

$$h_{5,\ell,m} = \sqrt{2\frac{(\ell+1)!}{(\ell-1)!}} h_1^{\ell,m}, \quad (6.52e)$$

$$h_{6,\ell,m} = r^2 \sqrt{2} \left(K^{\ell,m} - \frac{\ell(\ell+1)}{2} G^{\ell,m} \right), \quad (6.52f)$$

$$h_{7,\ell,m} = r^2 \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} G^{\ell,m}, \quad (6.52g)$$

$$h_{8,\ell,m} = -\sqrt{2\frac{(\ell+1)!}{(\ell-1)!}} k_0^{\ell,m}, \quad (6.52h)$$

$$h_{9,\ell,m} = i\sqrt{2\frac{(\ell+1)!}{(\ell-1)!}} k_1^{\ell,m}, \quad (6.52i)$$

$$h_{10,\ell,m} = -i\sqrt{\frac{1}{2} \frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} k_2^{\ell,m}. \quad (6.52j)$$

Link between the asymptotic waveform and the master functions

Here we recall the general expression (known as a Chandrasekhar transformation [117]) of the Weyl scalar Ψ_4 in terms of the Regge-Wheeler and Zerilli master functions $\Psi_{\ell,m}^{(e,o)}$, and we compute the combination $h_+ - i h_\times$, where $h_{+,\times}$ denote the two asymptotic wave polarizations.

In the Schwarzschild spherical coordinate system $\{t, r, \theta, \varphi\}$, we let $(e_r^\alpha, e_\theta^\alpha, e_\varphi^\alpha)$ be the associated orthonormal basis of $t = \text{const}$ hypersurfaces, and e_t^α be the timelike unit vector orthogonal to them. Then, we consider the following complex null tetrad: k^α and l^α are two real null vectors, while m^α and $\bar{m}^\alpha$ are complex conjugated null vectors defined by

$$k^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_t^\alpha + e_r^\alpha), \quad (6.53a)$$

$$l^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_t^\alpha - e_r^\alpha), \quad (6.53b)$$

$$m^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_\theta^\alpha - i e_\varphi^\alpha), \quad (6.53c)$$

$$\bar{m}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_\theta^\alpha + i e_\varphi^\alpha). \quad (6.53d)$$

We therefore have $m^\alpha \bar{m}_\alpha = 1 = -l^\alpha k_\alpha$, all the other scalar products vanishing. Various conventions for the definition of the Weyl scalar Ψ_4 can be found in the literature. We adopt

$$\Psi_4 \equiv C_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\alpha \bar{m}^\beta l^\gamma \bar{m}^\delta, \quad (6.54)$$

where $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ is the Weyl tensor, which coincides with the Riemann tensor in vacuum. It can be shown that, for a generic perturbation of a Schwarzschild black hole,

$$\Psi_4 = \frac{1}{r} \sum_{\ell, m} \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} \left(\mathcal{P}_\ell^{(e)} \Psi_{\ell, m}^{(e)} + i \mathcal{P}_\ell^{(o)} \Psi_{\ell, m}^{(o)} \right) {}_{-2}Y_{\ell, m}, \quad (6.55)$$

where r is the usual Schwarzschild radial coordinate, and the master functions $\Psi_{\ell, m}^{(e,o)}$ are those defined in Eqs. (6.36a)–(6.36b). The relation (6.55) is exact for first-order perturbations of the Schwarzschild geometry [117]. The $s = -2$ spin-weighted spherical harmonics ${}_{-2}Y_{\ell, m}$ are defined for any integer s by [310, 195]

$${}_{-s}Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) \equiv (-1)^s \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} {}_s d_{\ell, m}(\theta) e^{im\varphi}, \quad (6.56)$$

where the Wigner functions ${}_s d_{\ell, m}$ read

$${}_s d_{\ell, m}(\theta) \equiv \sum_{k=k_{\max}}^{k_{\max}} \frac{(-1)^k \sqrt{(\ell+m)!(\ell-m)!(\ell+s)!(\ell-s)!}}{k!(\ell+m-k)!(\ell-s-k)!(s-m+k)!} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{2\ell} \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^{2k+s-m}, \quad (6.57)$$

with $k_{\max} = \max(0, m-s)$ and $k_{\min} = \max(\ell+m, \ell-s)$. In the case $s = 0$ we recover the scalar spherical harmonics (6.51). The differential operators acting on $\Psi_{\ell, m}^{(e,o)}$ in the relation (6.55) read explicitly as

$$\mathcal{P}_\ell^{(e,o)} = \frac{1}{4} \left(\mathcal{W}_\ell^{(e,o)} + \partial_{r_*} - \partial_t \right) \left(\partial_{r_*} - \partial_t \right), \quad (6.58)$$

where r_* is the tortoise coordinate (6.39), and the potentials $\mathcal{W}_\ell^{(e,o)}$ are given by

$$\mathcal{W}_\ell^{(e)} = \frac{2}{r} \left(1 - \frac{3M}{r} \right) - \frac{6M(r-2M)}{r^2(\lambda_\ell r + 3M)}, \quad (6.59a)$$

$$\mathcal{W}_\ell^{(o)} = \frac{2}{r} \left(1 - \frac{3M}{r} \right). \quad (6.59b)$$

Recall that $\lambda_\ell = \frac{1}{2}(\ell-1)(\ell+2)$.

Now, in the limit $r \rightarrow +\infty$, the Regge-Wheeler and Zerilli functions $\Psi_{\ell,m}^{(e,o)}$ are functions of the retarded time $t - r_*$ only. Indeed, they are solutions of the wave equations (6.38) with decaying potentials $\mathcal{V}_\ell^{(e,o)} \propto 1/r^2$. Because the potentials $\mathcal{W}_\ell^{(e,o)}$ also decay as r^{-1} , we have the asymptotic expressions

$$\mathcal{P}_\ell^{(e,o)} \Psi_{\ell,m}^{(e,o)} = \partial_t^2 \Psi_{\ell,m}^{(e,o)} + \mathcal{O}(r^{-1}). \quad (6.60)$$

Furthermore, working in the transverse and traceless gauge, and performing some projections onto the linearized Weyl tensor around flat spacetime in the definition (6.54) leads to the well-known expression

$$\Psi_4 = \partial_t^2 (h_+ - i h_\times) + \mathcal{O}(r^{-2}), \quad (6.61)$$

where the two polarization states h_+ and $h_\times$ are defined by

$$h_+ \equiv \frac{1}{2} (e_\theta^i e_\theta^j - e_\varphi^i e_\varphi^j) h_{ij} = \frac{1}{2} (h_{\theta\theta} - h_{\varphi\varphi}), \quad (6.62a)$$

$$h_\times \equiv \frac{1}{2} (e_\theta^i e_\varphi^j + e_\varphi^i e_\theta^j) h_{ij} = h_{\theta\varphi}. \quad (6.62b)$$

Finally, combining the results (6.55) and (6.61) with the asymptotic expansion (6.60), we recover the well-known formula

$$h_+ - i h_\times = \frac{1}{r} \sum_{\ell,m} \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} \left(\Psi_{\ell,m}^{(e)} + i \Psi_{\ell,m}^{(o)} \right) {}_{-2}Y_{\ell,m} + \mathcal{O}(r^{-2}). \quad (6.63)$$

□

RECU L GRAVITATIONNEL DES SYSTÈMES BINAIRES DE TROUS NOIRS

L'ÉMISSION anisotrope de rayonnement gravitationnel par un système binaire coalescent de trous noirs super-massifs peut conduire à l'éjection du trou noir résultant de sa galaxie hôte, et avoir des conséquences importantes en astrophysique. En combinant le calcul perturbatif détaillé dans le chapitre 6 avec un calcul post-newtonien antérieur [87] du flux de quantité de mouvement emporté par les ondes gravitationnelles, nous quantifions cet effet de recul gravitationnel dans le cas de binaires de trous noirs de Schwarzschild. Nos résultats se comparent très bien avec ceux issus de simulations en relativité numérique.

7.1 Effet de recul gravitationnel

Partant de la définition (1.16) du tenseur d'Isaacson, le tenseur énergie-impulsion effectif associé aux ondes gravitationnelles, nous avons vu au cours du chapitre 1 que celles-ci emportent de l'énergie. On montre de même qu'elles emportent du moment cinétique, et de la quantité de mouvement, ou impulsion. Le flux de quantité de mouvement intégré sur une sphère à l'infini spatial i^0 est donné par [351]

$$\mathbf{F}_{\text{OG}} \equiv \frac{d\mathbf{P}_{\text{OG}}}{dt} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{r^2 c^2}{16\pi G} \oint \mathbf{n} |\dot{h}_+ - i \dot{h}_\times|^2 d\Omega \right\}, \quad (7.1)$$

où h_+ et $h_\times$ sont les états de polarisation définis par (1.10), $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire pointant dans la direction (θ, φ) , et $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ est l'élément d'angle solide. Ce résultat général est valable pour toute source de rayonnement gravitationnel isolée.

Dans le cas de la coalescence d'un système binaire d'objets compacts, la conservation de la quantité de mouvement totale implique que le trou noir de masse M résultant de la fusion possède une quantité de mouvement $\mathbf{P} = M\mathbf{V}$ non nulle par rapport au référentiel du centre de

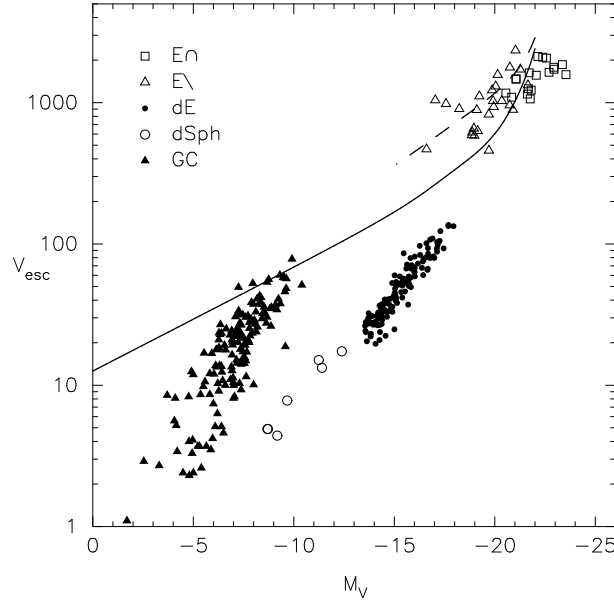


FIG. 7.1: Vitesses de libération V_{esc} de divers systèmes stellaires auto-gravitants : amas globulaire (GC), galaxies naines sphéroïdes (dSph), et différents types de galaxies elliptiques (dE, E\, E\cap). *Figure tirée de [283].*

masse, dont la définition tient compte du rayonnement émis ; il s'agit de l'effet de *recul gravitationnel*. La vitesse de recul de ce trou noir est donc donnée par l'intégrale

$$\mathbf{V} = -\frac{1}{M} \int \mathbf{F}_{\text{OG}} dt, \quad (7.2)$$

où l'intégration porte sur toute la durée d'émission du rayonnement. La norme $V = |\mathbf{V}|$ de cette vitesse de recul dépend considérablement de la configuration initiale de la binaire (rapport de masses et spins des corps compacts), et peut être très élevée : plusieurs centaines voire plusieurs milliers de kilomètres par seconde. La vitesse de libération d'une galaxie elliptique (resp. d'un amas globulaire) typique est de l'ordre de quelques centaines (resp. dizaines) de kilomètres par seconde [283] (cf. Fig. 7.1). Par conséquent, l'effet de recul gravitationnel est susceptible de conduire à l'éjection d'une portion conséquente des trous noirs super-massifs de leurs galaxies hôtes, et de virtuellement tous les trous noirs de masses intermédiaires $\sim 10^4 M_{\odot}$ éventuellement présents au sein des amas globulaires [409]. Plusieurs candidats de tels trous noirs super-massifs éjectés de leur galaxies hôtes ont déjà été proposés [244, 375]. Mais des scénarios alternatifs peuvent également rendre compte de ces observations récentes [209, 374].

Par ailleurs, cet effet de recul gravitationnel a des conséquences potentiellement très importantes en astrophysique et en cosmologie, parmi lesquelles :

- La nécessité de réviser le scénario standard de croissance des trous noirs super-massifs, *i.e.* essentiellement par fusion des galaxies au cours de l'évolution cosmologique [366].
- L'existence éventuelle d'une population de trous noirs super-massifs isolés dans le milieu intergalactique, potentiellement entourés de la partie interne de leurs disques d'accrétion, demeurée gravitationnellement liée lors de l'éjection [93].

- De nombreuses signatures observationnelles reliées aux modifications des profils de densité des étoiles, du gaz, et du halo de matière noire au voisinage du trou noir super-massif éjecté [266, 300, 154].
- L'existence éventuelle de noyaux actifs de galaxies décentrés par rapport aux centres géométriques des galaxies [273].

Pour toutes ces raisons, il est crucial de parvenir à quantifier avec précision l'amplitude de l'effet de recul gravitationnel pour un système binaire de trous noirs générique.

7.2 Historique des travaux sur le sujet

La première estimation de l'effet de recul gravitationnel pour les binaires d'objets compacts remonte à un article de Fitchett [176], basé sur des travaux antérieurs de Peres [325], Papapetrou [320, 321] et Bekenstein [41]. Fitchett calcula la vitesse de recul pour un système de deux objets compacts sans spins, de rapport de masses quelconque, à l'ordre newtonien. Pour des orbites quasi-circulaires, le flux de quantité de mouvement emporté par les ondes gravitationnelles prend la forme

$$\mathbf{F}_{\text{OG}} = \frac{464}{105} \eta^2 \sqrt{1 - 4\eta} x^{11/2} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right) \right] \hat{\mathbf{v}}_{12}, \quad (7.3)$$

où $x = (Gm\Omega/c^3)^{2/3}$ est le paramètre post-newtonien usuel, avec Ω la fréquence orbitale de la binaire et $m = m_1 + m_2$ la masse totale, $\eta \equiv m_1 m_2 / m^2$ est le rapport de masse symétrique, et $\hat{\mathbf{v}}_{12}$ le vecteur unitaire pointant dans la direction de la vitesse relative $\mathbf{v}_{12} \equiv \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ de la binaire (cf. Fig. 7.2). La vitesse de recul $\mathbf{V}$ se déduit immédiatement du flux (7.3) par le bilan de quantité de mouvement (7.2). Comme escompté, ce flux s'annule pour une binaire symétrique ($\eta = \frac{1}{4}$) ou de rapport de masse extrême ($\eta \rightarrow 0$). Par ailleurs, comme l'effet s'accroît lorsque x augmente, *i.e.* lorsque les deux corps se rapprochent, il est nécessaire d'inclure autant de corrections post-newtoniennes que possible afin d'améliorer la précision du calcul dans le régime de champ fort, où la majorité du recul gravitationnel est engendrée.

Le résultat (7.3) pour l'effet dominant a par la suite été étendu à l'ordre 1PN par Wiseman [419], puis à l'ordre 2PN par Blanchet, Qusailah & Will [87], toujours pour des systèmes binaires d'objets compacts sans spins et circularisés. L'effet des spins a été initialement considéré par Kidder [239] *via* l'inclusion de la contribution spin-orbite dominante à l'ordre 0.5PN. Plus récemment, Racine, Buonanno & Kidder [345] ont étendu ce résultat en incluant les contributions spin-orbite sub-dominantes jusqu'à l'ordre 2PN, ainsi que la contribution spin-spin dominante. D'autres calculs analytiques ou semi-analytiques ont fait usage de la théorie des perturbations d'un trou noir [177, 169], du formalisme EOB (*Effective-One-Body*) [138], et de l'approximation de limite proche [381, 382].

Ces estimations sont pour la plupart antérieures aux calculs effectués en relativité numérique, seuls capables d'obtenir la valeur exacte (modulo l'erreur numérique) de la vitesse de recul accumulée durant les phases de fusion et de vibration. En raison de l'importance du problème pour l'astrophysique, l'effet de recul gravitationnel a récemment suscité une activité frénétique au sein de la communauté de la relativité numérique. La vitesse de recul a ainsi été évaluée dans le cas d'orbites quasi-circulaires, pour des binaires de trous noirs sans spins [109, 26, 199, 210, 198],

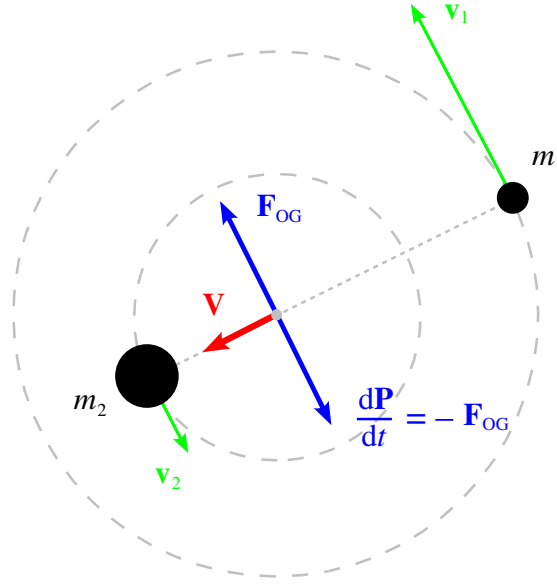


FIG. 7.2: Deux trous noirs de masses m_1 et m_2 , avec $m_1 < m_2$, et de vitesses de coordonnées $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$, avec $|\mathbf{v}_1| > |\mathbf{v}_2|$, décrivent des orbites quasi-circulaires dans le référentiel du centre de masse. Le flux de quantité de mouvement emportée par les ondes gravitationnelles $\mathbf{F}_{\text{OG}}$ est aligné avec la direction de la vitesse relative de la binaire $\mathbf{v}_{12} \equiv \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$. Par conservation de la quantité de mouvement totale, le centre de masse de la binaire possède une vitesse de recul $\mathbf{V}$ par rapport au référentiel du centre de masse, dont la définition tient également compte des ondes gravitationnelles rayonnées.

puis avec spins [27, 110, 112, 197, 211, 212, 247, 337, 403, 100, 129, 271, 367, 272], mais également pour des collisions frontales [120] et des orbites hyperboliques [208].

Ces travaux ont montré que l'effet des spins des trous noirs est bien plus important que celui induit par l'asymétrie des masses. Il existe en particulier une configuration, dite de « superkick », lorsque les spins de deux trous noirs de Kerr maximaux de même masse sont anti-alignés dans le plan orbital, qui permet d'atteindre une vitesse de recul de l'ordre de 4 000 km/s [112, 197], bien supérieure aux vitesses de libération des galaxies les plus massives. Ces cas extrêmes ne sont toutefois pas nécessairement en contradiction avec l'observation (indirecte) de trous noirs supermassifs dans l'Univers local, ou à grand décalage spectral avec les quasars, car plusieurs mécanismes sont susceptibles de conduire à l'alignement des spins avec le moment cinétique orbital (couple de torsion exercé par le gaz d'un disque d'accrétion [89] ou précession relativiste au cours de la phase spirale [238]), réduisant ainsi considérablement l'amplitude de l'effet.

7.3 Recul gravitationnel pendant la phase de vibration

Bien que la relativité numérique prédise désormais avec exactitude la vitesse de recul pour une binaire de trous noirs générique, ces simulations ne permettent pas d'appréhender la physique de l'effet de recul gravitationnel. Comme l'illustrent les travaux récents [367, 235, 348], les méthodes analytiques et/ou semi-analytiques sont toujours utiles afin d'approfondir la compréhension de cette prédiction de la relativité générale.

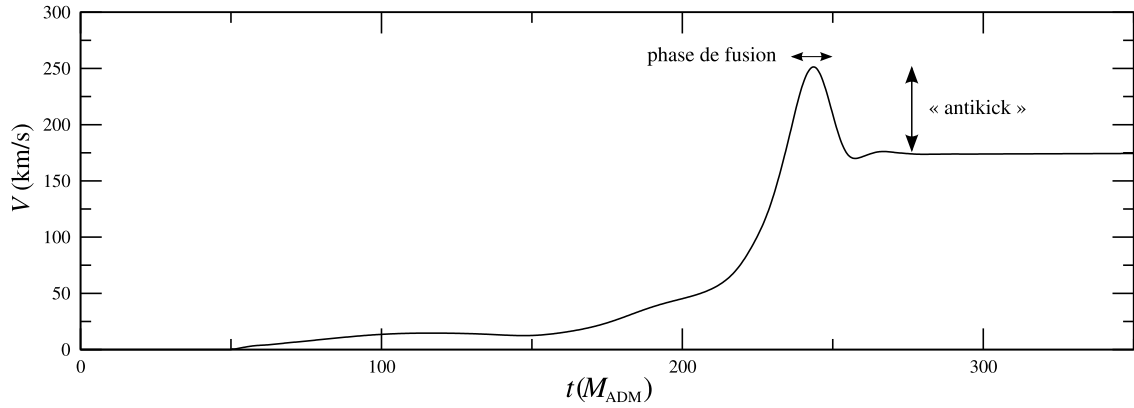


FIG. 7.3: La norme V de la vitesse de recul en fonction du temps coordonnée t (normalisé par la masse ADM M_{ADM} de l'espace-temps) telle que calculée en relativité numérique pour une binaire de trous noirs sans spins, de rapport de masse symétrique $\eta = 0,19$. On observe une décroissance de $\sim 30\%$ de la vitesse de recul pendant la phase de vibration faisant suite à la fusion des trous noirs. *Figure adaptée de [199].*

Par exemple, dans le cas le plus simple d'un système binaire de trous noirs de Schwarzschild de masses inégales, l'évolution de la norme V de la vitesse de recul en fonction du temps coordonnée t présente une allure caractéristique particulièrement intéressante (cf. Fig. 7.3) : l'amplitude du recul croît de manière monotone jusqu'à une valeur¹ ~ 250 km/s lorsque les deux trous noirs initiaux fusionnent, après quoi le trou noir final semble freiné lors de la phase de vibration, la vitesse de recul convergeant vers une valeur ~ 175 km/s. Cette diminution de $\sim 30\%$ semble donc due à la désexcitation du trou noir final qui rayonne des modes quasi-normaux. Ce phénomène, couramment qualifié d'« antikick », est générique pour des binaires sans spins, et ne peut se comprendre dans le cadre des seules simulations en relativité numérique.

Avant que ces dernières ne soient disponibles, Blanchet, Qusailah & Will [87] ont fait usage de l'expression (7.3) du flux de quantité de mouvement, nouvellement étendue à l'ordre 2PN, afin d'estimer l'amplitude de la vitesse de recul pendant la phase spiralante, jusqu'à la dernière orbite circulaire². Afin d'estimer la contribution au recul gravitationnel total accumulée pendant la phase de fusion, ces mêmes auteurs ont intégré le flux d'impulsion post-newtonien le long d'une géodésique plongeante d'un trou noir de Schwarzschild de masse m , parcourue par une particule de masse réduite $\mu = m_1 m_2 / m$, dans l'esprit de la méthode EOB [105, 106, 144]. Ils prédirent ainsi une vitesse de recul maximale ~ 250 km/s à la fin de la phase de fusion, en accord avec le résultat exact obtenu *a posteriori* en relativité numérique.

Leur calcul ne pouvait toutefois rendre compte de la diminution $\sim 30\%$ de la vitesse de recul au cours de la phase de vibration. Afin de tester l'hypothèse selon laquelle l'« antikick » est dû à l'émission de rayonnement gravitationnel sous forme de modes quasi-normaux pendant

¹Dans le cas d'une binaire de trous noirs de rapport de masse symétrique $\eta = 0,19$, valeur autour de laquelle la vitesse de recul est maximale.

²Cette notion est ambiguë dans le cas d'une binaire de masses comparables ; sa définition est donc relativement arbitraire. Les auteurs du travail [87] définissent la dernière orbite circulaire par la valeur de la fréquence orbitale Ω telle que $m\Omega = 6^{-3/2}$, par analogie avec le cas d'une particule test massive dans la métrique d'un trou noir de Schwarzschild de masse m .

cette phase, nous avons fait usage du formalisme détaillé dans le chapitre précédent. Les états de polarisation de l'onde gravitationnelle sont reliés aux fonctions de Zerilli $\Psi_{\ell,m}^{(e)}$ et de Regge-Wheeler $\Psi_{\ell,m}^{(o)}$ par la relation (voir chapitre 3)

$$h_+ - i h_\times = \frac{1}{r} \sum_{\ell,m} \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} \left(\Psi_{\ell,m}^{(e)} + i \Psi_{\ell,m}^{(o)} \right) {}_{-2}Y_{\ell,m} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (7.4)$$

Dans le chapitre précédent, nous avons évolué ces fonctions à l'aide de conditions initiales basées sur la métrique post-newtonienne développée dans l'approximation de limite proche. En insérant la combinaison (7.4) dans l'expression (7.3) du flux de moment linéaire, puis en utilisant le bilan de quantité de mouvement (7.2), on parvient ainsi à calculer la contribution au recul gravitationnel total accumulée au cours de la phase de vibration. Combinant (vectoriellement) ce résultat avec les calculs post-newtoniens de [87], nous parvenons ainsi à estimer la vitesse de recul depuis le début de la phase spiralante jusqu'à la fin de la phase de vibration.

Le résultat final est présenté sur la Fig. 7.4, où l'on trace la norme V de la vitesse de recul en fonction du rapport de masse symétrique η . Notre méthode produit des résultats en très bon accord avec ceux issus de calculs en relativité numérique. Cela suggère que l'essentiel de la physique du recul gravitationnel est descriptible par une « simple » combinaison de méthodes post-newtoniennes et perturbatives.

Ces résultats montrent également que l'approximation post-newtonienne est plus « performante » que ce à quoi l'on pourrait s'attendre naïvement : le recul gravitationnel est essentiellement engendré au cours de la phase de coalescence, en champ fort, où les développements post-newtoniens ne sont *a priori* plus valables. Néanmoins, notre travail montre que l'on peut estimer l'effet de recul avec une précision raisonnable en poussant l'approximation post-newtonienne au-delà de son domaine de validité formel, et en la combinant avec des méthodes perturbatives.

La suite de ce chapitre est un article publié dans le journal *Classical and Quantum Gravity* [263].

The Gravitational-Wave Recoil from the Ringdown Phase of Coalescing Black Hole Binaries

Alexandre Le Tiec¹, Luc Blanchet¹ and Clifford M. Will^{2,1}

¹ *G_{RECO}*, Institut d’Astrophysique de Paris — UMR 7095 du CNRS,
Université Pierre et Marie Curie, 98^{bis} boulevard Arago, 75014 Paris, France

² McDonnell Center for the Space Sciences, Department of Physics,
Washington University, St. Louis MO 63130 USA

Abstract

The gravitational recoil or “kick” of a black hole formed from the merger of two orbiting black holes, and caused by the anisotropic emission of gravitational radiation, is an astrophysically important phenomenon. We combine (i) an earlier calculation, using post-Newtonian theory, of the kick velocity accumulated up to the merger of two non-spinning black holes, (ii) a “close-limit approximation” calculation of the radiation emitted during the ringdown phase, and based on a solution of the Regge-Wheeler and Zerilli equations using initial data accurate to second post-Newtonian order. We prove that ringdown radiation produces a significant “anti-kick”. Adding the contributions due to inspiral, merger and ringdown phases, our results for the net kick velocity agree with those from numerical relativity to 10–15 percent over a wide range of mass ratios, with a maximum velocity of 180 km/s at a mass ratio of 0.38.

7.4 Introduction and summary

The gravitational recoil of an isolated system in response to the anisotropic emission of gravitational radiation (sometimes also called the “kick”) is a phenomenon with potentially important astrophysical consequences [283]. One of the most intriguing is the possibility that a massive black hole formed from the inspiral and merger of two progenitor black holes could receive enough of a kick to displace it from the center of the galaxy where the merger occurred, or to eject it entirely from the galaxy. This could affect the growth history of massive black holes [366]. Observational evidence for such a kicked black hole has even been reported [244].

The calculation of such kicks within general relativity has been carried out in a variety of ways. Earlier analytic or semi-analytic estimates of the gravitational recoil include a perturbation calculation (valid for small mass ratios) during the final plunge [169], a post-Newtonian calculation valid during the inspiraling phase together with a treatment of the plunge phase [87], an application of the effective-one-body formalism [138], and a close-limit calculation with Bowen-York type initial conditions [381].

Following recent advances in numerical calculations of binary black holes [341, 111, 25], the problem of gravitational recoil received considerable attention from the numerical relativity community. These computations led to increasingly accurate estimates of the kick velocity from the merger along quasicircular orbits of black holes without spin [109, 26, 210, 199, 198], and with spin [211, 247, 110]; from head-on collisions [120]; and from hyperbolic orbits [208]. In particular these numerical simulations showed that very large kick velocities can be obtained in the case of spinning black holes for particular spin configurations. Nevertheless, as the very detailed multipolar analysis of the binary black hole recoil by Schnittman *et al.* [367] illustrates, analytic and/or semi-analytic methods are still very useful for gaining more physical understanding of the relaxation of binary black holes to their final equilibrium state.

In the simplest case of unequal mass, non-spinning black hole binaries on quasicircular orbits, the kick velocity as a function of time shows a very distinctive pattern [26, 199]: the recoil increases monotonically during the inspiral and plunge phases up to a maximum around the onset of merger, and then decreases quickly to a final asymptotic value, as much as 30 percent smaller than the maximum. This braking occurs during the phase where the newly formed black hole emits gravitational radiation in a superposition of quasinormal “ringdown” modes, and is known as the “anti-kick”. For a reduced mass parameter value $\eta \equiv m_1 m_2 / (m_1 + m_2)^2 \simeq 0.19$, the value for which the kick is a maximum, the peak value is around 250 km/s while the final kick is around 175 km/s.

Building on previous work based on a multipolar post-Minkowskian formalism [65, 58, 60], Blanchet, Qusailah and Will [87] (hereafter BQW) derived the linear momentum flux from compact binaries at second post-Newtonian (2PN) order beyond the leading effect. BQW augmented their 2PN estimate of the recoil up to the innermost circular orbit (ICO) by integrating the resulting 2PN-accurate flux from the ICO down to the horizon on a plunge geodesic of the Schwarzschild geometry. They found that the recoil monotonically increases as the plunge progresses. Within their error bars, the resulting recoil was found to agree well with the maximum value of the kick velocity as calculated by numerical relativity up to the onset of the anti-kick. And indeed the maximal kick velocity in numerical computations occurs more or less at a separation of roughly $2M$, where $M = m_1 + m_2$ is the total mass, as inferred from the times at

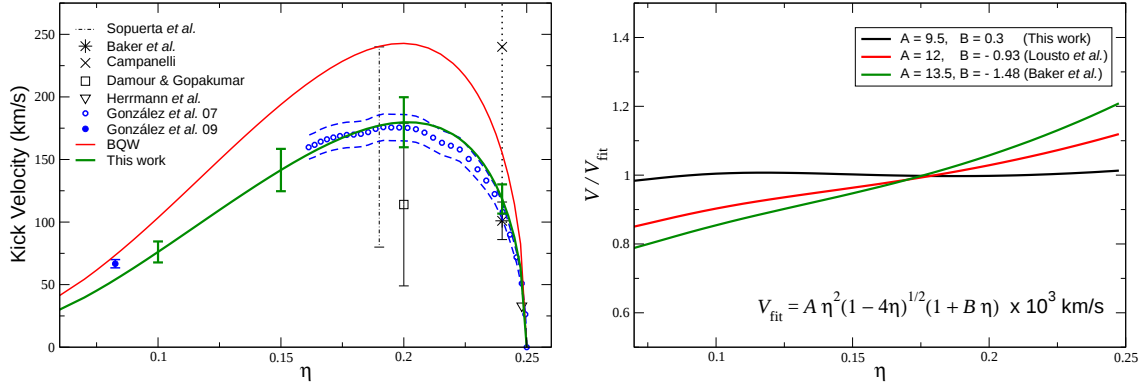


Figure 7.4: Left panel: Comparison with numerical calculations [109, 26, 210, 199, 198] and other analytic or semi-analytic methods [87, 138, 381]. Right panel: Comparison with fitting formulas derived from this paper (black) and from numerical relativity results [28, 270].

which the maximum kicks were found to occur in [26, 199] (such an inference cannot be made rigorously, of course, but does coincide roughly with where other numerical diagnostics indicated the onset of the merger). At this point, the BQW computation ended for lack of a method to evaluate the contribution from the subsequent ringdown phase. This paper reports the results of incorporating such a method.

Le Tiec and Blanchet [261] have developed a “close-limit approximation” (CLA) for black hole binaries that uses 2PN-accurate initial conditions. In this 2PN-CLA framework, the 2PN metric for two bodies in close proximity is recast as a perturbation of a Schwarzschild black hole. The resulting perturbation is then used as initial data to evolve numerically the Regge-Wheeler and Zerilli equations in order to calculate the gravitational radiation emitted subsequently. The purpose of the present paper is to use the resulting waveforms to compute the recoil generated during the ringdown phase. By adding vectorially the 2PN-CLA results to the 2PN results of BQW for the inspiral plus merger, we prove that the effect of the ringdown on the recoil is indeed to produce an anti-kick, and we find that the total kick generated by the inspiral plus merger plus ringdown phases is in good agreement with numerical computations for non-spinning black hole binaries.

Our central results are shown in Fig. 7.4. In the left panel, the curve with error bars (green in the color version) shows our combined kick velocities, with the error bars estimated by varying the radius at which the 2PN and CLA methods are matched. The top curve (red) is the kick from the BQW pure 2PN calculation up to the merger. The sequence of dots and accompanying dashed lines (blue) are from an exhaustive series of numerical simulations by González *et al.* [199, 198]. In this figure are also shown individual points and error estimates from some earlier analytic or semi-analytic estimates such as [138, 381], as well as other numerical computations.

A number of authors have fit the kick velocity to the empirical formula [87, 199]

$$V_{\text{fit}} = A \eta^2 (1 - 4\eta)^{1/2} (1 + B \eta) \times 10^3 \text{ km/s}. \quad (7.5)$$

The leading $\eta^2(1 - 4\eta)^{1/2}$ dependence derives from the lowest-order, or “Newtonian” calculation [176, 177]. A fit to our 2PN-CLA results yields $A = 9.5$ and $B = 0.3$. The right panel of Fig. 7.4 shows the ratio of our kick velocities to this fitting formula (black), together with similar ratios to fitting formulas derived from numerical relativity [28, 270]. It can be seen that our kick velocities are systematically higher than those from numerical relativity in the equal-mass limit, and systematically lower in the small mass-ratio limit. However, we find it striking that in the regime where the kick velocity is substantial, say between $\eta = 0.08$ and $\eta = 0.24$, our 2PN-CLA calculation agrees with numerical relativity to 10–15 percent, and confirms the intuition that ringdown radiation generates an anti-kick that partially offsets the kick accumulated during the plunge.

The remainder of this paper is organized as follows: In Sec. 7.5 we describe briefly the 2PN and CLA methods for calculating the gravitational recoil from the inspiral, plunge and ringdown phases (full details will be presented elsewhere [262]), and we describe the numerical implementation of the method and some of the checks and diagnostics performed. Concluding remarks are made in Sec. 7.6. We use geometrical units $G = c = 1$.

7.5 Gravitational recoil from the inspiral, plunge and ringdown phases

The flux of linear momentum carried away by gravitational waves from a general isolated system can be written in terms of the gravitational-wave polarization states h_+ and $h_\times$ as [298]

$$\frac{dP^i}{dt} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{r^2}{16\pi} \oint n^i |\dot{h}_+ - i \dot{h}_\times|^2 d\Omega \right\}, \quad (7.6)$$

where the dot stands for a partial time derivative, and $d\Omega$ is the solid angle associated with the direction of propagation n^i .

BQW [87] expanded the waveforms in terms of radiative multipole moments using the post-Minkowski framework, and expressed them in terms of source multipole moments of mass-type and current-type, valid to 2PN order, including contributions of “tails”. Restricting to binary systems on quasicircular inspiral orbits, they obtained dP^i/dt , and after integrating with respect to time, dividing by the total mass M and changing sign, obtained the recoil velocity

$$V^i = \frac{464}{105} \eta^2 (1 - 4\eta)^{1/2} x^4 \left[1 + \left(-\frac{452}{87} - \frac{1139}{522} \eta \right) x + \frac{309}{58} \pi x^{3/2} \right. \\ \left. + \left(-\frac{71345}{22968} + \frac{36761}{2088} \eta + \frac{147101}{68904} \eta^2 \right) x^2 \right] u^i, \quad (7.7)$$

where $x = (M\omega)^{2/3}$, ω being the orbital angular frequency, and u^i is the unit vector directed from the less massive toward the more massive body. (See [345] for a generalization including spin effects.) This formula gives the kick velocity V_{inspiral}^i accumulated during inspiral up to the ICO (defined by $x_{\text{ICO}} = \frac{1}{6}$).

Starting with V_{inspiral}^i , which is always a small contribution to the total kick, BQW then integrated the 2PN expression for dP^i/dt along a plunge orbit of a Schwarzschild black hole of mass M from the ICO down to a radius of order $2M$. A key to that step was to change integration variable from coordinate time t , which is singular on the event horizon, to a “proper angular frequency” variable $\bar{\omega} = d\psi/d\tau$ of the plunge orbit, which is regular on the horizon. The resulting net kick was the data for the curve labeled BQW (red) plotted in Fig. 7.4. Here we repeat this calculation, except that we terminate the plunge integration at a Schwarzschild coordinate radius r_{match} , whose value is chosen to lie between $2M$ (the minimum allowed by the method) and $2.5M$. At this radius we match the 2PN kick (namely $V_{\text{inspiral}}^i + V_{\text{plunge}}^i$), to the result of our 2PN-CLA calculation, to which we now turn. Later we will test the sensitivity of the final result to the value of the matching radius r_{match} .

The idea of the 2PN-CLA method [261] is to take the spacetime metric for a binary system accurate to 2PN order, where the two bodies are on a quasicircular orbit of initial separation r_{12} (in Schwarzschild-like coordinates), which is assumed to be of order $2M$. The metric is then re-expanded in powers of r_{12} , resulting in a Schwarzschild metric of a black hole of mass M plus correction terms that vanish in the limit $\eta \rightarrow 0$. Carrying out a multipolar expansion, one can identify the (ℓ, m) components of the Regge-Wheeler and Zerilli functions used in black-hole perturbation theory.

It is possible to express the linear momentum flux (7.6) in terms of the Regge-Wheeler and Zerilli functions $\Psi_{\ell,m}^{(e,o)}$ as defined in Eqs. (5.1) of [261]. The waveform takes the form

$$h_+ - i h_\times = \frac{1}{r} \sum_{\ell,m} \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} \left(\Psi_{\ell,m}^{(e)} + i \Psi_{\ell,m}^{(o)} \right) {}_{-2}Y_{\ell,m} + \mathcal{O}(r^{-2}), \quad (7.8)$$

where the superscripts (e) and (o) denote even and odd-parity respectively, the summations on the integers ℓ, m range from 2 to infinity for ℓ , and from $-\ell$ to ℓ for m , and where ${}_{-2}Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$ are the spin-weighted spherical harmonics of spin -2 [310, 195]. More details on this standard result are given in the Appendix of [261], including its less well-known generalization at any order in r^{-1} . We insert Eq. (7.8) into Eq. (7.6) and find (see [351] for details)

$$\begin{aligned} \frac{dP_x}{dt} + i \frac{dP_y}{dt} = & -\frac{1}{8\pi} \sum_{\ell,m} \left[i a_{\ell,m} \dot{\Psi}_{\ell,m}^{(e)} \dot{\bar{\Psi}}_{\ell,m+1}^{(o)} \right. \\ & \left. + b_{\ell,m} \left(\dot{\Psi}_{\ell,m}^{(e)} \dot{\bar{\Psi}}_{\ell+1,m+1}^{(e)} + \dot{\Psi}_{\ell,m}^{(o)} \dot{\bar{\Psi}}_{\ell+1,m+1}^{(o)} \right) \right], \end{aligned} \quad (7.9)$$

where $a_{\ell,m} = 2(\ell-1)(\ell+2)\sqrt{(\ell-m)(\ell+m+1)}$ and $b_{\ell,m} = \frac{(\ell+3)!}{(\ell+1)(\ell-2)!} \sqrt{\frac{(\ell+m+1)(\ell+m+2)}{(2\ell+1)(2\ell+3)}}$, and the overbar denotes complex conjugation. Because of the symmetry with respect to the orbital plane, we naturally find $dP_z/dt = 0$. This would no longer remain true if we were to include spin-orbit coupling terms for spinning black holes in the initial PN metric. The master functions $\Psi_{\ell,m}^{(e,o)}$ obey the wave equations

$$\left(\partial_t^2 - \partial_{r_*}^2 + \mathcal{V}_{\ell}^{(e,o)} \right) \Psi_{\ell,m}^{(e,o)} = 0, \quad (7.10)$$

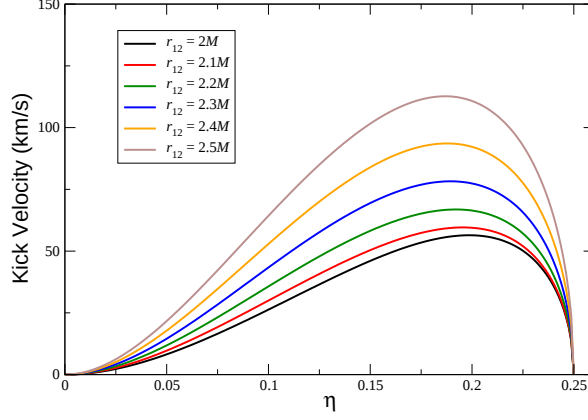


Figure 7.5: Magnitude of the recoil velocity V_{ringdown} generated during the ringdown phase as a function of the symmetric mass ratio η for different initial separations r_{12} .

where the tortoise coordinate r_* is related to the Schwarzschild radial coordinate r by $r_* = r + 2M \ln(r/2M - 1)$, and where the potentials $\mathcal{V}_\ell^{(e,o)}$ are given by

$$\mathcal{V}_\ell^{(e,o)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \mathcal{U}_\ell^{(e,o)} \right), \quad (7.11)$$

with $\mathcal{U}_\ell^{(e)} = \frac{\lambda_\ell(\lambda_\ell+2)r^2+3M(r-M)}{(\lambda_\ell r+3M)^2}$ and $\mathcal{U}_\ell^{(o)} = 1$, where $\lambda_\ell = \frac{1}{2}(\ell-1)(\ell+2)$.

We evolve the equations (7.10) with 2PN-accurate initial conditions computed with an initial separation r_{12} , and developed in the CLA as described above; detailed inputs are Eqs. (3.6)–(3.7) and (4.4)–(4.5) of Ref. [261] (see also [381] for an alternative CLA calculation using different initial conditions). Then, inserting the numerically generated master functions $\Psi_{\ell,m}^{(e,o)}$ into Eq. (7.9), we calculate the flux of linear momentum up to octupolar order during the ringdown phase, and, integrating that with respect to time, dividing by M and changing the sign, we obtain the ringdown contribution V_{ringdown}^i to the total kick. Fig. 7.5 shows the magnitude $V_{\text{ringdown}} = |V_{\text{ringdown}}^i|$ as a function of η for various values of r_{12} .

Choosing $r_{12} = r_{\text{match}}$, we then add up vectorially the results for the inspiral, plunge and ringdown phases to obtain $V^i = V_{\text{inspiral}}^i + V_{\text{plunge}}^i + V_{\text{ringdown}}^i$. In all cases we find that the direction of the ringdown kick is approximately opposite to that of the accumulated inspiral plus plunge kick. Not surprisingly, the direction or phase of the inspiral plus plunge kick is sensitive to the radius r_{match} at which the 2PN calculation terminates. But, most satisfactorily, when we add the ringdown kick, the final direction is relatively insensitive to the value of r_{match} , as shown in the left panel of Fig. 7.6 (see especially the inset panel). Similarly, the right panel shows that the magnitude of the total kick velocity is also only weakly sensitive to r_{match} . In Fig. 7.4, we have chosen $r_{\text{match}} = 2.2M$ as being a value where the phase and magnitude of the kick do not vary too much, and estimated error bars by varying r_{match} between $2M$ and $2.5M$. Unlike BQW,

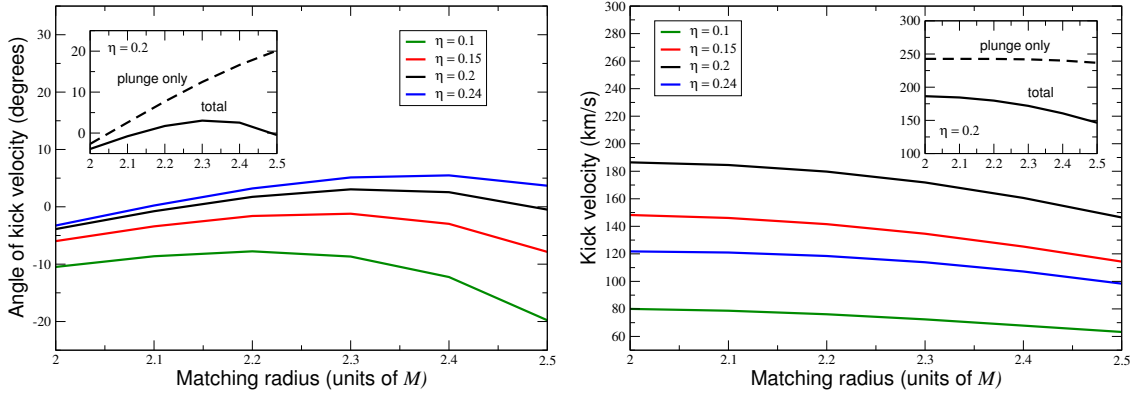


Figure 7.6: Dependence of the result for the direction (left panel) and magnitude (right panel) of the recoil velocity upon the matching radius r_{match} .

we have not attempted to estimate errors caused by the neglect of higher PN corrections in the CLA method.

7.6 Conclusions

We have found that the recoil velocity of coalescing, non-spinning black holes can be calculated using a combination of post-Newtonian theory for the inspiral and plunge, and a close-limit approximation for the ringdown, with results that agree closely with those from full-scale numerical relativity. We have also used this method to determine the total energy and angular momentum radiated during inspiral, plunge and ringdown; details will be published elsewhere [262]. An obvious, though non-trivial next step would be to incorporate the effects of spins in this approach.

Acknowledgments We wish to thank Ulrich Sperhake for providing the data necessary to produce the left panel of Fig. 7.4, on which we have superimposed our results. This work was supported in part by the National Science Foundation, Grant No. PHY 06-52448, the National Aeronautics and Space Administration, Grant No. NNG-06GI60G, the Programme International de Coopération Scientifique of the Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS-PICS), Grant No. 4396, and the McDonnell Center for the Space Sciences. CMW acknowledges the hospitality of the Institut d’Astrophysique de Paris, where this work was completed.

☒

Deuxième partie

Le problème de la matière noire en astrophysique

MODÈLE DE CONCORDANCE EN COSMOLOGIE

La dernière décennie a vu l'émergence de la cosmologie en tant que science fondée sur des mesures de précision, de sorte qu'un cadre théorique fortement contraint et testé s'est imposé : le modèle de concordance cosmologique [316], ou Λ -CDM (pour Λ -cold dark matter). Nous donnons dans ce chapitre un (très) bref aperçu du modèle cosmologique actuel, en portant notre attention sur son contenu en matière-énergie, tel que déterminé par les mesures les plus récentes.

8.1 Un Univers homogène et isotrope

La cosmologie est la science dont l'objet d'étude est l'Univers dans son ensemble. Elle s'efforce de retracer son histoire, de caractériser son contenu, et de prévoir son évolution. La force de gravitation étant la seule force à longue portée non écrantée, elle domine la physique aux échelles cosmologiques. La cosmologie standard suppose que la gravitation est régie par la théorie de la relativité générale. Dans le cadre cosmologique, nous autorisons la présence d'une constante cosmologique Λ dans les équations d'Einstein (1.2), de sorte que celles-ci s'écrivent¹

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} . \quad (8.1)$$

De nombreuses observations attestent que notre Univers est spatialement *isotrope* à grande échelle, comme par exemple le catalogue 2dF QSO [125] relevant la distribution des quasars jusqu'à des décalages spectraux $z \simeq 3$. La preuve la plus flagrante de cette isotropie est fournie par les très faibles variations relatives de température $\delta T / T \simeq 10^{-5}$ dans le rayonnement du fond diffus cosmologique² [314], dont on pense qu'elles gardent l'empreinte des fluctuations de densité initiales, elles-mêmes à l'origine de la formation des grandes structures sous l'effet d'instabilités

¹Dans ce chapitre nous poserons $G = c = 1$.

²Une fois retirée l'anisotropie dipolaire due au mouvement de la Terre par rapport au référentiel cosmologique privilégié défini par les observateurs comouvants.

gravitationnelles. Si de plus nous postulons — conformément à la vision non géocentrique de la science moderne — que nous n’occupons pas une position privilégiée dans l’Univers³, alors de ce *principe copernicien* nous déduisons que l’Univers doit également apparaître spatialement isotrope à tout observateur comobile. Par conséquent, en plus d’être spatialement isotrope, l’Univers est également spatialement *homogène*. Les sections spatiales de notre Univers sont donc à symétrie maximale, et par conséquent de courbure k constante. La métrique d’espace-temps est alors unique (à un changement de système de coordonnées près) [413] ; il s’agit de la métrique de Robertson-Walker. Dans un système de coordonnées comobiles $\{t, r, \theta, \varphi\}$, elle s’écrit

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (8.2)$$

où $a(t)$ est le facteur d’échelle (sans dimensions, avec $a_0 \equiv a(t_0) = 1$ aujourd’hui par convention), et $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ est la métrique sur la 2-sphère de rayon unité $\mathbb{S}^2$. La coordonnée temporelle t est le temps cosmique mesuré par les horloges des observateurs comobiles ($x^i = \text{constante}$). La courbure k des sections spatiales d’Univers peut prendre les valeurs $k = 0$ pour un Univers plat dont la géométrie euclidienne est celle de $\mathbb{R}^3$, $k > 0$ pour un Univers fermé dont la géométrie sphérique est celle de la 3-sphère $\mathbb{S}^3$, et $k < 0$ pour un Univers ouvert⁴ dont la géométrie hyperbolique est celle de la 3-hyperboloïde $\mathbb{H}^3$.

Les symétries des espace-temps de Robertson-Walker imposent aux tenseurs énergie-impulsion décrivant les divers champs de matière (i) en présence (baryons, photons, neutrinos, etc.) de prendre la forme qui convient à un fluide parfait, de sorte que le tenseur énergie-impulsion total s’écrit

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, \quad (8.3)$$

où u^μ est la quadrivitesse commune à tous les fluides, $\rho = \sum_i \rho_i$ est la somme des densités d’énergie ρ_i telles que mesurées dans le référentiel où la matière est temporairement au repos, *i.e.* $u^\mu = (1, \mathbf{0})$, et $p = \sum_i p_i$ la somme des pressions. En déplaçant le terme dépendant de Λ dans le membre de droite des équations d’Einstein (8.1), la constante cosmologique peut également être vue comme un fluide parfait caractérisé par un tenseur énergie-impulsion $T_\Lambda^{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi} g^{\mu\nu}$, de pression négative $p_\Lambda = -\rho_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi}$, de sorte que $w \equiv \rho_\Lambda / p_\Lambda = -1$.

En remplaçant l’expression (8.2) de la métrique de Robertson-Walker dans les équations d’Einstein (8.1), on obtient les équations de Friedmann-Lemaître. Lorsque l’équation d’état de la matière — par exemple une équation d’état barotropique $p = p(\rho)$ — est connue, les équations de Friedmann-Lemaître déterminent l’évolution temporelle du facteur d’échelle $a(t)$ et de la densité d’énergie $\rho(t)$ selon les relations

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (8.4a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (8.4b)$$

³Cette affirmation est à prendre au sens large : elle doit être appliquée à grande échelle, en un sens statistique. En effet, nous occupons de fait un emplacement privilégié en tant qu’observateurs sur une planète orbitant une étoile à une distance ayant permis l’émergence de la vie, dans le pic de densité de matière noire de la Voie Lactée.

⁴Les équations d’Einstein ne posent aucune contrainte sur la topologie de la variété d’espace-temps représentant notre Univers. Si celle-ci n’est pas simplement connexe, alors on peut avoir un Univers fermé à géométrie hyperbolique. Voir par exemple [253] pour les conséquences en cosmologie.

Le paramètre de Hubble $H \equiv \dot{a}/a$ mesure le taux d'expansion de l'Univers. On peut déduire des équations (8.4) la loi de conservation

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (8.5)$$

pour le contenu matériel de l'Univers. Ceci résulte du fait que l'identité de Bianchi implique la conservation du tenseur énergie-impulsion total⁵.

8.2 Contenu énergétique de l'Univers

Il est commode d'introduire les grandeurs adimensionnées $\Omega_i \equiv \rho_i/\rho_c$ pour les différentes espèces (i) en présence, où $\rho_c \equiv 3H^2/(8\pi)$ est la densité de matière dite « critique » nécessaire pour « fermer » l'Univers : en l'absence de constante cosmologique ($\Lambda = 0$), l'Univers est plat ($k = 0$) si et seulement si (ssi) $\rho = \rho_c$, fermé ($k > 0$) ssi $\rho > \rho_c$, et ouvert ($k < 0$) ssi $\rho < \rho_c$. Divisant l'équation (8.4a) par H^2 , on obtient le bilan énergétique

$$\sum_i \Omega_i + \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_k, \quad (8.6)$$

avec

$$\Omega_i = \frac{8\pi\rho_i}{3H^2}, \quad (8.7a)$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad (8.7b)$$

$$\Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2}. \quad (8.7c)$$

Un des objectifs de la cosmologie observationnelle est de mesurer aussi précisément que possible les valeurs des différents paramètres H , Ω_i , Ω_Λ et Ω_k aujourd'hui⁶. L'incertitude sur la mesure de la « constante » de Hubble H_0 , *i.e.* le paramètre de Hubble H évalué aujourd'hui, se propageant sur la mesure de nombreux autres paramètres cosmologiques, il est courant d'adopter la paramétrisation $H_0 = 100 h \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$, avec $h \simeq 0,7$.

Le contenu matériel et énergétique du modèle de concordance cosmologique fait intervenir la matière et le rayonnement connus : les baryons, les photons et les neutrinos, de densités d'énergie réduites Ω_{bar} , Ω_γ et Ω_ν respectivement. Ce modèle fait également intervenir de la matière et de l'énergie non encore identifiées à ce jour : la matière noire (voir § 8.3), de densité d'énergie réduite Ω_{mn} , et l'énergie noire, supposée par la suite sous la forme d'une constante cosmologique Λ , de sorte que la densité d'énergie noire réduite est simplement Ω_Λ .

⁵Tant que l'on peut négliger les interactions entre composantes de matière, on a de plus conservation du tenseur énergie-impulsion individuel de chaque composante de matière, de sorte que $\dot{\rho}_i + 3H(\rho_i + p_i) = 0$ pour chaque espèce (i) individuellement.

⁶Le modèle de concordance cosmologique fait intervenir de nombreux autres paramètres physiques et astrophysiques : l'amplitude σ_8 des fluctuations de densité à l'échelle $8h^{-1} \text{ Mpc}$, le rapport r des amplitudes des perturbations de type tensorielles et scalaires issues de l'inflation, la profondeur optique de l'Univers τ au moment de la réionisation, etc. Voir par exemple [384] pour une liste exhaustive.

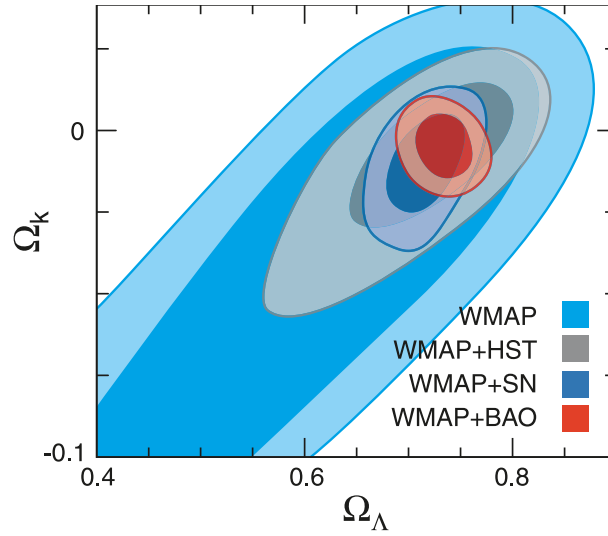


FIG. 8.1: Les mesures cosmologiques actuelles concordent vers un univers plat ($\Omega_k = 0$), contenant environ 73% d'énergie noire sous forme d'une constante cosmologique Λ ($\Omega_\Lambda \simeq 0,73$). *Figure tirée de [243].*

Bilan énergétique

La combinaison des mesures actuelles les plus précises — anisotropies du fond diffus cosmologique, relation magnitude-décalage vers le rouge des supernovæ de type Ia, et oscillations acoustiques baryoniques — fournissent la limite supérieure $|\Omega_k| = 0,006 \pm 0,006$ pour la courbure de l'Univers [255] (voir Fig. 8.1). En supposant l'Univers plat ($\Omega_k = 0$), on obtient un modèle d'Univers ajustant remarquablement bien les données, et dont le contenu énergétique aujourd'hui se résume à [255] (voir Figs. 8.1 et 8.2) :

$$h = 0,705 \pm 0,013, \quad (8.8a)$$

$$h^2 \Omega_r = 4,15 \times 10^{-5} \begin{cases} h^2 \Omega_\gamma = 2,47 \times 10^{-5}, \\ h^2 \Omega_\nu = 1,68 \times 10^{-5}, \end{cases} \quad (8.8b)$$

$$h^2 \Omega_m = 0,136 \pm 0,004 \begin{cases} h^2 \Omega_{\text{bar}} = 0,0227 \pm 0,0006, \\ h^2 \Omega_{\text{mn}} = 0,113 \pm 0,003, \end{cases} \quad (8.8c)$$

$$\Omega_\Lambda = 0,726 \pm 0,015. \quad (8.8d)$$

Les mesures cosmologiques actuelles concordent donc vers un Univers plat, dont le contenu en matière-énergie se répartit en approximativement 4% de matière baryonique, 23% de matière noire, et 73% d'énergie noire sous forme d'une constante cosmologique Λ . Bien que dominante par le passé, la contribution Ω_r due au rayonnement (photons et neutrinos) est négligeable aujourd'hui. Au bilan (8.8) peuvent être ajoutées quelques autres contributions également négligeables, dues aux ondes gravitationnelles primordiales, aux cordes cosmiques, et à d'autres sources plus spéculatives [327].

La précision des mesures cosmologiques actuelles, telle que résumée dans le bilan énergétique (8.8), est impressionnante. Il faut toutefois prendre garde au fait qu'un modèle peut à la fois ajuster avec grande précision une série d'observations tout en fournissant une description erronée de

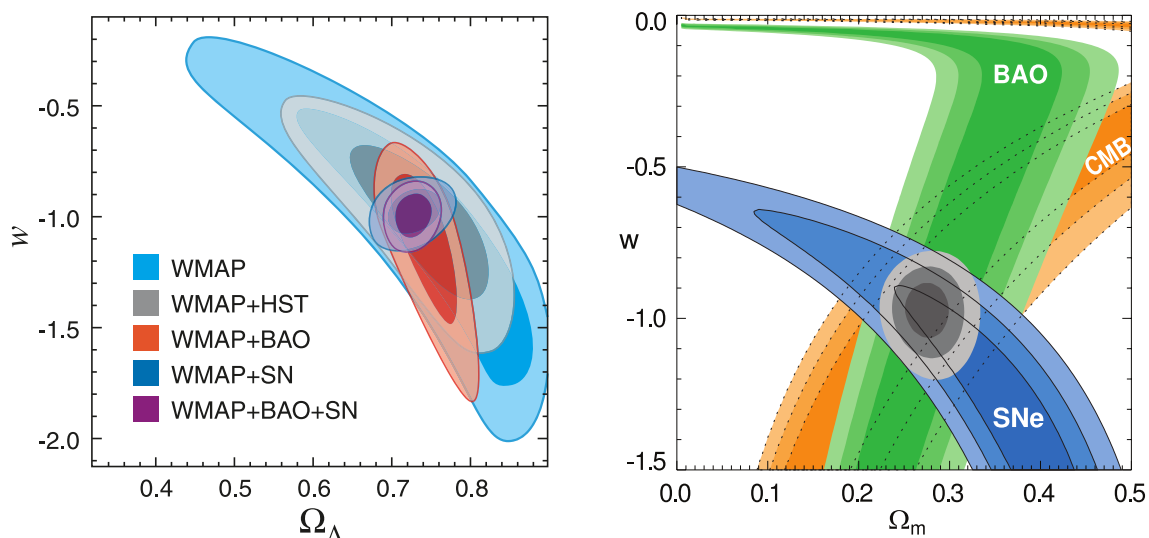


FIG. 8.2: Les mesures cosmologiques actuelles sont compatibles avec une énergie noire sous forme d'une constante cosmologique ($w = -1$). Le contenu énergétique de l'Univers est réparti en 73% d'énergie noire ($\Omega_\Lambda \simeq 0,73$) et 27% de matière baryonique et noire ($\Omega_m \simeq 0,27$). Figures tirées de [243] (à gauche) et [248] (à droite).

la réalité, car étant basé sur une ou plusieurs hypothèses fausses. À titre d'exemple, il est préférable d'un point de vue épistémologique de ne pas fixer la valeur de Ω_k *a priori*, puis de constater que le meilleur ajustement des données correspond à une valeur de Ω_k très faible. Il est alors *a posteriori* justifié de refaire l'analyse en posant dès le départ $k = 0$. Pour cette raison, il faut garder à l'esprit que bien que le modèle de concordance cosmologique fournisse une vision remarquablement cohérente de notre Univers, les alternatives peuvent et *doivent* être explorées, ne serait-ce que pour renforcer notre confiance dans le fait que Λ -CDM est la meilleure description de notre Univers dont nous disposons.

Méthodes de mesure

Notre confiance dans les résultats (8.8) est d'autant plus renforcée que ces valeurs résultent de l'analyse conjointe de mesures indépendantes. Cette analyse conjointe permet à la fois de lever certaines dégénérescences parmi les mesures des paramètres cosmologiques, et de croiser les valeurs de façon à tester la cohérence interne du modèle. Nous résumons ici les principales méthodes indépendantes ayant permis d'obtenir les résultats (8.8) :

- La « constante » de Hubble H_0 est mesurée indépendamment *via* l'observation par le télescope spatial Hubble de la période de pulsation d'étoiles céphéides [181], par la relation magnitude-décalage spectral vers le rouge des supernovæ de type Ia [349, 326], par les anisotropies du fond diffus cosmologique [215], et bien d'autres méthodes.
- La densité d'énergie des photons $h^2\Omega_\gamma$ est largement dominée par la contribution des photons en provenance du fond diffus cosmologique. Sa valeur a été déterminée très précisément grâce à la mesure par le satellite COBE du spectre de corps noir de ce rayonnement fossile de température $T = 2,725 \pm 0,001$ K [178, 278].

- Si les neutrinos sont supposés sans masse⁷, alors leur contribution $h^2\Omega_\nu$ est déterminée par des considérations thermodynamiques lors de leur découplage au bain de photons-électrons-positrons, lorsque la température de l'Univers avoisinait 1 MeV [327]. Elle est de l'ordre de 68% de celle des photons.
- La contribution baryonique $h^2\Omega_{\text{bar}}$ est déterminée indépendamment par la conjonction de la théorie de la nucléosynthèse primordiale et de la mesure des abondances des éléments légers (Deutérium, Helium 4, et Lithium 7) [315, 172], ainsi que par la mesure des anisotropies du fond diffus cosmologique.
- La contribution totale due à la matière $h^2\Omega_m$ est mesurée grâce aux oscillations acoustiques baryoniques dans le regroupement des galaxies à grande échelle [162], *via* les anisotropies du fond diffus cosmologique, ainsi que par la relation magnitude-décalage spectral vers le rouge des supernovæ de type Ia.
- La contribution due à l'énergie noire Ω_Λ est déterminée par la relation magnitude-décalage spectral vers le rouge des supernovæ de type Ia, qui a mis en évidence, au cours des années 90, l'accélération de l'expansion de l'Univers. La mesure des anisotropies du fond diffus cosmologique fournit une mesure indépendante de Ω_Λ .

L'énergie noire

Par simplicité, nous avons supposé ici que l'énergie noire prend la forme d'une constante cosmologique Λ . Cette hypothèse conservatrice est bien supportée par les mesures cosmologiques actuelles, qui n'ont à ce jour mis en évidence aucune évolution temporelle de l'équation d'état w de l'énergie noire [255] (voir Figs. 8.2). La prochaine génération de missions spatiales dédiées à l'étude de l'énergie noire (EUCLID [164] et JDEM [230]) devrait permettre une bien meilleure caractérisation de la nature de l'énergie noire, et en particulier de distinguer entre une constante cosmologique et un champ dynamique (la « quintessence »).

Nous ne commenterons pas les problèmes d'ordre théorique posés par une si « petite » valeur de la densité d'énergie associée à la constante cosmologique, $\rho_\Lambda \simeq 0,9 \text{ GeV/m}^3$ [414]. Notons simplement qu'un nombre important d'alternatives au paradigme de l'énergie noire sont par conséquent étudiées, parmi lesquelles figurent (voir par exemple [158] pour une revue) : (i) les scénarios branaires inspirés de la théorie des cordes, conduisant à une modification de la relativité générale à grande échelle induite par la présence de dimensions supplémentaires, (ii) les théories $f(R)$, où le lagrangien d'Einstein-Hilbert est remplacé par une fonction du scalaire de Ricci, (iii) un renoncement au principe copernicien, auquel cas l'apparente accélération de l'expansion de l'Univers pourrait s'expliquer par notre présence au centre d'une très grande bulle sous-dense de taille de l'ordre du Gpc, ou encore (iv) un effet de *back-reaction* des inhomogénéités sur la dynamique de la métrique de fond.

⁷La mesure des oscillations des neutrinos en provenance du Soleil implique toutefois qu'au moins l'une des trois espèces de neutrinos a une masse supérieure à 0,05 eV [196].

8.3 Le paradigme de la matière noire froide

Le concept de masse manquante en astrophysique remonte à 1933, lorsque Zwicky remarqua que la masse dynamique (la masse telle que déduite des vitesses, ou de la dispersion de vitesse des constituants d'un système auto-gravitant) de l'amas de galaxies de Coma est quelques centaines de fois supérieure à sa masse visible (la masse telle que déduite de la luminosité du système auto-gravitant) [426]. Aujourd'hui, tout un faisceau d'indices concordent vers l'existence d'une grande quantité de matière invisible (interagissant très peu avec les photons), froide (*i.e.* non relativiste), présente de l'échelle galactique jusqu'aux échelles cosmologiques, et représentant plus de 23% du budget énergétique de l'Univers : la matière noire. Les paragraphes qui suivent résument les succès rencontrés par cette hypothèse, ainsi que les principaux candidats et méthodes de recherche de la matière noire. Nous ne donnons aucune référence, mais renvoyons le lecteur à la revue succincte [157], à la revue détaillée [53], ainsi qu'au livre récent [52] pour plus de détails.

De nombreux succès L'hypothèse de la matière noire froide constitue un ingrédient majeur du modèle de concordance cosmologique, en raison d'une longue liste de succès à mettre en accord théorie et observations :

- La matière noire explique les différences observées entre masse dynamique et masse lumineuse, depuis l'échelle galactique jusqu'à celle des amas de galaxies.
- Elle permet de former, à partir des fluctuations primordiales de densité, les puits de potentiel dans lesquels la matière baryonique « s'effondre » pour former les structures observées, depuis l'échelle des amas de galaxies jusqu'aux échelles cosmologiques. En l'absence de matière noire, les structures à grande échelle ne se formeraient pas assez vite par comparaison avec l'âge de l'Univers aujourd'hui, de l'ordre de $13,7 \times 10^9$ ans.
- Si la gravitation est correctement décrite par la relativité générale aux échelles cosmologiques, alors la matière noire est nécessaire pour expliquer le spectre des anisotropies du fond diffus cosmologique, ainsi que les oscillations acoustiques baryoniques.
- Sous ces mêmes conditions, la matière noire est requise pour expliquer les observations de lentilles gravitationnelles.

Candidats L'existence de particules non baryoniques interagissant faiblement avec la matière ordinaire est attendue dans la plupart des extensions du modèle standard de la physique de particules. Cette motivation indépendante des observations astronomiques et un argument fort en faveur de l'existence de la matière noire. Il existe de nombreux candidats, parmi lesquels les plus étudiés sont :

- La plus légère des particules supersymétriques (neutralino, photino, etc.) dans l'extension supersymétrique minimale du modèle standard, qui serait une particule stable, électriquement neutre, de masse typiquement comprise entre 10 GeV et 10 TeV ; on parle couramment de WIMPs, pour *Weakly Interacting Massive Particles*.
- L'axion, une particule de très faible masse, typiquement entre 1 μ eV et 1 meV, initialement introduite pour résoudre le problème de la violation de symétrie CP (charge-parité) en chromodynamique quantique.
- Les états de Kaluza-Klein dans les théories avec dimensions d'espace supplémentaires.

Observations La matière baryonique ne représentant que 4% du budget énergétique, face à 23% pour la matière noire (et 73% pour l'énergie noire), de nombreux efforts sont déployés pour produire ou détecter (directement ou non) des particules de matière noire. Les trois voies de recherche empruntées sont :

- La détection directe sur Terre *via* la diffusion d'une particule de matière noire par le noyau d'un atome lourd, induisant un recul de ce dernier. La section efficace d'interaction étant très faible, le taux d'événements attendu est bien en-deça du taux d'événements parasites induits par la radioactivité naturelle (diffusion de neutrons par les noyaux), ce qui nécessite une isolation sophistiquée et un rejet efficace des événements parasites.
- La détection indirecte en observant un flux de photons γ , de neutrinos, de positrons, d'antiprotons et d'antinoyaux résultant de l'annihilation de particules de matière noire avec leurs antiparticules. Le fond d'origine astrophysique est mal connu, et donc mal modélisé, ce qui limite les possibilités de détection.
- La production dans les accélérateurs de particules. Le LHC (*Large Hadron Collider*), au CERN, dont la luminosité nominale est de 14 TeV, aura de fortes chances de produire des WIMPs, si ces particules existent.

Après ce très bref tour d'horizon du paradigme de la matière noire, quelques mots de précaution s'imposent. Les physiciens ont souvent tendance à introduire de la matière invisible là où nécessaire, afin de « sauver les apparences » dans le contexte scientifique de leur époque. On pensera par exemple à l'éther, un fluide définissant un référentiel privilégié par rapport auquel les ondes électromagnétiques se propageraient à la vitesse c , et dont Michelson et Morley essayèrent en vain de prouver l'existence lors de leurs expériences interférométriques. La solution à ce premier problème fut de modifier les lois de la physique en l'absence d'éther : le remplacement de la mécanique galiléenne au profit de la relativité restreinte. Un siècle et demi plus tôt, Le Verrier a tenté d'introduire une planète, Vulcain, entre le Soleil et Mercure, afin d'expliquer l'anomalie de l'avance du périhélie de celle-ci. La solution fut une fois encore donnée par Einstein, qui supplanta la gravitation newtonienne par la théorie de la relativité générale⁸. Il convient donc de faire preuve de prudence lorsque les physiciens entendent expliquer des observations inattendues en introduisant une composante de matière invisible. Cette fois encore, la solution passera peut-être par une révision des lois de la physique ; la gravité modifiée en tant qu'alternative au paradigme de la matière noire est le sujet du chapitre suivant.

☒

⁸Précisons toutefois que l'introduction de matière invisible est parfois la bonne solution : Le Verrier prédit ainsi l'existence de la planète Neptune en s'efforçant d'expliquer les anomalies de l'orbite d'Uranus.

PHÉNOMÉNOLOGIE DE LA DYNAMIQUE NEWTONIENNE MODIFIÉE

MALGRÉ de nombreux succès aux échelles cosmologiques, le paradigme de la matière noire froide est mis en difficulté à l'échelle galactique. Une alternative a été proposée par Milgrom, sous la forme d'une modification des lois de la gravité en l'absence de matière noire : la dynamique newtonienne modifiée.

9.1 Observations à l'échelle galactique

Dans le cadre du modèle de concordance Λ -CDM, l'observation du caractère asymptotiquement plat des courbes de rotation des galaxies spirales (voir la Fig. 9.1 pour quelques exemples) s'explique par l'existence d'un halo de matière noire [122] de densité $\rho_{\text{halo}}(r) \propto r^{-2}$ (au moins dans une certaine plage de distances), de sorte que la masse englobée dans une sphère de rayon r croît comme $M(r) \propto r$, garantissant ainsi une vitesse de rotation $V(r) = \sqrt{GM/r}$ asymptotiquement constante.

Ce scénario présente toutefois de nombreuses difficultés. En effet, les simulations numériques cosmologiques actuelles permettent de résoudre des structures jusqu'à l'échelle sub-galactique, et les propriétés des galaxies ainsi obtenues sont en désaccord avec les observations sur de nombreux points [371, 252, 324]. Parmi ces problèmes, citons en particulier :

- La prédiction d'un profil de densité de matière noire piqué au centre des galaxies [308], contrairement aux observations qui indiquent plutôt un profil plat [357, 190].
- Une surabondance de sous-structures dans les halos galactiques : les simulations prédisent environ dix fois trop de galaxies naines satellites orbitant les galaxies spirales telles que la Voie Lactée par rapport aux observations [301].
- La trop petite taille des disques galactiques formés, à cause du transfert de moment cinétique des baryons vers le halo de matière noire froide [307].

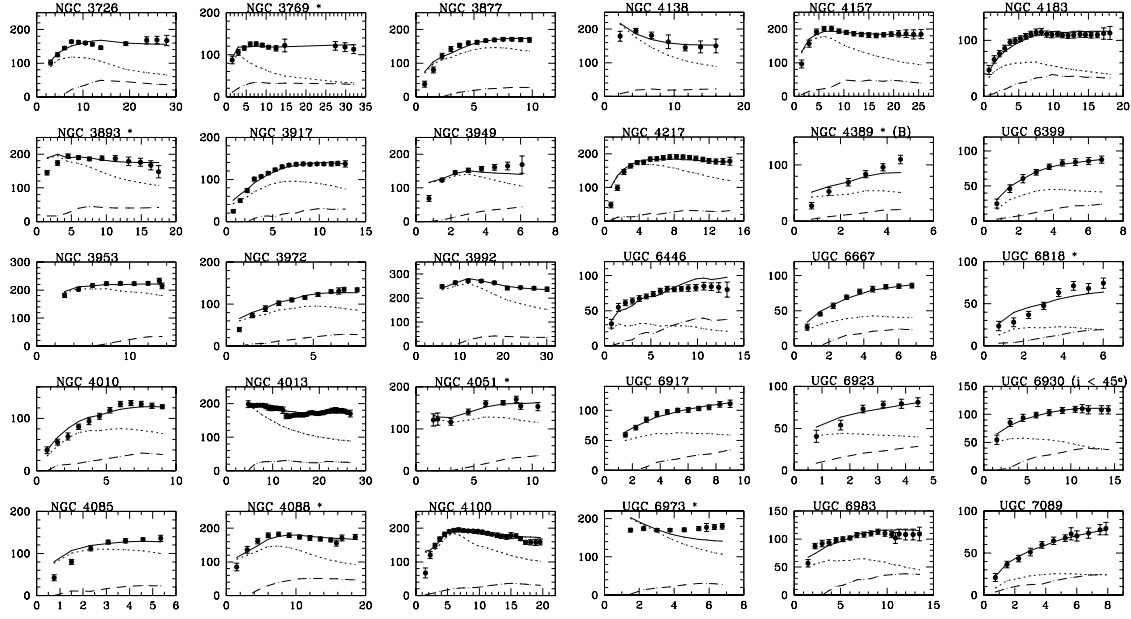


FIG. 9.1: Un échantillon de courbes de rotation de galaxies spirales : la vitesse de rotation V des étoiles (exprimée en km/s), déduite de la mesure du décalage spectral de la raie de l'hydrogène neutre à 21 cm, est tracée en fonction de la distance r au centre galactique (exprimée en kpc). Les points de mesure indiquent clairement le caractère asymptotiquement plat des courbes de rotation galactiques. Celles-ci sont remarquablement bien ajustées par MOND (courbes en trait plein) à l'aide du seul rapport masse sur luminosité M/L [363]. *Figure tirée de [361].*

- Le fait que les galaxies naines de marée (qui se forment à partir de « débris » issus de collisions de galaxies massives) semblent dominées par la matière noire [94], une observation difficilement conciliable avec la nature non collisionnelle de la matière noire froide [38].

Dans le scénario de croissance hiérarchique des structures, les propriétés physiques des galaxies doivent *a priori* beaucoup dépendre des détails de leurs histoires individuelles au cours de l'évolution cosmique. Le principal problème rencontré par l'hypothèse de la matière noire froide est précisément la difficulté à expliquer naturellement toute une série de lois empiriques universelles observées à l'échelle galactique (voir [361, 155] pour des listes plus exhaustives) :

- La loi de Tully-Fisher [408] établissant une corrélation entre la luminosité L des galaxies spirales et leur vitesse asymptotique de rotation V_{rot} , $L \propto V_{\text{rot}}^4$ (cf. Fig. 9.2), corrigée en loi de Tully-Fisher baryonique [282], dans laquelle la luminosité est remplacée au profit de la masse baryonique totale (étoiles et gaz).
- La loi de Faber-Jackson [166] établissant une corrélation similaire dans le cas des galaxies elliptiques, cette fois-ci entre la luminosité et la dispersion de vitesse.
- La loi de Freeman [182] d'après laquelle il existe une valeur maximale à la densité de surface moyenne des galaxies spirales, et la récente découverte du caractère universel, *i.e* valable pour toutes les galaxies, de la densité surfacique baryonique moyenne dans le cœur du halo de matière noire [189].
- L'existence d'une échelle d'accélération universelle en deçà de laquelle il devient nécessaire d'introduire de la matière noire dans les galaxies. Cette échelle d'accélération est fortement corrélée au rapport $M_{\text{dyn}}/M_{\text{vis}}$ entre masse dynamique et masse visible (cf. Fig. 9.3).

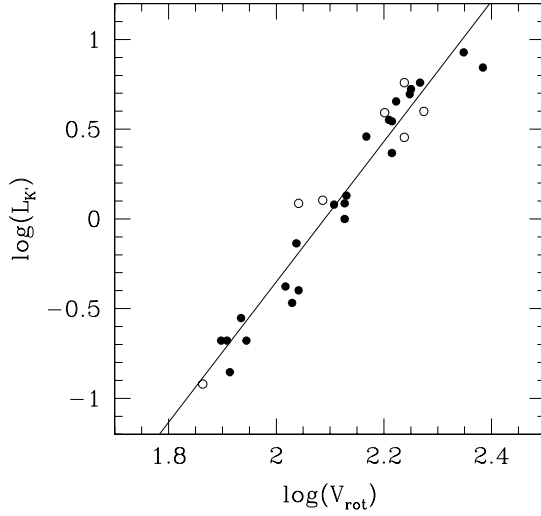


FIG. 9.2: La loi de Tully-Fisher stipule que la luminosité L des galaxies spirales (ici mesurée en bande K, dans le proche infrarouge) est corrélée à la 4^e puissance de la vitesse asymptotique de rotation V_{rot} des étoiles. La droite est un ajustement des données par moindres carrés ; sa pente vaut $3,9 \pm 0,2$. Figure tirée de [361].

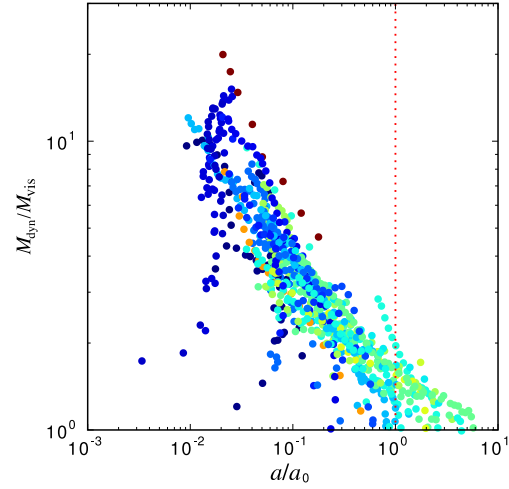


FIG. 9.3: Le rapport $M_{\text{dyn}}/M_{\text{vis}}$ entre masses dynamique et visible est fortement corrélé à l'accélération asymptotique a des étoiles. L'introduction de matière noire ne devient nécessaire que lorsque a passe sous le seuil $a_0 \simeq 10^{-10} \text{ m/s}^2$. Figure adaptée de [407], avec la permission de O. Tiret et F. Combes.

Il est possible qu'une meilleure prise en compte de la physique des baryons dans les simulations numériques (*feedback* de la formation stellaire, des supernovæ, des vents galactiques, etc.) permette de résoudre tout ou partie de ces problèmes [388, 383]. Il se peut également que cette liste d'insuffisances pointe vers une solution toute différente au problème de la masse manquante.

9.2 La dynamique newtonienne modifiée

Milgrom proposa ainsi de modifier la dynamique newtonienne en l'absence de matière noire [285, 286, 287]. La dynamique newtonienne modifiée, ou MOND pour *MOdified Newtonian Dynamics* en anglais, stipule que le champ gravitationnel $\mathbf{g}$ est relié au champ gravitationnel newtonien $\mathbf{g}_N$ via l'équation MOND¹

$$\mu\left(\frac{g}{a_0}\right) \mathbf{g} = \mathbf{g}_N, \quad (9.1)$$

où μ est une fonction du rapport adimensionné entre la norme $g = |\mathbf{g}|$ du champ gravitationnel, et une échelle d'accélération a_0 supposée fondamentale : l'accélération MOND. Les champs gravitationnels $\mathbf{g} = \nabla U$ et $\mathbf{g}_N = \nabla U_N$ dérivent des potentiels gravitationnels « mondien » U , et newtonien U_N respectivement. Afin de retrouver la dynamique newtonienne dans le régime newtonien, la fonction MOND doit satisfaire $\mu \rightarrow 1$ lorsque $g \gg a_0$. Dans le régime mondien

¹Alternativement, la dynamique newtonienne modifiée peut être formulée comme une modification de l'inertie, en substituant dans (9.1) le champ gravitationnel $\mathbf{g}$ par l'accélération $\mathbf{a}$ d'une particule test, et le champ gravitationnel newtonien $\mathbf{g}_N$ par l'accélération newtonienne $\mathbf{a}_N$ (telle que déduite de la seconde loi de Newton).

$g \ll a_0$, elle doit se comporter asymptotiquement comme $\mu(x) \sim x$ afin de retrouver la bonne phénoménologie. Dans l'attente d'une physique plus fondamentale censée spécifier le comportement de la fonction MOND dans le régime intermédiaire, toute fonction d'interpolation compatible avec les contraintes expérimentales est *a priori* admissible.

Afin de comprendre comment cette « recette » permet de retrouver immédiatement certaines des observations décrites dans le paragraphe précédent, considérons le cas (idéalisé) d'une galaxie de masse M dont la distribution de masse est à symétrie sphérique. Alors pour une étoile périphérique située à une distance r du centre galactique telle que le champ gravitationnel y vérifie $g \ll a_0$, l'équation MOND (9.1) stipule que

$$\frac{g^2}{a_0} = \frac{GM}{r^2}. \quad (9.2)$$

Dans le cadre de la dynamique newtonienne modifiée, le principe d'équivalence est toujours vérifié, de sorte que l'accélération de l'étoile (assimilée à une particule test) est égale au champ gravitationnel, $\mathbf{a} = \mathbf{g}$. Pour une étoile sur une orbite circulaire, l'accélération est centripète, et sa norme vaut $a = V_{\text{rot}}^2/r$, où V_{rot} est la norme de la vitesse (asymptotique) de rotation. Combinant ces deux résultats avec la relation (9.2), on obtient

$$V_{\text{rot}}^4 = GMa_0. \quad (9.3)$$

On retrouve ainsi le caractère asymptotiquement plat des courbes de rotation des galaxies, ainsi que la loi de Tully-Fisher baryonique $M \propto V_{\text{rot}}^4$ [282]. De plus, pour les galaxies spirales dont la masse est dominée par les étoiles, la luminosité L est un bon traceur² de la masse baryonique M , de sorte que le rapport M/L (relativement au rapport $M_{\odot}/L_{\odot}$ dans le système solaire) est à peu près constant d'une galaxie à l'autre, et de l'ordre de l'unité [361]. On retrouve donc très simplement la loi empirique de Tully-Fisher $L \propto V_{\text{rot}}^4$ [408]. Le coefficient de proportionnalité entre L et V_{rot}^4 dépendant de l'échelle d'accélération a_0 , celle-ci peut être estimée en mesurant l'ordonnée à l'origine d'un diagramme similaire à celui de la Fig. 9.2. On obtient ainsi

$$a_0 \simeq 1,2 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2. \quad (9.4)$$

Sachant que la gravitation newtonienne n'a encore jamais été testée pour des champs gravitationnels aussi faibles, la dynamique newtonienne modifiée ne peut être rejetée d'emblée au vu des contraintes expérimentales actuelles.

Quelques succès rencontrés par MOND

Par ailleurs, la « recette » encodée dans l'équation (9.1) s'avère être particulièrement efficace pour ajuster individuellement les courbes de rotation de galaxies spirales à l'aide d'un seul paramètre libre : le rapport masse sur luminosité M/L (voir Fig. 9.1). La procédure d'ajustement consiste à combiner un modèle du disque galactique (plus éventuellement du bulbe) avec une mesure du profil de luminosité de surface afin d'obtenir la distribution de matière baryonique

²Il existe des gradients de couleurs dans les galaxies spirales. Lorsque cela s'avère possible, la luminosité est mesurée dans le proche infrarouge afin d'inclure les populations de vieilles étoiles peu massives, et de minimiser l'absorption par les poussières [361].

dans la galaxie. Celle-ci permet de calculer le champ gravitationnel newtonien *via* l'équation de Poisson, puis le champ gravitationnel mondien grâce à l'équation MOND (9.1). On en déduit alors la dynamique des étoiles, ce qui permet de construire la courbe de rotation. Les valeurs déduites de l'ajustement du rapport M/L sont typiquement en très bon accord avec les modèles de synthèse stellaire [47]. Notons que si MOND explique par construction le caractère asymptotiquement plat des courbes de rotation galactiques, ainsi que la loi de Tully-Fisher, rien ne garantit *a priori* que cette « théorie » parvienne à ajuster avec grande précision les détails fins des courbes de rotation à l'aide d'un seul paramètre libre.

L'équation MOND (9.1) fait également de nombreuses prédictions sur les propriétés des systèmes auto-gravitants, parmi lesquelles (voir la revue [361] pour une liste plus exhaustive) l'existence de la valeur critique de densité de surface

$$\Sigma_c \sim \frac{a_0}{G}. \quad (9.5)$$

Milgrom prédit ainsi que les galaxies à faible brillance de surface (dites galaxies LSB pour *Low Surface Brightness*), *i.e.* telles que $\Sigma \ll \Sigma_c$, doivent exhiber un fort désaccord entre masse dynamique et masse visible [286]. Cette prédiction a par la suite été vérifiée lorsque les moyens observationnels ont permis de mesurer les courbes de rotation de ces galaxies [280, 281, 148].

Plus récemment, des simulations numériques ont montré qu'il est possible de former des barres par instabilité du disque galactique en dynamique newtonienne modifiée, et que les vitesses des barres ainsi obtenues dans MOND sont en meilleur accord avec les observations que dans le scénario standard [404, 405]. À plus grande échelle, des simulations de collisions de galaxies en gravité modifiée parviennent à reproduire la morphologie observée de la paire de galaxies des antennes (NGC 4038/NGC 4039), ainsi que la formation de galaxies naines de marée au bout des queues de marée [406]. Voir [123] pour une revue des travaux sur ces sujets.

Une coïncidence cosmique ?

Dans le cadre du modèle de concordance cosmologique (voir chapitre 8), il existe une échelle d'accélération associée à la présence d'une constante cosmologique :

$$a_\Lambda \equiv \frac{c^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}, \quad (9.6)$$

elle-même reliée à la température de Gibbons-Hawking $T_{\text{GH}} = \hbar a_\Lambda / (k_B c)$, dérivée de la théorie semi-classique en espace-temps de de Sitter [193]. Cette échelle d'accélération se trouve être numériquement très proche de l'échelle d'accélération associée au taux d'expansion de l'Univers aujourd'hui, *i.e.*

$$a_H \equiv \frac{c H_0}{2\pi}. \quad (9.7)$$

En effet, avec les valeurs $H_0 \simeq 70 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ et $\Lambda \simeq 0,12 \text{ Gpc}^{-2}$ dérivées des observations cosmologiques récentes, on trouve $a_H \simeq 1,2 a_\Lambda$. Il s'agit du fameux problème de coïncidence cosmique, ici exprimé en termes des échelles d'accélération (9.6) et (9.7). Il existe une seconde coïncidence numérique troublante : le fait que ces échelles d'accélération sont également très

proches de la valeur de l'accélération MOND, qui elle est déterminée à partir d'observations à l'échelle galactique :

$$a_0 \simeq 1,3 a_\Lambda \simeq 1,1 a_H . \quad (9.8)$$

En unités naturelles (ou unités de Planck), ces trois échelles d'accélération coïncident jusqu'à plus de 60 décimales après la virgule ! Ces coïncidences numériques suggèrent une origine physique commune [292]. Il a ainsi été envisagé que l'échelle d'accélération MOND n'est pas constante, mais dynamique, et reliée à l'expansion de l'Univers [288, 290]. Nous verrons au chapitre 10 que la coïncidence numérique $\Lambda \sim a_0^2/c^4$ admet une interprétation naturelle si l'on suppose la matière noire douée de propriétés de polarisabilité gravitationnelle.

Un problème à l'échelle des amas de galaxies

Le problème de la masse manquante à l'échelle des amas de galaxies est connu depuis les années 30, grâce au travail de Zwicky qui étudia la dynamique de l'amas de Coma [426]. Une grande partie de cette masse manquante a depuis été identifiée lors de la découverte du gaz chaud intra-amas qui émet en rayons X. Mais la masse dynamique M_{dyn} des amas de galaxies reste typiquement 4 fois plus grande que la masse visible (gaz chaud et contenu stellaire des galaxies) M_{vis} .

Cette masse manquante peut être attribuée à la présence de matière noire. Alternativement, dans le paradigme MOND, en utilisant la valeur (9.5) de l'accélération MOND telle que déduite d'observations à l'échelle galactique, le rapport $M_{\text{dyn}}/M_{\text{vis}}$ est réduit de moitié. Il reste donc un facteur 2 inexpliqué, de sorte que la conjonction de MOND et du contenu baryonique connu des amas de galaxies n'est pas en accord avec les observations à cette échelle [192, 331]. Ce problème est confirmé par les observations de lentilles gravitationnelles faibles [121] et fortes [359], qui ne peuvent être reproduites par MOND.

Plusieurs solutions sont envisageables pour combler ce déficit de masse. Seule la moitié des baryons prévus par le budget baryonique cosmique (voir le chapitre 8) a été identifiée [407]. Il se peut donc qu'une partie des 50% restants se trouve sous forme de baryons sombres dans les amas de galaxies [291]. Depuis la découverte de la masse non nulle des neutrinos, une composante de neutrinos massifs (de l'ordre de 2 eV) a également été envisagée [16], puis exclue au profit de neutrinos stériles de masse de l'ordre de 11 eV [14, 13]. Le modèle de matière noire et d'énergie noire que nous détaillerons dans le chapitre 10 possède une composante monopolaire susceptible de résoudre ce problème de la masse manquante à l'échelle de amas de galaxies, tout en expliquant la phénoménologie de la dynamique newtonienne modifiée à l'échelle galactique ; mais rien n'a encore été prouvé au sujet des amas de galaxies.

9.3 Extensions relativistes de MOND

Sous la forme (9.1) d'une modification *ad hoc* de la loi fondamentale de la gravité newtonienne, la dynamique newtonienne modifiée ne constitue pas en soi une théorie physique viable. Bien que les succès du paradigme MOND à l'échelle galactique interpellent, la confrontation aux nombreuses contraintes observationnelles dont nous disposons à l'échelle cosmologique (voir le chapitre 8) nécessite une formulation relativiste. Ceci a conduit Bekenstein, Milgrom et Sanders à proposer des extensions relativistes de MOND.

Notons dans un premier temps que la formulation MOND (9.1) ne respecte pas les lois de conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement, et du moment cinétique. Il est toutefois possible de pallier ces problèmes en construisant une théorie MOND qui dérive d'un lagrangien. En prenant la divergence de l'Éq. (9.1), on obtient l'équation de Poisson modifiée — dite elle aussi équation MOND³

$$\nabla \cdot (\mu \mathbf{g}) = -4\pi G \rho_b, \quad (9.9)$$

où ρ_b est la densité de masse baryonique, qui génère le champ gravitationnel newtonien $\mathbf{g}_N$ via l'équation de Poisson habituelle $\nabla \cdot \mathbf{g}_N = -4\pi G \rho_b$. Bekenstein et Milgrom notèrent que l'équation MOND sous sa forme locale (9.9) dérive du lagrangien [40]

$$L_U = -\frac{a_0^2}{8\pi G} f\left(\frac{|\nabla U|^2}{a_0^2}\right) + \rho_b U, \quad (9.10)$$

où la fonction f est reliée à la fonction MOND μ par $f'(x) = \mu(\sqrt{x})$. La théorie ainsi définie : AQUAL, pour *Aquadratic Lagrangian*, respecte les lois de conservation usuelles. Il s'agit du point de départ des extensions relativistes de la dynamique newtonienne modifiée [43].

La modification la plus simple de la gravité einsteinienne consiste à ajouter au tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ un champ scalaire ϕ . Bekenstein et Sanders proposèrent donc de promouvoir le potentiel gravitationnel U au rang de champ scalaire, et d'ajouter au lagrangien d'Einstein-Hilbert⁴ $L_g = R/(16\pi G)$ le lagrangien [44]

$$L_\phi = -\frac{a_0^2}{8\pi G} f\left(\frac{g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi}{a_0^2}\right). \quad (9.11)$$

Dans la théorie tenseur-scalaire résultante : RAQUAL, pour *Relativistic AQUAL*, les champs de matière sont universellement couplés à la gravité (afin de respecter le principe d'équivalence) via la métrique dite « physique » $\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2\phi} g_{\mu\nu}$. Les équations de Maxwell étant invariantes par une transformation conforme de la métrique, les photons ne ressentent pas l'effet du champ scalaire ϕ . Comme les observations de lentilles gravitationnelles ne peuvent s'expliquer par la seule présence de matière baryonique, une telle théorie tenseur-scalaire n'est pas viable⁵.

Ceci a conduit Bekenstein et Sanders à introduire un champ vectoriel dynamique V^μ supplémentaire, de lagrangien [42, 360]

$$L_V = -\frac{1}{32\pi G} [K g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} W_{\mu\rho} W_{\nu\sigma} - 2\lambda (g^{\mu\nu} V_\mu V_\nu + 1)], \quad (9.12)$$

où $W_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ est un tenseur antisymétrique, K une constante positive sans dimensions, et λ un multiplicateur de Lagrange imposant à V^μ d'être un quadrivecteur du genre temps et de norme unité. Par ailleurs, la partie scalaire de l'action est modifiée, et devient

$$L_\phi = -\frac{\sigma^2}{2} (g^{\mu\nu} - V^\mu V^\nu) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{G\sigma^4}{4\ell^2} F(k G \sigma^2), \quad (9.13)$$

³Ces deux formulations ne sont équivalentes que dans des situations à forte symétrie [96]. En toute généralité il existe un champ vectoriel à divergence nulle (un rotationnel $\nabla \times \mathbf{A}$) dans le membre de droite de l'équation (9.1).

⁴Nous poserons $c = 1$ jusqu'à la fin de ce chapitre.

⁵Le raisonnement est en fait un peu plus subtil : contrairement aux photons, les particules massives ressentent l'effet du champ scalaire, qui se manifeste à l'ordre le plus bas par une renormalisation de la constante gravitationnelle G . On montre alors que l'angle de déflexion en théorie tenseur-scalaire se trouve être *inférieur* au résultat prédit par la relativité générale ; voir [101] pour plus de détails.

où k est une constante positive sans dimensions, ℓ une échelle de longueur constante, F une fonction libre sans dimensions, et σ un second champ scalaire qui, contrairement à ϕ , n'est pas dynamique. L'accélération MOND a_0 s'exprime à l'aide des constantes K , k et ℓ , et de la valeur moyenne cosmologique du champ scalaire ϕ , tandis que la fonction MOND μ est reliée à la fonction libre F . Les champs de matière sont universellement couplés à la métrique physique

$$\widetilde{g}_{\mu\nu} = e^{-2\phi} g_{\mu\nu} - 2 \sinh(2\phi) V_\mu V_\nu. \quad (9.14)$$

Celle-ci est reliée à la métrique $g_{\mu\nu}$ de manière non conforme, de sorte que les photons sont sensibles à la présence des champs scalaire et vectoriel, ce qui permet de rendre compte des observations de lentilles gravitationnelles. La théorie résultante : TeVeS, pour « Tensor-Vector-Scalar », a récemment évolué vers des théories de type Einstein-æther [226, 225, 425].

Une telle modification du secteur de la gravité basée sur le lagrangien $L_g + L_V + L_\phi$ (ainsi que le lagrangien L_{mat} des champs de matière couplés à la métrique physique $\widetilde{g}_{\mu\nu}$) met fortement à mal le sens esthétique du Créateur. Par ailleurs, cette théorie est sérieusement mise en difficulté par des contraintes expérimentales (en champ faible dans le système solaire, et en champ fort avec les pulsars binaires) d'une part, et des exigences théoriques provenant de la théorie quantique des champs (hamiltonien borné inférieurement) d'autre part [101].

Dans le chapitre qui suit, nous prenons le parti de ne pas choisir entre matière noire froide et gravité modifiée, mais proposons une troisième alternative ; à savoir garder la théorie de la gravitation standard (la relativité générale), mais modifier le secteur de la *matière*. En particulier, nous allons montrer que la phénoménologie de MOND à l'échelle galactique peut s'interpréter comme résultant d'un effet de polarisation gravitationnelle d'une matière noire un peu plus exotique que la matière noire froide du modèle de concordance cosmologique.

MATIÈRE NOIRE ET POLARISATION GRAVITATIONNELLE

LE modèle de concordance cosmologique, Λ -CDM, et la phénoménologie de la dynamique newtonienne modifiée (MOND) font tous deux preuve de succès remarquables aux échelles cosmologique et galactique respectivement. Afin de tenter de réconcilier ces deux alternatives foncièrement antithétiques *a priori*, nous proposons de conserver la théorie de la gravitation standard, mais de modifier la matière noire elle-même. Notre modèle relativiste décrit la matière noire comme munie d'une propriété de polarisabilité dans un champ gravitationnel, et permet ainsi de rendre compte — moyennant une hypothèse qui reste à tester — de la phénoménologie de MOND à l'échelle des galaxies.

10.1 Analogie avec les milieux diélectriques

Les atomes d'un milieu diélectrique se comportent comme des dipôles électriques $\mathbf{p}$ susceptibles de réagir à la présence d'un champ électrique extérieur. Lorsque la *polarisation* électrique $\mathbf{P} = n \mathbf{p}$, où n est le nombre d'atomes par unité de volume, est alignée avec le champ électrique total $\mathbf{E}$, le milieu est dit polarisé. Dans ce cas, l'une des équations de Maxwell, la loi de Maxwell-Gauss, peut s'écrire sous les deux formes équivalentes¹ [224]

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_{\text{libre}} + \rho_{\text{lié}}) \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla \cdot (\varepsilon_r \mathbf{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_{\text{libre}}, \quad (10.1)$$

où ρ_{libre} et $\rho_{\text{lié}}$ sont les densités volumiques de charges libres (électrons) et liées (atomes polarisés) respectivement, ε_0 est la permittivité du vide, et $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ la permittivité relative du milieu

¹Un milieu diélectrique est également isolant. Nous autoriserons toutefois la présence de charges libres afin de clarifier la comparaison avec le cas gravitationnel. Ces charges libres sont à l'extérieur du milieu diélectrique, et génèrent le champ électrique extérieur.

diélectrique. Cette équivalence repose sur le fait que la densité de charges liées prend la forme $\rho_{\text{lié}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$, où la polarisation est alignée avec le champ électrique selon $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e(E) \mathbf{E}$. Le coefficient de proportionnalité χ_e est fonction de la norme $E = |\mathbf{E}|$ du champ électrique ; il s'agit de la susceptibilité électrique du milieu diélectrique.

Par complète analogie, on peut réécrire l'équation MOND (9.9) sous la forme habituelle d'une équation de Poisson, mais avec un terme source additionnel représentant une densité ρ_{pol} de « masses polarisées », *i.e.* [63]

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G (\rho_b + \rho_{\text{pol}}) \iff \nabla \cdot (\mu \mathbf{g}) = -4\pi G \rho_b, \quad (10.2)$$

où $\mathbf{g}$ est le champ gravitationnel, ρ_b la densité de masse baryonique, et μ la fonction MOND. Tout comme pour le cas diélectrique, cette réécriture n'est possible qu'à condition que la densité de masses polarisées apparaisse comme la divergence d'un vecteur, c'est-à-dire prenne la forme *dipolaire*

$$\rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi}, \quad (10.3)$$

où $\mathbf{\Pi}$ est l'analogue gravitationnel de la polarisation électrique $\mathbf{P}$. Cette polarisation gravitationnelle doit être alignée avec le champ gravitationnel $\mathbf{g}$ selon

$$\mathbf{\Pi} = -\frac{\chi(g)}{4\pi G} \mathbf{g}. \quad (10.4)$$

Le coefficient de proportionnalité χ , fonction de la norme $g = |\mathbf{g}|$ du champ gravitationnel, est relié à la fonction MOND par

$$\mu = 1 + \chi. \quad (10.5)$$

Ce coefficient s'interprète donc naturellement comme la « susceptibilité gravitationnelle » du milieu de matière noire dipolaire. L'amplification du champ gravitationnel dans le régime MOND $g \ll a_0$ s'explique alors par un effet d'anti-écranage du champ gravitationnel, de sorte que $\chi < 0$, en accord avec le fait que la fonction MOND vérifie $\mu < 1$.

L'équation (10.2) indique qu'il est possible de troquer une modification *ad hoc* des lois de la gravité au prix de l'introduction d'une matière noire un peu exotique. En nous basant sur cette analogie formelle, ainsi que sur un travail antérieur de Luc Blanchet [62], nous allons proposer un modèle relativiste de matière noire (et d'énergie noire) dont la limite non relativiste recouvre les caractéristiques que nous venons de discuter, et en particulier la forme dipolaire (10.3) de la densité de masse.

10.2 Modèle relativiste de matière noire dipolaire

Le modèle de matière noire que nous allons introduire est *phénoménologique*, au sens où aucun lien explicite avec une physique valable à l'échelle microscopique n'est établi. Nous adoptons une description fluide, bien adaptée à l'idée selon laquelle les degrés de liberté internes fondamentaux (et inconnus) des particules sous-jacentes sont moyennés sur une échelle mésoscopique, de sorte que le fluide de matière noire est entièrement caractérisé par la donnée d'un nombre réduit de champs continus, dont la dynamique dérive d'un certain lagrangien effectif. Il s'agit d'une démarche courante et fructueuse en cosmologie afin de modéliser l'énergie noire et les mécanismes

inflationnaires. La nécessité d'adopter ces descriptions phénoménologiques reflète la limite de notre compréhension d'une physique à haute énergie, dont les lois nous échappent encore.

Un fluide parfait sans pression (comme la matière noire froide habituelle) est entièrement caractérisé par la donnée de son courant de masse $J^\mu = \sigma u^\mu$, où u^μ est la quadrivitesse du fluide, et σ la densité d'énergie de masse au repos. Le courant J^μ est conservé, *i.e.* vérifie $\nabla_\mu J^\mu = 0$. Notre modèle de matière noire nécessite en plus l'introduction d'un champ vectoriel permettant de construire la polarisation gravitationnelle. Par analogie avec les milieux diélectriques, nous introduisons donc le *moment dipolaire* (par unité de masse) ξ^μ . Il s'agit de l'équivalent gravitationnel (et quadridimensionnel) d'un dipôle électrique, à partir duquel nous construisons le champ de polarisation $\Pi^\mu = \sigma \xi^\mu$, c'est-à-dire la densité volumique de moments dipolaires.

Nous proposons donc un modèle de matière noire modifiée en relativité générale, dont la dynamique dans un champ gravitationnel $g_{\mu\nu}$ donné est prescrite par une action du type

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} L[J^\mu, \xi^\mu, g_{\mu\nu}], \quad (10.6)$$

à laquelle doivent être ajoutées l'action de Einstein-Hilbert pour la gravité, et les actions habituelles des autres champs de matière (baryons, photons, neutrinos, etc.). Notre modèle de matière noire dipolaire est basé sur le lagrangien²

$$L = -\sigma + J_\mu \dot{\xi}^\mu - \mathcal{W}(\Pi_\perp), \quad (10.7)$$

où $\dot{\xi}^\mu \equiv u^\nu \nabla_\nu \xi^\mu$ est la dérivée covariante du moment dipolaire par rapport au temps propre. Le premier terme correspond au lagrangien d'un fluide parfait sans pression (comme pour la matière noire froide habituelle), à l'origine d'une composante monopolaire qui se trouvera être dominante aux échelles cosmologiques. Les deux termes suivants sont responsables du caractère dipolaire de notre modèle de matière noire, et permettent de retrouver la phénoménologie de MOND à l'échelle galactique. On remarquera la présence d'un terme de couplage entre le courant de masse et la dérivée covariante du dipôle ; ce terme évoque le couplage $j^\mu A_\mu$ d'un courant électrique j^μ à un potentiel électromagnétique A_μ en électromagnétisme.

L'introduction d'un potentiel $\mathcal{W}$ dans le lagrangien (10.7) est motivée par le modèle microscopique et newtonien proposé dans [63], qui suggère la nécessité d'une force interne (dérivant du potentiel) afin de garantir la stabilité du milieu dipolaire. Dans ce même modèle, on observe que le potentiel $\mathcal{W}$ n'est pas fonction du dipôle lui-même, mais de la polarisation $\Pi_\perp = \sigma \xi_\perp$, ici définie à partir de la norme $\xi_\perp$ du projeté orthogonal $\xi_\perp^\mu$ du moment dipolaire ξ^μ sur l'hypersurface orthogonale à la quadrivitesse u^μ (voir Fig. 10.5). Le potentiel $\mathcal{W}$ est connu sous forme d'un développement en puissances de la polarisation $\Pi_\perp$ jusqu'à l'ordre trois inclus :

$$\mathcal{W}(\Pi_\perp) = \frac{\Lambda}{8\pi G} + 2\pi G \Pi_\perp^2 + \frac{16\pi^2 G^2}{3a_0} \Pi_\perp^3 + \mathcal{O}(\Pi_\perp^4). \quad (10.8)$$

Ce potentiel étant directement relié à la fonction MOND μ , les coefficients intervenant dans ce développement ont été déterminés de façon à retrouver la « bonne » physique aux échelles cosmologique (constante cosmologique) et galactique (termes quadratique et cubique).

²Ce modèle était initialement [85] basé sur un lagrangien plus complexe [cf. Éq. (10.17)], auquel il convenait d'adjoindre une contrainte supplémentaire [cf. Éq. (10.29)]. Dans un second temps [85], nous avons montré que la dynamique et le tenseur énergie-impulsion de ce modèle de matière noire dérivent immédiatement du lagrangien (10.7), bien plus simple et motivé physiquement, sans qu'il ne soit nécessaire d'imposer la contrainte (10.29).

10.3 Limite non relativiste et principaux résultats

Afin de se forger une intuition physique du comportement de ce fluide de matière noire, il est utile de considérer la limite non relativiste $c \rightarrow +\infty$ du lagrangien (10.7). Dans cette limite, la densité de lagrangien $\mathcal{L} = \sqrt{-g}L$ prend la forme (après avoir soustrait le terme relativiste de masse au repos)

$$\mathcal{L}_{\text{NR}} = \frac{1}{2}\sigma_* \mathbf{v}^2 + \sigma_* U + \mathbf{g} \cdot \mathbf{\Pi}_\perp + \mathbf{J} \cdot \frac{d\mathbf{\xi}_\perp}{dt} - \mathcal{W}(\mathbf{\Pi}_\perp), \quad (10.9)$$

où $\mathbf{J} = \sigma_* \mathbf{v}$ est le courant de masse, avec σ_* la densité de masse newtonienne habituelle, et $\mathbf{v}$ le champ de vitesse du fluide. Le champ gravitationnel $\mathbf{g} = \nabla U$ dérive du potentiel gravitationnel newtonien U , et $\mathbf{\Pi}_\perp = \sigma_* \mathbf{\xi}_\perp$ est la polarisation, construite à partir du moment dipolaire $\mathbf{\xi}_\perp$.

L'interprétation physique du lagrangien non relativiste (10.9) est claire : en dehors des termes d'énergie cinétique et potentielle gravitationnelle, on reconnaît l'analogue gravitationnel $\mathbf{g} \cdot \mathbf{\Pi}_\perp$ du couplage $\mathbf{E} \cdot \mathbf{P}$ de la polarisation électrique $\mathbf{P}$ avec un champ électrique $\mathbf{E}$ dans un milieu diélectrique. Le potentiel $\mathcal{W}$ est associé à la présence de la force interne. Seul le terme de couplage du courant à la dérivée du dipôle, $\mathbf{J} \cdot d\mathbf{\xi}_\perp/dt$, absent dans le cas diélectrique, n'admet pas d'interprétation physique immédiate ; ce terme provient du couplage relativiste entre J_μ et $\dot{\xi}^\mu$ imposé dans le lagrangien (10.7).

Par ailleurs, en étudiant les équations régissant la dynamique de ce fluide, ainsi que son tenseur énergie-impulsion — tous dérivés du lagrangien (10.7) — nous parvenons à établir les trois résultats suivants :

- (i) Ce modèle de matière noire et d'énergie noire se réduit au modèle de concordance Λ -CDM au premier ordre de perturbations en cosmologie, et bénéficie donc des succès de ce dernier à grand décalage spectral ; en particulier il prédit ainsi le même spectre de puissance des anisotropies du fond diffus cosmologique³.
- (ii) Moyennant une hypothèse raisonnable, mais qui reste à tester par des simulations numériques, ce modèle retrouve la phénoménologie de MOND à l'échelle galactique. De plus, l'origine physique de l'équation MOND se trouve ainsi « expliquée » par le mécanisme de polarisation gravitationnelle *via* l'analogie décrite dans le § 10.1.
- (iii) D'après l'expression (10.8) du potentiel $\mathcal{W}$, ce modèle explique naturellement la coïncidence numérique entre les valeurs de l'accélération MOND et de la constante cosmologique, à savoir $\Lambda \sim a_0^2$ (voir Fig 10.6). Il ne permet toutefois pas de calculer le coefficient de proportionnalité entre Λ et a_0^2 .

La suite de ce chapitre regroupe deux articles publiés dans le journal *Physical Review D* [84, 85]. Une présentation écourtée de ces travaux a été publiée dans les comptes-rendus des « 43^e rencontres de Moriond » [86].

³À l'exception de la contribution issue de l'effet Sachs-Wolfe intégré, qui dépend de l'évolution des potentiels gravitationnels dans le régime non linéaire, régime dans lequel la dynamique du modèle de matière noire dipolaire diffère *a priori* de celle de Λ -CDM.

Model of Dark Matter and Dark Energy Based on Gravitational Polarization

Luc Blanchet and Alexandre Le Tiec

GReCO, Institut d'Astrophysique de Paris — UMR 7095 du CNRS,
Université Pierre & Marie Curie, 98^{bis} boulevard Arago, 75014 Paris, France

Abstract

A model of dark matter and dark energy based on the concept of gravitational polarization is investigated. We propose an action in standard general relativity for describing, at some effective or phenomenological level, the dynamics of a dipolar medium, i.e. one endowed with a dipole moment vector, and polarizable in a gravitational field. Using first-order cosmological perturbations, we show that the dipolar fluid is undistinguishable from standard dark energy (a cosmological constant Λ) plus standard dark matter (a pressureless perfect fluid), and therefore benefits from the successes of the Λ -CDM (Λ -cold dark matter) scenario at cosmological scales. Invoking an argument of “weak clusterisation” of the mass distribution of dipole moments, we find that the dipolar dark matter reproduces the phenomenology of the modified Newtonian dynamics (MOND) at galactic scales. The dipolar medium action naturally contains a cosmological constant, and we show that if the model is to come from some fundamental underlying physics, the cosmological constant Λ should be of the order of a_0^2/c^4 , where a_0 denotes the MOND constant acceleration scale, in good agreement with observations.

10.4 Introduction

In the current concordance model of cosmology (the Λ -CDM scenario, see e.g. [316]) based on Einstein’s general relativity (GR), the mass-energy content of the Universe is made of roughly 4% of baryons, 23% of cold dark matter (CDM) and 73% of dark energy in the form of a cosmological constant Λ . The dark matter accounts for the well-known discrepancy between the mass of a typical cluster of galaxies as deduced from its luminosity, and the Newtonian dynamical mass [426]. The model has so far been very successful in reproducing the observed cosmic microwave background (CMB) spectrum [215] and explaining the distribution of baryonic matter from galaxy clusters scale up to cosmological scales by the non-linear growth of initial perturbations [49]. Although the exact nature of the hypothetical dark matter particle remains unknown, super-symmetric extensions of the standard model of particle physics predict well-motivated candidates (see [53] for a review). Simulations suggest some universal dark matter density profile around galaxies [308]. However, in that respect, the CDM hypothesis has some difficulties [280, 361] at explaining in a natural way the distribution and properties of dark matter at galactic scales.

The modified Newtonian dynamics (MOND) was proposed by Milgrom [285, 286, 287] to account for the basic phenomenology of dark matter in galactic halos, as evidenced by the flat rotation curves of galaxies, and the Tully-Fisher relation [408] between the observed luminosity and the asymptotic rotation velocity of spiral galaxies. However, if MOND serves very well for these purposes (and some others also [361]), we know that MOND does not fully account for the inferred dark matter at the intermediate scale of clusters of galaxies [192, 360, 121]. In addition, MOND cannot be considered as a viable physical model, but only as an *ad-hoc* — though extremely useful — phenomenological “recipe”. In the usual interpretation, MOND is viewed (see [290] for a review) as a modification of the fundamental law of gravity or the fundamental law of dynamics, without the need for dark matter. The relativistic extensions of MOND, of which the Tensor-Vector-Scalar (TeVeS) theory [358, 42, 360] is the prime example, share this view of modifying the gravity sector, by postulating some supplementary fields associated with the gravitational force, in addition to the metric tensor field of GR (see [101] for a review). Recently, such modified gravity theories have evolved toward Einstein-æther like theories [226, 225, 425, 423, 206].

Each of these alternatives has proved to be very successful in complementary domains of validity: the cosmological scale (and cluster scale) for the CDM paradigm and the galactic scale for MOND. It is frustrating that two successful models seem to be fundamentally incompatible. In the present paper we shall propose a third approach, which has the potential of bringing together the main aspects of both Λ -CDM and MOND in a single relativistic model. Namely, we keep the standard law of gravity, i.e. GR and its Newtonian limit, but we add to the distribution of ordinary matter some specific non-standard form of dark matter (described by a relativistic action in usual GR) in such a way as to naturally explain the phenomenology of MOND at galactic scales. Furthermore, we prove that this form of dark matter leads to the same predictions as for the Λ -CDM cosmological scenario at large scales. In particular, we find that the relativistic action for this matter model naturally contains the dark energy in the form of a cosmological constant Λ . Thus, our model will benefit from both the successes of the Λ -CDM scenario, and the MOND phenomenology.

The model will be based on the observation [63, 62] that the phenomenology of MOND can be naturally interpreted by an effect of “gravitational polarization” of some dipolar medium constituting the dark matter. The effect can be essentially viewed (in a Newtonian-like interpretation [63]) as the gravitational analogue of the electric polarization of a dielectric material, whose atoms can be modelled by electric dipoles, in an applied electric field [224]. In the quasi-Newtonian model of [63] the gravitational polarization follows from a microscopic description of the dipole moments in analogy with electrostatics. It was shown that the gravitational dipole moments require the existence of some internal non-gravitational force to stabilize them in a gravitational field. Thanks to this internal force, an equilibrium state for the dipolar particle is possible, in which the dipole moment is aligned with the gravitational field and the medium is polarized. The MOND equation follows from that equilibrium configuration. However the model [63] cannot be considered as viable because it is non-relativistic, and involves negative gravitational-type masses (or gravitational charges) and consecutively a violation of the equivalence principle at a fundamental level.

In a second model [62] we showed that it is possible to describe dipolar particles consistently with the equivalence principle by an action principle in standard GR. The action depends on the particle’s position in space-time (as for an ordinary particle action) and also on a four-vector dipole moment carried by the particle. The particle’s position and the dipole moment are considered to be two dynamical variables to be varied independently in the action. Furthermore, a force internal to the dipolar particle was introduced in the form of a scalar potential function (say V) in this action. The potential V depends on some adequately defined norm of the dipole moment vector. Because of that force, the particle is not a “test” particle and its motion in space-time is non-geodesic. The non-relativistic limit of the relativistic model [62] was found to be different from the quasi-Newtonian model [63] (hence the two models are distinct) but it was possible under some hypothesis to recover the same equilibrium state yielding the MOND equation as in [63]. However the relativistic model [62], if considered as a model for dark matter, has some drawbacks — notably the mechanism of alignment of the dipole moment with the gravitational field is unclear (so the precise link with MOND is questionable), and the dynamics of the dipolar particles in the special case of spherical symmetry does not seem to be very physical.

In the present paper, we shall propose a third model which will be based on an action similar to that of the relativistic model [62] but with some crucial modifications. First we shall add, with respect to [62], an ordinary mass term in the action to represent the (inertial or passive gravitational) mass of the dipolar particles. Second, the main improvement we shall make is to assume that the internal force derives from a potential function in the action (call it $\mathcal{W}$) which depends not on the dipole moment itself as in [62] but on the local *density* of dipole moments, i.e. the *polarization* field. In this new approach we are thus assuming that the motion of the dipolar particles is influenced by the density of the surrounding medium. This is analogous to the description of a plasma in electromagnetism in which the internal force, responsible for the plasma oscillations, depends on the density of the plasma (cf. the expression of the plasma frequency [224]).¹ Because the action [given by (10.12) with (10.17) below] will now depend on the density of the medium, it becomes more advantageous to write it as a *fluid* action rather than as a *particle* action.

¹In the quasi-Newtonian model [63] the dipolar medium was formulated as the gravitational analogue of a plasma, oscillating at its natural plasma frequency.

This simple modification of the model, in which the potential $\mathcal{W}$ depends on the polarization field, will have important consequences. First of all, the relation with the phenomenology of MOND will become clear and straightforward. Secondly, we shall find that the motion of dipolar particles in the central field of a spherical mass (in the non-relativistic limit) makes now sense physically. The drawbacks of the previous model [62] are thus cured. Last but not least, we shall find that the model naturally involves a cosmological constant. Then, with the equations of motion and evolution (and stress-energy tensor) derived from the action, we show the following:

1. The dipolar fluid is undistinguishable from standard dark energy (a cosmological constant) plus standard CDM (say a pressureless perfect fluid) at cosmological scales, i.e. at the level of *first-order* cosmological perturbations.² The model is thus consistent with the observations of the CMB fluctuations. However, the model should differ from Λ -CDM at the level of second-order cosmological perturbations.
2. The MOND phenomenology of the flat rotation curves of galaxies and the Tully-Fisher relation is recovered at galactic scales (for a galaxy at low redshift) from the effect of gravitational polarization. There is a one-to-one correspondence between the MOND function (say $\mu = 1 + \chi$) and the potential function $\mathcal{W}$ introduced in the action.
3. The minimum of the potential function $\mathcal{W}$ is a cosmological constant Λ . We find that if $\mathcal{W}$ is to be considered as “fundamental”, i.e. coming from some fundamental underlying theory (presumably a quantum field theory), the cosmological constant should be numerically of the order of a_0^2/c^4 , where a_0 denotes the MOND constant acceleration scale.

A relation of the type $\Lambda \sim a_0^2/c^4$ between a cosmological observable Λ and a parameter a_0 measured from observations at galactic scales is quite remarkable and is in good agreement with observations. More precisely, if we define the natural acceleration scale associated with the cosmological constant,

$$a_\Lambda = \frac{c^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}, \quad (10.10)$$

then the current astrophysical measurements yield $a_0 \simeq 1.3 a_\Lambda$. The related numerical coincidence $a_0 \sim cH_0$ was pointed out very early on by Milgrom [285, 286, 287]. The near agreement between a_0 and a_Λ has a natural explanation within our model, although the exact numerical coefficient between the two acceleration scales cannot be determined presently.

Since the present model will not be connected to any (quantum) fundamental theory, it should be regarded merely as an “effective” or even “phenomenological” model. We shall even argue (though this remains open) that it may apply only at large scales, from the galactic scale up to cosmological scales, and not at smaller scales like in the Solar System. However, this model offers a nice unification between the dark energy in the form of Λ and the dark matter in the form of MOND (both effects of dark energy and dark matter occurring when gravity is weak). Furthermore, it reconciles in some sense the observations of dark matter on cosmological scales, where

²Note however that while in the standard scenario the CDM particle is, say, a well-motivated supersymmetric particle (perhaps to be discovered at the LHC in CERN), in our case the fundamental nature of the “dipolar particle” will remain unknown.

the evidence is for the standard CDM, and on galactic scales, which is the realm of MOND. It would be interesting to study the intermediate scale of clusters of galaxies and to see if the model is consistent with observations. Such a study should probably be performed using numerical methods.

The plan of this paper is as follows. In section 10.5 we present the action principle for the dipolar medium, and we vary the action to obtain the equation of motion, the equation of evolution and the stress-energy tensor. In section 10.6 we apply first-order cosmological perturbations (on a homogeneous and isotropic background) to prove that the dipolar fluid reproduces all the features of the standard dark matter paradigm at cosmological scales. We investigate the non-relativistic limit of the model in section 10.7, and show that, under some hypothesis, the polarization of the dipolar dark matter in the gravitational field of a galaxy results in an apparent modification of the law of gravity in agreement with the MOND paradigm. Section 10.8 summarizes and concludes the paper. The dynamics of the dipolar dark matter in the central gravitational field of a spherically symmetric mass distribution is investigated in the appendix.

10.5 Dipolar fluid in general relativity

10.5.1 Action principle

Our model will be based on a specific action functional for the dipolar fluid in standard GR. This fluid is described by the four-vector current density $J^\mu = \sigma u^\mu$, where u^μ is the four-velocity of the fluid, normalized to $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$, and where $\sigma = \sqrt{-g_{\mu\nu} J^\mu J^\nu}$ represents its rest mass density.³ In this paper we shall conveniently rescale most of the variables used in [62] by a factor of $2m$, where m is the mass parameter introduced in the action of [62]. Hence we have $\sigma = 2m n$, where n is the number density of dipole moments in the notation of [62]. The above current vector is conserved in the sense that

$$\nabla_\mu J^\mu = 0, \quad (10.11)$$

where ∇_μ denotes the covariant derivative associated with the metric $g_{\mu\nu}$. Our fundamental assumption is that the dipolar fluid is endowed with a dipole moment vector field ξ^μ which will be considered as a dynamical variable. We have $\xi^\mu = \pi^\mu / 2m$ where π^μ is the dipole moment variable used in [62] (hence ξ^μ has the dimension of a length).

Adopting a fluid description of the dipolar matter rather than a particle formulation as in [62],⁴ we postulate that the dynamics of the dipolar fluid in a prescribed gravitational field $g_{\mu\nu}$ is derived from an action of the type

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} L[J^\mu, \xi^\mu, \dot{\xi}^\mu, g_{\mu\nu}], \quad (10.12)$$

³Greek indices take the space-time values $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ and Latin ones range on spatial values $i, j, \dots = 1, 2, 3$. The metric signature is $(-, +, +, +)$. The convention for the Riemann curvature tensor $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ is the same as in [298]. Symmetrization of indices is $(\mu\nu) \equiv \frac{1}{2}(\mu\nu + \nu\mu)$ and $(ij) \equiv \frac{1}{2}(ij + ji)$. In sections 10.5 and 10.6 we make use of geometrical units $G = c = 1$.

⁴The fluid action is obtained from the particle one by the formal prescription $\sum \int d\tau \rightarrow \int d^4x \sqrt{-g} n$, where the sum runs over all the particles, and n is the number density of the fluid.

where $g = \det(g_{\mu\nu})$, the integration being performed over the entire 4-dimensional manifold. This action is to be added to the Einstein-Hilbert action for gravity, and to the actions of all the other matter fields. The Lagrangian L depends on the current density J^μ , the dipole moment vector ξ^μ , and its covariant derivative $\dot{\xi}^\mu$ with respect to the proper time τ (such that $d\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$), which is defined using a fluid formulation by

$$\dot{\xi}^\mu \equiv \frac{D\xi^\mu}{d\tau} \equiv u^\nu \nabla_\nu \xi^\mu, \quad (10.13)$$

and where $D/d\tau$ is denoted by an overdot. In addition, the Lagrangian depends explicitly on the metric $g_{\mu\nu}$ which serves at lowering and raising indices, so that for instance $\dot{\xi}_\mu = g_{\mu\nu} \dot{\xi}^\nu$.

We shall consider an action for the dipolar medium similar to the one proposed in [62], with however a crucial generalization in that the potential function therein, which is supposed to describe a non-gravitational force internal to the dipole moment, will be allowed to depend not only on the dipole moment variable ξ^μ , but also on the rest mass density of the dipolar fluid σ . More precisely, we shall assume that the potential function $\mathcal{W}$ in the action depends on the dipole moment ξ^μ only through the *polarization*, namely the number density of dipole moments, that is defined by

$$\Pi^\mu = \sigma \xi^\mu, \quad (10.14)$$

or equivalently $\Pi^\mu = n\pi^\mu$ in the notation of [62]. The dynamics of dipolar particles will therefore be influenced by the local density of the medium, in analogy with the physics of a plasma in which the force responsible for the plasma oscillations depends on the density of the plasma [224]. Our assumption is that $\mathcal{W}$ is a function solely of the norm $\Pi_\perp$ of the projection of the polarization field (10.14) perpendicular to the velocity, namely

$$\Pi_\perp = \sqrt{g_{\mu\nu} \Pi_\perp^\mu \Pi_\perp^\nu} = \sqrt{\perp_{\mu\nu} \Pi^\mu \Pi^\nu}. \quad (10.15)$$

Here, the orthogonal projection of the polarization vector reads $\Pi_\perp^\mu = \perp_\nu^\mu \Pi^\nu$, with the associated projector defined by $\perp_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$. Similarly, we can define $\xi_\perp^\mu = \perp_\nu^\mu \xi^\nu$ and its norm $\xi_\perp$ so that the (scalar) polarization field reads

$$\Pi_\perp = \sigma \xi_\perp. \quad (10.16)$$

The chosen dependence of the internal potential on $\Pi_\perp$ will result in important differences and improvements with respect to the model of [62].

Our proposal for the Lagrangian of the dipolar fluid is

$$L = \sigma \left[-1 - \sqrt{(u_\mu - \dot{\xi}_\mu)(u^\mu - \dot{\xi}^\mu)} + \frac{1}{2} \dot{\xi}_\mu \dot{\xi}^\mu \right] - \mathcal{W}(\Pi_\perp), \quad (10.17)$$

where the two dynamical fields are the conserved current vector $J^\mu = \sigma u^\mu$ and the dipole moment vector ξ^μ . The fourth term is our fundamental potential which should in principle result from a more fundamental theory valid at some microscopic level. The third term in (10.17) is the same as in the previous model [62] and clearly represents a kinetic-like term for the evolution of the dipole moment vector. This term will tell how this evolution should differ from parallel

transport along the fluid lines. The second term in (10.17) (also the same as in [62]) is made of the norm of a space-like vector and is inspired by the known action for the dynamics of particles with spin moving in a background gravitational field [23]. The motivation for postulating this term is that a dipole moment can be seen as the “lever arm” of the spin considered as a classical angular momentum (see a discussion in [62]).

Finally, we comment on the first term in (10.17) which is a mass term in an ordinary sense. The dipolar fluid we are considering will not be purely dipolar (or mostly dipolar) as in the previous model [62] but will involve a monopolar contribution as well. Here we shall thus have some dark matter in the ordinary sense. The mass term in (10.17) has been included for cosmological considerations, so that we recover the ordinary dark matter component at large scales (see section 10.6). However, one can argue that the presence of such mass term σ is not fine-tuned. Indeed, this term corresponds to the simplest and most natural assumption that the relative contributions of this mass density and the second and third terms in (10.17) are comparable. In addition, we notice that $\sigma = 2m n$ corresponds to the inertial mass density of the dipole particles in the quasi-Newtonian model [63], so it is natural by analogy with this model to include that mass contribution in the action. Notice however that, even if the dipolar fluid is endowed with a mass density in an ordinary sense, its dynamics is well-defined only when the dipole moment is non-zero. Indeed, we observe that the Lagrangian (10.17) becomes ill-defined when $\xi^\mu = 0$ since the second term in (10.17) is imaginary.

10.5.2 Equations of motion and evolution

In order to obtain the equations governing the dynamics of the dipolar fluid, we vary the action (10.12) [with the explicit choice of the Lagrangian (10.17)] with respect to the dynamical variables ξ^μ and J^μ . The calculation is very similar to the one performed in [62], but because of the different notation adopted here for rescaled variables (e.g. $\xi^\mu = \pi^\mu/2m$), and especially because of the more general form of the potential function, we present all details of the derivation. Varying first with respect to the dipole moment variable ξ^μ , the resulting Euler-Lagrange equation reads in general terms⁵

$$\frac{D}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\mu} \right) + \nabla_\nu u^\nu \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\mu} = \frac{\partial L}{\partial \xi^\mu}, \quad (10.18)$$

in which the partial derivatives of the Lagrangian in (10.12) are applied considering the four variables ξ^μ , $\dot{\xi}^\mu$, J^μ and $g_{\mu\nu}$ as independent. For the specific case of the Lagrangian (10.17), we get what shall be interpreted as the equation of *motion* of the dipolar fluid in the form

$$\dot{K}^\mu = -\mathcal{F}^\mu, \quad (10.19)$$

⁵We write the Euler-Lagrange equation in this particle-looking form to emphasize the fact that the action (10.17) is a *particle* (or fluid) action. Of course, this equation is equivalent to the usual *field* equation

$$\nabla_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial \nabla_\nu \xi^\mu} \right) = \frac{\partial L}{\partial \xi^\mu}.$$

in which the left-hand-side (LHS) is the proper time derivative of the linear momentum⁶

$$K^\mu = \dot{\xi}^\mu + k^\mu. \quad (10.20)$$

Here, we introduced like in [62] a special notation for a four-vector k^μ which is *space-like*, whose norm is normalized to $k^\mu k_\mu = 1$, and which reads

$$k^\mu = \frac{u^\mu - \dot{\xi}^\mu}{\Xi} \quad \text{with} \quad \Xi = \sqrt{-1 - 2u_\nu \dot{\xi}^\nu + \dot{\xi}_\nu \dot{\xi}^\nu}. \quad (10.21)$$

The space-like four-vector k^μ will not represent the linear momentum (per unit mass) of the particle — that role will be taken by K^μ which, as we shall see, will normally be time-like, see (10.30a) below. The quantity Ξ has an important status in the present formalism because it represents the second term in the Lagrangian (10.17) and we shall be able to set it to one in section 10.5.3 as a particular way of selecting some physically interesting solution. On the right-hand-side (RHS) of (10.19), the force per unit mass acting on a dipolar fluid element is given by

$$\mathcal{F}^\mu = \hat{\Pi}_\perp^\mu \mathcal{W}_{\Pi_\perp}, \quad (10.22)$$

in which we denote the unit direction of the polarization vector by $\hat{\Pi}_\perp^\mu \equiv \Pi_\perp^\mu / \Pi_\perp = \xi_\perp^\mu / \xi_\perp$ and the ordinary derivative of the potential $\mathcal{W}$ by $\mathcal{W}_{\Pi_\perp} \equiv d\mathcal{W}/d\Pi_\perp$. The “*internal*” force (10.22) being proportional to the space-like four-vector $\xi_\perp^\mu = \perp_\nu^\mu \xi^\nu$, we immediately get the constraint

$$u_\mu \mathcal{F}^\mu = 0. \quad (10.23)$$

We now turn to the variation of the action with respect to the conserved current $J^\mu = \sigma u^\mu$ (hence we deduce $\sigma = \sqrt{-J_\nu J^\nu}$ and $u^\mu = J^\mu / \sigma$). The general form of the Lagrange equation for the conserved current density reads (see e.g. [264])⁷

$$\frac{D}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial J^\mu} \right) = u^\nu \nabla_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial J^\nu} \right). \quad (10.24)$$

For the case at hands of the Lagrangian (10.17), we get the following equation, later to be interpreted as the *evolution* equation for the dipole moment,

$$\dot{\Omega}^\mu = \frac{1}{\sigma} \nabla^\mu (\mathcal{W} - \Pi_\perp \mathcal{W}_{\Pi_\perp}) - R^\mu_{\rho\nu\lambda} u^\rho \xi^\nu K^\lambda. \quad (10.25)$$

A new type of linear momentum Ω^μ — having the same meaning as in [62] — has been introduced and defined by

$$\Omega^\mu = \omega^\mu - k^\mu \quad \text{with} \quad \omega^\mu = u^\mu \left(1 + \frac{1}{2} \dot{\xi}_\nu \dot{\xi}^\nu + \xi_\perp \mathcal{W}_{\Pi_\perp} \right) - u_\nu \xi^\nu \mathcal{F}^\mu. \quad (10.26)$$

⁶The present notation is related to the one used in [62] by $K^\mu = P^\mu / 2m$, $k^\mu = p^\mu / 2m$, $\mathcal{F}^\mu = F^\mu / m$ (and $\xi^\mu = \pi^\mu / 2m$). The quantity called Λ in [62] is now denoted Ξ in order to avoid confusion with the cosmological constant.

⁷This can alternatively be written with ordinary partial derivatives as

$$u^\nu \left[\partial_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial J^\mu} \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial J^\nu} \right) \right] = 0.$$

The Riemann curvature term in the RHS of (10.25) represents the analogue of the coupling to curvature in the Papapetrou equations of motion of particles with spin in an arbitrary background [319]. The complete dynamics and evolution of the dipolar fluid is now encoded into the equations (10.19) and (10.25). Such equations constitute the appropriate generalization for the case of a density-dependent potential $\mathcal{W}$, and in fluid formulation, of similar results in [62].

Notice that by contracting (10.25) with J_μ , the second term in the RHS of (10.25) cancels because of the symmetries of the Riemann tensor, and we get

$$J_\mu \dot{\Omega}^\mu = \frac{D}{d\tau} (\mathcal{W} - \Pi_\perp \mathcal{W}_{\Pi_\perp}). \quad (10.27)$$

One can readily check that this constraint (10.27) can alternatively be derived from the other equation (10.19) together with the definition of Ω^μ in (10.26). On the other hand, contracting (10.19) with u_μ yields $u_\mu \dot{K}^\mu = 0$, which according to the definition of K^μ , leads to the other constraint

$$u_\mu \frac{D}{d\tau} [(\Xi - 1) k^\mu] = 0. \quad (10.28)$$

This constraint can be viewed as a differential equation for the variable Ξ .

10.5.3 Particular solution of the equations

Following [62], we shall solve the constraint (10.28) with the most obvious and natural choice of solution that

$$\Xi = 1. \quad (10.29)$$

We shall see that this choice greatly simplifies the other equations we have. In particular, we are going to prove that the equations of motion (10.19) and equations of evolution (10.25), when reduced by the condition $\Xi = 1$, finally depend only on the *space-like* component of the dipole moment that is orthogonal to the velocity, namely $\xi_\perp^\mu$, so that the time-like component along the velocity, i.e. $u_\nu \xi^\nu$, will have no physically observable consequences (actually, in that case this unphysical component turns out to be complex [62]).

The structure of the subsequent equations and the physical properties of the model will heavily rely on the condition $\Xi = 1$. Note that we could regard this condition not as a choice of solution but rather as a choice of *theory*. Indeed, we are going to pick up the simplest theory out of a whole set of theories in which Ξ could have some non trivial proper time evolution obeying (10.28). Actually, we can view the choice $\Xi = 1$ as an elegant way to impose into the Lagrangian formalism the condition that *in fine* the only physical component of the dipole moment should be $\xi_\perp^\mu$, namely the one perpendicular to the four-velocity field. We can imagine that it would be possible to impose the same physical condition in a different way, for instance by using Lagrange multipliers into the initial action. For exemple, in TeVeS [358, 42, 360] or in Einstein-æther gravity [226, 225, 425, 423, 206], a dynamical time-like vector field whose norm is unity is introduced by this mean. However, the present situation is different because our final physical vector $\xi_\perp^\mu$ is space-like.

When the condition (10.29) holds, the two linear momenta (10.20) and (10.26) simplify appreciably and we obtain

$$K^\mu = u^\mu, \quad (10.30a)$$

$$\Omega^\mu = u^\mu (1 + \xi_\perp \mathcal{W}_{\Pi_\perp}) + \perp_\nu^\mu \dot{\xi}_\perp^\nu. \quad (10.30b)$$

We see that the linear momentum K^μ is finally time-like. These expressions depend only on the orthogonal component $\xi_\perp^\nu$, and we denote $\dot{\xi}_\perp^\nu \equiv D\xi_\perp^\nu/d\tau$. The equations of motion and evolution take now the simple forms

$$\dot{u}^\mu = -\mathcal{F}^\mu = -\hat{\Pi}_\perp^\mu \mathcal{W}_{\Pi_\perp}, \quad (10.31a)$$

$$\dot{\Omega}^\mu = \frac{1}{\sigma} \nabla^\mu (\mathcal{W} - \Pi_\perp \mathcal{W}_{\Pi_\perp}) - \xi_\perp^\nu R^\mu_{\rho\nu\lambda} u^\rho u^\lambda. \quad (10.31b)$$

Finally, the whole dynamics of the dipolar fluid only depends on the space-like perpendicular projection $\xi_\perp^\mu$ of the dipole moment.

10.5.4 Expression of the stress-energy tensor

We vary the action (10.12) with respect to the metric $g_{\mu\nu}$ to obtain the stress-energy tensor. We must first consider the general case where Ξ is unconstrained, and then only on the result make the restriction that $\Xi = 1$. We properly take into account the metric contributions coming from the Christoffel symbols in the covariant time derivative $\dot{\xi}^\mu$ by using the Palatini formula [413]. We are also careful that while the dipole moment ξ^μ should be kept fixed during the variation, the conserved current J^μ will vary because of the change in the volume element $\sqrt{-g} d^4x$. Instead of J^μ , the relevant metric-independent variable that has to be fixed is the “coordinate” current density defined by $J_*^\mu = \sqrt{-g} J^\mu$. Straightforward calculations yield the expression of the stress-energy tensor for an action of the general type (10.12). We find

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = & 2 \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu}} + g^{\mu\nu} \left(L - J^\rho \frac{\partial L}{\partial J^\rho} \right) + u^\mu u^\nu \dot{\xi}^\rho \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\rho} \\ & + \nabla_\rho \left(u^\mu u^\nu \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\rho} - u^\rho \xi^{(\mu} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_{\nu)}} - \xi^\rho u^{(\mu} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_{\nu)}} \right), \end{aligned} \quad (10.32)$$

in which we denote $\partial L / \partial \dot{\xi}_\rho \equiv g^{\rho\lambda} \partial L / \partial \dot{\xi}^\lambda$. The partial derivatives of the Lagrangian are performed assuming that its “natural” arguments J^μ , ξ^μ , $\dot{\xi}^\mu$ and $g_{\mu\nu}$ are independent. The application to the particular case of the Lagrangian (10.17) gives, for the moment for a general value of Ξ ,

$$T^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} (\mathcal{W} - \Pi_\perp \mathcal{W}_{\Pi_\perp}) + \Omega^{(\mu} J^{\nu)} - \nabla_\rho \left(\left[\xi^\rho K^{(\mu} - K^\rho \xi^{(\mu} \right] J^{\nu)} \right). \quad (10.33)$$

In the second term of (10.33) we see that the linear momentum Ω^μ is related to the monopolar contribution to the stress-energy tensor, while the other linear momentum K^μ parametrizes the dipolar contribution in the third term. Comparing with equation (2.14) of [62], we observe that a new term, proportional to the metric $g^{\mu\nu}$, has been introduced. This term will clearly be

associated with a cosmological constant, and we shall discuss it in detail below. One can readily verify that the conservation law $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ holds as a consequence of the equation of conservation of matter (10.11), and the equations of motion and evolution (10.19) and (10.25), for general Ξ .

In the next step we reduce the expression (10.33) by means of the condition $\Xi = 1$ and get

$$T^{\mu\nu} = -\mathcal{W} g^{\mu\nu} + \sigma \left(u^\mu u^\nu + \xi_\perp \mathcal{W}_{\Pi_\perp} \perp^{\mu\nu} + u^{(\mu} \perp_\rho^{v)} \dot{\xi}_\perp^\rho \right) - \nabla_\rho \left(\left[\xi_\perp^\rho u^{(\mu} - u^\rho \xi_\perp^{(\mu} \right] J^{\nu)} \right). \quad (10.34)$$

Again we notice that this expression depends only on the perpendicular projection $\xi_\perp^\mu$ of the dipole moment.

It will be useful in the following to decompose the stress-energy tensor (10.34) according to the general canonical form

$$T^{\mu\nu} = r u^\mu u^\nu + \mathcal{P} \perp^{\mu\nu} + 2 Q^{(\mu} u^{\nu)} + \Sigma^{\mu\nu}, \quad (10.35)$$

where r and $\mathcal{P}$ represent the energy density and pressure, where the “heat flow” Q^μ is orthogonal to the four-velocity, i.e. $u_\mu Q^\mu = 0$, and the symmetric anisotropic stress tensor $\Sigma^{\mu\nu}$ is orthogonal to the four-velocity and traceless, i.e. $u_\nu \Sigma^{\mu\nu} = 0$ and $\Sigma^\nu_\nu = 0$. We get

$$r = u_\rho u_\sigma T^{\rho\sigma}, \quad (10.36a)$$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{3} \perp_{\rho\sigma} T^{\rho\sigma}, \quad (10.36b)$$

$$Q^\mu = -\perp_\rho^\mu u_\sigma T^{\rho\sigma}, \quad (10.36c)$$

while the anisotropic stress tensor is obtained by subtraction. In the case $\Xi = 1$ where the dipolar fluid is described by the stress-energy tensor (10.34) we find that the energy density, pressure, heat flow and anisotropic stress tensor read respectively

$$r = \mathcal{W} - \Pi_\perp \mathcal{W}_{\Pi_\perp} + \rho, \quad (10.37a)$$

$$\mathcal{P} = -\mathcal{W} + \frac{2}{3} \Pi_\perp \mathcal{W}_{\Pi_\perp}, \quad (10.37b)$$

$$Q^\mu = \sigma \dot{\xi}_\perp^\mu + \Pi_\perp \mathcal{W}_{\Pi_\perp} u^\mu - \Pi_\perp^\lambda \nabla_\lambda u^\mu, \quad (10.37c)$$

$$\Sigma^{\mu\nu} = \left(\frac{1}{3} \perp^{\mu\nu} - \hat{\xi}_\perp^\mu \hat{\xi}_\perp^\nu \right) \Pi_\perp \mathcal{W}_{\Pi_\perp}, \quad (10.37d)$$

where we denote $\hat{\xi}_\perp^\mu \equiv \xi_\perp^\mu / \xi_\perp$, and where we introduced for future use the convenient notation

$$\rho = \sigma - \nabla_\lambda \Pi_\perp^\lambda. \quad (10.38)$$

By contrast to ordinary perfect fluids, the characteristic feature of the dipolar fluid is the existence of non-vanishing heat flow Q^μ and anisotropic stresses $\Sigma^{\mu\nu}$. Furthermore, we notice that the energy density r involves (via ρ) a dipolar contribution given by $-\nabla_\lambda \Pi_\perp^\lambda$. That contribution will play the crucial role, as we will see in section 10.7, when recovering the phenomenology of MOND.

10.6 Cosmological perturbations at large scales

We are going to show in this section that the model of dipolar dark matter [i.e. based on the action (10.12) and (10.17), with equations of motion reduced by the condition $\Xi = 1$] contains the essential features of standard dark matter at cosmological scales. We shall indeed prove that, at *first order* in cosmological perturbations, it behaves like a pressureless perfect fluid. Furthermore, we shall see that the dipolar fluid naturally contains a cosmological constant (the interpretation of which will be discussed below), and is thus supported by the observations of dark energy. The model is therefore consistent with cosmological observations of the CMB fluctuations.

10.6.1 Perturbation of the gravitational sector

We apply the theory of first-order cosmological perturbations around a Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) background. For every generic scalar field or component of a tensor field, say F , we shall write $F = \bar{F} + \delta F$, where the background part $\bar{F}$ is the value of F in a FLRW metric, while δF is a first-order perturbation of this background value.

The FLRW metric is written in the usual way in terms of the conformal time η , such that $dt = a d\eta$ where $a(\eta)$ is the scale factor and t the cosmic time, as

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2 [-d\eta^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j]. \quad (10.39)$$

Here γ_{ij} is the metric of maximally symmetric spatial hypersurfaces of constant curvature $K = 0$ or $K = \pm 1$. The perturbed FLRW metric $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ will be of the general form [327]

$$ds^2 = a^2 [-(1 + 2A) d\eta^2 + 2h_i d\eta dx^i + (\gamma_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j]. \quad (10.40)$$

Making use of the standard scalar-vector-tensor (SVT) decomposition [37, 302], the metric perturbations h_i and h_{ij} are decomposed according to

$$h_i = D_i B + B_i, \quad (10.41a)$$

$$h_{ij} = 2C\gamma_{ij} + 2D_i D_j E + 2D_{(i} E_{j)} + 2E_{ij}, \quad (10.41b)$$

where D_i denotes the covariant derivative with respect to the spatial background metric γ_{ij} . The vectors B^i and E^i are divergenceless, and the tensor E^{ij} is at once divergenceless and trace-free, i.e.

$$D_i B^i = D_i E^i = 0, \quad (10.42a)$$

$$D_i E^{ij} = E^i_i = 0. \quad (10.42b)$$

Spatial indices are lowered and raised with γ_{ij} and its inverse γ^{jk} . From these definitions, one can construct the gauge-invariant perturbation variables

$$\Phi \equiv A + (B' + \mathcal{H}B) - (E'' + \mathcal{H}E'), \quad (10.43a)$$

$$\Psi \equiv -C - \mathcal{H}(B - E'), \quad (10.43b)$$

$$\Phi_i \equiv E'_i - B_i, \quad (10.43c)$$

together with E_{ij} which is already gauge-invariant. The prime stands for a derivative with respect to the conformal time η , and $\mathcal{H} \equiv a'/a$ denotes the conformal Hubble parameter. We shall also use the alternative definition for a gauge-invariant gravitational potential

$$X \equiv A - C - \left(\frac{C}{\mathcal{H}} \right)' = \Psi + \Phi + \left(\frac{\Psi}{\mathcal{H}} \right)' . \quad (10.44)$$

10.6.2 Kinematics of the dipolar fluid

The four-velocity of the dipolar fluid is decomposed into a background part and a perturbation, $u^\mu = \bar{u}^\mu + \delta u^\mu$. We have both $\bar{g}_{\mu\nu} \bar{u}^\mu \bar{u}^\nu = -1$ and $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$. The background part is supposed to be comoving, that is $\bar{u}^i = 0$. This defines a zeroth order in the perturbation. In a FLRW background this means that it will satisfy the background geodesic equation $\dot{\bar{u}}^\mu = 0$. With standard notations, we have

$$\bar{u}^\mu = \frac{1}{a} (1, \mathbf{0}) , \quad (10.45a)$$

$$\delta u^\mu = \frac{1}{a} (-A, \beta^i) , \quad (10.45b)$$

while the covariant four-velocity will be written as $u_\mu = \bar{u}_\mu + \delta u_\mu$, with

$$\bar{u}_\mu = a (-1, \mathbf{0}) , \quad (10.46a)$$

$$\delta u_\mu = a (-A, \beta_i + h_i) . \quad (10.46b)$$

The velocities of all the other fluids (baryons, photons, neutrinos, ...) are decomposed in a similar way. The perturbation of the three-velocity β^i is split into scalar and vector parts,

$$\beta^i = D^i v + v^i \quad \text{with} \quad D_i v^i = 0 , \quad (10.47)$$

and we introduce the gauge-invariant variables describing the perturbed motion,

$$V \equiv v + E' , \quad (10.48a)$$

$$V_i \equiv v_i + B_i . \quad (10.48b)$$

The dipolar dark matter fluid differs from standard dark matter by the presence of the dipole moment $\xi_\perp^\mu$ (satisfying $u_\mu \xi_\perp^\mu = 0$) carried along the fluid trajectories. For the dipole moment we also write a decomposition into a background part plus a perturbation, namely $\xi_\perp^\mu = \bar{\xi}_\perp^\mu + \delta \xi_\perp^\mu$. However, because a non-vanishing background dipole moment would break the isotropy of space, and would therefore be incompatible with a FLRW metric, we must make the assumption that the dipole moment is *zero* in the background, so that it is purely perturbative. Hence, we pose

$$\bar{\xi}_\perp^\mu = 0 , \quad (10.49a)$$

$$\delta \xi_\perp^\mu = (0, \lambda^i) , \quad (10.49b)$$

where λ^i represents the first-order perturbation of the dipole moment. Beware of our notation for which λ^i is a vector living in the background spatial metric γ_{ij} . Thus the covariant components of the dipole moment perturbation are $\delta\xi_{\perp\mu} = (0, a^2\lambda_i)$ where $\lambda_i \equiv \gamma_{ij}\lambda^j$. Note that there is no time component in the dipole moment perturbation because of the constraint $u_\mu \xi_\perp^\mu = 0$ which reduces to $\bar{u}_\mu \delta\xi_\perp^\mu = 0$ at linear order. Like for the three-velocity field β^i in (10.47), we split λ^i into a scalar and a vector part, namely

$$\lambda^i = D^i y + y^i \quad \text{with} \quad D_i y^i = 0. \quad (10.50)$$

However, unlike for v and v^i , we notice that y and y^i are gauge-invariant perturbation variables. This is because the background quantity is zero, $\bar{\xi}_\perp^\mu = 0$, hence the perturbation $\delta\xi_\perp^\mu$ is gauge-invariant according to the Stewart-Walker lemma [386, 385].

10.6.3 Cosmological expansion of the fundamental potential

The next step is to make more specific our fundamental potential function $\mathcal{W}(\Pi_\perp)$ entering the Lagrangian (10.17). Such function should be a “universal” function of the polarization of the dipolar medium, described by the polarization scalar field

$$\Pi_\perp = \sigma \xi_\perp. \quad (10.51)$$

Now, we have seen that in cosmology there is no background (FLRW) value for the dipole moment, hence the background value of the polarization field is zero: $\bar{\Pi}_\perp = 0$. In linear perturbations, the polarization is expected to stay around the background value. Therefore, it seems physically well-motivated that the value $\bar{\Pi}_\perp = 0$ corresponds to a minimum of the potential function $\mathcal{W}$, so that $\Pi_\perp$ does not depart too much from this background value, at least in the linear perturbation regime. We therefore assume that $\mathcal{W}(\Pi_\perp)$ is given locally⁸ by an harmonic potential of the form

$$\mathcal{W}(\Pi_\perp) = \mathcal{W}_0 + \frac{1}{2} \mathcal{W}_2 \Pi_\perp^2 + \mathcal{O}(\Pi_\perp^3), \quad (10.52)$$

where $\mathcal{W}_0$ and $\mathcal{W}_2$ are two constant parameters, and we pose $\mathcal{W}_1 = 0$. For linear perturbations, because $\Pi_\perp = \delta\Pi_\perp$ is already perturbative, we shall be able to neglect the higher order terms $\mathcal{O}(\Pi_\perp^3)$ in (10.52) because these will contribute to second order at least in the internal force (10.22). Inserting the *ansatz* (10.52) into (10.22) we obtain

$$\mathcal{F}^\mu = \mathcal{W}_2 \Pi_\perp^\mu + \mathcal{O}(\Pi_\perp^2). \quad (10.53)$$

We asserted in the previous section that the background motion of the dipolar fluid is geodesic, i.e. $\dot{\bar{u}}^\mu = 0$. This is now justified by the fact that the force (10.53) drives the non-geodesic motion *via* the equation of motion (10.31a), hence since this force vanishes in the background, the deviation from geodesic motion starts only at perturbation order.

In the present model the coefficients $\mathcal{W}_0, \mathcal{W}_2, \dots$ of the expansion of our fundamental potential $\mathcal{W}(\Pi_\perp)$ are free parameters, and therefore will have to be measured by cosmological or

⁸The domain of validity of this expansion will be made more precise in section 10.7.2.

astronomical observations. First of all, it is clear from inspection of the action (10.17), or from the general decomposition of the stress-energy tensor [see (10.37a) and (10.37b)], that $\mathcal{W}_0$ is nothing but a cosmological constant, and we find

$$\mathcal{W}_0 = \frac{\Lambda}{8\pi} . \quad (10.54)$$

The coefficient $\mathcal{W}_0$ is thereby determined by cosmological measurements of “dark energy”. As we shall show in section 10.7, the next two coefficients $\mathcal{W}_2$ and $\mathcal{W}_3$ will be fixed by requiring that our model reproduces the phenomenology of MOND at galactic scales [361], and we shall find that $\mathcal{W}_2 = 4\pi$ and $\mathcal{W}_3 = 32\pi^2/a_0$ where a_0 is the constant MOND acceleration scale.

Hence, in this model the cosmological constant Λ appears as the minimum value of the potential function $\mathcal{W}$, reached when the polarization field is exactly zero, that is on an exact FLRW background (see Fig. 10.3). Thus, it is tempting to interpret Λ as a “vacuum polarization”, i.e. the residual polarization which remains when the “classical” part of the polarization $\Pi_\perp \rightarrow 0$. Of course our model is only classical, hence there is no notion of vacuum polarization which would be due to quantum fluctuations. However, we can imagine that the present model is an effective one, describing at some macroscopic level a more fundamental underlying quantum field theory (QFT) in which there is a non-vanishing vacuum expectation value (VEV) of a quantum polarization field giving rise to the observed cosmological constant [420]. Then, the constant $\mathcal{W}_0$ would play the role of the VEV of this hypothetical quantum polarization field in such a more fundamental QFT.

10.6.4 Perturbation of the dipolar fluid equations

As for the four-velocity $u^\mu = \bar{u}^\mu + \delta u^\mu$, we consider a linear perturbation of the rest mass energy density of the dipolar fluid according to $\sigma = \bar{\sigma} + \delta\sigma$. The conservation law $\nabla_\mu(\sigma u^\mu) = 0$ reduces in the case of the background to

$$\bar{\sigma}' + 3\mathcal{H}\bar{\sigma} = 0 , \quad (10.55)$$

hence $\bar{\sigma}$ evolves like a^{-3} . Concerning the perturbation, we define $\sigma \equiv \bar{\sigma}(1 + \varepsilon)$ so that the rest mass density contrast reads

$$\varepsilon = \frac{\delta\sigma}{\bar{\sigma}} . \quad (10.56)$$

This quantity is not gauge-invariant, and one can associate with it in the usual way a gauge-invariant variable by posing

$$\varepsilon_F \equiv \varepsilon - \frac{\bar{\sigma}'}{\bar{\sigma}} \frac{C}{\mathcal{H}} = \varepsilon + 3C , \quad (10.57)$$

with the index F standing for “flat slicing”. Alternatively, it is possible to introduce other gauge-invariant variables, like for example

$$\varepsilon_N \equiv \varepsilon - 3\mathcal{H}(B - E') = \varepsilon_F + 3\Psi , \quad (10.58)$$

where the index N stands for “Newtonian”. For the linear perturbation, the conservation law $\nabla_\mu(\sigma u^\mu) = 0$ gives the gauge-invariant equations

$$\varepsilon'_F + \Delta V = 0, \quad (10.59a)$$

$$\varepsilon'_N + \Delta V = 3\Psi', \quad (10.59b)$$

where $\Delta = \gamma_{ij} D^i D^j$ denotes the usual Laplacian operator. In the following we shall choose to work only with the flat-slicing variable ε_F .

According to (10.31a), the motion of the dipolar fluid obeys the equation $\dot{u}^\mu = -\mathcal{F}^\mu$. A straightforward calculation yields the gauge-invariant expression for the four-acceleration,

$$\dot{u}^\mu = \frac{1}{a^2} \left(0, D^i (\Phi + V' + \mathcal{H}V) + V^{i'} + \mathcal{H}V^i \right). \quad (10.60)$$

On the other hand, the force is given by (10.53) at first-order in the perturbation, in which we can use $\Pi_\perp^\mu = (0, \bar{\sigma}\lambda^i)$ to this order, with $\lambda^i = D^i y + y^i$. Hence, in terms of gauge-invariant quantities, the scalar and vector parts of the equation of motion read

$$V' + \mathcal{H}V + \Phi = -4\pi \bar{\sigma} a^2 y, \quad (10.61a)$$

$$V'_i + \mathcal{H}V_i = -4\pi \bar{\sigma} a^2 y_i. \quad (10.61b)$$

Here we are anticipating on the results of the section 10.7 and have replaced the constant $\mathcal{W}_2$ in the expression of the force (10.53) by its value 4π determined from the comparison with MOND predictions.

If there was no dipole moment (i.e. $y = y^i = 0$), we would recover the standard geodesic equations for a perturbed pressureless perfect fluid (see e.g. [327]), and according to (10.61b), the vector modes would satisfy $(aV_i)' = 0$, and therefore vanish like a^{-1} . In contrast with the standard perfect fluid case, the dipolar fluid may have non-vanishing vector modes because of the driving term proportional to y_i . Equation (10.61a) clearly shows that the scalar modes are also affected by a non-zero dipole moment.

The equation of evolution of the dipole moment was given by (10.31b). Now, Ω^μ reduces to $\dot{\xi}_\perp^\mu + u^\mu$ at first perturbation order, hence the evolution equation gives at that order

$$\ddot{\xi}_\perp^\mu + \dot{u}^\mu = -\xi_\perp^\nu \bar{R}^\mu_{\rho\nu\sigma} \bar{u}^\rho \bar{u}^\sigma, \quad (10.62)$$

where $\bar{R}^\mu_{\rho\nu\sigma}$ is the Riemann tensor of the FLRW background. By easy calculations we find for the derivatives of the dipole moment variable

$$\dot{\xi}_\perp^\mu = \frac{1}{a} \left(0, \lambda^{i'} + \mathcal{H}\lambda^i \right), \quad (10.63a)$$

$$\ddot{\xi}_\perp^\mu = \frac{1}{a^2} \left(0, \lambda^{i''} + \mathcal{H}\lambda^{i'} + \mathcal{H}'\lambda^i \right). \quad (10.63b)$$

The scalar and vector parts of the equation of evolution are thus given by

$$y'' + \mathcal{H}y' = - (V' + \mathcal{H}V + \Phi), \quad (10.64a)$$

$$y_i'' + \mathcal{H}y_i' = - (V'_i + \mathcal{H}V_i). \quad (10.64b)$$

Notice that the equation for the vector modes can be integrated, giving the simple relation

$$y'_i + V_i = \frac{s_i}{a}, \quad (10.65)$$

where s_i is an integration constant three-vector.

A comment is in order at this stage. Recall that we have included in the original Lagrangian (10.17) a mass term in the ordinary sense, with the most natural value of the mass density simply given by σ . This choice was made having in mind the physical analogy with the quasi-Newtonian model [63] where $\sigma = 2mn$ represented the inertial mass of the dipolar particles. Now we can see on a more technical level that such mass term is in fact essential for the model to work properly. If this mass term was set to zero in the action, then the RHS of both equations (10.64a) and (10.64b) would be zero. We would then find that y' and y'_i vanish like a^{-1} , so that the dipole moment would in fact rapidly disappear or at least become non-dynamical, and the whole model would turn out to be meaningless.

Combining the equations of motion (10.61) and the evolution equations (10.64), we obtain some differential equations for the scalar and vector contributions y and y^i of the dipole moment $\lambda^i = D^i y + y^i$, which turn out to be decoupled from the equations giving V and V^i , and to be exactly the same, *viz*

$$y'' + \mathcal{H} y' - 4\pi \bar{\sigma} a^2 y = 0, \quad (10.66a)$$

$$y''_i + \mathcal{H} y'_i - 4\pi \bar{\sigma} a^2 y_i = 0. \quad (10.66b)$$

We find it remarkable that the dipole moment decouples from the other perturbation variables so that its evolution depends *in fine* only on background quantities, namely $\bar{\sigma}$ and the scale factor a . Since the equations for the scalar and vector modes are the same, we have also the same equation for the dipole moment itself,

$$\lambda''_i + \mathcal{H} \lambda'_i - 4\pi \bar{\sigma} a^2 \lambda_i = 0. \quad (10.67)$$

Clearly, the solutions of (10.67) behave typically as increasing and decreasing exponentials moderated by a cosmological damping term $\mathcal{H} \lambda'_i$. We can also write this equation in terms of the cosmic time $t = \int a \, d\eta$, namely⁹

$$\ddot{\lambda}_i + 2H \dot{\lambda}_i - 4\pi \bar{\sigma} \lambda_i = 0, \quad (10.68)$$

where $H \equiv \dot{a}/a = a'$ is the usual Hubble parameter. We find that the equations (10.67) or (10.68) are the same as the equation governing the growth of the density contrast of a perfect fluid with vanishing pressure for the sub-Hubble modes (say $k \gg H$) and when we neglect the contribution of other fluids; see (10.88) below. In particular this means that like for the case of the density of a perfect fluid there is no problem of divergence (i.e. blowing up) of the components of the dipole moment λ_i between, say, the end of the inflationary era and the recombination. We can thus apply the theory of first-order cosmological perturbations even for the components of the dipole moment itself, which should stay perturbative.

⁹In this equation, the dot stands for a derivative with respect to the coordinate time t , and not the proper time τ as everywhere else.

Notice that the value of the coefficient $\mathcal{W}_2 = 4\pi$ used in (10.67) or (10.68), which makes such equations identical with the equation of growth of cosmological structures in the standard CDM scenario, will only be determined in section 10.7 from a comparison with MOND predictions. There is thus an interesting interplay between the cosmology at large scales and the gravitational physics of smaller scales.¹⁰

10.6.5 The perturbed stress-energy tensor

Consider next the stress-energy tensor of the dipolar fluid, that we decomposed as (10.35) with the expressions (10.37)–(10.38). At first perturbation order, these expressions reduce to

$$r = \mathcal{W}_0 + \rho, \quad (10.69a)$$

$$\mathcal{P} = -\mathcal{W}_0, \quad (10.69b)$$

$$Q^\mu = \frac{1}{a} \left(0, \bar{\sigma} \lambda^{i'} \right), \quad (10.69c)$$

$$\Sigma^{\mu\nu} = 0, \quad (10.69d)$$

together with

$$\rho = \bar{\sigma} (1 + \varepsilon - D_i \lambda^i). \quad (10.70)$$

We first note that part of the dipolar medium is actually made of a fluid of “dark energy” satisfying $\rho_{\text{de}} = -P_{\text{de}} = \mathcal{W}_0 = \Lambda/8\pi$ where Λ is the cosmological constant. Accordingly, we shall write the decomposition

$$T^{\mu\nu} = T_{\text{de}}^{\mu\nu} + T_{\text{dm}}^{\mu\nu}, \quad (10.71)$$

where the stress-energy tensor associated with the cosmological constant is denoted by $T_{\text{de}}^{\mu\nu}$, and where the other part represents specifically a fluid of “dark matter” whose stress-energy tensor is $T_{\text{dm}}^{\mu\nu}$. Their explicit expressions read

$$T_{\text{de}}^{\mu\nu} = -\mathcal{W}_0 g^{\mu\nu}, \quad (10.72a)$$

$$T_{\text{dm}}^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + 2 Q^{(\mu} u^{\nu)}. \quad (10.72b)$$

Note that the dark matter part of the dipolar fluid, which may be called dipolar dark matter, has no pressure P , no anisotropic stresses $\Sigma^{\mu\nu}$, but a heat flow Q^μ given by (10.69c) and an energy density ρ given by (10.70), or alternatively

$$\rho = \bar{\sigma} (1 + \varepsilon - \Delta y). \quad (10.73)$$

The background energy density is simply given by the background rest mass energy density, $\bar{\rho} = \bar{\sigma}$, and the corresponding energy density contrast is

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} = \varepsilon - \Delta y. \quad (10.74)$$

¹⁰Actually the coefficient 4π in (10.67) could be changed if we had assumed a mass term in the action (10.17) different from σ (say 2σ or $\sigma/2$). The simplest choice we have made (for different reasons) that σ is the correct mass term in the action corresponds also to the usual-looking evolution equation (10.67).

It differs from the rest mass energy density contrast ε because of the internal dipolar energy. Like for ε , one can construct several gauge-invariant perturbations associated with δ . We shall limit ourselves to the flat-slicing (F) one defined by (recall that y is gauge-invariant)

$$\delta_F \equiv \delta + 3C = \varepsilon_F - \Delta y, \quad (10.75)$$

and whose evolution equation is

$$\delta'_F + \Delta V + \Delta y' = 0. \quad (10.76)$$

Similar gauge-invariant density contrast variables are also defined for the other fluids. Next, we split the dark matter stress-energy tensor (10.72b) into a background part plus a linear perturbation, namely $T_{\text{dm}}^{\mu\nu} = \bar{T}_{\text{dm}}^{\mu\nu} + \delta T_{\text{dm}}^{\mu\nu}$, and find

$$\bar{T}_{\text{dm}}^{\mu\nu} = \bar{\rho} \bar{u}^\mu \bar{u}^\nu, \quad (10.77a)$$

$$\delta T_{\text{dm}}^{\mu\nu} = \delta \rho \bar{u}^\mu \bar{u}^\nu + 2 \bar{\rho} \delta u^{(\mu} \bar{u}^{\nu)} + 2 Q^{(\mu} \bar{u}^{\nu)}. \quad (10.77b)$$

We made use of the fact that the heat flow Q^μ is already perturbative to replace the four-velocity in the last term by its background value.

We are now going to show that the dipolar dark matter stress-energy tensor is undistinguishable, at linear perturbation order, from that of a perfect fluid with vanishing pressure. To this end, we introduce the effective perturbed four-velocity

$$\delta \tilde{u}^\mu \equiv \delta u^\mu + \frac{Q^\mu}{\bar{\rho}}. \quad (10.78)$$

Notice that $\tilde{u}^\mu = \bar{u}^\mu + \delta \tilde{u}^\mu$ is still an admissible velocity field because $\delta \tilde{u}^0 = -A/a$ by virtue of the transversality property $\bar{u}_\mu Q^\mu = 0$. The perturbed part of the dark matter stress-energy tensor (10.77b) can then be written in the form

$$\delta T_{\text{dm}}^{\mu\nu} = \delta \rho \bar{u}^\mu \bar{u}^\nu + 2 \bar{\rho} \delta \tilde{u}^{(\mu} \bar{u}^{\nu)}, \quad (10.79)$$

which, together with (10.77a), is precisely the stress-energy tensor of a perfect fluid with vanishing pressure P , vanishing anisotropic stresses $\Sigma^{\mu\nu}$, and a four-velocity field $\tilde{u}^\mu = \bar{u}^\mu + \delta \tilde{u}^\mu$. Using the definition (10.78) of the perturbed four-velocity $\delta \tilde{u}^\mu$, with the explicit expression of the heat flow (10.69c), one can check that this perfect fluid consistently follows a geodesic motion, i.e. $\delta \hat{\tilde{u}}^\mu = 0$.

More explicitly, we can write the latter effective perturbation of the four-velocity in the standard form $\delta \tilde{u}^\mu = a^{-1}(-A, \tilde{\beta}^i)$, and find that the effective ordinary velocity reads

$$\tilde{\beta}^i = \beta^i + \lambda^{i'}, \quad (10.80)$$

which can be viewed as a modification of the space-like component of the dipolar dark matter four-velocity. This allows one to build a new four-velocity which would be tangent to the world-line of the effective perfect fluid (cf. Fig. 10.1). In terms of scalar and vector parts, if we write $\tilde{\beta}_i = D_i \tilde{v} + \tilde{v}_i$, then

$$\tilde{v} = v + y', \quad (10.81a)$$

$$\tilde{v}_i = v_i + y'_i. \quad (10.81b)$$

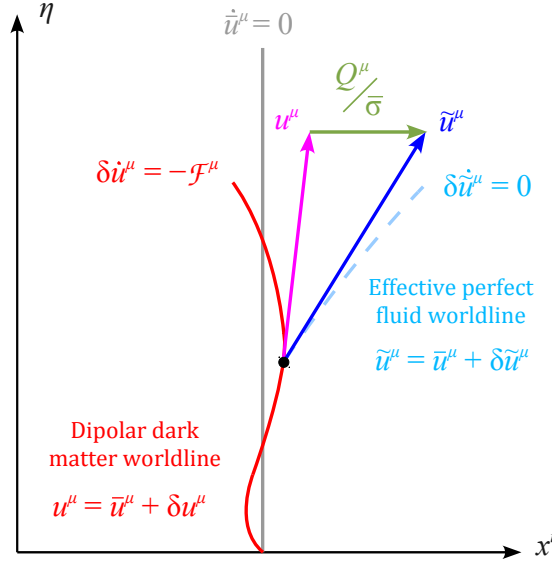


Figure 10.1: Sketch of the equivalence at *first order* of cosmological perturbations between dipolar dark matter and an effective perfect fluid. The dipolar dark matter has a four-velocity $u^\mu = \bar{u}^\mu + \delta u^\mu$, and follows a non-geodesic motion driven by the internal force $\mathcal{F}^\mu$, namely $\dot{u}^\mu = -\mathcal{F}^\mu$. One can construct from u^μ and the heat flux Q^μ an effective four-velocity $\tilde{u}^\mu = \bar{u}^\mu + \delta \tilde{u}^\mu$ satisfying a geodesic motion, i.e. $\dot{\tilde{u}}^\mu = 0$. This is the four-velocity field of the effective perfect fluid associated with dipolar dark matter.

Like for the perturbed four-velocity δu^μ , we can introduce the gauge-invariant variables

$$\tilde{V} \equiv \tilde{v} + E' = V + y', \quad (10.82a)$$

$$\tilde{V}_i \equiv \tilde{v}_i + B_i = V_i + y'_i. \quad (10.82b)$$

In terms of the gauge-invariant variables $\tilde{V}$, $\tilde{V}_i$ and δ_F , the dipolar dark matter fluid equations (10.61) and (10.76) finally read

$$\tilde{V}' + \mathcal{H} \tilde{V} + \Phi = 0, \quad (10.83a)$$

$$\tilde{V}'_i + \mathcal{H} \tilde{V}_i = 0, \quad (10.83b)$$

$$\delta'_F + \Delta \tilde{V} = 0. \quad (10.83c)$$

These are precisely the standard evolution equations of a perfect fluid with no pressure and no anisotropic stresses (see e.g. [327]).

To summarize, we have proved that at *first order* of perturbation theory — and only at that order — the dipolar fluid behaves exactly as ordinary dark energy (i.e. a cosmological constant) plus ordinary dark matter (i.e. a perfect fluid). If we specify the background rest mass energy density $\bar{\sigma}$ so that $\Omega_{\text{dm}} \equiv 8\pi\bar{\sigma}_0/3H_0^2 \simeq 0.23$ today as evidenced in cosmological observations, we can assert that the first-order cosmological perturbation theory with the dipolar fluid described by the stress-energy tensor (10.71)–(10.72) will lead to the same predictions than the standard Λ -CDM scenario — and is therefore consistent with cosmological observations at large

scales. However, at *second order* of cosmological perturbations, the dipole moment entering the stress-energy tensor cannot be absorbed in an effective perturbed velocity field, which means that the dipolar dark matter fluid could in principle be distinguished from a standard perturbed dark matter fluid. Working out the theory of second-order cosmological perturbations could thus yield distinctive features of the present model and reveal a signature of the dipolar nature of dark matter. We have particularly in mind effects linked with the non-gaussianity of the CMB fluctuations that are associated with second-order perturbations.

10.6.6 Perturbation of the Einstein equations

The Einstein equations at first perturbation order around the FLRW background read

$$\delta G^{\mu\nu} = 8\pi \left(\delta T^{\mu\nu} + \sum_{\text{f}} \delta T_{\text{f}}^{\mu\nu} \right), \quad (10.84)$$

where $G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$ is the Einstein tensor and where $\delta T^{\mu\nu} = \delta T_{\text{de}}^{\mu\nu} + \delta T_{\text{dm}}^{\mu\nu}$ is the perturbative part of the stress-energy tensor of the dipolar fluid given by (10.72). The summation runs over all the other cosmological fluids present (baryons, photons, neutrinos, ...) which are described by stress-energy tensors $T_{\text{f}}^{\mu\nu}$. Separating out the dark matter from the dark energy (using the link $\mathcal{W}_0 = \Lambda/8\pi$) we get

$$\delta G^{\mu\nu} + \Lambda \delta g^{\mu\nu} = 8\pi \left(\delta T_{\text{dm}}^{\mu\nu} + \sum_{\text{f}} \delta T_{\text{f}}^{\mu\nu} \right). \quad (10.85)$$

As we have seen in the previous section, the dark matter fluid is entirely described at linear perturbation order by the gauge-invariant variables $\tilde{V}$, $\tilde{V}_i$ and δ_{F} (and the background density $\bar{\rho}$) obeying the evolution equations (10.83) like for an ordinary pressureless fluid. We can thus immediately write the gauge-invariant perturbation equations in the standard SVT formalism (see e.g. [327]). Though these are well-known, we reproduce them here for completeness. For the scalar modes, we have

$$\Delta\Psi - 3\mathcal{H}^2 X = 4\pi a^2 \left(\bar{\rho} \delta_{\text{F}} + \sum_{\text{f}} \bar{\rho}_{\text{f}} \delta_{\text{f}}^{\text{F}} \right), \quad (10.86a)$$

$$\Psi - \Phi = 8\pi a^2 \sum_{\text{f}} \bar{\rho}_{\text{f}} w_{\text{f}} \sigma_{\text{f}}, \quad (10.86b)$$

$$\Psi' + \mathcal{H} \Phi = -4\pi a^2 \left(\bar{\rho} \tilde{V} + \sum_{\text{f}} \bar{\rho}_{\text{f}} (1 + w_{\text{f}}) V_{\text{f}} \right), \quad (10.86c)$$

$$\mathcal{H} X' + (\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}') X = 4\pi a^2 \sum_{\text{f}} \bar{\rho}_{\text{f}} \left(w_{\text{f}} \Gamma_{\text{f}} + c_{\text{f}}^2 \delta_{\text{f}}^{\text{F}} + \frac{2}{3} w_{\text{f}} \Delta \sigma_{\text{f}} \right), \quad (10.86d)$$

where we have singled out the contribution of the dipolar dark matter (cf. the variables $\tilde{V}$, δ_{F} and $\bar{\rho}$) from the other fluid contributions described by their background density $\bar{\rho}_{\text{f}}$, equation of state w_{f} , adiabatic sound velocity c_{f} , and gauge-invariant entropy perturbation Γ_{f} . We also introduced the SVT components of the perturbative part of the anisotropic stress tensor, defined by $\delta \Sigma_{\text{f}}^{ij} = a^2 \bar{\rho}_{\text{f}} w_{\text{f}} [\Delta^{ij} \sigma_{\text{f}} + D^{(i} \sigma_{\text{f}}^{j)} + \sigma_{\text{f}}^{ij}]$ with $\Delta^{ij} \equiv D^i D^j - \gamma^{ij} \Delta/3$. The variables

σ_f , σ_f^i and σ_f^{ij} are gauge-invariant because the background part of Σ_f^{ij} vanishes in the case of a perfect fluid. The equations for the vector and tensor modes are

$$(\Delta + 2K) \Phi^i = -16\pi a^2 \left(\bar{\rho} \tilde{V}^i + \sum_f \bar{\rho}_f (1 + w_f) V_f^i \right), \quad (10.87a)$$

$$\Phi^{i'} + 2\mathcal{H} \Phi^i = 8\pi a^2 \sum_f \bar{\rho}_f w_f \sigma_f^i, \quad (10.87b)$$

$$E^{ij''} + 2\mathcal{H} E^{ij'} + (2K - \Delta) E^{ij} = 8\pi a^2 \sum_f \bar{\rho}_f w_f \sigma_f^{ij}. \quad (10.87c)$$

We highlight once more the fact that at first perturbation order, the dipolar dark matter is like ordinary dark matter, as can be seen from the fluid equations (10.83) and the Einstein equations (10.86)–(10.87). Indeed, these sets of equations can be evolved without any reference to the dipole moment λ^i .

Combining the dipolar dark matter equations (10.83a) and (10.83c) with the Einstein equations (10.86a)–(10.86b), we get the equation governing the growth of the dipolar dark matter density contrast as

$$\delta_F'' + \mathcal{H} \delta_F' - 4\pi \bar{\rho} a^2 \delta_F = 3\mathcal{H}^2 X + 4\pi a^2 \sum_f \bar{\rho}_f \left(\delta_f^F - 2w_f \Delta \sigma_f \right). \quad (10.88)$$

Again, we find that the growth of structures driven by the equation (10.83c) or equivalently (10.88) for the dipolar dark matter of the present model is identical with that in the standard CDM model at linear perturbation order. For sub-Hubble modes one can neglect the first term in the RHS, and we expect that the contribution of the dark matter dominates that of the other fluids, so we can neglect also the second term in the RHS of (10.88).

Interestingly, we have found in (10.67) that each of the components of the dipole moment obey the same equation as (10.88) but with exactly zero RHS. Recall that the dipolar dark matter density contrast is defined by (10.75) as

$$\delta_F = \varepsilon_F - D^i \lambda_i. \quad (10.89)$$

From (10.67) we see that the internal energy due to the dipole moment satisfies the “homogeneous” equation that is associated with (10.88), *viz.* (recalling $\bar{\rho} = \bar{\sigma}$)

$$D^i \lambda_i'' + \mathcal{H} D^i \lambda_i' - 4\pi \bar{\rho} a^2 D^i \lambda_i = 0. \quad (10.90)$$

This result indicates that, in the *non-linear* regime, the internal energy related to the dipole moment may contribute significantly to the growth of perturbations (see section 10.7.2 for more comments). Finally, it is clear that the rest-mass density contrast obeys the same “inhomogeneous” equation, *i.e.*

$$\varepsilon_F'' + \mathcal{H} \varepsilon_F' - 4\pi \bar{\rho} a^2 \varepsilon_F = 3\mathcal{H}^2 X + 4\pi a^2 \sum_f \bar{\rho}_f \left(\delta_f^F - 2w_f \Delta \sigma_f \right). \quad (10.91)$$

10.7 Dipolar dark matter at galactic scales

In this section, we shall show that, under some well motivated assumptions, the dipolar dark matter naturally recovers the phenomenology of MOND for a typical galaxy at low redshift. Such a link between a form of dipolar dark matter and MOND was the primary motivation of previous works [63, 62]. We shall see that with the present improvement of the model with respect to [62], thanks to the fact that the fundamental potential in the action now depends on the polarization field $\Pi_\perp = \sigma \xi_\perp$ (instead of $\xi_\perp$ in the previous model [62]), the relation with MOND is straightforward and physically appealing.

10.7.1 Non-relativistic limit of the model

We investigate the non-relativistic (NR) limit of the dipolar fluid dynamics described by the equations (10.31a) and (10.31b), and by the stress-energy tensor (10.34). To do so, we consider the formal limit $c \rightarrow +\infty$,¹¹ which is equivalent to the condition $v \ll c$, where v is the typical value of the coordinate three-velocity of the dipolar fluid. To consistently keep track of the order of relativistic corrections, we systematically write as $\mathcal{O}(c^{-n})$ a typical neglected remainder.

We are interested in the dynamics of dipolar dark matter and ordinary baryonic matter in a typical galaxy at low redshift. Let us introduce a *local* Cartesian coordinate system $\{ct, z^i\}$, centered on this galaxy around some cosmological epoch, and which is *inertial* in the sense that it is without any rotation, nor acceleration with respect to some averaged cosmological matter distribution at large distances from the galaxy. Such a local coordinate system can be derived from the cosmological coordinate system $\{\eta, x^i\}$ used in section 10.6 by posing

$$ct = a(\eta_0) (\eta - \eta_0), \quad (10.92a)$$

$$z^i = a(\eta_0) (x^i - x_0^i), \quad (10.92b)$$

near an event occurring at cosmological time η_0 and at the galaxy's center x_0^i . In the local coordinate system, the metric developed at the lowest NR order reads

$$g_{00} = -1 + \frac{2U}{c^2} + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (10.93a)$$

$$g_{0i} = \mathcal{O}(c^{-3}), \quad (10.93b)$$

$$g_{ij} = \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) \delta_{ij} + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (10.93c)$$

where $U \ll c^2$ is a Newtonian-like potential. For the motion of massive (non-relativistic) particles we need only to include the contribution of U in the 00 metric coefficient. Thanks to the standard general relativistic coupling to gravity in the ij metric coefficient, the motion of photons agrees with the general relativistic prediction with Newtonian-like potential U .

In the NR limit, the equation of motion (10.31a) is readily seen to reduce to

$$\frac{dv^i}{dt} - g^i = -\hat{\Pi}_\perp^i \mathcal{W}_{\Pi_\perp} + \mathcal{O}(c^{-2}), \quad (10.94)$$

¹¹From now on, we reintroduce for convenience all factors of c and G .

where $a^i \equiv dv^i/dt = (\partial_t + v^j \partial_j) v^i$ is the standard Newtonian acceleration of a fluid in the Eulerian picture, v^i being the coordinate three-velocity, and $g^i = \partial_i U$ the non-relativistic local gravitational field. Note that g^i is generated by both the ordinary baryonic matter and the dipolar dark matter. Similarly, the equation of evolution (10.31b) for the dipole moment reads in the NR limit [using also (10.94)]

$$\frac{d^2 \xi_{\perp}^i}{dt^2} - \hat{\Pi}_{\perp}^i \mathcal{W}_{\Pi_{\perp}} = \frac{1}{\sigma} \partial_i (\mathcal{W} - \Pi_{\perp} \mathcal{W}_{\Pi_{\perp}}) + \xi_{\perp}^j \partial_j g^i + \mathcal{O}(c^{-2}), \quad (10.95)$$

where we explicitly have $d^2 \xi_{\perp}^i / dt^2 = \left(\partial_t^2 + a^j \partial_j + 2v^j \partial_{jt}^2 + v^j v^k \partial_{jk}^2 \right) \xi_{\perp}^i$. Notice the second term in the RHS which is a tidal term coming from the Riemann curvature coupling in (10.31b). Finally, the equation (10.11) reduces to the classical continuity equation

$$\partial_t \sigma + \partial_i (\sigma v^i) = \mathcal{O}(c^{-2}). \quad (10.96)$$

Next, we need to be cautious about the relativistic order of magnitude of the potential function $\mathcal{W}$ appearing in the Lagrangian (10.17). It is clear that $\mathcal{W}$ has the dimension either of a mass density or an energy density, depending of where we would reinstall the factors c in (10.17). We shall from now on assume that $\mathcal{W}$ is an *energy* density, and has a finite non-zero limit when $c \rightarrow +\infty$. This will be justified when we show in (10.113) below that the coefficients $\mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3, \dots$ in the expansion of $\mathcal{W}$ considered as an energy density, can be expressed solely in terms of G and the MOND acceleration a_0 (without any c 's). Therefore, our assumption means that we are viewing a_0 as a new fundamental acceleration scale *a priori* independent from c . With such hypothesis, if we reintroduce the factors of c in the expression of the density r considered as a *mass* density and given by (10.37a), we get $r = \rho + (\mathcal{W} - \Pi_{\perp} \mathcal{W}_{\Pi_{\perp}})/c^2$, where ρ is given by (10.38). Thus, the term $(\mathcal{W} - \Pi_{\perp} \mathcal{W}_{\Pi_{\perp}})/c^2$ becomes negligible in the formal limit $c \rightarrow +\infty$, and we have $r = \rho + \mathcal{O}(c^{-2})$. In particular, we observe that the term $\mathcal{W}_0$, which is linked to the cosmological constant by (restoring the c 's and G)

$$\mathcal{W}_0 = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}, \quad (10.97)$$

does not enter the expression of the dipolar fluid density r , and therefore has no influence on the local dynamics of the dipolar dark matter in the NR limit. Our assumption that $\mathcal{W}$ has a finite non-zero limit when $c \rightarrow +\infty$ means that the cosmological constant Λ should scale with c^{-4} , which will be justified later when we show that $\Lambda \sim a_0^2/c^4$.

Thus, in the NR limit we need to consider only the mass density of the dipolar dark matter given by ρ . Now, from (10.38) we have $\rho = \sigma - \nabla_{\lambda} \Pi_{\perp}^{\lambda}$ which becomes when $c \rightarrow +\infty$

$$\rho = \sigma - \partial_i \Pi_{\perp}^i + \mathcal{O}(c^{-2}). \quad (10.98)$$

At that order the dipolar term involves only an ordinary partial space derivative. Finally, we get the Poisson equation in the standard way as the NR limit of the 00 and $i i$ components of the Einstein equations, and find

$$\Delta U = -4\pi G (\rho_b + \sigma - \partial_i \Pi_{\perp}^i) + \mathcal{O}(c^{-2}), \quad (10.99)$$

where ρ_b is the Newtonian mass density of baryonic matter. This equation can be written in the alternative form

$$\partial_i (g^i - 4\pi G \Pi_\perp^i) = -4\pi G (\rho_b + \sigma) + \mathcal{O}(c^{-2}). \quad (10.100)$$

To summarize, the equations governing the dynamics of the dipolar dark matter and the gravitational field in the NR limit are: the equation of motion (10.94), the evolution equation (10.95), the continuity equation (10.96) and the Poisson equation (10.100). On the other hand, baryons and photons obey the geodesic equation, which means $dv_b^i/dt = \partial_i U + \mathcal{O}(c^{-2})$ for baryons, and the standard GR formula for light deflection in a potential U for photons, where U is generated by (10.99).

10.7.2 The weak clustering hypothesis

We have shown in section 10.6 that at linear perturbation order, in a cosmological context, the dynamics of dipolar dark matter cannot be distinguished from that of baryonic matter or standard dark matter. We now argue that the motion of dipolar dark matter being non-geodesic, its *non-linear* dynamics should be different. Our main motivation for the argument is the existence of an *exact* solution of the equations governing the dynamics of the dipolar dark matter in the NR limit. Indeed, we show in the appendix that, in the simple case where the baryonic matter is modeled by a spherically symmetric mass distribution, there is a solution to the equations for which the dipole moments are *in equilibrium* ($\xi_\perp = \text{const}$), and *at rest* ($v^i = 0$), with the internal force $\mathcal{F}^i$ exactly balancing the gravitational field g^i . In such a solution, the dipolar medium is uniformly distributed or more generally spherically symmetrically distributed, and the polarization $\Pi_\perp^i$ is aligned with the gravitational field g^i ; the dipolar fluid is thus polarized. Furthermore, we show in this appendix that the latter solution is stable against dynamical perturbations.

From that solution, we expect that the dipolar medium will not cluster much during the cosmological evolution because the internal force may balance part of the local gravitational field generated by an overdensity (see Fig. 10.2 for a pictorial view of the argument). From this we infer that the dark matter density contrast in a typical galaxy at low redshift should be small, at least smaller than in the standard Λ -CDM scenario. Such a galaxy would therefore be essentially baryonic, with a typical mass density of the dipolar dark matter σ rather small compared to the baryonic one, and perhaps around its mean cosmological value $\bar{\sigma}$. Thus, the crucial hypothesis we are making (based on the solution in the appendix) is that

$$\sigma \ll \rho_b, \quad (10.101)$$

or perhaps that σ stays essentially at a value of the order of its mean cosmological value,

$$\sigma \sim \bar{\sigma} \ll \rho_b. \quad (10.102)$$

Note that for standard CDM (or baryonic matter), the density contrast between the value of ρ_{cdm} (or ρ_b) in a galaxy and the mean cosmological one $\bar{\rho}_{\text{cdm}}$ (or $\bar{\rho}_b$) is typically of order 10^5 . This means that even if dipolar dark matter clustered enough so that for instance $\sigma \sim 10^3 \bar{\sigma}$ in a galaxy at low redshift, it would still satisfy the condition (10.101).

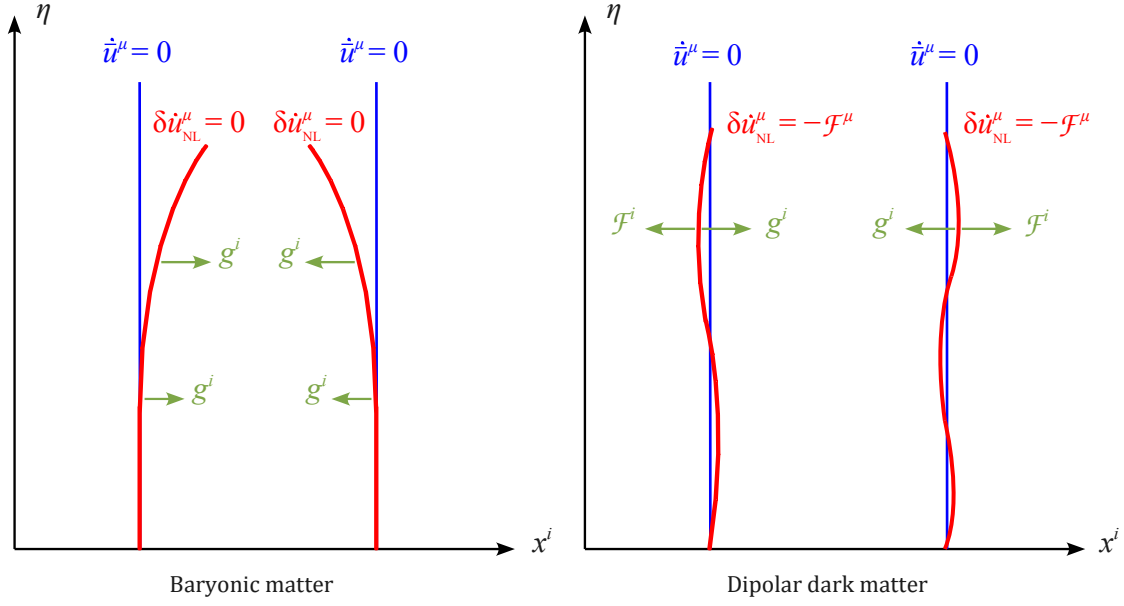


Figure 10.2: Schematic view of two worldlines of baryonic matter and dipolar dark matter. The baryonic matter follows a geodesic motion, $\dot{u}^\mu = 0$, and therefore collapses in the regions of overdensity. Obeying the non-geodesic equation of motion $\dot{u}^\mu = -\mathcal{F}^\mu$, the dipolar dark matter is expected to have a different behavior in the *non-linear* (NL) regime. Namely, the internal force $\mathcal{F}^i$ can balance the gravitational field g^i created by an overdensity, in order to keep the rest mass density of dipolar dark matter close to its mean cosmological value, $\sigma \sim \bar{\sigma}$, or at least far smaller than the baryonic one.

Note also that with this hypothesis, the non-linear growth of structures in our model will not be triggered by the rest mass σ of dipolar dark matter (since it does not cluster much), but by the *internal* energy ρ_{int} of the dipolar medium, which is such that $\rho = \sigma + \rho_{\text{int}}$ and is explicitly given by $\rho_{\text{int}} = -\nabla_\lambda \Pi_\perp^\lambda$ [recall (10.38)]. We have seen that, at first cosmological perturbation order, the density contrast associated with ρ_{int} reduces to $-D^i \lambda_i$, and obeys the standard evolution equation (10.90). We expect that at non-linear order it will take over the dominant role as compared to the rest mass density contrast ε in the formation of structures. On the other hand, in the NR limit ρ_{int} reduces to $-\partial_i \Pi_\perp^i$ [see (10.98)] and, as we shall see in the following section, will be at the origin of the MOND effect.

We shall refer to the condition (10.101) [or even to the stronger condition (10.102)] as the hypothesis of *weak clustering* of the dipolar dark matter fluid. Obviously, the validity of this hypothesis cannot be addressed with the formalism of first-order cosmological perturbations in section 10.6, because it is a consequence of the non-linear cosmological evolution. The hypothesis of weak clustering of dipolar dark matter should be validated through numerical N-body simulations.

Let us thus assume that the dipolar dark matter has not clustered very much, and even that σ might stay more or less at the cosmological mean value $\bar{\sigma}$ (such that $\Omega_{\text{dm}} \simeq 0.23$). Because of its size and typical time-scale of evolution, a galaxy is almost unaffected by the cosmological expansion of the Universe. Therefore, the cosmological mass density $\bar{\sigma}$ of the dipolar dark matter is not only homogeneous, but also almost constant in this galaxy. Thus, the continuity equation

(10.96) reduces to $\partial_i (\bar{\sigma} v^i) \simeq 0$. The most simple solution obviously corresponds to a static fluid verifying

$$v^i \simeq 0. \quad (10.103)$$

It is therefore natural to consider that the dipolar dark matter is almost at rest with respect to some averaged cosmological matter distribution. This is supported by the exact solution found in the appendix, which indicates that the dipolar dark matter in presence of an ordinary mass does indeed behave essentially like a static medium. Because of the internal force, the motion is not geodesic, and the force acts like a “rocket” to compensate the gravitational field and to keep the dipolar particle at rest with respect to ordinary matter (see Fig. 10.2).

10.7.3 Link with the phenomenology of MOND

Let us now show that under the weak clustering hypothesis, the equations (10.94)–(10.96) and (10.100) naturally reproduce the phenomenology of MOND. First of all, if (10.103) holds, equation (10.94) tells that the polarization $\Pi_\perp^i$ should be aligned with the local gravitational field g^i , namely¹²

$$g^i = \hat{\Pi}_\perp^i \mathcal{W}_{\Pi_\perp}. \quad (10.104)$$

This proportionality relation will be the crucial ingredient for recovering MOND.

We must now further specify the “fundamental” potential $\mathcal{W}$ entering the original action (10.17). In section 10.6, we considered the dipolar fluid at early cosmological times, where the polarization field was perturbative. We shall now consider it at late cosmological times (around the value η_0) but still in a regime where the polarization field is weak. This will correspond to the outer zone of a galaxy at low redshift, where the local gravitational field generated by the galaxy is weak. We therefore assume that the potential $\mathcal{W}$ can still be expanded in powers of $\Pi_\perp$ and we keep only a few terms in the expansion. Next, we introduce a fundamental acceleration scale a_0 to be later identified with the MOND constant acceleration whose commonly accepted value is $a_0 \simeq 1.2 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$ [361]. Associated with a_0 we can define a fundamental surface density scale

$$\Sigma \equiv \frac{a_0}{2\pi G}, \quad (10.105)$$

whose numerical value is $\Sigma \simeq 0.3 \text{ kg/m}^2 \simeq 130 \text{ M}_\odot/\text{pc}^2$. The numerical value of Σ is close to the observed upper limit of the surface brightness of spiral galaxies — the so-called Freeman’s law which is seen as an empirical evidence for MOND [361]. We now assert that the expansion of $\mathcal{W}$ when $\Pi_\perp \rightarrow 0$ is physically valid when the condition $\Pi_\perp \ll \Sigma$ is satisfied. As will become obvious, this condition can equivalently be written $g \ll a_0$, where $g = |g^i|$ is the norm of the local gravitational field of the galaxy, and this will correspond to the deep MOND regime (see Fig. 10.3). With respect to the expansion (10.52) already used in cosmology, we shall be able to add an extra term. We now write this expansion, for $\Pi_\perp \ll \Sigma$, as

$$\mathcal{W}(\Pi_\perp) = \mathcal{W}_0 + \frac{1}{2} \mathcal{W}_2 \Pi_\perp^2 + \frac{1}{6} \mathcal{W}_3 \Pi_\perp^3 + \mathcal{O}\left[\left(\frac{\Pi_\perp}{\Sigma}\right)^4\right]. \quad (10.106)$$

¹²From now on, we no longer indicate the neglected remainder terms $\mathcal{O}(c^{-2})$. Furthermore we assume for the discussion that (10.103) is exactly verified, i.e. $v^i = 0$.

The first term $\mathcal{W}_0$ is related to the cosmological constant Λ through (10.97). We now show that the next two coefficients $\mathcal{W}_2$ and $\mathcal{W}_3$ are uniquely determined if we want to recover the phenomenology of MOND. Indeed, by inserting (10.106) into the relation (10.104) we obtain

$$g^i = \Pi_{\perp}^i \left\{ \mathcal{W}_2 + \frac{1}{2} \mathcal{W}_3 \Pi_{\perp} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{\Pi_{\perp}}{\Sigma}\right)^2\right] \right\}, \quad (10.107)$$

which can be inverted to yield the polarization as an expansion in powers of (the norm of) the gravitational field. Anticipating that $\mathcal{W}_2 \Sigma \sim a_0$, this expansion will be valid whenever $g \ll a_0$. We obtain

$$\Pi_{\perp}^i = \frac{g^i}{\mathcal{W}_2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{W}_3}{\mathcal{W}_2^2} g + \mathcal{O}\left[\left(\frac{g}{a_0}\right)^2\right] \right\}. \quad (10.108)$$

Next, following the conventions of [63, 62], we introduce the coefficient of “gravitational susceptibility” χ of the dipolar medium through

$$\Pi_{\perp}^i = -\frac{\chi}{4\pi G} g^i. \quad (10.109)$$

Inserting that definition¹³ into the LHS of the Poisson equation (10.100), we find

$$\partial_i [(1 + \chi) g^i] = -4\pi G (\rho_b + \sigma). \quad (10.110)$$

Finally, invoking our hypothesis of weak clustering (10.101), or (10.102) in the more extreme variant, we can neglect the mass density σ of the dipole moments with respect to the baryonic one, so we obtain the MOND equation which is generated solely by the distribution of baryonic matter as [40]

$$\partial_i (\mu g^i) = -4\pi G \rho_b. \quad (10.111)$$

The MOND function μ is related to the susceptibility coefficient by $\mu = 1 + \chi$ and can actually be interpreted as the “digravitational” coefficient of the dipolar medium [63]. Again, let us stress that in this model we do have some distribution of dark matter σ in an ordinary sense, but we expect its contribution to become negligible in galactic halos at low redshifts (after cosmological evolution), so that the MOND fit of rotation curves of galaxies is unaffected by this “monopolar” dark matter.¹⁴ The MOND effect is due to the dipolar part of the dark matter given by the internal energy $\rho_{\text{int}} = -\partial_i \Pi_{\perp}^i$.

Now, from astronomical observations we know that the gravitational susceptibility χ in the deep MOND regime $g \ll a_0$ should behave like

$$\chi = -1 + \frac{g}{a_0} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{g}{a_0}\right)^2\right]. \quad (10.112)$$

¹³Note that this definition is valid in both MOND and Newtonian regimes whenever the polarization is aligned with the gravitational field.

¹⁴However, at the larger scale of clusters of galaxies the monopolar part of the dipolar medium σ may play a role to explain the missing dark matter in MOND estimates of the dynamical mass [361, 15]. Note that in the present model, the motion of photons, needed to interpret weak-lensing experiments, is given by the standard general relativistic prediction; see (10.93) with potential U solution of the MOND equation (10.111).

The fact that χ should be *negative* was interpreted in the quasi-Newtonian model [63] as an evidence for gravitational polarization — the gravitational analogue of the electric polarization in dielectric media. By inserting (10.112) into (10.109), and comparing with the prediction of our model as given by (10.108), we uniquely fix the unknown coefficients therein as

$$\mathcal{W}_2 = 4\pi G, \quad (10.113a)$$

$$\mathcal{W}_3 = 32\pi^2 \frac{G^2}{a_0}. \quad (10.113b)$$

This, together with $\mathcal{W}_0$ fixed by (10.97), determines the potential function $\mathcal{W}$ up to third order from astronomical observations. As we see, the MOND acceleration a_0 enters at third order in the expansion, and therefore does not show up in the linear cosmological perturbations of section 10.6. At third order, the potential $\mathcal{W}$ deviates from a purely harmonic potential, and a_0 can be seen as a measure of its anharmonicity.

To express $\mathcal{W}$ in the best way, we prefer using the surface density scale $\Sigma = a_0/2\pi G$ rather than the acceleration scale a_0 . To do so, we must introduce a purely numerical dimensionless coefficient α to express the cosmological constant Λ (which is positive and has the dimension of an inverse length squared) in units of a_0^2/c^4 , and we pose

$$\Lambda = 3\alpha^2 \left(\frac{2\pi a_0}{c^2} \right)^2. \quad (10.114)$$

The definition of α is such that $a_\Lambda = \alpha a_0$ represents the natural acceleration scale associated with the cosmological constant, and is already given by (10.10) as $a_\Lambda = \sqrt{\Lambda/3} c^2/2\pi$. Then, the cosmological term (10.97) becomes $\mathcal{W}_0 = 6\pi^3 G \Sigma^2 \alpha^2$, and we obtain

$$\mathcal{W} = 6\pi G \Sigma^2 \left\{ \alpha^2 \pi^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\Pi_\perp}{\Sigma} \right)^2 + \frac{4}{9} \left(\frac{\Pi_\perp}{\Sigma} \right)^3 + \mathcal{O} \left[\left(\frac{\Pi_\perp}{\Sigma} \right)^4 \right] \right\}. \quad (10.115)$$

In the present model there is nothing which can give the relation between Λ and a_0 , hence α is not determined. However, if the dipolar fluid action (10.17) is intended to describe at some macroscopic level a more fundamental theory (presumably a QFT), we expect that the potential $\mathcal{W}$ should depend only on certain more or less fundamental constants, and some dimensionless variables built from “fundamental fields”. Introducing the dimensionless quantity $x \equiv \Pi_\perp/\Sigma$, we can rewrite (10.115) as $\mathcal{W} = 6\pi G \Sigma^2 w(x)$, where

$$w(x) = \alpha^2 \pi^2 + \frac{1}{3} x^2 + \frac{4}{9} x^3 + \mathcal{O}(x^4) \quad (10.116)$$

represents some “universal” function coming from some fundamental albeit unknown physics. Therefore, we expect that the numerical coefficients in the expansion of $w(x)$ should be of the order of one or, say, 10. In particular, it is natural to expect that α should be of the order of one (to within a factor 10 say), and we deduce from (10.114) that the magnitude of Λ should scale approximately with the square of the MOND acceleration, namely $\Lambda \sim a_0^2/c^4$.

The numerical coincidence between the measured values of Λ and a_0 is well-known [290]. The observed value of the cosmological constant is around $\Lambda \simeq 0.12 \text{ Gpc}^{-2}$ [327] which, together with $a_0 \simeq 1.2 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$, corresponds to a value for α which is very close to one:

$\alpha \simeq 0.8$. Thus a_0 is very close to the scale a_Λ associated with the cosmological constant, which is related to the Gibbons-Hawking temperature $T_{\text{GH}} = \hbar a_\Lambda / kc$ derived from semi-classical theory on de Sitter space-time [193]. From the previous discussion, we see that the “cosmic” coincidence between Λ and a_0 has a natural explanation if dark matter is made of a medium of dipole moments.

10.7.4 The Newtonian regime

For the moment, we looked at the explicit expression of the potential function $\mathcal{W}$ in the MOND regime $g \ll a_0$. We would also like to get some information about this function in the Newtonian regime $g \gg a_0$. To do so, we first derive the general expression of the gravitational susceptibility coefficient χ . Here we assume that the MOND function $\mu = 1 + \chi$ is always less than 1. This implies $\chi < 0$ and thus using (10.104) and (10.109) we must have $\mathcal{W}_{\Pi_\perp} > 0$ (where we recall that $\mathcal{W}_{\Pi_\perp} \equiv d\mathcal{W}/d\Pi_\perp$). Taking the norm of (10.104) we get $g = \mathcal{W}_{\Pi_\perp}(\Pi_\perp)$. Next, we introduce the function $\Theta(g)$ which is the inverse of $\mathcal{W}_{\Pi_\perp}(\Pi_\perp)$, i.e. satisfies

$$g = \mathcal{W}_{\Pi_\perp}(\Pi_\perp) \iff \Pi_\perp = \Theta(g). \quad (10.117)$$

According to (10.109), the susceptibility χ is then given as the following function of the gravitational field g ,

$$\chi(g) = -4\pi G \frac{\Theta(g)}{g}. \quad (10.118)$$

This is the general relation linking χ (or equivalently the MOND function $\mu = 1 + \chi$) to the potential function $\mathcal{W}$ in the dipolar action (10.17). Of course, in the present model $\mathcal{W}$ is to be considered as more fundamental than χ which is a derived quantity.

In the Newtonian regime $g \gg a_0$, the MOND function μ should tend to one, so that χ vanishes in this regime. To discuss more concretely this condition, we assume that in the formal limit $g \rightarrow +\infty$, the gravitational susceptibility behaves as $\chi \sim g^{-\gamma}$, with γ a strictly positive real number. More precisely, it should behave like $\chi \sim -\epsilon (g/a_0)^{-\gamma}$, where ϵ is a strictly positive real number. Beware that even if this power-law behavior is a simple assumption, nothing guarantees that it is verified. Then, when $g \rightarrow +\infty$, we get from (10.117) and (10.118) that

$$\Pi_\perp \sim A g^{1-\gamma}, \quad (10.119a)$$

$$\mathcal{W} \sim \frac{1-\gamma}{2-\gamma} A g^{2-\gamma} + \kappa, \quad (10.119b)$$

where $A = \epsilon a_0^\gamma / 4\pi G > 0$ and κ is an integration constant. We have to distinguish several cases, depending on the value of the exponent γ :

- (i) If $0 < \gamma < 1$, then both the polarization $\Pi_\perp$ and the potential $\mathcal{W}$ diverge. This would corresponds to the curve (a) of Fig. 10.4.
- (ii) If $\gamma = 1$, the polarization $\Pi_\perp$ tends to a maximum “saturation” value $\Pi_{\text{max}} = A$, and the potential $\mathcal{W}$ equals the constant κ . See curve (b) in Fig. 10.4.

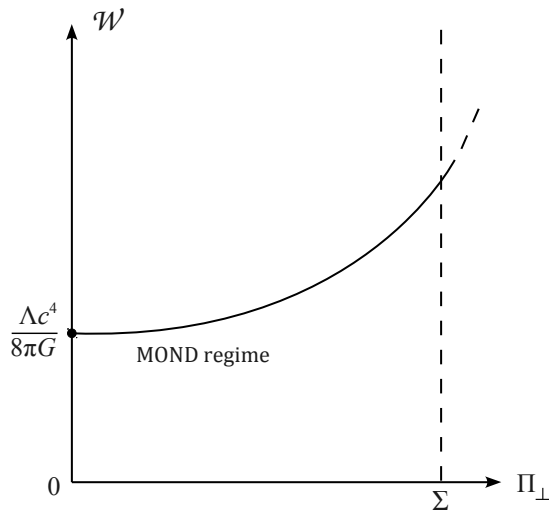


Figure 10.3: The minimum of the potential function $\mathcal{W}(\Pi_{\perp})$, reached when $\Pi_{\perp} = 0$, is a cosmological constant Λ . Small deviations around the minimum, corresponding to $\Pi_{\perp} \ll \Sigma = a_0/2\pi G$, describe the MOND regime $g \ll a_0$.

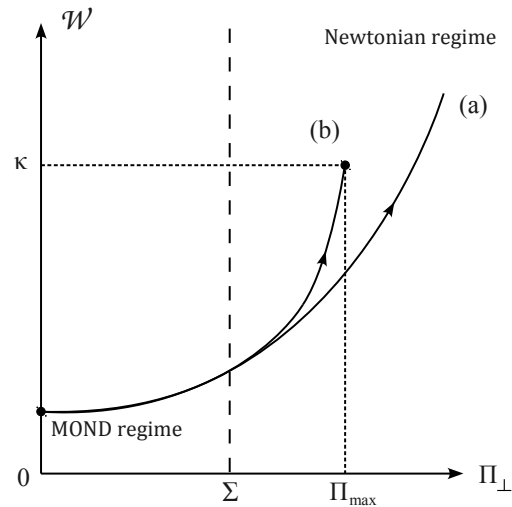


Figure 10.4: The potential $\mathcal{W}$ as a function of the polarization $\Pi_{\perp}$ for different asymptotic behaviors of the gravitational susceptibility χ in the Newtonian regime $g \gg a_0$. The arrows indicate the direction of increasing gravitational field g .

- (iii) If $1 < \gamma < 2$, the polarization goes to zero while the potential diverges to $-\infty$ like a power law. This implies that $\mathcal{W}$ cannot be a univalued function of $\Pi_{\perp}$. Therefore, there must exist two branches corresponding to the Newtonian and MOND regimes.
- (iv) If $\gamma = 2$, according to (10.119b) the potential diverges to $-\infty$ logarithmically, i.e. $\mathcal{W} \sim -A \ln g$, while the polarization still vanishes. Same conclusions as in case (iii) apply.
- (v) Finally, if $\gamma > 2$, the polarization goes to zero while the potential tends to κ . Same conclusions as in (iii) apply.

If we believe that the potential $\mathcal{W}$ represents a fundamental function in the action, and that our model should strictly speaking be valid in a Newtonian regime (and not being merely valid in the MOND regime), we should *a priori* expect that $\mathcal{W}$ is a univalued function of $\Pi_{\perp}$. Then, the susceptibility coefficient should be like $\chi \sim g^{-\gamma}$ with $0 < \gamma \leq 1$ in the Newtonian regime. This would mean that the MOND function μ behaves like

$$\mu \sim 1 - \epsilon \left(\frac{a_0}{g} \right)^{\gamma}, \quad (10.120)$$

with $0 < \gamma \leq 1$. Such rather slow transition of μ toward the Newtonian regime is consistent with the recent results of [168] who fitted the rotation curves of the Milky Way and galaxy NGC 3198, and of [362] who fitted 17 early-type disc galaxies, and concluded that the Newtonian regime is rather slowly reached. For instance, the authors of [168, 362, 424] agreed that $\gamma = 1$ yields a better fit to the data than $\gamma = 2$.

The case $\gamma = 1$ (curve (b) in Fig. 10.4) corresponds to an interesting physical situation in which the dipolar medium *saturates* when $g \rightarrow +\infty$, at the maximum value $\Pi_{\max} = A$, or

$$\Pi_{\max} = \frac{\epsilon}{2} \Sigma, \quad (10.121)$$

where Σ is the surface density scale (10.105). In this saturation case, the gravitational susceptibility coefficient behaves as

$$\chi \sim -\epsilon \frac{a_0}{g}. \quad (10.122)$$

However, let us remind that such a slow transition from MOND toward the Newtonian regime is *a priori* ruled out by Solar System observations. Indeed, according to the MOND equation, a planet orbiting the Sun feels a gravitational field g obeying $(1 + \chi)g = g_N$, where g_N is the Newtonian gravitational field. Hence, if χ scales like g^{-1} when $g \gg a_0$ like in (10.122), the gravitational field experienced by planets will involve a constant supplementary acceleration directed toward the Sun (i.e. a ‘‘Pioneer-type’’ anomaly) given by

$$g \sim g_N + \epsilon a_0. \quad (10.123)$$

Of course it is striking that the order of magnitude of the Pioneer anomaly is the same as the MOND acceleration a_0 . Unfortunately, the presence of a constant acceleration such as in (10.123) should be detected in the motion of planets, and this is incompatible with current measurements (see e.g. [228, 227] for a discussion).

Despite the fact that a slow transition to the Newtonian regime (like for example the case $\gamma = 1$) seems to be favored by observations at the galactic scale [168, 424, 362], it does not seem to be viable when extrapolated up to the scale of the Solar System. In our model, we found that such a behavior is the result of our belief that the ‘‘fundamental’’ function $\mathcal{W}$ be univalued. In this respect, the validity of the model should be limited to large scales, from the galactic scale up to cosmological scales, i.e. in a regime of weak gravity. At smaller scales the description in terms of a single univalued function $\mathcal{W}$ should break down. But our model being an effective one, or even a phenomenological one, the question of whether the potential $\mathcal{W}$ is univalued or not remains an open issue.

10.8 Summary and conclusion

In this paper, we proposed a model of dark matter and dark energy based on the concept of gravitational polarization of a medium of dipole moments. The dynamics of the dipolar fluid is governed by the Lagrangian (10.17) in standard general relativity, and constitutes a generalization of the previous model [62]. Namely, this Lagrangian involves a potential function $\mathcal{W}$, describing at some effective level a non-gravitational internal force influencing the dynamics of the dipolar fluid, and which depends on the polarization field or density of dipole moments $\Pi_{\perp} = \sigma \xi_{\perp}$ instead of merely the dipole moment itself $\xi_{\perp}$ in the model [62]. This new form of the potential permits recovering in a most elegant way the phenomenology of MOND in a typical galaxy at low redshift. In addition, we show that the model naturally contains a cosmological constant Λ .

We proved in section 10.6 that within the framework of the theory of first-order cosmological perturbations, the dipolar fluid behaves exactly as standard dark energy (i.e. a cosmological

constant) plus standard dark matter (i.e. a pressureless perfect fluid). Thus, our model is consistent with the cosmological observations at large scales. In particular, it leads to the same predictions as the standard Λ -CDM model for the CMB fluctuations. However, at second order in the cosmological perturbations, we expect that the dipolar dark matter should differ from a perfect fluid because of the influence of the internal force resulting in a non-geodesic motion. The model could thus be checked by working out the second-order cosmological perturbations and comparing with CMB fluctuations (notably the effects linked with the non-gaussianity).

The dynamics of the dipolar dark matter being different from that of standard dark matter (at the level of non-linear perturbations), we expect the “monopolar” part of the dipolar dark matter not to cluster much during the cosmological evolution. We call this expectation the hypothesis of “weak clustering”. It is supported by an exact solution worked out in the appendix for the dynamics of dipolar dark matter in the non-relativistic limit and in spherical symmetry. In this solution, the internal force balances the local gravitational field produced by a spherical mass, so that the dark matter remains at rest with respect to the central mass. The weak clustering hypothesis should be checked *via* N-body numerical simulations. Under that hypothesis, we show that the Poisson equation for the gravitational field generated by the baryonic and dipolar dark matter reduces to the MOND equation in the regime of weak gravitational fields $g \ll a_0$. Our model of dipolar dark matter therefore naturally explains all the successes of the MOND phenomenology.

To achieve this result (in section 10.7) we have to adjust the fundamental potential $\mathcal{W}$ in the action. We find that it should be given by an anharmonic potential, the minimum of which, reached when $\Pi_\perp = 0$, being directly related to the cosmological constant Λ . It is tempting to interpret Λ as a “vacuum polarization” of some hypothetical quantum field, when the “classical” part of the polarization $\Pi_\perp \rightarrow 0$. The expansion around that minimum is fine-tuned in order to recover MOND. In particular, we show that the MOND acceleration a_0 parametrizes the coefficient of the third-order deviation of $\mathcal{W}$ from the minimum. Although fine-tuned to fit with observations, this potential function $\mathcal{W}$ offers a nice unification between the dark energy in the form of Λ and the dark matter in the form of MOND (see Fig. 10.3). A consequence of such unification is that the cosmological constant should scale with the MOND acceleration according to $\Lambda \sim a_0^2/c^4$. This scaling relation is in good agreement with observations and has a very natural explanation in our model.

To conclude, we proposed to modify the matter sector rather than the gravity sector as in modified gravity theories [42, 360, 423, 206]. Namely, we investigated a model of dark matter, but of such an exotic form that it naturally explains the phenomenology of MOND at galactic scales. Furthermore, that form of dark matter has a simple physical interpretation in terms of the well-known mechanism of polarization by an exterior field. More work is necessary to test the model, either by studying second-order perturbations in cosmology, or by computing numerically the non-linear growth of perturbations and comparing with large-scale structures.

Acknowledgments It is a pleasure to thank Alain Riazuelo and Jean-Philippe Uzan for interesting discussions at an early stage of this work.

Appendix: Dark matter in a central gravitational field

We investigate the dynamics of the dipolar dark matter fluid in presence of a spherically symmetric mass distribution of ordinary baryonic matter in the NR limit $c \rightarrow +\infty$. The equations to solve are the equation of motion (10.94), the equation of evolution (10.95), the continuity equation (10.96) and the Poisson equation for the gravitational field (10.100). Let us rewrite those equations here for convenience:¹⁵

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} - \mathcal{F}, \quad (10.124a)$$

$$\partial_t \sigma = -\nabla \cdot (\sigma \mathbf{v}), \quad (10.124b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G (\sigma + \rho_b - \nabla \cdot \mathbf{\Pi}), \quad (10.124c)$$

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\xi}}{dt^2} = \mathcal{F} + \frac{1}{\sigma} \nabla (\mathcal{W} - \mathbf{\Pi} \mathcal{W}') + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{g}, \quad (10.124d)$$

where the internal force reads $\mathcal{F} = \hat{\mathbf{\Pi}} \mathcal{W}'$, with $\hat{\mathbf{\Pi}} \equiv \mathbf{\Pi} / \Pi$.

Our aim is to solve the equations (10.124) in the special case where the baryonic matter is modeled by a time-independent spherically symmetric distribution of mass $\rho_b(r)$, say with compact support. Let us show that there is a simple solution to such a set of equations, in the case where

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}, \quad (10.125a)$$

$$\sigma_0 = \sigma_0(r), \quad (10.125b)$$

which corresponds to a static fluid whose mass distribution is time-independent and spherically symmetric. We denote such particular solution with a lower index 0. From (10.125) we observe that the continuity equation (10.124b) is immediately satisfied. In such a solution, according to (10.124a) the internal force balances exactly the gravitational field, i.e. $\mathcal{F}_0 = \mathbf{g}_0$ (this is somewhat similar to the case of a non-rotating star in hydrostatic equilibrium, where the pressure gradient plays the role of the internal force). We deduce that the polarization field $\mathbf{\Pi}_0 = \sigma_0 \boldsymbol{\xi}_0$ is aligned with the gravitational field $\mathbf{g}_0$. Hence, from equation (10.124c) both $\mathbf{\Pi}_0$ and $\mathbf{g}_0$ are radial. We shall pose $\mathbf{g}_0 = -g_0(r, t) \mathbf{e}_r$ and $\mathbf{\Pi}_0 = -\Pi_0(r, t) \mathbf{e}_r$, where in our notation $g_0 > 0$ and $\Pi_0 > 0$.

Furthermore, let us show that in addition the polarization field is practically in “equilibrium”, i.e. Π_0 is independent on time t , and so is g_0 . We replace $\mathbf{g}_0$ by the explicit expression of the internal force $\mathcal{F}_0 = \hat{\mathbf{\Pi}}_0 \mathcal{W}'_0$ into the evolution equation (10.124d), use (10.125a) and get

$$\partial_t^2 \mathbf{\Pi}_0 - \sigma_0 \mathcal{W}'_0 \hat{\mathbf{\Pi}}_0 = \nabla (\mathcal{W}_0 - \Pi_0 \mathcal{W}'_0) + (\mathbf{\Pi}_0 \cdot \nabla) (\hat{\mathbf{\Pi}}_0 \mathcal{W}'_0). \quad (10.126)$$

Here $\hat{\mathbf{\Pi}}_0 = \mathbf{\Pi}_0 / \Pi_0 = -\mathbf{e}_r$, and we introduced the shorthand notation $\mathcal{W}'_0 \equiv \mathcal{W}'(\Pi_0)$. Now, it turns out that the RHS of this equation vanishes in the special case where the polarization field is radial, hence we get

$$\partial_t^2 \Pi_0 = \sigma_0 \mathcal{W}'_0. \quad (10.127)$$

¹⁵In this appendix, we adopt 3-dimensional notations with boldface vectors, e.g. $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^i)$. We also remove the subscript $\perp$ from the variables $\boldsymbol{\xi}_\perp$ and $\mathbf{\Pi}_\perp$ for notational simplicity. The derivatives of the potential $\mathcal{W}$ with respect to its argument Π will be denoted with a prime, e.g. $\mathcal{W}' \equiv \mathcal{W}'_\Pi \equiv d\mathcal{W}/d\Pi$.

In order to determine the time evolution of Π_0 , an explicit expression for the potential $\mathcal{W}$ is in principle required. However, we saw in section 10.7.3 that the potential $\mathcal{W}$ only depends on the polarization Π and the constants a_0 and G . The only time-scale one can build with a_0 , G and σ_0 is the dipolar dark matter self-gravitating time-scale $\tau_g = (\pi/G\sigma_0)^{1/2}$, or equivalently, in terms of frequency, $\omega_g^2 = 4\pi G\sigma_0$. Therefore, the polarization Π_0 can only evolve on this time-scale. For instance, in the MOND regime $g \ll a_0$, we have at leading order $\mathcal{W}'_0 = 4\pi G \Pi_0$, hence (10.127) reduces to

$$\partial_t^2 \Pi_0 = \omega_g^2 \Pi_0. \quad (10.128)$$

The most general solution of this equation is a linear combinaison of hyperbolic cosh $\omega_g t$ and sinh $\omega_g t$. For a “monopolar” dark matter mass density σ_0 of, say, the mean cosmological value $\bar{\sigma} \simeq 10^{-26} \text{ kg/m}^3$ [in agreement with our weak clustering hypothesis (10.102)], the typical time-scale of evolution of Π_0 will be larger than 6×10^{10} years. This is large enough to neglect any time variation of Π_0 with respect to a typical orbital time-scale in a galaxy. Our solution is therefore given by

$$\mathbf{\Pi}_0 = -\Pi_0(r) \mathbf{e}_r, \quad (10.129)$$

together with (10.125). The dipole moments are at rest and in equilibrium. The explicit function $\Pi_0(r)$ is determined from the radial gravitational field $g_0(r)$ as¹⁶

$$\Pi_0(r) = \Theta(g_0(r)), \quad (10.130)$$

where $\Theta(g_0)$ denotes the inverse inverse function of $\mathcal{W}'(\Pi_0)$ following the notation (10.117). The gravitational field $g_0(r)$ is determined by the Poisson equation (10.124c) as

$$g_0 - 4\pi G \Pi_0 = \frac{GM_0(r)}{r^2}, \quad (10.131)$$

where $M_0(r) = 4\pi \int_0^r ds s^2 [\rho_b(s) + \sigma_0(s)]$ is the mass enclosed within radius r .

The existence of this physically simple solution represents a notable progress compared to the more complicated solution found in the previous model [62] (see section IV there). Such a solution is quite interesting for the present model because it indicates that during the cosmological evolution (at non-linear perturbation order) the dipolar dark matter may not cluster very much toward regions of overdensity. Most of the effect will be in the dipole moment vectors which acquire a spatial distribution. This is our motivation for the “weak clustering” assumption (10.101)–(10.102) stating that $\sigma \ll \rho_b$, which was used in section 10.7.3 to obtain MOND. In the present case, neglecting σ_0 with respect to ρ_b in the RHS of (10.131), we recover the usual MOND equation generated by the baryonic density only. This being said, such an appealing solution may be physically irrelevant if the spherically symmetric configuration appears to be unstable with respect to linear perturbations. This motivates the following study of the stability of the previous solution.

¹⁶Note that if in this solution the polarization field $\Pi_0(r) = \sigma_0(r)\xi_0(r)$ is determined, the density $\sigma_0(r)$ and dipole moment $\xi_0(r)$ are not specified separately. For instance, the density could be at the uniform cosmological value $\bar{\sigma}$ so that $\xi_0(r) = \Pi_0(r)/\bar{\sigma}$. This degeneracy of $\sigma_0(r)$ is an artifact of our assumptions of spherical symmetry and staticity.

Consider a general perturbation of the background solution, namely

$$\sigma = \sigma_0 + \delta\sigma, \quad (10.132a)$$

$$\mathbf{v} = \delta\mathbf{v}, \quad (10.132b)$$

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}_0 + \delta\mathbf{\Pi}. \quad (10.132c)$$

We have also $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \delta\mathbf{g}$ and $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \delta\mathcal{F}$, where the expression of the perturbed force in terms of the perturbed polarization explicitly reads

$$\delta\mathcal{F} = \mathcal{W}_0'' (\hat{\mathbf{\Pi}}_0 \cdot \delta\mathbf{\Pi}) \hat{\mathbf{\Pi}}_0 + \mathcal{W}_0' \left[\frac{\delta\mathbf{\Pi}}{\Pi_0} - \left(\hat{\mathbf{\Pi}}_0 \cdot \frac{\delta\mathbf{\Pi}}{\Pi_0} \right) \hat{\mathbf{\Pi}}_0 \right]. \quad (10.133)$$

Assuming a Fourier decomposition for any perturbative quantity δX , we write for a given mode of frequency ω and wave number $\mathbf{k}$,

$$\delta X(\mathbf{x}, t) = \delta X(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}. \quad (10.134)$$

We want to find the relation between $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_r$ and ω , the so-called dispersion relation, which contains all the physical information about the behavior of the generic perturbation (10.134). Introducing this *ansatz* into (10.124), and simplifying the resulting equations by making use of the background solution, we find

$$\delta\mathbf{v} = \frac{i}{\omega} (\delta\mathbf{g} - \delta\mathcal{F}), \quad (10.135a)$$

$$\delta\sigma = \frac{1}{\omega} (\sigma_0 \mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v} - i \delta\mathbf{v} \cdot \nabla \sigma_0), \quad (10.135b)$$

$$\delta\mathbf{g} = 4\pi G \frac{i\mathbf{k}}{k^2} (\delta\sigma - i \mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{\Pi}). \quad (10.135c)$$

These algebraic expressions can be combined to express $\delta\sigma$, $\delta\mathbf{g}$ and $\delta\mathbf{v}$ in terms of $\delta\mathbf{\Pi}$ only. After some algebra, we get from the evolution equation (10.124d) a relation expressing the perturbed polarization field $\delta\mathbf{\Pi} = \sigma_0 \delta\boldsymbol{\xi} + \delta\sigma \boldsymbol{\xi}_0$ as

$$\begin{aligned} \omega^2 \delta\mathbf{\Pi} = & \omega^2 \frac{\delta\sigma}{\sigma_0} \mathbf{\Pi}_0 + \frac{i\omega}{\sigma_0} (\delta\mathbf{v} \cdot \nabla \sigma_0) \mathbf{\Pi}_0 - i\omega (\delta\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{\Pi}_0 + (\hat{\mathbf{\Pi}}_0 \cdot \delta\mathbf{\Pi}) \nabla (\Pi_0 \mathcal{W}_0'') \\ & + \Pi_0 \mathcal{W}_0'' (\hat{\mathbf{\Pi}}_0 \cdot \delta\mathbf{\Pi}) i\mathbf{k} - (i\mathbf{k} \cdot \mathbf{\Pi}_0) \delta\mathbf{g} - (\delta\mathbf{\Pi} \cdot \nabla) \mathbf{g}_0 - \sigma_0 \delta\mathcal{F}. \end{aligned} \quad (10.136)$$

When replacing $\delta\sigma$, $\delta\mathbf{g}$, $\delta\mathbf{v}$ and $\delta\mathcal{F}$ into (10.136) we obtain a master equation for the perturbed polarization $\delta\mathbf{\Pi}$ which is quite complicated. Given the complexity of the problem, we restrict our analysis to the simplest modes in a spherically symmetric background, namely those propagating radially. We shall thus write $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_r$, and study successively the transverse and longitudinal perturbations.

Firstly, let us consider a transverse perturbation $\delta\mathbf{\Pi}$, i.e. one which satisfies $\delta\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{e}_r = 0$. Projecting the master equation (10.136) in the direction of $\delta\mathbf{\Pi}$, we get that

$$\left[\omega^2 + \mathcal{W}_0' \left(\frac{1}{\xi_0} - \frac{2}{r} \right) \right] \delta\mathbf{\Pi} = 0, \quad (10.137)$$

which simply states that no transverse perturbations propagating radially are allowed, i.e. $\delta \Pi = 0$. Consider now the case of a longitudinal perturbation $\delta \Pi = -\delta \Pi(r, t) \mathbf{e}_r$, where $\delta \Pi$ can be positive or negative (with our convention the norm of Π reads $\Pi = \Pi_0 + \delta \Pi$), and represents the arbitrary amplitude of the applied linear perturbation. After some lengthy calculations, we get the dispersion relation

$$k = i \frac{\partial_r \sigma_0}{\sigma_0} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_g^2} \left[1 + \frac{(4\pi G - \mathcal{W}_0'') \partial_r \Pi_0}{\omega^2 + \sigma_0 \mathcal{W}_0'' + \Pi_0 \partial_r \mathcal{W}_0''} \right] \right)^{-1}. \quad (10.138)$$

Notice first that, as the wave number k is purely imaginary, such a perturbation cannot propagate. Secondly, the stability of the background solution with respect to this perturbation is related to the sign of k/i , so an explicit expression for the potential $\mathcal{W}$ is required to conclude. Such an expression is available in the MOND regime $g_0 \ll a_0$ using the expansion (10.115). Assuming the MOND equation with a (baryonic) point mass M for simplicity, i.e. equation (10.131) with $\rho_b = M \delta(\mathbf{x})$ and negligible σ_0 , we find that the dispersion relation can be recast at the leading order in the form

$$k = i \frac{\partial_r \sigma_0}{\sigma_0} \frac{\omega_g^2 (\omega^2 + \omega_g^2 - 2\omega_K^2)}{\omega^4 + 2\omega_g^2 \omega^2 + \omega_g^2 (\omega_g^2 - 2\omega_K^2)}, \quad (10.139)$$

where $\omega_K^2 = GM/r^3$ denotes the Keplerian frequency. We now turn to the analysis of the two factors in (10.139), namely the ω -dependent and σ_0 -dependent ones.

At a given distance r from the center of the galaxy, the ω -dependent factor becomes very large in the vicinity of the resonant frequency

$$\omega_R^2 = \omega_g (\sqrt{2} \omega_K - \omega_g). \quad (10.140)$$

But we are restricting our attention to perturbations in the MOND regime where $g_0 \ll a_0$, which means at distances r from the galactic center that are far larger than the MOND radius $r_M \equiv \sqrt{GM/a_0}$, or equivalently at Keplerian frequencies $\omega_K \ll \omega_M$ with $\omega_M^2 = GM/r_M^3$. For a typical galaxy of mass $M \sim 10^{11} M_\odot$, and a “monopolar” dark matter mass density around the mean cosmological value, i.e. $\sigma_0 \sim \bar{\sigma} \simeq 10^{-26} \text{ kg/m}^3$, we find by reporting the constraint $\omega_K \ll \omega_M$ into (10.140) the upper-bound $\omega_R^2 \ll \sqrt{2} \omega_g \omega_M$, which gives numerically $\omega_R \ll 10^{-17} \text{ s}^{-1}$. Because perturbations with a typical time scale $2\pi/\omega \gg 2 \times 10^{10}$ years are out of the present scope, the ω -dependent part of (10.139) reduces to a numerically small factor.

Finally, we consider the σ_0 -dependent part of (10.139). Consistent with the “weak clustering hypothesis” (10.101)–(10.102), we are expecting the background density profile σ_0 to be almost homogeneous. Thus, the factor $\partial_r \sigma_0 / \sigma_0$ will be of the order of the inverse of the characteristic length scale L of variation of σ_0 assumed to be far larger than the typical size ℓ of the galaxy, which implies $|\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}| \lesssim \ell/L \simeq 0$ in (10.134). A longitudinal perturbation would therefore keep oscillating at the frequency ω without propagating, and we conclude that it would be stable.

Dipolar Dark Matter and Dark Energy

Luc Blanchet and Alexandre Le Tiec

GReCO Institut d'Astrophysique de Paris — UMR 7095 du CNRS,
Université Pierre & Marie Curie, 98^{bis} boulevard Arago, 75014 Paris, France

Abstract

In previous work [L. Blanchet and A. Le Tiec, Phys. Rev. D **78**, 024031 (2008)], a model of dark matter and dark energy based on the concept of gravitational polarization was investigated. This model was shown to recover the concordance cosmological scenario (Λ -CDM) at cosmological scales, and the phenomenology of the modified Newtonian dynamics (MOND) at galactic scales. In this article we prove that the model can be formulated with a simple and physically meaningful matter action in general relativity. We also provide alternative derivations of the main results of the model, and some details on the variation of the action.

10.9 Introduction and motivation

The concordance cosmological model Λ -CDM brilliantly accounts for the precise measurements of the anisotropies in the cosmic microwave background (CMB) [215], for the formation and growth of large scale structure as seen in deep redshift [88] and weak lensing [39] surveys, and for the fainting of the light curves of very distant supernovae [349, 326]. The paramount conclusion is that the total mass-energy content of the Universe is made by $\Omega_b \simeq 4\%$ of ordinary (essentially baryonic) matter, $\Omega_{dm} \simeq 23\%$ of cold dark matter (CDM), and $\Omega_{de} \simeq 73\%$ of dark energy which could be in the form of a cosmological constant Λ . However, no experimental claim of direct discovery of a CDM particle has been confirmed, and the attempts at interpreting Λ in terms of fundamental quantum mechanics have failed.

With the advent of high precision cosmic N -body simulations (see [54] for a review), the cosmological model has been extrapolated to the smaller scale of galactic systems, and suggests the existence of a specific CDM density profile around galaxies [308]. However, the simulated CDM halos face severe challenges when compared to observations. Most problematic is the generic formation of cusps of dark matter in the central regions of galaxies, while the rotation curves seem to favor a constant density profile in the core [357, 190]. We mention also the prediction of numerous but unseen satellites of large galaxies [301, 251], and the recent evidence [94] that tidal dwarf galaxies are dominated by dark matter — a fact which is at odds with the CDM tenets [188]. Furthermore, the most important challenge is that the CDM scenario falls short in explaining in a natural way Milgrom’s law [285, 286, 287], namely that the need for dark matter arises only in regions where the typical acceleration of ordinary matter (or, equivalently, the typical value of the gravitational field) is below some universal constant acceleration scale $a_0 \simeq 1.2 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$. This law manifests itself particularly in the flat rotation curves of spiral galaxies, and in the baryonic Tully-Fisher relation. No convincing mechanism for incorporating an acceleration scale such as a_0 in the N -body simulated CDM halos has been found. Although it is possible that some of these problems will be solved within the CDM approach [388, 383], it is very important to consider alternative solutions.

The most successful alternative approach to the problem of dark matter in galactic halos is MOND — Milgrom’s modified Newtonian dynamics [285, 286, 287], which insists that there is no dark matter and we instead witness a violation of the Newtonian law of gravity. In MOND the true gravitational field $\mathbf{g}$ experienced by ordinary matter (stars and gas) differs from the Newtonian one, and obeys the modified Poisson equation [40]

$$\nabla \cdot (\mu \mathbf{g}) = -4\pi \rho_b. \quad (10.141)$$

We use bold-face notation to represent ordinary three-dimensional vectors and pose $G = 1$. Here ρ_b is the density of baryonic matter, and μ is the MOND function which depends on the norm $g = |\mathbf{g}|$ of the gravitational field. In the regime of weak gravitational fields, $g \ll a_0$, we have $\mu(g) = g/a_0 + \mathcal{O}(g^2)$, while $\mu(g) \rightarrow 1$ when $g \gg a_0$, so as to recover the usual Poisson equation. Various forms of the interpolating function μ have been proposed to fit observations in the best way [168, 362].

The ability of the formula (10.141) to reproduce a wide variety of phenomena associated with dark matter halos is tremendous (see e.g. [361, 404]). However, because (10.141) is non-relativistic, it does not allow one to answer questions related to cosmology. In particular, it is a

great challenge to find a theory reproducing both MOND at galactic scales and Λ -CDM at cosmological scales. A number of relativistic field theories have been proposed, recovering (10.141) in the non-relativistic limit, and sharing with MOND the idea that dark matter is an apparent reflection of a fundamental modification of gravity. The prime example of such *modified gravity* theories is the tensor-vector-scalar theory (TeVeS) of Bekenstein and Sanders [358, 42, 360]. Interesting connections between TeVeS and the class of Einstein-æther theories [226] have been found [425, 377, 124]. Modified gravity theories are rather complicated extensions of general relativity (GR), and are for the moment not connected to fundamental physics. Moreover, they do not account for all the mass discrepancy at the intermediate scale of galaxy clusters [14]. To resolve this difficulty a component of hot dark matter (HDM) in the form of massive neutrinos has been invoked [16, 13]. At cosmological scales the modified gravity theories also have some problems at reproducing the observed CMB spectrum [378], even when using a component of HDM.

The approach we propose below is able to successfully address both cosmological and galactic scales. We advocate that a non-standard form of dark matter may exist, while keeping the standard law of gravity (GR) unchanged. The physical belief of this alternative approach is the striking analogy between MOND and the electrostatics of (non-linear isotropic) dielectric media [63]. Indeed, the MOND equation (10.141) can be interpreted as the standard Poisson equation if the gravitational field is sourced by baryonic matter *and* by a “digravitational” medium playing the role of dark matter. The density of “polarization masses” in this medium is then $\rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_{\perp}$ (anticipating the notation adopted below), where $\mathbf{\Pi}_{\perp}$ denotes the polarization field, which must be aligned with the local gravitational field,

$$\mathbf{\Pi}_{\perp} = -\frac{\chi(g)}{4\pi} \mathbf{g}. \quad (10.142)$$

Here $\chi \equiv \mu - 1$ denotes the “gravitational susceptibility” coefficient of the medium, while μ can be viewed as a “digravitational” constant. It was argued [63] that in the gravitational case the sign of χ should be negative, in agreement with what MOND predicts; indeed, we have $\mu < 1$ in a straightforward interpolation between the MOND and Newtonian regimes, hence $\chi < 0$. Furthermore, arguments were given showing that the stability of the dipolar medium requires the existence of some environment-dependent internal non-gravitational force. More precisely, the force has to depend on the polarization field, i.e. the density of dipole moments.

Motivated by the previous interpretation of MOND we present in Section 10.10 an action principle for dark matter viewed as the gravitational analogue of a polarizable dielectric medium. In Section 10.11 we show that this model is currently viable since it is in agreement with the standard cosmological scenario at large scales and recovers MOND at galactic scales. Some details regarding the variation of the action are relegated to the Appendix.

10.10 Model of dipolar dark matter and dark energy

In previous work [84] (hereafter paper I; see also [62] for an earlier attempt) we proposed a relativistic model of dark matter and dark energy based on a particular concept of gravitational polarization. In contrast to modified gravity theories, the model should be viewed as a *modified matter* theory. The idea that the phenomenology of MOND could arise from the CDM

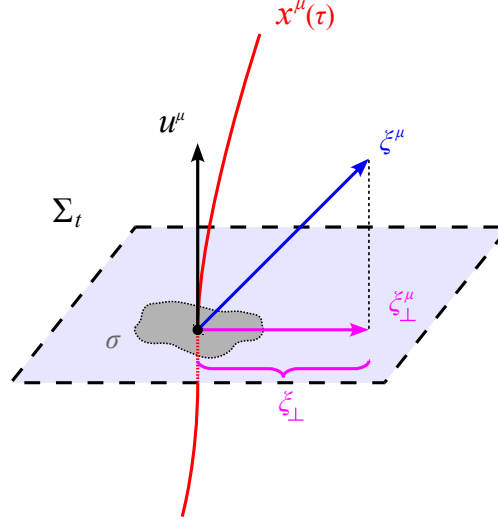


Figure 10.5: The dipolar fluid is entirely characterized by (i) its four-velocity u^μ tangent to the world-line $x^\mu(\tau)$, (ii) its rest mass density σ , and (iii) the dipole moment ξ^μ . The polarization $\Pi_\perp = \sigma \xi_\perp$ is build from the norm $\xi_\perp$ of the projection $\xi_\perp^\mu$ of the dipole moment ξ^μ onto the space-like hypersurface Σ_t orthogonal to u^μ .

paradigm has been previously discussed [233, 289]. However here we shall consider a true modification of the physics of dark matter, drastically different from CDM (see also [102] for an alternative approach in a related spirit).

In paper I we showed that this particular model of modified dark matter permits recovering the phenomenology of MOND in a natural way, while being in agreement with the cosmological Λ -CDM model. The aim of this article is to prove that the model can be reformulated from a simple and physically meaningful matter action.

The dipolar medium is described as a fluid with mass current $J^\mu = \sigma u^\mu$, and endowed with a dipole moment vector ξ^μ . Here $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ is the time-like four-velocity of the fluid, with $d\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$ being the proper time (we pose $c = 1$). The rest mass density reads $\sigma = \sqrt{-J_\mu J^\mu}$, and the mass current is conserved, i.e.

$$\nabla_\mu J^\mu = 0, \quad (10.143)$$

where ∇_μ denotes the covariant derivative associated with the metric $g_{\mu\nu}$. The dipole moment ξ^μ has the dimension of a length, so that it is more like a displacement vector; the associated polarization field then reads $\Pi^\mu = \sigma \xi^\mu$. We have in mind that ξ^μ and Π^μ are effective variables resulting from an average performed at some macroscopic scale.

The action of the dipolar dark matter is of the type $S = \int d^4x \sqrt{-g} L$. It will be added to the Einstein-Hilbert action for gravity, and to the standard actions of all the other matter fields (baryons, photons, neutrinos, etc). We find that the Lagrangian consists of three terms: a mass term σ in the ordinary sense (as for CDM), an interaction term built from the coupling between the current J^μ and the dipolar field ξ^μ , and a potential scalar function $\mathcal{W}$ characterizing an internal force acting on the dipolar particles, and depending on the polarization field. It explicitly reads

$$L = -\sigma + J_\mu \dot{\xi}^\mu - \mathcal{W}(\Pi_\perp). \quad (10.144)$$

Both J^μ and ξ^μ will be considered as dynamical variables, to be varied independently when applying the principle of stationary action (cf. the Appendix for details). Here $\dot{\xi}^\mu \equiv D\xi^\mu/d\tau = u^\nu \nabla_\nu \xi^\mu$ denotes the proper time derivative of the dipole moment. Note that $\dot{\xi}^\mu$ is coupled to the current J_μ like an external field would be. However, here the dipole moment ξ^μ is an *internal* field. The potential $\mathcal{W}$ is assumed to depend solely on the norm $\Pi_\perp$ of the projection of the polarization field perpendicular to the four-velocity. Thus, $\Pi_\perp = \sigma \xi_\perp$ where $\xi_\perp = \sqrt{\perp_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu}$, with the usual orthogonal projector $\perp_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$ (cf. Fig. 10.5). As discussed in Sec. 10.9, the introduction of such an environment-dependent potential is motivated by the previous interpretation of the MOND phenomenology resulting from the mechanism of gravitational polarization.

A crucial point is that ξ^μ can be replaced in the coupling term of (10.144) by its orthogonal projection $\xi_\perp^\mu = \perp^\mu_\nu \xi^\nu$ without changing the dynamics. Indeed, a short calculation reveals that $J_\mu \dot{\xi}^\mu = J_\mu \dot{\xi}_\perp^\mu + \nabla_\mu (J^\mu u^\nu \xi_\nu)$, so that, because a pure divergence can be dropped from the Lagrangian, the only physical degrees of freedom are the three independent components of the vector $\xi_\perp^\mu$, which is *space-like* (we denote $\dot{\xi}_\perp^\mu \equiv D\xi_\perp^\mu/d\tau$). This is to be contrasted with TeVeS and Einstein-ether theories which are based on a fundamental *time-like* vector field.

To obtain the equation of motion of the dipolar fluid we vary the action with respect to the dipole moment variable ξ^μ , and get

$$\dot{u}^\mu = -\mathcal{F}^\mu \equiv -\hat{\xi}_\perp^\mu \mathcal{W}', \quad (10.145)$$

where $\dot{u}^\mu \equiv Du^\mu/d\tau$ is the four-acceleration, $\hat{\xi}_\perp^\mu \equiv \xi_\perp^\mu/\xi_\perp$ is the unit direction along $\xi_\perp^\mu$, and $\mathcal{W}' \equiv d\mathcal{W}/d\Pi_\perp$. The motion is non-geodesic because of the internal force density $\mathcal{F}^\mu$ caused by the dipole moment ξ^μ .

The variation with respect to J^μ yields the equation of evolution for the dipole moment. The constraint that the matter current is conserved, Eq. (10.143), is to be satisfied during the variation and we apply a convective variational procedure (see the Appendix). Defining for convenience the “linear momentum” $\Omega^\mu \equiv \dot{\xi}_\perp^\mu + u^\mu (1 + 2\xi_\perp \mathcal{W}')$, we obtain

$$\dot{\Omega}^\mu = \frac{1}{\sigma} \nabla^\mu (\mathcal{W} - \Pi_\perp \mathcal{W}') - \xi_\perp^\nu R^\mu_{\rho\nu\lambda} u^\rho u^\lambda. \quad (10.146)$$

This tells how the variation of the dipole moment should differ from parallel transport along the fluid’s worldline. The first term on the right-hand-side (RHS) looks like a pressure term, while the second term represents the analogue of the standard coupling to Riemann curvature for spinning particles in GR [319, 23]. Finally, varying with respect to the metric, we get the stress-energy tensor

$$T^{\mu\nu} = \Omega^{(\mu} J^{\nu)} - \nabla_\rho \left(\left[\Pi_\perp^\rho u^{(\mu} - u^\rho \Pi_\perp^{(\mu} \right] u^{\nu)} \right) - g^{\mu\nu} (\mathcal{W} - \Pi_\perp \mathcal{W}'). \quad (10.147)$$

The RHS is made of a monopolar term associated with Ω^μ , while the second term is (minus) the divergence of a “polarization” tensor and is of a dipolar nature. Being proportional to the metric, the third term on the RHS will be related to a fluid of dark energy. We have $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ as a consequence of (10.145)–(10.146). We observe, in agreement with our earlier argument at the level of the Lagrangian, that all equations depend *in fine* only on the perpendicular projection $\xi_\perp^\mu = \perp^\mu_\nu \xi^\nu$ of the dipole moment.

The equations of motion (10.145) and evolution (10.146), and the stress-energy tensor (10.147), turn out to be exactly the same as in the model of paper I [see (2.20)–(2.21) and (2.24) there]. Those equations were derived starting from the more complicated Lagrangian given by (2.7) in paper I, and sharing some common features with the one for particles with spin moving in an arbitrary background [23]. Furthermore, they were obtained after imposing a particular choice of solution satisfying some consequence of the initial equations ($\Xi = 1$ in the notation of paper I). Despite this rather complicated way to derive them, it was found that the equations provide the sensible physics for a successful model of dark matter and dark energy. We have now proved that the same equations derive directly (without any further assumptions) from the remarkably simple Lagrangian (10.144), which lends itself better to physical interpretation.

10.11 Recovering the standard cosmological model and MOND

We now review the main consequences of this model, presenting alternative versions of most arguments compared to paper I. To achieve agreement with MOND and with Λ -CDM (to first-order cosmological perturbations), we have to fine-tune the potential $\mathcal{W}$ in the action. Indeed, we find that $\mathcal{W}$ is “phenomenologically” determined up to third order in an expansion when the polarization field $\Pi_\perp$ tends to zero. Physically, this corresponds to $\Pi_\perp \ll a_0$, which in turn will mean that gravity is weak, $g \ll a_0$, like in the outskirts of a galaxy or in a nearly homogeneous and isotropic cosmology. In this regime $\mathcal{W}$ takes the anharmonic form

$$\mathcal{W}(\Pi_\perp) = \frac{\Lambda}{8\pi} + 2\pi \Pi_\perp^2 + \frac{16\pi^2}{3a_0} \Pi_\perp^3 + \mathcal{O}(\Pi_\perp^4). \quad (10.148)$$

The minimum is directly related to the cosmological constant Λ , and the deviations from that minimum are fixed by the agreement with MOND; in particular a_0 parametrizes the third-order deviation (see Fig. 10.6).

Let us assume, following paper I, that the theory depends only on one new fundamental scale — the constant MOND acceleration a_0 . When entering the MOND regime, $\Pi_\perp/a_0$ is of order one, therefore $\mathcal{W}$ naturally scales with a_0^2 . If $\mathcal{W}$ is to come from some fundamental theory, we expect that the dimensionless coefficients in the expansion (10.148) after global rescaling by a_0^2 should be of the order of one. In particular, Λ should itself be of the order of a_0^2 . As is well known [290], the current astrophysical measurements verify the “cosmic coincidence” that $\Lambda \sim a_0^2$. This is a natural consequence of our model.

10.11.1 First-order cosmological perturbations

We now turn to the application at early cosmological time, where we consider a linear perturbation around an homogeneous and isotropic Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) universe. Since the dipole moment $\xi_\perp^\mu$ is space-like, it will break the spatial isotropy of the FLRW background, and must necessarily belong to the first-order perturbation, which we indicate by $\xi_\perp^\mu = \mathcal{O}(1)$. For instance, from (10.148) we find that the internal force is also of first order, $\mathcal{F}^\mu = 4\pi \Pi_\perp^\mu + \mathcal{O}(2)$. At that order the stress-energy tensor (10.147) simplifies very much, and

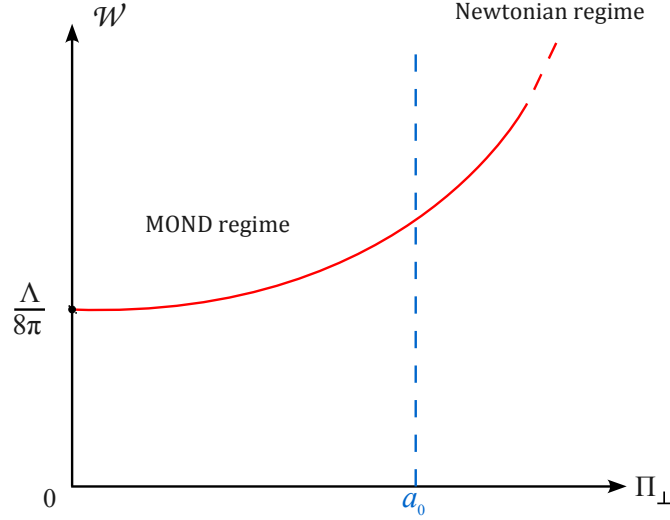


Figure 10.6: The potential $\mathcal{W}$ is function of the polarization field $\Pi_{\perp}$. It has an anharmonic behavior in the MOND regime $\Pi_{\perp} \ll a_0$, and its minimum is given by the cosmological constant Λ . The leading order non-harmonicity is parametrized by the MOND acceleration scale a_0 [cf. Eq. (10.148)]. The Newtonian regime $\Pi_{\perp} \gg a_0$ is discussed in details in paper I.

can be decomposed into dark energy and dark matter components, namely $T^{\mu\nu} = T_{\text{de}}^{\mu\nu} + T_{\text{dm}}^{\mu\nu}$, where the dark energy is simply given by the cosmological constant, $T_{\text{de}}^{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi} g^{\mu\nu} + \mathcal{O}(2)$, while the dark matter reads

$$T_{\text{dm}}^{\mu\nu} = \rho \tilde{u}^{\mu} \tilde{u}^{\nu} + \mathcal{O}(2). \quad (10.149)$$

Here $\rho \equiv \sigma - \nabla_{\mu} \Pi_{\perp}^{\mu}$ is the energy density of the dark matter fluid, and $\tilde{u}^{\mu} = u^{\mu} + \dot{\xi}_{\perp}^{\mu} - \xi_{\perp}^{\nu} \nabla_{\nu} u^{\mu}$ (i.e. $\tilde{u}^{\mu} = u^{\mu} - \mathcal{L}_{\xi_{\perp}} u^{\mu}$, where $\mathcal{L}_{\xi_{\perp}}$ is the Lie derivative) is an effective four-velocity field, which satisfies $\tilde{u}_{\mu} \tilde{u}^{\mu} = -1 + \mathcal{O}(2)$ and the approximate conservation law $\nabla_{\mu}(\rho \tilde{u}^{\mu}) = \mathcal{O}(2)$. This shows that, at linear order, the dark matter cannot be distinguished from a pressureless perfect fluid; in particular the fluid's motion is geodesic, $\tilde{u}^{\nu} \nabla_{\nu} \tilde{u}^{\mu} = \mathcal{O}(2)$. Therefore, the model makes the same predictions as the Λ -CDM cosmological model at linear order (see paper I for more details). In particular, adjusting the background value of ρ (namely $\bar{\rho}$ such that $\rho = \bar{\rho} + \mathcal{O}(1)$; notice that $\bar{\rho} = \bar{\sigma}$) to the measured value of dark matter today, $\Omega_{\text{dm}} \simeq 0.23$, and choosing Λ in such a way that the dark energy contribution is $\Omega_{\text{de}} \simeq 0.73$, we are in agreement with the observed fluctuations of the CMB. To be more precise, the linearized perturbation equations, given by (3.48)–(3.49) in paper I, are identical with those of Λ -CDM with no additional degrees of freedom, since the dipole moment has been absorbed at linear order into the effective vector field $\tilde{u}^{\mu}$ and mass density ρ . Therefore the model reproduces both the location and the height of the peaks of the CMB.

At non-linear order in cosmological perturbations, the model should differ from the standard Λ -CDM scenario. The fluid's dynamics will no longer be geodesic. We expect that the formation of large scale structures will be triggered not by the monopolar part σ of dark matter, which should not cluster much (see below), but by the dipolar component present in $\rho = \sigma - \nabla_{\mu} \Pi_{\perp}^{\mu}$. This should be checked performing numerical simulations in cosmology.

10.11.2 Non-relativistic limit

Next we investigate the dipolar medium around a typical galaxy at low redshift. For this purpose it is sufficient to consider the non-relativistic (NR) limit of the model, when $c \rightarrow +\infty$. Working at the level of the Lagrangian (10.144), we find that $\mathcal{L} = \sqrt{-g} L$ reduces in this limit to

$$\mathcal{L}_{\text{NR}} = \sigma_\star \left(\frac{v^2}{2} + U + \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp + \mathbf{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{\xi}_\perp}{dt} \right) - \mathcal{W}(\Pi_\perp). \quad (10.150)$$

Here $\mathbf{v}$ is the fluid's ordinary velocity, $\boldsymbol{\xi}_\perp$ is the dipole moment vector, and $\mathbf{g} = \nabla U$ is the Newtonian gravitational field with U the gravitational potential. The rest mass density $\sigma_\star$ satisfies the usual continuity equation $\partial_t \sigma_\star + \nabla \cdot \mathbf{J}_\star = 0$, where the current reads $\mathbf{J}_\star = \sigma_\star \mathbf{v}$. We denote by $d/dt = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ the convective time derivative, so that e.g. $d\sigma_\star/dt = -\sigma_\star \nabla \cdot \mathbf{v}$. We discarded for convenience the rest mass term ($-\sigma_\star$) in the NR Lagrangian (10.150). From the coupling term $J_\mu \dot{\xi}^\mu$ in the Lagrangian (10.144), we recover in the NR limit (10.150) the gravitational analogue $\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\Pi}_\perp$ of the coupling of the polarization field to an external electric field. Notice also the extra term $\mathbf{J}_\star \cdot d\boldsymbol{\xi}_\perp/dt$ in (10.150), which arises in the gravitational case.

The NR equations of motion and evolution are obtained by varying the Lagrangian (10.150) with respect to $\boldsymbol{\xi}$ and ξ^0 (note that $\boldsymbol{\xi}_\perp = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{v} \xi^0$), and $\mathbf{J}_\star$. We get

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} - \mathcal{F}, \quad (10.151)$$

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\xi}_\perp}{dt^2} = \mathcal{F} + \frac{1}{\sigma_\star} \nabla (\mathcal{W} - \Pi_\perp \mathcal{W}') + (\boldsymbol{\xi}_\perp \cdot \nabla) \mathbf{g}, \quad (10.152)$$

in agreement with the NR limits of (10.145) and (10.146). The gravitational equation follows from adding to (10.150) the Newtonian Lagrangian $\mathcal{L}_U = -\frac{1}{8\pi} \nabla U \cdot \nabla U$ (coming from the NR limit of the Einstein-Hilbert action in GR) and the contribution of baryons. Varying with respect to U gives

$$\nabla \cdot (\mathbf{g} - 4\pi \boldsymbol{\Pi}_\perp) = -4\pi (\rho_b + \sigma_\star). \quad (10.153)$$

We proposed in paper I a mechanism by which the dipolar medium does not cluster as much as baryonic matter during the cosmological evolution. This is supported by an exact solution of (10.151)–(10.153), valid in spherical symmetry, where the dipolar fluid has zero velocity, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, and a constant mass density $\sigma_\star$ (see the Appendix in paper I). The dipole moments remain at rest because the gravitational field $\mathbf{g}$ is balanced by the internal force $\mathcal{F}$. From this we inferred the hypothesis of “weak-clustering”, namely that the typical mass density of dipole moments in a galaxy (after cosmological evolution) is much less than the baryonic density, $\sigma_\star \ll \rho_b$, and perhaps of the order of the mean cosmological value, $\sigma_\star \sim \bar{\sigma}_\star$. Furthermore the dipolar medium is essentially static, $\mathbf{v} \simeq \mathbf{0}$. If this hypothesis is true, we have $\mathbf{g} \simeq \mathcal{F}$ by (10.151), so the polarization field $\boldsymbol{\Pi}_\perp$ is aligned with the gravitational field $\mathbf{g}$, i.e. the medium is polarized. Using $\mathcal{F} = \hat{\boldsymbol{\xi}}_\perp \mathcal{W}'$ together with the expression of the potential (10.148), we get

$$\mathbf{g} \simeq 4\pi \boldsymbol{\Pi}_\perp \left(1 + 4\pi \frac{\Pi_\perp}{a_0} \right) + \mathcal{O}(\Pi_\perp^3). \quad (10.154)$$

Hence the gravitational susceptibility coefficient $\chi = \mu - 1$ defined by (10.142) takes the appropriate form in the MOND regime, namely $\chi(g) \simeq -1 + g/a_0 + \mathcal{O}(g^2)$. We conclude

that (10.153) is equivalent to the MOND equation (10.141). (See paper I for a discussion of the Newtonian regime $g \gg a_0$.) Note that it is crucial that we could neglect the monopolar part $\sigma_\star$ of the dipolar medium as compared to ρ_b , so that galaxies appear baryonic in MOND fits of the rotation curves. On the other hand, the monopolar dark matter $\sigma_\star$ as we have seen plays the dominant role in a cosmological context. It may also help explaining the missing dark matter at the intermediate scale of galaxy clusters [14].

The weak-clustering mechanism also tells us that the evolution of the dipole moments should be slow. In spherical symmetry, the two last terms of (10.152) cancel each other, and we get $\partial_t^2 \Pi_\perp = 4\pi\sigma_\star \Pi_\perp$ in the MOND regime. This shows the presence of an instability, with exponentially growing modes. However the unstable modes will develop on the self-gravitating time scale $\tau_g = \sqrt{\pi/\sigma_\star}$, which is very long thanks to $\sigma_\star \ll \rho_b$. Using the mean cosmological value $\bar{\sigma}_\star \simeq 10^{-26} \text{ kg/m}^3$ we get $\tau_g \simeq 6 \times 10^{10}$ years. Thus this instability is not a problem classically.

10.12 Conclusion

In conclusion, the model (i) explains the phenomenology of MOND by the physical process of gravitational polarization, (ii) makes a unification between the dark matter *à la MOND* and the dark energy in the form of a cosmological constant (with the interesting outcome that $\Lambda \sim a_0^2$), and (iii) recovers the successful standard cosmological model Λ -CDM at linear perturbation order. However the model lacks some connection to microscopic physics and describes the dipole moments in an effective way; notably the potential $\mathcal{W}$ in (10.148) is for the moment purely phenomenological. The model should be further tested in cosmology, by studying second-order cosmological perturbations where we expect a departure from Λ -CDM, by computing numerically the non-linear growth of perturbations and formation of large scale structures, and by investigating the intermediate scale of galaxy clusters.

Appendix: Variation of the action functional

Here we provide some details on the derivation of the equations of motion and evolution of the dipolar fluid. They derive from an action of the general form

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} L[J^\mu, \xi^\mu, g_{\mu\nu}], \quad (10.155)$$

where as indicated the Lagrangian density L is a functional of the matter current J^μ , the dipole moment ξ^μ (and its covariant derivative $\nabla_\nu \xi^\mu$), and the covariant metric $g_{\mu\nu}$.

We vary first the action with respect to the dipole moment ξ^μ . Notice that in our Lagrangian (10.144) the dependence on $\nabla_\nu \xi^\mu$ is only through the covariant *time* derivative $\dot{\xi}^\mu$. In that case, denoting the conjugate momentum of the dipole by $\Psi_\mu \equiv \partial L / \partial \dot{\xi}^\mu$, we obtain from the principle of stationary action

$$\dot{\Psi}_\mu + \Theta \Psi_\mu = \frac{\partial L}{\partial \xi^\mu}, \quad (10.156)$$

with $\Theta \equiv \nabla_\nu u^\nu$. Since the vector field ξ^μ is unconstrained, this equation is equivalent to the standard Lagrange equation

$$\nabla_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial \nabla_\nu \xi^\mu} \right) = \frac{\partial L}{\partial \xi^\mu}. \quad (10.157)$$

In the case at hands of the Lagrangian (10.144) we then obtain the equation of motion of the dipolar fluid as given by (10.145).

However, the variation with respect to the current J^μ is trickier because of the constraint that this current is conserved: $\nabla_\mu J^\mu = 0$. We adopt a convective variational approach [396, 113, 114] in which the variation δJ^μ is constrained to have the form which is precisely induced by an infinitesimal displacement of the flow lines of J^μ . Denoting δx^μ the generator of the displacement of the flow lines we have

$$\delta J^\mu = \delta x^\nu \nabla_\nu J^\mu - J^\nu \nabla_\nu \delta x^\mu + J^\mu \nabla_\nu \delta x^\nu, \quad (10.158)$$

which is automatically divergenceless: $\nabla_\mu \delta J^\mu = 0$. The variation of the action with respect to J^μ , using the fact that δx^μ is unconstrained, then yields

$$J^\nu [\nabla_\nu p_\mu - \nabla_\mu p_\nu] = 0, \quad (10.159)$$

with $p_\mu \equiv \partial L / \partial J^\mu$ being the momentum associated with the current. In the case of a perfect fluid this equation is equivalent to the usual Euler equation, where p_μ in that case is the current of enthalpy [389, 264]. For the Lagrangian (10.144), the equation (10.159) yields the equation of evolution of the dipolar fluid in the form (10.146).

Finally the stress-energy tensor is derived by variation of the Lagrangian with respect to the metric. We take into account the dependence of the current J^μ on the metric through the volume element $\sqrt{-g} d^4x$, which means that the so-called “coordinate” current density $J_*^\mu = \sqrt{-g} J^\mu$ is the relevant metric-independent variable. In addition we treat the change in the metric that is hidden into the covariant time derivative $\dot{\xi}^\mu$ by means of the Palatini formula. The result is

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = & 2 \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu}} + g^{\mu\nu} (L - J^\rho p_\rho) + u^\mu u^\nu \dot{\xi}^\rho \Psi_\rho \\ & + \nabla_\rho (u^{(\mu} \xi^{\nu)} \Psi^\rho - u^\rho \xi^{(\mu} \Psi^{\nu)} - \xi^\rho u^{(\mu} \Psi^{\nu)}) . \end{aligned} \quad (10.160)$$

(Notice the misprint in the first dipolar term in the corresponding equation (2.22) of [84].) Straightforward calculations in the case of the Lagrangian density (10.144) give the explicit expression (10.147).

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

CETTE thèse a exploré certains aspects de la physique des systèmes binaires coalescents de trous noirs dans le contexte de l'astronomie gravitationnelle naissante, ainsi qu'une possible alternative au paradigme de la matière noire froide et à la dynamique newtonienne modifiée.

Développements post-newtoniens et théorie des perturbations

La construction de patrons d'ondes pour la phase spirale des systèmes binaires compacts coalescents, nécessaire à l'analyse du signal en sortie des détecteurs interférométriques terrestres LIGO/VIRGO, est essentiellement achevée. Les efforts se portent désormais vers l'inclusion des effets des spins intrinsèques des corps compacts, en particulier pour la détection et l'exploitation scientifique des ondes gravitationnelles en provenance des systèmes binaires de trous noirs super-massifs par LISA.

La modélisation des binaires à rapport de masses extrême, ou EMRIs, une autre classe de sources particulièrement prometteuse pour ce détecteur spatial, est quant à elle bien moins avancée. La mise au point de patrons d'ondes suffisamment précis pour rester en phase avec le signal physique nécessite le calcul de la force propre pour une orbite générique autour d'un trou noir de Kerr, et le développement d'un schéma d'évolution de l'orbite géodésique ainsi perturbée.

Du point de vue du théoricien s'efforçant de construire des patrons d'ondes gravitationnelles pour les systèmes binaires coalescents de trous noirs, l'interface entre les développements post-newtoniens et le formalisme de la force propre est donc particulièrement attrayante et prometteuse. La résolution du problème de la force propre en relativité générale a désormais atteint un niveau de maturité suffisant pour permettre l'extraction d'informations physiques intéressantes (au moins conceptuellement), et la comparaison avec les prédictions issues du formalisme post-newtonien.

Les travaux présentés dans les chapitres 4 & 5 font un premier pas dans cette direction ; ils illustrent la cohérence des résultats de calculs effectués à l'aide de formalismes différents, dans des systèmes de coordonnées différents, et faisant usage de schémas de régularisation différents, lorsque ceux-ci sont comparés dans leur domaine de validité commun. Ces travaux confirment ainsi la pertinence de ces formalismes pour décrire les systèmes binaires coalescents de trous noirs.

Par ailleurs, la possibilité d'extraire du résultat perturbatif les valeurs de coefficients post-newtoniens d'ordres élevés, coefficients qu'il serait très difficile d'obtenir analytiquement par les méthodes post-newtoniennes standards, illustre également la *complémentarité* de ces schémas d'approximation. De nombreuses autres comparaisons pourront être menées à bien dans un futur proche, parmi lesquelles :

- Les corrections induites par la force propre sur l'orbite elliptique générique décrite par une particule en orbite autour d'un trou noir de Schwarzschild.
- Des comparaisons similaires pour une orbite circulaire équatoriale, puis une orbite générique dans le cas d'un trou noir de Kerr.
- Les corrections induites dans le flux d'ondes gravitationnelles par le mouvement non géodésique de la particule autour du trou noir super-massif.

Il pourrait également s'avérer fructueux d'utiliser les outils développés dans le cadre du formalisme post-newtonien (développement multipolaire post-minkowskien, raccordement de séries asymptotiques, régularisation dimensionnelle, etc.) — pour l'étude des binaires d'objets compacts de masses comparables — afin de calculer analytiquement la force propre s'exerçant sur une particule en orbite autour d'un trou noir de Schwarzschild ou de Kerr. En résumé, l'interface entre le formalisme de la force propre et les développements post-newtoniens est un domaine de recherche nouveau, très prometteur, et dans lequel j'envisage de m'aventurer plus avant dans le cadre de mon séjour post-doctoral à l'université du Maryland.

Après avoir *comparé* le formalisme post-newtonien à la théorie des perturbations d'un trou noir, nous avons présenté dans les chapitres 6 & 7 des travaux qui visaient à *combiner* ces deux méthodes d'approximation en relativité générale. Bien que nous ayons fait usage de la métrique post-newtonienne au-delà de son domaine de validité formel, cette méthode s'est avérée adéquate pour calculer le recul gravitationnel d'une binaire de trous noirs durant la phase de vibration. Ces résultats suggèrent que l'essentiel de la physique du problème à deux corps est potentiellement capturé par une combinaison de méthodes analytique ou semi-analytique, y compris dans le régime de champ fort. Plusieurs extensions de ce travail encourageant sont envisageables :

- Le calcul de l'énergie totale et du moment cinétique total rayonnés, à l'aide de la même combinaison de méthodes post-newtoniennes et perturbatives, puis la comparaison avec les résultats issus de simulations en relativité numérique.
- L'extension de ce formalisme au cas de trous noirs en rotation, ce qui requerra l'inclusion de termes de couplage spin-orbite dans la métrique post-newtonienne, et l'utilisation du formalisme de Teukolsky pour traiter la perturbation d'un trou noir de Kerr dans l'approximation de limite proche.

Ces travaux ne sont toutefois pas une priorité du point de vue de l'astronomie gravitationnelle, car le problème à deux corps en relativité générale admet désormais une solution approchée extrêmement précise en combinant les résultats post-newtoniens à ceux de la relativité numérique.

Matière noire dipolaire et croissance des structures

Le modèle de matière noire et d'énergie noire présenté dans le chapitre 10 mérite d'être étudié plus en profondeur ; d'un point de vue théorique, il est basé sur un lagrangien simple et bien motivé physiquement, contrairement à certaines approches de gravité modifiée basées sur des lagrangiens particulièrement compliqués et relativement *ad hoc*. Par ailleurs, nous avons vu que la matière noire dipolaire se comporte comme la matière noire froide ordinaire aux échelles cosmologiques, et permet de retrouver la phénoménologie de la dynamique newtonienne modifiée à l'échelle galactique — moyennant l'hypothèse de « faible agrégation » — grâce à un mécanisme de polarisation gravitationnelle. En l'état, ce modèle est donc compatible avec *toutes* les contraintes observationnelles auxquelles il a été confronté jusqu'à présent.

Cette situation est à contraster avec les paradigmes de la matière noire froide et la phénoménologie de MOND (ou ses extensions relativistes), qui rencontrent des problèmes aux échelles galactique et cosmologique respectivement. Il convient toutefois de noter que le modèle de concordance Λ -CDM a pu être confronté à un nombre bien plus important d'observations que notre modèle de matière noire dipolaire. Afin de tester ce dernier, il est crucial de comparer les prédictions du modèle aux contraintes observationnelles présentes ou à venir ; pour ce faire, un certain nombre de directions de recherche s'annoncent particulièrement prometteuses :

- Déterminer si la nature dipolaire de la matière noire génère une signature de non-gaussianité spécifique dans le spectre de puissance des anisotropies du fond diffus cosmologique. Cette prédiction pourra alors être comparée avec les mesures du satellite Planck.
- Utiliser la théorie des perturbations afin d'étudier la croissance des structures aux échelles sub-Hubble, dans le régime semi-linéaire, puis comparer les résultats ainsi obtenus aux contraintes observationnelles déduites des grands relevés de galaxies.
- Étudier la croissance non linéaire des structures à l'aide de simulations numériques valables de l'échelle des amas de galaxies jusqu'aux échelles cosmologiques. De telles simulations permettraient également de tester l'hypothèse de « faible agrégation ».
- Caractériser le fond stochastique d'ondes gravitationnelles généré par les contraintes anisotropes présentes dans ce modèle de matière noire dipolaire.

Enfin, un projet de recherche plus ambitieux et incertain consisterait à établir un lien entre ce modèle de matière noire, qui demeure phénoménologique, et la physique des particules élémentaires au-delà du modèle standard.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. ABADIE et al. – « Predictions for the rates of compact binary coalescences observable by ground-based gravitational-wave detectors », *Class. Quant. Grav.* **27** (2010), p. 173001, [arXiv:1003.2480 \[astro-ph\]](#).
- [2] B. ABBOTT et al. – « Beating the spin-down limit on gravitational wave emission from the Crab pulsar », *Astrophys. J.* **683** (2008), p. L45, Erratum : *Astrophys. J.* **706** (2009), p. L203, [arXiv:0805.4758 \[astro-ph\]](#).
- [3] B. P. ABBOTT et al. – « An upper limit on the stochastic gravitational-wave background of cosmological origin », *Nature* **460** (2009), p. 990, [arXiv:0910.5772 \[astro-ph.CO\]](#).
- [4] A. M. ABRAHAMS et R. H. PRICE – « Black-hole collisions from Brill-Lindquist initial data : Predictions of perturbation theory », *Phys. Rev. D* **53** (1996), p. 1972, [gr-qc/9509020](#).
- [5] Adresse Web du projet AIGO : <http://www.aigo.org.au/>.
- [6] P. AJITH et al. – « Template bank for gravitational waveforms from coalescing binary black holes : Nonspinning binaries », *Phys. Rev. D* **77** (2008), p. 104017, Erratum : *Phys. Rev. D* **79** (2009), p. 129901(E), [arXiv:0710.2335 \[gr-qc\]](#).
- [7] B. ALLEN – « The stochastic gravity-wave background : Sources and detection », *Relativistic gravitation and gravitational radiation* (J. A. Marck et J.-P. Lasota, éd.), Cambridge Contemporary Astrophysics, Cambridge University Press, 1997, p. 373, [gr-qc/9604033](#).
- [8] P. AMARO-SEOANE et al. – « Intermediate and extreme mass-ratio inspirals-astrophysics, science applications and detection using LISA », *Class. Quant. Grav.* **24** (2007), p. R113, [astro-ph/0703495](#).
- [9] J. L. ANDERSON – « Approximation methods in general relativity », *Isolated gravitating systems in general relativity* (J. Ehlers, éd.), Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, vol. 67, North-Holland, 1979, p. 289.
- [10] J. L. ANDERSON, R. E. KATES, L. S. KEGELES et R. G. MADONNA – « Divergent integrals of post-Newtonian gravity : Nonanalytic terms in the near-zone expansion of a gravitationally radiating system found by matching », *Phys. Rev. D* **25** (1982), p. 2038.
- [11] N. ANDERSSON – « Gravitational waves from instabilities in relativistic stars », *Class. Quant. Grav.* **20** (2003), p. R105, [astro-ph/0211057](#).

- [12] V. C. DE ANDRADE, L. BLANCHET et G. FAYE – « Third post-Newtonian dynamics of compact binaries : Noetherian conserved quantities and equivalence between the harmonic-coordinate and ADM-Hamiltonian formalisms », *Class. Quant. Grav.* **18** (2001), p. 753, [gr-qc/0011063](#).
- [13] G. W. ANGUS – « Is an 11 eV sterile neutrino consistent with clusters, the cosmic microwave background and modified Newtonian dynamics ? », *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **394** (2009), p. 527, [arXiv:0805.4014 \[astro-ph\]](#).
- [14] G. W. ANGUS, B. FAMAËY et D. A. BUOTE – « X-ray group and cluster mass profiles in MOND : Unexplained mass on the group scale », *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **387** (2008), p. 1470, [arXiv:0709.0108 \[astro-ph\]](#).
- [15] G. W. ANGUS, B. FAMAËY et H. S. ZHAO – « Can MOND take a bullet ? Analytical comparisons of three versions of MOND beyond spherical symmetry », *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **371** (2006), p. 138, [astro-ph/0606216](#).
- [16] G. W. ANGUS, H. Y. SHAN, H. S. ZHAO et B. FAMAËY – « On the proof of dark matter, the law of gravity, and the mass of neutrinos », *Astrophys. J.* **654** (2007), p. L13, [astro-ph/0609125](#).
- [17] P. ANNINOS, D. HOBILL, E. SEIDEL, L. SMARR et W.-M. SUEN – « Collision of two black holes », *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993), p. 2851.
- [18] K. G. ARUN, L. BLANCHET, B. R. IYER et M. S. S. QUSAILAH – « The 2.5PN gravitational wave polarizations from inspiralling compact binaries in circular orbits », *Class. Quant. Grav.* **21** (2004), p. 3771, [gr-qc/0404085](#).
- [19] — , « Inspiralling compact binaries in quasi-elliptical orbits : The complete third post-Newtonian energy flux », *Phys. Rev. D* **77** (2008), p. 064035, [arXiv:0711.0302 \[gr-qc\]](#).
- [20] K. G. ARUN, L. BLANCHET, B. R. IYER et S. SINHA – « Third post-Newtonian angular momentum flux and the secular evolution of orbital elements for inspiralling compact binaries in quasi-elliptical orbits », *Phys. Rev. D* **80** (2009), p. 124018, [arXiv:0908.3854 \[gr-qc\]](#).
- [21] K. G. ARUN, A. BUONANNO, G. FAYE et E. OCHSNER – « Higher-order spin effects in the amplitude and phase of gravitational waveforms emitted by inspiraling compact binaries : Ready-to-use gravitational waveforms », *Phys. Rev. D* **79** (2009), p. 104023, [arXiv:0810.5336 \[gr-qc\]](#).
- [22] Adresse Web du détecteur AURIGA : <http://www.auriga.lnl.infn.it/>.
- [23] I. BAILEY et W. ISRAEL – « Relativistic dynamics of extended bodies and polarized media : An eccentric approach », *Ann. Phys.* **130** (1980), p. 188.
- [24] J. BAKER, M. CAMPANELLI et C. O. LOUSTO – « The Lazarus project : A pragmatic approach to binary black hole evolutions », *Phys. Rev. D* **65** (2002), p. 044001, [gr-qc/0104063](#).

- [25] J. G. BAKER, J. CENTRELLA, D.-I. CHOI, M. KOPPITZ et J. VAN METER – « Gravitational-wave extraction from an inspiraling configuration of merging black holes », *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006), p. 111102, [gr-qc/0511103](#).
- [26] J. G. BAKER et al. – « Getting a kick out of numerical relativity », *Astrophys. J.* **653** (2006), p. L93, [astro-ph/0603204](#).
- [27] —, « Modeling kicks from the merger of nonprecessing black hole binaries », *Astrophys. J.* **668** (2007), p. 1140, [astro-ph/0702390](#).
- [28] —, « Modeling kicks from the merger of generic black-hole binaries », *Astrophys. J.* **682** (2008), p. L29, [arXiv:0802.0416 \[astro-ph\]](#).
- [29] J. G. BAKER, J. R. VAN METER, S. T. MCWILLIAMS, J. CENTRELLA et B. J. KELLY – « Consistency of post-Newtonian waveforms with numerical relativity », *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007), p. 181101, [gr-qc/0612024](#).
- [30] L. BARACK – « Gravitational self-force by mode sum regularization », *Phys. Rev. D* **64** (2001), p. 084021, [gr-qc/0105040](#).
- [31] —, « Gravitational self-force in extreme mass-ratio inspirals », *Class. Quant. Grav.* **26** (2009), p. 213001, [arXiv:gr-qc \[0908.1664\]](#).
- [32] L. BARACK, Y. MINO, H. NAKANO, A. ORI et M. SASAKI – « Calculating the gravitational self-force in Schwarzschild spacetime », *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002), p. 091101, [gr-qc/0111001](#).
- [33] L. BARACK et A. ORI – « Mode sum regularization approach for the self-force in black hole spacetime », *Phys. Rev. D* **61** (2000), p. 061502(R), [gr-qc/9912010](#).
- [34] —, « Gravitational self-force and gauge transformations », *Phys. Rev. D* **64** (2001), p. 124003, [gr-qc/0107056](#).
- [35] L. BARACK et N. SAGO – « Gravitational self force on a particle in circular orbit around a Schwarzschild black hole », *Phys. Rev. D* **75** (2007), p. 064021, [gr-qc/0701069](#).
- [36] —, « Gravitational self-force correction to the innermost stable circular orbit of a Schwarzschild black hole », *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009), p. 191101, [arXiv:0902.0573 \[gr-qc\]](#).
- [37] J. M. BARDEEN – « Gauge-invariant cosmological perturbations », *Phys. Rev. D* **22** (1980), p. 1882.
- [38] J. E. BARNES et L. HERNQUIST – « Formation of dwarf galaxies in tidal tails », *Nature* **360** (1992), p. 715.
- [39] M. BARTELMANN et P. SCHNEIDER – « Weak gravitational lensing », *Phys. Rep.* **340** (2001), p. 291, [astro-ph/9912508](#).
- [40] J. BEKENSTEIN et M. MILGROM – « Does the missing mass problem signal the breakdown of Newtonian gravity? », *Astrophys. J.* **286** (1984), p. 7.
- [41] J. D. BEKENSTEIN – « Gravitational-radiation recoil and runaway black holes », *Astrophys. J.* **183** (1973), p. 657.

- [42] —, « Relativistic gravitation theory for the modified Newtonian dynamics paradigm », *Phys. Rev. D* **70** (2004), p. 083509, [astro-ph/0403694](#).
- [43] —, « The modified Newtonian dynamics – MOND and its implications for new physics », *Contemporary Physics* **47** (2006), p. 387, [astro-ph/0701848](#).
- [44] J. D. BEKENSTEIN et R. H. SANDERS – « Gravitational lenses and unconventional gravity theories », *Astrophys. J.* **429** (1994), p. 480, [astro-ph/9311062](#).
- [45] L. BEL, T. DAMOUR, N. DERUELLE, J. IBÁÑEZ et J. MARTIN – « Poincaré-invariant gravitational field and equations of motion of two pointlike objects : The postlinear approximation of general relativity », *Gen. Rel. Grav.* **13** (1981), p. 963.
- [46] K. BELCZYNSKI, V. KALOGERA et T. BULIK – « A comprehensive study of binary compact objects as gravitational wave sources : Evolutionary channels, rates, and physical properties », *Astrophys. J.* **571** (2002), p. 407, [astro-ph/0111452](#).
- [47] E. F. BELL et R. S. DE JONG – « Stellar mass-to-light ratios and the Tully-Fisher relation », *Astrophys. J.* **550** (2001), p. 212, [astro-ph/0011493](#).
- [48] I. BERENTZEN, M. PRETO, P. BERCIK, D. MERRITT et R. SPURZEM – « Binary black hole merger in galactic nuclei : post-Newtonian simulations », *Astrophys. J.* **695** (2009), p. 455, [arXiv:0812.2756](#) [[astro-ph](#)].
- [49] F. BERNARDEAU, S. COLOMBI, E. G. NAGA et R. SCOCCIMARRO – « Large-scale structure of the Universe and cosmological perturbation theory », *Phys. Rept.* **367** (2002), p. 1, [astro-ph/0112551](#).
- [50] E. BERTI, V. CARDOSO et A. O. STARINETS – « Quasinormal modes of black holes and black branes », *Class. Quant. Grav.* **26** (2009), p. 163001, [arXiv:0905.2975](#) [[gr-qc](#)].
- [51] E. BERTI et al. – « Inspiral, merger, and ringdown of unequal mass black hole binaries : A multipolar analysis », *Phys. Rev. D* **76** (2007), p. 064034, [gr-qc/0703053](#).
- [52] G. BERTONE – *Particle dark matter : Observations, models and searches*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [53] G. BERTONE, D. HOOPER et J. SILK – « Particle dark matter : Evidence, candidates and constraints », *Phys. Rept.* **405** (2005), p. 279, [hep-ph/0404175](#).
- [54] E. BERTSCHINGER – « Simulations of structure formation in the Universe », *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **36** (1998), p. 599.
- [55] J. BINNEY et M. MERRIFIELD – *Galactic astronomy*, Princeton University Press, Princeton, 1998.
- [56] L. BLANCHET – « Radiative gravitational fields in general relativity II. Asymptotic behaviour at future null infinity », *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **409** (1987), p. 383.
- [57] —, « Time-asymmetric structure of gravitational radiation », *Phys. Rev. D* **47** (1993), p. 4392.
- [58] —, « Second-post-Newtonian generation of gravitational radiation », *Phys. Rev. D* **51** (1995), p. 2559, [gr-qc/9501030](#).

- [59] — , « Gravitational radiation reaction and balance equations to post-Newtonian order », *Phys. Rev. D* **55** (1997), p. 714, [gr-qc/9609049](#).
- [60] — , « On the multipole expansion of the gravitational field », *Class. Quant. Grav.* **15** (1998), p. 1971, [gr-qc/9801101](#).
- [61] — , « Gravitational radiation from post-Newtonian sources and inspiralling compact binaries », *Living Rev. Rel.* **9** (2006), p. 4, [gr-qc/0202016](#).
- [62] — , « Dipolar particles in general relativity », *Class. Quant. Grav.* **24** (2007), p. 3541, [gr-qc/0609121](#).
- [63] — , « Gravitational polarization and the phenomenology of MOND », *Class. Quant. Grav.* **24** (2007), p. 3529, [astro-ph/0605637](#).
- [64] L. BLANCHET, A. BUONANNO et G. FAYE – « Higher-order spin effects in the dynamics of compact binaries. II. Radiation field », *Phys. Rev. D* **74** (2006), p. 104034, Errata : *Phys. Rev. D* **75** (2007), p. 049903(E) & *Phys. Rev. D* **81** (2010), p. 089901(E), [gr-qc/0605140](#).
- [65] L. BLANCHET et T. DAMOUR – « Radiative gravitational fields in general relativity I. General structure of the field outside the source », *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A* **320** (1986), p. 379.
- [66] — , « Tail-transported temporal correlations in the dynamics of a gravitating system », *Phys. Rev. D* **37** (1988), p. 1410.
- [67] L. BLANCHET, T. DAMOUR et G. ESPOSITO-FARÈSE – « Dimensional regularization of the third post-Newtonian dynamics of point particles in harmonic coordinates », *Phys. Rev. D* **69** (2004), p. 124007, [gr-qc/0311052](#).
- [68] L. BLANCHET, T. DAMOUR, G. ESPOSITO-FARÈSE et B. R. IYER – « Gravitational radiation from inspiralling compact binaries completed at the third post-Newtonian order », *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004), p. 091101, [gr-qc/0406012](#).
- [69] — , « Dimensional regularization of the third post-Newtonian gravitational wave generation from two point masses », *Phys. Rev. D* **71** (2005), p. 124004, [gr-qc/0503044](#).
- [70] L. BLANCHET, S. DETWEILER, A. LE TIEC et B. F. WHITING – « High-accuracy comparison between the post-Newtonian and self-force dynamics of black-hole binaries », *Mass and motion in general relativity* (L. Blanchet, A. Spallicci et B. F. Whiting, éd.), Fundamental Theories of Physics, vol. 162, Springer, 2010, [arXiv:0907.2614](#) [[gr-qc](#)].
- [71] — , « High-order post-Newtonian fit of the gravitational self-force for circular orbits in the Schwarzschild geometry », *Phys. Rev. D* **81** (2010), p. 084033, [arXiv:1002.0726](#) [[gr-qc](#)].
- [72] — , « Post-Newtonian and numerical calculations of the gravitational self-force for circular orbits in the Schwarzschild geometry », *Phys. Rev. D* **81** (2010), p. 064004, [arXiv:0910.0207](#) [[gr-qc](#)].
- [73] L. BLANCHET et G. FAYE – « Hadamard regularization », *J. Math. Phys.* **41** (2000), p. 7675, [gr-qc/0004008](#).

- [74] —, « On the equations of motion of point-particle binaries at the third post-Newtonian order », *Phys. Lett. A* **271** (2000), p. 58, [gr-qc/0004009](#).
- [75] —, « General relativistic dynamics of compact binaries at the third post-Newtonian order », *Phys. Rev. D* **63** (2001), p. 062005, [gr-qc/0007051](#).
- [76] —, « Lorentzian regularization and the problem of point-like particles in general relativity », *J. Math. Phys.* **42** (2001), p. 4391, [gr-qc/0006100](#).
- [77] L. BLANCHET, G. FAYE, B. R. IYER et B. JOGUET – « Gravitational-wave inspiral of compact binary systems to 7/2 post-Newtonian order », *Phys. Rev. D* **65** (2002), p. 061501, Erratum : *Phys. Rev. D* **71** (2005), p. 129902(E), [gr-qc/0105099](#).
- [78] L. BLANCHET, G. FAYE, B. R. IYER et S. SINHA – « The third post-Newtonian gravitational wave polarisations and associated spherical harmonic modes for inspiralling compact binaries in quasi-circular orbits », *Class. Quant. Grav.* **25** (2008), p. 165003, [arXiv:0802.1249 \[gr-qc\]](#).
- [79] L. BLANCHET, G. FAYE et B. PONSOT – « Gravitational field and equations of motion of compact binaries to 5/2 post-Newtonian order », *Phys. Rev. D* **58** (1998), p. 124002, [gr-qc/9804079](#).
- [80] L. BLANCHET et B. R. IYER – « Third post-Newtonian dynamics of compact binaries : Equations of motion in the center-of-mass frame », *Class. Quant. Grav.* **20** (2003), p. 755, [gr-qc/0209089](#).
- [81] —, « Hadamard regularization of the third post-Newtonian gravitational wave generation of two point masses », *Phys. Rev. D* **71** (2005), p. 024004, [gr-qc/0409094](#).
- [82] L. BLANCHET, B. R. IYER et B. JOGUET – « Gravitational waves from inspiraling compact binaries : Energy flux to third post-Newtonian order », *Phys. Rev. D* **65** (2002), p. 064005, Erratum : *Phys. Rev. D* **71** (2005), p. 129903(E), [gr-qc/0105098](#).
- [83] L. BLANCHET, B. R. IYER, C. M. WILL et A. G. WISEMAN – « Gravitational waveforms from inspiralling compact binaries to second-post-Newtonian order », *Class. Quant. Grav.* **13** (1996), p. 575, [gr-qc/9602024](#).
- [84] L. BLANCHET et A. LE TIEC – « Model of dark matter and dark energy based on gravitational polarization », *Phys. Rev. D* **78** (2008), p. 024031, [arXiv:0804.3518 \[astro-ph\]](#).
- [85] —, « Dipolar dark matter and dark energy », *Phys. Rev. D* **80** (2009), p. 023524, [arXiv:0901.3114 \[astro-ph.CO\]](#).
- [86] —, « Phenomenology of the modified Newtonian dynamics and the concordance cosmological scenario », *Comptes-rendus des 43^e rencontres de Moriond* (J. Dumarchez, Y. Giraud-Héraud et J. Trân Thanh Vân, eds.), The Gioi Publishers, 2009, p. 257, [arXiv:0807.1200 \[astro-ph\]](#).
- [87] L. BLANCHET, M. S. S. QUSAILAH et C. M. WILL – « Gravitational recoil of inspiraling black hole binaries to second post-Newtonian order », *Astrophys. J.* **635** (2005), p. 508, [astro-ph/0507692](#).

- [88] M. R. BLANTON et al. – « The galaxy luminosity function and luminosity density at redshift $z = 0.1$ », *Astrophys. J.* **592** (2003), p. 819, [astro-ph/0210215](#).
- [89] T. BOGDANOVIĆ, C. S. REYNOLDS et M. C. MILLER – « Alignment of the spins of supermassive black holes prior to coalescence », *Astrophys. J.* **661** (2007), p. L147, [astro-ph/0703054](#).
- [90] C. G. BOLLINI et J. J. GIAMBIAGI – « Lowest order “divergent” graphs in ν -dimensional space », *Phys. Lett. B* **40** (1972), p. 566.
- [91] S. BONAZZOLA et E. GOURGOULHON – « Gravitational waves from neutron stars », *Relativistic gravitation and gravitational radiation* (J. A. Marck et J.-P. Lasota, éd.), Cambridge Contemporary Astrophysics, Cambridge University Press, 1997, p. 151, [astro-ph/9605187](#).
- [92] H. BONDI – « Plane gravitational waves in general relativity », *Nature* **179** (1957), p. 1072.
- [93] E. W. BONNING, G. A. SHIELDS et S. SALVIANDER – « Recoiling black holes in quasars », *Astrophys. J.* **666** (2007), p. L13, [arXiv:0705.4263 \[astro-ph\]](#).
- [94] F. BOURNAUD et al. – « Missing mass in collisional debris from galaxies », *Science* **316** (2007), p. 1166, [arXiv:0705.1356 \[astro-ph\]](#).
- [95] M. BOYLE et al. – « High-accuracy comparison of numerical relativity simulations with post-Newtonian expansions », *Phys. Rev. D* **76** (2007), p. 124038, [arXiv:0710.0158 \[gr-qc\]](#).
- [96] R. BRADA et M. MILGROM – « Exact solutions and approximations of MOND fields of disk galaxies », *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **276** (1995), p. 453, [astro-ph/9311062](#).
- [97] D. R. BRILL et J. B. HARTLE – « Method of the self-consistent field in general relativity and its application to the gravitational geon », *Phys. Rev.* **135** (1964), p. B271.
- [98] D. R. BRILL et R. W. LINDQUIST – « Interaction energy in geometrostatics », *Phys. Rev.* **131** (1963), p. 471.
- [99] D. BRIZUELA, J. M. MARTÍN-GARCÍA et M. TIGLIO – « Complete gauge-invariant formalism for arbitrary second-order perturbations of a Schwarzschild black hole », *Phys. Rev. D* **80** (2009), p. 024021, [arXiv:0903.1134 \[gr-qc\]](#).
- [100] B. BRÜGMANN, J. A. GONZÁLEZ, M. HANNAM, S. HUSA et U. SPERHAKE – « Exploring black hole superkicks », *Phys. Rev. D* **77** (2008), p. 124047, [arXiv:0707.0135 \[gr-qc\]](#).
- [101] J.-P. BRUNETON et G. ESPOSITO-FARÈSE – « Field-theoretical formulations of MOND-like gravity », *Phys. Rev. D* **76** (2007), p. 124012, Note de l'éditeur : *Phys. Rev. D* **76** (2007), p. 129902(E), [arXiv:0705.4043 \[gr-qc\]](#).
- [102] J.-P. BRUNETON, S. LIBERATI, L. SINDONIA et B. FAMAËY – « Reconciling MOND and dark matter ? », *JCAP* **3** (2009), p. 21, [arXiv:astro-ph \[0811.3143\]](#).

- [103] A. BUONANNO – « Gravitational waves from the early Universe », *Particle physics and cosmology : The quest for physics beyond the standard model(s) (TASI 2002)* (H. E. Haber et A. E. Nelson, éd.), World Scientific, 2004, p. 855, [gr-qc/0303085](#).
- [104] A. BUONANNO, G. B. COOK et F. PRETORIUS – « Inspiral, merger, and ring-down of equal-mass black-hole binaries », *Phys. Rev. D* **75** (2007), p. 124018, [gr-qc/0610122](#).
- [105] A. BUONANNO et T. DAMOUR – « Effective one-body approach to general relativistic two-body dynamics », *Phys. Rev. D* **59** (1999), p. 084006, [gr-qc/9811091](#).
- [106] — , « Transition from inspiral to plunge in binary black hole coalescences », *Phys. Rev. D* **62** (2000), p. 064015, [gr-qc/0001013](#).
- [107] L. M. BURKO – « Comments on the gravitational self-force problem », *Class. Quant. Grav.* **22** (2005), p. S847.
- [108] G. A. BURNETT – « The high-frequency limit in general relativity », *J. Math. Phys.* **30** (1989), p. 90.
- [109] M. CAMPANELLI – « Understanding the fate of merging supermassive black holes », *Class. Quant. Grav.* **22** (2005), p. S387, [astro-ph/0411744](#).
- [110] M. CAMPANELLI, C. LOUSTO, Y. ZLOCHOWER et D. MERRITT – « Large merger recoils and spin flips from generic black hole binaries », *Astrophys. J.* **659** (2007), p. L5, [gr-qc/0701164](#).
- [111] M. CAMPANELLI, C. O. LOUSTO, P. MARRONETTI et Y. ZLOCHOWER – « Accurate evolutions of orbiting black-hole binaries without excision », *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006), p. 111101, [gr-qc/0511048](#).
- [112] M. CAMPANELLI, C. O. LOUSTO, Y. ZLOCHOWER et D. MERRITT – « Maximum gravitational recoil », *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007), p. 231102, [gr-qc/0702133](#).
- [113] B. CARTER – « Convective variational approach to relativistic thermodynamics of dissipative fluids », *Proc. R. Soc. Lond. A* **433** (1991), p. 45.
- [114] B. CARTER et I. M. KHALATNIKOV – « Equivalence of convective and potential variational derivations of covariant superfluid dynamics », *Phys. Rev. D* **45** (1992), p. 4536.
- [115] M. CERDONIO et al. – « Wideband dual sphere detector of gravitational waves », *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001), p. 031101, [gr-qc/0011002](#).
- [116] S. CHANDRASEKHAR – « The post-Newtonian equations of hydrodynamics in general relativity », *Astrophys. J.* **142** (1965), p. 1488.
- [117] — , *The mathematical theory of black holes*, Oxford University Press, Oxford, 1983.
- [118] S. CHANDRASEKHAR et F. P. ESPOSITO – « The 5/2-post-Newtonian equations of hydrodynamics and radiation reaction in general relativity », *Astrophys. J.* **160** (1970), p. 153.
- [119] S. CHANDRASEKHAR et Y. NUTKU – « The second post-Newtonian equations of hydrodynamics in general relativity », *Astrophys. J.* **158** (1969), p. 55.

- [120] D.-I. CHOI et al. – « Recoiling from a kick in the head-on collision of spinning black holes », *Phys. Rev. D* **76** (2007), p. 104026, [gr-qc/0702016](#).
- [121] D. CLOWE et al. – « A direct empirical proof of the existence of dark matter », *Astrophys. J.* **648** (2006), p. L109, [astro-ph/0608407](#).
- [122] F. COMBES – « Properties of dark matter haloes », *New Astron. Rev.* **46** (2002), p. 755, [astro-ph/0206126](#).
- [123] F. COMBES et O. TIRET – « MOND and the galaxies », *Invisible Universe : Proceedings of the conference* (J.-M. Alimi et A. Füzfa, éd.), Astronomy and Astrophysics, vol. 1241, AIP Conference Proceedings, 2010, p. 154, [arXiv:0908.3289](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [124] C. R. CONTALDI, T. WISEMAN et B. WITHERS – « TeVeS gets caught on caustics », *Phys. Rev. D* **78** (2008), p. 044034, [arXiv:0802.1215](#) [[gr-qc](#)].
- [125] S. M. CROOM et al. – « The 2dF QSO redshift survey – XIV. Structure and evolution from the two-point correlation function », *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **356** (2005), p. 415, [astro-ph/0409314](#).
- [126] C. CUTLER et al. – « The last three minutes : Issues in gravitational-wave measurements of coalescing compact binaries », *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993), p. 2984.
- [127] C. CUTLER, L. S. FINN, E. POISSON et G. J. SUSSMAN – « Gravitational radiation from a particle in circular orbit around a black hole. II. Numerical results for the nonrotating case », *Phys. Rev. D* **47** (1993), p. 1511.
- [128] C. CUTLER et K. S. THORNE – « An overview of gravitational-wave sources », *General relativity and gravitation : Proceedings of the 16th international conference* (N. T. Bishop et S. D. Maharaj, éd.), World Scientific, 2002, p. 72, [gr-qc/0204090](#).
- [129] S. DAIN, C. O. LOUSTO et Y. ZLOCHOWER – « Extra-large remnant recoil velocities and spins from near-extremal-Bowen-York-spin black-hole binaries », *Phys. Rev. D* **78** (2008), p. 024039, [arXiv:0803.0351](#) [[gr-qc](#)].
- [130] N. DALAL, D. E. HOLZ, S. A. HUGHES et B. JAIN – « Short GRB and binary black hole standard sirens as a probe of dark energy », *Phys. Rev. D* **74** (2006), p. 063006, [gr-qc/0601275](#).
- [131] T. DAMOUR – « Problème des deux corps et freinage de rayonnement en relativité générale », *C. R. Acad. Sc. Paris* **294** (1982), p. 1355.
- [132] — , « Gravitational radiation and the motion of compact bodies », *Gravitational radiation* (N. Deruelle et T. Piran, éd.), North-Holland, 1983, p. 59.
- [133] — , « The problem of motion in Newtonian and Einsteinian gravity », *Three hundred years of gravitation* (S. W. Hawking et W. Israel, éd.), Cambridge University Press, 1987, p. 128.
- [134] — , « Gravitational self-force in a Schwarzschild background and the effective one-body formalism », *Phys. Rev. D* **81** (2010), p. 024017, [arXiv:0910.5533](#) [[gr-qc](#)].

- [135] T. DAMOUR et N. DERUELLE – « Radiation reaction and angular momentum loss in small angle gravitational scattering », *Phys. Lett. A* **87** (1981), p. 81.
- [136] — , « General relativistic celestial mechanics of binary systems I. The post-Newtonian motion », *Ann. Inst. Henri Poincaré* **43** (1985), p. 107.
- [137] — , « General relativistic celestial mechanics of binary systems II. The post-Newtonian timing formula », *Ann. Inst. Henri Poincaré* **44** (1986), p. 263.
- [138] T. DAMOUR et A. GOPAKUMAR – « Gravitational recoil during binary black hole coalescence using the effective one body approach », *Phys. Rev. D* **73** (2006), p. 124006, [gr-qc/0602117](#).
- [139] T. DAMOUR, P. JARANOWSKI et G. SCHÄFER – « Dynamical invariants for general relativistic two-body systems at the third post-Newtonian approximation », *Phys. Rev. D* **62** (2000), p. 044024, [gr-qc/9912092](#).
- [140] — , « Poincaré invariance in the ADM Hamiltonian approach to the general relativistic two-body problem », *Phys. Rev. D* **62** (2000), p. 021501(R), Erratum : *Phys. Rev. D* **63** (2000), p. 029903(E), [gr-qc/0003051](#).
- [141] — , « Dimensional regularization of the gravitational interaction of point masses », *Phys. Lett. B* **513** (2001), p. 147, [gr-qc/0105038](#).
- [142] — , « Equivalence between the ADM-Hamiltonian and the harmonic-coordinates approaches to the third post-Newtonian dynamics of compact binaries », *Phys. Rev. D* **63** (2001), p. 044021, Erratum : *Phys. Rev. D* **66** (2002), p. 029901(E), [gr-qc/0010040](#).
- [143] — , « Hamiltonian of two spinning compact bodies with next-to-leading order gravitational spin-orbit coupling », *Phys. Rev. D* **77** (2008), p. 064032, [arXiv:0711.1048](#) [[gr-qc](#)].
- [144] T. DAMOUR et A. NAGAR – « The effective one body description of the two-body problem », *Mass and motion in general relativity* (L. Blanchet, A. Spallicci et B. F. Whiting, éd.), Fundamental Theories of Physics, vol. 162, Springer, 2010, [arXiv:0906.1769](#) [[gr-qc](#)].
- [145] T. DAMOUR et J. H. TAYLOR – « On the orbital period change of the binary pulsar PSR 1913+16 », *Astrophys. J.* **366** (1991), p. 501.
- [146] — , « Strong-field tests of relativistic gravity and binary pulsars », *Phys. Rev. D* **45** (1992), p. 1840.
- [147] K. DANZMANN et A. RÜDIGER – « Lisa technology—concept, status, prospects », *Class. Quant. Grav.* **20** (2003), p. S1.
- [148] W. J. G. DE BLOK et S. S. MCGAUGH – « Testing modified Newtonian dynamics with low surface brightness galaxies : Rotation curve fits », *Astrophys. J.* **508** (1998), p. 132, [astro-ph/9805120](#).
- [149] N. DERUELLE – « Sur les équations du mouvement et le rayonnement gravitationnel d'un système binaire en relativité générale », Thèse, Université Paris VI, 1982.

- [150] S. DETWEILER – « Perspective on gravitational self-force analyses », *Class. Quant. Grav.* **22** (2005), p. S681, [gr-qc/0501004](#).
- [151] —, « Consequence of the gravitational self-force for circular orbits of the Schwarzschild geometry », *Phys. Rev. D* **77** (2008), p. 124026, [arXiv:0804.3529 \[gr-qc\]](#).
- [152] S. DETWEILER, E. MESSARITAKI et B. F. WHITING – « Self-force of a scalar field for circular orbits about a Schwarzschild black hole », *Phys. Rev. D* **67** (2003), p. 104016, [gr-qc/0205079](#).
- [153] S. DETWEILER et B. F. WHITING – « Self-force via a Green's function decomposition », *Phys. Rev. D* **67** (2003), p. 024025, [gr-qc/0202086](#).
- [154] B. DEVECCHI, E. RASIA, M. DOTTI, M. VOLONTERI et M. COLPI – « Imprints of recoiling massive black holes on the hot gas of early-type galaxies », *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **394** (2009), p. 633, [arXiv:0805.2609 \[astro-ph\]](#).
- [155] M. J. DISNEY et al. – « Galaxies appear simpler than expected », *Nature* **455** (2008), p. 1082, [arXiv:0811.1554 \[astro-ph\]](#).
- [156] S. DRASCO – « Strategies for observing extreme mass ratio inspirals », *Class. Quant. Grav.* **23** (2006), p. S769, [gr-qc/0604115](#).
- [157] M. DREES et G. GERBIER – « Dark matter », *Phys. Lett. B* **667** (2010), p. 212.
- [158] R. DURRER et R. MAARTENS – « Dark energy and dark gravity : Theory overview », *Gen. Rel. Grav.* **40** (2008), p. 301, [arXiv:0711.0077 \[astro-ph\]](#).
- [159] A. EINSTEIN – « Approximative integration of the field equations of gravitation », *Sitzker. Preuss. Akad. Wiss.* (1916), p. 688.
- [160] —, « On gravitational waves », *Sitzker. Preuss. Akad. Wiss.* (1918), p. 154.
- [161] A. EINSTEIN, L. INFELD et B. HOFFMANN – « Gravitational equations and the problem of motion », *Ann. Math.* **39** (1938), p. 65.
- [162] D. J. EISENSTEIN et al. – « Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies », *Astrophys. J.* **633** (2005), p. 560, [astro-ph/0501171](#).
- [163] R. EPSTEIN et R. V. WAGONER – « Post-Newtonian generation of gravitational waves », *Astrophys. J.* **197** (1975), p. 717.
- [164] Adresse Web du projet EUCLID : <http://sci.esa.int/euclid/>.
- [165] Adresse Web du détecteur EXPLORER : http://www.lnf.infn.it/esperimenti/rog/frame_explorer.htm.
- [166] S. M. FABER et R. E. JACKSON – « Velocity dispersions and mass-to-light ratios for elliptical galaxies », *Astrophys. J.* **204** (1976), p. 668.
- [167] V. FAFONE – « Developments in resonant-mass detectors », *Class. Quant. Grav.* **23** (2006), p. S223.

- [168] B. FAMAËY et J. BINNEY – « Modified Newtonian dynamics in the Milky Way », *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **363** (2005), p. 603, [astro-ph/0506723](#).
- [169] M. FAVATA, S. A. HUGHES et D. E. HOLZ – « How black holes get their kicks : Gravitational radiation recoil revisited », *Astrophys. J.* **607** (2004), p. L5, [astro-ph/0402056](#).
- [170] G. FAYE, L. BLANCHET et A. BUONANNO – « Higher-order spin effects in the dynamics of compact binaries. I. Equations of motion », *Phys. Rev. D* **74** (2006), p. 104033, Errata : *Phys. Rev. D* **75** (2007), p. 049903(E) & *Phys. Rev. D* **81** (2010), p. 089901(E), [gr-qc/0605139](#).
- [171] L. FERRARESE et D. MERRITT – « A fundamental relation between supermassive black holes and their host galaxies », *Astrophys. J.* **539** (2000), p. L9, [astro-ph/0006053](#).
- [172] B. D. FIELDS et S. SARKAR – « Big-Bang nucleosynthesis », *Phys. Lett. B* **667** (2010), p. 212.
- [173] A. FIENGA et al. – « INPOP08, a 4-D planetary ephemeris : From asteroid and time-scale computations to ESA Mars Express and Venus Express contributions », *Astron. Astrophys.* **507** (2009), p. 1675, [arXiv:0906.2860](#) [[astro-ph.EP](#)].
- [174] L. S. FINN – « Detectability of gravitational radiation from stellar-core collapse », *Non-linear problems in relativity and cosmology* (J. R. Buchler, S. Detweiler et J. R. Ipser, éd.), Annals of the New York Academy of Sciences, vol. 631, New York Academy of Sciences, 1991, p. 156.
- [175] L. S. FINN et K. S. THORNE – « Gravitational waves from a compact star in a circular, inspiral orbit, in the equatorial plane of a massive, spinning black hole, as observed by LISA », *Phys. Rev. D* **62** (2000), p. 124021, [gr-qc/0007074](#).
- [176] M. J. FITCHETT – « The influence of gravitational wave momentum losses on the centre of mass motion of a Newtonian binary system », *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **203** (1983), p. 1049.
- [177] M. J. FITCHETT et S. DETWEILER – « Linear momentum and gravitational waves : Circular orbits around a Schwarzschild black hole », *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **211** (1984), p. 933.
- [178] D. J. FIXSEN et al. – « The cosmic microwave background spectrum from the full COBE FIRAS data set », *Astrophys. J.* **473** (1996), p. 576, [astro-ph/9605054](#).
- [179] É. É. FLANAGAN et S. A. HUGHES – « The basics of gravitational wave theory », *New J. Phys.* **7** (2005), p. 204, [gr-qc/0501041](#).
- [180] V. A. FOCK – « On motion of finite masses in general relativity », *J. Phys. (Moscow)* **1**(2) (1939), p. 81.
- [181] W. L. FREEDMAN et al. – « Final results from the Hubble Space Telescope Key Project to measure the Hubble constant », *Astrophys. J.* **553** (2001), p. 47, [astro-ph/0012376](#).
- [182] K. C. FREEMAN – « On the disks of spiral and S0 galaxies », *Astrophys. J.* **160** (1970), p. 811, Erratum : *Astrophys. J.* **161** (1970), p. 802.

- [183] T. FUTAMASE – « Gravitational radiation reaction in the Newtonian limit », *Phys. Rev. D* **28** (1983), p. 2373.
- [184] —, « Strong-field point-particle limit and the equations of motion in the binary pulsar », *Phys. Rev. D* **36** (1987), p. 321.
- [185] T. FUTAMASE et Y. ITOH – « The post-Newtonian approximation for relativistic compact binaries », *Living Rev. Rel.* **10** (2007), p. 2.
- [186] T. FUTAMASE et B. F. SCHUTZ – « Newtonian and post-Newtonian approximations are asymptotic to general relativity », *Phys. Rev. D* **28** (1983), p. 2363.
- [187] K. GEBHARDT et al. – « A relationship between nuclear black hole mass and galaxy velocity dispersion », *Astrophys. J.* **539** (2000), p. L13, [astro-ph/0006289](#).
- [188] G. GENTILE et al. – « Tidal dwarf galaxies as a test of fundamental physics », *Astron. Astrophys.* **472** (2007), p. L25, [arXiv:0706.1976 \[astro-ph\]](#).
- [189] G. GENTILE, B. FAMAËY, H. ZHAO et P. SALUCCI – « Universality of galactic surface densities within one dark halo scale-length », *Nature* **461** (2006), p. 627, [arXiv:0909.5203 \[astro-ph.CO\]](#).
- [190] G. GENTILE, C. TONINI et P. SALUCCI – « Λ -CDM halo density profiles : Where do actual halos converge to NFW ones ? », *Astron. Astrophys.* **467** (2007), p. 925, [astro-ph/0701550](#).
- [191] Adresse Web du détecteur GEO : <http://www.geo600.org/>.
- [192] D. GERBAL, F. DURRET, M. LACHIÈZE-REY et G. LIMA-NETO – « Analysis of X-ray galaxy clusters in the framework of modified Newtonian dynamics », *Astron. Astrophys.* **262** (1992), p. 395.
- [193] G. W. GIBBONS et S. W. HAWKING – « Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation », *Phys. Rev. D* **15** (1977), p. 2738.
- [194] R. J. GLEISER, C. O. NICASIO, R. H. PRICE et J. PULLIN – « Gravitational radiation from Schwarzschild black holes : The second-order perturbation formalism », *Phys. Rept.* **325** (2000), p. 41, [gr-qc/9807077](#).
- [195] J. N. GOLDBERG, A. J. MACFARLANE, E. T. NEWMAN, F. ROHRICH et E. C. G. SUDARSHAN – « Spin-s spherical harmonics and $\tilde{\partial}$ », *J. Math. Phys.* **8** (1967), p. 2155.
- [196] P. GONDOLO – « Introduction to non-baryonic dark matter », Cours donné à l'école de Cargèse *Frontiers of the Universe*, NATO Advanced Study Institute, 2003, [astro-ph/0403064](#).
- [197] J. A. GONZÁLEZ, M. D. HANNAM, U. SPERHAKE, B. BRÜGMANN et S. HUSA – « Supermassive recoil velocities for binary black-hole mergers with antialigned spins », *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007), p. 231101, [gr-qc/0702052](#).
- [198] J. A. GONZÁLEZ, U. SPERHAKE et B. BRÜGMANN – « Black-hole binary simulations : The mass ratio 10:1 », *Phys. Rev. D* **79** (2009), p. 124006, [arXiv:0811.3952 \[gr-qc\]](#).

- [199] J. A. GONZÁLEZ, U. SPERHAKE, B. BRÜGMANN, M. HANNAM et S. HUSA – « Maximum kick from nonspinning black-hole binary inspiral », *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007), p. 091101, [gr-qc/0610154](#).
- [200] S. E. GRALLA et R. M. WALD – « A rigorous derivation of gravitational self-force », *Class. Quant. Grav.* **25** (2008), p. 205009, [arXiv:0806.3293 \[gr-qc\]](#).
- [201] Adresse Web du détecteur « Mário Schenberg » : <http://www.das.inpe.br/~graviton/>.
- [202] L. P. GRISHCHUK et S. M. KOPEIKIN – « The motion of a pair of gravitating bodies including the radiation reaction force », *Sov. Astron. Lett.* **9** (1983), p. 230.
- [203] L. GUALTIERI, E. BERTI, V. CARDOSO et U. SPERHAKE – « Transformation of the multipolar components of gravitational radiation under rotations and boosts », *Phys. Rev. D* **78** (2008), p. 044024, [arXiv:0805.1017 \[gr-qc\]](#).
- [204] J. HADAMARD – *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Hermann, Paris, 1932.
- [205] P. HAENSEL – « Solid interiors of neutron stars and gravitational radiation », *Relativistic gravitation and gravitational radiation* (J. A. Marck et J.-P. Lasota, eds.), Cambridge Contemporary Astrophysics, Cambridge University Press, 1997, p. 129, [astro-ph/9605164](#).
- [206] A. HALLE, H. S. ZHAO et B. LI – « A nonuniform dark energy fluid : Perturbation equations », *Astrophys. J. Suppl.* **177** (2008), p. 1, [arXiv:0711.0958 \[astro-ph\]](#).
- [207] M. HANNAM, S. HUSA, J. A. GONZÁLEZ, U. SPERHAKE et B. BRÜGMANN – « Where post-Newtonian and numerical-relativity waveforms meet », *Phys. Rev. D* **77** (2007), p. 044020, [arXiv:0706.1305 \[gr-qc\]](#).
- [208] J. HEALY et al. – « Superkicks in hyperbolic encounters of binary black holes », *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009), p. 041101, [arXiv:0807.3292 \[gr-qc\]](#).
- [209] T. M. HECKMAN, J. H. KROLIK, S. M. MORAN, J. SCHNITTMAN et S. GEZAR – « SDSSJ092712.65+294344.0 : NGC 1275 at $z = 0.7$? », *Astrophys. J.* **695** (2009), p. 363, [arXiv:0810.1244 \[astro-ph\]](#).
- [210] F. HERRMANN, I. HINDER, D. SHOEMAKER et P. LAGUNA – « Unequal mass binary black hole plunges and gravitational recoil », *Class. Quant. Grav.* **24** (2007), p. S33, [gr-qc/0601026](#).
- [211] F. HERRMANN, I. HINDER, D. SHOEMAKER, P. LAGUNA et R. A. MATZNER – « Gravitational recoil from spinning binary black hole mergers », *Astrophys. J.* **661** (2007), p. 430, [gr-qc/0701143](#).
- [212] F. HERRMANN, I. HINDER, D. M. SHOEMAKER et P. LAGUNA – « Binary black holes : Spin dynamics and gravitational recoil », *Phys. Rev. D* **76** (2007), p. 084032, [arXiv:0706.2541 \[gr-qc\]](#).
- [213] I. HINDER – « The current status of binary black hole simulations in numerical relativity », *Class. Quant. Grav.* **27** (2010), p. 114004, [arXiv:1001.5161 \[gr-qc\]](#).

- [214] G. 'T HOOFT et M. VELTMAN – « Regularization and renormalization of gauge fields », *Nucl. Phys. B* **44** (1972), p. 189.
- [215] W. HU et S. DODELSON – « Cosmic microwave background anisotropies », *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **40** (2002), p. 171, [astro-ph/0110414](#).
- [216] R. A. HULSE et J. H. TAYLOR – « Discovery of a pulsar in a binary system », *Astrophys. J.* **195** (1975), p. L51.
- [217] R. A. ISAACSON – « Gravitational radiation in the limit of high frequency. I. The linear approximation and geometrical optics », *Phys. Rev.* **166** (1968), p. 1263.
- [218] —, « Gravitational radiation in the limit of high frequency. II. Nonlinear terms and the effective stress tensor », *Phys. Rev.* **166** (1968), p. 1272.
- [219] Y. ITOH – « Equation of motion for relativistic compact binaries with the strong field point particle limit : Third post-Newtonian order », *Phys. Rev. D* **69** (2004), p. 064018, [gr-qc/0310029](#).
- [220] —, « Third-and-a-half order post-Newtonian equations of motion for relativistic compact binaries using the strong field point particle limit », *Phys. Rev. D* **80** (2009), p. 124003, [arXiv:0911.4232 \[gr-qc\]](#).
- [221] Y. ITOH et T. FUTAMASE – « New derivation of a third post-Newtonian equation of motion for relativistic compact binaries without ambiguity », *Phys. Rev. D* **68** (2003), p. 121501(R), [gr-qc/0310028](#).
- [222] B. R. IYER et C. M. WILL – « Post-Newtonian gravitational radiation reaction for two-body systems », *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993), p. 113.
- [223] —, « Post-Newtonian gravitational radiation reaction for two-body systems : Nonspinning bodies », *Phys. Rev. D* **52** (1995), p. 6882.
- [224] J. D. JACKSON – *Classical electrodynamics*, troisième éd., John Wiley, New York, 1998.
- [225] T. JACOBSON – « Einstein-æther gravity : A status report », *From quantum to emergent gravity : Theory and phenomenology*, vol. QG-Ph, Proceedings of Science, 2007, p. 020, [arXiv:0801.1547 \[gr-qc\]](#).
- [226] T. JACOBSON et D. MATTINGLY – « Gravity with a dynamical preferred frame », *Phys. Rev. D* **64** (2001), p. 024028, [gr-qc/0007031](#).
- [227] M.-T. JAEKEL et S. REYNAUD – « Post-Einsteinian tests of linearized gravitation », *Class. Quant. Grav.* **22** (2005), p. 2135, [gr-qc/0502007](#).
- [228] —, « Testing the Newton law at long distances », *Int. J. Mod. Phys. A* **20** (2005), p. 2294, [gr-qc/0501038](#).
- [229] P. JARANOWSKI et G. SCHÄFER – « Third post-Newtonian higher order ADM Hamilton dynamics for two-body point-mass systems », *Phys. Rev. D* **57** (1998), p. 7274, Erratum : *Phys. Rev. D* **63** (2000), p. 029902(E), [gr-qc/9712075](#).
- [230] Adresse Web du projet JDEM : <http://jdem.lbl.gov/>.

- [231] D. I. JONES – « Gravitational waves from rotating strained neutron stars », *Class. Quant. Grav.* **19** (2002), p. 1255, [gr-qc/0111007](#).
- [232] L. JU, D. G. BLAIR et C. ZHAO – « Detection of gravitational waves », *Rep. Prog. Phys.* **63** (2000), p. 1317.
- [233] M. KAPLINGHAT et M. TURNER – « How cold dark matter theory explains Milgrom's law », *Astrophys. J.* **569** (2002), p. L19, [astro-ph/0107284](#).
- [234] D. J. KENNEFICK – *Traveling at the speed of thought : Einstein and the quest for gravitational waves*, Princeton University Press, Princeton, 2007.
- [235] D. KEPPEL, D. A. NICHOLS, Y. CHEN et K. S. THORNE – « Momentum flow in black-hole binaries. II. Post-Newtonian analysis of the inspiral and spin-induced bobbing », *Phys. Rev. D* **80** (2009), p. 124015, [arXiv:0902.4077 \[gr-qc\]](#).
- [236] G. D. KERLICK – « Finite reduced hydrodynamic equations in the slow-motion approximation to general relativity. Part I. First post-Newtonian equations », *Gen. Rel. Grav.* **12** (1980), p. 467.
- [237] — , « Finite reduced hydrodynamic equations in the slow-motion approximation to general relativity. Part II. Radiation reaction and higher-order divergent terms », *Gen. Rel. Grav.* **12** (1980), p. 521.
- [238] M. KESDEN, U. SPERHAKE et E. BERTI – « Relativistic suppression of black hole recoils », *Astrophys. J.* **715** (2010), p. 1006, [arXiv:1003.4993 \[astro-ph.CO\]](#).
- [239] L. E. KIDDER – « Coalescing binary systems of compact objects to (post)^{5/2}-Newtonian order. v. Spin effects », *Phys. Rev. D* **52** (1995), p. 821, [gr-qc/9506022](#).
- [240] — , « Using full information when computing modes of post-Newtonian waveforms from inspiralling compact binaries in circular orbit », *Phys. Rev. D* **77** (2008), p. 044016, [arXiv:0710.0614 \[gr-qc\]](#).
- [241] C. S. KOCHANNEK – « Coalescing binary neutron stars », *Astrophys. J.* **398** (1992), p. 234.
- [242] K. D. KOKKOTAS et B. SCHMIDT – « Quasi-normal modes of stars and black holes », *Living Rev. Rel.* **2** (1999), p. 2, [gr-qc/9909058](#).
- [243] E. KOMATSU et al. – « Five-year Wilkinson microwave anisotropy probe observations : Cosmological interpretation », *Astrophys. J. Suppl.* **180** (2009), p. 330, [arXiv:0803.0547 \[astro-ph\]](#).
- [244] S. KOMOSSA, H. ZHOU et H. LU – « A recoiling supermassive black hole in the quasar SDSS J092712.65+294344.0 ? », *Astrophys. J.* **678** (2008), p. L81, [arXiv:0804.4585 \[astro-ph\]](#).
- [245] C. KÖNIGSDÖRFFER, G. FAYE et G. SCHÄFER – « Binary black-hole dynamics at the third-and-a-half post-Newtonian order in the ADM formalism », *Phys. Rev. D* **68** (2003), p. 044004, [gr-qc/0305048](#).
- [246] S. M. KOPEIKIN – « General relativistic equations of binary motion for extended bodies with conservative corrections and radiation damping », *Sov. Astron.* **29** (1985), p. 516.

- [247] M. KOPPITZ et al. – « Recoil velocities from equal-mass binary-black-hole mergers », *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007), p. 041102, [gr-qc/0701163](#).
- [248] M. KOWALSKI et al. – « Improved cosmological constraints from new, old, and combined supernova data sets », *Astrophys. J.* **686** (2008), p. 749, [arXiv:0804.4142 \[astro-ph\]](#).
- [249] M. KRAMER et al. – « Tests of general relativity from timing the double pulsar », *Science* **314** (2006), p. 97, [astro-ph/0609417](#).
- [250] M. KRAMER et N. WEX – « The double pulsar system : A unique laboratory for gravity », *Class. Quant. Grav.* **26** (2009), p. 073001.
- [251] A. V. KRAVTSOV, O. Y. GNEDIN et A. A. KLYPIN – « The tumultuous lives of galactic dwarfs and the missing satellites problem », *Astrophys. J.* **609** (2004), p. 482, [astro-ph/0401088](#).
- [252] P. KROUPA et al. – « Local-group tests of dark-matter concordance cosmology. Towards a new paradigm for structure formation », *Astron. Astrophys.* (2010), [arXiv:1006.1647 \[astro-ph.CO\]](#).
- [253] M. LACHIÈZE-REY et J.-P. LUMINET – « Cosmic topology », *Phys. Rept.* **254** (1995), p. 135, [gr-qc/9605010](#).
- [254] P. A. LAGERSTROM – *Matched asymptotic expansions : Ideas and techniques*, Springer, New York, 1988.
- [255] O. LAHAV et A. R. LIDDLE – « The cosmological parameters », *Phys. Lett. B* **667** (2010), p. 212, [arXiv:1002.3488 \[astro-ph.CO\]](#).
- [256] L. D. LANDAU et E. M. LIFSHITZ – *The classical theory of fields*, quatrième éd., Butterworth-Heinemann, Oxford, 1975.
- [257] D. LANGLOIS – « Inflation, quantum fluctuations and cosmological perturbations », *Particle physics and cosmology : The interface* (D. Kazakov et G. Smadja, éds.), NATO Science Series, vol. 188, Springer, 2005, p. 235, [hep-th/0405053](#).
- [258] S. R. LAU – « Rapid evaluation of radiation boundary kernels for time-domain wave propagation on black holes : Implementation and numerical tests », *Class. Quant. Grav.* **21** (2004), p. 4147, [gr-qc/0401001](#).
- [259] —, « Rapid evaluation of radiation boundary kernels for time-domain wave propagation on black holes : Theory and numerical methods », *J. Comp. Phys.* **199** (2004), p. 376, [gr-qc/0401001](#).
- [260] Adresse Web du projet LCGT : <http://gw.icrr.u-tokyo.ac.jp/lcgt/>.
- [261] A. LE TIEC et L. BLANCHET – « The close-limit approximation for black hole binaries with post-Newtonian initial conditions », *Class. Quant. Grav.* **27** (2010), p. 045008, [arXiv:0910.4593 \[gr-qc\]](#).
- [262] A. LE TIEC, L. BLANCHET et C. M. WILL – *in preparation* (2010).
- [263] —, « The gravitational-wave recoil from the ringdown phase of coalescing black hole binaries », *Class. Quant. Grav.* **27** (2010), p. 121001, [arXiv:0910.4594 \[gr-qc\]](#).

- [264] A. LICHNEROWICZ – *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1955.
- [265] Adresse Web du détecteur LIGO : <http://www.ligo.caltech.edu/>.
- [266] Z. LIPPAI, Z. FREI et Z. HAIMAN – « Prompt shocks in the gas disk around a recoiling supermassive black hole binary », *Astrophys. J.* **676** (2008), p. L5, [arXiv:0801.0739 \[astro-ph\]](#).
- [267] V. M. LIPUNOV, K. A. POSTNOV et M. E. PROKHOROV – « Formation and coalescence of relativistic binary stars : The effect of kick velocity », *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **288** (1997), p. 245, [astro-ph/9702060](#).
- [268] Adresses Web ESA & NASA du projet LISA : <http://sci.esa.int/lisa/> & <http://lisa.jpl.nasa.gov/>.
- [269] H. A. LORENTZ et J. DROSTE – « De beweging van een stelsel lichamen onder den invloed van hunne onderlinge aantrekking, behandeld volgens de theorie van Einstein I,II », *Versl. K. Akad. Wet. Amsterdam* **26** (1917), p. 392 & 649.
- [270] C. O. LOUSTO, M. CAMPANELLI, Y. ZLOCHOWER et H. NAKANO – « Remnant masses, spins and recoils from the merger of generic black-hole binaries », *Class. Quant. Grav.* **27** (2010), p. 114006, [arXiv:0904.3541 \[gr-qc\]](#).
- [271] C. O. LOUSTO et Y. ZLOCHOWER – « Further insight into gravitational recoil », *Phys. Rev. D* **77** (2008), p. 044028, [arXiv:0708.4048 \[gr-qc\]](#).
- [272] —, « Modeling gravitational recoil from precessing highly spinning unequal-mass black-hole binaries », *Phys. Rev. D* **79** (2008), p. 064018, [arXiv:0805.0159 \[gr-qc\]](#).
- [273] P. MADAU et E. QUATAERT – « The effect of gravitational-wave recoil on the demography of massive black holes », *Astrophys. J.* **606** (2004), p. L17, [astro-ph/0403295](#).
- [274] M. MAGGIORE – « Gravitational wave experiments and early Universe cosmology », *Phys. Rept.* **331** (2000), p. 283, [gr-qc/9909001](#).
- [275] —, *Gravitational waves : Theory and experiments*, Oxford University Press, Oxford, 2007.
- [276] K. MARTEL – « Gravitational waveforms from a point particle orbiting a Schwarzschild black hole », *Phys. Rev. D* **69** (2004), p. 044025, [gr-qc/0311017](#).
- [277] K. MARTEL et E. POISSON – « Gravitational perturbations of the Schwarzschild spacetime : A practical covariant and gauge-invariant formalism », *Phys. Rev. D* **71** (2005), p. 104003, [gr-qc/0502028](#).
- [278] J. C. MATHER, D. J. FIXSEN, R. A. SHAFER, C. MOSIER et D. T. WILKINSON – « Calibrator design for the COBE far infrared absolute spectrophotometer (FIRAS) », *Astrophys. J.* **512** (1999), p. 511, [astro-ph/9810373](#).
- [279] J. MATHEWS – « Gravitational multipole radiation », *J. Soc. Ind. Appl. Math.* **10** (1962), p. 768.

- [280] S. S. McGAUGH et W. J. G. DE BLOK – « Testing the dark matter hypothesis with low surface brightness galaxies and other evidence », *Astrophys. J.* **499** (1998), p. 41, [astro-ph/9801123](#).
- [281] — , « Testing the hypothesis of modified dynamics with low surface brightness galaxies and other evidence », *Astrophys. J.* **499** (1998), p. 66, [astro-ph/9801102](#).
- [282] S. S. McGAUGH, J. M. SCHOMBERT, G. D. BOTHUN et W. J. G. DE BLOK – « The baryonic Tully-Fisher relation », *Astrophys. J.* **533** (2000), p. L99, [astro-ph/0003001](#).
- [283] D. MERITT, M. MILOSAVLJEVIĆ, M. FAVATA, S. A. HUGUES et D. E. HOLZ – « Consequences of gravitational radiation recoil », *Astrophys. J.* **607** (2004), p. L9, [astro-ph/0402057](#).
- [284] S. M. MERKOWITZ, P. G. MAGHAMI, A. SHARMA, W. D. WILLIS et C. M. ZAKRZWSKI – « A μ Newton thrust-stand for LISA », *Class. Quant. Grav.* **19** (2002), p. 1745.
- [285] M. MILGROM – « A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis », *Astrophys. J.* **270** (1983), p. 365.
- [286] — , « A modification of the Newtonian dynamics : Implications for galaxies », *Astrophys. J.* **270** (1983), p. 371.
- [287] — , « A modification of the Newtonian dynamics : Implications for galaxy systems », *Astrophys. J.* **270** (1983), p. 384.
- [288] — , « Alternatives to dark matter », *Comm. Astrophys.* **13** (1989), p. 4.
- [289] — , « Do modified Newtonian dynamics follow from the cold dark matter paradigm ? », *Astrophys. J.* **571** (2002), p. L81, [astro-ph/0110362](#).
- [290] — , « MOND-theoretical aspects », *New Astron. Rev.* **46** (2002), p. 741, [astro-ph/0207231](#).
- [291] — , « Marriage à-la-MOND : Baryonic dark matter in galaxy clusters and the cooling flow puzzle », *New Astron. Rev.* **51** (2008), p. 906, [arXiv:0712.4203](#) [[astro-ph](#)].
- [292] — , « The MOND paradigm », Présentation donnée aux 19^e rencontres de Blois, 2008, [arXiv:0801.3133](#) [[astro-ph](#)].
- [293] M. MILOSAVLJEVIĆ et D. MERRITT – « Long-term evolution of massive black hole binaries », *Astrophys. J.* **596** (2003), p. 860, [astro-ph/0212459](#).
- [294] Adresse Web du détecteur miniGRAIL : <http://www.minigrail.nl/>.
- [295] Y. MINO, M. SASAKI, M. SHIBATA, H. TAGOSHI et T. TANAKA – « Black hole perturbation », *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **128** (1997), p. 1, [gr-qc/9712057](#).
- [296] Y. MINO, M. SASAKI et T. TANAKA – « Gravitational radiation reaction to a particle motion », *Phys. Rev. D* **55** (1997), p. 3457, [gr-qc/9606018](#).
- [297] C. W. MISNER – « Wormhole initial conditions », *Phys. Rev.* **118** (1960), p. 1110.
- [298] C. W. MISNER, K. S. THORNE et J. A. WHEELER – *Gravitation*, Freeman, New York, 1973.

- [299] T. MITCHELL et C. M. WILL – « Post-Newtonian gravitational radiation and equations of motion via direct integration of the relaxed Einstein equations. v. Evidence for the strong equivalence principle to second post-Newtonian order », *Phys. Rev. D* **75** (2007), p. 124025, [arXiv:0704.2243 \[gr-qc\]](#).
- [300] R. MOHAYAEE, J. COLIN et J. SILK – « Gamma-ray emission from dark matter wakes of recoiled black holes », *Astrophys. J.* **674** (2008), p. L21, [arXiv:0709.3321 \[astro-ph\]](#).
- [301] B. MOORE et al. – « Dark matter substructure within galactic halos », *Astrophys. J.* **524** (1999), p. L19, [astro-ph/9907411](#).
- [302] V. F. MUKHANOV, H. A. FELDMAN et R. H. BRANDENBERGER – « Theory of cosmological perturbations », *Phys. Rept.* **215** (1992), p. 203.
- [303] E. MÜLLER – « Gravitational waves from core collapse supernovæ », *Relativistic gravitation and gravitational radiation* (J. A. Marck et J.-P. Lasota, éd.), Cambridge Contemporary Astrophysics, Cambridge University Press, 1997, p. 273.
- [304] A. NAGAR et L. REZZOLLA – « Gauge-invariant non-spherical metric perturbations of Schwarzschild black-hole spacetimes », *Class. Quant. Grav.* **22** (2005), p. R167, [gr-qc/0502064](#).
- [305] H. NAKANO, N. SAGO et M. SASAKI – « Gauge problem in the gravitational self-force : First post-Newtonian force in the Regge-Wheeler gauge », *Phys. Rev. D* **68** (2003), p. 124003, [gr-qc/0308027](#).
- [306] Adresse Web du détecteur NAUTILUS :
http://www.lnf.infn.it/esperimenti/rog/frame_nautilus.htm.
- [307] J. F. NAVARRO, C. S. FRENK et S. D. M. WHITE – « The assembly of galaxies in a hierarchically clustering universe », *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **275** (1995), p. 56, [astro-ph/9408067](#).
- [308] —, « A universal density profile from hierarchical clustering », *Astrophys. J.* **490** (1997), p. 493, [astro-ph/9611107](#).
- [309] E. NEWMAN et R. PENROSE – « An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients », *J. Math. Phys.* **3** (1962), p. 566.
- [310] E. T. NEWMAN et R. PENROSE – « Note on the Bondi-Metzner-Sachs group », *J. Math. Phys.* **7** (1966), p. 863.
- [311] D. A. NICHOLS et Y. CHEN – « A hybrid method for understanding black-hole mergers : Head-on case », (2010), [arXiv:1007.2024 \[gr-qc\]](#).
- [312] S. NISSANKE et L. BLANCHET – « Gravitational radiation reaction in the equations of motion of compact binaries to 3.5 post-Newtonian order », *Class. Quant. Grav.* **22** (2005), p. 1007, [gr-qc/0412018](#).
- [313] H.-T. NOLLERT – « Quasinormal modes : The characteristic sound of black holes and neutron stars », *Class. Quant. Grav.* **16** (1999), p. R159.

- [314] M. R. NOLTA et al. – « Five-year Wilkinson microwave anisotropy probe observations : Angular power spectra », *Astrophys. J. Suppl.* **180** (2009), p. 296, [arXiv:0803.0593 \[astro-ph\]](#).
- [315] K. A. OLIVE, G. STEIGMAN et T. P. WALKER – « Primordial nucleosynthesis : Theory and observations », *Phys. Rept.* **333** (2000), p. 389, [astro-ph/9905320](#).
- [316] J. P. OSTRICKER et P. J. STEINHARDT – « The observational case for a low-density Universe with a non-zero cosmological constant », *Nature* **377** (1995), p. 600.
- [317] C. D. OTT – « The gravitational-wave signature of core-collapse supernovae », *Class. Quant. Grav.* **26** (2009), p. 063001, [arXiv:0809.0695 \[astro-ph\]](#).
- [318] Y. PAN et al. – « A data-analysis driven comparison of analytic and numerical coalescing binary waveforms : Nonspinning case », *Phys. Rev. D* **77** (2007), p. 024014, [arXiv:0704.1964 \[gr-qc\]](#).
- [319] A. PAPAPETROU – « Spinning test-particles in general relativity. I », *Proc. Roy. Soc. Lon. A* **209** (1951), p. 248.
- [320] —, « Une formule pour le rayonnement gravitationnel en première approximation », *C. R. Acad. Sci. Paris* **255** (1962), p. 1578.
- [321] —, « Étude systématique de rayonnement gravitationnel 4-polaire. Énergie-impulsion et moment cinétique du rayonnement », *Ann. Inst. Henri Poincaré* **14** (1971), p. 79.
- [322] M. PATI et C. M. WILL – « Post-Newtonian gravitational radiation and equations of motion via direct integration of the relaxed Einstein equations. I. Foundations », *Phys. Rev. D* **62** (2000), p. 124015, [gr-qc/0007087](#).
- [323] —, « Post-Newtonian gravitational radiation and equations of motion via direct integration of the relaxed Einstein equations. II. Two-body equations of motion to second post-Newtonian order, and radiation-reaction to 3.5 post-Newtonian order », *Phys. Rev. D* **65** (2002), p. 104008, [gr-qc/0201001](#).
- [324] P. J. E. PEEBLES et A. NUSSER – « Nearby galaxies as pointers to a better theory of cosmic evolution », *Nature* **465** (2010), p. 565, [arXiv:1001.1484 \[astro-ph.CO\]](#).
- [325] A. PERES – « Classical radiation recoil », *Phys. Rev.* **128** (1962), p. 2471.
- [326] S. PERLMUTTER et al. – « Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae », *Astrophys. J.* **517** (1999), p. 565, [astro-ph/9812133](#).
- [327] P. PETER et J.-P. UZAN – *Cosmologie primordiale*, Belin, Paris, 2005.
- [328] P. C. PETERS – « Gravitational radiation and the motion of two point masses », *Phys. Rev.* **136** (1964), p. B1224.
- [329] P. C. PETERS et J. MATHEWS – « Gravitational radiation from point masses in a Keplerian orbit », *Phys. Rev.* **131** (1963), p. 435.
- [330] F. A. E. PIRANI – « Invariant formulation of gravitational radiation theory », *Phys. Rev.* **105** (1957), p. 1089.

- [331] E. POINTECOUTEAU et J. SILK – « New constraints on modified Newtonian dynamics from galaxy clusters », *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **364** (2005), p. 654, [astro-ph/0505017](#).
- [332] E. POISSON – « Gravitational radiation from a particle in circular orbit around a black hole. I. Analytical results for the nonrotating case », *Phys. Rev. D* **47** (1993), p. 1497.
- [333] — , « Gravitational radiation from a particle in circular orbit around a black hole. IV. Analytical results for the slowly rotating case », *Phys. Rev. D* **48** (1993), p. 1860.
- [334] — , « Gravitational radiation from a particle in circular orbit around a black hole. VI. Accuracy of the post-Newtonian expansion », *Phys. Rev. D* **52** (1995), p. 5719, Erratum et Addendum : *Phys. Rev. D* **55** (1997), p. 7980, [gr-qc/9505030](#).
- [335] — , « The motion of point particles in curved spacetime », *Living Rev. Rel.* **7** (2004), p. 6, [gr-qc/0306052](#).
- [336] E. POISSON et M. SASAKI – « Gravitational radiation from a particle in circular orbit around a black hole. V. Black-hole absorption and tail corrections », *Phys. Rev. D* **51** (1995), p. 5753, [gr-qc/9412027](#).
- [337] D. POLLNEY et al. – « Recoil velocities from equal-mass binary black-hole mergers : A systematic investigation of spin-orbit aligned configurations », *Phys. Rev. D* **76** (2007), p. 124002, [arXiv:0707.2559](#) [gr-qc].
- [338] O. POUJADE – « Itération post-newtonienne du champ de gravitation d'un système isolé en relativité générale », Thèse, Université Paris VII, 2002.
- [339] O. POUJADE et L. BLANCHET – « Post-Newtonian approximation for isolated systems calculated by matched asymptotic expansions », *Phys. Rev. D* **65** (2002), p. 124020, [gr-qc/0112057](#).
- [340] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING et B. P. FLANNERY – *Numerical recipes : The art of scientific computing*, troisième éd., Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [341] F. PRETORIUS – « Evolution of binary black-hole spacetimes », *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005), p. 121101, [gr-qc/0507014](#).
- [342] — , « Binary black hole coalescence », *Physics of relativistic objects in compact binaries : From birth to coalescence* (M. Colpi, P. Casella, V. Gorini et U. M. A. Possenti, eds.), Astrophysics and Space Science Library, vol. 359, Springer & Canopus Publishing Limited, 2009, p. 305, [arXiv:0710.1338](#) [gr-qc].
- [343] R. H. PRICE et J. PULLIN – « Colliding black holes : The close limit », *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994), p. 3297, [gr-qc/9402039](#).
- [344] T. C. QUINN et R. M. WALD – « Axiomatic approach to electromagnetic and gravitational radiation reaction of particles in curved spacetime », *Phys. Rev. D* **56** (1997), p. 3381, [gr-qc/9610053](#).
- [345] É. RACINE, A. BUONANNO et L. E. KIDDER – « Recoil velocity at second post-Newtonian order for spinning black hole binaries », *Phys. Rev. D* **80** (2009), p. 044010, [arXiv:0812.4413](#) [gr-qc].

- [346] M. J. REES – « Gravitational waves from galactic centres ? », *Class. Quant. Grav.* **14** (1997), p. 1411.
- [347] T. REGGE et J. A. WHEELER – « Stability of a Schwarzschild singularity », *Phys. Rev.* **108** (1957), p. 1063.
- [348] L. REZZOLLA, R. P. MACEDO et J. L. JARAMILLO – « Understanding the “antikick” in the merger of binary black holes », *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010), p. 221101, [arXiv:1003.0873 \[gr-qc\]](#).
- [349] A. G. RIESS et al. – « Observational evidence from supernovæ for an accelerating Universe and a cosmological constant », *Astron. J.* **116** (1998), p. 1009, [astro-ph/9805201](#).
- [350] N. A. ROBERTSON – « Laser interferometric gravitational wave detectors », *Class. Quant. Grav.* **17** (2000), p. R19.
- [351] M. RUIZ, M. ALCUBIERRE, D. NÚÑEZ et R. TAKAHASHI – « Multipole expansions for energy and momenta carried by gravitational waves », *Gen. Rel. Grav.* **40** (2008), p. 1705, [arXiv:0707.4654 \[gr-qc\]](#).
- [352] F. D. RYAN – « Gravitational waves from the inspiral of a compact object into a massive, axisymmetric body with arbitrary multipole moments », *Phys. Rev. D* **52** (1995), p. 5707.
- [353] — , « Accuracy of estimating the multipole moments of a massive body from the gravitational waves of a binary inspiral », *Phys. Rev. D* **56** (1997), p. 1845.
- [354] N. SAGO – « Gravitational self-force effects on a point mass moving around a Schwarzschild black hole », *Class. Quant. Grav.* **26** (2009), p. 094025.
- [355] N. SAGO, L. BARACK et S. DETWEILER – « Two approaches for the gravitational self-force in black hole spacetime : Comparison of numerical results », *Phys. Rev. D* **78** (2008), p. 124024, [arXiv:0810.2530 \[gr-qc\]](#).
- [356] N. SAGO, H. NAKANO et M. SASAKI – « Gauge problem in the gravitational self-force : Harmonic gauge approach in the Schwarzschild background », *Phys. Rev. D* **67** (2003), p. 104017, [gr-qc/0208060](#).
- [357] P. SALUCCI et A. BURKERT – « Dark matter scaling relations », *Astrophys. J.* **537** (2000), p. L9, [astro-ph/0004397](#).
- [358] R. H. SANDERS – « A stratified framework for scalar-tensor theories of modified dynamics », *Astrophys. J.* **480** (1997), p. 492, [astro-ph/9612099](#).
- [359] — , « The virial discrepancy in clusters of galaxies in the context of modified Newtonian dynamics », *Astrophys. J.* **512** (1999), p. L23, [astro-ph/9807023](#).
- [360] — , « A tensor-vector-scalar framework for modified dynamics and cosmic dark matter », *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **363** (2005), p. 459, [astro-ph/0502222](#).
- [361] R. H. SANDERS et S. S. MCGAUGH – « Modified Newtonian dynamics as an alternative to dark matter », *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **40** (2002), p. 263, [astro-ph/0204521](#).

- [362] R. H. SANDERS et E. NOORDERMEER – « Confrontation of modified Newtonian dynamics with the rotation curves of early-type disc galaxies », *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **379** (2007), p. 702, [astro-ph/0703352](#).
- [363] R. H. SANDERS et M. A. W. VERHEIJEN – « Rotation curves of Ursa Major galaxies in the context of modified Newtonian dynamics », *Astrophys. J.* **503** (1998), p. 97, [astro-ph/9802240](#).
- [364] M. SASAKI et H. TAGOSHI – « Analytic black hole perturbation approach to gravitational radiation », *Living Rev. Rel.* **6** (2003), p. 5, [gr-qc/0306120](#).
- [365] B. S. SATHYAPRAKASH et B. F. SCHUTZ – « Physics, astrophysics and cosmology with gravitational waves », *Living Rev. Rel.* **12** (2009), p. 2, [arXiv:0903.0338](#) [gr-qc].
- [366] J. D. SCHNITTMAN – « Retaining black holes with very large recoil velocities », *Astrophys. J.* **667** (2007), p. L133, [arXiv:0706.1548](#) [astro-ph].
- [367] J. D. SCHNITTMAN et al. – « Anatomy of the binary black hole recoil : A multipolar analysis », *Phys. Rev. D* **77** (2008), p. 044031, [arXiv:0707.0301](#) [gr-qc].
- [368] B. F. SCHUTZ – « Determining the Hubble constant from gravitational wave observations », *Nature* **323** (1987), p. 310.
- [369] —, « Fundamental physics with LISA », *Class. Quant. Grav.* **26** (2009), p. 094020.
- [370] L. SCHWARTZ – *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1978.
- [371] J. A. SELLWOOD et A. KOSOWSKY – « Does dark matter exist ? », *Gas and galaxy evolution : A conference in honor of the 20th anniversary of the VLA* (J. E. Hibbard, M. P. Rupen et J. H. van Gorkom, éd.), ASP Conference Series, vol. 240, Astronomical Society of the Pacific, 2001, p. 311, [astro-ph/0009074](#).
- [372] A. SESANA, M. VOLONTERI et F. HAARDT – « The imprint of massive black hole formation models on the LISA data stream », *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **377** (2007), p. 1711, [astro-ph/0701556](#).
- [373] M. SHIBATA, M. SASAKI, H. TAGOSHI et T. TANAKA – « Gravitational waves from a particle orbiting around a rotating black hole : Post-Newtonian expansion », *Phys. Rev. D* **51** (1995), p. 1646, [gr-qc/9409054](#).
- [374] G. A. SHIELDS, E. W. BONNING et S. SALVIANDER – « Comment on the black hole recoil candidate quasar SDSS J092712.65+294344.0 », *Astrophys. J.* **696** (2009), p. 1367, [arXiv:0810.2563](#) [astro-ph].
- [375] G. A. SHIELDS et al. – « The quasar SDSS J105041.35+345631.3 : Black hole recoil or extreme double-peaked emitter ? », *Astrophys. J.* **707** (2009), p. 936, [arXiv:0907.3470](#) [astro-ph.CO].
- [376] S. SIGURDSSON et M. J. REES – « Capture of stellar mass compact objects by massive black holes in galactic cusps », *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **284** (1997), p. 318, [astro-ph/9608093](#).

- [377] C. SKORDIS – « Generalizing tensor-vector-scalar cosmology », *Phys. Rev. D* **77** (2008), p. 123502, [arXiv:0801.1985 \[astro-ph\]](#).
- [378] C. SKORDIS, D. F. MOTA, P. G. FERREIRA et C. BÖHM – « Large scale structure in Bekenstein's theory of relativistic modified Newtonian dynamics », *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006), p. 011301, [astro-ph/0505519](#).
- [379] L. SMARR – « Gauge conditions, radiation formulae and the two black hole collision », *Sources of gravitational radiation* (L. Smarr, éd.), Cambridge University Press, 1979, p. 245.
- [380] A. SOMMERFELD – *Partial differential equations in physics*, Academic Press, New York, 1949.
- [381] C. F. SOPENA, N. YUNES et P. LAGUNA – « Gravitational recoil from binary black hole mergers : The close-limit approximation », *Phys. Rev. D* **74** (2006), p. 124010, Errata : *Phys. Rev. D* **75** (2007), p. 069903(E) & *Phys. Rev. D* **78** (2008), p. 049901(E), [astro-ph/0608600](#).
- [382] — , « Gravitational recoil velocities from eccentric binary black hole mergers », *Astrophys. J.* **656** (2007), p. L9, [astro-ph/0611110](#).
- [383] K. SPEKKENS, R. GIOVANELLI et M. P. HAYNES – « The cusp/core problem in galactic halos : Long-slit spectra for a large dwarf galaxy sample », *Astron. J.* **129** (2005), p. 2119, [astro-ph/0502166](#).
- [384] D. N. SPERGEL et al. – « Three-year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations : Implications for cosmology », *Astrophys. J.* **170** (2007), p. 377, [astro-ph/0603449](#).
- [385] J. STEWART – *Advanced general relativity*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [386] J. M. STEWART et M. WALKER – « Perturbations of space-times in general relativity », *Proc. Roy. Soc. Lon. A* **341** (1974), p. 49.
- [387] P. A. SUNDARARAJAN, G. KHANNA, S. A. HUGHES et S. DRASCO – « Towards adiabatic waveforms for inspiral into Kerr black holes. II. Dynamical sources and generic orbits », *Phys. Rev. D* **78** (2008), p. 024022, [arXiv:0803.0317 \[gr-qc\]](#).
- [388] R. A. SWATERS, B. F. MADORE, F. C. VAN DEN BOSCH et M. BALCELLS – « The central mass distribution in dwarf and low surface brightness galaxies », *Astrophys. J.* **583** (2003), p. 732, [astro-ph/0210152](#).
- [389] J. L. SYNGE – « Relativistic hydrodynamics », *Proc. Lond. Math. Soc.* **s2-43** (1938), p. 376.
- [390] H. TAGOSHI – « Post-Newtonian expansion of gravitational waves from a particle in slightly eccentric orbit around a rotating black hole », *Prog. Theor. Phys.* **93** (1995), p. 307.
- [391] H. TAGOSHI et T. NAKAMURA – « Gravitational waves from a point particle in circular orbit around a black hole : Logarithmic terms in the post-Newtonian expansion », *Phys. Rev. D* **49** (1994), p. 4016.

- [392] H. TAGOSHI et M. SASAKI – « Post-Newtonian expansion of gravitational waves from a particle in circular orbit around a Schwarzschild black hole », *Prog. Theor. Phys.* **92** (1994), p. 745, [gr-qc/9405062](#).
- [393] H. TAGOSHI, M. SHIBATA, T. TANAKA et M. SASAKI – « Post-Newtonian expansion of gravitational waves from a particle in circular orbit around a rotating black hole : Up to $\mathcal{O}(v^8)$ beyond the quadrupole formula », *Phys. Rev. D* **54** (1996), p. 1439, [gr-qc/9603028](#).
- [394] Adresse Web du détecteur TAMA : <http://tamago.mtk.nao.ac.jp/>.
- [395] T. TANAKA, H. TAGOSHI et M. SASAKI – « Gravitational waves by a particle in circular orbits around a Schwarzschild black hole – 5.5 post-Newtonian formula », *Prog. Theor. Phys.* **96** (1996), p. 1087, [gr-qc/9701050](#).
- [396] A. H. TAUB – « General relativistic variational principle for perfect fluids », *Phys. Rev.* **94** (1954), p. 1468.
- [397] J. H. TAYLOR et J. M. WEISBERG – « A new test of general relativity – Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16 », *Astrophys. J.* **253** (1982), p. 908.
- [398] — , « Further experimental tests of relativistic gravity using the binary pulsar PSR 1913+16 », *Astrophys. J.* **345** (1989), p. 434.
- [399] S. A. TEUKOLSKY – « Rotating black holes : Separable wave equations for gravitational and electromagnetic perturbations », *Phys. Rev. Lett.* **29** (1972), p. 1114.
- [400] K. S. THORNE – « Multipole expansions of gravitational radiation », *Rev. Mod. Phys.* **52** (1980), p. 299.
- [401] — , « The theory of gravitational radiation : An introductory review », *Gravitational radiation* (N. Deruelle et T. Piran, eds.), North-Holland, 1983, p. 1.
- [402] — , « Gravitational radiation », *Three hundred years of gravitation* (S. W. Hawking et W. Israel, eds.), Cambridge University Press, 1987, p. 330.
- [403] W. TICHY et P. MARRONETTI – « Binary black hole mergers : Large kicks for generic spin orientations », *Phys. Rev. D* **76** (2007), p. 061502(R), [gr-qc/0703075](#).
- [404] O. TIRET et F. COMBES – « Evolution of spiral galaxies in modified gravity », *Astron. Astrophys.* **464** (2007), p. 517, [astro-ph/0701011](#).
- [405] — , « Evolution of spiral galaxies in modified gravity. II. Gas dynamics », *Astron. Astrophys.* **483** (2008), p. 719, [arXiv:0803.2631](#) [[astro-ph](#)].
- [406] — , « Interacting galaxies with modified Newtonian dynamics », *Formation and evolution of galaxy disks* (J. G. Funes et E. M. Corsini, eds.), ASP Conference Series, vol. 396, Astronomical Society of the Pacific, 2008, p. 259, [arXiv:0712.1459](#) [[astro-ph](#)].
- [407] — , « MOND and the dark baryons », *Astron. Astrophys.* **496** (2009), p. 659, [arXiv:0901.4935](#) [[astro-ph.CO](#)].
- [408] R. B. TULLY et J. R. FISHER – « A new method of determining distances to galaxies », *Astron. Astrophys.* **54** (1977), p. 661.

- [409] R. P. VAN DER MAREL – « Intermediate-mass black holes in the Universe : A review of formation theories and observational constraints », *Coevolution of black holes and galaxies* (L. C. Ho, éd.), Carnegie Observatories Astrophysics Series, vol. 1, 2003, p. 37, [astro-ph/0302101](#).
- [410] Adresse Web du détecteur VIRGO : <http://www.virgo.infn.it/>.
- [411] R. M. WALD – *General relativity*, University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [412] J. WEBER – « Detection and generation of gravitational waves », *Phys. Rev.* **117** (1960), p. 306.
- [413] S. WEINBERG – *Gravitation and cosmology*, John Wiley, New York, 1972.
- [414] — , « The cosmological constant problem », *Rev. Mod. Phys.* **61** (1989), p. 1.
- [415] J. M. WEISBERG et J. H. TAYLOR – « The relativistic binary pulsar B1913+16 : Thirty years of observations and analysis », *Binary radio pulsars* (F. A. Rasio et I. H. Stairs, eds.), ASP Conference Series, vol. 328, Astronomical Society of the Pacific, 2005, p. 25, [astro-ph/0407149](#).
- [416] C. M. WILL – *Theory and experiment in gravitational physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [417] — , « The confrontation between general relativity and experiment », *Living Rev. Rel.* **9** (2006), p. 3, [gr-qc/0510072](#).
- [418] C. M. WILL et A. G. WISEMAN – « Gravitational radiation from compact binary systems : Gravitational waveforms and energy loss to second post-Newtonian order », *Phys. Rev. D* **54** (1996), p. 4813, [gr-qc/9608012](#).
- [419] A. G. WISEMAN – « Coalescing binary systems of compact objects to (post)^{5/2}-Newtonian order. II. Higher-order wave forms and radiation recoil », *Phys. Rev. D* **46** (1992), p. 1539.
- [420] Y. B. ZEL'DOVICH – « Cosmological constant and elementary particles », *JETP Lett.* **6** (1967), p. 316.
- [421] F. J. ZERILLI – « Gravitational field of a particle falling in a Schwarzschild geometry analyzed in tensor harmonics », *Phys. Rev. D* **2** (1970), p. 2141.
- [422] — , « Tensor harmonics in canonical form for gravitational radiation and other applications », *J. Math. Phys.* **11** (1970), p. 2203.
- [423] H. S. ZHAO – « Coincidences of dark energy with dark matter : Clues for a simple alternative ? », *Astrophys. J.* **671** (2007), p. L1, [arXiv:0710.3616 \[astro-ph\]](#).
- [424] H. S. ZHAO et B. FAMAEEY – « Refining the MOND interpolating function and TeVeS Lagrangian », *Astrophys. J.* **638** (2006), p. L9, [astro-ph/0512425](#).
- [425] T. G. ZLOSNIK, P. G. FERREIRA et G. D. STARKMAN – « Modifying gravity with the æther : An alternative to dark matter », *Phys. Rev. D* **75** (2007), p. 044017, [astro-ph/0607411](#).

- [426] F. ZWICKY – « Die rotverschiebung von extragalaktischen nebeln », *Helv. Phys. Acta* **6** (1933), p. 110.

Titre Coalescence de trous noirs en relativité générale & Le problème de la matière noire en astrophysique

Résumé La première partie de cette thèse s'inscrit dans le cadre de la modélisation des ondes gravitationnelles en provenance des systèmes binaires coalescents de trous noirs, dans la perspective de leur détection par les antennes gravitationnelles terrestres LIGO/VIRGO et spatiale LISA. Nous étudions la dynamique relativiste de tels systèmes binaires d'objets compacts à l'aide de deux méthodes d'approximation en relativité générale : les développements post-newtoniens, et le formalisme de la force propre, une extension naturelle de la théorie des perturbations d'un trou noir ; nous démontrons la cohérence des résultats ainsi obtenus dans leur domaine de validité commun. Dans un second temps, nous combinons ces deux méthodes perturbatives afin d'estimer l'effet de recul gravitationnel lors de la coalescence de deux trous noirs de Schwarzschild ; nos résultats sont en très bon accord avec ceux obtenus par des simulations en relativité numérique. La seconde partie de cette thèse traite du problème de la matière noire en astrophysique. L'hypothèse de la matière noire rend compte de nombreuses observations indépendantes de l'échelle des amas de galaxies jusqu'aux échelles cosmologiques. Les observations à l'échelle galactique sont toutefois en bien meilleur accord avec la phénoménologie de la dynamique newtonienne modifiée (MOND), qui postule une modification des lois de la gravité en l'absence de matière noire. Nous proposons une troisième alternative : conserver la théorie de la gravitation standard, mais doter la matière noire d'une propriété de polarisabilité dans un champ gravitationnel, de façon à rendre compte de la phénoménologie de MOND à l'échelle des galaxies.

Mots-clés relativité générale ; ondes gravitationnelles ; trous noirs ; post-newtonien ; cosmologie ; matière noire.

Laboratoire $\mathcal{G}\mathcal{R}\mathcal{E}\mathcal{C}\mathcal{O}$, Institut d'Astrophysique de Paris — UMR 7095 du CNRS, Université Pierre & Marie Curie, 98^{bis} boulevard Arago, 75014 Paris.

Title Coalescing Black Hole Binaries in General Relativity & The Dark Matter Problem in Astrophysics

Abstract The first part of this PhD thesis is concerned with the modelling of the gravitational radiation emitted by coalescing binary black holes, to be detected by the ground and spaced-based gravitational-wave antennas LIGO/VIRGO and LISA. We study the relativistic dynamics of such compact binary systems using two approximation schemes in general relativity: the post-Newtonian formalism, and the self-force approach, a natural extension of black hole perturbation theory; we demonstrate the consistency of these results in their common domain of validity. We then combine these same two perturbative methods in order to estimate the gravitational recoil effect for coalescing binaries of Schwarzschild black holes; the results are shown to be in very good agreement with those obtained from simulations in numerical relativity. The second part of this thesis is devoted to the dark matter problem in astrophysics. The dark matter hypothesis successfully accounts for many independent observations from cosmological down to galaxy cluster scales. However, observations at the galactic scale are better reproduced by the modified Newtonian dynamics (MOND) proposal, which posits a modification of the fundamental laws of gravity in the absence of dark matter. We propose a third alternative: retaining the standard theory of gravitation, while endowing the dark matter particles with a property of polarizability in a gravitational field, in order to account for the phenomenology of MOND at the scale of galaxies.

Keywords general relativity; gravitational waves; black holes; post-Newtonian; cosmology; dark matter.

Laboratory $\mathcal{G}\mathcal{R}\mathcal{E}\mathcal{C}\mathcal{O}$, Institut d'Astrophysique de Paris — UMR 7095 du CNRS, Université Pierre & Marie Curie, 98^{bis} boulevard Arago, 75014 Paris, France.

