



Università di Pisa
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Dipartimento di Fisica

A.A. 2011/2012

**Studio di un modello di
Lagrangiana chirale efficace con
due *flavours* leggeri sopra la
transizione chirale**

Tesi di Laurea Magistrale
di
Alessandro Mordà

Relatore: Prof. Enrico Meggiolaro

Indice

Introduzione	vii
1 Le simmetrie chirali della QCD	1
1.1 La Lagrangiana della Cromo-Dinamica Quantistica	1
1.2 Simmetrie chirali della QCD	5
1.3 Simmetrie esatte e spontaneamente rotte	8
1.4 La simmetria $U(1)$ assiale	11
1.4.1 Il <i>problema $U(1)$</i> : la soluzione di 'tHooft	11
1.4.2 Meccanismo di Witten	13
1.5 I condensati chirali	16
1.5.1 Il condensato chirale	16
1.5.2 Restaurazione della simmetria chirale e $U(1)$ assiale a temperatura finita	17
1.5.3 Il condensato $U(1)$ assiale	21
2 Lagrangiane chirali efficaci	25
2.1 I gradi di libertà efficaci della QCD	25
2.2 La Lagrangiana chirale efficace di Witten-Di Vecchia-Veneziano <i>et al.</i>	26
2.3 La Lagrangiana chirale efficace con l'inclusione del condensato $U(1)$ assiale	32
2.4 Spettro di massa, condensato chirale e suscettività topologica per $T < T_{ch}$	35
2.4.1 Spettro di massa	35
2.4.2 Condensato chirale e suscettività topologica	41
2.5 Effetti del condensato $U(1)$ assiale sui decadimenti dei mesoni pseudoscalari	42
2.6 Spettro di massa, condensato chirale e suscettività topologica per $T > T_{ch}$ nel caso $L \geq 3$	43
2.6.1 Spettro di massa	43

2.6.2	Condensato chirale e suscettività topologica	47
3	Predizioni del modello nel caso di 2 <i>flavours</i> leggeri per	
	$T > T_{ch}$	51
3.1	La lagrangiana efficace per $T_{ch} < T < T_{U(1)}$	51
3.2	Studio del potenziale e dello spettro di massa per $T > T_{ch}$	54
3.2.1	Equazioni per i punti stazionari	55
3.2.2	Ordini successivi dello sviluppo	59
3.2.3	Effetti della anomalia	60
3.2.4	Matrice di massa quadra	60
3.3	Studio del potenziale e dello spettro di massa per $T_{\rho\pi} < T < T_{ch}$	66
3.3.1	Matrice di massa quadra	68
3.4	Condensato chirale e suscettività	
	topologica per $T > T_{ch}$	72
3.5	Generalizzazione del potenziale	75
3.5.1	Punti stazionari del potenziale	76
3.5.2	Derivate seconde e matrice di massa	76
4	Osservazioni conclusive	79
4.1	Confronto fra il caso $L = 2$ e il caso $L = 3$	79
4.2	Conclusioni e prospettive	84

Elenco delle tabelle

1.1	Famiglie dei quark	1
1.2	Canali mesonici per $L = 2$	20
2.1	Dipendenza del parametro ρ_π dalla temperatura	28
2.2	Dipendenza dei parametri ρ_π e ρ_X dalla temperatura	34

Elenco delle figure

1.1	Rappresentazione diagrammatica del contributo a $\mathcal{D}_{U(1)}$ dovuto al condensato chirale.	21
1.2	Rappresentazione diagrammatica del contributo a $\mathcal{D}_{U(1)}$ dovuto al condensato $U(1)$ assiale.	21
2.1	Diagramma corrispondente al termine $\mathcal{O}_1(m_i)$ nella (2.88) . . .	48
2.2	Diagramma per il termine $\mathcal{O}_2(\prod_{k \neq i} m_k)$	48
3.1	Rappresentazione grafica dell'equazione per $\bar{\alpha}$	67
4.1	Rappresentazione diagrammatica di $\mathcal{D}_{U(1)}$ per $T > T_{ch}$ in presenza del condensato $U(1)$ assiale per $L = 3$	81

Introduzione

Nel limite in cui le masse di L quarks vengono poste uguali a zero (i casi fisicamente rilevanti essendo $L = 2$ ed $L = 3$), la Lagrangiana della *Cromo-Dinamica Quantistica* (QCD) è invariante sotto le trasformazioni del gruppo chirale $U(1)_V \otimes U(1)_A \otimes SU(L)_V \otimes SU(L)_A$ dei campi di questi quarks. Tuttavia, la struttura dei multipletti adronici osservata in natura ci fa concludere che questa simmetria non sia realizzata in maniera esatta (ossia "alla Wigner-Weyl") ma sia spontaneamente rotta sul vuoto al suo sottogruppo vettoriale $U(1)_V \otimes SU(L)_V$.

E' ben noto che la rottura spontanea della simmetria $SU(L)$ chirale è dovuta alla "condensazione" sul vuoto di coppie quark-antiquark che rende non nullo il cosiddetto "condensato chirale" $\langle \bar{q}q \rangle$ [1, 2]. Tutto questo avviene a temperatura zero ($T = 0$). Tuttavia, ad una certa temperatura finita T_{ch} le fluttuazioni termiche sono tali da "rompere" tali coppie restaurando così la simmetria a temperature superiori a T_{ch} . Questa restaurazione della simmetria $SU(L)_V \otimes SU(L)_A$ è associata ad una transizione di fase detta "transizione chirale". I dati ottenuti mediante simulazioni numeriche della teoria su reticolo indicano per la temperatura di tale transizione un valore $T_{ch} \sim 150$ MeV che sembra coincidere (sebbene non sia ancora affatto chiaro il perchè) con quello della temperatura di deconfinamento T_d (si veda, ad esempio, [3])

Il comportamento della simmetria $U(1)$ assiale è, invece, di più difficile interpretazione [4, 5]. Sappiamo, infatti, che a livello quantistico essa è rotta da una *anomalia* [6, 7] la quale, tramite il valore non nullo della "suscettività topologica" (dovuto a effetti non perturbativi [8]), riveste un ruolo fondamentale nel "meccanismo di Witten-Veneziano" [9, 10] per giustificare la grande massa del mesone η' . Ora, in maniera analoga a quanto accade per la simmetria $SU(L)$ chirale, ci si aspetta che ad una certa temperatura $T_{U(1)}$ anche la simmetria $U(1)$ assiale sia (di fatto) restaurata. Tuttavia, non è ancora ben chiaro quale sia (se c'è!) il legame tra T_{ch} e $T_{U(1)}$. Alcuni risultati ottenuti su reticolo per le cosiddette "suscettività chiralì" (nel caso $L = 2$) [11, 12, 13, 14] sembrano indicare che $T_{U(1)} > T_{ch}$ (più precisamente: $T_{U(1)} \simeq 1.3T_{ch}$).

In [15, 16, 17, 18] (e anche in [19]) era già stata avanzata l’ipotesi che la simmetria $U(1)$ assiale potesse essere rottta indipendentemente dalla $SU(L)$ chirale ed era stato introdotto un nuovo *parametro d’ordine* $U(1)$ assiale. Questo è dato dal valore di aspettazione sul vuoto di un operatore a $2L$ fermioni dello stesso tipo di quello proposto inizialmente da Kobayashi e Maskawa [20], come vertice efficace in un’estensione del modello di Nambu–Jona-Lasinio, e successivamente introdotto da ’tHooft [5] nello studio della Lagrangiana efficace dei quark nel campo di un istantone.

Gli effetti di questo condensato sulla dinamica dei gradi di libertà mesonici possono essere descritti mediante una Lagrangiana efficace introdotta in [15, 17] (si veda anche la Ref.[21]), ottenuta generalizzando opportunamente quella proposta all’inizio degli anni ’80 da Witten, Di Vecchia, Veneziano *et al.* [22, 23, 24]. Facendo uso di questa Lagrangiana efficace si è cercato di determinare, negli ultimi anni, quali potessero essere le implicazioni a livello fenomenologico dell’esistenza del condensato $U(1)$ assiale. In particolare, sono state studiate le conseguenze sullo spettro di massa della teoria per $L = 3$, sia a temperatura zero, sia a temperatura finita [15, 17, 25]; sono stati studiati gli effetti sui decadimenti radiativi dei mesoni pseudoscalari, sia a temperatura zero che finita [26, 27]; infine, sono state studiate le conseguenze sui decadimenti forti degli stessi mesoni a $T = 0$ [25]. Un primo raffronto tra le predizioni teoriche e i dati sperimentali, relativi a $T = 0$, sembra effettivamente supportare l’ipotesi di un valore non nullo di questo condensato. Dati sperimentali relativi a $T \neq 0$ non sono ancora disponibili, sebbene si spera nel prossimo futuro di ricavare informazioni utili dai risultati degli esperimenti condotti con ioni pesanti.

Tuttavia, come si è detto, esistono dei risultati ottenuti su reticolo per la teoria con $L = 2$ *flavours* leggeri che sembrano indicare il persistere della simmetria $U(1)$ assiale *sopra* la transizione chirale, fino ad una temperatura critica $T_{U(1)} \simeq 1.3T_{ch}$, dove anche la simmetria $U(1)$ assiale viene (di fatto) restaurata. In questa tesi, pertanto, abbiamo voluto analizzare in dettaglio le predizioni del suddetto modello di Lagrangiana chirale efficace nel caso $L = 2$ per temperature sopra la transizione chirale ($T > T_{ch}$), per poi confrontare (almeno qualitativamente) tali predizioni con i risultati ottenuti su reticolo.

La tesi è così strutturata.

Nel **Capitolo 1**, dopo aver richiamato la Lagrangiana fondamentale della QCD e aver riassunto brevemente le ”tappe” che hanno portato alla sua formulazione, saranno analizzate nel dettaglio le sue proprietà di simmetria, ponendo particolare attenzione al problema della simmetria $U(1)$ assiale e alle soluzioni proposte da ’tHooft e Witten. Sarà quindi introdotto il condensato chirale $\langle\bar{q}q\rangle$ come parametro d’ordine per la simmetria $SU(L)$ chirale e sarà analizzata la struttura di fase della QCD in funzione della tempera-

tura. Infine si introdurrà il nuovo condensato $U(1)$ assiale e si richiamerà la sua "costruzione" dettagliata nel caso di maggiore interesse per noi, ossia per $L = 2$.

Il **Capitolo 2** si apre con una introduzione di carattere generale al metodo delle Lagrangiane chirali efficaci. Dopo aver illustrato le motivazioni che rendono necessario tale approccio per lo studio della dinamica dei mesoni, introdurremo dapprima la Lagrangiana proposta da Witten, Di Vecchia, Veneziano *et al.* [22, 23, 24], dopodichè presenteremo la Lagrangiana efficace modificata con l'inclusione del condensato $U(1)$ assiale [15, 17, 21]. Illustreremo brevemente i risultati ottenuti ad oggi dal modello in esame riguardo i) alle predizioni sullo spettro di massa, sul condensato chirale e sulla suscettività topologica per L generico a $T < T_{ch}$ [15, 17, 25], ii) ai decadimenti radiativi e forti dei mesoni pseudoscalari [26, 27, 25]. Il capitolo si conclude con l'esposizione dei risultati relativi allo spettro di massa, al condensato chirale e alla suscettività topologica per $L = 3$ a $T > T_{ch}$ inizialmente ricavati nella Ref.[15].

Nel **Capitolo 3** (che contiene il lavoro originale di questa tesi) saranno presentate in dettaglio le predizioni del modello riguardo alle masse dei mesoni, al condensato chirale e alla suscettività topologica nel caso di $L = 2$ *flavours* leggeri e per temperature maggiori di T_{ch} . Faremo vedere, in particolare, che il nostro modello prevede che stati mesonici dello stesso multipletto $SU(2)$ chirale hanno masse uguali per $T > T_{ch}$, mentre le masse di canali mesonici appartenenti a diversi multipletti $U(1)$ assiali si mantengono differenti al di sopra di T_{ch} , proprio come osservato nelle già citate simulazioni di reticolo. Inoltre determineremo le espressioni del condensato chirale e della suscettività topologica per $T > T_{ch}$ e verificheremo che esse soddisfano un'*identità di Ward* già ricavata e discussa in Ref. [16] (si veda anche [21]).

Il **Capitolo 4** contiene le osservazioni conclusive sui risultati ottenuti con una analisi delle differenze e delle analogie tra il caso $L = 2$ e $L = 3$ e un accenno al problema (ancora aperto) dell'ordine della transizione chirale.

Capitolo 1

Le simmetrie chirali della *QCD*

1.1 La Lagrangiana della Cromo-Dinamica Quantistica

La *QCD* (*Cromo-Dinamica Quantistica*) è la teoria quantistica di campo mediante la quale descriviamo le interazioni forti. È una teoria di *gauge* del gruppo (non abeliano) $SU(3)_c$ di *colore* le cui variabili dinamiche fondamentali sono i campi di materia dei quarks che si presentano nei sei savori (o "flavours") *up*, *down*, *strange*, *charm*, *bottom*, *top* e le cui caratteristiche sono riportate qui di seguito:

	u	d	s	c	b	t
<i>m</i>	$\sim 1.7 - 3.3 \text{ MeV}$	$\sim 4.1 - 5.8 \text{ MeV}$	$\sim 101^{+29}_{-21} \text{ MeV}$	$\sim 1.27^{+0.07}_{-0.09} \text{ GeV}$	$\sim 4.19^{+0.18}_{-0.06} \text{ GeV}$	$\sim 172.0^{+2.2}_{-0.4} \text{ GeV}$
<i>q</i>	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$

Tabella 1.1: Famiglie di quark. "*m*" è la massa [28] e "*q*" è la carica elettrica in unità di *e*.

Ognuno di questi savori esiste a sua volta in tre stati di carica di *colore*:

$$q_f = \begin{pmatrix} q_f^1 \\ q_f^2 \\ q_f^3 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

dove "*f*" si riferisce al *flavour* del quark. Le componenti dei campi q_f si trasformano sotto l'azione del gruppo di colore come la rappresentazione fondamentale di $SU(3)$, ossia come

$$q_f \rightarrow \mathcal{U}(x)q_f \quad (1.2)$$

con

$$\mathcal{U}(x) = e^{i\theta^a(x)T^a} \quad (1.3)$$

dove $\theta^a(x)$ sono i parametri (dipendenti dallo spazio-tempo) della trasformazione, mentre con T^a indichiamo gli 8 generatori nella rappresentazione fondamentale del gruppo $SU(3)$. Questi generatori soddisfano le regole di commutazione

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \quad (1.4)$$

dove i coefficienti f^{abc} sono detti *costanti di struttura* del gruppo. I generatori T^a sono inoltre normalizzati imponendo che

$$\text{Tr}[T^a T^b] = \frac{1}{2}\delta_{ab}. \quad (1.5)$$

Se poniamo

$$q = \begin{pmatrix} q_u \\ q_d \\ q_s \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

dove ogni elemento del vettore è dato da (1.1), la densità di Lagrangiana della teoria, è

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \bar{q}i\gamma_\mu D_\mu q - \bar{q}Mq. \quad (1.7)$$

dove si è indicato con M la matrice di massa dei quarks:

$$M = \begin{pmatrix} m_u & & & \\ & m_d & & \\ & & m_s & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

D_μ prende il nome di "derivata covariante" ed è definita come

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + igA_\mu \quad (1.9)$$

dove g è la costante di accoppiamento della QCD e A_μ è chiamato "campo (matriciale) di gauge" ed è definito come

$$A_\mu = \sum_{a=1}^8 A_\mu^a T^a \quad (1.10)$$

dove i campi A_μ^a sono detti "campi di gauge" o anche "campi gluonici". Il termine $F_{\mu\nu}$ prende il nome di "tensore di curvatura" (o anche di "intensità del campo") ed è definito come

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \quad (1.11)$$

che, ponendo

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.12)$$

può essere scritto nella forma

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a. \quad (1.13)$$

Perchè la Lagrangiana (1.7) sia invariante sotto le trasformazioni (1.2) sui q_f , i campi A_μ e $F_{\mu\nu}$ devono trasformarsi secondo la legge

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow \mathcal{U} A_\mu \mathcal{U}^\dagger + \frac{i}{g} (\partial_\mu \mathcal{U}) \mathcal{U}^\dagger \\ F_{\mu\nu} &\rightarrow \mathcal{U} F_{\mu\nu} \mathcal{U}^\dagger. \end{aligned} \quad (1.14)$$

In vista dei futuri sviluppi, scomponiamo la Lagrangiana (1.7) nella somma di due contributi

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{QCD}^0 + \delta \mathcal{L}_M \quad (1.15)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD}^0 &\equiv -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \bar{q} i \gamma_\mu D_\mu q \\ \delta \mathcal{L}_M &\equiv -\bar{q} M q \end{aligned} \quad (1.16)$$

Il "modello a quark" fu proposto all'inizio degli anni '60 da Gell-Mann e Ne'eman [29, 30]. Questi, analizzando la particolare struttura dei multipletti adronici, avanzarono l'ipotesi che la teoria delle interazioni forti possedesse una simmetria $SU(3)$ che generalizza quella $SU(2)$ di *isospin* proposta negli anni '20 da Heisenberg. Essi si resero conto, infatti, che per giustificare l'organizzazione in multipletti degli stati adronici allora noti era sufficiente assumere che questi fossero stati legati di più particelle di spin $\frac{1}{2}$ detti quark e presenti in tre "saporì" (o "flavours") *up*, *down* e *strange*. Gli adroni che comunemente osserviamo in natura sono costituiti da tre quarks o antiquarks (barioni o antibarioni) oppure da una coppia quark-antiquark (mesoni). Tali sono, per esempio, l'ottetto dei mesoni pseudoscalari 0^- ($\pi^\pm, \pi^0, K^\pm, K^0, \bar{K}^0, \eta$) con masse dell'ordine del centinaio di MeV, quello dei barioni $\frac{1}{2}^+$ ($p, n, \Sigma^\pm, \Sigma^0, \Lambda, \Xi^-, \Xi^0$) e il decupletto dei barioni $\frac{3}{2}^+$ ($\Omega^-, \Xi^{*-}, \Xi^{*0}, \Sigma^{*\pm}, \Sigma^{*0}, \Delta^\pm, \Delta^0, \Delta^{++}$) con masse dell'ordine del GeV. La simmetria $SU(3)$ di Gell-Mann, essendo una generalizzazione della simmetria di *isospin* di

Heisenberg, risulta essere ancora più approssimata di questa. Tuttavia, entro certi limiti che vedremo a breve, rappresenta una valido approccio allo studio delle interazioni forti.

L'ipotesi che gli stati adronici osservati in natura fossero particelle composte era anche suggerito dagli studi di *scattering* profondamente anelastico (*Deep Inelastic Scattering*, in breve *DIS*): lo studio delle collisioni ad alta energia tra elettroni e particelle nucleari suggeriva infatti che queste ultime avessero una struttura interna e non fossero affatto oggetti puntiformi, come fino ad allora si credeva.

Tuttavia, il modello di Gell-Mann, pur semplificando notevolmente la descrizione delle interazioni forti, lasciava ancora irrisolte diverse questioni. Per esempio non si riusciva a risolvere i problemi connessi al teorema di spin-statistica per la funzione d'onda della Δ^{++} e anche i dati sperimentali non sembravano essere in completo accordo con le previsioni teoriche. Per risolvere queste incongruenze, Han, Nambu, Greenberg e Gell-Mann [31] avanzarono l'ipotesi che ogni sapore di quark potesse esistere in più stati di carica, detta di *colore*, che però è complessivamente nulla per gli stati fisici che osserviamo. Per avere un accordo con i dati sperimentali per le sezioni d'urto per i processi $e^+ e^- \rightarrow \text{adroni}$ e per la larghezza di decadimento per il processo $\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$ si deve allora assumere che questi stati di carica siano tre. Si ipotizzò quindi che tale carica fosse associata alle proprietà di trasformazione dei quarks sotto un gruppo di *gauge* (non abeliano) $SU(3)_c$ detto "di colore".

Il fatto che in natura osserviamo soltanto gli adroni (che non mostrano alcuna carica di colore) e non quark o gluoni liberi è una caratteristica peculiare delle interazioni forti che va sotto il nome di "*confinamento*": formalmente, essa stabilisce che tutti gli stati adronici devono presentarsi sotto forma di singoletti di $SU(3)_c$. Sebbene manchi ancora una dimostrazione rigorosa di tale proprietà della QCD, i risultati ottenuti mediante le simulazioni su reticolo sembrano supportare tale assunzione.

Un'altra importante caratteristica delle interazioni forti è la cosiddetta "*libertà asintotica*". Dagli esperimenti di *DIS* citati sopra si è visto, infatti, che esse divengono estremamente deboli a piccole distanze (nonché ad alte energie), crescendo di intensità all'aumentare della separazione tra i quark (per cui, a volte, si parla anche di "*schiavitù infrarossa*"). Gross e Wilczek [32] e Politzer [33] hanno infatti mostrato che per la teoria descritta dalla Lagrangiana (1.7) la funzione β di Gell-Mann-Low, definita come

$$\beta \equiv \mu \frac{dg_R(\mu)}{d\mu} \quad (1.17)$$

dove g_R è la costante di accoppiamento rinormalizzata e μ è la scala di rinormalizzazione, è negativa in un intorno di $g_R = 0$. Ad un *loop* si ha infatti che

$$\beta(g_R) = -\beta_0 g_R^3 + \dots \text{ con } \beta_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{11N_c - 2N_f}{3} \right) \quad (1.18)$$

con N_c e N_f rispettivamente numero di colori e di savori: per $N_c = 3$ si ha che $\beta_0 > 0$ fintanto che $N_f < \frac{33}{2}$. Pertanto, per la (1.17), all'aumentare della scala di energia μ la costante di accoppiamento rinormalizzata g_R decresce fino ad annullarsi asintoticamente; viceversa g_R cresce per μ che tende a zero. In maniera più esplicita, dopo aver sostituito la (1.18) in (1.17) ed integrato quest'ultima, troviamo che la costante di interazione forte $\alpha_s = \frac{g_R^2}{4\pi}$ dipende dall'energia come segue:

$$\alpha_s(\mu) = \frac{g_R^2(\mu)}{4\pi} = \frac{1}{4\pi\beta_0 \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right)} \quad (1.19)$$

dove il parametro Λ_{QCD} è detto *parametro di scala* della QCD ed ha un valore pari a $\Lambda_{QCD} \sim 0.5 \text{ GeV}$. Da quanto fin qui detto, risulta evidente che uno studio perturbativo della QCD non rappresenta un metodo corretto quando le energie caratteristiche dei fenomeni che osserviamo sono basse. Questa limitazione, tuttavia, ha stimolato lo sviluppo di nuove tecniche di indagine, quali simulazioni numeriche della teoria formulata su reticolo e la teoria delle Lagrangiane chirali efficaci che saranno l'oggetto dei prossimi capitoli.

1.2 Simmetrie chirali della QCD

Si può facilmente vedere che la Lagrangiana (1.7) è simmetrica sotto l'insieme delle trasformazioni globali del gruppo $G' = U(1)_u \otimes U(1)_d \otimes U(1)_s \otimes \dots$ la cui azione sui campi dei quarks è

$$\begin{cases} q_u \rightarrow e^{i\alpha_u} q_u \\ q_d \rightarrow e^{i\alpha_d} q_d \\ q_s \rightarrow e^{i\alpha_s} q_s \\ \dots \end{cases}$$

Come noto, il teorema di Noether garantisce l'esistenza di un insieme di correnti a divergenza nulla, una per ogni generatore della trasformazione di simmetria

$$\begin{cases} J_u^\mu = \bar{q}_u \gamma^\mu q_u \\ J_d^\mu = \bar{q}_d \gamma^\mu q_d \\ J_s^\mu = \bar{q}_s \gamma^\mu q_s \\ \dots \end{cases}$$

e ad ognuna di queste corrisponde una carica conservata $Q_l = \int d^3\vec{x} J_l^0(x)$ ($l = u, d, s, \dots$).

Se assuniamo, tuttavia, che le masse di L sappori siano nulle [tipicamente $L = 2$ (u, d) oppure $L = 3$ (u, d, s)] è facile vedere che il gruppo di simmetria G' si allarga. Questo accade perché \mathcal{L}_{QCD}^0 non contiene nessun termine che accoppia le componenti "left" e "right" dei campi dei quarks definite rispettivamente come ($\gamma^5 \equiv -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$):

$$q_L \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)q, \quad q_R \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)q. \quad (1.20)$$

Infatti, in termini dei campi q_R e q_L , la Lagrangiana (1.7) si esprime come ¹:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \bar{q}_R i\gamma_\mu D_\mu q_R + \bar{q}_L i\gamma_\mu D_\mu q_L - \bar{q}_R M q_L - \bar{q}_L M q_R \quad (1.21)$$

e da questa espressione è semplice vedere che se $M = 0$ la (1.21) è invariante sotto rotazioni indipendenti dei campi q_L e q_R :

$$q_L \rightarrow \tilde{V}_L q_L, \quad q_R \rightarrow \tilde{V}_R q_R \quad (1.22)$$

dove le matrici \tilde{V}_L e \tilde{V}_R sono elementi del gruppo $U(L)$, ossia matrici unitarie $L \times L$:

$$\tilde{V}_L = e^{i\alpha_L} e^{iT^a \theta_L^a}, \quad \tilde{V}_R = e^{i\alpha_R} e^{iT^a \theta_R^a} \quad (1.23)$$

e T^a sono gli $L^2 - 1$ generatori nella rappresentazione fondamentale del gruppo $SU(L)$ (con la normalizzazione (1.5)). Pertanto, nel limite chirale (ossia quando $M = 0$) il gruppo di simmetria "allargato" sarà

$$G = U(L)_L \otimes U(L)_R \otimes \dots = SU(L)_L \otimes SU(L)_R \otimes U(1)_L \otimes U(1)_R \otimes \dots$$

Ora, è possibile dimostrare che la trasformazione del campo q sotto l'azione di un elemento del gruppo $SU(L)_L \otimes SU(L)_R$ si può sempre esprimere come la composizione di una trasformazione vettoriale (per la quale $V_L = V_R \equiv V$) e di una assiale (per cui $V_L = V_R^\dagger \equiv A$). Per provarlo dobbiamo fare vedere che, data una generica trasformazione $SU(L)_L \otimes SU(L)_R$:

$$\begin{cases} q_L \rightarrow q'_L = V_L q_L \\ q_R \rightarrow q'_R = V_R q_R \end{cases} \quad (1.24)$$

è sempre possibile trovare due trasformazioni V e A tali che (1.24) si scrivono nella forma:

$$\begin{cases} q_L \rightarrow q'_L = AV q_L \\ q_R \rightarrow q'_R = A^\dagger V q_R \end{cases}. \quad (1.25)$$

¹Nel seguito trascureremo i gradi di libertà *pesanti* interessandoci soltanto alla dinamica dei *flavours leggeri*: porremo quindi $q \equiv (q_u, q_d, \dots, q_L)$.

Confrontando queste due espressioni troviamo che deve avversi ²

$$\begin{cases} A = (V_L V_R^\dagger)^{\frac{1}{2}} \\ V = (V_L V_R^\dagger)^{\frac{1}{2}} V_R \end{cases}. \quad (1.26)$$

In maniera analoga (anzi, più semplice!) si può provare che una trasformazione $U(1)_L \otimes U(1)_R$ si può esprimere come la combinazione di una trasformazione vettoriale (per la quale $\alpha_L = \alpha_R$) e di una assiale (per la quale, invece, $\alpha_L = -\alpha_R$). Pertanto d'ora innanzi ci riferiremo al gruppo G nella "forma":

$$G = U(1)_V \otimes U(1)_A \otimes SU(L)_V \otimes SU(L)_A \otimes \dots$$

Sui campi dei quarks una trasformazione del gruppo G agirà come segue

$$\begin{cases} U(1)_V : q \rightarrow e^{i\alpha_V} q \\ U(1)_A : q \rightarrow e^{i\gamma_5 \alpha_A} q \\ SU(L)_V : q \rightarrow e^{i\theta_V^a T_a} q \\ SU(L)_A : q \rightarrow e^{i\gamma_5 \theta_A^a T_a} q \end{cases} \quad (1.27)$$

Ad ogni generatore di questo gruppo sarà quindi associata una corrente di Noether data da

$$\begin{cases} U(1)_V : & J^\mu = \bar{q} \gamma^\mu q \\ U(1)_A : & J_5^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 q \\ SU(L)_V : & V_a^\mu = \bar{q} \gamma^\mu T_a q \\ SU(L)_A : & A_a^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 T_a q \end{cases} \quad (1.28)$$

che, almeno a livello classico, sono conservate nel limite di masse nulle in virtù delle equazioni del moto della teoria.

Il termine di massa dei quarks più leggeri

$$\delta \mathcal{L}_M = \bar{q} M q = -\bar{q}_R M q_L - \bar{q}_L M q_R = m_u \bar{q}_u q_u - m_d \bar{q}_d q_d - m_s \bar{q}_s q_s + \dots \quad (1.29)$$

ha l'effetto di rompere esplicitamente la simmetria di \mathcal{L}_{QCD}^0 sotto trasformazioni di G . In particolare si può mostrare che, al livello classico, le quadri-divergenze delle correnti (1.28) dipendono dalle masse nella maniera

²Essendo V_L e V_R due elementi del gruppo $SU(L)$ anche i loro hermitiani coniugati apparterranno a $SU(L)$ così come il prodotto $(V_L V_R^\dagger)$; in quanto tale esso potrà essere espresso nella forma $e^{i\theta^a T^a}$ per opportuni θ^a ; l'operatore $(V_L V_R^\dagger)^{\frac{1}{2}}$ sarà quello definito dai parametri $\frac{\theta^a}{2}$.

seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\mu J^\mu = 0 \\ \partial_\mu J_5^\mu = 2i \sum_{f=1}^L m_f \bar{q}_f \gamma_5 q_f \\ \partial_\mu V_a^\mu = i \sum_{i,j=1}^L (m_i - m_j) \bar{q}_i (T_a)_{ij} q_j \\ \partial_\mu A_a^\mu = i \sum_{i,j=1}^L (m_i + m_j) \bar{q}_i \gamma_5 (T_a)_{ij} q_j \end{array} \right. \quad (1.30)$$

Vediamo pertanto che:

- la simmetria $U(1)_V$ è esatta indipendentemente dal fatto che le masse dei quarks siano o meno nulle: la corrispondente carica conservata è essenzialmente il numero barionico;
- la corrente associata alla simmetria $SU(L)_V$ è conservata anche in presenza di masse non nulle se queste sono tutte uguali tra i vari sapori: abbiamo così la simmetria $SU(2)$ di isospin nel caso in cui $m_u = m_d$, o quella $SU(3)$ di Gell-Mann se $m_u = m_d = m_s$;
- la corrente di $SU(L)_A$ è conservata soltanto se tutte le masse sono nulle.

Una sezione a parte sarà dedicata all'analisi della simmetria $U(1)_A$.

1.3 Simmetrie esatte e spontaneamente rotte

Come noto, una simmetria globale continua della Lagrangiana può essere realizzata sullo stato di vuoto in due maniere differenti, che si manifestano in diverse proprietà dello spettro degli stati della teoria:

- simmetria esatta, *i.e.* "alla Wigner-Weyl": tutti i generatori del gruppo di simmetria annichilano il vuoto che, pertanto, è invariante sotto trasformazioni del gruppo di simmetria. In questo caso gli stati fisici costituenti lo spettro delle particelle della teoria si organizzano in rappresentazioni irriducibili del gruppo;
- simmetria spontaneamente rotta "alla Nambu-Goldstone": il vuoto è annichilato solo dagli elementi di un sottoinsieme \tilde{h} dell'insieme di tutti i generatori h del gruppo di simmetria. Lo stato di vuoto risulta quindi invariante solamente sotto le trasformazioni generate dagli elementi di \tilde{h} (si può provare, in particolare, che questo sottoinsieme ha la

struttura di un gruppo, e viene pertanto chiamato sottogruppo *esatto*). Il teorema di Goldstone garantisce che per ogni generatore *rotto* appartenente a $\{h\} \setminus \{\tilde{h}\}$ (tale, cioè, che non annichila il vuoto) esiste una particella a massa nulla di spin zero, detta *"bosone di Goldstone"* con i numeri quantici di questo generatore; inoltre l'insieme di questi stati si trasforma come una rappresentazione irriducibile del sottogruppo non rotto.

Cerchiamo adesso di capire in che maniera sono realizzate in natura le simmetrie sopra elencate. Possiamo affermare che l'invarianza $U(1)_V$ sia realizzata alla maniera di Wigner-Weyl e si manifesta, come già osservato, nella conservazione del numero barionico.

Per quanto riguarda la simmetria chirale $SU(L)_V \otimes SU(L)_A$, essa non può essere realizzata come la precedente. Infatti, se $|h\rangle$ è un generico stato adronico, troveremo che il nuovo stato $Q_a^A|h\rangle \equiv |h'\rangle$, ottenuto applicando a $|h\rangle$ una delle cariche assiali Q_a^A che generano la simmetria $SU(L)_A$

$$Q_a^A = \int d^3\vec{x} A_a^0(x) \quad \text{con} \quad A_a^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 T_a q, \quad (1.31)$$

avrebbe la stessa massa di $|h\rangle$ ma parità opposta. Questo perchè, sfruttando il fatto che $[H, Q_i^A] = 0$, dove H è l'Hamiltoniana delle interazioni forti, abbiamo che (essendo $H|h\rangle = m_h|h\rangle$ per uno stato $|h\rangle$ a riposo)

$$H|h'\rangle = H Q_a^A |h\rangle = Q_a^A H |h\rangle = m_h |h'\rangle \quad (1.32)$$

e

$$P|h'\rangle = P Q_a^A |h\rangle = P Q_a^A P^\dagger P |h\rangle = -Q_a^A P |h\rangle \quad (1.33)$$

avendo sfruttato il fatto che

$$P Q_i^A P^\dagger = \int d^3\vec{x} P A_a^0(\vec{x}, 0) P^\dagger = - \int d^3\vec{x} A_a^0(-\vec{x}, 0) = -Q_i^A \quad (1.34)$$

Se, quindi, la simmetria $SU(L)_V \otimes SU(L)_A$ fosse realizzata alla Wigner-Weyl dovremmo osservare in natura multipletti adronici di dimensioni maggiori di quelle che invece vediamo sperimentalmente. In particolare ogni multipletto adronico dovrebbe essere accompagnato da un altro multipletto degenere in massa ma di parità opposta. Abbiamo quindi buoni motivi per credere che la simmetria sotto trasformazioni $SU(L)_V \otimes SU(L)_A$ sia spontaneamente rotta sul vuoto.

Tuttavia, proprio l'esistenza dei multipletti ci fa supporre che rimane una simmetria *"residua"* del vuoto sotto il sottogruppo vettoriale $SU(L)_V$. Possiamo quindi avanzare l'ipotesi che la simmetria della Lagrangiana \mathcal{L}_{QCD}^0 sia

spontaneamente rotta secondo lo schema

$$G = SU(L)_V \otimes SU(L)_A \rightarrow H = SU(L)_V \quad (1.35)$$

Tale ipotesi è in effetti supportata dall'esistenza, tra i multipletti adronici, di quello dei mesoni pseudoscalari $J^P = 0^-$, costituito da particelle molto più leggere rispetto a tutti gli altri stati dello spettro adronico. Questa caratteristica fa dei suddetti mesoni dei buoni "candidati" per rivestire il ruolo di bosoni di Goldstone di una simmetria spontaneamente rotta. Se a questa proprietà aggiungiamo il fatto che questi stati hanno proprio gli stessi numeri quantici degli operatori di carica assiale Q_a^A definita in (1.31) (proprio come previsto dal teorema di Goldstone per gli stati a massa nulla generati dal *pattern* di rottura (1.35)) possiamo effettivamente identificare queste particelle con i bosoni di Goldstone generati dalla rottura spontanea della simmetria chirale $SU(L)_V \otimes SU(L)_A$.

In realtà, sebbene le masse di questi stati siano molto minori rispetto a quelle di tutti gli altri stati adronici, esse non sono esattamente nulle. Ciò si spiega col fatto che la simmetria chirale è *esplicitamente* rotta, come abbiamo visto, dal termine di massa dei quarks. Questo, però, nel limite in cui le masse di un certo numero di quarks sono sufficientemente piccole rispetto a $\Lambda_{QCD} \sim 0.5$ GeV, può essere considerato come una piccola perturbazione rispetto a \mathcal{L}_{QCD}^0 facendo sì che la simmetria in esame non vada del tutto persa ma sia soltanto approssimata. Pertanto, la rottura spontanea di questa simmetria approssimata genererà dei "pseudo-bosoni" di Goldstone di massa piccola ma non rigorosamente nulla.

Quello che ci chiediamo adesso è quale deve essere il numero di *flavours* da assumere leggeri perché il nostro modello sia aderente alle osservazioni sperimentali. Poichè, come abbiamo visto, gli adroni più leggeri appartengono all'ottetto dei mesoni pseudoscalari $(\pi^\pm, \pi^0, K^\pm, K^0, \bar{K}^0, \eta)$ dobbiamo assumere, come fecero anche Gell-Mann e Ne'eman, che i sapori leggeri siano 3: *u*, *d* e *s*. Inoltre l'esistenza di un tripletto (quello dei tre pioni π^\pm e π^0) particolarmente leggero anche rispetto a tutti gli altri stati dell'ottetto dei mesoni pseudoscalari ci porta a concludere che la simmetria di *isospin* (ossia con $L = 2$) sia meno approssimata di quella di Gell-Mann valida per $L = 3$. La ragione di ciò è dovuta al fatto che in natura non solo m_u ed m_d sono molto minori della scala di massa Λ_{QCD} , ma sono anche considerevolmente più piccole di m_s , come si evince dalla Tabella 1.1.

1.4 La simmetria $U(1)$ assiale

Con ragionamenti analoghi a quelli fino adesso esposti possiamo dire che la simmetria $U(1)_A$ non è realizzata alla Wigner-Weyl: questo infatti comporterebbe che, nel limite chirale in cui $m_i = 0$ per $i = 1, 2, \dots, L$, ogni adrone deve comparire in un doppietto con un partner di uguale massa ma parità opposta. Se invece questa simmetria fosse spontaneamente rotta sul vuoto dovremmo avere un ulteriore bosone di Goldstone nel limite chirale, con numeri quantici $J^P = 0^-$ e scalare sotto trasformazioni di isospin generate dal gruppo $SU(L)_V$; a causa del termine di massa che rompe esplicitamente la simmetria $U(1)_A$, questo bosone dovrebbe avere una massa dello stesso ordine di grandezza di quelle possedute dagli stati dell'ottetto dei mesoni pseudoscalari (questo perchè il termine di rottura è uguale per entrambe le simmetrie).

In particolare Weinberg [34] ha stimato un limite superiore per tale massa nel caso $L = 3$. Assumendo il *pattern* di rottura $U(L)_L \otimes U(L)_R \rightarrow U(L)_V$, Weinberg ha analizzato una Lagrangiana chirale efficace (per maggiori dettagli si rimanda al Capitolo 2) che descrive gli 8 pseudo-bosoni di Goldstone " π_i ", con $i = \{1, 2, \dots, 8\}$, provenienti dalla rottura spontanea $SU(L)_L \otimes SU(L)_R \rightarrow SU(L)_V$, più un nono bosone " S ", singoletto di $SU(3)_V$, generato dalla rottura spontanea $U(1)_V \otimes U(1)_A \rightarrow U(1)_V$. Trascu- rando gli effetti dovuti alle quantità proporzionali alla differenza " $m_u - m_d$ " (che parametrizza la rottura di $SU(2)$ e che abbiamo visto essere molto piccola) si trova che il campo S è mescolato al campo π_8 con $I = 0$, a differenza di quanto avviene per i rimanenti pseudo-bosoni " π_i ", con $i = \{1, 2, \dots, 7\}$, per i quali non compaiono nella Lagrangiana efficace termini misti $\sim \pi_i \pi_j$. In particolare si trova che l'autovalore più piccolo della matrice di mescolamento dovrebbe soddisfare la relazione $m_{light}^{(I=0)} \leq \sqrt{3}m_\pi$.

Tra le particelle dello spettro adronico le uniche che hanno i numeri quantici di questo bosone di Goldstone sono $\eta(547)$ e $\eta'(958)$. Tuttavia entrambe violano il limite fissato da Weinberg e la prima di esse è ben descritta all'interno dell'ottetto dei pioni per $L = 3$. Questa apparente contraddizione prende il nome di "*problema $U(1)$* ".

1.4.1 Il *problema $U(1)$* : la soluzione di 'tHooft

Dai risultati (1.30) sulla divergenza delle correnti in presenza delle masse non nulle dei quarks potremmo supporre che, così come accade per la simmetria $SU(L)_A$, anche la corrente associata alla simmetria $U(1)_A$ sia conservata nel limite in cui le masse degli L quarks siano nulle. In realtà il risultato trovato per $\partial_\mu J_5^\mu$ è vero soltanto a livello classico: a livello quantistico la simmetria

sotto trasformazioni del gruppo $U(1)_A$ è affetta da una *anomalia* [6, 7, 5] nel senso che la divergenza della corrente ad essa associata, sebbene si annulli a livello classico, è diversa da zero a causa delle correzioni quantistiche. In maniera esplicita si trova che l'espressione per $\partial_\mu J_5^\mu$ va corretta come segue [6]:

$$\partial_\mu J_5^\mu = 2i \sum_{f=1}^L m_f \bar{q}_f \gamma_5 q_f + 2LQ \quad (1.36)$$

dove

$$Q \equiv \frac{g^2}{64\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^a \quad (1.37)$$

prende il nome di "densità di carica topologica" mentre l'integrale di $Q(x)$ sul quadrivolume $q[F] = \int d^4x Q(x)$ (visto come funzionale del campo $F_{\mu\nu}^a$) è detto "carica topologica". L'espressione (1.36) mostra che la carica associata alla corrente assiale $Q_5 \equiv \int d^3x J_5^0$ non è conservata perché

$$\Delta Q_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{dQ_5}{dt} = 2Lq[F]. \quad (1.38)$$

E' noto, tuttavia, che il termine anomalo Q presente in $\partial_\mu J_5^\mu$ può essere espresso come la quadri-divergenza della corrente o "classe" di *Chern-Simons* definita come

$$Q = \partial_\mu K^\mu \quad \text{con} \quad K^\mu \equiv \frac{g^2}{16\pi^2} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} A_a^\alpha (\partial^\beta A_a^\gamma + \frac{1}{3} g f_{abc} A_b^\beta A_c^\gamma). \quad (1.39)$$

Sostituendo (1.39) in (1.38) ci aspetteremmo che ΔQ_5 sia nulla, essendo l'integrale di una quadri-divergenza totale. La carica assiale, nonostante il carattere anomalo della simmetria $U(1)_A$, sarebbe così effettivamente conservata. In realtà, l'integrale in (1.38) è non nullo a causa dell'esistenza di soluzioni delle equazioni del moto per la teoria di pura *gauge*, dette *stantoni* [8], che interpolano tra configurazioni che hanno cariche topologiche differenti (nel caso particolare in cui F sia l'intensità del campo di un istantone si ha $q[F] = 1$ [5]), violando così la conservazione della carica assiale.

Quanto fin qui detto potrebbe apparire come la soluzione del problema $U(1)$: se la simmetria assiale non è più tale a livello quantistico, non c'è motivo di aspettarsi l'esistenza di un bosone (o pseudo-bosone) di Goldstone ad essa associato. In realtà le cose non sono affatto così semplici. Infatti, proprio grazie al risultato (1.39), potremmo definire una corrente

$$\tilde{J}_5^\mu = J_5^\mu - 2LK^\mu \quad (1.40)$$

che sia a divergenza nulla nel limite chirale, e quindi trovare una carica \tilde{Q}_5 che sia realmente conservata. Il problema connesso a questa scelta sta nel

fatto che la corrente (1.40) non è *gauge* invariante³ e pertanto la carica \tilde{Q}_5 non può creare, quando viene applicata al vuoto, nessuno stato fisicamente osservabile⁴.

Ad oggi la soluzione più semplice per *il problema U(1)* sembra essere quella proposta da Witten [9] e Veneziano [10]: questi hanno cercato di interpretare la grande massa dell' $\eta'(958)$ come conseguenza del carattere anomalo della simmetria $U(1)$.

1.4.2 Meccanismo di Witten

Assumendo che la simmetria assiale sia spontaneamente rotta sul vuoto della QCD, Witten avanzò l'ipotesi che il relativo bosone di Goldstone (ossia l' η' nel caso $L = 3$) acquisti una massa non nulla nel limite chirale a causa dell'anomalia. Questa affermazione ha tuttavia senso solo se riusciamo a individuare certi "buoni" parametri della teoria che, in un qualche limite, permettano di sopprimere l'anomalia. Soltanto dopo aver fatto ciò possiamo provare a capire come la presenza del termine anomalo nella divergenza della corrente assiale generi una massa per il bosone di Goldstone.

Un valido aiuto in tale direzione è dato dall'espansione $1/N_c$ proposta da 'tHooft in [36]. Come da questi suggerito, infatti, nel considerare il limite $N_c \rightarrow \infty$ dobbiamo imporre che il prodotto $g\sqrt{N_c}$ si mantenga costante al crescere di N_c , ossia che

$$g\sqrt{N_c} = g_0 \quad (1.41)$$

con g_0 fissato. Tale scelta può essere giustificata se consideriamo le equazioni del gruppo di rinormalizzazione della QCD, in particolare la (1.19), dalla quale, a μ e Λ_{QCD} fissati, troviamo che $g^2 \sim \frac{1}{N_c}$.

Witten osservò che è proprio nel limite in cui N_c diviene molto grande che riusciamo a sopprimere tutti i contributi anomali alle varie grandezze fisiche. Per esempio, usando la (1.41), vediamo che la densità di carica topologica (1.37) si annulla per $N_c \rightarrow \infty$, avendosi che

$$Q \equiv \frac{g_0^2}{64\pi^2 N_c} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^a \sim \frac{1}{N_c}. \quad (1.42)$$

Riassumiamo ora brevemente il ragionamento proposto da Witten per spiegare la "grande" massa dell' η' . Un ruolo cruciale è svolto dalla funzione

³Lo è, però, nel caso in cui il gruppo di *gauge* è abeliano, grazie al fatto che, in questo caso, la carica topologica è sempre nulla.

⁴Le implicazioni di questa ipotesi, che comporta una rottura spontanea della simmetria $U(1)$ assiale tramite un "dipolo di Goldstone", sono state analizzate in [35]; una *review* completa la si trova anche in [2, pag. 307-327].

$\chi(k)$ definita dalla relazione

$$\chi(k) = -i\langle QQ \rangle(k) \quad (1.43)$$

dove con $\langle QQ \rangle(k)$ abbiamo indicato la trasformata di Fourier nello spazio degli impulsi della funzione a due punti della densità di carica topologica $Q(x)$:

$$\langle QQ \rangle(k) \equiv \int d^4x e^{ikx} \langle TQ(x)Q(0) \rangle \quad (1.44)$$

dove, per fissare la notazione, per un insieme di generici campi \mathcal{O}_i definiamo

$$\langle T\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\dots \rangle \equiv \frac{\int [d\Psi] \mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\dots e^{iS_{QCD}[\Psi]}}{\int [d\Psi] e^{iS_{QCD}[\Psi]}}, \quad (1.45)$$

essendo $[\Psi]$ l'insieme di tutti i campi della teoria e $[d\Psi]$ la misura funzionale.

Il valore a $k = 0$ della (1.43) è chiamato "suscettività topologica" e viene solitamente indicato con χ :

$$\chi \equiv -i\langle QQ \rangle(k=0) = -i \int d^4x \langle TQ(x)Q(0) \rangle. \quad (1.46)$$

Se scriviamo χ nella forma ⁵

$$\chi = \frac{1}{VT} \frac{i}{Z_\theta} \frac{d^2 Z_\theta}{d\theta^2} |_{\theta=0} \quad (1.47)$$

dove

$$\begin{aligned} Z_\theta &\equiv \int [dA_\mu][dq][d\bar{q}] \\ &\times \exp\left\{i \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \bar{q}i\gamma_\mu D_\mu q - \bar{q}Mq + \theta Q(x)\right]\right\} \end{aligned} \quad (1.48)$$

è la funzione di partizione della teoria che include il termine $\theta Q(x)$, si vede che se la teoria contiene quarks a massa nulla ⁶ (i.e., $M = 0$) allora Z_θ risulta essere indipendente da θ . Se, infatti, eseguiamo una rotazione $U(1)$ assiale dei campi dei quark $q' \rightarrow e^{-i\alpha\gamma_5}q$ e $\bar{q}' \rightarrow \bar{q}e^{-i\alpha\gamma_5}$, con α del tutto generico, abbiamo che, quando $M = 0$, \mathcal{L}_{QCD}^0 è invariante mentre la misura funzionale sarà data da (si veda la Ref.[7]) $[dq'][d\bar{q}'] = [dq][d\bar{q}]e^{\alpha i2L \int d^4x Q(x)}$; quindi avremo che

$$Z_\theta = \int [dA][dq][d\bar{q}] e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_{QCD}^{M=0} + (\theta + \alpha 2L)Q(x)]}; \quad (1.49)$$

⁵ $VT = \int d^4x$ è un quadri-volume infinito che va fattorizzato nelle funzioni di correlazione.

⁶ In realtà per provare quanto segue basterebbe che un solo sapore fosse a massa nulla.

se ora sceglieremo un valore particolare per α , ossia $\alpha = -\frac{\theta}{2L}$, troviamo che $Z_\theta = Z_0$. Questo significa che Z è indipendente da θ e pertanto, per la (1.47), χ si annulla.

Esprimiamo adesso $\chi(k)$ come somma di contributi A_0, A_1, A_2, \dots provenienti rispettivamente da diagrammi con $0, 1, 2 \dots$ loops di quarks, i.e.

$$\chi(k) = A_0(k) + A_1(k) + A_2(k) + \dots \quad (1.50)$$

e assumiamo che $A_0(0) \neq 0$ (ossia χ sia non nulla in un mondo senza quarks). Ognuno di questi contributi è soppresso di $1/N_c$ rispetto al precedente [36] e A_0 risulta essere di ordine $g^4 N_c^2 = N_c^0$. Di conseguenza $A_1 \sim 1/N_c$, $A_2 \sim 1/N_c^2$ e via dicendo. Ci chiediamo ora come può $\chi(k)$ annullarsi a $k = 0$ se, come abbiamo assunto, $A_0(0) \neq 0$ e i termini successivi dello sviluppo sono soppressi di potenze $1/N_c$? Per capire come ciò può avvenire è utile riscrivere $\chi(k)$ come somma sugli stati intermedi: in questo modo avremo (almeno all'ordine più basso in $1/N_c$) che (1.46) sarà una somma sui poli generati dagli stati di singola particella:

$$\chi(k) = \chi^{(1P)} + \sum_{glueballs} \frac{a_n^2}{k^2 - M_n^2} + \sum_{mesoni} \frac{c_n^2/N_c}{k^2 - m_n^2} + \dots \quad (1.51)$$

dove abbiamo indicato con M_n e m_n rispettivamente le masse dell' n^{simo} -glueball e dell' n^{simo} -mesone e abbiamo posto

$$\begin{aligned} a_n &= \langle 0 | Q(0) | n^{simo} - glueball \rangle \\ c_n / \sqrt{N_c} &= \langle 0 | Q(0) | n^{simo} - mesone \rangle \end{aligned} \quad (1.52)$$

Rispetto all'espansione a grandi N_c , a_n e c_n risultano essere entrambi di ordine $\mathcal{O}(N_c^0)$.

$\chi^{(1P)}$ è un "termine di contatto" (cioè "ad un punto") generato da un commutatore a tempi uguali ed è necessario per eliminare le ambiguità nella definizione del prodotto T -ordinato nel limite in cui $x \rightarrow 0$ (per una trattazione più dettagliata si vedano le appendici di [9, 37]): esso è necessario per risolvere un problema di positività che si manifesta quando $k = 0$. $\chi^{(1P)}$ risulta essere di ordine zero in uno sviluppo in $1/N_c$ perché i quark non possono "influenzare", all'ordine dominante in $1/N_c$, tale termine⁷. Dal punto di vista del conteggio in potenze di N_c , $\chi^{(1P)}$ è quindi dello stesso ordine della somma sugli stati di glueball e la loro somma va quindi identificata con il termine $A_0(k)$ della (1.50). La somma sugli stati mesonici è, invece di

⁷Infatti, come ha osservato Witten in [9], non vi sono poli di Goldstone (generati dai loop fermionici) nelle funzioni ad un punto.

ordine $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N_c}\right)$ e va identificata con il contributo dei *loop* dei quarks $A_1(k)$. [Altri termini sono poi generati dalla somma dei diagrammi con topologia più complessa e vanno identificati con gli ordini successivi nello sviluppo (1.50)]. Dall'espressione (1.51) risulta semplice capire come può avvenire la cancellazione di $A_0(0)$: tutto quello che bisogna fare è assumere l'esistenza di uno stato mesonico η' la cui massa quadra sia di ordine $1/N_c$. Inoltre questo stato, poiché accoppia col campo $Q(x)$, deve essere un isosingoletto pseudoscalare. Per trovare l'espressione di $m_{\eta'}^2$ notiamo che deve avversi

$$\frac{c_{\eta'}^2}{N_c m_{\eta'}^2} = A_0(0); \quad (1.53)$$

ricordando che $2LQ = \partial_\mu J_5^\mu$, che $\langle 0 | \partial_\mu J_5^\mu | \eta'(\vec{p}) \rangle = -ip_\mu \langle 0 | J_5^\mu | \eta'(\vec{p}) \rangle$ e che, per definizione, $\langle 0 | J_5^\mu | \eta'(\vec{p}) \rangle = i\sqrt{2L} p^\mu F_{\eta'}$ troviamo che

$$m_{\eta'}^2 = \frac{2LA}{F_\pi^2} \quad (1.54)$$

essendo, all'ordine più basso in $1/N_c$, $F_{\eta'} \simeq F_\pi \simeq 92 \text{ MeV}$ e avendo indicato con $A \equiv A_0(0)$ la suscettività topologica nella teoria di pura *gauge* (e nel limite di grandi N_c). Come vediamo, essendo $F_\pi = \mathcal{O}(\sqrt{N_c})$ [38] e $A = \mathcal{O}(N_c^0)$, $m_{\eta'}^2$ è di ordine $1/N_c$, e quindi si annulla nel limite $N_c \rightarrow \infty$.

1.5 I condensati chirali

La realizzazione o meno (alla Wigner-Weyl) di una certa simmetria è legata all'annullarsi o meno di un *parametro d'ordine*: questo assume il valore nullo quando la simmetria è realizzata in maniera esatta mentre assume valori diversi da zero quando questa è rottata spontaneamente. I valori assunti dal parametro d'ordine nelle diverse *fasi* in cui può "trovarsi" il sistema sono invarianti sotto trasformazioni del gruppo di simmetria non rotto.

Come abbiamo visto nella sezione precedente, le simmetrie *vettoriali* sono realizzate in natura in maniera esatta mentre abbiamo diversi motivi per credere che l'invarianza sotto trasformazioni *assiali* sia spontaneamente rottta (oltre alle violazioni esplicite dovute al termine di massa dei quarks). Per lo studio della struttura di fase della QCD risulta quindi fondamentale capire quali siano i parametri d'ordine per queste simmetrie.

1.5.1 Il condensato chirale

Facendo uso delle regole di anticommutazione per i campi dei quarks q , è possibile mostrare che vale la seguente regola di commutazione a tempi

uguali:

$$\begin{aligned} [Q_a^A(0), \bar{q}\gamma^5 T_b q(0)] &= -\bar{q}\{T_a, T_b\}q(0) = \\ &- \frac{1}{L}\delta_{ab}\bar{q}q(0) - d_{abc}\bar{q}T_c q(0). \end{aligned} \quad (1.55)$$

Se consideriamo il valore di aspettazione dell'equazione (1.55) sul vuoto $|\Omega\rangle$ troviamo che, assumendo $SU(L)_V$ realizzata alla Wigner-Weyl:

$$\langle [Q_a^A(0), \bar{q}\gamma^5 T_b q(0)] \rangle = -\frac{1}{L}\delta_{ab}\langle \bar{q}q \rangle. \quad (1.56)$$

Un valore non nullo per il "condensato chirale" $\langle \bar{q}q \rangle$ segnala una rottura spontanea della simmetria $SU(L)_A$, in quanto per la (1.56) avremmo che $Q_a^A|\Omega\rangle \neq 0$; viceversa, se $\langle \bar{q}q \rangle = 0$ troveremmo che $Q_a^A|\Omega\rangle = 0$. Viene pertanto naturale assumere come parametro d'ordine per la simmetria $SU(2)$ chirale l'operatore $\langle \bar{q}q \rangle$.

Ora, si può facilmente vedere che sotto la trasformazione $U(1)$ assiale

$$q_{iR} \rightarrow e^{i\alpha} q_{iR}, \quad q_{iL} \rightarrow e^{-i\alpha} q_{iL} \quad (1.57)$$

con, per esempio, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, il condensato chirale subisce la trasformazione

$$\langle \bar{q}q \rangle = \langle \bar{q}_{iR} q_{iL} \rangle + \langle \bar{q}_{iL} q_{iR} \rangle \rightarrow e^{-i\pi} \langle \bar{q}_{iR} q_{iL} \rangle + e^{i\pi} \langle \bar{q}_{iL} q_{iR} \rangle = -\langle \bar{q}q \rangle \quad (1.58)$$

ossia non è invariante sotto trasformazioni $U(1)_A$ a meno che $\langle \bar{q}q \rangle = 0$. Il condensato chirale rappresenta quindi un parametro d'ordine *anche* per la simmetria $U(1)_A$: finchè è diverso da zero anche quest'ultima deve essere spontaneamente rotta. Non dobbiamo dimenticare, tuttavia, che entrambe queste simmetrie sono rotte esplicitamente dal termine di massa $\delta\mathcal{L}_M$, pertanto il condensato chirale della teoria completa definita da \mathcal{L}_{QCD} sarà sempre diverso da zero. Noi parleremo di rottura spontanea della simmetria chirale se $\langle \bar{q}q \rangle$ è diverso da zero anche quando le masse degli L quarks "leggieri" sono nulle.

1.5.2 Restaurazione della simmetria chirale e $U(1)$ assiale a temperatura finita

Nel precedente paragrafo abbiamo definito il parametro d'ordine come il valore di aspettazione di un certo operatore sullo stato di vuoto. Nel fare ciò abbiamo assunto che la temperatura fisica T fosse nulla. L'effetto della temperatura sul calcolo dei valori di aspettazione di operatori quantistici è quello di restringere l'insieme delle configurazioni dei campi su cui calcolare

l'integrale funzionale a quelle periodiche all'interno di un intervallo di tempo euclideo di ampiezza $t_E = \beta = \frac{1}{kT}$.

In particolare, il valore d'aspettazione sul vuoto alla temperatura T di un generico operatore \mathcal{O} è dato da

$$\langle \mathcal{O} \rangle_T = \frac{\text{Tr}[\mathcal{O} e^{-\beta H}]}{\text{Tr}[e^{-\beta H}]} \quad (1.59)$$

dove H è l'hamiltoniana del sistema. L'espressione (1.59) altro non è che l'espressione quantistica della media sull'*ensemble* di Gibbs.

Accade che, all'aumentare della temperatura, il valore di aspettazione del condensato chirale che abbiamo definito nella precedente sezione varia e, in particolare, si annulla per un certo valore di T , e rimane uguale a zero sopra di esso, segnalando così la restaurazione della simmetria a temperature superiori.

Per studiare le proprietà di simmetria della QCD al variare di T definiamo quindi le seguenti temperature:

- T_{ch} : la temperatura alla quale si annulla il condensato chirale $\langle \bar{q}q \rangle$. La simmetria chirale è spontaneamente rotta al di sotto di T_{ch} mentre è restaurata al di sopra di essa. Simulazioni numeriche di reticolo indicano per tale temperatura il valore $T_{ch} \sim 150$ MeV.
- $T_{U(1)}$: la temperatura alla quale la simmetria assiale è restaurata (quantomero in maniera efficace). Come abbiamo visto, essendo $\langle \bar{q}q \rangle$ un parametro d'ordine anche per la simmetria assiale, dobbiamo avere che $T_{U(1)} \geq T_{ch}$;
- T_χ : la temperatura alla quale la suscettività topologica della teoria di pura *gauge* A si annulla. Il meccanismo di Witten implica che $T_{U(1)} \geq T_\chi$.

Nello studiare la struttura di fase della QCD dobbiamo quindi valutare i seguenti possibili scenari:

- SCENARIO I: $T_\chi < T_{ch}$. In questo caso avremo che tra le temperature T_χ e T_{ch} la simmetria $U(1)$ assiale è ancora rotta dal condensato chirale, ma gli effetti dell'anomalia sono assenti. In altre parole, in questo intervallo di temperatura la simmetria assiale è realizzata alla Nambu-Goldstone e l' η' è il bosone di Goldstone associato. Questo sarebbe a massa nulla nel limite chirale o, qualora gli effetti di rottura esplicita del termine di massa dei quarks fossero tenuti in considerazione, con una massa prossima a quella del pion [34].

- SCENARIO II: $T_{ch} \leq T_{U(1)}$, con $T_{ch} \sim T_\chi \sim T_{U(1)}$. In questo caso, se $L = 2$, la simmetria restaurata con la transizione è $U(1)_A \otimes SU(2)_A \otimes SU(2)_V \sim O(2) \otimes O(4)$ e avremmo una transizione del primo ordine [39];
- SCENARIO III: $T_{ch} \ll T_{U(1)}$. Con $L = 2$ la restaurazione della simmetria chirale $SU(2)_A \otimes SU(2)_V \sim O(4)$ sarebbe associata ad una transizione del secondo ordine, con gli esponenti critici di $O(4)$. Alcuni dati di reticolo supportano parzialmente questa ipotesi (si veda, per esempio, la Ref.[40]) mentre altri, sembrano smentirla (si veda, per esempio, la Ref.[41]): allo stato attuale, quindi, la questione è ancora controversa.

I dati di reticolo sul comportamento della suscettività topologica $A(T)$ della teoria di pura *gauge* [42, 43, 44] mostrano che $A(T)$ si mantiene all’incirca costante fino alla temperatura T_{ch} e subisce una forte soppressione solo *sopra* T_{ch} (*i.e.* $T_\chi \geq T_{ch}$). Come abbiamo visto, nel meccanismo di Witten la suscettività topologica riveste un ruolo fondamentale, in quanto il suo annullarsi o meno implica l’esistenza di un bosone di Goldstone con gli stessi numeri quantici dell’ η' . I risultati di reticolo ci portano quindi a escludere lo SCENARIO I.

Per poter scegliere tra lo SCENARIO II e lo SCENARIO III, DeTar e Kogut [45] e Shuryak [19] proposero di guardare al comportamento delle masse dei vari canali mesonici (ossia i bilineari ⁸ $\mathcal{M} = \bar{q}\Gamma q$) scalari e pseudoscalari in funzione della temperatura T . Infatti, sotto una generica trasformazione del gruppo di simmetria (esatto o spontaneamente rotto) sui campi dei quarks i vari mesoni si trasformano tra di loro. Poichè ad ogni simmetria realizzata alla Wigner-Weyl è associato un multipletto di particelle con masse uguali, dovremo avere che stati mesonici ”legati” da una trasformazione del gruppo non rotto avranno masse uguali; viceversa, stati ottenuti applicando trasformazioni di simmetria del gruppo rotto ad uno stato iniziale avranno masse differenti. L’uguaglianza o meno delle masse si riflette nell’uguaglianza o meno delle suscettività associate ai suddetti canali mesonici:

$$\chi_f = \int d^4x \langle T\mathcal{M}_f(x)\mathcal{M}_f^\dagger(0) \rangle. \quad (1.60)$$

Consideriamo, quindi, i canali mesonici mostrati nella Tabella 1.2 relativi al caso $L = 2$.

Per trasformazioni $SU(2)_A$, σ si mescola con il multipletto dei π , mentre η con quello dei δ . Infatti sotto una trasformazione $SU(2)_A$, i campi dei

⁸ Γ è una matrice che contiene indici di Dirac, flavour e isospin.

Mesone	Operatore interpolante	I	J^P
$\sigma (f_0)$	$\mathcal{O}_\sigma = \bar{q}q$	0	0^+
$\delta (a_0)$	$\vec{\mathcal{O}}_\delta = \bar{q}\frac{\vec{\tau}}{2}q$	1	0^+
π	$\vec{\mathcal{O}}_\pi = i\bar{q}\gamma^5\frac{\vec{\tau}}{2}q$	1	0^-
η	$\mathcal{O}_\eta = i\bar{q}\gamma^5q$	0	0^-

Tabella 1.2: Canali mesonici per $L = 2$. Con $\vec{\tau}$ abbiamo indicato le matrici di Pauli.

quark si trasformano come

$$\begin{cases} q \rightarrow e^{i\gamma_5\theta^a\frac{\tau^a}{2}}q \simeq (1 + i\gamma_5\theta^a\frac{\tau^a}{2} + \dots)q \\ \bar{q} \rightarrow \bar{q}e^{i\gamma_5\theta^a\frac{\tau^a}{2}} \simeq \bar{q}(1 + i\gamma_5\theta^a\frac{\tau^a}{2} + \dots) \end{cases} \quad (1.61)$$

da cui si trova, per esempio, che

$$\begin{aligned} \bar{q}q &\rightarrow \bar{q}(1 + i\gamma_5\theta^a\frac{\tau^a}{2} + \dots)(1 + i\gamma_5\theta^a\frac{\tau^a}{2} + \dots)q \simeq \\ &\simeq \bar{q}q + i\theta^a\bar{q}\gamma_5\tau^a q + \dots \end{aligned} \quad (1.62)$$

La restaurazione della simmetria chirale a T_{ch} comporta una degenerazione delle masse di questi canali e quindi correlatori identici. D'altra parte, sotto trasformazioni $U(1)_A$ si ha che η si mescola con σ mentre il π mescola con il δ . Se costruiamo le "suscezzività chirali" per ognuno dei suddetti canali mesonici

$$\chi_l = \int d^4x \langle T\mathcal{O}_l(x)\mathcal{O}_l^\dagger(0) \rangle \quad (1.63)$$

possiamo definire i seguenti parametri d'ordine relativi, rispettivamente, alla simmetria $SU(L)$ chirale e $U(1)$ assiale:

$$\chi_{SU(2)} \equiv \chi_\sigma - \chi_\pi , \quad \chi_{U(1)} \equiv \chi_\delta - \chi_\pi . \quad (1.64)$$

Se esprimiamo $\chi_{U(1)_A}$ in termini dei campi *left* e *right* dei quarks troviamo che

$$\chi_{U(1)} = \int d^4x \mathcal{D}_{U(1)}(x) \quad (1.65)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{U(1)}(x) &\equiv \langle T\mathcal{O}_{\delta^+}(x)\mathcal{O}_{\delta^+}^\dagger(0) \rangle - \langle T\mathcal{O}_{\pi^+}(x)\mathcal{O}_{\pi^+}^\dagger(0) \rangle = \\ &= 2[\langle T\bar{u}_R d_L(x) \times \bar{d}_R u_L(0) \rangle + \langle T\bar{u}_L d_R(x) \times \bar{d}_L u_R(0) \rangle]. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Quando siamo a temperature minori di T_{ch} il condensato chirale (che "connette" i campi *left* e *right* di un dato sapore) fa sì che la grandezza $\mathcal{D}_{U(1)}$ sia diversa da zero (si veda la Figura 1.1). Risultati ottenuti mediante simulazioni numeriche su reticolo, in cui sono state determinate le masse (di "screening") dei mesoni π e δ per $L = 2$ e $T > T_{ch}$ sembrano indicare che $M_\pi \neq M_\delta$ e $\chi_{U(1)} \neq 0$ fino ad una temperatura $T_{U(1)} \simeq 1.3 T_{ch}$ [11, 12, 13, 14], ovvero che la simmetria $U(1)$ assiale rimane rotta anche *sopra* la transizione chirale. Tuttavia, a temperature superiori a T_{ch} il condensato chirale si annulla: un modo per rendere diversa da zero la (1.66) è assumere che esista un altro condensato locale (si veda la Figura 1.2) che connette 4 campi fermionici. Questo condensato, che rappresenta un parametro d'ordine per la simmetria $U(1)$ assiale, deve mantenersi non nullo anche a temperature superiori a T_{ch} fino a $T_{U(1)}$.

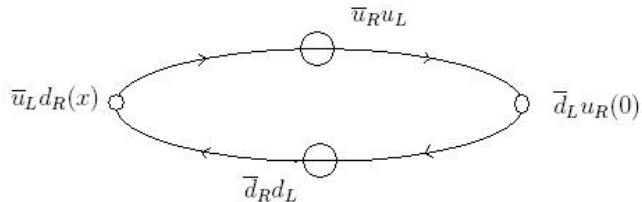


Figura 1.1: Rappresentazione diagrammatica del contributo a $\mathcal{D}_{U(1)}$ dovuto al condensato chirale.

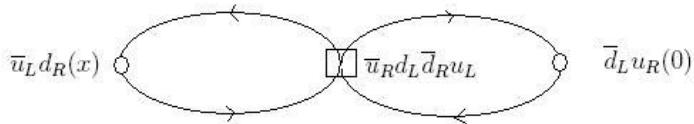


Figura 1.2: Rappresentazione diagrammatica del contributo a $\mathcal{D}_{U(1)}$ dovuto al condensato $U(1)$ assiale.

1.5.3 Il condensato $U(1)$ assiale

Le osservazioni appena fatte su $\mathcal{D}_{U(1)}(x)$ forniscono delle valide indicazioni per individuare quale sia il condensato assiale $\mathcal{C}_{U(1)}^{(L)}$ (per L generico) che segnala la rottura spontanea di $U(1)$ assiale. Seguendo le Ref. [15, 16, 17, 18],

adottiamo per $\mathcal{C}_{U(1)}^{(L)}$ il valore d'aspettazione sul vuoto dell'operatore a $2L$ fermioni:

$$\mathcal{O}_{U(1)}^{(L)} \sim \det_{ij} \left[\bar{q}_i \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) q_j \right] + h.c. = \det_{ij} (\bar{q}_{iR} q_{jL}) + \det_{ij} (\bar{q}_{iL} q_{jR}) \quad (1.67)$$

Assumeremo quindi che

$$\mathcal{C}_{U(1)}^{(L)} = \langle \mathcal{O}_{U(1)}^{(L)} \rangle \quad (1.68)$$

L'operatore $\mathcal{O}_{U(1)}^{(L)}$ è stato proposto inizialmente da Kobayashi e Maskawa [20], come vertice efficace in un'estensione del modello di Nambu–Jona-Lasinio, e successivamente introdotto da 'tHooft [5] nello studio della Lagrangiana efficace dei quark nel campo di un istantone

Sotto una generica trasformazione $U(L)_V \otimes U(L)_A$ i campi dei quark si trasformano come in (1.22) e, quindi, il campo $\mathcal{O}_{U(1)}^{(L)}$ si trasforma come

$$\mathcal{O}_{U(1)}^{(L)} \rightarrow \det(\tilde{V}_L) \det(\tilde{V}_R)^* \det_{ij} (\bar{q}_{iR} q_{jL}) + h.c. \quad (1.69)$$

da cui vediamo che $\mathcal{O}_{U(1)}^{(L)}$ è invariante sotto trasformazioni $SU(L)_V \otimes SU(L)_A \otimes U(1)_V$ mentre sotto una trasformazione $U(1)_A$

$$q \rightarrow e^{-i\alpha\gamma^5} q$$

si trasforma come

$$\mathcal{O}_{U(1)}^{(L)} \rightarrow e^{-2iL\alpha} \det_{ij} (\bar{q}_{iR} q_{jL}) + h.c. \quad (1.70)$$

Nella (1.67) gli indici i e j si riferiscono al flavour dei quarks; gli indici di colore non sono esplicitamente indicati, ma devono essere tali che l'operatore $\mathcal{O}_{U(1)}^{(L)}$ sia un singoletto di colore. Tuttavia, anche imponendo l'invarianza sotto le trasformazioni del gruppo di *gauge* rimane una arbitrarietà residua nell'arrangiare gli indici di colore. Questa può essere completamente rimossa se si impone che il condensato $\mathcal{C}_{U(1)}^{(L)}$ sia indipendente dal condensato $\langle \bar{q}q \rangle$. Per far ciò è sufficiente imporre che la parte disconnessa di $\mathcal{C}_{U(1)}^{(L)}$ (proporzionale a potenze di $\langle \bar{q}q \rangle$) sia nulla.

Vediamo, come esempio, quale è l'espressione dettagliata di $\mathcal{C}_{U(1)}^{(L)}$ nel caso di maggiore interesse per noi, quello in cui $L = 2$. Per generalità assumeremo che il gruppo di *gauge* sia $SU(N_c)$. Il più generale operatore hermitiano locale senza derivate che sia un singoletto di colore, invariante sotto trasformazioni di parità e che goda delle proprietà di trasformazione chirale (1.70) è dato

da (usando le relazioni di Fierz per i campi spinoriali e per i generatori di $SU(N_c)$ nella rappresentazione fondamentale):

$$\mathcal{O}_{U(1)}^{(L=2)}(\alpha_0, \beta_0) = F_{bd}^{ac}(\alpha_0, \beta_0) \epsilon^{st} (\bar{q}_{1R}^a q_{sL}^b \cdot \bar{q}_{2R}^c q_{tL}^d + \bar{q}_{1L}^a q_{sR}^b \cdot \bar{q}_{2L}^c q_{tR}^d) \quad (1.71)$$

dove $a, b, c, d = 1, 2, \dots, N_c$ sono gli indici di colore e $s, t = 1, 2$ sono quelli di sapore⁹. Il tensore di colore $F_{bd}^{ac}(\alpha_0, \beta_0)$, funzione di due arbitrari parametri reali α_0 e β_0 , è dato da

$$F_{bd}^{ac}(\alpha_0, \beta_0) = \alpha_0 \delta_b^a \delta_d^c + \beta_0 \delta_d^a \delta_b^c, \quad (1.72)$$

mentre $\epsilon^{st} = -\epsilon^{ts}$ con $\epsilon^{12} = 1$. Come detto, per ottenere un parametro d'ordine per la simmetria $U(1)$ assiale, prendiamo il valore d'aspettazione sul vuoto dell'operatore $\mathcal{O}_{U(1)}$, ossia

$$\mathcal{C}_{U(1)}^{(L=2)}(\alpha_0, \beta_0) \equiv \langle \mathcal{O}_{U(1)}^{(L=2)}(\alpha_0, \beta_0) \rangle. \quad (1.73)$$

I parametri α_0 e β_0 vengono fissati dalla richiesta che il condensato (1.71) sia indipendente dall'usuale condensato chirale¹⁰ $\langle \bar{q}q \rangle$. Come è stato osservato da Shifman, Vainshtein e Zakharov in [46], un generico elemento di matrice nella forma¹¹ $\langle \bar{q}\Gamma_1 q \cdot \bar{q}\Gamma_2 q \rangle$ riceve un considerevole contributo da $\langle \bar{q}q \rangle^2$ generato dall'inserzione dello stato di vuoto tra tutti i canali; questo contributo altro non è che la parte disconnessa dell'elemento di matrice iniziale. Più in particolare avremo che

$$\langle \bar{q}\Gamma_1 q \cdot \bar{q}\Gamma_2 q \rangle_{disc} = \frac{1}{G^2} [(\text{Tr}\Gamma_1 \cdot \text{Tr}\Gamma_2) - \text{Tr}(\Gamma_1 \Gamma_2)] \langle \bar{q}q \rangle^2; \quad (1.74)$$

il fattore di normalizzazione G è definito da

$$\langle \bar{q}_A q_B \rangle = \frac{\delta_{AB}}{G} \langle \bar{q}q \rangle, \quad \text{i.e.,} \quad G = \delta_{AA} \quad (1.75)$$

dove $\bar{q}q = \sum_A \bar{q}_A q_A$ e A e B sono indici collettivi che includono spin, colore e *flavour* (avremo in sostanza che $G = 4 \cdot L \cdot N_c$). In termini del nostro operatore $\mathcal{O}_{U(1)}$ troviamo che

$$\langle \mathcal{O}_{U(1)}^{(L=2)}(\alpha_0, \beta_0) \rangle_{disc} = \frac{1}{16N_c} [N_c(2\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_0 + 2\beta_0)] \langle \bar{q}q \rangle^2 \quad (1.76)$$

⁹Gli indici di Dirac sono invece contratti tra i primi e i secondi campi dei quark e i terzi e i quarti.

¹⁰In realtà risulterà fissato soltanto il loro rapporto.

¹¹ Γ_1 e Γ_2 sono generiche matrici che contengono indici di Dirac, colore e sapore.

che si annulla se prendiamo α_0 e β_0 come segue:

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0} = -\frac{2N_c + 1}{N_c + 2}. \quad (1.77)$$

In definitiva, abbiamo trovato che la scelta più corretta per il condensato $U(1)$ assiale (nel senso che è indipendente dal condensato chirale $\langle\bar{q}q\rangle$) è data da (a parte un fattore moltiplicativo):

$$\langle(\delta_b^a\delta_d^c - \frac{2N_c + 1}{N_c + 2}\delta_d^a\delta_b^c)\epsilon^{st}(\bar{q}_{1R}^aq_{sL}^b \cdot \bar{q}_{2R}^cq_{tL}^d + \bar{q}_{1L}^aq_{sR}^b \cdot \bar{q}_{2L}^cq_{tR}^d)\rangle. \quad (1.78)$$

che nel caso di interesse fisico ($N_c = 3$) diventa:

$$\mathcal{C}_{U(1)}^{(L=2)} = \langle(\delta_b^a\delta_d^c - \frac{7}{5}\delta_d^a\delta_b^c)\epsilon^{st}(\bar{q}_{1R}^aq_{sL}^b \cdot \bar{q}_{2R}^cq_{tL}^d + \bar{q}_{1L}^aq_{sR}^b \cdot \bar{q}_{2L}^cq_{tR}^d)\rangle. \quad (1.79)$$

Dal risultato (1.78) vediamo una caratteristica non banale del condensato $U(1)$ assiale: esso risulta essere di ordine $\mathcal{O}(N_c)$ rispetto ad una espansione a grandi N_c (in quanto la parte disconnessa, proporzionale a $\langle\bar{q}q\rangle^2$ e quindi a N_c^2 , è stata posta uguale a zero). A questo stesso risultato si può giungere, come fatto in Ref.[17], richiedendo che le *identità di Ward* rilevanti per la simmetria $U(1)$ assiale siano valide anche con l'aggiunta del condensato $U(1)$ assiale.

La forma dettagliata del condensato $U(1)$ assiale per $L = 3$ è stata determinata in [25]. Anche in questo caso, la richiesta che $\mathcal{C}_{U(1)}^{(L=3)}$ sia indipendente da $\langle\bar{q}q\rangle$ determina in maniera univoca (a meno di un fattore moltiplicativo) l'espressione per il condensato chirale.

Capitolo 2

Lagrangiane chirali efficaci

2.1 I gradi di libertà efficaci della QCD

Abbiamo detto nel capitolo precedente che una delle caratteristiche peculiari della QCD è il cosiddetto *”confinamento”*, secondo cui tutti gli stati adronici osservabili devono essere dei singoletti di colore, cioè stati neutri sotto l’azione del gruppo $SU(3)_c$. La conseguenza più immediata di tale proprietà è l’impossibilità di isolare (e quindi osservare direttamente) i singoli gradi di libertà fondamentali della QCD, che sono i quark e i gluoni. Come abbiamo già detto nel Capitolo 1, gli stati fisici della teoria (gli *”adroni”*) sono stati legati di quarks, antiquarks e gluoni, invarianti sotto $SU(3)$ di colore. I gradi di libertà *”efficaci”* della QCD possono quindi essere considerati come operatori composti multilineari nei campi fondamentali e la dinamica di questi gradi di libertà può essere descritta mediante una Lagrangiana efficace \mathcal{L} di bassa energia. Questa deve possedere le stesse proprietà di trasformazione della Lagrangiana fondamentale (1.7) quando le trasformazioni del gruppo agiscono sui campi da cui essa dipende. In particolare, per quanto visto nel capitolo precedente, la Lagrangiana efficace dovrà essere invariante (nel limite chirale $m_u = \dots = m_L = 0$) sotto le trasformazioni del gruppo $G = SU(L)_V \otimes SU(L)_A \otimes U(1)_V$, mentre sotto trasformazioni $U(1)_A$:

$$q_R \rightarrow e^{i\alpha} q_R , \quad q_L \rightarrow e^{-i\alpha} q_L \quad (2.1)$$

dovrà trasformarsi come [si veda la (1.49)]:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \alpha 2LQ(x) \quad (2.2)$$

2.2 La Lagrangiana chirale efficace di Witten-Di Vecchia-Veneziano *et al.*

Una Lagrangiana efficace con cui descrivere la dinamica dei mesoni (detta "di Witten-Di Vecchia-Veneziano *et al.*") che include gli effetti generati dall'anomalia (in uno sviluppo a grandi N_c) e considera gli effetti al primo ordine delle masse dei quark leggeri è stata proposta in [22, 23, 24] ed ha la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(U, U^\dagger, Q) = & \mathcal{L}_0(U, U^\dagger) + \frac{B_m}{2\sqrt{2}} \text{Tr}[MU + M^\dagger U^\dagger] + \\ & + \frac{1}{2}iQ(x)\text{Tr}[\log U - \log U^\dagger] + \frac{1}{2A}Q^2(x) \end{aligned} \quad (2.3)$$

dove $\mathcal{L}_0(U, U^\dagger)$ è la lagrangiana del modello σ :

$$\mathcal{L}_0(U, U^\dagger) = \frac{1}{2}\text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) - \frac{1}{4}\lambda_\pi^2 \text{Tr}[(UU^\dagger - \rho_\pi \cdot \mathbf{I})^2] \quad (2.4)$$

essendo \mathbf{I} la matrice identità. A volte conviene integrare via la variabile Q nella (2.3) (che equivale ad eseguire la sostituzione $Q \rightarrow -\frac{iA}{2}\text{Tr}[\log U - \log U^\dagger]$) e si trova l'espressione

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(U, U^\dagger) = & \mathcal{L}_0(U, U^\dagger) + \frac{B_m}{2\sqrt{2}} \text{Tr}[MU + M^\dagger U^\dagger] \\ & + \frac{1}{8}A \{\text{Tr}[\log U - \log U^\dagger]\}^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Nella (2.3) abbiamo indicato con

- M la matrice di massa dei quarks che entra in $\delta\mathcal{L}_M$;
- $Q(x) = \frac{g^2}{64\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a(x) F_{\rho\sigma}^a(x)$ la densità di carica topologica;
- "A" un coefficiente costante positivo dato dalla suscettività topologica della teoria di pura *gauge*:

$$A = -i \int d^4x \langle TQ(x)Q(0) \rangle|_{YM} \quad (2.6)$$

La lagrangiana (2.3) è scritta in termini del campo mesonico U_{ij} rappresentato sotto forma di una matrice complessa $L \times L$, le cui parti reali e immaginarie costituiscono l'insieme delle $2L^2$ variabili dinamiche fondamentali descritte dal modello.

In termini dei campi dei quarks si ha che:

$$U_{ij} \sim \bar{q}_j \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) q_i = \bar{q}_{jR} q_{iL}. \quad (2.7)$$

Sotto la trasformazione di inversione spaziale $(x^0, \vec{x}) \xrightarrow{P} (x^0, -\vec{x})$ i campi $q_{iL}(x^0, \vec{x})$ e $q_{iR}(x^0, \vec{x})$ si trasformano come:

$$\begin{cases} q_{iL}(x^0, \vec{x}) \xrightarrow{P} q_{iR}(x^0, -\vec{x}) \\ q_{iR}(x^0, \vec{x}) \xrightarrow{P} q_{iL}(x^0, -\vec{x}) \end{cases} \quad (2.8)$$

Questo implica che il campo mesonico si trasforma secondo la legge

$$U_{ij}(x^0, \vec{x}) = \bar{q}_{jR} q_{iL}(x^0, \vec{x}) \xrightarrow{P} \bar{q}_{jL} q_{iR}(x^0, -\vec{x}) = U_{ij}^\dagger(x^0, -\vec{x}) \quad (2.9)$$

ossia

$$U(x^0, \vec{x}) \xrightarrow{P} U^\dagger(x^0, -\vec{x}). \quad (2.10)$$

Da questa espressione vediamo che le parti reali degli elementi della matrice U descrivono i gradi di libertà scalari (per esempio, nel caso $L = 2$, gli stati σ e δ introdotti nella Tabella 1.2), mentre le parti immaginarie descrivono gli stati pseudoscalari (sempre nel caso $L = 2$, gli stati η e π della Tabella 1.2).

Invece, sotto una trasformazione del gruppo chirale $U(L)_L \otimes U(L)_R$

$$q_L \rightarrow \tilde{V}_L q_L, \quad q_R \rightarrow \tilde{V}_R q_R$$

il nostro campo efficace mesonico si trasformerà come

$$U \rightarrow \tilde{V}_L U \tilde{V}_R^\dagger. \quad (2.11)$$

Vediamo quindi che $\mathcal{L}_0(U, U^\dagger)$ è invariante sotto il gruppo $U(L)_V \otimes U(L)_A$. Invece, nel limite chirale ($m_i = 0$), $\mathcal{L}(U, U^\dagger, Q)$ risulta invariante solo sotto il sottogruppo $SU(L)_V \otimes SU(L)_A \otimes U(1)_V$, mentre si trasforma come in Eq.(2.2) sotto la trasformazione $U(1)$ assiale (2.1). Infatti, per la legge di trasformazione (2.11), il campo mesonico U varia secondo la legge $U \rightarrow e^{-i2\alpha} U$ ed è immediato verificare che il termine anomalo

$$\frac{1}{2} iQ(x) \text{Tr}[\log U - \log U^\dagger] + \frac{1}{2A} Q^2(x) \quad (2.12)$$

fa sì che la Lagrangiana efficace (2.3) riproduca esattamente la legge di trasformazione (2.2). Rispetto ad una espansione a grandi N_c abbiamo visto che tale termine anomalo risulta essere di ordine $1/N_c$ essendo tale la Q :

questa è l'espressione formale del fatto che gli effetti generati dall'anomalia devono annullarsi nel limite $N_c \rightarrow \infty$. Vediamo qui il ruolo di primo piano che riveste l'espansione $1/N_c$ se vogliamo avere la possibilità di "spegnere" l'anomalia.

Nel modello di Lagrangiana efficace (2.3)-(2.4), le proprietà di simmetria dello stato di vuoto sono determinate dal segno del parametro ρ_π che compare nel termine di potenziale $V(U, U^\dagger) = \frac{1}{4}\lambda_\pi^2 \text{Tr}[(UU^\dagger - \rho_\pi \cdot \mathbf{I})^2]$ della Lagrangiana (2.4): a seconda del suo valore, infatti, il punto di minimo di V (che altro non è che il valore d'aspettazione sul vuoto \bar{U} del campo mesonico U) assume valori invarianti sotto tutto il gruppo chirale o solamente sotto un suo sottogruppo. In particolare, se $\rho_\pi > 0$ la simmetria chirale è spontaneamente rotta da un valore di \bar{U} diverso da zero, che si può scegliere essere

$$\bar{U}|_{\rho_\pi > 0} = \sqrt{\rho_\pi} \cdot \mathbf{I} \quad (2.13)$$

e che è invariante solamente sotto il sottogruppo $SU(L)_V$; se invece $\rho_\pi < 0$ allora avremo che

$$\bar{U}|_{\rho_\pi < 0} = 0 \quad (2.14)$$

che è invariante sotto tutto il gruppo $SU(L)_V \otimes SU(L)_A$, segnalando così che la simmetria chirale è realizzata alla Wigner-Weyl.

Poichè, come abbiamo visto nel precedente capitolo, la restaurazione o meno della simmetria chirale è legata alla temperatura T , possiamo includerne gli effetti sul modello che stiamo studiando assumendo che il parametro ρ_π da cui dipende $V(U, U^\dagger)$ sia una funzione di T . E' quindi chiaro che la temperatura T_{ρ_π} alla quale esso si annulla rappresenta, almeno in questo modello, proprio la temperatura critica T_{ch} alla quale avviene la transizione chirale. Per riprodurre la struttura di fase della QCD dobbiamo quindi assumere che il parametro ρ_π vari con la temperatura secondo la seguente tabella:

$T < T_{ch}$	$T = T_{ch}$	$T > T_{ch}$
$\frac{1}{2}F_\pi^2 > 0$	0	$-\frac{1}{2}B_\pi^2 < 0$

Tabella 2.1: Dipendenza del parametro ρ_π dalla temperatura

Parametrizzazioni lineari e non lineari. Come abbiamo visto nel Capitolo 1, il teorema di Goldstone ci dice che se una simmetria continua e globale della Lagrangiana è spontaneamente rotta, allora nello spettro degli stati fisici compaiono particelle a massa nulla. Oltre a questi bosoni di Goldstone, che nel nostro caso sono rappresentati dal tripletto dei π (se prendiamo $L = 2$)

o dall'ottetto dei mesoni $J^P = 0^-$ (se $L = 3$), sono presenti nello spettro mesonico anche stati "pesanti", nel senso che le loro masse risultano essere dell'ordine di Λ_{QCD} . Tuttavia, a basse energie, questi stati "pesanti" possono essere considerati come dei campi statici che sono disaccoppiati da tutti gli altri e la dinamica della teoria sarà dominata soltanto dai bosoni di Goldstone. Un siffatto scenario può essere riprodotto tramite il modello σ (2.4) se esprimiamo il campo U nella forma non lineare (detta "*decomposizione polare*"):

$$U(x) = H(x)\Gamma(x) \quad (2.15)$$

dove $H(x)$ è una matrice hermitiana $L \times L$ e $\Gamma(x)$ è un elemento generico del gruppo $SU(L)$.

Se nella (2.4) poniamo $\rho_\pi = \frac{F_\pi^2}{2} > 0$, rompendo così spontaneamente la simmetria chirale, possiamo esprimere U nella forma:

$$U(x) = \left(\frac{F_\pi}{\sqrt{2}} \cdot \mathbf{I} + \tilde{H}(x) \right) e^{i \frac{\sqrt{2}}{F_\pi} \Phi(x)} \quad (2.16)$$

dove:

- $\frac{F_\pi}{\sqrt{2}}$ è il valore d'aspettazione sul vuoto del campo U ;
- $\tilde{H}(x)$ è una matrice hermitiana che è nulla al minimo di V e descrive le fluttuazioni dei campi mesonici scalari;
- $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{a=1}^{L^2-1} \pi^a(x) \tau^a + \frac{S_\pi(x)}{\sqrt{L}} \mathbf{I}$, dove τ^a sono i generatori dell'algebra di $SU(L)$ nella rappresentazione fondamentale e sono normalizzati secondo la relazione $\text{Tr}(\tau^a \tau^b) = 2\delta_{ab}$ (ovvero: $\tau^a = 2T^a$; per $L = 2$, τ^a ($a = 1, 2, 3$) sono le matrici di Pauli, mentre, per $L = 3$, τ^a ($a = 1, 2, \dots, 8$) sono le matrici di Gell-Mann). Questa matrice descrive le eccitazioni pseudoscalari π^a e S_π , aventi un valore d'aspettazione sul vuoto uguale a zero.

Sostituendo l'espressione (2.16) nella Lagrangiana (2.4) troviamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & \frac{1}{2} \text{Tr}[\partial_\mu \tilde{H} \partial^\mu \tilde{H}] + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{L^2-1} \partial_\mu \pi^a \partial^\mu \pi^a \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu S_\pi \partial^\mu S_\pi - \frac{\lambda_\pi^2}{2} F_\pi^2 \text{Tr}[\tilde{H}^2] + \dots \end{aligned} \quad (2.17)$$

dove i punti di sospensione si riferiscono a termini costanti oppure di ordine tre o superiore nei campi. Da questa espressione vediamo che:

- i campi $\pi^a(x)$ e S_π sono a massa nulla: essi descrivono proprio i bosoni di Goldstone generati rispettivamente dalla rottura spontanea della simmetria $SU(L)$ chirale e $U(1)$ assiale;
- le fluttuazioni descritte dal campo $\tilde{H}(x)$ hanno masse quadre uguali a $\lambda_\pi^2 F_\pi^2$.

Così, finchè la simmetria della Lagrangiana (2.4) sotto le trasformazioni (2.11) è spontaneamente rotta (i.e. ci troviamo a $T < T_{ch}$) e noi siamo interessati a descrivere la dinamica dei gradi di libertà efficaci a bassa energia (ossia i campi π^a e S_π che sono a massa nulla) possiamo disaccoppiare gli stati massivi \tilde{H} considerando il limite $\lambda_\pi^2 \rightarrow \infty$; così facendo, infatti, queste fluttuazioni avranno una massa infinita e i campi $\tilde{H}(x)$ tendono a zero (limite "statico"). Per $T < T_{ch}$ potremo, quindi, trascurare in partenza le fluttuazioni descritte da \tilde{H} ed esprimere il campo mesonico U nella forma

$$U = \frac{F_\pi}{\sqrt{2}} e^{i \frac{\sqrt{2}}{F_\pi} \Phi} \quad (2.18)$$

essendo Φ la matrice in Eq.(2.16). Parleremo in questo caso di "*modello- σ non lineare*".

Questa scelta, tuttavia, eliminando dalla dinamica della teoria i gradi di libertà massivi, è utile solo finchè la simmetria di \mathcal{L}_0 è realizzata alla Nambu-Goldstone. Invece, quando l'invarianza sotto trasformazioni chirali di \mathcal{L}_0 è realizzata alla Wigner-Weyl (i.e. ci troviamo a $T > T_{ch}$) non avremo più i bosoni di Goldstone (pseudoscalari) che dominano la dinamica a bassa energia e pertanto non potremo più trascurare i gradi di libertà scalari. In questo caso dovremo utilizzare per il campo U una parametrizzazione che tenga in considerazione *tutte* le variabili dinamiche della teoria (sia scalari che pseudoscalari), come ad esempio quella *lineare* (di cui faremo uso nei successivi capitoli) dove il campo U è espresso nella forma

$$U_{ij} = a_{ij} + i b_{ij} \quad (2.19)$$

essendo a_{ij} e b_{ij} dei generici coefficienti reali, dipendenti dalle coordinate spazio-temporali x . Questi coefficienti sono proprio i campi scalari (a_{ij}) e pseudoscalari (b_{ij}) della teoria.

Una forma differente di Lagrangiana efficace rispetto a quella in Eq.(2.3) è stata proposta da 'tHooft e Raby in Ref.[5, 47] e ampiamente studiata (si veda, ad esempio, la Ref.[39]) in diversi contesti. Per riprodurre in termini della teoria efficace la rottura della simmetria $U(1)$ assiale della teoria

fondamentale generata dagli istantoni, 'tHooft [5] suggerì di considerare la Lagrangiana

$$\tilde{\mathcal{L}}(U, U^\dagger) = \mathcal{L}_0(U, U^\dagger) + \frac{B_m}{2\sqrt{2}} \text{Tr}[MU + M^\dagger U^\dagger] + \mathcal{L}_I(U, U^\dagger) \quad (2.20)$$

dove $\mathcal{L}_0(U, U^\dagger)$ è la solita Lagrangiana del modello σ definita in Eq. (2.4), mentre $\mathcal{L}_I(U, U^\dagger)$ è un termine della forma

$$\mathcal{L}_I = c_I [\det U + \det U^\dagger]. \quad (2.21)$$

che rappresenta, in termini delle nostre variabili efficaci, il vertice di interazione a $2L$ fermioni generato dal campo di un instantone¹. Con tale termine si riesce, in effetti, a rompere l'invarianza della (2.20) sotto trasformazioni $U(1)_A$ e a dare una giustificazione della grande massa dell' η' (si veda, ad esempio, la Ref.[48]).

Tuttavia, questo termine di rottura della simmetria $U(1)$ assiale non risulta soddisfacente per due motivi:

- il termine \mathcal{L}_I non varia "correttamente" sotto la trasformazione $U(1)_A$ (2.1): per l'espressione (2.7) del campo mesonico U si ha infatti che

$$c_I [\det U + \det U^\dagger] \rightarrow c_I [e^{-2iL\alpha} \det U + e^{2iL\alpha} \det U^\dagger] \quad (2.22)$$

che non riproduce in alcun modo la legge di trasformazione (2.2);

- come ha osservato Witten nella Ref.[22], esso risulta insoddisfacente anche dal punto di vista dell'espansione $1/N_c$: il termine (2.21) quando viene sviluppato in potenze del campo di singoletto $\eta' = S_\pi$, contiene potenze arbitrariamente grandi del campo η' ; tuttavia come spiegato nelle Ref. [9, 10, 49] le interazioni indotte dall'anomalia devono essere, all'ordine dominante in $1/N_c$, solamente quadratiche in η' .

L'interazione che gode delle corrette proprietà rispetto alle suddette richieste è invece un termine nella forma (2.12) che, come abbiamo visto, riproduce la corretta legge di trasformazione (2.2) e, se integriamo la variabile Q dalla Lagrangiana (2.3), troviamo la forma (2.5) che risulta essere soltanto quadratica nel campo η' , proprio come richiesto dal conteggio in potenze di N_c .

¹Più precisamente il termine " $\det U$ " è generato dal campo di un instantone mentre " $\det U^\dagger$ " da quello di un anti-istantone.

2.3 La Lagrangiana chirale efficace con l'inclusione del condensato $U(1)$ assiale

La Lagrangiana efficace (2.3) definita nella precedente sezione considera come parametro d'ordine per le simmetrie $SU(L)$ chirale e $U(1)$ assiale l'usuale condensato chirale $\langle\bar{q}q\rangle$: quando questo è diverso da zero sia $SU(L)\times SU(L)$ che $U(1)_A$ sono spontaneamente rotte sul vuoto. Tuttavia, se assumiamo che la restaurazione della simmetria assiale avvenga a temperature superiori di quella alla quale viene ripristinata quella chirale sorge la necessità, come abbiamo visto nel capitolo precedente, di introdurre un parametro d'ordine relativo alla sola simmetria $U(1)_A$. Gli effetti di questo condensato sulla dinamica dei gradi di libertà efficaci possono essere descritti usando una Lagrangiana efficace che include una variabile di campo X associata al condensato $U(1)$ assiale.

Per identificare quale debba essere questa variabile è utile richiamare le *identità di Ward* derivate dall'invarianza sotto trasformazioni $U(1)$ assiali di \mathcal{L}_{QCD}^0 . Si trova che quelle rilevanti sono date da [16]

$$\int d^4x \langle T\partial^\mu J_{5,\mu}^{(L)}(x) i\bar{q}\gamma_5 q(0) \rangle = 2i\langle\bar{q}q\rangle \quad (2.23)$$

$$\int d^4x \langle T\partial^\mu J_{5,\mu}^{(L)}(x) \mathcal{F}_{U(1)}^{(L)}(0) \rangle = 2Li\langle\mathcal{O}_{U(1)}^{(L)}(0)\rangle \quad (2.24)$$

dove $J_{5,\mu} = \bar{q}\gamma_\mu\gamma_5 q$, $\mathcal{O}_{U(1)}^{(L)} \sim [\det_{st}(\bar{q}_{sR}q_{tL}) + \det_{st}(\bar{q}_{sL}q_{tR})]$ è l'operatore a $2L$ fermioni definito nel precedente capitolo e $\mathcal{F}_{U(1)}^{(L)}$ è un operatore (hermitiano!) il cui contenuto in termini dei quarks è dato da

$$\mathcal{F}_{U(1)}^{(L)} \sim i[\det_{st}(\bar{q}_{sR}q_{tL}) - \det_{st}(\bar{q}_{sL}q_{tR})] \quad (2.25)$$

Se $\langle\bar{q}q\rangle = 0 \neq 0$ allora la prima di queste identità ci dice che deve esistere uno stato mesonico interpolato dall'operatore $i\bar{q}\gamma_5 q(x)$. Allo stesso modo, se $\langle\mathcal{O}_{U(1)}^{(L)}(0)\rangle \neq 0$, la (2.24) implica l'esistenza di uno stato mesonico a $2L$ quarks interpolato dall'operatore $\mathcal{F}_{U(1)}^{(L)}$.

Ora, è facile vedere che l'operatore $i\bar{q}\gamma_5 q(x)$ e il condensato chirale $\langle\bar{q}q\rangle$ possono essere espressi in funzione di U tramite le relazioni

$$\begin{cases} i\bar{q}\gamma^5 q \sim i(\text{Tr}U - \text{Tr}U^\dagger) \\ \bar{q}q \sim (\text{Tr}U + \text{Tr}U^\dagger) \end{cases} \quad (2.26)$$

In maniera del tutto analoga, definiamo la variabile di campo X (a meno di costanti moltiplicative) come

$$X \sim \det_{st}(\bar{q}_{sR}q_{tL}). \quad (2.27)$$

Così facendo gli operatori $\mathcal{F}_{U(1)}^{(L)}$ e $\mathcal{O}_{U(1)}^{(L)}$ si esprimono in funzione di X come segue:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{U(1)}^{(L)} \sim i(X - X^\dagger) \\ \mathcal{O}_P^L \sim (X + X^\dagger) \end{cases} \quad (2.28)$$

Sotto la trasformazione di parità (2.8), il campo X si trasformerà secondo la legge:

$$X(x^0, \vec{x}) \xrightarrow{P} X^\dagger(x^0, -\vec{x}) \quad (2.29)$$

Invece, come abbiamo già visto nel capitolo precedente, la legge di trasformazione del campo X sotto l'azione di un elemento del gruppo $U(L) \otimes U(L)$ è data da

$$X \rightarrow \det(\tilde{V}_L) \det(\tilde{V}_R)^* X. \quad (2.30)$$

X è quindi invariante sotto il gruppo $SU(L)_A \otimes SU(L)_V \otimes U(1)_V$, mentre sotto una trasformazione $U(1)_A$ ($q \rightarrow e^{-i\alpha\gamma^5} q$) si trasforma come $X \rightarrow e^{-2iL\alpha} X$.

La Lagrangiana chirale $\mathcal{L}(U, U^\dagger, X, X^\dagger, Q)$ che vogliamo costruire deve godere delle stesse proprietà di simmetria della Lagrangiana fondamentale anche con l'aggiunta del campo X . In particolare dovrà:

- essere invariante sotto trasformazioni del gruppo $U(L) \otimes U(L)$ trascu- rando i termini di massa dei quarks e gli effetti generati dall'anomalia $U(1)$;
- trasformarsi come in Eq.(2.2) sotto l'azione del gruppo $U(1)_A$.

E' quindi naturale cercare $\mathcal{L}(U, U^\dagger, X, X^\dagger, Q)$ come un'estensione di (2.3). La più semplice estensione della (2.3) che tiene conto di quanto appena detto è data da (si veda la Ref.[15]):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(U, U^\dagger, X, X^\dagger, Q) = & \frac{1}{2} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + \frac{1}{2} \partial_\mu X \partial^\mu X^\dagger \\ & - V(U, U^\dagger, X, X^\dagger) + \frac{1}{2} iQ(x)\omega_1 \text{Tr}[\log U - \log U^\dagger] \\ & + \frac{1}{2} iQ(x)(1 - \omega_1)[\log X - \log X^\dagger] + \frac{1}{2A} Q^2(x) \end{aligned} \quad (2.31)$$

dove

$$\begin{aligned}
 V(U, U^\dagger, X, X^\dagger) = & \frac{1}{4} \lambda_\pi^2 \text{Tr}[(UU^\dagger - \rho_\pi)^2] + \frac{1}{4} \lambda_X^2 [XX^\dagger - \rho_X]^2 \\
 & - \frac{B_m}{2\sqrt{2}} \text{Tr}[MU + M^\dagger U^\dagger] - \frac{c_1}{2\sqrt{2}} [X^\dagger \det U + X \det U^\dagger].
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Nel seguito sarà a volte utile integrare la variabile $Q(x)$ in (2.31) (così come era stato fatto per la (2.3)) ponendo $Q = -\frac{iA}{2}\{\omega_1 \text{Tr}[\log U - \log U^\dagger] + (1 - \omega_1)[\log X - \log X^\dagger]\}$. Otteniamo così che

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(U, U^\dagger, X, X^\dagger) = & \frac{1}{2} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + \frac{1}{2} \partial_\mu X \partial^\mu X^\dagger \\
 & - \tilde{V}(U, U^\dagger, X, X^\dagger)
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

avendo posto

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}(U, U^\dagger, X, X^\dagger) = & V(U, U^\dagger, X, X^\dagger) \\
 & - \frac{1}{8} A \{\omega_1 \text{Tr}[\log U - \log U^\dagger] + (1 - \omega_1)[\log X - \log X^\dagger]\}^2
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Tutti i parametri che compaiono in (2.31) e (2.32) sono da considerarsi, come già detto in precedenza, funzioni della temperatura T . In particolare ci aspettiamo che il parametro ρ_X determini il valore d'aspettazione sul vuoto del campo X e sia quindi responsabile della realizzazione o meno della simmetria $U(1)$ assiale. Per riprodurre lo scenario a cui noi siamo interessati, ossia dove $T_{U(1)} > T_{ch}$, dobbiamo assumere che i suddetti parametri si comportino in funzione della temperatura come mostrato nella Tabella 2.2.

$T < T_{\rho_\pi}$	$T_{\rho_\pi} < T < T_{U(1)}$	$T > T_{U(1)}$
$\rho_\pi > 0$	$\rho_\pi < 0$	$\rho_\pi < 0$
$\rho_X > 0$	$\rho_X > 0$	$\rho_X < 0$

Tabella 2.2: Dipendenza dei parametri ρ_π e ρ_X dalla temperatura

Vedremo, nella Sezione 2.6, che nel caso $L \geq 3$ si ha sempre $T_{ch} = T_{\rho_\pi}$. Invece, nel Capitolo 3, vedremo che nel caso $L = 2$ la situazione è più complessa, avendosi, in tal caso, che $T_{\rho_\pi} < T_{ch} < T_{U(1)}$.

Per quanto riguarda il parametro ω_1 , esso deve essere tale da evitare un comportamento divergente del termine contenente l'anomalia. Nel limite

chirale, infatti, il valore di aspettazione per il campo U a $T > T_{ch}$ è nullo. Se $A(T) > 0$ per $T = T_{ch}$ l'unico modo per evitare un comportamento singolare del termine proporzionale a $\log U$ e $\log U^\dagger$ in (2.34) è imporre che

$$\omega_1(T \geq T_{ch}) = 0. \quad (2.35)$$

Per finire osserviamo che il termine

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{c_1}{2\sqrt{2}} [X^\dagger \det U + X \det U^\dagger] \quad (2.36)$$

ha una forma simile a quello (2.21) proposto da 'tHooft. Tuttavia, nel nostro caso, esso non è stato introdotto per implementare nella Lagrangiana efficace gli effetti dell'anomalia, in quanto questi sono già stati tenuti in considerazione nella (2.3). Esso è stato inserito nella Lagrangiana (2.31) perché è invariante sotto l'azione delle trasformazioni $U(1)_A$, al contrario di (2.21) che invece variava secondo la legge (2.22). Nel nostro modello, il termine (2.36) rappresenta piuttosto una interazione tra l'usuale campo mesonico e la variabile X , e in quanto tale esso è invariante sotto *tutte* le trasformazioni del gruppo $U(L) \otimes U(L)$.

Tuttavia dal termine (2.36) è possibile ritrovare \mathcal{L}_I nel caso in cui il campo X abbia un valore d'aspettazione sul vuoto \bar{X} diverso da zero, sviluppando $X = \bar{X}e^{i\beta}$ in potenze dell'eccitazione β attorno a \bar{X} (e si trova che: $c_I = \frac{c_1 \bar{X}}{2\sqrt{2}}$).

Possiamo quindi dire che la Lagrangiana (2.31) rappresenta una generalizzazione non solo del modello di Witten-Di Vecchia-Veneziano *et al.*, ma anche di quello proposto da 'tHooft. Infatti l'introduzione del campo X è quantomeno utile se vogliamo introdurre il termine a $2L$ fermioni di 'tHooft nella Lagrangiana efficace mantenendo le corrette proprietà di trasformazione richieste dalla teoria fondamentale.

2.4 Spettro di massa, condensato chirale e suscettività topologica per $T < T_{ch}$

Le caratteristiche della teoria definita dalla Lagrangiana (2.31) sono state studiate in [15, 17, 25, 21]. Riassumiamo qui brevemente i risultati trovati per $T < T_{ch}$.

2.4.1 Spettro di massa

Trovandoci a $T < T_{ch}$, per quanto detto nella Sezione 2.2, possiamo eliminare i campi scalari del modello σ lineare prendendo il limite $\lambda_\pi \rightarrow \infty$ e $\lambda_X \rightarrow \infty$.

In questo modo dai termini di potenziale troviamo che i campi U e X devono soddisfare i seguenti vincoli:

$$UU^\dagger = \sqrt{\rho_\pi} \cdot \mathbf{I} = \frac{1}{2} F_\pi^2 \cdot \mathbf{I} , \quad XX^\dagger = \sqrt{\rho_X} \equiv \frac{1}{2} F_X^2 . \quad (2.37)$$

In virtù di queste relazioni possiamo utilizzare le seguenti parametrizzazioni non lineari per i campi U e X :

$$U = \frac{F_\pi}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\sqrt{2}}{F_\pi} \Phi} , \quad X = \frac{F_X}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\sqrt{2}}{F_X} S_X} \quad (2.38)$$

dove il campo Φ è quello definito nella (2.18).

Vediamo quindi che abbiamo due diversi campi di singoletto:

- il campo S_π che è l'usuale campo di singoletto del gruppo $SU(L)$, che in termini dei campi dei quarks è dato da

$$S_\pi \sim i \sum_{i=1}^{L^2-1} (\bar{q}_{iR} q_{iL} - \bar{q}_{iL} q_{iR}) \quad (2.39)$$

- il campo S_X che è uno stato "esotico" il cui contenuto in quarks è dato da

$$S_X \sim i [\det_{st}(\bar{q}_{sL} q_{tR}) - \det_{st}(\bar{q}_{sR} q_{tL})] . \quad (2.40)$$

Sostituendo le parametrizzazioni (2.38) in (2.33) troveremo per la parte quadratica nei campi della Lagrangiana la seguente espressione

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & \frac{1}{2} \partial_\mu \pi_a \partial^\mu \pi_a + \frac{1}{2} \partial_\mu S_\pi \partial^\mu S_\pi + \frac{1}{2} \partial_\mu S_X \partial^\mu S_X - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_{il} \mu_i^2 \tau_{il}^a \tau_{li}^b \right) \pi_a \pi_b \\ & - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{L}} \sum_i \mu_i^2 \tau_{ii}^a \right) \pi_a S_\pi - \frac{1}{2L} \sum_i \mu_i^2 S_\pi^2 \\ & - \frac{1}{2} c \left(\frac{\sqrt{2L}}{F_\pi} S_\pi - \frac{\sqrt{2}}{F_X} S_X \right)^2 - \frac{1}{2} A \left[\frac{\sqrt{2L}}{F_\pi} \omega_1 S_\pi + \frac{\sqrt{2}}{F_X} (1 - \omega_1) S_X \right]^2 , \end{aligned}$$

dove si è posto

$$\mu_i^2 \equiv \frac{B_m}{F_\pi} m_i \quad (2.41)$$

$$c \equiv \frac{c_1}{\sqrt{2}} \left(\frac{F_X}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{F_\pi}{\sqrt{2}} \right)^L \quad (2.42)$$

Dalla (2.41) si può vedere che, nel limite chirale (in cui poniamo $m_i = 0$ con $i = 1, 2, \dots, L$) lo spettro degli stati fisici è costituito da $L^2 - 1$ stati di non-singololetto a massa nulla e due stati di singololetto massivi (anche nel limite non chirale!) le cui masse sono date dagli autovalori della seguente matrice di mescolamento dei campi S_π e S_X :

$$\begin{pmatrix} \frac{2L(A\omega_1^2+c)}{F_\pi^2} & \frac{2\sqrt{L}[A\omega_1(1-\omega_1)-c]}{F_\pi F_X} \\ \frac{2\sqrt{L}[A\omega_1(1-\omega_1)-c]}{F_\pi F_X} & \frac{2[A(1-\omega_1)^2+c]}{F_X^2} \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Gli autovalori di questa matrice sono uguali a

$$\lambda_\pm = \frac{Z_L \pm \sqrt{Z_L^2 - 4Q_L}}{2} \quad (2.44)$$

dove abbiamo definito Z_L e Q_L nella seguente maniera:

$$\begin{aligned} Z_L &\equiv \frac{2A[F_\pi^2(1-\omega_1)^2 + LF_X^2\omega_1^2] + 2c(F_\pi^2 + LF_X^2)}{F_\pi^2 F_X^2} \\ Q_L &\equiv \frac{4ALc}{F_\pi^2 F_X^2}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Tenendo presente che (si vedano le Ref.[15, 21])

$$F_\pi = \mathcal{O}(N_c^{1/2}), \quad F_X = \mathcal{O}(N_c^{1/2}), \quad A = \mathcal{O}(1), \quad c = \mathcal{O}(N_c), \quad (2.46)$$

questi autovalori risultano, all'ordine più basso in $1/N_c$, uguali a

$$\begin{cases} m_{S_1}^2 = \frac{2LA}{F_\pi^2 + LF_X^2} = \mathcal{O}(\frac{1}{N_c}) \\ m_{S_2}^2 = \frac{2c(F_\pi^2 + LF_X^2)}{F_\pi^2 F_X^2} = \mathcal{O}(1) \end{cases} \quad (2.47)$$

mentre i relativi autovettori sono dati da

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{\sqrt{F_\pi^2 + LF_X^2}}(F_\pi S_\pi + \sqrt{L}F_X S_X) \\ S_2 = \frac{1}{\sqrt{F_\pi^2 + LF_X^2}}(\sqrt{L}F_X S_\pi - F_\pi S_X) \end{cases} \quad (2.48)$$

Gli stati S_1 e S_2 hanno gli stessi numeri quantici ($J^P = 0^-$) e sono entrambi singoletti di $SU(L)_V$ ma hanno un diverso contenuto in quarks. Infatti, assumendo che $F_X \ll F_\pi$, troviamo che lo stato S_1 è essenzialmente uguale a S_π , ossia è essenzialmente un bilineare nei campi dei quark; invece lo stato S_2 risulta essere essenzialmente uguale a S_X che invece è uno stato "esotico" costituito da $2L$ fermioni.

Inoltre anche le loro masse hanno proprietà differenti rispetto all'estensione a grandi N_c . Vediamo infatti che il campo S_2 ha una massa non nulla

$\mathcal{O}(1)$ per $N_c \rightarrow \infty$, mentre quella del campo S_1 si annulla nel limite di grandi N_c , essendo di ordine $\mathcal{O}(\frac{1}{N_c})$. Più in particolare, facciamo adesso vedere che la particella associata a tale campo è l' η' , ossia il mesone la cui esistenza è richiesta dal meccanismo di Witten-Veneziano per annullare la suscettività topologica quando si introducono nella teoria i quarks a massa nulla e risolvere così il problema $U(1)$. Facendo uso delle leggi di trasformazione dei campi U e X sotto trasformazioni $U(1)$ assiali si trova che

$$J_{5,\mu}^{(L)} = i[Tr(U^\dagger \partial_\mu U - U \partial_\mu U^\dagger) + L(X^\dagger \partial_\mu X - X \partial_\mu X^\dagger)] \quad (2.49)$$

che, una volta sostituite le (2.38), assume la forma

$$J_{5,\mu}^{(L)} = -\sqrt{2L}\partial_\mu(F_\pi S_\pi + \sqrt{L}F_X S_X) \quad (2.50)$$

Facendo uso dei risultati (2.48) possiamo scrivere la (2.50) nella forma

$$J_{5,\mu}^{(L)} = -\sqrt{2L}F_{S_1}\partial_\mu S_1 \quad (2.51)$$

dove $F_{S_1} = \sqrt{F_\pi^2 + LF_X^2}$. Dal fatto che la corrente assiale $J_{5,\mu}^{(L)}$ ha la forma (2.51), se ne deduce che essa accoppia soltanto con il campo S_1 . Come sappiamo, la costante di decadimento del singoletto è definita dall'elemento di matrice $\langle 0 | J_{5,\mu}^{(L)} | S_1 \rangle$ e rappresenta l'intensità dell'accoppiamento tra il campo S_1 e la corrente $J_{5,\mu}^{(L)}$. Usando la (2.51) troviamo che

$$\langle 0 | J_{5,\mu}^{(L)} | S_1 \rangle = i\sqrt{2L}p_\mu F_{S_1}. \quad (2.52)$$

Abbiamo visto nel capitolo precedente che la massa del singoletto η' richiesto dal meccanismo di Witten deve soddisfare la formula di Witten (1.54), che lega tra di loro la suscettività topologica A della teoria di pura *gauge*, la massa $m_{\eta'}$ dello stato η' e la sua costante di decadimento $F_{\eta'}$. Come si vede dalla (2.47) lo stato S_1 soddisfa proprio questa relazione e può quindi essere identificato a tutti gli effetti con l' η' . Lo stato "esotico" S_2 sarà invece indicato con η_X .

Quanto fin qui detto è valido per L generico. Vediamo però adesso di capire nel dettaglio cosa succede nel caso "reale", in cui, cioè, abbiamo $L = 3$ sapori leggeri ($m_u, m_d \ll m_s \ll \Lambda_{QCD}$). In questo caso il campo Φ avrà la forma

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{a=1}^8 \pi_a(x) \lambda^a + \frac{S_\pi}{\sqrt{3}} \mathbf{I} \quad (2.53)$$

dove λ_a ($a = 1, 2, \dots, 8$) sono le matrici di Gell-Mann. In termini dei gradi di libertà fisici, avremo che i π_a descrivono i mesoni dell'ottetto mentre S_π è un

campo di singoletto di $SU(3)_V$ bilineare nei campi dei quarks. Sostituendo l'espressione (2.53) nella (2.41) troviamo che gli stati π_i con $i = 1, 2, \dots, 7$ sono diagonali e hanno masse

$$m_{\pi_{1,2}}^2 = m_{\pi^\pm}^2 = B(m_u + m_d) \quad (2.54)$$

$$m_{\pi_{4,5}}^2 = m_{K^\pm}^2 = B(m_u + m_s) \quad (2.55)$$

$$m_{\pi_{6,7}}^2 = m_{K^0, \bar{K}^0}^2 = B(m_d + m_s) \quad (2.56)$$

dove abbiamo posto $B \equiv \frac{B_m}{2F_\pi}$; invece gli stati π_3, π_8, S_π, S_X sono mescolati dalla matrice

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} B(m_u + m_d) & \frac{B\Delta}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}}B\Delta & 0 \\ \frac{B\Delta}{\sqrt{3}} & \frac{2}{3}B(\tilde{m} + 2m_s) & \frac{2\sqrt{2}}{3}B(\tilde{m} - m_s) & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}}B\Delta & \frac{2\sqrt{2}}{3}B(\tilde{m} - m_s) & \frac{6(A\omega_1^2 + c)}{F_\pi^2} + m_0^2 & \frac{2\sqrt{3}[A\omega_1(1 - \omega_1) - c]}{F_\pi F_X} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3}[A\omega_1(1 - \omega_1) - c]}{F_\pi F_X} & \frac{2[A(1 - \omega_1)^2 + c]}{F_X^2} \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

dove si è posto $m_0^2 \equiv \frac{2}{3}B(m_u + m_d + m_s)$, $\tilde{m} \equiv \frac{m_u + m_d}{2}$ e $\Delta \equiv m_u - m_d$ è il parametro che misura la violazione della simmetria $SU(2)_V$ di isospin. Poichè sperimentalmente la violazione della simmetria di isospin è molto piccola in natura, possiamo semplificare un pò il problema ponendo $\Delta = 0$. In questo limite troviamo che il π_3 diventa diagonale e con massa quadra pari a

$$m_{\pi_3}^2 = m_{\pi^0}^2 = B(m_u + m_d). \quad (2.58)$$

I rimanenti campi π_8, S_π, S_X si mescolano quindi tramite la seguente matrice di massa quadra:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}B(\tilde{m} + 2m_s) & \frac{2\sqrt{2}}{3}B(\tilde{m} - m_s) & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3}B(\tilde{m} - m_s) & \frac{6(A\omega_1^2 + c)}{F_\pi^2} + m_0^2 & \frac{2\sqrt{3}[A\omega_1(1 - \omega_1) - c]}{F_\pi F_X} \\ 0 & \frac{2\sqrt{3}[A\omega_1(1 - \omega_1) - c]}{F_\pi F_X} & \frac{2[A(1 - \omega_1)^2 + c]}{F_X^2} \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

Possiamo determinare gli autovalori della matrice \mathbf{A} cercandoli sotto forma di uno sviluppo in potenze di m_i e $1/N_c$. Utilizzando i risultati (2.46) troviamo

che

$$\begin{aligned} m_\eta^2 &= \frac{2}{3}B(\tilde{m} + 2m_s), \\ m_{\eta'}^2 &= \frac{6A}{F_\pi^2 + 3F_X^2} + \frac{F_\pi^2}{F_\pi^2 + 3F_X^2} \cdot \frac{2}{3}B(2\tilde{m} + m_s), \\ m_{\eta_X}^2 &= \frac{2c(F_\pi^2 + 3F_X^2)}{F_\pi^2 F_X^2} + \frac{3F_X^2}{F_\pi^2 + 3F_X^2} \cdot \frac{2}{3}B(2\tilde{m} + m_s) + \\ &\quad + \frac{2A[F_\pi^2(\omega_1 - 1) + 3F_X^2\omega_1]^2}{F_\pi^2 F_X^2(F_\pi^2 + 3F_X^2)}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Dalle equazioni (2.54), (2.58) e (2.60) possiamo vedere che la formula di Gell-Mann–Okubo (GMO) [29, 50]

$$3m_\eta^2 + m_\pi^2 = 4m_K^2 \quad (2.61)$$

con $m_K^2 \equiv \frac{1}{2}(m_{K^\pm}^2 + m_{K^0, \bar{K}^0}^2) = B(\tilde{m} + m_s)$, non è modificata dall'introduzione del campo S_X . Questo è dovuto al fatto che la relazione (2.61) è una conseguenza della rottura del gruppo $SU(3)_V \otimes SU(3)_A$ al sottogruppo $SU(3)_V$; pertanto l'introduzione di un condensato che rompe la sola simmetria $U(1)_A$ non può modificare questa relazione. Al contrario, la presenza del parametro d'ordine $U(1)$ assiale cambia la formula di Witten-Veneziano per la massa dell' η' (originariamente derivata in [9, 10]) nella seguente maniera [17]

$$\left(1 + 3\frac{F_X^2}{F_\pi^2}\right)m_{\eta'}^2 + m_\eta^2 - 2m_K^2 = \frac{6A}{F_\pi^2}. \quad (2.62)$$

Come si vede, l'introduzione del condensato $U(1)$ assiale apporta delle correzioni di ordine $\frac{F_X^2}{F_\pi^2}$ che tendono a zero quando tale condensato tende a zero, ossia quando $F_X \rightarrow 0$. (Naturalmente, se questo condensato fosse assente, ossia $F_X = 0$, allora il campo η_X acquisterebbe massa infinita e diventerebbe quindi un campo "statico": detto altrimenti, in questo limite S_X sarebbe forzato ad essere zero).

La "formula generalizzata di Witten-Veneziano" può essere utilizzata per dare una stima di F_X . Usando i valori sperimentali per le masse dei mesoni [28] e i risultati di reticolo per la suscettività topologica della teoria di pura gauge A della teoria $SU(3)$ di Yang-Mills [51, 43]:

$$A \simeq (180 \pm 5 \text{ MeV})^4 \quad (2.63)$$

troviamo, nei limiti della precisione ad oggi raggiunta, che un valore non nullo per F_X non è da escludere ed ha un limite superiore di

$$|F_X| \lesssim 20 \text{ MeV} \quad (2.64)$$

a fronte di un valore di F_π di $92.2(4)$ MeV. Non ci dimentichiamo, tuttavia, che questi risultati sono stati ottenuti da un modello che considera solo gli effetti all'ordine più basso dell'espansione $1/N_c$ e pertanto può avversi che gli effetti agli ordini superiori non possono essere trascurati quando prendiamo il valore reale $N_c = 3$.

Un'ultima osservazione va fatta a proposito delle relazioni (2.61) e (2.62): è stato mostrato in [17] che queste due relazioni non dipendono dal particolare modello utilizzato e pertanto acquistano il valore di "teoremi".

2.4.2 Condensato chirale e suscettività topologica

Per determinare il condensato chirale sfruttiamo il fatto che la derivata di \mathcal{L}_{QCD} rispetto alla massa m_i del quark del sapore i , è l'operatore $-\bar{q}_i q_i$. Di conseguenza la derivata dell'energia di vuoto (ossia $V(\bar{U}, \bar{U}^\dagger, \bar{X}, \bar{X}^\dagger) \equiv V_{min}$) rispetto alle masse dei quark leggeri darà proprio il valore di aspettazione $\langle \bar{q}q \rangle$:

$$\langle \bar{q}_i q_i \rangle = \frac{\partial V_{min}}{\partial m_i} \quad (2.65)$$

essendo V il potenziale in (2.32). In questo modo troveremo che nella regione $T < T_{ch}$ (all'ordine dominante nelle masse dei quark e in $\frac{1}{\lambda_\pi^2}$ e $\frac{1}{\lambda_X^2}$)

$$\langle \bar{q}_i q_i \rangle \simeq -\frac{1}{2} B_m F_\pi, \quad (2.66)$$

La suscettività topologica va determinata invertendo la matrice di massa quadra definita dalla Lagrangiana (2.31) dove la densità di carica topologica $Q(x)$ non è stata integrata. Infatti, ricordando la definizione (1.46) avremo che $\chi = -i\langle QQ \rangle(k=0)$ dove la funzione a due punti di $Q(x)$ è data da

$$\langle QQ \rangle(k) = i(\mathcal{A}^{-1}(k))_{11} \quad (2.67)$$

e $\mathcal{A}^{-1}(k)$ è la matrice inversa di $\mathcal{A}(k)$ associata alla parte quadratica nei campi $(Q, S_X, S_\pi, \pi_1, \dots)$ della Lagrangiana (2.31) nello spazio degli impulsi.

Per esempio, nel caso $L = 2$, si trova che [21]

$$\langle QQ \rangle(k=0) = iA \frac{\mu_1^2 \mu_2^2}{\frac{A(1-\omega_1)^2+c}{c} \mu_1^2 \mu_2^2 + \frac{2A}{F_\pi^2} (\mu_1^2 + \mu_2^2)} \quad (2.68)$$

Facendo uso della (2.66) troviamo che nel limite $m_i \rightarrow 0$,

$$\chi = -i\langle QQ \rangle(k=0) \xrightarrow{\sup(m_i) \rightarrow 0} -m_i \langle \bar{q}_i q_i \rangle. \quad (2.69)$$

2.5 Effetti del condensato $U(1)$ assiale sui decadimenti dei mesoni pseudoscalari

Gli effetti del condensato $U(1)$ assiale sono stati analizzati anche riguardo ai decadimenti dei mesoni pseudoscalari. In particolare, in Ref.[26] sono stati studiati gli effetti sui decadimenti radiativi dell' η e dell' η' a $T = 0$ e in Ref.[27] gli stessi decadimenti a T finita, mentre in Ref.[25] sono stati analizzati i decadimenti forti di η , η' e η_X a $T = 0$. Un confronto tra i dati sperimentali e le previsioni mostrate in Ref.[26, 27] sembra effettivamente avvalorare l'ipotesi dell'esistenza di un condensato $U(1)$ assiale; informazioni sperimentali sul comportamento a T finita non sono ancora disponibili, ma si spera di ottenerle dallo studio delle collisioni tra ioni pesanti.

Anche l'accordo tra i risultati teorici trovati in Ref.[25] coi dati sperimentali per i decadimenti $\eta, \eta' \rightarrow 3\pi$ sembra confermare l'esistenza di un condensato assiale, di intensità $F_X \simeq 24$ MeV, che corregge nella giusta "direzione" i risultati già noti; tuttavia le correzioni apportate dal valore non nullo di F_X alle precedenti previsioni (vedi Ref.[52]) riguardanti i decadimenti $\eta' \rightarrow \eta\pi^0\pi^0$ e $\eta' \rightarrow \eta\pi^+\pi^-$ non sono in grado di dare l'accordo sperato. Le correzioni trovate, infatti, abbassano ulteriormente il valore previsto in [52], già sensibilmente minore del risultato sperimentale².

L'analisi dei decadimenti dello stato η_X ha invece permesso di determinare delle relazioni tra la sua massa e la sua larghezza di decadimento che potrebbero essere utilizzate per identificare questo nuovo stato. I possibili "candidati" per lo stato η_X , che hanno gli stessi numeri quantici dell' η' ma con masse più grandi, sono [28]:

$$\begin{aligned} \eta(1295) &: \Gamma_{tot} = 55(5) \text{ MeV} \\ \eta(1405) &: \Gamma_{tot} = 51(3) \text{ MeV} \\ \eta(1475) &: \Gamma_{tot} = 85(9) \text{ MeV} \\ \eta(1760) &: \Gamma_{tot} = 96(70) \text{ MeV} \\ \eta(2225) &: \Gamma_{tot} = 185^{+70}_{-40} \text{ MeV} \end{aligned} \quad (2.70)$$

Tuttavia, per nessuno di questi stati è noto ad oggi con sufficiente precisione il valore della larghezza di decadimento in, per esempio, tre pioni e pertanto non si possono ancora avanzare ipotesi concrete su quale potrebbe essere lo stato η_X .

²Probabilmente la discrepanza tra le previsioni teoriche e le osservazioni sperimentali rispetto a questi ultimi decadimenti è dovuta al fatto che il modello che si utilizza è piuttosto semplice, essendo un'approssimazione all'ordine più basso in m_i e $1/N_c$, e può fornire, quindi, predizioni qualitative o, al massimo, semiquantitative; probabilmente previsioni migliori si trovano, come già osservato, considerando gli ordini superiori dello sviluppo $1/N_c$.

2.6 Spettro di massa, condensato chirale e suscettività topologica per $T > T_{ch}$ nel caso $L \geq 3$

Lo spettro di massa della teoria e le espressioni del condensato chirale e della suscettività topologica per $T > T_{ch}$ e nel caso $L \geq 3$ sono stati ricavati e analizzati inizialmente in Ref. [15] (si veda anche la Ref. [21]). In questa sezione vogliamo rifare tale analisi in maniera dettagliata, per poter poi confrontare i risultati con quelli che ricaveremo nel prossimo capitolo, relativi al caso $L = 2$.

2.6.1 Spettro di massa

Abbiamo visto nella Sezione 2.2, che nel modello di Lagrangiana efficace di Witten-Di Vecchia-Veneziano *et al.* (2.3) la temperatura di transizione chirale coincide con quella T_{ρ_π} alla quale il parametro ρ_π cambia segno, passando da valori positivi (per temperature minori) a valori negativi (per temperature maggiori). Verificheremo che la stessa cosa vale (almeno per $L \geq 3$) anche nel nostro caso, in cui si considera anche il condensato $U(1)$ assiale.

Secondo la Tabella 2.2 si ha che, per $T_{\rho_\pi} < T < T_{U(1)}$, $\rho_\pi \equiv -\frac{1}{2}B_\pi^2 < 0$ e $\rho_X \equiv \frac{1}{2}F_X^2 > 0$. Per determinare i punti di minimo in questo intervallo di temperatura parametrizziamo i campi U e X nella forma seguente:

$$U_{ij} = a_{ij} + ib_{ij}, \quad X = \alpha e^{i\beta}. \quad (2.71)$$

con (in maniera analoga alla (2.37)) $\beta = \frac{S_X}{\alpha}$, essendo $\bar{\alpha}$ il valore di aspettazione sul vuoto (diverso da zero!) di α .

Se trascuriamo per un attimo i contributi generati dall'anomalia (ossia consideriamo l'ordine $\mathcal{O}(N_c^0)$ delle quantità di nostro interesse), il potenziale da minimizzare è quello dato in (2.32). Con la parametrizzazione (2.71) tale potenziale è uguale a

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{4}\lambda_\pi^2 \text{Tr}[(UU^\dagger)(UU^\dagger)] + \frac{1}{4}\lambda_\pi^2 B_\pi^2(a_{ij}^2 + b_{ij}^2) - \frac{B_m}{\sqrt{2}}(m_{ij}a_{ji} - n_{ij}b_{ji}) \\ & + \frac{1}{4}\lambda_X^2 \left(\alpha^2 - \frac{1}{2}F_X^2\right)^2 \\ & - \frac{c_1}{2\sqrt{2}}[\alpha \cos \beta(\det U + \det U^\dagger) + i\alpha \sin \beta(\det U - \det U^\dagger)] \end{aligned} \quad (2.72)$$

dove abbiamo assunto, per generalità, che la matrice di massa M sia complessa: $M_{ij} = m_{ij} + in_{ij}$ con m_{ij} e n_{ij} numeri reali. Indicando con \overline{U} e \overline{X}

i valori dei campi U e X nel generico punto stazionario S , troveremo che questo è determinato dal seguente sistema di equazioni.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial a_{ij}}|_S = \frac{1}{2}\lambda_\pi^2 B_\pi^2 \bar{a}_{ij} - \frac{B_m}{\sqrt{2}} m_{ji} + \dots = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial b_{ij}}|_S = \frac{1}{2}\lambda_\pi^2 B_\pi^2 \bar{b}_{ij} + \frac{B_m}{\sqrt{2}} n_{ji} + \dots = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \alpha}|_S = \lambda_X^2 \left[\bar{\alpha}^2 - \frac{F_X^2}{2} \right] \bar{\alpha} - \frac{c_1}{2\sqrt{2}} [\cos \bar{\beta} (\det \bar{U} + \det \bar{U}^\dagger) \\ \quad + i \sin \bar{\beta} (\det \bar{U}^\dagger - \det \bar{U})] = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \beta}|_S = \frac{c_1}{2\sqrt{2}} \bar{\alpha} \cos \bar{\beta} [\tan \bar{\beta} (\det \bar{U} + \det \bar{U}^\dagger) - i (\det \bar{U}^\dagger - \det \bar{U})] = 0 \end{array} \right. \quad (2.73)$$

dove i puntini di sospensione si riferiscono a termini di ordine due o superiore nei campi. Dai primi due gruppi di equazioni troviamo che all'ordine dominante in m_i , il valore del campo U al punto stazionario è dato da

$$\bar{U} = \frac{2B_m}{\sqrt{2}\lambda_\pi^2 B_\pi^2} M^\dagger + \dots \quad (2.74)$$

dove i puntini di sospensione si riferiscono a termini di ordine due o superiore nelle masse. L'aver trovato che $\bar{U} \sim \mathcal{O}(m)$ giustifica, a posteriori, il fatto di aver trascurato nel sistema (2.73) i termini di ordine superiore a uno nei campi.

Dall'ultima equazione del sistema (2.73), troviamo invece che

$$\tan \bar{\beta} = i \frac{\det \bar{U}^\dagger - \det \bar{U}}{\det \bar{U}^\dagger + \det \bar{U}}. \quad (2.75)$$

Se ora assumiamo che la matrice di massa M sia reale e diagonale avremo che $M = M^\dagger$, e quindi, per la (2.74), che $\bar{U} = \bar{U}^\dagger$. Questa uguaglianza comporta, in virtù della (2.75), che il valore del campo $S_X = \bar{\alpha} \beta$ nel punto stazionario S è dato da

$$\bar{S}_X = 0. \quad (2.76)$$

Facendo uso dei risultati (2.76) e (2.74), troviamo per $\bar{\alpha}$ l'equazione

$$\lambda_X^2 \left[\bar{\alpha}^2 - \frac{F_X^2}{2} \right] \bar{\alpha} = \frac{c_1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2B_m}{\sqrt{2}\lambda_\pi^2 B_\pi^2} \right)^L \det M \quad (2.77)$$

Possiamo cercare le soluzioni di questa equazione sotto forma di uno sviluppo in potenze di m . Se consideriamo, per esempio, il caso $L = 3$, possiamo porre:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} = & \alpha_0 + \alpha_1 m_u + \alpha_2 m_d + \alpha_3 m_s + \\ & \alpha_{11} m_u^2 + \alpha_{12} m_u m_d + \alpha_{22} m_d^2 + \alpha_{33} m_s^2 + \alpha_{13} m_u m_s + \alpha_{23} m_d m_s + \quad (2.78) \\ & \alpha_{123} m_u m_d m_s + \dots \end{aligned}$$

troviamo le seguenti equazioni per i coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_X^2 \alpha_0 \left[\alpha_0^2 - \frac{F_X^2}{2} \right] = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0, \frac{F_X}{\sqrt{2}} \\ \\ \lambda_X^2 2\alpha_0^2 (\alpha_1 m_u + \alpha_2 m_d) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \text{ (se } \alpha_0 \neq 0) \\ \\ \lambda_X^2 2\alpha_0^2 (\alpha_{11} m_u^2 + \alpha_{12} m_u m_d + \alpha_{22} m_d^2 + \dots) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_{ij} = 0 \text{ (se } \alpha_0 \neq 0) \\ \\ \lambda_X^2 2\alpha_0^2 (\alpha_{123} m_u m_d m_s + \dots) = \frac{c_1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2B_m}{\sqrt{2}\lambda_\pi^2 B_\pi^2} \right)^L \det M \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_0 \neq 0, \alpha_{123} = \frac{c_1}{\lambda_X^2 F_X^2 \sqrt{2}} \left(\frac{2B_m}{\sqrt{2}\lambda_\pi^2 B_\pi^2} \right)^L, \alpha_{ijk} = 0 \text{ se } i = j \text{ o } i = k \text{ o } j = k. \end{array} \right. \quad (2.79)$$

Una volta noto il valore dei campi sul punto stazionario possiamo studiare la matrice delle derivate seconde del potenziale (2.32) per stabilire se si tratta o meno di un minimo: in questo caso le masse quadre dei vari mesoni sono proprio gli autovalori della matrice hessiana. Per le derivate seconde del potenziale (2.32) troviamo che al punto stazionario in esame si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 V}{\partial a_{lm} \partial a_{ij}}|_S = \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 B_\pi^2 \delta_{il} \delta_{jm} + \dots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial b_{lm} \partial b_{ij}}|_S = \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 B_\pi^2 \delta_{il} \delta_{jm} + \dots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}|_S = \lambda_X^2 \left[3\alpha_0^2 - \frac{F_X^2}{\sqrt{2}} \right] + \dots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S_X^2}|_S = \frac{c_1}{\sqrt{2}\alpha} \det \bar{U} + \dots = \frac{c_1}{F_X} \left(\frac{2B_m}{\sqrt{2}\lambda_\pi^2 B_\pi^2} \right)^L \det M + \dots \end{array} \right. \quad (2.80)$$

dove i puntini di sospensione si riferiscono a ordini superiori in m ; le derivate non indicate risultano essere di ordine $\mathcal{O}(m)$ o superiore nel punto S . Vediamo quindi che il punto stazionario definito dalle Eq. (2.74), (2.76) e (2.79) è un minimo per il potenziale V e gli autovalori della forma hessiana sono, al primo ordine non banale in m , pari a

$$\frac{1}{2} \lambda_\pi^2 B_\pi^2, \quad \lambda_X^2 F_X^2, \quad m_0^2 \equiv \frac{c_1}{F_X} \left(\frac{2B_m}{\sqrt{2}\lambda_\pi^2 B_\pi^2} \right)^L \det M. \quad (2.81)$$

che risultano essere tutti positivi per $T > T_{\rho_\pi}$. Pertanto il punto stazionario definito dalle (2.74), (2.76), (2.79) è effettivamente un punto di minimo e questi autovalori rappresentano proprio le masse degli stati descritti rispettivamente dai campi a_{ij} e b_{ij} , α e S_X .

Come vediamo, nell'intervallo di temperatura $T_{\rho_\pi} < T < T_{U(1)}$ e nel limite $m_i \rightarrow 0$, il valore d'aspettazione sul vuoto del campo U è nullo. I risultati

trovati ci portano quindi a concludere, come avevamo inizialmente supposto, che (almeno per $L \geq 3!$) nel limite chirale la simmetria $SU(L) \otimes SU(L)$ è restaurata per $T \geq T_{\rho_\pi}$ (essendo $\langle UU^\dagger \rangle = 0$): possiamo quindi porre $T_{ch} = T_{\rho_\pi}$. Invece la simmetria $U(1)$ assiale è ancora spontaneamente rotta da un valore di aspettazione non nullo sullo stato di vuoto del campo X (avendo $\langle XX^\dagger \rangle = \frac{1}{2}F_X^2$) che si mantiene tale per $T < T_{U(1)}$.

La presenza dell'anomalia comporta, prendendo $\omega_1 = 0$ (si veda la discussione alla fine della Sezione 2.3), l'aggiunta di un termine

$$\frac{A}{2\alpha^2}S_X^2 \quad (2.82)$$

al potenziale (2.72) (o, più in generale, al potenziale (2.32)). Tuttavia, è immediato verificare che il punto di minimo che abbiamo determinato per V minimizza anche \tilde{V} , essendo $\tilde{S}_X = 0$. L'effetto del termine anomalo è soltanto quello di "modificare" la massa quadra del campo S_X nella seguente maniera:

$$M_{S_X}^2 = m_0^2 + \frac{2A}{F_X^2}. \quad (2.83)$$

dove m_0^2 è definito nella (2.81). Dal conteggio in potenze di $1/N_c$ vediamo che il termine anomalo di questa massa è di ordine $\mathcal{O}(\frac{1}{N_c})$: per $T > T_{ch}$ il campo S_X descrive, quindi, il bosone di Goldstone che sarebbe generato dalla rottura della simmetria $U(1)$ assiale nel limite chirale e trascurando l'anomalia; considerando l'effetto dell'anomalia, esso acquista una massa quadra proporzionale alla suscettività topologica $A(T)$. In altre parole, esso è proprio l' η' per $T > T_{ch}$ ma ha un contenuto in quark del tutto differente dall' η' per $T < T_{ch}$, essendo essenzialmente $S_X \sim i[\det_{st}(\bar{q}_{sL}q_{tR}) - \det_{st}(\bar{q}_{sR}q_{tL})]$.

Una osservazione importante riguarda le proprietà di simmetria dello stato di vuoto sotto la trasformazione di inversione spaziale P : $\vec{x} \xrightarrow{P} -\vec{x}$. Abbiamo visto, infatti, che sotto P i campi U e X si trasformano come:

$$\begin{cases} U(x^0, \vec{x}) \xrightarrow{P} U^\dagger(x^0, -\vec{x}) \\ X(x^0, \vec{x}) \xrightarrow{P} X^\dagger(x^0, -\vec{x}) \end{cases} \quad (2.84)$$

Vediamo, quindi, che la scelta di una matrice di massa reale e diagonale³ comporta l'invarianza sotto trasformazioni di parità dello stato di vuoto della teoria, avendosi che $\bar{U} = \bar{U}^\dagger$ e $\bar{X} = \bar{X}^\dagger$.

³Più in generale, per quanto appena visto, basterebbe richiedere soltanto che M fosse hermitiana.

In effetti, questa è una proprietà del tutto generale di cui faremo uso nel capitolo successivo per analizzare il modello nel caso $L = 2$. Infatti, il termine di massa $\delta\mathcal{L}_M$ che rompe esplicitamente la simmetria di \mathcal{L}_{QCD} può essere interpretato come un vero e proprio termine di interazione tra un campo esterno "M" e i gradi di libertà del nostro sistema. L'effetto di tale interazione è quello di rimuovere la degenerazione degli stati di minimo per il potenziale forzando la "scelta" su quel particolare vuoto che possiede le stesse proprietà di simmetria del termine di rottura esplicita (si parla di condizione di "allineamento del vuoto" [53]).

Così, se avessimo avuto una matrice M non hermitiana, il termine di massa in \mathcal{L}_{QCD} sarebbe stato della forma

$$\delta\mathcal{L}_M = -\bar{q}_R M q_L - \bar{q}_L M^\dagger q_R = -\bar{q}[A + i\gamma_5 B]q \quad (2.85)$$

con A e B definiti come

$$A \equiv \frac{M + M^\dagger}{2}, \quad B \equiv i\frac{M^\dagger - M}{2}. \quad (2.86)$$

Come vediamo, se $M \neq M^\dagger$, il termine B (che viola P) sarebbe non nullo e $\delta\mathcal{L}_M$ avrebbe portato ad una scelta del vuoto non P -invariante.

Un'ultima osservazione va fatta a proposito della temperatura T_χ alla quale si annulla la suscettività topologica della teoria di pura gauge $A(T)$. Onde evitare un comportamento singolare di $m_{S_X}^2$ per $T \rightarrow T_{U(1)}$, dobbiamo avere che la temperatura T_χ (alla quale la suscettività topologica $A(T_\chi)$ si annulla) sia minore di (o al più uguale a) $T_{U(1)}$. Questa osservazione ci porta a concludere che potrebbe quindi esistere, se fosse proprio $T_\chi < T_{U(1)}$, un intervallo di temperatura che ha per estremi T_χ e $T_{U(1)}$ in cui, essendo nulla $A(T)$, lo stato S_X (ovvero l' η') sarebbe proprio il bosone di Goldstone generato dalla rottura di $U(1)_A$, a massa nulla nel limite chirale.

2.6.2 Condensato chirale e suscettività topologica

Facendo uso della espressione (2.65) e dei risultati (2.74), (2.76) e (2.79), possiamo determinare il condensato chirale per $L \geq 3$ a temperature $T > T_{ch}$. All'ordine più basso nelle masse si trova che

$$\langle \bar{q}_i q_i \rangle \simeq -\frac{B_m^2}{\lambda_\pi^2 B_\pi^2} m_i - \frac{1}{2} c_1 F_X \left(\frac{2B_m}{\sqrt{2}\lambda_\pi^2 B_\pi^2} \right)^L \prod_{k \neq i} m_k + \dots \quad (2.87)$$

Come vediamo, il condensato si annulla nel limite chirale segnalando la restaurazione della simmetria chirale: la violazione di questa simmetria è, quindi, generata solamente alla rottura esplicita dovuta alla presenza del termine di massa $\delta\mathcal{L}_M$. L'espressione (2.87) è la somma di due contributi

$$\langle \bar{q}_i q_i \rangle = \mathcal{O}_1(m_i) + \mathcal{O}_2\left(\prod_{k \neq i} m_k\right), \quad (2.88)$$

la cui interpretazione diagrammatica è piuttosto semplice: il primo di questi (mostrato in Figura 2.1) è dato da un diagramma con una inserzione del termine di massa, mentre il secondo termine è generato da una inserzione del

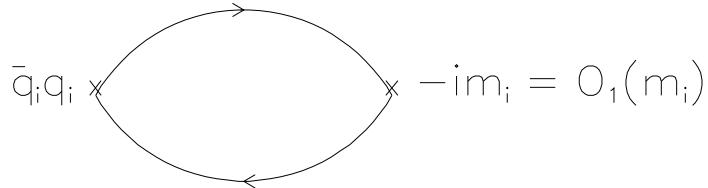


Figura 2.1: Diagramma corrispondente al termine $\mathcal{O}_1(m_i)$ nella (2.88).

vertice efficace a $2L$ fermioni associato al condensato $U(1)$ assiale (Figura 2.2).

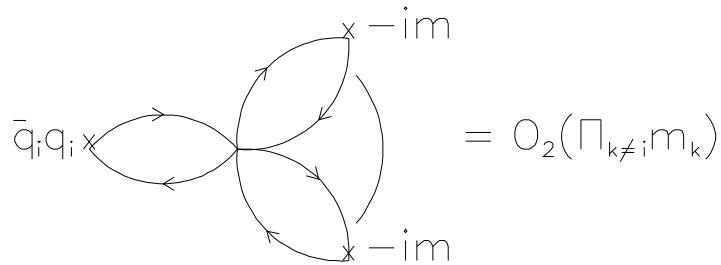


Figura 2.2: Diagramma per il termine $\mathcal{O}_2\left(\prod_{k \neq i} m_k\right)$.

Per trovare la suscettività topologica si procede come è stato fatto nel Paragrafo 2.4.2 tenendo presente che, nell'intervallo di temperatura di nostro interesse, la matrice $\mathcal{A}(k)$ per l'insieme dei campi $(Q(x), S_X, b_{11}, \dots)$ sarà

data da ⁴

$$\mathcal{A}(k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{A} & -\frac{\sqrt{2}}{F_X} & 0 & \dots \\ -\frac{\sqrt{2}}{F_X} & k^2 - m_0^2 & \mathcal{O}(m^{L-1}) & \dots \\ 0 & \mathcal{O}(m^{L-1}) & k^2 - \frac{1}{2}\lambda_\pi^2 B_\pi^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

Eseguendo i calcoli troviamo che

$$\langle QQ\rangle(k) = i(\mathcal{A}^{-1}(k))_{11} = iA \frac{k^2 - m_0^2}{k^2 - m_{S_X}^2} \quad (2.90)$$

per cui

$$\langle QQ\rangle(k=0) = iA \frac{m_0^2}{m_{S_X}^2} = iA \frac{m_0^2}{m_0^2 + \frac{2A}{F_X^2}}. \quad (2.91)$$

Nel limite $m_i \rightarrow 0$ troveremo quindi che

$$\chi \equiv -i\langle QQ\rangle(k=0) \simeq \frac{F_X^2}{2} m_0^2 = \frac{1}{2} c_1 F_X \left(\frac{2B_m}{\sqrt{2}\lambda_\pi^2 B_\pi^2} \right)^L \det M. \quad (2.92)$$

Confrontando questa espressione per la suscettività topologica con quella per il condensato chirale (2.87) si ricava la seguente relazione

$$\chi = -m_l \mathcal{O}_2 \left(\prod_{k \neq l} m_k \right). \quad (2.93)$$

Questa relazione è stata ottenuta sia in [15] (con il procedimento appena illustrato) che in [16] in maniera più generale, come conseguenza della saturazione delle *identità di Ward* per la simmetria $U(1)$ assiale all'ordine dominante in m e $1/N_c$. Vedremo nel prossimo capitolo che questa relazione risulterà (correttamente) verificata anche nel caso $L = 2$.

⁴La matrice $\mathcal{A}(k)$ risulta essere diagonale a blocchi, in quanto i settori scalare e pseudoscalare della teoria sono del tutto disaccoppiati. Questa è una delle implicazioni della P -invarianza del vuoto.

Capitolo 3

Predizioni del modello nel caso di 2 *flavours* leggeri per $T > T_{ch}$

Nel presente capitolo studieremo la lagrangiana efficace (2.31) nel caso particolare in cui $L = 2$. In questo caso i quark leggeri sono quelli *up* e *down* e pertanto assumeremo che $m_u \sim m_d \sim 0$. La teoria con 2 *flavours* leggeri a $T > T_{ch}$ riveste un interesse particolare per noi dal momento che possiamo confrontare le previsioni del modello che stiamo esaminando con i risultati delle simulazioni su reticolo [11, 12, 13, 14]. Come vedremo, questi risultati sembrano essere in accordo con le previsioni derivate dal nostro modello.

Come è già stato fatto nel capitolo precedente, anche qui ricaveremo i nostri risultati dapprima all'ordine dominante in uno sviluppo in potenze di $1/N_c$, sì da vedere quali sarebbero le previsioni nel nostro modello nel limite in cui possiamo trascurare l'anomalia. In un secondo momento, quindi, cercheremo gli ordini successivi in $1/N_c$ generati dai contributi anomali.

Dopo aver fissato la notazione e definito le variabili di campo che descrivono gli stati mesonici per $L = 2$ (già introdotti nel Capitolo 1), cercheremo i punti di minimo del potenziale. La conoscenza di tali punti ci permetterà non solo di determinare le masse dei mesoni descritti dalle nostre variabili di campo efficaci ma anche di comprendere meglio la struttura di fase della teoria nel caso $L = 2$.

Per finire, determineremo le espressioni per il condensato chirale e la suscettività topologica.

3.1 La lagrangiana efficace per $T_{ch} < T < T_{U(1)}$

Abbiamo visto nel precedente capitolo che per $L \geq 3$ il valore \bar{U} del campo mesonico U che rende minimo il potenziale (2.32) (o, nel caso in cui conside-

riamo l'anomalia, il potenziale (2.34)) dipende essenzialmente dal segno del parametro ρ_π . Infatti, quando questo è negativo si ha che $\bar{U} = 0$ nel limite chirale $m_i = 0, i = 1, 2, \dots, L$ (segnalando che la simmetria chirale è realizzata alla Wigner-Weyl), mentre se ρ_π è positivo abbiamo che $\bar{U} \neq 0$ (che indica una rottura spontanea della simmetria chirale). Questo ci ha portati a identificare la temperatura di transizione chirale T_{ch} con la temperatura T_{ρ_π} alla quale $\rho_\pi = 0$.

Analizziamo, quindi, anche per $L = 2$, la Lagrangiana efficace del nostro modello nell'intervallo di temperatura $T_{\rho_\pi} < T < T_{U(1)}$. Come detto, iniziamo la nostra analisi trascurando tutti i contributi generati dall'anomalia.

Secondo la tabella (2.1), nel suddetto intervallo di temperatura, si avrà che

$$\rho_\pi \equiv -\frac{1}{2}B_\pi^2 < 0, \quad \rho_X \equiv \frac{1}{2}F_X^2 > 0 \quad (3.1)$$

Pertanto il termine di potenziale (2.32) della nostra Lagrangiana efficace sarà dato da

$$\begin{aligned} V(U, U^\dagger, X, X^\dagger) = & \frac{1}{4}\lambda_\pi^2 \text{Tr} \left[\left(UU^\dagger + \frac{1}{2}B_\pi^2 \cdot \mathbf{I} \right)^2 \right] + \frac{1}{4}\lambda_X^2 \left(XX^\dagger - \frac{1}{2}F_X^2 \right)^2 \\ & - \frac{B_m}{2\sqrt{2}} \text{Tr}[M(U + U^\dagger)] - \frac{c_1}{2\sqrt{2}} [X^\dagger \det U + X \det U^\dagger]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Integrando il campo $Q(x)$ in Eq.(2.31) troviamo (ponendo $\omega_1 = 0$) la seguente espressione per il potenziale:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(U, U^\dagger, X, X^\dagger) = & \frac{1}{4}\lambda_\pi^2 \text{Tr} \left[\left(UU^\dagger + \frac{1}{2}B_\pi^2 \cdot \mathbf{I} \right)^2 \right] + \frac{1}{4}\lambda_X^2 \left(XX^\dagger - \frac{1}{2}F_X^2 \right)^2 \\ & - \frac{B_m}{2\sqrt{2}} [M(U + U^\dagger)] - \frac{c_1}{2\sqrt{2}} [X^\dagger \det U + X \det U^\dagger] \\ & - \frac{1}{8}A[\log X - \log X^\dagger]^2 \\ & = V(U, U^\dagger, X, X^\dagger) - \frac{1}{8}A[\log X - \log X^\dagger]^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Per i nostri scopi dobbiamo esprimere U come la più generale matrice complessa 2×2 , che sarà quindi parametrizzata da 8 parametri reali. La

forma per U di più immediata interpretazione fisica (in un senso che sarà meglio precisato a breve) è quella nella forma

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma + i\eta)\mathbf{I} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\delta} + i\vec{\pi}) \cdot \vec{\tau} \quad (3.4)$$

dove " τ^a " ($a = 1, 2, 3$) sono le *matrici di Pauli* ($\text{Tr}(\tau^a \tau^b) = 2\delta_{ab}$) e il fattore moltiplicativo " $\frac{1}{\sqrt{2}}$ " è stato introdotto per normalizzare correttamente il termine cinetico della lagrangiana efficace (2.31). In maniera esplicita la (3.4) si scrive

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sigma + \delta_3 + i(\eta + \pi_3) & \delta_1 + \pi_2 + i(\pi_1 - \delta_2) \\ \delta_1 - \pi_2 + i(\pi_1 + \delta_2) & \sigma - \delta_3 + i(\eta - \pi_3) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Il vantaggio di utilizzare la parametrizzazione (3.4) rispetto ad una più generica del tipo

$$U_{ij} = a_{ij} + ib_{ij}$$

con $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$, sta nel fatto che i parametri della forma (3.4) rappresentano proprio i gradi di libertà mesonici scalari σ ($I = 0$), $\vec{\delta}$ ($I = 1$) e pseudoscalari η ($I = 0$) e $\vec{\pi}$ ($I = 1$), introdotti nella Tabella 1.2 nel Capitolo 1.

Per il campo X useremo invece la forma esponenziale

$$X = \alpha e^{i\beta} \quad (3.6)$$

dove

$$\beta = \frac{S_X}{\bar{\alpha}} \quad (3.7)$$

essendo $\bar{\alpha}$ il valore di aspettazione sul vuoto (diverso da zero!) di α .

La matrice di massa M sarà invece data da

$$M = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

I vari termini che compaiono nel potenziale (3.2) si scrivono, in funzione delle variabili che parametrizzano i campi U e X secondo le espressioni (3.4) e (3.6), nella seguente maniera:

•

$$\text{Tr}[M(U + U^\dagger)] = \sqrt{2}[(m_u + m_d)\sigma + (m_u - m_d)\delta_3] \quad (3.9)$$

•

$$\text{Tr}[UU^\dagger] = \sigma^2 + \eta^2 + \vec{\delta}^2 + \vec{\pi}^2 \quad (3.10)$$

•

$$\text{Tr}[(UU^\dagger)^2] = \left[\frac{1}{2}(\sigma^2 + \eta^2 + \vec{\delta}^2 + \vec{\pi}^2)^2 + 2(\sigma\vec{\delta} + \eta\vec{\pi})^2 + 2(\vec{\pi} \wedge \vec{\delta})^2 \right] \quad (3.11)$$

•

$$\begin{aligned} \det U &= \frac{1}{2}[\sigma^2 - \eta^2 + \vec{\pi}^2 - \vec{\delta}^2 + 2i(\sigma\eta - \vec{\delta} \cdot \vec{\pi})] \\ \det U^\dagger &= \frac{1}{2}[\sigma^2 - \eta^2 + \vec{\pi}^2 - \vec{\delta}^2 - 2i(\sigma\eta - \vec{\delta} \cdot \vec{\pi})] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Facendo uso di questi risultati, si trova che il potenziale (3.2) si esprime in funzione delle nostre variabili come

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{8}\lambda_\pi^2 B_\pi^4 + \frac{1}{8}\lambda_\pi^2(\sigma^2 + \eta^2 + \vec{\pi}^2 + \vec{\delta}^2)^2 + \frac{1}{2}\lambda_\pi^2(\sigma^2\vec{\delta}^2 + 2\sigma\eta\vec{\delta} \cdot \vec{\pi} + \eta^2\vec{\pi}^2) \\ &\quad + \frac{1}{2}\lambda_\pi^2[\vec{\pi}^2\vec{\delta}^2 - (\vec{\pi} \cdot \vec{\delta})^2] + \frac{1}{4}\lambda_\pi^2 B_\pi^2[\sigma^2 + \eta^2 + \vec{\delta}^2 + \vec{\pi}^2] + \frac{1}{4}\lambda_X^2 \left[\alpha^2 - \frac{F_X^2}{2} \right]^2 \\ &\quad - \frac{B_m}{2}[(m_u + m_d)\sigma + (m_u - m_d)\delta_3] \\ &\quad - \frac{c_1}{2\sqrt{2}}[\alpha \cos \beta(\sigma^2 - \eta^2 - \vec{\delta}^2 + \vec{\pi}^2) + 2\alpha \sin \beta(\sigma\eta - \vec{\delta} \cdot \vec{\pi})]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Il potenziale \tilde{V} definito nella (3.3), sarà dato, invece, da

$$\tilde{V}(U, U^\dagger, X, X^\dagger) = V(U, U^\dagger, X, X^\dagger) + \frac{1}{2}A\beta^2. \quad (3.14)$$

3.2 Studio del potenziale e dello spettro di massa per $T > T_{ch}$

Ovviamente, i punti di minimo del potenziale (3.13) vanno cercati tra i "punti stazionari" dove le derivate prime rispetto ai vari campi si annullano: questo significa che dobbiamo risolvere un sistema di 10 equazioni. Tra le soluzioni cercheremo quelle corrispondenti a punti di minimo studiando la matrice hessiana delle derivate seconde. Come noto, da un punto di vista fisico, gli autovalori di tale matrice (se positivi!) non sono altro che le masse quadre degli stati fisici descritti dal modello.

3.2.1 Equazioni per i punti stazionari

Le derivate di (3.2) rispetto ai campi della teoria sono date da

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \lambda_X^2 [\alpha^2 - \frac{F_X^2}{2}] \alpha - \frac{c_1}{2\sqrt{2}} [\cos \beta (\sigma^2 - \eta^2 - \vec{\delta}^2 + \vec{\pi}^2) + 2 \sin \beta (\sigma \eta - \vec{\delta} \cdot \vec{\pi})] \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \beta} &= \frac{c_1}{2\sqrt{2}} \alpha [\sin \beta (\sigma^2 - \eta^2 - \vec{\delta}^2 + \vec{\pi}^2) - 2 \cos \beta (\sigma \eta - \vec{\delta} \cdot \vec{\pi})] \\ &= \frac{c_1}{2\sqrt{2}} \alpha \cos \beta [\tan \beta (\det U + \det U^\dagger) - i(\det U^\dagger - \det U)] \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \sigma} &= \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 (\sigma^2 + \eta^2 + \vec{\delta}^2 + \vec{\pi}^2) \sigma + \lambda_\pi^2 \sigma \vec{\delta}^2 + \lambda_\pi^2 \eta \vec{\delta} \cdot \vec{\pi} + \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 B_\pi^2 \sigma \\ &\quad - \frac{B_m}{2} (m_u + m_d) - \frac{c_1}{\sqrt{2}} \alpha [\sigma \cos \beta + \eta \sin \beta] \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 (\sigma^2 + \eta^2 + \vec{\delta}^2 + \vec{\pi}^2) \eta + \lambda_\pi^2 \eta \vec{\pi}^2 \\ &\quad + \lambda_\pi^2 \sigma \vec{\delta} \cdot \vec{\pi} + \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 B_\pi^2 \eta + \frac{c_1}{\sqrt{2}} \alpha [\eta \cos \beta - \sigma \sin \beta] \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \pi_i} &= \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 (\sigma^2 + \eta^2 + \vec{\delta}^2 + \vec{\pi}^2) \pi_i + \lambda_\pi^2 \sigma \eta \delta_i + \lambda_\pi^2 \pi_i \eta^2 \\ &\quad + \lambda_\pi^2 [\pi_i \vec{\delta}^2 - (\vec{\pi} \cdot \vec{\delta}) \delta_i] + \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 B_\pi^2 \pi_i - \frac{c_1}{\sqrt{2}} \alpha [\pi_i \cos \beta - \delta_i \sin \beta] \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \delta_i} &= \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 (\sigma^2 + \eta^2 + \vec{\delta}^2 + \vec{\pi}^2) \delta_i + \lambda_\pi^2 \sigma \eta \pi_i + \lambda_\pi^2 \sigma^2 \delta_i + \lambda_\pi^2 [\vec{\pi}^2 \delta_i - (\vec{\pi} \cdot \vec{\delta}) \pi_i] \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 B_\pi^2 \delta_i + \frac{c_1}{\sqrt{2}} \alpha [\delta_i \cos \beta + \pi_i \sin \beta] - \frac{B_m}{2} (m_u - m_d) \delta_{i3}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Imponendo che ognuna di queste derivate sia uguale a zero troviamo il sistema di equazioni per i punti stazionari del nostro potenziale. Tuttavia, la soluzione di un siffatto sistema risulta niente affatto agevole a causa dell'elevato numero di incognite in gioco. Sarebbe quindi auspicabile avanzare

delle ipotesi che permettano di ridurre il numero di incognite e di equazioni da risolvere, e di semplificare la risoluzione di quelle rimanenti.

Per prima cosa, richiamiamo brevemente quanto già osservato, analizzando il caso $L \geq 3$, a proposito delle proprietà di simmetria del vuoto sotto l'inversione spaziale P . Poichè la matrice di massa dei quark (3.8) è hermitiana, il termine di massa $\delta\mathcal{L}_M$, che rompe esplicitamente le simmetrie $SU(L)$ chirale e $U(1)$ assiale, risulta essere P -invariante. Quindi lo stato di vuoto, dovendo, per così dire, "allinearsi" al campo esterno M , risulterà anch'esso invariante sotto trasformazioni di parità. Vedremo tra breve che questa proprietà del vuoto permette di dimezzare il numero di incognite e, quindi, di equazioni da risolvere, in quanto lascia indeterminati soltanto i valori di minimo dei campi scalari.

Le implicazioni della P -invarianza del vuoto sulla forma della Lagrangiana sviluppata attorno al suo punto di minimo sono di non secondaria importanza: in particolare, le derivate seconde miste del potenziale rispetto ad un campo scalare ed uno pseudoscalare calcolate al punto di minimo di V risultano nulle. Vediamo quindi che l'invarianza dello stato di vuoto sotto parità comporta che i settori scalare e pseudoscalare della teoria sono del tutto disaccoppiati nella matrice di massa.

Poichè, come abbiamo visto nella (2.84), l'operazione di parità agisce sui nostri campi U e X nella seguente maniera:

$$U \xrightarrow{P} U^\dagger, \quad X \xrightarrow{P} X^\dagger,$$

possiamo affermare che i campi η e π_i si devono annullare al punto di minimo del potenziale (affinchè si abbia che $\bar{U} = \bar{U}^\dagger$). Per motivi analoghi, dovendosi avere che $\bar{X} = \bar{X}^\dagger$, troveremo che $\bar{\beta} = 0$. Osserviamo che, in realtà, questo risultato può essere ricondotto, in virtù dell'Eq. (2.75), al fatto che $\bar{U} = \bar{U}^\dagger$. Infatti, per risolvere le equazioni (2.73) per α e β non si è fatto in alcun modo uso dell'ipotesi $L \geq 3$ ma soltanto dell'invarianza del vuoto sotto P e quindi l'equazione (2.75) per β è valida per L generico.

Ponendo uguale a zero la derivata (3.20) vediamo che, essendo¹ $c_1 > 0$, anche i valori d'aspettazione sul vuoto dei campi δ_1 e δ_2 sono nulli. In questo caso, il fatto che $\bar{\delta}_1$ e $\bar{\delta}_2$ siano uguali a zero sul punto di minimo di V è dovuto direttamente alla nostra scelta della matrice di massa dei quarks (3.8) reale e diagonale.

¹In caso contrario avremmo che l'autovalore $m_{S_2}^2$ in (2.47) della matrice di massa quadra (2.43) sarebbe negativo .

In definitiva, rimangono da risolvere le seguenti tre equazioni per i valori $\bar{\alpha}$, $\bar{\sigma}$ e $\bar{\delta}_3$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\lambda_\pi^2(\bar{\sigma}^2 + \bar{\delta}_3^2)\bar{\sigma} + \lambda_\pi^2\bar{\sigma}\bar{\delta}_3^2 + \frac{1}{2}\lambda_\pi^2B_\pi^2\bar{\sigma} - \frac{c_1}{\sqrt{2}}\bar{\alpha}\bar{\sigma} - \frac{B_m}{2}(m_u + m_d) = 0 \\ \frac{1}{2}\lambda_\pi^2(\bar{\sigma}^2 + \bar{\delta}_3^2)\bar{\delta}_3 + \lambda_\pi^2\bar{\sigma}^2\bar{\delta}_3 + \frac{1}{2}\lambda_\pi^2B_\pi^2\bar{\delta}_3 + \frac{c_1}{\sqrt{2}}\bar{\alpha}\bar{\delta}_3 - \frac{B_m}{2}(m_u - m_d) = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\lambda_X^2 \left[\bar{\alpha}^2 - \frac{F_X^2}{2} \right] \bar{\alpha} - \frac{c_1}{\sqrt{2}} \det \bar{U} = 0. \quad (3.22)$$

Osserviamo, per iniziare, che nel limite di simmetria $SU(2)_V$ (isospin) esatta (ossia nel limite in cui $m_u = m_d$) anche il campo δ_3 si annulla sul vuoto nonostante le masse dei quarks siano non nulle. Vedremo che questo rimarrà vero anche nel caso più generale se ci si limita alle correzioni lineari in m_u e m_d .

Sommendo e sottraendo le prime due equazioni e utilizzando l'espressione (3.12) per riscrivere $\det U$ nell'equazione per $\bar{\alpha}$, troviamo il seguente sistema²:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\lambda_\pi^2(\bar{\sigma} + \bar{\delta})^3 + \frac{1}{2}\lambda_\pi^2B_\pi^2(\bar{\sigma} + \bar{\delta}) - \frac{1}{\sqrt{2}}c_1\bar{\alpha}(\bar{\sigma} - \bar{\delta}) = B_m m_u \\ \frac{1}{2}\lambda_\pi^2(\bar{\sigma} - \bar{\delta})^3 + \frac{1}{2}\lambda_\pi^2B_\pi^2(\bar{\sigma} - \bar{\delta}) - \frac{1}{\sqrt{2}}c_1\bar{\alpha}(\bar{\sigma} + \bar{\delta}) = B_m m_d \\ \frac{c_1}{2\sqrt{2}}(\bar{\sigma} - \bar{\delta})(\bar{\sigma} + \bar{\delta}) = \lambda_X^2\bar{\alpha} \left[\bar{\alpha}^2 - \frac{F_X^2}{2} \right] \end{cases} \quad (3.23)$$

Se adesso poniamo

$$\begin{aligned} a &\equiv \bar{\sigma} + \bar{\delta} \\ b &\equiv \bar{\sigma} - \bar{\delta} \end{aligned} \quad (3.24)$$

le equazioni (3.23) si scrivono nella forma

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\lambda_\pi^2a^3 + \frac{1}{2}\lambda_\pi^2B_\pi^2a - \frac{1}{\sqrt{2}}c_1\bar{\alpha}b = B_m m_u \\ \frac{1}{2}\lambda_\pi^2b^3 + \frac{1}{2}\lambda_\pi^2B_\pi^2b - \frac{1}{\sqrt{2}}c_1\bar{\alpha}a = B_m m_d \\ \frac{c_1}{2\sqrt{2}}ab = \lambda_X^2\bar{\alpha} \left[\bar{\alpha}^2 - \frac{F_X^2}{2} \right] \end{cases} \quad (3.25)$$

Fino a questo momento abbiamo sfruttato soltanto la proprietà di invarianza dello stato di vuoto sotto l'inversione spaziale. Tuttavia, nonostante

²Nel seguito, per non appesantire la notazione, indicheremo con $\bar{\delta}$ il valore di aspettazione del campo δ_3 sullo stato di vuoto, ossia $\bar{\delta} \equiv \bar{\delta}_3$.

questo ci abbia permesso di semplificare notevolmente l'insieme di equazioni da risolvere, il sistema (3.25) manifesta ancora una certa complessità che lo rende di non facile risoluzione. Tale complessità è essenzialmente dovuta alla presenza di termini non omogenei generati dal termine di massa nel potenziale (3.2). Questo, come abbiamo visto, contribuisce al potenziale e alle nostre equazioni per il punto stazionario con termini proporzionali alle masse m_u e m_d . Nel caso che stiamo esaminando, però, tali termini possono essere considerati come delle piccole perturbazioni. Possiamo, quindi, cercare le soluzioni del nostro sistema sotto forma di uno sviluppo in potenze di tali masse. Da un punto di vista "pratico", questo corrisponde a determinare le grandezze di nostro interesse cercando in un primo momento le soluzioni nel limite chirale e, successivamente, determinando le correzioni (in genere al primo o al secondo ordine) apportate dalle masse.

Tenendo presenti le osservazioni appena fatte, possiamo quindi procedere cercando le soluzioni del sistema (3.25) nel limite in cui $m_u = m_d = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\lambda_\pi^2 a^3 + \frac{1}{2}\lambda_\pi^2 B_\pi^2 a - \frac{1}{\sqrt{2}}c_1 \bar{\alpha} b = 0 \\ \frac{1}{2}\lambda_\pi^2 b^3 + \frac{1}{2}\lambda_\pi^2 B_\pi^2 b - \frac{1}{\sqrt{2}}c_1 \bar{\alpha} a = 0 \\ \frac{c_1}{2\sqrt{2}}ab = \lambda_X^2 \bar{\alpha} [\bar{\alpha}^2 - \frac{F_X^2}{2}] \end{array} \right. \quad (3.26)$$

La soluzione più immediata e, in certo senso, anche più ovvia (dato che è analoga a quella trovata per $L \geq 3$) è data da

$$\left\{ \begin{array}{l} a = b = 0 \\ \bar{\alpha} = \frac{F_X}{\sqrt{2}} \end{array} \right. \quad (3.27)$$

cioè

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma} = 0 \\ \bar{\delta} = 0 \\ \bar{\alpha} = \frac{F_X}{\sqrt{2}} \end{array} \right. \quad (3.28)$$

I valori in (3.28) individuano un punto stazionario del potenziale per qualsiasi temperatura nell'intervallo $T_{\rho_\pi} < T < T_{U(1)}$, proprio come avveniva per $L \geq 3$. Tuttavia, a differenza di quest'ultimo caso (per cui $\bar{U} = 0$ era di fatto un *minimo* per *qualsiasi* temperatura [e quindi $T_{\rho_\pi} = T_{ch}$]), faremo vedere che nel nostro caso ($L = 2$) questa soluzione sarà un punto di *minimo* solamente al di sopra di un ben determinato valore di $T = T_{ch}$ strettamente più grande di T_{ρ_π} , mentre per $T_{\rho_\pi} < T < T_{ch}$ essa corrisponderà ad un "punto di sella" del potenziale.

3.2.2 Ordini successivi dello sviluppo

Come detto, possiamo adesso provare a determinare le correzioni in m_u e m_d ai valori (3.28) di minimo per $\bar{\sigma}$ e $\bar{\delta}$ cercandoli, all'ordine più basso nelle masse dei quark, nella forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma} = \alpha_1 m_u + \alpha_2 m_d + \dots \\ \bar{\delta} = \beta_1 m_u + \beta_2 m_d + \dots \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Sostituendo la soluzione per $T > T_{ch}$ nella (3.25) si trova il seguente sistema per i coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 B_\pi^2 (\alpha_1 + \beta_1) m_u + \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 B_\pi^2 (\alpha_2 + \beta_2) m_d \\ -c_1 F_X (\alpha_1 - \beta_1) m_u - c_1 F_X (\alpha_2 - \beta_2) m_d = 2B_m m_u \\ \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 B_\pi^2 (\alpha_1 - \beta_1) m_u + \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 B_\pi^2 (\alpha_2 - \beta_2) m_d \\ -c_1 F_X (\alpha_1 + \beta_1) m_u - c_1 F_X (\alpha_2 + \beta_2) m_d = 2B_m m_d \end{array} \right. \quad (3.30)$$

da cui troviamo, imponendo l'uguaglianza dei termini proporzionali a m_u e m_d , il seguente sistema di equazioni per i coefficienti α_1 e β_1

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_\pi^2 B_\pi^2 (\alpha_1 + \beta_1) - c_1 F_X (\alpha_1 - \beta_1) = 2B_m \\ \lambda_\pi^2 B_\pi^2 (\alpha_1 - \beta_1) - c_1 F_X (\alpha_1 + \beta_1) = 0 \end{array} \right. \quad (3.31)$$

mentre i coefficienti α_2 e β_2 sono determinati dalle equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_\pi^2 B_\pi^2 (\alpha_2 + \beta_2) - c_1 F_X (\alpha_2 - \beta_2) = 0 \\ \lambda_\pi^2 B_\pi^2 (\alpha_2 - \beta_2) - c_1 F_X (\alpha_2 + \beta_2) = 2B_m \end{array} \right. \quad (3.32)$$

Le soluzioni di questi due sistemi sono date da

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{B_m}{\lambda_\pi^2 B_\pi^2 - c_1 F_X} \\ \beta_1 = -\beta_2 = \frac{B_m}{\lambda_\pi^2 B_\pi^2 - c_1 F_X} \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Pertanto al primo ordine non banale in m i nostri punti stazionari a $T > T_{ch}$ sono dati da

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma} = \frac{B_m}{\lambda_\pi^2 B_\pi^2 - c_1 F_X} (m_u + m_d) + \dots \\ \bar{\delta} = \frac{B_m}{\lambda_\pi^2 B_\pi^2 + c_1 F_X} (m_u - m_d) + \dots \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Come ci aspettavamo, vediamo che anche all'ordine lineare in m , nel limite di isospin, il campo δ assume un valore di aspettazione sul vuoto nullo.

In maniera analoga, è possibile determinare le correzioni ad $\bar{\alpha}$. Sostituendo l'espressione generica

$$\bar{\alpha} = \frac{F_X}{\sqrt{2}} + \eta_1 m_u + \eta_2 m_d + \eta_{11} m_u^2 + \eta_{12} m_u m_d + \eta_{22} m_d^2 + \dots \quad (3.35)$$

nella (3.25), con $\bar{\sigma}$ e $\bar{\delta}$ date dalla (3.34), troviamo

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} = & \frac{F_X}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{F_X \lambda_X^2} \left(\frac{B_m c_1 \lambda_\pi B_\pi}{\lambda_\pi^4 B_\pi^4 - c_1^2 F_X^2} \right)^2 (m_u^2 + m_d^2) \\ & + \frac{\sqrt{2} c_1}{F_X^2 \lambda_X^2} B_m^2 \frac{\lambda_\pi^4 B_\pi^4 + c_1^2 F_X^2}{(\lambda_\pi^4 B_\pi^4 - c_1^2 F_X^2)^2} m_u m_d + \dots \end{aligned} \quad (3.36)$$

3.2.3 Effetti della anomalia

Fino ad ora abbiamo trascurato nei nostri conti la presenza del termine anomalo nel potenziale (3.3). In particolare, utilizzando l'espressione (3.14) (i.e. $\tilde{V} = V + \frac{1}{2} A \beta^2$), avremo che la derivata rispetto al campo β sarà modificata come segue:

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \beta} = \frac{\partial V}{\partial \beta} + A \beta \quad (3.37)$$

mentre le derivate rispetto a tutte le rimanenti variabili non saranno in alcun modo modificate. Come già osservato quando abbiamo analizzato il caso $L \geq 3$ nel precedente capitolo, l'aggiunta del termine generato dall'anomalia non modifica in alcun modo la "posizione" dei punti stazionari del potenziale; come vedremo l'effetto del termine anomalo sarà soltanto quello di aggiungere un contributo di ordine $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N_c}\right)$ alla massa quadra dello stato S_X .

3.2.4 Matrice di massa quadra

Siamo adesso nelle condizioni di calcolare esplicitamente la "matrice di massa quadra" (i.e. la matrice delle derivate seconde) del nostro potenziale nel punto stazionario (3.28). Analizzando il segno dei suoi autovalori emergerà quanto accennato alla fine del Paragrafo 3.2.1, ossia che, a differenza del caso $L \geq 3$, non basta essere a temperature superiori a T_{ρ_π} perché il suddetto punto stazionario sia un minimo per V .

In virtù delle osservazioni fatte sull'invarianza sotto parità dello stato di vuoto, al punto di minimo (indipendentemente se ci troviamo sopra o sotto la transizione) tutte le derivate miste del potenziale rispetto ad un campo scalare ed uno pseudoscalare si annullano in tale punto. Pertanto, per diagonalizzare la matrice di massa quadra possiamo studiare separatamente

il settore scalare e quello pseudoscalare. Le derivate seconde rilevanti del potenziale (3.13) sono, pertanto³:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} = \lambda_X^2 [3\alpha^2 - \frac{F_X^2}{2}] \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial \alpha} = -\frac{c_1}{\sqrt{2}} [\sigma \cos \beta + \eta \sin \beta] \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \delta_i \partial \alpha} = \frac{c_1}{\sqrt{2}} [\delta_i \cos \beta + \pi_i \sin \beta] \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 (3\sigma^2 + \eta^2 + \vec{\pi}^2 + \vec{\delta}^2) + \lambda_\pi^2 \vec{\delta}^2 + \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 B_\pi^2 - \frac{c_1}{\sqrt{2}} \alpha \cos \beta \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \delta_i \partial \sigma} = 3\lambda_\pi^2 \delta_i \sigma + \lambda_\pi^2 \eta \pi_i \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \delta_i \partial \delta_j} = & \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 B_\pi^2 \delta_{ij} + \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 (\sigma^2 + \eta^2 + \vec{\pi}^2 + \vec{\delta}^2) \delta_{ij} + \lambda_\pi^2 \delta_i \delta_j \\ & + \lambda_\pi^2 \sigma^2 \delta_{ij} + \lambda_\pi^2 (\vec{\pi}^2 \delta_{ij} - \pi_i \pi_j) + \frac{c_1}{\sqrt{2}} \alpha \cos \beta \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S_X^2} = \frac{c_1}{2\sqrt{2}\bar{\alpha}^2} \alpha [\cos \beta (\sigma^2 - \eta^2 - \vec{\delta}^2 + \vec{\pi}^2) + 2 \sin \beta (\sigma \eta - \vec{\delta} \cdot \vec{\pi})] \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial S_X} = -\frac{c_1}{\sqrt{2}\bar{\alpha}} \alpha [\eta \sin \beta + \sigma \cos \beta] \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \pi_i \partial S_X} = \frac{c_1}{\sqrt{2}\bar{\alpha}} \alpha [\pi_i \sin \beta + \delta_i \cos \beta] \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} = \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 (\sigma^2 + 3\eta^2 + \vec{\pi}^2 + \vec{\delta}^2) + \lambda_\pi^2 \vec{\pi}^2 + \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 B_\pi^2 + \frac{c_1}{\sqrt{2}} \alpha \cos \beta \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \pi_i \partial \eta} = 3\lambda_\pi^2 \pi_i \eta + \lambda_\pi^2 \delta_i \sigma \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \pi_i \partial \pi_j} = & \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 (\sigma^2 + \eta^2 + \vec{\pi}^2 + \vec{\delta}^2) \delta_{ij} + \lambda_\pi^2 \pi_i \pi_j + \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 B_\pi^2 \delta_{ij} \\ & + \lambda_\pi^2 \eta^2 \delta_{ij} + \lambda_\pi^2 (\vec{\delta}^2 \delta_{ij} - \delta_i \delta_j) - \frac{c_1}{\sqrt{2}} \alpha \cos \beta \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.49)$$

³Sulla base della (3.6) avremo che $\frac{\partial}{\partial S_X} = \frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \bar{\beta}}$, $\frac{\partial^2}{\partial S_X^2} = \frac{1}{\bar{\alpha}^2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\beta}^2}$.

Settore pseudoscalare Se nelle espressioni (3.38) - (3.49) poniamo i campi $\eta, \beta, \pi_i, \delta_{1,2}$ uguali a zero, utilizziamo per α l'espressione (3.36) e poniamo i campi σ e δ uguali alle espressioni $\bar{\sigma}$ e $\bar{\delta}$ della (3.34), troviamo che nella matrice di massa quadra i campi π_1 e π_2 sono disaccoppiati sia dagli stati π_3 , η e S_X che tra di loro e hanno massa quadra pari a

$$M_{\pi_{1,2}}^2 = \frac{1}{2}(\lambda_\pi^2 B_\pi^2 - c_1 F_X) + \dots \quad (3.50)$$

dove i puntini si riferiscono ai termini di ordine due o superiore in m .

Invece, l'insieme dei campi (S_X, η, π_3) sarà descritto dalla matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{2F_X}(\bar{\sigma}^2 - \bar{\delta}^2) & -\frac{c_1}{\sqrt{2}}\bar{\sigma} & \frac{c_1}{\sqrt{2}}\bar{\delta} \\ -\frac{c_1}{\sqrt{2}}\bar{\sigma} & \frac{1}{2}(\lambda_\pi^2 B_\pi^2 + c_1 F_X) + \Delta & \lambda_\pi^2 \bar{\sigma} \bar{\delta} \\ \frac{c_1}{2}\bar{\delta} & \lambda_\pi^2 \bar{\delta} \bar{\sigma} & \frac{1}{2}(\lambda_\pi^2 B_\pi^2 - c_1 F_X) + \Delta \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

dove Δ è un termine di ordine due o superiore in m .

Osserviamo innanzitutto che il determinante di (3.51) risulta essere proporzionale, all'ordine più basso nelle masse, al determinante della matrice di massa M . Si trova infatti, trascurando il termine Δ , che:

$$\begin{aligned} \det \mathcal{A} = & \frac{c_1}{2F_X}(\bar{\sigma}^2 - \bar{\delta}^2) \frac{1}{4}(\lambda_\pi^2 B_\pi^2 + c_1 F_X)(\lambda_\pi^2 B_\pi^2 - c_1 F_X) \\ & - \frac{c_1^2 \bar{\delta}^2}{4}(\lambda_\pi^2 B_\pi^2 + c_1 F_X) - \frac{c_1^2 \bar{\sigma}^2}{4}(\lambda_\pi^2 B_\pi^2 - c_1 F_X) + \dots = \frac{c_1}{2F_X} B_m^2 m_u m_d + \dots \end{aligned} \quad (3.52)$$

L'annullarsi del determinante nel "limite chirale" ci dice che deve esistere un autovalore nullo. In effetti è immediato verificare che nel limite chirale i tre autovalori della matrice \mathcal{A} sono dati da:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{S_X}^2 = 0 \equiv \lambda_{S_X}^{(0)} \\ M_\eta^2 = \frac{1}{2}(\lambda_\pi^2 B_\pi^2 + c_1 F_X) \equiv \lambda_+^{(0)} \\ M_\pi^2 = \frac{1}{2}(\lambda_\pi^2 B_\pi^2 - c_1 F_X) \equiv \lambda_-^{(0)} \end{array} \right. \quad (3.53)$$

a cui corrispondono i tre autostati S_X , η e π_3 . Se vogliamo calcolare le correzioni dovute alle masse non nulle dei quarks possiamo, in maniera analoga a quanto fatto nel Paragrafo (3.2.2) per determinare i punti di minimo, cercare

le soluzioni dell'equazione caratteristica nel caso "generale"

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = & [\frac{c_1}{2F_X}(\bar{\sigma}^2 - \bar{\delta}^2) - \lambda][(\frac{1}{2}\lambda_\pi^2 B_\pi^2 + \Delta - \lambda)^2 - (\frac{c_1 F_X}{2})^2] \\ & - (c_1 \lambda_\pi \bar{\sigma} \bar{\delta})^2 - \lambda_\pi^4 (\bar{\sigma} \bar{\delta})^2 [\frac{c_1}{2F_X}(\bar{\sigma}^2 - \bar{\delta}^2) - \lambda] \\ & - \frac{c_1^2}{2} \bar{\delta}^2 (\frac{1}{2}\lambda_\pi^2 B_\pi^2 + \frac{1}{2}c_1 F_X + \Delta - \lambda) \\ & - \frac{c_1^2}{2} \bar{\sigma}^2 (\frac{1}{2}\lambda_\pi^2 B_\pi^2 - \frac{1}{2}c_1 F_X + \Delta - \lambda) = 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

sotto forma di una serie di potenze in m_u e m_d :

$$\lambda(m_u, m_d) = \lambda^{(0)} + \alpha_1 m_u + \alpha_2 m_d + \alpha_{11} m_u^2 + \alpha_{12} m_u m_d + \alpha_{22} m_d^2 + \dots \quad (3.55)$$

avendo indicato con $\lambda^{(0)}$ una qualsiasi delle tre soluzioni (3.53) (ottenute nel limite chirale). Eseguendo i calcoli si trova che tutti e tre gli autovalori (3.53) ricevono delle correzioni di ordine $\mathcal{O}(m^2)$ o superiore [i.e. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ nella (3.55)]. In particolare, al primo ordine non banale in m si trova che:

$$\lambda_{S_X} = \frac{c_1}{F_X} \frac{2B_m^2}{\lambda_\pi^4 B_\pi^4 - c_1^2 F_X^2} m_u m_d + \dots \quad (3.56)$$

$$\lambda_+ = \frac{\lambda_\pi^2 B_\pi^2 + c_1 F_X}{2} + \dots \quad (3.57)$$

$$\lambda_- = \frac{\lambda_\pi^2 B_\pi^2 - c_1 F_X}{2} + \dots \quad (3.58)$$

Se adesso vogliamo includere nel potenziale anche gli effetti generati dall'anomalia dobbiamo considerare il potenziale (3.14). La matrice di massa quadra per l'insieme dei campi (S_X, η, π_3) sarà data, in questo caso, da

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{2F_X}(\bar{\sigma}^2 - \bar{\delta}^2) + \frac{2A}{F_X^2} & -\frac{c_1}{\sqrt{2}}\bar{\sigma} & \frac{c_1}{\sqrt{2}}\bar{\delta} \\ -\frac{c_1}{\sqrt{2}}\bar{\sigma} & \frac{1}{2}(\lambda_\pi^2 B_\pi^2 + c_1 F_X) + \Delta & \lambda_\pi^2 \bar{\sigma} \bar{\delta} \\ \frac{c_1}{2}\bar{\delta} & \lambda_\pi^2 \bar{\delta} \bar{\sigma} & \frac{1}{2}(\lambda_\pi^2 B_\pi^2 - c_1 F_X) + \Delta \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

che, per semplificare un po' la notazione scriveremo nella forma

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} m_0^2 + \frac{2A}{F_X^2} & -a & -b \\ -a & \lambda_+^{(0)} + \Delta & -c \\ -b & -c & \lambda_-^{(0)} + \Delta \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

dove $\lambda_+^{(0)}$ e $\lambda_-^{(0)}$ sono stati definiti in (3.53) e abbiamo posto

$$\left\{ \begin{array}{l} m_0^2 \equiv \frac{c_1}{2F_X}(\bar{\sigma}^2 - \bar{\delta}^2) \\ a \equiv \frac{c_1}{\sqrt{2}}\bar{\sigma} \\ b \equiv -\frac{c_1}{\sqrt{2}}\bar{\delta} \\ c \equiv -\lambda_\pi^2\bar{\sigma}\bar{\delta} \end{array} \right. \quad (3.61)$$

(si osservi che, con tale notazione, la (3.56) diventa $\lambda_{S_X} = m_0^2 + \dots$). Facendo uso dei parametri appena introdotti, l'equazione caratteristica per questa matrice è:

$$\begin{aligned} & \left(m_0^2 + \frac{2A}{F_X^2} - \lambda \right) (\lambda_+^{(0)} + \Delta - \lambda)(\lambda_-^{(0)} + \Delta - \lambda) - 2abc + \\ & - b^2(\lambda_+^{(0)} + \Delta - \lambda) - a^2(\lambda_-^{(0)} + \Delta - \lambda) - c^2 \left(m_0^2 + \frac{2A}{F_X^2} - \lambda \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

e ha per soluzioni i seguenti autovalori:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{S_X}^2 \equiv \lambda_{S_X} = \frac{2A}{F_X^2} + \frac{c_1}{F_X} \frac{2B_m^2}{\lambda_\pi^4 B_\pi^4 - c_1^2 F_X^2} m_u m_d + \dots \\ M_\eta^2 \equiv \lambda_+ = \frac{1}{2}(\lambda_\pi^2 B_\pi^2 + c_1 F_X) + \dots \\ M_\pi^2 \equiv \lambda_- = \frac{1}{2}(\lambda_\pi^2 B_\pi^2 - c_1 F_X) + \dots \end{array} \right. \quad (3.63)$$

dove, con un piccolo abuso di notazione, continuiamo a indicare con S_X , η e π_3 gli stati fisici, autovettori della matrice (3.59).

Vediamo che gli ultimi due autovalori, λ_\pm risultano essere di ordine $\mathcal{O}(N_c^0)$ rispetto ad uno sviluppo per grandi N_c , come ci si aspetta per le masse dei mesoni. Invece la massa quadra dello stato esotico S_X ha acquistato, a causa del valore non nullo della suscettività topologica, un termine di ordine $\mathcal{O}(\frac{1}{N_c})$ di valore pari a $\frac{2A}{F_X^2}$.

Mostreremo più avanti, quando determineremo la suscettività topologica, che è possibile derivare questo stesso risultato anche invertendo la matrice associata alla forma quadratica della Lagrangiana con l'inclusione della densità di carica topologica $Q(x)$.

Settore scalare La matrice di massa quadra per l'insieme dei campi $(\tilde{\alpha}, \sigma, \delta_3)$, dove $\tilde{\alpha} \equiv \alpha - \bar{\alpha}$ è il campo che descrive le fluttuazioni scalari di X , risulta essere:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \lambda_X^2 F_X^2 & -\frac{c_1}{\sqrt{2}}\bar{\sigma} & \frac{c_1}{\sqrt{2}}\bar{\delta} \\ -\frac{c_1}{\sqrt{2}}\bar{\sigma} & \frac{1}{2}(\lambda_\pi^2 B_\pi^2 - c_1 F_X) + \tilde{\Delta} & 3\lambda_\pi^2 \bar{\sigma} \bar{\delta} \\ \frac{c_1}{\sqrt{2}}\bar{\delta} & 3\lambda_\pi^2 \bar{\sigma} \bar{\delta} & \frac{1}{2}(\lambda_\pi^2 B_\pi^2 + c_1 F_X) + \tilde{\Delta} \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

dove $\tilde{\Delta}$ è un termine di ordine due o superiore in m . Per quanto riguarda i campi δ_1 e δ_2 essi risultano già "diagonali" con massa quadra data, al primo ordine non banale in m , da:

$$M_{\delta_{1,2}}^2 = \frac{1}{2}(\lambda_\pi^2 B_\pi^2 - c_1 F_X) + \dots \quad (3.65)$$

Come si può facilmente vedere, nel limite chirale i tre autovalori della matrice \mathcal{B} sono dati (all'ordine dominante in m) a

$$\begin{cases} M_\alpha^2 = \lambda_X^2 F_X^2 + \dots \\ M_\sigma^2 = \frac{1}{2}(\lambda_\pi^2 B_\pi^2 - c_1 F_X) + \dots \\ M_\delta^2 = \frac{1}{2}(\lambda_\pi^2 B_\pi^2 + c_1 F_X) + \dots \end{cases} \quad (3.66)$$

a cui corrispondono i tre autostati $\tilde{\alpha}$, σ e δ .

Dai risultati trovati, vediamo che, nel limite di masse dei quarks nulle, si ha una degenerazione tra le masse dei canali $(\sigma, \vec{\pi})$ e $(\eta, \vec{\delta})$ appartenenti agli stessi multipletti $SU(2)$ chirali, come ci aspettavamo sulla base delle considerazioni riguardo agli effetti della restaurazione della simmetria chirale sulle suscettività chirali introdotte nel Paragrafo 1.5.2. Tuttavia, questa degenerazione non coinvolge tutti i canali mesonici come avveniva per $L \geq 3$: vediamo, infatti, che si ha uno "splitting" residuo (proporzionale a $c_1 F_X$) tra le masse quadre di questi due multipletti chirali. Questa non-degenerazione è proprio una manifestazione del fatto che la simmetria $U(1)$ assiale è ancora rotta al di sopra della transizione chirale ($F_X \neq 0$), ma è una peculiarità del caso $L = 2$.

Dai risultati ottenuti in questa sezione, vediamo che il punto stazionario (3.28) è un minimo per il potenziale V soltanto per quei valori di T per i quali l'espressione $\lambda_\pi^2 B_\pi^2 - c_1 F_X$ è positiva e *non* per qualsiasi $T \geq T_{\rho_\pi}$. Infatti, per esempio, per $T = T_{\rho_\pi}$, avremmo che $M_\pi^2 = M_\sigma^2 = -c_1 F_X < 0$ e il punto stazionario in esame sarebbe un punto di sella (in quanto la matrice (3.51) possiede sia autovalori positivi che negativi). E' facile capire che, affinchè la soluzione (3.28) sia un punto di minimo per V , dobbiamo trovarci a temperature sufficientemente più grandi di T_{ρ_π} , nel senso che il termine $\lambda_\pi^2 B_\pi^2$ (supposto crescente a partire dal valore nullo a $T = T_{\rho_\pi}$) deve essere abbastanza grande da rendere la quantità $\lambda_\pi^2 B_\pi^2 - c_1 F_X$ positiva.

Vedremo, infatti, nella prossima sezione, che per temperature non molto superiori rispetto a T_{ρ_π} , le equazioni (3.26) per il punto stazionario ammettono una soluzione non nulla nel limite chirale. Inoltre le ipotesi per

l'esistenza di tale soluzione ci porteranno necessariamente a determinare la corretta condizione sui parametri del modello mediante la quale definire la temperatura di transizione chirale T_{ch} per $L = 2$.

3.3 Studio del potenziale e dello spettro di massa per $T_{\rho_\pi} < T < T_{ch}$

Come detto, oltre alla soluzione (3.28), il sistema (3.26) ne ammette un'altra che si differenzia dalla precedente per il fatto di essere non nulla (in a e b) anche nel limite chirale. Questa soluzione è data da⁴

$$\sigma_0 \equiv a = b = \frac{1}{\lambda_\pi} \sqrt{c_1 \sqrt{2} \bar{\alpha} - \lambda_\pi^2 B_\pi^2}, \quad (3.67)$$

con $\bar{\alpha}$ definita implicitamente dalla terza equazione del sistema (3.26), ossia

$$\frac{c_1}{2\sqrt{2}\lambda_X^2\lambda_\pi^2}(c_1\sqrt{2}\bar{\alpha} - \lambda_\pi^2 B_\pi^2) = \bar{\alpha} \left[\bar{\alpha}^2 - \frac{F_X^2}{2} \right]. \quad (3.68)$$

In termini dei nostri campi σ e δ avremo che [si veda l'Eq. (3.24)]

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \sigma_0 \\ \bar{\delta} = 0 \end{cases} \quad (3.69)$$

Notiamo subito che la soluzione (3.67) ha significato soltanto se la soluzione $\bar{\alpha}$ dell'Eq.(3.68) soddisfa la condizione

$$\bar{\alpha} \geq \frac{\lambda_\pi^2 B_\pi^2}{c_1 \sqrt{2}}. \quad (3.70)$$

Inoltre, dovendosi avere [si veda l'ultima delle equazioni (3.26)] che

$$a = b = \frac{1}{\lambda_\pi} \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{c_1} \lambda_X^2 \bar{\alpha} \left(\bar{\alpha}^2 - \frac{F_X^2}{2} \right)}. \quad (3.71)$$

la soluzione (3.67) ha significato se $\bar{\alpha}$ è *anche* maggiore di (o, al più, uguale a) $\frac{F_X}{\sqrt{2}}$, ossia

$$\bar{\alpha} \geq \max \left\{ \frac{F_X}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda_\pi^2 B_\pi^2}{\sqrt{2} c_1} \right\}. \quad (3.72)$$

⁴La soluzione negativa va scartata perchè in tal caso la matrice di massa quadra per i mesoni avrebbe degli autovalori negativi qualora si tenessero in considerazione anche gli effetti delle masse non nulle dei quarks.

Proveremo adesso che l'esistenza di una soluzione $\bar{\alpha}$ dell'equazione (3.68) che soddisfa la condizione (3.72) è legata al segno del parametro

$$\mathcal{G}_\pi \equiv c_1 F_X - \lambda_\pi^2 B_\pi^2. \quad (3.73)$$

facendo vedere che siffatte soluzioni esistono solo se $\mathcal{G}_\pi \geq 0$.

Soluzioni (maggiori di $F_X/\sqrt{2}$) dell'equazione (3.68) esistono se il coefficiente angolare della retta $g(\bar{\alpha}) = \frac{c_1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\lambda_\pi^2} (c_1 \sqrt{2}\bar{\alpha} - \lambda_\pi^2 B_\pi^2)$ è maggiore di quello della retta che unisce l'intercetta all'origine di $g(\bar{\alpha})$ con il punto di intersezione tra la funzione $h(\bar{\alpha}) = \lambda_X^2 \bar{\alpha} \left[\bar{\alpha}^2 - \frac{F_X^2}{2} \right]$ e l'asse delle ascisse, ossia se (si veda la Figura 3.1)

$$\frac{c_1^2}{2\lambda_\pi^2} \geq \frac{c_1 B_\pi^2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{F_X} \quad (3.74)$$

cioè, se

$$\mathcal{G}_\pi = c_1 F_X - \lambda_\pi^2 B_\pi^2 \geq 0. \quad (3.75)$$

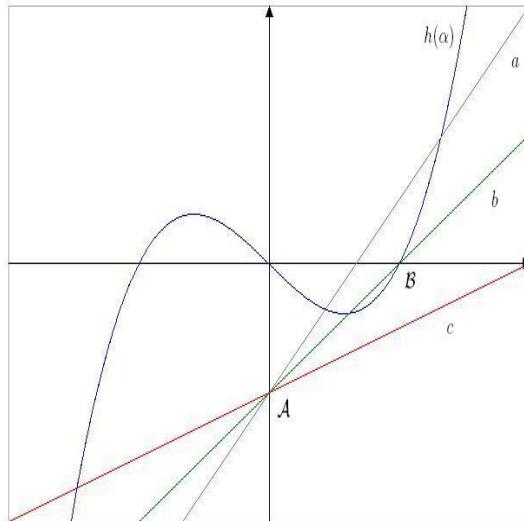


Figura 3.1: Rappresentazione grafica dell'equazione $g(\alpha) = h(\alpha)$. Il punto A ha coordinate $(0, -\frac{c_1 B_\pi^2}{2\sqrt{2}})$ mentre il punto B ha coordinate $(\frac{F_X}{\sqrt{2}}, 0)$. Con "a" è indicata la retta $g(\alpha)$ per $\mathcal{G}_\pi > 0$, con "b" per $\mathcal{G}_\pi = 0$ e con "c" per $\mathcal{G}_\pi < 0$.

Quando nella (3.75) vale il segno di uguale avremo che $\bar{\alpha} = \frac{F_X}{\sqrt{2}}$ (e $\bar{\sigma} = \bar{\delta} = 0$). Invece, dalla Figura 3.1 vediamo che, per $\mathcal{G}_\pi > 0$, $\bar{\alpha} > \frac{F_X}{\sqrt{2}}$. In quest'ultimo

caso è immediato verificare che la soluzione $\bar{\alpha}$ soddisfa la condizione (3.70), in quanto il fatto che $\mathcal{G}_\pi > 0$ comporta che $\max \left\{ \frac{F_X}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda_\pi^2 B_\pi^2}{c_1 \sqrt{2}} \right\} = \frac{F_X}{\sqrt{2}}$.

Essendo il parametro \mathcal{G}_π funzione di $c_1, F_X, \lambda_\pi^2, B_\pi^2$, i suoi valori dipenderanno dalla temperatura T . Sebbene non conosciamo quale sia la loro esatta dipendenza da T , possiamo ipotizzare che in un intorno di T_{ρ_π} il parametro B_π^2 sia crescente (dovendo ρ_π passare da valori positivi " $\frac{1}{2}F_\pi^2$ " a $T < T_{\rho_\pi}$ a valori negativi " $-\frac{1}{2}B_\pi^2$ " per $T > T_{\rho_\pi}$). Invece, riguardo ai parametri c_1, λ_π^2, F_X assumiamo che le loro variazioni siano trascurabili per $T \sim T_{\rho_\pi}$. In particolare ci aspettiamo che il parametro F_X , dovendo descrivere il comportamento della simmetria $U(1)_A$, vari notevolmente soltanto in prossimità della temperatura $T_{U(1)}$, rimanendo pressappoco costante per $T < T_{U(1)}$. Sotto queste assunzioni avremo che il parametro \mathcal{G}_π è una funzione decrescente della temperatura in un intorno di T_{ρ_π} . In particolare, per motivi che saranno più chiari nel seguito, perché il nostro modello possa riprodurre la transizione chirale dobbiamo assumere che \mathcal{G}_π si annulli ad una qualche temperatura compresa tra T_{ρ_π} e $T_{U(1)}$.

Riassumendo, abbiamo trovato che, a differenza del punto stazionario (3.28), la soluzione (3.69) non esiste per qualsiasi valore $T > T_{\rho_\pi}$. Essa, infatti, ha significato solo per quei valori di T per i quali il parametro \mathcal{G}_π è positivo. In tale intervallo, essendo $M_\pi^2 = M_\sigma^2 = -\frac{\mathcal{G}_\pi}{2}$ [si veda l'Eq. (3.63) e (3.66)] il punto stazionario (3.28) non è un punto di minimo, bensì un "*punto di sella*". In effetti, faremo vedere nei paragrafi che seguono, che nel suddetto intervallo il punto di minimo del potenziale V è dato proprio dalla soluzione (3.69).

3.3.1 Matrice di massa quadra

Vediamo, quindi, di analizzare la matrice delle derivate seconde del potenziale nel punto (3.69) e i suoi autovalori.

Settore pseudoscalare Se trascuriamo per un attimo i contributi generati dall'anomalia, troviamo la seguente matrice di massa quadra per l'insieme dei campi (S_X, η, π_3) (anche in questo caso, i campi π_1 e π_2 sono già diagonali e con massa quadra uguale a zero):

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{2\sqrt{2}\bar{\alpha}} \bar{\sigma}^2 & -\frac{c_1}{\sqrt{2}} \bar{\sigma} & 0 \\ -\frac{c_1}{\sqrt{2}} & c_1 \sqrt{2\bar{\alpha}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.76)$$

Come vediamo, c'è un autovalore nullo che è associato alla massa quadra del campo π_3 . Inoltre, se calcoliamo il determinante del minore relativo ai campi (S_X, η) vediamo che questo si annulla, e pertanto deve esserci un ulteriore campo a massa nulla. Se vogliamo determinare anche il terzo autovalore dobbiamo risolvere l'equazione caratteristica

$$\left(\frac{c_1}{2\sqrt{2\alpha}}\bar{\sigma}^2 - \lambda\right)(c_1\sqrt{2\alpha} - \lambda) - \frac{c_1^2}{2}\bar{\sigma}^2 = 0 \quad (3.77)$$

che ammette come soluzione, oltre alla già nota $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = c_1\sqrt{2\alpha}(1 + \frac{\bar{\sigma}^2}{4\alpha^2})$.

Includiamo adesso gli effetti della anomalia determinando la matrice di massa tramite il potenziale (2.34). Verifichiamo, innanzitutto, che l'aggiunta del termine anomalo nella (2.32) *non* modifica la soluzione da noi trovata per il punto stazionario. Essendo, in questo caso $\bar{U} \neq 0$ (poiché $\bar{\sigma} = \sigma_0 \neq 0$), si può prendere un termine anomalo con ω_1 che può anche essere diverso da zero:

$$-\frac{1}{8}A\{\omega_1[\log \det U - \log \det U^\dagger] + (1 - \omega_1)\frac{2i}{\bar{\alpha}}S_X\}^2 \quad (3.78)$$

con $\det U$ e $\det U^\dagger$ dati dalla (3.12). E' immediato verificare che le derivate prime di questo termine si annullano nel punto stazionario (3.69), in virtù del fatto che si ha $\bar{U} = \bar{U}^\dagger$ e $\bar{X} = \bar{X}^\dagger$ (i.e. $\bar{S}_X = 0$).

La matrice di massa quadra, con l'aggiunta del termine anomalo, risulta uguale a:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{2\sqrt{2\alpha}}\bar{\sigma}^2 + \frac{A}{\bar{\alpha}^2}(1 - \omega_1)^2 & -\frac{c_1}{\sqrt{2}}\bar{\sigma} + \frac{2A}{\alpha\bar{\sigma}}\omega_1(1 - \omega_1) & 0 \\ -\frac{c_1}{\sqrt{2}}\bar{\sigma} + \frac{2A}{\alpha\bar{\sigma}}\omega_1(1 - \omega_1) & c_1\sqrt{2\alpha} + \frac{4A\omega_1^2}{\bar{\sigma}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.79)$$

che, trascurando la terza riga e la terza colonna, possiamo scrivere, per semplificare un po' la notazione, nella forma

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} N & Z \\ Z & P \end{pmatrix}. \quad (3.80)$$

dove

$$\begin{cases} N = \frac{c_1}{2\sqrt{2\alpha}}\bar{\sigma}^2 + \frac{A}{\bar{\alpha}^2}(1 - \omega_1)^2, \\ Z = -\frac{c_1}{\sqrt{2}}\bar{\sigma} + \frac{2A}{\alpha\bar{\sigma}}\omega_1(1 - \omega_1), \\ P = c_1\sqrt{2\alpha} + \frac{4A\omega_1^2}{\bar{\sigma}^2} \end{cases} \quad (3.81)$$

Si trova, per il determinante di questa matrice, la seguente espressione:

$$\det \mathcal{A} = \frac{\sqrt{2}c_1 A}{\bar{\alpha}} \quad (3.82)$$

che risulta essere $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N_c}\right)$. In effetti, l'equazione caratteristica per la matrice (3.79)

$$\lambda^2 - (N + P)\lambda + NP - Z^2 = 0 \quad (3.83)$$

ha per soluzioni gli autovalori

$$\lambda_{\pm} = \frac{N + P \pm \sqrt{(N - P)^2 + 4Z^2}}{2} \quad (3.84)$$

che, all'ordine più basso in $1/N_c$, sono uguali a

$$\begin{cases} \lambda_+ = c_1 \sqrt{2\bar{\alpha}} \left(1 + \frac{\bar{\sigma}^2}{4\bar{\alpha}^2}\right) \sim \mathcal{O}(N_c^0) \\ \lambda_- = \frac{\frac{\sqrt{2}c_1 A}{\bar{\alpha}}}{c_1 \sqrt{2\bar{\alpha}} \left(1 + \frac{\bar{\sigma}^2}{4\bar{\alpha}}\right)} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{N_c}\right) \end{cases} \quad (3.85)$$

E' immediato verificare, mediante le definizioni (3.81), che entrambi questi autovalori sono positivi.

Settore scalare Vediamo, per finire, gli autovalori della matrice di massa quadra per il settore scalare. All'ordine zero nelle masse m_u e m_d tale matrice è data da

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \lambda_X^2 F_X^2 & -\frac{c_1}{\sqrt{2}} \bar{\sigma} & 0 \\ -\frac{c_1}{\sqrt{2}} \bar{\sigma} & c_1 \sqrt{2\bar{\alpha}} - \lambda_\pi^2 B_\pi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_1 \sqrt{2\bar{\alpha}} - \lambda_\pi^2 B_\pi^2 \end{pmatrix} \quad (3.86)$$

e ha per autovalori

$$\lambda_{\pm} = \frac{\lambda_1 = 2c_1 \sqrt{2\bar{\alpha}} - \lambda_\pi^2 B_\pi^2}{(\lambda_X^2 F_X^2 + c_1 \sqrt{2\bar{\alpha}} - \lambda_\pi^2 B_\pi^2) \pm \sqrt{(\lambda_X^2 F_X^2 - c_1 \sqrt{2\bar{\alpha}} + \lambda_\pi^2 B_\pi^2)^2 + \frac{2c_1^2}{\lambda_\pi^2} (\lambda_X^2 F_X^2 + c_1 \sqrt{2\bar{\alpha}} - \lambda_\pi^2 B_\pi^2)}} \quad (3.87)$$

Il primo di questi autovalori è sicuramente positivo nell'intervallo di temperatura in cui ci troviamo e la stessa cosa possiamo dire per λ_+ . Per quanto riguarda λ_- dobbiamo invece avanzare qualche ipotesi supplementare per provare la sua positività. Infatti, se calcoliamo il determinante della sottomatrice

$$\tilde{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_X^2 F_X^2 & -\frac{c_1}{\sqrt{2}} \bar{\sigma} \\ -\frac{c_1}{\sqrt{2}} \bar{\sigma} & c_1 \sqrt{2\bar{\alpha}} - \lambda_\pi^2 B_\pi^2 \end{pmatrix} \quad (3.88)$$

troviamo che

$$\det \tilde{\mathcal{B}} = (c_1 \sqrt{2\bar{\alpha}} - \lambda_\pi^2 B_\pi^2) \left(\lambda_X^2 F_X^2 - \frac{c_1^2}{2\lambda_\pi^2} \right). \quad (3.89)$$

Ora, nell'intervallo di temperatura in cui ci troviamo, si ha che $c_1\sqrt{2\alpha} - \lambda_\pi^2 B_\pi^2 > 0$, e quindi avremo che λ_- sarà positivo se $\lambda_X^2 F_X^2 > \frac{c_1^2}{2\lambda_\pi^2}$. Questa condizione è sicuramente verificata, per esempio, se prendiamo il limite $\lambda_X \rightarrow \infty$, che, trovandoci a $T < T_{U(1)}$, dove la simmetria $U(1)$ assiale è spontaneamente rotta, ha come risultato quello di "disaccoppiare" il grado massivo scalare del campo esotico X .

Grazie ai risultati ottenuti nella presente sezione possiamo quindi affermare che il punto stazionario dato dalle (3.67) e (3.69) è un minimo per il potenziale V per quei valori della temperatura compresi tra T_{ρ_π} e lo "zero" di $\mathcal{G}_\pi(T) = 0$.

Al termine di queste due sezioni, siamo nelle condizioni di caratterizzare in maniera chiara la restaurazione della simmetria chirale secondo il modello che abbiamo esaminato. Abbiamo visto, infatti, che per ogni temperatura $T > T_{\rho_\pi}$ il potenziale ammette un solo punto di minimo. Questo è diverso da zero, segnalando la rottura spontanea della simmetria chirale, per tutti quei valori di T (maggiori di T_{ρ_π} !) per i quali il parametro $\mathcal{G}_\pi \equiv c_1 F_X - \lambda_\pi^2 B_\pi^2$ è positivo; invece, a temperature tali per cui \mathcal{G}_π risulta essere negativo il valore d'aspettazione sul vuoto del campo mesonico U assume il valore nullo, indicando l'avvenuta restaurazione della simmetria chirale. Alla luce di queste osservazioni, diventa semplice capire che la temperatura alla quale il parametro \mathcal{G}_π si annulla è proprio la temperatura di transizione chirale. Definiremo quindi T_{ch} per $L = 2$ mediante la relazione

$$\mathcal{G}_\pi(T = T_{ch}) = 0. \quad (3.90)$$

Come abbiamo già osservato, sotto le ipotesi avanzate sul comportamento dei vari parametri $\lambda_\pi^2, B_\pi^2, c_1, F_X$, questa temperatura è unica ed è maggiore di T_{ρ_π} (a differenza del caso in cui $L \geq 3$, dove T_{ch} coincideva proprio con T_{ρ_π}), ma minore di $T_{U(1)}$.

Un'ultima osservazione riguarda il significato del termine σ_0 definito nella (3.67). Calcolando, in termini dei nostri campi definiti in Eq.(3.4), le correnti A_a^μ generate dall'invarianza della Lagrangiana (2.31) sotto trasformazioni $SU(2)_A$ si trova che $A_a^\mu = -\sigma_0 \partial^\mu \pi_a + \dots$, dove i puntini si riferiscono a termini contenenti due o più campi. Da ciò se ne deduce che σ_0 va identificato con la costante di decadimento del pion F_π .

3.4 Condensato chirale e suscettività topologica per $T > T_{ch}$

Una volta determinato il punto di minimo per il potenziale (3.2) possiamo determinare il condensato chirale mediante la relazione, vista nel Paragrafo 2.4.2,

$$\langle \bar{q}_i q_i \rangle = \frac{\partial V_{min}}{\partial m_i}.$$

dove $V_{min} = \tilde{V}(\overline{U}, \overline{U}^\dagger, \overline{X}, \overline{X}^\dagger)$. Sfruttando il fatto che i campi β , η , $\vec{\pi}$, δ_1 e δ_2 sono nulli sul vuoto e che $\overline{\alpha} = \frac{F_X}{\sqrt{2}} + \dots$ [si veda l'equazione (3.36)], troviamo che

$$\begin{aligned} V_{min} \simeq & \frac{1}{8} \lambda_\pi^2 (\overline{\sigma}^2 + \overline{\delta}^2)^2 + \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 (\overline{\sigma} \overline{\delta})^2 \\ & + \frac{1}{4} (\lambda_\pi^2 B_\pi^2 - c_1 F_X) \overline{\sigma}^2 + \frac{1}{4} (\lambda_\pi^2 B_\pi^2 + c_1 F_X) \overline{\delta}^2 \\ & - \frac{B_m}{2} [(m_u + m_d) \overline{\sigma} + (m_u - m_d) \overline{\delta}] \end{aligned} \quad (3.91)$$

da cui si ricava che

$$\begin{aligned}
\langle \bar{q}_u q_u \rangle &= \frac{\partial V_{min}}{\partial m_u} \simeq \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 (\bar{\sigma}^2 + \bar{\delta}^2) [\bar{\sigma} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial m_u} + \bar{\delta} \frac{\partial \bar{\delta}}{\partial m_u}] + \lambda_\pi^2 (\bar{\sigma} \bar{\delta}) [\bar{\delta} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial m_u} + \bar{\sigma} \frac{\partial \bar{\delta}}{\partial m_u}] \\
&\quad + \frac{1}{2} (\lambda_\pi^2 B_\pi^2 - c_1 F_X) \bar{\sigma} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial m_u} + \frac{1}{2} (\lambda_\pi^2 B_\pi^2 + c_1 F_X) \bar{\delta} \frac{\partial \bar{\delta}}{\partial m_u} \\
&\quad - \frac{B_m}{2} [\bar{\sigma} + \bar{\delta} + (m_u + m_d) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial m_u} + (m_u - m_d) \frac{\partial \bar{\delta}}{\partial m_u}] = \\
&\quad [\frac{1}{2} \lambda_\pi^2 (\bar{\sigma}^2 + \bar{\delta}^2) \bar{\sigma} + \lambda_\pi^2 \bar{\sigma} \bar{\delta}^2 + \frac{1}{2} (\lambda_\pi^2 B_\pi^2 - c_1 F_X) \bar{\sigma} - \frac{B_m}{2} (m_u + m_d)] \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial m_u} \\
&\quad + [\frac{1}{2} \lambda_\pi^2 (\bar{\sigma}^2 + \bar{\delta}^2) \bar{\delta} + \lambda_\pi^2 \bar{\sigma}^2 \bar{\delta} + \frac{1}{2} (\lambda_\pi^2 B_\pi^2 + c_1 F_X) \bar{\delta} - \frac{B_m}{2} (m_u + m_d)] \frac{\partial \bar{\delta}}{\partial m_u} \\
&\quad - \frac{B_m}{2} (\bar{\sigma} + \bar{\delta}) = - \frac{B_m}{2} (\bar{\sigma} + \bar{\delta})
\end{aligned} \tag{3.92}$$

avendo fatto uso delle equazioni di minimo (3.25) per i campi σ e δ . In maniera del tutto analoga troviamo che

$$\langle \bar{q}_d q_d \rangle = \frac{\partial V_{min}}{\partial m_d} \simeq - \frac{B_m}{2} (\bar{\sigma} - \bar{\delta}). \tag{3.93}$$

Vediamo quindi, come è giusto aspettarsi, che il condensato chirale è differente da zero se e solo se i campi σ o δ hanno un valore d'aspettazione sul vuoto diverso da zero. Inoltre, nel limite in cui la simmetria $SU(2)_V$ di isospin è esatta avremo che $\bar{\delta} = 0$ e avremo quindi che i condensati diventano degeneri, essendo uguali alla stessa quantità indipendente dal sapore.

Sostituendo le soluzioni delle equazioni di minimo (3.28) troviamo che per $T_{ch} < T < T_{U(1)}$ si ha:

$$\begin{cases} \langle \bar{q}_u q_u \rangle \simeq - \frac{B_m^2}{\lambda_\pi^4 B_\pi^4 - c_1^2 F_X^2} (m_u \lambda_\pi^2 B_\pi^2 + m_d c_1 F_X) \\ \langle \bar{q}_d q_d \rangle \simeq - \frac{B_m^2}{\lambda_\pi^4 B_\pi^4 - c_1^2 F_X^2} (m_d \lambda_\pi^2 B_\pi^2 + m_u c_1 F_X) \end{cases} \tag{3.94}$$

Invece, $T_{\rho_\pi} < T < T_{ch}$ si trova, usando la soluzione (3.67)-(3.69), che:

$$\langle \bar{q}_u q_u \rangle = \langle \bar{q}_d q_d \rangle \simeq - \frac{B_m}{2} \sigma_0, \tag{3.95}$$

da cui si vede che, come si è già detto alla fine della Sezione 3.3, σ_0 va identificata con la "costante di decadimento del pion" F_π (si veda l'Eq. (2.66)).

E' immediato riconoscere in queste espressioni per il condensato chirale la stessa struttura (2.88) ricavata nel capitolo precedente per $L \geq 3$.

Per determinare la suscettività topologica a $T > T_{ch}$ consideriamo la matrice

$$\mathcal{M}(k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{A} & -\frac{\sqrt{2}}{F_X} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{F_X} & k^2 - m_0^2 & a & b \\ 0 & a & k^2 - \lambda_+^{(0)} - \Delta & c \\ 0 & b & c & k^2 - \lambda_-^{(0)} - \Delta \end{pmatrix} \quad (3.96)$$

associata alla parte quadratica nei campi (Q, S_X, η, π_i) della Lagrangiana (2.31) nello spazio degli impulsi, in cui la densità di carica topologica Q non è ancora stata integrata e dove abbiamo posto $\omega_1 = 0$. I parametri m_0^2, a, b, c sono quelli definiti in Eq. (3.61) e $\lambda_+^{(0)}$ e $\lambda_-^{(0)}$ sono stati definiti in Eq.(3.53) [Δ è un termine di ordine $\mathcal{O}(m^2)$].

La funzione a due punti della densità di carica topologica a impulso nullo $\langle QQ\rangle(k=0)$ sarà data da

$$\langle QQ\rangle(k=0) = i(\mathcal{M}^{-1})_{11}(k=0) = i \frac{\det \mathcal{A}^*(k=0)}{\det \mathcal{M}(k=0)} \quad (3.97)$$

dove abbiamo indicato con $\mathcal{A}^*(k) \equiv k^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathcal{A}$, per cui

$$\mathcal{A}^*(k=0) = -\mathcal{A} \quad (3.98)$$

essendo \mathcal{A} la matrice definita in (3.51). Ora, tenendo presente che

$$\det \mathcal{M} = \frac{1}{A} \left\{ \det \mathcal{A}^*(k) - \frac{2A}{F_X^2} [(k^2 - \lambda_+^{(0)} - \Delta)(k^2 - \lambda_-^{(0)} - \Delta) - c^2] \right\} \quad (3.99)$$

e utilizzando la (3.98) e (3.52), troviamo per la suscettività topologica

$$\begin{aligned} \chi = -i\langle QQ\rangle(k=0) &= (\mathcal{M}^{-1})_{11}(k=0) = \\ &\frac{-\frac{c_1}{F_X} \frac{2AB_m^2}{\lambda_\pi^4 B_\pi^4 - c_1^2 F_X^2} m_u m_d}{-\frac{c_1}{F_X} \frac{2B_m^2}{\lambda_\pi^2 B_\pi^4 - c_1^2 F_X^2} m_u m_d - \frac{2A}{F_X^2}} \xrightarrow{sup_{m_i} \rightarrow 0} F_X c_1 \frac{B_m^2}{\lambda_\pi^4 B_\pi^4 - c_1^2 F_X^2} m_u m_d \end{aligned} \quad (3.100)$$

Vediamo che χ si annulla nel limite chirale come giustamente dev'essere.

Confrontando l'espressione (3.100) per la suscettività topologica con quella (3.94) per il condensato chirale si vede facilmente che la relazione (2.93) è valida, come già anticipato nel precedente capitolo, anche per $L = 2$.

Il procedimento seguito per determinare la suscettività topologica può anche essere utilizzato per derivare le masse dei vari stati mesonici che stiamo analizzando (trascorrendo piccoli termini di mescolamento proporzionali alle masse dei quark). Per esempio, si ha che

$$(\mathcal{M}_{22}^{-1})(k=0) = -\frac{i}{M_{S_X}^2}. \quad (3.101)$$

Poichè si ha, indicando con $\tilde{\mathcal{M}}_{22}(k)$ il minore dell'elemento $\mathcal{M}_{22}(k)$, che

$$\tilde{\mathcal{M}}_{22}(k) = \frac{1}{A}[(k^2 - \lambda_+^{(0)} - \Delta)(k^2 - \lambda_-^{(0)} - \Delta) - c^2] \quad (3.102)$$

troviamo, all'ordine più basso nelle masse e in $1/N_c$,

$$M_{S_X}^2 = \frac{c_1}{F_X} \frac{2B_m^2}{\lambda_\pi^4 B_\pi^4 - c_1^2 F_X^2} m_u m_d + \frac{2A}{F_X^2} + \dots \quad (3.103)$$

ossia proprio il risultato (3.63).

3.5 Generalizzazione del potenziale

La forma (3.2) per il potenziale non è la più generale possibile. In effetti è possibile aggiungere altri termini invarianti sotto il gruppo chirale. Qui di seguito vedremo gli effetti dell'aggiunta di un termine quartico nel campo mesonico U avente la forma

$$\frac{1}{16} \lambda_\pi'^2 [\text{Tr}(UU^\dagger)]^2 = \frac{1}{4} \lambda_\pi'^2 (\sigma^2 + \eta^2 + \vec{\delta}^2 + \vec{\pi}^2)^2. \quad (3.104)$$

In questo caso il nostro potenziale sarà dato da

$$V^* = V + \frac{1}{16} \lambda_\pi'^2 [\text{Tr}(UU^\dagger)]^2. \quad (3.105)$$

3.5.1 Punti stazionari del potenziale

L'aggiunta del termine (3.104) comporta che le equazioni di minimo (3.21) sono sostituite da

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\lambda_\pi^2(\bar{\sigma}^2 + \bar{\delta}^2)\bar{\sigma} + \lambda'_\pi(\bar{\sigma}^2 + \bar{\delta}^2)\bar{\sigma} + \lambda_\pi^2\bar{\sigma}\bar{\delta}_3 \\ + \frac{1}{2}\lambda_\pi^2B_\pi^2\bar{\sigma} - \frac{c_1}{\sqrt{2}}\bar{\alpha}\bar{\sigma} - \frac{B_m}{2}(m_u + m_d) = 0 \\ \frac{1}{2}\lambda_\pi^2(\bar{\sigma}^2 + \bar{\delta}^2)\bar{\delta} + \lambda'_\pi(\bar{\sigma}^2 + \bar{\delta}^2)\bar{\delta} + \lambda_\pi^2\bar{\sigma}^2\bar{\delta} \\ + \frac{1}{2}\lambda_\pi^2B_\pi^2\bar{\delta} + \frac{c_1}{\sqrt{2}}\bar{\alpha}\bar{\delta} - \frac{B_m}{2}(m_u - m_d) = 0 \end{cases} \quad (3.106)$$

che, definendo il nuovo parametro

$$\Lambda_\pi^2 \equiv \lambda_\pi^2 + 2\lambda'_\pi \quad (3.107)$$

e usando le variabili a e b definite in (3.24), assumono la forma

$$\begin{cases} \Lambda_\pi^2 a^3 - \lambda'_\pi(a^2 - b^2)a - c_1\sqrt{2}\alpha ab = 2B_m m_u \\ \Lambda_\pi^2 b^3 - \lambda'_\pi(a^2 - b^2)b - c_1\sqrt{2}\alpha a b = 2B_m m_d \end{cases} \quad (3.108)$$

Le soluzioni per questo sistema sono date nel limite chirale da

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \frac{1}{\Lambda_\pi^2} \sqrt{c_1\sqrt{2}\alpha - \lambda_\pi^2 B_\pi^2} \\ \bar{\delta} = 0 \end{cases} \quad (3.109)$$

e $\bar{\alpha}$ definita implicitamente dalla terza equazione del sistema (3.26) per $T_{\rho_\pi} < T < T_{ch}$, e da

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \bar{\delta} = 0 \\ \bar{\alpha} = \frac{F_X}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (3.110)$$

per $T_{ch} < T < T_{U(1)}$.

Tenendo in considerazione gli effetti delle masse dei quark, troviamo che anche in questo caso, a $T > T_{ch}$, le soluzioni sono quelle date da (3.34). Questo perchè avremo che $\bar{\sigma} \sim \bar{\delta} \sim \mathcal{O}(m)$ e pertanto il nuovo termine quartico apporta alle equazioni per i punti stazionari termini di ordine tre che risultano soppressi rispetto a quelli lineari nei campi.

3.5.2 Derivate seconde e matrice di massa

Per determinare gli effetti del termine (3.104) sulle masse dei vari mesoni calcoliamo le derivate seconde del potenziale (3.105). Cominciamo osservando che le derivate rispetto ai campi α e β non sono in alcun modo modificate, mentre le derivate rispetto ai campi mesonici sono date dalle seguenti

espressioni:

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial^2 \eta} = \frac{\partial^2 V}{\partial^2 \eta} + \lambda_\pi'^2 (\sigma^2 + \vec{\pi}^2 + 3\eta^2 + \vec{\delta}^2) \quad (3.111)$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial^2 \pi_i} = \frac{\partial^2 V}{\partial^2 \pi_i} + \lambda_\pi'^2 [\sigma^2 + 3\pi_i^2 + (\vec{\pi}^2 - \pi_i^2) + \eta^2 + \vec{\delta}^2] \quad (3.112)$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial \pi_i \partial \eta} = \frac{\partial^2 V}{\partial \pi_i \partial \eta} + 2\lambda_\pi'^2 \eta \pi_i \quad (3.113)$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial^2 \sigma} = \frac{\partial^2 V}{\partial^2 \sigma} + \lambda_\pi'^2 (3\sigma^2 + \eta^2 + \vec{\pi}^2 + \vec{\delta}^2) \quad (3.114)$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial^2 \delta_i} = \frac{\partial^2 V}{\partial^2 \delta_i} + \lambda_\pi'^2 [\sigma^2 + \eta^2 + \vec{\pi}^2 + 3\delta_i^2 + (\vec{\delta}^2 - \delta_i^2)] \quad (3.115)$$

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial \delta_i \partial \sigma} = \frac{\partial^2 V}{\partial \delta_i \partial \sigma} + 2\lambda_\pi'^2 \sigma \delta_i \quad (3.116)$$

Come vediamo, a $T > T_{ch}$ il nuovo termine aggiunge correzioni quadratiche nelle masse (essendo i valori di minimo dei campi mesonici proporzionali alle masse dei quarks in questo intervallo di temperatura). In particolare possiamo vedere che l'unico effetto del termine (3.104) è quello di ridefinire il termine Δ che compare nella (3.51); tuttavia questo termine, essendo quadratico nelle masse dei quarks, non porta correzioni all'ordine dominante alle masse dei mesoni sia del settore scalare che di quello pseudoscalare.

Capitolo 4

Osservazioni conclusive

In questo capitolo commenteremo i risultati ottenuti nel capitolo precedente riguardo allo spettro di massa del nostro modello sopra la temperatura di transizione chirale T_{ch} nel caso $L = 2$ e li confronderemo con i risultati ottenuti nella Sezione 2.6 per il caso $L = 3$. Faremo anche il confronto delle nostre predizioni: i) con i dati provenienti dalle simulazioni numeriche della QCD su reticolo per $L = 2$ e $T > T_{ch}$ e ii) con le analoghe predizioni ottenute usando un altro modello di Lagrangiana efficace presente in letteratura.

4.1 Confronto fra il caso $L = 2$ e il caso $L = 3$

Un aspetto particolarmente interessante dei risultati che abbiamo ottenuto nel precedente capitolo nel caso di $L = 2$ *flavours* leggeri è che essi differiscono sostanzialmente rispetto ai corrispondenti risultati ottenuti nella Sezione 2.6 per il caso di $L = 3$ (o, più in generale, $L \geq 3$).

Abbiamo visto, infatti, che, nel caso in cui prendiamo $L = 3$ *flavours* leggeri, i vari canali mesonici (scalari e pseudoscalari) risultano essere *tutti* degeneri tra di loro sopra T_{ch} , con masse quadre uguali a (nel "limite chirale" di massa zero per i quark)[si veda l'Eq. (2.81)]:

$$M^2 = \frac{1}{2} \lambda_\pi^2 B_\pi^2, \quad (4.1)$$

e quindi non vi è alcuna differenza tra le masse di stati appartenenti a diversi multipletti $SU(3)$ chirali o $U(1)$ assiali.

Per $L = 2$, invece, il modello di Lagrangiana efficace che abbiamo esaminato prevede che le masse quadre dei canali mesonici $\sigma, \eta, \vec{\delta}$ e $\vec{\pi}$ siano date dalle seguenti espressioni (nel "limite chirale") [si vedano le Eq.(3.63) e

(3.66)]:

$$\begin{aligned} M_\pi^2 &= M_\sigma^2 = \frac{1}{2}(\lambda_\pi^2 B_\pi^2 - c_1 F_X) \\ M_\delta^2 &= M_\eta^2 = \frac{1}{2}(\lambda_\pi^2 B_\pi^2 + c_1 F_X) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Come vediamo, nel suddetto intervallo di temperatura, le particelle che appartengono agli stessi multipletti $SU(2)$ chirali, $(\sigma, \vec{\pi})$ e $(\eta, \vec{\delta})$, hanno masse uguali. Invece, le masse quadre dei mesoni di uno stesso multipletto $U(1)$ assiale, $(\vec{\delta}, \vec{\pi})$ e (σ, η) , differiscono della quantità

$$\Delta M_{U(1)}^2 \equiv M_\delta^2 - M_\pi^2 = M_\eta^2 - M_\sigma^2 = c_1 F_X \quad (4.3)$$

Come già osservato alla fine del Paragrafo 3.2.4, tale "splitting" di massa riproduce proprio la degenerazione o meno delle suscettività chirali degli stati mesonici $\sigma, \eta, \vec{\delta}$ e $\vec{\pi}$ dovuta alla restaurazione della simmetria $SU(2)$ chirale e alla rottura della $U(1)$ assiale. Nelle equazioni (4.2) e (4.3) il parametro F_X rappresenta essenzialmente l'intensità del nuovo condensato assiale, il cui valore non nullo segnala appunto la rottura spontanea della simmetria $U(1)_A$. Pertanto $\Delta M_{U(1)}^2$ è uguale a zero soltanto al di sopra di $T_{U(1)}$, mentre per $T < T_{U(1)}$ esso è diverso da zero, rimuovendo così la degenerazione delle masse dei mesoni.

In particolare troviamo che, nell'intervallo di temperatura in esame, $M_{\pi,\sigma}^2$ cresce con T , passando da un valore nullo a $T = T_{ch}$ ad un valore $M_{\pi,\sigma}^2 = \frac{1}{2}\lambda_\pi^2 B_\pi^2(T = T_{U(1)})$ a $T = T_{U(1)}$. Per quanto riguarda, invece, le masse quadre del multipletto costituito da η e δ vediamo che esse sono uguali a $\lambda_\pi^2 B_\pi^2(T = T_{ch})$ per $T = T_{ch}$ (essendo $M_{\pi,\sigma}^2(T = T_{ch}) = 0$) e passano ad un valore $\frac{1}{2}\lambda_\pi^2 B_\pi^2(T = T_{U(1)})$ a $T = T_{U(1)}$. Per temperature superiori a $T_{U(1)}$ tutte le masse dei canali mesonici risultano invece uguali a $\frac{1}{2}\lambda_\pi^2 B_\pi^2$ essendo ormai restaurata anche la simmetria $U(1)$ assiale.

Per capire l'origine di questo differente comportamento delle masse quadre dei mesoni (per $T > T_{ch}$) fra il caso $L = 2$ e $L = 3$, bisogna considerare il termine di interazione \mathcal{L}_{int} tra il campo X e il campo U nella Lagrangiana efficace (2.31) :

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{c_1}{2\sqrt{2}}(X^\dagger \det U + X \det U^\dagger). \quad (4.4)$$

Tenendo presente che, per $T_{ch} < T < T_{U(1)}$, il campo X può essere parametrizzato nella forma

$$X = \left(\frac{F_X}{\sqrt{2}} + \tilde{\alpha} \right) e^{i \frac{\sqrt{2}}{F_X} S_X},$$

si trova che, sviluppando \mathcal{L}_{int} all'ordine più basso nei campi $\tilde{\alpha}$ (scalare) e S_X (pseudoscalare):

$$\frac{c_1}{2\sqrt{2}}(X^\dagger \det U + X \det U^\dagger) = \frac{c_1 F_X}{4}(\det U + \det U^\dagger) + \dots \quad (4.5)$$

dove i puntini di sospensione si riferiscono a termini contenenti anche i campi "esotici" $\tilde{\alpha}$ e S_X .

Se $L = 2$, l'espressione (4.5) risulta essere un vero e proprio termine di massa quadra per i mesoni, essendo quadratico nei campi U . Invece, se $L = 3$ e $T > T_{ch}$, essa rappresenta piuttosto una interazione a 3 mesoni e pertanto non ne modificherà in alcun modo le masse (nel "limite chirale"). Abbiamo visto nella Sezione 2.6 che per temperature maggiori di T_{ch} , il valore di U al minimo del potenziale è proporzionale alle masse dei quarks, ossia si ha che $\overline{U} \sim \mathcal{O}(m)$. Quando calcoliamo la matrice di massa quadra del potenziale nel punto \overline{U} si trova che le derivate seconde di "det U " contribuiscono con termini di ordine $\mathcal{O}(m^{L-2})$. Di conseguenza, questo contributo risulta soppresso rispetto a quello di ordine $\mathcal{O}(m^0)$ proveniente dal termine di potenziale del modello sigma (2.4) e uguale a $\frac{1}{2}\lambda_\pi^2 B_\pi^2$.

Quanto fin qui detto ha una interpretazione diagrammatica piuttosto semplice. Guardiamo, infatti, ai diagrammi che contribuiscono alla grandezza $\mathcal{D}_{U(1)}$ definita nella (1.66) per $T > T_{ch}$. Per $L = 2$ il diagramma da considerare è quello mostrato in Figura 1.2. Come vediamo, questo è proporzionale al valore del condensato $U(1)$ assiale che, nel caso in esame, connette 4 campi fermionici. Pertanto un valore non nullo di tale condensato comporta (almeno per $L = 2$!) che le suscettività chirali dei mesoni δ e π sono differenti così come, di conseguenza, le loro masse. Per $L = 3$, invece, il diagramma da considerare sarà quello mostrato nella Figura 4.1. In questo caso il condensato

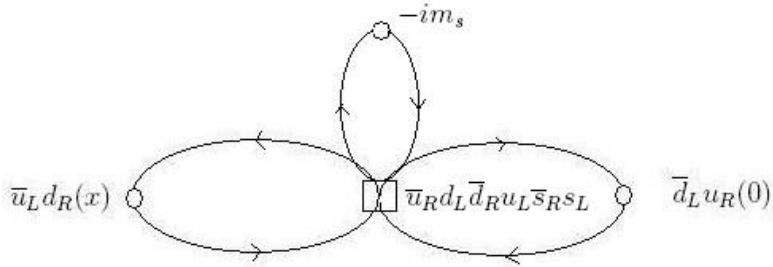


Figura 4.1: Rappresentazione diagrammatica di $\mathcal{D}_{U(1)}$ per $T > T_{ch}$ in presenza del condensato $U(1)$ assiale per $L = 3$.

$U(1)$ assiale connette 6 campi fermionici e pertanto il diagramma in esame sarà proporzionale anche a m_s (oltre che all'intensità del condensato $U(1)$ assiale), in quanto l'unico modo per "chiudere" tale diagramma è inserire un operatore di massa $-m_s \bar{s}s$ (essendo il condensato chirale $\langle \bar{q}q \rangle$ uguale a zero per $T > T_{ch}$). Nel limite chirale questo diagramma si annulla rendendo uguali le suscettività chirali, e quindi anche le rispettive masse.

Le previsioni ottenute mediante il nostro modello trovano riscontro nei dati ricavati mediante le simulazioni numeriche della teoria su reticolo. Già in [11, 12, 13] era stato studiato il comportamento in funzione della temperatura delle suscettività chirali associate ai canali mesonici che abbiamo considerato per $L = 2$. I risultati trovati indicavano che le masse dei canali $\vec{\delta}$ e $\vec{\pi}$ sono differenti per temperature superiori a T_{ch} , supportando così l'ipotesi che la simmetria $U(1)$ assiale sia restaurata a temperature superiori rispetto a quella di transizione chirale. Questi primi risultati sono stati confermati da simulazioni più recenti, e.g. nella Ref. [14], dove la restaurazione della simmetrie chirale e assiale è stata analizzata sotto due differenti aspetti. Innanzitutto è stata studiata, come nei lavori precedenti, la dipendenza dalla temperatura delle masse (di "screening") di un certo numero di canali mesonici, tra i quali $\vec{\delta}$ e $\vec{\pi}$. Tale analisi ha mostrato che, anche al di sopra della temperatura di transizione chirale, il rapporto $\frac{M_\delta}{M_\pi}$ è maggiore di 1 (proprio come risulta dalle espressioni (4.2)), ricordando che, come spiegato nella nota 1 a pag.56, $c_1 F_X > 0$)¹ fino ad un valore $T_{U(1)} \simeq 1.3 T_{ch}$. Inoltre, come ulteriore verifica, è stato anche analizzato, in funzione di T , il comportamento a piccole distanze spaziali dei correlatori associati ai suddetti canali mesonici. Pure in questo caso si è trovato che le suscettività diventano uguali ad una temperatura pari a $1.3 T_{ch}$.

In [58, 59], mediante un modello di Lagrangiana efficace $\tilde{\mathcal{L}}$ definita in Eq. (2.20)-(2.21), ottenuta aggiungendo alla Lagrangiana del modello- σ definita in (2.4) il termine di interazione "anomalo" $\mathcal{L}_I = c_I [\det U + \det U^\dagger]$ proposto da 'tHooft, è stata analizzata (anche con calcoli numerici) la dipendenza dalla temperatura delle masse dei mesoni. In particolare, in [58] viene analizzato nel dettaglio il caso $L = 3$, mentre in [59] è stata analizzata la dipendenza delle suddette masse anche in funzione del numero di svari leggeri ($L = 2, 3, 4$). Si è trovato che, nel limite chirale, la presenza del "termine anomalo" \mathcal{L}_I rimuove la degenerazione delle masse dei mesoni appartenenti a diversi multipletti $U(1)$ assiali sopra T_{ch} soltanto per $L = 2$. Ora, è interessante osservare che questi risultati sono in accordo (quantomeno qualitativo) con quanto da noi previsto mediante un modello di Lagrangiana efficace con caratteristiche differenti. Tale accordo può essere giustificato mediante il seguente argomento. In virtù del risultato (4.5), la Lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}$ può essere vista come l'ordine zero dello sviluppo nei campi $\tilde{\alpha}$ e S_X della Lagrangiana \mathcal{L} (2.31) da noi utilizzata:

$$\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}} + \mathcal{L}_A + \dots \quad (4.6)$$

¹Si ricordi che, in QCD, si può verificare in maniera "esatta" la seguente diseguaglianza $M_\pi \leq M_\delta$ (si veda il Cap.14 della Ref.[54] e le referenze ivi incluse)

dove i puntini si riferiscono a termini dipendenti dai campi $\tilde{\alpha}$ e S_X , e \mathcal{L}_A è il termine mediante il quale abbiamo descritto gli effetti dell'anomalia nel nostro modello:

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{8} A \{ \omega_1 \text{Tr}[\log U - \log U^\dagger] + (1 - \omega_1) [\log X - \log X^\dagger] \}^2. \quad (4.7)$$

Abbiamo visto che \mathcal{L}_A modifica soltanto le masse degli stati di singoletto di $SU(2)_V$, lasciando invece inalterate quelle degli stati mesonici di non-singoletto. Nel nostro modello, queste possono essere modificate soltanto dal termine di interazione tra i campi U e X , che, all'ordine dominante del suddetto sviluppo [si veda l'equazione (4.5)], risulta essere proprio uguale al termine \mathcal{L}_I (con $c_I = \frac{c_1 F_X}{4}$). Ora, mentre in [58, 59] tale termine viene attribuito alla presenza dell'anomalia, nel nostro modello la sua presenza è piuttosto legata all'esistenza del nuovo condensato $U(1)$ assiale (a prescindere dalla presenza o meno di un valore non nullo della suscettività topologica A).

Le differenze tra $L = 2$ e $L = 3$, tuttavia, non si esauriscono solo nelle caratteristiche dello spettro di massa. Come abbiamo visto nella Sezione 3.3, anche il parametro del modello che determina la restaurazione o meno della simmetria chirale è differente nei due casi. Abbiamo mostrato, infatti, che per $L = 3$ il parametro che determina la transizione di fase chirale è unicamente il ρ_π che compare nel termine di potenziale del modello- σ : un suo cambiamento di segno, da $\rho_\pi > 0$ per $T < T_{\rho_\pi}$ a $\rho_\pi < 0$ per $T > T_{\rho_\pi}$ segnala il passaggio dalla fase di simmetria chirale rossa alla fase di simmetria chirale restaurata, per cui $T_{ch} \equiv T_{\rho_\pi}$. Invece, per $L = 2$, la restaurazione della simmetria chirale avviene in corrispondenza del cambiamento di segno del parametro $\frac{g_\pi}{2\lambda_\pi^2} = \frac{c_1 F_X}{2\lambda_\pi^2} + \rho_\pi$ [si veda l'Eq.(3.73)]. Per questo motivo, per $L = 2$, T_{ch} e T_{ρ_π} sono differenti: non basta, infatti, che ρ_π cambi segno, ma occorre che esso diventi "sufficientemente" negativo da annullare ρ_π perché si abbia la transizione chirale e possa, quindi, per $T > T_{ch}$, restaurarsi la simmetria $SU(2)$ chirale. Se il comportamento del parametro ρ_π in funzione della temperatura T fosse indipendente dal numero di savori leggeri L , quanto appena detto implicherebbe una temperatura di transizione chirale T_{ch} della teoria con $L = 2$ maggiore rispetto a quella con $L = 3$. Questo sembra, in effetti, essere in accordo con i risultati di simulazioni su reticolato (si vedano le Ref.[12, 55, 56, 57]).

4.2 Conclusioni e prospettive

Il presente lavoro di tesi prende le mosse dai risultati ricavati mediante simulazioni numeriche su reticolo in cui sono state analizzate, in funzione della temperatura, le masse dei canali mesonici costituiti da 2 *flavours* leggeri [11, 12, 13, 14]. Questi risultati sembrano supportare l’ipotesi (già sostenuta in passato [15, 16, 17, 18, 19]) che la simmetria $U(1)$ assiale della QCD con L quarks a massa nulla sia restaurata ad una temperatura $T_{U(1)}$ maggiore di quella di transizione chirale T_{ch} : i suddetti dati indicano che (almeno per $L = 2$) si ha $T_{U(1)} \simeq 1.3 T_{ch}$.

Abbiamo quindi voluto proseguire lo studio delle conseguenze dell’esistenza di un condensato $U(1)$ assiale sul settore mesonico iniziata in Ref.[15, 16, 17] e proseguita in [26, 27, 25]. In questa esposizione si è focalizzata l’attenzione sull’analisi dello spettro di massa dei mesoni nell’intervallo di temperatura compreso tra T_{ch} e $T_{U(1)}$, con particolare attenzione per il caso $L = 2$. Per far ciò ci siamo serviti del modello di Lagrangiana efficace (2.31) proposto nelle Ref.[15, 16, 17], che rappresenta un’estensione di quello introdotto all’inizio degli anni ’80 da Witten, Di Vecchia, Veneziano *et al.* in Ref.[22, 23, 24].

Confrontando le previsioni sullo spettro di massa dei mesoni a $T_{ch} < T < T_{U(1)}$ per il caso $L \geq 3$ (discusso nella Sezione 2.6) e il caso $L = 2$ (discusso nel Capitolo 3), si è visto che in quest’ultimo caso il modello in esame presenta delle caratteristiche peculiari, che lo differenziano da quello per $L \geq 3$. In particolare si è trovato che l’esistenza di un nuovo condensato $U(1)$ assiale:

- rimuove la degenerazione tra le masse degli stati appartenenti a diversi multipletti $U(1)$ assiali per $T_{ch} < T < T_{U(1)}$.
- modifica, rispetto al caso $L \geq 3$, la condizione sui parametri del modello che determina la temperatura di transizione chirale;

Abbiamo anche verificato esplicitamente (col nostro modello) che le relazioni (2.88) e (2.93) tra il condensato chirale e la suscettività topologica per $T > T_{ch}$ sono valide a prescindere dal determinato valore di L , in accordo con quanto richiesto da alcune *identità di Ward* rilevanti per la simmetria $U(1)$ assiale [17].

Sarebbe interessante, in prospettiva, analizzare anche le predizioni del nostro modello riguardo all’ordine della transizione chirale per la teoria con $L = 2$. Questo problema è stato inizialmente studiato da Pisarski e Wilczek

(si veda la Ref.[39]) analizzando il comportamento critico del modello di Lagrangiana efficace proposto da 'tHooft. Questi hanno trovato che per $L = 3$ la transizione chirale è del primo ordine, mentre il caso con $L = 2$ risulta molto più problematico (si veda la discussione nel Paragrafo 1.5.2). In generale, uno studio approfondito del problema richiederebbe una conoscenza dettagliata della dipendenza dalla temperatura dei parametri della Lagrangiana efficace che si utilizza (nel caso del lavoro di Pisarski e Wilczek, il modello proposto da 'tHooft). Questa dipendenza è certamente dettata dalla teoria fondamentale, i.e. la QCD, ma è tutt'altro che banale riuscire a determinarla. Qualche informazione utile al riguardo potrebbe provenire, per esempio, dai risultati delle simulazioni numeriche su reticolo richiedendo che i parametri della Lagrangiana efficace siano tali da riprodurre le caratteristiche osservate. Bisogna anche aggiungere che uno studio del comportamento della teoria in prossimità della temperatura di transizione chirale T_{ch} richiederebbe un approccio per diversi aspetti differente da quello che abbiamo utilizzato noi, che consiste essenzialmente nell'approssimazione di "campo medio" e nell'espansione chirale, che non sono più valide in un intorno della temperatura critica (basti osservare che tutti i termini delle correzioni in m dei risultati che abbiamo ottenuto [si vedano, per esempio, le Eq. (3.34), (3.36) e (3.56)] risultano divergenti a T_{ch}).

In definitiva, abbiamo visto che la teoria con 2 *flavours* leggeri presenta, nell'intervallo di temperatura $T_{ch} < T < T_{U(1)}$, delle caratteristiche niente affatto banali, che rendono questo caso di interesse particolare. Tale interesse è anche giustificato dalla possibilità di poter confrontare le predizioni del nostro modello con i risultati provenienti dalle simulazioni numeriche della teoria su reticolo relative proprio al caso $L = 2$: come già osservato, queste sembrano essere in accordo con le nostre previsioni. Tale accordo incoraggia a proseguire lo studio degli effetti dell'esistenza di un condensato $U(1)$ assiale sulla dinamica degli adroni, sì da poter aggiungere un altro tassello al quadro teorico relativo alla struttura di fase della QCD.

Bibliografia

- [1] S.B. Treiman, in “*Lectures in Current Algebra and Its Applications*”, edited by S.B. Treiman, R. Jackiw, and D.J. Gross (Princeton University Press, Princeton, 1972);
S.L. Adler and R.F. Dashen, “*Current Algebras*” (Benjamin, New York, 1968).
- [2] S. Coleman, ”*Aspects of Symmetry, Selected Erice lectures*”, Cambridge University Press (1985).
- [3] T. Blum, L. Karkkainen, D. Toussaint e S. A. Gottlieb, Phys. Rev. D **51** (1995) 5153.
- [4] S. Weinberg, Phys. Rev. D **11**, 3583 (1975).
- [5] G. 'tHooft, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 8;
G. 'tHooft, Phys. Rev. D **14** (1976) 3432 [Erratum—ibid. D **18**, 2199 (1978)].
- [6] S. Adler, Phys. Rev. **177** (1969) 2426;
J.S. Bell, R. Jackiw, Nuovo Cimento A **60** (1969) 47.
- [7] K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett. **42**, (1979) 1195.
- [8] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.S. Schwartz, Yu.S. Tyupkin, Phys. Rev. Lett. B **59** (1975) 85.
- [9] E. Witten, Nucl. Phys. B **156** (1979) 269.
- [10] G. Veneziano, Nucl. Phys. B **159** (1979) 213.
- [11] C. Bernard *et al.*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **53**, 442 (1997);
C. Bernard *et al.*, Phys. Rev. Lett. **78**, 598 (1997).
- [12] F. Karsch, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **83–84**, 14 (2000).

- [13] P.M. Vranas, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **83–84**, 414 (2000).
- [14] M. Cheng *et al.*, Eur. Phys. J. C **71** (2011) 1564.
- [15] E. Meggiolaro, Z. Phys. C **62** (1994) 669.
- [16] E. Meggiolaro, Z. Phys. C **62** (1994) 679.
- [17] E. Meggiolaro, Z. Phys. C **64** (1994) 323.
- [18] A. Di Giacomo and E. Meggiolaro, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **42** (1995) 478.
- [19] E. Shuryak, Comments Nucl. Part. Phys. **21** (1994) 235.
- [20] M. Kobayashi, T. Maskawa, Prog. Teor. Phys. **44** (1970) 1422.
- [21] E. Meggiolaro, "Remarks on the $U(1)$ axial symmetry in QCD at zero and non-zero temperature", hep-ph/0206236v1.
- [22] E. Witten, Annals of Physics **128** (1980) 363.
- [23] P. Di Vecchia, G. Veneziano, Nucl. Phys. B **171** (1980) 253.
- [24] C. Rosenzweig, J. Schechter, C. G. Trahern, Phys. Rev. D **21** (1980) 3388;
K. Kawarabayashi, N. Otha, Nucl. Phys. B **171** (1980) 477;
P. Nath, R. Arnowitt, Phys. Rev. D **23** (1981) 473.
- [25] E. Meggiolaro, Phys. Rev. D **83** (2011) 074007.
- [26] M. Marchi, E. Meggiolaro, Nucl.Phys. B665 (2003) 425.
- [27] E. Meggiolaro, Phys. Rev. D **69** (2004) 074017.
- [28] K. Nakamura *et al.* (Particle Data Group), J. Phys. G **37** (2010) 075021.
- [29] M. Gell-Mann, "The Eightfold Way: A Theory Of Strong Interaction Symmetry", California Institute of Technology Reports CTSI-20 (1961);
M. Gell-Mann, Y. Ne'eman "The Eightfold-way" W.A. Benjamin, New York, (1964).
- [30] Y. Ne'eman, Nucl. Phys. **26** (1961) 222.
- [31] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8** (1964) 214;
O. W. Greenberg Phys, Rev. Lett. **13** (1964) 598;
M. Y. Han, Y. Nambu, Phys. Rev. **139** (1965) B1006.

- [32] D. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343.
- [33] D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346.
- [34] S. Weinberg, Phys. Rev. D **11** (1975) 3583.
- [35] J. Kogut, L. Susskind, Phys. Rev. D **11** (1976) 3594.
- [36] G. 'tHooft, Nucl. Phys. B **72** (1974) 462.
- [37] E. Meggiolaro, Phys. Rev. D **58** (1998) 085002.
- [38] E. Witten, Nucl. Phys. B **160** (1979) 57.
- [39] R. D. Pisarski, F. Wilczek, Phys. Rev. D **29** (1984) 338.
- [40] F. Karsh, E. Laermann, Phys. Rev. D **50** (1994) 6954;
C. Bernard *et al.*, Phys. Rev. D **54** (1996) 4585.
- [41] C. Bonati, G. Cossu, M. D'Elia, A. Di Giacomo, C. Pica, PoS Lattice (2008) 204; arXiv:0901.3231v1 [hep-lat].
- [42] M. Teper, Phys. Lett. B **171** (1986) 81;
A. Di Giacomo, E. Meggiolaro, H. Panagopoulos, Phys. Lett. B **277** (1992) 491;
E.M. Ilgenfritz, E. Meggiolaro, M. Muller-Preubker, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **42** (1995) 496.
- [43] B. Allés, M. D'Elia, A. Di Giacomo, Nucl. Phys. B **494** (1997) 281
[Erratum–ibid. B **679**, 397 (2004)].
- [44] L. Del Debbio, H. Panagopoulos, E. Vicari, JHEP 0409 (2004) 028.
- [45] C. DeTar, J. Kogut, Phys. Rev. Lett. **59** (1987) 399;
C. DeTar, J. Kogut, Phys. Rev. D **36** (1987) 2828.
- [46] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **147** (1979) 385.
- [47] S. Raby, Phys. Rev. D **13** (1976) 2594.
- [48] G. 'tHooft, Phys. Rep. **142** (1986) 357.
- [49] P. Di Vecchia, Phys. Lett. B **55** (1979) 357.
- [50] S. Okubo, Prog. Theor. Phys. **27** (1962) 949;
S. Okubo, Prog. Theor. Phys. **28** (1962) 24.

- [51] M. Teper, Phys. Lett. B **202** (1988) 553;
M. Campostrini, A. Di Giacomo, Y. Günduc, M.P. Lombardo, H. Panagopoulos, R. Tripiccione, Phys. Lett. B **252** (1990) 436.
- [52] P. Di Vecchia, F. Nicodemi, R. Pettorino, G. Veneziano, Nucl. Phys. B **181** (1981) 318.
- [53] S. Weinberg "The quantum theory of fields, Vol.2: Modern applications", Cambridge University Press (1995).
- [54] A. Smilga "Lectures on Quantum Chromodynamics", World Scientific (2001).
- [55] CP-PACS Collaboration: Ali Khan *et al.* Phys. Rev. D 63 (2001) 034502; arXiv:0008011v3 [hep-lat].
- [56] F. Karsch, E. Laermann, A. Peikert, Ch. Schmidt, S. Stickan, arXiv:0010027v1 [hep-lat] (2000);
F. Karsch, E. Laermann, A. Peikert, Nucl. Phys. B **605** (2001) 579; arXiv:0012023v1 [hep-lat].
- [57] F. Karsh, Lect. Notes Phys. 583 (2002) 209; arXiv:0106019v2 [hep-lat].
- [58] J. T. Lenaghan, D. H. Rischke, Phys. Rev. D **62** (2000) 085008.
- [59] D. Röder, J. Ruppert, D. Rischke, Phys Rev. D **68** (2003) 016003.