

## Studies on $N_f = 2$ QCD Phase Structure via the Instanton Model

Seung-il NAM\*

Department of Physics, Pukyong National University, Busan 48513, Korea

(Received 5 December 2016 : revised 2 January 2017 : accepted 4 January 2017)

In this work, we investigate the phase diagram of quantum chromodynamics (QCD) for  $N_f = 2$  as a function of the temperature and the density by employing the liquid-instanton model. For this purpose, we take into account two cases, one with zero and one with finite current-quark masses. The instanton parameters, such as the average (anti)instanton size  $\bar{\rho}$  and the inter-(anti)instanton distance  $\bar{R}$ , are given as functions of the temperature  $T$  via the trivial-holonomy caloron solution. From the numerical calculations, we confirm that the phase-transition patterns follow the appropriate universal class, *i.e.*, the second-order phase transition for the massless quarks and the crossover for the finite-mass quarks. The critical-end point (CEP) are found to be (187,92) MeV and (232,72) MeV for the massless and the finite-mass quarks. Our results are compared with other theoretical results from the Nambu—Jona-Lasinio model (NJL).

PACS numbers: 11.10.Wx, 11.30.Rd, 12.38.-t, 12.38.Mh

Keywords: QCD phase diagram, Liquid instanton model, Finite temperature, Caloron solution

## 인스턴톤 모형을 이용한 $N_f = 2$ 양자색소역학 위상구조 연구

남승일\*

부경대학교 물리학과, 부산 48513, 대한민국

(2016년 12월 5일 받음, 2017년 1월 2일 수정본 받음, 2017년 1월 4일 게재 확정)

본 연구에서는 인스턴톤 진공을 이용한 유효 모형인 액체-인스턴톤 모형 (liquid-instanton model, LIM) 을 이용하여  $N_f = 2$  에서의 양자색소역학적 위상구조를 온도 ( $T$ ) 와 쿼크 화학 퍼텐셜 ( $\mu$ ) 의 함수로서 연구하고자 한다. 이를 위해 쿼크의 전류 질량 (current-quark mass,  $m$ ) 이 0인 경우와 유한한 경우  $m_q = 5$  MeV를 고려한다. 인스턴톤의 평균 크기 ( $\bar{\rho}$ ), 인스턴톤간 평균 거리 ( $\bar{R}$ ) 등의 모형 매개변수들은 자명한 홀로노미의 칼로론해 (trivial-caloron solution) 를 이용하여 계산되었다. 수치계산으로부터 쿼크 전류 질량에 의한 정확한 상전이 (phase transition) 패턴이 확인되었으며, 상전이의 변화가 일어나는 임계 종말 점 (critical-end point, CEP) 은 쿼크 전류 질량  $m = (0,5)$  MeV에 대해 각각 (187,92) MeV과 (232,72) MeV로 주어진다. 또한 본 이론 계산 결과를 다른 유효 모형인 남부-요나-라시니오 (Nambu-Jona-Lasinio, NJL) 모형의 결과와 비교하였다.

PACS numbers: 11.10.Wx, 11.30.Rd, 12.38.-t, 12.38.Mh

Keywords: QCD 위상도, 액체-인스턴톤 모형, 유한온도, 칼로론해

\*E-mail: [sinam@pknu.ac.kr](mailto:sinam@pknu.ac.kr)



This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

## I. 서문

강상호작용의 제1원리인 양자색소역학 (quantum chromodynamics, QCD) 은 오랜 시간에 걸쳐 다양한 문제를 해결해 왔으며, 쿼크와 글루온으로 이루어진 QCD 물질을 이해하는데 필수 불가결한 요소이다. 특히 유한 온도-밀도에서의 QCD의 위상구조는 자명하지 않은 (nontrivial) 진공의 구조에 의존하며, 중요한 대칭성과 그들의 파괴를 나타내는 질서인자 (order parameter) 에 의해 결정된다 [1, 2]. QCD와 몬테카를로법을 이용한 수치 시뮬레이션 방법인 격자 QCD (lattice QCD, LQCD) 의 발전을 통해, 보다 제1원리에 가까운 이론적 계산이 가능하게 되었으며, QCD의 위상구조 연구에 커다란 도움이 되고 있다 [3-6]. 그러나, 유한 온도 QCD에 대하여 우수한 결과를 도출하고 있는 상황과 달리, 부호 문제 (sign problem) 로 알려진 LQCD의 내재적 문제에 의해 유한 밀도에서의 시뮬레이션은 아직도 완전하지 못하다. 따라서 이러한 문제를 가지지 않는 유효모형을 이용한 유한 온도-밀도의 연구는 차후 LQCD의 발전과 함께 중요한 이론적 예측에 큰 기여를 할 수 있다.

본 연구에서는 QCD 진공의 이론적 접근법 중 하나인, 인스턴톤 (instanton) 을 이용하여, 유한 온도-밀도 QCD의 위상구조를 이해하고자 한다. 인스턴톤은 유클리디안 공간에서의 정의된 양-밀즈 (Yang-Mills) 방정식의 자체 이중성 (self-dual) 조건을 만족하는, 비섭동론적인 글루온의 반고전적 해이다. 인스턴톤과 쿼크와의 상호작용 역시 다양한 연구를 통해 이루어져 왔다 [7-10]. 특히 비자명한 쿼크-인스턴톤간의 상호작용에 의해 도출되는 쿼크의 운동량 전달 (momentum transfer) 에 의존하는 역학적 질량은 이론 계산에서 나오는 발산문제를 해결하는 형상인자 (form factor) 의 역할을 하게 되며, 이는 자의적인 컷오프를 도입하는 일반적인 유효모형과의 큰 차이이다. 현재까지 인스턴톤 진공을 이용한 다양한 연구가 수행되어져 왔으며 [11,12], 기본적으로 두가지의 모형 매개변수, 즉 인스턴톤의 평균 크기 ( $\bar{\rho}$ ) 와 인스턴톤간의 평균 거리 ( $\bar{R}$ ) 에 의해 성공적으로 기술되어져 왔다.

QCD의 손지기 대칭성의 자발적 붕괴 (spontaneous chiral symmetry breaking, SCSB) 의 위상구조를 연구하기 위해, 이들 매개변수를 자명한 홀로노미의 칼로론해 (caloron solution) 를 사용하여 온도의 함수로 계산한다. 칼로론해는 인스턴톤의 유한 온도에서의 표현 중 하나이다 [13-15]. 액체 인스턴톤 모형 (liquid-instanton model, LIM) 에서 얻어진 쿼크-인스턴톤 유효 작용 (effective action) 을 마츠바라 (Matsubara) 공식을 이용하여, 유한 온도 및 밀도의 범함수로서 표현하고, 이를 손지기 극한 (chiral limit) 과 유한한 쿼크 전류 질량 (current mass) 의 경우에 대하여 QCD 위

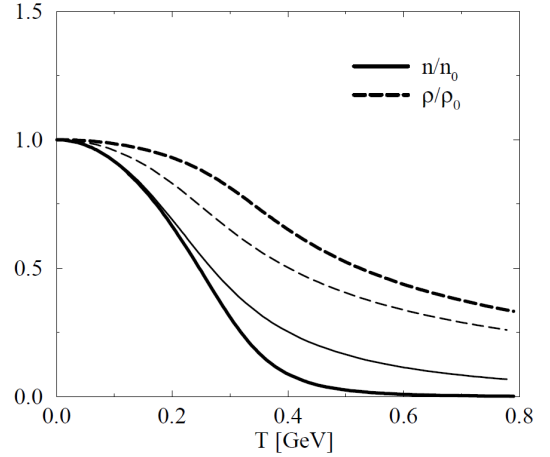


Fig. 1.  $\rho/\rho_0$  and  $n/n_0$  as functions of  $T$ .

상구조를 계산한다. 본 계산을 통해, 쿼크 전류 질량에 대해 정확한 보편 분류 (universality class) 의 상전이 구조를 보여주었으며, QCD 위상구조에서 중요한 예측치 중 하나인 임계 종말점 (critical-end point, CEP) [16] 은 쿼크 전류 질량  $m = (0,5)$  MeV에 대해 각각, (187,92) MeV, (232,72) MeV로 계산되어졌다. LIM의 결과를 또 다른 유효 모형인 남부-요나-라시니오 (Nambu-Jona-Lasinio, NJL) 모형 [17, 18]의 결과와 비교하였을 때, 저온-고밀도 영역에서 의미있는 차이를 보였으며, 이는 본 모형에서 사용된 온도 의존 매개변수들에 의한 효과이다.

본 논문은 먼저 이론 계산을 위한 이론적 틀을 소개하며, 수치 계산 결과 및 이에 대한 논의를 수행한다. 간단한 요약 및 차후 연구 방향에 대해 마지막으로 논한다.

## II. 계산을 위한 이론적 틀

유한 온도에서의 인스턴톤, 즉 칼로론은 쿼크가둠 (quark confinement) 의 유무에 따라 자명하지 않은 (non-trivial) 또는 자명한 (trivial) 칼로론으로 나눈다 [13-15]. 본 연구에서는 보다 간단한 칼로론해인 자명한 홀로노미의 칼로론해를 사용하여 연구를 진행하였다. 따라서 LIM의 중요한 두가지 매개변수인 (반) 인스턴톤의 평균 크기와 (반) 인스턴톤간 거리를 이 칼로론해를 사용하여 온도의 함수로서 구한다 [10]. 이는 다른 유효모형의 매개변수들이 단순히 상수로 주어짐과 비교하여, 본 모형의 특징이라고 할 수 있다. 먼저 임의의  $N_c$  와  $N_f$  에 대해 인스턴톤 분포 함수를 가우시안 억제항 (Gaussian suppression factor) 을 사용하여 온도 ( $T$ ) 와 인스턴톤 크기 ( $\rho$ ) 의 함수로서 구한다 [8]:

$$d(\rho, T) = \underbrace{C_{N_c} \Lambda_{\text{RS}}^b}_{c} \hat{\beta}^{N_c} \rho^{b-5} \exp[-(A_{N_c} T^2 + \bar{\beta} \gamma n \bar{\rho}^2) \rho^2]. \quad (1)$$

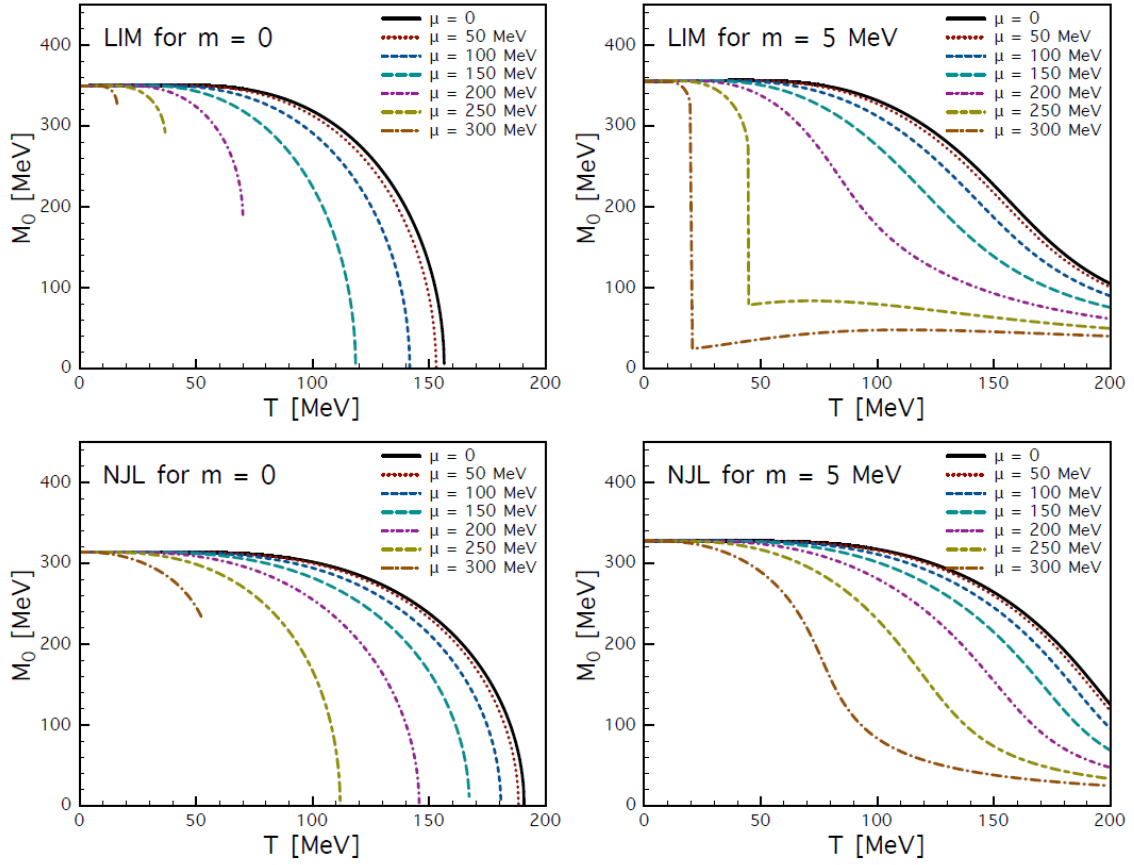


Fig. 2. (Color online) QCD phase diagrams from LIM and NJL as functions of  $T$  for different  $\mu$  values. The current-quark masses are given by  $m = 0$  and  $m = 5$  MeV.

이 분포함수를 사용함에 있어서, 우리는  $CP$  불변인 QCD 진공을 고려하였으며, 인스턴톤과 반인스턴톤에 대해 동일한 형태를 가짐을 가정하였다. 여기서 인스턴톤 수밀도 (number density)  $n \equiv 1/\bar{R}^4$ 와 인스턴톤의 크기  $\bar{\rho}$ 는 암묵적으로 온도의 함수로 둔다. 편의를 위해 다양한 상수의 곱을  $C$ 로 나타내었으며, 다음과 같이 정의된다:

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta} &= -b \ln[\Lambda_{RS} \rho_{cut}], \\
 \bar{\beta} &= -b \ln[\Lambda_{RS} \langle R \rangle], \\
 C_{N_c} &= \frac{4.60 e^{-1.68 \alpha_{RS} N_c}}{\pi^2 (N_c - 2)! (N_c - 1)!}, \\
 A_{N_c} &= \frac{1}{3} \left[ \frac{11}{6} N_c - 1 \right] \pi^2, \\
 \gamma &= \frac{27}{4} \left[ \frac{N_c}{N_c^2 - 1} \right] \pi^2, \\
 b &= \frac{11 N_c - 2 N_f}{3}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

여기서 원루프 역전하(one-loop inverse charge)인  $\hat{\beta}$ 와  $\bar{\beta}$ 는 현상론적인 컷오프인  $\rho_{cut}$ 와  $\langle R \rangle \approx \bar{R}$ 를 사용하여 계산되었다.  $\Lambda_{RS}$ 는 루프계산에서의 재규격화 상수에 해당하며,

$V_3$ 는 3차원 유클리디안 공간에서의 부피를 나타낸다. 이 분포 함수를 이용하여, 인스턴톤의 평균 크기를 다음과 같이 계산할 수 있다 [9]:

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho}^2(T) &= \frac{\int d\rho \rho^2 d(\rho, T)}{\int d\rho d(\rho, T)} \\
 &= \frac{[A_{N_c}^2 T^4 + 4\nu \bar{\beta} \gamma n]^{\frac{1}{2}} - A_{N_c} T^2}{2\bar{\beta} \gamma n}, \quad (3)
 \end{aligned}$$

여기서  $\nu$ 는  $(b-4)/2$ 로 주어진다. 인스턴톤 평균 크기는 다음의 점근적 성질을 보임을 쉽게 보일 수 있다 [9]:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \bar{\rho}^2(T) = \sqrt{\frac{\nu}{\bar{\beta} \gamma n}}, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{\rho}^2(T) = \frac{\nu}{A_{N_c} T^2}. \quad (4)$$

여기서 두번째 관계식은 고온에서 정확한 척도-온도(scale-temperature) 행동을 보여준다:  $1/\bar{\rho} \approx \Lambda \propto T$ . Eq. (3)를 Eq. (1)에 대입하면, 분포 함수는 다음과 같이 적을 수 있다:

$$\begin{aligned}
 d(\rho, T) &= C \rho^{b-5} \exp[-\mathcal{F}(T) \rho^2], \\
 \mathcal{F}(T) &= \frac{1}{2} A_{N_c} T^2 + \left[ \frac{1}{4} A_{N_c}^2 T^4 + \nu \bar{\beta} \gamma n \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5)
 \end{aligned}$$

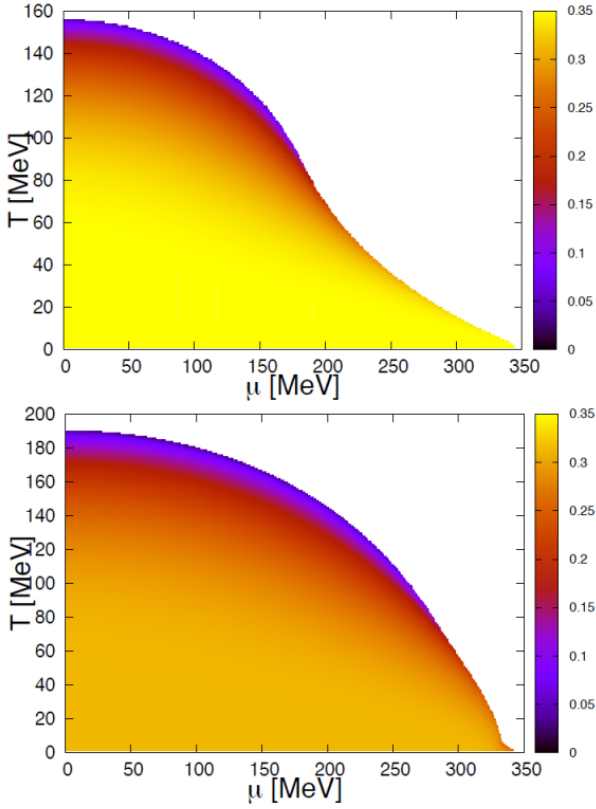


Fig. 3. (Color online) QCD phase diagrams from LIM (up) and NJL (down) as functions of  $T$  and  $\mu$ . The current-quark mass is given by  $m = 0$ .

인스턴톤 수밀도  $n$ 는 자체 모순 없는 방법으로 다음과 같이 계산되어 진다:

$$n^{\frac{1}{\nu}} \mathcal{F}(T) = [C \Gamma(\nu)]^{\frac{1}{\nu}}. \quad (6)$$

여기서 편의를 위해  $NT/V_3$ 를  $n$ 으로 두었으며,  $\Gamma(\nu)$ 는  $\Gamma$ -함수를 나타낸다. 매개변수인  $C$ 와  $\bar{\beta}$ 는 Eq. (3) 과 Eq. (6)을 이용하여 계산할 수 있다. 여기서 우리는  $n \approx (200 \text{ MeV})^4$  과  $\bar{\rho} \approx (600 \text{ MeV})^{-1}$ 를 이용하였고, 다음과 같은 값을 얻

는다:  $C \approx 9.81 \times 10^{-4}$  and  $\bar{\beta} \approx 9.19$ . 마지막으로 온도의 의존하는 쿼크의 유효 질량을 계산하기 위해, 규격화된 분포함수가 필요하며 [10], 이는 다음과 같이 정의되어 진다:

$$\begin{aligned} d_N(\rho, T) &= \frac{d(\rho, T)}{\int d\rho d(\rho, T)} \\ &= \frac{\rho^{b-5} \mathcal{F}^\nu(T) \exp[-\mathcal{F}(T)\rho^2]}{\Gamma(\nu)}. \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 아래첨자  $N$ 은 규격화되었음을 나타낸다. 문제를 간단히 하기 위해, 큰  $N_c$ 를 고려하면, 규격화 분포함수는 쉽게 델타 함수로 근사되어 진다:

$$\lim_{N_c \rightarrow \infty} d_N(\rho, T) = \delta[\rho - \bar{\rho}(T)]. \quad (8)$$

이들 이론적 분포함수를 사용하여 두가지 모형 매개변수인  $\bar{\rho}$ 와  $\bar{R}$ 을 온도의 함수로서 계산하였으며, 수치계산 결과를 Fig. 3에 나타내었다. Fig. 3에서 아래첨자 0은  $T = 0$ 에서의 값을 나타낸다. 그림에서 보여지는 바와 같이 두 매개변수 모두 온도가 증가함에 따라 부드럽게 감소하는 것을 알 수 있다. 즉, 온도가 올라감에 의해 (반)인스턴톤의 크기가 줄어들며, 인스턴톤 간 거리는 증가함을 알 수 있다. 이러한 결과는 온도증가와 함께, 인스턴톤의 효과가 작아지는 것을 나타내며, 비섭동론적 효과가 줄어드는 것을 의미한다. 결과적으로 손지기 대칭성의 자발적 붕괴의 부분적 회복을 나타낸다고 해석할 수 있다.

QCD 위상구조를 계산하기 위해선 먼저 열역학적 포텐셜을 정의해야하며, 이를 위해 진공에서 구해진 LIM의 유효 작용 또는 분배함수를 고려한다 [19]. 이를 마츠바라 공식을 사용하여, 온도와 밀도의 함수로 나타낸다. 이에 대한 자세한 과정은 저자의 또 다른 연구인 [10]에 자세히 나와있다. 최종적으로 유한 온도-밀도에서의 열역학 포텐셜은 LIM에서 다음과 같이 구해진다:

$$\Omega_{\text{LIM}}[\mu, T] = C + n \ln \lambda - 2N_c N_f \int_0^\infty \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{E_+ + E_-}{2} + T \ln \left[ \left(1 + e^{-E_-/T}\right) \left(1 + e^{-E_+/T}\right) \right] \right\}. \quad (9)$$

여기서  $C$ 와  $\lambda$ 는 차후의 논의에 무관한 상수, 그리고 변분 매개변수에 해당한다. 밀도, 즉 쿼크의 화학 포텐셜  $\mu$ 에 의존하는 쿼크의 에너지는 다음과 같이 정의된다:

$$E_\pm \equiv E \pm \mu = \sqrt{\vec{k}^2 + (m + M)^2} \pm \mu. \quad (10)$$

$\vec{k}$ 과  $M$ 은 쿼크의 3차원 운동량 벡터, 쿼크의 동역학적 질량을 나타내며 다음과 같이 정의되어 진다:

$$M = M(|\vec{k}|^2) = M_0 \left[ \frac{2}{2 + \bar{\rho}^2 |\vec{k}|^2} \right]^3, \quad (11)$$

Table 1. CEP values for various cases.

|     | $m = 0$ MeV      | $m = 5$ MeV      |
|-----|------------------|------------------|
| LIM | (187,92,155) MeV | (232,72,158) MeV |
| NJL | (275,72,191) MeV | (339,58,202) MeV |

동역학적 쿼크 질량의 자세한 유도과정은 [10]를 참조한다.  $\bar{M}$ 을  $m + M$ 으로 정의하고, Eq. (9)의 열역학 포텐셜을 변분 매개변수인  $\lambda$ 에 대해 미분하면, 다음과 같은 간격 방정식(gap equation)을 얻는다:

$$\frac{\partial \Omega_{\text{LIM}}}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow n - 2N_c \int_0^\infty \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{M \bar{M}}{E} \left[ 1 - \frac{e^{-E_-/T}}{1 + e^{-E_-/T}} - \frac{e^{-E_+/T}}{1 + e^{-E_+/T}} \right] = 0. \quad (12)$$

인스탄톤 모형에서 수밀도는 다음과 같이 매개변수화 하는 것이 가능하며 [10],

$$n = \frac{C_0 N_c M_0^2}{\pi^2 \bar{\rho}^2}, \quad (13)$$

매개변수  $C_0$ 는  $(T, \mu) = 0$ 에서  $M_0 = 350$  MeV이 되도록 결정하며, 수치적으로  $C_0 \approx 0.15$ 로 구해진다. 여기서  $M_0 = 350$  MeV는 진공에서 LIM을 이용하여 다양한 물리량을 계산할 경우 사용되어지는 값이다 [11]. Fig. 3로부터, 수밀도  $n$ 과 Eq. (11)에서 보여지는 바와 같이 컷오프의 역할을 하는  $\bar{\rho}$ 가 온도의 함수로 주어지며, Eq. (12)을 만족하도록 쿼크 유효 질량  $M_0$ 를 온도와 밀도 함수로 구하는 것이 가능하며, 이는 SCSB에 대한 질서 인자(order parameter)가 되며, 이를 통해 QCD 상전이 다이어그램을 얻는 것이 가능하다.

### III. 수치결과와 논의

본 장에서는 앞에서 구축한 이론적 틀을 이용하여, SCSB에 대한 상전이 다이어그램을 온도와 밀도(쿼크 화학 포텐셜)의 함수로서 구한다. 먼저 쿼크 전류 질량에 대해 두가지의 경우를 고려하여, 손지기 극한의  $m = 0$ 인 경우와 작지만 유한한 질량  $m = (m_u + m_d)/2 \approx 5$  MeV의 경우를 살펴본다. 먼저 Fig. 2의 윗 두 패널에 LIM의 간격 방정식으로 부터 구한  $M_0$ 를 온도와 밀도의 함수로  $m = 0$  (왼편)과  $m = 5$  MeV (오른편)에 대하여 나타내었다. 먼저  $m = 0$ 에 대해,  $\mu = 0$ 인 경우, SCSB의 2차 상전이(second-order phase transition)이 나타난다. 그러나 밀도가 서서히 증가함에 따라, 상전이 구조는 1차 상전리로 옮겨가며, 이는

일반적인 보편 분류 상전이 패턴과 잘 일치한다. 이때 상전이의 변화가 나타나는 CEP는  $(\mu, T) \approx (187, 92)$  MeV로 주어진다. 오른쪽 패널에 나타난 바와 같이, 유한한 쿼크 전류 질량을 고려할 경우, 작은  $\mu$ 에 대해 교차(crossover) 상전이 패턴을 보여주며, 밀도가 커짐에 따라 1차 상전리로 변해간다.  $m = 0$ 인 경우와 비교하여, 더 큰 밀도  $\mu = (200 \sim 250)$  MeV에서 CEP가 나타남을 알 수 있다. 비록 정성적인 수치에서는 차이를 보이나, 정량적인 상전이 구조는 다양한 이론 계산에서 보여지는 일반적인 상황과 일치한다 [17, 18]. 비교를 위하여, NJL모형에서 구해진 상전이 다이어그램을  $m = 0$ (왼편)과  $m = 5$  MeV(오른편)에 대하여 Fig. 2의 아래 두 패널에 나타내었다. 전반적인 상전이 구조는 LIM과 잘 일치함을 보인다. 다만, 상전이가 일어나는 온도, 밀도 및 CEP의 위치 등 정성적인 부분에서 상당한 차이를 보임을 알 수 있다. 이러한 차이는 두 모형의 가장 큰 차이인 모형 매개변수의 온도 의존성에 기인하며, 매개변수의 온도 및 밀도 의존성의 중요성을 보여준다고 하겠다. 각 상황에 따른 CEP값과  $\mu = 0$ 에서의 상전이 온도  $T_c$ 의 이론결과는 Table 1에 나와있다.

Fig. 3에는 LIM(왼편)과 NJL(오른편)의 상전이 다이어그램을  $m = 0$ 에 대하여 나타내었다. 그림에서 보여지는 바와 같이,  $(\mu, T) = (250, 80)$  MeV 부근에서 LIM과 NJL에서의 차이가 커짐을 알 수 있다. 이는 LIM에서 사용된 온도에 의존하는 모형 매개변수에 의한 효과이다.

### IV. 결론

본 연구에서는  $N_f = 2$  양자색소역학(QCD)에서의 손지기 대칭성의 자발적 붕괴(SBCS)에 대한 상전이를 온도와 밀도의 함수로서 연구하였다. 이를 위하여 인스탄톤과 쿼크의 상호작용을 기반으로 하는 액체-인스탄톤 모형(LIM)을 도입하여, 열역학 포텐셜을 정의하고, 이를 통해 간격 방정식(gap equation)을 유도하였다. SCSB의 질서인자로서 쿼크의 유효질량( $M_0$ )를 이용하였다. 본 연구에서 얻어진 중요한 결과는 다음과 같다.

1. LIM에서 얻어진 SCSB의 상전이 패턴은 쿼크 전류 질량에 따라, Ising 모형의 universality class 패턴을 따른다는 것을 확인하였다. 즉,  $m = 0$ 인 경우, 낮은 밀도에서는 2차 상전이를 따르다가, 밀도가 커짐에 따라 1차 상전리로 변화한다. 반면, 유한한 쿼크 전류 질량에 대하여, 교차 상전이에서 1차 상전리로 변화한다.

2. 두 경우, 즉  $m = (0, 5)$  MeV에 대해  $\mu = 0$ 에서의 각각의 상전이 온도는  $T_c = (155, 158)$  MeV로 구해진다. 이는 NJL모형의 결과와 비교하여 약 25% 정도 작은 값이

며, 최근의 격자 QCD에서 얻어진 값과 유사함을 알 수 있다 [6].

3. CEP 값은 LIM과 NJL에 대하여,  $m = 0$ 에 대하여 (187, 92) MeV와 (275, 72) MeV로 주어지면,  $m = 5$  MeV에 대하여, (232, 72) MeV와 (339, 58) MeV로 주어진다.

위의 결과를 통하여, 인스턴톤 지능을 이용한 QCD 상전이의 구조는 일반적인 국소 NJL 모형과 크게 다름을 알 수 있다. 이는 인스턴톤 진공에서의 쿼크간 상호작용이 비국소적이라는 점에 크게 기인한다. 특히 낮은 온도에서의 유한 밀도에 대한 상전이가 두 모형에서 큰 차이를 보임을 알 수 있다. 이 역시 국소적 상호작용, 또는 운동량에 의존하는 쿼크의 유효 질량에 의한 효과로 이해될 수 있으며 보다 엄밀한 해석이 진행중이다. 또한 QCD 상전이에 대한 외부 전자기장의 효과 역시 중요한 주제이면, 관련 연구가 진행중이다.

## 감사의 글

본 연구는 부경대학교 자율창의학술연구비(2015)에 의하여 수행되어졌습니다.

## REFERENCES

- [1] G. S. Bali, F. Bruckmann, G. Endrodi, Z. Fodor and S. D. Katz *et al.*, *J. High Energy Phys.* **1202**, 044 (2012).
- [2] F. Karsch, D. Kharzeev and K. Tuchin, *Phys. Lett. B* **663**, 217 (2008).
- [3] Y. Maezawa, S. Aoki, S. Ejiri, T. Hatsuda and N. Ishii *et al.*, *J. Phys. G* **34**, S651 (2007).
- [4] A. Ali Khan *et al.* [CP-PACS Collaboration], *Phys. Rev. D* **63**, 034502 (2001).
- [5] Y. Aoki, Z. Fodor, S. D. Katz and K. K. Szabo, *Phys. Lett. B* **643**, 46 (2006).
- [6] Y. Aoki, S. Borsanyi, S. Durr, Z. Fodor and S. D. Katz *et al.*, *J. High Energy Phys.* **0906**, 088 (2009).
- [7] E. V. Shuryak, *Nucl. Phys. B* **203**, 93 (1982).
- [8] D. Diakonov and A. D. Mirlin, *Phys. Lett. B* **203**, 299 (1988).
- [9] T. Schafer and E. V. Shuryak, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 323 (1998).
- [10] S.-i. Nam, *J. Phys. G* **37**, 075002 (2010).
- [11] S. i. Nam and C. W. Kao, *Phys. Rev. D* **83**, 096009 (2011).
- [12] S. i. Nam and C. W. Kao, *Phys. Rev. D* **82**, 096001 (2010).
- [13] T. C. Kraan and P. van Baal, *Nucl. Phys. B* **533**, 627 (1998).
- [14] K. M. Lee and C. h. Lu, *Phys. Rev. D* **58**, 025011 (1998).
- [15] B. J. Harrington and H. K. Shepard, *Nucl. Phys. B* **124**, 409 (1977).
- [16] A. Ayala, A. Bashir, J. J. Cobos-Martinez, S. Hernandez-Ortiz and A. Raya, *Nucl. Phys. B* **897**, 77 (2015).
- [17] D. P. Menezes, M. Benghi Pinto, S. S. Avancini and C. Providencia, *Phys. Rev. C* **80**, 065805 (2009).
- [18] J. K. Boomsma and D. Boer, *Phys. Rev. D* **81**, 074005 (2010).
- [19] D. Diakonov, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **51**, 173 (2003).