

INTRODUCTION A LA QUANTIFICATION DES CHAMPS
(THEORIES LAGRANGIENNES PERTURBATIVES)

R. STORA

CERN Genève
CNRS Marseille

TABLE DES MATIERES

	pages
Motivation	1
I – Définition Mathématique d'une particule	1
II – Définition Mathématique d'un ensemble de Particules sans interactions ..	2
III – Cadre théorique d'une théorie des collisions	4
IV – Le champ quantique libre associé à une particule	5
V – Quelques observables locales et globales associées à un champ libre dérivant d'un Lagrangien	10
VI – Modèles dynamiques pour l'opérateur de diffusion : développement perturbatif	12
APPENDICE :	
Théorème de Wick, graphes de Feynman	20
REFERENCES	28
NOTES	28

INTRODUCTION A LA QUANTIFICATION DES CHAMPS.

(THEORIES LAGRANGIENNES PERTURBATIVES).

Motivation.

Toute esthétique mise à part, la théorie quantique des champs fournit une approche à la description des interactions entre particules qui combine un certain nombre d'ingrédients de natures diverses tels que :

- postulats de la mécanique quantique
- propriétés d'invariance
- causalité.

Les postulats de la mécanique quantique permettent d'interpréter des phénomènes de nature ondulatoire en termes de particules et inversement.

- Les propriétés d'invariance permettent de classifier les systèmes élémentaires et d'en restreindre la dynamique [M].

- La causalité, [EG], [B], idéalisée à un niveau microscopique, et qui assure la causalité sur le plan macroscopique produit des résultats remarquables sur le plan général de telle sorte que sauf si certains de ces résultats se trouvaient infirmés par l'expérience, les théoriciens ne sont pas prêts à rejeter une telle idéalisation dont ils admettent qu'on puisse avoir à l'abandonner. Les théories des champs actuelles prétendent donner en principe une description spatiotemporelle ponctuelle des phénomènes, alors que la majorité des mesures expérimentales mettent en jeu des distances et des temps macroscopiques et ne permettent de tester que d'infimes parties de ces théories. Inversement, la complication mathématique de ces théories rend extrêmement difficile d'en tirer des conséquences rigoureuses [B]. Ces deux circonstances font que les théories de champs ont parmi les théoriciens des défenseurs critiques et des ennemis farouches.

La situation expérimentale la plus fréquente est la suivante : ayant identifié des particules de masses, spins, charges données, on les prépare dans des états d'impulsion assez bien définis (accélérateurs, cibles) avant leurs interactions et on mesure au moyen de détecteurs la probabilité d'observer d'autres particules en nombre variable, d'attributs cinématiques également assez bien définis. La description mathématique de telles situations passe par :

- La définition d'états de particules libres (bien avant et bien après leurs interactions).
- La formulation de modèles décrivant les interactions.

I. - Définition mathématique d'une particule [M]

Le cas le plus simple d'une particule de masse m liant suivant le principe de relativité l'impulsion et l'énergie suivant la relation

$$p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$$

est celui d'une particule sans spin, sans charge, par exemple le π^0 dont on négligera ici l'instabilité de force électromagnétique, si on désire s'intéresser par la suite à des interactions fortes. La mécanique quantique d'un tel système se fait grâce à l'espace de Hilbert des fonctions $f(\vec{p})$, f de carré sommable pour la norme invariante relativiste

$$|f|^2 = \int \frac{d^3 p}{2\omega_p} |f|^2(\vec{p}) \quad \omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

La description de particules de spin s , en accord avec le principe de relativité nécessite l'introduction de fonctions d'onde à $2s+1$ composantes.

$\int_{\Delta} |f|^2(\vec{p}) \frac{d^3 \vec{p}}{2\omega_p}$ est la probabilité de trouver la particule supposée dans l'état f , dans la région Δ de l'espace des moments. Dans un référentiel déduit du référentiel de base par une translation d'espace temps a , et une transformation de Lorentz Λ , l'état que l'on voit est $\{a, \Lambda\}_f$ défini par :

$$\{a, \Lambda\}_f(\vec{p}) = e^{-ip \cdot a} f(\Lambda^{-1} \vec{p})$$

$$[p \cdot a = E a^0 - \vec{p} \cdot \vec{a}]$$

Ceci résulte de l'analyse quantique de l'invariance relativiste.

II. - Définition mathématique d'un ensemble de particules identiques sans interactions.

L'indiscernabilité de systèmes identiques pour des mesures mettant en jeu des observables symétriques par rapport à tous les membres d'une collection de tels systèmes conduit à définir les états de plusieurs particules suivant la statistique à laquelle celles-ci obéissent. Les parastatistiques, qui peuvent être réinterprétées en terme de degrés internes de liberté ne seront pas mentionnées ici (H). Les statistiques totalement symétriques (Bose - Einstein) et totalement antisymétriques (Fermi - Dirac) sont décrites comme suit. Soit H l'espace de Hilbert monoparticulaire (dans l'exemple précédent

$$H = L^2\left(\mathbb{R}^3, \frac{d^3 p}{2\omega_p}\right)$$

On considère l'espace de Fock $\mathcal{F}_{\epsilon}(H)$ ($\epsilon = \pm 1$) $\left[\begin{array}{l} \text{Bose Einstein} \quad \epsilon = +1 \\ \text{Fermi Dirac} \quad \epsilon = -1 \end{array} \right]$:

$$\mathcal{F}_{\epsilon}(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_{\epsilon}^{\otimes n}$$

$H_{\epsilon}^{\otimes n}$ est le produit tensoriel $\left\{ \begin{array}{l} \text{symétrisé} \\ \text{antisymétrisé} \end{array} \right.$, $\epsilon = \pm 1$

de H dont les éléments sont de la forme

$$\Phi = \sum a_{i_1 \dots i_n} f_{i_1} \otimes_{\epsilon} \dots \otimes_{\epsilon} f_{i_n}$$

où f_{i_k} est un élément d'une base orthonormée de H est

$$f_{i_1} \otimes_{\epsilon} \dots \otimes_{\epsilon} f_{i_n} = \frac{1}{n!} N_{\mathbf{I}_n} \sum_{p \in \pi_n} (\epsilon)^{\sigma(p)} f_{i_{p(1)}} \otimes_{\epsilon} \dots \otimes_{\epsilon} f_{i_{p(n)}}$$

$\pi_n =$ groupe des permutations de n objets $\sigma(p) =$ signature de la permutation P : $+1$ si P est paire
 -1 si P est impaire.

$$N_{\mathbf{I}_n} = \left[\frac{n!}{\alpha_{i_1}! \dots \alpha_{i_n}!} \right]^{1/2}$$

$\alpha_{i_j} =$ nombre de facteurs identiques à f_{i_j}

$0! = 1$.

Si $\epsilon = -1$ on voit facilement que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$

La norme de f_n dans H_n est définie par

$$|\phi_n|^2 = \sum |a_{i_1 \dots i_n}|^2 < \infty,$$

Les vecteurs $f_{i_1} \otimes \dots \otimes f_{i_n}$ ayant été construits de façon à constituer une base orthonormée de $H^{\otimes n}$

On définit $H^{\otimes 0} = \{ \mathbb{C} \}$ \mathbb{C} = les nombres complexes.

Un élément Φ de $\mathcal{F}_\epsilon(H)$ est une suite $(\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n, \dots), \Phi_k \in H^{\otimes k}$, pour lequel la norme est définie par :

$$|\Phi|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n|^2 < \infty.$$

Le vecteur $\Omega = (1, 0, 0, \dots)$ est appelé vecteur du vide. $\mathcal{F}_\epsilon(H)$ est un espace d'Hilbert dans lequel on va faire la mécanique quantique des collections de particules identiques sans interactions.

A chaque opérateur, A agissant sur H , on peut associer l'opérateur défini dans $\mathcal{F}_\epsilon(H)$

$$\mathcal{A} = 1 + \sum_{n>0} \underbrace{A \otimes \dots \otimes A}_n$$

avec la définition

$$(\mathcal{A}\Phi)_n = \sum a_{i_1 \dots i_n} \frac{1}{n!} \sum_{P \in \pi_n} (\epsilon)^{\sigma(P)} A_{f_{i_{P(1)}}} \otimes \dots \otimes A_{f_{i_{P(n)}}}$$

Par exemple, si $A = \mathcal{U}(a, A)$, l'opérateur unitaire représentant une transformation de Lorentz in-homogène $\mathcal{U}(a, A)$ est l'opérateur représentant cette transformation dans l'espace de Fock.

Par contre, si $A = e^{iQ}$ est un opérateur unitaire dépendant d'un paramètre, engendré par le générateur infinitésimal Q , l'observable additive correspondant à Q dans l'espace de Fock est

$$\mathcal{G} = \sum_{n>0} [\underbrace{Q \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1}_n + \underbrace{1 \otimes Q \otimes \dots \otimes 1}_n + \dots + 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes Q]$$

(Par exemple $A = \mathcal{U}(a, 1) = e^{iP \cdot a}$: P est l'opérateur impulsion énergie d'une particule \mathcal{L} est l'opérateur impulsion énergie d'un système de particules sans interactions).

Il est commode de définir d'autres opérateurs remarquables, qui créent ou annihilent une particule dans un état f , respectivement dénotés par $a^*(f)$, $a(f)$:

$$(a^*(f)\Phi)_n = \sqrt{n} \sum_{i_1 \dots i_{n-1}} a_{i_1 \dots i_{n-1}} \sum_{P \in \pi_n} (\epsilon)^{\sigma(P)} \frac{1}{(n! \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_n})^{\frac{1}{2}}} f_{i_{P(1)}} \otimes \dots \otimes f_{i_{P(n)}}$$

où on a posé $f = f_{i_n}$

$$a(f)\Omega = 0$$

$$(a(f)\Phi)_{n-1} = \sqrt{n} \sum_{i_n \dots i_1} a_{i_1 \dots i_n} \frac{1}{(n! \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_n})^{\frac{1}{2}}} \sum_{P \in \pi_n} (\epsilon)^{\sigma(P)} (f, f_{i_{P(1)}}) f_{i_{P(2)}} \otimes \dots \otimes f_{i_{P(n)}}$$

pour $n > 1$

où $(f_i, f_j)_{P(1)}$ indique le produit scalaire dans H .

Ces définitions sont arrangées de sorte que $a^*(f)$, soit l'adjointe de $a(f)$, c'est-à-dire que

$$(\psi, a(f)\phi) = (a^*(f)\psi, \phi),$$

et que l'on ait les relations de commutation ($\epsilon = +1$) ou d'anticommutation ($\epsilon = -1$) canoniques ⁽¹⁾: (CCR, CAR) :

$$\left. \begin{aligned} [a(f), a^*(g)]_- &= (f, g) \\ [a(f), a(g)]_- &= [a^*(f), a^*(g)] = 0 \end{aligned} \right\} \epsilon = +1 \quad \text{B.E.}$$

$$\left. \begin{aligned} [a(f), a^*(g)]_+ &= (f, g) \\ [a(f), a(g)]_+ &= [a^*(f), a^*(g)] = 0 \end{aligned} \right\} \epsilon = -1 \quad \text{F.D.}$$

Les vecteurs de base précédemment construits s'expriment simplement en fonction des a et des a^* et du vecteur du vide par les formules :

$$(0, 0, \dots, f_{i_1} \otimes \dots \otimes f_{i_n}, 0, \dots) = \frac{a^*(f_{i_1})^{\alpha_{i_1}}}{\sqrt{\alpha_{i_1}!}} \dots \frac{a^*(f_{i_n})^{\alpha_{i_n}}}{\sqrt{\alpha_{i_n}!}} \Omega,$$

ainsi que les observables additives :

$$Q = \sum_i a^*(Q f_i) a(f_i)$$

Il est en particulier facile de voir, en utilisant les CCR CAR que si $R = [P, Q]_-$, alors $R = [PQ]_-$.

En particulier, l'opérateur nombre de particules correspondant à $Q = 1$, défini suivant

$$N = \sum_i a^*(f_i) a(f_i)$$

et qui a la propriété de compter les particules :

$$N \frac{a^*(f_{i_1})}{\sqrt{\alpha_{i_1}!}} \dots \frac{a^*(f_{i_n})}{\sqrt{\alpha_{i_n}!}} \Omega = n \frac{a^*(f_{i_1})}{\sqrt{\alpha_{i_1}!}} \dots \frac{a^*(f_{i_n})}{\sqrt{\alpha_{i_n}!}} \Omega.$$

commute avec tous les opérateurs additifs.

Par une extension facile on peut décrire un système de particules indépendantes d'espèces (par exemple masses) différentes, décrites dans $H_1 \dots H_N$. Il suffit de construire le produit tensoriel simple $\mathcal{F}_{\epsilon_1}(H_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{\epsilon_N}(H_N)$, engendré à partir d'un vide commun Ω par N systèmes de créateurs, un par espèce de particules : $a_j^*(f_j^{(1)}) \dots a_N^*(f_j^{(N)})$ et d'imposer que les a_j, a_j^* commutent ou anticommulent l - avec les a_j, a_j^* pour $i \neq j$

III. - Cadre théorique d'une théorie des collisions

On opère dans un espace de Hilbert \mathcal{F} dans lequel on se donne deux bases de Fock du type précédent, qui étiquettent des états de particules non interagissantes entrant ou émergent d'une collision. Ces étiquettes sont en correspondance biunivoque et correspondent à la variété des états de particules observées qu'on peut soit faire entrer en interaction soit détecter après une collision. Un état entrant de

n particules sera dénoté $f_{i_1}^{in} \otimes \dots \otimes f_{i_n}^{in}$, un état sortant $f_{i_1}^{out} \otimes \dots \otimes f_{i_n}^{out}$. Les états in et out portant les mêmes étiquettes sont distincts en général car ils décrivent des situations physiques différentes. Cependant l'identité des relations entre des états entrant portant certaines étiquettes, et entre des états sortants portant des étiquettes identiques aux précédentes permet de déduire l'existence d'un opérateur unitaire S, appelé opérateur de diffusion (2) qui fait correspondre à un état entrant l'état sortant de même étiquette :

$$\Phi_{in} = S \Phi_{out}$$

$$S^* S = S S^* = 1$$

L'amplitude de probabilité pour qu'à partir d'un état entrant Φ_{in} on obtienne un état sortant Ψ_{out} est :

$$(\Psi_{out}, \Phi_{in}) = (\Psi_{in}, S \Phi_{in}) = (\Psi_{out}, S \Phi_{out}).$$

C'est à partir de cette amplitude de probabilité qu'on calcule la probabilité de transition, puis la section efficace.

L'invariance relativiste se formule comme suit :

si on observe les états entrant et sortant dans un autre référentiel, $\Phi_{in} \xrightarrow{(a,\Lambda)} \Phi'_{in} = \mathcal{U}_i(a,\Lambda) \Phi_{in}$
 $\Psi_{out} \xrightarrow{(a,\Lambda)} \Psi'_{out} = \mathcal{U}_{out}(a,\Lambda) \Psi_{out}$, la probabilité de transition doit rester invariante.

On en déduit

$$\mathcal{U}_{out}(a,\Lambda) = \mathcal{U}_{in}(a,\Lambda) \stackrel{\text{Def}}{=} \mathcal{U}(a,\Lambda)$$

Comme d'autre part

$$\mathcal{U}_{out}(a,\Lambda) = S^{-1} \mathcal{U}_{in}(a,\Lambda) S,$$

on en déduit

$$[S, \mathcal{U}(a,\Lambda)]_- = 0$$

Comme conséquence élémentaire, on obtient la conservation de l'impulsion énergie durant une collision : si l'impulsion énergie a la valeur P_i dans l'état initial, la valeur P_f dans l'état final,

$$(\Psi_f, [\mathcal{P}, S]_- \Phi_i) = 0 = (P_f - P_i) (\Psi_f, S \Phi_i)$$

d'où

$$(\Psi_f, S \Phi_i) = \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{D}_{fi}.$$

Dans ce qui suit on va s'efforcer de construire des modèles pour l'opérateur de diffusion basés sur l'existence de champs quantiques associés aux particules observées. Des théories plus élaborées permettent de concevoir que plusieurs espèces de particules puissent émerger de l'interaction d'un seul champ, mais il n'est pas question d'en parler ici.

IV. - Le champ quantique libre associé à une particule (L)

En vue de formuler le principe de causalité, il est raisonnable d'associer à l'aspect particulaire brièvement décrit jusqu'ici un aspect de nature spatio-temporelle, c'est-à-dire de formuler une théorie de champs locaux équivalente. Le seul fait que ceci soit possible est une profonde manifestation de la

dualité onde-particule propre à la mécanique quantique, et il aurait été plus conforme au développement historique de partir de l'aspect spatiotemporel et de montrer que la quantification mène à une interprétation en termes de particules. Cependant comme on observe surtout des particules dans le domaine de la physique qui nous préoccupe, nous avons préféré suivre ici le chemin inverse.

Reprenons l'exemple de la particule libre de masse m et de spin 0 , et considérons dans l'espace de Fock correspondant les créateurs et annihilateurs précédemment construits. Une description spatiotemporelle causale sera obtenue si pour toute fonction $f(x)$ suffisamment régulière de support borné dans l'espace de Minkowski on peut construire un objet $\varphi(f)$ linéaire en f et dans les créateurs et annihilateurs tel que :

(causalité) $[\varphi(f), \varphi(g)] = 0$ si $\text{supp } f \sim \text{supp } g$
(voir Fig. 1)

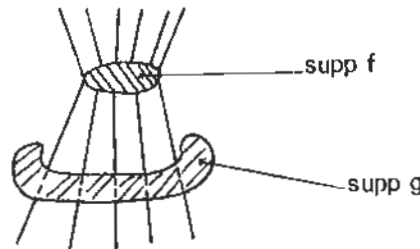


Fig. 1 $\text{supp } f \sim \text{supp } g$:
aucun rayon lumineux ne coupe à la fois $\text{supp } f$ et $\text{supp } g$.

(invariance de Lorentz) $\varphi(a.\Lambda f) = \mathcal{U}(a.\Lambda) \varphi(f) \mathcal{U}^{-1}(a.\Lambda)$
 $a.\Lambda f(x) = f(\Lambda^{-1}(x - a)).$

La réponse à cette question est :

$$\varphi(f) = \int \varphi(x) f(x) d^4x$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} [a(\vec{p}) e^{-ipx} + a^*(\vec{p}) e^{ipx}]$$

$$p = (p^0 = \omega_p, \vec{p})$$

où les $a(\vec{p})$, $a^*(\vec{p})$, auxquels on peut donner un sens précis [5], sont obtenus de la même façon que les $a(f)$, $a^*(f)$ pour des f_p propres :

$$f_{\vec{p}}(\vec{q}) = 2 \omega_q \delta^3(\vec{p} - \vec{q}),$$

avec les règles de commutations « propres »

$$[a(\vec{p}), a^*(\vec{p}')] = 2 \omega_p \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$$

Le champ $\varphi(x)$ satisfait bien aux deux propriétés voulues. En particulier

$$[\varphi(x), \varphi(y)]_- = i G_m(x - y)$$

où la distribution $G_m(x - y)$, invariante relativiste, impaire, nulle pour $(x - y)^2 < 0$ solution homogène de l'équation Klein Gordon a été définie par Itzykson. Le champ $\varphi(x)$ satisfait à l'équation de Klein Gordon

$$(\square_x + m^2)\varphi(x) = 0$$

qui se trouve dériver d'un lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2]$$

Cette construction se généralise pour toute représentation $\mathcal{U}(a, \Lambda)$ du groupe de Lorentz inhomogène dans l'espace monoparticulaire H , mais ne conduit pas en général à des champs caractérisés par un système d'équations aux dérivées partielles dérivant d'un Lagrangien. Dans la suite nous ne considérons en général que des champs dérivant d'un Lagrangien sur le maniement desquels on a à l'heure actuelle le plus d'information⁽³⁾. Parmi ceux-ci nous trouverons les suivants, particulièrement utiles pour la physique :

a) Le champ scalaire chargé,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} [a(p) e^{-ipx} + b^*(p) e^{ipx}]$$

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} [b(p) e^{-ipx} + a^*(p) e^{ipx}]$$

$$[a(\vec{p}), a^*(\vec{p}')]_- = 2\omega_p \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$[b(p), b^*(p')]_- = 2\omega_p \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$[a(\vec{p}), b(\vec{p})]_- = [a(\vec{p}), b^*(\vec{p})]_- = 0$$

L'espace de Fock est le produit tensoriel symétrisé de deux espaces de Fock identiques.

Une autre quantification possible, compatible avec la causalité, consiste à poser

$$[a(p), a^*(p')]_+ = 2\omega_p \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$[b(p), b^*(p')]_+ = 2\omega_p \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$[a(\vec{p}), b(\vec{p})]_+ = [a(\vec{p}), b^*(\vec{p}')]_+ = 0$$

elle n'est pas acceptable physiquement car la norme de l'état monoparticulaire $b^*(f) \Omega$ est :

$$(b^*(f) \Omega, b^*(f) \Omega) = (\Omega, b(f) b^*(f) \Omega)$$

$$= (\Omega, [b(f), b^*(f)]_+ \Omega) = |f|^2 < 0$$

($b(f) \Omega = 0$)

L'espace de Fock est à métrique indéfinie (la norme d'un état contenant N particules du type b est du signe de $(-)^N$), et ces champs sont utilisés comme outils mathématiques intermédiaires dans la définition des théories quantiques mettant en jeu des champs de jauge.

b) Le champ de Dirac

$$\mathcal{L} = \Psi \left(\frac{1}{i} \gamma^\mu \partial_\mu + m \right) \Psi$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} \sum_{\sigma=\pm 1} a_{\sigma}(\vec{p}) u_{\sigma}(\vec{p}) e^{-ipx} + b_{\sigma}^*(\vec{p}) v_{\sigma}(\vec{p}) e^{ipx}$$

$$\bar{\Psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} \sum_{\sigma=\pm 1} b_{\sigma}(p) \bar{v}_{\sigma}(\vec{p}) e^{-ipx} + a_{\sigma}^*(p) \bar{u}_{\sigma}(\vec{p}) e^{ipx}$$

Les champs Ψ , $\bar{\Psi}$ ont quatre composantes décrivant leur variance par rapport aux transformations de Lorentz, propres à la description d'un spin $\frac{1}{2} [M]$. Les $u_{\sigma}(\vec{p})$, $v_{\sigma}(\vec{p})$, $\bar{u}_{\sigma}(\vec{p})$, $\bar{v}_{\sigma}(\vec{p})$ sont associés à certains états de spin $[M]$. Les règles de commutations sont :

$$[a_{\sigma}(\vec{p}), a_{\sigma'}^*(\vec{p}')]_+ = 2\omega_p \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\sigma\sigma'}$$

$$[b_{\sigma}(\vec{p}), b_{\sigma'}^*(\vec{p}')]_- = 2\omega_p \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\sigma\sigma'}$$

$$[a_{\sigma}(\vec{p}), b_{\sigma'}(\vec{p}')]_+ = [a_{\sigma}(\vec{p}), b_{\sigma'}^*(\vec{p}')] = 0$$

L'utilisation des règles de commutation

$$[a_{\sigma}(\vec{p}), a_{\sigma'}^*(\vec{p}')]_- = 2\omega_p \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\sigma\sigma'}$$

$$[b_{\sigma}(p), b_{\sigma'}^*(\vec{p}')]_- = 2\omega_p \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\sigma\sigma'}$$

conduisent à nouveau à un espace à métrique indéfinie

c) Le champ vectoriel.

i) La jauge de Proca.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} [(\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu})(\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu})] + m^2 A_{\mu} A^{\mu}$$

$$A_{\mu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} \sum_{i=1}^{i=3} a_{*i}(\vec{p}) e_{\mu}^i(\vec{p}) e^{-ipx} + a_i^*(p) e_{\mu}^i(\vec{p}) e^{ipx}$$

où, pour chaque $p = (\omega_p, \vec{p})$ les $e_j(p)$ satisfont à

$$e^i(\vec{p}) \cdot e^j(\vec{p}) = -\delta^{ij}$$

$$p \cdot e^i(\vec{p}) = 0$$

l'indice $i = 1, 2, 3$ étant associé à l'état du spin 1 de la particule décrite.

Les règles de commutation sont :

$$[a_i(\vec{p}), a_j(\vec{p}')] = 2\omega_p \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{ij}$$

ii) La jauge de Stueckelberg.

C'est de nouveau un système dans un espace à métrique indéfinie dont il s'agit, dont l'utilisation est un intermédiaire mathématique fondamental dans la formulation actuelle des théories de jauge.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} [(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)] + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \\ & - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2. \end{aligned}$$

Si on pose $\alpha = \frac{\lambda^2}{m^2}$, la résolution des équations de Lagrange conduisent à une interprétation en

termes d'une particule de spin 1, de masse m , et d'une particule de spin 0, de masse λ , quantifiée dans un espace à métrique indéfinie :

Les équations du mouvement sont :

$$[(m^2 + \square) g_{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\alpha}) \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu = 0$$

d'où $(\square + \lambda^2) \partial_\mu A^\mu = 0$, avec $\lambda^2 = \alpha m^2$

On peut donc définir $A_\mu^T = A_\mu + \frac{\partial_\mu \partial_\nu A^\nu}{\lambda^2}$

tel que $\partial_\mu A_\mu^T = 0$

A_μ^T est de la forme du champ A_μ du paragraphe précédent. $\partial_\mu A_\mu$ étant un champ scalaire de masse λ , on a :

$$\begin{aligned} A_\mu(x) = & \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} \left[\sum_{i=1}^3 a_i(\vec{p}) e_\mu^i(\vec{p}) e^{-ipx} + a_i^*(\vec{p}) e_\mu^i(\vec{p}) e^{ipx} \right] \\ & + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3q}{2\sqrt{q^2 + \lambda^2}} [a_0(\vec{q}) q_\mu e^{-iqx} + a_0^*(\vec{q}) q_\mu e^{iqx}] \end{aligned}$$

où $q = (\sqrt{q^2 + \lambda^2}, \vec{q})$.

Les règles de commutations compatibles avec les équations du mouvement (i.e telle que $[A_\mu(x), A_\nu(y)]$ soit solution des équations du mouvement) sont :

$$[a_i(\vec{p}), a_j^*(\vec{p}')] = 2\omega_p \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{ij}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$[a_0(\vec{p}), a_0^*(\vec{p}')] = -2\sqrt{p^2 + \lambda^2} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$[a_i(p), a_0(\vec{p}')] = [a_i(\vec{p}), a_0^*(p')] = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

Il est bon de noter la structure du propagateur $G_{\mu\nu}$ solution de

$$[(m^2 + \square) g_{\lambda\mu} - (1 - \frac{1}{\alpha}) \partial_\lambda \partial_\mu] G^{\mu\nu} = g_\lambda^\nu \delta$$

dont la transformée de Fourier, avec conditions aux limites de Feynman est :

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\mu\nu}^F(p) &= \frac{g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{\frac{p_\mu p_\nu}{m^2}}{p^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{\lambda^2}{m^2} \frac{\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}}{p^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \end{aligned}$$

Remarquer les signes : « pour p grand, $G \sim \frac{1}{p^2}$ » ; dans la deuxième forme, le pôle à $p^2 = 0$ a un résidu nul ; ceci est précisément dû à la métrique indéfinie.

La jauge de Feynmann $\alpha = 1$ conduit à $G_{\mu\nu}^F = \frac{g_{\mu\nu}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$ La jauge de Landau $\alpha = 0$ conduit à $G_{\mu\nu}^F = \frac{g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

V. - Quelques observables locales et globales associées à un champ libre dérivant d'un Lagrangien⁽³⁾

La théorie classique des champs prévoit la construction de courants associés aux lois de symétries auxquelles le système est soumis. Par exemple, dans le cas du champ scalaire neutre, l'invariance relativiste conduit à la définition du tenseur impulsion énergie conservé :

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu}^{cl}(x) &= \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2 \right] \\ \partial^\mu t_{\mu\nu}^{cl} &= 0 \end{aligned}$$

$P_\mu = \int t_{0\mu} d^3x$ est l'impulsion énergie du système. Nous allons donner la version quantique correspondante, qui ressemble beaucoup à la version classique modulo une précaution liée au phénomène suivant :

$\varphi^2(x)$ n'existe pas comme opérateur dans l'espace de Fock ! En effet s'il existait l'élément de matrice $(\Omega, a(f) \varphi^2(x) a^*(f) \Omega)$ serait fini.

Le calcul se fait comme suit :

$$\begin{aligned} (\Omega, a(f) \varphi^2(x) a^*(f) \Omega) &= (\Omega, [a(f), \varphi^2(x) a^*(f)] \Omega) \\ &= a(f) \Omega = 0 \\ &= (\Omega, \{ 2[a(f), \varphi(x)] \varphi(x) a^*(f) + \varphi^2(x) [a(f), a^*(f)] \} \Omega) \end{aligned}$$

$$= (\Omega, 2 \int \frac{d^3 p}{2\omega_p} f(\vec{p}) e^{ipx} \varphi(x) a^*(f) \Omega) + (\Omega, \varphi^2(x) \Omega)$$

$$= 2 \int \frac{d^3 p}{2\omega_p} |f(\vec{p}) e^{ipx}|^2 + (\Omega, \varphi^2(x) \Omega)$$

$$\Omega a^*(f) = 0$$

et l

$$(\Omega, \varphi^2(x) \Omega) = (\Omega, \int \frac{d^3 p}{2\omega_p} a(\vec{p}) e^{-ipx} \int \frac{d^3 p'}{2\omega_{p'}} a^*(p') e^{ip'x} \Omega)$$

$$\left(\begin{array}{l} a(p) \Omega \\ = \Omega a^*(p) = 0 \end{array} \right)$$

$$= \int \frac{d^3 p}{2\omega_p} - \infty$$

$$\left(\begin{array}{l} a(p) \Omega = 0 \\ \Omega a^*(p') = 0 \end{array} \right) \text{ (L'origine de cet ennui est déjà } (\Omega, \varphi^2(x) \Omega) = \int \frac{d^3 p}{2\omega_p} = \infty).$$

Mais l'opérateur suivant existe : $:\varphi^2(x):$, défini en exprimant $\varphi(x)$ en fonction de créateurs et annihilateurs et en poussant tous les annihilateurs à droite, et tous les créateurs à gauche. (dans le sens que $\int :\varphi^2(x) f(x) dx$ existe comme opérateur, pour f suffisamment régulier, de support borné). De la même façon on définit un monôme de Wick d'un nombre fini de facteurs φ et de ses dérivées, au point x . Le résultat est alors le suivant :

$$t_{\mu\nu}^{qu}(x) = : t_{\mu\nu}^{cl} : (x)$$

$$\partial^\mu t_{\mu\nu}^{qu}(x) = 0$$

$P_\mu = \int t_{0\mu}(x) d^3 x$ est le générateur infinitésimal de la représentation dans l'espace de Fock des translations d'espace temps. De même, dans l'exemple a), on peut définir l'opérateur courant

$$j_\mu(x) = \frac{1}{2i} (:\varphi^* \partial_\mu \varphi - \partial_\mu \varphi^* \varphi(x):)$$

$$\partial^\mu j_\mu = 0.$$

$$Q = \int j_0(x) d^3 x$$

est le générateur infinitésimal du groupe de jauge de première espèce; i.e, l'opérateur de charge (qui compte le nombre de particules \underline{a} moins le nombre de particules \bar{b}).

Pour l'exemple b) le courant est :

$$j_\mu(x) = :\tilde{\Psi} \partial_\mu \Psi:(x)$$

avec les mêmes propriétés.

VI - Modèles dynamiques pour l'opérateur de diffusion [EG].

Cherchons à définir dans l'espace de Fock du champ scalaire libre une dynamique suivant laquelle une source classique $J(x)$ localisée dans une région de l'espace temps est capable de créer des quanta de ce champ.

On va chercher une fonctionnelle $S(J)$ satisfaisant aux propriétés suivantes

i) $S(J)$ est formellement développable en puissances de J et se réduit à 1 pour $J = 0$:

$$S(J) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^m}{m!} \int T(x_1 \dots x_m) J(x_1) \dots J(x_m) dx_1 \dots dx_m$$

où les $T(x_1 \dots x_m)$ sont des opérateurs dans l'espace de Fock.

ii) $S(J)$ est covariant par rapport aux transformations de Lorentz :

$$\mathcal{U}(a, \Lambda) S(J) \mathcal{U}^{-1}(a, \Lambda) = S(\{a, \Lambda\} J)$$

$$(\{a, \Lambda\} J)(x) = J(\Lambda^{-1}(x - a))$$

iii) $S(J)$ est causale :

Si $\text{supp } J_1 \succeq \text{supp } J_2$ (cf. Fig. 2)

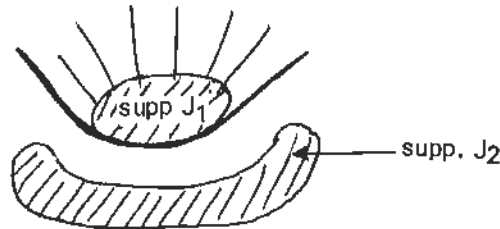


Fig. 2

$$\text{supp } J_1 \succeq \text{supp } J_2.$$

alors $S(J_1 + J_2) = S(J_1) S(J_2)$ autrement dit l'évolution due à l'interaction avec la source J_1 se produit à partir du résultat de l'interaction due à la source J_2 .

iv) Bien entendu $S(J)$ est unitaire si J est réel

$$S(J) S^*(J) = S^*(J) S(J) = 1.$$

Nous allons résoudre le problème de façon itérative. La causalité nous montre que si $\text{supp } J_1 \sim \text{supp } J_2$,

$$\left[\int T(x) J_1(x) dx, \int T(x) J_2(x) dx \right] = 0$$

on en déduit

$$[T(x_1), T(x_2)]_{\pm} = 0 \quad (x_1 - x_2)^2 < 0$$

à cause de ii

$$\mathcal{U}(a, \Lambda) T(x) \mathcal{U}^{-1}(a, \Lambda) = \varphi(\Lambda x + a)$$

à cause de iv le facteur i dans la définition de S donne

$$T(x) = T^*(x)$$

La solution la plus simple est :

$$T(x) = \varphi(x)$$

mais tout monôme de Wick réel est adéquat. Nous conviendrons d'assigner à chaque monôme de Wick de φ une source, c'est-à-dire éventuellement de remplacer $\int T(x) J(x) dx$ par $\sum_{\infty} T_{\infty}(x) J_{\infty}(x) dx$, les $T_{\infty}(x)$ étant des monômes de Wick. Nous continuerons à appeler $J(x)$ le coefficient $\varphi(x)$ dans cette somme. Nous allons nous borner pour l'instant au cas le plus simple où $T = \varphi$. Pour définir le champ $\hat{\varphi}(x)$, en interaction avec la source J , il est naturel de chercher $\hat{\varphi}(x)$ sous la forme

$$\hat{\varphi}(x) = \varphi(x) + O(J)$$

(i.e $\hat{\varphi}$ doit se réduire à φ si $J = 0$), et tel que

$$\hat{\varphi}(x)^* = \hat{\varphi}(x) \quad (\text{de même que } \varphi^* = \varphi)$$

et

$$\mathcal{U}(a, \Lambda) \hat{\varphi}(x) \mathcal{U}^{-1}(a, \Lambda) = \hat{\varphi}(\Lambda x + a)$$

Toutes ces conditions sont remplies par l'expression suivante :

$$\hat{\varphi}(x) = S^{-1} \frac{1}{i} \frac{\delta S}{\delta J(x)}$$

en vertu des hypothèses faites sur $S(J)$. Traitons d'abord complètement le cas où le premier terme non trivial de $S(J)$ est $i \int \varphi(x) J(x) dx$.

Cherchons maintenant le terme suivant : la propriété de causalité montre que

$$T(x_1, x_2) = \varphi(x_1) \varphi(x_2) \quad x_1 \succ x_2$$

$$\varphi(x_2) \varphi(x_1) \quad x_2 \succ x_1$$

Définissons le produit de Wick : $\varphi(x_1) \varphi(x_2)$: en poussant les destructeurs à droite et les créateurs à gauche dans le produit $\varphi(x_1) \varphi(x_2)$; alors on a

$$\varphi(x_1) \varphi(x_2) = : \varphi(x_1) \varphi(x_2) : + (\Omega, \varphi(x_1) \varphi(x_2) \Omega)$$

Le produit de Wick est évidemment commutatif. Pour définir $T(x_1, x_2)$, il suffit de prolonger

$$(\Omega \varphi(x_1) \varphi(x_2) \Omega) \quad x_1 \succ x_2$$

$$(\Omega \varphi(x_2) \varphi(x_1) \Omega) \quad x_2 \succ x_1$$

à $x_1 = x_2$.

La solution générale est $\Delta_F(x_1 - x_2) + P(\partial) \delta(x_1 - x_2)$ où $P(\partial)$ est un polynôme de dérivées. La solution la plus régulière (dont la transformée de Fourier a la croissance minimale pour p grand) est celle pour laquelle $P(\partial) = 0$ [4].

Pour le terme d'ordre n , on obtient

$$T(x_1 \dots x_n) = \varphi(x_{P(1)}) \dots \varphi(x_{P(n)}) \quad x_{P(1)} \gtrsim x_{P(2)} \gtrsim \dots \gtrsim x_{P(n)}$$

pour toute permutation P de $1 \dots n$. La solution la moins singulière est

$$T(x_1 \dots x_n) = T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) - \sum_{P \in \pi_n} \theta(x_{P(1)}^0 - x_{P(2)}^0) \dots \theta(x_{P(n-1)}^0 - x_{P(n)}^0) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n),$$

i. e.

$$S(J) = T \exp i \int J(x) \varphi(x) dx.$$

Le champ $\hat{\varphi} = S^{-1} \frac{1}{i} \frac{\delta S}{\delta J}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(x) &= [T \exp i \int J(y) \varphi(y) dy]^{-1} [T \varphi(x), \exp i \int J(y) \varphi(y)] \\ &= [\bar{T} \exp + i \int J(y) \varphi(y) dy] [T \varphi(x) \exp i \int J(y) \varphi(y) dy] \end{aligned}$$

Calculons $(\square + m^2) \hat{\varphi}(x)$.

Il faut calculer $(\square + m^2) T \varphi(x) \varphi(y_1) \dots \varphi(y_n)$

$$\begin{aligned} &= (\square + m^2) \sum_{i, P \in \pi_n} \theta(x_{P(1)}^0 - x_{P(2)}^0) \dots \theta(x_{P(i-1)}^0 - x_{P(i)}^0) \theta(x_{P(i)}^0 - x_{P(i+1)}^0) \dots \theta(x_{P(n-1)}^0 - x_{P(n)}^0) \\ &\quad \varphi(x_{P(1)}) \dots \varphi(x_{P(i-1)}) \varphi(x) \varphi(x_{P(i)}) \dots \varphi(x_{P(n)}) \\ &= \sum_{i=1}^n \delta(x - y_i) T (\varphi(y_1) \dots \widehat{\varphi(y_i)} \dots \varphi(y_n)) \end{aligned}$$

où \wedge indique l'omission. Effectuant la sommation sur n on obtient

$$(\square + m^2) \hat{\varphi}(x) = J(x)$$

La condition de causalité qui assure que

$$\frac{\delta}{\delta J(y)} \hat{\varphi}(x) = 0 \quad y \gtrsim x$$

et le fait que $\hat{\varphi} = \varphi$ pour $J = 0$ conduisent à la solution

$$\hat{\varphi}(x) = \varphi(x) + \int D_{\text{ret}}(x - y) J(y) dy.$$

Pour ce système extrêmement simple, il y a des équations du mouvement dérivant d'un lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) + J \cdot \varphi.$$

La simplicité de ce problème est trompeuse. Considérons $S(J, g) = 1 + i \int_{+\dots}^{dx} [J(x)\varphi(x) + :\varphi^2(x)g(x)]$

Le deuxième terme est une extension de

$$T(x_1, x_2) = \begin{cases} :\varphi^2(x_1) : :\varphi^2(x_2) & x_1 \geq x_2 \\ :\varphi^2(x_2) : :\varphi^2(x_1) & x_2 \geq x_1 \end{cases}$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} :\varphi^2(x_1) : :\varphi^2(x_2) &= : :\varphi^2(x_1) : \varphi^2(x_2) : + 4(\Omega; \varphi(x_1)\varphi(x_2)\Omega) \\ &\quad + : \varphi(x_1)\varphi(x_2) : + (\Omega; : \varphi^2(x_1) : \varphi^2(x_2)\Omega) \end{aligned}$$

Le seul problème délicat est de définir

$$\begin{aligned} (\Omega; :\varphi^2(x_1) : \varphi^2(x_2)\Omega) & \quad x_1 \geq x_2 \\ (\Omega; T(x_1, x_2)\Omega) &= \\ (\Omega; :\varphi^2(x_2) : \varphi^2(x_1)\Omega) & \quad x_2 \geq x_1 \end{aligned}$$

car $(\Omega; T(x_1, x_2)\Omega)$ n'existe pas ($(\Omega; \varphi^2(x_1)\varphi^2(x_2)\Omega)$ est suffisamment singulier pour $x_1 = x_2$ pour ne pas souffrir une multiplication par la fonction de Heaviside $\theta(x_1^0 - x_2^0)$).

On peut s'assurer que $C(x_1, x_2) [:\varphi^2(x_1) : \varphi^2(x_2)] = 0$ pour $(x_1 - x_2)^2 < 0$. Si on peut définir $\begin{matrix} R \\ A \end{matrix} (:\varphi^2(x_1) : \varphi^2(x_2))$ de support $\begin{matrix} x_1 - x_2 \in \mathbb{V}_+ \\ x_1 - x_2 \in \mathbb{V}_- \end{matrix}$ de sorte que $C(x_1, x_2) = \begin{matrix} R(x_1, x_2) \\ - A(x_1, x_2) \end{matrix}$

alors on pourra définir

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2) &= A(x_1, x_2) + :\varphi^2(x_1) : \varphi^2(x_2) \\ &= R(x_1, x_2) + :\varphi^2(x_2) : \varphi^2(x_1) \end{aligned}$$

La transformée de Fourier de $(\Omega; C(x_1, x_2)\Omega)$ se calcule aisément : c'est à un facteur près l'espace de phase de deux particules d'impulsion totale $P : \sqrt{\frac{P^2 - 4m^2}{P^2}} \in (P^0)$. En vertu de l'hypothèse faite sur les supports de R, A , et de l'invariance de Lorentz, leurs transformées de Fourier sont les valeurs au bord d'une seule et même fonction analytique de P^2 , dont la discontinuité sur les réels est $\sqrt{\frac{P^2 - 4m^2}{P^2}}$ - Cette fonction peut se construire au moyen d'une relation de dispersion soustraite : au moins une fois.

$$A + (p^2 + a^2) \int_{4m^2}^{\infty} dk^2 \sqrt{\frac{k^2 - 4m^2}{k^2}} \frac{1}{(k^2 + a^2)(k^2 - p^2)}$$

Le mieux qu'on puisse faire est donc de trouver une famille de $T(x_1, x_2)$ dépendant d'un paramètre. Aux ordres supérieurs en g , la situation devient meilleure.

Au fur et à mesure qu'on choisit comme termes d'interaction (le premier terme de $S(g)$) des monômes de Wick de degré croissant, les ambiguïtés de la théorie augmentent, et de plus en plus de paramètres doivent être ajustés par des considérations physiques. La classification des ambiguïtés fait l'objet de la théorie de la normalisation développée dans la troisième partie de ces cours, par E. BREZIN.

Au niveau où nous sommes, nous pouvons noter que c'est la singularité des puissances de Wick du champ libre qui est cause de nos ennuis. Autrement dit les interactions entre champs locaux sont fortement singulières. L'introduction de champs opérant dans des espaces de Fock à métrique indéfinie permet de régulariser ces interactions. Soit $\varphi_i(x)$ des champs libres de masses $M_i = \lambda_i m$, pour lesquels les règles de commutation sont

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \epsilon_i i G_{M_i}(x-y)$$

et soit

$$\varphi^{\text{Reg}}(x) = \varphi(x) + \sum_i C_i \varphi_i(x)$$

Si on remplace φ par φ^{Reg} ; moyennant l'introduction de suffisamment de champs régulateurs et certaines relations entre les C_i et les λ_i , on peut définir un opérateur S^{Reg} satisfaisant aux conditions demandées (sauf l'unitarité)

$$S^{\text{Reg}}(g, J) = T \exp i \int [\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{Reg}}(x) g(x) + J(x) \varphi(x)] dx$$

où $\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{Reg}}$ est un monôme de Wick de φ^{Reg} . L'exploitation de l'arbitraire existant tout de même à chaque ordre permet de définir une solution dépendant de paramètres finis pour $S(g, J)$, en faisant tendre les λ_i vers ∞ . C'est le processus de renormalisation. On peut montrer que la solution renormalisée peut se calculer au moyen de T-produits ordinaires à condition de remplacer $\int \mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{Reg}}(x) g(x)$ par $\int [\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{Reg}}(x) + \Delta \mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{Reg}}(x; g)] g(x) dx$, où $\Delta \mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{Reg}}$ est une série formelle en g et ses dérivées, à coefficients monômes de Wick multipliés par des facteurs dépendant des λ_i (et qui tendent vers l' ∞ lorsque les λ_i tendent vers l'infini).

La construction du $\Delta \mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{Reg}}$ est de nature récursive, aucune formule compacte n'étant connue à l'heure actuelle. Le calcul pratique des éléments de matrice de S en puissance de g s'organise de façon graphique par l'intermédiaire des graphes de Feynman comme il est expliqué dans l'appendice.

La classé de modèles envisagée jusqu'ici, où toutes les constantes de couplage dépendent de x et sont supposées localiser les interactions dans des régions bornées n'ont en réalité d'intérêt physique que dans le cas du couplage linéaire $J(x) \varphi(x)$ [interaction d'un champ quantique de photons avec un courant classique] où du couplage quadratique $g(x) : \varphi^2(x)$ [interaction d'un champ quantique d'électrons minimalement couplé à un champ de Maxwell classique : $A_\mu(x) : \bar{\psi} \gamma_\mu \psi : (x)$]. Une classe plus intéressante de théories s'obtient en divisant l'ensemble des constantes de couplages $\underline{g}(x)$ en deux groupes $\underline{\gamma}(x)$, $\underline{\lambda}(x)$, en conservant la dépendance en x du premier groupe de façon à définir les opérateurs locaux (généralisant $\hat{\varphi}$) :

$$\frac{1}{i} S^{-1}(\underline{\gamma}, \underline{\lambda}) \left. \frac{\delta S(\underline{\gamma}, \underline{\lambda})}{\delta \gamma(x)} \right|_{\gamma=0}$$

et en faisant tendre $\lambda(x)$ vers un ensemble de constantes λ . (limite adiabatique). Par exemple, λ contiendra la constante de couplage de Yukawa des interactions fortes, la constante de couplage électromagnétique, la constante de couplage de Fermi, etc. La limite $\lambda(x) \rightarrow \lambda$ n'existe pas toujours. Ce n'est que lorsque un certain nombre de conditions de normalisation rendues possibles par les ambiguïtés rencontrées dans la construction récursive de $S(g, \lambda)$ sont satisfaites, que la limite adiabatique existe et que l'on récupère l'invariance relativiste de $S(0, \lambda)$ et la covariance relativiste des opérateurs locaux précédemment définis (clairement, la présence de sources extérieures dépendant de x brise cette invariance !). Ces conditions sont les suivantes :

i) $(\Omega, S(0, \lambda) \Omega) = 1$ (stabilité du vide I)

ii) Le propagateur complet $(\Omega, S^{-1} \frac{\delta^2 S(\gamma, \lambda)}{\delta J(x) \delta J(y)} \Omega) \Big|_{\gamma=0}$ a une transformée de Fourier ayant à tout ordre en $\underline{\gamma}$ un pôle simple à $p^2 = m^2$.

iii) L'unitarité de $S(\underline{0}, \underline{\lambda})$, à tout ordre en $\underline{\lambda}$, n'est vérifiée que si le résidu de ce pôle est l'unité.

Pour terminer ce survol des théories envisagées ici, nous allons montrer comment elles se raccordent aux théories Lagrangiennes classiques qui en sont une première approximation lorsque les champs libres $\underline{\varphi}$ à l'aide desquelles elles sont construites dérivent d'un Lagrangien. L'argument qui suit est basé sur les résultats de l'appendice qu'on consultera utilement dès maintenant.

Si on revient au modèle simple du champ φ couplé linéairement à une source extérieure J , La fonctionnelle génératrice des fonctions de Green

$$\begin{aligned} (\Omega, S(J) \Omega) &= (\Omega, T \exp i \int J(x) \varphi(x) \Omega) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \cdot G(x_1 \dots x_n) J(x_1) \dots J(x_n) \\ G(x_1 \dots x_n) &= (\Omega, T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)) \Omega) \end{aligned}$$

peut s'écrire

$$G(J) = \exp G^C(J) = \exp \frac{i}{2} \int J(x_1) G_F^C(x_1 - x_2) J(x_2)$$

si on remarque que $(\Omega, T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \Omega) = 0$, n impair,

$$\text{et } (\Omega, T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_{2n}) \Omega) = \sum_{\substack{\text{partitions} \\ \text{en paires } (ij)}} [i G_F(x_i - x_j)]$$

chaque terme dans la somme s'intègre en $i \int dx_1 dx_2 J(x_1) G_F(x_1 - x_2) J(x_2)$; il y a $\frac{1}{n!} \binom{2n}{2} \binom{2n-2}{2} \dots \binom{2}{2}$

$$\text{termes dans la somme, soit : } \frac{1}{n!} \frac{(2n)!}{2^n} = \frac{1}{n!} \frac{(2n)!}{2^n}$$

$$\text{d'où } G(J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \left[\frac{i}{2} \int J(x_1) G_F(x_1 - x_2) J(x_2) dx_1 dx_2 \right]^n$$

$$\text{Si on définit } \varphi^C(J) = \frac{1}{i} \frac{\delta G^C(J)}{\delta J} = G^{-1}(J) \quad \frac{1}{i} \frac{\delta G(J)}{\delta J}$$

$\varphi^C(J) = G_F * J$, autrement dit $\varphi^C(J)$ est la solution nulle pour $J = 0$ de l'équation classique

$$(\square + m^2) \varphi^C(J) = J$$

résolue avec les conditions aux limites de Feynman.

Alternativement, $G^C(J)$ est la transformée de Legendre du Lagrangien: $\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2)$:

$$G^C(J) = \int d^4x (\mathcal{L}(\varphi) + J\varphi) \quad \Big|_{(\square + m^2)\varphi = J}$$

De façon générale, soit une théorie émergeant d'un terme d'interaction $J\varphi + \underline{g} \cdot \underline{\mathcal{L}}(\varphi)$, et réintroduisons la constante de Planck à la fois dans la définition de $S(J, g)$:

$$S(J, g) = T \exp \frac{i}{\hbar} \left[\int J\varphi + \underline{g} \cdot \underline{\mathcal{L}}(\varphi) \right]$$

et dans les règles de commutation de Ψ :

$$[\Psi(x), \Psi(y)] = i \hbar G_m(x-y)$$

[avec ces conventions, on a, pour l'exemple précédent $G^C(J) = \frac{i}{2\hbar} \int J(x_1) G_F^C(x_1-x_2) J(x_2) dx_1 dx_2$ et c'est $\varphi^C(J) = \frac{\hbar}{i} \frac{\delta G^C(J)}{\delta J}$ qui satisfait à l'équation de champ classique où $m^2 \rightarrow \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}$ joue le rôle du carré de l'inverse d'une longueur fondamentale. De la même façon nous supposons que les \underline{g} incluent les puissances de \hbar nécessaires pour donner à $\int \underline{g} : \mathcal{L}(\Psi) : dx$ la dimension d'une action].

Considérons alors à nouveau

$$G(J, g) = \langle \Omega, S(J, g) \Omega \rangle = \exp G_C(J, g)$$

comme une série formelle en puissance de \hbar dont il est clair que les termes successifs contiennent un nombre croissant de facteurs de contractions $i \hbar G_F$ entre les facteurs $\mathcal{L} : \Psi$: c'est-à-dire sont décrits en termes de diagrammes qui mettent en jeu un nombre croissant de boucles.

Le terme d'ordre le plus bas en \hbar décrira donc l'ensemble des diagrammes sans boucles (diagrammes en arbres), et, comme les contre termes apparaissant dans $\Delta \mathcal{L}$ proviennent des diagrammes avec boucle, ne sera sensible qu'à la forme initiale de $\mathcal{L}(\Psi)$: . Utilisant le théorème de Wick à cet ordre on a :

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{i} \frac{\delta G(J, g)}{\delta J} &= \langle \Omega, T \Psi \cdot \exp \frac{i}{\hbar} \int J \Psi + : g \mathcal{L}(\Psi) : \Omega \rangle \\ &= G_F^* \langle \Omega, T \Psi + g : \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi} : \Omega \rangle \exp i \frac{1}{\hbar} \int J \Psi + g : \mathcal{L}(\Psi) : \Omega \\ &= (G_F^* J) G(J) + G_F^* g \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi} \left[\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] G \end{aligned}$$

d'où, pour $\varphi^C(J) = G^{-1}(J, g) \frac{\hbar}{i} \frac{\delta G(J, g)}{\delta J}$, à l'ordre le plus bas en \hbar

$$\varphi^C(J) = G_F^* J + G_F^* g \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi} (\varphi^C(J))$$

autrement dit $\varphi^C(J)$ est la solution de l'équation de champ classique

$$(\square + m^2) \varphi^C(J) = J + g \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi} (\varphi^C(J))$$

s'annulant pour $J = g = 0$ calculée avec les conditions aux limites de Feynman, dérivant du Lagrangien classique $\mathcal{L}_{cl} + J \Psi$ avec

$$\mathcal{L}_{cl}(\Psi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Psi \partial^\mu \Psi - m^2 \Psi^2) + \mathcal{L}(\Psi),$$

ce qui est à nouveau équivalent à

$$G^C(J) = \frac{i}{\hbar} \int \mathcal{L}_{cl}(\Psi) + J \Psi \, dx \Big|_{\Psi = \varphi^C(J)}$$

$$\begin{aligned} i \hbar \frac{\delta G^c}{\delta J} &= \frac{\delta \mathcal{L}_{cl}}{\delta \varphi} \frac{\delta \varphi^c}{\delta J} + J \frac{\delta \varphi^c}{\delta J} + \varphi^c(J) \\ &= \varphi^c(J) \text{ puisque } \left(\frac{\delta \mathcal{L}_{cl}}{\delta \varphi} + J \right) (\varphi^c(J)) = 0 \end{aligned}$$

autrement dit $G^c(J)$ est la transformée de Legendre du Lagrangien classique.

Ainsi la famille de dynamiques quantiques que nous avons définies (Lagrangiennes, causales) peut être considérée comme prolongeant naturellement la famille des dynamiques Lagrangiennes classiques. Autrement dit, pour cette famille, on a une forme du principe de correspondance familier en mécanique quantique élémentaire. La théorie moderne de la renormalisation sous la forme donnée par Zimmermann^[Z],^[LRSZ] permet de poser la question suivante : étant donné un Lagrangien classique possédant certaines symétries qui s'expriment au moyen du théorème de Noether général, existe-t-il une théorie quantique la prolongeant et pour laquelle le théorème de Noether garde sa forme classique. La réponse est souvent positive^[LRSZ]. Lorsqu'elle est négative, on dit que la théorie quantique présente des anomalies. La forme naturelle du théorème de Noether que l'on utilise est liée à la formule donnant $G^c(J)$ comme transformée de Legendre du Lagrangien classique (à l'approximation en arbres) :

$$\int \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \omega} + J \frac{\delta \varphi}{\delta \omega} \right) \Big|_{\varphi = \varphi^c(J)} = 0$$

ω étant un paramètre décrivant une transformation des champs, $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \omega}$ mesurant le manque d'invariance du système pour cette transformation. Cette formule résume l'ensemble des relations entre fonctions de Green connexes collectivement dénommées identités de Ward qui jouent un rôle fondamental dans la renormalisation de théories en accord avec une symétrie ou une brisure de symétrie prescrite.

APPENDICE

THEOREME DE WICK, GRAPHES DE FEYNMAN

I. - Produits de Wick, Puissances de Wick, Théorème de Wick pour des produits de produits de Wick.

Soit φ un champ libre scalaire.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} (a(\vec{p}) e^{-ipx} + a^*(\vec{p}) e^{ipx}) \\ &= \varphi(x) + \varphi^\dagger(x) \end{aligned}$$

Considérons l'opérateur

$$\begin{aligned} W(x_1, \dots, x_n) &= \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \quad (W \text{ pour Wightman}) \\ :W(x_1 \dots x_n): &= :\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n): \end{aligned}$$

est défini à partir de $W(x_1 \dots x_n)$ en exprimant φ en fonction des a et a^* , et en plaçant tous les a à droite, tous les a^* à gauche. (Pour une définition plus générale, voir [S]. C'est le produit de Wick des opérateurs $\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)$, produit qui est évidemment commutatif. Dans le cas de champ anticommutatifs, ce produit est défini de manière à être anticommutatif.

Conclusion : $(\Omega, :W(x_1 \dots x_n) \Omega) = 0$

Le théorème de Wick exprime $W(x_1 \dots x_n)$ en fonction des $:W(x_{i_1} \dots x_{i_p}): \dots$:

$$W(x_1 \dots x_n) = \sum C(x_{i_1} \dots x_{i_p}) :W(x_{i_{p+1}} \dots x_{i_n}):$$

où la sommation s'étend aux partitions de $(i_1 \dots i_n)$ en deux sous semblables $(i_1 \dots i_p), (i_{p+1} \dots i_n)$ dont le premier est ordonné suivant l'ordre hérité $\mathcal{O} | \dots n : i_1 < \dots < i_p$, et où le symbole de contraction $C(x_{i_1} \dots x_{i_p})$ est donné par la formule suivante :

$$C(x_{i_1} \dots x_{i_p}) = 0 \quad p \text{ impair}$$

$$\begin{aligned} C(x_{i_1} \dots x_{i_{2q}}) &= \sum_{\substack{\text{Partitions} \\ \text{en paires}}} \prod_{\substack{(ij) \in \mathcal{P} \\ i < j}} G_m^+(x_i - x_j) \\ &= (\Omega, \varphi(x_{i_1}) \dots \varphi(x_{i_{2q}}) \Omega) \end{aligned}$$

$$\text{où } G_m^+(x_i - x_j) = (\Omega, \varphi(x_i) \varphi(x_j) \Omega)$$

La preuve va par récurrence :

$$\text{Si } \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) = \sum C(x_{i_2} \dots x_{i_p}) :W(x_{i_{p+1}} \dots x_{i_n}):$$

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) &= (\varphi^+(x_1) + \varphi^-(x_1)) \sum C(x_{i_2} \dots x_{i_p}) : W(x_{i_{p+1}} \dots x_{i_n}) : \\ &= \sum C(x_{i_2} \dots x_{i_p}) \varphi^+(x_1) : W(x_{i_{p+1}} \dots x_{i_n}) : \\ &+ \sum C(x_{i_2} \dots x_{i_p}) [\varphi^-(x_1), : W(x_{i_{p+1}} \dots x_{i_n}) :] - \\ &+ \sum C(x_{i_2} \dots x_{i_p}) : W(x_{i_{p+1}} \dots x_{i_n}) : \varphi^-(x_1) \end{aligned}$$

Le regroupement du premier et du dernier terme donne :

$$\sum C(x_{i_2} \dots x_{i_p}) : W(x_{i_{p+1}} \dots x_{i_n}, x_1) :$$

Le terme du milieu donne $\sum C(x_{i_2} \dots x_{i_p}) \sum_I i G_m^+(x_1 - x_{i_I}) x$

$$x : W(x_{i_{p+1}} \dots \hat{x}_{i_p} \dots x_{i_n}) : \quad \text{où } \wedge \text{ indique l'omission.}$$

En mettant ensemble tous les termes, on a le théorème. [E G], [S]

On montre que $\lim_{\substack{x \dots x \rightarrow x \\ \text{Def}}} : W(x_1 \dots x_n) : = : \varphi^n(x) :$

est tel que $\int : \varphi^n(x) f(x) dx$ existe comme opérateur dans \mathcal{F} pour f suffisamment régulière. L'inclusion d'opérateurs de dérivées par rapport à $x_1 \dots x_n$ avant le passage à la limite n'invalide pas la conclusion.

Dans le cas d'opérateurs de fermions, chaque terme, qui est de la forme :

$$i G_m^+(x_{p(1)} - x_{p(2)}) \dots i G_m^+(x_{p(2q-1)} - x_{p(2q)}) : W(x_{p(2q+1)} \dots x_{p(n)}) :$$

est affecté du signe $(-)^{\sigma(P)}$.

Le théorème de Wick passe aux produits chronologiques pour

$$T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)) = \sum C_T(x_{i_1} \dots x_{i_p}) : W(x_{i_{p+1}} \dots x_{i_n}) :$$

avec C_T obtenu à partir de C par le remplacement $i G_m^+(x_i - x_j) \rightarrow i G_F(x_i - x_j)$: remarquer que $C(x_{i_1} \dots x_{i_p}) = (\Omega, W(x_{i_1} \dots x_{i_p}) \Omega)$ (par récurrence)

(Utiliser la définition de T , l'identité $\sum_{p \in \pi_q} \theta(x_{p(1)}^0 - x_{p(2)}^0) \dots \theta(x_{p(q-1)}^0 - x_{p(q)}^0) = 1$)

et la commutativité de $W(x_1 \dots x_q)$, et interchanger la somme sur les permutations apparaissant dans la définition de T et la somme sur les partitions apparaissant dans le théorème de Wick ordinaire.

Le théorème s'étend avec φ remplacé par un champ régularisé à condition de remplacer $(\Omega, \varphi(x)\varphi(y)\Omega)$ (resp. $(\Omega, T\varphi(x)\varphi(y)\Omega)$) par $(\Omega, \varphi^R(x)\varphi^R(y)\Omega)$ resp. $(\Omega, T\varphi^R(x)\varphi^R(y)\Omega)$.

Le théorème s'étend à des monômes de Wick en séparant les points, d'après la définition, et, avant de passer à la limite des points coïncidants, en omettant les symboles de contraction entre des points qui à la limite entrent en coïncidence. Dans cette limite, évidemment, un grand nombre de termes deviennent identiques, d'où l'introduction de facteurs de comptage [E G].

On a alors la formule : [EG], [S]

$$\frac{:\varphi:_{x_1}^{r_1}}{x_1!} \frac{:\varphi:_{x_2}^{r_2}}{x_2!} \dots \frac{:\varphi:_{x_n}^{r_n}}{x_n!} = \sum_{p_i+q_i=r_i} (\Omega, \frac{:\varphi:_{x_1}^{p_1}}{p_1!} \frac{:\varphi:_{x_2}^{q_2}}{p_2!} \dots \frac{:\varphi:_{x_n}^{p_n}}{p_n!} \Omega)$$

$$x : \frac{:\varphi:_{x_1}^{q_1}}{q_1!} \frac{:\varphi:_{x_2}^{q_2}}{q_2!} \dots \frac{:\varphi:_{x_n}^{q_n}}{q_n!} :$$

II. - Graphe de Feynman d'un symbole de contraction chronologique

Soit $C_T(x_1 \dots x_q)$ un produit de Propagateurs de Feynman régularisés. On lui associe un graphe de sommets $x_1 \dots x_q$ et de lignes en correspondance biunivoque avec les facteurs propagateurs dans $C_T(x_1 \dots x_q)$.

Ex. : $C_T(x_1, x_2) = (\Omega, T : \varphi^R_{x_1}{}^2 : \varphi^R_{x_2}{}^2 : \Omega)$

$$= 4 [G_F^R(x_1 - x_2)]^2 \longrightarrow$$



Inversement à chaque graphe de Feynman on associe le produit des propagateurs de Feynman correspondant aux lignes.

On a : $(\Omega, T \frac{:\varphi^R:_{x_1}^{p_1}}{p_1!} \dots \frac{:\varphi^R:_{x_n}^{p_n}}{p_n!} \Omega)$

= \sum sur les graphes de Feynman de sommets $x_1 \dots x_n$ dont p_1 lignes aboutissent en x_1, \dots, p_n lignes aboutissent en x_n , des produits de propagateurs correspondants.

Dans le cas où apparaissent des dérivées où des propagateurs asymétriques dans l'interchange des points, on utilise des graphes orientés [dont les lignes portent une flèche].

III. - Evaluation d'éléments de matrice de diffusion au moyen de fonctions de Green : formules de réduction.

Rappelons, qu'en fonction du champ régularisé $\varphi^R = \varphi + \sum C_i^2 \varphi_i$, dont le propagateur est $G^R = G_m + \sum C_i^2 \epsilon_i G_i$ (ϵ_i signe apparaissant dans les règles de commutation de φ_i) on a

$$S^R(g, J) = T \exp i \int J \varphi^R + G : \mathcal{L}(\varphi)^R$$

où G est une série infinie en g et ses dérivées contenant les contretermes qui seront récursivement dé-

finis de sorte que les éléments de matrice de S^R entre des états de l'espace de Fock associé à Ψ (pas à Ψ^R) soient finis et aient de bonnes propriétés. Ces éléments de matrice se calculent de la façon suivante (formules de réduction).

Le développement pour $\Psi(x)$, le champ scalaire de base : s'inverse pour $a(f)$, $a^*(f)$ suivant (LSZ) :

$$a^*(f) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{i} \int \Psi(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 f(x) d^3x = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{i} \int_{x^0=t} [\Psi(x) \partial_0 f(x) - f(x) \partial_0 \Psi(x)] d^3x$$

et, comme conséquence du fait que f et Ψ satisfont à l'équation de Klein Gordon, cette expression est indépendante de t ($\Psi \overleftrightarrow{\partial}_0 f$ est la composante de temps du courant de Noether polarisé pour le Lagrangien complexifié). De même

$$a(f) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{i} \int_{x^0=t} f^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \Psi(x) d^3x.$$

Soit f un état de particule entrant, alors,

$$\begin{aligned} T \exp i \int J \Psi + \underline{G} : \mathcal{L} : a^*(f) &= T \exp i \int J \Psi + \underline{G} : \mathcal{L} : \\ &\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{i} \int_{x^0=-\infty} \Psi(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 f(x) d^3x. \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{i} \int_{x^0=-\infty} T (\exp i \int J \Psi + \underline{G} : \mathcal{L} : , \Psi(x)) \overleftrightarrow{\partial}_0 f(x) d^3x \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{i} \int_{x^0=-\infty} T (\exp i \int J \Psi + \underline{G} : \mathcal{L} : \Psi(x)) \overleftrightarrow{\partial}_0 f(x) d^3x \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{i} \left[\int_{x^0=-\infty} \int_{x^0=+\infty} \right] T (\exp i \int J \Psi + \underline{G} : \mathcal{L} : , \Psi(x)) \overleftrightarrow{\partial}_0 f(x) d^3x. \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{i} a^*(f) T (\exp i \int J \Psi + \underline{G} : \mathcal{L} :) \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{i} \int d^4x f(x) (\square_x + m^2) T \exp i \int J \Psi + \underline{G} : \mathcal{L} : , \Psi(x). \end{aligned}$$

Cette opération donne une façon de commuter $a^*(f)$ à travers $S(J, \underline{G})$

Donc, modulo les termes contenant des facteurs (g, f) , les éléments de matrice de $S(J, \underline{G})$ s'expriment en termes des fonctions de Green

$$G_{J, \underline{G}}(x_1, \dots, x_n) = (\Omega, T \exp i \int J \Psi + \underline{G} : \mathcal{L} : , \Psi(x_1) \dots \Psi(x_n) \Omega)$$

au moyens d'expressions de la forme (LSZ)

$$\int f^*(x_1) \dots f_p^*(x_p) f(x_{p+1}) \dots f_n(x_n) (\square_{x_1} + m^2) \dots (\square_{x_n} + m^2) G(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n$$

$G_{J,g}(x_1 \dots x_n)$ peut s'exprimer sous la forme

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_n)} (\Omega, T \exp i \int J \varphi + \underline{G} \underline{\mathcal{L}} \Omega)$$

$$= \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_n)} G_{\underline{g}}(J)$$

et on a

$$G_{0,g}(x_1 \dots x_n) = \left. \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_n)} G_{\underline{g}}(J) \right|_{J=0}$$

$$G_{\underline{g}}(J) = \sum_n \frac{i^n}{n!} \int G_{0,g}(x_1 \dots x_n) J(x_1) \dots J(x_n) d_{x_1} \dots d_{x_n}$$

est la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green en l'absence de source extérieure.

IV. - Structure des graphes de Feynman : diagrammes connexes, diagrammes liés, diagrammes propres (une particule irréductibles).

Faisons d'abord une digression qui éclairera la suite : considérons une famille de champs locaux (par exemple $\underline{\mathcal{L}}$) dans \mathcal{F} :

$$[\underline{\mathcal{L}}(x) \underline{\mathcal{L}}(y)] = 0 \quad (x-y)^2 < 0$$

Considérons les fonctions de Wightman de $\underline{\mathcal{L}}$:

$$W(x_1 \dots x_n) = (\Omega, \underline{\mathcal{L}}(x_1) \dots \underline{\mathcal{L}}(x_n) \Omega)$$

Appliquant l'invariance par translation

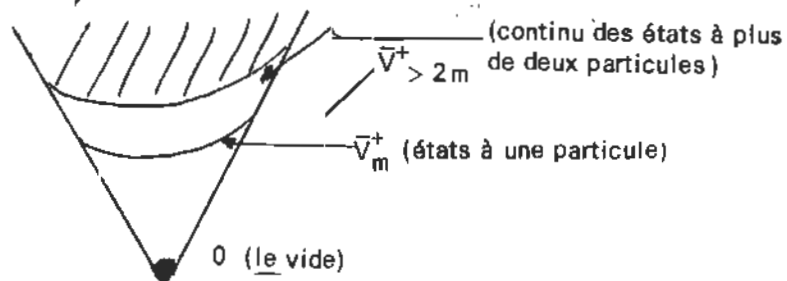
$$\underline{\mathcal{L}}(x) = e^{i\underline{\mathcal{P}}x} \underline{\mathcal{L}}(0) e^{-i\underline{\mathcal{P}}x},$$

et l'invariance du vide :

$$e^{i\underline{\mathcal{P}}x} \Omega = \Omega$$

[$\underline{\mathcal{L}}$, opérateur infinitésimal des translations, i , e impulsion énergie dans \mathcal{F}].

La transformée de Fourier \tilde{W} de W se factorise en $\delta^4(\sum p_i)$ [invariance par translation] et une distribution $\tilde{W}(p_1, \dots, p_{n-1})$ de support $p_i \in S^+, p_1 + p_2 \in S^+, \dots, p_1 + \dots + p_{n-1} \in S^+$ où S^+ est le spectre de $\underline{\mathcal{L}}$: $\{0\} \cup \bar{V}_m^+ \cup \bar{V}_{>2m}^+$, $\{0\}$ provenant du vide dans un développement suivant une base d'états intermédiaires :



Spectre de $\underline{\mathcal{L}}$.

W satisfait à la commutativité locale :

$$\underline{W} (x_1 \dots x_i, x_{i+1}, \dots x_n) = \underline{W} (x_1 \dots x_{i+1}, x_i, \dots x_n)$$

si $(x_i - x_{i+1})^2 < 0$

Si on définit les fonctions de Wightman connexes récursivement par [S] :

$$W(x_1 \dots x_n) = \sum_{\substack{(i_1 \dots i_{r_p}) = (1 \dots n) \\ r_1 \dots r_p \\ i_1 < \dots < i_{r_p} \\ i_{r_1+1} < \dots < i_{r_1+r_2} \\ \dots \\ i_{r+l} < \dots < i_{r_p} \\ p-l}} W^C(x_{i_1} \dots x_{i_{r_1}}) W^C(x_{i_{r_1+1}} \dots x_{i_{r_1+r_2}}) \dots W^C(x_{i_{r+l}} \dots x_{i_{r_p}})$$

on démontre que les W^C satisfont à la commutativité locale et que leurs transformées de Fourier ont un support déterminé comme précédemment par

$$\overset{0}{S}_+ = \bar{V}_m^+ \cup \bar{V}_{>2m}^+$$

i. e D'où la contribution du vide a été éliminées. Les graphes correspondants (où les i_{G_F} sont remplacés par des i_{G^+}) sont donc nécessairement connexes. Cette propriété passe aux produits chronologiques, et l'algorithme de définition prend dans ce cas une forme particulièrement simple en raison de la commutativité du produit chronologique :

Def : $G_g \equiv (\Omega, T \exp i \int_G \mathcal{L} \Omega) = \exp G_g^C$

TH (C) : les graphes de Feynman pour $G^C(g)$ sont connexes.

De la même façon, considérons $G_g(J) =$

$$(\Omega, T \exp i \int_G \mathcal{L} + J \mathcal{P} \Omega) - \text{On peut écrire}$$

$$G_g(J) = G_g \frac{G_g(J)}{G_g} = G_g G_g^L(J)$$

TH (L) Les graphes de Feynman pour G_g^L sont liés, c'est-à-dire que toutes les composantes connexes mettent en jeu des contractions liées à la source extérieure J.

Combinant (C) et (L), on a :

$$G_g(J) = \exp G_g^C \exp G_g^{CL}(J)$$

Ces propriétés permettent d'organiser la combinatoire des formules de réduction de la façon suivante :

Soit $\sigma_0 = (\Omega, S\Omega)$ et $(f_1 \dots f_n | S | f_{n+1} \dots f_m)^{CL}$

défini récursivement par :

$$(f_1 \dots f_n | S | f_{n+1} \dots f_m) = \sigma_0 \sum_{\substack{(i_1 \dots i_r) = 1 \dots m \\ r_1 \dots r_p \\ i_1 < \dots < i_{r_1} \\ i_{r_1+1} < \dots < i_{r_1+r_2} \\ \dots \\ i_{r_{p-1}} < \dots < i_p}} \dots \sigma(f_{i_1} \dots f_{i_{r_1}}) \sigma(f_{i_{r_1+1}} \dots f_{i_{r_1+r_2}}) \dots \sigma(f_{i_{r_{p-1}+1}} \dots f_{i_{r_p}})$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma(f_{i_1} \dots f_{i_r}) &= (f_{i_1} \dots f_{i_r} | S | f_{i_r+1} \dots f_{i_r})^{CL} \\ &\quad \text{Si } i_1 \dots i_r \leq n \\ &= (\Omega | S | f_{i_1} \dots f_{i_r})^{CL} \\ &\quad \text{Si } i_1 > n \\ &= (f_{i_1} \dots f_{i_r} | S | \Omega)^{CL} \\ &\quad \text{Si } i_r \leq n. \end{aligned}$$

Alors, les formules de réduction s'écrivent

$$(f_1 \dots f_n | S | f_{n+1} \dots f_m)^{CL} = \int dx_1 \dots dx_m f_1^*(x_1) \dots f_n^*(x_n) \times f_{n+1}(x_{n+1}) \dots f_m(x_m) (\square_{x_1} + m^2) \dots (\square_{x_m} + m^2) G^{CL}(x_1 \dots x_m)$$

Un raffinement de l'analyse diagrammatique est obtenu de la façon suivante : soit

$$G_g^{CL}(J) = \Gamma(\tilde{\varphi}) + i \int \tilde{\varphi} \left| \frac{\delta \Gamma}{\delta \tilde{\varphi}} + J = 0 \right.$$

On en déduit $\tilde{\varphi} = \frac{1}{i} \frac{\delta G_g^{CL}(J)}{\delta J}$

et

$$\Gamma(\tilde{\varphi}) = G_g^{CL}(J) - i \int \tilde{\varphi} \left| \tilde{\varphi} = \frac{1}{i} \frac{\delta G_g^{CL}(J)}{\delta J} \right.$$

Définissant $\Gamma(\tilde{\varphi}) = \sum_n \int \Gamma(x_1 \dots x_n) \tilde{\varphi}(x_1) \dots \tilde{\varphi}(x_n) \frac{dx_1 \dots dx_n}{n!}$,

on démontre que pour $n \geq 2$ $\Gamma(x_1 \dots x_n)$ reçoit sa contribution de diagrammes propres (ou une particule irréductible) c'est-à-dire qui ne peuvent être rendus non connexes en coupant une ligne, à condition que \mathcal{L} ne contienne pas de terme linéaire en φ , et, pour $n = 2$

$$\Gamma(x_1, x_2) = G_g^{CL*1}(x_1, x_2)$$

i.e

$$\int G_g^{CL}(x_1, x_2) \Gamma(x_2, x_3) dx_2 = \delta(x_1, x_3)$$

$$[G_g^{CL}(J) = \frac{1}{2!} G_g^{CL}(x_1, x_2) J(x_1) J(x_2) + \dots$$

$$= \frac{1}{2!} \int \Gamma(x_1, x_2) \tilde{\varphi}(x_1) \tilde{\varphi}(x_2) + i J \tilde{\varphi} \left| \begin{array}{l} \int \Gamma(x_1, x) \tilde{\varphi}(x) \\ + \dots = i J(x_1) \end{array} \right.$$

V. - Evaluation de l'amplitude associée à un graphe de Feynman dans l'espace des impulsions.

Soit \mathcal{G} un graphe de Feynman correspondant à un élément de matrice de $S(0, g)$, \mathcal{V} l'ensemble de ses sommets $(x_1 \dots x_N)$, \mathcal{L} l'ensemble de ses lignes (couples d'éléments de \mathcal{V}) -

L'amplitude de Feynman correspondante est $\prod_i G_F^R(x_i - x_j)$. A chaque sommet est associée une constante de couplage $\gamma(x_i)$, ou une fonction d'onde $f^*(x_i)$ si une seule ligne (dite extérieure) est incidente à ce sommet. Rappelons que, alors, l'évaluation en termes de transformées de Fourier impose à la variable transformée de Fourier correspondante d'être sur la couche de masse. Il suffit d'associer à chaque propagateur un facteur $\frac{1}{k_{ij}^2 - m^2 + i\epsilon} + C_i^2 \frac{\epsilon_j}{k_i^2 - \lambda_i m^2 + i\epsilon}$, à chaque sommet un facteur $\tilde{\gamma}(\sum_{(ij)} K_{ij})$ à chaque vertex extérieur : de supprimer le propagateur correspondant et de le remplacer par le $f(k_{ij})$ correspondant et d'intégrer les impulsions extérieures sur la couche de masse avec le poids $\frac{d^3 k_{ij}}{2\omega_{ij}}$, et sur toutes les quadri-impulsions des lignes intérieures.

A la limite adiabatique $\tilde{\gamma}_i(\sum_{ij} k_{ij}) \rightarrow \gamma_i \delta(\sum k_{ij})$ c'est-à-dire qu'il y a conservation de l'impulsion incidente à i

la quadri-impulsion à chaque sommet, d'où l'intégration seulement sur des quadri-impulsions compatibles avec une telle conservation.

NOTES

(1) Nous ne sommes pas étendu sur le domaine de définition des $a(f)$, $a^*(f)$: dans le cas B.E il n'est pas vrai que pour tout $\Phi \in \mathcal{F}(H)$ $a(f)\Phi$ ou $a^*(f)\Phi$ appartiennent à $\mathcal{F}(H)$ (il faut que $(a(f)\Phi, a(f)\Phi) < \infty$). Ceci est vrai pour les Φ tels que $\sum n |\Phi_n|^2 < \infty$, c'est-à-dire les Φ appartenant au domaine de définition $D(\mathcal{N})$ de l'opérateur nombre de particules \mathcal{N} . Les CCR doivent être comprise comme agissant sur $D(\mathcal{N})$, qui est stable par application des $a(f)$, $a^*(f)$. Dans le cas de F.D on n'a pas cette difficulté : les $a(f)$, $a^*(f)$ sont définis dans tout $\mathcal{F}_+(H)$, ce qui est dû au fait qu'on ne peut pas avoir plusieurs particules dans le même état.

(2) Pour une analyse plus fine, voir [S].

(3) Il serait intéressant de savoir si, exigeant que les générateurs infinitésimaux correspondant aux symétries du système (relativiste, interne) s'expriment comme intégrales d'espace de composantes de temps de courants locaux, on peut en déduire l'existence d'un Lagrangien dont dérive le champ [L].

(4) Si au lieu du champ φ nous avons le champ vectoriel A_μ de $\mathbb{V} \subset \mathbb{C}$ ii, l'argument utilisé ici, covariance incluse laisserait la classe de solution $G_{\mu\nu}^F + \rho g_{\mu\nu}^0 \delta \rho$ scalaire réel quelconque.

REFERENCES

Pour plus d'information sur de nombreux points dont on a esquissé le traitement ici, on pourra consulter les références suivantes où une bibliographie plus complète peut être trouvée.

[EG] H. EPSTEIN, V. GLASER Les Houches (1970) et Annales de l'IHP, à paraître
[Formulation rigoureuse de la théorie des perturbations]

[S] Lagrangian Field Theory, [Les Houches (1971)]
[General]

[Z] N. ZIMMERMANN Brandeis (1970)
[Renormalisation des théories Lagrangiennes Renormalisables]

[M] P. MOUSSA Les Houches (1971) et Gif-sur-Yvette ()
[Le Spin]

[LRSZ] J.H. LOWENSTEIN, A. ROUET, R. STORA, W. ZIMMERMANN, Capri (1971)
[Renormalisation des symétries brisées]

[B] J. BROS Gif-sur-Yvette (1971)
[Théorie Axiomatique]

[L] On consultera utilement :

J.J. LOEFFEL Cours donné à Lausanne, à paraître -

J. BELLISSARD, Notes, CNRS Marseille.

P. RENOARD, Ecole Polytechnique, à paraître.

Ces travaux sont plus généraux que ce qu'on peut trouver dans [S]

[H] R. HAAG Aix-en-Provence (1973)