

Rescaled Perturbation Theory

早田 智也

(東京大学)

E-mail: t.hayata@nt.phys.s.u-tokyo.ac.jp

1. はじめに

量子多体系や場の量子論を用いて記述される系において、相互作用の大きさを特徴づけるパラメータ g が大きく変化する現象にしばしば出くわすことがある [1]. 例えば、冷却原子系における BEC-BCS クロスオーバーでは Feshbach 共鳴を用いて原子間の相互作用の大きさや符号を変化させることができ [2, 3], また高密度量子色力学におけるハドロン-クォーク間の相転移では化学ポテンシャルに依存して結合の強さ g が変化し [4], クォークグルーオンプラズマの臨界温度付近では温度に依存して g が変化する [5]. このような現象を扱うために、これまでに resummed perturbation, optimized perturbation, variational perturbation というような g についての摂動級数を足しなおす手法や、より収束性の優れた振る舞いをする級数に展開しなおす手法が研究されてきた [6, 7].

本研究では、弱結合展開をもとにした非摂動的手法を考え、一次元の量子系における非調和振動子や二重井戸型ポテンシャルに応用することで、弱結合から強結合まで広い領域の結合の強さ g においてこの手法が適用できることを確認した. 高次まで展開した摂動級数を足しなおすかわりに、最低次の摂動展開を g をスケールしながら繰り返しおこなうことで、ハミルトニアン固有値、固有ベクトルの g 依存性を同時に求めることができる. 基本となる微分方程式は g をカットオフスケールと読みかえれば厳密くりこみ群 [8] の方法と同様の形をしている.

2. 理論形式と応用

次のようなハミルトニアンで記述される量子系を考える.

$$\mathcal{H}(g) = \mathcal{H}_0 + g\mathcal{H}_{\text{int}} \quad , \quad (1)$$

ここで g は無次元の結合定数、 \mathcal{H}_0 は厳密に解けているものとする. 簡単のために \mathcal{H}_0 の固有ベクトルが縮退していないとする. δg が十分小さければ、 $E_n(g)$ と $|\psi_n(g)\rangle$ から $E_n(g + \delta g)$ と $|\psi_n(g + \delta g)\rangle$ を Rayleigh Schrödinger perturbation theory のリーディングを用いて計算することができる. ここで $\delta g \rightarrow 0$ の極限を取ると、次のような連立微分方程式が得られる.

$$\frac{d}{dg} E_i(g) = H_{\text{int}}^{ii}(g) \quad , \quad (2)$$

$$\frac{d}{dg} H_{\text{int}}^{ij}(g) = \sum_{i \neq k} \frac{H_{\text{int}}^{ik}(g) H_{\text{int}}^{kj}(g)}{E_i(g) - E_k(g)} + \sum_{j \neq k} \frac{H_{\text{int}}^{ik}(g) H_{\text{int}}^{kj}(g)}{E_j(g) - E_k(g)} \quad , \quad (3)$$

$$\frac{d}{dg} |\psi_i(g)\rangle = \sum_{i \neq k} \frac{H_{\text{int}}^{ki}(g)}{E_i(g) - E_k(g)} |\psi_k(g)\rangle \quad , \quad (4)$$

ここで $H_{\text{int}}^{ij}(g) = \langle \psi_i(g) | \mathcal{H}_{\text{int}} | \psi_j(g) \rangle$ である. 導出の過程に近似はなく、これらの微分方程式は厳密な結果である. また、状態ベクトルの規格化として $\langle \psi_i(0) | \psi_i(g) \rangle = \langle \psi_i(0) | \psi_i(0) \rangle = 1$ を採用することで、結合定数を動かす際にノルムが保存する、つまり $\frac{d}{dg} \langle \psi_i(g) | \psi_i(g) \rangle = 0$. この連立微分方程式は、初期条件 $E_n(0), H_{\text{int}}^{ij}(0), |\psi_n(0)\rangle$ があれば解くことができ、原理的には任意の大きさの g まで走らせることが可能である.

この手法を一次元の、量子非調和振動子 (AHO): $\mathcal{H}_{\text{AHO}}(g) = (1/2)p^2 + (1/2)x^2 + gx^4$ と、量子二重井戸 (DWP): $\mathcal{H}_{\text{DWP}}(g') = \mathcal{H}_{\text{AHO}}(1/2) - g'x^2$ に適用した. ここで、AHO から DWP に図 2 のように移り変わる

| g | E_0 | E_1 | E_2 |
|-----|------------|-----------|-----------|
| 0.5 | 0.69617582 | 2.3244064 | 4.3275250 |
| | 0.69617582 | 2.3244064 | 4.3275250 |
| 1.0 | 0.80377065 | 2.7378923 | 5.1792917 |
| | 0.80377065 | 2.7378923 | 5.1792915 |
| 5.0 | 1.2245874 | 4.2995081 | 8.3179758 |
| | 1.2245870 | 4.2995017 | 8.3179605 |
| 10 | 1.5049814 | 5.3216308 | 10.348359 |
| | 1.5049724 | 5.3216080 | 10.347056 |

表 1 Comparison of the lowest three eigenvalues of AHO. The upper numbers are obtained from the present method and the lower numbers from Ref. [10].

| g' | E_0 | E_1 |
|------|---------------|---------------|
| 0.50 | 0.53018104538 | 1.8998365150 |
| | 0.53018104524 | 1.8998365149 |
| 1.0 | 0.32882650295 | 1.4172681012 |
| | 0.32882650260 | 1.4172681011 |
| 5.5 | -10.316788242 | -10.316773352 |
| | -10.316788351 | -10.316773442 |
| 8.0 | -25.420689499 | -25.420692377 |
| | -25.420693642 | -25.420693642 |

表 2 Comparison of the lowest two eigenvalues for the DWP. The upper numbers are calculated by our method, while the lower numbers are taken from Ref. [11].

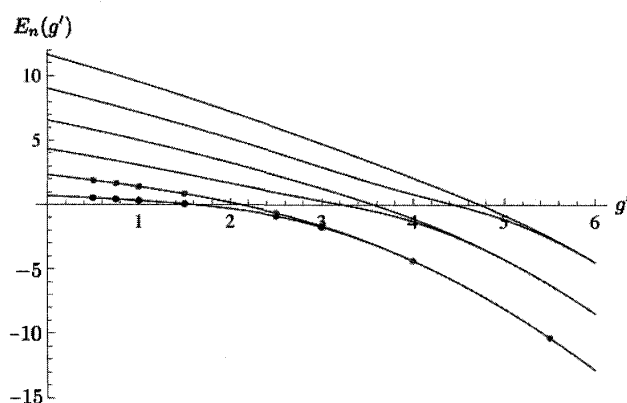


図 1 Lowest six energy eigenvalues for the DWP with $N = 50$. Filled circles are high accuracy numerical results given in Ref. [11].

ようパラメータ g' を定義した. どちらも結合の強さについての摂動展開が収束しないことがよく知られていて, 後者はさらに Borel 和がうまくいかない典型例である [6, 9].

初期条件として, 十分な精度が出せる 50 番目までの調和振動子を用意して, x^4 項のポテンシャルを徐々に入れているときのエネルギー固有値の g 依存性を, Ref. [10] において対角化の方法によって得られたものと一緒に表 1 に示した.

同様に初期条件として, 十分な精度になる 50 番目までの, ここでは非調和振動子: $\mathcal{H}_{\text{AHO}}(1/2)$ のエネルギー固有値, 波動関数を用意して, 徐々にポテンシャルを一重井戸から二重井戸に変えていったときのエネルギー固有値の g' 依存性を, Ref. [11] において対角化の方法によって得られたものと一緒に表 2 に示した. 図 1 は, 下から 6 番目までのエネルギー準位の g' 依存性をプロットしたものである. 図 1 では, g' が大きくなると, 偶数番目と奇数番目のエネルギー準位が下から順に縮退していくが, これは, 図 3 にあるように, 基底状態と第一励起状態の波動関数をプロットしてみると良く分かる. g' に依存して, 単一の振動子の固有状態から二つの (左右の) 振動子を重ね合わせた状態に移り変わっている.

3. まとめ

本研究では, 結合の強さ g についての微分方程式を立て, 可解なハミルトニアンを初期条件として解くことで, 非摂動的にエネルギー固有値と波動関数の g 依存性を求める手法を導入した. この g についての方程式を利用して, ポテンシャルの強さが時間依存する場合の時間依存した Schrödinger 方程式を解くことも可能であ

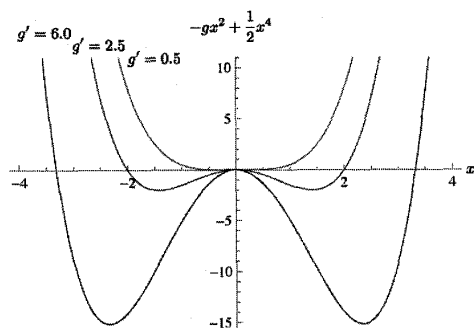


図2 Double-well potential $V(x) = -gx^2 + \frac{1}{2}x^4$ as a function of several values of $g' = g - 1/2$.

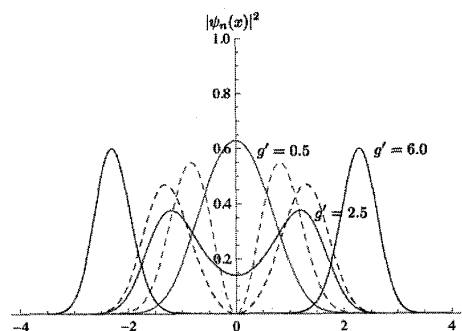


図3 Probability distributions for the lowest two states for the DWP with $N = 50$. The solid line is for the ground state and the dashed line is for the first excited state. The lighter gray line is for $g' = 0.5$, the gray line is for $g' = 2.5$ and the black line is for $g' = 6.0$.

る。摂動論が破綻することが良く知られている量子非調和振動子と量子二重井戸（後者は Borel 和が取れない）に応用することで、弱結合から強結合までの広い領域において、エネルギー固有値と波動関数について、この手法が機能することを確認した。

現在、この手法で用いたアイデアを量子多体系や場の量子論に拡張することを試みている。また、以上の内容の詳細は、Ref. [12] に発表した。

参考文献

- [1] G. Baym, in *RECENT PROGRESS IN MANY-BODY THEORIES, Proceedings of the 14th International Conference* (World Scientific, Spain, 2007), p. 65.
- [2] I. Bloch, J. Dalibard and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80** (2008), 885.
- [3] W. Ketterle and M. W. Zwierlein, in *Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, Varenna* (IOS Press, Amsterdam, 2008), arXiv:0801.2500.
- [4] K. Fukushima and T. Hatsuda, arXiv:1005.4814.
- [5] J. O. Andersen and M. Strickland, *Ann. of Phys.* **317** (2005), 281.
- [6] G. A. Arteca, F. M. Fernandez and E. A. Castro, *Large Order Perturbation Theory and Summation Methods in Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, Berlin, 1990).
- [7] J. Zinn-Justin, arXiv:1001.0675.
- [8] H. Sonoda, arXiv:0710.1662.
- [9] *Large Order Behavior of Perturbation Theory, Current Physics-Sources and Comments Vol. 7*, eds. J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1990).
- [10] S. N. Biswas, K. Datta, R. P. Saxena, P. K. Srivastava and V. S. Varma, *J. Math. Phys.* **14** (1973), 1190.
- [11] R. Balsa, M. Plo, J. G. Esteve and A. F. Pacheco, *Phys. Rev. D* **28** (1983), 1945.
- [12] T. Hayata, arXiv:1010.6125.