

**Massengrenzen auf  
supersymmetrische Teilchen  
aus kosmologischen und  
elektroschwachen Präzisionsdaten  
im Vergleich zu den Erwartungen am LHC**

Conny Beskidt

Diplomarbeit

Fakultät für Physik,  
Karlsruher Institut für Technologie

Referent: Prof. Dr. W. de Boer  
Institut für Experimentelle Kernphysik

Korreferent: Prof. Dr. G. Quast  
Institut für Experimentelle Kernphysik

17. Mai 2011



# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>III</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>VI</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>IX</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Das Standardmodell</b>	<b>5</b>
2.1 Teilchen und Wechselwirkungen	5
2.2 Theoretische Beschreibung des Standardmodells	8
2.2.1 Die Eichtheorie am Beispiel der Quantenelektrodynamik	8
2.2.2 Quantenchromodynamik	11
2.2.3 Elektroschwache Vereinheitlichung	12
2.2.4 Spontane Symmetriebrechung und Higgsmechanismus	15
2.2.5 Laufende Kopplungskonstanten - Renormierung	21
2.3 Grenzen des Standardmodells	24
<b>3 Supersymmetrie</b>	<b>26</b>
3.1 Theoretische Grundlagen der Supersymmetrie	28
3.2 Higgssektor im MSSM	33
3.2.1 Elektroschwache Symmetriebrechung aufgrund von Strahlungskorrekturen	36
3.3 Teilchenspektrum des MSSM	37
3.3.1 Gaugino und Higgsino Massenterme	37
3.3.2 Squark- und Sleptonmassen	38
3.4 Motivation von SUSY	39
3.5 Einschränkungen von SUSY	40
<b>4 Dunkle Materie</b>	<b>43</b>
4.1 Ausgewählte kosmologische Begriffe	43
4.2 Erste Beobachtungen und Evidenzen der Dunklen Materie	45
4.3 Dunkle Materie Kandidaten	47
4.4 Thermodynamische Beschreibung der primordialen Dunklen Materiedichte	49
4.5 Annihilationsprozesse	50

<b>5</b>	<b>Large Hadron Collider</b>	<b>53</b>
5.1	CMS-Detektor	54
5.2	Physikalische Größen in der Beschleunigerphysik	55
<b>6</b>	<b>Analysewerkzeuge</b>	<b>59</b>
6.1	$\chi^2$ -Methode	59
6.2	Software	61
6.2.1	CalcHEP – Calculator for High Energy Physics	61
6.2.2	MINUIT	62
6.2.3	micrOMEGAs	62
6.2.4	SuSpect	63
6.2.5	MOPS	63
<b>7</b>	<b>Analyse</b>	<b>65</b>
7.1	Problem der Minimierung	66
7.1.1	Korrelation zwischen $\tan(\beta)$ und $A_0$	67
7.1.2	Mehrstufige Optimierung	70
7.2	Einschränkungen	71
7.2.1	Relic Density $\Omega h^2$	71
7.2.2	$\text{BR}(b \rightarrow s \gamma)$	73
7.2.3	$\text{BR}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$	77
7.2.4	Anomales magnetisches Moment des Myons – $(g-2)_\mu$	80
7.2.5	$\text{BR}^{\text{EXP}}(B \rightarrow \tau \nu) / \text{BR}^{\text{SM}}(B \rightarrow \tau \nu)$	83
7.2.6	Higgsmasse $m_h$	86
7.3	Resultate	89
7.3.1	Einfluss der Fehler	93
7.3.2	Vergleich	94
7.3.3	Direkte Suche nach Dunkler Materie	95
7.3.4	Bisherige LHC Ergebnisse	99
7.4	Einfluss auf zukünftige Higgssuchen am LHC	101
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>107</b>
<b>9</b>	<b>Literatur</b>	<b>111</b>
<b>10</b>	<b>Anhang</b>	<b>119</b>
10.1	Mathematischer Rahmen	119



10.1.1	Pauli-Matrizen	119
10.1.2	Gell-Mann-Matrizen	119
10.1.3	Gamma Matrizen	120
10.2	Fehlerfunktion	120
10.3	Eindimensionale Scans	121
10.3.1	Relic Density $\Omega h^2$	121
10.3.2	$\text{BR}(b \rightarrow s \gamma)$ und $\Omega h^2$	121
10.3.3	$\text{BR}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ und $\Omega h^2$	121
10.3.4	Anomales magnetisches Moment des Myons und $\Omega h^2$	122
10.3.5	$\text{BR}^{\text{EXP}}(B \rightarrow \tau \nu) / \text{BR}^{\text{SM}}(B \rightarrow \tau \nu)$ und $\Omega h^2$	122
10.3.6	Higgsmasse $m_h$ und $\Omega h^2$	122
10.3.7	Kombination aller Einschränkungen	123
10.4	Ausschlussgrenzen LHC	123
10.5	Massenspektren	125
10.6	Vergleich der PDF und Massen	126

# Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2.1: Teilchenspektrum des Standardmodells. ....	7
Abbildung 2.2: Higgspotential. ....	17
Abbildung 2.3: Veranschaulichung der unterschiedlichen Potentiale in der QED und QCD. ....	21
Abbildung 2.4: Diagramme der Vakuumspolarisation in erster störungstheoretischer Ordnung. ....	22
Abbildung 2.5: Laufende Kopplungskonstanten im SM. ....	25
Abbildung 4.1: Aufteilung des Energieinhalts des heutigen Universums. ....	45
Abbildung 4.2: Schematische Darstellung der Rotationskurve der Milchstraße. ....	46
Abbildung 4.3: Zeitliche Entwicklung der mitbewegten WIMP-Teilchendichte im frühen Universum. ....	50
Abbildung 4.4: Hauptbeiträge zur Annihilation der Neutralinos in Abhängigkeit der supersymmetrischen Parameter und Massen. ....	51
Abbildung 5.1: Ausschnitt des CMS-Detektors [51]. ....	54
Abbildung 6.1: Illustration des symmetrischen 90% CL an einer Gaußfunktion $f(x, \mu, \sigma)$ . ....	60
Abbildung 7.1: Konsistente Punkte der Relic Density für feste und variable CMSSM Parameter. ....	66
Abbildung 7.2: Korrelation zwischen den CMSSM Parameter $\tan(\beta)$ und $m_0$ . ....	67
Abbildung 7.3: Korrelation zwischen den CMSSM Parameter $\tan(\beta)$ und $A_0$ . ....	68
Abbildung 7.4: Abhängigkeit von den CMSSM Parameter für andere Einschränkungen. ....	69
Abbildung 7.5: Verlauf von $\Omega h^2$ in Abhängigkeit von $\tan(\beta)$ für unterschiedliche Werte von $m_0$ - $m_{1/2}$ , die durch die dargestellten Wertepaare repräsentiert werden. ....	72
Abbildung 7.6: Optimierte Werte von $\tan(\beta)$ (links) und $A_0$ (rechts) für $\Omega h^2$ . ....	72
Abbildung 7.7: Feynman-Diagramme für den Prozess $b \rightarrow s \gamma$ . ....	74
Abbildung 7.8: $\chi^2$ -Werte für die Kombination aus $BR(b \rightarrow s \gamma)$ und $\Omega h^2$ . ....	75
Abbildung 7.9: Verlauf des $BR(b \rightarrow s \gamma)$ in Abhängigkeit von $\tan(\beta)$ für unterschiedliche Werte von $m_0$ - $m_{1/2}$ , die durch die dargestellten Wertepaare repräsentiert werden. ....	76
Abbildung 7.10: Kombination von $BR(b \rightarrow s \gamma)$ und $\Omega h^2$ . ....	76
Abbildung 7.11: Feynman-Diagramme für den Prozess $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ . ....	77
Abbildung 7.12: $BR(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ in Abhängigkeit von $\tan(\beta)$ für unterschiedliche Werte von $m_0$ - $m_{1/2}$ , die durch die dargestellten Wertepaare repräsentiert werden. ....	78
Abbildung 7.13: Kombination von $BR(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ und $\Omega h^2$ . ....	79
Abbildung 7.14: Optimierte Werte von $\tan(\beta)$ (links) und $A_0$ (rechts) für die Kombination aus $BR(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ und $\Omega h^2$ . ....	80
Abbildung 7.15: Feynman-Diagramme zum anomalen magnetischen Moment des Myons. ....	81
Abbildung 7.16: $\chi^2$ -Werte für die Kombination aus $(g-2)_\mu$ und $\Omega h^2$ . ....	82
Abbildung 7.17: Optimierte Wert von $\tan(\beta)$ (links) und $A_0$ (rechts) für die Kombination aus $(g-2)_\mu$ und $\Omega h^2$ . ....	83
Abbildung 7.18: Leptonischer Zerfall eines B-Mesons im SM (links) und im MSSM (rechts). ....	83

Abbildung 7.19: Verhältnis von $BR^{\text{SUSY}}/BR^{\text{SM}}$ für den Prozess $B \rightarrow \tau \nu$ in Abhängigkeit von $\tan(\beta)$ für unterschiedliche $m_0$ - $m_{1/2}$ Werte, die durch die dargestellten Wertepaare repräsentiert werden.....	85
Abbildung 7.20: $\chi^2$ -Funktion und dazugehörige optimierte Werte von $\tan(\beta)$ und $A_0$ für die Kombination aus $BR^{\text{SUSY}}(B \rightarrow \tau \nu)/BR^{\text{SM}}(B \rightarrow \tau \nu)$ und $\Omega h^2$ .....	86
Abbildung 7.21: Gemessene Grenze der Masse des Higgs-Bosons. ....	87
Abbildung 7.22: Higgsmasse $m_h$ in Abhängigkeit von $\tan(\beta)$ für unterschiedliche Werte von $m_0$ - $m_{1/2}$ , die durch die dargestellten Wertepaare repräsentiert werden.....	87
Abbildung 7.23: $\chi^2$ -Funktion und dazugehörige optimierte Werte von $\tan(\beta)$ und $A_0$ für die Higgs-Massengrenze und $\Omega h^2$ .....	88
Abbildung 7.24: $\chi^2$ - und $\Delta\chi^2$ -Funktion (oben) und dazugehörige optimierte Werte von $\tan(\beta)$ und $A_0$ (unten) für die Kombination aller Einschränkungen. ....	89
Abbildung 7.25: Darstellung der unterschiedlichen CL. ....	90
Abbildung 7.26: Massenspektren für die ausgewählten Punkte. ....	91
Abbildung 7.27: Higgs-Massen und Higgsmischungsparameter $\mu$ .....	92
Abbildung 7.28: Vergleich der erlaubten 95% CL Bereich für die lineare (blau) und quadratische (dunkelblau) Fehleraddition. ....	93
Abbildung 7.29: Vergleich der erlaubten 95% CL Bereiche. ....	94
Abbildung 7.30: Vergleich des erlaubten 95% CL Bereichs mit Ausschlussgebieten aus der Suche nach supersymmetrischen Teilchen. ....	95
Abbildung 7.31: Ausschlussgrenze für die WIMP-Kern-Streuung von CDMS II. ...	96
Abbildung 7.32: Wirkungsquerschnitt der optimierten Punkte als Funktion der WIMP-Masse für beide Sätze der verwendeten Formfaktoren. ....	97
Abbildung 7.33: Ausgeschlossener Bereich in der $m_0$ - $m_{1/2}$ Ebene projiziert auf die $\Delta\chi^2$ -Funktion und die Neutralinomassee.....	98
Abbildung 7.34: LHC Ausschlussgrenze für supersymmetrische Teilchen.....	99
Abbildung 7.35: LHC-Ausschlussgrenze für unterschiedliche $\tan(\beta)$ und $A_0$ für $\sigma_{\text{LHC}}=4,5$ .....	100
Abbildung 7.36: Zusammenhang zwischen erlaubten 95% CL Bereich und der LHC-Ausschlussgrenze.....	101
Abbildung 7.37: Feynman-Diagramm für die Gluonfusion über eine b-/t-Schleife (links) und die assoziierte Higgsproduktion (rechts).....	102
Abbildung 7.38: Wirkungsquerschnitte im SM und MSSM.....	102
Abbildung 7.39: Wirkungsquerschnitt in Abhängigkeit von $m_A$ (links) und $\tan(\beta)$ (rechts).....	103
Abbildung 7.40: Vergleich zwischen der assoziierten Higgsproduktion und der Gluonfusion über eine b-/t-Schleife.....	104
Abbildung 7.41: Entdeckungspotential des CMS Detektors für 7 TeV.....	105
Abbildung 8.1: Zusammenfassung der einzelnen $\chi^2$ -Beiträge für die lineare Fehleraddition. ....	109
Abbildung 8.2: Zusammenfassung der einzelnen $\chi^2$ -Beiträge für die quadratische Fehleraddition. ....	110



# Tabellenverzeichnis

Tabelle 2.1: Wechselwirkungen und zugehörige Bosonen des SM. ....	5
Tabelle 2.2: Quantenzahlen der Quarks und Leptonen. ....	6
Tabelle 2.3: Anordnung der Fermionen in Dubletts und Singulets bezüglich der elektroschwachen Wechselwirkung und dazugehörige Quantenzahlen. ....	13
Tabelle 3.1: Teilcheninhalt im MSSM und dazugehörige Quantenzahlen. ....	27
Tabelle 6.1: $\Delta\chi^2$ in Abhängigkeit des CL=(1- $\alpha$ )% und m Parameter. ....	60
Tabelle 7.1: Ausgewählte Punkte in der $m_0$ - $m_{1/2}$ Ebene mit zugehörigen Werten von $\tan(\beta)$ und $A_0$ . ....	90
Tabelle 7.2: $\chi^2$ -Anteile zum gesamten Wert von $\chi^2$ für ausgewählte Punkte. ....	91
Tabelle 7.3: Verwendete Formfaktoren für die WIMP-Nukleon-Streuung. ....	97
Tabelle 10.1: Wertetabelle der Fehlerfunktion erf(x).....	120



# 1 Einleitung

Noch vor etwa hundert Jahren beschränkte sich die Teilchenphysik auf die übersichtlichen Bestandteile der Materie: den Atomen. Angetrieben durch die Arbeiten mit Kathodenstrahlen von Joseph John Thomson und der damit verbundenen Entdeckung des Elektrons 1897, die das Konzept des Atoms als unteilbare Einheit verwarf, begann die Suche nach weiteren Bestandteilen der Materie. Innerhalb der letzten hundert Jahre konnte in diesem Forschungsbereich eine rasche Entwicklung und damit verbundene große Fortschritte beobachtet werden, so dass es heutzutage zur Elementarteilchenphysik viele verschiedenste Forschungsgebiete gibt.

Der Schritt von der Teilchen- zur Elementarteilchenphysik begann mit der Verwerfung des thomsonschen Atommodells (Plumpudding Modell), durch die Experimente von Rutherford 1909. Durch die Ablenkung der auf Goldfolie geschossenen Heliumatomkerne schloss er, dass die positive Ladung und ein Großteil der Masse im Atomkern in der Mitte des Atoms konzentriert sind und die Elektronen diesen, wie Planeten die Sonne, umkreisen. Erste Hinweise auf die Quantenmechanik innerhalb der Teilchenphysik gab es, als 1913 Rutherfords Atommodell durch die quantisierten Elektronenbahnen von Niels Bohr erweitert wurde. Dass die Quantenmechanik endgültig Bestandteil der Teilchenphysik sein würde, wurde mit dem Stern-Gerlach-Versuch 1922 und der damit verbundenen Entdeckung des Spins besiegelt. Ab diesem Zeitpunkt teilte sich aufgrund der wachsenden Komplexität die Teilchenphysik grob in zwei Forschungsgebiete: die Theorie und das Experiment. Die Aufteilung führte keineswegs zu einer Trennung, vielmehr entwickelte sich daraus ein Zusammenspiel, das der Forschung innerhalb kürzester Zeit immer neuere Erkenntnisse brachte. Auf der einen Seite gelang James Chadwick 1932 bei Experimenten mit den Produkten radioaktiver Zerfälle die Entdeckung des Neutrons, was einige Jahre später wiederum zur Entdeckung der Kernspaltung führte. Parallel dazu entwickelte sich, aufbauend auf dem von Louis de Broglie 1924 postulierten Welle-Teilchen-Dualismus, eine neue Sichtweise des Atommodells. Demnach wurden Teilchen als dreidimensionale Wellen beschrieben, so dass es unmöglich war, deren Ort und Impuls gleichzeitig zu bestimmen. Diese als Unschärferelation bekannte Aussage wurde 1926 von Werner Heisenberg im Rahmen der Quantenmechanik formuliert. Seit den 50er Jahren des 20. Jahrhunderts ermöglichte die Weiterentwicklung von Teilchenbeschleunigern und Teilchendetektoren die Erforschung der Atome bei sehr hohen Energien. Durch die tiefinelastische Streuung gelang der Nachweis von Quarks als Konstituenten der Protonen und Neutronen [1]. Außerdem konnte so festgestellt werden, dass Protonen und Neutronen nur zwei von vielen Hadronen im „Hadronen-Zoo“ sind. Mit der gleichzeitigen Entwicklung der Quantenmechanik hin zu einer relativistischen Quantenfeldtheorie, wurde das Werkzeug gefunden, Wechselwirkungen zu beschreiben. Alle bisher gefundenen Erkenntnisse über Teilchen und Wechselwirkungen sind im Standardmodell der Teilchenphysik zusammengefasst. Innerhalb dieser Quantenfeldtheorie können die schwache, elektromagnetische und starke Wechselwirkung beschrieben werden. Außerdem gelang es die schwache und elektromagnetische Kraft als zwei Aspekte der gleichen Wechselwirkung innerhalb der GWS-Theorie zu verstehen.

Nur die Gravitation nimmt durch die Beschreibung der allgemeinen Relativitätstheorie eine Sonderstellung ein. Die immer weiter fortschreitende Erforschung der Elementarteilchen durch immer höhere Energien wirft neben den Antworten ebenso viele neue Fragen auf, die im Rahmen des Standardmodell nicht, oder nur unzureichend erklärt werden können. Seit einiger Zeit ist klar geworden, dass das Standardmodell erweitert werden muss. Von den vielen Theorien zur Physik jenseits des Standardmodells können mithilfe der Supersymmetrie, eine Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen, Probleme des Standardmodells gelöst werden. Im Gegensatz zum Standardmodell sagt die Supersymmetrie neben der Existenz eines vielversprechenden Dunkle Materie Kandidaten, des Neutralinos, die korrekte Menge der gemessenen primordialen Dunkle Materiedichte vorher und kann die Gravitation innerhalb des Symmetriebrechungsmechanismus berücksichtigen. Zusätzlich können durch supersymmetrische Beiträge innerhalb teilchenphysikalischer Prozesse auftauchende Diskrepanzen zwischen experimentellen und vom Standardmodell vorhergesagten Werten aufgehoben werden.

Soll das Standardmodell durch Supersymmetrie erweitert werden, so muss es nicht nur mit den kosmologischen, sondern auch mit elektroschwachen Beobachtungen in Einklang gebracht werden können. Dies im Rahmen des eingeschränkten minimalen supersymmetrischen Standardmodells (engl. constrained minimal supersymmetric standard model, CMSSM) zu überprüfen, um im Anschluss eine Vorhersage des möglichen Parameterraums und dessen Entdeckungspotentials zu geben, ist eines der Ziele dieser Arbeit. Erreicht wird dies durch eine mehrstufige Optimierung der CMSSM Parameter mithilfe einer  $\chi^2$ -Funktion. Die mehrstufige Optimierung bietet den Vorteil, dass sie den starken Korrelationen der CMSSM Parameter Rechnung trägt. Diese Korrelationen führen bei zufallsbasierten Markov-Chain-Monte-Carlo Optimierungsmethoden häufig zu Problemen bei der Auffindung sinnvoller Parameterkombinationen, so dass sich unterschiedliche Resultate des erlaubten Parameterbereichs ergeben.

Zum Verständnis der in der Analyse verwendeten Begrifflichkeiten und Methoden werden zunächst in den Kapiteln 2 und 3 alle notwendigen theoretischen Grundlagen zum Standardmodell und zur Supersymmetrie bereit gestellt. Da der kosmologische Aspekt die primordiale Dunkle Materiedichte darstellt, werden alle nötigen Informationen zur Dunklen Materie in Kapitel 4 geliefert. Die Abschätzung des Entdeckungspotentials kann in der Kombination mit der in dieser Arbeit durchgeführten Wirkungsquerschnittanalyse für die Suche nach supersymmetrischen Teilchen an Teilchenbeschleuniger genutzt werden. Deshalb wird der LHC als bislang größter Teilchenbeschleuniger der Welt in Kapitel 5 näher beschrieben. Bevor in Kapitel 7 auf die Analyse eingegangen wird, wird in Kapitel 6 auf die verwendeten Analysewerkzeuge eingegangen.

In der Analyse wird gezeigt, dass mithilfe der mehrstufigen Optimierung im Vergleich zu anderen zufallsbasierten Verfahren ein größerer erlaubter Bereich gefunden werden kann. Nachdem der erlaubte CMSSM Parameterbereich, der mit allen kosmologischen und elektroschwachen Einschränkungen konsistent ist, in Kapitel 7 vorgestellt wird, werden die Auswirkungen der direkten Suche nach Dunkler Materie und nach supersymmetrischen Teilchen am LHC auf den gefundenen Bereich diskutiert. Durch die Optimierung der CMSSM Parameter bezüglich der primordia-



len Dunklen Materiedichte nimmt  $\tan(\beta)$  in einem großen Bereich des Parameter-  
raums hohe Werte an. Dies führt zu hohen Wirkungsquerschnitten bei der assozii-  
ierten Higgsproduktion und bietet so die Möglichkeit in Kombination mit dem CMS-  
Entdeckungspotential, die Masse des Higgs-Bosons am LHC zu messen.



## 2 Das Standardmodell

Das Standardmodell der Teilchenphysik (SM) ist eine Theorie, die das Wissen über alle bis zu diesem Zeitpunkt bekannten Elementarteilchen und deren Wechselwirkung untereinander mit Ausnahme der Gravitation, die durch die allgemeine Relativitätstheorie beschrieben wird, zusammenfasst. Die in den achtziger Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts entwickelte relativistische Quantenfeldtheorie hat bis heute Bestand, da sie durch viele Experimente bestätigt werden konnte.

Die Grundzüge des Standardmodells sollen in Abschnitt 2.1 beschrieben werden, welche durch die theoretischen Grundlagen in Abschnitt 2.2 vertieft werden. Dabei wird unter anderem auf den Formalismus für das letzte, noch nicht entdeckte Teilchen des Standardmodells, das sogenannte Higgs-Boson, eingegangen. Der Abschnitt 2.3, der neben den Erfolgen ebenfalls auf die Grenzen des Standardmodells eingeht, schließt dieses Kapitel ab.

### 2.1 Teilchen und Wechselwirkungen

Das Standardmodell der Teilchenphysik beinhaltet drei Wechselwirkungen, die schwache, elektromagnetische und starke Wechselwirkung, sowie zwei Arten elementarer Teilchen: Fermionen und Bosonen. Die Teilchen unterscheiden sich durch ihren Spin. Während Bosonen einen ganzzahligen Spin tragen, ist der Spin von Fermionen stets halbzahlig. Da der Spin die Vertauschungsrelation der Teilchen bestimmt, gehorchen die Teilchen unterschiedlichen Statistiken, der Bose- und der Fermi-Statistik. Dies führt dazu, dass bosonische Teilchen durch kohärente Überlagerung Kraftfelder und fermionische Teilchen aufgrund des Pauliprinzipis Materie bilden [2].

Fermionen, die Bausteine der Materie, kann man in zwei Gruppen bezüglich ihrer Wechselwirkung aufteilen, den sechs Quarks und den sechs Leptonen, welche man wiederum in drei Familien aufteilen kann, wie man in Abbildung 2.1 und Tabelle 2.2 sieht. Während bei den Leptonen das Elektron  $e$ , Myon  $\mu$  und Tau  $\tau$  elektrisch geladen sind und sich nur durch die aufsteigende Masse unterscheiden, sind die dazugehörigen Mitglieder der Familie die Neutrinos  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\nu_\tau$  elektrisch neutral, weshalb sie nur an der schwachen und nicht noch zusätzlich an der elektromagnetischen Wechselwirkung teilnehmen. Teilchenprozesse laufen bei Leptonen nur innerhalb einer Familie ab [3].

Wechselwirkung	koppelt an	Austauschteilchen	Masse (GeV/c <sup>2</sup> )
stark	Farbe	8 Gluonen $g$	0
elektromagnetisch	elektrische Ladung	Photon $\gamma$	0
schwach	schwache Ladung	$W^\pm, Z^0$	$\sim 10^2$

Tabelle 2.1: Wechselwirkungen und zugehörige Bosonen des SM.

Ebenso wie die Leptonen lassen sich die Quarks, die Bausteine der Protonen und Neutronen, die ihrerseits Atomkerne bilden, in drei Familien unterteilen. Man bezeichnet die unterschiedlichen Typen der Quarks als „Flavour“. Dabei befinden sich jeweils die Paare up-Quark  $u$  und down-Quark  $d$ , charm-Quark  $c$  und strange-Quark  $s$  und top-Quark  $t$  und bottom-Quark  $b$  zusammen in einer Familie. Alle Quarks sind elektrisch geladen, weshalb sie schwach und elektromagnetisch wechselwirken. Zusätzlich können die Quarks aufgrund ihrer Farbladung an der starken Wechselwirkung teilnehmen. Die Farbladung wurde als zusätzlicher Freiheitsgrad hinzugefügt, um das Pauliprinzip innerhalb von Baryonen nicht zu verletzen [4]. Jedes Quark kann daher zusätzlich die Quantenzahl rot, blau oder grün tragen. Eine weitere Besonderheit der Quarks ist die nicht verschwindende Wahrscheinlichkeit zum Übergang in eine andere Familie innerhalb von schwachen Teilchenprozessen. Dieses Verhalten wird durch die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (CKM-Matrix) beschrieben [5], [6]. Da die Wechselwirkungszustände der schwachen Wechselwirkung Überlagerungen der Massenzustände der Quarks sind, kommt es zu Übergängen innerhalb einer Familie. Die Übergangswahrscheinlichkeit von einem Quark in ein anderes Quark ist dabei proportional zum Quadrat des Betrags des jeweiligen Matrixelements der CKM-Matrix.

Fermionen	Familie			el. Ladung	Farbe	Schwacher Isospin		Spin
	1	2	3			links-	rechtshdg.	
Leptonen	$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$	0	-	1/2	-	1/2
	e	$\mu$	$\tau$	-1			0	
Quarks	u	c	t	+2/3	r,b,g	1/2	0	1/2
	d	s	b	-1/3			0	

Tabelle 2.2: Quantenzahlen der Quarks und Leptonen.

Zu jedem oben beschriebenen Fermion gibt es das entsprechende Antifermion mit gleicher Masse aber entgegen gesetzter Ladung, Farbe und dritter Komponente des schwachen Isospins, der Quantenzahl der schwachen Wechselwirkung.

Die Bosonen vermitteln die jeweilige Wechselwirkung und werden deshalb auch Austauscheteilchen genannt. Das Photon koppelt an die elektrische Ladung der Teilchen und ist somit das Austauscheteilchen der elektromagnetischen Wechselwirkung. Da das Photon masselos ist, hat die elektromagnetische Wechselwirkung eine unendliche Reichweite. Es trägt jedoch selbst keine Ladung, so dass Photonen im Gegensatz zu den anderen Bosonen untereinander nicht koppeln. Die Austauscheteilchen der schwachen Kraft sind die  $W^\pm$ - und  $Z^0$ -Bosonen. Sie sind aufgrund einer spontanen Symmetriebrechung, die im SM durch den Higgsmechanismus (siehe dazu Abschnitt 2.2.4) beschrieben wird, massiv und haben deshalb nur eine sehr geringe Reichweite. Da  $W^\pm$ - und  $Z^0$ -Bosonen selbst schwach geladen sind, können sie untereinander koppeln. Eine Besonderheit der schwachen Wechselwirkung ist die Paritätsverletzung. Dies bedeutet, dass die Reaktionen der schwachen Wechselwirkung nicht spiegelsymmetrisch sind. Während Prozesse,

die durch die  $W^\pm$ -Bosonen vermittelt werden und als geladene Ströme bezeichnet werden, maximal paritätsverletzend sind, sind die neutralen Ströme, welche durch das  $Z^0$ -Boson vermittelt werden, in einem bestimmten Verhältnis paritätsverletzend. Der zugrunde liegende schwache Isospinismus der schwachen Wechselwirkung im Rahmen der elektroschwachen Vereinheitlichung wird in Abschnitt 2.2.3 näher beschrieben [3].

Die acht Gluonen sind die Träger der starken Kraft. Sie koppeln an die Farbladung und tragen selbst gleichzeitig Farbe und Antifarbe. Obwohl Gluonen masselos sind, ist die effektive Reichweite der starken Wechselwirkung durch die Selbstkopplung beschränkt. Beim Trennen eines farbneutralen Objekts, wird die Energie im Farbfeld bei Abständen ungefähr größer als 1 fm so groß, dass es energetisch günstiger wird reelle Quark-Antiquark-Paare zu bilden. Dieses Phänomen, das als Confinement bezeichnet wird, ist der Grund, weshalb in der Natur nur farbneutrale Objekte vorkommen [3]. Dabei unterscheidet man zwischen Mesonen, bestehend aus einem Quark-Antiquark-Paar, und Baryonen, bestehend aus drei Quarks, wie beispielsweise dem Proton. Eine Auflistung der eben beschriebenen Bosonen kann Tabelle 2.1 entnommen werden.

Das Higgs-Boson ist das letzte Teilchen des SM, das noch nicht entdeckt wurde. Es koppelt an die Masse der Teilchen, weshalb das Higgs-Boson in Verbindung mit dem Higgsmechanismus für die Massengenerierung verantwortlich gemacht wird. Mit der Entdeckung des Higgs-Bosons wären alle vorhergesagten Teilchen des SM gefunden, weshalb man sich erhofft dieses am bisher größten Teilchenbeschleuniger dem Large Hadron Collider (LHC) in Genf zu finden.

Generation				
	I	II	III	
Masse →	2,49 MeV	1,27 GeV	172 GeV	0
Ladung →	2/3	2/3	2/3	0
Spin →	1/2	1/2	1/2	1
Name →	<b>u</b> up	<b>c</b> charm	<b>t</b> top	<b>γ</b> Photon
Quarks	5,05 MeV	101 MeV	4,19 GeV	0
	-1/3	-1/3	-1/3	0
	1/2	1/2	1/2	1
	<b>d</b> down	<b>s</b> strange	<b>b</b> bottom	<b>g</b> Gluon
Leptonen	< 2 eV	< 0,19 MeV	< 18,2 MeV	91,2 GeV
	0	0	0	0
	1/2	1/2	1/2	1
	<b>ν<sub>e</sub></b> Elektron-Neutrino	<b>ν<sub>μ</sub></b> Myon-Neutrino	<b>ν<sub>τ</sub></b> Tau-Neutrino	<b>Z<sup>0</sup></b> Z <sup>0</sup> -Boson
Bosonen	0,511 MeV	105,7 MeV	1777 MeV	80,4 GeV
	-1	-1	-1	± 1
	1/2	1/2	1/2	1
	<b>e</b> Elektron	<b>μ</b> Myon	<b>τ</b> Tau	<b>W<sup>±</sup></b> W <sup>±</sup> -Boson

Abbildung 2.1: Teilchenspektrum des Standardmodells.

## 2.2 Theoretische Beschreibung des Standardmodells

Symmetrien und Invarianzen haben in der modernen Physik eine fundamentale Bedeutung und das nicht erst seit dem Jahr 1918, in dem Emmy Noether das gleichnamige Theorem formulierte. Es besagt, dass mit jeder Symmetrie eines betrachteten physikalischen Systems eine Erhaltungsgröße verknüpft ist [7]. Dieses Prinzip ist bereits aus der klassischen Physik bekannt, in der beispielsweise die Homogenität der Zeit die Energieerhaltung zur Folge hatte.

Nach den Erfolgen der Quantenmechanik und deren Einzug in die Relativistik, betrachtet man in der modernen Teilchenphysik Symmetrietransformationen bezüglich Feldern. Somit ist die Quantenfeldtheorie das geeignete Hilfsmittel zur theoretischen Beschreibung des Standardmodells, welche im Folgenden in ihren Grundzügen wieder gegeben werden soll.

### 2.2.1 Die Eichtheorie am Beispiel der Quantenelektrodynamik

Der aus der klassischen Mechanik bekannte Lagrangeformalismus kann direkt auf die Quantenfeldtheorie übertragen werden, mit dem Unterschied, dass man statt der Lagrangefunktion  $L$  eine Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  des betrachteten Feldes vorliegen hat [8]. Somit erhält man die kovariante Darstellung der Wirkung  $S$

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) d^4 x. \quad (2.1)$$

Mit Hilfe des Hamiltonischen Prinzips der Wirkung ergeben sich die Euler-Lagrange-Gleichungen, aus denen die Bewegungsgleichungen für jedes betrachtete, in der Lagrangedichte vorkommende Feld folgen

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0. \quad (2.2)$$

Zunächst werden die Lagrangedichten für freie, also nicht wechselwirkende Teilchen des SM betrachtet [9], wobei zur Übersichtlichkeit der Darstellung natürliche Einheiten verwendet werden. Dabei nehmen die Naturkonstanten den Wert eins an:

$$\hbar = c = 1. \quad (2.3)$$

Als erstes sei hier die Lagrangedichte eines fermionischen Feldes  $\psi(x)$  dargestellt

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi. \quad (2.4)$$

Hierbei ist  $\psi(x)$  der Dirac-Spinor mit dem dazugehörigen adjungierten Spinor  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ .  $\gamma^\mu$  sind die Gamma Matrizen und  $m$  die Masse des Teilchens.

Unter Verwendung der Euler-Lagrange-Gleichung ergibt sich die wohlbekannte Dirac-Gleichung, die die Bewegung eines freien Spin 1/2 Teilchens beschreibt:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (2.5)$$

wobei das Produkt aus Dirac Matrizen und kovarianter Ableitung der Einsteinschen Summenkonvention nach

$$\gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial_0 + \gamma^i \partial_i \quad (2.6)$$

gehört. Das Analogon der Dirac-Gleichung für ein skalares Feld  $\phi(x)$  mit Spin 0 ist die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi = 0, \quad (2.7)$$

die sich ebenfalls aus der Euler-Lagrange-Gleichung mit der dazugehörigen Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}((\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2) \quad (2.8)$$

ergibt.

Zur Vollständigkeit soll noch die Lagrangedichte für ein masseloses Vektorfeld  $A^\mu(x)$  mit Spin 1 dargestellt werden:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

Hierbei ist  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  der elektromagnetische Feldstärketensor. Durch Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichung ergeben sich die wohlbekannten homogenen Maxwellgleichungen:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.10)$$

Dabei ist  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  der duale Feldstärketensor, der durch

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \quad (2.11)$$

unter Verwendung des total antisymmetrischen Epsilontensors aus dem Feldstärketensor  $F^{\mu\nu}$  hervorgeht.

Nachdem nun die Lagrangedichten bekannt sind, kann das Verhalten bezüglich Eichtransformationen untersucht werden.

Als Ausgangspunkt zur Diskussion von Eichinvarianzen wird hierbei das Diracfeld  $\psi(x)$  verwendet. Dieses bleibt invariant bezüglich einer globalen Transformation. Dies kann am Beispiel einer Multiplikation mit einem konstanten Faktor veranschaulicht werden [10], wobei  $\alpha$  eine reelle Zahl ist:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U\psi(x) = e^{-i\alpha}\psi(x). \quad (2.12)$$

Die Invarianz der Lagrangedichte  $\mathcal{L}_0$  aus Gleichung (2.4) führt in Verbindung mit dem Noethertheorem zu einem erhaltenen Viererstrom, was der Kontinuitätsgleichung in der Elektrodynamik und somit der Ladungserhaltung entspricht.

Die globale Phase  $\alpha$  ist beliebig. Daraus ergibt sich eine Menge von Invarianztransformationen  $U$ . Da diese Menge die algebraische Struktur einer Gruppe hat, kann der elektromagnetischen Wechselwirkung einer Symmetriegruppe zugeordnet werden. Dabei handelt es sich um die Gruppe  $U(1)$ . Fordert man zusätzlich auch die Invarianz unter einer lokalen Transformation, so dass die Phase  $\alpha$  nun abhängig vom jeweiligen Raum-Zeit-Punkt ist und die Transformation die Form

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \psi(x) e^{-iqf(x)} \quad (2.13)$$

hat, ergibt sich aufgrund der Ableitung ein zusätzlicher Term in der Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0 + q\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\partial_\mu f(x). \quad (2.14)$$

Diese Veränderung kann durch das Ersetzen der kovarianten Ableitung aufgehoben werden

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu. \quad (2.15)$$

Hier tritt ein zusätzliches Feld  $A_\mu(x)$  auf, dessen Transformationsverhalten unter  $U(1)$ -Transformationen wie folgt aussehen muss, damit die Lagrangedichte unter lokaler Symmetrietransformation eichinvariant bleibt:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x). \quad (2.16)$$

Das Feld  $A_\mu(x)$  entspricht hierbei gerade dem elektromagnetischen Feld  $A_\mu(x) = (\phi(x), \vec{A}(x))$  und  $q$  der Ladung des Teilchens, das durch den Dirac-Spinor  $\psi(x)$  beschrieben wird. Zusammenfassend kann man sagen, dass die Forderung nach Invarianz unter lokaler Eichtransformation des Materiefeldes zur Einführung eines Eichfeldes führt, das durch die Ersetzung der kovarianten Ableitung an das Materiefeld koppelt.

Fügt man nun der Lagrangedichte noch einen weiteren eichinvarianten Term hinzu, den man als kinetischen Photonterm  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  identifizieren kann, so ergibt sich die vollständige Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik (QED):

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.17)$$

Die Invarianz unter lokaler Eichtransformation führte also auf ein neues masseloses Vektorfeld und auf Zusatzterme, die die Kopplung des Feldes  $\psi(x)$ , den Elekt-



ronen und Positronen, und dem Eichfeld  $A_\mu(x)$ , den Photonen, beschreiben. Die Wechselwirkung und Existenz des Photons folgen also aus der geforderten Eichsymmetrie in der QED.

Dies ist der Grund, weshalb die Eichtheorie ein grundlegendes Prinzip im SM ist. Das Eichprinzip, das hier am Beispiel der abelschen U(1) Symmetriegruppe gezeigt wurde, kann ebenfalls auf die nicht Abelschen SU(N) Symmetriegruppen, welche  $N^2-1$  Generatoren besitzen, übertragen werden, um so in analoger Weise die anderen Wechselwirkungen zu beschreiben [11]. Die Wahl der Symmetriegruppe der Wechselwirkungen hängt mit den jeweiligen Quantenzahlen zusammen. Die Teilchen sind bei der starken bzw. schwachen Wechselwirkung in Triplets bezüglich ihrer Farbladung bzw. in Dubletts bezüglich ihres schwachen Isospins angeordnet. Daher entsprechen der schwachen und starken Wechselwirkung gerade die SU(2) und SU(3) Gruppen aus denen sich dann 3 bzw. 8 Eichbosonen ergeben. Zusätzlich zur QED gibt es die Quantenchromodynamik (QCD), die die Theorie zur Beschreibung der starken Wechselwirkung darstellt.

### 2.2.2 Quantenchromodynamik

Zur Vollständigkeit soll im Folgenden die Lagrangedichte der QCD wiedergegeben werden. Da das Prinzip dasselbe wie im Falle der QED ist, werden hier nur die wichtigsten Aspekte zusammengefasst.

Ausgangspunkt zur Betrachtung der Invarianz ist erneut die Lagrangedichte eines Diracfeldes nach Gleichung (2.4).

Unter der Berücksichtigung der drei Farbladungen rot (r), blau (b) und grün (g), ist  $\psi^f(x)$  hier ein dreizeiliger Spinor [10], der die unterschiedlichen Flavour  $f = u, d, s, c, b, t$  berücksichtigt:

$$\psi^f(x) = \begin{pmatrix} \psi_r^f(x) \\ \psi_g^f(x) \\ \psi_b^f(x) \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}^f(x) = \left( \bar{\psi}_r^f(x), \bar{\psi}_g^f(x), \bar{\psi}_b^f(x) \right). \quad (2.18)$$

Analog zur U(1)-Transformation ist die Lagrangedichte invariant unter einer globalen SU(3)-Transformation, die zur Erhaltung der Farbladung führt. Ersetzt man die globale durch eine lokale Transformation des Spinors der Form

$$\psi^f(x) \rightarrow \psi'^f(x) = \exp \left[ i \frac{g_s}{2} \lambda_j \omega_j(x) \right] \psi^f(x), \quad (2.19)$$

wobei erneut sowohl die Farb- als auch Flavourzustände berücksichtigt werden, geht die Invarianz aufgrund eines Zusatzterms in der Lagrangedichte verloren. Hierbei entsprechen  $\omega_j(x)$  beliebigen reellen Funktionen,  $g_s$  der Kopplungskonstanten der starken Wechselwirkung und  $\lambda_j$  den 3x3 Matrizen, die dem Anhang 10.1.2 entnommen werden können. Um eine lokale Eichinvarianz zu gewährleisten, wird die Ableitung in analoger Weise zur QED durch die kovariante Form ersetzt,

die acht zusätzliche Eichfelder mit sich bringt, welche gerade den Gluonfeldern entsprechen

$$\partial^\mu \rightarrow D^\mu = \partial^\mu + i \frac{g_s}{2} \lambda_j A_j^\mu(x). \quad (2.20)$$

Dabei müssen sich die Gluonfelder  $A_i^\mu(x)$  wie folgt transformieren, wobei  $f_{ijk}$  den Strukturkonstanten der SU(3) entsprechen

$$A_i^\mu(x) \rightarrow A_i'^\mu(x) = A_i^\mu(x) - \partial^\mu \omega_i(x) - g_s f_{ijk} \omega_j(x) A_k^\mu(x). \quad (2.21)$$

Die so modifizierte Lagrangedichte beschreibt die verschiedenen Quarkfelder und deren Wechselwirkung mit den Gluonfeldern.

Ähnlich zur QED wird zur vollständigen physikalischen Beschreibung ein Term in der Lagrangedichte benötigt, der die freien Gluonfelder beschreibt ohne die Eichinvarianz zu verletzen. Im Falle der Gluonfelder ist dieser von der Form

$$-\frac{1}{4} G_{i\mu\nu}(x) G_i^{\mu\nu}(x), \quad (2.22)$$

wobei  $G_i^{\mu\nu}$  über

$$G_i^{\mu\nu}(x) = F_i^{\mu\nu}(x) + g_s f_{ijk} A_j^\mu(x) A_k^\nu(x) \text{ und } F_i^{\mu\nu}(x) = \partial^\nu A_i^\mu(x) - \partial^\mu A_i^\nu(x) \quad (2.23)$$

definiert ist, welches ein freies, masseloses Gluon beschreibt.

Wie die entsprechende Wechselwirkung in der QED generiert sie Quark-Gluon Vertices. Aufgrund der nicht diagonalen Matrizen können Quarks der gleichen Farbe annihilieren und ein Quark einer anderen Farbe erzeugen [10]. Wegen der Farbladungserhaltung müssen die Gluonen deshalb selbst Farbe tragen, was einen großen Unterschied zur QED darstellt.

Durch analoge Vorgehensweise kann man ebenfalls die SU(2) Gruppe untersuchen, worauf an dieser Stelle verzichtet wird, da in Kapitel 2.2.3 noch näher auf die elektroschwache Wechselwirkung eingegangen wird. Die elektroschwache Theorie beinhaltet weitere, wichtige Aspekte des SM. Zum einen die Vereinheitlichung der Kräfte und zum anderen die spontane Symmetriebrechung, als Mechanismus zur Generierung der Masse.

### 2.2.3 Elektroschwache Vereinheitlichung

Während die elektromagnetische Kraft durch die relativistische Elektrodynamik auf großen und durch die QED auf kleinen Skalen gut beschrieben werden kann, verhält es sich mit der schwachen Kraft anders. Erste Theorien basierten auf der Phänomenologie des  $\beta$ -Zerfalls und beschrieben die schwache Wechselwirkung als Punktwechselwirkung. Selbst als man die schwache Wechselwirkung durch Austausch von Eichbosonen beschreiben konnte, entdeckte man immer noch experimentelle Besonderheiten. Beispielsweise die Paritätsverletzung bei schwachen

Prozessen und die unterschiedliche Kopplungsstärke an Fermionen des  $Z^0$ -Bosons im Vergleich zu den  $W^\pm$ -Bosonen.

Die Antwort auf bislang gestellte Fragen wurde im Rahmen der vereinheitlichten Theorie von Glashow, Salam und Weinberg (GSW-Theorie), die bereits 1967 entwickelt wurde, gefunden [3]. Diese fasst die elektromagnetische und schwache Wechselwirkung als zwei Aspekte einer einheitlichen Wechselwirkung auf. Die entsprechende Symmetriegruppe ist dabei die  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , wobei  $U(1)_Y$  der Gruppe der schwachen Hyperladung und  $SU(2)_L$  der Gruppe des schwachen Isospins entspricht.

Helizität	Generation			Quantenzahl		
	1	2	3	Q	$T_3$	$Y_W$
L	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	0	1/2	-1
				-1	-1/2	-1
	$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L$	2/3	1/2	1/3
				-1/3	-1/2	1/3
R	$e_R$	$\mu_R$	$\tau_R$	-1	0	-2
	$u_R$	$c_R$	$t_R$	2/3	0	4/3
	$d_R$	$s_R$	$b_R$	-1/3	0	-2/3

Tabelle 2.3: Anordnung der Fermionen in Dubletts und Singulets bezüglich der elektroschwachen Wechselwirkung und dazugehörige Quantenzahlen.

Die linkshändigen Leptonen und die gemischten, linkshändigen Quarks bilden dabei Dubletts gegenüber der elektroschwachen Kraft, wobei, wie man der Tabelle 2.3 entnehmen kann, die rechtshändigen Fermionen in Singulets angeordnet sind. Die schwache Hyperladung  $Y_W$  definiert sich über die dritte Komponente des schwachen Isospins  $T_3$  und der elektrischen Ladung  $Q$  [11] ähnlich zur Gell-Mann-Nishijima Beziehung in der starken Wechselwirkung, wobei die elektrische Ladung in Vielfachen der Elementarladung  $e$  angegeben wird

$$Y_W = 2(Q - T_3). \quad (2.24)$$

Durch Anwendung obiger Formel können leicht die Quantenzahlen in Tabelle 2.3 nachvollzogen werden. Innerhalb der elektroschwachen Theorie und damit des SM werden Neutrinos als masselos angesehen, obwohl durch Neutrinooszillationsexperimente bereits Nachweise auf eine nicht verschwindende Masse der Neutrinos bestehen. Durch diese Annahme kommen Neutrinos nur als linkshändige Fermionen und rechtshändige Antifermionen vor.

Um analog zum vorherigen Abschnitt den Einfluss lokaler Transformationen zu untersuchen, definiert man mit Hilfe des Chiralitätsprojektionsoperators  $P_{L,R}$  zunächst die rechts- und linkshändigen Komponenten eines Diracfeldes  $\psi(x)$ . In diesem Fall soll es sich um freie Leptonen handeln [10], die man über

$$\left. \begin{aligned} \psi_L(x) &= P_L \psi(x) \\ \psi_R(x) &= P_R \psi(x) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} (1 \mp \gamma_5) \psi(x) \quad (2.25)$$

erhält, da dies gerade die Eigenzustände des Chiralitätsoperator  $\gamma_5$  sind:

$$\gamma_5 \psi_{L,R} = \mp \psi_{L,R}. \quad (2.26)$$

Kombiniert man linkshändige Leptonfelder innerhalb eines zwei komponentigen Feldes

$$\Psi_L(x) = \begin{pmatrix} \psi_{\nu_l}^L(x) \\ \psi_l^L(x) \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

vereinfacht sich die Lagrangedichte zu

$$\mathcal{L} = i \left[ \bar{\Psi}_L(x) \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L(x) + \bar{\psi}_l^R(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi_l^R(x) + \bar{\psi}_{\nu_l}^R(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{\nu_l}^R(x) \right] \quad (2.28)$$

Wie erwartet ist die Lagrangedichte in Gleichung (2.28) invariant unter globaler Transformation. Nun wird die Invarianz der Lagrangedichte eines freien Leptonfeldes unter einer lokalen SU(2)-Transformation, wie

$$\begin{aligned} \Psi_L(x) &\rightarrow \Psi_L'(x) = \exp \left[ i \frac{g}{2} \tau_j \omega_j(x) \right] \Psi_L(x), \\ \psi_l^R(x) &\rightarrow \psi_l'^R(x) = \psi_l^R(x), \\ \psi_{\nu_l}^R(x) &\rightarrow \psi_{\nu_l}'^R(x) = \psi_{\nu_l}^R(x) \end{aligned} \quad (2.29)$$

und gleichzeitig einer lokalen U(1)-Transformation analog zum Kapitel 2.2.1

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp \left[ i \frac{g'}{2} Y_w f(x) \right] \psi(x) \quad (2.30)$$

untersucht.

Hierbei stellen  $f(x)$  und  $\omega_j(x)$  erneut beliebige Funktionen,  $g$  und  $g'$  die Kopplungskonstanten und  $Y_w$  und  $\tau^k$  die schwache Hyperladung und die Paulimatrizen dar. Um eine Eichinvarianz gegenüber den Transformationen in Gleichung (2.29) und (2.30) zu gewährleisten, muss man erneut die Ableitung ersetzen, wobei sowohl die SU(2)- als auch die U(1)-Transformation berücksichtigt wurde:

$$\begin{aligned} \partial^\mu \Psi_L(x) &\rightarrow D^\mu \Psi_L(x) = \left[ \partial^\mu - i \frac{g'}{2} B^\mu(x) + i \frac{g}{2} \tau_j W_j^\mu(x) \right] \Psi_L(x) \\ \partial^\mu \psi_l^R(x) &\rightarrow D^\mu \psi_l^R(x) = \left[ \partial^\mu - i g' B^\mu(x) \right] \psi_l^R(x) \\ \partial^\mu \psi_{\nu_l}^R(x) &\rightarrow D^\mu \psi_{\nu_l}^R(x) = \partial^\mu \psi_{\nu_l}^R(x). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Die zusätzlich eingeführten Eichfelder  $B^\mu$  und  $W_i^\mu$  sollten sich dabei wie folgt mittransformieren, wobei hier  $\omega_{j(x)}$  klein ist:

$$\begin{aligned} W_i^\mu(x) &\rightarrow W_i'^\mu(x) = W_i^\mu(x) - \partial^\mu \omega_i(x) - g \varepsilon_{ijk} \omega_j(x) W_k^\mu(x), \\ B^\mu(x) &\rightarrow B'^\mu(x) = B^\mu(x) - \partial^\mu f(x). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Durch die Forderung der lokalen Eichinvarianz unter  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Transformationen treten wie gehabt neue Eichfelder auf, das Eichfeld  $B^\mu$  der  $U(1)_Y$ - und die Felder  $W_i^\mu$  der  $SU(2)_L$ -Gruppe und deren Wechselwirkung mit den freien Leptonfelder. Zur Vollständigkeit können zur bestehenden Lagrangedichte eichinvariante Terme hinzugefügt werden, die die freien Eichfelder beschreiben. Unter Berücksichtigung der  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  sind diese von der Form

$$-\frac{1}{4} \left( B_{\mu\nu}(x) B^{\mu\nu}(x) + G_{i\mu\nu}(x) G_i^{\mu\nu}(x) \right), \quad (2.33)$$

wobei die Tensoren wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} B^{\mu\nu}(x) &= \partial^\nu B^\mu(x) - \partial^\mu B^\nu(x), \\ G_i^{\mu\nu} &= \partial^\nu W_i^\mu(x) - \partial^\mu W_i^\nu(x) + g \varepsilon_{ijk} W_j^\mu(x) W_k^\nu(x), \end{aligned} \quad (2.34)$$

mit  $\varepsilon_{ijk}$  den Strukturkonstante der  $SU(2)_L$ .

Die lokale Eichinvarianz konnte für die bisher betrachteten, masselosen Fermionfelder und masselosen Eichfelder erreicht werden. In der Realität trifft dies jedoch bis auf das Photon nicht zu, also können die Eichfelder  $B^\mu$  und  $W_i^\mu$  der elektroschwachen Wechselwirkung nicht den physikalischen Feldern entsprechen, da  $W^\pm$  und  $Z^0$ -Bosonen sogar sehr großen Massen haben. Ebenso sind Fermionen massebehaftet. Das explizite Einführen von Massentermen für die Fermionen der Art  $-m\bar{\psi}\psi = -m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$  oder analoge Massenterme für die Eichbosonen hätte zur Folge, dass die Eichinvarianz gebrochen ist und dass die Renormierbarkeit der Theorie nicht mehr gewährleistet ist (siehe Kapitel 2.2.5).

Dieses Problem kann durch eine spontane Symmetriebrechung, ein Konzept aus der Physik der Phasenübergänge, in Verbindung mit einem postulierten Feld, dem Higgs-Feld, gelöst werden. Wie man in Kapitel 2.2.4 sehen wird, können so die Massen innerhalb einer renormierbaren Theorie generiert werden.

## 2.2.4 Spontane Symmetriebrechung und Higgsmechanismus

Der Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung innerhalb der Teilchenphysik kann direkt aus der Festkörperphysik übertragen werden. Man kann sich vorstellen, dass für ausreichend hohe Temperaturen bzw. Energien die Eichbosonen der elektroschwachen Kraft masselos sind. Bei der Unterschreitung einer bestimmten Energie werden die Massen durch Ankopplung des skalaren Higgsfeldes erzeugt. Der theoretische Hintergrund soll im Folgenden näher erläutert werden.

Das Problem der Massenerhaltung der Fermionen und Eichbosonen wird durch die Annahme eines skalaren Feldes gelöst, so dass die Massen dynamisch durch die Wechselwirkung mit dem skalaren Feld generiert werden.

Um die vorhandene Symmetrie zu brechen, wird die einfachste Möglichkeit gewählt. Dabei handelt es sich um ein elektroschwaches Isospin-Dublett, dessen Komponenten skalare, komplexe Felder sind [12]

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^+(x) + i\phi_2^+(x) \\ \phi_1^0(x) + i\phi_2^0(x) \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Dieses Feld soll unter  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Transformation invariant sein, so dass sich die gleichen Transformationen wie in Gleichung (2.29) und (2.31) ergeben. Die Lagrangedichte des Feldes, die zusätzlich zu der Lagrangedichte der Fermionen und Bosonen hinzugefügt wird, hat die Form

$$\mathcal{L}_\Phi = [D^\mu \Phi(x)]^\dagger [D_\mu \Phi(x)] - V(\Phi^\dagger \Phi), \quad (2.36)$$

wobei die kovariante Ableitung der in Gleichung (2.31) entspricht, also gerade einem Feld mit schwacher Hyperladung  $Y_W = -1$ .

Der Term, der die Ableitung enthält, beschreibt die Wechselwirkung mit den  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Eichfeldern.

Das zusätzlich eingeführte Potential  $V(\Phi^\dagger \Phi)$  soll ebenfalls eichinvariant sein. Dies kann durch

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (2.37)$$

erreicht werden.  $\lambda$  ist dabei ein positiver Parameter, da sonst das Potential nicht nach unten beschränkt wäre.

Ist  $\mu^2$  ebenfalls positiv, so besitzt das Potential ein triviales Minimum bei  $\Phi = 0$ . In diesem Fall sind Grundzustand und Lagrangedichte invariant. Wählt man jedoch negative Werte von  $\mu^2$  so ergibt sich ein anderes globales Minimum bei  $\Phi(x) = \Phi_0$  mit

$$\Phi_0^\dagger \Phi_0 = |\phi_0^+|^2 + |\phi_0^0|^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda}. \quad (2.38)$$

Das Vakuum, das dem Grundzustand des Potentials entspricht, liegt also bei einem Wert des skalaren Feldes von  $\langle 0 | \Phi | 0 \rangle = \langle \Phi \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}$ , wobei  $v$  der Erwartungs-

wert des Vakuums (engl. vacuum expectation value, vev) ist. In Abbildung 2.2 wird gezeigt, dass unendlich viele äquivalente Grundzustände existieren. Die Entartung des Grundzustandes führt zur spontanen Symmetriebrechung. Nachdem eine bestimmte Phase und damit ein bestimmter Punkt aus der Menge der Grundzustände gewählt wurde, kann sie lokal nicht mehr geändert werden. Der Grundzustand ist im Gegensatz zur Lagrangedichte nicht mehr invariant. Ein skalares Feld, dessen

Erwartungswert nicht bei Null liegt, bricht die lokale Invarianz, weshalb eine spontane Symmetriebrechung vorliegt.

Da das Vakuum neutral sein soll [12], wählt man typischerweise ohne Beschränkung der Allgemeinheit folgenden Wert für den Vakuumerwartungswert

$$\langle \Phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{mit } v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}, \quad (2.39)$$

da dieser Zustand bei jeder anderen Wahl des Grundzustandes stets durch eine globale Eichtransformation eingenommen werden kann. Um den Quantenfluktuationen gerecht zu werden [13], kann man ein beliebiges Feld um den gewählten Grundzustand entwickeln

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \theta_2(x) + i\theta_1(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H(x)) - i\theta_3(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\theta_a(x)x^a}{v}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Es ergeben sich vier reelle Felder, wobei drei davon unphysikalische Felder sind. Die reellen Felder  $\theta_{1,2,3}$  sind Anregungen entlang des Feldes, welche auch als Goldstone-Moden bezeichnet werden. Das übrige Feld ist gerade das Higgsfeld  $H(x)$  mit Hyperladung  $Y = 1$  und Isospinkomponente  $I^3 = -1/2$ .

Die unphysikalischen Felder können mittels folgender Eichtransformation eliminiert werden, so dass nur noch das Higgsfeld als physikalisch signifikantes Feld übrig bleibt

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = e^{-i\frac{\theta_a(x)x^a}{v}} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

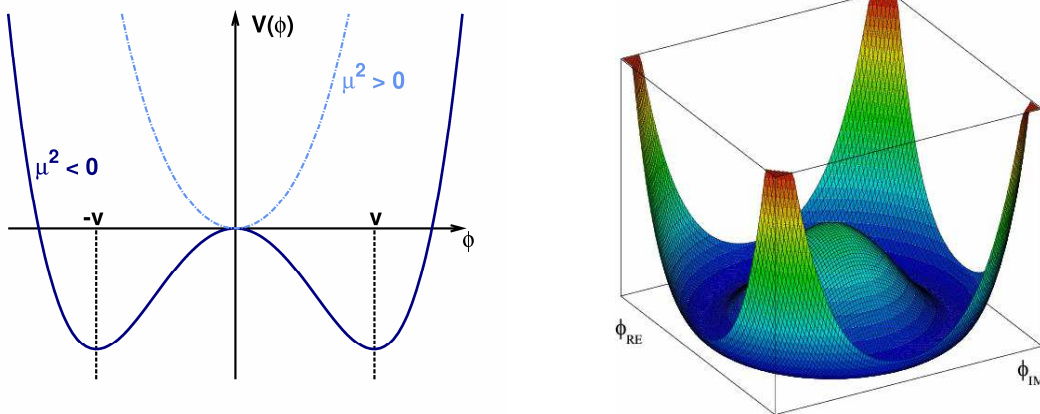


Abbildung 2.2: Higgspotential. Links: zweidimensionales Higgspotential. Für  $\mu^2 > 0$  ergibt sich das triviale Minimum und ein parabelförmiges Potential. Für  $\mu^2 < 0$  nimmt das Potential die charakteristische Form eines mexikanischen Huts ein. Rechts: dreidimensionales Higgspotential in Abhängigkeit des Real- und Imaginärteils des Feldes [14]. Für  $\Phi = 0$  ergibt sich hier ein lokales Maximum, was einem instabilen Grundzustand entspricht.

Der so entstandene Zustand ist nicht mehr invariant gegenüber  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Transformationen, jedoch unter  $U(1)_{\text{QED}}$ -Transformationen der QED. Durch Wahl eines bestimmten Grundzustands wurde die ursprüngliche  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  Symmetrie auf eine  $U(1)_{\text{QED}}$  Symmetrie herunter gebrochen. Es liegt also eine spontane Symmetriebrechung vor.

Die ursprünglichen vier Freiheitsgrade haben sich auf Einen reduziert. Diese drei Freiheitsgrade sind jedoch nicht verschwunden, sondern tauchen als longitudinale Polarisation der drei Eichbosonen auf, die dadurch massiv geworden sind. Die Massen der Eichbosonen ergeben sich durch Einsetzen des eben entwickelten Feldes aus Gleichung (2.41) in den Wechselwirkungsterm der Lagrangedichte des Feldes  $\Phi(x)$

$$\begin{aligned}
 |D_\mu \Phi|^2 &= \left| \left( \partial_\mu - i \frac{g'}{2} B_\mu + i \frac{g}{2} \tau^j W_\mu^j \right) \Phi \right|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} \partial_\mu - \frac{i}{2} (g W_\mu^3 + g' B_\mu) & -i \frac{g}{2} (W_\mu^1 - W_\mu^2) \\ -i \frac{g}{2} (W_\mu^1 + W_\mu^2) & \partial_\mu + \frac{i}{2} (g W_\mu^3 - g' B_\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &= \frac{1}{2} (\partial_\mu H)^2 + \frac{1}{8} g^2 (v + H)^2 |W_\mu^1 + W_\mu^2|^2 + \frac{1}{8} (v + H)^2 |g W_\mu^3 - g' B_\mu|^2.
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Wie man in Formel (2.42) sehen kann, haben  $W_\mu^1$  und  $W_\mu^2$  die gleichen Massen erhalten. Sie mischen zu den physikalischen und damit experimentell beobachtbaren Zuständen  $W^\pm$ :

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \pm i W_\mu^2). \tag{2.43}$$

Der Term in Gleichung (2.42) kann mit Gleichung (2.43) umgeschrieben werden zu

$$\frac{1}{8} g^2 v^2 |W_\mu^1 + W_\mu^2|^2 = \left( \frac{vg}{2} \right)^2 W^{+\mu} W_\mu^-. \tag{2.44}$$

Der Term vor dem Produkt der Eichbosonen kann so als deren Masse identifiziert werden

$$M_{W^\pm} = \frac{1}{2} gv. \tag{2.45}$$

Die physikalischen Felder  $A^\mu$  und  $Z^\mu$  ergeben sich indirekt aus Gleichung (2.42), da sie den Eigenzuständen der Matrix des letzten Terms entsprechen [12]. Um diese zu berechnen, diagonalisiert man die zweite Matrix durch eine unitäre Transformationsmatrix  $U$  nach

$$\begin{pmatrix} B_\mu^\dagger & W_\mu^{3\dagger} \end{pmatrix} U^{-1} U M U^{-1} U \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^{3\mu} \end{pmatrix}. \tag{2.46}$$



Dabei hat die unitäre Matrix die Form

$$U = \frac{1}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \begin{pmatrix} g & g' \\ -g' & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & \sin \theta_w \\ -\sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

wobei berücksichtigt wurde, dass eine solche Matrix ebenfalls als Drehung mit dem Drehwinkel  $\theta_w$  geschrieben werden kann. Hierbei entspricht  $\theta_w$  dem Weinbergwinkel, den man als Drehwinkel bezüglich der  $B^\mu - W^{3\mu}$ -Ebene interpretiert. So lassen sich die physikalische Felder  $A^\mu$  und  $Z^\mu$  als Superposition der Eichfelder  $B^\mu$  und  $W^{3\mu}$  darstellen

$$\begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} B^\mu \\ W^{3\mu} \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Setzt man die Transformation in den Wechselwirkungsterm der Lagrangedichte ein, kann man die Massen der physikalischen Teilchen ablesen, da die Massen gerade den Diagonalelementen des Terms  $UMU^{-1}$  entsprechen. Aus

$$\left(\frac{v}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} A_\mu & Z_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g'^2 + g^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

ergeben sich folglich

$$M_Z = \frac{1}{2} v \sqrt{g'^2 + g^2} \quad \text{und} \quad M_A = 0 \quad \text{mit} \quad \tan \theta_w = \frac{g'}{g}. \quad (2.50)$$

Da die Massen und Kopplungen experimentell gemessen wurden, kann man mit (2.45) und (2.50) den Vakuumerwartungswert  $v$  des Higgsfeldes zu 246 GeV bestimmen. Gleichmaßen kann aus den experimentellen Daten der Weinbergwinkel  $\theta_w$  berechnet werden, wodurch man mit

$$\sin^2 \theta_w = 0,23122 \pm 0,00015 \quad (2.51)$$

etwa einen Winkel von  $28,7^\circ$  erhält. Mit Hilfe des Higgsmechanismus konnten also nicht nur die Massen der drei Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung und des masseloses Photon bestimmt werden, sondern auch die Beziehung zwischen der elektrischen Ladung und den Kopplungskonstanten  $g$  und  $g'$  der  $SU(2)_L$  und  $U(1)_Y$

$$e = g' \cos \theta_w = g \sin \theta_w. \quad (2.52)$$

Durch die spontane Symmetriebrechung  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{\text{QED}}$  wurden drei der vier Freiheitsgrade des  $SU(2)$  Dubletts  $\Phi(x)$  absorbiert, so dass die Eichbosonen  $W^\pm$  und  $Z^0$  Masse erhielten. Der übrig gebliebene vierte Freiheitsgrad stellt das physikalische Higgsfeld dar. Diese Art der spontanen Symmetriebrechung ist be-

reits aus dem Bereich der Festkörperphysik bekannt, in denen die bekanntesten Beispiele der Ferromagnetismus und die Supraleitung sind.

Was der Higgsmechanismus jedoch nicht automatisch liefert, ist die Generierung der Massen der Fermionen. Diese müssen der bestehenden Lagrangedichte manuell durch invariante Massenterme hinzugefügt werden. Die Kopplung erfolgt über neue Kopplungsterme samt Kopplungskonstanten, den Yukawakopplungen. Um eichinvariante Terme zu erhalten [8], haben die Massenterme die Form

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L}_e &= -\lambda_e \bar{E}_L \Phi e_R + h.c. \text{ und} \\ \Delta\mathcal{L}_q &= -\lambda_d \bar{Q}_L \Phi d_R - \lambda_u \epsilon^{ab} \bar{Q}_{La} \Phi_b^\dagger u_R + h.c.,\end{aligned}\tag{2.53}$$

wobei die Massenterme und die Yukawakopplungskonstanten  $\lambda_e, \lambda_d, \lambda_u$  für die restlichen Fermionengenerationen analog aufgestellt werden können. Unter Berücksichtigung der oben diskutierten Symmetriebrechung werden Massenterme der Form

$$m_e = \lambda_e \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad m_d = \lambda_d \frac{v}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad m_u = \lambda_u \frac{v}{\sqrt{2}}\tag{2.54}$$

generiert, wobei die anderen Generationen analog weitergeführt werden können. Es ist zu beachten, dass im Falle der Quarks die Massenmatrix nicht diagonal ist, so dass die Wechselwirkungszustände nicht den Massenzuständen entsprechen. Um diese in Diagonalform zu bringen, benutzt man die bereits in Kapitel 2.1 diskutierte CKM-Matrix, die so die Mischung zwischen den Zuständen angibt. Die Matrixelemente können durch drei reelle Parameter und eine komplexe Phase parametrisiert werden.

Aus Gleichung (2.54) geht hervor, dass die einzelnen Yukawakopplungen proportional zur betrachteten Masse sind, weshalb die Kopplung des Higgsfeldes an ein Fermion proportional zu dessen Masse ist. Dieser wichtige Aspekt wird bei der Suche nach dem Higgs-Boson genutzt, so dass gerade solche Prozesse betrachtet werden, in denen schwere Fermionen teilnehmen. Die Yukawakopplungen sind für jedes Fermion unterschiedlich und müssen über die Beziehung in Gleichung (2.54) experimentell gemessen werden.

Zuletzt muss noch die Masse des Higgs-Bosons selbst angegeben werden. Die Higgsmasse und die Selbstwechselwirkung ergeben sich aus dem Higgspotential  $V(\Phi^\dagger \Phi)$ . Setzt man erneut die Entwicklung des Vakuumerwartungswertes (2.41) in das Higgspotential ein:

$$\begin{aligned}V(\Phi^\dagger \Phi) &= -\frac{1}{2} \lambda v^2 (v + H)^2 + \frac{1}{4} \lambda (v + H)^4 \\ &= -\frac{1}{2} \lambda v^4 + \frac{1}{2} \lambda v^2 H^2 + \lambda v H^3 + \frac{1}{4} \lambda H^4,\end{aligned}\tag{2.55}$$

ergibt sich daraus die Higgsmasse zu

$$M_H^2 = 2\lambda v^2 = 2\mu^2.\tag{2.56}$$

Da zwar der Wert des Vakuumerwartungswerts des Higgsfeldes experimentell bestimmt werden konnte, jedoch der Parameter  $\lambda$  noch unbestimmt ist, muss die Higgsmasse ebenfalls experimentell gemessen werden. Bisherige Suchen nach dem Higgs-Boson waren allerdings erfolglos. Lediglich eine untere Schranke von 114,4 GeV konnten aus direkten Suchen am Large-Elektron-Positron Collider (LEP) gemessen werden [15], weshalb nun am bisher größten Beschleuniger dem LHC am CERN (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire) danach gesucht wird.

### 2.2.5 Laufende Kopplungskonstanten - Renormierung

Die auftauchenden Kopplungskonstanten in der QED und QCD sind entgegen ihrer Namensgebung nicht konstant, sondern lediglich effektive Konstanten abhängig von der betrachteten Energie. Man misst deshalb innerhalb eines Experiments nie die „nackte“ Ladung. Die Kopplungskonstanten sind energieabhängig, bzw. äquivalent dazu, abhängig vom Abstand. Die Energieabhängigkeit hängt mit der existierenden Vakuumpolarisation zusammen. Diesen Effekt kann man sich am Beispiel einer punktförmigen elektrischen Ladung erklären. Befindet sich diese im Raum, können im elektrischen Feld um die punktförmige elektrische Ladung innerhalb der Heisenbergschen Unschärferelation

$$\delta t \cdot \delta E \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.57)$$

virtuelle Elektron-Positron-Paare aus dem Vakuum erzeugt werden. Diese virtuellen Elektron-Positron-Paare richten sich innerhalb des elektrischen Feldes aus, so dass das Vakuum polarisiert wird. Die „nackte“ Ladung wird abgeschirmt, so dass lediglich eine effektive Ladung vorliegt.

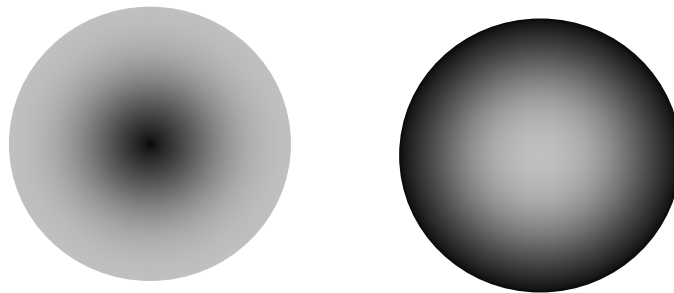


Abbildung 2.3: Veranschaulichung der unterschiedlichen Potentiale in der QED und QCD. Der dunkel gefärbte Bereich entspricht einem hohen Potential, wohingegen eine hellere Färbung ein geringeres Potential beschreibt. Links: Abschirmungseffekt in der QED. Rechts: Durch die Selbstkopplung der Gluonen ergibt sich in der QCD eine „Anti-Abschirmung“. Das Potential wird in der QED/QCD mit wachsendem Abstand geringer/größer.

Je nach Abstand zur „nackten“ Ladung hat man einen unterschiedlichen Abschirmungseffekt, so dass beispielsweise bei einer höheren Energie und damit einem kürzeren Abstand zur betrachteten Ladung ein Teil der Abschirmung durchdringt werden kann und somit eine höhere effektive Ladung beobachtet wird. Dieser Effekt kann auf die Kopplungskonstanten übertragen werden, da diese mit der elektrischen Ladung verknüpft sind.

Wendet man das Beispiel auf die QCD an, so ergibt sich ebenfalls die oben angesprochene Vakuumpolarisation. Diesmal werden Quark-Antiquark-Paare gebildet, da man hier Farbladungen betrachtet. Quarks sind jedoch nicht die einzigen farbgeladenen Teilchen, weshalb ebenfalls virtuelle Gluonen berücksichtigt werden müssen. Der Unterschied zur QED, die Selbstkopplung der Eichbosonen, führt zu einem entgegen gesetzten Effekt. Während die Quark-Antiquark-Paare die „nackte“ Farbladung in gleicher Weise wie die Elektron-Positron-Paare in der QED abschirmen, verstärken die virtuelle Gluonen die Farbladung, so dass in der Summe weniger abgeschirmt wird. Anstatt einer Abschirmung hat man dadurch eine Verstärkung der Farbladung mit wachsender Distanz, was in Abbildung 2.3 verdeutlicht ist [12]. Dieses umgekehrte Verhalten bringt zwei Effekte mit sich. Bei einer Verstärkung der Farbladung bei größeren Distanzen hat man den bereits in Abschnitt 2.1 erläuterten Effekt des Confinements vorliegen. Umgekehrt führt die Verringerung der effektiven Farbladung und damit der Kopplungskonstanten bei höheren Energien dazu, dass sich farbgeladene Objekt quasi frei bewegen, was als asymptotische Freiheit bezeichnet wird [3].

Dieses Verhalten wird mathematisch innerhalb des Renormierungsverfahrens beschrieben. Es erlaubt den Umgang mit divergenten Größen, die unter Betrachtung störungstheoretischer Terme höherer Ordnung auftreten können. Die Darstellung erfolgt über sogenannte Feynmandiagramme. Mit Hilfe der dazugehörigen Feynmanregeln, lassen sich alle möglichen Teilchenprozesse durch Lösen von Integralen berechnen [8].

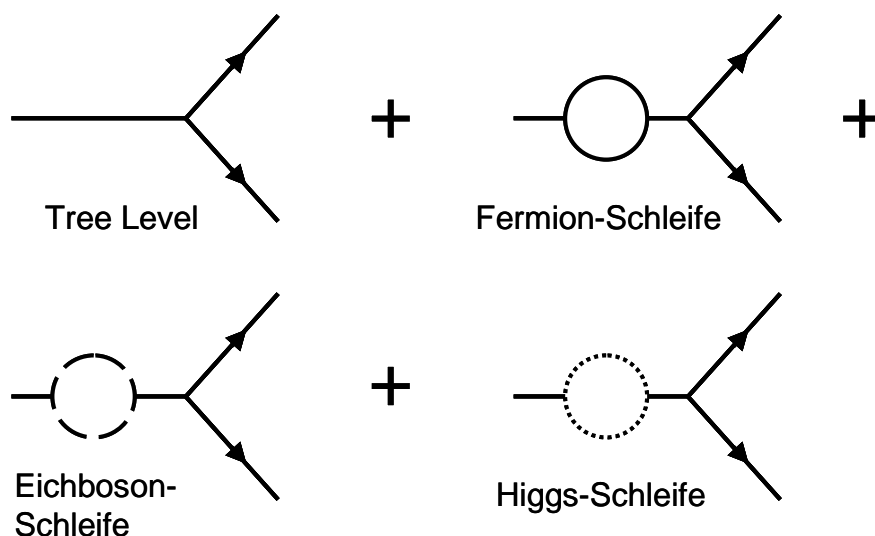


Abbildung 2.4: Diagramme der Vakuumpolarisation in erster störungstheoretischer Ordnung.

Berücksichtigt man nun die oben beschriebene Vakuumpolarisation, so werden zum Prozess niedrigster störungstheoretischer Ordnung, dem so genannten Tree Level oder Born Niveau, noch weitere Schleifendiagramme hinzuaddiert. Die zusätzlichen Prozesse erster Ordnung sind in Abbildung 2.4 dargestellt [12]. Da nun innerhalb einer Schleife über alle möglichen Impulse des virtuellen Teilchens integriert werden muss, treten divergente Integrale auf. Für unendlich große Impulsüberträge des virtuellen Teilchens würde ebenfalls der Wirkungsquerschnitt einen unendlich hohen Wert annehmen. Diese so genannten Ultraviolettdivergenzen können verhindert werden.

Mit Hilfe der Regularisierung und Renormierung werden in der QED und QCD Divergenzen innerhalb der Kopplungskonstante absorbiert.

Dazu wird zunächst ein Abschneideparameter  $\Lambda_{cut}$  definiert. Alle Impulse im divergenten Schleifenintegral werden oberhalb dieses Parameters vernachlässigt, so dass sich ein endliches Integral ergibt. Dies führt zu einer skalenabhängigen Kopplungskonstanten, die jedoch zwei unphysikalische Größen enthält. Zum einen die nackte Ladung und zum anderen den Abschneideparameter. Innerhalb der Renormierung kann diese Größe eliminiert werden, indem man für einen beliebigen Referenz-Viererimpuls  $\mu$  den Wert der Kopplungskonstanten  $a(\mu)$  durch eine Messung vorgibt. Löst man im Ausdruck für die Referenzkopplung nach der nackten Ladung auf, kann die nackte Kopplungskonstante im Ausdruck der Kopplungskonstanten ersetzt werden. Somit ergibt sich eine skalenabhängige renormierte Größe ohne unphysikalische Zusatzterme.

Wendet man dieses Verfahren an, so ergibt sich unter Berücksichtigung von Schleifenkorrekturen höherer Ordnung folgender Wert für die elektromagnetische Kopplungskonstante

$$\alpha_{em}(Q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{Q^2}{m_e^2}\right)}. \quad (2.58)$$

Hierbei wird als Referenz der Wert der Kopplungskonstante für den Grenzfall  $Q \rightarrow 0$  verwendet:

$$\alpha(Q=0) \approx \frac{1}{137}. \quad (2.59)$$

Wie erwartet ergibt sich aus Gleichung (2.58) das oben beschriebene Verhalten, nämlich ein Ansteigen der Kopplungskonstanten für wachsenden Impulsübertrag bzw. kleinere Abstände.

Wendet man das gleiche Verfahren auf die starke Kopplungskonstante der QCD an, so ergeben sich Unterschiede im Vorfaktor des logarithmischen Terms aufgrund der Gluonselfkopplung

$$\alpha_s(Q^2) = \alpha_s(\mu^2) \left( 1 + \frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} \left( 11 - \frac{2N_f}{3} \right) \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) \right)^{-1}. \quad (2.60)$$

Hierbei entspricht  $N_f$  der Anzahl der Quarkflavour, so dass der logarithmische Term positiv bleibt und sich ein gegensätzliches Verhalten zur QED ergibt. Die starke Kopplungskonstante wird oft in der Art

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\left(11 - \frac{2N_f}{3}\right) \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right)} \quad (2.61)$$

dargestellt, wobei der Parameter  $\Lambda_{QCD}$  von der Renormierungsmethode abhängt. Der Parameter  $\Lambda_{QCD}$  gibt den Gültigkeitsbereich der Kopplungskonstanten wieder. Dies bedeutet, dass der Ausdruck für die starke Kopplungskonstante nur für Viererimpulsüberträge größer als  $\Lambda_{QCD}$  gültig ist. Unterhalb der Skala bricht die Störungstheorie zusammen, da hier die Kopplungskonstante divergiert. Dieses Verhalten gibt es ebenfalls bei der Kopplungskonstanten der QED, jedoch für Impulsüberträge oberhalb eines bestimmten Wertes, der als Landau-Pol bezeichnet wird. Das Konzept zur Darstellung der energieabhängigen, physikalischen Größen wird mit Hilfe der Betafunktion innerhalb der Renormierungsgruppengleichungen (engl. renormalization group equation, RGE) behandelt. Dabei ergeben sich oftmals Sätze aus gekoppelten Differentialgleichungen, die numerisch gelöst werden können.

## 2.3 Grenzen des Standardmodells

Das SM, das durch eine  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  Eichgruppe beschrieben wird und dessen meiste Vorhersagen an Beschleunigerexperimenten mit hoher Präzision bestätigt wurden, hält noch einige offene Fragen bereit. Einige dieser Aspekte, die nicht innerhalb des SM gelöst werden können, sollen im Folgenden angesprochen werden.

Das SM kann nur drei der vier fundamentalen Wechselwirkungen innerhalb einer Quantenfeldtheorie darstellen. Die Gravitation wird durch die Beschreibung der allgemeinen Relativitätstheorie gesondert behandelt. Da man teilchenphysikalische Prozesse innerhalb eines Energiebereichs beobachtet in dem die Gravitation um ein Vielfaches schwächer ist als die restlichen Wechselwirkungen, muss diese nicht weiter berücksichtigt werden. Für große Energien im Bereich der Planck Skala  $E_{\text{Planck}} \approx 10^{19}$  GeV ändert sich dies jedoch, so dass die Gravitation nicht länger getrennt behandelt werden kann.

Die Vereinigung der elektromagnetischen und der schwachen zur elektroschwachen Wechselwirkung konnte durch das SM beschrieben werden. Eine Hinzunahme der starken Kraft zu einer großen vereinigten Theorie (engl. grand unified theory, GUT) würde die Theorie bestärken. Nimmt man eine große vereinheitlichte Theorie an, so sollten sich die drei Kopplungskonstanten bei hohen Energien, üblicherweise bei Energien von  $E_{\text{GUT}} > 10^{16}$  GeV, treffen. Extrapoliert man die drei Kopplungskonstanten mit Hilfe der RGE und unter Berücksichtigung von Präzisionsmessungen, so stellt sich heraus, dass eine exakte Vereinigung innerhalb des Standardmodells nicht möglich ist [12] (siehe Abbildung 2.5).

Selbst eine mögliche Vereinigung würde daraufhin zum Hierarchieproblem und zum Feinabstimmungsproblem (engl. fine tuning problem) führen. Unter dem Hierarchieproblem versteht man das Problem zwischen dem großen Unterschied der GUT und elektroschwachen Skala. Die Brechung der elektroschwachen Kraft findet auf einer Skala der Größenordnung  $10^3 \text{ GeV}$  statt. Die Frage, weshalb die Brechung der vereinheitlichten Kraft erst auf einer um 13 Größenordnungen größeren Skala statt findet, bleibt unbeantwortet [16].

Das Feinabstimmungsproblem taucht innerhalb des Higgssektors im SM auf. Berechnet man die Masse des Higgs-Bosons, so ergeben sich in höherer störungstheoretischer Ordnung Strahlungskorrekturen der Größenordnung  $\Delta M_H^2 \approx O(M_{\text{Planck}}^2)$ . Die Korrekturen, die um ein Vielfaches größer sind, als die Higgsmasse selbst, können innerhalb des Renormierungsverfahrens nur unter erheblicher Feinabstimmung behoben werden [17].

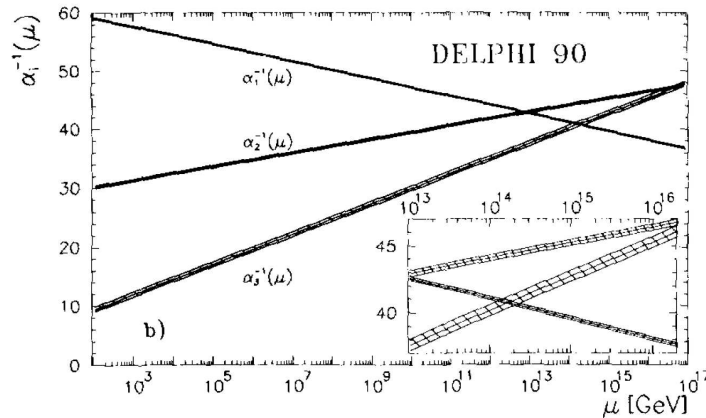


Abbildung 2.5: Laufende Kopplungskonstanten im SM. Entwicklung der drei Kopplungskonstanten, wobei die Dicke der Linien deren Fehler entspricht [18]. Innerhalb des SM ist eine Vereinigung bei hohen Energien nicht möglich.

Ein weiterer wichtiger Aspekt, der ebenfalls innerhalb dieser Arbeit näher diskutiert wird, ist die Tatsache, dass im Teilchenspektrum des SM kein Teilchen vorhanden ist, das die Existenz und die Menge der Dunklen Materie erklären kann. Aus kosmologischen Beobachtungen geht hervor, dass unser Universum aus fast 30% Materie besteht, wobei die baryonische Materie nur etwa 4% der gesamten Energiedichte ausmacht. Unter der Annahme, dass Dunkle Materie Teilchencharakter hat, muss das Teilchen schwer, stabil und neben gravitativ nur schwach wechselwirken (engl. weakly interacting massive particle, WIMP). Die Neutrinos wechselwirken zwar schwach, sind jedoch nicht massiv genug, um vollständig die Dunkle Materiedichte zu erklären. Da keine anderen SM-Teilchen für WIMPs in Frage kommen, kann man die Menge an Dunkler Materie innerhalb des SM nicht erklären [19].

Aufgrund der zahlreichen Bestätigungen von Vorhersagen des SM, also der Übereinstimmung von Theorie und Experiment, werden die Grenzen des SM als Unvollständigkeit verstanden und dazu verwendet, eine Erweiterung des Modells zu erreichen, statt es ganz zu verwerfen. Eine solche Erweiterung des SM ist die Supersymmetrie, mit deren Hilfe viele Schwächen des SM behoben werden können und welche im Rahmen dieser Arbeit näher untersucht werden soll.

### 3 Supersymmetrie

Die Supersymmetrie (SUSY) bzw. das minimale supersymmetrische Standardmodell (MSSM) sollen in diesem Kapitel als Erweiterung des SM vorgestellt werden. Zunächst werden die Grundzüge und der theoretische Hintergrund in Abschnitt 3.1 diskutiert. In den nachfolgenden Abschnitten wird auf Aspekte wie den Higgssektor in Kapitel 3.2 und auf ein supersymmetrisches Modell, das CMSSM, näher eingegangen, da diese innerhalb der Arbeit von großer Bedeutung sind. Zum Abschluss dieses Kapitels wird gezeigt, welche Grenzen des SM mit Hilfe der Supersymmetrie behoben werden können.

Die Supersymmetrie ist eine Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen. Diese Spinsymmetrie führt dazu, dass fermionische in bosonische Zustände übergeführt werden können und umgekehrt. In supersymmetrischen Theorien wird die SUSY-Transformation durch einen supersymmetrischen Operator  $Q$  vermittelt [20]:

$$Q|boson\rangle \propto |fermion\rangle \quad Q|fermion\rangle \propto |boson\rangle. \quad (3.1)$$

Damit  $Q$  der Generator sein kann, der zu einer Symmetrie zwischen einer kommutierenden und antikommutierenden Algebra führt, muss der Generator  $Q$  selbst den Spin  $s = 1/2$  tragen [16] und folgende Antikommutatorrelationen erfüllen:

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0, & \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} &= 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu, \\ [Q_\alpha, P^\mu] &= [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, P^\mu] = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

Wobei  $P_\mu$  der Viererimpuls und  $\sigma^\mu = (1, \sigma^i)$  über die Paulimatrizen  $\sigma^i$  definiert ist.

Allgemein sind bis zu  $N = 8$  supersymmetrische Generatoren für Supergravitationstheorien und bis zu  $N = 4$  für renormierbare Theorien möglich [21]. Die minimale Erweiterung des SM ist die Erweiterung durch  $N = 1$ , also einem supersymmetrischen Generator  $Q$ . Die Berücksichtigung eines solchen Operators wird als minimales supersymmetrisches Standardmodell bezeichnet.

Betrachtet man nun das SM unter Berücksichtigung der minimalen supersymmetrischen Erweiterung, so müsste zu jedem Elementarteilchen ein Partner existieren, der sich nur in seinem Spin unterscheidet und sonst identische Quantenzahlen besitzt und somit auch das gleiche Transformationsverhalten bezüglich Symmetrietransformationen aufweist. Diese Beschreibung trifft auf kein Teilchen im SM zu, weshalb eine minimale supersymmetrische Erweiterung des SM eine Verdopplung der Teilchenzahl mit sich bringt. Jedem Teilchen des SM wird also ein Superpartner mit den oben aufgeführten Eigenschaften zugeordnet. Aus theoretischen Überlegungen muss bei einer supersymmetrischen Erweiterung ebenfalls der Higgssektor des SM verändert werden. Trianguläre Graphen würden unter Annahme des ursprünglichen einfachen Higgsdubletts zu Divergenzen führen, die nur renormierbar wären, wenn die Eichinvarianz aufgegeben wird [22]. Um dies zu vermeiden, muss ein weiteres Higgsdublett definiert werden.



Man kann die Teilchen und Superpartner bezüglich ihrer Symmetrietransformation in Supermultipletts anordnen. Dabei befinden sich linkshändige Fermionen und Eichbosonen samt Superpartner in verschiedenen Supermultipletts, wohingegen die rechtshändigen Fermionen mit deren Superpartnern in Dubletts angeordnet sind. Tabelle 3.1 gibt einen Überblick der Teilchen und deren Quantenzahlen. Bei der Nomenklatur wird darauf geachtet, dass es für jedes Fermion ein skalares Fermion gibt, das mit einem zusätzlichen s am Wortanfang gekennzeichnet wird, also beispielsweise Sfermionen. Die supersymmetrischen Partner der Eichbosonen werden mit einem zusätzlichen Präfix –ino gekennzeichnet, also z.B. Photino. Symbolisch unterscheiden sich die supersymmetrischen Partner durch eine Tilde.

Name	bosonisch (Spin 0)	Fermionisch (Spin1/2)	SU(3)	SU(2)	U(1)
Sleptonen, Leptonen	$\tilde{L}_i = (\tilde{\nu}_e, \tilde{e})_L$ $\tilde{e}_{i,R}$	$L_i = (\nu_e, e)_L$ $e_{i,R}$	1 1	2 1	-1 +2
Squarks, Quarks	$\tilde{Q}_i = (\tilde{u}_i, \tilde{d}_i)_L$ $\tilde{u}_{i,R}$ $\tilde{d}_{i,R}$	$Q_i = (u_i, d_i)_L$ $u_{i,R}$ $d_{i,R}$	3 3 3	2 1 1	+1/3 -4/3 +2/3
Higgs. Higgsinos	$H_1 = (H_1^0, H_1^-)$ $H_2 = (H_2^+, H_2^0)$	$\tilde{H}_1 = (\tilde{H}_1^0, \tilde{H}_1^-)$ $\tilde{H}_2 = (\tilde{H}_2^+, \tilde{H}_2^0)$	1 1	2 2	-1 +1
Gluon, Gluino	$g$	$\tilde{g}$	8	1	0
W <sub>i</sub> Boson, Wino	$W_i$	$\tilde{W}_i$	1	3	0
B Boson, Bino	$B$	$\tilde{B}$	1	1	0

Tabelle 3.1: Teilcheninhalt im MSSM und dazugehörige Quantenzahlen.

Unter Berücksichtigung der Vertauschungsrelation, sollten Teilchen des gleichen Supermultipletts gleiche Massen haben. Da dies jedoch nicht beobachtet werden konnte, da bisher keine supersymmetrischen Teilchen entdeckt wurden, müssen die supersymmetrischen Partner gegenüber den SM-Teilchen viel schwerer sein. Aufgrund dieses Massenunterschieds muss es sich bei der Supersymmetrie um eine gebrochene Symmetrie handeln.

Nach dieser zunächst phänomenologischen Diskussion der Supersymmetrie soll im nachfolgenden Kapitel 3.1 näher auf den Formalismus und die theoretischen Grundlagen eingegangen werden.

### 3.1 Theoretische Grundlagen der Supersymmetrie

Ein eleganter Formalismus zur Beschreibung der Supersymmetrie ist der des Superraumes. Dazu erweitert man den üblichen euklidischen Minkowskiraum durch zwei weitere Koordinaten. Diese Erweiterungen entsprechen den Grassman-Variablen  $\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$  [21]:

$$\begin{aligned} \text{Raum} &\Rightarrow \text{Superraum} \\ x_\mu &\Rightarrow x_\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Die zwei zueinander konjugiert komplexen Koordinaten erfüllen dabei folgende Relationen

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = 0, \quad \{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} = 0, \quad \theta_\alpha^2 = 0, \quad \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}^2 = 0 \quad \text{mit } \alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta} = 1, 2. \quad (3.4)$$

Supersymmetrische Transformationen haben innerhalb des Superraums dann die Form einer Translation unter Berücksichtigung der Grassmankoordinaten

$$x_\mu \rightarrow x_\mu + i\theta\sigma_\mu\bar{\varepsilon} - i\varepsilon\sigma_\mu\bar{\theta}, \quad \theta \rightarrow \theta + \varepsilon \quad \text{und} \quad \bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} + \bar{\varepsilon}, \quad (3.5)$$

wobei  $\varepsilon$  und  $\bar{\varepsilon}$  Grassman Transformationsparameter sind. Die dazugehörigen Transformationsoperatoren, auch Superladungen genannt, leiten sich aus obigen Gleichungen ab, so dass sie von der Form

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \quad \text{und} \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} - i\theta_\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \quad (3.6)$$

sind. Um Felder im Superraum zu definieren, ist es zweckmäßig, das einfachste, SUSY invariante Feld zu verwenden. Dabei handelt es sich um ein skalares Superfeld  $F(x, \theta, \bar{\theta})$ . Berechnet man die Taylorentwicklung eines solchen Feldes, so ergibt sich eine endliche Anzahl von Entwicklungstermen aufgrund der verschwindenden Potenzen der Grassmannkoordinaten [21].

Durch die Einführung von chiralen kovarianten Ableitungen in der Symmetriegruppe, analog zu den Eichgruppen im SM, erhält man chirale Superfelder. Die kovariante Ableitung bezüglich des Superfeldes sind definiert als

$$\bar{D}F = 0 \quad \text{mit} \quad \bar{D} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} - i\theta\sigma^\mu\partial_\mu. \quad (3.7)$$

Die Taylorentwicklung des chiralen Superfeldes ist dann von der Form

$$\begin{aligned} \Phi(y, \theta) &= A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \\ &= A(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square A(x) \\ &\quad + \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar{\theta} + \theta\theta F(x). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Hierbei stellen die gewöhnlichen Felder, die Funktionen der vierdimensionalen Raumkoordinaten  $x$  sind, Komponenten des Superfeldes dar. Das komplexe, skalare Feld  $A(x)$ , die bosonische Komponente innerhalb des Ausdrucks (3.8), und der Weyl Spinor, der fermionische Anteil, sind zueinander supersymmetrische Partner. Des Weiteren taucht ein Hilfsfeld  $F(x)$  auf, auf das an dieser Stelle nicht weiter eingegangen wird, da es in der supersymmetrischen Lagrangedichte keine Dynamik enthält und so eliminiert werden kann [21]. Bei einer infinitesimalen SUSY Transformation ergeben sich folgende, zusätzliche Transformationsterme zum chiralen Superfeld

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon A &= \sqrt{2}\epsilon\psi \\ \delta_\epsilon \psi &= i\sqrt{2}\sigma^\mu \epsilon \partial_\mu A + \sqrt{2}\epsilon F \\ \delta_\epsilon F &= i\sqrt{2}\bar{\epsilon}\sigma^\mu \partial_\mu \psi.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Analoges Vorgehen gilt bei der Konstruktion eines antichiralen Superfeldes

$$\bar{D}\Phi^+ = 0 \quad \text{mit} \quad \bar{D} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} + i\sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu.\tag{3.10}$$

Zusätzlich zum chiralen Superfeld kann ein reelles Vektorsuperfeld mit  $V = V^\dagger$  eingeführt werden, um die eichinvarianten Wechselwirkungen zu beschreiben. Die allgemeine Darstellung des Vektorsuperfeldes enthält jedoch viele unphysikalische Komponenten, die mit Hilfe der Wess-Zumino-Eichung eliminiert werden können. Bei der reduzierten Form nach der Wess-Zumino-Eichung des Vektorfeldes

$$V = -\theta\sigma^\mu \bar{\theta} v_\mu(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x)\tag{3.11}$$

bleiben so, bis auf ein weiteres Hilfsfeld  $D(x)$ , nur noch die physikalischen Freiheitsgrade übrig, die den Vektoreichfeldern  $v_\mu(x)$  und dem Majorana Spinor Feld  $\lambda(x)$  entsprechen [23].

Betrachtet man nun Supereichtransformationen, ergibt sich analog zur minimalen Kopplung im SM ein eichinvariantes Produkt, das die Wechselwirkung der Vektorsuperfelder mit den chiralen Superfeldern beschreibt. Um eine eichinvariante Lagrangedichte zu konstruieren, muss man zur Erstellung eines kinetischen Terms des Vektorsuperfeldes eine chirale bzw. antichirale Feldstärke definieren

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 e^V D_\alpha e^{-V} \quad \text{bzw.} \quad \bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}D^2 e^V \bar{D}_{\dot{\alpha}} e^{-V},\tag{3.12}$$

was das Analogon zu den Feldstärketensoren aus Kapitel 2.2 darstellt.

Dabei ist  $D$  erneut die kovariante Ableitung, diesmal jedoch bezüglich des Super-raums. Der Feldstärketensor nimmt unter Berücksichtigung der Wess-Zumino-Eichung die Form

$$W_\alpha = T^a \left( -i\lambda_\alpha^a + \theta_\alpha D^a - \frac{i}{2}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \theta)_\alpha F_{\mu\nu}^a + \theta^2 (\sigma^\mu D_\mu \bar{\lambda}^a)_\alpha \right)\tag{3.13}$$

an, wobei

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu v_\nu^a - \partial_\nu v_\mu^a + f^{abc} v_\mu^b v_\nu^c \text{ und } D_\mu \bar{\lambda}^a = \partial \bar{\lambda}^a + f^{abc} v_\mu^b \bar{\lambda}^c \quad (3.14)$$

definiert sind.

Nach der Einführung der unterschiedlichen Felder kann nun die Lagrangedichte konstruiert werden. In Analogie zur Wirkung in Kapitel 2.2, die das Integral über die Raum-Zeit Koordinaten der Lagrangedichte ist, definiert man im supersymmetrischen Fall auf gleiche Weise die Wirkung samt Lagrangedichte mit dem Unterschied, dass eine Integration über den Superraum vorgenommen wird. Man kann also die Lagrangedichte, die die oben aufgeführten Felder enthält, elegant mit Hilfe des Superraums darstellen

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi_i^\dagger \Phi_i + \int d^2\theta \left[ \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} y_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right] + h.c.. \quad (3.15)$$

Das erste Integral stellt den kinetischen Term eines chiralen Superfeldes dar. Das zweite Integral enthält das Superpotential, das die Yukawa- und Massenterme beinhaltet. In ähnlicher Weise kann die Lagrangedichte für das Vektorsuperfeld aufgestellt werden. Im Anschluss kann die Integration über den Superraum ausgeführt werden. Da im Folgenden nur auf die wesentlichen Aspekte der Lagrangedichte eingegangen wird, kann eine komplette Aufstellung der Komponenten der Lagrangedichte des MSSM [24] entnommen werden. Für weitere Informationen der theoretischen Grundlagen empfiehlt sich ebenfalls [25] und [23].

Die Lagrangedichte des MSSM besteht vereinfacht dargestellt aus zwei Teilen. Der erste Teil ist die supersymmetrische Erweiterung des SM und der zweite Teil repräsentiert die Brechung, die den Massenunterschied zwischen den Superpartnern erklärt:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SUSY} \mathcal{L}_{Brechung}. \quad (3.16)$$

Des Weiteren ist die SUSY Lagrangedichte erneut aus zwei Teilen zusammengesetzt. Der erste Term enthält die kinetischen Terme der Eichfelder und deren Wechselwirkungen, der zweite beschreibt die Wechselwirkungen untereinander. Dabei tritt ein Superpotential auf, dessen Form bei der Ersetzung der Felder durch Superfelder an die des SM erinnert:

$$W_R = \varepsilon_{ij} \left( y_{ab}^U Q_a^j U_b^c H_2^i + y_{ab}^D Q_a^j D_b^c H_1^i + y_{ab}^L L_a^j E_b^c H_1^i + \mu H_1^i H_2^j \right), \quad (3.17)$$

wobei  $i, j = 1, 2, 3$  die SU(2) und  $a, b = 1, 2, 3$  die Generationsindizes darstellen.

Die Yukawakopplungen werden in diesem Kapitel mit  $y$  bezeichnet und  $\varepsilon_{ij}$  entspricht dem total antisymmetrischen Tensor. Da es im MSSM zwei Higgsfelder gibt, unterscheidet sich das Potential im letzten Term im Vergleich zu dem des SM. Dieser Term repräsentiert die Higgs-Mischung, die im SM aufgrund eines einzigen Higgsfeldes nicht auftaucht. Berücksichtigt man bei der Aufstellung der Lagrange-

dichte die Invarianz unter supersymmetrischen Transformationen, ist zusätzlich zu  $W_R$  ebenfalls ein weiterer Term der Form

$$W_{NR} = \varepsilon_{ij} \left( \lambda_{abd}^L L_a^i L_b^j E_d^c + \lambda_{abd}^L L_a^i Q_b^j D_d^c + \mu_a' L_a^i H_2^j \right) + \lambda_{abd}^B U_a^c D_b^c D_d^c \quad (3.18)$$

erlaubt. Diese Terme beschreiben allerdings Baryon- oder Leptonzahl verletzende Prozesse. Da solche Prozesse jedoch in der Natur nicht beobachtet werden, müssen solche Terme stark unterdrückt sein oder gar nicht erst auftauchen. Eine Möglichkeit diese Terme zu eliminieren, ist die Einführung einer weiteren Quantenzahl, der sogenannten R-Parität. Die Erhaltung der R-Parität wird in vielen supersymmetrischen Modellen, sowie innerhalb dieser Diplomarbeit, vorausgesetzt. Die dazugehörige Quantenzahl ist dabei wie folgt definiert [26]:

$$R = (-1)^{3(B-L)+2S}, \quad (3.19)$$

wobei  $B$  der Baryonzahl,  $L$  der Leptonzahl und  $S$  dem Spin des betrachteten Teilchens entspricht. Gewöhnliche Teilchen haben dann eine R-Parität von +1 und ihre supersymmetrischen Partner eine R-Parität von -1. Diese multiplikative Quantenzahl hat zur Folge, dass Terme wie in Gleichung (3.18) nicht mehr innerhalb der Lagrangedichte auftauchen und dass supersymmetrische Teilchen nur in Paaren erzeugt werden können. Somit muss das leichteste supersymmetrische Teilchen (engl. lightest supersymmetric particle, LSP) stabil sein, was es zu einen vielversprechenden Dunkle Materie Kandidaten macht.

Der zweite Ausdruck in der Lagrangedichte in Gleichung (3.16) beinhaltet die Terme, die aufgrund der Symmetriebrechung entstehen. Die Brechung selbst kann dabei durch viele verschiedene Brechungsmechanismen beschrieben werden. Da jedoch keines der Felder des MSSM einen nicht verschwindenden Vakuumerwartungswert verursachen kann, ohne dabei die Eichinvarianz zu verletzen, muss die spontane Symmetriebrechung mittels anderer Felder hervorgerufen werden. Das übliche Szenario, um eine Brechung der Supersymmetrie zu erreichen, ist das sogenannte Versteckte Szenario (engl. hidden scenario). Dabei nimmt man an, dass es zwei Sektoren gibt. Zum einen den sichtbaren Sektor (engl. visible sector), in dem sich die bekannten Materieteilchen befinden und zum anderen den versteckten Sektor (engl. hidden sector), das die Felder enthält, die die Brechung hervorrufen. Damit es zu einer Brechung kommen kann, benötigt man ein Boten-Teilchen (engl. messenger), der diese Wechselwirkung zwischen dem hidden und visible Sektor möglich macht [25].

An dieser Stelle gibt es viele Möglichkeiten für die Wahl des Boten, wobei in vielen Modellen die Brechung der Supersymmetrie mittels der Gravitation erklärt wird, was als Supergravitation (SUGRA) bezeichnet wird. Durch die Berücksichtigung der Gravitation wird ein weiteres Teilchen in das Teilchenspektrum aufgenommen, das Gravitino, der Superpartner des Gravitons, das den Spin 3/2 trägt [16]. Durch den Brechungsmechanismus ergibt sich eine Brechungsskala in der Größenordnung der Masse des Gravitinos. Dieser und auch andere Brechungsmechanismen führen zu der Einführung expliziter, sogenannter sanfter Brechungsterme (engl. soft-breaking terms):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{soft} = & -\sum_i m_i^2 |A_i|^2 - \sum_i M_i (\lambda_i \lambda_i + \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_i) - \sum_{ij} B_{ij} A_i A_j \\ & - \sum_{ijk} A_{ijk} A_i A_j A_k + h.c. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Diese Terme sind so geartet, dass keine quadratischen Divergenzen in den Strahlungskorrekturen der Superpartnermassen auftauchen, weshalb man von einer „sanften Brechung“ spricht. Unter Berücksichtigung der Felder im MSSM und der R-Paritätserhaltung ergibt sich folgende Form des Brechungsterms, mit dem das Massenspektrum berechnet werden kann

$$-\mathcal{L}_{Brechung} = \sum_i m_{0i}^2 |\varphi_i|^2 + \left( \frac{1}{2} \sum_{\alpha} M_{\alpha} \tilde{\lambda}_{\alpha} \tilde{\lambda}_{\alpha} + B H_1 H_2 + A_{ab}^U \tilde{Q}_a \tilde{U}_b^c H_2 + A_{ab}^D \tilde{Q}_a \tilde{D}_b^c H_1 + A_{ab}^L \tilde{L}_a \tilde{E}_b^c H_1 + h.c. \right), \quad (3.21)$$

wobei  $B$  und  $A$  die bi- bzw. trilinearen Kopplungen darstellen und  $\varphi_i$  allen skalaren Feldern und  $\lambda$  den supersymmetrischen Eichfelder, den Gaugino Feldern, entsprechen.  $\tilde{Q}, \tilde{U}, \tilde{D}$  und  $\tilde{L}, \tilde{E}$  sind die Squark- und Sleptonfelder und  $H_1$  und  $H_2$  die beiden SU(2)-Higgsdubletts [27].

Wie man an Gleichung (3.21) sieht, beinhaltet der Brechungsterm sehr viele freie Parameter, welche Vorhersagen für das Modell erschwert. Eine drastische Reduktion der Zahl der freien Parameter erreicht man durch die Annahme, dass sich für hohe Energie, üblicherweise an der GUT Skala, universelle Parameter der sanften Brechung ergeben.

Die Massen für die Spin 0 Teilchen nehmen dort einen gemeinsamen Wert  $m_0$  und die Spin 1/2 Teilchen den Wert  $m_{1/2}$  an. Zusätzlich gibt es eine universelle trilineare Kopplung  $A_0$ . Oft wird statt der einheitlichen bilinearen Kopplung  $B$  der dazu äquivalente Parameter  $\tan(\beta)$  benutzt.

Durch die oben beschriebenen Einschränkungen wird dieses supersymmetrische Modell als CMSSM (engl. constrained MSSM) bezeichnet, welches das grundlegende Modell dieser Diplomarbeit darstellt. Dieses Modell ist u.a. auch unter dem Namen mSUGRA (engl. minimal supergravity) bekannt, was jedoch als äquivalentes Modell anzusehen ist.

Die ursprünglichen 105 freien Parameter können so auf folgende fünf freie Parameter reduziert werden

- $m_0$ : Einheitliche Masse für Spin 0 Teilchen (Gauginos)  
 $M_1(M_{GUT}) = M_2(M_{GUT}) = M_3(M_{GUT}) = m_0.$
- $m_{1/2}$ : Einheitliche Masse für Spin 1/2 Teilchen  
 $\tilde{m}_{E,L,U^i,D^i,Q^i}(M_{GUT}) = m_{H_{1,2}}(M_{GUT}) = m_{1/2}.$
- $A_0$ : einheitliche trilineare Kopplung  
 $A_t(M_{GUT}) = A_b(M_{GUT}) = A_{\tau}(M_{GUT}) = A_0.$

Dabei werden nur die Kopplungen der dritten Generation der Fermionen berücksichtigt, da diese stets als Produkt mit den dazugehörigen Yukawa-

kopplungen auftreten. Aufgrund der großen Massenunterschiede, können so die restlichen trilinearen Kopplungen vernachlässigt werden.

- $\text{sign}(\mu)$ : Vorzeichen des Mischungsparameters der Higgsfelder  $\mu$ . Durch die Forderung der elektroschwachen Symmetriebrechung ist der Wert von  $\mu$  festgelegt, so dass nur das Vorzeichen ein freier Parameter ist.
- $\tan(\beta)$ : das Verhältnis der Vakuumerwartungswerte  $v_1$  und  $v_2$  der beiden Higgsfelder.

Durch die Reduktion der freien Parameter ergibt sich eine einfachere Vorhersage des Massenspektrums. Nimmt man eine Kombination der hier beschriebenen fünf CMSSM Parameter auf der GUT Skala an, so kann man mit Hilfe der RGE die Werte aller Massen und Kopplungen im Niederenergiebereich bestimmen. Eine Ausstellung der dazugehörigen RGE, die sich aus der Lagrangedichte ergeben, ist in [21] angegeben.

Kennt man das Teilchenspektrum bei niedrigen Energien, kann dieses mit den experimentellen Daten verglichen werden und so eine Abschätzung des verwendeten Parametersatzes gemacht werden. Die Untersuchung der Kombinationsmöglichkeiten der CMSSM Parameter und deren Übereinstimmung mit den aktuellen kosmologischen und elektroschwachen Präzisionsdaten, um so eine Vorhersage des erlaubten Parameterbereichs zu machen, ist eines der Ziele dieser Diplomarbeit.

## 3.2 Higgssektor im MSSM

Wie bereits erwähnt werden im MSSM zwei komplexe Dubletts skalarer Felder mit der schwachen Hyperladung  $Y_W=-1$  und  $Y_W=+1$  benötigt:

$$H_1 = \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Die Brechung von SUSY führt zu sanften Brechungstermen in der Lagrangedichte. Der Mechanismus der elektroschwachen Symmetriebrechung muss jedoch in gleicher Weise statt finden, wie im SM in Kapitel 2.2.4 gezeigt wurde. Die Form des dazugehörigen Higgspotentials muss nicht konstruiert werden, sondern ergibt sich direkt aus dem Superpotential [28] und den dazugehörigen Wechselwirkungstermen zu

$$V = m_1^2 |H_1|^2 + m_2^2 |H_2|^2 - m_3^2 (H_1 H_2 + h.c.) + \frac{1}{8} (g^2 + g'^2) (|H_1|^2 - |H_2|^2)^2 - \frac{1}{2} g^2 |H_1^\dagger H_2|^2, \quad (3.23)$$

wobei  $m_1^2 = m_{H_1}^2 + \mu^2$ ,  $m_2^2 = m_{H_2}^2 + \mu^2$  und  $m_3^2 = -B\mu_0$  ist bzw. an der GUT-Skala

$m_1^2(M_{GUT}) = m_2^2(M_{GUT}) = m_0^2 + \mu_0^2$ . Der Vakuumerwartungswert, also das Minimum des obigen Potentials, sollte wie im SM einen von Null verschiedenen Wert für eine spontane Symmetriebrechung annehmen. Die Suche eines nicht trivialen Minimums des obigen Potentials führt auf folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial H_1} &= m_1^2 v_1 - m_3^2 v_2 + \frac{g^2 + g'^2}{4} (v_1^2 - v_2^2) v_1 = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial H_2} &= m_2^2 v_2 - m_3^2 v_1 + \frac{g^2 + g'^2}{4} (v_1^2 - v_2^2) v_2 = 0.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Um einen einfacheren Umgang mit den Gleichungen (3.24) zu ermöglichen, wird mit Hilfe der von Null verschiedenen Vakuumerwartungswerte der einzelnen Higgs-Dubletts

$$\langle H_1 \rangle = v_1 \text{ und } \langle H_2 \rangle = v_2 \tag{3.25}$$

und der daraus folgenden Definition des CMSSM Parameter

$$\tan(\beta) = \frac{v_2}{v_1} = \frac{v \sin(\beta)}{v \cos(\beta)} \quad \text{mit } v_1^2 + v_2^2 = v^2 \tag{3.26}$$

Gleichung (3.24) umgeschrieben zu

$$v^2 = \frac{4(m_1^2 - m_2^2 \tan^2 \beta)}{(g^2 + g'^2)(\tan^2 \beta - 1)} \quad \text{und} \quad \sin 2\beta = \frac{2m_3^2}{m_1^2 + m_2^2}. \tag{3.27}$$

Mit den so umgeschriebenen Gleichungen in (3.27) ist ersichtlich, dass sich für die GUT Skala keine Symmetriebrechung ergeben kann, da hier  $v^2$  stets negativ ist und somit kein Minimum existiert. Eine positive Lösung ergibt sich nur, wenn die Bedingungen

$$m_3^2 > m_1^2 \cdot m_2^2 \text{ und } 2 \cdot m_3^2 < m_1^2 + m_2^2 \tag{3.28}$$

gleichzeitig erfüllt sind.

Diese können nur unterhalb der GUT Skala simultan erfüllt werden, indem man die zur betrachteten Energie jeweilige renormierte Größe verwendet. Die Energieabhängigkeit der Parameter führt zu laufenden Parametern, die an einer bestimmten Skala die Forderungen in Gleichung (3.28) erfüllen und so zu einer spontanen Symmetriebrechung führen. Dieses Phänomen wird als spontane Symmetriebrechung aufgrund von Strahlungskorrekturen (engl. radiative spontaneous symmetry breaking) bezeichnet.

Um mit den experimentellen Beobachtungen des Vakuumerwartungswertes des SM überein zustimmen, muss

$$v_1^2 + v_2^2 = v^2 = 246 \text{ GeV} \tag{3.29}$$

gelten. Die Massen der  $W^\pm$ - und  $Z^0$ -Bosonen in Gleichung (2.45) und (2.50) müssen entsprechend Gleichung (3.29) ersetzt werden.



Zur Bestimmung der Massen der auftretenden Higgs-Bosonen kann analog zu Kapitel 2.2.4 eine Entwicklung um die Vakuumerwartungswerte vorgenommen werden, was zu

$$H_1 = \begin{pmatrix} v_1 + \frac{S_1 + iP_1}{\sqrt{2}} \\ H_1^- \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} H_2^+ \\ v_2 + \frac{S_2 + iP_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

führt. Dies führt erneut auf drei Goldstonebosonen  $G^0$  und  $G^\pm$ , die im Austausch für die longitudinale Polarisierung der Eichbosonen  $Z^0$  und  $W^\pm$  verschwinden werden. Des Weiteren ergeben sich fünf physikalische Higgsfelder  $h$ ,  $H$ ,  $A$  und  $H^\pm$ . Während die Higgsfelder  $H^\pm$  geladen sind, sind die restlichen Higgsfelder neutral. Der Unterschied zwischen dem leichtesten skalaren Higgs  $h$  und dem schwereren Higgs  $H$  gegenüber dem pseudoskalaren Higgs  $A$  ist das Verhalten unter CP-Transformationen, was einer Kombination aus einer Ladungskonjugation und Paritätstransformation entspricht. Während die Higgs-Bosonen  $h$  und  $H$  CP-gerade sind, ist das pseudoskalare Higgs  $A$  CP-ungerade.

Die Massen der Felder ergeben sich aus der Diagonalisierung der Massenmatrix, wobei man einen unterschiedlichen Mischungswinkel für die jeweiligen Matrizen verwendet. Die Higgs-Bosonen  $A$  und  $H^\pm$  lassen sich mit Hilfe des Mischungswinkels  $\beta$  aus Gleichung (3.26) darstellen [21]:

$$\begin{pmatrix} G^0 \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^0 \\ P_2^0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} G^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1^\pm \\ H_2^\pm \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Für die neutralen CP-geraden Higgs-Bosonen  $h$  und  $H$  wird ein Mischungswinkel  $\alpha$  definiert:

$$\cos 2\alpha = -\cos 2\beta \frac{M_A^2 - M_Z^2}{M_H^2 - M_h^2} \quad \text{bzw.} \quad \sin 2\alpha = -\sin 2\beta \frac{M_H^2 + M_h^2}{M_H^2 - M_h^2}. \quad (3.32)$$

Dadurch kann die Massenmatrix wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} H \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_2^0 \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Für die physikalischen Massen der Higgs-Bosonen in der führenden störungstheoretischen Ordnung erhält man daraus folgende Darstellung

$$m_A^2 = m_1^2 + m_2^2, \quad m_{H^\pm}^2 = m_A^2 + M_W^2, \quad m_{h,H}^2 = \frac{1}{2} \left[ m_A^2 + M_Z^2 \mp \sqrt{(M_A^2 + M_Z^2)^2 - 4M_A^2 M_Z^2 \cos^2 2\beta} \right]. \quad (3.34)$$

Die bisherigen Angaben der Massen wurden in der niedrigsten störungstheoretischen Ordnung gemacht, da ebenfalls der Ausgangspunkt das Higgspotential in Gleichung (3.23) das Tree Level-Potential darstellt. Berücksichtigt man Schleifenkorrekturen höherer Ordnung, so modifizieren sich obige Gleichungen. Der größte

Unterschied ergibt sich hierbei für das leichteste Higgs  $h$ . Unter Berücksichtigung der Schleifendiagramme ergibt sich eine Erhöhung der oberen Schranke der Masse des Higgs  $h$  von  $M_Z \approx 91 \text{ GeV}$  auf  $m_h \leq 130 \text{ GeV}$  [29].

Die Massen der fünf Higgs-Bosonen und die dazugehörigen Mischungswinkel  $\alpha$  und  $\beta$  sind, wie in Gleichung (3.32) und (3.34) gezeigt wird, nicht unabhängig voneinander. Innerhalb dieses Satzes von Parametern sind nur zwei unabhängig, weshalb man oft die Masse des pseudoskalaren Higgs  $m_A$  und  $\tan(\beta)$  wählt, um den Higgs Sektor im MSSM zu beschreiben.

Zur Untersuchung der Wechselwirkung zwischen den Higgs-Bosonen und Fermionen werden erneut die Yukawakopplungen verwendet. Dabei sind die Felder  $H_1$  und  $H_2$  jeweils für die Generierung der Massen der Fermionen mit unterschiedlicher dritter Komponente des schwachen Isospins zuständig.  $H_1$  gibt den Fermionen mit Isospin  $-1/2$  Masse, wohingegen  $H_2$  an Fermionen mit Isospin  $+1/2$  koppelt. Aus diesem Grund ergeben sich unterschiedliche Kopplungen der Higgs-Bosonen an Fermionen. Man unterscheidet hierbei zwischen up- ( $u, c, t$ ) und downartigen ( $d, s, b, e, \mu, \tau$ ) Fermionen [30]:

$$\begin{aligned} g_{huu} &\propto \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}, & g_{Huu} &\propto \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, & g_{Auu} &\propto \cot \beta, \\ g_{hdd} &\propto -\frac{\sin \alpha}{\cos \beta}, & g_{Hdd} &\propto \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}, & g_{Add} &\propto \tan \beta. \end{aligned} \quad (3.35)$$

### 3.2.1 Elektroschwache Symmetriebrechung aufgrund von Strahlungskorrekturen

Der Begriff der elektroschwachen Symmetriebrechung aufgrund von Strahlungskorrekturen [21], der bereits im vorangegangenen Kapitel 3.2 auftauchte, wird im Folgenden näher diskutiert.

An der GUT Skala nehmen die Higgsparameter  $m_1^2$  und  $m_2^2$  positive Werte an, weshalb das Higgspotential kein nicht triviales Minimum besitzt. Berechnet man mit Hilfe der RGE die Energieabhängigkeit der Größen, so ändern die Higgsparameter an einer bestimmten Skala ihr Vorzeichen. Dies hat ein nicht triviales Minimum des Potentials zur Folge, so dass die elektroschwache Symmetrie spontan gebrochen ist. Im Gegensatz zum SM, in dem die spontane Symmetriebrechung ad hoc eingeführt wurde, ergibt sich diese im MSSM aufgrund der Strahlungskorrekturen, die durch die laufenden Parameter berücksichtigt werden. Der Beitrag zu den Strahlungskorrekturen ist hauptsächlich auf die Yukawakopplungen von  $t$ - und  $b$ -Quark zurückzuführen.

Durch den Mechanismus der laufenden Kopplungskonstanten können ebenso die unterschiedlichen Skalen der spontanen Symmetriebrechungen erklärt werden. Da die Energieabhängigkeit der Higgsparameter einen logarithmischen Verlauf [21] aufweist, dauert es sehr lange, bis die Parameter, die eine Größenordnung von  $10^2$  -  $10^3$  GeV auf der GUT Skala annehmen, negative Werte erreichen.

### 3.3 Teilchenspektrum des MSSM

Mit Hilfe der Massenterme in der Lagrangedichte des MSSM können die Massenmatrizen für alle Teilchen aufgestellt werden. Durch Berechnung der Masseneigenzustände sind die Massen an der GUT Skala bekannt. Zur Bestimmung der dazugehörigen Massen bei niedrigen Energien müssen die RGE gelöst werden. Durch Ersetzen der renormierten Größen in den Massenmatrizen kann das Massenspektrum der Superpartner vorhergesagt werden. In diesem Kapitel soll ein Überblick über die Massen der Superpartner gegeben werden.

#### 3.3.1 Gaugino und Higgsino Massenterme

Die Massenmatrix der Gauginos, der Superpartner der Eichbosonen der SU(2) und U(1), und der Higgsinos, der Superpartner der Higgs-Bosonen, ist nicht diagonal. Dies führt zu einer Mischung der Zustände. Innerhalb der Lagrangedichte sind die Massenterme von der Form

$$\mathcal{L}_{\text{Gaugino-Higgsino}} = -\frac{1}{2} M_3 \bar{\lambda}_a \lambda_a - \frac{1}{2} \bar{\chi} M^{(0)} \chi - (\bar{\psi} M^{(c)} \psi + h.c.), \quad (3.36)$$

wobei  $\lambda$  den Majorana Gluino Feldern entspricht, welche schon physikalische Eigenzustände darstellen und deshalb nicht mischen [21]. Des Weiteren treten die Majorana-Neutralino- und die Dirac-Chargino-Felder auf:

$$\chi = \begin{pmatrix} \tilde{B}^0 \\ \tilde{W}^3 \\ \tilde{H}_1^0 \\ \tilde{H}_2^0 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \tilde{W}^+ \\ \tilde{H}^+ \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Die Neutralinos bzw. Charginos entsprechen den neutralen bzw. geladenen Gauginos und Higgsinos. Um die Massen der Neutralinos zu erhalten, muss die dazugehörige Massenmatrix der Form

$$M^{(0)} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -M_Z c_\beta s_W & M_Z s_\beta s_W \\ 0 & M_2 & M_Z c_\beta c_W & -M_Z s_\beta c_W \\ -M_Z c_\beta \sin_w & M_Z c_\beta c_W & 0 & -\mu \\ M_Z s_\beta \sin_w & -M_Z s_\beta c_W & -\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

durch eine unitäre Transformation diagonalisiert werden [31]. Die Elemente der Massenmatrix beinhalten dabei die Masse des Z-Bosons  $M_Z$  und cos- und sin-Terme mit dem Weinbergwinkel  $\theta_w$  und  $\beta$  als Argument. Nach der Transformation können die Eigenzustände der Massenmatrix berechnet werden.

Die geladenen Gauginos, darunter die geladenen Winos und Higgsinos, mischen zu den Charginos. Die dazugehörige Massenmatrix

$$M^{(c)} = \begin{pmatrix} M_2 & \sqrt{2}M_W \sin \beta \\ \sqrt{2}M_W \cos \beta & \mu \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

kann ebenfalls diagonalisiert werden, so dass sich die zwei Chargino-Eigenzustände ergeben

$$M_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{M_2^2 + \mu^2 + 2M_W^2}{\mp \sqrt{(M_2^2 - \mu^2)^2 + 4M_W^4 \cos^2 2\beta + 4M_W^2 (M_W^4 + \mu^2 + 2M_2\mu \sin 2\beta)}} \right]. \quad (3.40)$$

### 3.3.2 Squark- und Sleptonmassen

Die Squarks und Slep-tonen sind die Superpartner der Quarks und Leptonen. Da man zwischen rechts- und linkshändigen Fermionen unterscheidet, gibt es hierzu auch jeweils einen Superpartner. Zur Berechnung der Massen der unterschiedlichen links- bzw. rechtshändigen Superpartner müssen wie bei den Neutralinos und Charginos, die Masseneigenzustände der zugehörigen Massenmatrizen berechnet werden. Dabei ergeben sich Mischungen zwischen den links- und rechtshändigen Anteilen die proportional zur Masse der SM-Teilchen sind, weswegen die Mischungen der ersten beiden Generationen vernachlässigt werden können. Die Mischung für Stau, Stop und Sbottom können jedoch nicht vernachlässigt werden [21], weshalb die Mischungsmatrizen

$$\begin{pmatrix} \tilde{m}_{tL}^2 & m_t(A_t - \mu \cot \beta) \\ m_t(A_t - \mu \cot \beta) & \tilde{m}_{tR}^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{m}_{bL}^2 & m_b(A_b - \mu \tan \beta) \\ m_b(A_b - \mu \tan \beta) & \tilde{m}_{bR}^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{m}_{\tau L}^2 & m_\tau(A_\tau - \mu \tan \beta) \\ m_\tau(A_\tau - \mu \tan \beta) & \tilde{m}_{\tau R}^2 \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{tL}^2 &= \tilde{m}_Q^2 + m_t^2 + \frac{1}{6}(4M_W^2 - M_Z^2)\cos 2\beta, \\ \tilde{m}_{tR}^2 &= \tilde{m}_U^2 + m_t^2 - \frac{2}{3}(M_W^2 - M_Z^2)\cos 2\beta, \\ \tilde{m}_{bL}^2 &= \tilde{m}_Q^2 + m_b^2 - \frac{1}{6}(2M_W^2 + M_Z^2)\cos 2\beta, \\ \tilde{m}_{bR}^2 &= \tilde{m}_D^2 + m_b^2 + \frac{1}{3}(M_W^2 - M_Z^2)\cos 2\beta, \\ \tilde{m}_{\tau L}^2 &= \tilde{m}_L^2 + m_\tau^2 - \frac{1}{2}(2M_W^2 - M_Z^2)\cos 2\beta \text{ und} \\ \tilde{m}_{\tau R}^2 &= \tilde{m}_E^2 + m_\tau^2 + (M_W^2 - M_Z^2)\cos 2\beta \end{aligned} \quad (3.42)$$

untersucht werden können. Die ersten Terme in Gleichung (3.42) entsprechen den Massen aus der sanften Brechung, die mit Hilfe der RGE berechnet wurden. Der zweite Term entspricht den Massen der Quarks und Leptonen und der letzte Term resultiert aus dem dazugehörigen Potential.

Die resultierenden Mischungen der Massen für die schweren Squarks und Sleptonen lauten dann

$$\begin{aligned}
 \tilde{m}_{\tilde{t}_{1,2}}^2 &= \frac{1}{2}(\tilde{m}_{tL}^2 + \tilde{m}_{tR}^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\tilde{m}_{tL}^2 - \tilde{m}_{tR}^2)^2 + m_t^2(A_t - \mu \cot \beta)^2}, \\
 \tilde{m}_{\tilde{b}_{1,2}}^2 &= \frac{1}{2}(\tilde{m}_{bL}^2 + \tilde{m}_{bR}^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\tilde{m}_{bL}^2 - \tilde{m}_{bR}^2)^2 + m_b^2(A_b - \mu \tan \beta)^2}, \\
 \tilde{m}_{\tilde{\tau}_{1,2}}^2 &= \frac{1}{2}(\tilde{m}_{\tau L}^2 + \tilde{m}_{\tau R}^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\tilde{m}_{\tau L}^2 - \tilde{m}_{\tau R}^2)^2 + m_\tau^2(A_\tau - \mu \tan \beta)^2}.
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

### 3.4 Motivation von SUSY

Die Grenzen des SM wurde bereits in Kapitel 2.3 aufgezählt. In diesem Kapitel soll dargestellt werden, welche Grenzen und wie diese aufgehoben werden, um damit die Motivation für Supersymmetrie und im Besonderen für das CMSSM aufzuzeigen [12].

- *GUT*  
Mit Hilfe der Supersymmetrie gelingt eine Vereinheitlichung der Kopplungskonstanten der elektroschwachen und der starken Wechselwirkung.
- *Gravitation*  
Innerhalb des Brechungsmechanismus des hidden Sektors ist eine Berücksichtigung der Gravitation möglich
- *Hierarchieproblem*  
Die spontane Symmetriebrechung aufgrund von Strahlungskorrekturen kann den Unterschied der Größenordnungen der GUT und elektroschwachen Skala aufzeigen.
- *Spontane Symmetriebrechung*  
Der Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung muss nicht ad hoc eingeführt werden, sondern ergibt sich direkt aus den Strahlungskorrekturen.
- *Dunkle Materie*  
Im Teilchenspektrum des MSSM gibt es einen vielversprechenden Dunkle Materie Kandidaten, das leichteste supersymmetrische Teilchen, das als Neutralino identifiziert werden sollte. Es erfüllt dabei alle notwendigen Kriterien, denn es ist elektrisch neutral, weshalb es nur schwach und gravitativ wechselwirkt. Zudem ist das LSP aufgrund der R-Paritätserhaltung und der gebrochenen Symmetrie stabil und massiv.
- *Korrekturen zur Higgsmasse*  
Quadratische Massenterme innerhalb der Strahlungskorrekturen zur Higgsmasse, die um ein vielfaches größer sind als die Higgsmasse selbst,

verschwinden innerhalb der SUSY ohne ein im SM benötigtes Feintuning. Wäre SUSY nicht gebrochen, wären die zusätzlichen Massenterme der Superpartner, die innerhalb der Strahlungskorrekturen auftauchen würden, vom Betrag her gleich und hätten nur ein unterschiedliches Vorzeichen aufgrund der unterschiedlichen Statistik. Dadurch würden sich die Divergenzen exakt auslöschen. Selbst in einer gebrochenen Supersymmetrie, in denen die Massen der Superpartner nicht wesentlich größer sind, erhält man einen ähnlichen Effekt.

### 3.5 Einschränkungen von SUSY

Nach der Motivation von SUSY in Kapitel 3.4 stellt sich die Frage, wie gut die Vorhersagen der Supersymmetrie mit den experimentellen Ergebnissen übereinstimmen und welche Wahl der fünf CMSSM Parameter die Daten am besten beschreibt. Die bereits gut übereinstimmenden Ergebnisse des SM sollten unter Berücksichtigung von SUSY entweder den experimentellen Präzisionsdaten entsprechen oder innerhalb der Fehlertoleranz liegen. Gerade bei experimentellen Daten, die von den Vorhersagen des SM abweichen, ist Raum für zusätzliche supersymmetrische Beiträge, durch die eine Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment gefunden werden könnte. In diesem Kapitel werden alle Einschränkungen aufgezählt, die ausgewählt wurden um SUSY auf die Übereinstimmung mit kosmologischen und elektroschwachen Präzisionsdaten zu testen. Dies kann im Anschluss genutzt werden, um den erlaubten CMSSM Parameterbereich einzuschränken. Die hier aufgezählten Einschränkungen werden im Kapitel 7.2 vertieft.

#### *Dunkle Materie*

Aus kosmologischen Messungen ergibt sich ein Wert für die primordiale Energiedichte der Dunklen Materie  $\Omega h^2 = 0,1131$ . Diese ist umgekehrt proportional zum Annihilationswirkungsquerschnitt der WIMPs. Innerhalb des MSSM werden diese durch das LSP bzw. Neutralino repräsentiert, so dass die primordiale Dunklen Materiedichte berechnet werden kann [32]. Das für bestimmte CMSSM Parameter gewählte Modell sollte hierbei nicht nur mit dem Messwert übereinstimmen, sondern auch das Neutralino als leichtestes supersymmetrisches Teilchen beinhalten.

#### *Anomales magnetisches Moment des Myons*

Der gyromagnetische Faktor (g-Faktor) oder auch Landé-Faktor des Myons beschreibt den Zusammenhang zwischen seinem Spin  $\vec{s}$  und dem magnetischen Dipolmoment  $\vec{\mu}$ . Unter der Annahme, dass Myonen Dirac-Fermion sind, müsste dieser Proportionalitätsfaktor g exakt zwei entsprechen. Aufgrund von Quantenfluktuationen ergibt sich eine Abweichung von dem Wert 2, wobei die Korrekturen innerhalb des SM am Photon-Myon-Myon-Vertex durch Schleifendiagramme berechnet werden können [33]. Zur Übersichtlichkeit dieser Anomalie wird die dimensionslose Größe a definiert

$$a = \frac{g-2}{2}, \quad (3.44)$$

Eine Präzisionsmessung des anomalen magnetischen Moments des Myons wurde am Brookhaven National Laboratory durchgeführt. Die mit Hilfe des Brookhaven Experiments E821 gefundene Abweichung vom Wert 2, wies ebenfalls eine Abweichung vom vorhergesagten SM-Wert auf. Die Berücksichtigung von zusätzlichen supersymmetrischen Beiträgen sollte zu einer Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert führen.

#### *Verzweigungsverhältnis $b \rightarrow s \gamma$*

Flavourändernde neutrale Ströme wie der Prozess  $b \rightarrow s \gamma$  sind im SM auf Tree Level Niveau nicht erlaubt. Innerhalb von Schleifendiagrammen, die man als Penguin Diagramme bezeichnet, ist dies jedoch möglich. Dabei zerfällt das b-Quark über eine  $W^\pm$ -t-Schleife in ein s-Quark und ein Photon. Die Vorhersage des SM stimmt innerhalb der Fehlertoleranz nicht mit dem experimentell gemessenen Wert überein [34], so dass zusätzliche supersymmetrische Beiträge eine Übereinstimmung mit dem Experiment liefern könnten.

#### *Verzweigungsverhältnis $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$*

Wie bei dem vorherigen Verzweigungsverhältnis ist dies ebenfalls ein flavourändernder neutraler Strom, der nur innerhalb von Schleifendiagrammen möglich ist. Der vom SM vorhergesagte Wert liegt eine Größenordnung unterhalb der bisherigen experimentellen Grenze. Der theoretische Wert, der ebenfalls die supersymmetrischen Beiträge enthält, muss unterhalb des gefundenen oberen Limits liegen [35].

#### *Verzweigungsverhältnis $B \rightarrow \tau \nu$*

Der leptonische Zerfall eines B-Mesons erfolgt auf Tree Level-Niveau über ein  $W^\pm$ -Boson. Bei der Berücksichtigung von SUSY ergibt sich noch ein zusätzlicher Beitrag durch ein geladenes Higgs  $H^\pm$ . Die Diskrepanz zwischen der SM-Vorhersage und dem experimentellen Wert liegt nicht im Bereich der Fehlertoleranz, so dass bei der Hinzunahme von supersymmetrischen Beiträgen darauf geachtet werden muss, dass der so vorhergesagte theoretische Wert noch innerhalb der Fehlertoleranz liegt [36].

#### *Higgsmasse $m_h$*

In Kapitel 2.1 wurde bereits erwähnt, dass das Higgs-Boson als einziges Teilchen des SM noch nicht nachgewiesen wurde. Innerhalb des MSSM würde das leichteste neutrale Higgs-Boson h dem SM-Higgs entsprechen, so dass die Masse dieses leichtesten der fünf Higgs-Bosonen im MSSM oberhalb der derzeitigen unteren, vom LEP gemessenen Grenze von 114,4 GeV liegen sollte [15].

#### *Direkte Suche nach Dunkler Materie*

Zahlreiche verschiedene Experimente sind auf der Suche nach Dunkler Materie. Bei der direkten Suche hofft man die Streuung eines WIMPs an einem Kern nachweisen zu können. Bisherigen Messungen gelang kein Nachweis der WIMP-

Nukleon-Streuung, so dass sich eine Ausschlusskurve ergab [37]. Die sich aus dem Modell ergebende Neutralinomasse in Verbindung mit dessen Streuwirkungsquerschnitt sollte unterhalb der gefundenen Ausschlusskurve liegen.

#### *LHC – CMS-Limit für die direkte Suche nach supersymmetrischen Teilchen*

Seit Beginn der Datennahme am LHC werden die erhaltenen Daten nach supersymmetrischen Teilchen analysiert. Bei der Suche nach SUSY wird dabei stets nach Ereignissen mit Jets und signifikanter fehlender transversaler Energie Ausschau gehalten, da dies bei Proton-Proton-Kollisionen charakteristisch für Zerfälle von schweren, Paar-produzierten Squarks und Gluinos ist.

Bis zu diesem Zeitpunkt konnten jedoch keine supersymmetrischen Prozesse gefunden werden, so dass sich aus dieser Analyse ebenfalls eine Ausschlussgrenze ergibt. Bestimmte Kombinationen der CMSSM Parameter sind innerhalb dieses Bereichs bereits ausgeschlossen, und können so als weitere Einschränkung des erlaubten CMSSM Bereichs genutzt werden [38], [39].

Kapitel 7 enthält als Schwerpunkt die Untersuchung des Einflusses der oben gemachten Einschränkungen auf den CMSSM Parameterraum. Dabei wird analysiert, ob innerhalb des Parameterraums Kombinationsmöglichkeiten existieren, die zu Ergebnissen führen, die simultan mit den Einschränkungen konsistent sind, so dass eine Abschätzung des Entdeckungspotentials im CMSSM Parameterraum gegeben werden kann.



## 4 Dunkle Materie

Eine der erstaunlichsten Entdeckung des 20. Jahrhunderts in Bezug auf das Verständnis des heutigen Universums ist die Tatsache, dass die baryonische Materie, bestehend aus Protonen und Neutronen, nur einen kleinen Bruchteil der gesamten Materie im Universum ausmacht. Das Universum besteht dabei aus ca. 30% Materie und ca. 70% Dunkler Energie, deren Herkunft bis heute unbekannt ist. Dabei ist jedoch nur ca. 4% baryonische Materie vorhanden, wovon wiederum nur ein Bruchteil davon tatsächlich leuchtende Materie ausmacht. Die Aufteilung der Energiedichte des Universums wird in Abbildung 4.1 gezeigt. Der Großteil der Materiedichte macht also die nicht sichtbare, Dunkle Materie aus, deren Natur ebenso ungeklärt wie die der Dunklen Energie ist. Es wird angenommen, dass es sich bei der Dunklen Materie um Teilchen handelt, die im frühen Universum erzeugt wurden, weshalb zunächst kurz auf das Standardmodell der Kosmologie und andere notwendige Begrifflichkeiten in Kapitel 4.1 eingegangen wird. Im Anschluss werden ausgewählte Beispiele für Evidenzen und Kandidaten der Dunklen Materie in Kapitel 4.2 und 4.3 geschildert, wobei zur weiteren Vertiefung [19], [40] und [41] empfohlen werden. Die Diskussion der Thermodynamik im frühen Universum in Abschnitt 4.4 und die Annihilationsprozesse der Dunklen Materie in 4.5 schließen dieses Kapitel ab.

### 4.1 Ausgewählte kosmologische Begriffe

Das Standardmodell der Kosmologie, besser bekannt unter dem Namen Urknall- oder auch „Big Bang“-Theorie, kann mit einer Aussage beschrieben werden: Das Universum expandiert adiabatisch von einem ursprünglich unendlich heißen und dichten Frühzustand, der als Urknall bezeichnet wird, und ist auf großen Skalen homogen und isotrop. Isotrop bedeutet dabei, dass das Universum in jeder Richtung gleich aussieht und homogen, dass das Universum sich unabhängig vom gewählten Punkt im Raum gleich darstellt [19]. Diese beiden Grundannahmen werden als das kosmologische Prinzip bezeichnet. Das Standardmodell der Kosmologie beschreibt also die zeitliche Entwicklung des heutigen Universums. Die mathematische Beschreibung erfolgt dabei durch die allgemeine Relativitätstheorie. Unter Berücksichtigung des kosmologischen Prinzips in einem vierdimensionalen expandierenden Universum wird die zeitliche Entwicklung durch die Friedmann-Gleichungen beschrieben. Das Standardmodell der Kosmologie wird durch drei experimentelle Beobachtungen gestützt, welche deshalb auch als „drei Säulen des Urknall-Modells“ gelten [40]:

- die Expansion des Universums,
- die kosmische Hintergrundstrahlung und
- die primordiale Nukleosynthese.

#### *Expansion des Universums*

Im Jahre 1920 stellte Edwin Hubble fest, dass die Rotverschiebung von beobachtenden Spektren von Galaxien umso größer ist, je weiter diese entfernt waren. Die

Proportionalitätskonstante wurde nach seinem Entdecker als Hubblekonstante  $H_0$  bezeichnet. Die Folgerung, dass sich die Rotverschiebung aufgrund der klassischen Dopplerverschiebung ergibt, war dabei jedoch nicht richtig. Die Rotverschiebung ist auf die Expansion der Raumzeit selbst zurückzuführen. Da dieser Effekt erheblich die kosmologischen Berechnungen erschwert, führt man mitbewegte Koordinaten ein, so dass sich zeitunabhängige Größen ergeben. Die Zeitabhängigkeit wird durch den Skalenparameter kompensiert. Da der Skalenparameter direkt mit der Hubblekonstante in Verbindung steht, stellte sich heraus, dass die von Edwin Hubble gefundene Konstante ein zeitabhängiger Parameter ist, der daraufhin als Hubble Parameter  $H=H(t)$  bezeichnet wird. Er beschreibt dabei das Verhältnis der Änderung des Skalenparameters zu seiner Größe, und liegt für das heutige Universum bei  $t = t_0$  bei

$$H(t_0) = H_0 = h 100 \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}} \quad \text{mit } h = 0,72 \pm 0,03 \quad (4.1)$$

wobei die Ungenauigkeit, mit der  $H_0$  bekannt ist, durch  $h$  parametrisiert wird [41], [42].

#### *Kosmische Hintergrundstrahlung*

Die kosmische Hintergrundstrahlung ist elektromagnetische Strahlung, die aus der Zeit ca. 380 000 Jahre nach dem Urknall stammt. Bis zu diesem Zeitpunkt waren Strahlung und Materie im thermischen Gleichgewicht. Durch die Expansion des Universums nach dem Urknall, die ein schnelles Sinken der Temperatur mit sich brachte, kam es bei ca. 3000 Kelvin zur Bildung von elektrisch neutralem Wasserstoff. Dadurch konnte die Strahlung nicht mehr mit der Materie wechselwirken. Dies ist der Zeitpunkt der Entkopplung von Materie und Strahlung. Dabei handelt es sich bei dieser 3000 Kelvin Strahlung um die kosmische Hintergrundstrahlung. Die weitere Expansion des Universums führte zu einer Rotverschiebung der Strahlung, was einer Dehnung der Wellenlänge der entkoppelten Photonen entspricht. Dadurch kann heutzutage die kosmische Hintergrundstrahlung im Mikrowellenbereich beobachtet werden. Die Strahlung hat ein fast perfektes Schwarzkörperspektrum mit einer Temperatur von ca. 2,7 Kelvin.

Die Temperatur der Hintergrundstrahlung ist zwar isotrop, jedoch konnte man kleine Temperaturschwankungen auf kleinen Skalen feststellen. Diese Temperaturschwankungen sind auf Dichtefluktuationen im frühen Universum zurückzuführen. Befand sich beispielsweise Strahlung in einem überdichten Bereich, kommt es zu einer gravitativen Rotverschiebung, so dass die Hintergrundstrahlung in dieser Richtung eine etwas geringere Temperatur aufweist. Die Stärke der Temperaturschwankungen in Abhängigkeit der Winkelausdehnung wurde von der Raumsonde WMAP („Wilkinson Microwave Anisotropy Probe“) gemessen. Aus dem so gemessenen Leistungsspektrum war es möglich, nicht nur die gesamte Energiedichte zu bestimmen, um so festzustellen, dass es sich um ein flaches Universum handelt, sondern es konnten noch zusätzlich die Materie- und Baryonendichte bestimmt werden [12].

### Primordiale Nukleosynthese

Unter der primordialen Nukleosynthese versteht man die Theorie über den Ablauf der ersten drei Minuten nach dem Urknall, in denen die Bildung der leichten Elemente stattfand. Die Theorie sagt ein Massenverhältnis von ca. 25% Helium zu 75% Wasserstoff vorher, was durch Messungen über zehn Größenordnungen bestätigt werden konnte. Während der primordialen Nukleosynthese konnten nur die leichten Elemente gebildet werden, während die schweren Elemente aus Fusionsreaktionen in Sternen stammen. Aus dem sich ergebenden Photon-zu-Baryon-Verhältnis ist es möglich den Anteil der baryonischen Dichte zur gesamten Energiedichte zu berechnen. Die daraus resultierende Materiedichte kann als Vergleich bzw. Bestätigung der WMAP Daten benutzt werden [6].

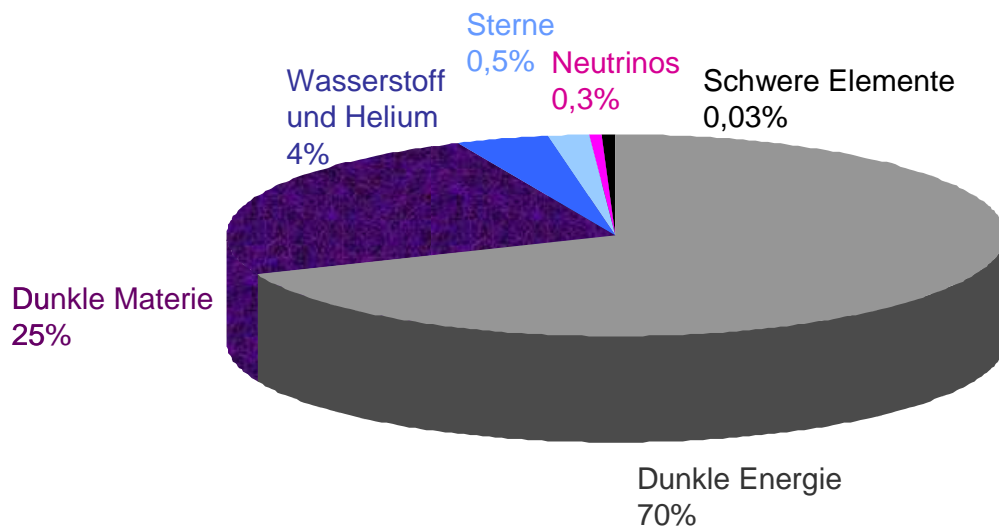


Abbildung 4.1: Aufteilung des Energieinhalts des heutigen Universums.

## 4.2 Erste Beobachtungen und Evidenzen der Dunklen Materie

Die sichtbare Materie im Universum formt Galaxien, wobei diese Galaxien selbst in Haufen (Cluster) und diese in Superhaufen (Supercluster) angeordnet sind. Dazwischen befinden sich riesige Leerräume sogenannte Voids. Erste Beobachtungen der Bewegung der Galaxien in den Clustern unter der Berücksichtigung der Newtonschen Bewegungsgesetze ergaben, dass die sichtbare Materie nicht ausreicht, um die beobachtete Bewegung der Galaxien zu beschreiben. Neben der sichtbaren musste es also auch unsichtbare, Dunkle Materie geben. Einer der ersten Beobachtungen dieser Art wurde 1933 von Fritz Zwicky mit Hilfe des COMA Galaxien Clusters gemacht. Verdeutlicht wird dies mithilfe der Rotationskurven. Dabei wird die gemessene Geschwindigkeit einer Galaxie oder auch eines Sterns in Abhängigkeit des Abstandes zum Zentrum des Gravitationspotentials aufgetragen [12]. Eine solche Rotationskurve wird in Abbildung 4.2 am Beispiel unserer Milchstraße, einer Spiralgalaxie, gezeigt.

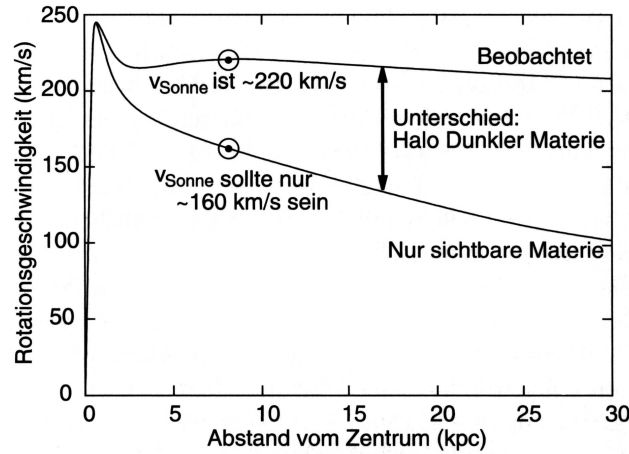


Abbildung 4.2: Schematische Darstellung der Rotationskurve der Milchstraße. Gezeigt wird der Unterschied zwischen dem beobachteten Verlauf der Rotationsgeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Abstand zum Zentrum und dem erwarteten Verlauf im Bezug auf die sichtbare Materieverteilung. Nach den Newtonschen Bewegungsgesetzen wird eine kleinere Geschwindigkeit der Sonne erwartet, als tatsächlich gemessen wird. Dies weist auf einen zusätzlichen Dunkle Materie Halo hin [41].

Dabei ergibt sich unter Berücksichtigung der Newtonschen Bewegungsgleichungen der Sonne ein Verlauf der Rotationsgeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Abstand, der nicht mit den beobachteten, flachen Messungen übereinstimmt. Ausgehend vom dritten Keplerschen Gesetz ergibt sich die Relation

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \quad (4.2)$$

wobei  $r$  der radiale Abstand zum Zentrum der Galaxie ist,  $M(r)$  die Masse der Galaxie innerhalb der Scheibe mit dem Radius  $r$  und  $G$  die Gravitationskonstante. Die Geschwindigkeit nimmt also nach Gleichung (4.2) mit wachsendem Abstand ab, wenn sich die Masse im Zentrum der Galaxie konzentriert. Die beobachtete Geschwindigkeit nimmt dagegen nicht ab, sondern scheint unabhängig vom Abstand konstant zu bleiben. Um eine abstandsunabhängige Geschwindigkeit zu erhalten, muss der Term  $M(r)/r$  konstant sein. Dies kann nur erfüllt werden, wenn die Masse proportional zum Abstand ist, also  $M(r) \sim r$ . Da dieses Dichteprofil nicht durch die sichtbare Materie allein erfüllen werden kann, muss es eine zusätzliche, Dunkle Materie geben [19].

Ein weiterer Effekt, der auf das Vorkommen großer nicht sichtbarer Materieverteilungen basiert, ist der sogenannte Gravitationslinseneffekt. Darunter versteht man die Ablenkung von Licht durch schwere Massen. Da dieses Verhalten analog zu einer Linse in der Optik durch ein Gravitationspotential entsteht, nennt man es Gravitationslinseneffekt. Dabei gibt es zum einen den Mikrolinseneffekt, der sich durch das kurzzeitige Aufleuchten von Sternen aufgrund von vorbeiziehenden Materieansammlungen, die den Strahlengang des beobachteten Sterns durchqueren, bemerkbar macht. Zum anderen gibt es den starken Gravitationslinseneffekt, für den man astronomische Objekte verantwortlich macht, die ein sehr starkes Gravita-

tionsfeld haben, wie beispielsweise Galaxien, Galaxienhaufen und schwarze Löcher. Bei der beobachteten Lichtquelle hinter der Gravitationslinse kommt es dann zu Verzerrungen oder auch Mehrfachbildern.

Eine wichtige Evidenz für Dunkle Materie ist der Bullet Cluster. Dabei handelt es sich um Reste einer Kollision von zwei Galaxienhaufen. Durch Beobachtungen im Röntgenlicht konnte nachgewiesen werden, dass der Galaxienhaufen vor ca. 100 Mio. Jahren von einem zweiten, kleineren Galaxienhaufen durchquert wurde. Untersuchungen der Verteilung der Galaxien und des Gravitationspotentials nach der Kollision konnten mit Hilfe des Plasmas im Röntgenbereich und durch den schwachen Mikrolinseneffekt beobachtet werden. Dies hatte zur Folge, dass festgestellt wurde, dass es zu einer Trennung der baryonischen und Dunklen Materie gekommen war. Während die baryonische Materie am Kollisionspunkt wechselwirkt und damit bei der Kollision der Galaxien abgebremst wird, durchdringt sich der Dunkle Materie Anteil der Galaxien wechselwirkungsfrei.

Als letzte Evidenz soll hier das Ergebnis der indirekten Suche nach Dunkler Materie genannt werden. Die indirekte Suche erfolgt über den Nachweis der Sekundärteilchen aus WIMP-Annihilationsprozessen, darunter Elektronen, Protonen, deren Antiteilchen, Neutrinos und Photonen. Mit Hilfe des EGRET Experiments konnte ein Überschuss im GeV Bereich des Gammaspektrums gefunden werden. Um dieses Ergebnis zu reproduzieren nahm das Nachfolgeexperiment Fermi ebenfalls die Energiespektren der Gammastrahlung auf, diesmal jedoch mit höherer Genauigkeit. Fermi konnte zwar den Überschuss nicht bestätigen, dennoch war eine konsistentere Beschreibung der gemessenen Energiespektren mit Hilfe der Hinzunahme eines Annihilationssignals von Dunkler Materie möglich [43], [44].

### 4.3 Dunkle Materie Kandidaten

Obwohl es für die Existenz der Dunklen Materie durch zahlreiche Beobachtungen und Messungen Hinweise gibt, ist die Natur der Dunklen Materie noch unbekannt. Neben den WIMPs gibt es jedoch ebenfalls Dunkle Materie Kandidaten, die keinen Teilchencharakter besitzen, weshalb an dieser Stelle ausgewählte Beispiele der zahlreichen Kandidaten vorgestellt werden [19].

#### *Baryonische Dunkle Materie*

Aus dem Leistungsspektrum der kosmischen Hintergrundstrahlung und der primordialen Nukleosynthese ist bekannt, dass die baryonische Materiedichte nicht ausreicht, um die gesamte Materiedichte zu beschreiben. Somit ist ausgeschlossen, dass kalte Dunkle Materie nur aus baryonischer Dunklen Materie besteht. Dennoch gibt es innerhalb der baryonischen Materie Objekte, die als Teil der Dunklen Materie betrachtet werden können. Dabei handelt es sich meist um interstellares Gas oder massive Halo Objekte, die als MACHOs (engl. massive compact halo objects) bezeichnet werden. Bei diesen nicht leuchtenden MACHOs kann es sich unter anderem um einen abgekühlten Stern oder einen braunen Zwerg handeln, ein Stern, dessen Masse unterhalb der Schwelle für Wasserstofffusion liegt. MACHOs könnten durch den Mikrolinseneffekt nachgewiesen werden.

##### *MOND*

Eine Möglichkeit die flache Form der Rotationskurven der Galaxien zu erklären, ohne dabei Dunkle Materie einzuführen, ist die Annahme, dass die Newtonschen Bewegungsgleichungen auf großen Skalen nicht erhalten bleiben. Die Theorie zur Modifikationen der Newtonschen Bewegungsgleichungen im Gravitationsfeld wird als MOND (modifizierte newtonsche Dynamik) bezeichnet. Innerhalb dieser Theorie werden im Wesentlichen Graviationspotentiale optimiert. Weshalb jedoch bei unterschiedlichen Rotationskurven von Galaxien die Modifikation der Newtonschen Bewegungsgleichungen verändert werden muss, bleibt ungeklärt. Des Weiteren kann der Effekt der Trennung der Materiekomponenten beim Bullet Cluster nicht erklärt werden.

##### *Neutrinos*

Das SM liefert als WIMP Kandidaten die Neutrinos, da diese nur schwach wechselwirken. Abgesehen von der Tatsache, dass ein masseloses Neutrino bereits aufgrund der Ergebnisse aus Neutrinooszillationsexperimenten widerlegt wurde, reicht die sich so ergebende, nicht verschwindende Masse der Neutrinos nicht für die nötige Dunkle Materiedichte aus.

Aus der kosmischen Hintergrundstrahlung ist eine obere Grenze der Summe der Neutrinomassen bestimmt worden. Wie alle anderen Teilchen befanden sich die Neutrinos nach dem Urknall im thermischen Gleichgewicht bis es bei einer Energie von ca. 1 MeV zur Entkopplung der Neutrinos kam. Die Menge der primordialen Neutrinos hängt dabei von der Summe der verschiedenen Neutrino flavour ab. Doch selbst bei der Verwendung der gemessenen oberen Massengrenze, reicht die Energiedichte nicht aus, um die Materiedichte zu beschreiben. Zudem waren die Neutrinos aufgrund ihrer geringen Masse zum Zeitpunkt der Strukturbildung relativistisch, weshalb man sie auch als heiße Dunkle Materie bezeichnet. Ohne das Vorhandensein einer großen Menge kalter Dunkler Materie können jedoch die heutigen Strukturen im Universum nicht erklärt werden, weshalb die Dunkle Materie nicht vollständig aus heißer Dunkler Materie bestehen kann.

##### *Neutralino*

In supersymmetrischen Modellen, in denen das leichteste supersymmetrische Teilchen das Neutralino ist, wird ein geeigneter Dunkle Materie Kandidat geliefert. Das Neutralino ist eine Mischung der Superpartner der neutralen Bosonen, also Photon, Z-Boson und Higgs-Bosonen. Es ist elektrisch neutral und wechselwirkt nur schwach und gravitativ. Aufgrund der R-Paritätserhaltung ist das Neutralino als LSP stabil.

Im Folgenden wird stets angenommen, dass sich bei Dunkler Materie um WIMPs handelt, die ihrerseits vom Neutralino repräsentiert werden.

## 4.4 Thermodynamische Beschreibung der primordialen Dunklen Materiedichte

Im frühen Universum können Teilchenreaktionen und die Produktion von Teilchen mit Hilfe der Thermodynamik und der statistischen Mechanik beschrieben werden. Eine wichtige Größe, die dabei berechnet werden kann, ist die Annihilationsrate [45]. Die Annihilationsrate für eine gegebene WIMP-Teilchendichte  $n_\chi$  ist dabei über

$$\Gamma = n_\chi \langle \sigma v \rangle \quad (4.3)$$

definiert, wobei  $\langle \sigma v \rangle$  der thermisch gemittelte Annihilationswirkungsquerschnitt multipliziert mit der relativen Geschwindigkeit der WIMPs ist.

Solange die Annihilationsrate größer als die Expansionsrate ist, liegt ein thermodynamisches Gleichgewicht vor.

Wie alle Teilchen befand sich das Neutralino als ausgewählter WIMP Kandidat im frühen Universum ebenfalls im thermischen Gleichgewicht. Die zeitliche Entwicklung der Teilchendichte im expandierenden Universum wird durch die Boltzmann-Gleichung beschrieben

$$\frac{dn}{dt} = -3Hn - \langle \sigma v \rangle (n^2 - n_{eq}^2). \quad (4.4)$$

Dabei ist  $n$  die Teilchendichte der Neutralinos,  $H$  der Hubbleparameter und  $n_{eq}$  ist die Neutralino-Teilchendichte des thermischen Gleichgewichts.

Im thermischen Gleichgewicht des frühen Universums war es möglich energiereiche und damit massive Teilchen zu erzeugen, beispielsweise durch Paarproduktion oder durch Wechselwirkungen von anderen Teilchen. Aufgrund des thermodynamischen Gleichgewichts wurden gleich viele Teilchen vernichtet und erzeugt, die Produktions- und Annihilationsraten waren also gleich. Die Expansion des Universums brachte ein Sinken der Temperatur mit sich, was sich auf die Produktionsmechanismen auswirkte. Wenn die kinetische Energie nicht mehr ausreicht, um schwere Teilchen zu erzeugen, kommt es zu einem exponentiellen Abfall der Teilchendichte. Im thermischen Gleichgewicht würde dies dazu führen, dass die Teilchendichte gegen Null geht. Tritt jedoch der Fall ein, dass durch die Expansion des Universums die Annihilationsrate geringer als die Expansionsrate wird, ist das thermische Gleichgewicht verletzt und es kommt zum Ausfrieren der Teilchen (engl. freeze out). Die mitbewegte Teilchendichte der Neutralinos zum Zeitpunkt des Ausfrierens, welche als primordiale Dunkle Materiedichte oder auch Relic Density bezeichnet wird, bleibt dann konstant. Der Zeitpunkt des Ausfrierens in Abhängigkeit der WIMP Masse und des Annihilationswirkungsquerschnitts ist in Abbildung 4.3 dargestellt.

Für die beobachtbare primordiale Dunkle Materiedichte ergibt sich

$$\Omega_\chi h^2 = \frac{m_\chi \eta_\chi}{\rho_{crit}} \approx \left( \frac{3 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}}{\langle \sigma v \rangle} \right), \quad (4.5)$$

wobei  $m_\chi$  die WIMP Masse und  $\rho_{crit}$  die kritische Dichte, die Energiedichte des heutigen Universums, sind.

Aus Messungen von WMAP [32] und anderen kosmologischen Experimenten ergibt sich eine primordiale Energiedichte von

$$\Omega_\chi h^2 = 0,1131 \pm 0,0034, \quad (4.6)$$

welche als Einschränkung für supersymmetrische Modelle benutzt werden kann. Aus Gleichung (4.5) und (4.6) ergibt sich so ein erwarteter Wirkungsquerschnitt von

$$\langle \sigma v \rangle \approx 2 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}, \quad (4.7)$$

was gerade einem Wirkungsquerschnitt im Bereich der schwachen Wechselwirkung entspricht.

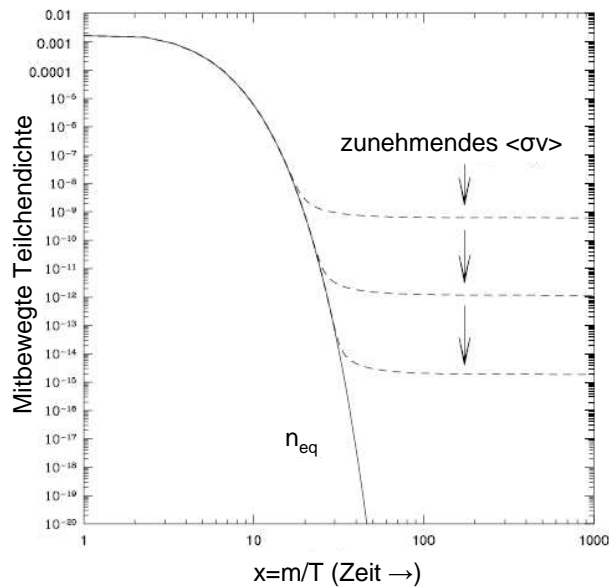


Abbildung 4.3: Zeitliche Entwicklung der mitbewegten WIMP-Teilchendichte im frühen Universum. Die dargestellte Kurve entspricht dem exponentiellen Abfall der Teilchendichte im thermodynamischen Gleichgewicht. Die gestrichelte Linie gibt das Ausfrieren der Teilchen an. Mit wachsendem Annihilationswirkungsquerschnitt frieren die Teilchen später aus [46].

## 4.5 Annihilationsprozesse

In Gleichung (4.5) wurde gezeigt, dass die Relic Density umgekehrt proportional zum WIMP-Annihilationswirkungsquerschnitt ist, weshalb nun ein Überblick über die verschiedenen Annihilationsprozesse gegeben wird.



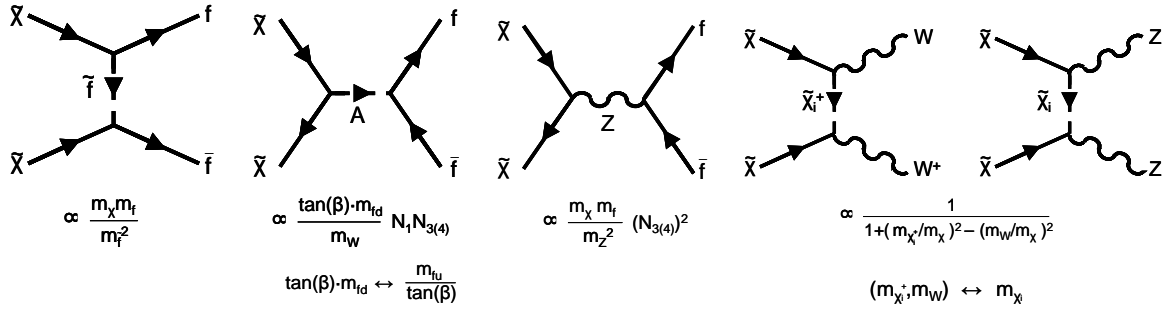


Abbildung 4.4: Hauptbeiträge zur Annihilation der Neutralinos in Abhängigkeit der supersymmetrischen Parameter und Massen.

Ein Neutralino-Paar kann über verschiedene Annihilationsprozesse in zwei SM Teilchen annihilieren. In Abbildung 4.4 sind die Feynmandiagramme zu den wichtigsten Annihilationskanälen in Abhängigkeit der Modellparameter abgebildet [46]. Als Annihilationsprodukte treten neben einem Fermion-Antifermion-Paar auch die Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung  $W^\pm$  bzw.  $Z^0$  auf. Diese sind gegenüber den anderen Diagrammen weniger relevant, da sie durch die schwache Kopplungskonstante unterdrückt sind. Je nachdem welches CMSSM Szenario durch die Wahl der Parameter betrachtet wird, können die ersten drei Annihilationsprozesse in Abbildung 4.4 dominant sein. Diese Modifikationen hängen u.a. mit den unterschiedlichen Massenspektren der supersymmetrischen Teilchen zusammen. Die Änderung der dominierenden Prozesse lassen sich somit auf verschiedene Kombinationen der Massenparameter  $m_0$  und  $m_{1/2}$  zurückführen. Die nachfolgende Darstellung der verschiedenen Bereiche soll dabei nur qualitative Aussagen geben, da die Abhängigkeit des Teilchenspektrums ebenfalls stark von den anderen drei Parametern abhängt. Man unterscheidet folgende Gebiete [47]:

- **Bulk Region**  
In diesem Bereich dominiert das erste Diagramm in Abbildung 4.4. Da dies jedoch nur für kleine Sfermionenmassen der Fall ist, müssen  $m_0$  und  $m_{1/2}$  klein sein. Befindet man sich innerhalb dieses Bereichs im CMSSM Parameterbereich, dominiert also die Annihilation von Neutralinos über ein Sfermion. Die Bulk Region war einst favorisiert, da hier das Neutralino fast ein reines Bino ist. Da dieser Bereich jedoch schon größtenteils durch Einschränkungen wie der Higgsmasse  $m_h$  und der LHC Grenze ausgeschlossen ist, wird er nicht weiter beachtet.
- **Focus Point Region**  
In diesem Gebiet ändert sich das Mischungsverhältnis des Neutralinos. Dies trifft meist für große  $m_0$  und kleine Higgsparameter  $\mu$  zu. Während das Neutralino oft eine Mischung mit einem großen Bino-Anteil darstellt, ist in der Focus Point Region der Higgsino-Anteil dominant, was zusätzlich Kopplungen an SM-Eichbosonen zur Folge hat. Dies führt dazu, dass das dritte Diagramm in Abbildung 4.4, also die Annihilation über ein  $Z^0$ -Boson ebenfalls stark zum Annihilationswirkungsquerschnitt der Dunklen Materie beiträgt. Der beschriebene Bereich, der kleine Werte für  $\mu$  annimmt, liegt im CMSSM Parameterraum nahe dem Gebiet, in dem die elektroschwache Symmetrie-

brechung nicht möglich ist. Dieser Bereich ist sehr sensitiv auf die t-Quark Masse, so dass es hier oftmals zu Feinabstimmungsproblemen kommt.

- Higgs-Annihilation Region

In diesem Bereich ist das Neutralino das LSP und das zweite Diagramm in Abbildung 4.4, also die Annihilation über ein pseudoskalares Higgs A, stellt den führenden Annihilationsprozess dar. Da in diesem Bereich die Masse des Higgs-Bosons etwa doppelt so groß wie die des Neutralinos ist, liegt dies nahe an der Resonanz für diesen Prozess. Durch Variation der weiteren CMSSM Parameter muss darauf geachtet werden, dass die Masse des Higgs-Bosons nicht exakt doppelt so groß ist wie die des Neutralinos, da sonst der WQ weit über den benötigten liegt und so die Dunkle Materiedichte zu gering wird. Für feste Werte der restlichen Parameter ist dies im CMSSM Parameterraum für einen schmalen Streifen erfüllt. Wie im Analysekapitel 7 gezeigt wird, kann der erlaubte Bereich durch Variation von  $\tan(\beta)$  stark vergrößert werden, so dass fast der gesamte CMSSM Parameterbereich von diesem Annihilationsprozess dominiert wird.

- Koannihilationsregion

Die Koannihilationsregion befindet sich in einem Gebiet, das nahe an der Grenze liegt an der das LSP nicht mehr das Neutralino, sondern das Stau ist (NLSP). Das NLSP-Gebiet ist für die Analysen innerhalb dieser Diplomarbeit nicht relevant, da das Stau geladen ist und somit als WIMP Kandidat nicht geeignet ist. Innerhalb des Grenzgebiets, also der Koannihilationsregion, ist das Neutralino gegenüber dem Stau nur unwesentlich schwerer, so dass es zusätzlich zur Annihilation von Neutralinos zu einer Koannihilation eines Neutralinos und Staus kommen kann. Dies trägt zusätzlich zur Dunklen Materiedichte bei.

Da das Diagramm der Higgs-Annihilation Region den Hauptbeitrag zum Annihilationswirkungsquerschnitt liefert, beschränkt sich die Wirkungsquerschnittsanalyse im Kapitel 7.4 auf diesen Prozess. Dabei annihilieren die Neutralinos über das pseudoskalare Higgs A zu etwa 70% in ein  $b\bar{b}$  Paar und knapp zu 30% in ein  $\tau^+\tau^-$  Paar. Aus dem dazugehörigen Matrixelement für die Annihilation in ein  $b\bar{b}$  Paar ergibt sich folgende Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts [48]

$$\langle\sigma v\rangle \propto \frac{M_\chi^4 m_b^2 \tan^2 \beta (N_{31} \sin \beta - N_{41} \cos \beta)^2 (N_{21} \cos \theta_W - N_{11} \sin \theta_W)}{\sin^4 2\theta_W M_Z^2 (4M_\chi^2 - M_A^2)^2 + M_A^2 \Gamma_A^2}, \quad (4.8)$$

wobei die Elemente der Neutralino-Mischungsmatrix die Bestandteile des leichtesten Neutralinos bestimmen

$$|\tilde{\chi}_1^0\rangle = N_{11}|B_0\rangle + N_{21}|W_0^3\rangle + N_{31}|H_1\rangle + N_{41}|H_2\rangle. \quad (4.9)$$

## 5 Large Hadron Collider

Seit Beginn der Suche nach den fundamentalen Bausteinen der Materie, die durch die Entdeckung der Atome eingeläutet wurde, konnten die Physiker nur mit Hilfe von Beschleunigerexperimenten zu immer kleineren Konstituenten vordringen. Dabei revolutionierte zu Beginn des 20. Jahrhunderts das Experiment von Rutherford die Vorstellung des Atoms. Der Start zur Suche nach weiteren Bausteinen wurde gegeben, so dass man bis Mitte der 30er Jahre mit den vier Teilchen, darunter Elektron, Proton, Neutron und Neutrino, scheinbar alle Teilchen gefunden hatte, um die Phänomene der Atom- und Kernphysik zu erklären. Mit den Experimenten an Teilchenbeschleunigern in den 50er und 60er Jahren des 20. Jahrhunderts fand man jedoch mit der Entdeckung des Hadronenzoos, dass Protonen und Neutronen nicht elementar sind, sondern zusammengesetzte Objekte aus Quarks darstellen. Die Experimente in der Kern- und Teilchenphysik und das damit verbundene Vordringen zu den Elementarteilchen ist ausschließlich durch die Entwicklung und den Bau von Beschleunigern mit immer höheren Energien und Strahlintensitäten ermöglicht worden [3].

Der aktuell größte Teilchenbeschleuniger ist der Large Hadron Collider (LHC) am europäischen Kernforschungszentrum CERN bei Genf in der Schweiz. Der LHC Speicherring wurde dabei in einem ca. 27 km langen Tunnel in einer Tiefe von 50 – 175 m errichtet, in welchem sich der LEP Beschleuniger bis zum Jahr 2000 befand. In diesem ringförmigen Teilchenbeschleuniger werden Hadronen, Protonen und Blei-Ionen, gegenläufig bis nahe Lichtgeschwindigkeit beschleunigt und zur Kollision gebracht. Die dabei auftretenden Protonen- und Bleiionenkollisionen werden an vier Wechselwirkungspunkten untersucht, an welchen sich die Detektoren CMS, ATLAS, ALICE, LHCb, LHCf und TOTEM befinden, um die Wechselwirkungen der entstandenen Teilchenschauer zu untersuchen [49]. Die Protonenstrahlen können bis auf eine geplante Energie von jeweils 7 TeV beschleunigt werden, was einer Schwerpunktsenergie von 14 TeV entspricht. Die geplante Luminosität liegt bei  $10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ . Der Vorteil des Betriebs von Hadronen bei Teilchenbeschleunigern ist die geringe Synchrotronstrahlung, die zu keinen nennenswerten Energieverlusten führt. Hohe Anforderungen werden dagegen an die Konstruktion der Magnete gestellt, die den Hadronenstrahl auf der Kreisbahn halten müssen. Die Hauptziele des LHC sind die Entdeckung des Higgs-Bosons, die Suche nach Hinweisen auf Supersymmetrie und die Untersuchung von Kollisionen schwerer Ionen. Diese Aufgaben übernehmen dabei die beiden unterschiedlich gebauten Experimente CMS und ATLAS. LHCb ist dagegen auf die CP-Verletzung in B-Hadronen spezialisiert. ALICE zielt auf die Erzeugung und Vermessung eines Quark-Gluon-Plasmas ab, um den Zustand des Universums unmittelbar nach dem Urknall zu untersuchen. TOTEM und LHCf sind vergleichsweise kleine Experimente und befinden sich in den Kammern des CMS bzw. ATLAS Detektors. Mit TOTEM soll die Größe des Protons mit bisher nie dagewesener Genauigkeit gemessen werden, wohingegen mit Hilfe von LHCb Erfahrungen zur Kalibrierung von Teilchendetektoren gesammelt werden sollen.

Am Beispiel des CMS-Detektors sollen die Hauptkomponenten eines Teilchendetektors kurz geschildert werden. Für tiefer gehende technische Details empfiehlt sich [50].

## 5.1 CMS-Detektor

Das Compact Muon Solenoid Experiment (CMS) befindet sich etwa 100 m unter der Erde und hat dabei eine Länge von 21,6 m, ein Durchmesser von 14,6 m und ein Gewicht von 12 500 t [52]. Der CMS-Detektor ist der zweitgrößte Teilchendetektor der Welt. Durch die Kollision der vom LHC beschleunigten Protonen entstehen in der Mitte des Detektors sehr viele streuende Teilchen als Produkt der Wechselwirkung der Konstituenten der Protonen. Dabei handelt sich um die Partonen des Protons, also den Gluonen und Quarks. Deren Wechselwirkung ist unter anderem aufgrund der Effekte der starken Wechselwirkung sehr komplex. Nicht nur aufgrund der komplexen Wechselwirkungen, die mit immer höheren Teilchenenergien und -flüssen einhergehen, sondern auch wegen der hohen Anforderung an die Qualität der Messungen, ergab sich eine Spezialisierung auf dem Gebiet der Detektoren [3].

So gibt es heute Detektoren zur Orts- und Impulsmessung, zur Energie- und Zeitmessung sowie zur Teilchenidentifikation. Um all diese Informationen zu erlangen und die entstehenden Teilchen zu rekonstruieren, ist ein Teilchendetektor, so auch der CMS Detektor, aus mehreren schalenförmig angeordneten Teildetektoren aufgebaut.

Die unterschiedlichen Teilchen können durch ihre charakteristischen Signaturen in den Detektorlagen identifiziert werden. Eine schematische Darstellung der verschiedenen Detektorbestandteile befindet sich in Abbildung 5.1 [51].

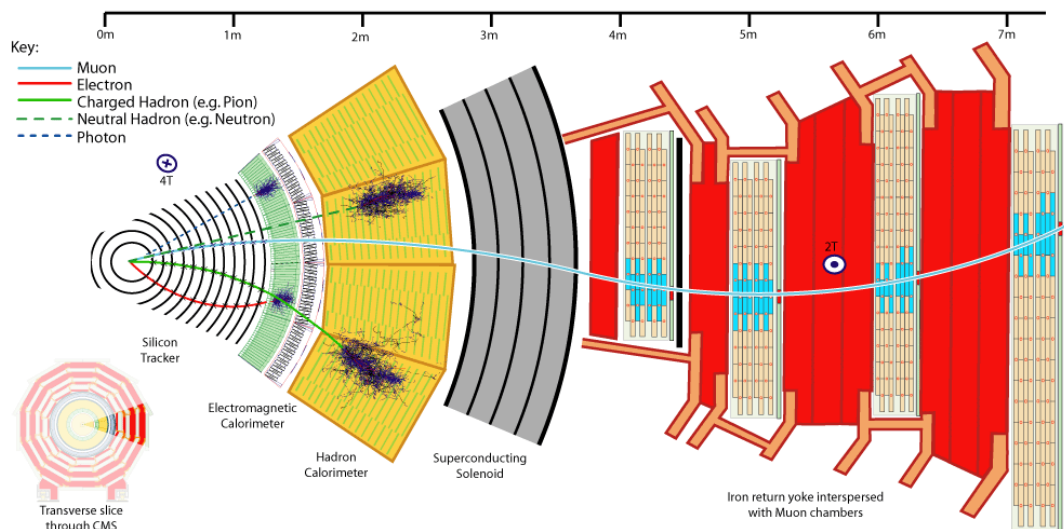


Abbildung 5.1: Ausschnitt des CMS-Detektors [51].

Die innerste Komponente ist dabei der um die Strahlachse konzentrisch angeordnete Siliziumspurdetektor, der eine genaue Spurrekonstruktion der geladenen Teilchen ermöglicht. In Kombination mit den supraleitenden Magnetspulen in den äußeren Schichten des CMS Detektors lassen sich die Teilchen räumlich trennen.

Anhand der Krümmung der Spur lässt sich der Transversalimpuls eines Teilchens berechnen. Elektrisch neutrale Teilchen, wie das Photon oder neutrale Hadronen, machen sich erst in den nächsten Schichten, dem elektromagnetischen und hadronischen Kalorimeter, bemerkbar. Beide Kalorimeter messen dabei die Energie der zugehörigen Teilchen. Die wechselwirkenden Teilchen lösen in dem jeweiligen Detektormaterial Teilchenschauer aus, wobei die Intensität der Schauer ein Indikator für die Energie der Teilchen ist. Da die Energiedeposition bei Hadronen größtenteils durch Prozesse der starken Wechselwirkung erfolgt, ist die Schauerlänge viel größer als die von Elektronen und Photonen. Zusätzlich zum elektromagnetischen wird deshalb ein hadronisches Kalorimeter benötigt, um die Energie der Hadronen mittels Szintillation zu bestimmen. Nach dem hadronischen Kalorimeter folgt die Solenoid Spule, eine supraleitende Magnetspule, die ein etwa 4 T starkes Magnetfeld erzeugt. Um die Magnetspule herum befindet sich das Eisenjoch, das mit den Myonkammern in den äußersten Schichten verwoben ist. Die Aufgabe des Jochs ist es, sowohl die Magnetfeldlinien zu schließen, als auch die Myonen auf ihrem Weg durch die Myonkammern abzulenken. Da Myonen den bisherigen Aufbau ohne merkliche Wechselwirkung durchdringen können, werden sie erst in den Myonkammern nachgewiesen [52].

## 5.2 Physikalische Größen in der Beschleunigerphysik

Da in dieser Arbeit u.a. auf die Untersuchung der Wirkungsquerschnitte des Annihilationsprozesses von Neutralinos eingegangen wird, werden an dieser Stelle einige Begrifflichkeiten aus der Beschleunigerphysik näher erläutert.

### *Wirkungsquerschnitt*

Bei Streuexperimenten werden Reaktionsraten sowie Energie- und Winkelverteilungen der Reaktionsprodukte gemessen, um Informationen über die Dynamik der Wechselwirkung zwischen streuenden Teilchen zu erhalten. Dabei erhält man die Information über die Form des Wechselwirkungspotentials und die Kopplungsstärke. Eine der wichtigsten Größen zur Beschreibung und Interpretation einer Reaktion ist der sogenannte Wirkungsquerschnitt (WQ)  $\sigma$  [3]. Dieser ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit einer Reaktion bei Streu- oder Kollisionsexperimenten zwischen den Stoßpartnern. Der Wirkungsquerschnitt hat dabei die Dimension einer Fläche. Typischerweise ist die dazugehörige Einheit das Barn b, wobei  $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$  ist. Eine gute Näherung und eine anschauliche Beschreibung des WQ ist der geometrische WQ als effektive Querschnittsfläche der wechselwirkenden Teilchen. Dieser ist jedoch in den meisten Fällen nicht ausreichend, da die maßgebende Wirkung auf die Form, Reichweite und Stärke des Wechselwirkungspotentials zurückzuführen ist.

Bei Wirkungsquerschnitten unterscheidet man zwischen dem totalen und differentiellen Wirkungsquerschnitt.

Ausgehend von der Definition des Flusses  $\phi$  für eine einfallende Teilchendichte [6] der Strahlteilchen  $n_a$  mit der relativen Geschwindigkeit  $v_i$

$$\phi = n_a v_i \quad (5.1)$$

ergibt sich der WQ  $\sigma$  über die Beziehung zwischen Fluss  $\phi$  und Reaktionsrate  $W$  pro Streuzentren zu

$$W = \phi \sigma. \quad (5.2)$$

Da in einem Experiment aufgrund des Detektoraufbaus jedoch nicht alle Strahlteilchen einer Reaktion registriert werden können, sondern nur ein Teil innerhalb eines Winkels  $d\Omega$  zur Strahlrichtung, ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt aus der Beziehung

$$\dot{N} = L \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega, \quad (5.3)$$

wobei  $\dot{N}$  der Ereignisrate und  $L$  der Luminosität entspricht.

Der totale WQ ergibt sich aus dem differentiellen WQ durch die Integration über den gesamten Raumwinkel.

Eine weitere Möglichkeit der Berechnung der Reaktionsrate  $W$  und damit des Wirkungsquerschnitts bietet Fermis Goldene Regel. Hierbei ist die Reaktionsrate mit dem Übergangsmatrixelement  $M_{if}$  verknüpft.  $M_{if}$  entspricht der Wahrscheinlichkeitsamplitude für eine Reaktion, die den Anfangszustands  $\Psi_i$  in den Endzustands  $\Psi_f$  überführt.

Für die Reaktionsrate  $W$  gilt dann die Beziehung [8]

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{if}|^2 \rho_f, \quad (5.4)$$

wobei  $\rho_f$  der Phasenraumdichte, also der Dichte der möglichen Endzustände in einem bestimmten Energieintervall, entspricht.

Eine weitere wichtige Größe, die mit dem WQ verknüpft ist, ist die Luminosität  $L$ . Sie ist der Proportionalitätsfaktor zwischen dem WQ und der Ereignisrate  $\dot{N}$ , also die Anzahl der zu erwarteten Ereignisse pro Zeiteinheit im Detektor,

$$\dot{N} = L \sigma. \quad (5.5)$$

Die Luminosität  $L$  hat die Dimension eines Flusses  $\frac{1}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}}$ .

Eine hohe Luminosität ist notwendig, wenn man Prozesse möglichst exakt, d.h. mit einer hohen statistischen Signifikanz untersuchen möchte.

Aus der in einem gewissen Zeitraum integrierten Luminosität  $L_{\text{int}} = \int L dt$  erhält man direkt die Zahl der Reaktionen, die man innerhalb des Messzeitraums beobachten kann.

*Pseudorapidität*

In der experimentellen Teilchenphysik wird oft die lorentzinvariante Pseudorapidität  $\eta$  statt des Polarwinkels  $\theta$ , der Winkel eines Vektors relativ zur Strahlachse, angegeben. Sie ist definiert als [53]

$$\eta = -\ln \left[ \tan \left( \frac{\theta}{2} \right) \right]. \quad (5.6)$$

*Verzweigungsverhältnis*

Die Zerfallsbreite  $\Gamma$  ist mit der Lebensdauer  $\tau$  eines Teilchens über die Energie-Zeit-Unschärfe verbunden [6]:

$$\Gamma = \hbar W = \frac{\hbar}{\tau}. \quad (5.7)$$

Die Zerfallsbreite  $\Gamma$  hat dabei die Dimension einer Energie. Da instabile Teilchen in verschiedene Endzustände zerfallen können, gibt es zu jedem Zerfallskanal  $i$  eine Partialbreite  $\Gamma_i$ .

Die Summe aller Partialbreiten ergibt die totale Zerfallsbreite  $\Gamma_{tot}$ . Das Verzweigungsverhältnis (engl. Branching Fraction oder Branching Ratio, BF oder BR) gibt dabei an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Teilchenzustand in einen bestimmten Endzustand zerfällt.

$$BR = \frac{\Gamma_i}{\Gamma_{tot}}. \quad (5.8)$$

*Formfaktoren und Partonverteilungsfunktionen*

Bei elastischen Streuexperimenten an Kernen und Nukleonen stellt man fest, dass der WQ vom Impulsübertrag  $Q$  abhängt, was auf die räumliche Ausdehnung der Kerne und Nukleonen zurückzuführen ist. Bei einem größeren Impulsübertrag ist die reduzierte Wellenlänge des virtuellen Photons kleiner, weshalb die Auflösung zunimmt. Die räumliche Ausdehnung kann durch die Formfaktoren berücksichtigt werden. Da der Formfaktor die Fouriertransformierte der Gesamtladung ist, enthält er alle Informationen über die räumliche Verteilung der Ladung des untersuchten Objekts [3].

Die Abhängigkeit des WQ vom Impulsübertrag tritt ebenfalls bei inelastischen Stößen auf. In Analogie zu den Formfaktoren, ergeben sich hier Strukturfunktionen, die die innere Zusammensetzung des Nukleons beschreiben.

Diese können innerhalb des Partonmodells als die Summe der mit der Bjorken'schen SkalenvARIABLEN  $x$  und der quadratischen Ladung  $z_f^2$ , in Einheiten der Elementarladung für jeden Flavour  $f$ , gewichteten Impulsverteilungen der Partonen des Nukleons verstanden werden. Unter Berücksichtigung aller Partonen ergeben sich nicht nur die Verteilungen der Valenzquarks, also den Quarks, die für die Quantenzahlen des Nukleons verantwortlich sind, sondern auch die Verteilung der

virtuellen Quark-Antiquark-Paare, die Seequarks, die im Feld der starken Wechselwirkung erzeugt werden, und den Gluonen.

Die Partonverteilungsfunktion (engl. parton distribution function, PDF) gibt somit die Wahrscheinlichkeit an, ein Teilchen mit einem bestimmten Impulsanteil in einem Hadron zu finden. Die Partonverteilungsfunktion muss aus experimentellen Daten bestimmt werden.



## 6 Analysewerkzeuge

Zur Bestimmung des CMSSM Parameterraums durch die Optimierung mit den gewählten Einschränkungen wird die  $\chi^2$ -Methode verwendet. Des Weiteren wurden eine Reihe von Programmen zur Simulation der Daten verwendet, die im Folgenden kurz erläutert werden sollen.

### 6.1 $\chi^2$ -Methode

Um den erlaubten CMSSM Parameterbereich unter Berücksichtigung der Übereinstimmung mit kosmologischen und elektroschwachen Präzisionsdaten zu bestimmen, muss das gewählte Modell mit den dazugehörigen Messungen übereinstimmen. Der Vergleich des Modells mit den jeweiligen Messungen wird mit Hilfe der  $\chi^2$ -Methode durchgeführt.

Um Funktionen an Messdaten anzupassen, müssen Parameter bestimmt werden, indem die Messdaten mit theoretischen Modellen verglichen werden. Man benötigt zum Auffinden der besten Werte der Parameter ein geeignetes Abstandsmaß, welches im Anschluss minimiert wird. In diesem Fall wird zur Funktionsanpassung an die fehlerbehafteten Datenpunkte die Methode der kleinsten Quadrate verwendet. Die Summe der quadratischen Abweichungen der Datenpunkte von der zu adaptierenden Funktion wird auf den jeweiligen Messfehler normiert, indem das Abstandsmaß mit dem quadrierten Inversen des Messfehlers  $\sigma_i$  gewichtet wird. Durch Umformung ergibt sich folgende Form der  $\chi^2$ -Funktion [54]:

$$\chi^2(p) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - f(x_i, p)}{\sigma_i} \right)^2. \quad (6.1)$$

Hierbei entsprechen  $x_i, y_i$  den Messdaten.  $f(x_i, p)$  ist die anzupassende Funktion mit entsprechendem Parametervektor  $p$ .

Die Minimierung der  $\chi^2$ -Funktion erfolgt oft durch numerische Optimierungsmethoden.

Um im Anschluss an die Minimierung eine Aussage über das gefundene Minimum zu erhalten, wird das dazugehörige Konfidenzintervall (engl. confidence level, CL) betrachtet. Dabei handelt es sich um ein Intervall, welches den wahren Messwert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit enthält, wobei man von einer Gaußverteilung ausgeht. Liegt eine eindimensionale Gaußverteilung vor, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass der gemessene Wert  $x$  innerhalb  $\pm\delta$  des wahren Werts  $\mu$  liegt zu [55]:

$$1 - \alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mu-\delta}^{\mu+\delta} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \operatorname{erf}\left(\frac{\delta}{\sqrt{2}\sigma}\right). \quad (6.2)$$

Einige Werte der Fehlerfunktion  $\operatorname{erf}(x)$  können Anhang 10.2 entnommen werden. Durch Abbildung 6.1 wird die Definition des Konfidenzintervalls aus Gleichung (6.2)

verdeutlicht, wobei sich hierbei der gemessene Wert innerhalb eines  $1,64\sigma$  großen Intervalls um den wahren Wert befindet.

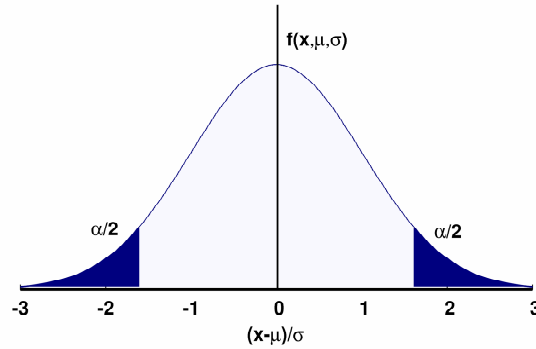


Abbildung 6.1: Illustration des symmetrischen 90% CL an einer Gaußfunktion  $f(x, \mu, \sigma)$ .

Der CL Wert ist abhängig von der Anzahl der Freiheitsgrade der betrachteten Optimierung. In Tabelle 6.1 sind für verschiedene Freiheitsgrade und Vertrauensintervalle die dazugehörigen  $\Delta\chi^2$ -Werte, die Differenz zwischen dem geringsten  $\chi^2$  und dem betrachteten Wert, aufgetragen.

$(1-\alpha)\%$	m=1	m=2
68,27	1	2,30
90	2,71	4,61
95	3,84	5,99
95,45	4	6,18
99	6,63	9,21
99,73	9	11,83

Tabelle 6.1:  $\Delta\chi^2$  in Abhängigkeit des  $CL=(1-\alpha)\%$  und m Parameter.

In dieser Diplomarbeit wird versucht eine Aussage über die Übereinstimmung des CMSSM Modells mit den in Kapitel 3.5 aufgezählten Einschränkungen zu geben. Die dazugehörige  $\chi^2$ -Funktion hat folgende Form:

$$\begin{aligned}
 \chi^2 = & \left( \frac{\Omega h^2 - 0,1131}{\sigma_{\Omega h^2}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta a_\mu - 30,2 \cdot 10^{-10}}{\sigma_{\Delta a_\mu}} \right)^2 + \left( \frac{BR(b \rightarrow s\gamma) - 3,55 \cdot 10^{-4}}{\sigma_{BR(b \rightarrow s\gamma)}} \right)^2 \\
 & + \left( \frac{BR^{SUSY}(B \rightarrow \tau\nu) / BR^{SM}(B \rightarrow \tau\nu) - 1,43}{\sigma_{BR^{SUSY}(B \rightarrow \tau\nu) / BR^{SM}(B \rightarrow \tau\nu)}} \right)^2 \\
 & + \left( \frac{m_h - 114,4 \text{ GeV}}{\sigma_{m_h}} \right)^2 \quad (\text{für } m_h < 114,4 \text{ GeV}) \\
 & + \left( \frac{BR(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-) - 4,7 \cdot 10^{-8}}{\sigma_{BR(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)}} \right)^2 \quad (\text{für } (B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-) > 4,7 \cdot 10^{-8}).
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Auf die einzelnen Summanden wird in Kapitel 7.2 näher eingegangen. Da die Darstellung der  $\chi^2$ -Funktion innerhalb der  $m_0$ - $m_{1/2}$ -Ebene erfolgt, handelt es sich um zwei Freiheitsgrade, weshalb sich die Darstellung der CL im Analysekapitel auf die zweite Spalte der Tabelle 6.1 bezieht.

## 6.2 Software

Da dieser Diplomarbeit Simulationen der zu untersuchenden Größen zu Grunde liegen, soll im Folgenden grob auf die Struktur und die Funktionen der benutzten Software näher eingegangen werden, um die Reproduzierbarkeit und Vertrauenswürdigkeit der erhaltenen Ergebnisse zu gewährleisten. Zur Visualisierung der Ergebnisse wurde das Programm Gnuplot verwendet, ein kommandozeilenorientiertes Grafikprogramm.

### 6.2.1 CalcHEP – Calculator for High Energy Physics

CalcHEP ist ein Programmpaket, das es erlaubt, automatische Berechnungen von Kollisionen und Zerfällen von Elementarteilchen in der niedrigsten störungstheoretischen Ordnung durchzuführen [56]. Dabei zeichnet sich CalcHEP durch die hohe Automatisierung und die interaktive Menüführung aus. Es bietet neben der interaktiven auch eine Skript basierende Bedienung.

Zu Beginn steht die Wahl des physikalischen Modells, wobei in der aktuellen Version folgende drei Modelle zur Verfügung stehen: das SM, mSUGRA und mSUGRA mit Inputvariablen bei niedrigen Energien. Weitere Modelle können separat auf der CalcHEP Homepage heruntergeladen und implementiert werden. Um die damit verbundenen RGE zu lösen, wird innerhalb von CalcHEP das Programm SuSpect benutzt.

Die Analyse dieser Arbeit beschränkt sich auf das mSUGRA Model. Das CalcHEP Paket besteht im Wesentlichen aus zwei Teilen, einem symbolischen und einem numerischen Teil. Beide Teile sind in der Programmiersprache C geschrieben. Der symbolische Teil produziert einen C Code für ein quadratisches Matricelement, das im numerischen Teil weiter benutzt wird. Der symbolische und der numerische Teil haben viele verschiedene Funktionen. Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurden folgende Funktionen verwendet

- die Auswahl eines physikalischen Modells,
- die Auswahl des betrachteten Prozesses,
- das Anzeigen und Ausschließen bestimmter Feynmandiagramme,
- die Generierung eines optimierten C Codes für das quadratische Matricelement, um weitere numerische Berechnungen durchzuführen,
- die Wahl der PDF für den betrachteten Prozess,
- die Modifikation der physikalischen Parameter, so wie Energie, Massen und mSUGRA/CMSSM Parameter und
- die Berechnung des WQ mit Vegas, einem Monte Carlo Generator zur Integration des Phasenraums.

Im Wesentlichen wurde CalcHEP Version 2.5.6. zur Berechnung und Untersuchung des WQ und des Massenspektrums bei der assoziierten Higgsproduktion benutzt.

### 6.2.2 MINUIT

MINUIT ist ein physikalisches Analysewerkzeug zur Minimierung von Funktionen. Die dabei zu minimierende Funktion wird vom Benutzer festgelegt [57]. Für die folgenden Analysen wurde eine  $\chi^2$ -Funktion minimiert. Ursprünglich wurde MINUIT in der Programmiersprache Fortran vor über 25 Jahren am CERN geschrieben. Um MINUIT innerhalb von MOPS zu implementieren, wurde jedoch die C++ Version verwendet. Dabei musste die zu minimierende Funktion, die FCN-Funktion, innerhalb der FCNBase Klasse definiert werden. Die genaue Implementierung innerhalb von MOPS kann in [58] nachgelesen werden. Die zu minimierende Funktion kann in Abhängigkeit mehrerer Variablen festgelegt und durch den Benutzer definiert werden. Um die Minimierung vorzunehmen, durchläuft MINUIT eine Reihe festgelegter Kommandos in einem separaten Hauptprogramm. Zur Minimierung stehen im Wesentlichen zwei Funktionen zur Verfügung: SIMPLEX und MIGRAD. Während SIMPLEX wesentlich robuster ist und nicht immer zum korrekten Minimum der Funktion konvergiert, ist MIGRAD zwar genauer jedoch durch eine andere Minimierungsmethode sehr von der ersten Ableitung der Funktion abhängig. Je nach Komplexität der Funktion kann sich MIGRAD in einem Bereich festsetzen, ohne das korrekte Minimum zu finden. Um beide Methoden möglichst effektiv zu nutzen, wird bei der Verwendung von MINUIT im ersten Schritt der Minimierung zunächst SIMPLEX aufgerufen. Wenn kein zufrieden stellendes Minimum gefunden wurde, wird mit den gefundenen Werten erneut MIGRAD aufgerufen, um ein genaueres Minimum zu finden.

Da MINUIT sehr sensitiv auf die Wahl des Startpunkts der Minimierung ist, kann nach mehrmaligen ergebnislosen Aufrufen von MIGRAD und SIMPLEX bei einem beliebigen Startpunkt die SCAN Funktion verwendet werden. Da diese Funktion zu einer bestimmten Anzahl an Punkten den Wert der FCN-Funktion berechnet und so innerhalb des angegebenen Intervalls den Punkt für den minimalen Funktionswert angibt, kann diese Funktion als primitives Minimierungsverfahren oder als Mittel zum Auffinden eines sinnvollen Startpunktes benutzt werden.

### 6.2.3 micrOMEGAs

Das Programm micrOMEGAs ist ein Code zur Berechnung von Prozessen innerhalb des SM, die in Verbindung mit kalter Dunkler Materie stehen [59]. Neben der Relic Density kann man ebenfalls die Dunkle Materie-Raten der direkten und indirekten Suche und die Werte der Einschränkungen aus Kapitel 7.2 berechnen. Dabei wird stets angenommen, dass aufgrund der R-Paritätserhaltung das LSP stabil ist. Zur Berechnung des Massenspektrums stehen mehrere physikalische Modelle zur Verfügung, wobei für die Analyse in Kapitel 7 erneut das CMSSM und SuSpect verwendet wurden. Der Code enthält sowohl C als auch Fortran Routinen. Nachdem neben den CMSSM Parametern auch die  $t$ - und  $b$ -Quark Massen und die starke Kopplungskonstante  $\alpha_s$  eingegeben wurden, erhält man alle nötigen Größen als Output innerhalb des Kommandozeilenbildschirms. Für die Analyse wurde sowohl die micrOMEGAs Version 2.4.Q als auch die Version 2.4.O verwendet [60].

### 6.2.4 SuSpect

SuSpect ist ein Fortran-Code, der das supersymmetrische und Higgs-Massenspektrum des MSSM berechnet [61]. Zur Berechnung stehen verschiedene Modelle zur Verfügung. Die Massenspektren ergeben sich durch Berechnung der RGE, wobei bei den Higgsmassen die großen, störungstheoretischen Korrekturen berücksichtigt werden. Neben dem Massenspektrum werden ebenfalls alle Kopplungen und Mischungsmatrizen berechnet. Ebenso wird die elektroschwache Symmetriebrechung überprüft und gegebenenfalls eine Fehlermeldung angegeben.

### 6.2.5 MOPS

MOPS führt die Optimierung der CMSSM Parameter durch. Dabei sind alle oben aufgeführten Programme innerhalb einer objektorientierten Programmierung implementiert. Neben der Minimierung durch MINUIT enthält sie ein weiteres Minimierungsverfahren, die sogenannte Markov-Chain-Monte-Carlo Methode (MCMC). Nähere Informationen zur Implementierung und der Markov-Ketten-Methode enthält [58].



## 7 Analyse

Wie bereits in Abschnitt 3.2 beschrieben wurde, wird für die Analyse das CMSSM Modell verwendet. Es bietet eine Reduktion der freien Parameter durch die Annahme der Vereinigung aller supersymmetrischen Massen und Kopplungen an der GUT Skala. Ausgehend von der der GUT Skala kann das gesamte Teilchen-Massen-Spektrum bei niedrigen Energien unter Annahme der fünf CMSSM Parametern mit den RGE berechnet werden. Mögliche Vorhersagen bezüglich des Entdeckungspotentials neuer Teilchen sind dadurch deutlich einfacher als unter der Annahme von 105 freien Parametern aus der sanften Brechung. Geht man nun davon aus, dass SUSY existiert und dabei alle nötigen Eigenschaften im CMSSM erfüllt, so stellt sich als nächstes die Frage, welche Kombinationen der fünf Parameter erlaubt sind, um mit den heutigen beobachtbaren Teilchen und Prozessen übereinzustimmen. In diesem Kapitel werden Methoden gezeigt, die sich der Lösung dieser Problemstellung nähern.

Alle erlaubten Punkte im CMSSM Parameterraum sollten mit den in Abschnitt 3.5 dargestellten experimentellen Messwerten aus der Kosmologie und B-Physik übereinstimmen. Die supersymmetrischen Teilchen sind aufgrund der gebrochenen Symmetrie schwerer als die SM-Teilchen, so dass sie bisher nicht beobachtet werden konnten. Hinweise auf diese Teilchen machen sich bei bereits gemessenen Prozessen durch Schleifenkorrekturen bemerkbar und beeinflussen so, die niederenergetischen physikalischen Prozesse. Außerdem sollte das Teilchenspektrum mit den direkten Suchen nach dem Higgs-Boson und dem WIMP übereinstimmen. Um die Punkte zu finden, die möglichst gut diesen Einschränkungen entsprechen, wird eine  $\chi^2$ -Funktion erstellt, wie sie in Abschnitt 6.1 in Gleichung (6.3) gezeigt wurde. Wird diese  $\chi^2$ -Funktion minimiert, so ergeben sich durch Angabe der Wahrscheinlichkeiten alle erlaubten CMSSM Parameterkombinationen innerhalb des betrachteten Konfidenzintervalls. Die Minimierung wird stets mit dem in Kapitel 6.2.2 vorgestellten Softwaretool MINUIT durchgeführt.

Bei der Minimierung der oben genannten  $\chi^2$ -Funktion treten jedoch Probleme auf. Aufgrund der starken Korrelationen zwischen den Parametern  $\tan(\beta)$  und  $A_0$ , bewirkt eine geringe Modifikation einer dieser Parameter eine starke Änderung der  $\chi^2$ -Funktion, was die Suche nach einem Minimum stark beeinträchtigt.

Im Folgenden soll zunächst auf die Probleme der Analyse eingegangen werden, darunter die starke Korrelation der Parameter und die dazugehörige Lösung. Anschließend wird jede Einschränkung (engl. Constraint) intensiv diskutiert und deren Auswirkungen auf die  $\chi^2$ -Funktion geprüft. Sind die Effekte der einzelnen Einschränkungen geklärt, können sie für die gesamte  $\chi^2$ -Funktion kombiniert werden, um den daraus resultierenden, erlaubten CMSSM Parameterbereich zu bestimmen. Im Anschluss wird das Ergebnis noch unter weiteren Aspekten diskutiert. Zum einen wird in Kapitel 7.3.1 auf die gewählte Fehlerbehandlung der Einschränkungen eingegangen. Zum anderen wird das Resultat mit anderen Gruppen in Kapitel 7.3.2 verglichen. Der Einfluss der Ausschlussgrenze durch die direkte Suche nach Dunkler Materie und nach supersymmetrischen Teilchen am LHC wird in Kapitel 7.3.3 und in Abschnitt 7.3.4 geschildert.

## 7.1 Problem der Minimierung

Eine bereits durchgeführte Analyse [62] zeigte, dass der theoretische Wert der Relic Density sehr sensitiv auf  $\tan(\beta)$  ist und eine starke Korrelation mit den SUSY Massenparametern  $m_0$  und  $m_{1/2}$  vorliegt. Begründet ist dies durch das führende Feynman-Diagramm für die Neutralino-Annihilation über ein pseudoskalares Higgs  $A$ . Wie bereits in Kapitel 4.5 gezeigt wurde, ist dies vor allem für hohe Werte für  $\tan(\beta)$  der dominante Prozess. Da die Masse des pseudoskalaren Higgs  $A$  direkt in den Wirkungsquerschnitt eingeht, muss die Masse optimiert werden, um den korrekten Wert der Relic Density zu erhalten. Um einen zu hohen WQ zu vermeiden, wird bei hohen  $\tan(\beta)$  ein leichtes pseudoskalares Higgs benötigt. Dies ist nur dann möglich, wenn die Massenparameter des Higgspotentials  $m_1$  und  $m_2$  im Bereich der elektroschwachen Skala selbst klein sind. Dies ist auf den Zusammenhang [62]

$$m_A = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} \quad (7.1)$$

zurückzuführen, der sich ohne weitere Schleifenkorrekturen ergibt.

Der Startpunkt von  $m_1$  und  $m_2$  auf der Gutskala ist durch die vereinheitlichte Gauginomasse  $m_0$  und den Higgsmischungsparameter  $\mu$  über

$$m_1(GUT) = m_2(GUT) = \sqrt{m_0^2 + \mu^2} \quad (7.2)$$

definiert. Der Verlauf von  $m_1$  und  $m_2$  hin zu kleineren Energien wird dabei hauptsächlich durch die Yukawakopplungen von  $b$ - und  $t$ -Quark beeinflusst. Da die Kopplung proportional zur Masse der Teilchen ist, werden nur die hohen Massen der dritten Quarkgeneration berücksichtigt. Die Yukawakopplungen  $h_t$  und  $h_b$  sind ihrerseits mit den Massen von  $t$ - und  $b$ -Quark und  $\tan(\beta)$  über das Verhältnis [62]

$$\frac{m_t}{m_b} = \frac{h_t}{h_b} \tan \beta \quad (7.3)$$

verknüpft.

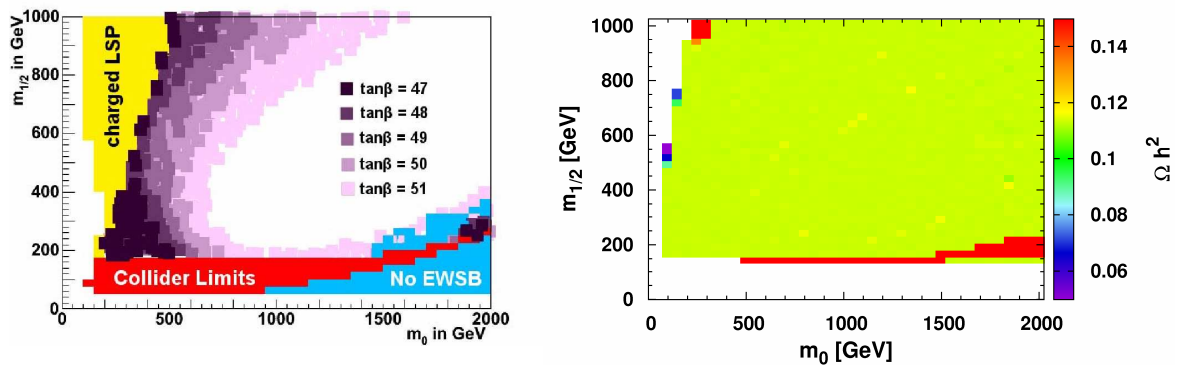


Abbildung 7.1: Konsistente Punkte der Relic Density für feste und variable CMSSM Parameter. Links: Erlaubte Bänder innerhalb der  $m_0$ - $m_{1/2}$  Ebene für feste Werte von  $\tan(\beta)$ . Zusätzlich sind die ausgeschlossenen Bereiche farblich unterlegt [62]. Rechts: Optimierte Werte der Relic Density in der  $m_0$ - $m_{1/2}$  Ebene und variierten  $\tan(\beta)$  Werte.



Der Verlauf von  $m_1^2$  und  $m_2^2$  kann also mit Hilfe von  $\tan(\beta)$  so verändert werden, dass die Massen auf der elektroschwachen Skala klein werden und man somit eine kleine Masse für das pseudoskalare Higgs A erhält. Für einen festen Wert für  $\tan(\beta)$  in Kombination mit einem festen Wert für  $A_0$  kommt es also innerhalb der  $m_0$ - $m_{1/2}$ -Ebene zu verschiedenen Bereichen, die in Abbildung 7.1 dargestellt werden.

Es tauchen stets zwei ausgeschlossene Bereiche auf, darunter ein Bereich, in dem es zu keiner elektroschwachen Symmetriebrechung kommt und ein anderer Bereich, in dem das Stau das LSP ist. Beide sind für die durchgeführte Analyse unbrauchbar und somit ausgeschlossen. Für feste Werte für  $\tan(\beta)$  gibt es einen schmalen Bereich, der mit der Relic Density konsistent ist, weshalb bei Variation von  $\tan(\beta)$  fast die gesamte  $m_0$ - $m_{1/2}$ -Ebene erlaubt ist.

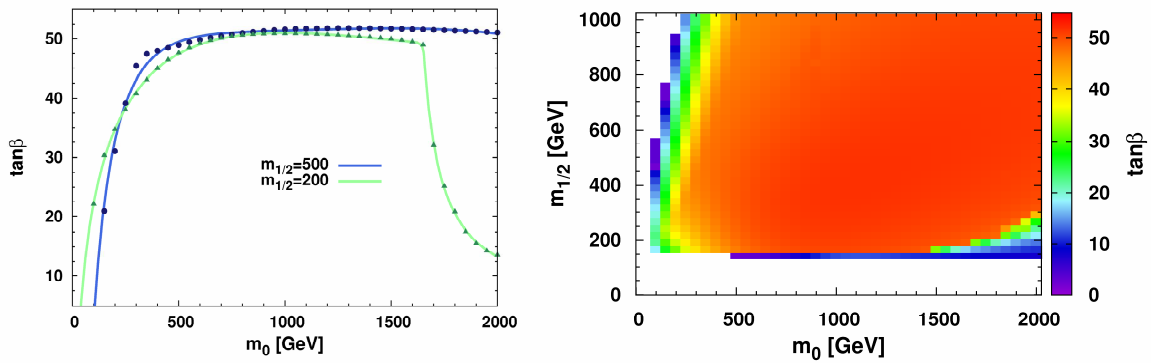


Abbildung 7.2: Korrelation zwischen den CMSSM Parameter  $\tan(\beta)$  und  $m_0$ .

Links: Verlauf des CMSSM Parameter  $\tan\beta$  in Abhängigkeit von  $m_0$  für festes  $m_{1/2} = 500$  bzw.  $m_{1/2} = 200$ . Rechts: Optimierte Werte von  $\tan\beta$  für konsistente Werte der Relic Density.

Die Werte von  $\tan(\beta)$ , die die korrekte Relic Density ergeben, sind in Abbildung 7.2 zu sehen. Die Korrelation zwischen  $\tan(\beta)$  und  $m_0$  für einen festen  $m_{1/2}$ -Wert wird in Abbildung 7.2 dargestellt. Anhand der Abbildungen lässt sich erkennen, dass für einen großen Bereich in der  $m_0$ - $m_{1/2}$  Ebene bis auf den schmalen Bereich in der Koannihilationsregion große Werte für  $\tan(\beta)$  bevorzugt werden.

Da für die korrekte Relic Density ein hoher Wert für  $\tan(\beta)$  benötigt wird, beeinflusst dies vor allem die Einschränkungen, die eine starke Abhängigkeit von  $\tan(\beta)$  aufweisen, wie beispielsweise der Prozess  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ .

### 7.1.1 Korrelation zwischen $\tan(\beta)$ und $A_0$

Im vorangegangenen Abschnitt wurde die starke Abhängigkeit der Relic Density von  $\tan(\beta)$  gezeigt. Da dieser Parameter ebenfalls andere Einschränkungen wie das Verzweigungsverhältnis des Prozesses  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$  beeinflusst, müssen diese untersucht werden. Des Weiteren wurde dargestellt, dass durch Variation von  $\tan(\beta)$  der korrekte Wert der Relic Density erhalten werden konnte. Die Frage liegt nahe, ob simultan die anderen Einschränkungen ebenfalls erfüllt sind und in welchen CMSSM Parameterbereich diese simultan optimiert werden können. Um diesen Sachverhalt einzuschätzen ist in Abbildung 7.3 die starke Abhängigkeit zweier

Einschränkungen als Funktion von  $\tan(\beta)$  dargestellt. Dabei sind die restlichen CMSSM Parameter fest und nehmen die Werte  $A_0=0$ ,  $m_0=500$ ,  $m_{1/2}=400$  und  $\text{sign}(\mu)=+1$  ein. Die rote Kurve repräsentiert den Verlauf der Relic Density, deren Werte an der rechten Skala abgelesen werden können. Auf der linken Skala kann dagegen die blaue Kurve abgelesen werden, die den Verlauf des Verzweungsverhältnisses des Prozesses  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$  darstellt. Die horizontale Linie entspricht gleichzeitig dem oberen Limit des Verzweungsverhältnisses und dem experimentell gemessenen Wert für die Relic Density. Das Band um die vertikale Linie entspricht dem experimentellen Fehler des Wertes. Aus Abbildung 7.3 geht hervor, dass die Relic Density einen Wert für  $\tan(\beta)$  im Bereich von 48 bevorzugt. Dies würde zu einem viel zu hohen Wert von  $\text{BR}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$  führen, da der höchste Wert für  $\tan(\beta)$ , der mit dem oberen Limit von  $\text{BR}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$  verträglich ist, im Bereich von 45 liegt. Dieses Beispiel zeigt, dass beide Einschränkungen nicht problemlos simultan optimiert werden können. In der Analyse würde das zu einem sehr hohen  $\chi^2$ -Wert führen. Variiert man nun simultan zu  $\tan(\beta)$  ebenfalls  $A_0$ , so kann ein gemeinsames  $\tan(\beta)$  für beide Einschränkungen gefunden werden, so dass der betrachtete Punkt im CMSSM Parameterraum konsistent zu  $\text{BR}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$  und  $\Omega h^2$  ist. Dieses Verhalten ist in Abbildung 7.3 dargestellt, indem der  $\chi^2$ -Wert für die beide Einschränkungen über  $\tan(\beta)$  und  $A_0$  aufgetragen ist. Zur Übersichtlichkeit sind die  $\chi^2$ -Werte größer 10 weggeschnitten. Zu sehen ist die starke Korrelation zwischen  $\tan(\beta)$  und  $A_0$ . Nimmt  $A_0$  den Wert Null an, so sieht man, dass das  $\chi^2$  sehr hoch ist, wohingegen für große Werte von  $A_0$  viele gemeinsame  $\tan(\beta)$ -Werte gefunden werden können, die auf ein kleines  $\chi^2$  führen. Es lässt sich zusammenfassend sagen, dass sich aufgrund der Relic Density eine Korrelation zwischen  $\tan(\beta)$  und  $m_0$  ergibt. Das Hinzufügen weiterer Einschränkungen führt dann zusätzlich zu einer starken Korrelation zwischen  $\tan(\beta)$  und  $A_0$ .

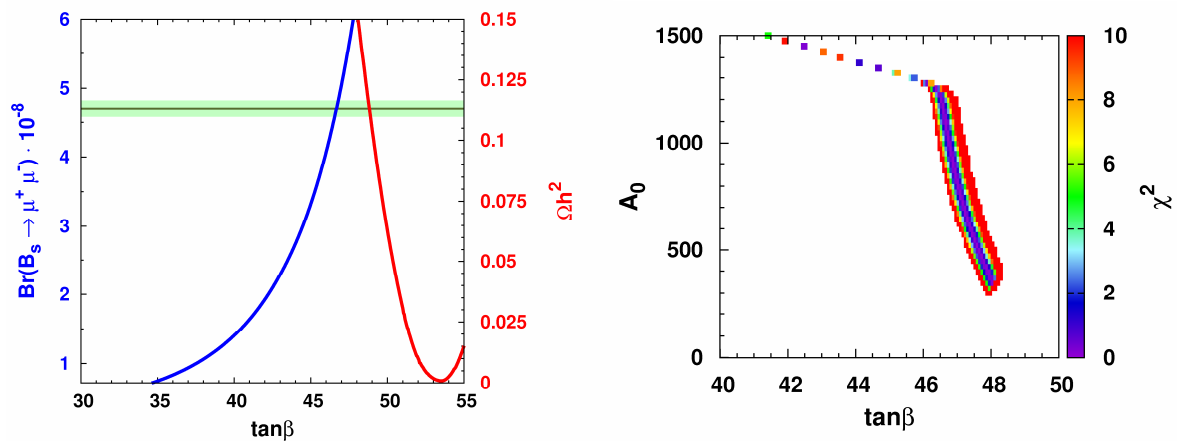


Abbildung 7.3: Korrelation zwischen den CMSSM Parameter  $\tan(\beta)$  und  $A_0$ . Links:  $\text{BR}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$  in blau und  $\Omega h^2$  in rot über  $\tan(\beta)$  aufgetragen. Die Einschränkungen bevorzugen unterschiedliche Werte für  $\tan(\beta)$ . Rechts:  $\chi^2$ -Funktion für den links dargestellten Punkt in der  $\tan\beta$ - $A_0$ -Ebene. Bei der simultanen Variation von  $A_0$  ergeben sich viele gemeinsame Werte für  $\tan(\beta)$ .

Ein weiteres Beispiel für die Korrelation ist das anomale magnetische Moment des Myons  $(g-2)_\mu$  und das Verzweigungsverhältnis des Prozesses  $b \rightarrow s \gamma$ .

Die Abhängigkeit von  $(g-2)_\mu$  ist in Abbildung 7.4 für unterschiedliche  $m_0$ - $m_{1/2}$  Paare dargestellt, wobei erneut zunächst  $A_0=0$  gewählt wurde. Die roten Kurven entsprechen dem Verlauf für  $(g-2)_\mu$  für ein positives Vorzeichen für den Higgsmischungsparameter  $\mu$ , wohingegen für die blauen Kurven  $\text{sign}(\mu)=-1$  gewählt wurde. Die horizontale Linie mit dem dazugehörigen Band entspricht dem fehlerbehafteten experimentellen Wert. Die andere horizontale Linie repräsentiert die Vorhersage des SM. Der Abbildung ist das Vorzeichen von  $\mu$  zu entnehmen. Aufgrund des anomalen magnetischen Moments des Myons wird das Vorzeichen von  $\mu$  stets positiv gewählt, da nur so der experimentelle Wert erreicht werden kann. Diese Vorzeichenkonvention gilt für die gesamte Analyse. Für ein negatives Vorzeichen von  $\mu$  entwickelt sich der Wert von  $(g-2)_\mu$  in die entgegen gesetzte Richtung. Nachdem das Vorzeichen von  $\mu$  festgelegt wurde, ist auffällig, dass diese Einschränkung, ähnlich wie die Relic Density, hohe Werte für  $\tan(\beta)$  bevorzugt, um mit dem experimentellen Wert übereinzustimmen. Versucht man nun  $(g-2)_\mu$  mit  $\text{BR}(b \rightarrow s \gamma)$  zu kombinieren, so ergibt sich aus Abbildung 7.4 für  $A_0=0$  erneut das Problem, dass unterschiedliche  $\tan(\beta)$  bevorzugt werden. Abbildung 7.4 zeigt den Verlauf von  $\text{BR}(b \rightarrow s \gamma)$  in Abhängigkeit von  $\tan(\beta)$  für unterschiedliche Werte für  $A_0$ , wobei die vertikalen Linien analog zu denen von  $(g-2)_\mu$  verstanden werden. Im Gegensatz zu  $(g-2)_\mu$  favorisiert  $\text{BR}(b \rightarrow s \gamma)$  kleine Werte für  $\tan(\beta)$ , um den experimentellen Wert anzunehmen. Variiert man erneut simultan zu  $\tan(\beta)$  ebenfalls  $A_0$ , so kann eine deutliche Verbesserung erreicht werden. Es ergibt sich innerhalb des experimentellen Fehlers eine gute Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert für den gesamten Bereich von  $\tan(\beta)$ .

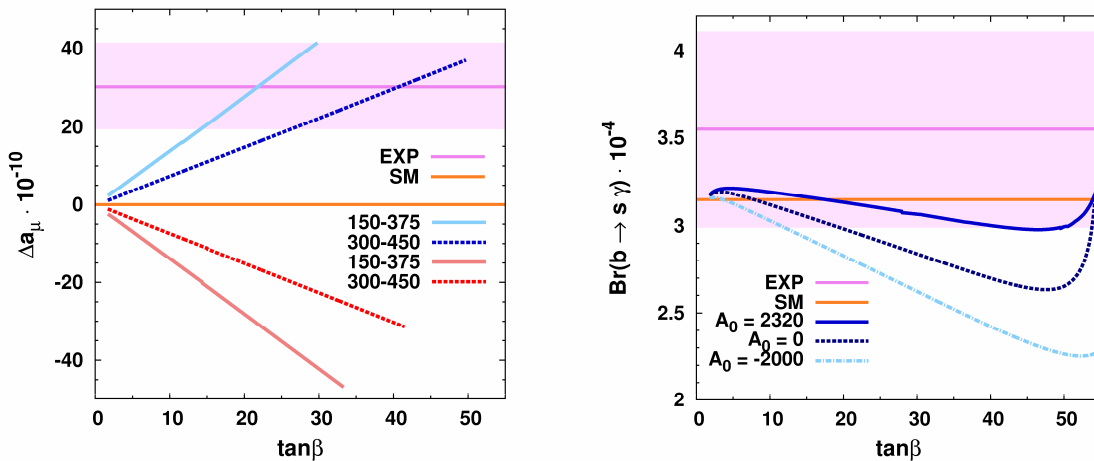


Abbildung 7.4: Abhängigkeit von den CMSSM Parameter für andere Einschränkungen. Links:  $(g-2)_\mu$  über  $\tan(\beta)$  für unterschiedliche Werte von  $m_0$ - $m_{1/2}$ , die durch die dargestellten Wertepaare repräsentiert werden. Den blauen/roten Kurven entspricht ein positives/negatives Vorzeichen von  $\mu$ . Diese Einschränkung legt das Vorzeichen von  $\mu$  fest. Rechts:  $\text{BR}(b \rightarrow s \gamma)$  über  $\tan\beta$  für festes  $m_0$ - $m_{1/2}$  und unterschiedlichen Werten von  $A_0$  aufgetragen. Für hohe Werte von  $A_0$  kann im gesamten Bereich von  $\tan(\beta)$  eine Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert gefunden werden.

An den hier gezeigten Beispielen wurde die Schwierigkeit gezeigt, jeweils zwei Einschränkungen gemeinsam zu optimieren. Werden weitere Einschränkungen, wie sie in Kapitel 3.5 vorgestellt wurden, hinzugenommen, tritt dort ebenfalls das Problem der simultanen Optimierung ein. Da in dieser Analyse alle Einschränkungen kombiniert werden, wird versucht den Parameterbereich zu finden, in welchem alle Einschränkungen simultan erfüllt werden können.

### 7.1.2 Mehrstufige Optimierung

Aufgrund der starken Korrelationen, die im vorangegangenen Abschnitt 7.1.1 erläutert wurden, muss ein Optimierungsverfahren entwickelt werden, das den Korrelationen gerecht wird. Wenn man annimmt, dass das Vorzeichen von  $\mu$  aufgrund des anomalen magnetischen Moments positiv ist, ergibt sich ein vierdimensionaler Parameterraum. Die korrekte Kombination der Parameter, die mit allen Einschränkungen übereinstimmen, kann auf zwei Arten gefunden werden. Zum einen über zufallsbasierten Markov-Chain-Monte-Carlo Optimierungsmethoden und zum anderen über die Minimierung einer  $\chi^2$ -Funktion.

In diesem vierdimensionalen Parameterraum, in dem die Parameter stark korreliert sind, ist es bei einer Zufallssuche, wie bei der Markov-Chain-Monte-Carlo Methode, schwierig alle erlaubten Kombinationen zu finden. Die Monte-Carlo Methode ist ein Verfahren aus der Stochastik, bei dem auf Basis häufig durchgeführter Zufallsexperimente Vorhersagen getroffen werden können. Die Zufallsexperimente können durch die Erzeugung geeigneter Zufallszahlen durchgeführt werden. Eine Markov Kette ist ein spezieller stochastischer Prozess, mit dem man Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten zukünftiger Ereignisse angeben kann, indem der gegenwärtige Zustand des Systems analysiert wird.

Bei der Zufallssuche kann die korrekte Kombination der Parameter in Bereichen, in denen diese fein abgestimmt werden müssen, zunächst als weniger wahrscheinlich abgeschätzt werden, was durch eine ausreichend lange Suchdauer kompensiert werden kann. Neben der Schwierigkeit der Konvergenz, ist diese Optimierungsmethode ebenfalls von den angenommenen Schrittlängen abhängig. Neben einheitlichen Schrittweiten können ebenfalls logarithmische verwendet werden, so dass hohe Parameter gegenüber kleinen Werten häufiger ausgewählt werden.

Die Probleme aufgrund der starken Korrelationen können bei dieser Optimierungsmethode mithilfe einer Korrelationsmatrix behoben werden, indem die angepasste Schrittlänge aus der Korrelationsmatrix bestimmt wird [63].

Bei der Bestimmung der Parameterkombination innerhalb der  $\chi^2$ -Minimierung treten aufgrund der starken Korrelationen ebenfalls Probleme auf, wenn alle Parameter gleichzeitig variiert werden. Zwar konvergiert diese Methode gegenüber der zufallsbasierten Suche schneller, jedoch findet es meist nur ein lokales Minimum. Das gefundene Minimum wird dann fälschlicherweise als globales Minimum interpretiert. Gerade bei stark korrelierten Anteilen innerhalb der  $\chi^2$ -Funktion, können viele lokale Minima existieren, so dass das globale Minimum des betrachteten Parameterraums übersehen wird.

Um den starken Korrelationen in dieser  $\chi^2$ -Analyse Rechnung zu tragen und um so keine erlaubten Kombinationen zu übersehen, wird als Lösung ein mehrstufiges Optimierungsverfahren verwendet. Dies bedeutet, dass zunächst die stark korre-

lierten Parameter  $\tan(\beta)$  und  $A_0$  für feste restliche Parameter optimiert werden. Man geht so Schritt für Schritt durch die  $m_0$ - $m_{1/2}$  Ebene und berechnet für jedes  $m_0$ - $m_{1/2}$  Paar das dazugehörige  $\tan(\beta)$  und  $A_0$ . Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit jedes Punktes und damit der Bestimmung des erlaubten Parameterbereichs ergibt sich dabei aus der Optimierung bzw. Minimierung der  $\chi^2$ -Funktion. Da man so für jeden Optimierungsschritt nur wenige Parameter variieren muss, konvergiert diese Art der Minimierung schnell, trotz der starken Korrelation zwischen den Parametern. Ebenfalls kann durch Benutzung eines Gitters innerhalb der  $m_0$ - $m_{1/2}$  Ebene eine Parallelisierung der Optimierungsschritte erreicht werden. Jeder Gitterpunkt kann dann unabhängig von den anderen berechnet werden. Der Vergleich dieser Optimierung mit anderen gängigen Zufallssuchen wird zeigen, dass auf diese Weise ein größerer erlaubter Bereich gefunden werden kann.

## 7.2 Einschränkungen

Um den erlaubten Parameterbereich mit Hilfe des mehrstufigen Optimierungsverfahrens zu finden, werden zunächst alle Einschränkungen einzeln mit der Relic Density kombiniert, um den Einfluss jeder Einschränkung besser zu verstehen. Anschließend werden alle Einschränkungen kombiniert und gemeinsam optimiert, um alle konsistenten Punkte innerhalb der  $m_0$ - $m_{1/2}$  Ebene zu finden. Die verwendete  $m_0$ - $m_{1/2}$  Ebene erstreckt sich dabei immer bis  $m_0=2000$  und  $m_{1/2}=1000$ .

Mit Hilfe des mehrstufigen Optimierungsverfahrens gelingt es gute Ergebnisse, trotz starker Korrelationen, nicht zu übersehen. Es sei angemerkt, dass die Variation von  $A_0$  im Vergleich zum festen  $A_0$  selbst schon eine Verbesserung darstellt. Um dies gegenüberstellen zu können, sind zu jeder Darstellung der  $\chi^2$ -Funktion der einzelnen Einschränkungen und deren Kombination ebenfalls Abbildungen für festes  $A_0$  in Anhang 10.3 aufgeführt. Diese dienen einerseits zum Vergleich der verbesserten Methode, andererseits zur Vollständigkeit, da oft Analysen unter Verwendung des CMSSM Modells auftauchen, bei denen von einem festen  $A_0$  ausgegangen wird.

### 7.2.1 Relic Density $\Omega h^2$

Aus Kapitel 4 ist bekannt, dass ein Großteil der Neutralinos als thermische Relikte des frühen Universums zum Zeitpunkt des Ausfrierens annihilirt ist. Die primordiale Dunkle Materiedichte ergibt sich dabei aus dem Annihilationswirkungsquerschnitt, da Dichte und Wirkungsquerschnitt umgekehrt proportional zueinander sind [45]. Um mit Hilfe des dominanten Annihilationsprozesses aus Kapitel 4.5 eine Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert zu erreichen, wird  $\tan(\beta)$  variiert. Wie bereits in Abschnitt 7.1 erläutert wurde, ergibt sich die Sensitivität bezüglich  $\tan(\beta)$  direkt aus der Masse des pseudoskalaren Higgs  $m_A$ . Dabei sollte die Masse des pseudoskalaren Higgs nahe der Masse des Neutralinos liegen, um eine gute Übereinstimmung mit dem gemessenen Wert zu erreichen. Eine exakte Übereinstimmung der Massen würde jedoch zu einer Resonanz führen, was zu einem viel zu hohen WQ und damit einer viel zu geringen Dunklen Materiedichte führen würde.

Die Abhängigkeit der Relic Density von  $\tan(\beta)$  für unterschiedliche  $m_0$ - $m_{1/2}$  ist in Abbildung 7.5 dargestellt, wobei daneben der vergrößerte Bereich nahe dem experimentellen Wert zu sehen ist.

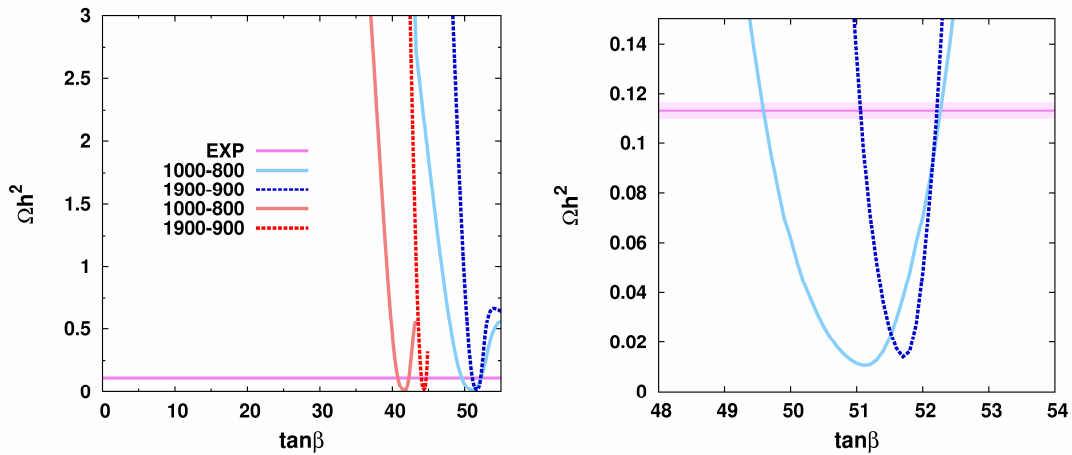


Abbildung 7.5: Verlauf von  $\Omega h^2$  in Abhängigkeit von  $\tan(\beta)$  für unterschiedliche Werte von  $m_0$ - $m_{1/2}$ , die durch die dargestellten Wertepaare repräsentiert werden. Links: Der Verlauf für Werte von  $\tan(\beta)$  bis 55. Den blauen/roten Kurven entspricht ein positives/negatives Vorzeichen von  $\mu$ . Rechts: Gleicher Verlauf für einen vergrößerten Bereich um das Minimum der Relic Density. Gerade im Bereich hoher  $m_0$ - $m_{1/2}$  führt eine minimale Änderung von  $\tan(\beta)$  zu starken Variationen von  $\Omega h^2$ .

Daraus ergibt sich, dass eine kleine Variation von  $\tan(\beta)$ , gerade im Bereich des bevorzugten Werts, zu einer großen Änderung der Relic Density führt. Des Weiteren erkennt man, dass sich in der Nähe des Minimums der Relic Density zwei mögliche Übereinstimmungen mit dem experimentellen Wert ergeben. Nahe dem Minimum, was gerade der Resonanz der Annihilation entspricht, befinden sich also zwei mögliche Minima der  $\chi^2$ -Funktion, die jeweils einen anderen  $\tan(\beta)$ -Wert aufweisen. Diese Tatsache führt dazu, dass man je nach Startwert und Schrittweite bei der Minimierung in eines der beiden Minima fällt. Da beide Minima zulässig sind, kann es vorkommen, dass es innerhalb der Gitterpunkte in der  $m_0$ - $m_{1/2}$  Ebene zu Sprüngen der  $\tan(\beta)$  Werte kommt, was jedoch keine Auswirkungen auf die Korrektheit des Minimums hat.

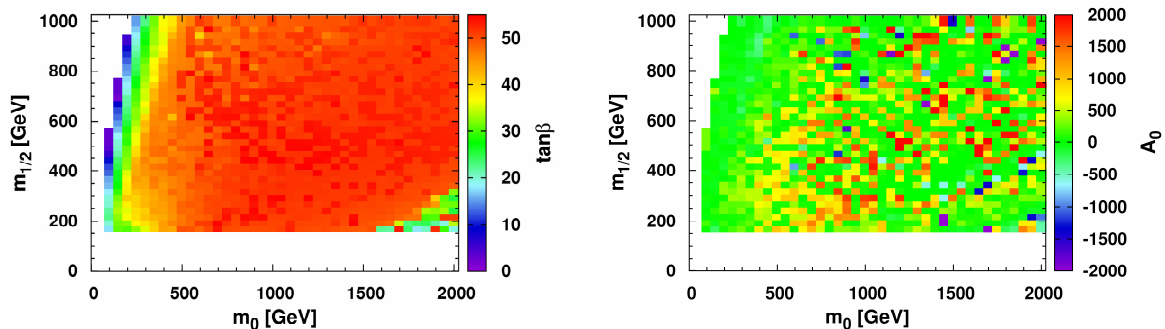


Abbildung 7.6: Optimierte Werte von  $\tan(\beta)$  (links) und  $A_0$  (rechts) für  $\Omega h^2$ .

Im rechten Teil der Abbildung 7.1 wird ersichtlich, dass im gesamten dargestellten  $m_0$ - $m_{1/2}$  Bereich eine gute Übereinstimmung mit dem experimentell gemessenen Wert erreicht werden kann, so dass die zugehörigen  $\chi^2$ -Werte nahe Null sind. Die Werte für  $\tan(\beta)$  und  $A_0$ , die sich aus der Optimierung ergeben, sind in Abbildung 7.6 zu sehen. Die Relic Density bevorzugt offensichtlich fast im gesamten Bereich hohe Werte von  $\tan(\beta)$ , außer innerhalb der Koannihilationsregion, da sonst der Annihilationswirkungsquerschnitt zu hoch wäre. Die Relic Density ist auf das dazugehörige  $A_0$  nicht sehr sensitiv. Anhang 10.3.1 ist zu entnehmen, dass bereits für festes  $A_0=0$  eine gute Übereinstimmung gefunden werden kann. Die Variationen vom Wert von  $A_0$  innerhalb des Intervalls  $[-1000,1000]$  führt somit zu einer unwesentlichen Verbesserung des  $\chi^2$ -Werts. Für die Analyse der kombinierten Einschränkungen wurde der Messwert der Fünf-Jahres-Daten der WMAP Sonde aus [32] verwendet.

$$\Omega_\chi h^2 = 0,1131 \pm 0,0034. \quad (7.4)$$

Die Werte der Relic Density wurden mit dem Softwarepaket micrOMEGAs berechnet. Da aus [64] hervorgeht, dass bei der Berechnung von  $\Omega h^2$  Unsicherheiten aus SUSY-QCD Korrekturen auftreten, wird eine zusätzliche Unsicherheit von 12%, also  $\sigma=0,014$ , abgeschätzt, den man als theoretischen Fehler des Wertes in Gleichung (7.4) betrachtet. Für die Analysen, in denen die Relic Density mit einzelnen Einschränkungen kombiniert wird, wird lediglich der experimentelle Fehler verwendet, da in den Einzelanalysen nur qualitative Aussagen getroffen werden. Der Fehler, der in die  $\chi^2$ -Funktion eingeht, die alle Einschränkungen simultan beinhaltet, ist die Summe aus experimentellem und theoretischem Fehler. Diese Fehlerbetrachtung wird in Kapitel 7.3.1 begründet. So ergibt sich der  $\chi^2$ -Anteil zur gesamten  $\chi^2$ -Funktion zu

$$\chi_{\Omega h^2}^2 = \left( \frac{\Omega h^2 - 0,1131}{0,0174} \right)^2, \quad (7.5)$$

Zu beliebigen CMSSM Parametersätzen, die als Input verwendet werden, kann so der entsprechende  $\chi^2$ -Wert berechnet werden.

### 7.2.2 BR( $b \rightarrow s \gamma$ )

Bei dem Prozess  $b \rightarrow s \gamma$  handelt es sich um einen flavourändernden neutralen Strom. Dieser ist im SM auf Born Niveau nicht erlaubt, so dass er nur innerhalb von Schleifendiagrammen möglich ist. Dabei zerfällt das b-Quark, wie in Abbildung 7.7 zu sehen, über eine  $W^\pm$ -t-Schleife in ein s-Quark und ein Photon [65].

Für den Prozess  $b \rightarrow s \gamma$  kommt es zu einer Diskrepanz zwischen dem vom SM vorhergesagten und dem experimentell gemessenen Wert des Verzweigungsverhältnisses. Während vom SM der Wert

$$BR^{SM}(b \rightarrow s \gamma) = (3,15 \pm 0,23) \cdot 10^{-4}, \quad (7.6)$$

vorhergesagt wird [34], ergibt sich für den experimentellen Wert

$$BR^{EX}(b \rightarrow s \gamma) = (3,55 \pm 0,24 \pm 0,09) \cdot 10^{-4}. \quad (7.7)$$

Wegen dem Unterschied der Vorhersage des SM und des experimentell gemessenen Werts, könnten hier zusätzliche supersymmetrische Beiträge eine bessere Übereinstimmung mit dem Experiment liefern oder sogar den Unterschied aufheben. Bei den supersymmetrischen Beiträgen bleiben die Schleifendiagramme gleich, mit dem Unterschied, dass statt der  $W^\pm$ -Bosonen Charginos bzw. geladene Higgs-Bosonen  $H^\pm$  auftreten können [48], [66]. Zum anderen können alle SM-Teilchen durch deren supersymmetrische Partner ersetzt werden, was in Abbildung 7.7 dargestellt ist.

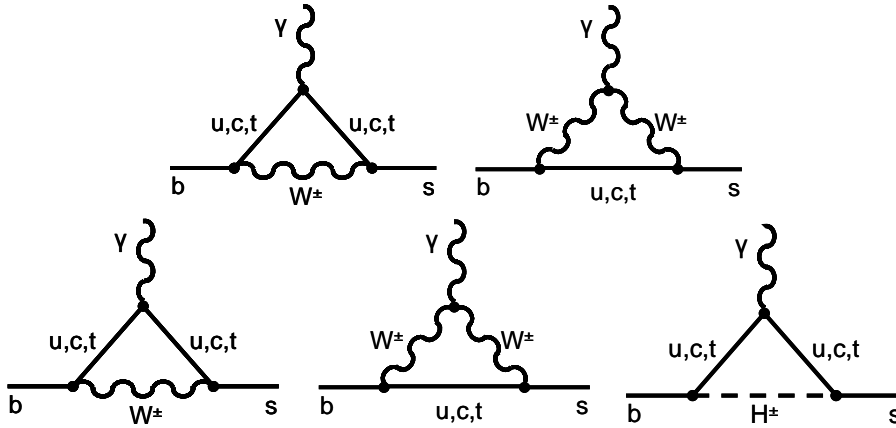


Abbildung 7.7: Feynman-Diagramme für den Prozess  $b \rightarrow s \gamma$ . Oben: Dominierende Prozesse im SM. Unten: Dazugehörige supersymmetrische Beiträge zu  $BR(b \rightarrow s \gamma)$ .

Geht man davon aus, dass supersymmetrische Prozesse im Vergleich zu denen des SM in den Loop Diagrammen in gleicher Weise beitragen, wie in Abbildung 7.7 zu sehen ist, dann ergeben sich folgende vereinfachte Proportionalitäten der zusätzlichen SUSY Beiträgen zum Verzweigungsverhältnis von  $b \rightarrow s \gamma$  [67]:

$$BR^{SUSY}(b \rightarrow s \gamma) \Big|_{\chi^\pm} \propto \mu A_t \tan \beta f(\tilde{m}_{t_1}^2, \tilde{m}_{t_2}^2, m_{\chi^\pm}) \frac{m_b}{v(1 + \Delta m_b)}. \quad (7.8)$$

Neben den bekannten Parametern tauchen zusätzlich das Schleifenintegral  $f$  und der Term  $\Delta m_b$  auf, welcher alle dominanten Beiträge höherer Ordnung enthält. Der dominierende Anteil zum BR des geladenen Higgs-Bosons kann [67] entnommen werden. Für die mehrstufigen Optimierung wird der fehlerbehaftete experimentelle Wert für die Relic Density aus Gleichung (7.4) und für das  $BR(b \rightarrow s \gamma)$  aus Gleichung (7.7) verwendet. Mithilfe der Optimierung wird der CMSSM Parameterbereich gefunden, in dem beide Einschränkungen simultan erfüllt sind. In Abbildung 7.8 sind die so gefundenen  $\chi^2$ -Werte auf die  $m_0$ - $m_{1/2}$  Ebene projiziert. Es wird gezeigt, dass gerade im Bereich kleiner Massenparameter  $m_0$  und  $m_{1/2}$  keine gute Übereinstimmung gefunden werden kann.



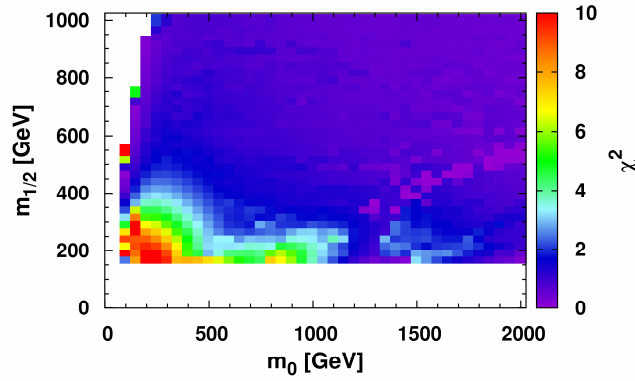


Abbildung 7.8:  $\chi^2$ -Werte für die Kombination aus  $BR(b \rightarrow s \gamma)$  und  $\Omega h^2$ . Bei der Optimierung wurden jeweils nur die experimentellen Fehler der beiden Einschränkungen verwendet, also  $\sigma_{\Omega h^2} = 0,0174$  und  $\sigma_{BR(b \rightarrow s \gamma)} = 0,56 \cdot 10^{-4}$ .

Dies kann durch die Abhängigkeit der beiden Einschränkungen von den CMSSM Parametern begründet werden. Die Abhängigkeit der Relic Density und deren bevorzugtes  $\tan(\beta)$  wurden bereits in Abschnitt 7.2.1 diskutiert. In analoger Weise kann nun für unterschiedliche Paare von  $m_0$  und  $m_{1/2}$  das Verzweungsverhältnis aufgetragen werden.

Abbildung 7.9 zeigt, dass der Wert des BR für steigende Werte von  $\tan(\beta)$  abfällt, wobei hier stets  $A_0=0$  fest gewählt wurde. Dieses abfallende Verhalten ergibt sich aus der in Gleichung (7.8) angegebenen Proportionalität vom Faktor  $\mu A_t \tan(\beta)$ . Aus Abschnitt 7.1.1 ist bekannt, dass aufgrund des anomalen magnetischen Moments des Myons das Vorzeichen von  $\mu$  positiv ist, wobei sich der Wert von  $\mu$  aus der elektroschwachen Symmetriebrechung ergibt. An der elektroschwachen Skala nimmt  $A_t$  unabhängig vom Startwert an der GUT Skala einen negativen Wert an [48]. In Kombination mit den positiven und vorwiegend hohen Werten von  $\tan(\beta)$  ist der Beitrag, der sich aus der Supersymmetrie ergibt, stark negativ, so dass der vorhergesagte SM Wert sogar noch verringert wird. Dies führt dazu, dass sich der so ergebende Wert noch weiter vom experimentellen entfernt, was genau dem Verhalten bei  $\text{sign}(\mu)=+1$  in Abbildung 7.9 entspricht. Wird bei der Einschränkung  $BR(b \rightarrow s \gamma)$  ein negatives Vorzeichen für  $\mu$  gewählt, so wird der supersymmetrische Beitrag für steigendes  $\tan(\beta)$  immer größer, so dass sich der theoretische Wert für das BR ebenfalls vom Experimentellen entfernt. Dies ist der Grund, weshalb der Prozess  $b \rightarrow s \gamma$  kleine Werte von  $\tan(\beta)$  bevorzugt, da so der supersymmetrische Beitrag klein gehalten werden kann. Dies führt zu einer großen Spannung zwischen  $BR(b \rightarrow s \gamma)$  und der Relic Density, die große Werte von  $\tan(\beta)$  bevorzugt, was sich auf ein schlechtes  $\chi^2$  auswirkt. Dieses Problem kann zum Teil durch die Variation von  $A_0$  gelöst werden. Während zwar  $A_t$  auf der elektroschwachen Skala negativ wird, kann durch sehr große Werte von  $A_0$  der Betrag klein gehalten werden, was in Abbildung 7.4 gezeigt wird. Hier ist das Verzweungsverhältnis für feste, unterschiedliche Werte von  $A_0$  über  $\tan(\beta)$  aufgetragen.

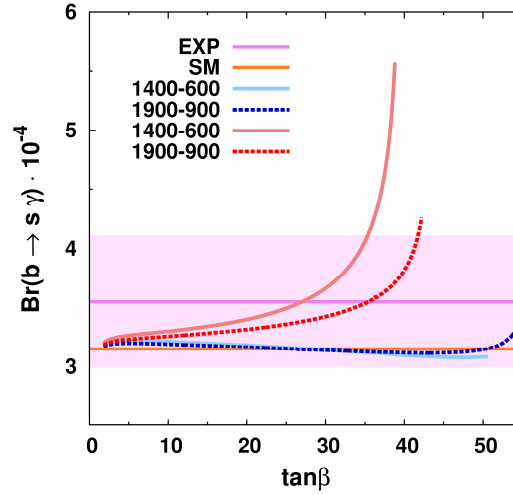


Abbildung 7.9: Verlauf des  $\text{Br}(b \rightarrow s \gamma)$  in Abhängigkeit von  $\tan(\beta)$  für unterschiedliche Werte von  $m_0$ - $m_{1/2}$ , die durch die dargestellten Wertepaare repräsentiert werden. Den blauen/roten Kurven entspricht ein positives/negatives Vorzeichen von  $\mu$ . Nur für positive Werte von  $\mu$  erreicht das BR für hohe  $\tan(\beta)$  den experimentellen Wert.

Es ist zu sehen, dass der Verlauf für stark negative Werte von  $A_0$  nur im Bereich kleiner Werte von  $\tan(\beta)$  mit dem Messwert übereinstimmt. Wohingegen sich für hohe Werte von  $A_0$  gute Übereinstimmungen im gesamten Bereich von  $\tan(\beta)$  ergeben. Gerade im Bereich großer Werte von  $\tan(\beta)$  führt dies zu einer simultanen Übereinstimmung mit der Relic Density. Dass die Optimierung durch die simultane Veränderung der trilinearen Kopplung nicht im gesamten  $m_0$ - $m_{1/2}$  Bereich möglich ist, ist Abbildung 7.8 zu entnehmen. Die dazugehörigen Werte für  $\tan(\beta)$  und  $A_0$  sind in Abbildung 7.10 dargestellt. Es ergeben sich jedoch immer noch Bereiche, in denen für beide Einschränkungen kein gemeinsamer Wert für  $\tan(\beta)$  gefunden werden kann, vor allem im Bereich kleiner Werte von  $m_0$  und  $m_{1/2}$ . Jedoch stellt die Variation von dem  $A_0$  Wert eine deutliche Verbesserung zum festen  $A_0$  dar, siehe dazu Anhang 10.3.2.

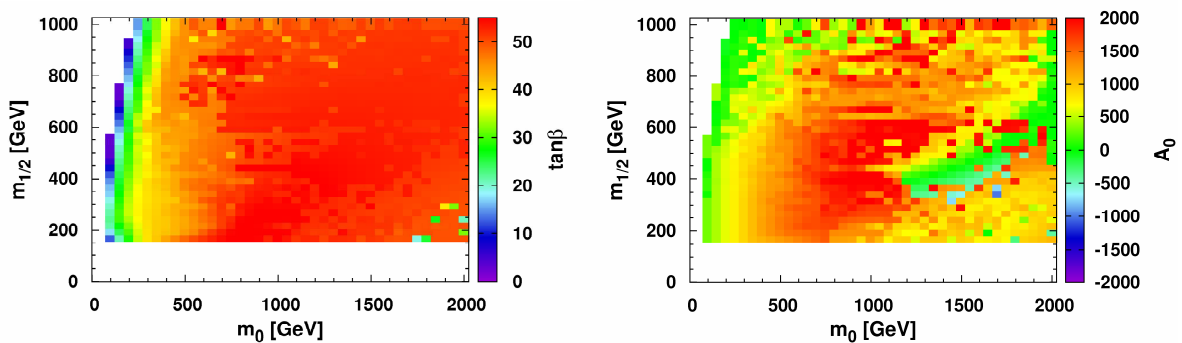


Abbildung 7.10: Kombination von  $\text{Br}(b \rightarrow s \gamma)$  und  $\Omega h^2$ . Links: Optimierte Werte für  $\tan(\beta)$ . Hohe Werte von  $\tan(\beta)$  werden aufgrund von  $\Omega h^2$  favorisiert. Rechts: Optimierte Werte für  $A_0$ . Im Bereich kleiner  $m_0$ - $m_{1/2}$ , in dem die Einschränkungen unterschiedliche Werte von  $\tan(\beta)$  bevorzugen, steigt  $A_0$  um eine bessere Übereinstimmung herbeizuführen.

Innerhalb von micrOMEGAs wird der supersymmetrische Beitrag des BR ausgehend vom SM-Wert, der ebenfalls einen Fehler aufweist, berechnet. Infolgedessen wird in der Analyse der kombinierten Einschränkungen dieser theoretische Fehler ebenfalls berücksichtigt. Folgender Anteil geht somit in die  $\chi^2$ -Funktion ein:

$$\chi^2_{BR(b \rightarrow s \gamma)} = \left( \frac{BR(b \rightarrow s \gamma) - 3,55 \cdot 10^{-4}}{0,56 \cdot 10^{-4}} \right)^2. \quad (7.9)$$

Hierbei wurden der experimentelle und die theoretischen Fehler aus [34] linear addiert, wobei der Grund für diese Fehlerbehandlung in Abschnitt 7.3.1 näher diskutiert wird.

### 7.2.3 BR( $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ )

Bei diesem Verzweigungsverhältnis handelt es sich ebenfalls um einen flavourändernden neutralen Strom, der nur innerhalb von Schleifendiagrammen möglich ist, wie sie in Abbildung 7.11 zu sehen sind. Während vom SM ein experimenteller Wert von

$$BR^{SM}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-) = (3,35 \pm 0,32) \cdot 10^{-9} \quad (7.10)$$

vorhergesagt wird [68], gibt das Experiment nur eine obere Schranke an [35]

$$BR^{EX}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-) < 4,7 \cdot 10^{-8}. \quad (7.11)$$

Der vom SM vorhergesagte Wert liegt eine Größenordnung unterhalb der bisherigen experimentellen Grenze.

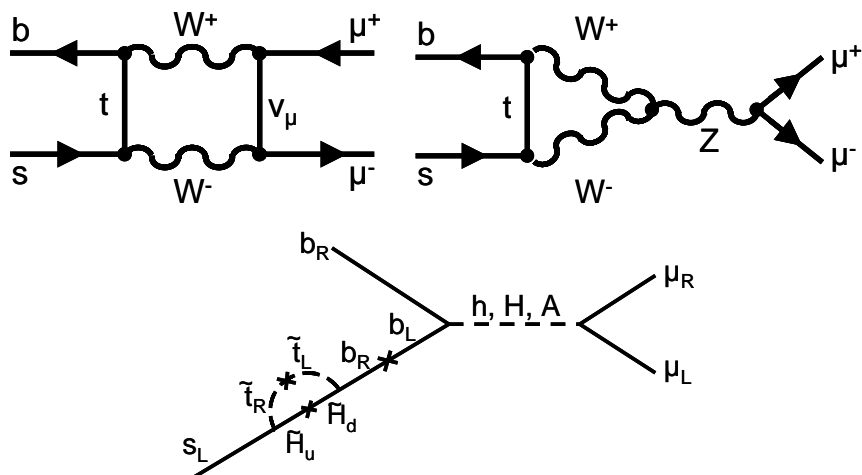


Abbildung 7.11: Feynman-Diagramme für den Prozess  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ . Oben sind die Prozesse im SM gezeigt, während ein zugehöriger supersymmetrischer Beitrag zu  $BR(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$  unten abgebildet ist.

Unter Annahme der Existenz von Supersymmetrie ergeben sich hier zusätzlich Beiträge der Art, wie sie in Abbildung 7.11 gezeigt sind [48].

Der Hauptbeitrag zum BR [69] besteht aus u.a. quadratischen Termen der supersymmetrischen Beiträge  $C_S^2$ , die Schleifenbeiträge von beispielsweise Stops und Charginos enthalten. Der dominante Beitrag zum BR lässt sich auf folgende Proportionalität reduzieren:

$$C_S \propto \tan^3 \beta \left( \frac{m_{\tilde{t}_1}^2 \log \left[ \frac{m_{\tilde{t}_1}^2}{\mu} \right]}{\mu^2 - m_{\tilde{t}_1}^2} - \frac{m_{\tilde{t}_2}^2 \log \left[ \frac{m_{\tilde{t}_2}^2}{\mu} \right]}{\mu^2 - m_{\tilde{t}_2}^2} \right). \quad (7.12)$$

Die restlichen Proportionalitäten können [69] entnommen werden.

Aus Gleichung (7.12) ergibt sich eine resultierende  $\tan^6(\beta)$  Abhängigkeit des BR, was sich deutlich in dessen Verlauf in Abbildung 7.12 widerspiegelt. Hier wurde erneut für unterschiedliche  $m_0$ - $m_{1/2}$  Paare das Verzweigungsverhältnis über  $\tan(\beta)$  für  $A_0=0$  aufgetragen. Da der Wert inklusive supersymmetrischer Beiträge unterhalb der experimentellen Grenze liegen soll, ergibt sich aus Abbildung 7.12, dass diese Einschränkung nur bis zu einem bestimmten Wert von  $\tan(\beta)$  erfüllt ist. Durch die starke Abhängigkeit von  $\tan(\beta)$  ist  $\text{BR}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$  sehr empfindlich auf Variationen dieses CMSSM Parameters. Dies führt bei der Kombination dieser Einschränkung mit der Relic Density zu großen Spannungen.

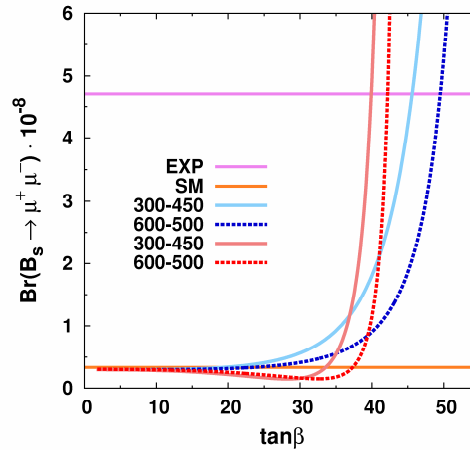


Abbildung 7.12:  $\text{BR}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$  in Abhängigkeit von  $\tan(\beta)$  für unterschiedliche Werte von  $m_0$ - $m_{1/2}$ , die durch die dargestellten Wertepaare repräsentiert werden. Den blauen/roten Kurven entspricht ein positives/negatives Vorzeichen von  $\mu$ . Der abgebildete experimentelle Wert entspricht der oberen Grenze des BR.

Im linken Teil der Abbildung 7.3 wurde diese Spannung verdeutlicht. Die Relic Density, auf der rechten Seite aufgetragen, bevorzugt für den Fall von festem  $A_0=0$  einen Wert für  $\tan(\beta)$ , der, aufgrund der Proportionalität  $\tan^6(\beta)$ , einen viel zu hohen Wert für  $\text{BR}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$  ergeben würde. Der Unterschied der bevorzugten Werte für  $\tan(\beta)$  würde sich in einem schlechten  $\chi^2$ -Wert widerspiegeln, da kein gemein-

samer Wert von  $\tan(\beta)$  zur Übereinstimmung mit den experimentellen Werten für beide Einschränkungen gefunden werden kann. Diese Problematik ist in Anhang 10.3.3 gezeigt. Hierbei ist das  $\chi^2$  für den gesamten  $m_0$ - $m_{1/2}$  Bereich aufgetragen. Dieses Problem kann durch Variation von  $A_0$  gelöst werden, wie man im rechten Teil der Abbildung 7.3 erkennen kann. Hier sind die  $\chi^2$ -Werte über  $\tan(\beta)$  und  $A_0$  dargestellt, wobei ersichtlich ist, dass sich für hohe Werte von  $A_0$  ein gemeinsamer Wert von  $\tan(\beta)$  und damit ein kleiner  $\chi^2$ -Wert ergeben. Der Grund für das Auffinden eines gemeinsamen  $\tan(\beta)$ -Werts bei Variation von  $A_0$  ist auf Gleichung (7.12) zurückzuführen. Damit ein gemeinsamer Wert von  $\tan(\beta)$  gerade für hohe Werte von  $\tan(\beta)$  existiert, muss das BR herabgesetzt werden. Da an der Proportionalität von  $\tan^6(\beta)$  nichts geändert werden kann, muss für ein geringeres Verzweigungsverhältnis der zweite Term in Gleichung (7.12) erniedrigt werden. Dies kann durch eine kleine Stop-Mischung erreicht werden. Je ähnlicher sich die Massen der beiden Stops sind, desto kleiner wird die Differenz innerhalb der Klammer in Gleichung (7.12). Die Mischung der Stop-Massen ergibt sich aus den Neben-Diagonalelementen in der Massenmatrix. Aus Kapitel 3.3.2 ist bekannt, dass diese proportional zu  $A_t \mu / \tan(\beta)$  sind. Für große Werte von  $\tan(\beta)$  kann also die Mischung durch Variation der trilinearen Kopplung bestimmt werden. Um unter Berücksichtigung der Proportionalität  $A_t \mu / \tan(\beta)$  die Mischung klein zu halten, muss die trilineare Kopplung  $A_0$  an der GUT Skala hoch gesetzt werden, da sich so ein geringerer negativer Wert an der elektroschwachen Skala für  $A_t$  ergibt.

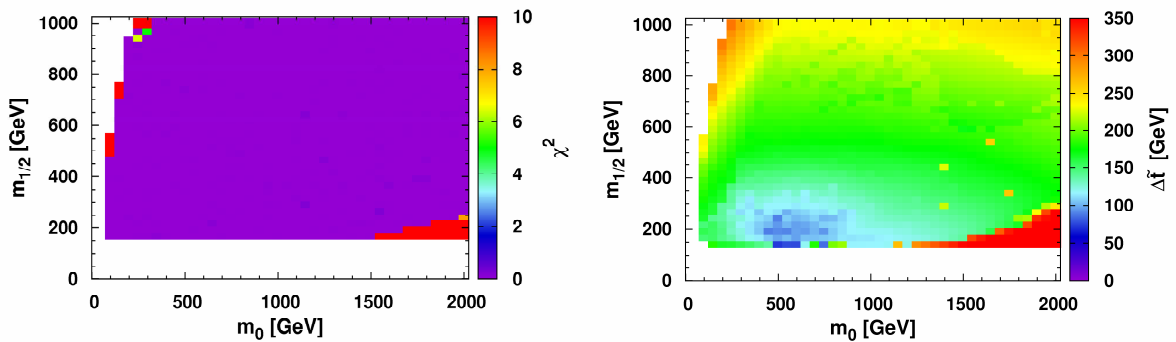


Abbildung 7.13: Kombination von  $\text{BR}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$  und  $\Omega h^2$ . Links: Werte der  $\chi^2$ -Funktion. Fast im gesamten Bereich ergibt sich ein  $\chi^2$ -Wert nahe Null. Rechts: Differenz zwischen den beiden Stopmassen. Gerade im Bereich großer  $A_0$  wird die Differenz zwischen den beiden Stopmassen klein.

Nachdem eine mehrstufige Optimierung durchgeführt wird, wobei erneut  $\tan(\beta)$  und  $A_0$  variiert werden, ergeben sich für den gewählten  $m_0$ - $m_{1/2}$  Bereich gute  $\chi^2$ -Werte. Die zugehörigen Werte von  $\chi^2$  sind in Abbildung 7.13 gezeigt. Im Vergleich zum Fall mit festem Wert von  $A_0$  kann die Spannung aufgrund unterschiedlich favorisierter Werte von  $\tan(\beta)$  zwischen diesen beiden Einschränkungen komplett aufgehoben werden. Die dazugehörigen Werte der beiden variierten CMSSM Parameter sind in Abbildung 7.14 zu sehen.

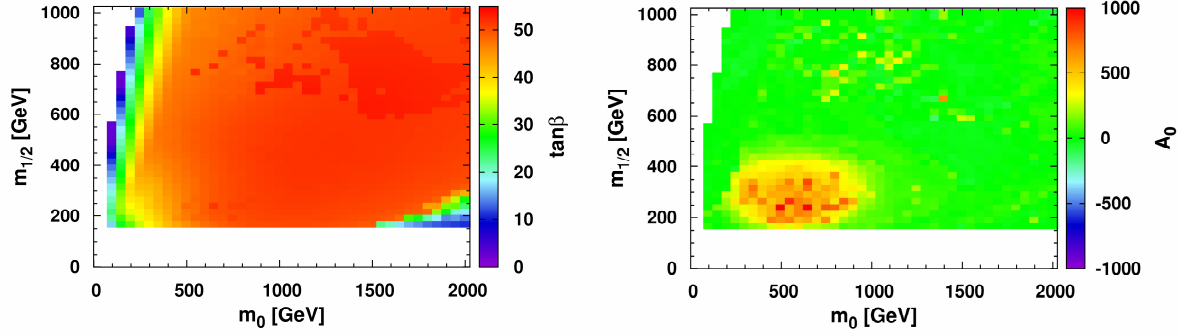


Abbildung 7.14: Optimierte Werte von  $\tan(\beta)$  (links) und  $A_0$  (rechts) für die Kombination aus  $BR(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$  und  $\Omega h^2$ .

Gerade im Bereich kleiner  $m_0$  und  $m_{1/2}$  kann im Gegensatz zu festen Werten von  $A_0$  durch hohe Werte von  $A_0$  ein gemeinsames  $\tan(\beta)$  gefunden werden. Für den restlichen Bereich gibt es bereits für  $A_0=0$  kleine Werte für  $\chi^2$ , weshalb beim Startwert von  $A_0=0$  ein gutes Minimum gefunden wird. Dies ist der Grund, weshalb im übrigen Bereich in Abbildung 7.14  $A_0$  den Wert Null annimmt.

Die Differenz der Stops ist in Abbildung 7.13 dargestellt, so dass nochmals verdeutlicht wird, dass im Bereich großer  $A_0$  eine kleine Mischung vorliegt.

Da es sich bei der Einschränkung  $BR(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$  um eine obere Grenze handelt, geht es nur oberhalb dieser Grenze als  $\chi^2$ -Beitrag in die  $\chi^2$ -Funktion ein. Werte unterhalb dieser Grenze sind erlaubt und tragen nicht zur  $\chi^2$ -Funktion bei. Oberhalb dieser Grenze geht der experimentelle Wert aus Gleichung (7.11) ein. Der einseitige  $\chi^2$ -Beitrag zur  $\chi^2$ -Funktion ist von der Form

$$\chi_{BR(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)}^2 = \left( \frac{BR(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-) - 4,7 \cdot 10^{-8}}{0,02 \cdot 10^{-8}} \right)^2 \quad (\text{für } (B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-) > 4,7 \cdot 10^{-8}). \quad (7.13)$$

Der aufgeführte Fehler wurde dabei [70] entnommen.

#### 7.2.4 Anomales magnetisches Moment des Myons – $(g-2)_\mu$

Der Zusammenhang zwischen dem Spin  $\vec{s}$  und dem magnetischen Dipolmoment  $\vec{\mu}$  des Myons wird durch den g-Faktor bestimmt. Wäre das Myon ein Dirac-Fermion, müsste der Proportionalitätsfaktor  $g$  exakt zwei sein. Dieser weicht jedoch aufgrund von Quantenfluktuationen von diesem Wert ab. Die Korrekturen ergeben sich innerhalb des SM am Photon-Myon-Myon-Vertex durch Berechnung der Schleifendiagramme wie sie in Abbildung 7.15 zu sehen sind [71]. Durch die Präzisionsmessung des anomalen magnetischen Moments des Myons mit dem Brookhaven Experiment E821 am Brookhaven National Laboratory wurde die Abweichung vom Wert 2 gefunden [33]. Zusätzlich ergab sich jedoch auch eine Abweichung zu dem vom SM vorhergesagten Wert.

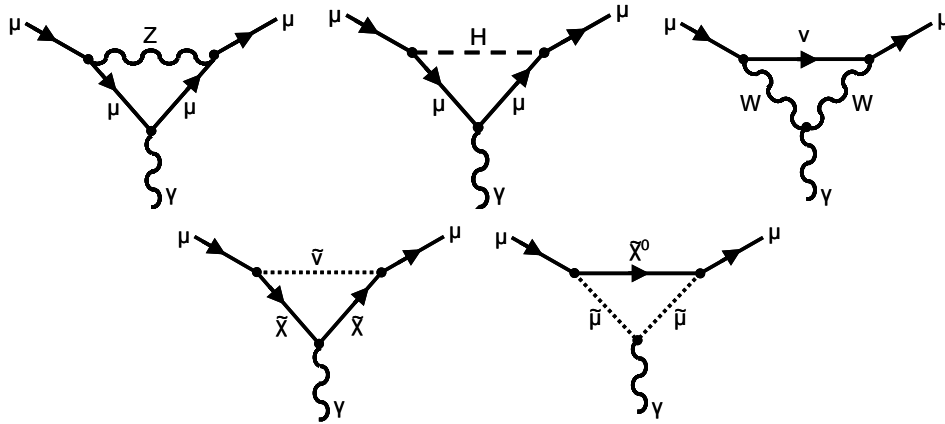


Abbildung 7.15: Feynman-Diagramme zum anomalen magnetischen Moment des Myons. Oben: Einige Korrekturen erster Ordnung am am Photon-Myon-Myon-Vertex zu  $(g-2)_\mu$  aus dem SM. Unten: Supersymmetrische Beiträge zu den Korrekturen.

Der vom SM vorhergesagt Wert beinhaltet verschiedene Beiträge zu den Schleifenkorrekturen. Neben Vorhersagen aus elektroschwachen Prozessen und Prozessen der QED, die den Hauptbeitrag liefern, ergeben sich die größten Unsicherheiten aus den hadronischen Beiträgen. Diese sind ihrerseits aufgrund ihrer Komplexität in verschiedene Beiträge aufgeteilt, darunter beispielsweise Prozesse der führenden störungstheoretischen Ordnung (engl. leading order, LO), oder auch höherer Ordnung der Vakuumpolarisation (VP). Somit ergibt sich der vom SM vorhergesagte Wert zu [72]

$$a_\mu^{SM} = a_\mu^{QED} + a_\mu^{EW} + a_\mu^{Had.(LO)} + a_\mu^{Had.(VP)} + a_\mu^{Had.(LBL)} = (11659177,8 \pm 6,1) \cdot 10^{-10} \quad (7.14)$$

Da der experimentell gefundene Wert bei

$$a_\mu^{EX} = (11659208 \pm 6,3) \cdot 10^{-10} \quad (7.15)$$

liegt, ergibt sich folgende Differenz zwischen Experiment und Vorhersage

$$\Delta a_\mu = a_\mu^{EX} - a_\mu^{SM} = (30,2 \pm 12,4) \cdot 10^{-10}, \quad (7.16)$$

wobei der Fehler aus der linearen Fehleraddition resultiert.

Die Summe der vorhergesagten Beiträge reicht also nicht aus, um den experimentellen Wert zu erreichen. Die Prozesse, die durch supersymmetrische Beiträge, wie sie in Abbildung 7.15 zu sehen sind, hinzukommen, ähneln denen aus der schwachen Wechselwirkung. Der Unterschied ist, dass  $W^\pm$ - und  $Z^0$ -Bosonen durch Charginos und Neutralinos ersetzt sind. Der vollständig dargestellte supersymmetrische Beitrag ist [73] zu entnehmen.

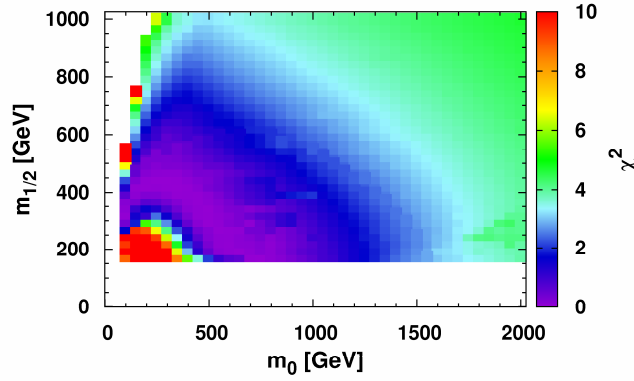


Abbildung 7.16:  $\chi^2$ -Werte für die Kombination aus  $(g-2)_\mu$  und  $\Omega h^2$ .

Für große Werte von  $\tan(\beta)$  kann der Beitrag zu folgendem Term genähert werden

$$|a_\mu^{SUSY}| \approx 13,0 \cdot 10^{-10} \mu \left( \frac{100 \text{ GeV}}{m_{SUSY}} \right)^2 \tan \beta, \quad (7.17)$$

wobei  $m_{SUSY}$  die durchschnittliche Masse eines supersymmetrischen Teilchens innerhalb der Schleife darstellt [74].

Aufgrund der Proportionalität zwischen  $\Delta a_\mu$  und  $\tan(\beta)$  konnte gezeigt werden, dass zur Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert das Vorzeichen von  $\mu$  positiv gewählt werden muss, da sonst negativen SUSY Beiträge den SM-Wert weiter verringern. Dies führt zur Halbierung des Parameterraums des CMSSM.

Aus Abbildung 7.4 lässt sich ebenfalls ableiten, dass  $(g-2)_\mu$  große Werte von  $\tan(\beta)$  bevorzugt, um den Unterschied zum Experiment durch den supersymmetrischen Beitrag auszufüllen. Dies lässt zunächst darauf schließen, dass das Auffinden eines gemeinsamen Wertes von  $\tan(\beta)$  mit der Relic Density problemlos ist. Die Ergebnisse der simultanen Optimierung können Abbildung 7.16 entnommen werden. Bei dieser Analyse wurde der theoretische und experimentelle Fehler von  $(g-2)_\mu$  linear addiert.

Beginnend bei kleinen bis hin zu großen Werten von  $m_0$ - $m_{1/2}$  ergeben sich im Wesentlichen drei Bereiche, die in Abbildung 7.16 gezeigt sind. Im Bereich kleiner  $m_0$ - $m_{1/2}$ , in denen die supersymmetrischen Massen klein sind, ergibt sich keine gute Übereinstimmung mit der Relic Density. In diesem Bereich sind die Massen so klein, dass für den von der Relic Density bevorzugten Wert von  $\tan(\beta)$ , der supersymmetrische Beitrag derart hoch ist, dass der experimentelle Wert überstiegen wird. Dies spiegelt sich in einem schlechten  $\chi^2$ -Wert wider. Geht man in der  $m_0$ - $m_{1/2}$  Ebene zu größeren  $m_0$ - $m_{1/2}$  Werten, findet man eine gute Übereinstimmung, da die größeren SUSY Massen den Beitrag, für den von der Relic Density bevorzugten Wert von  $\tan(\beta)$ , gerade soweit herabsetzen, dass es den Unterschied zum experimentellen Wert auffüllt. Wenn man nun jedoch weiter zu größeren Werten von  $m_0$ - $m_{1/2}$  geht, ergibt sich ein schlechtes  $\chi^2$ , da der supersymmetrische Beitrag durch die großen SUSY Massen zu stark herabgesetzt wird. Der sich so ergebende Beitrag ist nicht ausreichend hoch, um den experimentellen Wert zu erklären. Da hier die trilineare Kopplung keinen Einfluss auf den Beitrag hat, kann so durch gleich-



zeitige Variation keine wesentliche Verbesserung erreicht werden. Der sich so ergebenden Wert von  $A_0$  in Kombination mit  $\tan(\beta)$  ist somit zufällig verteilt, wie man in Abbildung 7.17 sehen kann.

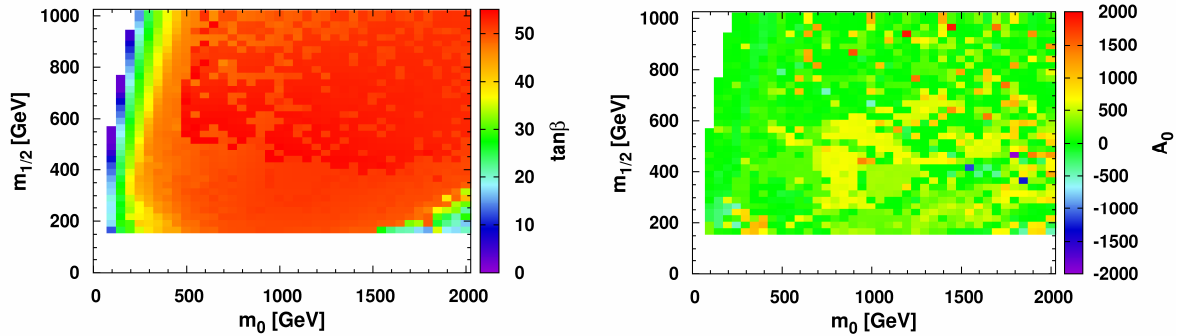


Abbildung 7.17: Optimierte Wert von  $\tan(\beta)$  (links) und  $A_0$  (rechts) für die Kombination aus  $(g-2)_\mu$  und  $\Omega h^2$ .

Für die Analyse aller Einschränkungen werden ebenfalls der theoretische und der experimentelle Fehler von  $(g-2)_\mu$  linear addiert, so dass der Beitrag zur  $\chi^2$ -Funktion die Form

$$\chi^2_{\Delta a_\mu} = \left( \frac{\Delta a_\mu - 30,2 \cdot 10^{-10}}{12,4 \cdot 10^{-10}} \right)^2 \quad (7.18)$$

hat.

### 7.2.5 $BR^{\text{EXP}}(B \rightarrow \tau \nu) / BR^{\text{SM}}(B \rightarrow \tau \nu)$

Zerfällt ein B-Meson leptonisch, erfolgt dies auf Born Niveau über ein  $W^\pm$ -Boson, was Abbildung 7.18 entnommen werden kann [75]. Beim Verzweigungsverhältnis des Prozesses  $B \rightarrow \tau \nu$  kommt es ebenfalls zu einer Diskrepanz zwischen SM und Experiment. Wobei sowohl bei den experimentellen Werten, als auch bei der Bestimmung des SM Werts große Schwankungen in den letzten Jahren festzustellen waren. Weshalb es zu solch großen Schwankungen kommt, soll zunächst näher erläutert werden.

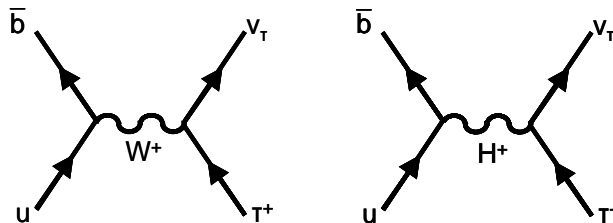


Abbildung 7.18: Leptonischer Zerfall eines B-Mesons im SM (links) und im MSSM (rechts).

Der SM Wert des BR für den Zerfall  $B \rightarrow \tau \nu$  hat folgende Form

$$BR^{SM}(B^- \rightarrow \tau \bar{\nu}_\tau) = \frac{G_F^2 m_B m_\tau}{8\pi} \left(1 - \frac{m_\tau^2}{m_B^2}\right)^2 f_B^2 |V_{ub}|^2 \tau_B, \quad (7.19)$$

wobei  $G_F$  die Fermikonstante,  $m_\tau$  und  $m_B$  die Massen des geladenen Leptons und B-Mesons und  $\tau_B$  die Lebensdauer von  $B^-$  darstellen.

Während die Massen, die Lebensdauer und die Fermikonstante wohlbekannt sind, führen die Unsicherheiten in dem Matrixelement  $V_{ub}$  und dem Formfaktor des B-Mesons  $f_B$  zu starken Variationen in der Angabe des SM Werts.

Berücksichtigt man die Supersymmetrie ergibt sich noch ein zusätzlicher Beitrag zum BR durch ein geladenes Higgs, wie in Abbildung 7.18 zu sehen ist.

Das BR ändert sich dann zu

$$BR^{SUSY}(B^- \rightarrow \tau \bar{\nu}_\tau) = \frac{G_F^2 m_B m_\tau}{8\pi} \left(1 - \frac{m_\tau^2}{m_B^2}\right)^2 f_B^2 |V_{ub}|^2 \tau_B \left(1 - \frac{\tan^2 \beta}{1 + \tilde{\epsilon}_0 \tan \beta} \frac{m_B^2}{m_H^2}\right)^2, \quad (7.20)$$

mit den CMSSM Parameter  $\tan(\beta)$  und der Masse des geladenen Higgs  $m_H$ . Der zusätzliche Parameter  $\tilde{\epsilon}_0$  resultiert aus Ein-Schleifenkorrekturen innerhalb des CMSSM. Der Hauptbeitrag wird dabei von Gluino-Diagrammen geliefert, so dass der Parameter in der Größenordnung von 0,01 liegt.

Um die Änderung des BR aufgrund supersymmetrischer Beiträge unabhängig von den Unsicherheiten des Formfaktors und des Matrixelements zu diskutieren, kann das Verhältnis aus  $BR^{SUSY}/BR^{SM}$  betrachtet werden.

Dividiert man Gleichung (7.20) durch Gleichung (7.19), erhält man

$$BR^{SUSY}(B^- \rightarrow \tau \bar{\nu}_\tau) / BR^{SM}(B^- \rightarrow \tau \bar{\nu}_\tau) = \left(1 - \frac{\tan^2 \beta}{1 + \tilde{\epsilon}_0 \tan \beta} \frac{m_B^2}{m_H^2}\right)^2. \quad (7.21)$$

Dieser Wert kann mit dem micrOMEGAs Code berechnet werden, so dass für diese Einschränkung das Verhältnis in der  $\chi^2$ -Funktion auftaucht.

Für die Berechnung des SM-Werts wurden der Formfaktor des B-Mesons [36] entnommen, welcher sich dabei aus dem Quotienten aus  $f_{B_s}$  und  $f_{B_s}/f_{B_d}$  aus Tabelle 7 in Referenz [36] ergibt. Der Formfaktor weist einen theoretischen als auch experimentellen Fehler auf. Diese können linear oder quadratisch addiert werden.

Zusammen mit dem Matrixelement  $|V_{ub}|$  aus [76] und den aktuellen Werten der Massen aus [77] ergibt sich der SM-Wert bei einer linearen Fehleraddition zu

$$BR^{SM}(B^- \rightarrow \tau \bar{\nu}_\tau) = (1,17 \pm 0,28) \cdot 10^{-4}. \quad (7.22)$$

Bei einer quadratischen Fehleraddition der Fehler des Formfaktors ergibt sich für den Fehler des SM ein Wert von  $\sigma_{\text{quad}} = 0,26 \cdot 10^{-4}$ .

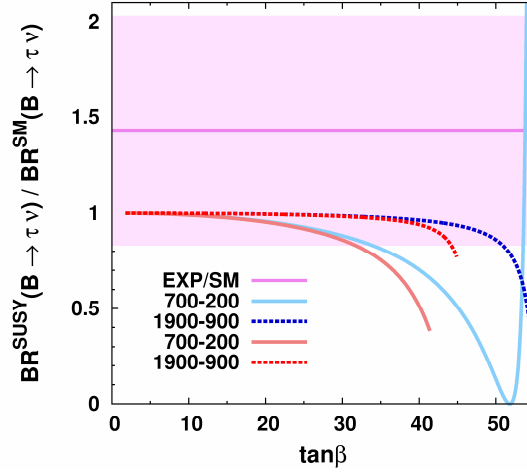


Abbildung 7.19: Verhältnis von  $BR^{\text{SUSY}}/BR^{\text{SM}}$  für den Prozess  $B \rightarrow \tau \nu$  in Abhängigkeit von  $\tan(\beta)$  für unterschiedliche  $m_0$ - $m_{1/2}$  Werte, die durch die dargestellten Wertepaare repräsentiert werden. Den blauen/roten Kurven entspricht ein positives/negatives Vorzeichen von  $\mu$ .

Der experimentelle Wert wurde ebenfalls [36] entnommen

$$BR^{\text{EXP}}(B^- \rightarrow \tau \bar{\nu}_\tau) = (1,68 \pm 0,31) \cdot 10^{-4}. \quad (7.23)$$

Das Verhältnis aus Gleichung (7.23) und (7.22) ergibt dann

$$BR^{\text{EXP}}(B^- \rightarrow \tau \bar{\nu}_\tau) / BR^{\text{SM}}(B^- \rightarrow \tau \bar{\nu}_\tau) = 1,43 \pm 0,6 \quad (7.24)$$

Für die Berechnung der Fehler wurde die lineare Fehleraddition verwendet. Bei der Verwendung der quadratisch addierten Fehler des Formfaktors ergibt sich für das Verhältnis ein Fehler von  $\sigma_{\text{quad}} = 0,42$ , welcher in der Analyse nicht weiter verwendet wird, siehe dazu Kapitel 7.3.1. Zurzeit ist der experimentelle Wert höher als der SM-Wert, was aufgrund der starken Schwankungen nicht immer so war [78].

Der Term in Gleichung (7.21) führt dazu, dass sich durch Berücksichtigung der Supersymmetrie der vorhergesagte Wert gegenüber dem SM verringert, was in Abbildung 7.19 deutlich wird. Beim Hinzufügen supersymmetrischer Beiträge muss darauf geachtet werden, dass der so vorhergesagte theoretische Wert noch innerhalb der Fehlertoleranz liegt. Dies trifft für kleine Werte von  $\tan(\beta)$  zu. Je größer jedoch  $\tan(\beta)$  wird, desto geringer wird der vorhergesagte Wert. Bis vor kurzem, als das Verhältnis aus experimentellen und SM-Wert kleiner als eins war, konnte durch die Addition von supersymmetrischen Prozessen eine bessere Übereinstimmung gegenüber dem SM erreicht werden. Durch die Änderungen des experimentellen Mittelwerts von  $BR(B \rightarrow \tau \nu)$  [79], hat sich das Verhältnis gerade umgekehrt. Es ist also eine Erhöhung des SM Wertes nötig, um eine Übereinstimmung mit dem Experiment zu finden. Weshalb diese Einschränkungen mittlerweile kleine statt großer Werte von  $\tan(\beta)$  bevorzugt, um sich nicht noch weiter vom Experiment zu entfernen.

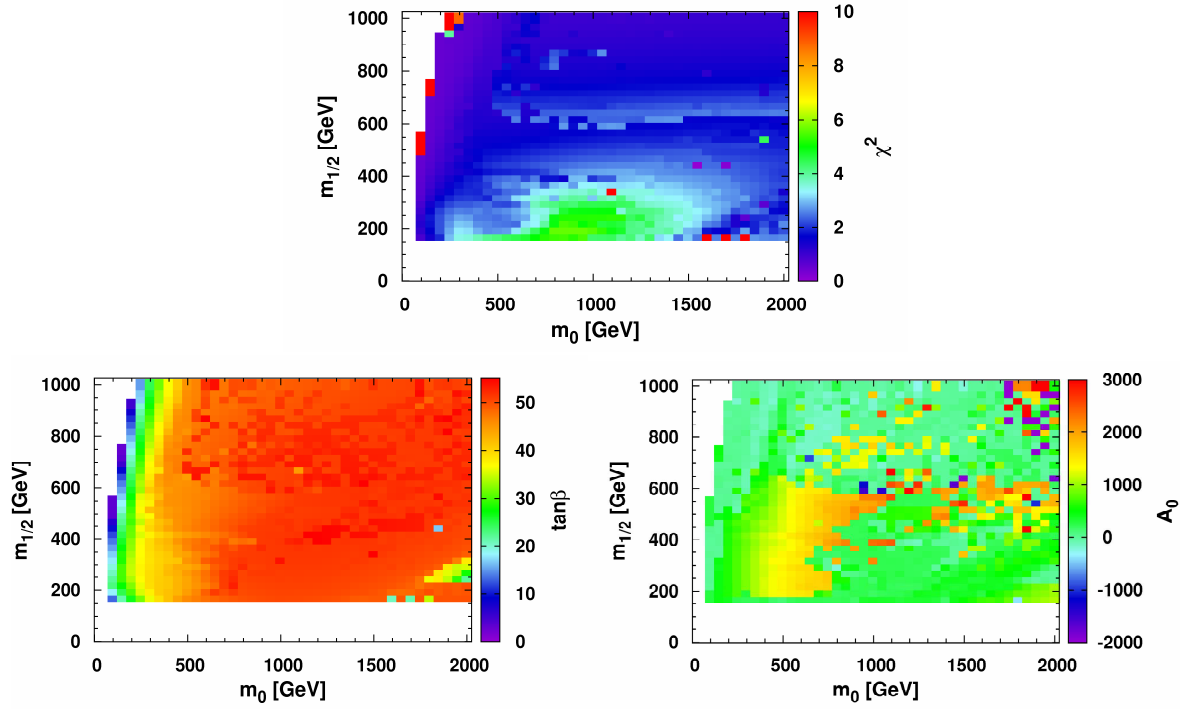


Abbildung 7.20:  $\chi^2$ -Funktion und dazugehörige optimierte Werte von  $\tan(\beta)$  und  $A_0$  für die Kombination aus  $BR^{\text{SUSY}}(B \rightarrow \tau \nu)/BR^{\text{SM}}(B \rightarrow \tau \nu)$  und  $\Omega h^2$ .

Dieser Sachverhalt führt zu großen Spannungen bei der Kombination mit der Relic Density, die wie aus Abschnitt 7.2.1 bekannt ist, große Werte von  $\tan(\beta)$  bevorzugt. Versucht man beide Einschränkungen zu optimieren, ergibt sich die in Abbildung 7.20 zu sehende  $\chi^2$ -Verteilung samt Werte für die CMSSM Parameter  $A_0$  und  $\tan(\beta)$ . Es kommt hauptsächlich im Bereich großer Werte von  $\tan(\beta)$  in Kombination mit kleinen Massen des geladenen Higgs  $H^\pm$  zu keiner guten Übereinstimmung, da so der zweite Term in Gleichung (7.21) groß wird. Der SM-Wert wird dadurch stark herabgesetzt.

Für den Wert des Verhältnisses aus experimentellem Wert und SM-Wert wurde Gleichung (7.24) verwendet. Somit ergibt sich folgender Anteil zur gesamten  $\chi^2$ -Funktion:

$$\chi_{BR^{\text{SUSY}}(B \rightarrow \tau \nu)/BR^{\text{SM}}(B \rightarrow \tau \nu)}^2 = \left( \frac{BR^{\text{SUSY}}(B \rightarrow \tau \nu)/BR^{\text{SM}}(B \rightarrow \tau \nu) - 1,43}{0,6} \right)^2. \quad (7.25)$$

### 7.2.6 Higgsmasse $m_h$

Die Masse des Higgs-Bosons ist eine der letzten Unbekannten des SM. Direkte Suchen am LEP konnten bisher nur eine untere Grenze der Masse ausmachen [15]. Wie man in Abbildung 7.21 sehen kann, liegt die Grenze bei  $m_h > 114,4$  GeV. Zudem fällt auf, dass das vom SM vorhergesagte Minimum der  $\chi^2$ -Funktion bereits im ausgeschlossenen Bereich liegt, was bereits ein Hinweis auf Physik jenseits des SM sein könnte.

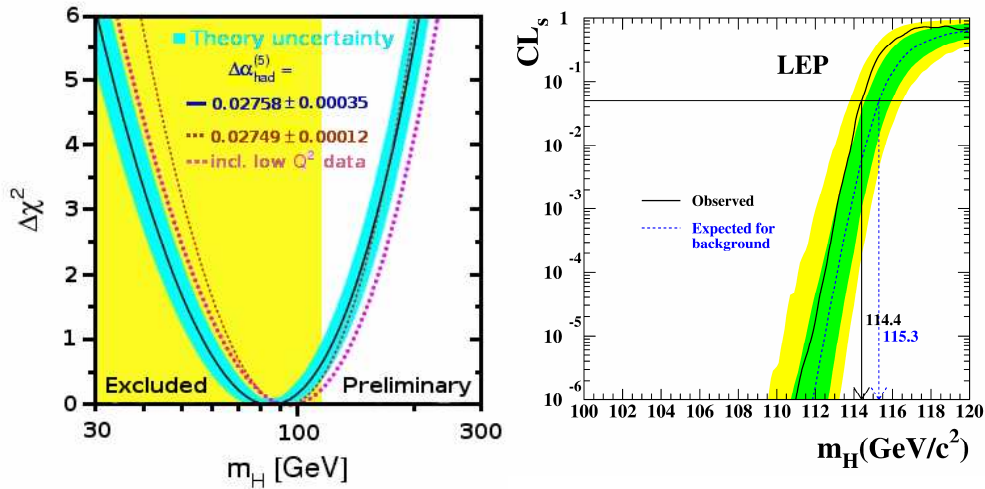


Abbildung 7.21: Gemessene Grenze der Masse des Higgs-Bosons.

Links:  $\chi^2$ -Fit der Higgs-Masse unter Berücksichtigung der elektroschwachen Daten von LEP (CERN), SLD (Stanford) und dem Tevatron (Fermilab). Das Minimum bei etwa 90 GeV ist bereits ausgeschlossen [80]. Rechts: Aufgetragen ist das Verhältnis der CL für das Signal und der Background Hypothese. Die Linie entspricht der Beobachtung und die gestrichelte Linie dem erwarteten Background. Der Schnittpunkt der beobachtenden Linie mit  $CL_S = 0,05$  entspricht einem unteren 95% CL Limit der Higgs-Boson Masse [15].

Erweitert man das SM, so ist das leichteste Higgs-Boson  $h$  des erweiterten Modells dem SM-Higgs ähnlich, weshalb die LEP Grenze direkt auf das leichteste Higgs übertragen werden kann. Die Abhängigkeit der Masse des leichtesten Higgs  $m_h$  von  $\tan(\beta)$  ist in Abbildung 7.22 zu sehen. Daraus folgt, dass diese Einschränkungen für große Werte von  $m_0$  und  $m_{1/2}$  einen hohen Wert für  $\tan(\beta)$  benötigt, um oberhalb des LEP-Limits zu liegen. Für einige Punkte, gerade im Bereich kleiner  $m_0$ - $m_{1/2}$ , in dem das Massenspektrum leichte Teilchen enthält, kann für den gesamten  $\tan(\beta)$ -Bereich keine Übereinstimmung mit der experimentellen Grenze gefunden werden.

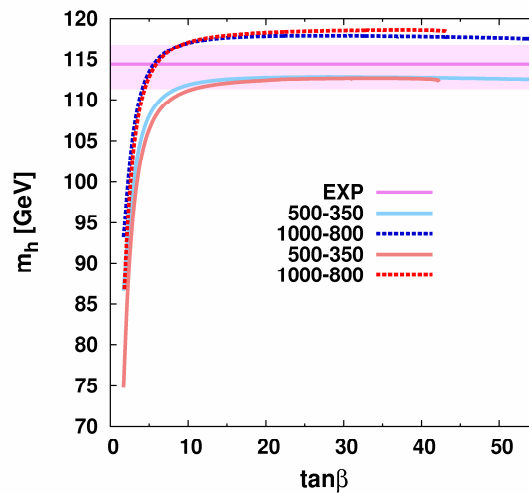


Abbildung 7.22: Higgsmasse  $m_h$  in Abhängigkeit von  $\tan(\beta)$  für unterschiedliche Werte von  $m_0$ - $m_{1/2}$ , die durch die dargestellten Wertepaare repräsentiert werden. Den blauen/roten Kurven entspricht ein positives/negatives Vorzeichen von  $\mu$ .

In diesen Punkten ergeben sich aufgrund der Startwerte der Massen an der GUT Skala zu geringe Massen für die elektroschwache Skala, weshalb diese Punkte ausgeschlossen werden. Kombiniert man das Higgs-Limit mit der Relic Density, können beide Einschränkungen in einem großen Bereich simultan optimiert werden, da beide große Werte von  $\tan(\beta)$  bevorzugen. Lediglich im Bereich kleiner Werte von  $m_0$ - $m_{1/2}$  in denen die Grenze der Higgs-Masse unterschritten wird kommt es zu Spannungen, die zu einem schlechten  $\chi^2$ -Wert führen. Die Werte der  $\chi^2$ -Funktion, die sich aus der mehrstufigen Optimierung ergeben und die dazugehörigen Werte von  $\tan(\beta)$  und  $A_0$  sind in Abbildung 7.23 zu sehen.  $A_0$  hat hier keinen großen Einfluss auf eine Verbesserung der Übereinstimmung im Bereich großer Werte für  $\chi^2$ , was anhand des Vergleichs mit den Abbildung in Anhang 10.3.6 deutlich wird. Diese Einschränkung geht analog zur oberen Grenze von  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$  in die  $\chi^2$ -Funktion als einseitige  $\chi^2$ -Funktion ein, nur dass statt einer oberen Grenze eine Untere verwendet wird. Da es sich bei der Angabe der Grenze um ein 95% Konfidenzintervall handelt, wurde der dazugehörige Fehler aus Abbildung 7.21 zu 0,9 GeV abgelesen, indem der Schnittpunkt zwischen der experimentellen und der aus dem SM erwarteten Kurve bestimmt wurde. Dieser wurde mit dem theoretischen Fehler aus [70] zu einem Gesamtfehler addiert, so dass sich folgender Anteil zur  $\chi^2$ -Funktion ergibt:

$$\chi_{m_h}^2 = \left( \frac{m_h - 114,4 \text{ GeV}}{2,4 \text{ GeV}} \right)^2 \quad (\text{für } m_h < 114,4 \text{ GeV}). \quad (7.26)$$

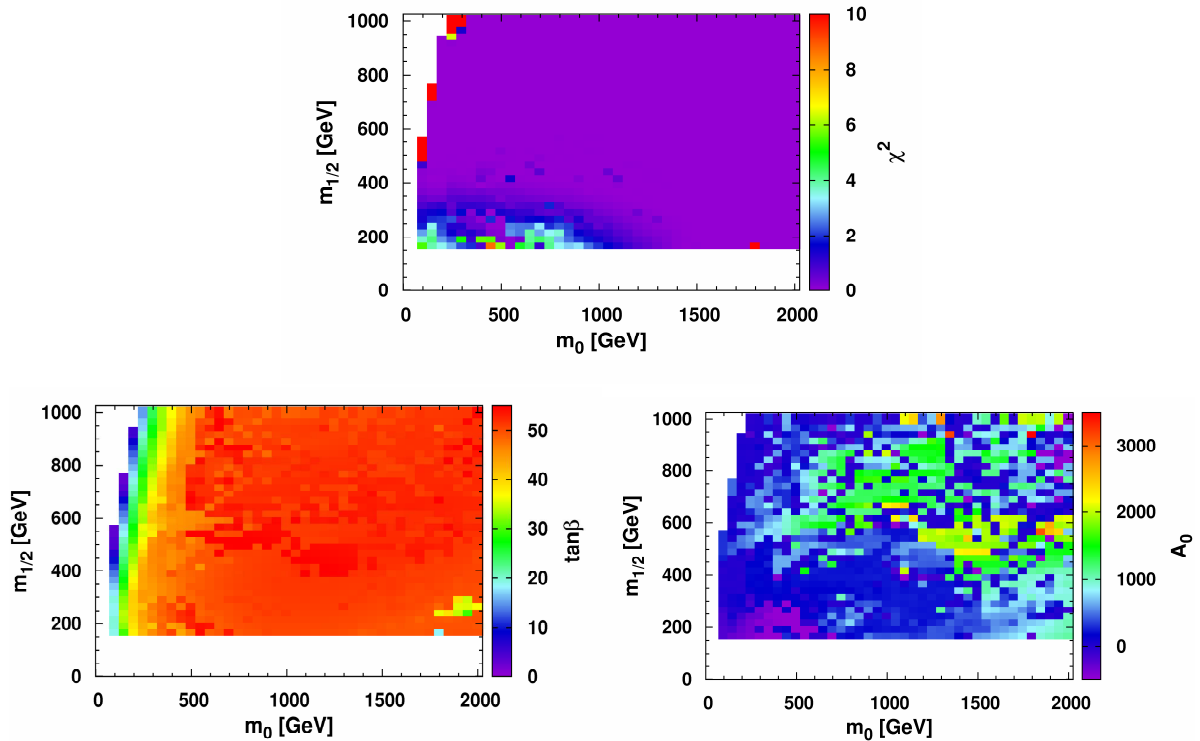


Abbildung 7.23:  $\chi^2$ -Funktion und dazugehörige optimierte Werte von  $\tan(\beta)$  und  $A_0$  für die Higgs-Massengrenze und  $\Omega h^2$ .

## 7.3 Resultate

In den Abschnitten 7.2.1 bis 7.2.6 wurde gezeigt, welche Werte die einzelnen Einschränkungen bevorzugen und welche Probleme bei der Optimierung auftreten. Nun werden alle Einschränkungen simultan kombiniert, wobei dadurch weitere Kombinationsprobleme auftreten. Die simultane Optimierung aller Einschränkungen schließt damit ein größeres Gebiet aus, als die Summe der einzelnen Einschränkungen kombiniert mit der Relic Density. Die einzelnen Einschränkungen gehen gemäß ihrer in Kapitel 7.2 erläuterten  $\chi^2$ -Beiträge in die Gesamt- $\chi^2$ -Funktion ein. Die  $\chi^2$ -Werte, die sich aus der mehrstufigen Optimierung ergeben, sowie die dazugehörigen Werte für  $\tan(\beta)$  und  $A_0$  sind in Abbildung 7.24 gezeigt. Zur Übersichtlichkeit wurden sowohl die Werte von  $\chi^2$  als auch die von  $\Delta\chi^2$  dargestellt, wobei  $\chi^2_{\min} = 2,51$  ist. Im Falle von zwei Freiheitsgraden entspricht einem Konfidenzintervall von 95% gerade  $\Delta\chi^2 \leq 5,99$ , siehe dazu Abschnitt 6.1. Zur Verdeutlichung der einzelnen CL, sind diese in Abbildung 7.25 farblich markiert, wobei die größeren CL stets die kleineren Bereiche beinhalten. Aus Abbildung 7.25 geht hervor, dass sich der 95% CL erlaubte Bereich von kleinen Werten von  $m_0$  und  $m_{1/2}$  bis hin zu großen Werten der Massenparameter erstreckt. Zusätzlich taucht in der Nähe der Focus Point Region ein kleiner erlaubter Bereich auf. Hier sind für die Relic Density ebenfalls kleine Werte von  $\tan(\beta)$  möglich, was eine bessere Übereinstimmung mit  $\text{BR}(B \rightarrow \tau \nu)$  ergibt.

Dieser Zusammenhang kann durch die einzelnen  $\chi^2$ -Beiträge veranschaulicht werden. Zudem kann so gezeigt werden, welche Einschränkung in welchem Ausmaß zur gesamten  $\chi^2$ -Funktion beiträgt. Die Beiträge befinden sich in Kapitel 8 in Abbildung 8.1.

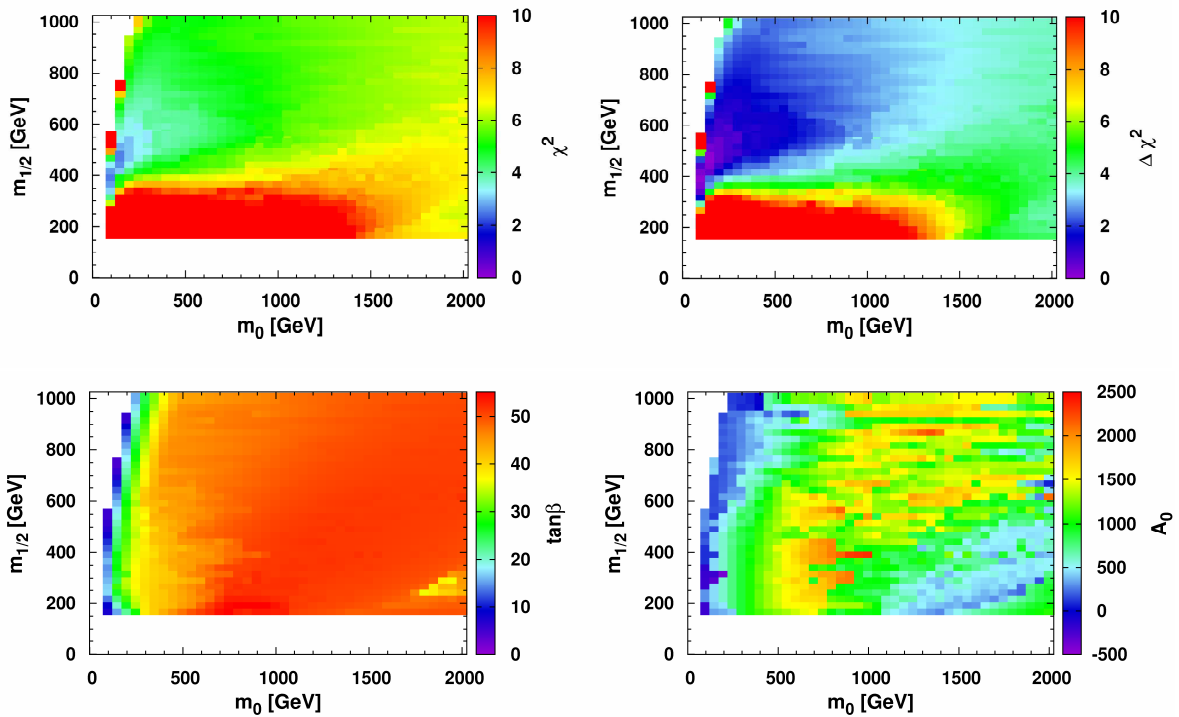


Abbildung 7.24:  $\chi^2$ - und  $\Delta\chi^2$ -Funktion (oben) und dazugehörige optimierte Werte von  $\tan(\beta)$  und  $A_0$  (unten) für die Kombination aller Einschränkungen.

Zur Übersichtlichkeit werden im Folgenden einige Punkte aus dem gesamten optimierten CMSSM Parameterraum herangezogen. Diese repräsentieren verschiedene Bereiche, so dass gezielt ein Vergleich gezogen werden kann.

Die ausgewählten Punkte sind in Tabelle 7.1 und die dazugehörigen  $\chi^2$ -Anteile in Tabelle 7.2 aufgelistet. Die zu den Punkten gehörenden Massenspektren der supersymmetrischen Teilchen sind im Anhang 10.5 tabelliert. Zur Veranschaulichung wurden die Massenspektren in Abbildung 7.26 dargestellt.

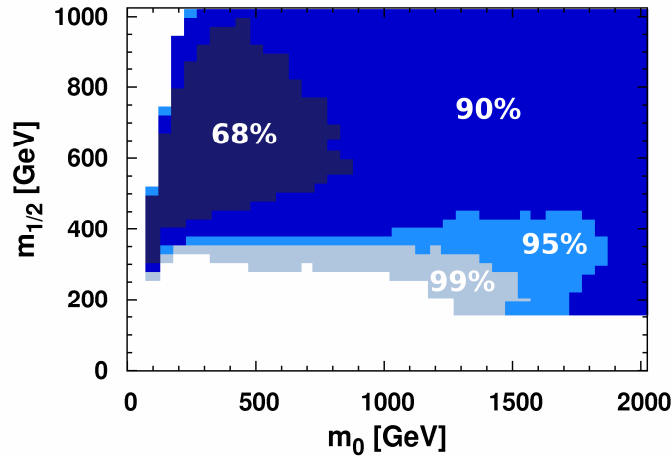


Abbildung 7.25: Darstellung der unterschiedlichen CL.

Wie erwartet ist das Neutralino das leichteste supersymmetrische Teilchen. Unter den ausgewählten Punkten befindet sich zum einen Punkt 1 mit dem minimalen  $\chi^2_{\min}$ , der sich im Bereich kleiner  $m_0$ - $m_{1/2}$  befindet. Dieser Punkt bevorzugt einen kleinen Wert für  $\tan(\beta)$ , so dass ein Großteil der Einschränkungen simultan erfüllt wird. Der Hauptbeitrag zum  $\chi^2$  liefern hierbei  $BR(B \rightarrow \tau \nu)$ ,  $(g-2)_\mu$  und  $BR(b \rightarrow s \gamma)$ . Da sich dieser Punkt im Bereich kleiner  $m_0$ - $m_{1/2}$  befindet, haben die Teilchen im Vergleich zu den anderen Punkten geringe Massen.

Punkt	$m_0$	$m_{1/2}$	$\tan(\beta)$	$A_0$	$\chi^2$
1	100	400	14,39	95,60	2,51
2	400	900	41,75	440,46	4,63
3	1900	900	50,70	588,31	6,31
4	1550	200	49,18	298,31	8,63

Tabelle 7.1: Ausgewählte Punkte in der  $m_0$ - $m_{1/2}$  Ebene mit zugehörigen Werten von  $\tan(\beta)$  und  $A_0$ .

Der  $\chi^2$ -Anteil von Punkt 2 wird von  $(g-2)_\mu$  dominiert. Die nächst höheren Beiträge liefern  $BR(b \rightarrow s \gamma)$  und  $BR(B \rightarrow \tau \nu)$ . Da dieser jedoch nur unwesentlich höher ist, als in Punkt 1, spiegelt sich hier die Spannung zur Relic Density wider. Wie Abbildung 8.1 zu entnehmen ist, liegt der Beitrag bei der Kombination von  $BR(b \rightarrow s \gamma)$  und  $BR(B \rightarrow \tau \nu)$  mit  $\Omega h^2$  gerade in diesem Bereich, so dass keine bessere Übereinstimmung gefunden werden kann. Alle anderen Einschränkungen sind dagegen erfüllt. Da der Punkt im Bereich der Koannihilation liegt, sind die Massen des Staus und des Neutralinos ähnlich.



	Punkt 1	Punkt 2	Punkt 3	Punkt 4
$\chi^2_{\Omega h^2}$	0,002	0,000	0,002	0,056
$\chi^2_{m_h}$	0,234	0	0	0
$\chi^2_{BR(b \rightarrow s \gamma)}$	1,030	1,100	0,830	3,405
$\chi^2_{BR(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)}$	0	0	0	0
$\chi^2_{\Delta a_\mu}$	0,642	2,726	4,470	2,775
$\chi^2_{BR^{SUSY}(B \rightarrow \tau \nu)/BR^{SM}(B \rightarrow \tau \nu)}$	0,599	0,800	1,006	2,396
$\chi^2_{total}$	2,507	4,627	6,308	8,631
$\Delta \chi^2$	0	2,120	3,801	6,124

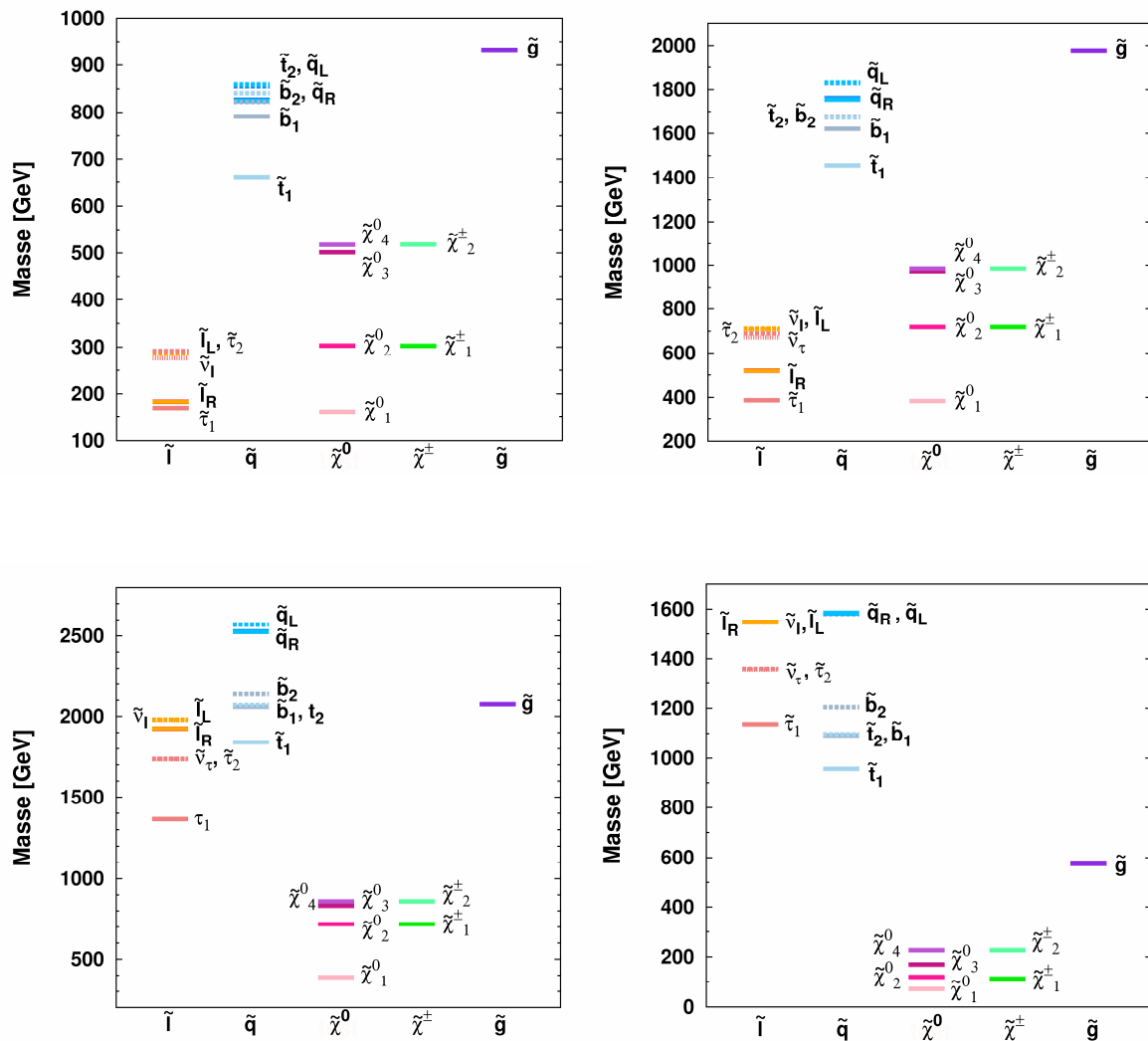
Tabelle 7.2:  $\chi^2$ -Anteile zum gesamten Wert von  $\chi^2$  für ausgewählte Punkte.

Abbildung 7.26: Massenspektren für die ausgewählten Punkte. Von links oben nach rechts unten: Punkt 1, Punkt 2, Punkt 3 und Punkt 4.

Punkt 3 liegt ebenfalls mit einem  $\Delta\chi^2$  kleiner als 5.99 innerhalb des 95% CL. Wie man sieht, überwiegt  $(g-2)_\mu$  wieder das gesamte  $\chi^2$ . Der Beitrag von  $\text{BR}(B \rightarrow \tau \nu)$  liegt hier etwas über dem minimal erreichbaren Wert. Der Punkt 4 ist dagegen innerhalb des 95% CL aufgrund der Kombination von  $\text{BR}(b \rightarrow s \gamma)$ ,  $(g-2)_\mu$  und  $\text{BR}(B \rightarrow \tau \nu)$  ausgeschlossen.  $\text{BR}(b \rightarrow s \gamma)$  überwiegt zwar, jedoch ist der Beitrag von  $\text{BR}(B \rightarrow \tau \nu)$  und  $(g-2)_\mu$  derart hoch, dass es zum Ausschluss dieses Punktes kommt. Da Punkt 3 und Punkt 4 im Bereich großer Werte von  $m_0$  liegen, fällt das Massenspektrum dementsprechend schwer aus. Bis auf Punkt 1 bevorzugen alle anderen Punkte hohe Werte von  $\tan(\beta)$  und  $A_0$ .

Für den optimierten Parameterraum sind in Abbildung 7.27 ebenfalls die Higgs-Massen und der dazugehörigen Mischungsparameter  $\mu$  dargestellt. Das leichteste Higgs weist wie erwartet im Bereich kleiner Werte von  $m_0$ - $m_{1/2}$  eine Masse unterhalb der LEP Grenze auf, was zu einem hohen  $\chi^2$ -Anteil führt. Im betrachteten Parameterraum erreicht das leichteste Higgs  $h$  eine maximale Masse von 120 GeV. Die Massen der Higgs-Boson  $A$  und  $H$  unterscheiden sich nur minimal und variieren mit wachsenden  $m_0$  und  $m_{1/2}$  zwischen 200 und 1000 GeV mit maximalen Werten von 1400 GeV in der Koannihilationsregion und der Focus Point Region. Die geladenen Higgs-Bosonen sind mit einer maximalen Masse von 1600 GeV nur unwesentlich schwerer als die neutralen Higgs-Bosonen. Der Mischungsparameter  $\mu$  nimmt für steigende  $m_0$  und  $m_{1/2}$  Werten bis zu einem Wert von 1200 an. Wie erwartet nimmt  $\mu$  dagegen im Bereich der Focus Point Region kleine Werte an, da dieses nahe dem Gebiet liegt, in dem keine elektroschwache Symmetriebrechung möglich ist.

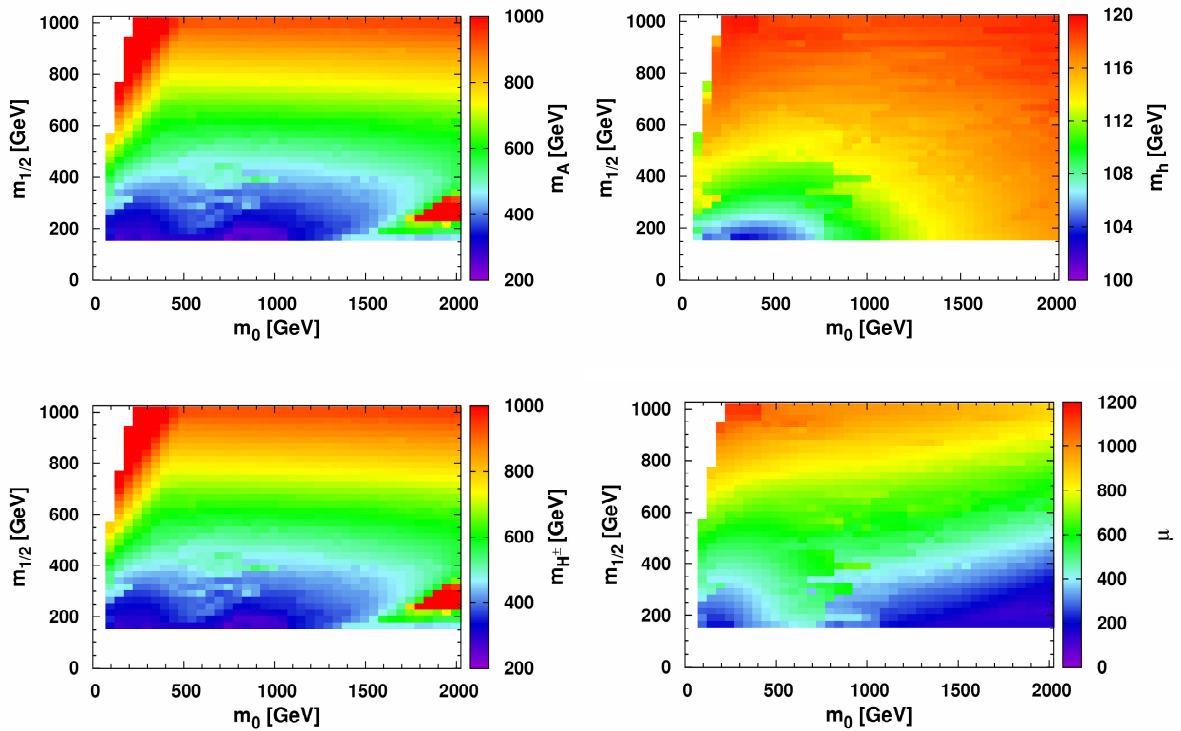


Abbildung 7.27: Higgs-Massen und Higgsmischungsparameter  $\mu$ .

### 7.3.1 Einfluss der Fehler

In den Abschnitten 7.2.1 bis 7.2.6 wurden die  $\chi^2$ -Beiträge der einzelnen Einschränkungen zur Gesamt- $\chi^2$  Funktion dargestellt. Die auftretenden experimentellen und theoretischen Fehler wurden dabei stets linear addiert. Da dieses Vorgehen im Gegensatz zur quadratischen Addition eher unüblich ist, wird es im Folgenden diskutiert. Liegen mehrere Fehler innerhalb einer Analyse vor, so sind diese meist gaußverteilt. Zur Bestimmung eines gesamten Fehlers addiert man diese Fehler dann quadratisch. Während die Eigenschaft der gaußverteilten Fehler auf die verwendeten experimentellen Fehler zutrifft, kann bei den theoretischen Fehler, die innerhalb dieser Analyse verwendet wurden, nicht von einer Gaußverteilung ausgegangen werden, weshalb statt einer quadratischen eine lineare Addition der Fehler durchgeführt wird, was ebenfalls die konservativere Fehleraddition ist. Der 95% CL für die quadratische und lineare Addition ist in Abbildung 7.28 dargestellt. Dieser große Unterschied ist hauptsächlich auf das anomale magnetische Moment des Myons zurückzuführen: Der theoretische Fehler von  $(g-2)_\mu$   $\sigma_{\text{theo}}=6,1 \cdot 10^{-10}$  ist im Vergleich zum experimentellen Fehler  $\sigma_{\text{exp}}=6,3 \cdot 10^{-10}$  gleich groß. Bei einer quadratischen Addition ergibt sich ein Fehler von  $8,8 \cdot 10^{-10}$ , so dass sich der linear addierte Fehler um ca. 30% verringert. Um den Einfluss der Fehler von  $(g-2)_\mu$  und die damit verbundene drastische Änderung darzustellen, wird Punkt 3 aus Tabelle 7.1 gesucht. Aus

Tabelle 7.2 geht hervor, dass der Hauptbeitrag zum  $\chi^2$  von  $(g-2)_\mu$  kommt. Aus Tabelle 7.2 geht hervor, dass der Hauptbeitrag zum  $\chi^2$  für große  $m_0$  und  $m_{1/2}$  von  $(g-2)_\mu$  kommt. Da bei einem  $\chi^2_{\text{min}}$  von 2,51 das  $\Delta\chi^2$  für diese Punkte kleiner als 5,99 ist, ist der Punkt 3 in 95% CL erlaubt. Das  $\Delta\chi^2$  ist jedoch in diesem Bereich sehr sensitiv auf Änderungen des Anteils  $(g-2)_\mu$ . Es stellt sich heraus, dass bei der quadratischen Addition der  $\chi^2$ -Anteil von  $(g-2)_\mu$  derartig erhöht wird, dass die Bedingung für das 95% CL nicht mehr erfüllt ist und somit der bisher erlaubte Punkt ausgeschlossen ist. In Abbildung 7.28 wird deutlich, dass durch eine unterschiedliche Fehlerbehandlung der erlaubte 95% CL Bereich halbiert werden kann. Um eine möglichst konservative Betrachtung der Einschränkungen zu gewähren, d.h. der ausgeschlossene Bereich sollte mit größtmöglicher Sicherheit ausgeschlossen werden, wurden für die gesamte Analyse die Fehler linear addiert.

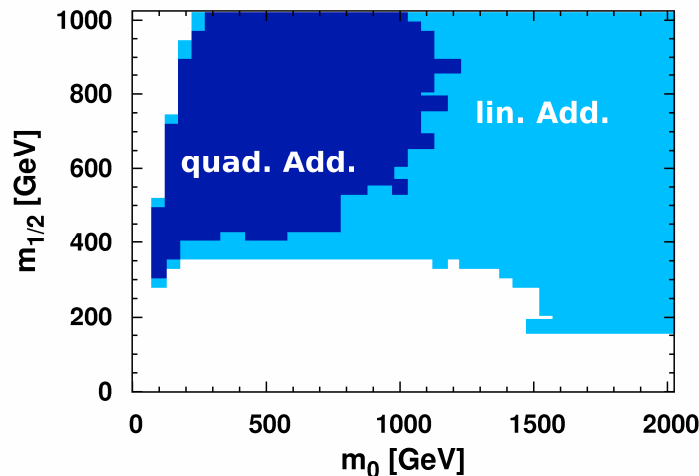


Abbildung 7.28: Vergleich der erlaubten 95% CL Bereich für die lineare (blau) und quadratische (dunkelblau) Fehleraddition.

### 7.3.2 Vergleich

Die Suche nach konsistenten Punkten im CMSSM Parameterbereich ist bereits seit einigen Jahren ein interessanter Forschungsbereich. Da stets ähnliche experimentelle Daten als Input verwendet werden, sollten die Ergebnisse der Referenzen [70], [81] und [82] vergleichbar sein. Die Ergebnisse aus vergleichbaren Analysen nutzen jedoch eine andere statistische Behandlung mit Hilfe von Markov-Chain-Monte-Carlo Optimierungsmethoden. Dieser Unterschied wirkt sich stark auf den erlaubten Bereich aus, denn aufgrund der stark korrelierten Parameter können bei einer zufallsbasierten Suche Bereiche vorschnell ausgeschlossen werden. Bei der Einschränkung wie der Relic Density konnte in Abschnitt 7.1 gezeigt werden, wie sensitiv diese auf minimale Veränderung von  $\tan(\beta)$  ist. Bei der Berücksichtigung weiterer Einschränkungen wurde in Abschnitt 7.1.1 die starke Korrelation der restlichen CMSSM Parameter gezeigt.

In Abbildung 7.29 sind die erlaubten 95% CL aus Referenz [70] und [81] mit dieser Analyse zum Vergleich zusammengefasst.

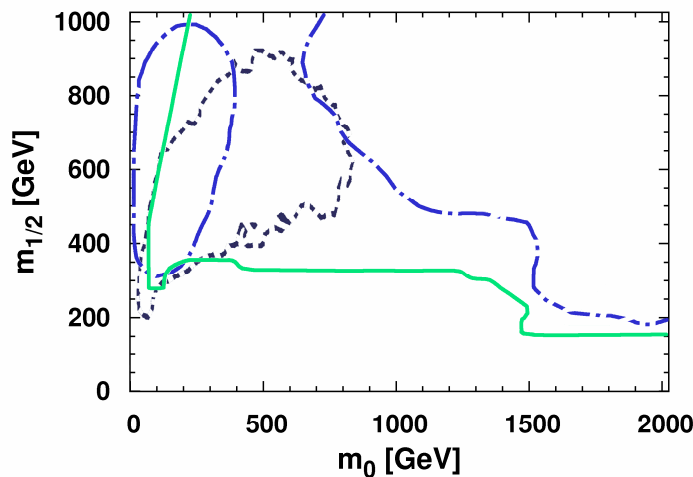


Abbildung 7.29: Vergleich der erlaubten 95% CL Bereiche. Der 95% CL Bereich aus dieser Analyse (grün) kann den Bereich aus Referenz [70] (dunkelblau, gestrichelte Linie) bestätigen. Der Unterschied zu dem Ergebnis aus Referenz [70] ergibt sich hauptsächlich aufgrund der linearen Addition der nicht-gaußverteilten Fehler. Die Lösungen in Referenz [81] lassen sich auf die zufallsbasierende Optimierungsmethode zurückführen, die vermutlich aufgrund der starken Korrelationen innerhalb der CMSSM Parameter Bereiche ausschließt, die im Vergleich zu dieser und der Analyse in Referenz [70] erlaubt sind.

Die anderen Ergebnisse sind gerade im Bereich großer  $m_0$  und  $m_{1/2}$  sehr unterschiedlich. Während in Referenz [70] der Bereich großer  $m_0$ - $m_{1/2}$  ausgeschlossen wird, ergeben sich in Referenz [81] dort gute Lösungen. Der in dieser Analyse gefundene optimierte Bereich kann den Bereich in Referenz [70] bestätigen, wenn statt der linearen Fehleraddition die Fehler quadratisch addiert werden.

In Referenz [81] werden Bereiche ausgeschlossen, die in dieser Analyse und in Referenz [70] gute Übereinstimmungen mit den kosmologischen und elektroschwachen Präzisionsdaten liefern. Die Ursache liegt vermutlich in der Schwierig-

keit der Konvergenz der MCMC-Methode aufgrund der starken Korrelationen der Parameter.

Der erlaubte Bereich der optimierten CMSSM Parameter, der in dieser Analyse gefunden wurde, ist in Abbildung 7.30 zusammen mit den ausgeschlossenen Bereichen der Beschleunigersuchen zusammengefasst. Dabei ist der optimierte erlaubte Bereich hier schematisch in hellgrün dargestellt. Es ist zu sehen, dass die direkte Suche der aufgezählten Experimente Bereiche des CMSSM Parameterbereichs ausschließen, die bereits durch andere Einschränkungen ausgeschlossen werden. Der rosa eingefärbte Bereich wird aufgrund einer Kombination aller Einschränkungen ausgeschlossen. Da dieser Bereich bei 95% CL ausgeschlossen wird, gilt für diese Punkte die Bedingung  $\Delta\chi^2 > 5,99$ . Innerhalb der rosafarbenen Fläche sind die Bereiche farblich hervorgehoben, in denen einzelne Einschränkungen die Bedingung  $\Delta\chi^2 > 5,99$  erfüllen. Diese Hauptanteile zur  $\chi^2$ -Funktion sind für kleine Werte von  $m_0$  und  $m_{1/2}$  hauptsächlich auf  $\text{BR}(b \rightarrow s \gamma)$ ,  $(g-2)_\mu$ , auf die Higgs-masse und  $\text{BR}(B \rightarrow \tau \nu)$  zurückzuführen.

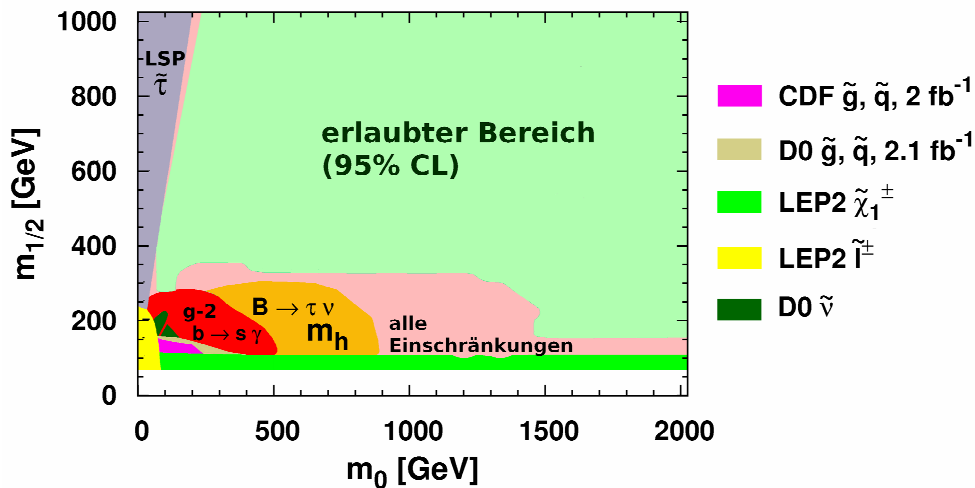


Abbildung 7.30: Vergleich des erlaubten 95% CL Bereichs mit Ausschlussgebieten aus der Suche nach supersymmetrischen Teilchen. Die farblich unterlegten Bereiche werden von den jeweiligen rechts aufgetragenen Experimenten ausgeschlossen. Die restlichen farbigen Flächen, werden aufgrund der Einschränkungen innerhalb dieser Analyse ausgeschlossen. In der rosafarbenen Fläche werden die Punkte aufgrund einer Kombination aller Einschränkungen ausgeschlossen, während im roten und orangefarbenen Bereich die dargestellten Einschränkungen bereits einen  $\Delta\chi^2$ -Anteil größer als 5,99 annehmen.

### 7.3.3 Direkte Suche nach Dunkler Materie

Neben den bisher angesprochen Einschränkungen, also den Messwerten aus der Kosmologie und B-Physik, soll in diesem Abschnitt auf die direkte Suche nach Dunkler Materie eingegangen werden.

Neben der indirekten Suche, in der Dunkle Materie über den Nachweis der Sekundärteilchen aus WIMP-Annihilationsprozessen gesucht wird, kann ebenfalls direkt nach Dunkler Materie gesucht werden. Dabei versucht man die elastische Streuung von WIMP-Teilchen an schweren Kernen im Detektor auf der Erde nachzuweisen.

Dabei geht man davon aus, dass die Dichte der WIMP-Teilchen innerhalb unserer Galaxie aufgrund der gravitativen Anbindung erhöht ist. Die galaktische Scheibe wird dann von einem sogenannten Halo aus Dunkler Materie umgeben. Aus der Bewegung unseres Sonnensystems innerhalb der Milchstraße durch den Halo, der eine gewisse WIMP-Dichte aufweist, kann der dazugehörige WIMP-Fluss berechnet werden. Unter der Annahme das WIMPs vorwiegend elastisch an Kernen streuen und dabei spin-unabhängig wechselwirken, führt dies zu einer kohärenten Streuung, also  $\sigma \propto N^2$ , wobei  $N$  die Anzahl der Nukleonen im Kern des Detektormaterials darstellt [19]. Diese elastische Streuung erfolgt innerhalb des CMSSM hauptsächlich über den Austausch eines schweren oder leichten Higgs-Bosons  $H$ ,  $h$  und eines Squarks. Zur Vollständigkeit sei angemerkt, dass neben den hier dargestellten spinunabhängigen Streuungen ebenfalls spinabhängige Modelle zur Streuung existieren. Geht man von einer elastischen Streuung an einem Kern aus, so ist der sich ergebende WQ proportional zur Nukleondichte und zu den verwendeten Formfaktoren  $f_{p/n}$  [83]

$$\sigma^{SI} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{m_{\chi^0} m_T}{m_{\chi^0} + m_T} \right)^2 (n_p f_p + n_n f_n)^2. \quad (7.27)$$

Dabei entspricht  $m_T$  der Masse des streuenden Korns und  $n_p / n_n$  der Anzahl der Protonen/Neutronen. Wie man an Gleichung (7.27) sieht, enthält der Wirkungsquerschnitt mit den Formfaktoren  $f_n / f_p$  eine modellabhängige und damit stark schwankende Größe. Der Nachweis der Streuung erfolgt bei der elastischen Streuung über die Messung der Rückstoßenergie des Korns. Die Rückstoßenergie wird dabei je nach Detektormaterial umgewandelt, so dass sich daraus unterschiedliche Nachweismethoden entwickelt haben. Man unterscheidet dabei die Messung der Rückstoßenergie in Form von Wärme (Phononen), Ionisation oder Szintillation, wobei ebenfalls Kombinationen möglich sind [19].

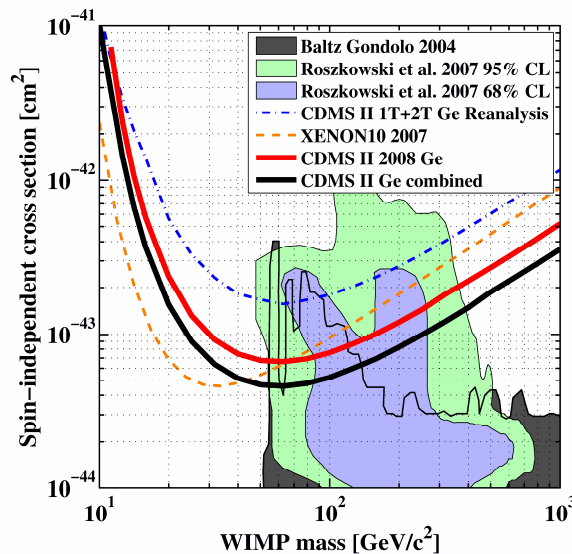


Abbildung 7.31: Ausschlussgrenze für die WIMP-Kern-Streuung von CDMS II.

Bisherigen Experimenten ist es nicht gelungen, eine WIMP-Kern-Streuung nachzuweisen, so dass aus der direkten Suche Ausschlusskurven resultieren, die als weitere Einschränkung des CMSSM Parameterbereichs genutzt werden können. Die Ausschlusskurven werden stets in Abhängigkeit des Streuwirkungsquerschnitts und der dazugehöriger WIMP-Masse dargestellt. Das sich aus dem CMSSM Massenspektrum ergebende Neutralino, der bevorzugte WIMP Kandidat, sollte unterhalb des gefundenen Limits liegen.

Im Folgenden wird untersucht, welchen Einfluss die Ausschlussgrenze der direkten Suchen nach Dunkler Materie auf den erlaubten Parameterbereich aus der mehrstufigen Optimierung hat. Als Ausschlusskurve wird die in Abbildung 7.31 dargestellte Kurve des CDMS II (Cryogenic Dark Matter Search) Experiments verwendet [15] und parametrisiert wurden. Um den Einfluss der Ausschlussgrenzen der direkten Suche zu berücksichtigen, wird der oben gefundene optimierte Parameterbereich verwendet. Mit den gefunden optimierten Punkten, wird in jedem Punkt der zugehörige WIMP-Nukleon Streuwirkungsquerschnitt berechnet. Da sich der WQ aufgrund von unterschiedlichen Formfaktoren zwischen Proton und Neutron unterscheidet, wird das arithmetische Mittel gebildet.

	Proton			Neutron		
	$f_d$	$f_u$	$f_s$	$f_d$	$f_u$	$f_s$
min. Werte	0,026	0,020	0,02	0,036	0,014	0,02
max. Werte	0,033	0,023	0,26	0,042	0,018	0,26

Tabelle 7.3: Verwendete Formfaktoren für die WIMP-Nukleon-Streuung.

Da der Wirkungsquerschnitt abhängig von der Wahl der Formfaktoren ist, werden bei der Untersuchung unterschiedlichste Formfaktoren berücksichtigt. Um die auftretenden Extrema abzudecken, werden zwei Sätze der Formfaktoren verwendet, die die größtmöglichen und kleinsten Formfaktoren darstellen.

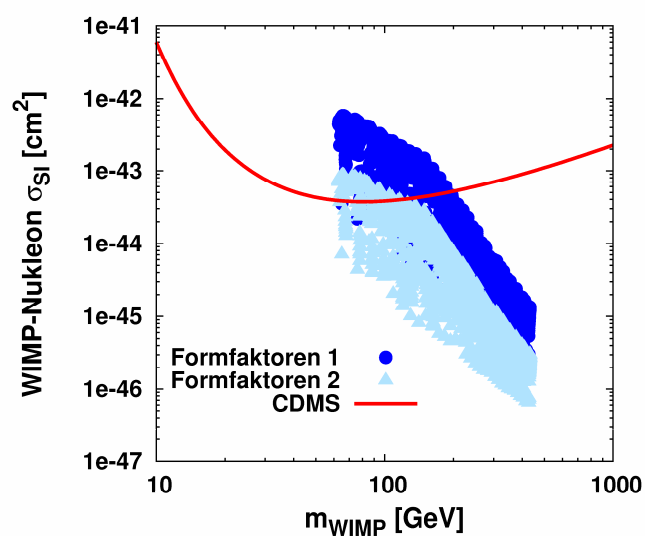


Abbildung 7.32: Wirkungsquerschnitt der optimierten Punkte als Funktion der WIMP-Masse für beide Sätze der verwendeten Formfaktoren.



Die verwendeten Formfaktoren in Tabelle 7.3 stellen die beiden Extrema dar. Die hohen Formfaktoren entsprechen den voreingestellten Werte in micrOMEGAs [84]. Die minimalen Formfaktoren wurden [85] bis [87] entnommen.

Nach der Berechnung des Streuwirkungsquerschnitts und Bildung des Mittelwertes, wird geprüft ob die Punkte oberhalb der parametrisierten CDMS-Ausschlusskurve liegen, wie in Abbildung 7.32 zu sehen. Die Punkte oberhalb der Kurve werden somit von der direkten Suche nach dunkler Materie ausgeschlossen.

Es wird deutlich, dass sich der Unterschied in den Formfaktoren hauptsächlich auf eine vertikale Verschiebung des Spektrums in Abbildung 7.32 auswirkt. Bei einer Kombination der Formfaktoren dieser beiden Sätze, entspricht die Ausschlusskurve einer Kurve innerhalb dieser beiden Schranken.

Aus Abbildung 7.32 geht außerdem hervor, dass hauptsächlich WIMPs mit kleinen Massen ausgeschlossen werden. Um den Ausschluss innerhalb der  $m_0$ - $m_{1/2}$  Ebene darzustellen, werden die ausgeschlossenen Punkte in Abbildung 7.32 mit dem zugehörigen  $m_0$ - $m_{1/2}$  Paar identifiziert. Der ausgeschlossene Bereich innerhalb der  $m_0$ - $m_{1/2}$  Ebene ist in Abbildung 7.33 durch zwei vertikale Linien innerhalb des  $\Delta\chi^2$  dargestellt. Der zugehörige CMSSM Parameterbereich unterhalb der Kurven ist dabei ausgeschlossen. Die vertikale Verschiebung des ausgeschlossenen Spektrums für die unterschiedlichen Formfaktoren in Abbildung 7.32, wird ebenfalls anhand der unteren Ausschlussgrenze in Abbildung 7.33 gezeigt.

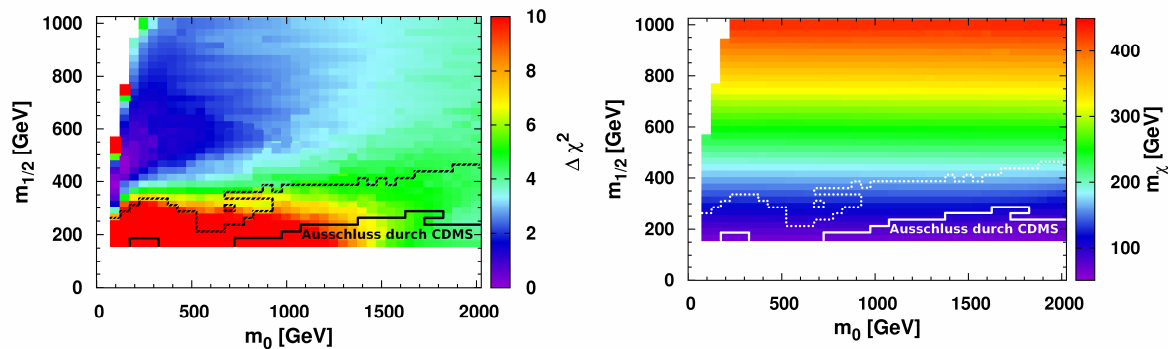


Abbildung 7.33: Ausgeschlossener Bereich in der  $m_0$ - $m_{1/2}$  Ebene projiziert auf die  $\Delta\chi^2$ -Funktion und die Neutralinomasse.

Anhand Abbildung 7.33 wird gezeigt, dass die Masse der Neutralinos eine horizontale Proportionalität aufweist, so dass  $m_\chi$  proportional zu  $m_{1/2}$  ist. Da in Abbildung 7.32 zu erkennen ist, dass die direkte Suche den Bereich von WIMP-Massen um 100 GeV abdeckt, wird stets der Bereich für kleine  $m_{1/2}$  ausgeschlossen. Um den Einfluss dieser Einschränkung auf den erlaubten Bereich möglichst konservativ zu betrachten, ist lediglich der Bereich unterhalb der durchgezogenen schwarzen Linie in Abbildung 7.33 ausgeschlossen. Übertragen auf  $\Delta\chi^2$  ist ersichtlich, dass die direkte Suche den Bereich ausschließt, der bereits durch andere Einschränkungen ausgeschlossen ist. Die Berücksichtigung der direkten Suche zum jetzigen Standpunkt, trägt somit keine neuen Erkenntnisse zum Ausschlussbereich bei.



### 7.3.4 Bisherige LHC Ergebnisse

Einer der Hauptaufgaben des LHC ist die Suche nach Supersymmetrie. Daher wurden seit Beginn der Datennahme dahingehend Analysen durchgeführt. Dabei werden Ereignisse mit Jets und signifikant fehlender transversaler Energie gesucht, da diese bei Proton-Proton-Kollisionen Hinweise auf Zerfälle von schweren, Paarproduzierten Squarks und Gluinos geben.

Bisher wurden keine supersymmetrischen Teilchen gefunden, weshalb sich erneut eine Ausschlusskurve ergibt, die als weitere Einschränkung benutzt werden kann. Die in Abbildung 7.34 [38] dargestellte Kurve, ist auf die beobachtbare Teilchenzahl von  $N = 13,4$  und den damit verbundenen Produktionswirkungsquerschnitt von Quarks und Gluinos zurückzuführen.

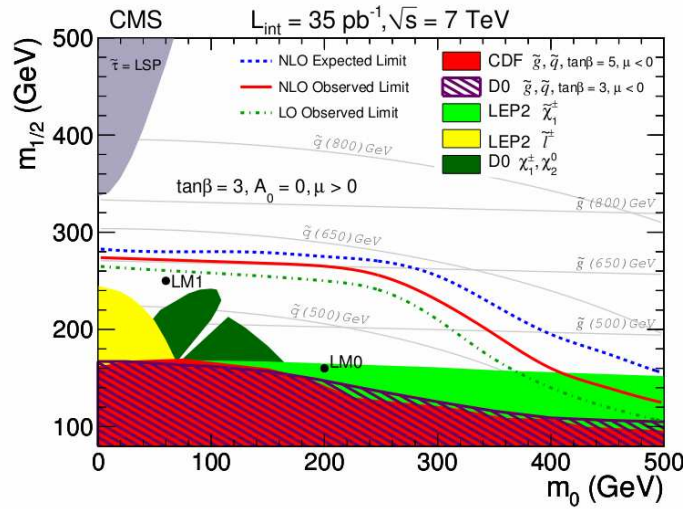


Abbildung 7.34: LHC Ausschlussgrenze für supersymmetrische Teilchen.

Aufgrund der oben gezeigten Ausschlusskurve, sind bestimmte Kombinationen der CMSSM Parameter bereits ausgeschlossen, so dass aus der Angabe der Teilchenzahl ein weiterer  $\chi^2$ -Anteil modelliert werden kann. Da es sich hierbei um ein 95% Konfidenzintervall handelt, muss der zugehörige Fehler so berechnet werden, dass sich bei  $N = 13,4$  gerade  $\Delta\chi^2 = 5,99$  ergibt. Die sich so ergebende zweidimensionale Gaußkurve führt zu  $\sigma_{\text{LHC}} = 5,48$ , wobei die erwartete Teilchenzahl hier mit Null angenommen wurde. Die Teilchenzahl ergibt sich über die integrierte Luminosität  $L_{\text{int}}$ , den WQ  $\sigma$  und der Effizienz  $\varepsilon$  zu

$$N = L_{\text{int}} \sigma \varepsilon. \quad (7.28)$$

Zur Berechnung der Teilchenzahl  $N$  wird für jede gewählte CMSSM Kombination der Wirkungsquerschnitt in CalcHEP von zwei Gluonen in jeweils zwei Gluinos und zwei Squarks, sowie ein Quark und Gluon in ein Squark und Gluino berechnet. Bei den Squarks werden aufgrund der Partonverteilungsfunktionen nur die leichtesten beiden Quarks, u- und d-Quark, und damit deren supersymmetrische Partner  $\tilde{u}_{R,L}$  und  $\tilde{d}_{R,L}$  berücksichtigt. Es sei hier angemerkt, dass sich die Ausschlussgrenzen

und Effizienzen nur auf feste Werte von  $\tan(\beta)$  und  $A_0$  beziehen. Dabei wird  $A_0=0$  gesetzt und  $\tan(\beta)$  variiert lediglich zwischen drei Werten, darunter 3, 10 und 50. Die Ergebnisse des mehrstufigen Optimierungsverfahrens enthalten im Gegensatz zu den Angaben der Ausschlusskurve unterschiedliche Werte von  $\tan(\beta)$  und  $A_0$ . Daher muss angenommen werden, dass der berechnete WQ für diese Einschränkung unabhängig von  $A_0$  ist. Für  $\tan(\beta)$  kann für abweichende Werte zwischen den oben genannten Werten interpoliert werden. Da die Ausschlusskurve nicht genauer beschrieben werden kann, wird der resultierende  $\chi^2$ -Anteil erst nach der Berechnung dem gesamten  $\chi^2$  hinzugefügt. Aufgrund der begrenzten Angaben zur LHC Ausschlussgrenze wurde statt des oben berechneten Fehlers, der Fehler so angepasst, dass die angegebenen Grenzen mit den Berechnungen übereinstimmen, was in Abbildung 7.35 gezeigt ist. Damit ergibt sich ein optimierter Fehler von  $\sigma_{\text{LHC}} = 4,5$ . Zum Vergleich befinden sich in Anhang 10.4 die Abbildungen mit dem berechneten und einem kleineren Fehler. Darin ist gezeigt, dass der ausgeschlossene Bereich für den berechneten Fehler nicht ausreichend groß ist, um mit den angegebenen Ausschlusskurven übereinzustimmen. Der  $\chi^2$ -Anteil nimmt dann folgende Form an

$$\chi_{\text{LHC}}^2 = \left( \frac{N}{4,5} \right)^2. \quad (7.29)$$

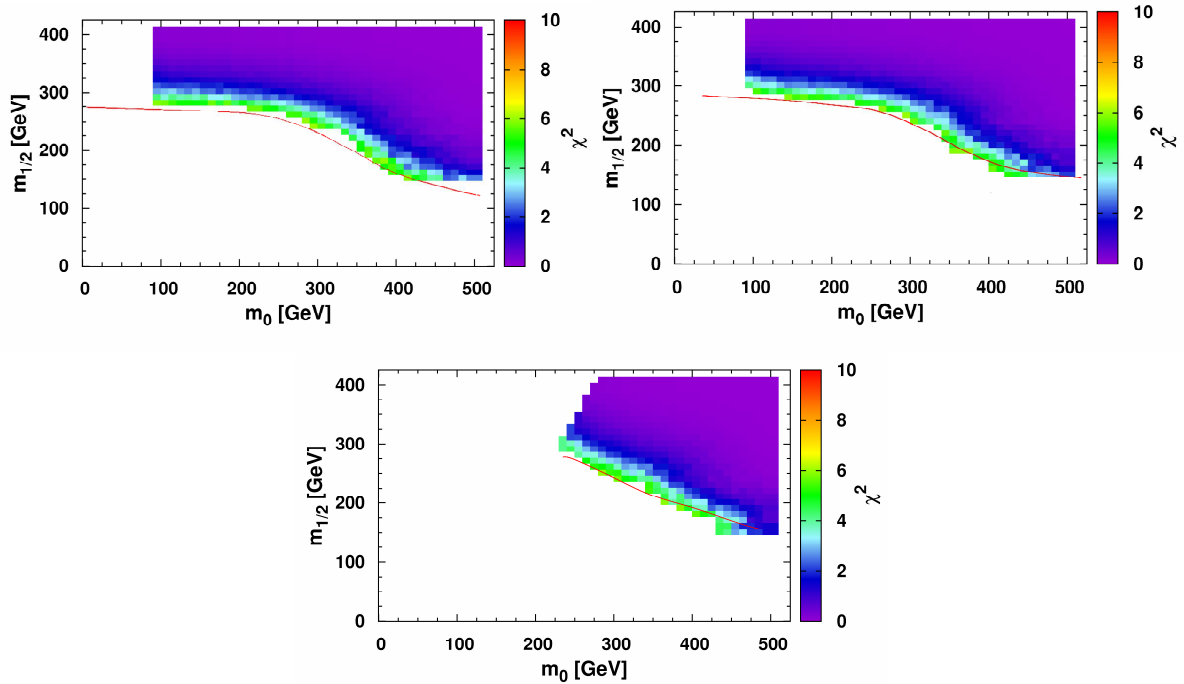


Abbildung 7.35: LHC-Ausschlussgrenze für unterschiedliche  $\tan(\beta)$  und  $A_0$  für  $\sigma_{\text{LHC}}=4,5$ .

Mit dem angegebenen  $\chi^2$ -Anteil kann der Einfluss der LHC-Ausschlussgrenze auf den bereits gefundenen 95%CL Bereich aus der mehrstufigen Optimierung überprüft werden. Zur Verdeutlichung der Ausschlussgrenze ist die Kurve und der erlaubte 95% CL Bereich in Abbildung 7.36 dargestellt. Hier ist gezeigt, dass der Ausschluss in einem Bereich der  $m_0$ - $m_{1/2}$  Ebene liegt, der bereits durch die Higgs-

masse und  $\text{BR}(b \rightarrow s \gamma)$  ausgeschlossen ist. Durch die Berücksichtigung dieser Einschränkung, erhält der bisher betrachtete  $\chi^2$ -Wert den oben beschriebenen  $\chi^2$ -Beitrag, der unterhalb der LHC Ausschluss-Kurve, also für kleine  $m_0$ - $m_{1/2}$ , sehr groß ist, da dieser Bereich ausgeschlossen ist. Der Beitrag wird umso kleiner, je weiter man sich von der Kurve, also zu großen  $m_0$ - $m_{1/2}$ , weg bewegt, so dass der Beitrag für sehr große  $m_0$ - $m_{1/2}$  vernachlässigbar klein wird.

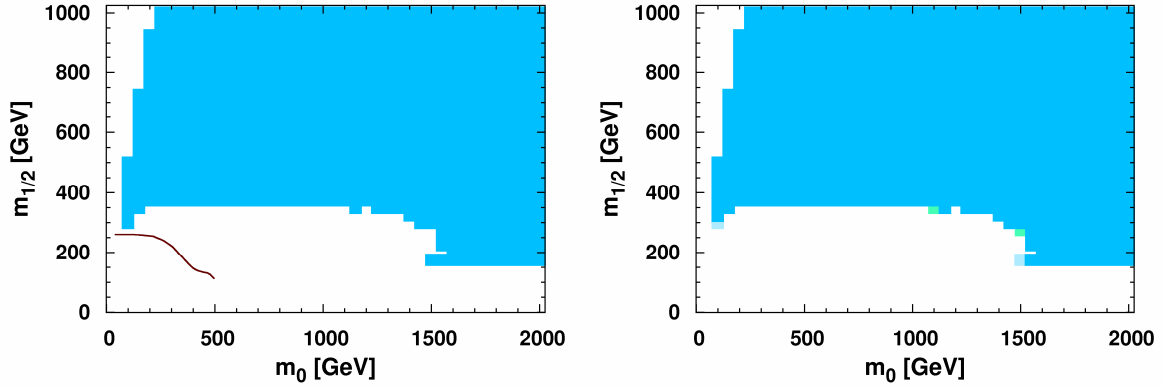


Abbildung 7.36: Zusammenhang zwischen erlaubten 95% CL Bereich und der LHC-Ausschlussgrenze. Links: CMS-Limit (dargestellte Linie) innerhalb der  $m_0$ - $m_{1/2}$  Ebene und der erlaubter 95% CL Bereich (blau). Rechts: Erlaubter 95% CL Bereich mit zusätzlichen Punkten aus der Berücksichtigung der LHC-Ausschlussgrenze. Durch die Hinzunahme der LHC Einschränkung ergeben sich zusätzliche Punkte (hellgrün). Die Punkte nahe der Grenze werden dadurch jedoch ausgeschlossen (hellblau).

Da sich der Punkt mit minimalem  $\chi^2_{\min}$  in der Nähe des 95% CL LHC-Limits befindet, erhält das minimale  $\chi^2_{\min}$  einen zusätzlichen LHC Beitrag, der den Betrag um 10% erhöht. Das minimale  $\chi^2_{\min}$  verschiebt sich damit zum Punkt  $m_0 = 150$   $m_{1/2} = 475$  und nimmt den Wert  $\chi^2_{\min} = 2,54$  an. Durch die Verschiebung des minimalen  $\chi^2$  und der damit verbundenen Erhöhung des Wertes gelingt es mehr Punkten die Bedingung  $\Delta\chi^2 < 5,99$  zu erfüllen. Der sich so ergebende neue erlaubte 95% CL Bereich wird also minimal größer. Die Vergrößerung bzw. Verringerung des ursprünglichen erlaubten 95% CL Bereichs ist durch die hellgrünen bzw. hellblauen Punkte in Abbildung 7.36 dargestellt. Der Ausschluss des optimierten Parameterbereichs der sich durch die Hinzunahme der bisherigen LHC Ergebnisse ergibt, ist gleichzeitig mit einer geringen Vergrößerung des erlaubten 95% CL Bereichs verbunden, da das LHC-Limit in der Nähe vom minimalen  $\chi^2_{\min}$ -Wert liegt. Aufgrund dieses Zusammenhangs trägt die Berücksichtigung der LHC-Ergebnisse, ähnlich wie die Ergebnisse der direkten Suche, zum jetzigen Standpunkt keine neuen Erkenntnisse zum Ausschluss des CMSSM Parameterbereichs bei.

## 7.4 Einfluss auf zukünftige Higgssuchen am LHC

Die Suche nach dem Higgs-Boson ist einer der Hauptaufgabe des LHC. Bei Proton-Proton-Kollisionen entsteht das Higgs-Boson hauptsächlich durch die Gluonfusion über eine t- oder b-Quark-Schleife. Andere Quarkflavour koppeln aufgrund ihrer Masse weniger stark an das Higgs-Boson, so dass diese vernachlässigt werden können. In Abbildung 7.37 ist der dominante Prozess zur Higgs-Produktion im

SM gezeigt. Der erwartete WQ in Abhängigkeit der Masse des Higgs-Bosons ist in Abbildung 7.38 [88] dargestellt. Die Frage liegt nahe, inwieweit sich der Wirkungsquerschnitt und damit das Entdeckungspotential des Higgs-Bosons ändern, wenn zusätzlich Supersymmetrie berücksichtigt wird.

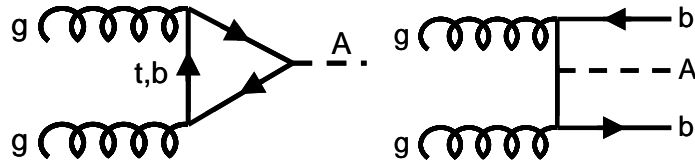


Abbildung 7.37: Feynman-Diagramm für die Gluonfusion über eine b-/t-Schleife (links) und die assoziierte Higgsproduktion (rechts).

Beim Übergang vom SM zum CMSSM ergeben sich durch die Verdopplung im Higgssektor fünf Higgs-Bosonen. Davon können für die Gluonfusion nur die neutralen Higgs-Bosonen  $h$ ,  $H$  und  $A$  betrachtet werden. Im MSSM ändert sich nicht nur die Anzahl der Higgs-Bosonen, sondern auch deren Kopplungen an die jeweiligen Fermionen, wie sie in Kapitel 3.2 gezeigt wurden.

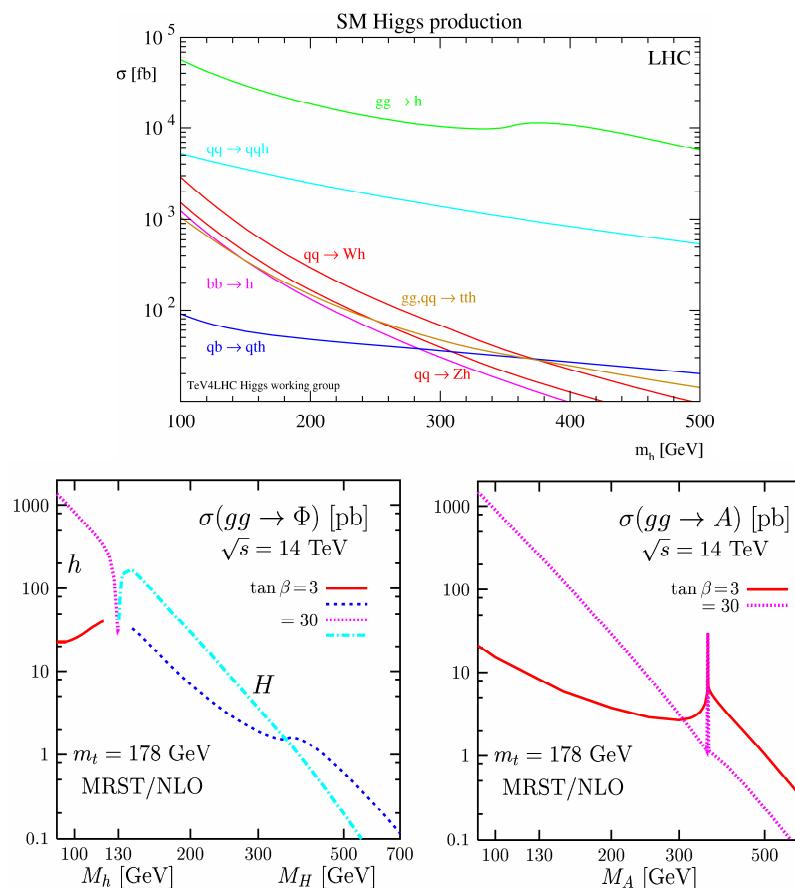


Abbildung 7.38: Wirkungsquerschnitte im SM und MSSM. Oben: Produktionswirkungsquerschnitt für das SM-Higgs [88]. Unten: Produktionswirkungsquerschnitt für die Higgs-Bosonen des MSSM [89].

Das leichteste Higgs des MSSM ist dem SM-Higgs am ähnlichsten. Aufgrund der Massenobergrenze von 130 GeV, ist es jedoch stark innerhalb des Massenspektrums eingeschränkt. Für Massen oberhalb von 130 GeV werden die schwereren Higgs-Bosonen berücksichtigt, wie in Abbildung 7.38 [89] zu sehen ist.

Es stellt sich heraus, dass zum einen das Massenspektrum im Vergleich zum Higgs  $h$  nicht begrenzt ist. Zum anderen sind die Massen der Higgs-Bosonen  $H$  und  $A$  fast identisch und die Interferenz zwischen beiden Higgs-Bosonen vernachlässigbar klein, so dass sich ein doppelt so hoher Wirkungsquerschnitt ergibt [62]. Aufgrund des unbegrenzten Massenspektrums der schweren Higgs-Bosonen gegenüber dem Higgs-Boson  $h$  wird für die weitere Analyse auf das leichte Higgs  $h$  verzichtet. Ein Vergleich zwischen den Diagrammen in Abbildung 7.38 zeigt, dass der Wirkungsquerschnitt der MSSM Higgs-Bosonen gegenüber den SM-Higgs-Boson groß ist. Variationen im WQ der MSSM Higgs-Bosonen ergeben sich durch die zusätzliche Abhängigkeit von  $\tan(\beta)$ .

Da die Kopplungen der Higgs-Bosonen nach Gleichung (3.35) an das  $t$ -Quark proportional zu  $\cot(\beta)$  und an das  $b$ -Quark proportional zu  $\tan(\beta)$  ist, wird der Prozess für kleine Werte von  $\tan(\beta)$  von einer  $t$ -Schleife dominiert, während der Beitrag des  $t$ -Quarks für große  $\tan(\beta)$  vernachlässigbar klein wird und lediglich Schleifen von  $b$ -Quarks zum WQ beitragen. Eine weitere Charakteristik dieses Prozesses ist die auftretende Resonanz, wenn die Schwelle zur Produktion eines reellen  $t$ -Quark überschritten wird. Nach der obigen Diskussion der Gluonfusion über eine  $b$ -/ $t$ -Schleife stellt sich heraus, dass die Supersymmetrie bei bestimmten Werten von  $\tan(\beta)$  keine messbare Veränderung des WQ bewirkt und dadurch nicht eindeutig vom SM unterschieden werden kann. Wie sich herausstellt, ist dies jedoch anhand eines anderen Prozess möglich, was im Folgenden demonstriert wird.

Der im rechten Teil der Abbildung 7.37 gezeigte Prozess ist ähnlich zu dem Diagramm mit der  $b$ -/ $t$ -Schleife. Es handelt sich hierbei um die assoziierte Higgsproduktion, eine Gluonfusion in ein Higgs mit der gleichzeitigen Produktion von  $b$ -Quarks. Wie man sieht, enthält dieser Prozess keine Schleifen, so dass der zugehörige WQ mit Hilfe von CalcHEP berechnet werden kann.

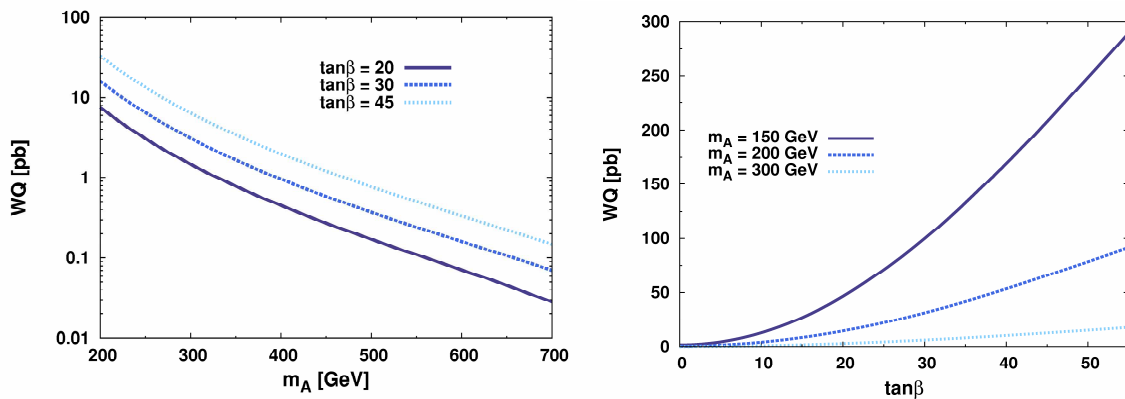


Abbildung 7.39: Wirkungsquerschnitt in Abhängigkeit von  $m_A$  (links) und  $\tan(\beta)$  (rechts).

Um die Wirkungsquerschnitte am LHC zu simulieren, wurde eine Schwerpunktsenergie von 14 TeV gewählt. Zur Wahl stehen ebenfalls mehrere PDF. Verwendet man die unterschiedlichen PDF in den WQ-Analysen, so ergeben sich vernachlässigbare Unterschiede im WQ. In Anhang 10.6 sind die Auswirkungen der unterschiedlichen PDF für ein gewähltes Beispiel gezeigt. Als PDF für die Analyse der WQ wird cteq6m verwendet. Mit diesem Input, wird der WQ über die Masse des Higgs-Bosons aufgetragen. Wie erwartet ergibt sich in Abbildung 7.39 der charakteristische Verlauf proportional zu  $\tan^2(\beta) / m_A^4$ .

Da die Massen der beiden Higgs-Bosonen A und H annähernd gleich sind, gibt es ebenfalls keinen großen Unterschied im Verlauf des Wirkungsquerschnittes, so dass stets nur ein Higgs-Boson betrachtet wird, siehe dazu Anhang 10.6. In CalchEP ist es möglich, die CMSSM Parameter als Input zu variieren. Die Masse des Higgs-Bosons ergibt sich aus dem berechneten Massenspektrum.

Die assoziierte Higgsproduktion kann nun mit der Gluonfusion über eine t-/b-Schleife [90] verglichen werden. Das Resultat für ausgewählte Massen ist in Abbildung 7.40 zu sehen. Da die b-Quarks meist in Vorwärtsrichtung produziert werden, werden für Teilchenbeschleuniger typische Schnitte gemacht. In Abbildung 7.40 kann so an der rechten Skala der WQ unter Berücksichtigung von einem Transversalimpuls  $p_T > 20$  GeV auf das b-Quark und von einer Pseudorapidität  $\eta < 2,5$  abgelesen werden. Die Masse des t-Quarks wurde hierbei zu  $m_t = 171,3$  GeV und des b-Quarks zu  $m_b = 2,5$  GeV gewählt, um der Energieabhängigkeit der Massen bei hohen Energien Rechnung zu tragen.

Es wird deutlich, dass der Wirkungsquerschnitt der Gluonfusion für kleine Werte von  $\tan(\beta)$  größer ist, als der für die assoziierte Higgsproduktion. In Bereich kleiner  $\tan(\beta)$  wird der WQ für die Gluonfusion durch die t-Schleife gegenüber Prozessen, an denen nur b-Quarks teilnehmen, gesteigert. Dieses Verhalten war jedoch zu erwarten, da die Effekte aus der Supersymmetrie für kleine Werte für  $\tan(\beta)$  gering sind.

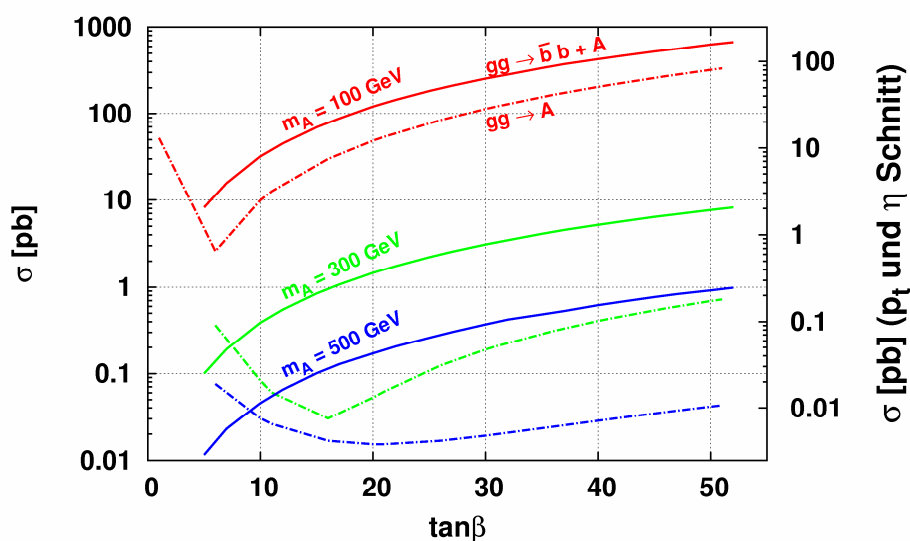


Abbildung 7.40: Vergleich zwischen der assoziierten Higgsproduktion und der Gluonfusion über eine b-/t-Schleife.



Für den Bereich großer Werte von  $\tan(\beta)$  ist der Verlauf jedoch genau entgegengesetzt. Da hier der Beitrag der t-Quark-Schleife für die Gluonfusion vernachlässigbar klein wird, können die verschiedenen Produktionsprozesse verglichen werden. Aus Abbildung 7.40 ergibt sich, dass der WQ für die assoziierte Higgsproduktion um einen Faktor 2500 größer ist als die Gluonfusion. Der größere WQ ergibt sich für einen Großteil des erlaubten CMSSM Parameterraums, da dieser gerade hohe Werte von  $\tan(\beta)$  bevorzugt. Der deutliche Unterschied in den Wirkungsquerschnitten bietet die Möglichkeit entweder Supersymmetrie am LHC zu finden oder auszuschließen. Dies ist auf die Einschränkung der Relic Density und deren spezifisches Massenspektrum der Higgsbosonen zurückzuführen. In den Abschnitten 7.1 und 7.2.1 wurde gezeigt, dass für die korrekte Menge der Relic Density der Annihilationsprozess der Neutralinos über ein pseudoskalares Higgs A den Großteil des CMSSM Parameterraums dominiert. Dies ist auf die Variation von  $\tan(\beta)$  zurückzuführen, da sich so der erlaubte schmale Streifen für feste Werte von  $\tan(\beta)$  über den gesamten CMSSM Parameterbereich erstreckt mit Ausnahmen der Bereiche, die bereits durch die elektroschwache Symmetriebrechung und dem Stau als LSP ausgeschlossen sind. Um die korrekte Menge der Relic Density zu erhalten, ergibt sich in Kombination mit großen Werten von  $\tan(\beta)$  eine kleine Masse des pseudoskalaren Higgs Bosons  $m_A$ . Die Masse des Higgs-Bosons sollte dabei knapp neben der Resonanz der Neutralinoannihilation liegen. Dies führt auf das Verhältnis  $m_A \approx 2,2 m_\chi$ . Im rechten Teil von Abbildung 7.33 wurde gezeigt, dass die Masse der Neutralinos  $m_\chi$  proportional zu  $m_{1/2}$  ist, so dass die Masse des pseudoskalaren Higgs ebenfalls in der Higgs-Annihilationsregion aufgrund der Bedingung  $m_A \approx 2,2 m_\chi$  die gleiche Proportionalität aufweist.

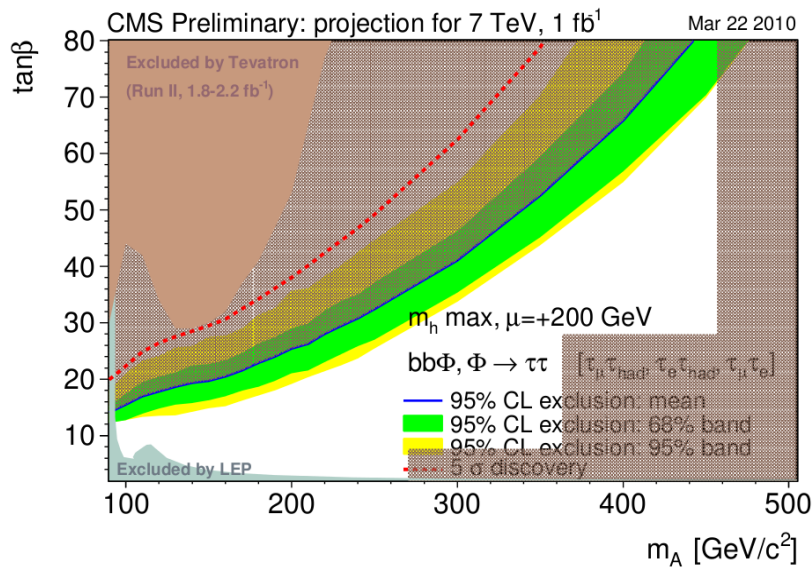


Abbildung 7.41: Entdeckungspotential des CMS Detektors für 7 TeV.

Neben den ausgeschlossenen Bereichen bei einem 95% CL von Tevatron und LEP ist ebenfalls der vorhergesagte ausgeschlossene Bereich bei 95% CL von CMS innerhalb der  $\tan(\beta)$ - $m_A$  Ebene dargestellt. Bei 7 TeV und  $1 \text{ fb}^{-1}$  ist es im Bereich großer Werte für  $\tan(\beta)$  möglich das Higgs-Bosons A bis zu einer Masse von ca. 400 GeV nachzuweisen bzw. auszuschließen [91].

Unter Berücksichtigung des Entdeckungspotentials am CMS-Detektor des LHC [91], das in Abbildung 7.41 dargestellt ist, wäre es zukünftig möglich, das pseudoskalare Higgs bis zu einer Masse von etwa 400 GeV bei hohen Werten von  $\tan(\beta)$  bei einer integrierten Luminosität von  $1 \text{ fb}^{-1}$ , die man in weniger als einem Jahr erwartet, nachzuweisen bzw. auszuschließen,. Da die optimierten Werte von  $\tan(\beta)$  in dieser Analyse fast im gesamten CMSSM Parameterraum hohe Werte im Bereich von 50 annehmen, ist der WQ für die assoziierte Higgsproduktion groß und die Massengrenze des Entdeckungspotentials kann auf das Higgs-Massenspektrum übertragen werden. Bis zum Ende der Laufzeit des LHCs wird eine Steigerung der Luminosität erwartet, so dass sich die Massengrenze aus Abbildung 7.41 verdoppeln wird. Aus Abbildung 7.27 geht hervor, dass unter der Annahme dieses zukünftigen Entdeckungspotentials fast im gesamten dargestellten CMSSM Parameterraums die Möglichkeit besteht, die Masse des pseudoskalaren Higgs A am LHC zu entdecken. Selbst wenn das Higgs-Boson am LHC nicht nachgewiesen werden kann, so liefert dies eine drastische Reduktion des CMSSM Parameterraums.



## 8 Zusammenfassung

Die Supersymmetrie bietet als Erweiterung des SM u.a. neben einem Dunkle Materie Kandidaten, die Möglichkeit der Berücksichtigung der Gravitation und Vereinigung der drei Kopplungskonstanten. Die Vorteile von SUSY sind mit einer Verdopplung des Teilchenspektrums verbunden. Da bisher keine supersymmetrischen Teilchen an Teilchenbeschleunigern gefunden wurden, geht man davon aus, dass es sich bei der Supersymmetrie um eine gebrochene Symmetrie handelt. Die 105 freien Parameter der sanften Brechung können unter der Annahme, dass sich die SUSY-Massen und -Kopplungen an der GUT Skala vereinigen, auf fünf freie Parameter reduziert werden. Ausgehend von den fünf Parametern des CMSSM an der GUT Skala kann mithilfe der RGE das gesamte Teilchenmassenspektrum bei niedrigen Energien berechnet werden. Die sich ergebenden Massen und Prozesse können mit aktuellen Messwerten aus der Kosmologie und elektroschwachen Präzisionsdaten verglichen werden. Damit SUSY eine überzeugende Erweiterung des SM darstellen kann, muss eine konsistente Beschreibung mit den aktuellen Daten gewährleistet sein.

In dieser Arbeit wurde ein mehrstufiges Optimierungsverfahren vorgestellt, das es im Rahmen des CMSSM Modells ermöglicht, einen großen Bereich im Parameterraum zu finden, der mit elektroschwachen und kosmologischen Präzisionsdaten übereinstimmt. Innerhalb dieser  $\chi^2$ -Analyse konnte den starken Korrelationen (siehe Abbildung 7.3) mithilfe einer mehrstufigen Optimierungsmethode Rechnung getragen werden. Dazu werden zunächst die stark korrelierten Parameter  $\tan(\beta)$  und  $A_0$  für feste restliche Werte bestimmt. Neben der Art der Optimierungsmethode spielt die Fehlerbehandlung für den erlaubten CMSSM Parameterbereich eine große Rolle. Für mehrere gaußverteilte Fehler ergibt sich der Gesamtfehler aus einer quadratischen Fehleraddition. Da es sich bei den in dieser Analyse angegebenen theoretischen Fehlern um nicht-gaußverteilte Fehler handelt, werden die experimentellen und theoretischen Fehler linear addiert, was die konservativere Variante der Fehleraddition darstellt. Diese Optimierungsmethode ist in der Lage unter der Annahme der gleichen experimentellen Werte und der quadratischen Fehleraddition die Ergebnisse in Referenz [70] zu bestätigen. Der Vergleich mit Referenz [81] und [82] zeigt ein gegensätzliches Resultat. Eine mögliche Ursache für den Ausschluss von erlaubten Bereichen dieser Analysen ist auf die Schwierigkeit der Konvergenz aufgrund der starken Korrelationen bei den Monte-Carlo basierten Methoden zurückzuführen.

In Abbildung 8.1 sind alle  $\chi^2$ -Anteile zur gesamten  $\chi^2$ -Funktion unter Berücksichtigung der linearen Fehleraddition zusammengefasst. Zum Vergleich sind in Abbildung 8.2 die Anteile bei quadratischer Addition dargestellt. Aus den Darstellungen der einzelnen Beiträge der Einschränkungen geht hervor, dass  $(g-2)_\mu$ ,  $BR(b \rightarrow s \gamma)$  und  $BR(B \rightarrow \tau \nu)$  den Hauptbeitrag zum gesamten  $\chi^2$  liefern. Beim Vergleich von Abbildung 8.1 und Abbildung 8.2 wird gezeigt, dass bei einer quadratischen Addition der erlaubte 95% CL Bereich aufgrund des Beitrags von  $(g-2)_\mu$  fast halbiert wird und somit nicht konservativ ist. Bei dem optimierten Bereich ergibt sich kein Widerspruch zu den bisher durchgeführten Suchen nach supersymmetrischen Teil-

chen. Die Suche am LHC schließt bisher den Teilbereich im CMSSM Parameter-  
raum aus, der durch die Higgsmasse und  $\text{BR}(b \rightarrow s \gamma)$  bereits ausgeschlossen ist.  
Da die Relic Density große Werte von  $\tan(\beta)$  fast im gesamten betrachteten  
CMSSM Parameterbereich bevorzugt (siehe Abbildung 7.2) außer im Bereich der  
Koannihilation und der Focus Point Region, konnte gezeigt werden, dass der Wir-  
kungsquerschnitt der assoziierten Higgsproduktion ca. 2500 mal größer ist als der  
vom SM vorhergesagte Wirkungsquerschnitt der Gluonfusion über eine  $b$ -/ $t$ -  
Schleife. Große Werte von  $\tan(\beta)$  haben ebenso zur Folge, dass die Masse des  
pseudoskalaren Higgs klein ist, um die korrekte Menge der Relic Density vorherzu-  
sagen. Für Gluino-Massen bis 2 TeV ist die Vorhersage dieser Analyse, dass die  
schweren Higgsmassen kleiner als ca. 700 GeV sind. Bei den erwarteten großen  
WQ bei großen  $\tan(\beta)$  sollten diese am LHC zugänglich sein.

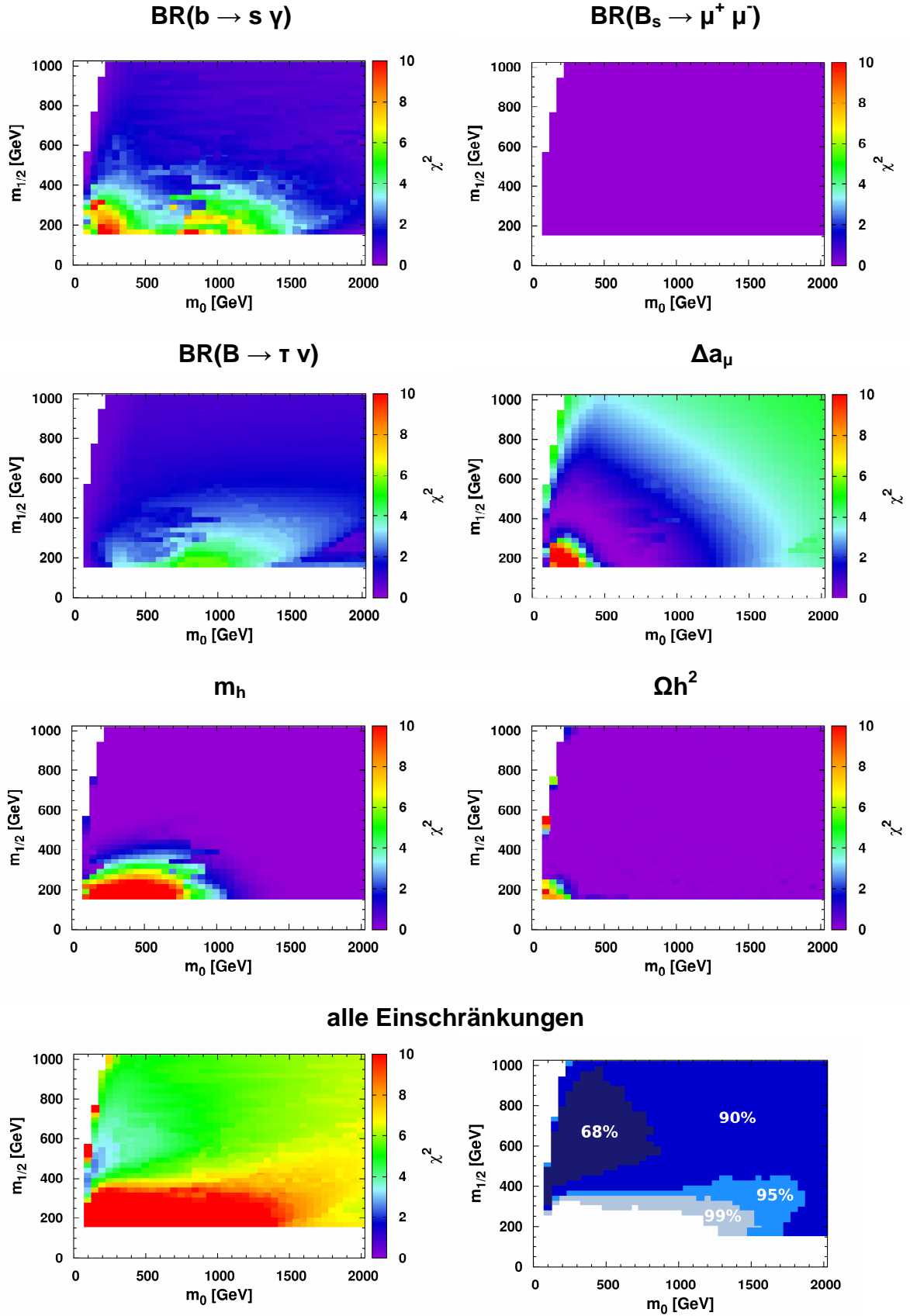


Abbildung 8.1: Zusammenfassung der einzelnen  $\chi^2$ -Beiträge für die lineare Fehleraddition.

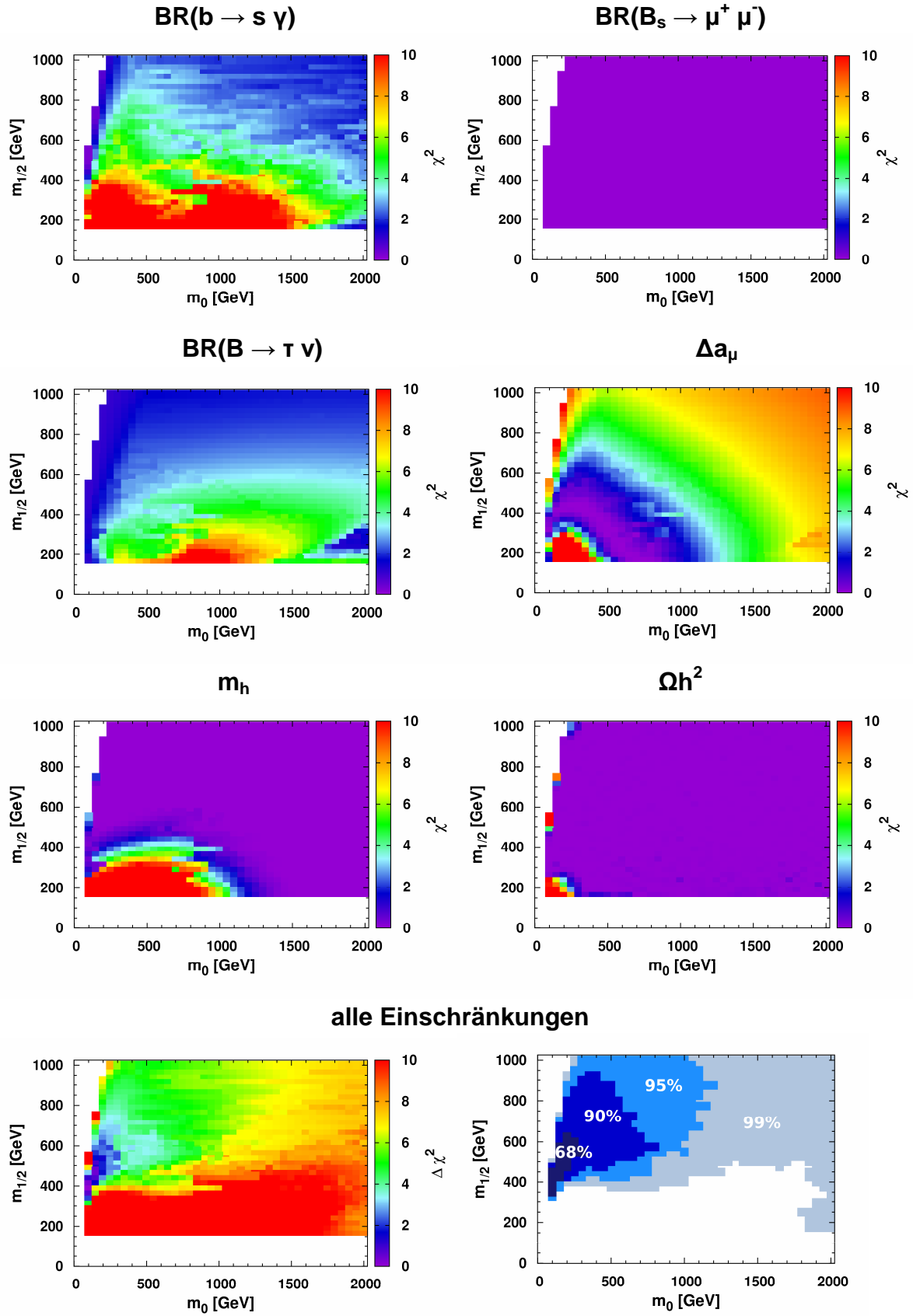


Abbildung 8.2: Zusammenfassung der einzelnen  $\chi^2$ -Beiträge für die quadratische Fehleraddition.

## 9 Literatur

- [1] *Wikipedia*: Artikel zu "Atom". <http://de.wikipedia.org/wiki/Atom>.
- [2] *Griffiths, D.*: Introduction to Elementary Particles. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, ISBN 978-3-527-40601-2, 2008.
- [3] *Povh, B.; Rith, K.; Scholz C.; Zetsche F.*: Teilchen und Kerne – Eine Einführung in die physikalischen Konzepte. Springer-Verlag, 2006.
- [4] *Schmüser, P.*: Feynman-Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker. Springer Verlag, 1988.
- [5] *Ceccucci, A.; Ligeti, Z.; Sakai, Y.*: The CKM Quark-Mixing Matrix. PDG – particle data group, Review 2010, 2008.
- [6] *Perkins, D. H.*: Introduction to High Energy Physics. Cambridge University Press, Fourth Edition, 2000.
- [7] *Weinberg, S.*: The Quantum Theory of Fields. Cambridge University Press, Volume I, 1995.
- [8] *Peskin, M. E.; Schroeder D. V.*: An Introduction to Quantum Field Theory. Westview Press, 1995.
- [9] *Steinhauser, M.*: Mitschrift zur Vorlesung Theoretische Teilchenphysik I. Institut für Theoretische Teilchenphysik, KIT, Vorlesung SS 05.
- [10] *Mandl, F.*: Quantum Field Theory. John Wiley & Sons Ltd, Second Edition 2010.
- [11] *Ryder, L.H.*: Quantum Field Theory. Cambridge University Press, Second Edition, 2003.
- [12] *De Boer, W.*: Grand Unified Theories and Supersymmetry in Particle Physics and Cosmology. arXiv:hep-ph/9402266v5. 1994.
- [13] *Klämke, G.*: Higgs plus 2 Jet Produktion in Gluonfusion. Dissertation, Fakultät für Physik – Universität Karlsruhe, 2008.
- [14] *Wikipedia*: Artikel zu „Higgsmechanismus“. <http://de.wikipedia.org/wiki/Higgs-Mechanismus>.
- [15] *ALEPH, DELPHI, L3 and OPAL Collaborations; The LEP Working Group for Higgs-Boson Searches.*: Search for the Standard Model Higgs-Boson at LEP. arXiv:hep-ex/0306033v1, 2003.

- [16] *Polonsky, N.*: Supersymmetry: Structure and Phenomena – Extensions of the Standard Model. Springer Verlag, 2001.
- [17] *Hollik, W.; Rückl, R.; Wess, J.*: Phenomenological Aspects of Supersymmetry. Springer Verlag , 1992.
- [18] *Amaldi, U.; de Boer, W.; Fürstenau, H.*: Comparison of grand unified theories with electroweak and strong coupling constants measured at LEP. Physics Letters B, Volume 260, numer 3,4, 1991.
- [19] *Klapdor-Kleingrothaus, H.V.; Zuber K.*: Teilchenastrophysik. Teubner-Studienbücher Stuttgart, 1997.
- [20] *Kalka, H.; Soff, G.*: Supersymmetrie. Teubner-Studienbücher Stuttgart, 1997.
- [21] *Kazakov, D.I.*: Beyond the Standard Model – In Search of Supersymmetry. arXiv:hep-ph/0012288v2, 2001.
- [22] *Peskin, M.E.*: Supersymmetry in Elementary Particle Physics. arXiv:hep-ph/0801.1928v1, 2008.
- [23] *Martin, S.P.*: A Supersymmetry Primer. arXiv:hep-ph/9709356v4, 2006.
- [24] *Kuroda, M.*: Complete Lagrangian of MSSM. arXiv:hep-ph/9902340v3, Japan. 2005.
- [25] *Kazakov, D.I.*: Beyond the Standard Model. arXiv:hep-ph/0411064v1, 2004.
- [26] *De Boer, W.*: In Search of Supersymmetry. arXiv:hep-ph/9705309v2, 1997.
- [27] *Murayama, H.*: Supersymmetry Phenomenology. arXiv:hep-ph/0002232v2, 2000.
- [28] *Simonsen, I.*: A Review of Minimal Supersymmetric Elektro Weak Theory. arXiv:hep-ph/9506369v2, 1995.
- [29] *Drees, M.*: An Introduction to Supersymmetry. arXiv:hep-ph/9402266v5, 1994.
- [30] *Kubocz, M.*: Higgsproduction via Gluon Fusion in Association with two or three Jets in Supersymmetric Models, Ph.D. thesis. Fakultät für Physik - Universität Karlsruhe, 2009.
- [31] *Haber, H.E.*: Introductory low-Energy Supersymmetry. arXiv:hep-ph/9306207v1, 1993.

- [32] *Komatsu, E.; Dunkley, J. Nolta, M.R.; Bennett, C.L.; Gold, B.; et al. : Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation.* arXiv:0803.0547v2 [astro-ph], 2008.
- [33] *Miller, J.P.; de Rafael, E.; Roberts, B.L.: Muon (g-2): Experiment and Theory.* arXiv:hep-ph/0703049v2, 2007.
- [34] *Misiak, M.; Poradzinski, M.: Completing the Calculation of BLM corrections to  $B \rightarrow X_s \gamma$ .* arXiv:1009.5685v1 [hep-ph], 2010.
- [35] *Alok, A.k.; Datta, A.; Dighe, A.; Duraisamy, M.; Ghosh, D.; London, D.: NewPhysics in  $b \rightarrow s \mu^+ \mu^-$ : CP-Violating Observables.* arXiv:1103.5344v2 [hep-ph], 2011.
- [36] *Lenz, A.; Nierste, C. et al.[CKMfitter Group].: Anatomy of New Physics in B-B mixing.* arXiv:1008.1593v2 [hep-ph], 2010.
- [37] *CDMS Collaboration: A Search for WIMPs with the First Five-Tower Data from CDMS.* arXiv:0802.3530v2 [astro-ph] 2008, Phys.Rev.Lett.102:011301,2009.
- [38] *The CMS Collaboration: Search for Supersymmetry in pp Collisions at 7 TeV in Events with Jets and Missing Transverse Energy.* arXiv:1101.1628v2 [hep-ex] Physics Letters B, Volume 698, Issue 3, 11 April 2011, Pages 196-218.
- [39] *The CMS Collaboration: CMS Physics Analysis Summary – Further Interpretation of the Search for Supersymmetry based on  $\alpha_T$ ,* 2011.
- [40] *Bergström, L.; Goobar, A.: Cosmology and Particle Astrophysics.* Springer Verlag, Second Edition. 2006.
- [41] *Schneider, P.: Einführung in die extragalaktische Astronomie und Kosmologie.* Springer Verlag, 2008.
- [42] *Lahav, O.; Liddle, A.R.: The Cosmological Parameters.* PDG – particle data group, Review 2010, 2009.
- [43] *Kunz, S.: Indirekte Suche nach Dunkler Materie mit dem Fermi Gamma-ray Space Telescope.* Diplomarbeit, Fakultät für Physik, KIT, 2011.
- [44] *Weber, M.: Reconstruction of the Galactic Dark Matter Density from Astronomical Observations and Diffuse Galactic Gamma Rays.* Ph.D. Thesis, 2010.

- [45] *Garrett, K; Duda, G.*: Dark Matter: A Primer. arXiv:1006.2483v2 [hep-ph], 2011.
- [46] *Sander, C.*: Interpretation des Überschusses in diffuser galaktischer Gamma-Strahlung oberhalb 1 GeV als Annihilationssignal Dunkler Materie. Ph.D. Thesis, Fakultät für Physik – Universität Karlsruhe (TH), 2005.
- [47] *Pukhov, A.; Semenov, A.; Bélanger, G. ; Boudjema, F. ; Cottrant, A.*: Relic Density of dark Matter in mSUGRA and non-universal SUGRA. arXiv:hep-ph/0412309v1, 2004.
- [48] *De Boer, W; Beskidt, C.; Kazakov, D.I.; Zukov, V.; Ziebarth, E.*: A multi-step Fitting Approach to the allowed Parameter Space of the Constrained Minimal Supersymmetric Model and Comparison with first LHC Results. To be published 2011.
- [49] *Skript*: Vorbereitung zum Hardware Praktikum am FZK. Fakultät für Physik – Universität Karlsruhe WS 2008/09 [http://www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~jwagner/WS0809/docs/Vorbereitung\\_HardwarePraktikum\\_FZK.pdf](http://www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~jwagner/WS0809/docs/Vorbereitung_HardwarePraktikum_FZK.pdf)
- [50] *The CMS Collaboration*: The Compact Muon Solenoid technical proposal. CERN-LHCC-94-38, <http://cdsweb.cern.ch/record/290969>, 1994.
- [51] *Wikipedia*: Artikel zu “Compact Muon Solenoid”. [http://de.wikipedia.org/wiki/Compact\\_Muon\\_Solenoid](http://de.wikipedia.org/wiki/Compact_Muon_Solenoid).
- [52] *The CMS Collaboration*: The CMS experiment at the CERN LHC. Journal of Instrumentation, JINST 3 S08004 doi: 10.1088/1748-0221/3/08/S08004, 2008.
- [53] *Milnik, M.*: Measurement of the Lifetime Difference and CP-Violating Phase in  $B_s \rightarrow J/\Psi \Phi$  Decays. Ph.D. Thesis, Fakultät für Physik – Universität Karlsruhe (TH), 2007.
- [54] *Quast, G.*: Skript: Anpassen von Funktionen an Messdaten – Funktionsanpassung mit der  $\chi^2$ -Methode. Fakultät für Physik – Universität Karlsruhe (TH), 2010.
- [55] *Cowan, G.*: Statistics. particle data group, Review 2010, 2009.
- [56] *Pukhov, A.*: CalcHEP – Calculator for High Energy Physics – a package for evaluation of Feynman diagrams, integration over multi-particle phase space and event generation. User’s manual for version 2.3.5, based on hep-ph/9908288, 2005.



- 
- [57] *James, Fred; Winkler, M.*: MINUIT User's Guide. CERN, Geneva, 2004.
  - [58] *Ziebarth, E.*: Ph.D. Thesis, to be published in 2011.
  - [59] *Bélanger, G. Boudjema, F., Pukhov, A. Semenov, A.*: micrOMEGAs: a tool for dark matter studies. arXiv:1005.4133v1 [hep-ph], 2010.
  - [60] Persönliche Korrespondenz mit A. Pukhov. Das Verzweigungsverhältnis von  $b \rightarrow s \gamma$  erhiebt aufgrund von NNLO QCD Beiträge eine Verschiebung von  $0.45e-4$
  - [61] *Djouadi, A; Kneur, J.L.; Moutaka, G.*: a Fortran Code for the Supersymmetric and Higgs Particle Spektrum in the MSSM. arXiv:hep-ph/0211331v2, 2005.
  - [62] *Beskidt, C.; de Boer, W.; Hanisch, T.; Ziebarth, E.; Zhukov, V.; Kazakov, D.I.*: Constraints on Supersymmetry from Relic Density compared with future Higgs Searches at the LHC. arXiv:1008.2150v2 [hep-ph] 2010.
  - [63] <http://cosmologist.info/cosmomc/readme.html#Kosowsky>
  - [64] *Bélanger, G.; Boudjema, F.; Pukhov, A.; Semenov, A.*: micrOMEGAs : Version 1.3. arXiv:hep-ph/0405253v1, 2004.
  - [65] *Misiak, M. et al.*: Estimate of  $BR(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$  at  $O(\alpha_s)$ . arXiv:hep-ph/0609232v2, 2006.
  - [66] *Wick, M.; Altmannshofer, W.*: A Reconsideration of the  $b \rightarrow s \gamma$  Decay in the Minimal Flavor Violating MSSM. arxiv:0810.2874v1 [hep-ph], 2008.
  - [67] *Carena, M.; Garcia, D.; Nierste, U.; Wagner, C.E.M.*:  $b \rightarrow s \gamma$  and supersymmetry with large  $\tan\beta$ . arXiv:hep-ph/0010003v2, 2000.
  - [68] *Simioni, E.E.*: New physics from rare beauty. Ph.D. Thesis CERN-THESIS-2010-031, 2010.
  - [69] *Arbrowitt, R.; Dutta, B.; Kamon, T.; Tanaka, M.*: Detection of  $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$  at the Tevatron Run II and Constraints on the SUSY Parameter Space. arXiv:hep-ph/0203069v2 2002.
  - [70] *Buchmueller, O.; A. Ellis, J.R. et al.*: Likelihood Functions for Supersymmetric Observables in Frequentist Analyses of the CMSSM NUHM1. arXiv::0907.5568v1 [hep-ph] 2009.
  - [71] *Zhang, Zhiqing.*: Muon g-2: a mini review. arXiv:0801.4905v1 [hep-ph], 2008.

- [72] *Cheung, K.; Kong, O.C.W.; Lee, J.S.*: Electric and anomalous magnetic dipole moments of the muon in the MSSM. arXiv:0904.4352v1 [hep-ph], 2009.
- [73] *Lopez, J.L.; Nanopoulos, D.V.; Wang, Xu*: Large  $(g-2)_\mu$  in  $SU(5) \times U(1)$  Supergravity Models. arXiv:hep-ph/9308336v1, 1993.
- [74] *Czarnecki, A.; Marciano, W.J.*: The Muon Anomalous Magnetic Moment: A Harbinger For “New Physics”. arXiv:hep-ph/0102122v2, 2001.
- [75] *Barlow, R.*: Experimental status of  $B \rightarrow \tau \nu$  and  $B \rightarrow l \nu(\gamma)$ . arXiv:1102.1267v1 [hep-ex], 2011.
- [76] *Kowalewski, R.; Mannel, T.*: Determination of  $V_{cb}$  and  $V_{ub}$ . PDG – particle data group, Review 2010, 2010.
- [77] *PDG: Particle Data Group.* pdgLive – Interactive Listings. <http://pdglive.lbl.gov/listings1.brl?quickin=Y>.
- [78] *Isidori, G.; Paradisi, P.*: Hints of large  $\tan\beta$  in flavor physics. arxiv:hep-ph/0605012v3, 2007.
- [79] *PDG: Particle Data Group.* pdgLive – Interactive Listings. <http://pdglive.lbl.gov/popupblockdata.brl?nodein=S041S57&inscript=Y&sizein=1&dclumpin0=A>
- [80] Speculations about the higgs boson mass, A Quantum Diaries Survivor: <http://dorigo.wordpress.com/> (2006).
- [81] *Trotta, R.; Roszkowski, L.; Feroz, F.; Hobson, M.; Ruiz de Austri, R.*: The impact of priors and observables on parameter inferences in the Constrained MSSM. arXiv:0809.3792v2 [hep-ph], 2008.
- [82] *Akrami, Y.; Scott, P.; Edsjö, J.; Conrad, J.; Bergström, L.*: A Profile Likelihood Analysis of the Constrained MSSM with Genetic Algorithms. arXiv:0910.3950v3, 2010.
- [83] *Shan, Chung-Lin*: Determining Ratios of WIMP-Nucleon Cross Sections from Direct Dark Matter Detection Data. arXiv:1103.04821v1 [hep-ph], 2011.
- [84] *Bélanger, G.; Boudjema, F.; Pukhov, A.; Semenov, A.*: Dark matter direct detection rate in a generic model with micrOMEGAS\_2.2. arXiv:0803.2360v2, 2008.
- [85] *Majumdar, D.*: Direct detection for Kaluza-Klein dark matter. Physical Review D 67, 095010, DOI: 10.1103/PhysRevD.67.095010, 2003.

- 
- [86] *Ohki, H.; Fukaya, H.; Hashimoto, S.; Kaneko, T.; Matsufuru, H.; Noaki, J.; Onogi, T.; Shintani, E.; Yamada, N.*: Nucleon sigma term and strange quark content from lattice QCD with exact chiral symmetry. arXiv:0806.4744v3 [hep-lat], 2008.
- [87] *Cao, J.; Hikasa, K.; Wang, W.; Yang, J.M.; Yu, X.*: Constraints of dark matter direct detection experiments on the MSSM and implications for LHC Higgs searches. arXiv:1006.4811v2 [hep-ph], 2010.
- [88] *Hahn, T.; Heinemeyer, S.; Maltoni, F.; Weiglein, G. Willenbrock, S.*: SM and MSSM Higgs Boson Production Cross Sections at the Tevatron and the LHC. arXiv:hep-ph/0607308v2, 2006.
- [89] *Djouadi, A.*: The Anatomy of Electro-Weak Symmetry Breaking – Tome II: The Higgs bosons in the Minimal Supersymmetric Model. arXiv:hep-ph/050317v2, 2005.
- [90] Persönliche Korrespondenz mit Prof. D.I. Kazakov.
- [91] *Graziano, A; CMS Collaboration*: Prospects for Higgs searches in CMS with  $1\text{fb}^{-1}$  at 7 TeV and CMS performance validation with early data. DOI: <http://dx.doi.org/10.3204/DESY-PROC-2010-01/200>, 2010.



## 10 Anhang

### 10.1 Mathematischer Rahmen

#### 10.1.1 Pauli-Matrizen

Die Pauli-Matrizen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  bilden eine Basis der hermiteschen, spurfreien 2x2 Matrizen. Dabei stellen sie die Wirkung der Drehimpulsoperatoren auf Spin 1/2 Zustände dar [10]:

$$S_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i \text{ mit } i \in \{1,2,3\}. \quad (10.1)$$

Die Pauli-Matrizen sind von der Form:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10.2)$$

#### 10.1.2 Gell-Mann-Matrizen

Die Gell-Mann-Matrizen stellen eine mögliche Darstellung der infinitesimalen Generatoren der Speziellen Unitären Gruppen SU(3) dar. Diese Gruppe hat acht hermitesche Generatoren  $F_i$  mit  $i = 1 \dots 8$ . Die Generatoren erfüllen die Vertauschungsrelation [10]

$$[F_i, F_j] = i f_{ijk} T_k, \quad (10.3)$$

wobei  $f_{ijk}$  als Strukturkonstanten bezeichnet werden.

Die Generatoren sind über die Beziehung

$$F_i = \frac{1}{2} \lambda_i \quad (10.4)$$

mit den nachfolgenden 3x3 Matrizen verknüpft

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.5)$$

### 10.1.3 Gamma Matrizen

Die Gamma-Matrizen oder auch Dirac-Matrizen sind 4x4 Matrizen, die der Dirac-Algebra genügen [10]. Die einfachste Darstellung dieser Matrizen, kann mit Hilfe der Pauli-Matrizen erreicht werden:

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \gamma^k = \beta \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } k=1,2,3. \quad (10.6)$$

Zudem ergibt sich die Matrix  $\gamma^5$  als Produkt der einzelnen Gamma-Matrizen:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.7)$$

## 10.2 Fehlerfunktion

Die Fehlerfunktion (engl. error function) ist in der Theorie der speziellen Funktionen über das Integral

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^z \exp(-\tau^2) d\tau \quad (z \in \mathbb{C}) \quad (10.8)$$

definiert. Angewendet wird die Fehlerfunktion in der Statistik und der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Die Fehlerfunktion ist durch keine geschlossene Funktion darstellbar und muss numerisch bestimmt werden. Einige Werte können der nachfolgenden Tabelle entnommen werden:

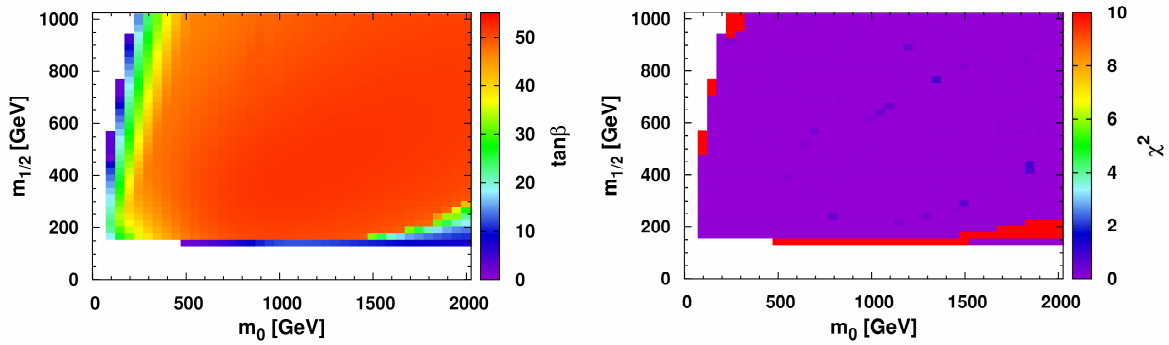
x	erf(x)
0,00	0,00000
0,10	0,11246
0,40	0,42839
0,70	0,67780
1,20	0,91031
1,40	0,95229
2,10	0,99702

Tabelle 10.1: Wertetabelle der Fehlerfunktion erf(x).

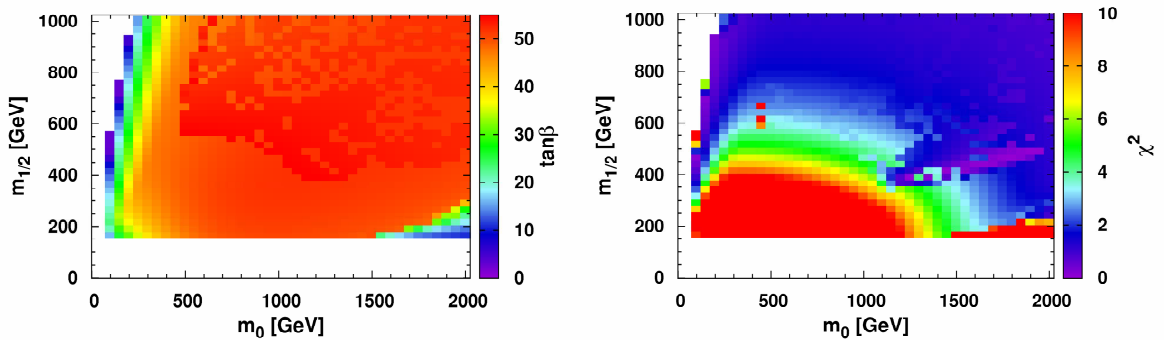
## 10.3 Eindimensionale Scans

Im Folgenden sind die mehrstufigen Optimierungen verschiedener Einschränkungen dargestellt. Für die Optimierung wurde nur  $\tan(\beta)$  variiert.  $A_0$  nimmt dabei den Wert Null an. Die Überschrift der Abbildungen gibt die verwendete Einschränkung wider.

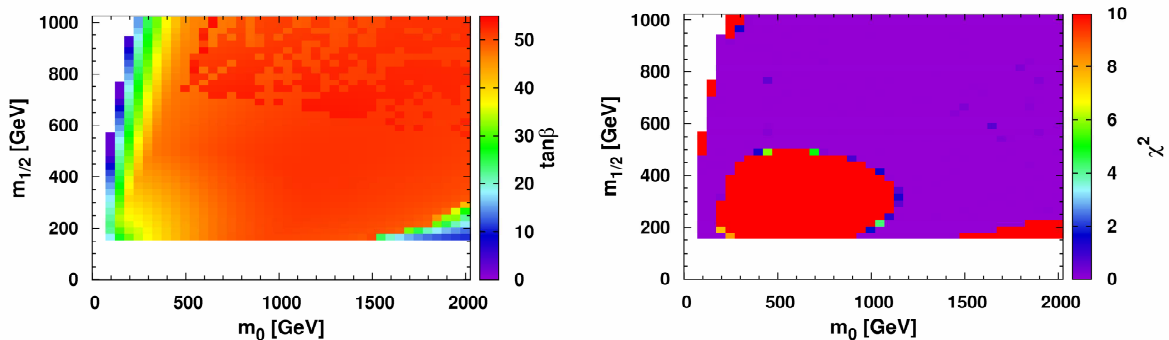
### 10.3.1 Relic Density $\Omega h^2$



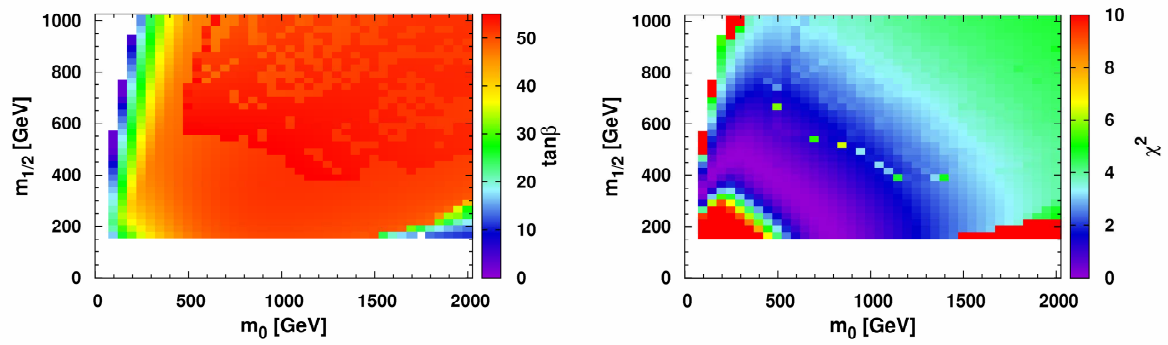
### 10.3.2 $\text{BR}(b \rightarrow s \gamma)$ und $\Omega h^2$



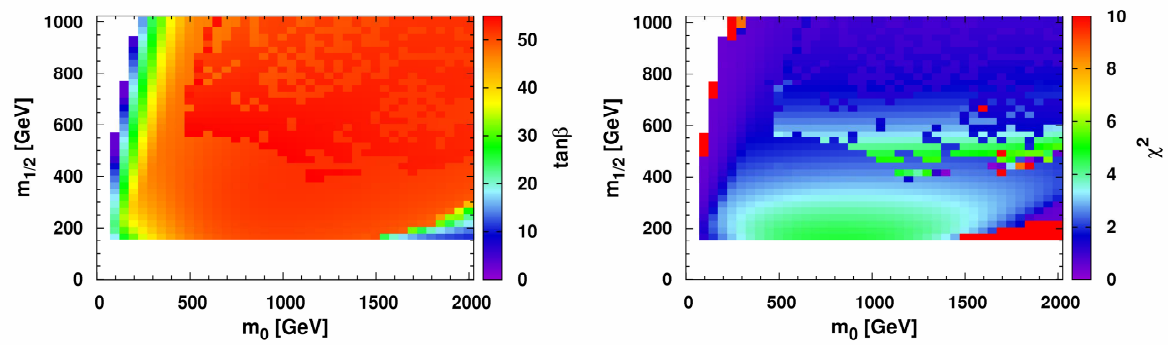
### 10.3.3 $\text{BR}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ und $\Omega h^2$



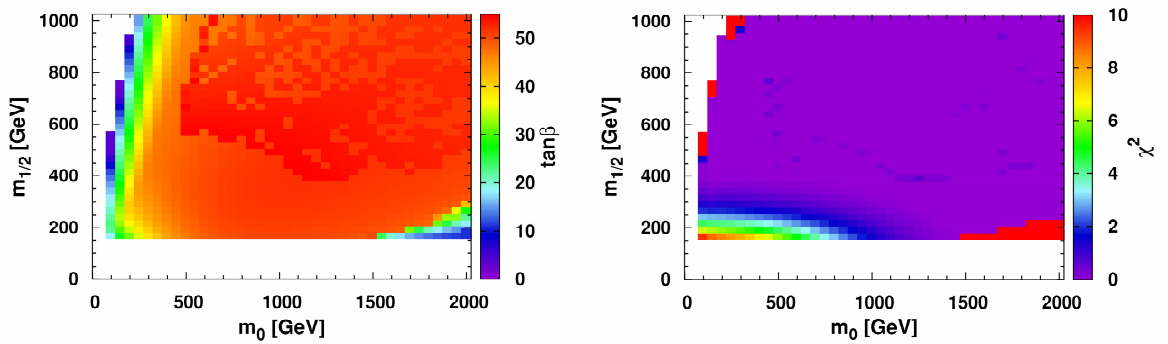
### 10.3.4 Anomales magnetisches Moment des Myons und $\Omega h^2$



### 10.3.5 $BR^{\text{EXP}}(B \rightarrow \tau \nu) / BR^{\text{SM}}(B \rightarrow \tau \nu)$ und $\Omega h^2$

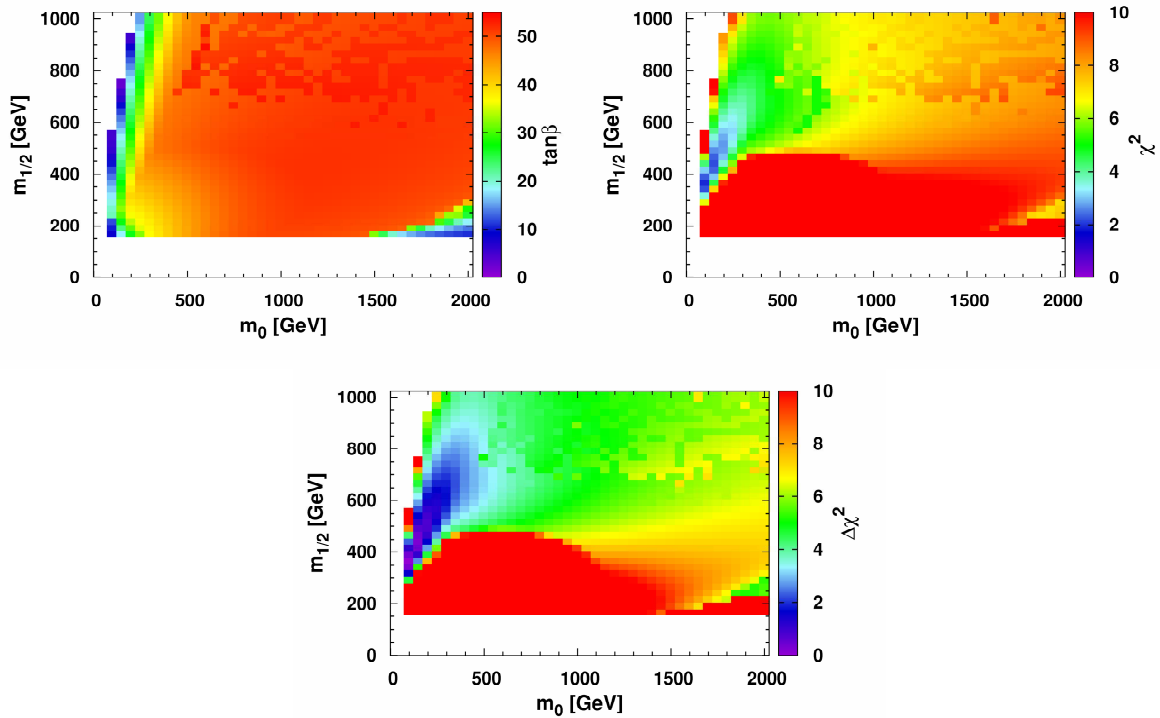


### 10.3.6 Higgsmasse $m_h$ und $\Omega h^2$



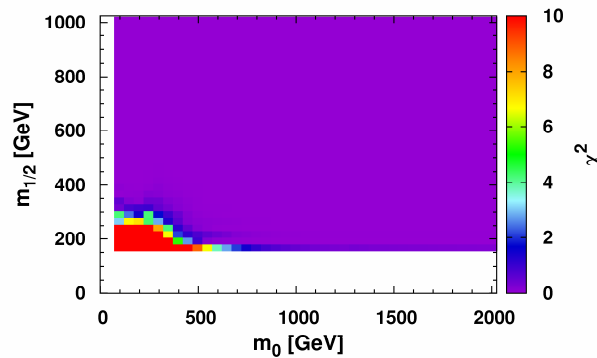


### 10.3.7 Kombination aller Einschränkungen

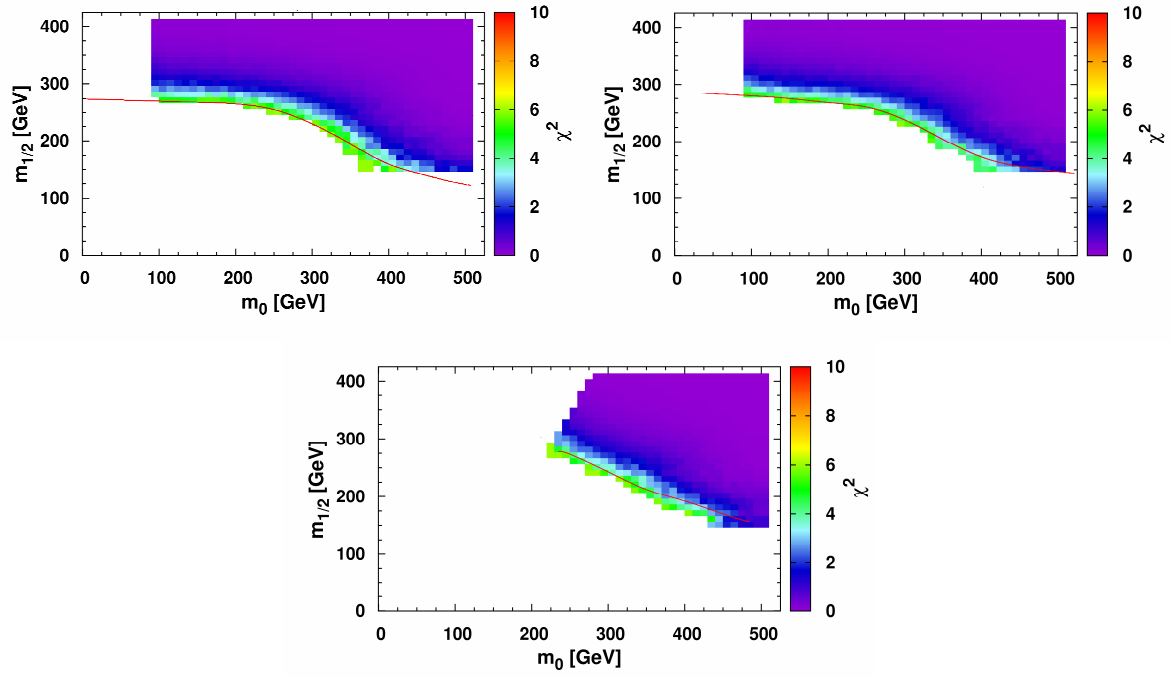


### 10.4 Ausschlussgrenzen LHC

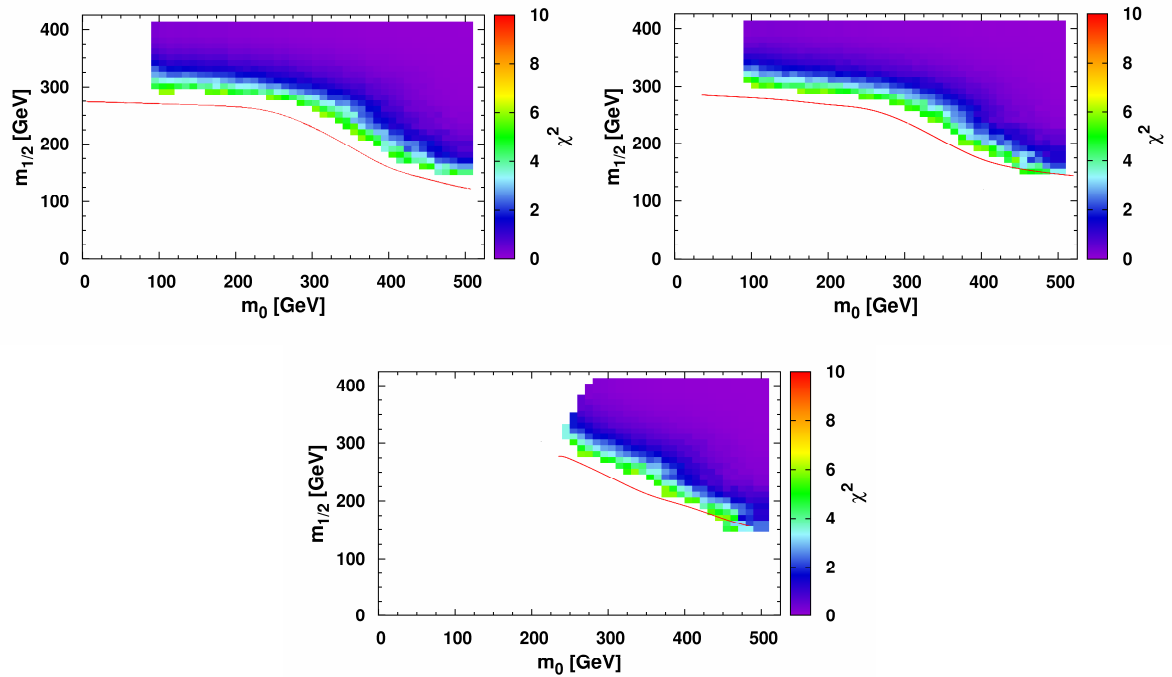
Zunächst wird der  $\chi^2$ -Beitrag des LHC Limits dargestellt, wobei hierfür  $\sigma_{\text{LHC}} = 4,5$  gewählt wurde.



Nachfolgend sind  $m_0$ - $m_{1/2}$  Ausschnitte gezeigt, die für unterschiedliche Werte von  $\sigma_{\text{LHC}}$  erstellt wurden. Zunächst der berechnete Wert  $\sigma_{\text{LHC}} = 5,48$ . Es wird gezeigt, dass für den berechneten Fehler einige Punkte unterhalb der Kurve erlaubt sind. Dies sollte jedoch nicht eintreten, weshalb  $\sigma_{\text{LHC}}$  verändert wurde. Die Punkte oberhalb von  $\Delta\chi^2 > 5,99$  sind in diesen Abbildungen weggeschnitten.



Als weiteres Beispiel ist hier  $\sigma_{\text{LHC}} = 3$  aufgeführt. Es wird gezeigt, dass in diesem Fall der ausgeschlossene Bereich oberhalb der LHC Grenze liegt, so dass ein zu großer Bereich ausgeschlossen wird. Die Wahl für  $\sigma_{\text{LHC}} = 4,5$  hat die beste Übereinstimmung mit den gezeigten Kurven erbracht.



## 10.5 Massenspektren

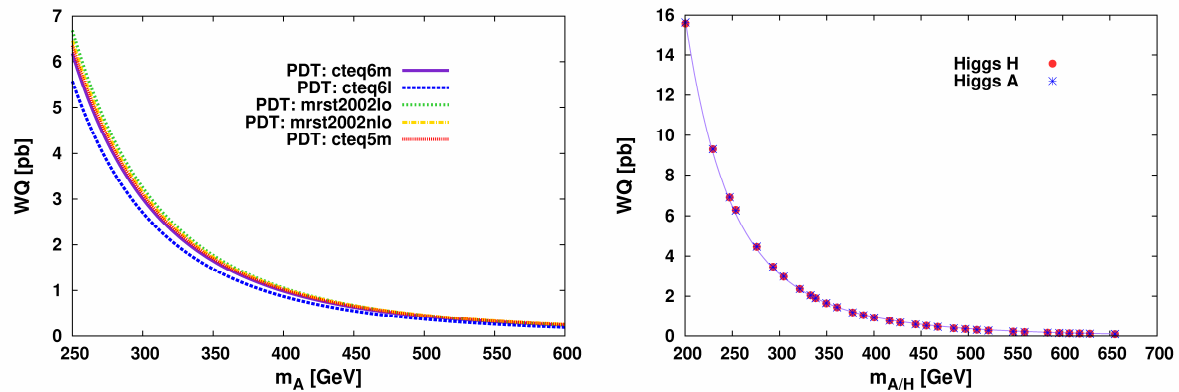
Im Folgenden sind die Massenspektren der ausgewählten Punkte aus Kapitel 7.3 tabelliert. Die Angaben der Massen sind in der Einheit GeV.

	Punkt 1	Punkt 2	Punkt 3	Punkt 4
$\tilde{e}_R$	183,1	519,1	1925,2	1549,3
$\tilde{e}_L$	287,9	712,1	1980,3	1548,3
$\tilde{\mu}_R$	183,1	519,1	1925,2	1549,3
$\tilde{\mu}_L$	287,9	712,1	1980,3	1548,3
$\tilde{\tau}_1$	169,7	386,8	1365,1	1136,7
$\tilde{\tau}_2$	291,7	689,2	1736,8	1359,5
$\tilde{\nu}_e$	277,1	707,9	1978,8	1546,3
$\tilde{\nu}_\mu$	277,1	707,9	1978,8	1546,3
$\tilde{\nu}_\tau$	275,6	671,5	1733,7	1357,1
$\tilde{u}_R$	826,9	1761,7	2529,1	1584,1
$\tilde{u}_L$	855,5	1829,1	2570,5	1581,4
$\tilde{d}_R$	824,5	1753,8	2524,5	1585,2
$\tilde{d}_L$	859,1	1830,8	2571,7	1582,1
$\tilde{c}_R$	826,9	1761,7	2529,1	1584,1
$\tilde{c}_L$	855,5	1829,1	2570,5	1581,4
$\tilde{s}_R$	824,5	1753,8	2524,5	1585,2
$\tilde{s}_L$	859,1	1830,8	2571,7	1583,4
$\tilde{b}_1$	791,0	1620,8	2060,9	1092,6
$\tilde{b}_2$	8,22,5	1677,6	2138,5	1204,6
$\tilde{t}_1$	659,9	1456,0	1840,9	956,9
$\tilde{t}_2$	841,0	1672,0	2071,3	1096,8
$\tilde{\chi}_1^0$	161,8	382,9	388,0	72,1
$\tilde{\chi}_2^0$	302,9	718,4	718,1	119,6
$\tilde{\chi}_3^0$	501,9	973,0	832,6	169,9
$\tilde{\chi}_4^0$	518,1	984,9	859,8	226,2
$\tilde{\chi}_1^\pm$	302,6	718,4	717,9	113,2
$\tilde{\chi}_2^\pm$	518,2	984,9	859,5	226,6
$\tilde{g}$	932,7	1977,8	2075,2	575,0

## 10.6 Vergleich der PDF und Massen

Die rechte Abbildung zeigt den Unterschied des Verlaufs des WQ über die Masse des pseudoskalaren Higgs für unterschiedliche Partonverteilungsfunktionen. Der Wert für  $\tan(\beta)$  beträgt hier 30. Zusätzlich wurden Schnitte der Pseudorapidität  $\eta < 2,5$  und des transversalen Impuls  $p_t > 20$  GeV eines b-Quarks durchgeführt.

In der rechten Abbildung wird gezeigt, dass der Verlauf des WQ für die unterschiedlichen Higgs Bosonen A und H annähernd als gleich anzusehen ist. Es wurde erneut  $\tan(\beta) = 30$  gewählt, diesmal jedoch keine Schnitte durchgeführt.



# Versicherung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und unter aller wesentlichen Hilfsmittel und Referenzen angefertigt habe.

---

Conny Beskidt

Karlsruhe, 16.05.2011



# Danksagung

Nachfolgend möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Besonderer Dank gilt dabei:

- Prof. Dr. Wim de Boer für die Möglichkeit innerhalb dieses interessanten Themengebiets zu arbeiten und die umfassende Betreuung während der Bearbeitung.
- Prof. Dr. Günter Quast für die Übernahme des Korreferats.
- Dipl.-Phys. Eva Ziebarth für die enge thematische Zusammenarbeit und den Ratschläge in physikalischen und technischen Fragen
- Prof. Dr. D.I. Kazakov für die aufschlussreichen Diskussionen und Anregungen während der Zusammenarbeit.
- Dr. Roman Koch, Dr. Markus Weber, Simon Kunz und Elfriede Beskidt für das Korrekturlesen dieser Arbeit.
- Dr. Markus Weber, Dipl.-Phys. Eva Ziebarth und Simon Kunz für das gute Arbeitsklima in 9-21.
- der gesamten Arbeitsgruppe für die vielen unterhaltsamen Mittagspausen.
- meiner Familie für die anhaltende Unterstützung während meines Studiums ohne die der erfolgreiche Abschluss nicht möglich gewesen wäre.