

Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Efeitos Clássicos e Quânticos em Teorias Não Comutativas

Tiago Carlos Adorno de Freitas

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto
de Física para a obtenção do título
de Doutor em Ciências

Orientador: Prof. Dr. Dimitri Maximovitch Gitman

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Dimitri Maximovitch Gitman (IFUSP) - (Orientador)

Prof. Dr. Josif Frenkel - (IFUSP)

Prof. Dr. Jorge José Leite Noronha Junior - (IFUSP)

Prof. Dr. José Abdalla Helayël-Neto - (CBPF)

Prof. Dr. Jefferson de Lima Tomazelli - (UFSC)

São Paulo
Janeiro de 2013

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Freitas, Tiago Carlos Adorno de

Efeitos clássicos e quânticos em teorias não comutativas.
São Paulo, 2013.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo.
Instituto de Física, Depto. Física Nuclear.

Orientador: Prof. Dr. Dimitri Maximovitch Gitman
Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Física matemática; 2. Mecânica quântica;
3. Teoria de campos e ondas.

USP/IF/SBI-014/2013

Resumo

A presente tese de Doutorado refere-se a problemas em teoria de campos e mecânica quântica no espaço não comutativo (NC). Abordamos alguns sistemas físicos bem estudados em física teórica, como a teoria de Maxwell na presença de fontes externas, equação de Pauli, equação de Dirac em campos externos e o espectro do átomo de hidrogênio relativístico. Como um primeiro problema estudamos a teoria de calibre $U(1)_*$ e extendemos o mapa de Seiberg-Witten para incluir uma corrente externa e formulamos equações clássicas para os campos no espaço não comutativo. Soluções no vácuo e em um campo magnético externo para uma carga estática de tamanho finito a foram determinadas. Encontramos que uma carga estática além de ser um monopolo elétrico comporta-se como um dipolo magnético e um campo magnético externo modifica o campo de Coulomb a longas distâncias bem como alguns fatores de forma eletromagnéticos, comportamentos inerentes a consideração de uma geometria NC. Nesta direção analisamos a ambiguidade no mapa de Seiberg-Witten e mostramos que, no mínimo até a ordem estudada aqui, isto é equivalente a ambiguidade de se adicionar uma solução homogênea à condição de conservação da corrente. Demandando que o momento magnético NC seja menor que o erro existente na medida do momento magnético de léptons, obtemos uma estimativa superior para o parâmetro θ e seu comprimento fundamental associado l . Estudamos os níveis de energia do átomo de hidrogênio relativístico no formalismo da equação de Dirac no espaço NC para o campo de Coulomb. Demonstramos que no caso relativístico a não comutatividade quebra totalmente a degenerescência dos níveis $2S_{1/2}$, $2P_{1/2}$ e $2P_{3/2}$, abrindo novos canais de transição permitidos. Por fim construímos uma equação de onda não relativística para partículas de spin $1/2$ através do limite não relativístico da equação de Dirac no espaço NC. Apresentamos um modelo pseudoclássico (à-la Berezin-Marinov) cuja quantização coincide com as equações de onda não relativísticas. Através da interação entre um spin não-relativístico e o campo magnético, através da equação de Pauli no espaço NC, construímos uma generalização para o modelo de Heisenberg para dois spins acoplados no espaço NC. Em tal modelo calculamos a amplitude de probabilidade de transição entre dois estados ortogonais do tipo EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) submetidos em um campo magnético oscilatório e mostramos que, algumas de tais transições, que são proibidas no espaço comutativo são possíveis devido a não comutatividade do espaço.

Abstract

The present PhD thesis refers to problems in field theory and quantum mechanics in noncommutative (NC) space. We study some well known physical systems in theoretical physics, such as the Maxwell theory in the presence of external sources, the Pauli equation, the Dirac equation with external fields and the relativistic Hydrogen atom. First we study the $U(1)_*$ gauge theory and extend the Seiberg-Witten map to include an external current and formulate classical field equations in NC space. Solutions in the vacuum and in an external magnetic field for a static charge of finite size a is determined. We find that a static charge in NC space, besides being an electric monopole, behaves as a magnetic dipole and the external magnetic field modifies the Coulomb law at large distances, as well as some electromagnetic form factors. In this direction we analyse the arbitrariness in the Seiberg-Witten map and show that, at least to the order studied here, this is equivalent to adding a homogeneous solution to the charge conservation condition. Demanding that the NC magnetic moment be less than the existing error in the measurement of lepton's magnetic moment we obtain an upper bound for the NC parameter θ and its associated fundamental length l . In addition we consider the energy levels of a hydrogen-like atom in the framework of a θ -modified, due to space noncommutativity, Dirac equation with a Coulomb field. It is shown that the noncommutativity completely breaks the degeneracy of the $2S_{1/2}$, $2P_{1/2}$ and $2P_{3/2}$ levels, allowing for new transition channels. At last, but not least, we construct a nonrelativistic wave equation for spin 1/2 particles through the nonrelativistic limit of the NC Dirac equation. We present a pseudoclassical model (à-la Berezin-Marinov) whose quantization coincides with the nonrelativistic wave equations. By extracting the interaction between a nonrelativistic spin and the magnetic field, from the obtained Pauli equation in NC space, we construct a generalization of the Heisenberg model for two coupled spins in NC space. In such model, it is calculated the transition probability amplitude between two orthogonal EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) states submitted in the presence of an oscillatory magnetic field and we shown that some of such transitions, which are forbidden in NC space are possible due to space noncommutativity.

Agradecimentos

Agradeço o meu orientador, Dimitri Maximovitch Gitman, por inúmeros fatores. Certamente os primeiros foram a compreensão e paciência ao discutir física comigo, bem como aceitar minhas dificuldades nos diversos momentos onde minhas habilidades foram insuficientes para compreender seus ensinamentos. Em segundo lugar agradeço os momentos descontraídos e de conversas simples, onde pude perceber claramente, como a troca de opiniões são importantes no ambiente de trabalho. Esses momentos foram interpretados, por mim, como uma proximidade muito frutífera e motivadora para o trabalho; ingredientes fundamentais para superar minhas dificuldades e corresponder, à altura, suas expectativas sobre mim. Não posso deixar de mencionar que muitas de suas características, tais como, energia ao lidar com um problema, ceticismo e até um certo toque de intransigência contribuíram, significativamente, para a construção de minha personalidade como físico e como ser humano. A ele ainda agradeço as diversas oportunidades de interação com seus colaboradores e principalmente por nunca desistir de acreditar em meu potencial. O considero como um **amigo** mais velho, onde eu sempre me colocarei na humilde condição de aprendiz.

Agradeço ao professor Sergey Gavrilov por sua paciência infinita ao transmitir seus ensinamentos. Em muitos momentos, nas discussões sobre física, fiz perguntas muito simples e bastante ingênuas e nunca, mas nunca mesmo, fui tratado como um incapaz ou com desrespeito. Sua postura branda e paciente o torna um cientista impecável, em minha opinião.

Agradeço ao professor Anatoly Shabad pelas inúmeras discussões em física. Nossa interação é classificada, por mim, como a mais frutífera. Consegui aprender muito com ele, tanto em discussões via email quanto pessoalmente. Graças a sua seriedade em lidar com os nossos trabalhos tive o privilégio de aprender não somente sobre física mas também como se redigir artigos em língua inglesa. Sua postura branda e paciente ao lidar comigo também foram ingredientes imprescindíveis para nossa interação saudável.

Agradeço ao professor Dimitri Vassilevich também pelas discussões em física e paciência ao discutir comigo assuntos referentes aos nossos trabalhos. Sua postura calma e pacífica contribuíram significativamente para a compreensão de sutilezas sobre não comutatividade, sobre o qual ele é especialista.

Agradeço aos doutores e alunos veteranos do grupo Mário César Baldiotti, João Luiz Meloni Assirati e Rodrigo Fresneda pelas discussões sobre física, sobre comportamentos frente ao grupo e sobre os momentos descontraídos. A eles ainda agradeço pela ajuda em momentos difíceis. Agradeço também ao doutor Nelson Yokomizo pelas diversas discussões sobre física.

Exprimo sinceros agradecimentos a todos meus amigos do Instituto de Física, Antônio Sales, Eliane Pereira, Erike Cazaroto, Hans Flores, João Bosco, Jorgivam Dias, Karine Piacentini, Leandro Bevilaqua, Nayara Fonseca, Pedro Gomes e Raphael Albuquerque pelas muitas conversas simples e sempre muito agradáveis. Agradeço, em especial, aos meus amigos Carlos Eduardo Haluch, Everton Medeiros, Leandro Matioli e Ricardo Aluísio pela amizade e conversas sobre diversos assuntos da vida. A eles agradeço os ensinamentos, o senso de companheirismo e troca de opiniões que certamente contribuíram muito para a construção de minha personalidade, principalmente no que diz respeito a ser uma pessoa mais flexível e com uma postura adequada frente a diversas situações da vida, tanto amorosas quanto profissionais. Considero todos estes momentos e ensinamentos como tesouros valiosos, os quais levo para o resto de minha vida. Em se tratando de atividades desportivas não posso deixar de agradecer a todos meus amigos do Rugby e em especial ao Carlos Eduardo Haluch, o qual aprendi muito sobre o mundo da musculação e a disciplina subjacente. Minhas impressões sobre a seriedade e envolvimento dele com o esporte contribuíram e ainda contribuem para consolidar, cada vez mais em mim, uma opinião muito clara: “Tudo o que requer grandes resultados requer grande disciplina, seja isso no meio acadêmico ou no meio esportivo”.

Em especial agradeço meus pais, Kátia Regina e José Carlos, pelo constante auxílio e amor incondicional. Sem eles eu não conseguiria defender o meu doutorado e tudo, digo absolutamente tudo, seria impossível. Agradeço também aos meus irmãos Desirre Teixeira e Bruno Carlos pelo amor, meus avós e todos meus familiares pela ajuda.

Agradeço a minha namorada, Stephanie Alves Martins, por estar ao meu lado em grande parte do período do doutorado. Uma mulher companheira que contribuiu significativamente para o meu desempenho acadêmico e, principalmente, por me completar como homem. Sem seu amor e ajuda os resultados obtidos não teriam as proporções que tiveram. À sua família pela consideração, respeito e principalmente por me acolher tão bem.

Finalmente, agradeço a FAPESP pelo suporte financeiro.

"I have walked that long road to freedom. I have tried not to falter; I have made missteps along the way. But I have discovered the secret that after climbing a great hill, one only finds that there are many more hills to climb. I have taken a moment here to rest, to steal a view of the glorious vista that surrounds me, to look back on the distance I have come. But I can rest only for a moment, for with freedom comes responsibilities, and I dare not linger, for my long walk is not yet ended."

(Nelson Mandela)

*Aos meus pais, José Carlos de Freitas e
Kátia Regina Adorno de Abreu Freitas
e à minha avó Lady Adorno de Abreu.*

Em memória de *Zoroastro Adorno de Abreu*, um dos
responsáveis por minha trajetória acadêmica

Sumário

1	Introdução	12
2	Eletrodinâmica Clássica Não Comutativa com Fonte Externa	16
2.1	Introdução	16
2.2	Equações de Maxwell no espaço-tempo não comutativo	18
2.2.1	Teoria de calibre $U(1)_*$	18
2.2.2	O mapa de Seiberg-Witten	19
2.3	Soluções para o potencial produzido por uma carga estática na presença de um campo magnético externo	22
2.3.1	Soluções regulares	22
2.3.2	Soluções magnetostáticas alternativas	26
2.3.3	Soluções eletrostáticas alternativas	27
2.4	Propriedades das soluções regulares	29
2.4.1	Dipolo Magnético	29
2.4.2	Aprimoramento da lei de Coulomb e momento de quadrupolo elétrico	30
2.4.3	Potências da carga e teorema de Furry generalizado	32
2.5	Ambiguidades no mapa de SW	32
2.6	Sumário	33
3	Momento magnético Não Comutativo, comprimento fundamental e tamanho dos léptons	35
3.1	Introdução	35
3.1.1	O problema. Resultados e conclusões	35
3.1.2	Momento magnético NC	36
3.2	Limites superiores para o comprimento fundamental do momento magnético NC	37
3.2.1	Limitações baseadas em estimativas dos tamanhos dos léptons provenientes de espalhamentos de altas energias	37
3.2.1.1	Elétron	38
3.2.1.2	Múon	38
3.2.2	Estimativas finais	39
3.3	Limites superiores sobre o comprimento fundamental <i>versus</i> composição dos léptons	39
3.3.1	Elétron	39
3.3.2	Múon	40
4	Equação de Dirac no Espaço NC para o Átomo de Hidrogênio	41
4.1	Equação de Dirac θ -modificada com o campo de Coulomb	41
4.2	θ -modificação dos níveis de energia	43

4.3	Correção relativística para o nível $2P_{1/2}$	45
4.4	Correção relativística para o nível $2P_{3/2}$	46
5	Descrições Quânticas e Pseudoclássicas de Partículas Não Relativísticas de Spin	
	1/2 no Espaço Não Comutativo	49
5.1	Introdução	49
5.2	Limite não relativístico da equação de Dirac θ -modificada	50
	5.2.1 Simples modificação de Moyal	50
	5.2.2 Ação pseudoclássica θ -modificada para a partícula não relativística de spin 1/2	53
	5.2.3 Consideração sobre o formalismo do mapa de SW	55
5.3	Dois spins no espaço não comutativo	56
5.4	Sumário	58
6	Conclusões	59
A	Hamiltonianas Não Relativísticas	65
B	Mapa de SW e Equivalência de Calibre para a Teoria de Maxwell Pura	67
B.1	Teoria de Maxwell $U(1)_*$ sem correntes externas	67
	B.1.1 Mapa de SW no nível das equações de movimento: Teoria “off-shell”	67
	B.1.2 Mapa de SW no nível da ação: Teoria “on-shell”	68
B.2	Simetria de calibre e expansão dos campos	69

Lista de Figuras

4.1	“Splittings”para níveis de energia relativísticos e não relativísticos devido a não comutatividade do espaço.	48
-----	---	----

Capítulo 1

Introdução

A idéia de um espaço de configuração discreto, cuja estrutura assemelha-se a uma rede, surgiu por volta de 1930 nas cartas de Heisenberg para Peierls, Pauli, Oppenheimer e Snyder [1]. Em 1933, Peierls tratou o problema de uma partícula quântica em campos magnéticos uniformes [2] e em 1947 Snyder [3] considerou coordenadas não comutativas no espaço-tempo com o objetivo de descartar divergências ultravioletas em teorias quânticas de campos, sem destruir a covariância de Lorentz. Inicialmente, a idéia de Snyder não recebeu grande atenção devido ao sucesso do procedimento de renormalização da QED.

A idéia de Snyder, ou mais adequadamente, a existência de uma geometria não comutativa (NC) no espaço de configuração¹ adquiriu interesse e um certo avanço após a formalização matemática de deformação de álgebras aplicada a teoria de Yang-Mills sobre o toro NC [4]. Posteriormente foi discutido que para distâncias muito pequenas, da ordem da escala de Planck, a medida das coordenadas não possui significado físico devido ao surgimento de campos gravitacionais intensos que previnem a transmissão de informação [5]. Em outro contexto, foi demonstrado e discutido que a não comutatividade das coordenadas do espaço-tempo segue naturalmente como um limite particular de baixas energias da teorias de cordas [6, 7, 8, 9], onde o parâmetro da não comutatividade $\theta^{\mu\nu}$ é diretamente relacionado com o campo de fundo tensorial antissimétrico de Neveu-Schwarz $B^{\mu\nu}$, na presença de uma D-brana. Destaca-se ainda a contribuição de Seiberg-Witten [6] da qual, dentre os vários resultados deste trabalho, citamos o mapa de Seiberg-Witten (SW), o qual relaciona campos de calibre da teoria de Yang-Mills NC a campos de calibre da teoria de Yang-Mills ordinária (ou comutativa). O mapa de SW (ou transformação de SW) foi obtida exatamente para todas ordens em $\theta^{\mu\nu}$ na situação em que os campos de calibre, em ambos casos, são $U(1)$. No contexto de teorias de campos, citamos a melhoria de critérios de renormalizabilidade em algumas teorias a pequenas distâncias, diminuindo a divergência de amplitudes ou até mesmo tornando-as finitas, devido ao surgimento de fatores trigonométricos [10]. Embora existam problemas, como a quebra da invariância de Lorentz, violação de causalidade e unitariedade na situação em que a não comutatividade envolve a componente temporal [11, 12], existe um ativo e grande interesse quando a não comutatividade envolve somente coordenadas espaciais. Tais problemas não surgem neste caso e não há problemas conectados com a evolução temporal em mecânica quântica. No espaço NC, teorias de Chern-Simons podem servir como uma descrição natural para o efeito Hall quântico fracionário, como discutido em [13].

Embora o principal interesse desta linha de pesquisa ainda seja a formulação de uma teoria quântica de campos consistente no espaço-tempo NC (i.e., uma teoria quântica de campos que não apresenta problemas com unitariedade, causalidade e que seja covariante por transformações de

¹O tratamento matematicamente rigoroso sobre geometria NC pode ser encontrado no livro texto [14].

Poincaré), é interessante buscar por uma descrição da mecânica quântica no espaço NC, por se tratar de uma teoria alternativa que contempla a possibilidade de se introduzir uma escala de comprimento mínima e adicionalmente fornece resultados bem estabelecidos pela mecânica quântica usual no limite comutativo $\theta \rightarrow 0$.

Em princípio é possível implementar a não comutatividade das coordenadas em uma teoria quântica por meio da chamada aproximação de operadores. Esta consiste na realização da álgebra não comutativa

$$[\hat{q}^i, \hat{q}^j]_- = i\theta^{ij}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j]_- = 0, \quad [\hat{q}^i, \hat{p}_j]_- = i\hbar\delta_j^i, \quad (1.1)$$

em termos dos operadores ordinários (ou comutativos), que satisfazem

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j]_- = [\hat{p}_i, \hat{p}_j]_- = 0, \quad [\hat{x}^i, \hat{p}_j]_- = i\hbar\delta_j^i. \quad (1.2)$$

A realização da álgebra dos operadores NC (1.1) em termos dos operadores ordinários é não unívoca, algumas delas são discutidas em [15, 16]. Tais realizações foram aplicadas para alguns sistemas físicos concretos, embora apresentarem alguns problemas. Por exemplo, no sistema de Landau, ao se introduzir campo magnético *via* acoplamento mínimo, surge o problema da invariância de calibre na qual, na situação de campo magnético uniforme, o espectro do operador Hamiltoniano é invariante de calibre [17]. Por outro lado, admitindo que o campo magnético seja não-uniforme, o operador Hamiltoniano perde a invariância por transformações de calibre. Para o estudo do espectro do átomo de Hidrogênio, a aproximação de operadores também foi empregada em [18] e em nosso trabalho [19]. Foi demonstrado que, em ambos casos, a não comutatividade do espaço introduz uma quebra de degenerescência dos níveis de energia permitindo a transições entre níveis que antes eram degenerados, sob a descrição da mecânica quântica ordinária. Enfatizamos que tais transições são proporcionais ao parâmetro NC θ , sendo que, no limite $\theta \rightarrow 0$, resgatamos resultados bem estabelecidos. Aqui, em contraste ao sistema de Landau NC, por exemplo [17], o problema da invariância de calibre não ocorre.

Embora a aproximação seja operacionalmente mais simples, no sentido em não haver deformação na regra do produto (i.e., o produto entre funções é o produto usual), a mecânica quântica NC (e também a teoria de campos NC) pode ser construída através da modificação de Moyal, que significa a substituição do produto usual pelo produto estrela de Moyal [20]². Nos trabalhos [21] e [22], o sistema de Landau foi também discutido por meio da modificação de Moyal, cujos resultados coincidem com os resultados obtidos via aproximação de operadores. No que diz respeito a invariância de calibre, as mesmas conclusões foram alcançadas, i.e., o operador Hamiltoniano é invariante de calibre somente ao considerar um campo magnético constante.

É possível implementar a modificação de Moyal a transformação de Seiberg-Witten [6], que possui uma grande aplicação para sistemas submetidos a campos magnéticos. Existem, alguns trabalhos

²A formulação da mecânica quântica em termos de funções de distribuição clássicas, definidas no espaço de fase, consiste na correspondência entre estas e seus correspondentes operadores na teoria quântica. Tal formulação foi desenvolvida inicialmente por Weyl e Wigner [24] e posteriormente por Groenewold e Moyal [20]. Sob esta formulação foi definido o produto estrela de Moyal, que realiza a álgebra de Heisenberg dos operadores de posição e momento. A modificação na lei do produto no espaço de fase é referida como deformação, sugerindo, por sua vez, a nomenclatura de quantização por deformação. Esta é uma área ativa em física teórica, por exemplo veja as referências [25, 26, 27].

Seguindo a construção da quantização por deformação, define-se analogamente o produto de Moyal que realiza a álgebra NC. A definição do produto estrela apresentada nos próximos capítulos, por exemplo (2.2), não corresponde à definição original, trata-se meramente de uma denominação adotada em muitos artigos em mecânica quântica NC e teorias de campos NC, por exemplo, [28, 29]. Aqui, ao invés de adotarmos o rigor ao se explicar a diferença em cada vez que nos referirmos ao produto de Moyal, mantemos tal abuso de linguagem, seguindo as referências supracitadas e diversas outras.

neste assunto, como [23], onde foi determinada a ação efetiva para o campo de Schrödinger em 2+1 dimensões no plano NC, acoplado com o campo de calibre $U(1)_*$. Demonstrou-se que, utilizando a transformação SW, a não comutatividade do espaço não interfere na condutividade Hall. Nesta mesma linha existem trabalhos que tratam, entre outros assuntos, o efeito Aharonov-Bohm no espaço não comutativo, como [30, 31, 32] e o efeito Hall como [22, 33, 34, 35]. Como demonstrado em [30], retendo termos até primeira ordem em θ provenientes do produto estrela, tanto a condutividade Hall quanto a fase topológica do efeito Aharonov-Bohm apresentam o mesmo comportamento em comparação com o espaço comutativo, i.e, a não comutatividade do espaço não interfere nestes efeitos. Este resultado foi obtido através do acoplamento mínimo com campos de calibre $U(1)_*$, relacionados com os campos de gauge usual $U(1)$ *via* transformação Seiberg-Witten. Ainda neste contexto, em [36] foi discutido que qualquer teoria de calibre NC deve ser fisicamente equivalente a um subconjunto de uma extensão do modelo padrão, que viola Lorentz, envolvendo campos de calibre ordinários.

Todo este cenário serve como motivação para o estudo de teorias quânticas no espaço não comutativo e apresentamos abaixo progressos alcançados nesta direção. No capítulo 2 estudamos a teoria de calibre $U(1)_*$ e extendemos o mapa de Seiberg-Witten para incluir uma corrente externa (que viola a invariância de calibre) e formulamos, em primeira ordem no parâmetro NC, equações clássicas para os campos covariantes na presença de fontes. Encontramos soluções no vácuo e em um campo magnético externo, quando a 4-corrente é uma carga estática de tamanho finito a restrita pelo comprimento elementar. Impomos condições de contorno extras que são usadas para regularizar todas as singularidades $1/r$ incluídas nas soluções. A carga estática encontrada é, além de um monopolo elétrico, um dipolo magnético, com seu momento magnético sendo inversamente proporcional ao seu tamanho a . O campo magnético externo modifica o campo de Coulomb a longas distâncias e alguns fatores de forma eletromagnéticos. Também analisamos a ambiguidade no mapa de Seiberg-Witten e mostramos que, no mínimo até a ordem estudada aqui, isto é equivalente a ambiguidade de se adicionar uma solução homogênea à condição de conservação da corrente.

No capítulo 3, limites superiores para o comprimento fundamental são discutidos, os quais seguem do fato que um momento magnético é inerente a uma partícula carregada na eletrodinâmica NC. O resultado mais pronunciado para o comprimento fundamental é ainda maior que a estimativa do tamanho do elétron e múon, alcançado pela abordagem de Brodsky-Drell e Dehlmert para a composição do lépton. Isto significa que a eletrodinâmica NC não pode sozinha explicar a discrepância completa existente entre valores teóricos e experimentais do momento magnético do múon. Ao contrário, quando medidas e cálculos forem melhorados, a estimativa para o comprimento fundamental baseado em dados do elétron pode ainda diminuir para coincidir com seu raio composto. No capítulo 4 investigamos os efeitos da não comutatividade das coordenadas no átomo de hidrogênio relativístico. Demonstramos que tal consideração modifica a estrutura dos níveis de energia, em comparação com com a estrutura bem conhecida obtida pela mecânica quântica não relativística. Os resultados obtidos mostram que os níveis degenerados $2S - 2P$ se separam em três níveis. Explicitamente, a não comutatividade quebra totalmente a degenerescência dos níveis $2P_{1/2}$ e $2P_{3/2}$, resultando em novos canais de transição permitidos. Adicionalmente comparando nossos resultados com valores recentes para o “Lamb-shift” [37], determinamos um limite superior para o parâmetro NC θ . No capítulo 5 construímos uma equação de onda não relativística para partículas de spin $1/2$ (no sentido de uma θ -modificação³ da equação de Pauli) e, para este fim, determinamos o limite não relativístico da equação de Dirac θ -modificada. Apresentamos um modelo pseudoclássico (à-la

³Referimo-nos aqui a uma equação θ -modificada como sendo uma equação modificada ao se considerar a não comutatividade do espaço. Como discutido acima, funções das coordenadas agora dependerão do parâmetro NC θ . Lidamos com uma nova equação que é a expansão em série de potências em θ , cujo termo de ordem zero é a equação ordinária (equação sob a descrição clássica/quântica ordinária).

Berezin-Marinov) cuja quantização coincide com as equações de onda não relativísticas. Extraímos a interação entre um spin não-relativístico e o campo magnético de tal equação de Pauli e construímos uma θ -modificação do modelo de Heisenberg para dois spins acoplados no espaço não comutativo. Em tal modelo calculamos a amplitude de probabilidade de transição entre dois estados ortogonais do tipo EPR submetidos em um campo magnético oscilatório e mostramos que algumas de tais transições, que são proibidas no espaço comutativo, são possíveis devido a não comutatividade. No capítulo 6 apresentamos as conclusões e comentários finais.

Capítulo 2

Eletrodinâmica Clássica Não Comutativa com Fonte Externa

2.1 Introdução

Teorias de campos NC, baseadas em uma profunda revisão de propriedades mais fundamentais do espaço-tempo pela introdução de um comprimento elementar, desempenham um papel desafiante na física teórica moderna. Estas teorias não necessitam de uma longa introdução e referimos ao leitor interessado os artigos de revisão [28, 29]. O presente capítulo é devotado à construção de uma extensão NC da eletrodinâmica clássica com fontes externas. É notável que a resultante eletrodinâmica é, já no nível clássico, uma teoria não linear e rica em propriedades. Por exemplo, ela apresenta características de birefringência e “splitting” de fótons em campos externos [38]. Mas, em contraste com outras teorias não lineares, p.ex., a teoria clássica de Yang-Mills, a eletrodinâmica de Born-Infeld ou mesmo a eletrodinâmica quântica (QED) após correções radiativas em consideração, a eletrodinâmica clássica NC é, além disso, anisotrópica. Demonstraremos abaixo que a eletrodinâmica clássica NC reproduz também outras características interessantes, conhecidas em QED [39], [40]. Além disso estabelecemos que a carga eletrostática com sua densidade homogeneamente distribuída em uma esfera de tamanho finito carrega consigo um momento magnético dependente de seu raio. Portanto a idéia de um momento magnético intrinsecamente NC para o próton aparece. Adicionalmente esta mesma esfera em um campo magnético externo apresenta uma modificação da lei de Coulomb a grandes distâncias da carga, uma característica completamente anormal para a QED. Este efeito pode ser referido como uma manifestação macroscópica de um comprimento elementar a grandes distâncias. Um estudo deste e outros fenômenos clássicos semelhantes é imprescindível uma vez que possíveis consequências observacionais oriundas da não comutatividade podem ser experimentalmente procuradas.

No presente tratamento o campo eletromagnético é não quantizado. Os portadores de carga são representados através de correntes em vez de campos elementares. Esta última tarefa, a saber a introdução de correntes, representará um problema um tanto não trivial. É bem conhecido que existem severas restrições sobre grupos de calibre e suas representações de forma que transformações de calibre possam formar uma álgebra fechada no plano NC [18]. Para superar esta dificuldade utiliza-se o mapa de Seiberg-Witten (SW) [6] ou considera-se transformações de calibre “twisted” [41, 42]. Nenhuma destas são, estritamente dizendo, necessárias para a eletrodinâmica NC, pois, o grupo de calibre $U(1)$ pode ser facilmente deformado em um grupo $U(1)_*$. Consequentemente, muitos artigos definem a eletrodinâmica NC como uma teoria de calibre $U(1)_*$ ¹, veja p.ex., [44, 45, 46, 47]. Não

¹Existe outra terminologia, veja [43], segundo a qual esta deformação é denominada modificação de Moyal.

obstante, vários aspectos do mapa de SW foram desenvolvidos para teorias $U(1)$ NC [48, 49]. Uma vez que o potencial eletromagnético após o mapa de SW têm propriedades de transformação de calibre ordinárias, este mapa facilita a análise de previsões fenomenológicas de teorias NC [50, 51, 52, 53]. Ao mesmo tempo o mapa de SW possui efeitos interessantes sobre a renormalizabilidade de teorias NC mesmo no caso $U(1)$ [49, 54, 55, 56].

Estudamos a não comutatividade em sua ordem mais baixa, uma teoria de Maxwell NC na presença de fontes em primeira ordem no parâmetro NC θ . Claramente, se a análise fenomenológica envolve uma comparação de soluções em uma teoria comutativa para correções NC, é essencial que ambos campos comutativo e NC tenham as mesmas propriedades de transformação perante o grupo de calibre. Por exemplo, os campos elétrico e magnético devem ser invariantes de calibre $U(1)$. Em outras palavras, para tais aplicações introduz-se campos comutativos em uma teoria NC². Isto é precisamente o que o mapa faz.

Na seção 2.2, como uma preparação para a construção de SW, primeiramente estudamos a teoria de calibre $U(1)_*$ com correntes. Observamos que, embora o conjunto de equações de movimento consistindo das equações de Maxwell e da condição de conservação da corrente seja covariante por transformações de calibre, a ação não é invariante de calibre. Este fato é análogo à propriedade bem conhecida em teorias de Yang-Mills não abelianas (“comutativas”) e não representa uma inconsistência interna. Entretanto, para o mapa de SW isto implica que o mesmo deve ser efetuado nas equações de movimento ao invés de ser realizado na ação. Procedemos desta forma e derivamos o mapa de SW para as correntes [57] em primeira ordem no parâmetro da não comutatividade. Equações de campo incluem potenciais junto com tensores eletromagnéticos. Sua covariância de calibre é efetuada via a afirmação que potenciais transformados (por uma transformação de calibre) satisfazem as mesmas equações com a precisão adotada.

Na seção 2.3 consideramos as correções NC para os campos de uma carga estática e esfericamente simétrica distribuída em uma esfera de tamanho finito, assumindo a não comutatividade do espaço, somente. É importante notar que o tamanho da carga deve ser maior que o comprimento elementar característico de uma teoria NC. Em contraste com o nosso trabalho anterior [58], consideramos adicionalmente a carga estática em um campo magnético constante e homogêneo. Tal consideração resulta em uma correção NC para o potencial eletrostático, linear com respeito a carga e ao campo externo e, em um campo magnético NC produzido pela carga, quadrática com respeito ao seu valor e independente do campo magnético externo. Na subseção 2.3.1 impomos condições de contorno nas equações de campo que excluem um comportamento singular das soluções na origem (onde a carga é centralizada) e encontramos os campos magnético e elétrico produzidos pela carga. Nas subseções 2.3.2, 2.3.3 consideramos outras soluções que apresentam singularidades na origem ou não decrescem em regiões remotas e discutimos quais das soluções podem ser selecionadas como físicas e associadas à carga. É notável que a solução para o campo magnético NC física (regular na origem) não apresenta um limite finito se seu tamanho é considerado infinitamente pequeno. Isto não é obrigatório, de fato, desde que o tamanho de qualquer objeto físico não pode ser menor que o comprimento elementar. Na seção 2.4 discutimos várias peculiaridades das soluções: o efeito magneto-elétrico e, especialmente, o momento magnético NC intrínseco devido à extensão da carga da partícula, que é inversamente proporcional ao seu tamanho e portanto mais importante [58] para partículas que são consideradas pontuais, de acordo com as presentes possibilidades experimentais, como léptons carregados e quarks. Ao mesmo tempo discutimos o “splitting” causado por este momento magnético NC se a partícula é admitida como sendo um núcleo atômico (subseção 2.4.1). Na subseção 2.4.2 discutimos a correção NC para o potencial eletrostático que consiste em uma contribuição tipo Coulomb anisotrópico de

²Salientamos que, para algumas aplicações, como a recente análise da condição da quantização NC de Dirac [59], isto não é necessário.

um momento de quadrupolo. Um “splitting” de Zeeman NC análogo é apontado. Na subseção 2.4.3 propomos uma extensão do teorema de Furry em aplicação à eletrodinâmica NC que explica, em bases gerais, o caráter da dependência das soluções magnética e eletrostática em potências da carga, campo externo e parâmetro NC.

É conhecido que o mapa de SW não é único. Na seção 2.5 mostramos que, em primeira ordem, a ambiguidade no mapa de SW, derivado na subseção 2.2, para a corrente é precisamente a ambiguidade de adicionar uma solução homogênea da equação de conservação para a corrente.

2.2 Equações de Maxwell no espaço-tempo não comutativo

2.2.1 Teoria de calibre $U(1)_\star$

Nesta subseção trabalhamos no plano Moyal, que é (identificado com) um espaço de funções suficientemente suaves no \mathbb{R}^4 munidas com o produto estrela de Moyal (2.2) e o parâmetro NC é assumido ser constante, i. e., $\theta^{\mu\nu} = \text{const.}$

Iniciamos com a ação para a teoria de calibre $U(1)_\star$,

$$\begin{aligned} \check{S} &= \check{S}_A + \check{S}_{jA}, \\ \check{S}_A &= -\frac{1}{16\pi c} \int dx \check{F}_{\mu\nu} \star \check{F}^{\mu\nu}, \quad \check{S}_{jA} = -\frac{1}{c^2} \int dx \check{j}^\mu \star \check{A}_\mu, \\ \check{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \check{A}_\nu - \partial_\nu \check{A}_\mu + ig [\check{A}_\mu \star \check{A}_\nu], \quad [\check{A}_\mu \star \check{A}_\nu] = \check{A}_\mu \star \check{A}_\nu - \check{A}_\nu \star \check{A}_\mu, \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde a constante de acoplamento é $g = e/(\hbar c)$, com e sendo a carga elementar (para um elétron $e = -|e|$) e o produto estrela de Moyal “ \star ” é definido como

$$f(x) \star g(x) = f(x) e^{\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu} g(x), \quad (2.2)$$

com $f(x)$ e $g(x)$ sendo funções arbitrárias, e.g., [29, 44, 46, 47, 89, 90, 97, 98], e $x = (x^0 = ct, x^i, i = 1, 2, 3)$. Em linhas gerais, a ação \check{S}_{jA} pode ser obtida de uma teoria NC com campos fundamentais. Por exemplo, para o caso de férmions fundamentais, teríamos,

$$\check{S}_{\check{\psi}} = i \int dx \bar{\check{\psi}} \star \gamma^\mu (\partial_\mu - ig \check{A}_\mu \star) \check{\psi} \equiv i \int dx \bar{\check{\psi}} \gamma^\mu \partial_\mu \check{\psi} + \check{S}_{jA}. \quad (2.3)$$

As transformações de calibre $U(1)_\star$ são,

$$\begin{aligned} \check{A}_\mu &\rightarrow \check{A}'_\mu = U_{\check{\lambda}} \star \check{A}_\mu \star U_{\check{\lambda}}^{-1} + ig^{-1} (\partial_\mu U_{\check{\lambda}}) \star U_{\check{\lambda}}^{-1}, \\ \check{F}_{\mu\nu} &\rightarrow \check{F}'_{\mu\nu} = U_{\check{\lambda}} \star \check{F}_{\mu\nu} \star U_{\check{\lambda}}^{-1}, \\ U_{\check{\lambda}} &= e^{i\check{\lambda}} = 1 + i\check{\lambda} - \frac{1}{2}\check{\lambda} \star \check{\lambda} + O(\check{\lambda}^3), \end{aligned} \quad (2.4)$$

com um parâmetro local $\check{\lambda}(x)$. A ação \check{S}_A é invariante por estas transformações de calibre (veja, p.ex. [6, 49, 50]). A corrente externa $\check{j}^\mu(x)$ transforma-se covariantemente,

$$\check{j}^{\mu'} = U_{\check{\lambda}} \star \check{j}^\mu \star U_{\check{\lambda}}^{-1}. \quad (2.5)$$

de forma que as equações de movimento, $\delta\check{S}/\delta\check{A}_\mu = 0$,

$$\check{D}_\nu \check{F}^{\nu\mu}(x) = \frac{4\pi}{c} \check{j}^\mu(x), \quad (2.6)$$

são covariantes sob as transformações (2.4), (2.5). A derivada covariante é definida como

$$\check{D}_\mu \Phi := \partial_\mu \Phi + ig [\check{A}_\mu \star \Phi] . \quad (2.7)$$

A mesma regra de transformação (2.5) para a corrente segue de (2.3) assumindo as propriedades de transformação padrões $\check{\psi} \rightarrow \check{\psi}' = U_{\check{\lambda}} \star \check{\psi}$ para férmions.

A condição de compatibilidade para as equações de movimento (2.6) conduz a uma lei de conservação covariante para a corrente,

$$\check{D}_\mu \check{D}_\nu \check{F}^{\nu\mu} = 0 \implies \check{D}_\mu \check{j}^\mu = 0 . \quad (2.8)$$

Retornemos agora para a ação. A soma $\check{S}_A + \check{S}_{\check{\psi}}$ é invariante perante o grupo de transformações $U(1)_\star$. Entretanto, efetuando uma transformação de calibre infinitesimal (2.4), (2.5) na ação para as correntes em (2.1) obtemos,

$$\delta \check{S}_{jA} = -\frac{1}{gc^2} \int dx \{ (\partial_\mu \check{j}^\mu) \star \check{\lambda} \} , \quad (2.9)$$

o que significa que a teoria de Maxwell NC na presença de correntes tem simetria $U(1)_\star$ se as correntes \check{j}^μ são conservadas, i.e., $\partial_\mu \check{j}^\mu = 0$. Entretanto esta condição está em desacordo com o fato que as correntes sejam covariantemente conservadas, que segue como uma identidade das equações de movimento (2.8). Portanto a ação total \check{S} (2.1) não é invariante por transformações de calibre $U(1)_\star$. De fato, esta mesma característica já é conhecida da teoria de Yang-Mills acoplada com correntes externas. Não existe uma maneira consistente de introduzir correntes em teorias de calibre não abelianas no nível clássico [61] (veja também [62]) sem violar a invariância de calibre da ação, embora uma teoria de calibre *covariante* possa ser formulada [63] tanto no nível clássico como no quântico. Consequentemente é esperado encontrar aqui o mesmo problema devido a estreita relação entre a teoria de calibre não comutativa $U(1)_\star$ e teorias de calibre não abelianas [28, 29].

2.2.2 O mapa de Seiberg-Witten

Apesar da presença de todas propriedades de covariância $U(1)_\star$ das equações de Maxwell, não é o que realmente se necessita para analisar todas as predições fenomenológicas da teoria NC. Gostaríamos de lidar com tensores eletromagnéticos e correntes *invariantes* ao invés de *covariantes*. Em outras palavras, é necessário introduzir campos de calibre ordinários $U(1)$ no lugar de campos de calibre NC $U(1)_\star$. Isto é alcançado através do mapa de Seiberg-Witten [6], cuja forma é bem conhecida para \check{A}_μ e $\check{F}_{\mu\nu}$. Em primeira ordem em θ temos,

$$\begin{aligned} \check{A}_\mu &= A_\mu + \frac{g}{2} \theta^{\alpha\beta} A_\alpha [\partial_\beta A_\mu + f_{\beta\mu}] , \quad f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu , \\ \check{F}_{\mu\nu} &= f_{\mu\nu} - g \theta^{\alpha\beta} [f_{\alpha\mu} f_{\beta\nu} - A_\alpha \partial_\beta f_{\mu\nu}] . \\ \check{\lambda} &= \lambda - \frac{g}{2} \theta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \lambda \cdot A_\beta . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Para determinar o mapa de SW para as correntes \check{j}^μ impomos que, perante o mapa de SW, as transformações de calibre $U(1)_\star$ (2.5) das correntes \check{j}^μ é induzida pelas transformações de calibre $U(1)$ de A_μ e j^μ através de uma dependência funcional de \check{j}^μ nos mesmos. Para transformações infinitesimais, esta condição é,

$$\check{j}^\mu(A, j) + \delta_\lambda \check{j}^\mu(A, j) = \check{j}^\mu(A + \delta_\lambda A, j) , \quad (2.11)$$

onde $\check{\delta}_\lambda$ e δ_λ denotam as correspondentes variações de calibre. Note que, $\delta_\lambda j = 0$, em concordância com a eletrodinâmica ordinária de Maxwell. Por virtude de (2.5)

$$\check{\delta}_\lambda \check{j}^\mu(A, j) = i [\check{\lambda}^*, \check{j}^\mu] = -\theta^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \lambda) (\partial_\beta j^\mu) + O(\theta^2),$$

que concide com as transformações de calibre de $g\theta^{\alpha\beta} A_\alpha \partial_\beta j^\mu$ causadas por $\delta_\lambda A_\alpha = -g^{-1} \partial_\alpha \lambda$. Então, finalmente, o mapa de SW adicional para as correntes é

$$\check{j}^\mu = j^\mu + g\theta^{\alpha\beta} A_\alpha \partial_\beta j^\mu. \quad (2.12)$$

Este resultado coincide com o derivado previamente na referência [57]. Este mapa não é único, existe uma ambiguidade em três parâmetros nas soluções das equações de SW que serão discutidas na subseção abaixo 2.5.

Como já mencionado acima, a ação NC para o campo eletromagnético interagindo com uma corrente externa *não* é invariante de calibre, ao passo que as equações para os campos *são covariantes*. Consequentemente faz sentido aplicar o mapa de SW às equações de movimento (2.6) e às condições de compatibilidade (2.8). Em primeira ordem em $\theta^{\mu\nu}$, obtém-se,

$$\partial_\nu f^{\nu\mu} - g\theta^{\alpha\beta} (\partial_\nu (f_\alpha^\nu f_\beta^\mu) - f_{\nu\alpha} \partial_\beta f^{\nu\mu} - A_\alpha \partial_\nu \partial_\beta f^{\nu\mu}) = \frac{4\pi}{c} (j^\mu + g\theta^{\alpha\beta} A_\alpha \partial_\beta j^\mu), \quad (2.13)$$

$$\partial_\mu j^\mu + g\theta^{\alpha\beta} (f_{\mu\alpha} \partial_\beta j^\mu + A_\alpha \partial_\beta \partial_\mu j^\mu) = 0. \quad (2.14)$$

É possível verificar a compatibilidade destas duas equações com a mesma acurácia em potências de θ , atuando a derivada parcial ∂_μ em (2.13) e utilizando (2.14) para obter uma identidade. Somente a anti-simetria dos tensores $\theta^{\alpha\beta}$ e $f^{\mu\nu}$ é referida no processo, bem como as identidades de Bianchi para último tensor.

As equações de Maxwell (2.13) são não lineares com respeito ao campo mesmo quando as correntes externas são ausentes, $j = 0$. A não linearidade é restrita a segunda potência do campo, pois nos restringimos a primeira ordem no parâmetro da não comutatividade θ ao deduzí-las: expansão em potências em θ gera expansões em potências do campo³.

As equações de movimento (2.13), (2.14) são covariantes de calibre $U(1)$ por construção, embora aparentam não ser invariantes por conterem potenciais juntamente com tensores eletromagnéticos e correntes, ambos invariantes de calibre. Por outro lado é importante notar que os potenciais estão envolvidos com o parâmetro θ que é presumivelmente pequeno. Por esta razão os termos contendo potenciais podem ser omitidos do conjunto de equações se admitidos em suas soluções, determinados com a acurácia desejada. Para provar esta afirmação, note que o primeiro fator $\partial_\mu j^\mu$, é da ordem de θ de acordo com a equação (2.14). Assim ao ser substituído no termo proporcional aos potenciais $g\theta^{\alpha\beta} A_\alpha \partial_\beta \partial_\mu j^\mu$ estes tornam-se de ordem θ^2 e, portanto, podem ser desprezados na equação (2.14). Analogamente, a diferença dos dois termos proporcionais aos potenciais no lado esquerdo e direito da equação (2.13) $A_\alpha \theta^{\alpha\beta} \partial_\beta (\partial_\nu f^{\nu\mu} - \frac{4\pi}{c} j^\mu)$ também são de ordem $\sim \theta^2$, pois o fator $(\partial_\nu f^{\nu\mu} - \frac{4\pi}{c} j^\mu)$ é da ordem de θ de acordo com a equação (2.13). Portanto as equações acima se reduzem ao conjunto de equações explicitamente invariantes por transformações de calibre,

$$\partial_\nu f^{\nu\mu} - g\theta^{\alpha\beta} (\partial_\nu (f_\alpha^\nu f_\beta^\mu) - f_{\nu\alpha} \partial_\beta f^{\nu\mu}) = \frac{4\pi}{c} j^\mu, \quad (2.15)$$

$$\partial_\mu j^\mu + g\theta^{\alpha\beta} f_{\mu\alpha} \partial_\beta j^\mu = 0. \quad (2.16)$$

³Como pode ser observado pelo mapa de SW (2.10), termos lineares em θ são acompanhados por termos quadráticos nos potenciais.

Trataremos as equações não lineares (2.15) e (2.16) recursivamente, expandindo A_μ e j^μ em série de potências em θ :

$$A_\mu = A_\mu^{(0)} + A_\mu^{(1)}(\theta) + O(\theta^2), \quad (2.17)$$

$$j^\mu = j^{(0)\mu} + j^{(1)\mu}(\theta) + O(\theta^2), \quad (2.18)$$

onde $A^{(0)}$, $j^{(0)}$ satisfazem as equações de Maxwell comutativas e a equação de conservação da corrente

$$\partial_\nu f^{(0)\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^{(0)\mu}, \quad \partial_\mu j^{(0)\mu} = 0, \quad (2.19)$$

e $A^{(j)}$ e $j^{(j)}$ são correções da j -ésima ordem em θ . Usando (2.19), obtemos em primeira ordem em θ ,

$$\partial_\nu f^{(1)\nu\mu} - g\theta^{\alpha\beta} \left(\partial_\nu (f_\alpha^{(0)\nu} f_\beta^{(0)\mu}) - f_{\nu\alpha}^{(0)} \partial_\beta f^{(0)\nu\mu} \right) = \frac{4\pi}{c} j^{(1)\mu}, \quad (2.20)$$

$$\partial_\mu j^{(1)\mu} + g\theta^{\alpha\beta} f_{\mu\alpha}^{(0)} \partial_\beta j^{(0)\mu} = 0. \quad (2.21)$$

Soluções de (2.20) e (2.21) não são únicas. Pode-se adicionar uma corrente \tilde{j}^μ que satisfaz $\partial_\mu \tilde{j}^\mu = 0$ em $j^{(1)\mu}$. No entanto isto é equivalente à própria solução da equação (2.19) para $j^{(0)\mu}$. Esta ambiguidade é, portanto, não física e \tilde{j}^μ pode ser absorvido em $j^{(0)\mu}$. Em exemplos considerados na próxima subseção, onde a fonte $j^{(0)\mu}$ é estática e esfericamente simétrica, pode-se admitir $j^{(1)\mu} = 0$. Similarmente a ambiguidade para $f^{(1)\mu\nu}$ pode ser removida impondo condições de que os campos se anulem no infinito ou fixando um campo externo. Tais condições removeriam, por exemplo, um campo magnético homogêneo e constante, como uma possível solução de $\partial_\mu f^{(1)\mu\nu} = 0$.

A título de completude, verifiquemos o que acontece ao efetuarmos o mapa de SW no nível da ação (2.1). Facilmente obtém-se para a primeira ordem em θ

$$S_{\text{SW}} = -\frac{1}{16\pi c} \int dx \left\{ \left(1 + \frac{g}{2} \theta^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right) f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - 2g\theta^{\alpha\beta} f^{\mu\nu} f_{\alpha\mu} f_{\beta\nu} \right\} \\ - \frac{1}{c^2} \int dx \left\{ j^\mu A_\mu + \frac{g}{2} \theta^{\alpha\beta} j^\mu A_\alpha (\partial_\beta A_\mu + f_{\beta\mu}) + g\theta^{\alpha\beta} A_\mu A_\alpha (\partial_\beta j^\mu) \right\}, \quad (2.22)$$

cujas respectivas equações de Euler-Lagrange são,

$$\partial_\nu \left[f^{\nu\mu} \left(1 + \frac{g}{2} \theta^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right) \right] = \frac{4\pi}{c} j^\mu \left(1 + \frac{g}{2} \theta^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right) + g\theta^{\alpha\beta} [\partial_\nu (f_\alpha^\nu f_\beta^\mu) + \partial_\alpha (f^{\mu\nu} f_{\beta\nu})] \\ + g\theta^{\beta\mu} \left\{ \partial_\alpha (f^{\alpha\nu} f_{\beta\nu}) - \frac{1}{4} \partial_\beta (f^{\alpha\nu} f_{\alpha\nu}) \right. \\ \left. - \frac{4\pi}{c} \left[f_{\beta\alpha} j^\alpha + A_\alpha (\partial_\beta j^\alpha) - \frac{A_\beta}{2} (\partial_\alpha j^\alpha) \right] \right\}. \quad (2.23)$$

Na situação em que as correntes estão ausentes, pode ser verificado diretamente que estas equações coincidem com (2.13) como soluções das últimas. Contrariamente, quando $j^\mu \neq 0$, as equações (2.23) apresentam problemas. A invariância de calibre de (2.23) não pode ser restaurada mesmo efetuando as expansões (2.17) e (2.18). Consequentemente, de agora em diante, desconsideramos as equações derivadas desta forma, i.e. (2.22), e utilizaremos exclusivamente as equações de Maxwell NC e conservação da corrente (2.13) e (2.14) (junto com suas versões expandidas (2.20) e (2.21)).

Alguns pontos esclarecedores acerca da não-equivalência do mapa de SW aplicado à ação e às equações de movimento são discutidos a seguir. Por definição, para uma teoria $U(1)_*$ temos $\check{S}(\check{A}, \check{j}) = S_{\text{SW}}(A, j)$. Consequentemente, as equações de movimento (2.23) podem ser reescritas como,

$$0 = \frac{\delta S_{\text{SW}}}{\delta A_\mu(x)} = \int dy \left[\frac{\delta \check{S}}{\delta \check{A}_\nu(y)} \frac{\delta \check{A}_\nu(y)}{\delta A_\mu(x)} + \frac{\delta \check{S}}{\delta \check{j}^\nu(y)} \frac{\delta \check{j}^\nu(y)}{\delta A_\mu(x)} \right]. \quad (2.24)$$

O primeiro termo acima se anula sob as equações de movimento (2.6), enquanto o segundo não (uma vez que não existe equações de movimento oriundas pela variação das correntes). Portanto, as equações de movimento provenientes da variação da ação S_{SW} não são equivalentes em comparação às equações provenientes da ação original \tilde{S} . Em contrapartida, se o mapa de SW é aplicado às equações de movimento da teoria de calibre $U(1)_*$, tal equivalência é preservada (após truncarmos em primeira ordem em θ). A razão por trás da não equivalência dos dois procedimentos é a natureza não dinâmica da corrente externa, que não gera quaisquer equações de movimento, mas participa no mapa de SW. A título de elucidação, o apêndice B é devotado a uma discussão acerca do mapa de SW e as equações de Maxwell NC na ausência de fontes externas.

2.3 Soluções para o potencial produzido por uma carga estática na presença de um campo magnético externo

2.3.1 Soluções regulares

Nesta subseção estudaremos as correções NC lineares em θ para o 4-vetor potencial de uma carga estática esfericamente simétrica. As correções encontradas são tanto eletrostáticas quanto magnetostáticas (em particular, as últimas ocorrerão somente na presença de um campo magnético externo).

Impomos condições estacionárias,

$$\partial_0 A^{(1)\mu}(x) = 0, \quad (2.25)$$

sobre estas correções, tendo em mente que as soluções em ordem zero (i.e., soluções das equações de Maxwell ordinárias),

$$\begin{aligned} \partial_\nu f^{(0)\nu\mu} &= \frac{4\pi}{c} j^{(0)\mu}, \quad \partial_\mu j^{(0)\mu} = 0, \\ f_{\mu\nu}^{(0)} &= \partial_\mu A_\nu^{(0)} - \partial_\nu A_\mu^{(0)}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

são também sujeitas a condições estacionárias. Precisamente, admitimos a carga total externa Ze distribuída com uma densidade constante pela região esférica de raio a . A densidade de corrente $j^{(0)\mu}$ é definida em duas regiões, na parte interior da esfera $r \leq a$, representada pela região I, e em sua parte exterior $r > a$, representada por região II, como segue,

$$j^\mu = (c\rho, 0), \quad \rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi} \frac{Ze}{a^3}, & r \in \text{I} \\ 0, & r \in \text{II} \end{cases}, \quad r = |\mathbf{x}|. \quad (2.27)$$

Na sequência incorporaremos aos potenciais, relacionados com estas regiões, os índices I ou II. A distribuição de carga homogênea dentro da esfera é admitida por simplicidade. Extensões a distribuições esféricas arbitrárias, inclusive contínuas, podem também ser consideradas quando necessárias. A densidade de carga (2.27) tende a uma delta de Dirac no limite de carga puntual: $\rho(\mathbf{x}) = Ze \delta^3(\mathbf{x})$, quando $a \rightarrow 0$. Entretanto, devido a não comutatividade das coordenadas, nenhum *objeto esférico físico* deve possuir raio menor do que o comprimento elementar intrínseco a não comutatividade. Por esta razão, restringiremos nossa consideração a valores $a > \sqrt{\theta}$ (aqui $\theta = |\boldsymbol{\theta}|$ e $\boldsymbol{\theta} = \{\theta^i\}$, $\theta^i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\theta^{jk}$). Por outro lado, após efetuar o mapa de SW, estamos lidando com um espaço comutativo, o que significa que devemos ter cautela de modo que a teoria resultante seja consistentemente definida em todas regiões, i.e., em $r \leq a$ e $r > a$. Portanto ao considerarmos valores para as coordenadas na origem $r = 0$, devemos tratar possíveis singularidades neste ponto e suas consequências. Este fato nos implicará a impor condições de contorno regulares na origem. Tais

condições são obrigatórias enquanto estamos lidando com a expansão em potências de θ . O ponto é que ordens superiores em θ são acompanhadas por ordens superiores dos potenciais eletromagnéticos e suas derivadas. Logo, se uma singularidade é admitida em ordem mais baixa, ela pode reforçar-se a cada próxima ordem subsequente na expansão em θ , sendo portanto não negligenciável mas ao mesmo tempo fisicamente não admissível. Salientamos que na referência [64] foi sugerido que uma distribuição de cargas substitui o uso de produtos não comutativos nas equações de movimento. Não adotamos este ponto de vista no presente capítulo.

É evidente que (2.27) satisfaz a equação de conservação da corrente em (2.26). A equação (2.26) é satisfeita pelos seguintes potenciais eletromagnéticos $A^{(0)\mu}$,

$$A^{(0)\mu} = (A^{(0)0}, A^{(0)i}),$$

$$A^{(0)0}(r) = \begin{cases} -\frac{Ze}{2a^3}r^2 + \frac{3}{2}\frac{Ze}{a}, & r \in \text{I} \\ \frac{Ze}{r}, & r \in \text{II} \end{cases}, \quad A^{(0)i} = -\frac{1}{2}f_{ik}^{(0)}x^k, \quad f_{ik}^{(0)} = \text{const}, \quad (2.28)$$

onde incluímos uma solução homogênea da equação (2.26) $A^{(0)i} = -\frac{1}{2}f_{ik}^{(0)}x^k$, correspondente ao campo magnético externo $B_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}f_{jk}^{(0)}$. O caso $A^{(0)i} = 0$ foi considerado previamente em nosso trabalho [58].

A componente zero da equação (2.28) satisfaz as condições de contorno,

$$A_{\text{I}}^{(0)0}(0) \neq \infty, \quad A_{\text{II}}^{(0)0}(r)\Big|_{r \rightarrow +\infty} = 0, \quad (2.29)$$

e continuidade $A_{\text{I}}^{(0)0}(r)\Big|_{r=a} = A_{\text{II}}^{(0)0}(r)\Big|_{r=a}$, $\partial_r A_{\text{I}}^{(0)0}(r)\Big|_{r=a} = \partial_r A_{\text{II}}^{(0)0}(r)\Big|_{r=a}$. As condições de contorno (2.29) determinam completamente a solução $A^{(0)0}(r)$ (2.28) da equação de Laplace. A segunda condição em (2.29) exclui a função linear $E^i x^i$, correspondente a um campo elétrico homogêneo arbitrário como uma possível solução para $f^{(0)0i}$.

Restringimo-nos a não comutatividade do espaço ($\theta^{0\mu} = 0$). Pela simetria esférica da corrente $j^{(0)\mu}$ (2.27) e da solução $A^{(0)0}$ (2.28), segue que a equação (2.21) é satisfeita por $j^{(1)\mu} = 0$, i.e., não há correção para a corrente. Isto implica que a corrente permanece dinamicamente intacta, $j^\mu = j^{(0)\mu}$, de forma que nos referimos à mesma como uma corrente externa fixa, como é de costume na teoria $U(1)$. Nesta situação a equação de Maxwell (2.20) torna-se,

$$\partial_i f^{(1)i\mu} + g\theta^{ij} \left[(\partial_i A^{(0)0}) (\partial_j \partial^\mu A^{(0)0}) + 2f_{ik}^{(0)} (\partial_k \partial_j A^{(0)\mu}) \right] = 0. \quad (2.30)$$

Levando em consideração a condição (2.25), para a componente zero ($\mu = 0$) do potencial, a eq. (2.30) reduz-se a

$$\nabla^2 A^{(1)0} + 2gB^i \theta^j (\delta_{ij} \nabla^2 A^{(0)0} - \partial_i \partial_j A^{(0)0}) = 0, \quad (2.31)$$

onde nós introduzimos o vetor θ com componentes $\theta^i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\theta^{jk}$. A parte espacial de (2.30) admite a seguinte forma

$$\partial_i f^{(1)ik} + g\theta^{ij} (\partial_i A^{(0)0}) (\partial^k \partial_j A^{(0)0}) = 0$$

ou

$$\nabla^2 A^{(1)k} - \partial_i \partial_k A^{(1)i} + g\theta^{ij} (\partial_i A^{(0)0}) (\partial^k \partial_j A^{(0)0}) = 0, \quad (2.32)$$

visto que a segunda derivada espacial do potencial vetor $A^{(0)k}$ é nula.

Uma vez que as equações (2.20), (2.21) contêm somente campos eletromagnéticos, e não potenciais, podemos impor, por exemplo, o calibre de Coulomb $\partial_k A^k = 0$ tanto em $A^{(0)k}$ como em $A^{(1)k}$. É importante ter certeza que as equações resultantes são não contraditórias e, para

este fim, atuaremos o operador diferencial ∂_k em (2.32) com o intuito de observar se, de fato, $\partial_k A^{(1)k} = 0$ é satisfeita. Imediatamente verificamos que isto implica que $\theta^{ij} \partial_k [(\partial_i A^{(0)0})(\partial_k \partial_j A^{(0)0})] = \theta^{ij} [(\partial_k \partial_i A^{(0)0})(\partial_k \partial_j A^{(0)0}) + (\partial_i A^{(0)0})(\nabla^2 \partial_j A^{(0)0})] = 0$. O primeiro termo se anula devido a antisimetria de θ^{ij} e o segundo é também nulo graças à simetria esférica de $A^{(0)0}$ e sua dependência em $|\mathbf{x}|$. Explicitamente o produto dos dois fatores no colchete é proporcional ao produto de diferentes componentes deste mesmo vetor $x^i x^j$. Este tensor se anula quando multiplicado pelo parâmetro antissimétrico θ^{ij} . Portanto, no calibre de Coulomb, obtemos para as componentes espaciais ($\mu = k = 1, 2, 3$)

$$\nabla^2 A^{(1)k} + g\theta^{ij} (\partial_i A^{(0)0}) (\partial_k \partial_j A^{(0)0}) = 0. \quad (2.33)$$

Pode-se observar que, ao contrário da equação (2.31), a equação (2.33) não contém contribuição do campo externo. Estes fatos mostram que a introdução de um campo magnético constante e homogêneo não modificará o campo magnético produzido pela carga estática, mas, ao invés disso, acarretará uma correção para o campo elétrico. Como se pode observar, se $(\mathbf{B} = \mathbf{0})$ não há correção em primeira ordem em θ visto que a equação (2.31) reduz-se a equação de Laplace com condições de contorno regulares (2.29).

Observamos que as componentes $A^{(1)0}$ e $A^{(1)i}$ são desacopladas, logo podemos analisá-las separadamente. Iniciamos com a equação para $A^{(1)i}$. Na região I, a equação (2.33) torna-se

$$\nabla^2 A_I^{(1)k}(\mathbf{x}) = -g \left(\frac{Ze}{a^3} \right)^2 \theta^{ik} x^i, \quad (2.34)$$

e para a região II temos,

$$\nabla^2 A_{II}^{(1)k}(\mathbf{x}) = -g \left(\frac{Ze}{r^3} \right)^2 \theta^{ik} x^i. \quad (2.35)$$

As soluções gerais são,

$$A_I^{(1)k}(\mathbf{x}) = -\frac{g}{10} \left(\frac{Ze}{a^3} \right)^2 r^2 \theta^{ik} x^i + a_I^{(1)k}(r, \vartheta, \varphi), \quad (2.36)$$

$$A_{II}^{(1)k}(\mathbf{x}) = -\frac{g}{4} \left(\frac{Ze}{r^2} \right)^2 \theta^{ik} x^i + a_{II}^{(1)k}(r, \vartheta, \varphi), \quad (2.37)$$

onde ϑ e φ são os ângulos azimutal e polar do raio vetor \mathbf{x} , respectivamente. As funções $a_\lambda^{(1)k}$ ($\lambda = I, II$) são soluções ordinárias da equação de Laplace $\nabla^2 a_\lambda^{(1)k} = 0$,

$$a_\lambda^{(1)k}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} [\alpha_{(\lambda)l,m}^k r^l + \beta_{(\lambda)l,m}^k r^{-(l+1)}] Y_{l,m}(\vartheta, \varphi),$$

e as funções $Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ são harmônicos esféricos [65]. As constantes $\alpha_{(\lambda)l,m}^k$ e $\beta_{(\lambda)l,m}^k$ são fixadas pelo mesmo tipo de condições de contorno e continuidade como antes,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_I^{(1)}(\mathbf{x}) \Big|_{r=a} &= \mathbf{A}_{II}^{(1)}(\mathbf{x}) \Big|_{r=a}, \\ \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{A}_I^{(1)}(\mathbf{x}) \Big|_{r=a} &= \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{A}_{II}^{(1)}(\mathbf{x}) \Big|_{r=a}, \\ \mathbf{A}_I^{(1)}(\mathbf{x}) \Big|_{r \rightarrow 0} &\neq \infty, \quad \mathbf{A}_{II}^{(1)}(\mathbf{x}) \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Os lados direito nas equações (2.34) e (2.35) podem ser expressas em termos de harmônicos esféricos com $l = 1$ por meio das relações,

$$Y_{1,\pm 1} = \mp \frac{1}{r} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (x^1 \pm ix^2) , \quad Y_{1,0} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} x^3 . \quad (2.39)$$

Então os coeficientes $\alpha_{(\lambda)l,m}^k$ e $\beta_{(\lambda)l,m}^k$ resultam a ser ($\alpha_{(I)l,m}^k = \alpha_{l,m}^k$, $\beta_{(II)l,m}^k = \beta_{l,m}^k$),

$$\begin{aligned} \alpha_{(II)l,m}^k &= \beta_{(I)l,m}^k = 0 , \\ \alpha_{1,\pm 1}^k &= \frac{1}{4} g \left(\frac{Ze}{a^2} \right)^2 \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [\mp \theta^{1k} + i\theta^{2k}] , \\ \beta_{1,\pm 1}^k &= \frac{2}{5} g \frac{(Ze)^2}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [\mp \theta^{1k} + i\theta^{2k}] , \\ \alpha_{1,0}^k &= \frac{1}{4} g \left(\frac{Ze}{a^2} \right)^2 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \theta^{3k} , \\ \beta_{1,0}^k &= \frac{2}{5} g \frac{(Ze)^2}{a} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \theta^{3k} , \end{aligned} \quad (2.40)$$

ao passo que todo o resto dos coeficientes $\alpha_{l,m}^k$ e $\beta_{l,m}^k$ com $l \neq 1$ são identicamente iguais a zero. Finalmente, temos

$$\begin{aligned} A_I^{(1)k}(\mathbf{x}) &= -\frac{g}{4} \left(\frac{Ze}{a^2} \right)^2 \left(\frac{2r^2}{5a^2} - 1 \right) \theta^{ik} x^i , \quad r < a , \\ A_{II}^{(1)k}(\mathbf{x}) &= \frac{g}{4} \left(\frac{Ze}{r^2} \right)^2 \left(\frac{8r}{5a} - 1 \right) \theta^{ik} x^i , \quad r > a . \end{aligned} \quad (2.41)$$

Como é possível constatar, esta solução se anula na origem, $\mathbf{A}_I^{(1)}(0) = 0$, embora tal condição de contorno não foi imposta. Não existe limite finito de (2.41) se $a \rightarrow 0$.

Agora partiremos para as soluções de (2.31). Para a região I obtemos,

$$\nabla^2 A_I^{(1)0}(\mathbf{x}) = 4g \left(\frac{Ze}{a^3} \right) (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\theta}) , \quad (2.42)$$

e para a região II temos

$$\nabla^2 A_{II}^{(1)0}(\mathbf{x}) = 2g \left(\frac{Ze}{r^5} \right) [3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}) - r^2(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\theta})] . \quad (2.43)$$

As soluções gerais podem ser expressas como

$$A_I^{(1)0}(\mathbf{x}) = \frac{2}{3} g \left(\frac{Ze}{a^3} \right) r^2 (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\theta}) + a_I^{(1)0}(r, \vartheta, \varphi) , \quad (2.44)$$

$$A_{II}^{(1)0}(\mathbf{x}) = -g(Ze) \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta})}{r^3} + a_{II}^{(1)0}(r, \vartheta, \varphi) , \quad (2.45)$$

onde $a_I^{(1)0}, a_{II}^{(1)0}$ são soluções homogêneas, que são fixas através das condições de contorno (2.38) conduzindo-nos ao resultado final

$$\begin{aligned} A_I^{(1)0}(\mathbf{x}) &= 2g \left(\frac{Ze}{a} \right) \left\{ \left(\frac{2r^2}{5a^2} - 1 \right) (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\theta}) - \frac{1}{5a^2} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}) \right\} , \quad r \leq a , \\ A_{II}^{(1)0}(\mathbf{x}) &= g \left(\frac{Ze}{r} \right) \left\{ \frac{1}{r^2} \left(\frac{3a^2}{5r^2} - 1 \right) (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}) - \left(\frac{1}{5} \frac{a^2}{r^2} + 1 \right) (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\theta}) \right\} \quad r > a . \end{aligned} \quad (2.46)$$

Utilizando (2.10) e (2.12) junto com as soluções obtidas acima pode-se obter os campos não comutativos \check{A}^μ e correntes \check{j}^μ , na mesma ordem em θ . Como esperado, campos não comutativos diferem das suas contrapartidas SW já nesta ordem.

Tem sentido confrontar o resultado (2.46) com o fato [66] de que em certos modelos o regime de um campo magnético intenso assemelha-se a não comutatividade: a ação (efetiva) para alguns campos compostos ou de calibre inclui seu próprio produto tipo Moyal, então estes campos podem ser imaginados definidos como coordenadas, dentre os quais aqueles ortogonais ao campo magnético não comutam mutuamente. Para atribuir origem a não comutatividade tratada no presente contexto, devemos identificar o comprimento elementar com o raio de Larmor, $\sqrt{\theta} = 1/\sqrt{eB}$, admitindo que o campo magnético seja intenso e cuja direção coincide com a direção do parâmetro θ . Então, $B = \infty$ é o limite comutativo ao passo que a dimensionalidade do espaço, $d = 4$, é reduzida para duas que é exatamente o número de coordenadas ortogonais a \mathbf{B} : o subespaço ortogonal meramente não existe. Em contrapartida, enquanto B é grande, porém finito, o subespaço ortogonal é não comutativo, enquanto que o espaço total é “quase” $d - 2 = 2$ bidimensional. (Aqui “quase” significa que, em algum domínio do espaço, digamos próximo à carga, onde seu campo é dominante em comparação com o campo magnético externo, a dimensionalidade do espaço é novamente [67] $d = 4$). Infelizmente, o resultado (2.46) não pode corresponder a este caso, pois, a condição $B\theta = 1$ está além da aplicabilidade da expansão em potências de θ e B , utilizada na derivação das equações (2.46).

2.3.2 Soluções magnetostáticas alternativas

As soluções obtidas acima dependem crucialmente das condições de regularidade impostas em $r = 0$. Abrindo mão desta condição pode-se obter outra solução para o potencial vetor

$$\begin{aligned} A_I^{(1)k}(\mathbf{x}) &= -\frac{g}{4} \left(\frac{Ze}{a^2} \right)^2 \left(\frac{2}{5} \frac{r^2}{a^2} + \frac{8}{5} \frac{a^3}{r^3} - 1 \right) \theta^{ik} x^i, \\ A_{II}^{(1)k}(\mathbf{x}) &= -\frac{g}{4} \left(\frac{Ze}{r^2} \right)^2 \theta^{ik} x^i \end{aligned} \quad (2.47)$$

que não obedece a condição de finitude na origem, mas decresce a longas distâncias da fonte mais rápido que (2.41), em outras palavras esta é de curto alcance. Precisamente, a solução acima (2.47) foi obtida sob a consideração das mesmas condições de contorno anteriores (2.38), exceto que a condição de regularidade na origem, $\mathbf{A}_I^{(1)}(\mathbf{x})|_{r \rightarrow 0} \neq \infty$, não foi imposta. Por outro lado ressaltamos ainda que neste caso a condição

$$\lim_{|\mathbf{X}| \rightarrow \infty} \mathbf{A}_{II}^{(1)}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}} = 0,$$

é mais restritiva que no primeiro conjunto de soluções (2.41), no sentido que, mesmo para valores suficientemente grandes para $|\mathbf{X}|$, consideramos que todos os coeficientes $\beta_{(II)l,m}^k$ são nulos. Como resultado temos um conjunto de equações lineares solúvel para alguns coeficientes $\alpha_{(I)l,m}^k$ e $\beta_{(I)l,m}^k$, provenientes das duas primeiras condições de contorno (2.38).

As soluções fora da esfera, $A_{II}^{(1)k}(\mathbf{x})$, que não depende do tamanho da carga a , coincide com a solução magnetostática determinada previamente em [68] para o campo produzido por uma carga estática no limite de uma carga puntual (o limite de $a = 0$ em (2.27)); esta é altamente singular na origem $r = 0$. Diferentemente da solução (2.41), (2.47) não corresponde ao campo produzido por um dipolo magnético, pois decresce a grandes distâncias mais rápido que o mesmo.

A solução (2.41) difere de (2.47) adicionando a função,

$$2g \frac{(Ze)^2}{5a} \frac{\theta^{ik} x^i}{r^3}, \quad (2.48)$$

que é uma solução para o potencial vetor da equação de Laplace com o coeficiente constante $2g \frac{(Ze)^2}{5a}$ escolhido de tal forma a cancelar a singularidade na origem da (parte interior da) solução (2.47). Existem mais três soluções homogêneas, um tanto inerentes ao problema:

$$\frac{\theta^k}{r}, \quad \frac{x_k}{r^3}, \quad \theta^{ki} x_i. \quad (2.49)$$

A primeira não satisfaz a condição do calibre de Coulomb e não deve, consequentemente, ser levada em consideração. A segunda é um calibre puro e não contém qualquer campo nesta solução ($f_{\mu\nu}$ é zero neste caso). Seu aparecimento se deve ao fato de que o campo de Coulomb fixa a liberdade de calibre somente até uma transformação de calibre causada pela função $\lambda(r)$ que obedece a equação de Laplace. Então, com $\lambda = 1/r$ a solução discutida é $-\partial_k \lambda$. Portanto, somente a terceira solução $\theta^{ki} x_i$ falta ser considerada. Ela é linear em \mathbf{x} . Devido a condição de continuidade em (2.38) incluir a primeira e a segunda derivadas, a solução linear pode ser combinada consigo mesma somente sob uma condição de contorno interna. A terceira solução homogênea não pode ser associada à fonte, um coeficiente constante multiplicativo a mantém arbitrária. Portanto, concluímos que as duas soluções (2.47) e (2.41) esgotam todas as soluções magnetostáticas produzidas pela carga estática. Existem, certamente, muito mais soluções homogêneas não associadas à carga. Por exemplo, uma delas é precisamente a terceira solução $\theta^{ki} x_i$, que corresponde a um campo magnético constante e homogêneo de magnitude arbitrária mas de direção fixa: este está direcionado ao longo do vetor da não comutatividade $\boldsymbol{\theta}$. Este campo pode ser absorvido em um (mais geral) campo externo \mathbf{B} , já incluso em (2.28) em ordem zero. Note que a energia magnética total da carga estática $\simeq \int |\nabla \times \mathbf{A}|^2 d^3x$ é finita para (2.41) e infinita para (2.47) quando a é finito.

Quais das duas soluções (2.47) ou (2.41) devem ser selecionadas? Procuraremos a resposta a esta pergunta além do contexto intrínseco à teoria NC, levando em consideração uma possível futura aplicação da solução. De acordo com a referência [68] o campo magnético associado ao potencial vetor interage com o momento orbital e o spin do elétron em um átomo de hidrogênio NC, elaborado em [18, 19], onde o elétron interage com o núcleo, localizado na origem $r = 0$, no espaço NC. Esta energia de interação, computada usando nossa solução (2.41) é finita na origem. Em contrapartida, ela comporta-se como r^{-3} de acordo com a solução (2.47) (e como r^{-4} se a parte exterior de (2.47) é continuada para a origem para formar uma solução de carga puntual [68]). A contribuição desta energia de interação causaria um colapso para o centro, o que tornaria o problema inconsistente. Além disso, uma situação similar não é considerada (embora não completamente rigorosa) como um problema real em mecânica quântica, pois o tamanho finito do núcleo oferece um “cut-off” suficiente. Então, pragmaticamente, não podemos justificar completamente a exclusiva necessidade de selecionar as soluções (2.41), mas voltaremos a esta discussão posteriormente, ao considerarmos também soluções alternativas para a solução eletrostática (2.46).

2.3.3 Soluções eletrostáticas alternativas

Uma observação ausente que auxiliou a resolver as equações (2.42), (2.43) e que pode ser utilizada para verificar sua solução (2.46) é que uma combinação linear $a(r)(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\theta}) + b(r)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta})$ reproduz as equações mencionadas com diferentes coeficientes, após a atuação do operador Laplaciano de

acordo com a fórmula:

$$\begin{aligned}\nabla^2 a(r)(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\theta}) &= (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\theta}) \left(a'' + \frac{2a'}{r} \right), \\ \nabla^2 b(r)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}) &= \left(b'' + \frac{6b'}{r} \right) (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}) + 2b(r)(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\theta}),\end{aligned}\quad (2.50)$$

onde as linhas denotam derivação com relação a r . Usando (2.50) e a solução geral [69]

$$y(x) = \left(\frac{\xi}{x} \right)^\gamma \left(\eta + \int_\xi^x g(x') \left(\frac{x'}{\gamma} \right)^\gamma dx' \right),$$

para a equação diferencial linear de primeira ordem

$$y' + \frac{\gamma}{x} y = g(x),$$

onde ξ e η são constantes arbitrárias, e γ é 2 ou 6 no nosso caso, pode-se encontrar todas soluções para as equações (2.42), (2.43) da forma $a(r)(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\theta}) + b(r)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta})$, estendendo, quando necessário, além da distribuição de carga homogênea (2.27). (A razão para nos restringirmos a esta classe de soluções é que, como a não-homogeneidade em (2.42), (2.43) é linear tanto em \mathbf{B} como em $\boldsymbol{\theta}$, somente soluções com a mesma propriedade podem ser produzidas pela fonte em consideração). As soluções homogêneas das equações (2.42), (2.43) são

$$\text{a) } (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\theta}), \quad \text{b) } \frac{(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\theta})}{r}, \quad \text{c) } \frac{(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\theta})}{r^3} - \frac{3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta})}{r^5}, \quad \text{d) } r^2(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\theta}) - 3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}). \quad (2.51)$$

Novamente, como antes, a condição de que os campos devem diminuir a grandes distâncias r da carga não é suficiente para fixar a solução de modo que mais condições de contorno são necessárias. Podemos descartar a solução d) por representar um campo elétrico anisotrópico e crescente (linearmente) em regiões remotas, mas deve ser notado que tal solução significa uma interessante opção de um campo externo admitido por uma equação de movimento na ausência de fontes. A solução constante a) deve ser desconsiderada, por ser um calibre puro, não é fixada pelas as condições de calibre empregadas acima. (Lembramos que em uma teoria de calibre $U(1)$ o calibre de Lorentz imposto para reduzir as equações de Maxwell a equações de Laplace para os potenciais em um problema estacionário, onde os campos não dependem do tempo t , torna-se no calibre de Coulomb para o potencial vetor). Entretanto, ainda permanece uma liberdade de calibre residual, determinada pelo parâmetro de calibre $\lambda = \lambda_1 t + \lambda_2(\mathbf{x})$ com λ_1 sendo uma constante e $\nabla^2 \lambda_2(\mathbf{x}) = 0$. Consequentemente o potencial escalar A^0 mantém-se determinado até esta constante e a função λ_2 sujeita a equação de Laplace. Combinando linearmente as duas soluções b) e c) (2.51) com a solução (2.46) pode-se formar todas soluções, satisfazendo as condições de contorno, diferentes de (2.38), mas ainda, talvez, fisicamente razoáveis. Discutiremos agora tais possibilidades.

Primeiro, a solução b) multiplicada pelo fator constante gZe pode ser adicionada a solução (2.46) para excluí-la no termo de Coulomb (termo mais a direita em (2.46)). Note, entretanto, que a correção de longo alcance para o potencial de Coulomb $gZe(\mathbf{x} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta})/r^3$ ainda não pode ser excluída. A segunda solução c) multiplicada pelo fator $gZe a^2/5$, quando adicionada a (2.46), conduz a uma solução de (2.42), (2.43) livre de termos tipo quadrupolo (veja eq. (2.55) na próxima subseção). Ambas novas soluções, bem como qualquer outra solução formada combinando b) e c) com (2.46), são singulares na origem, embora b) não proporcione um decaimento ao centro da distribuição de carga. Por outro lado, combinando b) com (2.46) pode conduzir a uma solução com comportamento $1/r$ que é considerada como admissível na teoria padrão.

Temos agora que responder a questão mencionada na subseção 2.3.2, tendo em mente que uma aplicabilidade das mesmas não pode oferecer critérios suficientes para selecionar soluções físicas das equações para os campos e correntes na teoria NC. Para finalmente fundamentar por que estamos mantendo a escolha de (2.46) e (2.41) como únicas soluções apropriadas procedemos da seguinte forma. Lembremos que a principal motivação física para admitir uma teoria NC foi a completa regularização ultravioleta introduzindo um comprimento elementar, incluindo o potencial de Coulomb, pois, muitos problemas ultravioletas são encontrados devido a esta singularidade “fraca”, de modo que singularidades “fortes” na origem não podem aparecer na teoria. As soluções (2.46) e (2.41) são as únicas, entre todas possíveis discutidas na presente seção, que são completamente livres de quaisquer singularidades na origem. Em outras palavras, estas são as únicas soluções *regularizáveis* pelo tamanho da carga. Naturalmente, estas não devem necessariamente sobreviver no limite da transição para uma carga puntual, pois esta noção está além de uma teoria NC. De fato, a equação (2.41) não sobrevive.

Outra razão, mais técnica, para selecionarmos estas soluções consiste na validade da aproximação considerada. Os parâmetros efetivos usados na expansão aqui são $f^2\theta$ e $fj\theta$. Ambos permanecem pequenos sobre soluções não singulares escolhidas, (2.41) e (2.46), mesmo quando o tamanho a é admitido ser mínimo $a = \sqrt{\theta}$. A saber, $f\theta = g(Ze)^2$ para (2.41) e $f\theta = gZeB\theta$ para (2.46). Então, somente os valores da carga Ze e o campo magnético externo B são restritos. O uso de qualquer solução pode nos conduzir a uma aplicabilidade fora do domínio perturbativo para valores suficientemente pequenos de r .

2.4 Propriedades das soluções regulares

Soluções (2.41) e (2.46) oferecem correções de longo alcance para o potencial de ordem zero (2.28) induzido pela carga esférica. Estas correções podem ser entendidas como fatores de forma de ordem superior de uma carga esférica de tamanho finito induzida pela não comutatividade, pois estes podem ser interpretados como provenientes de uma densidade de carga efetiva em torno da carga, bem como de um dipolo magnético ou quadrupolo elétrico.

Irrespective da presença ou ausência de um campo magnético externo \mathbf{B} , um campo magnético proveniente de $A^{(1)k}(\mathbf{x})$, proporcional a θ e independente do campo magnético externo é gerado. Em contrapartida, o campo elétrico permanece inalterado em primeira ordem em θ se $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, mas recebe correções de primeira ordem se o campo magnético externo está presente. Ao mesmo tempo a fonte esfericamente simétrica não recebe correções devido a não comutatividade.

2.4.1 Dipolo Magnético

A contribuição dominante do potencial vetor (2.41) comporta-se como um dipolo magnético, a carga estática (2.27) sendo portanto um momento de dipolo magnético equivalente \mathcal{M}

$$\mathbf{A} = \frac{\mathcal{M} \times \mathbf{x}}{r^3}, \quad \mathcal{M} = \theta (Ze)^2 \frac{2g}{5a}. \quad (2.52)$$

Embora o momento magnético cresça infinitamente no limite de uma carga puntual, $a \rightarrow 0$, este fato não deve ser interpretado como um problema, pois o tamanho da carga é limitado inferiormente, $a > l$, pelo comprimento elementar $l = \sqrt{\theta}$.

Levando em consideração a expressão (2.52) para o momento magnético, na ref. [58] estudamos uma forma eficiente de obter valores máximos para o parâmetro da não comutatividade tendo por base

o fato de que em todos processos de espalhamento de léptons não estão presentes quaisquer tamanhos dos mesmos. Somente cálculos teóricos para o momento magnético anômalo dos léptons, baseados em modelos comutativos ordinários, não contradizem seus valores observados com a existente acurácia experimental e teórica, logo admitimos que, no mínimo, todos os erros experimentais em seus valores podem ser atribuídos a efeitos provenientes da não comutatividade. Assim, por meio dos valores experimentais existentes para o tamanho do lépton, obtemos que o parâmetro da não comutatividade é limitado por valores além das atuais estimativas. Porém, admitindo a natureza puntual do elétron obtemos, até agora, o maior valor para o parâmetro da não-comutatividade de 10^4 TeV, juntamente com aqueles baseados em experimentos de física de partículas.

O momento magnético do próton deve contribuir para o “splitting” de estrutura hiperfina dos estados $1S_{1/2}$ no átomo de hidrogênio. Quando calculado com a ajuda da segunda solução de (2.41), o “splitting” é proporcional a $(1/a)\overline{r^{-3}}$, onde o sinal de barra significa uma média para $r > a$ em estados S fora do próton, com a agora representando seu raio. Por outro lado, com a solução definida fora da carga (2.47), a correspondente contribuição [68] torna-a $\overline{r^{-4}}$. As duas expressões são de mesma ordem de magnitude, pois a média efetivamente resulta na substituição $r = a$, devido o caráter singular da média e o fato de que o tamanho do próton a é muito menor que o raio de Bohr $a_0 = \hbar^2/m_e\alpha$, onde m_e é a massa do elétron e $\alpha = 1/137$ é a constante de estrutura fina. Então, levando em conta o momento magnético comutativo do próton, isto não muda o limite existente do parâmetro da não comutatividade θ .

Existe um contexto diferente [70], onde a não comutatividade das coordenadas é introduzida em associação com o spin da carga. Portanto, naturalmente a carga também possui um momento magnético.

A produção de um campo magnético por uma carga estática - o efeito magneto-elétrico - foi reportado na eletrodinâmica quântica com um campo (elétrico e magnético) externo constante e homogêneo de forma mais geral [40]. O campo magnético inhomogêneo produzido por uma carga estática naquele problema existe em uma aproximação linear na carga, quando a mesma é pequena. Contrariamente a esta situação, no presente problema encontramos uma solução não linear das equações de Maxwell (2.13), (2.14) em primeira ordem em θ , e esta solução é, para a sua componente magnética, quadrática na carga eZ , como é visto de (2.41). (A mesma afirmação é válida para a solução (2.47).) A ausência de uma parte linear na carga do campo magnético está de acordo com a afirmação [38] que na eletrodinâmica NC sem um campo magnético de fundo o tensor de polarização do fóton, responsável pela resposta linear, é zero apesar da presença do tensor da não comutatividade θ^{ij} .

2.4.2 Aprimoramento da lei de Coulomb e momento de quadrupolo elétrico

Vamos agora retornar a efeitos combinados da não comutatividade e o campo magnético externo, que é a correção (2.46) para o potencial eletrostático. É importante notar que esta correção é linear na carga eZ . Isto corresponde ao fato que agora existe um campo magnético externo homogêneo de modo que a resposta linear do tensor de polarização não é mais trivial [38], embora ainda não apta a prover o efeito magneto-elétrico, de modo a correção magnética permanecer quadrática na carga eZ . Para o comportamento dominante de (2.46) em regiões remotas $r \gg a$, segue a lei de Coulomb $\sim 1/r$. Quando somada a (2.28), ela fornece o potencial de Coulomb anisotrópico, corrigido pela NC,

$$A_{\text{Coulomb}}^0(\mathbf{x}) = \left(\frac{Ze}{r} \right) \left(1 - g \left\{ \frac{1}{r^2} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}) (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}) + (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\theta}) \right\} \right), \quad r \gg a. \quad (2.53)$$

A correção pode ser atribuída ao comportamento $1/r^3$ do lado direito de (2.43) - a distribuição de “densidade de carga escura”. (Utilizaremos este termo em analogia com a noção de matéria escura, introduzida para resumir a responsabilidade pelo observado desvio gravitacional da lei de Newton). No caso especial onde o campo externo está orientado paralelamente (ou anti-paralelamente) ao vetor da não comutatividade, $\mathbf{B} \parallel \pm \boldsymbol{\theta}$, o fator multiplicativo padrão do potencial de Coulomb eZ/r na equação (2.53) torna-se $1 \mp g|B||\theta|(\cos^2 \vartheta + 1)$, onde ϑ é o ângulo entre \mathbf{x} e \mathbf{B} . Para a configuração anti-paralela (sinal inferior) com carga positiva $g > 0$ (bem como para a configuração paralela com carga negativa) a correção para a unidade nesta fórmula é positiva para cada direção do raio vetor. Este último resultado nos permite estimar um valor máximo para a correção não comutativa de longo alcance para o potencial de Coulomb, que é em cada um dos casos acima,

$$A_{\text{LR}}^0(r) = \frac{Ze}{r} [1 + gB\theta] \simeq \frac{Ze}{r} (1 + \delta) . \quad (2.54)$$

Assumindo um campo magnético de magnitude de 10 Tesla (que é muito intenso para condições de laboratório) e um parâmetro NC de magnitude $(100\text{TeV})^{-2}$ (que, em particular, ainda não representa um dos valores mais altos para o parâmetro, veja p. ex., o nosso trabalho [58]), obtemos $\delta = 6 \cdot 10^{-26}$ que está além das possibilidades de qualquer verificação experimental. Mesmo para um campo magnético sobre a superfície do “Soft Gamma Repeater” que atinge 10^{11}T [71] e o mesmo valor para θ acima, obtemos uma correção da ordem $\delta = 6 \cdot 10^{-16}$ que, de fato, é muito pequena.

Por outro lado, para os mesmos casos especiais onde o campo magnético \mathbf{B} e o vetor $\boldsymbol{\theta}$ são paralelos ou anti-paralelos, a dependência angular da solução (2.46) conduz a um “splitting” entre os níveis de energia em um átomo com diferentes projeções de momento angular sobre uma direção comum e estes vetores competem com o “splitting” de Zeeman (em um nível muito inferior, é claro).

Dizemos que o campo de Coulomb produzido por uma carga em um campo magnético externo longe da mesma é aprimorado em comparação com a eletrodinâmica de Maxwell. Esta propriedade sem precedentes é ausente da QED, onde a correção linear na carga para o potencial de Coulomb (a parte de longo alcance) torna-a somente anisotrópica sem, entretanto, aprimorá-la [67, 72]: o potencial decresce como $1/r$ ao longo do campo magnético seguindo a mesma lei de Coulomb como em um espaço vazio, e decresce ao longo de qualquer outra direção $\vartheta \neq 0$ também seguindo a lei de Coulomb, mas avaliada com o coeficiente $(\cos^2 \vartheta + \beta \sin^2 \vartheta)^{-1/2}$ menor que a unidade. Aqui $\beta = (1 + \frac{\alpha}{3\pi} \frac{eB}{m_e^2})^{1/2} > 1$.

Note que a parte dominante (Coulomb) (2.53) sobrevive no limite para uma carga puntual $a \rightarrow 0$. Também, quando não há campo magnético externo, a correção (cúbica na carga) [39] para o potencial eletrostático em QED não afeta a parte de longo alcance de Coulomb.

O segundo termo dominante em $A_{\text{II}}^{(1)0}$ corresponde a um momento de quadrupolo elétrico D_{ij} ,

$$A^0 = \frac{D_{ij}x_i x_j}{r^5}, \quad D_{ij} = 2gZea^2(3B_i\theta_j - \delta_{ij}(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\theta})), \quad (2.55)$$

que pode ser atribuído ao tamanho finito da carga (2.27), embora seja esfericamente simétrico. O momento de quadrupolo elétrico NC se anula no limite $a \rightarrow 0$.

Não existe parte do tipo dipolo em $A_{\text{II}}^{(1)}$. Neste sentido a situação é similar a QED, onde a extremidade pós-Coulomb no potencial produzido por uma carga esfericamente simétrica em um campo magnético externo também não contém termos tipo dipolo $1/r^2$, mas decai, de acordo com [72], com $1/r^3$, o mesmo que (2.46).

2.4.3 Potências da carga e teorema de Furry generalizado

Apresentamos uma observação que oferece uma ferramenta, referida como o teorema de Furry generalizado para justificar, os cálculos prévios a respeito das potências na carga eZ em bases gerais, além da aproximação dominante em primeira ordem em θ . Enquanto a teoria NC do espaço conserva paridade, o vetor θ é um pseudo vetor, o mesmo que um campo magnético. Referindo-se à linguagem de QFT, podemos dizer que isto implica que o número total de pernas em um diagrama de muitos fótons, característico de uma teoria não linear, conectado com o campo magnético e com o “campo” θ deve ser par. Devido ao teorema de Furry, que indica que o número total de linhas de fótons deve ser par, concluímos que o número de linhas de fótons conectadas com o campo eletrostático deve ser par, separadamente. Então, o campo magnético produzido pela carga estática na aproximação linear em θ , estando o campo externo presente ou não, deve depender de potências pares na carga: o respectivo diagrama contém uma linha- θ , um número par ou nenhuma linha ligando-as ao campo magnético externo (linhas- B), uma linha correspondente ao campo magnético produzido (linha- b) e um número par de linhas ligando-se à carga externa (linhas- Z). Isto está de acordo com o resultado (2.41), onde o número da última é dois. Por outro lado o campo elétrico não pode apresentar uma correção linear em θ se o campo magnético externo é ausente. Neste caso uma configuração impossível com uma linha- θ poderia ser exigida. Tal correção pode ser somente de ordem par em θ , que vai além de nossa consideração. A situação muda quando o campo externo é ligado. Agora existe uma configuração admissível de uma linha- θ e um número ímpar de linhas- B , então a correção em primeira ordem para o campo elétrico deve incluir uma linha indo para o campo elétrico produzido (linha- e) e um número ímpar de linhas- Z (portanto, potências ímpares da carga Z) para manter o número total de linhas conectando com o campo eletrostático par. Sem estas potências ímpares da carga temos somente uma, pois ao nos restringirmos em primeira ordem em θ nas equações de campo (2.13), (2.14) reduzimos essencialmente a não linearidade do campo.

Quando aplicado à QED ordinária sem o parâmetro NC, o teorema de Furry generalizado explica porque o campo elétrico produzido por uma carga estática, além de ser proporcional ao valor da mesma, tem contribuições ímpares na carga (a contribuição cúbica [39] foi mencionada acima). Isto também prediz a existência em QED de um campo magnético, quadrático na carga estática, produzido por tal carga, quando colocado em um campo magnético externo forte - outra manifestação do efeito magneto-elétrico.

2.5 Ambiguidades no mapa de SW

É bem conhecido que o mapa de SW não é unicamente definido. Existem termos adicionais que podem ser interpretados como redefinições dos campo de calibre [48]. Tais termos tem sido discutidos no contexto da renormalização da teoria de Maxwell não comutativa [60, 55], campos de Dirac não comutativos acoplados com campos de Yang-Mills [54] e na eletrodinâmica quiral não comutativa [56]. No caso de teorias de calibre NC $U(1)$, foi demonstrado que (p. ex., [60]) o mapa de SW para os potenciais admite, em primeira ordem em θ , a seguinte extensão

$$\begin{aligned}\check{A}_\mu(x) &= A_\mu(x) + \frac{g}{2}\theta^{\alpha\beta}A_\alpha(x)[\partial_\beta A_\mu(x) + f_{\beta\mu}(x)] + \mathbb{A}_\mu(x), \\ \mathbb{A}_\mu(x) &= g\kappa_1\theta_{\mu\alpha}\partial_\beta f^{\alpha\beta}(x), \quad \kappa_1 = \text{const},\end{aligned}\tag{2.56}$$

as quais não modificam as equações de Euler-Lagrange na teoria NC $U(1)$ na ausência de fontes externas, definida pela ação \check{S}_A (2.1). Para ver isso é suficiente construir $f^{\nu\mu}$ por meio de $\mathbb{A}_\mu(x)$ e

ter certeza que ele fornece uma contribuição nula para o primeiro membro da eq. (2.13). Consequentemente κ_1 não aparece nas equações de movimento com a acurácia admida em θ . Uma vez que $\mathbb{A}_\mu(x)$ satisfaz a parte homogênea das equações de movimento, a transformação (2.56) reduz-se a adicionar tais soluções de equações livre de fontes a qualquer outra solução da equação (2.13).

Uma ambiguidade similar nas equações de SW para as correntes (2.11) foi observada em [57]. Pode-se adicionar dois termos extras $\mathbb{J}^\mu(x)$ a solução (2.12):

$$\begin{aligned}\tilde{j}^\mu(x) &= j^\mu(x) + g\theta^{\alpha\beta}A_\alpha(x)\partial_\beta j^\mu(x) + \mathbb{J}^\mu(x), \\ \mathbb{J}^\mu(x) &= g\left(\kappa_2\theta^{\alpha\beta}f_{\alpha\beta}j^\mu + \kappa_3\theta^{\mu\alpha}f_{\alpha\beta}j^\beta\right), \quad \kappa_2, \kappa_3 = \text{const.}\end{aligned}\tag{2.57}$$

É fácil verificar que a corrente (2.57) satisfaz (2.11) para valores arbitrários de κ_2 e κ_3 , pois, $\mathbb{J}^\mu(x)$ não sofre transformações de calibre.

Vamos verificar como as ambiguidades acima influenciam as soluções das equações de Maxwell NC. Em ordem zero em θ , as equações permanecem as mesmas, veja (2.19). Em primeira ordem,

$$\mathbb{A}_\mu^{(1)} = g\kappa_1\theta_{\mu\alpha}\partial_\beta f^{(0)\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{c}g\kappa_1\theta_{\mu\alpha}j^{(0)\alpha}.$$

Obviamente, $\mathbb{A}_\mu^{(1)}$ se anula para uma distribuição de carga estática ao se considerar somente a não comutatividade do espaço. Assim no nosso caso a ambiguidade $\mathbb{A}_\mu^{(1)}$ não apresenta influências. As equações de Maxwell e as condições de compatibilidade em primeira ordem em θ são,

$$\partial_\nu f^{(1)\nu\mu} - g\theta^{\alpha\beta}\left(\partial_\nu(f_\alpha^{(0)\nu}f_\beta^{(0)\mu}) - f_{\nu\alpha}^{(0)}\partial_\beta f^{(0)\nu\mu}\right) = \frac{4\pi}{c}(j^{(1)\mu} + \mathbb{J}^{(1)\mu}),\tag{2.58}$$

$$\partial_\mu(j^{(1)\mu} + \mathbb{J}^{(1)\mu}) + g\theta^{\alpha\beta}f_{\mu\alpha}^{(0)}\partial_\beta j^{(0)\mu} = 0,\tag{2.59}$$

onde $\mathbb{J}^{(1)}$ é uma dada função de ordem zero no potencial eletromagnético e corrente,

$$\mathbb{J}^{(1)\mu} = g\left(\kappa_2\theta^{\alpha\beta}f_{\alpha\beta}^{(0)}j^{(0)\mu} + \kappa_3\theta^{\mu\alpha}f_{\alpha\beta}^{(0)}j^{(0)\beta}\right).\tag{2.60}$$

As equações (2.58) e (2.59) não dependem de κ_1 , enquanto κ_2 e κ_3 entram em ambas equações somente através da combinação $j^{(1)\mu} + \mathbb{J}^{(1)\mu}$. Além disso, esta combinação é definida exatamente como a mesma equação para o caso $\kappa_2 = \kappa_3 = 0$, veja p.ex. (2.21). Consequentemente, a ambiguidade total em correções de primeira ordem para os potenciais eletromagnéticos e para a corrente “atuante” $j^{(1)\mu} + \mathbb{J}^{(1)\mu}$ não é mais que uma arbitrariedade natural de adicionar uma solução homogênea das equações (2.21) e (2.59). (Esta ambiguidade já foi discutida acima, veja parágrafo abaixo da eq. (2.21).) Por outro lado, as partes separadas na combinação $j^{(1)\mu} + \mathbb{J}^{(1)\mu}$ permanecem ambíguas, os resultados físicos sendo independentes de qualquer separação da corrente em partes. As mesmas conclusões podem ser tiradas lidando diretamente com as equações (2.13), (2.14) sem recorrer ao caso especial da não comutatividade do espaço e condições de estacionaridade.

2.6 Sumário

Neste capítulo estudamos como introduzir correntes externas (fontes) em uma teoria de Maxwell NC sem violar a covariância de calibre. Iniciamos com uma teoria de calibre $U(1)_*$ e encontramos que a mesma é autoconsistente no nível das equações de movimento. Note que, neste caso, as correntes se transformam covariantemente perante transformações de calibre, com a mesma lei de

transformação do tensor eletromagnético $U(1)_*$. Posteriormente, argumentamos que, para facilitar a comparação com as previsões da eletrodinâmica NC, é necessário que os campos possuam as mesmas transformações de calibre que as do caso comutativo. Uma transição para tais campos é feita pelo mapa de SW e extendemos esta mapa para incluir correntes. Novamente, um resultado consistente é obtido se trabalharmos no nível das equações de Maxwell e não no nível da ação. Escrevemos equações de movimento não lineares e anisotrópicas, onde os campos e correntes estão envolvidos, que são válidas até a primeira ordem do parâmetro NC θ . Embora estas equações contenham potenciais juntamente com tensores eletromagnéticos, estas são covariantes de calibre no sentido que os potenciais modificados por uma transformação de calibre satisfazem as mesmas equações; além disso, os termos proporcionais aos potenciais podem ser eliminados “on-shell” das equações, i.e., as equações sem os potenciais possuem soluções em comum com as equações primárias. Para o caso da não comutatividade do espaço consideramos um exemplo, onde a fonte externa é uma esfera com carga homogeneamente distribuída de raio finito e resolvemos as equações de movimento na presença de um campo magnético externo constante e homogêneo. Não surgem correções em primeira ordem em θ para as fontes no problema de simetria esférica em consideração. Para selecionar soluções impomos condições de contorno que exigem que as mesmas sejam finitas no ponto onde a fonte está centralizada. A solução magnética fixada desta forma *não* admite o limite de transição para uma fonte puntual, que é uma propriedade admissível, desde que em uma teoria NC tamanhos de objetos físicos não sejam menores que o comprimento elementar.

Estudamos o conteúdo das soluções obtidas. Encontramos correções angulares para o campo elétrico produzido por uma carga estática que implica em um aprimoramento da lei de Coulomb em regiões remotas do espaço na presença de um campo magnético constante – uma notável consequência macroscópica do comprimento elementar inerente à eletrodinâmica NC em consideração. Encontramos também que o comportamento segundo-dominante do campo elétrico longe da carga na presença de um campo magnético é também um quadrupolo elétrico. Notamos uma possibilidade incomum, contida no item d) das equações (2.51), que um campo elétrico linearmente crescente com a distância da carga e não singular na origem satisfaz as equações de campo e pode ser consequentemente considerada como admissível, no sentido de um campo externo adicional ao campo magnético externo constante ou um campo elétrico externo constante. Independente do fato do campo magnético estar presente ou não, de acordo com a solução escolhida, a carga estática, além de implicar na existência de um campo eletrostático (como usual), também comporta-se como um dipolo magnético, com o momento de dipolo magnético dependendo de seu tamanho e proporcional à segunda potência da carga.

Finalmente, estudamos as ambiguidades na definição do mapa de SW na presença de correntes, e encontramos que, em primeira ordem em θ , esta é precisamente a ambiguidade de adicionar uma solução homogênea à equação de conservação da corrente.

Capítulo 3

Momento magnético Não Comutativo, comprimento fundamental e tamanho dos léptons

3.1 Introdução

3.1.1 O problema. Resultados e conclusões

Um indicativo para se verificar a validade da eletrodinâmica quântica (QED) é a medida do momento magnético do elétron, com a subsequente comparação de seu valor medido com o momento magnético anômalo calculado via Modelo Padrão, advindo principalmente a QED, neste caso. Até agora, com a precisão experimental e teórica alcançada, estes dois valores coincidem. As discrepâncias permitidas, dentro dos erros, entre os valores experimentais e teóricos para o momento magnético do elétron diminuem, com o aumento da precisão, e felizmente a coincidência entre ambos valores deverá ser mantida com uma precisão cada vez maior. Por outro lado, na medida em que se procura por possíveis alternativas ao modelo padrão, compatíveis com a situação acima, deve-se restringir seus impactos sobre o momento magnético do elétron à presente indeterminação tanto teórica quanto experimental. Um tal candidato que se vai além da QED padrão é proposto pela eletrodinâmica NC. Foi encontrado recentemente em [58] no formalismo desta teoria que uma carga clássica estática em repouso carrega consigo um momento magnético, chamado por momento magnético NC, cuja magnitude é determinada pelo parâmetro θ , suprimindo a teoria com um comprimento fundamental ¹ $l = \sqrt{\theta}$. Demandando que, para o elétron, o momento magnético NC seja menos que o erro existente na medida do momento magnético, obtemos uma estimativa superior para o parâmetro θ e seu comprimento fundamental associado l . Certas restrições sobre o comprimento fundamental inerente a teoria NC também segue da existência do momento magnético NC de partículas pesadas carregadas. Entretanto a consideração do momento magnético NC do próton e sua contribuição para o splitting de estrutura hiperfina do nível $1S_{1/2}$ no átomo de hidrogênio não conduziu [58] a qualquer nova estimativa para o valor máximo do comprimento fundamental. Em contrapartida, a consideração de léptons, sim.

¹A não comutatividade não é o único método de se introduzir um comprimento fundamental em uma teoria. Neste capítulo, entretanto, queremos dizer comprimento fundamental NC ao se fazer uso desta noção. Por outro lado, não sabemos se o comprimento fundamental, como é proposto pelo mecanismo da não comutatividade, é universal para todas partículas e campos. Por esta razão discutiremos seus valores independentemente de quando lidamos com diferentes partículas.

Uma vez que o momento magnético NC é inversamente proporcional ao tamanho da carga elétrica, um importante papel em se obter esta estimativa é desempenhado pelo tamanho atribuído ao elétron, quanto menor o tamanho, maior será o momento magnético NC, menor será o valor máximo para o parâmetro NC e o comprimento fundamental. Examinamos diferentes suposições acerca do “tamanho do elétron”, este último sendo limitado, inferiormente somente pelo comprimento fundamental l , uma vez que nenhum objeto deve ser menor que o mesmo. Desta forma o valor máximo até o momento encontrado para o comprimento fundamental, como aparece em teorias de campos NC, foi alcançado em [58]. Por outro lado, após atualizar a famosa estimativa para o tamanho do elétron devido a Brodsky-Drell-Dehlnmet [73], [74] (as quais não foram baseadas em nenhum mecanismo oriundo da não-comutatividade, somente pela consideração de um possível estrutura, ou divisibilidade do elétron) por levar em consideração as medidas mais recentes do momento magnético do elétron, encontramos que os resultados para o tamanho são duas ordens de grandeza menor que a mais ousada estimativa para o comprimento fundamental proveniente de especulações sobre o momento magnético NC. A medida que, em uma teoria de campos NC, o tamanho de objetos físicos não admitem um comprimento menor que o comprimento fundamental, isto significa não mais que uma parte em 100 da incerteza existente no momento magnético conhecida pode ser melhor, na melhor das hipóteses, atribuída a contribuição do momento magnético NC. Então restam duas opções. Ou se pode admitir uma extensão além da QED ordinária, além da eletrodinâmica NC, que pode tomar a responsabilidade pela parte principal do desvio admitido, se houver algum, do momento magnético resultante da QED ou, mais provavelmente, este desvio admitido será essencialmente reduzido por medidas adicionais mais precisas.

A mesma análise é repetida para o lépton μ neste capítulo. A diferença crucial, em comparação com o caso do elétron, é que a diferença entre os valores teóricos e experimentais do momento magnético do múon excede os limites admitidos pelos erros. Então, nenhum avanço técnico é capaz de remover esta contradição, e nossos resultados serão mais definitivos ao revindicar que a não comutatividade não pode oferecer, para a parte ausente do momento magnético do múon, de modo que uma maneira diferente para estender o Modelo Padrão mantém-se ainda necessária.

3.1.2 Momento magnético NC

Em [58], teorias clássicas de campo da teoria $U(1)_*$ (eletrodinâmica NC) foram formuladas as quais – no mínimo em primeira ordem no parâmetro NC θ – contêm a invariância de calibre, apesar da presença da corrente externa, conhecida por violá-la (no mínimo “off-shell”). Resolvendo estas equações, o campo eletromagnético gerado pela carga estática de tamanho finito foi encontrado e o fato que esta carga possui um momento magnético dependente do seu tamanho foi estabelecido.

Seja a corrente externa nas equações de campo da eletrodinâmica NC uma carga estática, distribuída uniformemente dentro de uma esfera de raio a dada por

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{3}{4\pi} \frac{Ze}{a^3}, \quad r < a, \quad r = |\mathbf{r}|.$$

Fora da esfera não existe carga: $\rho(\mathbf{r}) = 0$, se $r > a$. A distribuição estática acima da carga total Ze , onde e é a carga fundamental, produz não somente o campo eletrostático, mas também comporta-se como um dipolo magnético, com o campo magnético, em regiões remotas $r \gg a$, dado pelo seguinte potencial vetor,

$$\mathbf{A} = \frac{[\mathcal{M} \times \mathbf{r}]}{r^3}, \quad \mathcal{M} = \theta(Ze)^2 \frac{2e}{5a}, \quad (3.1)$$

onde \mathcal{M} foi denominado momento magnético NC da partícula carregada. Aqui, as três componentes espaciais do vetor θ são definidas como $\theta^i \equiv (1/2)\varepsilon^{ijk}\theta^{jk}$, $i, j, k = 1, 2, 3$ em termos do tensor antisimétrico NC θ^{ij} , que fixa as relações de comutação entre os operadores coordenadas espaciais.

A extensão (tamanho) a da carga em (3.1) deve ser mantida não nula no espírito de uma teoria NC, que não admite que objetos com tamanho menor que o comprimento fundamental $l = \sqrt{\theta}$, onde $\theta = |\theta|$. Para uma carga puntual, uma solução magnetostática também existe [68], embora este caso não represente um dipolo magnético. O que é mais importante é que esta solução é muito singular na origem $r = 0$, onde a carga está localizada e, portanto, não pode oferecer sentido matemático em termos de teoria de distribuições convencional.

Se entendermos o raio a em (3.1) como sendo o tamanho de uma partícula fundamental eletricamente carregada ($Z = 1$), podemos especular sobre a contribuição da não comutatividade para seu momento magnético \mathcal{M} . Certamente, isto é esperado ser muito pequeno, devido a magnitude do parâmetro NC θ . É suposto [5] que o comprimento correspondente $l = \sqrt{\theta}$ deve ser da ordem da escala de comprimento de Planck $l \sim 10^{-33}$ cm (ou $\Lambda_{\text{Pl}} \sim 4 \cdot 10^{19}$ GeV em unidades de energia). A razão é que a pequenas distâncias a unificação da gravidade com a mecânica quântica exige quantização do espaço-tempo. Embora a escala de Planck esteja além de qualquer alcance experimental, o problema atual consiste em estimar limites para θ baseando-se na precisão experimental atual. Em [58] foi discutido que novas restrições sobre o alcance da não comutatividade pode seguir do resultado recém estabelecido que uma partícula carregada fundamental é portadora de um momento magnético (3.1) em uma teoria NC, independente de seu momento orbital ou spin.

No presente capítulo elaboraremos este assunto abordando os léptons carregados e e μ como as “menores” partículas fornecendo, portanto a contribuição máxima em (3.1), e não abordaremos os quarks (embora sejam também pequenos), cujos momentos magnéticos estão além de possibilidade de mensurá-los.

3.2 Limites superiores para o comprimento fundamental do momento magnético NC

3.2.1 Limitações baseadas em estimativas dos tamanhos dos léptons provenientes de espalhamentos de altas energias

Em colisões elétron-pósitron em experimentos de altas energias, léptons se manifestam como partículas sem estrutura (veja por exemplo [73] para uma recente discussão deste ponto), descritas por um campo fundamental não composto (local). Nenhuma variante desta regra tem sido, até o momento, reportada. Considerando a escala LEP de 200 GeV como um limite superior, a qual é admitida como confirmada, devemos aceitar que uma possível não-estrutura destes léptons está abaixo do comprimento (denominamos comprimento de divisibilidade) $r_0 = 10^{-3}\text{Fm}$. Em nossas considerações subsequentes identificamos a extensão da carga a como o comprimento de divisibilidade, pois, é difícil imaginar uma região ocupada por uma carga que se estende acima deste comprimento, mas que não pode ser dividida em partes (se fosse possível, ou a carga resultante poderia adquirir um valor contínuo, menor que e , que contradiz suposições básicas, ou a carga resultante poderia ocupar um volume menor e poderíamos permanecer novamente com um comprimento menor a , abaixo do comprimento de divisibilidade).

3.2.1.1 Elétron

Tendo em mente que, para o elétron, a teoria local existente explica perfeitamente o valor de seu momento magnético \mathcal{M}_e (aqui $\mathcal{M}_e = |\mathbf{M}_e|$), esperamos que a não comutatividade pode somente contribuir dentro da incerteza experimental e teórica $\delta\mathcal{M}_e$, existente na medida e no cálculo desta quantidade. Uma medida direta recente do momento magnético anômalo do elétron, usando espectroscopia ressonante de um elétron individual na armadilha “Penning” [74], oferece o resultado [75], [76]

$$\left(\frac{\mathcal{M}_e}{\mu} - 1\right)\Big|_{\text{MRS}} = 0.00115965218073 \pm 28 \cdot 10^{-14}, \quad (3.2)$$

onde $\mu = e/2m$ é o magneton de Bohr. Por outro lado, um novo trabalho [77] surgiu de uma determinação experimental *independente* do mesmo momento magnético com uma precisão correspondente, obtida com o uso de uma medida da razão entre a constante de Planck e a massa do átomo ^{87}Rb , h/m_{Rb} . O resultado é,

$$\left(\frac{\mathcal{M}_e}{\mu} - 1\right)\Big|_{\text{Rb}} = 0.00115965218113 \pm 84 \cdot 10^{-14}. \quad (3.3)$$

Os autores de [77] ajustam o valor da constante de estrutura fina α de tal forma a fazer (3.3) coincidir com a predição teórica para o momento magnético anômalo, calculado (veja [78] para uma revisão) com acurácia, incluindo cálculos de QED até a ordem $(\alpha/\pi)^4$, também contribuições eletrofracas e hadrônicas (este ajuste conduz, até o presente momento, ao valor mais preciso $\alpha^{-1} = 137.035999037(91)$). Por esta razão o valor (3.3) é referido como “teórico” (certamente, os papéis de (3.3) e (3.2) podem ser revertidos). Os valores teórico, (3.3) e experimental, (3.2), do momento magnético do elétron não se contradizem, demonstrando até o momento a melhor confirmação da validade da QED. A discrepância entre estes,

$$\frac{\delta\mathcal{M}_e}{\mu} \sim 10^{-12}, \quad (3.4)$$

reside dentro da acurácia de medidas e cálculos. Demandamos que uma possível contribuição do momento magnético não comutativo em (3.1) não deve excedê-la:

$$\frac{\delta\mathcal{M}_e}{\mu} > \alpha\theta\frac{4m}{5a}, \quad \alpha = e^2. \quad (3.5)$$

Com a restrição de altas energias sobre o raio $a < r_0$ aceita acima, a equação (3.5) implica $\theta < \frac{\delta\mathcal{M}_e}{\mu}(5r_0/4m\alpha)$. Como $r_0 \sim 10^{-3}\text{Fm}$, obtemos da expressão (3.4) a restrição sobre o comprimento fundamental $l = \sqrt{\theta} < 7 \cdot 10^{-6}\text{Fm} = (28 \text{ Tev})^{-1}$.

3.2.1.2 Múon

A presente questão é diferente com o lépton μ . Na literatura, seu momento magnético anômalo é calculado via Modelo Padrão com a inclusão do vértice $\mu\text{-}\gamma$ da QED em ordem mais baixa com linhas do bóson Z , neutrino e de hádrons. O desvio do momento magnético medido \mathbf{M}_μ com relação ao resultado proveniente de cálculos admite o seguinte valor (veja a atualização de A. Hocker’s e W.J. Marciano em 2009 em [76], também [78] para um cálculo detalhado posteriormente),

$$\frac{\delta\mathcal{M}_\mu}{\mu} \simeq 25 \cdot 10^{-10}. \quad (3.6)$$

Este resultado excede em torno de 3.2 vezes o erro estimado de 1σ error [76]. Acredita-se que esta discrepância pode ser superada pela inclusão de supersimetria para incrementar o resultado teórico. Se, ao contrário, tentarmos explicar esta discrepância pelo efeito do momento magnético NC do múon, obtemos de uma forma similar ao que foi escrito acima, usando (3.6) e o mesmo comprimento de indivisibilidade $r_0 \sim 10^{-3}\text{Fm}$, que l é menor que $2.8 \cdot 10^{-5}\text{Fm} = (7 \text{ TeV})^{-1}$ como uma estimativa baseada em altas energias.

3.2.2 Estimativas finais

Uma vez que não existe estimativa para qualquer extensão do elétron, vale a pena admitir que tal extensão pode ser restrita somente pelo comprimento fundamental. Então usando $a = l = \sqrt{\theta}$ em (3.5) e a incerteza (3.4), obtemos um limite final de $l < 6.6 \cdot 10^{-8}\text{Fm} = (3 \cdot 10^3 \text{ TeV})^{-1}$. Lidando com o múon da mesma forma, mas referindo a (3.6) ao invés de (3.4), obtemos a estimativa final de $8 \cdot 10^{-7}\text{Fm} = (240 \text{ TeV})^{-1}$.

3.3 Limites superiores sobre o comprimento fundamental *versus* composição dos léptons

Existem [73] restrições muito fortes sobre a extensão de léptons em comparação com aquelas provenientes de experimentos de colisões de altas energias. Estas se estendem a uma escala de energia além dos aceleradores. O ponto é que se imaginarmos um lépton como um estado ligado de partículas muito pesadas cuja energia de ligação compensa a maior parte de suas massas de modo que o estado resultante seja leve, o raio de Bohr R para o estado composto, a ser tratado como seu próprio raio, poderia ser muito menor do que o comprimento Compton do lépton λ_C . De acordo com a regra de soma de Drell-Hearn-Gerasimov (veja [73] para referências) o desvio do momento magnético anômalo $(\mathcal{M}/\mu - 1)$ de seu valor proveniente da QED é proporcional a razão R/λ_C , que é a medida do composto. Baseado em dados experimentais sobre momentos magnéticos de partículas compostas conhecidas, (próton e trítio), representados graficamente contra seus valores medidos, uma conjectura foi formulada por Dehmelt [74] que o coeficiente de proporcionalidade deve ser de ordem da unidade. Então, $R = \lambda_C \delta \mathcal{M}/\mu$.

3.3.1 Elétron

Referindo às equações (3.2), (3.3) e usando (3.4) podemos atualizar o resultado de 1988 de Dehmelt para o elétron de $R < 4 \cdot 10^{-8}\text{Fm}$ para $R < 4 \cdot 10^{-10}\text{Fm}$. Isto é duas ordens de magnitude menor que a nossa estimativa de $6.6 \times 10^{-8}\text{Fm}$ para o comprimento fundamental obtido na subseção 3.2.2. (O uso da asserção $R = \lambda_C \delta \mathcal{M}/\mu$ junto com (3.5) poderia resultar na condição $l < \sqrt{5/8\alpha}(\delta \mathcal{M}/\mu)\lambda_C = 9.25R$, mais fraca que a condição já aceita para o comprimento fundamental o qual deveria ser menor do que qualquer comprimento, incluindo o raio composto do elétron R , que satisfaz $l < R$). Então, a conjectura de Dehmelt oferece um limite maior sobre o comprimento fundamental que o momento magnético NC. Portanto não mais que uma parte em 10^{-2} da diferença medida (3.5) pode ser, no máximo, atribuída à contribuição NC.

3.3.2 Múon

O raio do múon estimado analogamente, baseado em argumentos sobre a estrutura de composição e sobre a discrepância teoria-experimento (3.6), dá o resultado $R_\mu \simeq 0.5 \cdot 10^{-8}\text{Fm}$. Este é menor que a estimativa final da subseção 3.2.2, baseada em dados do múon. Novamente, uma vez que o tamanho do múon não pode ser menor que o comprimento fundamental, este resultado indica que o momento magnético NC sozinho, definitivamente, não pode ser responsável pela discrepância (3.6) entre teoria e experimento e, portanto, desvios do modelo padrão além da eletrodinâmica NC são necessários. Diferente do caso do elétron, não se pode esperar um futuro crescimento da precisão de medidas para abandonar esta conclusão.

Capítulo 4

Equação de Dirac no Espaço NC para o Átomo de Hidrogênio

Recentemente, possíveis consequências fisicamente observáveis da não comutatividade das coordenadas atraíram muita atenção, todas elas justificadas pelo intensivo estudo da teoria quântica de campos e mecânica quântica não comutativas. De acordo com Chaichian *et. al.* [18] a não comutatividade das coordenadas conduz a modificações dos níveis de energia do átomo de hidrogênio, em comparação com a estrutura bem conhecida obtida pela mecânica quântica não relativística. Os resultados obtidos mostram que os níveis degenerados $2S-2P$ se separam em três níveis. Entretanto, os cálculos de [18] foram feitos no formalismo da equação de Schroedinger não relativística (com o potencial de Coulomb) modificada (θ -modificada) pela presença da não comutatividade. É interessante refinar estes resultados considerando a modificação dos níveis de energia do átomo de hidrogênio no formalismo da equação de Dirac θ -modificada com o campo de Coulomb, que é a equação de Schroedinger para o caso em consideração. Tal problema é resolvido na presente seção. Demonstramos [19] que no caso relativístico a não comutatividade quebra totalmente a degenerescência dos níveis $2P_{1/2}$ e $2P_{3/2}$, resultando em novos canais de transição permitidos. Comparando nossos resultados com valores recentes para o “Lamb-shift” [37], determinamos que o valor máximo do parâmetro da não comutatividade θ é aproximadamente $|\theta|_{\text{máx}} \simeq 6.5 \times 10^{-26} [\text{m}^2]$, ou equivalentemente, a escala de energia mínima da não comutatividade é $\Lambda_{\text{mín}} \simeq (7.8 \times 10^{-4} [\text{GeV}])^{-2}$.

4.1 Equação de Dirac θ -modificada com o campo de Coulomb

O comportamento de um elétron com carga $-e$ ($e > 0$) e massa m no campo de Coulomb de um núcleo Ze no espaço não comutativo é determinada pela equação de Dirac θ -modificada, dada por¹

$$\left[\left(\gamma^\mu \hat{\mathcal{P}}_\mu - m \right) \star \Psi \right] (x) = \left[\gamma^\mu \tilde{\mathcal{P}}_\mu - m \right] \Psi (x) = 0, \quad (4.1)$$

onde $\Psi (x)$ é um espinor de quatro componentes, $\tilde{\mathcal{P}}_\mu = \hat{p}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu (q)$, $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$ e γ^μ são matrizes de Dirac, cuja representação escolhida é

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

¹Nesta seção empregaremos o sistema natural de unidades $\hbar = c = 1$.

e σ^i são matrizes de Pauli. A equação (4.1) é a teoria quântica relativística do elétron em espaços não comutativos, ou seja, espaços cujos operadores de coordenadas não comutativos \hat{q}^i satisfaz a seguinte álgebra

$$[\hat{q}^i, \hat{q}^j]_- = i\theta^{ij}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j]_- = 0, \quad [\hat{q}^i, \hat{p}_j]_- = i\delta_j^i, \quad \theta^{ij} = \text{const.} \quad (4.3)$$

Salientamos que a álgebra dos operadores não comutativos (4.3) é refletida somente no quadrivetor potencial eletromagnético $A_\mu(x^0, \hat{q}^i)$ como

$$A_\mu(x^0, \hat{q}^i) = A_\mu\left(x^0, \hat{x}^i - \frac{1}{2\hbar}\theta^{ij}\hat{p}_j\right). \quad (4.4)$$

Na forma hamiltoniana, a equação de Dirac (4.1) é reescrita como

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x) &= \hat{H}^\theta\Psi(x), \quad \hat{H}^\theta = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}) + m\gamma^0 - eA_0(q), \\ \alpha_i &\equiv \gamma_0\gamma_i, \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i), \quad \hat{\mathbf{p}} = (p_i), \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde o potencial de Coulomb $A_0(q)$ é,

$$A_0(q) = A_0\left(x^i - \frac{1}{2}\theta^{ij}\hat{p}_j\right) = \frac{Ze}{\sqrt{(x^i - \frac{1}{2}\theta^{ij}\hat{p}_j)(x^i - \frac{1}{2}\theta^{ik}\hat{p}_k)}}, \quad ijk = (1, 2, 3). \quad (4.6)$$

Em toda seção, referimo-nos a \hat{H}^θ como sendo a Hamiltoniana de Dirac θ -modificada com o campo de Coulomb no espaço não comutativo.

Colocando $\theta^i = \varepsilon_{ijk}\theta^{jk}$ (ε_{ijk} é o tensor de Levi-Civita com a usual definição) e denotando $r = \sqrt{x^i x^i}$, o potencial (4.6) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} A_0\left(x^i - \frac{1}{2}\theta^{ij}\hat{p}_j\right) &= \frac{Ze}{r} + \frac{1}{4\hbar} \frac{Ze}{r^3} (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}})_k \theta^k + O(\theta^2), \\ &= \frac{Ze}{r} + \frac{1}{4} \frac{Ze}{r^3} (\hat{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\theta}) + O(\theta^2), \quad \boldsymbol{\theta} = (\theta^i), \end{aligned}$$

onde $\hat{\mathbf{L}} = [\mathbf{x} \times \hat{\mathbf{p}}]$ é o operador de momento angular orbital. Portanto a Hamiltoniana de Dirac θ -modificada admite a seguinte forma

$$\hat{H}^\theta = \hat{H} + \hat{V}^\theta + O(\theta^2), \quad (4.7)$$

$$\hat{H} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}) + m\gamma^0 - \frac{Ze^2}{r}, \quad \hat{V}^\theta = -\frac{1}{4} \frac{Ze^2}{r^3} (\hat{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\theta}). \quad (4.8)$$

Usando as autofunções exatas de \hat{H} e tratando \hat{V}^θ como uma perturbação da Hamiltoniana \hat{H} , pode-se calcular a modificação dos níveis de energia do átomo de Hidrogênio no formalismo da equação de Dirac θ -modificada. O espectro de \hat{H} e as correspondentes autofunções são bem conhecidas, como por exemplo em [79], [80], [81] e [82], cujas expressões para $Z < 137$ listamos abaixo:

$$\begin{aligned} \hat{H}\Psi_{N,j,M,\zeta} &= E_{N,j}\Psi_{N,j,M,\zeta}, \quad \zeta = \pm 1, \quad E_{N,j} = \frac{m}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ze^2}{\gamma+N}\right)^2}}, \\ N &= \begin{cases} 1, 2, \dots, & \zeta = 1 \\ 0, 1, 2, \dots, & \zeta = -1 \end{cases}, \quad \gamma = \sqrt{\varkappa^2 - (Ze^2)^2}, \quad \varkappa = \zeta \left(j + \frac{1}{2}\right), \\ \hat{\mathbf{J}}^2\Psi_{N,j,M,\zeta} &= j(j+1)\Psi_{N,j,M,\zeta}, \quad \hat{J}_3\Psi_{N,j,M,\zeta} = M\Psi_{N,j,M,\zeta}, \\ \hat{\mathbf{J}} &= \hat{\mathbf{L}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}), \quad j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \quad -j \leq M \leq j, \end{aligned}$$

nesta expressão $\sigma = (\sigma_i)$ são as matrizes de Pauli e os espinores de Dirac $\Psi_{N,j,M,\zeta}$ são dados por

$$\begin{aligned}\Psi_{N,j,M,\zeta}(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \Omega_{j,M,\zeta}(\vartheta, \varphi) F_{N,j,\zeta}^+(r) \\ i\Omega_{j,M,-\zeta}(\vartheta, \varphi) F_{N,j,\zeta}^-(r) \end{pmatrix}, \\ \Omega_{j,M,\zeta}(\vartheta, \varphi) &= \frac{\zeta}{\sqrt{2j+\zeta+1}} \begin{pmatrix} -\sqrt{(j+\frac{\zeta}{2})-\zeta M+\frac{1}{2}} Y_{j+\frac{\zeta}{2},M-\frac{1}{2}}(\vartheta, \varphi) \\ \sqrt{(j+\frac{\zeta}{2})+\zeta M+\frac{1}{2}} Y_{j+\frac{\zeta}{2},M+\frac{1}{2}}(\vartheta, \varphi) \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (4.9)$$

onde $Y_{A,B}(\vartheta, \varphi)$ são harmônicos esféricos [83], [81] e

$$\begin{aligned}F_{N,j,\zeta}^\pm(r) &= \pm A \lambda_N^\pm z^{\gamma-1} e^{-z/2} [(\eta_N - \varkappa) \Phi(-N, \beta; z) \mp N \Phi(-N+1, \beta; z)], \\ A &= \frac{(2\lambda_N)^{3/2}}{2\Gamma(\beta)} \sqrt{\frac{\Gamma(\beta+N)}{\eta_N(\eta_N - \varkappa) N!}}, \quad \lambda_N^\pm = \sqrt{1 \pm \frac{E_{N,j}}{m}}, \quad \lambda_N = m\lambda_N^+ \lambda_N^-, \\ \beta &= 2\gamma + 1, \quad \eta_N = Ze^2 m / \lambda_N, \quad z = 2\lambda_N r, \quad \varkappa = \zeta(j+1/2),\end{aligned}\quad (4.10)$$

onde $\Phi(a, b; z)$ são funções hipergeométricas confluentes, (veja [84] para definição).

4.2 θ -modificação dos níveis de energia

Como foi demonstrado em [18], para átomos hidrogenóides sem a interação spin-órbita, os níveis de energia da Hamiltoniana θ -modificada \hat{H}^{nr} ,

$$\hat{H}^{\text{nr}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r}, \quad (4.11)$$

são caracterizados por uma quebra de degenerescência no número quântico $l = j + \zeta/2$ (autovalor do operador $\hat{\mathbf{L}}^2$), que implica em certos “splittings” dos níveis de energia. Portanto surge a possibilidade de novos canais de transição com distintas projeções de momento angular total M , i.e., na notação espectroscópica, transições como $nl_j^M \rightarrow nl_j^{M'}$ (para $l \neq 0$), onde $n = N + |\varkappa|$ é o número quântico principal não relativístico, autovalor do operador diferencial radial de (4.11). A perturbação devido a não comutatividade é dada pelo mesmo operador \hat{V}^θ (4.8), mas é calculado com funções de onda não relativísticas, cuja correção sobre níveis degenerados, em primeira ordem de perturbação, é obtida calculando os autovalores da matriz secular ΔE^{nr} , seus elementos sendo definidos como

$$\Delta E_{aa'}^{\text{nr}} = -\frac{Ze^2}{4} \int_0^\infty dr r^2 \int_0^{4\pi} d\Omega \left\{ \psi_{n,a}^\dagger(r, \vartheta, \varphi) \left[\frac{\hat{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\theta}}{r^3} \right] \psi_{n,a'}(r, \vartheta, \varphi) \right\}, \quad (4.12)$$

onde o índice $a = (l, j, M)$ é a coleção de três índices e

$$\begin{aligned}\psi_{n,a}(r, \vartheta, \varphi) &\equiv \psi_{n,l,j,M}(r, \vartheta, \varphi) = R_{n,l}(r) \chi_{j,M}(\vartheta, \varphi), \\ \hat{\mathbf{J}}^2 \chi_{j,M}(\vartheta, \varphi) &= \left(\hat{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\sigma}/2 \right)^2 \chi_{j,M}(\vartheta, \varphi) = j(j+1) \chi_{j,M}(\vartheta, \varphi).\end{aligned}$$

são autofunções de (4.11), $\hat{H}^{\text{nr}} \psi_{n,a} = E_n \psi_{n,a}$.

Com o intuito de obter a θ -modificação dos níveis $2S_{1/2}$, $2P_{1/2}$, $2P_{3/2}$, enfatizamos que \hat{V}^θ é um operador vetorial e de acordo com as regras de seleção de momento angular, existem elementos de

transição entre níveis onde $\Delta M \equiv |M - M'| = 0, 1$ e $\Delta l \equiv |l - l'| = 0$ [85, 86]. A matriz secular ΔE^{nr} possui dimensão 6 e calculada conforme (4.12) é

$$\Delta E^{\text{nr}} = -\frac{Ze^2}{4} \varrho^{\text{nr}} \Theta^{\text{nr}},$$

$$\varrho^{\text{nr}} = \int_0^\infty dr \frac{|R_{21}(r)|^2}{r}, \quad \Theta_{aa'}^{\text{nr}} = \int_0^{4\pi} d\Omega \left\{ \chi_a^\dagger(\vartheta, \varphi) \left(\hat{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\theta} \right) \chi_{a'}(\vartheta, \varphi) \right\}, \quad (4.13)$$

onde $a = (j, M)$ significa um par de índices ($l = l'$) e Θ^{nr} representa a matriz cujos elementos são $\Theta_{aa'}^{\text{nr}}$. Definindo $\theta_\pm = \theta_1 \pm \theta_2$, esta matrix é escrita explicitamente como

$$\Theta^{\text{nr}} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\theta_3 & \frac{2}{3}\theta_+ & \frac{1}{\sqrt{6}}\theta_- & \frac{\sqrt{2}}{3}\theta_3 & -\frac{1}{3\sqrt{2}}\theta_+ & 0 \\ \frac{2}{3}\theta_- & \frac{2}{3}\theta_3 & 0 & \frac{1}{3\sqrt{2}}\theta_- & \frac{\sqrt{2}}{3}\theta_3 & -\frac{1}{\sqrt{6}}\theta_+ \\ \frac{1}{\sqrt{6}}\theta_+ & 0 & -\theta_3 & \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_+ & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3}\theta_3 & \frac{1}{3\sqrt{2}}\theta_+ & \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_- & -\frac{1}{3}\theta_3 & \frac{2}{3}\theta_+ & 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}}\theta_- & \frac{\sqrt{2}}{3}\theta_3 & 0 & \frac{2}{3}\theta_- & \frac{1}{3}\theta_3 & \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_+ \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}}\theta_- & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_- & \theta_3 \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

que possui três autovalores duplamente degenerados, representados por ξ_0^{nr} e ξ_\pm^{nr} dados por

$$\xi_0^{\text{nr}} = 0, \quad \xi_\pm^{\text{nr}} = \pm |\boldsymbol{\theta}|, \quad |\boldsymbol{\theta}| = \sqrt{\theta^i \theta^i}. \quad (4.15)$$

Portanto, as correções para os níveis de energia são exatamente os autovalores da matriz secular ΔE^{nr} , que representados como ΔE_0^{nr} e ΔE_\pm^{nr} são

$$\Delta E_0^{\text{nr}} = 0, \quad \Delta E_\pm^{\text{nr}} = -\frac{m}{4} \left(\frac{Z^2 \alpha^2}{\lambda_e} \right)^2 \left(\frac{1}{24} \right) (\pm |\boldsymbol{\theta}|), \quad (4.16)$$

onde α é a constante de estrutura fina (que no sistema de unidades em que estamos trabalhando vale $\alpha = e^2$), $\lambda_e = \lambda_e/2\pi$ e λ_e é o comprimento de onda de Compton do elétron. Estes resultados podem ser igualmente obtidos se escolhermos $\theta_1 = \theta_2 = 0$ e $\theta_3 \neq 0$ (o que pode ser feito por uma rotação ou redefinição das coordenadas). Com esta escolha $|\boldsymbol{\theta}| = \theta_3$, os elementos diagonais podem ser obtidos através da expressão geral calculada em [18], que é exatamente (4.12) no caso particular em que $j = j'$. Nesta escolha de coordenadas ΔE^{nr} é simplificada podendo ser escrita como uma matriz de dimensão 3, ou seja

$$\Delta E^{\text{nr}} = -\frac{Ze^2}{4} \varrho^{\text{nr}} \Theta^{\text{nr}},$$

$$\Theta^{\text{nr}} = \frac{2}{3} \theta_3 \begin{pmatrix} 2M_1 & (2)^{-1/2} & 0 \\ (2)^{-1/2} & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \pm \frac{1}{2}, \quad M_2 = \pm \frac{3}{2}, \quad (4.17)$$

cujos autovalores são, exceto por $|\boldsymbol{\theta}| \rightarrow \theta_3$, exatamente iguais a (4.16). Uma vez que o objetivo do artigo citado foi o estudo da transição² $2P_{1/2} \rightarrow 2S_{1/2}$, a mesma não conteve elementos não diagonais, mas que estão representados acima (4.17).

²Rigorosamente falando, esta transição não existe, pois, o nível perturbado é uma superposição de níveis degenerados $2P_{1/2}$ e $2P_{3/2}$, e somente os números quânticos M são bem definidos. Entretanto, esta consideração não modifica o valor numérico da transição e, conseqüentemente, pôde ser ignorada em [18].

Nesta definição de coordenadas, $[\hat{J}_3, \hat{V}^\theta]_- = 0$, logo os autoestados de $\hat{H}^{\theta, \text{nr}} = \hat{H}^{\text{nr}} + \hat{V}^\theta$ possuem número quântico magnético M bem definidos. Este resultado nos permite concluir que, no caso não relativístico, os níveis degenerados $2S - 2P$ separam-se em outros três, todos estes *duplamente degenerados*, como ilustrado na Figura 1.

Na teoria relativística, a θ -modificação dos níveis de energia relativísticos é obtida calculando os autovalores da matriz secular ΔE^{rel} , caracterizada por valores médios do operador \hat{V}^θ (4.8), mas agora com respeito aos espinores de Dirac $\Psi_{N,j,M,\zeta}$ (4.9), e as mesmas regras de seleção de momento angular podem ser aplicadas, i.e., $\Delta M \equiv |M - M'| = 0, 1$ e $\Delta l \equiv |l - l'| = 0$. O operador de perturbação \hat{V}^θ não mistura os espinores do pósitron $F_{N,j,\zeta}^-(r)$ com espinores do elétron $F_{N,j,\zeta}^+(r)$ de forma que ΔE^{rel} é composta por dois termos, cujos elementos são,

$$\begin{aligned} \Delta E_{\mu\mu'}^{\text{rel}} = & -\frac{Ze^2}{4} \int_0^\infty \frac{dr}{r} [(F_{N,j,\zeta}^+)^* F_{N,j,\zeta'}^+] \int_0^{4\pi} d\Omega \left\{ \Omega_{j,M,\zeta}^\dagger (\hat{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\theta}) \Omega_{j,M',\zeta'} \right\} \\ & - \frac{Ze^2}{4} \int_0^\infty \frac{dr}{r} [(F_{N,j,\zeta}^-)^* F_{N,j,\zeta'}^-] \int_0^{4\pi} d\Omega \left\{ \Omega_{j,M,-\zeta}^\dagger (\hat{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\theta}) \Omega_{j,M',-\zeta'} \right\}, \end{aligned}$$

onde o índice $\mu = (M, \zeta)$ é um conjunto de dois índices. Porém $F_{N,j,\zeta}^-(r)$ é aproximadamente $\sim 1/c$ menor que $F_{N,j,\zeta}^+(r)$, de forma que negligenciaremos termos proporcionais a $F_{N,j,\zeta}^-(r)$, restando somente o primeiro termo acima.

Estamos interessados em calcular a θ -modificação sobre os níveis de energia relativísticos $2S, 2P$. A degenerescência não relativística no número quântico j é naturalmente removida na teoria de Dirac, de tal forma que o nível $2P_{3/2}$ separa-se dos níveis ainda degenerados $2S_{1/2}, 2P_{1/2}$. Consequentemente a não comutatividade do espaço implica em “splittings” adicionais e uma análise separada para os níveis de relativísticos com $j = 1/2$ and $j = 3/2$ é, portanto, necessária. Isto significa que elementos da matriz secular $\Delta E^{\text{rel}}(j)$, em primeira ordem em θ , são

$$\Delta E_{MM'}^{\text{rel}}(j) = -\frac{Ze^2}{4} \int_0^\infty dr r^2 |F_{N,j,\zeta}^+|^2 \int_0^{4\pi} d\Omega \left\{ \Omega_{j,M,\zeta}^\dagger \left[\frac{\hat{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\theta}}{r^3} \right] \Omega_{j,M',\zeta} \right\}, \quad (4.18)$$

cujos resultados, para cada nível, seguem abaixo.

4.3 Correção relativística para o nível $2P_{1/2}$

A θ -correção para o nível $2P_{1/2}$ ($N = 1, j = 1/2, \zeta = 1, M = \pm \frac{1}{2}$) segue de (4.18):

$$\begin{aligned} \Delta E_{MM'}^{\text{rel}}(1/2) = & -\frac{Ze^2}{4} \varrho_{1/2}^{\text{rel}} \Theta_{MM'}^{\text{rel}}, \\ \varrho_{1/2} = & \int_0^\infty \frac{dr}{r} |F_{1,\frac{1}{2},1}^+(r)|^2, \quad \Theta_{MM'}^{\text{rel}} = \int_0^{4\pi} d\Omega \left[\Omega_{\frac{1}{2},M,1}^* (\hat{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\theta}) \Omega_{\frac{1}{2},M',1} \right]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Expressando as funções hipergeométricas confluentes em termos de exponenciais e polinômios (4.10), obtemos

$$\begin{aligned} \varrho_{1/2} &= (2\lambda_1)^3 \left[\frac{\beta_1 (\lambda_1^+)^2}{4\eta_1 (\eta_1 - 1) (\beta_1 - 1) (\beta_1 - 2) (\beta_1 - 3)} \right] \left\{ (\eta_1 - 2)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{2(\eta_1 - 2)(\eta_1 - 1)(\beta_1 - 3)}{\beta_1} \right] + \left(\frac{\eta_1 - 1}{\beta_1} \right)^2 (\beta_1 - 2)(\beta_1 - 3) \right\}, \\ \eta_1 &= (Ze^2) \frac{m}{\lambda_1}, \quad \gamma_1 = \sqrt{1 - (Ze^2)^2}, \quad \beta_1 = 2\gamma_1 + 1. \end{aligned} \quad (4.20)$$

com λ_1^+ , λ_1 dados em (4.10). A matrix Θ^{rel} , cujos elementos são $\Theta_{MM'}^{\text{rel}}$, é

$$\Theta^{\text{rel}} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -\theta_3 & \theta_+ \\ \theta_- & \theta_3 \end{pmatrix}, \quad \theta_{\pm} = \theta_1 \pm i\theta_2, \quad (4.21)$$

e seus autovalores, denotados por Λ_j^{\pm} , são

$$\Lambda_{1/2}^{\pm} = \pm \frac{2}{3} |\boldsymbol{\theta}|, \quad |\boldsymbol{\theta}| = \sqrt{\theta^i \theta^i}. \quad (4.22)$$

Portanto, a θ -modificação $\Delta E^{\text{rel}}(j)$ do nível de energia relativístico $2P_{1/2}$ é dada por,

$$\begin{aligned} \Delta E_{\pm}^{\text{rel}}(1/2) &= -\frac{Ze^2}{4} \varrho_{1/2} \Lambda_{1/2}^{\pm} \\ &= -m \left(\frac{Z^2 \alpha^2}{\lambda_e} \right)^2 \left(\pm \frac{|\boldsymbol{\theta}|}{3} \right) \left\{ \left(\frac{(\lambda_1^+)^2 \beta_1}{(\beta_1 - 1)(\beta_1 - 2)(\beta_1 - 3)} \right) \right. \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\eta_1^4 (\eta_1 - 1)} \right) \left[(\eta_1 - 2)^2 - \left(\frac{2(\eta_1 - 2)(\eta_1 - 1)(\beta_1 - 3)}{\beta_1} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\eta_1 - 1}{\beta_1} \right)^2 (\beta_1 - 2)(\beta_1 - 3) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Consequentemente existe uma separação, ou “splitting” neste nível de modo que o nível $2S_{1/2}$, $2P_{1/2}$ se separa em três. Similarmente ao caso não relativístico, estes mesmos resultados podem ser obtidos no referencial $\theta_1 = \theta_2 = 0$ e $\theta_3 \neq 0$, com a substituição $|\boldsymbol{\theta}| \rightarrow \theta_3$. A vantagem deste referencial é que $[\hat{J}_3, \hat{V}^{\theta}]_- = 0$ e portanto, os estados possuem número quântico magnético M bem definido e o nível $2S_{1/2}$, $2P_{1/2}$ se divide nos subníveis $2P_{1/2}^{+1/2}$, $2S_{1/2}$, $2P_{1/2}^{-1/2}$, como ilustrado na Figura 1.

4.4 Correção relativística para o nível $2P_{3/2}$

De acordo com (4.18), a θ -correção para o nível $2P_{3/2}$ ($N = 0$, $j = 3/2$, $\zeta = -1$, $M = \pm 1/2, \pm 3/2$), é

$$\Delta E_{MM'}^{\text{rel}}(3/2) = -\frac{Ze^2}{4} \varrho_{3/2} \Theta_{MM'}^{\text{rel}}, \quad (4.24)$$

onde a integral radial é

$$\varrho_{3/2} = \int_0^\infty \frac{dr}{r} \left| F_{0, \frac{3}{2}, -1}^+(r) \right|^2 = 4(\lambda_0)^3 \left[\frac{(\lambda_0^+)^2}{(\beta_2 - 1)(\beta_2 - 2)(\beta_2 - 3)} \right], \quad (4.25)$$

$$\gamma_2 = \sqrt{4 - (Ze^2)^2}, \quad \beta_2 = 2\gamma_2 + 1.$$

com λ_0^+ , λ_0 dados em (4.10). Agora a matriz Θ^{rel} , cujos elementos são

$$\Theta_{MM'}^{\text{rel}} = \int_0^{4\pi} d\Omega \left[\Omega_{\frac{3}{2}, M, -1}^* (\hat{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\theta}) \Omega_{\frac{3}{2}, M', -1} \right], \quad (4.26)$$

é dada por

$$\Theta^{\text{rel}} = \begin{pmatrix} -\theta_3 & \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_+ & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_- & -\frac{1}{3}\theta_3 & \frac{2}{3}\theta_+ & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\theta_- & \frac{1}{3}\theta_3 & \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_+ \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_- & \theta_3 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Seus autovalores não degenerados, Λ_j^\pm e $\Lambda_j^{\pm'}$, são

$$\Lambda_{3/2}^\pm = \pm |\boldsymbol{\theta}|, \quad \Lambda_{3/2}^{\pm'} = \frac{\Lambda_{3/2}^\pm}{3}, \quad |\boldsymbol{\theta}| = \sqrt{\theta^i \theta^i}. \quad (4.28)$$

Consequentemente, as correções para o nível $2P_{3/2}$ possuem a seguinte forma

$$\Delta E^{\text{rel}}(3/2)^\pm = -\frac{Ze^2}{4} \varrho_{3/2} \Lambda_{3/2}^\pm, \quad \Delta E^{\text{rel}}(3/2)^{\pm'} = \frac{\Delta E^{\text{rel}}(3/2)^\pm}{3},$$

$$\Delta E^{\text{rel}}(3/2)^\pm = -\frac{m}{4} \left(\frac{Z^2 \alpha^2}{\lambda_e} \right)^2 (\pm |\boldsymbol{\theta}|) \frac{(\lambda_0^+)^2}{2(\beta_2 - 1)(\beta_2 - 2)(\beta_2 - 3)}, \quad (4.29)$$

Os mesmos resultados podem ser obtidos no referencial $\theta_1 = \theta_2 = 0$ e $\theta_3 \neq 0$, com a substituição $|\boldsymbol{\theta}| \rightarrow \theta_3$. Novamente $[\hat{J}_3, \hat{V}^\theta]_- = 0$ e portanto, o nível $2P_{3/2}$ se divide em quatro subníveis $2P_{3/2}^{+1/2}$, $2P_{3/2}^{-1/2}$, $2P_{3/2}^{+3/2}$ e $2P_{3/2}^{-3/2}$, como ilustrado na Figura 4.1.

Os níveis de energia e suas modificações devido a presença da não comutatividade, para os casos relativístico e não relativístico estão mostrados³ na figura abaixo.

Concluimos que do ponto de vista da teoria de Dirac θ -modificada existe adicionalmente, em contraste com o caso não relativístico, “splittings” de alguns níveis degenerados e aparece novos canais de transição. Em particular, na presença da não comutatividade do espaço, os níveis degenerados $2S_{1/2}$, $2P_{1/2}$ separam-se em dois subníveis não degenerados, o nível $2P_{3/2}$ separa-se em quatro subníveis não degenerados e a transição $2P_{1/2}^{\pm 1/2} \rightarrow 2S_{1/2}$ é possível. Exceto para o nível esfericamente simétrico $2S_{1/2}^{\pm 1/2}$, estes resultados mostram que, na teoria relativística, toda degenerescência é removida.

Os resultados aqui apresentados permitem determinar um valor máximo para o parâmetro da não comutatividade θ . Demandamos que o “splitting” proveniente da não comutatividade seja menor do que o menor erro experimental δE_{Lamb} em uma medida direta do desvio Lamb. De acordo com

³Nesta figura, linhas traço-ponto indicam a diferença de energia que *não* depende de θ e, consequentemente, não pode ser comparada com os outros níveis.

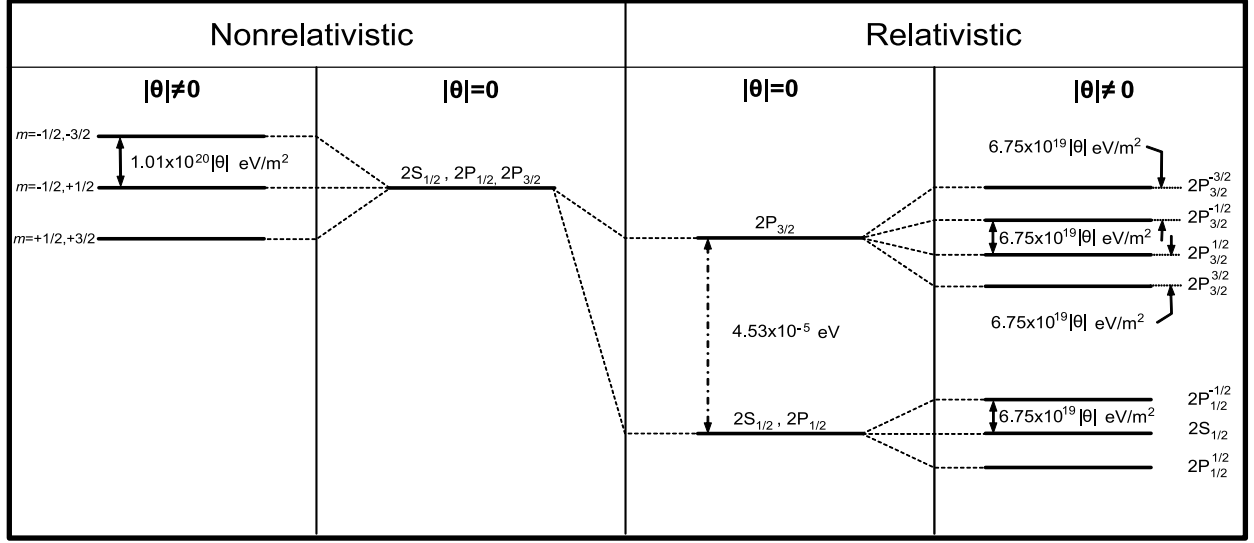


Figura 4.1: “Splittings” para níveis de energia relativísticos e não relativísticos devido a não comutatividade do espaço.

[37], a medida do desvio Lamb que resultou no menor erro foi obtida por Sokolov e Yakovlev [87] e corrigida por Karshenboim [88], é

$$\delta E_{\text{lamb}} \simeq 16,5 \text{ MHz} = 6.83 \times 10^{-11} \text{ eV}.$$

Portanto, o limite máximo para o parâmetro θ é dado pela desigualdade,

$$\Delta E^{\text{rel}}(1/2) \lesssim \delta E_{\text{lamb}} \rightarrow |\theta| \lesssim 1.012 \times 10^{-30} \text{ m}^2 \rightarrow l = \sqrt{|\theta|} \lesssim 1 \text{ Fm}, \quad (4.30)$$

Logo, a escala de energia da não comutatividade deve ser

$$\Lambda = \frac{\hbar c}{\sqrt{|\theta|}} \gtrsim 0.2 \text{ GeV}. \quad (4.31)$$

Capítulo 5

Descrições Quânticas e Pseudoclássicas de Partículas Não Relativísticas de Spin $1/2$ no Espaço Não Comutativo

5.1 Introdução

É conhecido que teorias de campos no espaço NC induzem as chamadas equações de onda relativísticas θ -modificadas que, no presente momento, são interpretadas como equações de Schrödinger da mecânica quântica em espaços NC, p.ex. [17, 23, 30, 89, 90, 91, 92, 93]. Cálculos no formalismo de tais teorias estabelecem valores máximos para o parâmetro da não comutatividade, veja [18, 19, 44, 94]. No presente capítulo construímos uma equação de onda não relativística (no sentido de uma θ -modificação da equação de Pauli). Com a pretensão de resolver o presente problema, consideramos o limite não relativístico da equação de Dirac θ -modificada. Mencionamos que a forma desta depende essencialmente do ponto de vista de como contruir a ação para o campo espinorial em um campo externo no espaço NC. Consideramos duas possíveis ações, uma obtida da simples modificação de Moyal [95] (introduzindo o produtos Moyal na ação ordinária para o campo de Dirac [29, 45, 46, 44, 47, 89, 90, 96, 97, 98]) e outra ação obtida pelo chamado mapa de Seiberg-Witten (SW), veja [6, 28, 51, 50, 49, 52].

Deve ser notado que a não comutatividade pode também ser justificada por uma análise da simetria Galileana, no contexto de teoria de grupos, em sistemas de partículas não relativísticas. Uma relação entre spin e não comutatividade pode ser estudada em exemplos de modelos clássicos de partículas espinoriais não relativísticas, consideradas em [99, 100], [101] e [102]. As correspondentes versões quânticas de tais modelos descrevem ânions relativísticos e não relativísticos em interação com campos externos [103, 104].

Efetando os limites não relativísticos em ambas equações de Dirac θ -modificadas seguimos a maneira padrão, veja p.ex. [105, 106], separando os espinores “superior” e “inferior” de duas componentes no espinor de quatro componentes de Dirac. A equação satisfeita pelo espinor “superior” corresponde a equação de onda não relativística para partículas de spin $1/2$. Para completar a consideração, apresentamos um modelo pseudoclássico (*à la* Berezin-Marinov [107, 108]) para a respectiva partícula não relativística no espaço NC. Justificamos o presente modelo por meio de sua quantização, cujo resultado coincide com a equação de onda não relativística θ -modificada para a partícula de spin $1/2$.

Consequentemente, como uma das possíveis aplicações do resultado geral, extraímos da equação de Pauli θ -modificada, a interação entre um spin não relativístico e o campo magnético externo. Com

tal interação em mãos, construímos uma θ -modificação do modelo de Heisenberg para dois spins acoplados submetidos à um campo magnético externo. No formalismo de tal modelo, calculamos a amplitude de transição entre dois estados ortogonais do tipo EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) para um par de spins em um campo magnético oscilatório e mostramos que algumas de tais transições, que são proibidas no espaço comutativo, são possíveis devido à não comutatividade.

5.2 Limite não relativístico da equação de Dirac θ -modificada

5.2.1 Simples modificação de Moyal

Nesta subseção construímos uma ação para o campo espinorial Ψ em interação com um campo eletromagnético externo A^μ no espaço não comutativo (NC). Tal ação é construída introduzindo o produto estrela de Moyal na ação ordinária para o campo de Dirac (denominamos tal modificação como simples modificação de Moyal, na sequência). Desta forma derivamos a seguinte ação ¹,

$$S_M^\theta = \int dx \mathcal{L}_M^\theta, \quad \mathcal{L}_M^\theta = \bar{\Psi}(x) \star \left(\gamma^\mu \hat{P}_\mu - mc \right) \star \Psi(x),$$

$$\hat{P}_\mu(x) = \hat{p}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu(x), \quad \hat{p}_\mu = i\hbar \partial_\mu, \quad A^\mu = (A^0, \mathbf{A}), \quad \mathbf{A} = (A^i, i = 1, 2, 3), \quad (5.1)$$

Aqui e no que segue o subíndice M deve ser entendido que estamos utilizando a simples modificação de Moyal.

Então a equação de Dirac θ -modificada com um campo eletromagnético externo para uma partícula de carga e (para um elétron $e = -|e|$) e massa m é identificada com a equação de Euler-Lagrange $\delta S_M^\theta / \delta \bar{\Psi} = 0$,

$$\left(\gamma^\mu \hat{P}_\mu^\theta - mc \right) \Psi(x) = 0,$$

$$\hat{P}_\mu^\theta = \hat{p}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \left(x^\mu + \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\nu \right), \quad (5.2)$$

onde $\gamma^\mu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$ são as matrizes gama de Dirac, e.g. [89, 90].

Como já mencionado acima, nosso objetivo consiste em derivar uma descrição quântica de uma partícula de spin 1/2 no espaço NC. Uma vez que no caso não relativístico, tempo e espaço são considerados separadamente, é consistente (e natural) tratar efeitos provenientes somente da não comutatividade do espaço, o que implica $\theta^{0\mu} = 0$. Tal escolha é também suportada pelo fato que na mecânica clássica e quântica no espaço NC existem motivações físicas para considerar somente não comutatividade do espaço. Em particular, os parâmetros θ^{ij} admitem muitas analogias próximas com um campo magnético constante, tanto do ponto de vista algébrico quanto dinâmico [17, 92].

Podemos reescrever (5.2) na forma Hamiltoniana (veja, p.ex. [19, 89, 90]),

$$i\hbar \partial_t \Psi(x) = \hat{\mathbb{H}}_D(\hat{q}, \hat{\mathbf{p}}) \Psi(x), \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$\hat{\mathbb{H}}_D(\hat{q}, \hat{\mathbf{p}}) = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{P}}(\hat{q}) + mc^2 \gamma^0 + eA^0(\hat{q}), \quad (5.3)$$

onde $\Psi(x)$, é um espinor, $\hat{\mathbf{P}}(\hat{q}) = \hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\hat{q})$, $\hat{q} = \hat{q}^\mu = (x^0, \hat{q}^i)$,

$$\hat{q}^i = x^i - \frac{1}{2\hbar} \theta^{ij} \hat{p}^j, \quad \hat{p}^j = -i\hbar \partial_j,$$

$$[\hat{q}^i, \hat{q}^j] = i\theta^{ij}, \quad [\hat{q}^i, \hat{p}^j] = i\hbar \delta^{ij}, \quad [\hat{p}^i, \hat{p}^j] = 0. \quad (5.4)$$

¹Letras em negrito representam vetores tridimensionais, por exemplo, $\mathbf{a} = (a^i = -a_i, i = 1, 2, 3)$.

Em primeira ordem em θ , a equação (5.2) reduz-se à

$$\left\{ \gamma^\mu \left(\hat{P}_\mu(x) - \frac{ie}{2c} \partial_\alpha A_\mu(x) \theta^{\alpha\beta} \partial_\beta \right) - mc \right\} \Psi(x) = 0, \quad (5.5)$$

que na forma Hamiltoniana admite a seguinte torna-se,

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t \Psi(x) &= \hat{\mathbb{H}}_M^\theta \Psi(x), \quad \hat{\mathbb{H}}_M^\theta = \hat{\mathbb{H}}_D + \Delta \hat{\mathbb{H}}_M^\theta, \\ \hat{\mathbb{H}}_D &= c\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{P}} + eA_0 + mc^2 \gamma^0, \\ \Delta \hat{\mathbb{H}}_M^\theta &= \frac{e}{2\hbar} [\boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} - A_0) \times \hat{\mathbf{p}}] \cdot \boldsymbol{\theta}, \\ \hat{\mathbf{P}} &= \hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad \boldsymbol{\theta} = \left(\theta^i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \theta^{jk} \right), \quad \boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Consideraremos o limite não relativístico da última equação seguindo o esquema padrão efetuando transformações *à la* Foldy-Wouthuysen, veja p.ex. [105, 106]. A Hamiltoniana $\hat{\mathbb{H}}_M^\theta$ (5.6) é escrita em termos de um operador ímpar² $\mathcal{O}_M = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{P}} + (e/2\hbar) [\boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}) \times \hat{\mathbf{p}}] \cdot \boldsymbol{\theta}$ e um operador par $\mathcal{E}_M = mc^2 \gamma^0 + eA_0 - (e/2\hbar) [\boldsymbol{\nabla} A_0 \times \hat{\mathbf{p}}] \cdot \boldsymbol{\theta}$. Portanto realizamos primeiramente a transformação canônica $\Psi^{(1)} = e^{i\hat{S}_M^{(1)}} \Psi$, com $\hat{S}_M^{(1)} = (2imc^2)^{-1} \gamma^0 \mathcal{O}_M$, com o intuito de eliminar operadores ímpares de $\hat{\mathbb{H}}_M^\theta$ (em derivando a aproximação não relativística negligenciamos termos de ordem $O((mc^2)^{-3})$ independentes θ),

$$i\hbar \partial_t \Psi^{(1)} = \hat{\mathbb{H}}_M^{\theta(1)} \Psi^{(1)}, \quad \hat{\mathbb{H}}_M^{\theta(1)} = e^{i\hat{S}_M^{(1)}} \left(\hat{\mathbb{H}}_M^\theta - i\hbar \partial_t \right) e^{-i\hat{S}_M^{(1)}}. \quad (5.7)$$

Para $\hat{\mathbb{H}}_M^{\theta(1)}$ obtemos,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{H}}_M^{\theta(1)} &= \mathcal{E}_M + \mathcal{E}_M^{(1)} + \mathcal{O}_M^{(1)} + \mathcal{O}_M^{\prime(1)}, \quad \mathcal{E}_M^{(1)} = \frac{1}{2mc^2} \gamma^0 \mathcal{O}_M^2 \\ &\quad - \frac{1}{8m^2 c^4} \left[\mathcal{O}_M, \left(e \left[\mathcal{O}_M, \left(A_0 - \frac{1}{2\hbar} [\boldsymbol{\nabla} A_0 \times \hat{\mathbf{p}}] \cdot \boldsymbol{\theta} \right) \right] + i\hbar \partial_t \mathcal{O}_M \right) \right], \\ \mathcal{O}_M^{(1)} &= \frac{\gamma^0}{2mc^2} \left(e [\mathcal{O}_M, A_0] + i\hbar \partial_t \mathcal{O}_M - \frac{e}{2\hbar} \varepsilon_{ijk} [\mathcal{O}_M, (\partial_i A_0) \hat{p}^j] \theta^k \right), \\ \mathcal{O}_M^{\prime(1)} &= -\frac{1}{3m^2 c^4} \mathcal{O}_M^3. \end{aligned} \quad (5.8)$$

A primeira transformação canônica não elimina operadores ímpares de ordem $(mc^2)^{-1}$, e é por isso que realizamos uma segunda transformação canônica com o gerador $\hat{S}_M^{(2)} = (2imc^2)^{-1} \gamma^0 \mathcal{O}_M^{(1)}$. Obtemos portanto a equação de Shrödinger com a Hamiltoniana

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{H}}_M^{\theta(2)} &= e^{i\hat{S}_M^{(2)}} \left(\hat{\mathbb{H}}_M^{\theta(1)} - i\hbar \partial_t \right) e^{-i\hat{S}_M^{(2)}} = \mathcal{E}_M + \mathcal{E}_M^{(1)} + \mathcal{O}_M^{(2)}, \\ \mathcal{O}_M^{(2)} &= \frac{e}{2mc^2} \gamma^0 \left(\left[\mathcal{O}_M^{(1)}, A_0 \right] - \frac{1}{2\hbar} \varepsilon_{ijk} \left[\mathcal{O}_M^{(1)}, (\partial_i A_0) \hat{p}^j \right] \theta^k \right) + \mathcal{O}_M^{\prime(1)} - \hbar \partial_t \hat{S}_M^{(2)}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

O operador $\hat{\mathbb{H}}_M^{\theta(2)}$ ainda contém o operador ímpar $\mathcal{O}_M^{(2)}$ de ordem $(mc^2)^{-2}$, o qual pode ser eliminado por uma terceira transformação canônica, através do gerador $\hat{S}_M^{(3)} = (2imc^2)^{-1} \gamma^0 \mathcal{O}_M^{(2)}$. Finalmente

²Um operador que possui somente elementos matriciais conectando as componentes superiores e inferiores do espinor de Dirac é classificado como ímpar \mathcal{O} e um operador que não possui tais elementos matriciais é classificado como par \mathcal{E} .

obtemos a equação de Schrödinger com a Hamiltoniana $\hat{\mathbb{H}}_M^{\theta(3)}$ e a função de onda $\Psi^{(3)}$. A nova Hamiltoniana $\hat{\mathbb{H}}_M^{\theta(3)}$ é um operador par, e possui a seguinte forma,

$$\hat{\mathbb{H}}_M^{\theta(3)} = e^{i\hat{S}_M^{(3)}} \left(\hat{\mathbb{H}}_M^{\theta(2)} - i\hbar\partial_t \right) e^{-i\hat{S}_M^{(3)}} = \mathcal{E}_M + \mathcal{E}_M^{(1)} = \text{diag} \left(mc^2 + \hat{H}_M^\theta, \hat{h}^\theta \right), \quad (5.10)$$

e

$$\Psi^{(3)} = e^{i\hat{S}_M^{(3)}} e^{i\hat{S}_M^{(2)}} e^{i\hat{S}_M^{(1)}} \Psi = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \chi(x) \sim (mc^2)^{-1} \psi(x) \end{pmatrix}.$$

Na aproximação em consideração, equações para os biepinores³ superiores “superiores” ψ e biepinores “inferiores” χ são independentes. Interpretamos ψ como a função de onda da partícula de spin 1/2 não relativística com a Hamiltoniana \hat{H}_M^θ . Retendo somente termos de ordem $(mc^2)^{-1}$ em \hat{H}_M^θ (5.10) nós obtemos a seguinte equação para ψ :

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\psi(x) &= \hat{H}_M^\theta\psi(x), \\ \hat{H}_M^\theta &= \frac{1}{2mc^2}\mathcal{O}_M^2 + eA_0 - \frac{e}{2\hbar}[\nabla A_0 \times \hat{\mathbf{p}}] \cdot \boldsymbol{\theta}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

onde

$$\mathcal{O}_M = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{P}} + \frac{e}{2\hbar}[\nabla(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}) \times \hat{\mathbf{p}}] \cdot \boldsymbol{\theta}.$$

A Hamiltoniana completa \hat{H}_M^θ (com todos os termos até a ordem $(mc^2)^{-2}$) está apresentada no apêndice A.

Considerando \mathbf{A} como o potencial vetor que corresponde a um campo magnético externo homogêneo $\mathbf{B} = (B^i(t))$ (no calibre simétrico)

$$A^i(x) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}B^j(t)x^k, \quad (5.12)$$

com ε_{ijk} sendo o símbolo de Levi-Civita em três dimensões (normalização $\varepsilon_{123} = 1$), obtemos a seguinte Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{M-\text{Nonrel}}^\theta &= \frac{1}{2m}\hat{\mathbf{P}}^2 + eA_0 - \frac{e}{2\hbar}([\nabla A_0 \times \hat{\mathbf{p}}] \cdot \boldsymbol{\theta}) \\ &+ \frac{e}{4m\hbar c} \left(\hat{\mathbf{P}} \cdot [\mathbf{B} \times [\hat{\mathbf{p}} \times \boldsymbol{\theta}]] \right) - \hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B} \left(1 + \frac{e}{4\hbar c} (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\theta}) \right), \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde o momento magnético $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ da partícula é relacionado com o operador de spin $\hat{\mathbf{s}}$ como,

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{|e|\hbar}{mc}\hat{\mathbf{s}} = \mu_B\boldsymbol{\sigma}, \quad \mu_B = \frac{|e|\hbar}{2mc}, \quad \hat{\mathbf{s}} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma^i).$$

A equação (5.13) (bem como eq. (5.11)) não é invariante de por transformações de calibre $U(1)$, visto que a própria equação de Dirac (5.6) não é invariante de calibre. Devido a este fato nós não interpretamos o fator em frente do operador $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ como um campo magnético físico, justamente pela própria Hamiltoniana não ser invariante de calibre. Por exemplo, escolhendo o calibre de Landau $A^1 = -By$, $A^2 = 0$, este fator é reduzido para \mathbf{B} e não depende de θ .

³Por biepinor referimo-nos a espinores de Pauli.

5.2.2 Ação pseudoclássica θ -modificada para a partícula não relativística de spin 1/2

Considerando o limite não relativístico da equação (5.3), obtemos

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\psi(x) &= \hat{H}_{\text{M-Nonrel}}^\theta\psi(x), \\ \hat{H}_{\text{M-Nonrel}}^\theta &= \frac{1}{2m}\hat{\mathbf{P}}^2(\hat{q}) + eA^0(\hat{q}) - \hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B}^\theta, \\ \hat{\mathcal{B}}^i &= -\frac{\varepsilon_{ijk}}{2}F_{jk}(\hat{q}) = -\frac{\varepsilon_{ijk}}{2}\left\{F_{jk}(x) + \frac{ie}{\hbar c}[A_j(\hat{q}), A_k(\hat{q})]\right\}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) &= \frac{ic}{\hbar e} [\hat{P}_\mu(x), \hat{P}_\nu(x)] \implies \\ F_{\mu\nu}(\hat{q}) &= \partial_\mu A_\nu(\hat{q}) - \partial_\nu A_\mu(\hat{q}) + \frac{ie}{\hbar c} [A_\mu(\hat{q}), A_\nu(\hat{q})]. \end{aligned}$$

Se o campo magnético externo é homogêneo, com potenciais (5.12), segue de (5.14) que \mathbf{B}^θ não depende das coordenadas espaciais, é linear em θ e possui a seguinte forma⁴:

$$\mathbf{B}^\theta = \left[1 + \frac{e}{4\hbar c}(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\theta})\right] \mathbf{B}. \quad (5.15)$$

No caso em consideração, pode-se contruir uma ação pseudoclássica θ -modificada S^θ (*à la* Berezin-Marinov [107, 108]) para a partícula não relativística de spin 1/2. Tal ação possui a seguinte forma,

$$\begin{aligned} S^\theta &= \int dt L^\theta, \quad L^\theta = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \right)^2 - eA^0(\mathbf{q}) \\ &+ i\boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} + \frac{ie}{mc} (\mathbf{B}^\theta \cdot [\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\xi}]) - \frac{1}{2\hbar} \dot{p}^i \theta^{ij} p^j, \end{aligned} \quad (5.16)$$

onde as variáveis \mathbf{q} e \mathbf{p} descrevem o movimento espacial da partícula e as variáveis de Grassmann $\boldsymbol{\xi} = (\xi^i, i = 1, 2, 3)$, $[\xi^i, \xi^j]_+ = 0$, descrevem seus graus de liberdade de spin. Um procedimento de quantização apresentado abaixo resulta na mecânica quântica não relativística de uma partícula de spin 1/2 com a Hamiltoniana $\hat{H}_{\text{M-Nonrel}}^\theta$, definida pela equação (5.14) e relações de comutação (5.4).

Tratando (5.16) como uma ação de primeira ordem nas variáveis \mathbf{q} , \mathbf{p} e $\boldsymbol{\xi}$, introduzimos os momentos canônicos conjugados:

$$\pi_{qi} = \frac{\partial L^\theta}{\partial \dot{q}^i} = p^i, \quad \pi_{pi} = \frac{\partial L^\theta}{\partial \dot{p}^i} = -\frac{1}{2\hbar} \theta^{ij} p^j, \quad \pi_{\xi i} = \frac{\partial L^\theta}{\partial \dot{\xi}^i} = i\xi^i. \quad (5.17)$$

As equações (5.17) implicam nos vínculos primários $\Phi_a^{(1)} = (\Phi_{qi}^{(1)}, \Phi_{pi}^{(1)}, \Phi_{\xi i}^{(1)})$,

$$\Phi_{qi}^{(1)} = \pi_{qi} - p^i, \quad \Phi_{pi}^{(1)} = \pi_{pi} + \frac{1}{2\hbar} \theta^{ij} p^j, \quad \Phi_{\xi i}^{(1)} = \pi_{\xi i} - i\xi^i, \quad (5.18)$$

que são de segunda classe. Construindo a Hamiltoniana primária $H^{(1)} = H^\theta + \lambda^a \Phi_a^{(1)}$, de acordo com o procedimento canônico [109], obtemos,

$$H^\theta = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \right)^2 + eA^0(\mathbf{q}) - \frac{ie}{mc} (\mathbf{B}^\theta \cdot [\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\xi}]).$$

⁴Deve ser notado que em primeira ordem em θ , a Hamiltoniana (5.14) é reduzida a (5.13).

Neste caso em particular todos os multiplicadores de Lagrange λ^a podem ser determinados pelas condições de consistência [109],

$$\dot{\Phi}_a^{(1)} = 0 \rightarrow \lambda^a = \left\{ \Phi^{(1)}, \Phi^{(1)} \right\}_{ab}^{-1} \left\{ \Phi_b^{(1)}, H \right\}.$$

Realizando uma transformação canônica para as novas variáveis (representadas por uma linha),

$$q^{i'} = q^i, \quad p^{i'} = p^i, \quad \pi'_{qi} = \pi_{qi} - p^i, \quad \pi'_{pi} = \pi_{pi} - q^i, \quad (5.19)$$

obtemos que os vínculos nestas novas variáveis têm a seguinte forma:

$$\Phi_{qi}^{(1)} = \pi'_{qi} = 0, \quad \Phi_{pi}^{(1)} = q^{i'} + \pi'_{pi} + \frac{1}{2\hbar} \theta^{ij} p^{j'} = 0. \quad (5.20)$$

Estes vínculos possuem a forma especial [109], de modo que as variáveis $(q^{i'}, \pi'_{qi})$ podem ser eliminadas e para o resto das variáveis $(p^{i'}, \pi'_{pi})$, de modo que obtemos a Hamiltoniana total,

$$\begin{aligned} H^{(1)'} &= H_*^\theta + \lambda_\xi^i \Phi_{\xi i}^{(1)}, \quad \lambda_\xi^i = - \left\{ \Phi_\xi^{(1)}, \Phi_\xi^{(1)} \right\}_{ij}^{-1} \left\{ \Phi_{\xi j}^{(1)}, H \right\}, \\ H_*^\theta &= H^\theta \left(-\pi'_{pi} - \frac{1}{2\hbar} (\theta^{ij} p^{j'}), p'; \xi \right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Após uma transformação canônica adicional $p^i = p^{i'}$, $\pi'_{pi} = -x^i$, i.e., $q^i = x^i - \frac{1}{2\hbar} \theta^{ik} p^k$, a Hamiltoniana H_*^θ admite a forma $H^\theta = H^\theta(q, p; \xi)$.

Eliminando tais variáveis simplificamos os parênteses de Dirac. Os únicos parênteses de Dirac não nulos entre as variáveis remanescentes são:

$$\begin{aligned} \{x^i, p^j\}_{D(\Phi)} &= \delta^{ij}, \quad \{\xi^i, \xi^j\}_{D(\Phi)} = -\frac{i}{2} \delta^{ij}, \\ \{q^i, q^j\}_{D(\Phi)} &= \frac{1}{\hbar} \theta^{ij}, \quad \{q^i, p^j\}_{D(\Phi)} = \delta^{ij}. \end{aligned}$$

Procedendo para a quantização assinamos operadores as variáveis clássicas (q, p, ξ) , tal que os únicos comutadores não nulos são

$$\begin{aligned} [\hat{q}^i, \hat{q}^j] &= i\hbar \{q^i, q^j\}_{D(\Phi)} \Big|_{\eta=\hat{\eta}} = i\theta^{ij}, \\ [\hat{x}^i, \hat{p}^j] &= [\hat{q}^i, \hat{p}^j] = i\hbar \{q^i, p^j\}_{D(\Phi)} \Big|_{\eta=\hat{\eta}} = i\hbar \delta^{ij}, \\ [\hat{\xi}^i, \hat{\xi}^j]_+ &= i\hbar \{\xi^i, \xi^j\}_{D(\Phi)} \Big|_{\eta=\hat{\eta}} = \frac{\hbar}{2} \delta^{ij}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

A álgebra (5.22) pode ser realizada em um espaço de Hilbert \mathcal{H} , cujos elementos $\psi(x)$ são espinores de duas componentes dependentes da variável x da seguinte forma,

$$\hat{x}^i = x^i, \quad \hat{p}^i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \hat{q}^i = x^i + \frac{i}{2} \theta^{ij} \partial_j, \quad \hat{\xi}^i = \frac{\sqrt{\hbar}}{2} \sigma^i. \quad (5.23)$$

Segue de (5.23) e (5.21) que a correspondente Hamiltoniana quântica coincide com a Hamiltoniana (5.14), e os operadores de spin não relativísticos são $\hat{\mathbf{s}} = -i \left[\hat{\boldsymbol{\xi}} \times \hat{\boldsymbol{\xi}} \right] = (\hbar/2) \boldsymbol{\sigma}$.

5.2.3 Consideração sobre o formalismo do mapa de SW

O intuito da presente subseção consiste em obter uma equação de Dirac θ -modificada por meio do mapa de SW [6], aplicado na ação (5.1). É conhecido que tal ação modificada já é invariante perante as transformações de calibre,

$$\check{U}_{\check{\lambda}}(x) = \left(e^{i\check{\lambda}(x)} \right)_{\star} = 1 + i\check{\lambda}(x) - (1/2)\check{\lambda}(x) \star \check{\lambda}(x) + O(\check{\lambda}^3),$$

onde $\check{\lambda}(x)$ é o parâmetro de calibre não comutativo [6]. Primeiramente consideramos a ação,

$$\begin{aligned} S_{\text{SW}}^{\theta} &= \int d^4x \mathcal{L}_{\text{SW}}^{\theta}, \quad \mathcal{L}_{\text{SW}}^{\theta} = \bar{\Psi}(x) \star (\gamma^{\mu} \check{P}_{\mu} - mc) \star \Psi(x), \\ \check{F}^{\mu\nu}(x) &= \partial^{\mu} \check{A}^{\nu}(x) - \partial^{\nu} \check{A}^{\mu}(x) + \frac{ie}{\hbar c} [\check{A}^{\mu}(x) \star \check{A}^{\nu}(x)], \\ [\check{A}^{\mu}(x) \star \check{A}^{\nu}(x)] &= \check{A}^{\mu}(x) \star \check{A}^{\nu}(x) - \check{A}^{\nu}(x) \star \check{A}^{\mu}(x), \\ [\check{P}_{\mu} \star \check{P}_{\nu}] &= -\frac{i\hbar c}{c} \check{F}^{\mu\nu}(x), \end{aligned} \quad (5.24)$$

onde os campos de calibre NC $\check{A}_{\mu}(x)$ e $\check{\Psi}(x)$ são expressos via os campos de calibre ordinários $A_{\mu}(x)$ e $\Psi(x)$ (em primeira ordem em θ) como:

$$\begin{aligned} \check{A}_{\mu}(x) &= A_{\mu}(x) + \frac{e}{2\hbar c} \theta^{\alpha\beta} A_{\alpha}(x) (\partial_{\beta} A_{\mu}(x) + F_{\beta\mu}(x)) + O(\theta^2), \\ \check{\Psi}(x) &= \Psi(x) + \frac{e}{2\hbar c} \theta^{\alpha\beta} A_{\alpha}(x) \partial_{\beta} \Psi(x) + O(\theta^2). \end{aligned}$$

veja⁵ [6, 28, 49, 50, 51, 52]. Então consideramos o produto estrela em primeira ordem em θ e finalmente obtemos a ação para o campo espinorial (p.ex. [49, 50]),

$$\mathcal{L}_{\text{SW}}^{\theta} = \bar{\Psi}(x) \left\{ \gamma^{\mu} \left[\left(1 + \frac{e}{4\hbar c} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) \hat{P}_{\mu} - \frac{e}{2\hbar c} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\mu} \hat{P}_{\beta} \right] - mc \left(1 + \frac{e}{4\hbar c} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) \right\} \Psi(x). \quad (5.25)$$

Nós identificamos as equações de Euler-Lagrange $\delta S_{\text{SW}}^{\theta} / \delta \bar{\Psi}(x) = 0$ com a equação de Dirac θ -modificada do mapa de SW. No caso particular de interesse, onde consideramos somente a não-comutatividade das coordenadas $\theta^{0\mu} = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t \Psi &= \left(\hat{\mathbb{H}}_{\text{D}} + \Delta \hat{\mathbb{H}}_{\text{SW}}^{\theta} \right) \Psi, \\ \Delta \hat{\mathbb{H}}_{\text{SW}}^{\theta} &= \frac{e}{2\hbar} \left\{ \left([\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{P}}] \cdot \boldsymbol{\theta} \right) + \left([\boldsymbol{\theta} \times [\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{B}]] \cdot \hat{\mathbf{P}} \right) \right\}, \\ \mathbf{E} &= (E^i = F^{i0}), \quad \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Salientamos que esta equação já é invariante por transformações de calibre ordinárias $U(1)$.

Seguindo a mesma maneira como foi feito na subseção anterior, derivamos o limite não relativístico da equação acima. Como resultado, obtemos a seguinte equação de Schrödinger para o espinor $\psi(x)$:

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t \psi(x) &= \hat{H}_{\text{SW}}^{\theta} \psi(x), \\ \hat{H}_{\text{SW}}^{\theta} &= \frac{1}{2mc^2} \mathcal{O}_{\text{SW}}^2 + eA_0 + \frac{e}{2\hbar} \left([\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{P}}] \cdot \boldsymbol{\theta} \right), \\ \mathcal{O}_{\text{SW}} &= c \left\{ \boldsymbol{\alpha} + \frac{e}{2\hbar c} [\boldsymbol{\theta} \times [\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{B}]] \right\} \cdot \hat{\mathbf{P}}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

⁵Aqui os campos de calibre NC sob a consideração de SW são rotulados por um sinal de circunflexo invertido acima.

Os operadores completos $\mathcal{O}_{\text{SW}}^2$ e $\hat{H}_{\text{SW}}^\theta$ (com todos os termos até a ordem $(mc^2)^{-2}$) são apresentados no apêndice.

Se nos restringimos por um campo magnético externo homogêneo $\mathbf{B} = (B^i(t))$, a Hamiltoniana $\hat{H}_{\text{SW}}^\theta$ é reduzida a:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{SW-Pauli}}^\theta &= \frac{1}{2m} \hat{\mathbf{P}}^2 + eA_0 + \frac{e}{2\hbar} \left([\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{P}}] \cdot \boldsymbol{\theta} \right) \\ &+ \frac{e}{2m\hbar c} \left(\hat{\mathbf{P}} \cdot [\mathbf{B} \times [\hat{\mathbf{P}} \times \boldsymbol{\theta}]] \right) - \hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B}_{\text{SW}}^\theta, \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde

$$\mathbf{B}_{\text{SW}}^\theta = \left[1 + \frac{e}{\hbar c} (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\theta}) \right] \mathbf{B}. \quad (5.29)$$

Em contraste com a equação não relativística com a Hamiltoniana (5.13), a equação (5.27), do nosso ponto de vista, é uma boa candidata para ser considerada como a equação de Pauli θ -modificada, visto que $\hat{H}_{\text{SW-Pauli}}^\theta$ é invariante de calibre. Pela mesma razão, identificamos a quantidade $\mathbf{B}_{\text{SW}}^\theta$ como o campo magnético (θ -modificado).

Deve ser mencionado que existe uma maneira original em se obter uma equação de onda não relativística para a partícula de spin 1/2 por meio de considerações teóricas no contexto de teorias de grupos, apresentada em [110]. Seria interessante verificar se considerações similares (talvez adequadamente modificadas devido aos problemas bem conhecidos com simetrias clássicas espaço-temporais no espaço não comutativo, p.ex. com a invariância de Lorentz no caso relativístico, veja p.ex. [111]) se aplicam no caso não comutativo.

5.3 Dois spins no espaço não comutativo

É conhecido que uma redução da equação de Pauli para o caso $(0+1)$ -dimensional permite obter a equação de spin (na ausência do potencial escalar, $A_0 = 0$), que descreve o movimento de um spin espacialmente “congelado” em um campo magnético, veja [112]. A mesma redução da equação (5.28) conduz a equação de spin no espaço NC, ou a equação de spin θ -modificada:

$$i\hbar\partial_t\psi = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B} \left(1 + \frac{e}{\hbar c} (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\theta}) \right) \psi. \quad (5.30)$$

No espaço comutativo, a equação de spin para dois spins interagentes em um campo magnético homogêneo pode ser escrita como [113],

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\Psi(t) &= \hat{H}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, J) \Psi(t), \quad \hat{H}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, J) = \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B}_2 + \frac{J}{2} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\rho}, \\ \boldsymbol{\Sigma} &= I \otimes \boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma} \otimes I, \quad (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \otimes \sigma_i, \end{aligned} \quad (5.31)$$

onde I é a matrix identidade de dimensão 2×2 . O primeiro (segundo) termo em \hat{H} representa a interação de Pauli do primeiro (segundo) spin com o campo magnético $\mathbf{B}_1(t)$ ($\mathbf{B}_2(t)$) e o último termo uma interação esféricamente simétrica $J = J(t)$ entre os dois spins (interação de Heisenberg). Na expressão acima estamos absorvendo o momento magnético da partícula no campo magnético ($-\mu_B \mathbf{B} \equiv \mathbf{B}$). Desta forma um campo efetivo diferente em cada spin pode ser obtido utilizando partículas com momentos magnéticos distintos.

Devido ao resultado (5.28), a interação de Pauli para um spin no espaço não comutativo em um campo magnético homogêneo pode ser obtida pela substituição $\mathbf{B}_a(t) \rightarrow \mathbf{B}_a^\theta(t)$, $a = 1, 2$, veja eq. (5.29). Portanto, se os campos \mathbf{B}_a são paralelos (na direção z) segue que no caso não comutativo a Hamiltoniana (5.31) torna-se,

$$\begin{aligned}\hat{H}^\theta &= \frac{1}{2} [(\Sigma_3 + \rho_3) B_+^\theta - (\Sigma_3 - \rho_3) B_-^\theta - J^\theta] + A J^\theta, \\ B_\pm^\theta(t) &= B_1^\theta(t) \pm B_2^\theta(t), \quad A = \frac{1}{2} [1 + (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\rho})],\end{aligned}$$

onde estamos supondo que a nova interação no espaço não comutativo J^θ permaneça esfericamente simétrica. Utilizando técnicas descritas em [114] é possível mostrar que o operador evolução para a equação de Schrödinger com a Hamiltoniana acima possui a seguinte forma,

$$U(t) = \begin{pmatrix} f_+(t) & 0 & 0 \\ 0 & \hat{u}(t) & 0 \\ 0 & 0 & f_-(t) \end{pmatrix}, \quad f_\pm(t) = \exp \left[-i \int_0^t \left(\frac{J^\theta}{2} \pm B_+ \right) d\tau \right],$$

onde a matriz \hat{u} , de dimensão 2×2 , é o operador evolução para o seguinte problema de dois níveis [112],

$$i\partial_t \psi = [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{K}) - J^\theta/2] \psi, \quad \mathbf{K}(t) = (J^\theta(t), 0, B_-^\theta(t)).$$

Através da forma explícita deste operador, podemos calcular a probabilidade de transição $P(t)$ entre quaisquer estados. Um caso especial interessante é a transição entre dois estados ortogonais do tipo EPR $|\Psi_\pm\rangle$,

$$\begin{aligned}|\Psi_\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|++\rangle \pm |--\rangle], \quad |\pm\pm\rangle = |\pm\rangle \otimes |\pm\rangle, \\ |+\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

uma vez que, neste caso, esta probabilidade não depende de \hat{u} nem da função desconhecida J^θ ,

$$P(t) = |\langle \Psi_+ | U(t) | \Psi_- \rangle|^2 = \left| \sin \left[2 \int_0^t B_+^\theta d\tau \right] \right|^2.$$

Em particular, para dois campos magnéticos defasados

$$B_1 = B \cos(\omega t), \quad B_2 = B \cos(\omega t + \phi), \quad \phi = \pi(1 + 2n), \quad n \in \mathbb{N},$$

onde B e ω são constantes, nós temos uma transição estritamente dependente do parâmetro θ , que é zero a menos que θ seja não nulo⁶,

$$P(t) = \left| \sin \left[\theta \frac{2e\mu_B B^2}{\hbar^2 c} \left(t + \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right) \right] \right|^2. \quad (5.32)$$

Este resultado pode ser utilizado para estabelecer um valor máximo para o parâmetro θ . Para tal estimativa, supomos que o campo magnético é suficientemente forte em condições realísticas no

⁶Aqui nós restauramos o momento magnético μ_B .

laboratório, digamos $B = 10\text{T}$, o tempo de transição seja $t = 1\text{s}$, e a resolução do experimento nos permite medir a probabilidade com uma precisão de $0,05\%$, i.e., $P(t) < 0.005$. Sob estas suposições, obtemos o seguinte valor para θ :

$$P(t) < 0.005 \rightarrow |\theta| \lesssim 2.65 \times 10^{-30} \text{ m}^2 \rightarrow l = \sqrt{|\theta|} \lesssim 1.6 \text{ Fm}, \quad (5.33)$$

e a escala de energia da não comutatividade é

$$\Lambda = \frac{\hbar c}{\sqrt{|\theta|}} \gtrsim 0.1 \text{ GeV},$$

Este resultado está bem próximo com outra estimativa (4.30) e (4.31), que pode ser obtida através do “splitting” de energia do átomo de Hidrogênio devido a não comutatividade do espaço [19].

5.4 Sumário

Através das duas possíveis ações para o campo espinorial θ -modificadas, a primeira obtida pela simples modificação de Moyal e a segunda pelo mapa de SW, derivamos e discutimos duas equações de Dirac θ -modificadas. Ambas ações já são conhecidas (veja referências acima); entretanto, a equação de Dirac θ -modificada pelo mapa de SW foi apresentada pela primeira vez.

Considerando o limite não relativístico de ambas equações de Dirac, derivamos duas equações de Schrödinger para partículas não relativísticas de spin $1/2$ no espaço não comutativo. Uma destas equações é invariante sob transformações de calibre $U(1)$ do campo eletromagnético externo e é interpretada por nós como a equação de Pauli θ -modificada. Tal equação nos permite extrair uma interação não relativística θ -modificada do campo magnético com o momento magnético da partícula. Usando este resultado, construímos uma equação de spin θ -modificada que descreve um sistema de dois níveis θ -modificados e então um modelo de Heisenberg θ -modificado para dois spins acoplados em interação com um campo magnético externo.

Um modelo pseudoclássico para uma partícula não relativística de spin $1/2$ no espaço não comutativo é construído. Sua quantização conduz à equação de onda θ -modificada para tal partícula.

No contexto do modelo de Heisenberg, calculamos a amplitude de transição entre dois estados ortogonais do tipo EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) para um par de spins submetidos a um campo magnético e mostramos que uma de tais transições, que eram proibidas no espaço não comutativo, são possíveis devido a não comutatividade do espaço. Este resultado permitiu estimar um valor máximo para o parâmetro NC θ .

Capítulo 6

Conclusões

Nesta tese do doutorado apresentamos resultados atingidos e estudos concluídos sobre efeitos clássicos e quânticos em teorias NC. Abordamos alguns sistemas físicos bem estudados em física teórica, como a teoria de Maxwell na presença de fontes externas, equação de Pauli e equação de Dirac em campos externos e estudamos o espectro relativístico do átomo de hidrogênio. No capítulo 2 estudamos a teoria de calibre $U(1)_*$ na presença de fontes externas onde formulamos, em primeira ordem no parâmetro da NC θ , equações clássicas para os campos covariantes na presença de fontes. Encontramos soluções no vácuo e em um campo magnético externo para a situação em que a 4-corrente é uma carga estática de tamanho finito a restrita pelo comprimento elementar. A carga estática é encontrada ser um dipolo magnético, com seu momento magnético sendo inversamente proporcional ao seu tamanho a . O campo magnético externo modifica o campo de Coulomb à longas distâncias e alguns fatores de forma eletromagnéticos. Também analisamos a ambiguidade no mapa de Seiberg-Witten e mostramos que, no mínimo até a ordem estudada aqui, isto é equivalente a ambiguidade de se adicionar uma solução homogênea à condição de conservação da corrente.

No capítulo 3 limites superiores para o comprimento fundamental são discutidos, os quais seguem do fato que um momento magnético é inerente a uma partícula carregada na eletrodinâmica NC. Encontramos que o resultado mais pronunciado para o comprimento fundamental é ainda maior que a estimativa do tamanho do elétron e múon, alcançado pela abordagem de Brodsky-Drell and Dehlmet para a composição do lépton.

No capítulo 4 investigamos os efeitos da não comutatividade das coordenadas no átomo de hidrogênio relativístico. A estrutura dos níveis de energia, em comparação com a estrutura bem conhecida obtida pela mecânica quântica não relativística, é modificada, de modo que os níveis degenerados $2S - 2P$ separam-se em três novos níveis. Explicitamente, a não comutatividade quebra totalmente a degenerescência dos níveis $2P_{1/2}$ e $2P_{3/2}$, resultando em novos canais de transição permitidos. Adicionalmente comparando nossos resultados com valores recentes para o “Lamb-shift” [37], determinamos que um limite superior para o parâmetro NC θ .

No capítulo 5 construímos uma equação de onda não relativística para partículas de spin $1/2$ através do limite não relativístico da equação de Dirac θ -modificada. Foi apresentado um modelo pseudoclássico (à-la Berezin-Marinov) cuja quantização coincide com as equações de onda não relativísticas obtidas. Extraíu-se a interação entre um spin não-relativístico e o campo magnético de tal equação de Pauli e construiu-se uma θ -modificação do modelo de Heisenberg para dois spins acoplados no espaço não comutativo. Em tal modelo foi calculado a amplitude de probabilidade de transição entre dois estados ortogonais do tipo EPR submetidos em um campo magnético oscilatório e mostramos que, algumas de tais transições, que são proibidas no espaço comutativo, são possíveis devido a não comutatividade.

Referências Bibliográficas

- [1] W. Heisenberg “*Letter to R. Peierls (1930), Wolfgang Pauli, Scientific Correspondence, Vol II*”, Springer-Verlag (1993); W. Pauli “*Letter to R. J. Oppenheimer (1946), Wolfgang Pauli, Scientific Correspondence, Vol III*”, Springer-Verlag (1993).
- [2] R. Peierls, Zeit. Phys. **80**, 763 (1933).
- [3] H. S. Snyder, Phys. Rev. **71**, 38 (1947); Phys. Rev. **72**, 68 (1947).
- [4] A. Connes and M. Rieffel, Contemp. Math. Oper. Algebra. Math. Phys. **62**, 237 (1987).
- [5] S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts, Phys. Lett. B **331**, 39 (1994); Commun. Math. Phys. **172**, 187 (1995).
- [6] N. Seiberg and E. Witten, JHEP **9909**, 032 (1999).
- [7] V. Schomerus, JHEP **9906**, 030 (1999).
- [8] F. Ardalan, H. Arfaei and M. M. Sheik-Jabbari, hep-th/9803067.
- [9] F. Ardalan, H. Arfaei and M. M. Sheik-Jabbari, JHEP **9902**, 016 (1999).
- [10] M. Gomes, Braz. J. Phys. **32**, 838 (2002).
- [11] N. Seiberg, L. Susskind and N. Toumbas, JHEP **0006**, 044 (2000).
- [12] J. Gomis and T. Mehen, Nucl. Phys. B **591**, 265 (2000).
- [13] L. Susskind, hep-th/0101029.
- [14] J. Madore, *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and Physical Applications*, 2nd ed., (Cambridge University Press, 2000).
- [15] A. Smailagic and Spallucci, Phys. Rev. D **65**, 107701 (2002); J. Phys. A: Math. Gen. **35**, L363 (2002).
- [16] K. Li, J. Wang and C. Chen, Mod. Phys. Lett. A **20**, 2165 (2005).
- [17] F. Delduc, Q. Duret, F. Gieres and M. Lefrançois, quant-ph/0710.2239 (2007).
- [18] M. Chaichian, M. M. Sheik-Jabbari and A. Tureanu, Phys. Rev. Lett. **86**, 13, 2716 (2001).
- [19] T. C. Adorno, M. C. Baldiotti, M. Chaichian, D. M. Gitman and A. Tureanu, Phys. Lett. B **682**, 235 (2009).

- [20] H. J. Groenewold, *Physica* **12**, 405 (1946); J. E. Moyal, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **45**, (1947) 99.
- [21] L. Mezinsescu, hep-th/0007046.
- [22] O. F. Dayi and A. Jellal, *Phys. Lett. A*, **287**, 349 (2001); *J. Math Phys.* **43**, 4592 (2002).
- [23] B. Chakraborty, S. Gangopadhyay and A. Saha, *Phys. Rev. D* **70**, 107707 (2004).
- [24] H. Weyl, *Zeit. Phys.* **46**, 1 (1927); E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932).
- [25] C. K. Zachos, *Int. J. Mod. Phys. A* **17**, 297 (2002).
- [26] J. Hancock, M. A. Walton and B. Wynder, *Eur. J. Phys.* **25**, 525 (2004).
- [27] A. C. Hirshfeld and P. Henselder, *Am. J. Phys.* **70**, 537 (2002).
- [28] M. R. Douglas and N. Nekrasov, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 977 (2001).
- [29] R. Szabo, *Phys. Rept.* **378**, 207 (2003).
- [30] A. Kokado, T. Okamura and T. Saito, *Phys. Rev. D* **69**, 125007 (2004).
- [31] M. Chaichian, A. Demichev, P. Presnajder, M. M. Sheik-Jabbari and A. Tureanu, *Nucl. Phys. B* **611**, 383 (2001).
- [32] M. Chaichian, A. Demichev, P. Presnajder, M. M. Sheik-Jabbari and A. Tureanu, *Phys. Lett. B* **527**, 149 (2002).
- [33] A. Kokado, T. Okamura and T. Saito, *Prog. Theor. Phys.* **110**, 975 (2003).
- [34] A. Kokado, T. Okamura and T. Saito, hep-th/0307120.
- [35] B. Chakraborty, S. Gangopadhyay, and A. Saha, hep-th/0312292.
- [36] S.M. Carroll, J.A. Harvey, V.A. Kosteleck'y, C.D. Lane and T. Okamoto, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 141601 (2001).
- [37] S. G. Karshenboim, *Phys. Rep.* **422**, 1 (2005).
- [38] R. Fresneda, D. M. Gitman and A. E. Shabad, to be published.
- [39] V.B. Berestetsky, E.M. Lifshits, and Pitayevsky, *Quantum Electrodynamics* (Nauka, Moscow, 1989).
- [40] A. E. Shabad and V. V. Usov, *Phys. Rev. D* **81**, 125008 (2010).
- [41] D. V. Vassilevich, *Twist to close*, *Mod. Phys. Lett. A* **21**, 1279 (2006).
- [42] P. Aschieri, M. Dimitrijevic, F. Meyer, S. Schraml and J. Wess, *Lett. Math. Phys.* **78**, 61 (2006).
- [43] T. C. Adorno, M. C. Baldiotti and D. M. Gitman, *Phys. Rev. D* **82**, 123516 (2010).
- [44] N. Chair and M. M. Sheikh-Jabbari, *Phys. Lett. B* **504**, 141 (2001).

- [45] M. Hayakawa, Phys. Lett. B **478**, 394 (2000).
- [46] I. F. Riad and M. M. Sheikh-Jabbari, JHEP **08**, 045 (2000).
- [47] F. Ardalan and N. Sadooghi, Int. J. Mod. Phys. A **16**, 3151 (2001).
- [48] T. Asakawa and I. Kishimoto, JHEP **11**, 024 (1999).
- [49] A. A. Bichl, J. M. Grimstrup, L. Popp, M. Schweda and R. Wulkenhaar, hep-th/0102103 (2001).
- [50] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane and T. Okamoto, Phys. Rev. Lett. **87**, 141601 (2001).
- [51] Rong-Gen Cai, Phys. Lett. B **517**, 457 (2001).
- [52] Z. Guralnik, R. Jackiw, S.Y. Pi and A.P. Polychronakos, Phys. Lett. B **517**, 450 (2001).
- [53] N. Chatillon and A. Pinzul, Nucl. Phys. B **764**, 95 (2007).
- [54] R. Wulkenhaar, JHEP **03**, 024 (2002).
- [55] I. Fröhwrth, J. M. Grimstrup, Z. Morsli, L. Popp and M. Schweda, hep-th/0202092.
- [56] M. Buric, D. Latas, V. Radovanovic and J. Trampetic, arXiv:1009.4603.
- [57] R. Banerjee, C. Lee and H.S. Yang, Phys.Rev. **D70**, 065015 (2004); R. Banerjee and K. Kumar, Phys.Rev. **D71**, 045013 (2005).
- [58] T. C. Adorno, D. M. Gitman, A. E. Shabad and D. V. Vassilevich, Phys. Rev. D **84**, 085031 (2011); *ibid* **84**, 065003 (2011).
- [59] M. Langvik, T. Salminen and A. Tureanu, arXiv:1101.4540 [hep-th].
- [60] A. Bichl, J. M. Grimstrup, H. Grosse, L. Popp, M. Schweda and R. Wulkenhaar, JHEP **06**, 013 (2001).
- [61] P. Sikivie and N. Weiss, Phys. Rev. D **18**, 3809 (1978).
- [62] P. Rammond, *Field Theory: A Modern Primer*, (Westview, 2nd ed., 2001).
- [63] A. Cabo and A.E. Shabad, Acta Phys. Polonica B, **17**, 591 (1986). A. Cabo and A.E. Shabad, Proc. P.N. Lebedev Phys. Inst. **192**, 151 (Nauka, Moscow, 1988) in Russian.
- [64] A. Smailagic, E. Spallucci, J. Phys. A **A36**, L517-L521 (2003).
- [65] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, (John Wiley and Sons 1999).
- [66] E.V. Gorbar, V.A. Miransky, Phys. Rev. D **70**, 105007 (2004); E.V. Gorbar, M. Hashimoto, V.A. Miransky, Phys. Lett. B **611**, 207 (2005); E.V. Gorbar, S. Homayouni, V.A. Miransky, Phys. Rev. D **72**, 065014 (2005); A. J. Salim, N. Sadooghi, Phys. Rev. D **73**, 065023 (2006).
- [67] A.E. Shabad and V.V. Usov, Phys. Rev. Lett. **98**, 180403 (2007); Phys. Rev. D **77**, 025001 (2008); B. Machet and M.I. Vysotsky, Phys. Rev. D **83**, 025022 (2011).

- [68] A. Stern, *Phys.Rev.Lett.* **100**, 061601 (2008).
- [69] E. Kamke, *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen: I. Gewöhnliche Differentialgleichungen* (Part II) (Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1959).
- [70] C. Duval and P.A. Horvathy, *Phys. Lett. B* **594**, 402(2004); *Theor. Math. Phys.* **144**, 899 (2005).
- [71] Alaa I. Ibrahim et al, *Discovery of Cyclotron Resonance Features in the Soft Gamma Repeater SGR 180620*, *ApJ* **574** L51 (2002).
- [72] N. Sadooghi and S. Jalili, *Phys. Rev. D* **76**, 065013 (2007).
- [73] S.J. Brodsky and S.D. Drell, *Phys.Rev. D* **22**, 2236 (1980).
- [74] H. Dehmelt, *Physica Scripta*, **T22**, 102 (1988).
- [75] D. Hanneke, S. Fogwell, G. Gabrielse, *Phys.Rev.Lett.* **100**, 120801 (2008).
- [76] K. Nakamura *et al.* (Particle Data Group), *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **37**, 075021 (2010) (URL: <http://pdg.lbl.gov>)
- [77] R. Bouchendira, P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, F. Nez, F. Biraben, *Phys.Rev.Lett.* **106**, 080801 (2011); M. Cadoret, E. de Mirandés, P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, F. Nez, F. Biraben, *Comptes Rendus Physique*, **12**, iss. 4, p. 379-386 (2011).
- [78] P.J. Mohr, B.N. Taylor and D.B. Newell, *Rev.Mod.Phys.* **80**, 633 (2008).
- [79] H. A. Bethe and E. E. Salpeter, *Quantum Mechanics of One - and Two-Electron Atoms*, (Springer - Verlag 1957).
- [80] M. E. Rose, *Relativistic Electron Theory*, (John Wiley and Sons 1961).
- [81] A. I. Akhiezer and V. B. Berestetskii, *Quantum Electrodynamics*, (Interscience 1965).
- [82] B. Voronov, D. M. Gitman and I. V. Tyutin, *Teor. Math. Phys* **150** (1), 34 (2007).
- [83] M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, (John Wiley and Sons 1957).
- [84] I.S. Gradshteyn and N.M. Ryzhik, *Tables of integrals, sums, series and products* (70nd ed. Academic Press 2007).
- [85] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics*, (Pergamon Press 1977).
- [86] K. Gottfried and Tung-Mow Yan, *Quantum Mechanics: Fundamentals*, (Springer 2003).
- [87] Y. L. Sokolov and V. P. Yakovlev, *Sov. Phys. JETP* **56** 7 (1982) 7, V. G. Pal'chikov, Yu. L. Sokolov and V. P. Yakovlev, *JETP Lett.* **38** 418 (1983); V. G. Pal'chikov, Yu. L. Sokolov and V. P. Yakovlev, *Metrologia* **21** 99 (1985).
- [88] S. G. Karshenboim, *Phys. Scr.* **57** 213 (1998).
- [89] S. Bourouaine and A. Benslama, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 7389 (2005).

- [90] D. M. Gitman and V. G. Kupriyanov, Eur. Phys. J. C **54**, 325 (2008).
- [91] E. Harikumar, V. Sunil Kumar and A. Khare, Phys. Lett. B **589**, 155 (2004).
- [92] A. Smailagic and E. Spallucci, Phys. Rev. D **65**, 107701 (2002); J. Phys. A: Math. Gen. **35**, L363 (2002).
- [93] F. G. Scholtz, B. Chakraborty, S. Gangopadhyay and A. G. Hazra, Phys. Rev. D **71**, 085005 (2005).
- [94] I. Mocioiu, M. Pospelov and R. Roiban, Phys. Lett. B **489**, 390 (2000).
- [95] J. E. Moyal, Proc. Cambridge Phil. Soc. **45**, 99 (1949).
- [96] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk and N. Seiberg, JHEP **0002**, 020 (2000).
- [97] A. Matusis, L. Susskind and N. Toumbas, JHEP **0012**, 002 (2000).
- [98] H. Arfaei and M. H. Yavartanoo, Phys. Lett. B **489**, 390 (2000).
- [99] J. Lukierski, P. C. Stichel and W. J. Zakrzewski, Annals Phys. **260**, 224 (1997).
- [100] C. Duval and P. A. Hov  rthy, Phys. Lett. B **479**, 284 (2000); J. Phys A, **34**, 10097 (2001).
- [101] P. A. Horvathy, Acta Phys. Polon. B **34**, 2611 (2003).
- [102] P. A. Horvathy and M. S. Plyushchay, JHEP **06**, 033 (2002).
- [103] P. A. Horvathy and M. S. Plyushchay, Phys. Lett. B **595**, 547 (2004).
- [104] P. A. Horvathy and M. S. Plyushchay, Nucl. Phys. B **714**, 269 (2005).
- [105] L. L. Foldy and S. A. Wouthuysen, Phys. Rev. **78**, 29 (1950).
- [106] Schweber S.S. *An introduction to relativistic quantum field theory*. Row, Peterson and Co., Evanston Ill., Elmsford N.Y., 1961.
- [107] F. A. Berezin and M. S. Marinov, Ann. Phys. **104**, 336 (1977).
- [108] L. Brink, S. Deser, B. Zumino, P. di Vecchia and P. Howe, Phys. Lett. B **64** 435 (1976); L. Brink, P. di Vecchia and P. Howe, Nucl. Phys. B **118** 76 (1977); R. Casalbuoni, Nuovo Cimento A **33** 115 (1976); A. Barducci, R. Casalbuoni and L. Lusanna, Nuovo Cimento A **35** 377 (1976); A.P. Balachandran, P. Salomonson, B. Skagerstam and J. Winnberg, Phys. Rev. D **15** 2308 (1977); D.M. Gitman, Nucl. Phys. B **488** 490 (1997) .
- [109] D. M. Gitman and I. V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints*, (Springer-Verlag, 1990).
- [110] J.-M. L  vy-Leblond, Comm. Math. Phys. **6**, 286 (1967).
- [111] M. Chaichian, P. Kulish, K. Nishijima and A. Tureanu, Phys. Lett. B **604**, 98 (2004).
- [112] V. G. Bagrov, D. M. Gitman, M. C. Baldiotti and A. D. Levin, Ann. Phys. **14**, 764 (2005).
- [113] V. G. Bagrov, M. C. Baldiotti, D. M. Gitman and A. D. Levin, Ann. Phys. **16**, 274 (2007).
- [114] M. C. Baldiotti and D. M. Gitman, Ann. Phys. **17**, 450 (2008).

Apêndice A

Hamiltonianas Não Relativísticas

A Hamiltoniana não relativística completa \hat{H}_M^θ (5.11), com termos da ordem $(mc^2)^{-2}$ é,

$$\begin{aligned} \hat{H}_M^\theta &= \frac{1}{2mc^2} \mathcal{O}_M^2 + eA_0 - \frac{e}{2\hbar} [\nabla A_0 \times \hat{\mathbf{p}}] \cdot \boldsymbol{\theta} \\ &\quad - \frac{1}{8m^2c^4} \left[\mathcal{O}_M, \left(e [\mathcal{O}_M, A_0] + i\hbar \partial_t \mathcal{O}_M - \frac{e}{2\hbar} \varepsilon_{ijk} [\mathcal{O}_M, \partial_i A_0 \hat{p}^j] \theta^k \right) \right], \end{aligned}$$

onde os operadores acima são:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_M^2 &= c^2 \hat{\mathbf{P}}^2 - e\hbar c (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \frac{ec}{\hbar} \left\{ ([\hat{\mathbf{p}} \times \nabla A^i] \cdot \boldsymbol{\theta}) \hat{P}^i - \frac{i\hbar}{2} [\hat{\mathbf{p}} \times \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A})] \cdot \boldsymbol{\theta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\hbar}{2} [\nabla ([\nabla \times \mathbf{A}] \cdot \boldsymbol{\sigma}) \times \hat{\mathbf{p}}] \cdot \boldsymbol{\theta} + \frac{e\hbar}{2c} [\varepsilon_{ijk} (\nabla A^i) \times (\nabla A^j) \sigma^k] \cdot \boldsymbol{\theta} \right\}, \\ [\mathcal{O}_M, [\mathcal{O}_M, A_0]] &= -\hbar c^2 \left\{ \hbar \nabla^2 A_0 + 2 [(\nabla A_0) \times \hat{\mathbf{P}}] \cdot \boldsymbol{\sigma} \right\} \\ &\quad - \frac{e\hbar c}{2} \left\{ \partial_i [(\nabla A^i) \times (\nabla A_0)] \cdot \boldsymbol{\theta} + [(\nabla A^i) \times \partial_i (\nabla A_0)] \cdot \boldsymbol{\theta} \right. \\ &\quad \left. + i\varepsilon_{ijk} (\partial_i [(\nabla A^j) \times (\nabla A_0)] \cdot \boldsymbol{\theta}) \sigma^k + i\varepsilon_{ijk} [(\nabla A^i) \times \partial_j (\nabla A_0)] \cdot \boldsymbol{\theta} \sigma^k \right\} \\ &\quad - ec \left\{ \varepsilon_{ijk} [(\nabla A^i) \times (\nabla A_0)] \cdot \boldsymbol{\theta} \hat{P}^j \sigma^k - \varepsilon_{ijk} [(\partial_i \mathbf{A}) \times (\nabla A_0)] \cdot \boldsymbol{\sigma} \hat{p}^j \theta^k \right\}, \\ [\mathcal{O}_M, \partial_t \mathcal{O}_M] &= e\hbar c \left\{ i\partial_t (\nabla \cdot \mathbf{A}) - [\nabla \times (\partial_t \mathbf{A})] \cdot \boldsymbol{\sigma} + \frac{2i}{\hbar} [(\partial_t \mathbf{A}) \times \hat{\mathbf{P}}] \cdot \boldsymbol{\sigma} \right\} \\ &\quad - \frac{ec}{2} \left\{ i [\nabla (\nabla \cdot \partial_t \mathbf{A}) \times \hat{\mathbf{p}}] \cdot \boldsymbol{\theta} - [\nabla ([\nabla \times (\partial_t \mathbf{A})] \cdot \boldsymbol{\sigma}) \times \hat{\mathbf{p}}] \cdot \boldsymbol{\theta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{\hbar} \varepsilon_{ijk} [(\partial_t (\nabla A^i) \times \hat{\mathbf{p}}) \cdot \boldsymbol{\theta}] \hat{P}^j \sigma^k + 2i \frac{e}{c} [\nabla (\partial_t A^i) \times (\nabla A^i)] \cdot \boldsymbol{\theta} \right\} \\ &\quad + e^2 \varepsilon_{ijk} \left\{ ([\nabla (\partial_t A^i) \times (\nabla A^j)] \cdot \boldsymbol{\theta}) \sigma^k - \frac{i}{\hbar} [(\partial_i \mathbf{A}) \times (\partial_t \mathbf{A})] \cdot \boldsymbol{\sigma} \hat{p}^j \theta^k \right\}, \\ [\mathcal{O}_M, [\mathcal{O}_M, E^i \hat{p}^j]] &= -\hbar^2 c^2 \left\{ (\nabla^2 E^i) \hat{p}^j + \frac{e}{c} (\partial_l E^i) (\partial_j A^l) + \frac{e}{c} \partial_l (E^i \partial_j A^l) \right\} \\ &\quad + ie\hbar c \left\{ \hbar [(\nabla E^i) \times (\partial_j \mathbf{A})] \cdot \boldsymbol{\sigma} - \hbar [\nabla \times (E^i \partial_j \mathbf{A})] \cdot \boldsymbol{\sigma} \right. \\ &\quad \left. - 2i\hbar^2 [(\nabla E^i) \times (\partial_j \mathbf{A})] \cdot \boldsymbol{\sigma} + 2\hbar c [(\nabla E^i) \times \hat{\mathbf{P}}] \cdot \boldsymbol{\sigma} \hat{p}^j \right\}. \end{aligned}$$

A Hamiltoniana não relativística completa $\hat{H}_{\text{SW}}^\theta$ (5.27), com termos da ordem $(mc^2)^{-2}$ é,

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{SW}}^\theta &= mc^2\gamma^0 + eA_0 + \frac{e}{2\hbar} \left[\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{P}} \right] \cdot \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2mc^2} \gamma^0 \mathcal{O}_{\text{SW}}^2 \\ &- \frac{1}{8m^2c^4} \left[\mathcal{O}_{\text{SW}}, \left(e [\mathcal{O}_{\text{SW}}, A_0] + i\hbar\partial_t \mathcal{O}_{\text{SW}} + \frac{e}{2\hbar} \varepsilon_{ijk} \left[\mathcal{O}_{\text{SW}}, E^i \hat{P}^j \right] \right) \theta^k \right],\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\text{SW}}^2 &= \left(c^2 + \frac{ec}{\hbar} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{B}) \right) \left(\hat{\mathbf{P}}^2 - \frac{\hbar e}{c} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) - \frac{ec}{\hbar} (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{P}}) (\boldsymbol{\theta} \cdot \hat{\mathbf{P}}) \\ &- i \frac{ec}{2} \left\{ \boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{P}} - (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nabla} B^i) \hat{P}^i + i \left[\boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{B}) \times \hat{\mathbf{P}} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} \right. \\ &\left. - i \left(\left[(\boldsymbol{\nabla} B^i) \times \boldsymbol{\theta} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \hat{P}^i \right\}, \\ [\mathcal{O}_{\text{SW}}, [\mathcal{O}_{\text{SW}}, A_0]] &= -\hbar c^2 \left(1 + \frac{e}{\hbar c} \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{B} \right) \left\{ \hbar \boldsymbol{\nabla}^2 A_0 + 2 \left[\boldsymbol{\nabla} A_0 \times \hat{\mathbf{P}} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} \right\} \\ &+ ec\hbar \left\{ (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\nabla}) (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nabla} A_0) - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\nabla} A_0 \cdot \boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{B})) \right. \\ &+ \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nabla} \mathbf{B}) \cdot (\boldsymbol{\nabla} A_0) - \frac{1}{\hbar} (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\nabla} A_0) \left[\hat{\mathbf{P}} \times \boldsymbol{\theta} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ &\left. + \frac{1}{\hbar} \left(\left[\boldsymbol{\nabla} A_0 \times \boldsymbol{\theta} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{P}}) \right\}, \\ [\mathcal{O}_{\text{SW}}, \partial_t \mathcal{O}_{\text{SW}}] &= ec \left(1 + \frac{e}{\hbar c} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{B}) \right) \left\{ i\hbar\partial_t (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) + 2i \left[(\partial_t \mathbf{A}) \times \hat{\mathbf{P}} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} - \hbar (\partial_t \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \right\} \\ &- \frac{ie^2}{2\hbar} \left\{ \hbar \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\nabla} ((\partial_t \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta}) + ([\partial_t \mathbf{A} \times \boldsymbol{\theta}]) \cdot \boldsymbol{\sigma}) + 2 ([\partial_t \mathbf{A} \times \boldsymbol{\theta}] \cdot \boldsymbol{\sigma}) (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{P}}) \right\} \\ &+ i \frac{ec}{2} \left\{ -\boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\theta} \cdot \partial_t \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{P}} + (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nabla} \partial_t B^i) \hat{P}^i + i \left[\boldsymbol{\nabla} (\partial_t \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\theta}) \times \hat{\mathbf{P}} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} \right. \\ &- i \left(\left[\boldsymbol{\nabla} \partial_t B^i \times \boldsymbol{\theta} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \hat{P}^i - \frac{2}{\hbar} \left((\partial_t \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{P}} \right) \left[\hat{\mathbf{P}} \times \boldsymbol{\theta} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} \left. \right\} \\ &+ \frac{e^2}{2} \left\{ i (\partial_t \mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{B}) - i \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nabla} (\mathbf{B} \cdot \partial_t \mathbf{A}) - (\boldsymbol{\theta} \cdot \partial_t \mathbf{B}) (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \right. \\ &+ \left[\boldsymbol{\nabla} (\mathbf{B} \cdot \partial_t \mathbf{A}) \times \boldsymbol{\theta} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} - \left[\boldsymbol{\nabla} \times (\partial_t \mathbf{A} (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\theta})) \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} + 2 (\partial_t \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\theta}) (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \\ &\left. + i \left((\partial_t \mathbf{B}) \times \boldsymbol{\theta} \right) \cdot \mathbf{B} + \frac{2i}{\hbar} (\mathbf{B} \cdot \partial_t \mathbf{A}) \left[\hat{\mathbf{P}} \times \boldsymbol{\theta} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} \right\}, \\ \left[\mathcal{O}_{\text{SW}}, \left[\mathcal{O}_{\text{SW}}, E^i \hat{P}^j \right] \right] &= -\hbar^2 c^2 \left\{ (\boldsymbol{\nabla}^2 E^i) \hat{P}^j - \frac{2e}{c} \varepsilon_{jkl} B^k (\partial_l E^i) + \frac{e}{c} \varepsilon_{jlk} E^i \partial_l B^k \right. \\ &- \frac{2}{\hbar} \left(\left[(\boldsymbol{\nabla} E^i) \times \hat{\mathbf{P}} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \hat{P}^j + \frac{ie}{\hbar c} E^i \partial_j (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \\ &- i \frac{e}{c} E^i \sigma^j (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}) - \frac{2e}{\hbar c} (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}) E^i \hat{P}^j + \frac{2e}{\hbar c} E^i \sigma^j (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{P}}) \\ &\left. + \frac{2ie}{c} (\partial_j E^i) (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \frac{2ie}{c} (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\nabla} E^i) \sigma^j \right\}.\end{aligned}$$

Apêndice B

Mapa de SW e Equivalência de Calibre para a Teoria de Maxwell Pura

B.1 Teoria de Maxwell $U(1)_\star$ sem correntes externas

Com o intuito de diferenciar e discutir as correspondentes teorias, definidas pelas equações de Maxwell θ -expandidas, provenientes do mapa de SW aplicado nas equações de movimento ou na ação denominamo-as por teoria “off-shell” e “on-shell” respectivamente. Trata-se apenas de uma questão de terminologia, aplicada aqui por mera conveniência. A seção B.2 é devotada a explicação dessa terminologia.

B.1.1 Mapa de SW no nível das equações de movimento: Teoria “off-shell”

A teoria de Maxwell $U(1)_\star$ é descrita pela ação,

$$\begin{aligned} \check{S}[\check{A}] &= -\frac{1}{16\pi c} \int dx \check{F}_{\mu\nu} \star \check{F}^{\mu\nu}, \\ \check{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \check{A}_\nu - \partial_\nu \check{A}_\mu + ig [\check{A}_\mu \star \check{A}_\nu], \quad [\check{A}_\mu \star \check{A}_\nu] = \check{A}_\mu \star \check{A}_\nu - \check{A}_\nu \star \check{A}_\mu, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

cujas equações de Euler-Lagrange $\delta\check{S}/\delta\check{A}_\mu = 0$ têm a forma,

$$\begin{aligned} \frac{\delta\check{S}}{\delta\check{A}_\mu} &= \check{D}_\nu \check{F}^{\nu\mu} = 0, \\ \check{D}_\nu \check{F}^{\nu\mu} &= \partial_\nu \check{F}^{\nu\mu} + ig [\check{A}_\nu \star \check{F}^{\nu\mu}]. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Sabemos que estas equações são interpretadas como equações de Maxwell no espaço-tempo NC na ausência de correntes. Uma vez que estamos interessados em discutir possíveis efeitos físicos devido a não comutatividade das coordenadas e isto significa que devemos medí-los de alguma forma, estas pequenas modificações em comparação com efeitos conhecidos explicados pela teoria de Maxwell ordinária. Então deve-se relacionar campos ordinários A_μ com campos NC \check{A}_μ , através do mapa de SW, por exemplo. Restringindo-nos a termos lineares em θ , os mapas de SW para os campos \check{A}_μ e $\check{F}_{\mu\nu}$ são [6]

$$\begin{aligned} \check{A}_\mu(x) &= A_\mu(x) + \frac{g}{2} \theta^{\alpha\beta} A_\alpha(x) [\partial_\beta A_\mu(x) + f_{\beta\mu}(x)], \quad f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\ \check{F}_{\mu\nu}(x) &= f_{\mu\nu}(x) - g\theta^{\alpha\beta} [f_{\alpha\mu}(x) f_{\beta\nu}(x) - A_\alpha(x) \partial_\beta f_{\mu\nu}(x)]. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

e efetuando este mapa no nível das equações de movimento (B.2), obtemos, em primeira ordem em θ , uma equação de Maxwell θ -expandida expressa em termos dos campos ordinários A_μ e $f_{\mu\nu}$,

$$\partial_\nu f^{\nu\mu} - g\theta^{\alpha\beta} [\partial_\nu (f_\alpha^\nu f_\beta^\mu) - f_{\nu\alpha} \partial_\beta f^{\nu\mu} - A_\alpha \partial_\beta \partial_\nu f^{\nu\mu}] = 0. \quad (\text{B.4})$$

B.1.2 Mapa de SW no nível da ação: Teoria “on-shell”

Alternativamente, nós podemos decidir aplicar o mapa de SW (B.3) na ação (B.1), conduzindo a uma teoria diferente *a priori*. Então, neste caso, obtemos a seguinte ação,

$$S_{\text{SW}}[A] = -\frac{1}{16\pi c} \int dx \left\{ \left(1 + \frac{g}{2}\theta^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}\right) f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - 2g\theta^{\alpha\beta} f^{\mu\nu} f_{\alpha\mu} f_{\beta\nu} \right\}, \quad (\text{B.5})$$

onde negligenciamos termos de segunda ordem em θ . Consequentemente podemos derivar imediatamente as equações de Euler-Lagrange $\delta S_{\text{SW}}/\delta A_\mu = 0$,

$$\begin{aligned} \partial_\nu \left[f^{\nu\mu} \left(1 + \frac{g}{2}\theta^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}\right) \right] &= g\theta^{\alpha\beta} [\partial_\nu (f_\alpha^\nu f_\beta^\mu) + \partial_\alpha (f^{\mu\nu} f_{\beta\nu})] \\ &+ g\theta^{\beta\mu} \left[\partial_\alpha (f^{\alpha\nu} f_{\beta\nu}) - \frac{1}{4}\partial_\beta (f^{\alpha\nu} f_{\alpha\nu}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Após uma primeira investigação, observamos que as equações do movimento (B.4) e (B.6) são definitivamente diferentes e provavelmente conduz a resultados físicos diferentes se interpretarmos que quantidades físicas podem ser construídas com as soluções de (B.4) e (B.6) (digamos campos eletromagnéticos, por exemplo). Entretanto acreditamos que estas equações devem ser *equivalentes*, no sentido que *resultados físicos derivados de (B.4) ou (B.6) são os mesmos*. Esta afirmação tem por base o fato que o mapa de SW oferece uma relação correta¹ entre os campos comutativos e NC, tal que quantidades físicas devem ser independentes em qual “lugar” o mapa é aplicado.

Procedemos agora para a equivalência entre ambas teorias. Está claro que $\check{S}(\check{A}, \check{j}) = S_{\text{SW}}(A, j)$ de modo que segue a identidade,

$$\frac{\delta S_{\text{SW}}}{\delta A_\mu(x)} = \int dy \left\{ \frac{\delta \check{A}_\nu(y)}{\delta A_\mu(x)} \frac{\delta \check{S}}{\delta \check{A}_\nu(y)} \Big|_{\check{A}=f(A)} \right\}. \quad (\text{B.7})$$

Como nós temos discutido acima, ambas teorias podem ser consideradas equivalentes se elas providenciam mesmas quantidades físicas. Uma maneira possível de provar tal equivalência é verificar que soluções de (B.4) são também soluções de (B.6), i.e.,

$$\frac{\delta \check{S}}{\delta \check{A}_\nu(y)} \Big|_{\check{A}=f(A)} = 0 \implies \frac{\delta S_{\text{SW}}}{\delta A_\mu(x)} = 0.$$

Esta conclusão aparenta ser clara por (B.7), entretanto, do ponto de vista operacional não é direto dizer que soluções de (B.4) também são soluções de (B.6). Então, devido ao fato que θ é presumivelmente pequeno, podemos tratar as equações (B.4) e (B.6) perturbativamente, i.e., realizando a expansão dos campos,

$$A_\mu = A_\mu^{(0)} + A_\mu^{(1)}(\theta) + O(\theta^2), \quad (\text{B.8})$$

¹Veja a seção B.2 para comentários adicionais.

tal que as equações (B.4) e (B.6) admitem a seguinte forma,

$$\partial_\nu f^{(1)\nu\mu} - g\theta^{\alpha\beta} \left[\partial_\nu (f_\alpha^{(0)\nu} f_\beta^{(0)\mu}) - f_{\nu\alpha}^{(0)} (\partial_\beta f^{(0)\nu\mu}) \right] = 0, \quad (\text{B.9})$$

e

$$\begin{aligned} \partial_\nu f^{(1)\nu\mu} + \frac{g}{2} \theta^{\alpha\beta} \partial_\nu (f^{(0)\nu\mu} f_{\alpha\beta}^{(0)}) &= g\theta^{\alpha\beta} \left[\partial_\nu (f_\alpha^{(0)\nu} f_\beta^{(0)\mu}) - \partial_\beta (f^{(0)\mu\nu} f_{\alpha\nu}^{(0)}) \right] \\ &+ g\theta^{\beta\mu} \left[\partial_\alpha (f^{(0)\alpha\nu} f_{\beta\nu}^{(0)}) - \frac{1}{4} \partial_\beta (f^{(0)\alpha\nu} f_{\alpha\nu}^{(0)}) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

onde os campos $A^{(0)\mu}$ são soluções das equações de Maxwell ordinárias $\partial_\nu f^{(0)\nu\mu} = 0$.

Vamos considerar, formalmente que $\tilde{f}^{(1)\nu\mu}$ é uma solução de (B.9). Então substituindo-a em (B.10) obtemos,

$$\begin{aligned} \partial_\nu \tilde{f}^{(1)\nu\mu} + \frac{g}{2} \theta^{\alpha\beta} f^{(0)\nu\mu} (\partial_\nu f_{\alpha\beta}^{(0)}) &= g\theta^{\alpha\beta} \left[\partial_\nu (f_\alpha^{(0)\nu} f_\beta^{(0)\mu}) - \partial_\beta (f^{(0)\mu\nu} f_{\alpha\nu}^{(0)}) \right] \\ &+ g\theta^{\beta\mu} f^{(0)\alpha\nu} \left[\partial_\alpha f_{\beta\nu}^{(0)} - \frac{1}{2} \partial_\beta f_{\alpha\nu}^{(0)} \right] \\ \frac{g}{2} \theta^{\alpha\beta} f^{(0)\nu\mu} (\partial_\nu f_{\alpha\beta}^{(0)}) &= -g\theta^{\alpha\beta} f^{(0)\mu\nu} (\partial_\beta f_{\alpha\nu}^{(0)}) \\ &+ g\theta^{\beta\mu} f^{(0)\alpha\nu} \left[\partial_\alpha f_{\beta\nu}^{(0)} - \frac{1}{2} \partial_\beta f_{\alpha\nu}^{(0)} \right] \\ \theta^{\alpha\beta} f^{(0)\mu\nu} \left[\partial_\beta f_{\alpha\nu}^{(0)} - \frac{1}{2} \partial_\nu f_{\alpha\beta}^{(0)} \right] &= \theta^{\beta\mu} f^{(0)\alpha\nu} \left[\partial_\alpha f_{\beta\nu}^{(0)} - \frac{1}{2} \partial_\beta f_{\alpha\nu}^{(0)} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

que, aparentemente, aparenta ser um resultado absurdo, pois, não é possível identificar o lado esquerdo com o lado direito. Neste caso o sinal de igualdade não faz sentido, *exceto se ambos os lados são iguais a zero!* Este é precisamente o caso que temos aqui,

$$\theta^{\alpha\beta} f^{(0)\mu\nu} \left[\partial_\beta f_{\alpha\nu}^{(0)} - \frac{1}{2} \partial_\nu f_{\alpha\beta}^{(0)} \right] = \theta^{\alpha\beta} f^{(0)\mu\nu} \left[\partial_\beta \partial_\alpha A_\nu^{(0)} - \frac{1}{2} \partial_\nu (\partial_\alpha A_\beta^{(0)} + \partial_\beta A_\alpha^{(0)}) \right] = 0,$$

devido a antissimetria de θ . O mesmo acontece com o lado direito,

$$\theta^{\beta\mu} f^{(0)\alpha\nu} \left[\partial_\alpha f_{\beta\nu}^{(0)} - \frac{1}{2} \partial_\beta f_{\alpha\nu}^{(0)} \right] = \theta^{\beta\mu} f^{(0)\alpha\nu} \left[\frac{1}{2} \partial_\beta (\partial_\alpha A_\nu^{(0)} + \partial_\nu A_\alpha^{(0)}) - \partial_\alpha \partial_\nu A_\beta^{(0)} \right] = 0, \quad (\text{B.12})$$

devido a $f^{(0)\alpha\nu}$. Então podemos afirmar que soluções de (B.4) são também soluções de (B.6), oferecendo as mesmas quantidades físicas (construídas por meio destas soluções). É devido a este fato que as teorias “off-shell” e “on-shell” podem ser interpretadas como *equivalentes*.

B.2 Simetria de calibre e expansão dos campos

Com o intuito de se incrementar a presente discussão, é interessante comparar um ponto adicional entre as teorias “off-shell” e “on-shell”. Iniciando com a ação dos campos eletromagnéticos no espaço-tempo NC (B.1), que possui simetria $U(1)_*$ e realizando o mapa de SW (B.3) no nível da ação obtemos a teoria “on-shell” (B.5) que possui a simetria ordinária $U(1)$. Consequentemente as equações de movimento (B.6) também possuem simetria $U(1)$. Por outro lado, se realizarmos o mapa de SW

no nível das equações de movimento (B.2), que possuem simetria $U(1)_*$, obtemos a teoria “off shell” (B.4) que *não* possui simetria $U(1)$, devido ao último termo $A_\alpha \partial_\beta \partial_\nu f^{\nu\mu}$. Isto é consequência do fato que o mapa de SW *não preserva simetria de calibre perante dois grupos de calibre*. De fato, como originalmente discutido [6], o mapa de SW relaciona campos de calibre NC \check{A}^μ com campos de calibre ordinários A^μ de tal modo que a *equivalência de calibre* entre eles é preservada, embora tal relação não preserve a *simetria*. Especificamente a simetria da ação (B.5) deve-se ao fato de condições de contorno, de modo que podemos realizar integrais por partes e aplicar o teorema de Stokes, eliminando termos que quebram a simetria de calibre $U(1)$.

Na presente situação, nós podemos dizer que a simetria $U(1)$ da equação (B.6) é uma consequência de (B.5), ao passo que na teoria “off-shell” (B.4) a simetria é quebrada devido ao fato que não temos possibilidades como (B.5), para remover termos dependentes de calibre. Na realidade, para restaurar a invariância de calibre $U(1)$ de (B.4) devemos impor *condições externas: a condição “on-shell”*, que é precisamente um resultado do nosso trabalho [58]. Em outras palavras devemos considerar a expansão dos campos (B.8) e impor² condições “on-shell”,

$$\partial_\nu f^{(0)\nu\mu} = 0.$$

É por isso que denominamos (B.4) como teoria “off-shell” e (B.5) como teoria “on-shell”, pois, (B.6) já é “on-shell”.

Então, enquanto a expansão dos campos (B.8) é natural para ambas teorias com o intuito de lidar com equações não lineares com uma pequena perturbação (o parâmetro NC θ) na teoria “off-shell”, esta expansão ainda salienta condições de invariância de calibre $U(1)$. É interessante notar que no nosso caso (Teoria de Maxwell na presença de correntes) nós somente temos a possibilidade “off-shell”, visto que não faz sentido aplicar o mapa de SW no nível da ação devido a problemas de covariância perante transformações de calibre $U(1)_*$.

²Ao mesmo tempo isto é completamente natural, pois, como desejamos extrair modificações físicas em campos físicos, i.e., aqueles que são soluções das equações de Maxwell ordinárias.