


ELETROMAGNETISMO DE MAXWELL-PROCA

Vitor Petri Silva  *1

¹PPGFis - Universidade Federal do Espírito Santo

Resumo:

O eletromagnetismo de Maxwell-Proca é uma proposta de modificação do eletromagnetismo clássico de Maxwell que, em poucas palavras, sugere que a interação eletromagnética é intermediada por um fóton massivo. No meio do século XX novas evidências experimentais davam sugestões de modificações ao eletromagnetismo clássico. Nesse artigo, eu apresento, de maneira geral, a proposta de modificação feita por Alexandru Proca (1897-1955) e exploro sua teoria calculando as equações de campo e o tensor energia-momento. Atualmente, as ideias de Proca ainda são exploradas com ideias mais gerais de descrever um vetor de campo massivo, essas teorias são chamadas de “Proca generalizado” ou “*vector Galileon*”.

Palavras-chave: eletrodinâmica, equações de Proca, equações de Maxwell, fóton massivo

Abstract:

Maxwell-Proca electromagnetism is a proposed modification of Maxwell’s classical electromagnetism which, in a nutshell, suggests that the electromagnetic interaction is mediated by a massive photon. In the middle of the 20th century, new experimental evidence suggested modifications to classical electromagnetism. In this article, I present, in general, the modification proposal made by Alexandru Proca (1897-1955) and explore his theory by calculating the field equations and the energy-momentum tensor. Currently, Proca’s ideas are still explored with more general ideas of describing a massive field vector, these theories are called “generalized Proca” or “*vector Galieon*”.

Keywords: elctrodynamics, Proca equations, Maxwell equations, massive photon

1 INTRODUÇÃO

Na segunda metade do século XIX, o eletromagnetismo, unificado pelas equações de Maxwell, proporcionou uma descrição precisa e abrangente dos fenômenos elétricos e magnéticos. A força de Coulomb, uma das pedras angulares dessa teoria, postulava uma interação instantânea e de longo alcance, mediada por fótons sem massa. Essa visão, embora bem-sucedida em explicar uma vasta gama de fenômenos, como dito em [1], deixava em aberto questões fundamentais sobre a natureza da interação eletromagnética.

Como muito bem discutido em [2], no início do século XX, o cenário da física teórica sofreu uma profunda transformação com o advento da relatividade especial e da mecânica quântica. A busca por uma teoria unificada das forças da natureza impulsionou os físicos a investigarem os limites da eletrodinâmica clássica. As experiências de Rutherford, que revelaram a estrutura interna do átomo, e a descoberta da radioatividade, evidenciaram a existência de forças de curto alcance, como a força nuclear forte, que se comportava de maneira diferente da prevista pela eletrodinâmica como apontado por Yukawa [3]. Essas novas descobertas desafiam a concepção clássica de uma interação eletromagnética de longo alcance e mediada por partículas sem massa.

*Endereço de correspondência: vitor.p.silva@edu.ufes.br

Nesse contexto, o físico romeno Alexandru Proca, na década de 1930, propôs uma modificação radical na teoria eletromagnética de Maxwell. Inspirado pelas ideias de Yukawa sobre a força nuclear e pela necessidade de uma teoria que pudesse acomodar interações de curto alcance, Proca introduziu a hipótese de um fóton massivo [4]. Essa modificação implicava em uma alteração fundamental na equação de onda do campo eletromagnético, levando a uma interação que decai exponencialmente com a distância, em contraste com a lei do inverso do quadrado da distância da força de Coulomb.

A teoria de Proca, embora não tenha sido confirmada experimentalmente e tenha sido posteriormente suplantada pela eletrodinâmica quântica, representou um marco importante na história da física teórica. Ela abriu caminho para o desenvolvimento de teorias de gauge não abelianas e para a unificação das forças fundamentais da natureza.

Neste artigo, exploro o formalismo covariante e enfatizo sua utilidade e justifico por que propor uma modificação a uma teoria usando essa linguagem. Na Seção 3, apresento as equações de campo e o tensor energia-momento da teoria de Proca. Finalmente, na Seção 4, apresentamos algumas considerações sobre as aplicações contemporâneas da teoria de Proca.

Vale ressaltar que este artigo está sendo escrito como parte da avaliação da disciplina de Teoria Eletromagnética do Programa de Pós-Graduação em Física.

2 FORMALISMO COVARIANTE

Para mostrar como a hipótese de Proca se encaixa no eletromagnetismo de Maxwell, é importante demonstrar como o formalismo clássico é construído. Partimos das equações de Maxwell em unidade gaussianas, dadas por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}, \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

em que \vec{E} e \vec{B} são, respectivamente, os campos elétrico e magnético, ρ e \vec{J} são, respectivamente, densidades de carga e corrente e c é a velocidade da luz. Vale destacar que as equações (1) e (2) são as que carregam as informações das fontes geradores de campo, enquanto que (3) e (4) são entendidas como identidades no contexto de potenciais.

De (3) podemos definir o potencial vetor \vec{A} ,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (5)$$

Substituindo (5) em (4), definimos o potencial escalar φ ,

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \rightarrow \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \varphi \rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi. \quad (6)$$

Precisamos então definir a geometria do nosso espaço, essa geometria será em 4 dimensões dada pela métrica de Minkowski, caracterizada por

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^i)^2 \quad (7)$$

Com a geometria definida, podemos definir as coordenadas como $x^0 = ct$ e x^i como as coordenadas espaciais em que $i = (1, 2, 3)$. Como exemplo, podemos citar o sistema cartesiano em que $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$. Essas definições valem em qualquer sistema de coordenadas, podendo ser generalizada em notação índice como $x^\mu = (x^0, x^i)$ logo $\mu = (0, 1, 2, 3)$. Definimos então o quadripotencial eletromagnético como $A^\mu = (\varphi, A^i)$, em que A^i são as componentes espaciais do potencial vetor \vec{A} , e o gradiente $\partial_\mu = (\partial_0, \partial_i)$ em que $\partial_0 = \partial/\partial x^0$. Tanto A^μ quanto o diferencial das coordenadas dx^μ são chamados de tensores, construir uma teoria com base em tensores é importante para que ela seja independente do sistema de coordenada utilizado [5].

Podemos definir então um tensor de grau 2, reescrevendo (6) e (5) como

$$E^i = -\partial_0 A^i - \partial_i A^0 = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = F_{0i}, \quad (8)$$

$$B^i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A^k = -\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\partial_j A_k - \partial_k A_j) = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk}, \quad (9)$$

onde que ε_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita. Temos então, em coordenadas cartesianas

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E\hat{x} & E\hat{y} & E\hat{z} \\ -E\hat{x} & 0 & -B\hat{z} & B\hat{y} \\ -E\hat{y} & B\hat{z} & 0 & -B\hat{x} \\ -E\hat{z} & -B\hat{y} & B\hat{x} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (10)$$

percebe-se que o tensor $F_{\mu\nu}$ é antissimétrico, pois

$$F_{\nu\mu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu = -F_{\mu\nu}. \quad (11)$$

Temos então que os campos E^i e B^i podem ser dados como componentes de $F_{\mu\nu}$,

$$F_{0i} = E^i, \quad (12)$$

$$F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B^k, \quad (13)$$

em que o último pode ser demonstrado substituindo (9),

$$\begin{aligned} F_{ij} &= -\varepsilon_{ijk} \left(-\frac{1}{2} \varepsilon_{klm} F_{lm} \right) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} F_{lm} = \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) F_{lm} \\ &= \frac{1}{2} (F_{ij} - F_{ji}) = F_{ij}. \end{aligned} \quad (14)$$

Definimos agora a quadri-corrente, dada por

$$J^\mu = (c\rho, J^i), \quad (15)$$

podemos então supor que as equações de campo, nesse formalismo, serão dados por

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu, \quad (16)$$

e verificar que, de fato, (16) se resume nas equações (1) e (2). Para $\nu = 0$,

$$\partial_i F^{i0} = \frac{4\pi}{c} J^0 \rightarrow \partial_i E^i = 4\pi\rho, \quad (17)$$

e para $\nu = i$,

$$\partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = \frac{4\pi}{c} J^i \rightarrow \frac{1}{c} \partial_t E^i + \varepsilon_{ijk} \partial_j B^k = \frac{4\pi}{c} J^i. \quad (18)$$

Sabendo então que (16) é nossa solução para as equações de campo, podemos escrever a lagrangiana que nos levaria a essas soluções como

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} J_\mu A^\mu. \quad (19)$$

Descrever nossa teoria através de uma lagrangiana como (19) é a forma mais fundamental que temos de descrever uma interação, por isso propostas de modificação são normalmente feitas à elas. Nessa lógica, como é muito bem apresentado em [1], Proca propôs que a lagrangiana para a interação eletromagnética com um fóton massivo seria dada por

$$\mathcal{L}_{Proca} = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}J_{\mu}A^{\mu} + \frac{m^2}{8\pi}A_{\mu}A^{\mu}, \quad (20)$$

onde $m = m_{\gamma}c/\hbar$, em que \hbar é a constante de Planck reduzida e m_{γ} seria a massa do fóton. A partir da lagrangiana de Proca (20), podemos definir a ação, e então calcular grandezas importantes como as equações de campo e o tensor energia-momento.

3 EQUAÇÕES DE CAMPO E TENSOR ENERGIA-MOMENTO

A ação de Proca é definida como

$$S[A, g] = \int \left(-\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}J^{\mu}A_{\mu} + \frac{m^2}{8\pi}A^{\mu}A_{\mu} \right) \sqrt{-g}d^4x, \quad (21)$$

onde g é o determinante da métrica $g_{\mu\nu}$ e $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} = \nabla_{\mu}A_{\nu} - \nabla_{\nu}A_{\mu}$ em que ∇_{μ} é uma derivada covariante. Isso ocorre para $F_{\mu\nu}$ pois,

$$\nabla_{\mu}A_{\nu} - \nabla_{\nu}A_{\mu} = \partial_{\mu}A_{\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}A_{\lambda} - \partial_{\nu}A_{\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}A_{\lambda},$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ é o símbolo de Christoffel, que é simétrico no índices covariantes, ou seja, $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$, logo

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu}A_{\nu} - \nabla_{\nu}A_{\mu} &= \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}A_{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}A_{\lambda} \\ &= \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}. \end{aligned} \quad (22)$$

Podemos primeiro calcular a equação de campo variando (21) com relação a A_{μ} , teremos

$$\delta S = \int \left[-\frac{1}{16\pi}(\delta F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}) - \frac{1}{c}J^{\mu}\delta A_{\mu} + \frac{m^2}{8\pi}(\delta A^{\mu}A_{\mu} + A^{\mu}\delta A_{\mu}) \right] \sqrt{-g}d^4x, \quad (23)$$

usando a métrica $g_{\mu\nu}$, podemos mostrar que,

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} &= F^{\mu\nu}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta F^{\alpha\beta} \\ &= F_{\alpha\beta}\delta F^{\alpha\beta} = F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (24)$$

da mesma forma

$$\begin{aligned} A^{\mu}\delta A_{\mu} &= A^{\mu}g_{\mu\beta}\delta A^{\beta} \\ &= A_{\beta}\delta A^{\beta} = A_{\mu}\delta A^{\mu}, \end{aligned} \quad (25)$$

podemos então escrever (23) como,

$$\delta S = \int \left[-\frac{1}{8\pi}F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}J^{\mu}\delta A_{\mu} + \frac{m^2}{4\pi}A^{\mu}\delta A_{\mu} \right] \sqrt{-g}d^4x. \quad (26)$$

Pela definição de $F_{\mu\nu}$, teremos

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} &= F^{\mu\nu}(\nabla_{\mu}\delta A_{\nu} - \nabla_{\nu}\delta A_{\mu}) \\ &\quad (\mu \Longleftrightarrow \nu) \text{ no primeiro termo,} \\ &= F^{\nu\mu}\nabla_{\nu}\delta A_{\mu} - F^{\mu\nu}\nabla_{\nu}\delta A_{\mu} \\ &= 2\nabla_{\nu}\delta A_{\mu}F^{\nu\mu} \\ &\quad \text{integrando por partes,} \\ &= 2[\nabla_{\nu}(F^{\nu\mu}\delta A_{\mu}) - \nabla_{\nu}F^{\nu\mu}\delta A_{\mu}], \end{aligned} \quad (27)$$

onde o primeiro termo é o termo de borda, que temos a liberdade de definir como nulo. Temos então que (26), pelo teorema do variacional, será

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \left(\frac{1}{4\pi} \nabla_\nu F^{\nu\mu} \delta A_\mu - \frac{1}{c} J^\mu \delta A_\mu + \frac{m^2}{4\pi} A^\mu \delta A_\mu \right) \sqrt{-g} d^4x = 0 \\ &= \int \left(\frac{1}{4\pi} \nabla_\nu F^{\nu\mu} - \frac{1}{c} J^\mu + \frac{m^2}{4\pi} A^\mu \right) \delta A_\mu \sqrt{-g} d^4x = 0,\end{aligned}\quad (28)$$

como δA_μ é uma variação arbitrária, temos que as equações de movimento são dados por

$$\nabla_\nu F^{\nu\mu} + m^2 A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu. \quad (29)$$

Como esperado para qualquer tipo de modificação de uma teoria, no caso do eletromagnetismo de Proca, retornamos à (16) quando $m = 0$. Aplicando ∇_μ em (29), temos

$$\nabla_\mu \nabla_\nu F^{\nu\mu} + m^2 \nabla_\mu A^\mu = \frac{4\pi}{c} \nabla_\mu J^\mu, \quad (30)$$

como $\nabla_\mu \nabla_\nu = \partial_\mu \partial_\nu$ que é simétrico, enquanto $F^{\nu\mu}$ é antissimétrico, esse termo se anula, o termo $\nabla_\mu J^\mu$ é nulo devido a conservação da corrente, e dessa forma temos

$$\nabla_\mu A^\mu = 0 \rightarrow \nabla_0 A^0 + \partial_i A^i = 0 \rightarrow \frac{1}{c} \partial_t \varphi + \partial_i A^i = 0, \quad (31)$$

que é a condição do calibre de Lorentz. Abrindo o primeiro termo em (29), temos

$$\nabla_\nu F^{\nu\mu} = \nabla_\nu (\nabla^\nu A^\mu - \nabla^\mu A^\nu) = \nabla_\nu \nabla^\nu A^\mu \equiv \square A^\mu, \quad (32)$$

pois $\nabla^\mu \nabla_\nu A^\nu = 0$ devido (31). Temos então,

$$\square A^\mu + m^2 A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu. \quad (33)$$

É interessante notar que, no caso estático, $\partial_t A^\mu = 0$,

$$\nabla^2 A^\mu - m^2 A^\mu = -\frac{4\pi}{c} J^\mu, \quad (34)$$

e com a carga pontual em repouso, ou seja, $J^\mu = (cq, J^i = 0)$, $A^i = 0$ e $\varphi \neq 0$, teremos

$$\nabla^2 \varphi - m^2 \varphi = -4\pi q, \quad (35)$$

cujas solução é um potencial de Yukawa

$$\varphi(r) = q \frac{e^{-mr}}{r}, \quad (36)$$

que justamente descreve a interação nuclear, o parâmetro m dita o alcance dessa interação.

Para calcularmos o tensor energia momento, fazemos a variação em relação a métrica. Podemos escrever a ação como

$$\begin{aligned}S &= \int \left(-\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\alpha\beta} - \frac{1}{c} J_\mu g^{\mu\lambda} A_\lambda + \frac{m^2}{8\pi} A_\mu g^{\gamma\mu} A_\gamma \right) \sqrt{-g} d^4x, \\ \frac{\delta S}{\delta g^{ab}(y)} &= \int \left(-\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\alpha\beta} - \frac{1}{c} J_\mu g^{\mu\lambda} A_\lambda + \frac{m^2}{8\pi} A_\mu g^{\gamma\mu} A_\gamma \right) \sqrt{-g} \delta(x-y) d^4x \\ &= \left(-\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\alpha\beta} - \frac{1}{c} J_\mu g^{\mu\lambda} A_\lambda + \frac{m^2}{8\pi} A_\mu g^{\gamma\mu} A_\gamma \right) \delta \sqrt{-g} + \\ &\quad \delta \left(-\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\alpha\beta} - \frac{1}{c} J_\mu g^{\mu\lambda} A_\lambda + \frac{m^2}{8\pi} A_\mu g^{\gamma\mu} A_\gamma \right) \sqrt{-g}.\end{aligned}\quad (37)$$

Começando com a variação de $\sqrt{-g}$, temos

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g, \quad (38)$$

para verificarmos a variação do determinante de g , usamos do fato do determinante ser dado por $g = \Pi_{i=1}^D \lambda_i$, onde λ_i são os autovalores e D é a dimensão da matriz. Da variação do determinante temos

$$\begin{aligned} \delta g &= (\delta\lambda_1)\Pi_{i=2}^D \lambda_i + (\delta\lambda_2)\lambda_1\Pi_{i=3}^D \lambda_i + \dots + (\delta\lambda_D)\Pi_{i=1}^{D-1} \lambda_i \\ &= g \left(\frac{1}{\lambda_1}\delta\lambda_1 + \dots + \frac{1}{\lambda_D}\delta\lambda_D \right) = gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (39)$$

sabendo também que $g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu$, em que δ_ν^μ é um delta de Kronecker, teremos

$$\begin{aligned} \delta(g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu}) &= \delta(\delta_\nu^\mu) \\ g_{\lambda\nu}\delta g^{\mu\lambda} + g^{\mu\lambda}\delta g_{\lambda\nu} &= 0 \\ g_{\rho\mu}g_{\lambda\nu}\delta g^{\mu\lambda} + g_{\rho\mu}g^{\mu\lambda}\delta g_{\lambda\nu} &= 0 \\ g_{\rho\mu}g_{\lambda\nu}\delta g^{\mu\lambda} + \delta_\rho^\lambda\delta g_{\lambda\nu} &= 0 \\ \delta g_{\rho\nu} &= -g_{\rho\mu}g_{\lambda\nu}\delta g^{\mu\lambda} \\ (\rho = \mu; \lambda = \sigma) \\ \delta g_{\mu\nu} &= -g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu}\delta g^{\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (40)$$

temos então

$$\begin{aligned} \delta g &= gg^{\mu\nu}(-g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu}\delta g^{\rho\sigma}) \\ &= -g\delta^{\nu\rho}g_{\nu\sigma}\delta g^{\rho\sigma} \\ (\rho = \mu; \sigma = \nu) \\ &= -gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (41)$$

portanto

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ab}\delta g^{ab}. \quad (42)$$

Para o segundo termo, temos

$$-\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}(\delta g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}F_{\alpha\beta} + g^{\alpha\mu}\delta g^{\beta\nu}F_{\alpha\beta}) - \frac{1}{c}J_\mu\delta g^{\mu\lambda}A_\lambda + \frac{m^2}{8\pi}A_\mu\delta g^{\mu\gamma}A_\gamma \quad (43)$$

se a variação é em relação à g^{ab} , temos

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{16\pi}(F_{\mu\nu}F_\alpha^\nu\delta_\alpha^\mu\delta_b^\mu + F_{\mu\nu}F_\beta^\mu\delta_a^\beta\delta_b^\nu) - \frac{1}{c}J_\mu A_\lambda\delta_a^\mu\delta_b^\lambda + \frac{m^2}{8\pi}A_\mu A_\gamma\delta_a^\mu\delta_b^\gamma \\ &-\frac{1}{16\pi}(F_{b\nu}F_a^\nu + F_{\mu b}F_a^\mu) - \frac{1}{c}J_a A_b + \frac{m^2}{8\pi}A_a A_b, \end{aligned} \quad (44)$$

por fim podemos escrever $\delta S/\delta g^{ab}$ como

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta g^{ab}} &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}A_\mu J^\mu + \frac{m^2}{8\pi}A_\mu A^\mu \right) \sqrt{-g}g_{ab} \\ &\quad \left[-\frac{1}{16\pi}(F_{b\nu}F_a^\nu + F_{\mu b}F_a^\mu) - \frac{1}{c}A_a J_b + \frac{m^2}{8\pi}A_a A_b \right] \sqrt{-g}, \end{aligned} \quad (45)$$

usando da definição do tensor energia-momento,

$$\frac{\delta S}{\delta g^{ab}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}T_{ab}, \quad (46)$$

temos

$$\frac{\delta S}{\delta g^{ab}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} \left(-\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} A_\mu J^\mu + \frac{m^2}{8\pi} A_\mu A^\mu \right) g_{ab} \\ -\frac{\sqrt{-g}}{2} \left[\frac{1}{8\pi} (F_{b\nu} F_a^\nu + F_{\mu b} F_a^\mu) + \frac{2}{c} A_a J_b - \frac{m^2}{4\pi} A_a A_b \right],$$

por fim

$$T_{ab} = \left(-\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} A_\mu J^\mu + \frac{m^2}{8\pi} A_\mu A^\mu \right) g_{ab} \\ + \frac{1}{8\pi} (F_{b\nu} F_a^\nu + F_{\mu b} F_a^\mu) + \frac{2}{c} A_a J_b - \frac{m^2}{4\pi} A_a A_b. \quad (47)$$

4 CONCLUSÃO

A teoria de Proca, embora tenha sido pioneira na tentativa de descrever interações de curto alcance, apresenta limitações significativas. Como muito bem discutido em [6], (20) não possui simetria de calibre, ou seja, você teria um calibre preferencial para fazer suas medidas, o que daria um “sentido físico” para o potencial vetor A^μ . Em contrapartida, se (20) é trabalhada com duas dimensões espaciais e uma temporal, a simetria de calibre é mantida. De toda forma, a ideia de um fóton massivo continua a inspirar pesquisas em diversas áreas da física.

Atualmente, a teoria de Proca é frequentemente interpretada como um formalismo mais geral que engloba a eletrodinâmica de Maxwell e permite a descrição de fenômenos mais complexos. Essa perspectiva tem levado a diversas aplicações interessantes [7]. Na gravitação, por exemplo, a teoria de Proca tem sido explorada como uma possível generalização da relatividade geral [8], embora a introdução de um fóton massivo nesse contexto exija um cuidado especial para evitar inconsistências teóricas, por exemplo o surgimento de “parâmetro fantasmas”, ou seja, parâmetros sem fundamento teórico.

Outra área promissora é a física da matéria condensada. A teoria de Proca tem sido utilizada para modelar supercondutores holográficos [9], onde a dualidade gauge-gravidade sugere uma conexão entre teorias de calibre massivas e sistemas de muitos corpos. Essa abordagem oferece uma nova perspectiva para o estudo de fenômenos como a supercondutividade de alta temperatura.

Por fim, podemos aplicar a ideia de Proca na astrofísica [10], em que temos a hipótese das *Proca Stars*, estrelas compostas principalmente de bósons vetoriais massivos, também conhecidos como campos de Proca. Esses bósons são partículas elementares que possuem spin 1 e massa.

Em suma, a teoria de Proca, apesar de suas limitações, continua a ser uma ferramenta valiosa para a investigação de fenômenos físicos fundamentais. Ao estender a eletrodinâmica de Maxwell para incluir um fóton massivo, essa teoria abre novas possibilidades para a compreensão de interações de curto alcance e para a unificação das forças fundamentais da natureza. No entanto, é importante ressaltar que a interpretação física da massa do fóton e as implicações para a estrutura do espaço-tempo ainda são objeto de intensas pesquisas.

Agradecimentos

Agradeço ao Edital FAPES N° 20/2022, Apoio a Núcleos Capixabas Emergentes em Pesquisa, TO 1031/2022, com apoio do CNPQ e CAPES.

Referências

- [1] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [2] Verónica Errasti Díez, Brage Gording, Julio A. Méndez-Zavaleta, and Angnis Schmidt-May. Maxwell-Proca theory: Definition and construction. *Phys. Rev. D*, 101:045009, 2020.

- [3] Hideki Yukawa. On the Interaction of Elementary Particles. I. *Prog. Theor. Phys. Supp.*, 1:1–10, 1955.
- [4] Alexandru Proca. Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs. *J. Phys. Radium*, 7 (8):347–353, 1936.
- [5] Robert M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- [6] Wallace Barra Souza dos Santos. Introdução a teoria de chern-simons. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, 2023.
- [7] Verónica Errasti Díez, Brage Gording, Julio A. Méndez-Zavaleta, and Angnis Schmidt-May. Complete theory of Maxwell and Proca fields. *Phys. Rev. D*, 101:045008, 2020.
- [8] Matthew Hull, Kazuya Koyama, and Gianmassimo Tasinato. Covariantized vector galileons. *Phys. Rev. D*, 93:064012, 2016.
- [9] Sean A. Hartnoll, Christopher P. Herzog, and Gary T. Horowitz. Building a holographic superconductor. *Phys. Rev. Lett.*, 101:031601, 2008.
- [10] C. A. R. Herdeiro, E. Radu, N. Sanchis-Gual, N. M. Santos, and E. dos Santos Costa Filho. The non-spherical ground state of Proca stars . *Phys. Lett. B*, 852:138595, 2024.