

# A Mecânica Quântica e a supersimetria: um estudo sobre os propagadores no contexto do Oscilador Harmônico Quântico

Quantum Mechanics and supersymmetry: a study of propagators in the context of the Quantum Harmonic Oscillator

C. Roldán-Domínguez<sup>\*1</sup>, H. Belich<sup>1</sup>, J. A. Helayël-Neto<sup>2</sup>, W. Spalenza<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Espírito Santo, Departamento de Física, Vitória, ES, Brasil.

<sup>2</sup>Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

<sup>3</sup>Instituto Federal do Espírito Santo, Cariacica, ES, Brasil.

Received on October 27, 2024. Revised on February 10, 2025. Accepted on March 03, 2025.

O exemplo de Mecânica Quântica Supersimétrica que apresentamos neste trabalho propõe uma abordagem mais atual para compreender sistemas quânticos complexos, utilizando métodos baseados em integrais de trajetória. O oscilador harmônico é um sistema modelar amplamente estudado nos cursos introdutórios de Mecânica Quântica, e a aplicação da supersimetria nesse contexto oferece uma ferramenta eficiente para explorar relações não-triviais entre diferentes estados quânticos. A combinação da supersimetria com o formalismo de integrais de trajetória possibilita uma visão clara das flutuações quânticas e das transições entre estados, proporcionando considerações valiosas sobre a natureza intrínseca dos sistemas físicos em sua abordagem quântica.

**Palavras-chave:** Mecânica Quântica Supersimétrica, Oscilador harmônico, Formalismo de integrais de trajetória.

The Supersymmetric Quantum Mechanics example presented in this work proposes a modern approach to understanding complex quantum systems using path integral methods. The harmonic oscillator is a paradigmatic system widely studied in introductory Quantum Mechanics courses, and the application of supersymmetry in this context provides an efficient tool for exploring nontrivial relationships between different quantum states. The combination of supersymmetry with the path integral formalism offers a clear perspective on quantum fluctuations and state transitions, providing valuable insights into the intrinsic nature of physical systems in their quantum description.

**Keywords:** Supersymmetric Quantum Mechanics, Harmonic oscillator, Path integral formalism.

## 1. Introdução

A supersimetria aparece como uma extensão natural do grupo de Poincaré. É uma simetria que relaciona bósons e férmions, de tal forma que a Lagrangiana supersimetrizada de um certo sistema seja invariante sob uma classe de transformações contínuas relacionando bósons e férmions que integram um mesmo supermultiplete. Adotando-se esse novo cenário de um grupo de Poincaré estendido, o espectro de partículas descrito pelo Modelo-Padrão das Interações Fundamentais pode ser adaptado para incorporar a supersimetria. Emergem da formulação novas partículas, chamadas parceiras supersimétricas, e seus correspondentes campos relativísticos. Uma vez quantizados, estes campos geram correções radiativas que atenuam as divergências do Modelo-Padrão ([1–3]). Esse é, inclusive, um dos argumentos adotados para defender a ideia de supersimetria em Física de

Partículas. O fato dos experimentos em curso ainda não terem revelado as partículas parceiras supersimétricas pode sugerir que a quebra da supersimetria ocorra em escalas de energia mais altas do que aquelas em que os aceleradores atuais, como o LHC, operam.

A supersimetria deve realmente ser quebrada a energias muito altas, próximas da escala de  $10^{16}$  GeV da Grande-Unificação. Essa quebra é, entretanto, comunicada, por argumentos baseados no grupo de renormalização, a escalas mais baixas, como a escala TeV, característica dos experimentos com feixes de prótons em colisão no LHC. Da ideia de uma quebra da supersimetria comunicada à escala TeV, combinada com o Modelo-Padrão, emerge o chamado Modelo-Padrão Minimamente Supersimétrico (MSSM) que adquire diferentes versões, segundo o mecanismo específico que comunica a quebra da supersimetria à escala TeV. Porém, como mencionado anteriormente, a quebra primária da supersimetria ocorre em uma escala próxima da escala de Grande-Unificação. Para detectar partículas supersimétricas no regime de energias hoje acessíveis,

\*Endereço de correspondência: [clararoldan4@gmail.com](mailto:clararoldan4@gmail.com)

Editor-Chefe: Marcello Ferreira

deveria existir um mecanismo em que a quebra da supersimetria ocorresse próxima às escalas de energia nas quais os detectores operam atualmente.

Sendo assim, as massas das partículas supersimétricas encontram-se em uma escala um pouco acima das massas das partículas mais pesadas detectadas em conformidade com o Modelo-Padrão. A atual falta de evidência de partículas supersimétricas, como descrito pelo MSSM, não descarta a supersimetria, mas impõe limites às massas e aos parâmetros físicos do MSSM. Isso também estimula a pesquisa de novos mecanismos de quebra de supersimetria, versões não-mínimas da supersimetria ou ainda novas formas de manifestação da supersimetria; por exemplo, através de realizações não-lineares. A ausência de partículas supersimétricas nos experimentos do LHC não exclui a supersimetria porque esta implica algo mais profundo do que apenas o surgimento de partículas supersimétricas.

A supersimetria está nas bases da simetria conforme, que é, sim, uma simetria que tem validade em um regime de altíssimas energias, no qual as massas das partículas do Modelo-Padrão podem ser tomadas nulas, ou seja, estamos falando de uma simetria no regime assintótico ultravioleta. Entendemos a supersimetria, de uma forma mais ampla, como uma simetria fundamental da Natureza, e não como um modelo específico, em vista do argumento de que, a partir de uma supersimetria no espaço-tempo, podemos naturalmente induzir a simetria conforme, esta última apoiada por experimentos, como o espalhamento profundamente inelástico e por sistemas em transição de fase nas vizinhanças dos pontos críticos.

Por fim, a supersimetria é mais do que um refinamento do Modelo-Padrão, é mais do que a existência de partículas supersimétricas; implica em uma nova concepção do espaço-tempo da Relatividade Especial - o superespaço - cujos pontos são descritos tanto por coordenadas bosônicas como por uma nova categoria de coordenadas, de natureza fermiônica. No superespaço, as transformações de coordenadas envolvem naturalmente os dois tipos de variáveis fermiônicas e bosônicas<sup>1</sup>. Neste contexto, a supersimetria surge como uma simetria espaço-temporal de translação entre os dois tipos de espaços que formam o superespaço: entre o espaço de coordenadas bosônicas e o espaço de coordenadas fermiônicas (também chamadas de números de Grassmann).

Em 1967, Coleman e Mandula provaram com base em princípios fundamentais das teorias quânticas de campos, que as únicas transformações de simetria permitidas na descrição das interações entre as partículas em nosso Universo são transformações do grupo de Poincaré com as simetrias internas correspondentes ao Modelo-Padrão [6] descritas por grupos unitários. Isto significa

que as simetrias espaço-temporais não se misturam não-trivialmente com as simetrias internas. No jargão da Teoria de Grupos, estas duas categorias de simetrias se relacionam apenas por um produto Cartesiano. No entanto, o teorema deixa de ser válido se geradores fermiônicos são acrescentados ao setor de geradores bosônicos.

Em 1971, o conceito de supersimetria aparece pela primeira vez no trabalho de Gel'fand e Likhtman. Em [7], os autores propõem uma extensão do teorema de Coleman-Mandula adicionando esta nova simetria, agora representada por geradores fermiônicos, e com um espaço-tempo estendido pela introdução de coordenadas de natureza anti-comutante. Ao mesmo tempo, em 1971, Ramond, Neveu, Schwarz, Gervais e Sakita introduziram a supersimetria em duas dimensões, no contexto da teoria das cordas ([8–12]). Esses trabalhos, juntamente com o artigo de Gel'fand e Likhtman, motivaram Wess e Zumino a construir uma teoria de campo supersimétrica em quatro dimensões [13–15].

Conceitos de supersimetria podem ser aplicados à Mecânica Quântica. Esta ideia foi introduzida inicialmente por Witten [16] e, posteriormente, desenvolvida por Cooper e Freedman [17] como um laboratório para investigar métodos não-perturbativos de quebra da supersimetria em teoria de campos. Witten introduziu o conceito que passou a se chamar índice de Witten para analisar essa quebra, e em [18] apresentaram um novo índice para teorias regularizadas na rede, marcando o uso da supersimetria como um instrumento valioso nesse contexto. Entretanto, à medida que exploramos os aspectos da Mecânica Quântica Supersimétrica, torna-se evidente que essa teoria vai além de ser apenas um laboratório para as teorias de campo.

Um de seus aspectos notáveis é a capacidade de fatorar operadores, como a Hamiltoniana, usando o conceito de invariância de forma. Isso permite a solução analítica de problemas em categorias específicas, alguns dos quais já eram conhecidos, mas agora são vistos sob a perspectiva da supersimetria. O oscilador harmônico supersimétrico representa o exemplo mais simples da Mecânica Quântica Supersimétrica, e sua energia é  $E_{(n_B, n_F)} = \omega[(n_B + \frac{1}{2}) + (n_F - \frac{1}{2})]$ , em que cada nível é caracterizado pelos números de ocupação  $n_B = 0, 1, 2, \dots$  e  $n_F = 0, 1$ , bosônicos e fermiônicos, respectivamente, que pode ser visto em [19–21]. É importante notar que o estado fundamental possui energia nula, devido ao cancelamento da energia de vibração de ponto-zero do bóson e da energia de vibração negativa de ponto-zero do férmion. Esse fenômeno peculiar da supersimetria tem atraído grande interesse, pois difere das teorias de campo não-supersimétricas, nas quais a energia de vácuo é forçada a zero através do ordenamento normal de operadores de criação e destruição. O ponto-zero de vibração não é arbitrário e tem implicações reais, afetando as correções radiativas nos níveis de energia dos átomos, o chamado “*Lamb shift*”. Esse cancelamento natural da energia de

<sup>1</sup> O princípio de exclusão de Pauli e a estatística de Bose-Einstein classificam as partículas em bósons e férmions, resultando em um Modelo-Padrão assimétrico. No entanto, surge a questão de saber se em outros cenários, como um Universo mais quente, essa distinção entre bósons e férmions ainda se mantém. A supersimetria surge naturalmente como uma resposta a essa pergunta ([4, 5]).

vácuo também se aplica a teorias supersimétricas com interações.

Em teorias supersimétricas, as divergências na teoria de perturbações são em grande parte naturalmente canceladas quando as contribuições infinitas dos loops bosônicos e fermiônicos são somados. No entanto, a supersimetria sozinha não elimina completamente as divergências, mas as reduz, atenuando as divergências quadráticas para divergências logarítmicas. Quando a supersimetria é combinada com simetrias internas adicionais, é possível eliminar as divergências remanescentes. Um exemplo notável ocorre em teorias de campos em  $(1 + 3)$  dimensões, como a teoria supersimétrica de campos de gauge do tipo  $N = 4$ , que é completamente livre de divergências ultravioleta.

Neste ponto, cabe um breve esclarecimento sobre o que se conhece como a supersimetria estendida  $N = 4$ . Em quatro dimensões espaço-temporais, foi demonstrado, no importante trabalho de Haag, Lopuszansky e Sohnius [22] que é possível ter um número máximo de  $N = 8$  supersimetrias independentes. A uma única supersimetria, nos referimos como supersimetria simples, como é o caso do modelo aqui discutido. A particular importância da supersimetria  $N = 4$  reside no fato de que esta corresponde a uma teoria de Yang-Mills maximamente supersimétrica, descrevendo a propagação e a interação entre partículas com spins 0,  $1/2$  e 1. A supersimetria  $N = 8$  descreve uma teoria de gravitação maximamente supersimétrica, à qual nos referimos como supergravidade  $N = 8$ , incorporando a propagação de partículas com spins 0,  $1/2$ , 1,  $3/2$  e 2. É oportuno destacar que há um amplo espectro de questões de natureza matemática associadas às supersimetrias estendidas.

Nossa meta central neste artigo é reproduzir o oscilador harmônico supersimétrico e investigar sua estrutura e parâmetros em comparação com o oscilador harmônico tradicional, que é bem conhecido. Para trabalhar com um oscilador harmônico supersimétrico, que acomoda férmions e bósons, precisamos introduzir as variáveis de Grassmann, que não são outra coisa que os férmions de nosso modelo. A novidade é que sempre trabalharemos dentro da estrutura teórica do formalismo de Feynman para a ação. Supersimetrizar a Mecânica Quântica pode ser, pensando em um contexto de campos quânticos, um interessante “toy model”, já que modelos mecânicos podem ser encarados como teorias de campo unidimensionais.

Antes de iniciarmos a apresentação dos conceitos e desenvolvimentos técnicos, gostaríamos de destacar que o nosso esforço nesta contribuição é trazer, para um público de graduandos e professores atuando no ensino de Física, as primeiras noções sobre supersimetria, o método da integral de caminho e o conceito de propagador, adotando um modelo mecânico simples: o oscilador harmônico unidimensional. Nossa proposta tem como objetivo preparar os tópicos citados acima para seu posterior estudo no âmbito das teorias de

campo. Modelos mecânicos nada mais são do que teorias de campo unidimensionais, no sentido de que todos os graus de liberdade são função unicamente do tempo. Apesar de termos, neste trabalho, adotado o oscilador harmônico para motivar a ideia de supersimetria, o método da integral de caminho e o conceito de propagador, gostaríamos de sublinhar que, em princípio, estes três tópicos são independentes.

A supersimetria baseia-se em uma nova concepção de espaço-tempo, em que este é estendido para um novo espaço, o superespaço. Por sua vez, o método da integral de caminho é um dos métodos, entre outros existentes, para se quantizar sistemas clássicos. Já os propagadores estão intimamente ligados às chamadas funções de Green, que são a expressão matemática de como conectar um efeito à causa que o gerou. Um propagador é uma função de Green causal e é objeto fundamental no estudo das teorias de campo. Em geral, os tópicos de supersimetria e o método da integral de caminho não constam dos programas dos cursos de Graduação. Funções de Green avançadas e retardadas são estudadas nos cursos de Eletromagnetismo e Métodos Matemáticos da Física. Porém, a noção de propagador é trabalhada nos cursos de teorias quânticas de campo. O que tentamos mostrar neste trabalho é como esses tópicos podem ser antecipados para Graduandos, em Bacharelado e Licenciatura, através de um conceito quase arquetípico da Física, o oscilador harmônico simples.

A organização de nosso artigo é descrita a seguir: Na Seção II, trabalhamos as integrais de trajetória em Mecânica Quântica e sua aplicação ao oscilador harmônico clássico; na Seção III, introduzimos os conceitos de superespaço e supercampos e apresentamos o oscilador harmônico supersimétrico ( $N = 1$ ) no contexto das integrais de trajetória. Concluimos, na Seção IV, fazendo as nossas considerações finais. Um Apêndice é desenvolvido para ilustrar em detalhes um importante mecanismo que aparece recorrentemente em Física de Partículas, a oscilação de campos/partículas, que já aparece em nossa discussão do oscilador harmônico supersimétrico.

## 2. Integrais de Trajetória em Mecânica Quântica e Aplicação ao Oscilador Harmônico

Um dos nossos objetivos principais é o cálculo dos propagadores da teoria. Isso pode ser feito usando o formalismo canônico [23], ou a partir do formalismo das integrais de trajetória de Feynman [24]. Embora neste trabalho nos concentremos no estudo do segundo método, ambas abordagens são usadas na teoria quântica de campos; portanto, o que faremos aqui será uma preparação para o estudo dessa teoria. Vamos introduzir a ideia básica e o leitor poderá ver outros materiais mais completos para se entender os procedimentos ([25–33]). A troca de informações em física, de uma forma geral, é

feita a partir da ideia de propagadores

$$\psi(x_f, t_f) = \int G(x_f, t_f; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i) dx_i, \quad (1)$$

onde  $\psi(x_i, t_i)$  é uma função de onda definida em um espaço-tempo com coordenada espacial bosônica,  $(x)$ . O propagador,  $G(x_i, t_i; x_f, t_f)$ , também chamado função de Green<sup>2</sup>, ou função de dois pontos, transmite a informação da causa ao receptor do efeito. Se tivermos um evento intermediário, considerando, por exemplo, o ponto inicial com  $\psi(x_i, t_i)$  passa por  $\psi(x, t)$  até  $\psi(x_f, t_f)$

$$\begin{aligned} \psi(x_f, t_f) &= \int dx \, dx_i \, dt \, G(x_f, t_f; x, t) G(x, t; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i), \\ &= \int dx_i \, U(t_f, x_f; t_i, x_i) \psi(x_i, t_i). \end{aligned} \quad (2)$$

onde  $U$  é o operador de evolução temporal<sup>3</sup>. Podemos, então, generalizar para  $N$  pontos dividindo o intervalo de tempo entre o tempo inicial e o final em  $N$  espaçamentos fixos de igual comprimento infinitesimal  $\tau$  onde  $\tau = (t_f - t_i)/N$ . No final, tomaremos o limite contínuo  $\tau \rightarrow 0$  e  $N \rightarrow \infty$ . Os tempos intermediários são dados por:  $t_k = t_i - k\tau$  onde  $k = 1, 2, \dots, N-1$ . Com isso, o operador de evolução temporal assume a forma

$$\begin{aligned} U(t_f, x_f; t_i, x_i) &= \int dx_1 \dots dx_{N-1} G(x_f, t_f; x_{N-1}, t_{N-1}) \\ &\quad \times G(x_{N-1}, t_{N-1}; x_{N-2}, t_{N-2}) \\ &\quad \dots G(x_2, t_2; x_1, t_1) G(x_1, t_1; x_i, t_i). \end{aligned}$$

Sem mostrar os passos, que podem ser encontrados nas referências [25–28], pode-se chegar a expressão,

$$U(x_f, t_f; x_i, t_i) = \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \mathcal{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar} S[x]}. \quad (3)$$

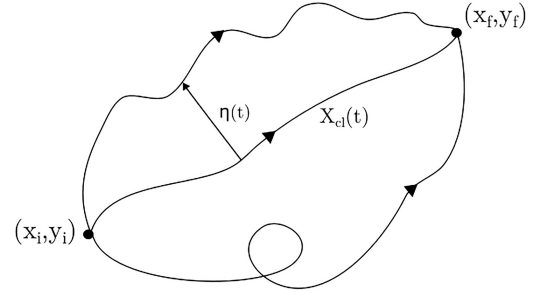
onde  $\hbar$  refere-se a constante de Planck reduzida. Esta quantidade se conhece como a integral de caminho de Feynman para a amplitude de transição na mecânica quântica não relativística em uma dimensão. Com  $\mathcal{D}x$  denota-se a integração sobre todos os caminhos. Na Figura (1) podemos entender melhor o significado dessa integral. A quantidade  $\mathcal{N}$  é uma constante independente dos parâmetros dinâmicos da teoria e  $S[x]$  é a ação do sistema<sup>4</sup>

$$S = \int dt L[x(t), \dot{x}(t), J(t)]. \quad (4)$$

<sup>2</sup> Neste caso,  $x$  é uma variável bosônica e, portanto, as funções de Green são simétricas sob a troca:  $G(x', t'; x, t) = G(x, t; x', t')$ . Isto não se cumpre para variáveis fermiônicas.

<sup>3</sup> O operador de evolução temporal gera a translação temporal do sistema:  $|\psi(t_1)\rangle = U(t_1, t_2) |\psi(t_2)\rangle$ ; onde, para um Hamiltoniano não-dependente do tempo, a equação de Schrodinger diz que:  $U(t_1, t_2) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t_1-t_2)H}$ . O operador evolução temporal é a função de Green da equação de Schrödinger dependente do tempo.

<sup>4</sup> A ação  $S$  é o que se conhece como um funcional: uma função escalar cuja variável independente é uma função do tempo. Na referência [28] o leitor encontrará um capítulo dedicado à descrição detalhada dos funcionais e suas propriedades.



**Figura 1:** Aqui representamos apenas três, mas há infinitas trajetórias do ponto inicial ao ponto final. A contribuição de um caminho é proporcional a  $e^{\frac{i}{\hbar} S[x]}$ . A amplitude da probabilidade é dada pela soma das contribuições de todos os caminhos no espaço de configuração. Como os pontos finais/iniciais das trajetórias são fixos as flutuações satisfazem  $\eta(t_f) = \eta(t_i) = 0$ . Para uma melhor compreensão, consulte [25].

Antes de iniciar a apresentação do estudo do Oscilador Harmônico supersimétrico, seguiremos a referência [28] para estudar o caso puramente bosônico, descrito pela Lagrangiana abaixo,

$$L[x(t), \dot{x}(t), J(t)] = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 - \frac{1}{2} k x(t)^2 + J(t)x(t), \quad (5)$$

onde  $k$ , conforme nos livros-texto [34, 35], é a constante de oscilação da mola, que fica em termos da frequência angular e da massa da partícula  $k = m\omega^2$ . Além disso, existe a influência de uma fonte externa  $J(t)$ . Embora estejamos trabalhando em uma dimensão espacial, nosso estudo está concentrado na estrutura da teoria quântica de campos, portanto, entendemos  $J(t)$  como possíveis perturbações no espaço-tempo (por exemplo, em 4 dimensões, elas poderiam estar relacionadas com partículas virtuais). Em uma teoria clássica, a corrente pode representar uma força externa do tipo que é usada em oscilações forçadas [35, 36], em que a corrente pode ser escrita como uma “pancada” súbita, ou seja, uma força externa que existe só num pequeno intervalo, descrita pela distribuição delta de Dirac,  $F(t) = F_0 \delta(t)$ . Existem muitas trajetórias  $x(t)$  que vão do ponto do espaço-tempo  $(x_i, t_i)$  ao ponto do espaço-tempo  $(x_f, t_f)$ , mas há apenas uma que minimiza a ação. Essa é a trajetória clássica que é determinada pela minimização da ação,  $\left. \frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} \right|_{x=x_{cl}} = 0$ . Frisamos essa palavra, trajetória clássica, pois uma das características do formalismo de integrais de trajetória é separar bem o que é um campo, ou no nosso caso coordenada, clássica e quântico, onde o quântico se refere flutuações não triviais em torno do campo clássico. Aplicando essa condição a (4) e substituindo a Lagrangiana (5), obtemos a equação de Euler-Lagrange

$$m \ddot{x}_{cl} + m\omega^2 x_{cl} = J. \quad (6)$$

Entretanto, aqui pretendemos estudar todas as possíveis trajetórias,  $x(t)$ , que poderia seguir a partícula no

caminho de  $(x_i, t_i)$  a  $(x_f, t_f)$ . Isso se traduz em uma amplitude quântica, que, como já vimos é dada pelo propagador de Feynman normalizado

$$K_x = \langle t_f, x_f | t_i, x_i \rangle = \mathcal{N} \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar} S[x]}. \quad (7)$$

Para avaliar a integral funcional (7), vamos expandi-la usando o desenvolvimento em série de Taylor na ação sobre o caminho clássico, levando em conta que a ação clássica é no máximo quadrática na variável  $x(t)$ ,

$$\begin{aligned} S[x] &= S[x_{cl} + \eta], \\ &= S[x_{cl}] + \int dt \eta(t) \left. \frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} \right|_{x_{cl}} \\ &\quad + \frac{1}{2!} \int dt_1 dt_2 \eta(t_1) \eta(t_2) \\ &\quad \times \left. \frac{\delta^2 S[x]}{\delta x(t_1) \delta x(t_2)} \right|_{x=x_{cl}} + \dots, \\ &= S[x_{cl}] + \frac{1}{2!} \int dt_1 dt_2 \eta(t_1) \eta(t_2) \left. \frac{\delta^2 S[x]}{\delta x(t_1) \delta x(t_2)} \right|_{x_{cl}}, \end{aligned}$$

onde levamos em conta o princípio da mínima ação<sup>5</sup>. A variável  $\eta(t)$  representa as flutuações quânticas em torno da trajetória clássica,  $x(t) = x_{cl}(t) + \eta(t)$ . Usando a definição da ação como uma função da Lagrangiana podemos calcular a diferencial da ação de segunda ordem,

$$S[x] = S[x_{cl}] + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt (m\dot{\eta}^2 - m\omega^2 \eta^2).$$

Portanto substituindo em (7),

$$\langle t_f, x_f | t_i, x_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\eta e^{\left[ \frac{i}{\hbar} S[x_{cl}] + \frac{i}{2\hbar} \int_0^T dt (m\dot{\eta}^2 - m\omega^2 \eta^2) \right]}, \quad (8)$$

onde levamos em conta que somar para todos os caminhos é equivalente à somar para todas as flutuações quânticas possíveis  $\mathcal{D}x = \mathcal{D}\eta$ . Por outro lado, definindo  $T = t_f - t_i$ , as condições de contorno para as flutuações são  $\eta(T) = \eta(0) = 0$  que são as satisfeitas pela expansão senoidal de Fourier para  $\eta(t)$ ,

$$\eta(t) = \sum_n a_n \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right), \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

onde dividimos a trajetória em  $N$  intervalos, com  $N \rightarrow \infty$ , ou seja, há  $N-1$  pontos de tempo intermediários, onde pode haver uma flutuação do caminho clássico.

<sup>5</sup> Percebe-se que a fonte  $J$  é eliminada pela derivada segunda na posição.

Portanto, só pode haver  $N-1$  coeficientes independentes na expansão de Fourier,

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \dot{\eta}^2 &= \sum_{n,m} \int_0^T dt a_n a_m \left(\frac{n\pi}{T}\right) \left(\frac{m\pi}{T}\right) \\ &\quad \times \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{m\pi t}{T}\right), \\ &= \frac{T}{2} \sum_n \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 a_n^2, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \eta^2 &= \sum_{n,m} \int_0^T dt a_n a_m \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{m\pi t}{T}\right), \\ &= \frac{T}{2} \sum_n a_n^2, \end{aligned}$$

onde usamos as propriedades de ortonormalidade das funções senoidais. Fazemos a substituição na integral da exponencial de (8),

$$\begin{aligned} \langle t_f, x_f | t_i, x_i \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A} e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}]} \\ &\quad \int da_1 \dots da_{N-1} e^{\frac{imT}{4\hbar} \sum_{n=1}^{N-1} \left[ \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 - \omega^2 \right] a_n^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

onde adotamos que integrar sobre todas as flutuações quânticas possíveis  $\eta(t)$  é equivalente a integrar sobre todos os valores possíveis dos coeficientes da expansão,  $a_n$ . Observe também que qualquer fator possível decorrente do Jacobiano na mudança de variáveis de  $\eta$  para  $a_n$  é incluído em  $\mathcal{A}$ . Observa-se que a amplitude da transição (9) é um produto de integrais Gaussianas cujo valor é conhecido,

$$\begin{aligned} \int da_n e^{\frac{imT}{4\hbar} \left( \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 - \omega^2 \right) a_n^2} \\ = \left( \frac{4\pi i \hbar}{mT} \right)^{1/2} \left( \frac{n\pi}{T} \right)^{-1} \left( 1 - \left( \frac{\omega T}{n\pi} \right)^2 \right)^{-1/2}, \end{aligned}$$

de modo que,

$$\langle t_f, x_f | t_i, x_i \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}' e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}]} \prod_{n=1}^{N-1} \left( 1 - \left( \frac{\omega T}{n\pi} \right)^2 \right)^{-1/2},$$

onde

$$\mathcal{A}' = \left( \frac{4\pi i \hbar}{mT} \right)^{1/2} \left( \frac{n\pi}{T} \right)^{-1},$$

e usando<sup>6</sup>,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{N-1} \left( 1 - \left( \frac{\omega T}{n\pi} \right)^2 \right)^{-1/2} = \frac{\sin \omega T}{\omega T}, \quad (10)$$

<sup>6</sup> Essas relações são tabuladas em [37].

chegamos a,

$$\langle t_f, x_f | t_i, x_i \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}' e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}]} \left( \frac{\sin \omega T}{\omega T} \right)^{-1/2}.$$

Para calcular  $\mathcal{A}'$  consideramos o caso de uma partícula livre ( $\omega = 0$ ), ver [28],

$$\langle t_f, x_f | t_i, x_i \rangle_{\text{livre}} = \left( \frac{m}{2\pi i \hbar T} \right)^{1/2} e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}]}.$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}' = \left( \frac{m}{2\pi i \hbar T} \right)^{1/2}.$$

Portanto, chegamos à expressão final da amplitude quântica de transição para um oscilador harmônico interagindo com uma fonte externa dependente do tempo,

$$\langle t_f, x_f | t_i, x_i \rangle = \left( \frac{m}{2\pi i \hbar T} \right)^{1/2} \left( \frac{\sin \omega T}{\omega T} \right)^{-1/2} e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}]}, \quad (11)$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega T}} e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}]}, \quad (12)$$

onde a dependência da fonte reside no termo  $S[x_{cl}]$ . Com o surgimento do novo termo,  $\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega T}}$ , vemos que todas as trajetórias possíveis contribuem para a evolução do sistema, não apenas a trajetória clássica. Isso revela a natureza intrinsecamente probabilística e não-determinística da Mecânica Quântica. Podemos observar também que esse propagador tem uma forma oscilatória, refletindo a natureza do oscilador harmônico quântico.

Nos concentramos no cálculo dos propagadores da teoria, pois este é um ingrediente fundamental para entender como o sistema quântico evolui no espaço-tempo. No entanto, também pode ser interessante calcular as probabilidades, que são fisicamente mensuráveis. A densidade de probabilidade pode ser calculada a partir do propagador, tal que,  $P(x_f, t_f) = \psi^*(x_f, t_f) \cdot \psi(x_f, t_f) = |\psi(x_f, t_f)|^2$ , onde, como vimos em (2),

$$\psi(x_f, t_f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle t_f, x_f | t_i, x'_i \rangle \psi(x'_i, t_i) dx'_i.$$

Assim, para determinar completamente a amplitude quântica em (12), precisamos calcular a ação clássica. Para isso, de (6),

$$m\ddot{x}_{cl}(t) + m\omega^2 x_{cl}(t) = J(t),$$

$$\rightarrow \left( \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) x_{cl}(t) = \frac{J(t)}{m}. \quad (13)$$

A solução para essa equação é composta por uma parte homogênea e outra não-homogênea,

$$x_{cl}(t) = x_H(t) + x_I(t), \quad (14)$$

respectivamente, onde, a homogênea tem a forma,  $x_H(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$ , de modo que  $A$  e  $B$  podem ser

calculadas usando as condições de contorno do problema e a solução não-homogênea se define como,

$$x_I(t) = - \int_{t_i}^{t_f} G(t-t') J(t') dt', \quad (15)$$

onde  $G(t, t')$  é a função de Green que satisfaz,

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) G(t-t') = -\delta(t-t'), \quad (16)$$

que, no espaço de Fourier, lê-se<sup>7</sup>,

$$\frac{1}{2\pi} (-\kappa^2 + \omega^2) \hat{G}(\kappa) = -\frac{1}{2\pi}, \quad \rightarrow \quad \hat{G}(\kappa) = \frac{1}{\kappa^2 - \omega^2}, \quad (17)$$

onde usamos as relações abaixo para obter a função de Green, bem a distribuição delta de Dirac no espaço de fase,

$$G(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \hat{G}(\kappa) e^{-i\kappa(t-t')}, \quad e$$

$$\delta(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} e^{-i\kappa(t-t')}, \quad (18)$$

que quando substituimos (17), obtemos,

$$G(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{e^{-i\kappa(t-t')}}{\kappa^2 - \omega^2}. \quad (19)$$

Essa integral tem dois polos ( $\kappa = \pm\omega$ ) de ordem 1, portanto, para avaliar essa integral, devemos utilizar o teorema dos resíduos<sup>8</sup> especificando um contorno no plano  $\kappa$  complexo. Nesse contexto quântico, é interessante calcular a função de Green causal (ou função de Green de Feynman [25]) que corresponde a escolher os polos da seguinte forma,

$$G(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{e^{-i\kappa(t-t')}}{(\kappa - \omega + \frac{i\epsilon}{2\omega})(\kappa + \omega - \frac{i\epsilon}{2\omega})}. \quad (20)$$

Aplicando o teorema dos resíduos para  $t-t' < 0$ <sup>9</sup>,

$$\oint_c \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{e^{-i\kappa(t-t')}}{(\kappa - \omega + \frac{i\epsilon}{2\omega})(\kappa + \omega - \frac{i\epsilon}{2\omega})}$$

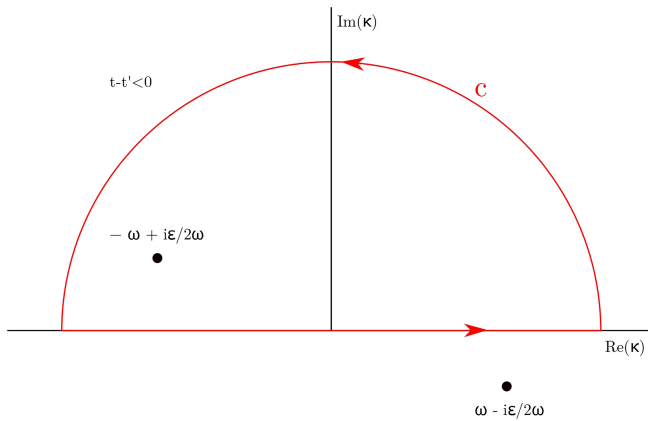
$$= \int_{R=-\infty}^{R=+\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{e^{-i\kappa(t-t')}}{(\kappa - \omega + \frac{i\epsilon}{2\omega})(\kappa + \omega - \frac{i\epsilon}{2\omega})},$$

$$= 2\pi i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Res}(f(\kappa), \kappa = -\omega + i\epsilon/2),$$

<sup>7</sup> Representamos a variável de Fourier pela letra grega  $\kappa$  para não confundir com a constante  $k$  de restauração do oscilador.

<sup>8</sup> O teorema dos resíduos [38], [36] afirma que  $\oint_c f(s) ds = \pm 2\pi i \sum_{\text{int}} \text{Res}(f(s), s_0)$  onde o sinal é positivo quando o contorno é percorrido no sentido anti-horário e negativo quando é percorrido no sentido horário.  $\text{Res}(f(s), s_0)$  é o resíduo da função  $f$  no polo  $s_0$  e é dado por  $\text{Res}(f(s), s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} [(s-s_0)^n f(s)]$  onde  $n$  é o ordem do polo.

<sup>9</sup> Escolhendo o contorno específico representado na Figura (2), a integral ao longo do semicírculo superior do contorno é cancelada.



**Figura 2:** Inserimos a quantidade  $\epsilon \rightarrow 0$  para deslocar os polos fora do eixo real. Isso é chamado de prescrição de Feynman. Para  $t - t' > 0$ , escolhemos o contorno simétrico abaixo do eixo real que contém o outro polo interno.

nos dando,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Res}(f(\kappa), \kappa = -\omega + i\epsilon/2) = \frac{-e^{i\omega(t-t')}}{4\pi\omega}. \quad (21)$$

Fazemos o mesmo procedimento para  $t - t' > 0$ , a função de Green torna-se

$$G(t-t') = \frac{1}{2\omega i} \left[ \Theta(t-t') e^{-i\omega(t-t')} + \Theta(t'-t) e^{i\omega(t-t')} \right], \quad (22)$$

onde  $\Theta$  é a função de Heaviside. Substituindo essa função em (15) a solução (14) fica,

$$x_{cl}(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} - \frac{1}{2\omega mi} \left[ \int_{t_i}^t e^{-i\omega(t-t')} J(t') dt' + \int_t^{t_f} e^{i\omega(t-t')} J(t') dt' \right]. \quad (23)$$

Usando as condições de contorno:  $x_{cl}(t_i) = x_i$  e  $x_{cl}(t_f) = x_f$ , chegamos a,

$$\begin{aligned} x_{cl}(t) &= \frac{1}{\sin \omega T} x_f \sin [\omega (t - t_i)] + \frac{1}{\sin \omega T} x_i \sin [\omega (t_f - t)] \\ &+ \frac{1}{\sin \omega T} \frac{1}{2m\omega} \int_{t_i}^{t_f} dt' J(t') e^{-i\omega T} \cos [\omega (t - t')] \\ &- \frac{1}{\sin \omega T} \frac{1}{2m\omega} \int_{t_i}^{t_f} dt' J(t') \cos [\omega (t_f + t_i - t - t')] \\ &- \frac{1}{2im\omega} \left[ \int_{t_i}^t dt' J(t') e^{-i\omega(t-t')} + \int_t^{t_f} dt' J(t') e^{i\omega(t-t')} \right], \end{aligned} \quad (24)$$

e substituindo (4) na ação, fica,

$$\begin{aligned} S[x_{cl}] &= \frac{m\omega}{2 \sin \omega T} [(x_i^2 + x_f^2) \cos \omega T - 2x_i x_f] \\ &+ \frac{x_i}{\sin \omega T} \int_{t_i}^{t_f} dt J(t) \sin \omega (t_f - t) \\ &+ \frac{x_f}{\sin \omega T} \int_{t_i}^{t_f} dt J(t) \sin \omega (t - t_i) \\ &- \frac{1}{m\omega \sin \omega T} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t dt' J(t) \sin \omega (t_f - t) \\ &\quad \times \sin \omega (t' - t_i) J(t'). \end{aligned}$$

Portanto, fica completamente determinada a amplitude quântica em (12).

Um dos objetivos deste trabalho é estender esse cálculo projetado de um oscilador puramente bosônico a um oscilador supersimétrico descrito por variáveis bosônicas e fermiônicas. É exatamente isso que faremos na próxima seção. Primeiro, propomos uma expressão para um Lagrangiana supersimétrico que descreve um oscilador harmônico. Os cálculos seguirão a mesma lógica desta seção, mas levando em conta que agora também trabalhamos com variáveis fermiônicas que têm uma natureza diferente das variáveis bosônicas. Por exemplo, uma propriedade importante a levar em conta nos cálculos será a anticomutatividade das variáveis fermiônicas.

### 3. Oscilador Harmônico Supersimétrico no Contexto das Integrais de Trajetória

Nesta Seção, estendemos o cálculo do propagador do oscilador harmônico, feito na seção anterior, para um cenário supersimétrico. Para isso, vamos descrever brevemente esse cenário. A álgebra de Poincaré é formada por geradores de rotação e translação no espaço-tempo de Minkowski. Com a introdução da supersimetria, amplia-se a álgebra de Poincaré, inserindo geradores de translações no superespaço. Assim como  $P^\mu$  é o gerador das translações das coordenadas bosônicas espaciais no espaço de Minkowski ( $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ ).  $Q_\alpha$  é o gerador das translações das variáveis Grassmannianas ( $\theta'_\alpha = \theta_\alpha + \epsilon_\alpha$ ). Podemos imaginar então um superespaço de variáveis  $(x^\mu, \theta_\alpha)$  onde estudar a Mecânica Quântica, neste caso, supersimétrica. Este superespaço é composto por coordenadas bosônicas que comutam e obedecem a estatística de Bose-Einstein  $(t, x, \dots)$  e coordenadas fermiônicas que anti-comutam e obedecem a estatística de Fermi-Dirac  $(\theta_1, \theta_2, \dots)$ . O espaço comutante estudamos desde o nível básico de ensino. Porém o espaço anti-comutante é conhecido como espaço de Grassmann e obedece a álgebra de Grassmann. Em poucas palavras, uma álgebra de Grassmann  $\mathcal{G}_n$  de dimensão  $n$  é gerada por um conjunto de geradores  $\theta_\alpha$  com  $\alpha = 1, \dots, n$  que satisfazem,

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = \theta_\alpha \theta_\beta + \theta_\beta \theta_\alpha = 0 \rightarrow \theta_\alpha^2 = 0. \quad (25)$$

Esta condição,  $\theta_\alpha^2 = 0$ , sugere, já no nível clássico, o princípio de exclusão de Pauli. A variável  $\theta$  não é uma variável física, como o tempo ou a posição mas sim uma variável auxiliar para trabalhar com férmions. A parametrização das coordenadas de um superespaço, então, pode assumir a seguinte estrutura  $(t, x_1, x_2, \dots, \theta_1, \theta_2, \dots)$ . Tomando como exemplo apenas duas coordenadas bosônicas e grassmannianas  $(t, x_1, x_2, \theta_1, \theta_2)$  uma função das coordenadas deste superespaço pode sempre ser expandida de forma fatorada, através do produto de funções das coordenadas do setor espacial por monômios constituídos pelas coordenadas Grassmannianas. Isto é realizado por meio da expressão que segue abaixo,

$$F(t, x_1, x_2, \theta_1, \theta_2) = f_0(x_\mu) + f_1(x_\mu)\theta_1 + f_2(x_\mu)\theta_2 + f_3(x_\mu)\theta_1\theta_2. \quad (26)$$

onde  $x_\mu = (t, x_1, x_2)$  e  $\theta_1^2 = \theta_2^2 = 0$ , sendo que as outras combinações não são contempladas pois elas são eliminadas pela relação de anticomutação. Para o desenvolvimento do nosso problema, consideremos o caso mais simples, com duas variáveis independentes,  $t$  e  $\theta$ , onde tomamos a supercoordenada bosônica  $X(t, \theta) = x(t) + i\theta\lambda(t)$ , que envolve a coordenada bosônica,  $x(t)$ , e a coordenada fermiônica,  $\lambda(t)$ .  $X(t, \theta)$  e  $x(t)$  são variáveis reais:  $x(t)^* = x(t)$ . Para assegurar que a grandeza seja real, como as variáveis  $\theta$  e  $\lambda$  anticomutam entre si, é necessário introduzir a unidade imaginária “ $i$ ” no produto  $\lambda\theta$ . Dizemos que  $\lambda(t)$  é um campo ou coordenada a parceira supersimétrica de  $x(t)$  e vice-versa. A Lagrangiana que define a teoria fica, então, em função desta nova supercoordenada. Uma proposta que oferece uma dinâmica e dimensões corretas<sup>10</sup> é a densidade super-lagrangiana [39],

$$L(X, \Psi) = \frac{i}{2} m \dot{X} D_\theta X - \frac{1}{2} \mu \Psi D_\theta \Psi + V(X) \Psi, \quad (27)$$

onde  $\mu$  tem dimensões de massa e a superderivada se define como  $D_\theta = \partial_\theta - i\theta\partial_t$ . Notamos a presença de uma nova supercoordenada neste caso fermiônica,  $\Psi(t, \theta) = \phi(t) + \theta s(t)$ .  $\phi(t)$  tem natureza fermiônica e  $s(t)$  é um escalar bosônico. De novo, queremos que  $\Psi$  seja real. Porém, não é preciso introduzir a unidade imaginária “ $i$ ” no segundo termo de  $\Psi$ , porque as variáveis  $\theta$  e  $s$  comutam. A introdução desta nova supercoordenada é necessária para gerar o termo do potencial:  $V(X) = \alpha X$  que vai reproduzir corretamente o potencial do oscilador harmônico. A ação supersimétrica contém a integração da Lagrangiana supersimétrica (super-lagrangiana) no elemento de “volume” (na verdade, aqui, temos um elemento de linha temporal e outro grassmanniano) do

superespaço  $(dtd\theta)$ , tal que,

$$S = \int dtd\theta L(X, \Psi), \\ = \int dt \left[ \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{im}{2} \lambda \dot{\lambda} - \frac{i\mu}{2} \phi \dot{\phi} + \frac{\mu}{2} s^2 + \alpha x s + \alpha i \lambda \phi \right],$$

onde desenvolvemos as supercoordenadas  $X$  e  $\Psi$  e integramos na variável grassmanniana<sup>11</sup>. Eliminamos a coordenada  $s(t)$  via Euler-Lagrange, pois não tem dinâmica, portanto é uma coordenada auxiliar,

$$\frac{\partial L}{\partial s} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{\alpha x}{\mu}. \quad (28)$$

Substituindo na ação obtemos,

$$S = \int dt \left[ \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{im}{2} \lambda \dot{\lambda} - \frac{i\mu}{2} \phi \dot{\phi} - \frac{\alpha^2}{2\mu} x^2 + i\alpha \lambda \phi \right]. \quad (29)$$

É interessante chamar a atenção para um fato não muito comum em sistemas clássicos e quânticos: a presença de um termo misto (“*mixing term*”) nas duas coordenadas fermiônicas  $\lambda$  e  $\phi$ . Termos desta natureza requerem um tratamento especial ao se derivar as funções de Green. Considerando que esta não é uma situação usual, procuramos esclarecer ao leitor sobre estes detalhes no Apêndice.

Gostariamos também de antecipar um aspecto que será importante ao realizarmos a quantização do sistema da ação (29) pelo método das integrais de caminho. O aspecto em questão diz respeito à existência de eventuais vínculos existentes no modelo a ser quantizado. O processo de integração sobre todas as possíveis trajetórias fermiônicas pede um esclarecimento, se atentarmos para o fato de que a ação de Dirac para coordenadas (ou para campos) fermiônicas não é quadrática na velocidade, o que poderia indicar a presença de um vínculo, e isto implicaria em uma restrição no processo de integrar sobre as possíveis trajetórias. Entretanto, a equação de movimento para a coordenada (ou para o campo) fermiônica possui derivada temporal, o que, então, significa que se pode integrar sobre todas as trajetórias sem a imposição de vínculos. No caso do campo de Maxwell, a simetria de calibre está associada ao vínculo implícito na lei de Gauss para o campo elétrico, o que, então, requer o procedimento de fixação do calibre. Isto não ocorre com a ação de Dirac, pois a equação de movimento que segue desta ação apresenta explicitamente uma derivada temporal da coordenada fermiônica [40], o que não a caracteriza como um vínculo, como é o caso da Lei de Gauss para o campo elétrico nas equações de Maxwell.

<sup>10</sup> A ação deve ser uma quantidade adimensional. Escolhemos o sistema de unidades naturais ( $c = 1$  e  $\hbar = 1$ ) que implica, por tanto,  $[E] = [m]$  e assim  $[x] = [t]$ , logo  $[x] = [m]^{-1}$ .

<sup>11</sup> O cálculo diferencial levando-se em conta coordenadas fermiônicas difere do caso bosônico. No caso fermiônico:  $\theta^2 = 0$ ,  $\int d\theta = \partial_\theta$ ,  $\partial_\theta \theta = 1$ ,  $\int d\theta \theta = 1$ ,  $\int d\theta 1 = 0$ ,  $\partial_\theta 1 = 0$ . Estas são relações fundamentais da integração e diferenciação das variáveis de Grassman. Isso é detalhado em várias referências fornecidas neste documento.



A equação de Euler-Lagrange para a coordenada  $x$  que segue da ação (29) fornece o valor da constante do oscilador harmônico supersimétrico como função dos novos parâmetros,

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha^2}{\mu}x - m\ddot{x} = 0, & \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0, \\ & \Rightarrow k = \frac{\alpha^2}{\mu}. \end{aligned} \quad (30)$$

Essa é exatamente a dinâmica de um oscilador harmônico e a frequência de oscilação da coordenada bosônica fica  $\omega = \sqrt{k/m} = 2\pi/T$ , e por conseguinte,  $k = \frac{\alpha^2}{\mu} = m\omega^2$ . O primeiro termo em (29) descreve o termo cinético na coordenada  $x$ , o segundo o termo tipo-Dirac para o férmion  $\lambda$ , “parceiro” supersimétrico de  $x$ ; o terceiro também descreve um termo tipo-Dirac para o férmion  $\phi$ , “parceiro” supersimétrico do escalar  $s$ ; o quarto termo descreve o potencial do tipo oscilador harmônico e o último termo é uma interação entre os férmions  $\lambda$  e  $\phi$ . O termo  $\lambda\dot{\lambda}$  se relaciona à ação de Dirac em uma dimensão, o que dá a  $\lambda$  caráter de spin<sup>12</sup>, ou seja, em nossa teoria de um oscilador harmônico supersimétrico, aparece um novo grau de liberdade de spin, o que indica que a supersimetria está, de alguma forma, descrevendo o spin. Esta construção que usamos para obtenção de um potencial, com a introdução de uma nova supercoordenada fermiônica  $\Psi$  trouxe a necessidade de se ter dois férmions na teoria, condição necessária para que pudéssemos ter os termos de interação. Desta forma, concluímos que uma teoria supersimétrica completa com um supercampo só, requer no mínimo duas coordenadas de Grassmann para poder reproduzir o termo potencial do oscilador na Lagrangiana.

Podemos ver que as variáveis fermiônicas estão acopladas, mas a variável bosônica permanece independente, ou seja, os caminhos das variáveis fermiônicas ( $\lambda$  e  $\phi$ ) não podem ser tratados separadamente. O superpropagador,  $K$ , que leva em conta o setor bosônico e fermiônico da teoria vem dado por,

$$\begin{aligned} K(x_f, \lambda_f, \phi_f, t_f; x_i, \lambda_i, \phi_i, t_i) \\ = K_x(x_f, t_f; x_i, t_i) \cdot K_{\lambda\phi}(\lambda_f, \phi_f, t_f; \lambda_i, \phi_i, t_i), \end{aligned}$$

onde  $K_x$  é o propagador bosônico dado por (7) e,

$$K_{\lambda\phi}(\lambda_f, \phi_f, t_f; \lambda_i, \phi_i, t_i) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\lambda(t) \mathcal{D}\phi(t) e^{\frac{i}{\hbar} S[\lambda, \phi]}, \quad (31)$$

<sup>12</sup> Quando se diz que a coordenada fermiônica  $\lambda$  poderia ser interpretada como spin, é preciso esclarecer que a álgebra de spin é a álgebra de Lie do grupo  $SU(2)$ . A coordenada  $\lambda$ , portanto, é uma coordenada única; para descrever o spin seriam necessárias três coordenadas fermiônicas anti-comutantes. Isto será possível no caso do oscilador tridimensional, no qual há três coordenadas  $\lambda$  anti-comutantes, podendo, então, ser identificadas com as matrizes de Pauli. Dizer que  $\lambda$  tem caráter de spin é apenas uma analogia para antecipar que o oscilador tridimensional supersimétrico inclui o grau de liberdade de spin.

é o propagador fermiônico. É importante esclarecer, que as medidas bosônica e fermiônica são muito distintas. A medida bosônica, identificada com o  $\mathcal{D}x$ , é uma diferencial genuína. Por outro lado, a medida  $\mathcal{D}\lambda$  (ou  $\mathcal{D}\phi$ ), associada a uma variável Grassmanniana, comporta-se não mais como uma diferencial, mas como uma derivada em relação à própria coordenada Grassmanniana. O leitor interessado poderá consultar a Referência [15] para um melhor entendimento do que é a medida de integração Grassmanniana. A integral de caminho (31) soma todas as configurações possíveis dos campos fermiônicos acoplados. O propagador descreve a transição entre os estados do sistema levando em conta as interações entre essas componentes. Começamos desenvolvendo uma expansão em série de Taylor da ação (29) em torno as posições clássicas para cada coordenada fermiônica:

$$\phi = \phi_{cl} + \rho, \quad \lambda = \lambda_{cl} + \xi,$$

tal que, a expansão da ação fica,

$$\begin{aligned} S[\phi, \lambda] \\ = S[\phi_{cl}, \lambda_{cl}] + \frac{1}{2!} \int dt_1 dt_2 \rho(t_1) \rho(t_2) \frac{\delta^2 S[\phi, \lambda]}{\delta \phi(t_1) \delta \phi(t_2)} \\ + \frac{1}{2!} \int dt_1 dt_2 \rho(t_1) \xi(t_2) \frac{\delta^2 S[\phi, \lambda]}{\delta \phi(t_1) \delta \lambda(t_2)} \\ + \frac{1}{2!} \int dt_1 dt_2 \xi(t_1) \rho(t_2) \frac{\delta^2 S[\phi, \lambda]}{\delta \lambda(t_1) \delta \phi(t_2)} \\ + \frac{1}{2!} \int dt_1 dt_2 \xi(t_1) \xi(t_2) \frac{\delta^2 S[\phi, \lambda]}{\delta \lambda(t_1) \delta \lambda(t_2)} + \dots \end{aligned} \quad (32)$$

O termo de interação mistura as variáveis fermiônicas  $\lambda$  e  $\phi$ , ou seja, na propagação de  $\phi$  pode ser criado um campo  $\lambda$  e vice versa. Existe portanto uma tolerância ao trânsito nos diferentes estados  $\lambda$  e  $\phi$ . Vamos agora fazer as diferentes derivadas funcionais que aparecem no desenvolvimento da ação,

$$\begin{aligned} \frac{\delta S[\phi, \lambda]}{\delta \phi(t_2)} = \int dt \left[ \frac{i\mu}{2} \phi(t) \frac{\delta \dot{\phi}(t)}{\delta \phi(t_2)} - \frac{i\mu}{2} \frac{\delta \phi(t)}{\delta \phi(t_2)} \dot{\phi}(t) \right. \\ \left. - i\alpha \lambda(t) \frac{\delta \phi(t)}{\delta \phi(t_2)} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Levando em conta que,

$$\frac{\delta \phi(t)}{\delta \phi(t_1)} = \delta(t - t_1), \quad \phi(t) \frac{\delta \dot{\phi}(t)}{\delta \phi(t_1)} = -\dot{\phi}(t) \delta(t - t_1),$$

a equação (33) fica,

$$\frac{\delta S[\phi, \lambda]}{\delta \phi(t_2)} = -i\mu \dot{\phi}(t_2) - i\alpha \lambda(t_2), \quad (34)$$

e

$$\frac{\delta^2 S[\phi, \lambda]}{\delta \phi(t_1) \delta \phi(t_2)} = i\mu \frac{d}{dt_2} \delta(t_1 - t_2). \quad (35)$$

Fazemos agora a variação da ação com relação a  $\lambda$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\delta S[\phi, \lambda]}{\delta \lambda(t_2)} &= \int dt \left( \frac{im}{2} \lambda(t) \frac{\delta \dot{\lambda}(t)}{\delta \lambda(t_2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{im}{2} \frac{\delta \lambda(t)}{\delta \lambda(t_2)} \dot{\lambda}(t) + i\alpha \phi(t) \frac{\delta \lambda(t)}{\delta \lambda(t_2)} \right), \\ &= -im \dot{\lambda}(t_2) + i\alpha \phi(t_2),\end{aligned}$$

e novamente, temos

$$\frac{\delta^2 S[\phi, \lambda]}{\delta \lambda(t_1) \delta \lambda(t_2)} = -im \frac{d}{dt_2} \delta(t_1 - t_2). \quad (36)$$

As derivadas mistas ficam,

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2 S[\phi, \lambda]}{\delta \phi(t_1) \delta \lambda(t_2)} &= i\alpha \delta(t_1 - t_2), \\ \frac{\delta^2 S[\phi, \lambda]}{\delta \lambda(t_1) \delta \phi(t_2)} &= -i\alpha \delta(t_1 - t_2).\end{aligned} \quad (37)$$

Substituindo em (32), obtemos,

$$\begin{aligned}S[\phi, \lambda] &= S[\phi_{cl}, \lambda_{cl}] + \frac{i\mu}{2} \int dt \rho(t) \dot{\rho}(t) + \frac{im}{2} \int dt \xi(t) \dot{\xi}(t) \\ &\quad + \frac{i\alpha}{2} \int dt \rho(t) \xi(t) - \frac{i\alpha}{2} \int dt \xi(t) \rho(t), \\ &= S[\phi_{cl}, \lambda_{cl}] + \frac{i\mu}{2} \int dt \rho(t) \dot{\rho}(t) \\ &\quad + \frac{im}{2} \int dt \xi(t) \dot{\xi}(t) + i\alpha \int dt \rho(t) \xi(t).\end{aligned}$$

Como  $T = t_f - t_i$ ,  $\xi(T) = \xi(0) = 0$  e  $\rho(T) = \rho(0) = 0$ , usamos o mesmo tipo de tratamento que fizemos para o caso bosônico para as flutuações quânticas, sendo que,

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \sum_n b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right), \quad \xi(t) = \sum_n c_n \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right), \\ n &= 1, 2, \dots, N-1.\end{aligned}$$

e assim fazemos essas substituições nas integrais de (38), e obtemos,

$$\begin{aligned}\int_0^T dt \dot{\xi} \xi &= \sum_{n,m} \int_0^T dt c_n c_m \left(\frac{n\pi}{T}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \\ &\quad \times \sin\left(\frac{m\pi t}{T}\right) = 0,\end{aligned}$$

onde se pode verificar facilmente que essa integral é nula, devido à paridade das funções seno e cosseno em um intervalo periódico. O termo de interação entre os campos em (38), fica,

$$\begin{aligned}\int_0^T dt \rho \xi &= \sum_{n,m} \int_0^T dt b_m c_n \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{m\pi t}{T}\right), \\ &= \sum_n \int_0^T dt b_n c_n \sin^2\left(\frac{n\pi t}{T}\right), \\ &= \frac{T}{2} \sum_n b_n c_n.\end{aligned}$$

Com isso em mãos, substituímos no superpropagador (31),

$$\begin{aligned}K_{\lambda\phi}(\lambda_f, \phi_f, t_f; \lambda_i, \phi_i, t_i) &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\xi \int \mathcal{D}\rho e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi, \lambda]}, \\ &= \mathcal{N} e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi_{cl}, \lambda_{cl}]} \int \mathcal{D}\xi \int \mathcal{D}\rho e^{\frac{i}{\hbar} (i\alpha \frac{T}{2} \sum_n b_n c_n)}, \\ &= \mathcal{N} e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi_{cl}, \lambda_{cl}]} \int dc_1 \dots dc_{N-1} \\ &\quad \times \int db_1 \dots db_{N-1} e^{\frac{-\alpha T}{2\hbar} (\sum_n b_n c_n)}.\end{aligned}$$

Para a  $n$ -ésima integral, podemos escrever,

$$\begin{aligned}\int db_n \int dc_n e^{-\frac{\alpha T}{2\hbar} b_n c_n} &= \int dc_n \int db_n (1 - \frac{\alpha T}{2\hbar} b_n c_n), \\ &= \frac{\partial}{\partial b_n} \frac{\partial}{\partial c_n} (1 - \frac{\alpha T}{2\hbar} b_n c_n), \\ &= \frac{\alpha T}{2\hbar},\end{aligned}$$

onde aqui desenvolvemos a expansão da exponencial em série de Taylor e usamos a propriedade que relaciona a integral com a derivada para as variáveis de Grassmann. O sinal muda porque anticomutam as duas variáveis de Grassmann,

$$\begin{aligned}K_{\lambda\phi}(\lambda_f, \phi_f, t_f; \lambda_i, \phi_i, t_i) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{N} e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi_{cl}, \lambda_{cl}]} \prod_{n=1}^{N-1} \frac{\alpha T}{2\hbar}, \\ &= \mathcal{N} e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi_{cl}, \lambda_{cl}]} \frac{\alpha T}{2\hbar}.\end{aligned} \quad (38)$$

Novamente, para determinar completamente a amplitude quântica em (38), precisamos calcular a ação clássica fermiônica

$$\begin{aligned}S[\phi_{cl}, \lambda_{cl}] &= \int dt \left[ -\frac{im}{2} \lambda_{cl} \dot{\lambda}_{cl} - \frac{i\mu}{2} \phi_{cl} \dot{\phi}_{cl} \right. \\ &\quad \left. + i\alpha \lambda_{cl} \phi_{cl} - J_\phi \phi_{cl} - J_\lambda \lambda_{cl} \right].\end{aligned} \quad (39)$$

Para isso, calculamos as equações de Lagrange para as coordenadas  $\lambda$  e  $\phi$  do Lagrangiana da nossa teoria (29):

$$m\dot{\lambda} - \alpha\phi = 0, \quad \mu\dot{\phi} + \alpha\lambda = 0. \quad (40)$$

Porém, podem ser desacopladas, gerando assim duas equações de osciladores harmônicos de natureza fermiônica<sup>13</sup>

$$\begin{aligned}m\ddot{\lambda} + \frac{\alpha^2}{\mu} \lambda &= m\ddot{\lambda} + k\lambda = J_\lambda, \quad \text{e} \\ \mu\ddot{\phi} + \frac{\alpha^2}{m} \phi &= \mu\ddot{\phi} + \tilde{k}\phi = J_\phi,\end{aligned} \quad (41)$$

<sup>13</sup> Onde adicionamos as correntes  $J_\lambda$  e  $J_\phi$  necessárias para o tratamento das funções de Green pelo método da integral de caminho.

com  $\tilde{k} = \alpha^2/m$ . Apesar da coordenada  $\phi$  ter originalmente massa  $\mu$ , devido à simetria do sistema podemos escrevê-lo com a mesma massa de  $\lambda$  e constante de restauração  $k$ , reproduzindo a equação  $m\ddot{\phi} + k\phi = 0$ , cuja frequência é  $\omega$ , gerando assim a mesma equação de movimento. Portanto, ambas equações descrevem os mesmos modos de vibração. Podemos considerar  $\phi$  como um grau de liberdade espúrio ou uma coordenada auxiliar, como o  $s(t)$ . Logo, a nova supercoordenada  $\Psi$  introduzida em (27) seria uma supercoordenada auxiliar. As equações (41) têm a mesma forma que (13), logo as soluções terão a mesma forma que (24):

$$\begin{aligned} \lambda_{cl}(t) &= \frac{1}{\sin \omega T} \lambda_f \sin [\omega (t - t_i)] + \frac{1}{\sin \omega T} \lambda_i \sin [\omega (t_f - t)] \\ &+ \frac{1}{\sin \omega T} \frac{1}{2m\omega} \int_{t_i}^{t_f} dt' J_\lambda(t') e^{-i\omega T} \cos [\omega (t - t')] \\ &- \frac{1}{\sin \omega T} \frac{1}{2m\omega} \int_{t_i}^{t_f} dt' J_\lambda(t') \cos [\omega (t_f + t_i - t - t')] \\ &- \frac{1}{2im\omega} \left( \int_{t_i}^t dt' J_\lambda(t') e^{-i\omega(t-t')} \right. \\ &\left. + \int_t^{t_f} dt' J_\lambda(t') e^{i\omega(t-t')} \right), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \phi_{cl}(t) &= \frac{1}{\sin \omega T} \phi_f \sin [\omega (t - t_i)] + \frac{1}{\sin \omega T} \phi_i \sin [\omega (t_f - t)] \\ &+ \frac{1}{\sin \omega T} \frac{1}{2m\omega} \int_{t_i}^{t_f} dt' J_\phi(t') e^{-i\omega T} \cos [\omega (t - t')] \\ &- \frac{1}{\sin \omega T} \frac{1}{2m\omega} \int_{t_i}^{t_f} dt' J_\phi(t') \cos [\omega (t_f + t_i - t - t')] \\ &- \frac{1}{2im\omega} \left( \int_{t_i}^t dt' J_\phi(t') e^{-i\omega(t-t')} \right. \\ &\left. + \int_t^{t_f} dt' J_\phi(t') e^{i\omega(t-t')} \right). \end{aligned}$$

Essas soluções podem ser substituídas na ação fermiônica que aparece em (38) ficando a amplitude quântica fermiônica completamente determinada. É importante observar que, embora estejamos denotando as variáveis  $\phi$  e  $\lambda$  como clássicas, por extensão com o caso bosônico da seção anterior, as variáveis Grassmannianas anticomutantes não têm uma contrapartida clássica. Esse não é o caso da coordenada bosônica comutante  $x$  da seção anterior, que representa a posição, que podemos medir e observar. Entretanto, embora as coordenadas fermiônicas não sejam observáveis, as grandezas físicas derivadas delas são. Por exemplo, o spin não é observável, o que é observado é sua projeção ou número de spin. Lembremos de que relacionamos essas coordenadas fermiônicas a um possível grau de liberdade de spin. Propomos o cálculo das soluções  $\lambda_{cl}(t)$  e  $\phi_{cl}(t)$  fornecidas acima como

exercício para o leitor. Para simplificar a tarefa podemos considerar dois tipos de correntes: correntes nulas  $J = 0$  e correntes da forma delta de Dirac,  $J(t) = J_0 \delta(t)$ .

## 4. Considerações Finais

Em nossos comentários finais, gostaríamos de enfatizar que os tópicos abordados neste artigo, supersimetria, Mecânica Quântica Supersimétrica e o método de quantização via integral de caminho, não são tópicos geralmente abordados nos programas de Graduação. A nossa presente contribuição é dirigida sobretudo a um público de estudantes de Bacharelado e Licenciatura, e tem como objetivo principal trazer tópicos mais avançados para este público-alvo. Para os autores é, também, tarefa não-trivial o esforço de apresentar temas mais avançados em uma abordagem mais pedagógica. Aprende-se muito com este esforço. No caso de nosso presente trabalho, para uma melhor compreensão, elegemos o exemplo universal do oscilador harmônico, que é um sistema físico estudado em detalhes nos cursos básicos dos Programas de Graduação.

Nosso principal objetivo foi calcular o propagador de um oscilador harmônico supersimétrico por meio do formalismo de integral de trajetória de Feynman (3). A novidade em relação ao oscilador puramente bosônico (2) está na parte fermiônica. O resultado do propagador fermiônico em (38) nos diz como a informação se propaga entre os férmions da teoria.

Além da importância da integral de caminho na teoria quântica de campos, a motivação por trás deste trabalho é enfatizar a importância do uso de variáveis Grassmannianas. Essas variáveis descrevem quantidades anticomutantes, como os férmions. Os férmions formam a matéria do universo, ou seja, no contexto da Mecânica Quântica e da teoria quântica de campos, a anticomutação é uma característica fundamental. Uma continuação natural desse trabalho seria estender esse desenvolvimento para duas coordenadas de Grassmann, o que ilustraria a construção de modelo supersimétrico estendido, da categoria  $N = 2$ . Neste caso, seria possível reproduzir o termo potencial na Lagrangiana com um supercampo só, ou seja, a introdução do supercampo auxiliar  $\Psi$  não seria necessária.

Também estamos interessados na possível extensão deste trabalho para o estudo de osciladores harmônicos acoplados. Em nossa teoria, o acoplamento entre os férmions torna a parte fermiônica mais complexa e sujeita a ser descrita por formalismos específicos, como o apresentado no apêndice. Acreditamos que esse formalismo pode ser interessante no contexto de osciladores multidimensionais descritos por variáveis acopladas.

Por fim, também é interessante observar a importância do operador misto relatado no Apêndice. Dedicamos o Apêndice a esta discussão porque operadores mistos como os aqui estudados aparecem em contextos como a oscilação de neutrinos e a transição entre fótons e áxions

no Efeito Primakoff. Consideramos importante antecipar este tipo de fenômeno em um sistema simples como o oscilador harmônico unidimensional em sua versão minimamente supersimétrica. Nesta direção, uma perspectiva de aprofundamento de nossa proposta é apresentar as chamadas supersimetrias estendidas em conexão com a física de osciladores harmônicos e anarmônicos bi- e tridimensionais, seja no caso em que estejam livres e no caso em que se encontrem acoplados. Está em nossos planos submeter este estudo subsequente a esta revista.

## Apêndice: Análise Matricial da Teoria. Férmions Acoplados em um Multiplete Fermiônico

Neste Apêndice iremos mostrar como acoplar os campos apresentados na seção III, em um único multiplete fermiônico, de modo que a Lagrangiana supersimétrica fique descrita em termos matriciais, mas apenas no setor fermiônico. Então, agora podemos considerar que os férmions da nossa teoria ( $\lambda$  e  $\phi$ ) fazem parte de um multiplete fermiônico,

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix},$$

onde introduzimos a supercoordenada em forma de um dublete,  $\Lambda$ . Com isto, conseguimos diagonalizar os termos fermiônicos dinâmicos tipo-Dirac e também agrupar a interação, assim, escrevemos a ação em (29) como,

$$S = \int dt \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 - \frac{i}{2} \Lambda^T M \dot{\Lambda} - \frac{1}{2} \Lambda^T R \Lambda \right], \quad (42)$$

onde  $M$  é uma matriz diagonal contendo as massas  $m$  e  $\mu$ , de  $\lambda$  e  $\phi$ , respectivamente, e  $R$  é a matriz da interação entre os férmions que fica definida a partir da matriz de Pauli  $\sigma_y$ ,

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad R = \alpha \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Podemos ver que a Lagrangiana fermiônica em (42) contém um operador central:

$$L_{ferm} = -\frac{1}{2} \Lambda^T (iM \partial_t + R) \Lambda, \quad (44)$$

com equações de movimento

$$(iM \partial_t + R) \Lambda = (-M\kappa + R) \Lambda = M' \Lambda = 0, \quad (45)$$

onde

$$M' = \begin{bmatrix} -m\kappa & -i\alpha \\ i\alpha & -\mu\kappa \end{bmatrix}, \quad (46)$$

e sua inversa tem como elementos as funções de Green no espaço de Fourier,

$$\begin{aligned} M'^{-1} &= \frac{1}{m\mu\kappa^2 - \alpha^2} \begin{pmatrix} -\mu\kappa & i\alpha \\ -i\alpha & -m\kappa \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle \lambda\lambda \rangle & \langle \lambda\phi \rangle \\ \langle \phi\lambda \rangle & \langle \phi\phi \rangle \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (47)$$

Para a coordenada  $\lambda$  temos,

$$\langle \lambda\lambda \rangle = \frac{\mu\kappa}{m\mu\kappa^2 - \alpha^2}. \quad (48)$$

Agora para voltar a o espaço das configurações e ter o propagador no espaço-tempo fazemos a transformada de Fourier:

$$\langle \lambda\lambda \rangle_{e-t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{2\pi m\mu} \left( \frac{\mu\kappa e^{-i\kappa(t-t')}}{\kappa^2 - \frac{\alpha^2}{m\mu}} \right), \quad (49)$$

Substituindo  $\omega = \frac{\alpha}{\sqrt{m\mu}}$ , adicionando o parâmetro  $\varepsilon$  e tomando seu limite tendendo a zero, temos

$$\begin{aligned} \langle \lambda\lambda \rangle_{e-t} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{2\pi m\mu} \left( \frac{\mu\kappa e^{-i\kappa(t-t')}}{\kappa^2 - \omega^2 + i\varepsilon} \right), \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{2\pi m\mu} \left( \frac{\mu\kappa e^{-i\kappa(t-t')}}{(\kappa + \omega - \frac{i\varepsilon}{2\omega})(\kappa - \omega + \frac{i\varepsilon}{2\omega})} \right). \end{aligned}$$

Agora podemos aplicar o teorema dos resíduos levando em conta que os polos simples da integral são:  $\kappa_0 = \pm(\omega - \frac{i\varepsilon}{2\omega})$ . Vamos calcular então os resíduos da função  $f$  que é o integrando em (50) (veja a Figura 2),

$$f(\kappa) = \frac{1}{2\pi m\mu} \left( \frac{\mu\kappa e^{-i\kappa(t-t')}}{(\kappa + \omega - \frac{i\varepsilon}{2\omega})(\kappa - \omega + \frac{i\varepsilon}{2\omega})} \right). \quad (50)$$

Calculamos o resíduo no polo  $\kappa_0 = \omega - \frac{i\varepsilon}{2\omega}$ :

$$\begin{aligned} Res(f(\kappa), \kappa_0) &= \lim_{\kappa \rightarrow \kappa_0} (\kappa - \kappa_0) f(\kappa) \\ &= \frac{(\omega - \frac{i\varepsilon}{2\omega}) e^{-i(\omega - \frac{i\varepsilon}{2\omega})(t-t')}}{2\pi m(2\omega - \frac{i\varepsilon}{\omega})}. \end{aligned} \quad (51)$$

Como  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$Res(f(\kappa), \kappa_0) = \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{4\pi m}. \quad (52)$$

Seguindo o mesmo procedimento o resíduo no polo  $\kappa_0 = -\omega + \frac{i\varepsilon}{2\omega}$  é,

$$Res(f(\kappa), \kappa_0) = \frac{e^{i\omega(t-t')}}{4\pi m}. \quad (53)$$

Temos então que para  $t - t' < 0$ ,

$$\langle \lambda\lambda \rangle_{e-t} = 2\pi i \sum Res_{int} = \frac{ie^{i\omega(t-t')}}{2m}. \quad (54)$$

e para  $t - t' > 0$ :

$$\langle \lambda\lambda \rangle_{e-t} = -2\pi i \sum Res_{int} = \frac{ie^{-i\omega(t-t')}}{2m}, \quad (55)$$

ou de uma maneira mais compacta,

$$\begin{aligned} \langle \lambda\lambda \rangle_{e-t} &= \frac{i}{2m} \left( \Theta(t-t') e^{-i\omega(t-t')} + \Theta(t'-t) e^{i\omega(t-t')} \right), \end{aligned} \quad (56)$$

onde  $\Theta$  é a função de Heaviside. Se compararmos (56) com a função de Green para a coordenada  $x$  (22), veremos que há uma grande semelhança entre as duas expressões, o que torna essa abordagem matricial apresentada neste apêndice muito confiável. A diferença está nas unidades ( $\omega = [m]^{9/2}$ ), o que faz sentido devido à natureza diferente das variáveis  $\lambda$  e  $\phi$ . Olhando agora a equação (47) vamos calcular o propagador para o campo  $\phi$ . O procedimento é o mesmo, portanto passamos diretamente ao resultado final,

$$\langle \phi\phi \rangle_{e-t} = \frac{i}{2\mu} (\Theta(t-t')e^{-i\omega(t-t')} + \Theta(t'-t)e^{i\omega(t-t')}). \quad (57)$$

Agora vamos a calcular os propagadores mistos. Aqui o cálculo muda um pouco, mas seguimos o mesmo procedimento,

$$\langle \lambda\phi \rangle = \frac{i\alpha}{m\mu\kappa^2 - \alpha^2}, \quad (58)$$

e

$$\begin{aligned} \langle \lambda\phi \rangle_{e-t} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{2\pi m\mu} \left( \frac{i\alpha e^{-i\kappa(t-t')}}{\kappa^2 - \frac{\alpha^2}{m\mu}} \right), \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{2\pi m\mu} \left( \frac{i\alpha e^{-i\kappa(t-t')}}{\kappa^2 - \omega^2 + i\epsilon} \right), \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{2\pi m\mu} \left( \frac{i\alpha e^{-i\kappa(t-t')}}{(\kappa + \omega - \frac{i\epsilon}{2\omega})(\kappa - \omega + \frac{i\epsilon}{2\omega})} \right). \end{aligned} \quad (59)$$

Usando o teorema dos resíduos e seguindo o mesmo procedimento anterior, temos que,

$$\begin{aligned} \langle \lambda\phi \rangle_{e-t} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu m}} \left( \Theta(t-t')e^{-i\omega(t-t')} + \Theta(t'-t)e^{i\omega(t-t')} \right). \end{aligned} \quad (60)$$

Podemos observar que a frequência em todos os casos fermiônicos (60), (57), (56) e no caso bosônico (22) é a mesma. Isto é devido ao fato de todos serem parceiros supersimétricos degenerados que pertencem ao mesmo multiplete. Não sendo partículas, a degeneração está na frequência.

## Referências

- [1] R. Barbieri e G.F. Giudice, Nucl. Phys. B **306**, 63 (1988).
- [2] R. Catena e L. Covi, Eur. Phys. J. C **74**, 2703 (2014).
- [3] S. Raby, Eur. Phys. J. C **59**, 223 (2009).
- [4] J. Rodrigues, *Quebra Espontânea de SUSY – Cenário GMSB*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa (2015).
- [5] S.P. Martin, Phys. Rev. D **55**, 3177 (1997).
- [6] S. Coleman e J. Mandula, Phys. Rev. **159**, 1251 (1967).
- [7] Y.A. Gel'fand e E.P. Likhtman, JETP Lett. **13**, 323 (1971).
- [8] A. Neveu e J.H. Schwarz, Nucl. Phys. B **31**, 86 (1971).
- [9] P. Ramond, Phys. Rev. D **3**, 2415 (1971).
- [10] J.H. Schwarz e C.C. Wu, Phys. Lett. B **47**, 453 (1973).
- [11] A. Neveu e J.H. Schwarz, Phys. Rev. D **4**, 1109 (1971).
- [12] J.L. Gervais e B. Sakita, Nucl. Phys. B **34**, 632 (1971).
- [13] J. Wess e B. Zumino, Nucl. Phys. B **70**, 39 (1974).
- [14] J. Wess e J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity* (Princeton University Press, Princeton, 1992).
- [15] H. Muller-Kirsten e A. Wiedemann, *Introduction to Supersymmetry* (World Scientific, Singapore, 2010), 2 ed.
- [16] E. Witten, Nucl. Phys. B **188**, 513 (1981).
- [17] F. Cooper e B. Freedman, Annals of Physics **146**, 262 (1983).
- [18] C.M. Bender, F. Cooper e A. Das, Phys. Rev. D **28**, 1473 (1983).
- [19] E. Drigo Filho, Revista Brasileira de Ensino de Física **19**, 152 (1997).
- [20] E. Drigo Filho, *Supersimetria aplicada à mecânica quântica: estudo da equação de Schrödinger* (Editora Unesp, São Paulo, 2009).
- [21] R. Rodrigues, arXiv:hep-th/0205017 (2002).
- [22] R. Haag, J.T. Łopuszanski e M. Sohnius, Nuclear Physics B **88**, 257 (1975).
- [23] M.E. Peskin e D.V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory* (Addison Wesley, Reading, 1995).
- [24] H.M. Nussenzweig, em: *Escola de Verão Jorge André Swieca – Partículas e Campos* (Sociedade Brasileira de Física, São Paulo, 1981).
- [25] L.H. Ryder, *Quantum field theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
- [26] A. Das, *Lectures on quantum field theory* (World Scientific, Singapore, 2020).
- [27] J.M.F. Bassalo, *Eletrodinâmica clássica* (Livraria da Física, São Paulo, 2007).
- [28] A. Das, *Field Theory A Path Integral Approach* (World Scientific, Singapore, 2006).
- [29] J.D.M. Viana, Revista Brasileira de Ensino de Física **40**, e4206 (2018).
- [30] J.F. Donoghue e B.R. Holstein, American Journal of Physics **56**, 216 (1988).
- [31] B.R. Holstein, American Journal of Physics **66**, 583 (1998).
- [32] F. Barone e C. Farina, American Journal of Physics **69**, 232 (2001).
- [33] F. Barone, H. Boschi-Filho e C. Farina, American Journal of Physics **71**, 483 (2003).
- [34] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos da Física – Mecânica* (LTC, Rio de Janeiro, 2023), v. 1.
- [35] S.T. Thornton e J.B. Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems* (Academic Press, New York, 2013).
- [36] E. Butkov, *Física Matemática* (Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, 1988).
- [37] M. Abramowitz e I.A. Stegun (ed.), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and*

*Mathematical Tables* (United States Department of Commerce/National Bureau of Standards, Washington, 1970).

- [38] D. Zill e M. Cullen, *Matemática Avançada para Engenharia* (Bookman, Porto Alegre, 2009), v. 3.
- [39] L.O.P. Rosas, *Considerações de mecânica supersimétrica e um novo cenário para a Carga Central*. Dissertação de Mestrado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro (2013).
- [40] S.K. Blau, *Annals of Physics* **205**, 392 (1991).