Algebraische Beschreibung von Symmetrien. Das Modell der Nichtkommutativen Multi-Tori.

Dissertation
zur Erlangung des Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“
am Fachbereich Physik
der Johannes Gutenberg-Universität
in Mainz

Markus Debert
geb. in Wiesbaden

Februar 2005

Termin der mündlichen Prüfung: 30.3.2005
D77 Mainzer Dissertation

Zusammenfassung:

Unter Nichtkommutativer Geometrie versteht man verschiedene mathematische Methoden, denen die gemeinsame Philosophie unterliegt, daß man topologische und geometrische Eigenschaften eines Raumes gleichwertig durch kommutative Algebren beschreiben kann. Der Vorteil einer solchen Beschreibungsweise ist ihre Verallgemeinerbarkeit. Hat man alle Eigenschaften eines Raumes durch kommutative Algebren ausgedrückt, kann man auch nichtkommutative Algebren zulassen und erhält somit eine einheitliche mathematische Sprache für geometrische und algebraische Strukturen. Dies prädestiniert die Nichtkommutative Geometrie als mathematische Theorie, in der sich Gravitation und Quantenmechanik gleichartig formulieren lassen. Diese Philosophie läßt sich insbesondere auf Gruppen und Lie-Algebren anwenden, und man erhält eine algebraisierte Beschreibung dieser für die Physik so wichtigen (man denke an Noether-Theorem und G-Theorie) Symmetriestrukturen in Form von Hopf-Algebren und Quantengruppen. Ein Erfolg der Nichtkommutativen Geometrie ist die Reformulierung des Standardmodells der Elementarteilchenphysik durch Spektrale Tripel unter Einbeziehung der Gravitation. Der Zugang zu Nichtkommutativer Geometrie über Spektrale Tripel und der mehr von den Symmetrien herrührende Zugang über Quantengruppen sind nach wie vor disjunkt. Deswegen ist es wichtig, Räume und Strukturen zu untersuchen, die in beiden Zugängen relevant sind.

Ein Standardraum der Nichtkommutativen Geometrie ist der Nichtkommutative Torus. Für diesen ist keine Hopf-Algebren-Struktur bekannt, die Summe aus einem Kommutativen Torus und einem Nichtkommutativen Torus ist jedoch eine Hopf-Algebra, der Quantendoppeltorus. In dieser Dissertation wird gezeigt, daß der Quantendoppeltorus Spezialfall einer unendlichen Klasse von Hopf-Algebren ist (welche wir Nichtkommutative Multi-Tori nennen), die alle aus dem Nichtkommutativen Torus aufgebaut sind. Ihre dualen Räume besitzen eine Interpretation als Lösungen algebraischer Quantisierungsprobleme. Diese dualen Räume sind Multiplikator-Hopf-Algebren, haben die Struktur von Kreuzproduktalgebren und bilden Beispiele von Bikreuzproduktalgebren. Diese wiederum liefern Modelle für Räume, die Quantisierungen klassischer Observablen-Algebren sind, aber auch geometrische Strukturen tragen. Aus den von uns konstruierten Hopf-Algebren lassen sich wichtige endlichdimensionale Hopf-Algebren bilden. Interessanterweise sieht man, daß sich die bekannten niederdimensionalen Kac-Algebren, insbesondere die 8-dim. Kac-Paljutkin-Algebra, aus unserer Konstruktion ergeben. Desweiteren wurde von uns die Quantenprinzipalbündel-Struktur der Nichtkommutativen Multi-Tori untersucht. Es läßt sich zeigen, daß die Nichtkommutativen Multi-Tori (im Fall von Wurzeln der Eins) Hopf-Galois-Erweiterungen des Kommutativen Torus sind. Der Nichtkommutative Torus hat eine $u(1) \times u(1)$-Symmetrie, ebenso der Kommutative Torus. Diese Symmetrie ist nicht sensitiv bezüglich der Deformation. Das Duale des Quantendoppeltorus ist dagegen eine spezielle Symmetrie des Nichtkommutativen Torus. Diese Symmetrie läßt sich allerdings nicht auf die Spektralen Tripel des Nichtkommutativen Torus fortsetzen.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung und Aufbau der Arbeit

1.1 Grundgedanken der Nichtkommutativen Geometrie

Im Rückblick auf das zwanzigste Jahrhundert kann man sicherlich sagen, daß die gesamte Physik von der Entwicklung zweier Theorien wesentlich geprägt wurde. Zum einen von der Allgemeinen Relativitätstheorie, welche unsere Vorstellungen der Raum-Zeit-Struktur bestimmt, zum anderen von der Quantenmechanik bzw. den Quantenfeldtheorien, die unsere Welt bis zu den kleinsten bisher experimentell zugänglichen Abständen beschreiben. So klar es ist, daß diese Theorien fundamental für die Physik sind, so klar ist es, daß beide Theorien auch heute noch Probleme mit sich bringen, wenngleich diese Probleme ganz unterschiedlicher Natur sind. Die Allgemeine Relativitätstheorie ist sowohl mathematisch, als auch von ihrer physikalischen Interpretation her gut verstanden. Allerdings entzieht sie sich bis heute einer Formulierung im Rahmen einer Quantenfeldtheorie. Sie steht somit außerhalb des physikalischen und mathematischen Rahmens, der durch die Quantenmechanik bzw. die Quantenfeldtheorie gegeben wird. Die Probleme der Quantenmechanik liegen dagegen weniger auf der mathematischen Seite als vielmehr in ihrer Interpretation. Auf die bekannten Interpretationsprobleme der Quantenmechanik kann und soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden. Es ist jedoch keineswegs davon auszugehen, daß die heutige Formulierung der Quantenmechanik bereits endgültig ist. Betrachtet man die Entwicklung von Allgemeiner Relativitätstheorie und Quantenmechanik, so erkennt man das enge Zusammenspiel zwischen physikalischem Inhalt und der mathematischen Sprache, in der dieser Inhalt formuliert wird. Darüber hinaus zeichnen sich alle fundamentalen physikalischen Theorien dadurch aus, daß hinter ihnen tiefliegende Prinzipien stehen - egal ob dies im einzelnen nun das Relativitätsprinzip, Extremal- oder die uns besonders interessierenden Symmetrieprinzipien (wie beispielsweise das G-Theorie-Prinzip [33], [58]) sind. Um die fundamentalen Probleme der Physik zu lösen (insbesondere die Quantisierung der

Gravitation, die Vereinheitlichung aller fundamentaler Wechselwirkungen, physikalische Strukturen im Bereich der Planck-Länge, Reduzierung der freien Parameter im Standardmodell), wird man neue mathematische Methoden benötigen, aber zusätzlich sicherlich auch (neue) fundamentale Prinzipien. Ein Ansatz, um bei den angesprochenen Problemen weiter zu kommen, wird durch die Nichkommutative Geometrie geliefert. Darunter versteht man eine Vielzahl von Methoden, die in unterschiedlichen Bereichen der Mathematik (wie z.B. Funktionalanalysis oder Gruppentheorie) verwurzelt sind. Diesen Methoden gemeinsam ist die Algebraisierung von topologischen Räumen und ihren Strukturen. Dies gilt insbesondere für geometrische Strukturen und für Symmetriestrukturen.

Die vorliegende Dissertation beschäftigt sich mit Strukturen und Modellen aus dem Bereich der Nichtkommutativen Geometrie (im Folgenden häufig als NKG abgekürzt), wobei diese Modelle insbesondere unter dem Gesichtspunkt verallgemeinerter Symmetrien konstruiert und diskutiert werden. Große Teile der Arbeit sind sehr mathematisch geprägt, und es werden zudem Begriffe und Strukturen benutzt, die nicht unbedingt zum alltäglichen Handwerkszeug des Physikers, auch nicht des theoretischen Physikers, gehören. Im Rahmen einer Einführung stellen wir deshalb zunächst die grundlegenden Ideen und Ziele der NKG vor, so daß der Bezug zur Physik von Beginn an klar ist. Danach soll der klassische Symmetriebegriff und seine Bedeutung für die Physik skizziert und seine Verallgemeinerung motiviert werden. Dabei geht es zunächst nicht um mathematisch exakte Formulierungen und Details, die im Hauptteil der Arbeit gegebenenfalls präzise formuliert werden, sondern in erster Linie darum, klarzumachen, warum es sich aus Sicht der Physik und des Physikers lohnt NKG zu studieren, auch wenn zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht absehbar ist, ob die NKG langfristig eine bessere und übergreifende Beschreibungsmöglichkeit physikalischer Strukturen und Phänome bietet, und ob sie auch Vorhersagekraft besitzt. Gerade das Scheitern bisheriger Versuche die Gravitation analog zu den anderen fundamentalen Wechselwirkungen zu quantisieren, macht jedoch das Studium von Strukturen und Modellen, wie sie in der NKG auftauchen, sinnvoll und nötig.

In einzelnen Bereichen und Modellen hat sich bereits gezeigt, daß Methoden der NKG zu nützlichen Erkenntnissen führen und physikalische Anwendungen besitzen. Man darf durchaus hoffen, daß die NKG (oder Fortentwicklungen davon) die Grundlage zu einer Beschreibung physikalischer Phänomene und relevanter Strukturen bilden kann, welche über bisherige Formulierungen hinausgeht, und daß sie zudem eine Sprache zur Verfügung stellt, in der es möglich ist, Gravitation und Wechselwirkungen der Elementarteilchenphysik in einheitlicher Form zu beschreiben - und zwar letztlich auch in quantisierter Form.

Die sicherlich wichtigsten Beispiele für physikalische Anwendungen der NKG sind:

- Geometrische Erklärung des ganzzahligen Quanten-Hall-Effektes [4], [49].
- Reformulierung des Standardmodells der Elementarteilchenphysik auf eine Weise, welche die Gravitation einbezieht (auf einem klassischen, nicht quantisierten Niveau).

- Hopf-Algebren als algebraische Struktur, die der Renormierung unterliegt.

Um Mißverständnissen vorzubeugen, seien an dieser Stelle zwei Anmerkungen gemacht. Wenn hier von NKG die Rede ist, dann ist in der Regel die Nichtkommutative Geometrie gemeint, wie sie wesentlich von A. Connes ([10], [9], [7]) erarbeitet wurde. Es gab und gibt aber auch andere Modelle und Formulierungen, die sich gewisser nichtkommutativer Methoden bedienen und die ebenfalls den Terminus „Nichtkommutative Geometrie“für sich beanspruchen können. Es sei hier insbesondere an das Mainz-Marseille-Modell ([35], [15]) erinnert, das sich mit den Wechselwirkungen der Elementarteilchenphysik befaßt und beispielsweise auch Aussagen über die Higgs-Masse macht, während im Connes-Modell der Schwerpunkt auf einer einheitlichen Behandlung aller fundamentalen Wechselwirkungen liegt. Ein weiterer Punkt, der möglichst früh klargemacht werden muß, ist, daß auch die bereits angesprochene Beschreibung des Standardmodells in der NKG, trotz der Verwendung von nichtkommutativen Algebren (wie man sie in Form der Operatoralgebren in der Quantenmechanik verwendet), eine klassische Beschreibung ist. Sie ist keine quantenmechanische und schon gar keine quantenfeldtheoretische Beschreibung der Physik des Standardmodells, auch wenn genau dies ein Fernziel der NKG darstellt. Es ist auch keineswegs so, daß die gängige Formulierung der Quantenmechanik schon Nichtkommutative Geometrie im Sinne einer Algebraisierung klassischer Strukturen und Begriffe wäre. Eine Interpretation der Quantenmechanik im Sinne der NKG steht demnach noch aus. Die NKG ist keine Quantisierungsmethode wie etwa Geometrische Quantisierung oder Algebraische Quantisierung.

Kommen wir also zur Nichtkommutativen Geometrie und ihrer physikalischen Motivation: Das Gebäude der Physik ruht (wie anfangs bereits erwähnt) heute auf zwei grundlegenden Säulen. Diese Säulen sind die Quantenmechanik und die Allgemeine Relativitätstheorie. Mit der Quantenmechanik bzw. der Quantenfeldtheorie kann man die Phänomene der starken und der elektroschwachen Wechselwirkung beschreiben, während im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie die vierte fundamentale Wechselwirkung formuliert wird: die Gravitation. Diese beiden Grundpfeiler der Physik sind jedoch in unterschiedlichen mathematischen Sprachen formuliert. Während die Allgemeine Relativitätstheorie mit Hilfe der klassischen Semi-Riemann-Geometrie beschrieben wird (Stichworte hierzu sind Mannigfaltigkeiten, Differentialformen, Metrik, kovariante Ableitung, Faserbündel etc.) und sich einer Quantisierung bisher entzogen hat, sind die anderen fundamentalen Wechselwirkungen nicht nur im Rahmen einer klassischen Feldtheorie formulierbar, sondern ihre Quantisierung ist in der Sprache der Quantenmechanik, d.h. der Operatoralgebren und Hilbert-Räume beschrieben. Es sollte nicht verschwiegen werden, daß auch die Quantenmechanik durchaus geometrische Züge aufweist [55]. Will man eine einheitliche Formulierung im Rahmen einer Quantenfeldtheorie aller fundamentalen Kräfte erreichen, so wird man eine Sprache finden müssen, in der sich alle Wechselwirkungen beschreiben lassen. Ein erster Schritt hierzu ist es, die Gravitation (als klassische geometrische Theorie) so umzuformulieren, daß sie in der gleichen Sprache wie die Quantenmechanik verfaßt ist und für alle fundamentalen Wechselwirkungen (auch auf klassischem Niveau) diese Sprache zu benutzen. Mathematisch bedeutet dies, daß man topologische Räume, darauf definierte Strukturen (insbesondere Geometrien) und auch die Symmetrien auf eine rein algebraische Weise zu beschreiben versucht. Im Zentrum stehen dann nicht mehr klassische Räume oder Mannigfaltigkeiten, sondern Algebren, die insbesondere auch nichtkommutativ sein dürfen. Ein anderer Weg wäre es, die geometrische Struktur der Quantenmechanik stärker herauszuarbeiten und sie in eine Form zu bringen, die der geometrischen Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie ähnlich ist [55], [53], [54]. Damit werden wir uns im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht weiter beschäftigen. Trotzdem könnte es sehr lohnend sein, solche Zugänge mit Ansätzen der NKG zu verbinden.

Unter dem Schlagwort „Nichtkommutative Geometrie“ sind verschiedene Methoden vereinigt, die einen gemeinsamen mathematischen Grundgedanken haben: die Eigenschaften von Räumen (und den mit diesen Räumen assoziierten Objekten) auf einer algebraischen Stufe auszudrücken. Man nimmt beispielsweise einen Raum von Punkten (z.B einen kompakten Hausdorff-Raum oder eine Gruppe) und drückt die Eigenschaften dieses Raumes durch eine geeignete Funktionenalgebra über dem Raum aus. Natürlich müssen sich die Eigenschaften des Raumes in den Eigenschaften der Funktionenalgebra wiederspiegeln. Daß man statt mit den Räumen lieber mit Funktionen auf diesen Räumen arbeitet, ist für den theoretischen Physiker keineswegs ungewöhnlich, sondern Alltag: In der Theorie der Mannigfaltigkeiten (d.h. in der Differentialgeometrie) sind nicht die Punkte des Raumes (der Mannigfaltigkeit) zentral, sondern die Funktionenalgebra über der Mannigfaltigkeit, insbesondere die Koordinatenfunktionen. Die Observablen in der klassischen Mechanik sind ebenfalls Elemente einer Funktionenalgebra: der Funktionen auf dem Phasenraum. Funktionenalgebren über Räumen sind kommutativ, zumindest falls die Multiplikation von Funktionen punktweise definiert wird. Wenn man einen Raum mit seinen Strukturen (z.B. Topologie, Gruppenstruktur, Metrik etc.) durch eine solche kommutative Funktionenalgebra ausgedrückt hat (und damit den Raum gewissermaßen mit der Funktionenalgebra identifiziert), dann kann man nun Algebren studieren, die alle Eigenschaften dieser kommutativen Funktionenalgebren besitzen, außer der Kommutativität. Diese „neuen“Algebren sind (wegen fehlender Kommutativität) jedoch nicht mehr Funktionen auf einem Raum. Man nennt diese Algebren sinnvollerweise oftmals Quantenräume (z.B. Quantengruppen, wenn man Algebren betrachtet, welche die gleichen Eigenschaften wie gewisse Funktionenalgebren auf Gruppen besitzen). Es seien im Folgenden einige solcher Konstruktionen und Beispiele für entsprechende physikalisch relevante Strukturen genannt:

1. Gelfand-Naimark-Theorem [30]: Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und $C(X)$ die unitale Algebra der stetigen komplex-wertigen Funktionen auf X. Dann ist $C(X)$ eine C^*-Algebra. Das Gelfand-Naimark-Theorem besagt, daß jede kommutative, unitale C^*-Algebra A von der Form $C(X)$ für einen kompakten Hausdorff-Raum X ist. Die-

ser Raum X kann konkret als Raum der Charaktere auf A rekonstruiert werden. Dies ist genauer gesagt die Aussage des kommutativen Gelfand-Naimark-Theorems. Das „nichtkommutative"Gelfand-Naimark-Theorem lautet, daß jede (auch nichtkommutative) C^*-Algebra eine treue Darstellung als Algebra von beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum besitzt. Für einen Beweis und Diskussion siehe auch [34]. Beispiele für solche C^*-Algebren sind Funktionen über kompakten Lie-Gruppen oder auch Operatoralgebren über Hilbert-Räumen.

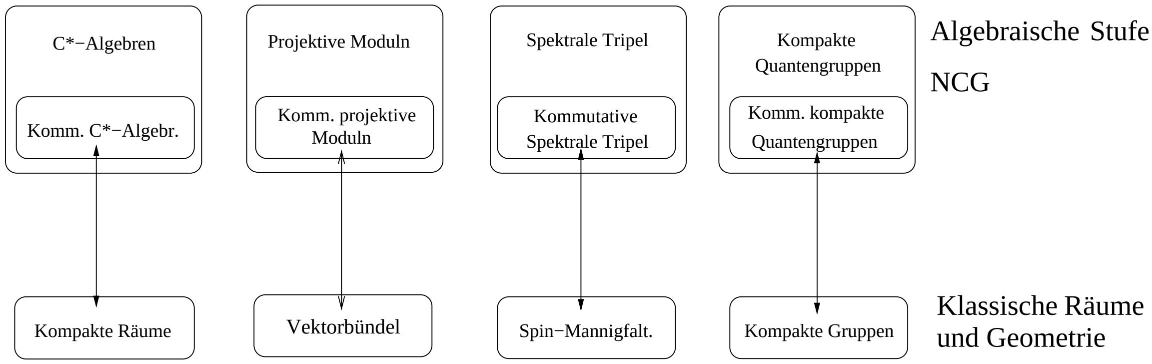
2. Serre-Swan-Theorem [59]: Vektorbündel über einem kompakten Raum besitzen ebenfalls ein algebraisches Gegenstück in Form von endlich-erzeugten projektiven Moduln. Beispiele für Vektorbündel sind der Tangentialraum (der „Geschwindigkeitsraum") und der Kotangentialraum (Phasenraum) der klassischen Mechanik. Die Vektorbündelstruktur dieser Räume kann somit genausogut (wenn auch ungewohnt) durch endlich-erzeugte projektive Moduln beschrieben werden.

3. Spektrale Tripel [10] : Geht man den Weg der Algebraisierung, so zeigt es sich, daß man ein Objekt im Rahmen der NKG definieren kann, welches ein Analogon zu den klassischen Riemannschen Spinmannigfaltigkeiten (das sind Räume auf denen die Fermionen des Standardmodells „leben") darstellt: das sogenannte Spektrale Tripel. Es besteht unter anderem aus einer C^*-Algebra, einem Hilbert-Raum, auf dem diese Algebra treu dargestellt ist und dem Dirac-Operator, in dem die gesamte geometrische Information enthalten ist. Weiterhin ergibt sich, daß es ein spektrales Tripel gibt, aus dem man das (klassische) Standardmodell der Elementarteilchenphysik rekonstruieren kann. Zudem ist der Higgs-Sektor in diesem Modell ganz natürlich enthalten und erfährt eine geometrische Interpretation. Das Higgs-Teilchen wird wie ein Eichboson beschrieben. Eine interessante und offene Frage ist, ob sich das Standardmodel in *dieser* Formulierung durch zusätzliche Symmetrien auszeichnet. Solche Symmetrien müßten dann auch in einer Quantenfeldtheorie berücksichtigt werde.

4. Hopf-Algebren und Quantengruppen [46], [45]: Diese korrespondieren auf der algebraischen Stufe zu Gruppen. Ihre Eigenschaften erhält man durch das Studium von Funktionenalgebren über Gruppen. Die Gruppenstrukturen induzieren auf der Stufe der Funktionenalgebra lineare Zusatzstrukturen. Die Gruppenmultiplikation induziert eine Komultiplikation, das neutrale Element eine sogenannte Koeins und die Gruppeninverse die Antipodenabbildung. Auch hier verallgemeinert man, indem man nichtkommutative Algebren zuläßt. Auch eine Algebraisierung des Faserbündelbegriffs, insbesondere von Prinzipal- und assoziierten Bündeln ist mit Hilfe von Quantengruppen möglich [17]. Dies ist klar, da eine wesentliche Zutat eines Faserbündels die Strukturgruppe (in der Regel eine Lie-Gruppe) ist. In einer algebraisierten Version des Bündels wird die Rolle der Strukturgruppe von einer Quantengruppe übernommen. Quantengruppen spielen im Bereich der NKG eine große Rolle als verallgemeinerte Symmetrien. Daneben kann man mit Hilfe von Hopf-Algebren und

Quantengruppen auch „Spielzeugmodelle"für Quantengravitation konstruieren (besser und weniger großspurig gesagt: man kann Modelle aufstellen, die mathematisch gewisse Züge von Quantenmechanik und Gravitation tragen). Das läßt sich leicht nach folgendem Rezept bewerkstelligen: Man nehme eine nichtabelsche Lie-Gruppe (als Beispiel für eine Mannigfaltigkeit mit Krümmung) und betrachte ihre Funktionenalgebra (die natürlich kommutativ ist). Die nichtabelsche Gruppenstruktur induziert auf den Funktionen eine Komultiplikation mit einer speziellen Eigenschaft. Sie ist nichtkokommutativ. Die Nichtkokommutativität auf der Stufe der Funktionenalgebra korrespondiert zur Krümmung des Raumes (d.h. der Lie-Gruppe). Deformiert man nun noch die Funktionenalgebra, so daß sie nicht mehr kommutativ ist, dann ist die entstandene Algebra ein Beispiel für einen nichtkommutativen Raum mit Krümmung. Eine weitere, äußerst wichtige physikalische Anwendung der Hopf-Algebren-Theorie, ist ihre Verbindung mit Renormierung. Wie sich herausgestellt hat, gibt es eine Hopf-Algebra, die der Kombinatorik von bestimmten Problemen der Renormierungstheorie unterliegt. Die gleiche Hopf-Algebra wurde auch in einem völlig anderen Zusammenhang (Index-Theoreme in der NKG) gefunden. Mehr als ein Fingerzeig für eine tiefliegende Verbindung von NKG und Quantenfeldtheorie. Es ist sicher, daß Hopf-Algebren ein wichtiges ordnendes Instrument in der Renormierungstheorie bilden [42], [11], [12], [13].

Ein weiterer wichtiger Punkt, der beim Vergleich der Strukturen von klassischer Mechanik und Quantenmechanik oft vernachlässigt wird, ist, daß der Zustand eines Systems in der klassischen Mechanik durch einen Punkt im Phasenraum gegeben wird (also durch etwas diskretes), während der Zustand eines klassischen Punktteilchens in der Quantenmechanik durch eine Wellenfunktion dargestellt wird, also durch etwas kontinuierliches. Die Nichtkommutative Geometrie behandelt diskrete Räume und Strukturen genauso wie kontinuierliche Räume. Dies ist ein weiteres Beispiel für die vereinheitlichende Kraft, welche der Nichtkommutativen Geometrie und insbesondere auch der Theorie von Hopf-Algebren und Quantengruppen innewohnt. Die folgende schematische Zeichnung veranschaulicht nochmals einige Zusammenhänge von klassischen kommutativen Räumen und Strukturen mit ihren algebraischen Gegenstücken.



Die NKG stellt zweifellos Hilfsmittel zur Verfügung, die das Potential besitzen, Elementarteilchentheorie und Gravitation einheitlich zu formulieren und insbesondere auch im Quantenbereich eine geeignete Sprache zu bieten. Wie oben angesprochen, kann man das Standardmodell der Elementarteilchentheorie im Rahmen der NKG reformulieren (mit gewissen Vorteilen). Allerdings macht dieses Modell kaum Vorhersagen oder Einschränkungen. Das Standardmodell ist nur *eine* Yang-Mills-Theorie, die mit Hilfe eines Spektralen Tripels ausgedrückt werden kann (obwohl beileibe nicht alle Yang-Mills-Theorien so formuliert werden können). Es wäre natürlich von größtem Interesse zu erfahren, inwiefern sich das Spektrale Tripel, welches das Standardmodell liefert, von anderen möglichen Modellen unterscheidet. Insbesondere stellt sich die Frage ob und durch welche (möglicherweise verallgemeinerten) Symmetrien sich das Standardmodell in dieser Formulierung auszeichnet.

1.2 Symmetriebegriff und verallgemeinerte Symmetrien

Wenden wir uns nun also dem Begriff der *Symmetrie* zu: Diese Dissertation beschäftigt sich mit gewissen Symmetrieaspekten in der NKG. Die herausragende Bedeutung von Symmetrien in der Physik bedarf eigentlich keiner besonderen Erwähnung. Man kann sich höchstens darüber wundern, *warum* Symmetrien in der Natur vorkommen und in der mathematischen Formulierung der Naturgesetze eine zentrale Rolle spielen. An der Tatsache, *daß* sie von grundlegender Wichtigkeit sind, ist nicht zu rütteln. Symmetrien sind ein Beispiel für ein physikalisches Konzept, daß nicht etwa nur einen speziellen Teil der Physik berührt, sondern sie sind übergreifend in praktisch allen Teilen der Physik von fundamentalem Interesse. Die physikalische Theorie ist in der Regel am elegantesten und strukturell am aussagekräftigsten dann formuliert, wenn man eine Beschreibungsweise wählt, in der möglichst viele Symmetriestrukturen sichtbar werden. Um dies zu untermauern, sei an die klassische Mechanik erinnert. Hier benutzt man unterschiedliche Ebenen der Beschreibung: die Newton-Mechanik, die Lagrange-Mechanik und die Hamilton-Mechanik. Nur in der Hamilton-Formulierung der klassischen Mechanik tritt die wesentliche Symmetriestruktur offen zutage: die symplektische Struktur. Dies hat direkte Konsequenzen wenn man beispielsweise das Noether-Theorem in seine allgemeinste Form bringen will, so daß möglichst viele Erhaltungsgrößen beschrieben werden können. Das Noether-Theorem selbst ist eines der wichtigsten Theoreme der Physik. Es verknüpft Symmetrien und Invarianzen mit Erhaltungsgrößen. Auch die Quantisierung physikalischer Systeme nimmt in der Regel als Ausgangspunkt den Phasenraum des Systems. Über die symplektische Struktur sind die Poisson-Klammern gegeben, welche die klassische Observablen-Algebra (Funktionen auf dem Phasenraum) mit der Struktur einer Lie-Algebra versehen und die in Form des Kommutators ein Analogon in der Quantenmechanik besitzen. Alle fundamentalen Wechselwirkungen werden durch Eichtheorien beschrieben. Mathematisch formuliert man solche Theorien im Formalismus der Prinzipalfaserbündel und der assoziierten

Vektorbündel. Auch hier steht im Zentrum eine Gruppe: die Strukturgruppe (bzw. die Eichgruppe). Das Beispiel der unterschiedlichen Beschreibungsebenen in der klassischen Mechanik macht deutlich, daß es wichtig ist, die gleiche Physik auf unterschiedliche Arten zu formulieren um dann die Beschreibungsweise zu finden, in der man möglichst viele strukturelle Einsichten in die Theorie bekommt. Diese strukturellen Einsichten könnten mit dem Auftreten neuer Symmetrien verbunden sein. Im Rahmen der NKG wird das Standardmodell der Elementarteilchentheorie auf einer anderen Ebene, d.h. mit anderen mathematischen Methoden als gewohnt, beschrieben. Es besteht die Hoffnung, daß man in dieser oder in einer weiterentwickelten Formulierung zusätzliche und vielleicht tiefere Einsichten in das Standardmodell erhalten kann - und vielleicht in die Physik „jenseits"des Standardmodells. Wie bereits oben angesprochen ist die Frage, ob sich das Standardmodell in der NKG-Formulierung durch weitere bisher nicht bekannte Symmetrien auszeichnet, Gegenstand intensiver Forschung. Man kennt sogar eine solche Symmetrie-Kandidatin: Eine deformierte Universelle Einhüllende der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Deren Struktur ist jedoch sehr schwierig, so daß dieser Punkt noch offen ist.

Da man in der NKG die Stufe der klassischen Punkträume mit den darauf definierten kommutativen Funktionenalgebren verläßt und stattdessen mit nicht-kommutativen Algebren arbeitet, ist es fast klar, daß auch die klassischen Symmetrien, die diese Räume besitzen, auf der algebraischen Stufe in einer anderen Form beschrieben werden müssen. Eine sinnvolle Verallgemeinerung sollte dabei die klassischen Symmetriestrukturen beinhalten. An dieser Stelle erscheint es angemessen, ein paar Worte darüber zu verlieren, was wir eigentlich unter einer „Symmetrie"verstehen wollen. Wenn wir in der Physik von Symmetrie sprechen, dann ist dies mathematisch mit dem Begriff einer Gruppe (oder Lie-Algebra) verbunden. Die Gruppe bewirkt Transformationen auf einem Raum, während die Lie-Algebra mit infinitesimalen Transformationen korreliert ist. Man kann den Begriff der Symmetrie enger oder weiter auslegen. Allen Auslegungen gemeinsam ist, daß man einen Raum hat, auf diesen Raum eine Gruppe oder Lie-Algebra wirken läßt (man also Transformationen auf dem Raum ausführt) und daß gewisse Eigenschaften des Raumes oder der Objekte, die auf diesem Raum „leben", unverändert (invariant) bleiben. Im weitesten Sinne bedeutet Symmetrie, daß überhaupt eine Wirkung der Gruppe oder Lie-Algebra auf den Raum existiert, die dessen Strukturen respektiert. Dies ist keineswegs selbstverständlich, wie das folgende Beispiel zeigt, welches auch demonstriert, daß, wenn die Strukturen eines Raumes nichtkommutativ gemacht werden, vorherige Symmetrien verloren gehen können. Wir betrachten als Beispiel die Wirkung der Gruppe $SO(3)$ auf den Raum $\mathbb{R}^3$. $SO(3)$ wirkt dabei bekanntermaßen wie folgt:

$$
\begin{aligned}
R:\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad R\in SO(3)\\
\vec{r} &\longmapsto \vec{r}^{\,\prime} := R\vec{r}
\end{aligned}
$$

Auf infinitesimalem Niveau hat man die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ mit den Erzeugenden der Drehungen

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Endliche Drehungen ergeben sich als:

$$\vec{r}^{\,'} = exp(-\vec{\phi} \cdot \vec{J})\vec{r}.$$

Die Struktur der Lie-Algebra ist durch die Kommutatorrelationen gegeben:

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k.$$

Die Elemente der Lie-Algebra wirken auf die Koordinaten im $\mathbb{R}^3$ als Derivationen und erfüllen insbesondere die Leibniz-Regel. Wie wirkt J_3 auf $\vec{r}$?

$$J_3\vec{r} \equiv J_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten nun einen nichtkommutativen Raum mit der Vertauschungsrelation

$$xy = qyx. \tag{1.1}$$

$J_3 \equiv \partial_\phi$ ist nicht mehr definiert, denn

$$J_3(xy) = -y^2 + x^2, \qquad J_3(yx) = x^2 - y^2,$$

und dies führt sofort auf einen Widerspruch:

$$J_3(xy) = J_3(qyx) = qJ_3(yx) = q(x^2 - y^2).$$

Ein Ausweg ist die Betrachtung von ebenfalls „deformierten Symmetrien“: Solche Betrachtungen führen auf die q-deformierte $SO(3)$ und auf entsprechende deformierte Lie-Algebren. Dies sind konkrete Beispiele für die Hopf-Algebren-Symmetrien, welche wir in den nächsten Kapiteln diskutieren werden. Es sei noch eine Anmerkung zur Gleichung (1.1) gemacht: In dieser Gleichung wird für die Koordinatenfunktionen angenommen, daß sie nicht vertauschen. Ein solcher Ansatz wird beispielsweise in [26] für die Raum-Zeit-Struktur kleinster Abstände (Planck-Skala) gemacht. Dies wird dort durch eine Analyse des Messprozesses motiviert: Um immer kleinere Abstände aufzulösen, muß in einem Raumvolumen so hohe Energie „hineingesteckt“werden, daß sich letztlich ein Schwarzes Loch bilden kann, welches verhindert, daß die Koordinaten genau messbar werden. Allerdings sollte man sich immer vor Augen halten, daß solche Argumente einen etwas heuristischen Charakter haben und sich noch experimenteller Nachprüfbarkeit entziehen. Als

Motivation, um sich mit einer nichtkommutativen Raum-Zeit zu beschäftigen, sind sie aber durchaus legitim.

Es bietet sich an, statt mit Gruppen und Lie-Algebren, mit Hopf-Algebren und Quantengruppen zu arbeiten. Auch hier sei zur Nomenklatur angemerkt, daß in der Literatur die Begriffe Hopf-Algebra und Quantengruppe oftmals synonym gebraucht werden. Es gibt jedoch Gründe (auf die später eingegangen wird), die Begriffe zu unterscheiden. Den Begriff Quantengruppe werden wir in einem topologischen Kontext benutzen. Quantengruppen sind (gewissermaßen) die topologische Version von Hopf-Algebren. Bis wir die Unterschiede klargemacht haben, wollen wir sie einstweilen nicht unterscheiden. Die klassische Wirkung einer Gruppe oder Lie-Algebra auf einen Raum wird ersetzt durch die Wirkung von Hopf-Algebren oder Quantengruppen auf Algebren. Wir werden in den nachfolgenden Kapiteln sehen, daß in gewisser Weise die Theorie von Gruppen und Lie-Algebren in der Theorie von Hopf-Algebren und Quantengruppen enthalten ist. Quantengruppen sind auf der einen Seite eine Verallgemeinerung der klassischen Symmetriestrukturen und auf der anderen Seite eine Vereinheitlichung von Gruppen- und Lie-Algebren-Konzept. Dieses „Verallgemeinern und Vereinheitlichen“ist geradezu ein Charakteristikum der Nichtkommutativen Geometrie und ihrer Methoden.

1.3 Hopf-Algebren in der theoretischen Physik - eine Auswahl

Bevor in den nächsten Kapiteln im Detail auf Hopf-Algebren und Quantengruppen eingegangen wird, sei an dieser Stelle ein kurzer Überblick über das Vorkommen von Hopf-Algebren in der theoretischen Physik gegeben.

1.3.1 Natürliche Struktur in der Mathematik:

Hopf-Algebren sind eine Struktur, die man nicht „von Hand“einführen muß, sondern man bekommt sie in Form von Funktionenalgebren über Gruppen oder in Form Universeller Einhüllender von Lie-Algebren gratis. Man erhält sie also auf natürliche Weise als:

- Linearisierung von Gruppenwirkungen.
- Funktionenalgebren über Gruppen.
- Universelle Einhüllende von Lie-Algebren.

Die Natürlichkeit der Hopf-Algebren-Strukturen werden im Verlauf des folgenden Kapitels ausführlich dargestellt. Letztlich zeigt es sich, daß (wie bereits erwähnt) Gruppen- und Lie-Algebrentheorie in der Hopf-Algebren-Theorie enthalten sind. Hopf-Algebren sind jedoch dem algebraischen Bereich besser angepasst und ordnen sich zwanglos in die Gedankenwelt der NKG ein.

1.3.2 Struktur in der theoretischen Physik

Hopf-Algebren und Quantengruppen werden in der theoretischen Physik in vielen Bereichen benutzt. Ebenso wie bei Gruppen liegt ihre Bedeutung darin, daß sie Strukturen zur Verfügung stellen, die nicht nur für einen speziellen Bereich von Nutzen sind, sondern in unzähligen Gebieten und Anwendungen eine große Wichtigkeit erlangt haben:

- Theorie integrabler Systeme, niederdimensionale Topologie, Braidgruppen und ihre Darstellungen, Diskrete Eichtheorien, konforme Feldtheorien.
- Renormierung.
- Nichtkommutative Geometrie.

Die Theorie der integrablen Systeme ist historisch eine der Wurzeln der Hopf-Algebrentheorie. Die Bereiche Niederdimensionale Topologie, Braidgruppen, diskrete Eichtheorien und Konforme Feldtheorien sind eng miteinander verknüpft. Interessant sind Untersuchengen über das Spin-Statistik-Theorem in niederen Dimensionen und Effekte wie der nichtabelsche Aharonov-Bohm-Effekt [21], [20], [22]. Dort „sitzen“die Teilchen nicht in Darstellungen einer Gruppe, sondern in Darstellungen einer speziellen Hopf-Algebra: des sogenannten Quantendoppels. Einen sehr schönen Überblick über Hopf-Algebren als Symmetriestruktur (mit dem Schwerpunkt Renormierung) gibt [66]. Mit den unzähligen Anwendungen von Hopf-Algebren und Quantengruppen werden wir uns im Rahmen dieser Arbeit nicht beschäftigen, da das Hauptgewicht auf einer Untersuchung von Hopf-Algebren als Symmetriestruktur in der Nichtkommutativen Geometrie liegen wird, so daß die im nächsten Unterabschnitt aufgezählten Punkte uns im weiteren Verlauf der Arbeit vornehmlich beschäftigen werden, wobei der dortige zweite Punkt die eigentliche Motivation im Hintergrund liefert.

1.3.3 Nichtkommutative Geometrie

Im Bereich der Nichtkommutativen Geometrie spielen Hopf-Algebren und Quantengruppen einerseits die Rolle von verallgemeinerten Symmetriestrukturen und andererseits als Lieferanten der (in gewisser Weise) einfachsten Modelle von Räumen mit nicht-kommutativen und geometrischen Strukturen:

- Symmetriestruktur in der Nichtkommutativen Geometrie [52], [14].
- Modelle für eine einheitliche Formulierung von Gravitation und Quantenmechanik [46].

- Quantenbündel (Hopf-Galois-Erweiterungen) als Verallgemeinerung von Faserbündeln und assoziierten Bündeln [5], [17].

Wir können uns an dieser Stelle kurz fassen, da diese drei Punkte im Hauptteil der Arbeit ausführlich diskutiert und dargestellt werden. Weitere Literatur wird an den entsprechenden Stellen der Dissertation angegeben.

1.4 Motivation

Nachdem im vorangehenden, einführenden Teil die Grundgedanken der NKG dargelegt wurden, wollen wir nun die NKG noch ein wenig „globaler“betrachten. Letztlich geht es in der NKG um nicht weniger, als im Prinzip die gesamte Physik in einer gemeinsamen Sprache zu formulieren. Der Vereinigung von verschiedenen physikalischen Gebieten (wie der Elementarteilchenphysik und der Gravitation) entspricht auf der mathematischen Seite die Vereinheitlichung von mathematischen Methoden. Was sollte eine solche neue Sprache demnach beinhalten? Wir wollen eine Auswahl wichtiger Punkte nennen:

- Klassische Räume und ihre Strukturen (insbesondere Geometrien). Riemann-Mannigfaltigkeiten und Spin-Mannigfaltigkeiten.

- Nichtkommutative Räume wie z.B. Operatoralgebren der Quantenmechanik oder Spektrale Tripel etc.

- Klassische Symmetrien: Gruppen und Lie-Algebren.

- Verallgemeinerte Symmetrien (d.h. Symmetrien, welche den nichtkommutativen Räumen angepaßt sind und die klassischen Symmetrien als Grenzfall enthalten): Hopf-Algebren, Quantengruppen.

- Nichtkommutative Verallgemeinerung von Faserbündeln (insbesondere Prinzipalbündel).

- Nichtkommutative Verallgemeinerung von Gitter-Theorien.

Wenngleich mit der Reformulierung des Standardmodells ein schöner Erfolg erzielt wurde, so muß man doch folgendes kritisch anmerken: Das Gebäude der NKG (in der Connes'-Formulierung) gründet sich auf sehr wenige Beispiele. Da wäre der Nichtkommutative Torus, welcher die best-studierte nichtkommutative Mannigfaltigkeit mit Spektralen Tripeln liefert und der eine (wieder) zunehmende Bedeutung im Rahmen von String-Theorien erfährt. Das des öfteren erwähnte Spektrale Tripel des Standardmodells ist dagegen schon ein sehr kompliziertes Beispiel. Daneben gibt es noch einige andere untersuchte nichtkommutative Spin-Mannigfaltigkeiten. Dieser Zugang zur NKG ist insgesamt sehr auf die nichtkommutative Verallgemeinerung von klassischen Spin-Mannigfaltigkeiten und auf das

Einbeziehen der Gravitation zugeschnitten. Es bleibt jedoch die Frage, ob man einen mathematischen Formalismus wirklich auf sehr wenigen Beispielen aufbauen kann.

Ein weiterer Punkt ist, daß es durchaus verschiedenen Zugänge zu Nichtkommutativer Geometrie (hier ausnahmsweise nicht nur im Sinne von Connes gemeint) gibt. Vor allem die Hopf-Algebren- und Quantengruppen-Theorie bietet einen eigenständigen Zugang zu nichtkommutativen Methoden und Modellen. Der Zugang von Connes, der im Zentrum den Begriff des Spektralen Tripels hat und der Quantengruppen-Zugang, der naturgemäß Symmetriestrukturen stärker in den Mittelpunkt rückt, sind bisher immer noch ein wenig disjunkt, obwohl es durchaus mittlerweile Modelle gibt, die sich Methoden beider Zugänge bedienen [48]. Man sollte sich vor Augen halten, daß der Connessche Zugang mit seinen Axiomen für Spin-Mannigfaltigkeiten beispielsweise für Gitter-Eichtheorien nicht ohne weiteres geeignet ist, da es nicht möglich ist, diese Axiome für den kanonischen Dirac-Operator auf dem Gitter zu erfüllen [31]. Auch der Fall von Riemann-Mannigfaltigkeiten ist mit der Connes-Axiomatik nicht zu behandeln, da hier i.a. kein Dirac-Operator vorhanden ist, in dem ja bei den spektralen Tripeln die geometrische Information steckt. Im Rahmen der Quantengruppen gibt es allerdings durchaus eine Theorie von nichtkommutativer Riemann-Geometrie [47].

Es wäre also wünschenswert, Modelle zur Verfügung zu haben, in denen sowohl Spektrale Tripel als auch Quantengruppen eine gewisse Rolle spielen. Aus diesem Grund haben wir uns in [23] mit einer aus der Literatur [32] bekannten Algebra, dem Quantendoppeltorus, beschäftigt. Dieser ist aus dem Nichtkommutativen Torus aufgebaut, also gerade dem Raum, der im Hinblick auf Nichtkommutative Geometrie und Spektrale Tripel mithin am besten studiert ist. Wir studieren ihn hier jedoch unter dem Gesichtspunkt von verallgemeinerten Symmetrien, unter denen wir in dieser Arbeit Hopf-Algebren- oder (in einem topologischen Kontext) Quantengruppen-Symmetrien verstehen wollen. Wir behandeln den Quantendoppeltorus als einen Spezialfall von allgemeineren Räumen, die alle aus dem Nichtkommutativen Torus aufgebaut sind. Wir studieren im Detail die Hopf-Algebren-Strukur dieser Nichtkommutativen Multi-Tori. Ihre duale Formulierung erlaubt eine Interpretation im Rahmen von algebraischen Quantisierungsproblemen. In bestimmten Fällen besitzen die von uns konstruierten Hopf-Algebren eine zusätzliche Struktur (eine R-Matrix). Auch diese, in der Hopf-Algebren-Theorie sehr wichtige Eigenschaft, wird von uns eingehend untersucht. Ein wichtiges Ergebnis der Arbeit ist die Herleitung der niederdimensionalen Kac-Paljutkin-Algebren, sowie das Studium des Kommutativen Torus und der Nichtkommutativen Multi-Tori unter dem Gesichtspunkt von exakten Sequenzen und Hopf-Galois-Erweiterungen. Da solche Hopf-Galois-Erweiterungen das nichtkommutative Analogon zu Prinzipalbündeln sind, können wir mit den Nichtkommutativen Multi-Tori eine interessante Klasse nichtkommutativer Prinzipalbündel präsentieren. Eine weitere Frage und Motivation zu dieser Arbeit war, ob der Nichtkommutative Torus verallgemeinerte Symmetrien besitzt, die über die wohlbekannte $u(1) \times u(1)$-Symmetrie hinausgeht. Diese

Frage konnten wir positiv beantworten, allerdings läßt sich die Symmetrie nicht auf die Spektralen Tripel erweitern.

1.5 Aufbau der Arbeit

Es wird in den ersten Kapiteln dieser Arbeit gezeigt, daß man zu Hopf-Algebren und Quantengruppen auf verschiedenen Wegen geführt wird, beispielsweise wenn man die Wirkung von Gruppen auf Räume untersucht und solche Wirkungen „linearisiert“. Die Nützlichkeit von Quantengruppen beschränkt sich nicht nur auf ihre Rolle als verallgemeinerte Symmetrie (auch wenn das Augenmerk der Arbeit auf diesen Punkt gerichtet ist). Sie bilden selbst einen eigenständigen Zugang zu Nichtkommutativer Geometrie und liefern interessante Modelle, in denen Eigenschaften von Gravitation (=klassische Geometrie) und quantenmechanischer Beschreibung vereinigt sind. Quantengruppen haben somit eine mehrfache Funktion im weiten Gebiet der NKG. Der funktionalanalytische Zugang zur NKG nach Connes, der im Zentrum den Begriff des Spektralen Tripels hat und der mehr algebraische, von den Symmetrien motivierte Zugang über die Quantengruppen, sind bis zum jetzigen Zeitpunkt leider ein wenig disjunkte Zugänge zur NKG, und es ist wünschenswert und eine der Motivationen für diese Arbeit, die Zugänge ein wenig mehr zusammen zu bringen, indem Modelle konstruiert werden, in denen Spektrale Tripel und Quantengruppen als deren Symmetrie gleichermaßen eine Rolle spielen.

In den folgenden Kapiteln soll somit eine Einführung in die Theorie der Quantengruppen gegeben werden. Angesichts der Vielfalt und der Größe dieses Themenbereiches (vergleichbar mit der Gruppentheorie und ihren mannigfachen Anwendungen) können hierbei nur die wichtigsten Grundlagen und diejenigen Aspekte vermittelt werden, die im Rahmen dieser Arbeit eine Rolle spielen. Deshalb werden wir Quantengruppen primär als Objekte betrachten, die auf andere Objekte wirken können. Wir nehmen damit den Symmetrie-Standpunkt ein. In die Theorie der Hopf-Algebren gibt es mittlerweile einige gute Einführungen, die im Hinblick auf Anwendungen in der theoretischen Physik geschrieben wurden (und damit für das Anliegen dieser Arbeit besser geeignet erscheinen, als etwas ältere Darstellungen wie etwa [60]). Es seien an dieser Stelle [46], [8] und [40] genannt. Außerdem sei auf meine eigene Arbeit [22] hingewiesen. Einen Überblick über den heutigen Stand der mathematischen Forschung, endlichdimensionale Hopf-Algebren betreffend, gibt [2]. Literatur zu Quantengruppen (die gewissermaßen die topologische Variante der Hopf-Algebren darstellen) wird im Kapitel 4 an entsprechender Stelle genannt. Die Motivation zur Beschäftigung mit verallgemeinerten Symmetrien ist prinzipiell die gleiche wie die zur Beschäftigung mit nichtkommutativen Räumen; man sucht eine mathematische Formulierung, in der die klassischen Symmetrien (Gruppen und Lie-Algebren) als Spezialfälle ihren Platz haben, die aber allgemeiner und der Nichtkommutativen Geometrie angepaßter ist. Der Symmetriebegriff, den wir in Zusammenhang mit Quantengruppensymmetrien

Spektraler Tripel zugrunde legen, wurde in [52] eingeführt.

Teil I der Arbeit erklärt ausführlich die mathematischen Grundlagen der Hopf-Algebren- und Quantengruppentheorie. Dabei wurde versucht, die Arbeit weitestgehend „selbsttragend"zu formulieren, so daß alle Grundlagen in der Arbeit erläutert werden. Dies führt zwar zu einem gewissen Stoffumfang, es werden jedoch fast alle eingeführten Begriffsbildungen und Konstruktionen tatsächlich benötigt. Alternativ kann man auch direkt im zweiten Teil der Arbeit einsteigen und den ersten Teil als „Nachschlagewerk"benutzen. Zu einem tieferen Verständnis der Hopf-Algebren-Strukturen empfiehlt es sich jedoch durchaus, den ersten Teil zu lesen, da der Versuch unternommen wurde, die Hopf-Algebren-Theorie und deren Begriffsbildungen in allen Punkten zu motivieren. Dies ist anhand der üblichen Literatur nicht ohne weiteres möglich. Der Schwerpunkt (oder besser gesagt die Sichtweise) liegt dabei auf dem Symmetrie-Standpunkt. Hopf-Algebren werden in erster Linie als Verallgemeinerungen von Gruppen und Lie-Algebren gesehen. Wir sind dementsprechend besonders daran interessiert zu zeigen, wie diese Strukturen auf andere Objekte wirken können. Wir wenden uns in **Kapitel 2** zuerst endlichdimensionalen Hopf-Algebren zu, die wir sehr natürlich als Verallgemeinerung endlicher Gruppen konstruieren können. Die gefundenen Definitionen gelten dann auch für unendlichdimensionale Hopf-Algebren. Wichtige Probleme, die beispielsweise bei der Betrachtung der dualen Hopf-Algebren auftauchen können, werden diskutiert.

In **Kapitel 3** gehen wir auf den Fall ein, daß wir es nicht mit unitalen Hopf-Algebren (Hopf-Algebren mit einer Eins der Algebra) zu tun haben. Dieser Fall wird mit den Multiplikator-Hopf-Algebren behandelt, die wiederum ein tieferes Verständnis der Hopf-Algebren-Strukturen fördern.

Im **4. Kapitel** wenden wir uns der „topologischen "Theorie der Hopf-Algebren, den sogenannten Quantengruppen zu. Dabei studieren wir kompakte Quantengruppen, die zu kompakten Gruppen assoziiert sind. Durch duale Betrachtungsweise ergibt sich die Theorie der diskreten Quantengruppen.

Teil II dieser Dissertation beschäftigt sich dann mit dem eigentlichen Thema: der Konstruktion interessanter Klassen von Hopf-Algebren, die alle mit dem Nichtkommutativen Torus assoziiert sind, sowie mit verallgemeinerten Symmetrien des Nichtkommutativen Torus und seiner Spektralen Tripel.

In Kapitel **5** zeigen wir, daß die algebraische Quantisierung von homogenen Räumen ein Spezialfall des Universellen Quantisierungsproblems von Kreuzprodukten der Hopf-Algebren-Theorie ist. Wir betrachten die spezielle Kreuzproduktalgebra $FG \ltimes \mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ mit einer endlichen Gruppe G. Diese Algebra ist Ausgangspunkt für die Konstruktionen im nachfolgenden Kapitel, in dem zum Nichtkommutativen Torus assoziierte Hopf-Algebren-Strukturen untersucht werden.

Das **Kapitel 6** erläutert, wie man zu einer ganzen Klasse von Quantengruppen kommt, die alle mit dem (in der Nichtkommutativen Geometrie besonders wichtigen) Nichtkommutativen Torus assoziiert sind. Dies ist eine starke Verallgemeinerung des Quantendoppeltorus, der in der Literatur bereits in anderer Formulierung bekannt ist. Insbesondere werden wir zeigen, daß diese Konstruktion besonders einfach wird, wenn man die entsprechenden Dualräume aus Kapitel 5 betrachtet.

Ausgehend von den Quantengruppen, die in Kapitel 6 konstruiert wurden, können wir im **7. Kapitel** endlichdimensionale Hopf-Algebren erzeugen und zeigen, daß die sehr wichtigen Kac-Paljutkin-Algebren sich aus dieser Konstruktion ergeben.

Kapitel 8 arbeitet die Quantenfaserbündel-Struktur des Quantendoppeltorus heraus, und für den Fall von Wurzeln der Eins, wird der Nichtkommutative Multi-Torus als Hopf-Galois-Erweiterung des Kommutativen Torus hergeleitet und studiert.

Das **9. Kapitel** zeigt, daß der Nichtkommutative Torus über die bekannte $u(1) \times u(1)$-Symmetrie hinaus eine größere Symmetrie besitzt. Diese Symmetrie wird durch die duale Hopf-Algebra zum Quantendoppeltorus gegeben. Es lassen sich allerdings keine invarianten Spektralen Tripel dazu finden. Die verallgemeinerte Symmetrie des Nichtkommutativen Torus läßt sich also nicht auf die spektralen Tripel fortsetzen.

Abschließend enthält das **10. Kapitel** eine Zusammenfassung der Arbeit.

Teil I

Hopf-Algebren und Quantengruppen als verallgemeinerte Symmetrien

Vorbemerkungen:

Es ist ein Grundgedanke der Nichtkommutativen Geometrie die topologischen und geometrischen Eigenschaften von Räumen auf einer algebraischen Stufe (Funktionenstufe) auszudrücken, auf dieser Stufe Verallgemeinerungen zuzulassen und insbesondere auch nichtkommutative Algebren zu betrachten. Prinzipiell ist die Vorgehensweise dabei folgendermaßen: Man betrachtet einen Raum und drückt seine Eigenschaften durch eine geeignete Algebra von Funktionen über diesem Raum aus, wobei das Auswählen der geeigneten Algebra der zentrale Punkt ist. Die Funktionenalgebra ist natürlich kommutativ. Die Eigenschaften des Raumes werden dann allein durch Eigenschaften der Funktionenalgebra beschrieben. In diesem Sinne konstruiert man also eine Äquivalenz einer Kategorie von Räumen mit einer Kategorie von Algebren. Man kann nun verallgemeinern, indem man Algebren betrachtet, die zwar die Eigenschaften der betrachteten Funktionenalgebren besitzen, aber nicht mehr notwendigerweise kommutativ sind. Diese Algebren sind dann auch nicht mehr Funktionen über einem Raum, wenngleich sie häufig als Operatoralgebren auf einem Raum dargestellt werden können. Solche nichtkommutativen Algebren nennt man sinnvollerweise Quantenräume. Wenn beispielsweise X ein kompakter Hausdorff-Raum ist, so betrachtet man die C^*-Algebra der stetigen Funktionen $C(X)$. Aus dieser Algebra wiederum kann man den Raum X rekonstruieren.

Solche Betrachtungsweisen kann man natürlich insbesondere auf Gruppen anwenden (endliche Gruppen, diskrete Gruppen, Lie-Gruppen, kompakte Gruppen, lokalkompakte Gruppen). Auch hier sucht man jeweils eine geeignete Funktionenalgebra und definiert dann die Eigenschaften der Gruppe auf der Funktionenstufe. Dabei gilt es zwei Charakteristika der jeweiligen Gruppe in die algebraische Sprache zu übersetzen:

- die Strukturabbildungen der Gruppe, d.h. Multiplikation, neutrales Element, inverses Element,
- die topologischen Eigenschaften der Gruppe.

In den folgenden Kapiteln wollen wir uns mit den folgenden Typen von Gruppen und den ihnen entsprechenden Hopf-Algebren und Quantengruppen beschäftigen:

- den endlichen Gruppen,
- den kompakten Gruppen,
- den lokalkompakten Gruppen.

Naturgemäß ist die Behandlung der endlichen Gruppen der einfachste dieser Punkte. Topologische Fragen spielen hier keine Rolle und das Übertragen von den Strukturabbildungen der Gruppe auf die Stufe der Funktionenalgebren bereitet keinerlei Probleme. Trotzdem werden alle relevanten Begriffsbildungen bereits eingeführt. Man gelangt auf natürliche Weise zum Begriff der Hopf-Algebra. Komplizierter ist die Behandlung von kompakten und lokalkompakten Quantengruppen, da hierbei die topologischen Eigenschaften der Gruppe eine zentrale Rolle spielen. Die Begriffsbildungen, die man aus der Behandlung der endlichen Gruppen gewonnen hat, müssen modifiziert und angepaßt werden. Mit der Gewöhnung an die rein algebraischen Methoden der Hopf-Algebren-Theorie aus dem folgenden Kapitel, ist der Umstieg auf die kompakten und lokalkompakten Quantengruppen (gewissermaßen die topologischen Versionen der Hopf-Algebren) jedoch leichter zu verstehen.

Kapitel 2

Von endlichen Gruppen zu endlichen Hopf-Algebren

Eine endliche Gruppe induziert auf der Algebra der körperwertigen Funktionen über der Gruppe zusätzlich zu deren Algebrenstruktur noch weitere Abbildungen, welche die Funktionenalgebra mit der Struktur einer kommutativen Hopf-Algebra ausstatten. Auch die Gruppenalgebra (d.h. die Algebra, die von den Gruppenelementen erzeugt wird) ist eine Hopf-Algebra. Einer Lie-Algebra kann man ihre Universelle Einhüllende zuordnen, die ebenfalls eine Hopf-Algebren-Struktur trägt. Hopf-Algebren können als verallgemeinerte Symmetriestrukturen interpretiert werden, die außerdem die Begriffe Gruppe und Lie-Algebra beinhalten und in gewisser Weise vereinheitlichen. Zahlreiche Begriffsbildungen (wie Wirkung, Darstellung, Haar-Integral) aus der Gruppentheorie können auf die algebraische Stufe „gehoben"werden.

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Frage, wie man zu einem verallgemeinerten Symmetriebegriff kommt, wenn von einer endlichen Gruppe und ihren Wirkungen ausgegangen wird. Dieser Fall ist aus mehreren Gründen einfach (wenngleich keineswegs trivial):

- Die Topologie spielt keine Rolle. Die Strukturabbildungen sind problemlos zu definieren. Man kann mit dem algebraischen Tensorprodukt arbeiten und muß nicht (wie in Kapitel 4) Tensorprodukte von C^*-Algebren verwenden.

- Die Algebra der Funktionen über der Gruppe ist eine unitale Algebra, d.h. sie besitzt eine Eins.

- Wir haben es im wesentlichen mit endlichdimensionalen Räumen zu tun. In der Hopf-Algebren-Theorie ist die Betrachtung von dualen Räumen sehr wichtig. Für endlichdimensionale Hopf-Algebren sind die Dualräume wiederum Hopf-Algebren. Dies gilt i.a. nicht mehr für unendlichdimensionale Hopf-Algebren.

Die Definition einer Hopf-Algebra nimmt keinen Bezug auf die Dimension des Raumes und viele der Definitionen und Aussagen, die wir kennenlernen werden, sind auch für unendlichdimensionale Hopf-Algebren gültig. Wir werden darauf an den entsprechenden Stellen hinweisen. Hingewiesen sei außerdem darauf, daß Hopf-Algebren, die zu endlichen Gruppen assoziiert sind, ein Spezialfall der kompakten Quantengruppen sind, die wir dann im 4. Kapitel näher studieren werden.

Obwohl die endlichen Gruppen und die ihnen zugeordneten Hopf-Algebren in gewisser Weise nur eine Vorstufe zur Behandlung von kompakten Quantengruppen bilden, muß sie jede sinnvolle Theorie von Quantengruppen als Spezialfall enthalten. Wir werden im Rahmen dieser Dissertation noch häufig sehen, daß es oftmals sehr nützlich ist, sich zunächst auf rein algebraisch behandelbare Konstruktionen zu beschränken und danach erst topologische Aspekte hinzuzufügen. Das Studium von endlichdimensionalen Hopf-Algebren ist auch deswegen mathematisch interessant, da man hier noch am ehesten eine vollständige Klassifizierung erwarten kann [2], auch wenn diese bisher keineswegs abgeschlossen ist.

2.1 Gruppen, Hopf-Algebren und Wirkungen

In den folgenden Unterabschnitten wollen wir uns (nachdem wir ein wenig Notation und den Wirkungsbegriff eingeführt haben) mit grundlegenden Beispielen von Hopf-Algebren beschäftigen, die sich jeder endlichen Gruppe bzw. jeder Lie-Algebra assoziieren lassen. Diese Beispiele sind:

1. Funktionenalgebra über einer endlichen Gruppe.
2. Gruppenalgebra.
3. Universelle Einhüllende einer Lie-Algebra.

Ein gutes Verständnis dieser Hopf-Algebren ist fundamental für die gesamte Hopf-Algebren-Theorie. Wie diese Algebren miteinander in Beziehung stehen, wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels klar werden; ebenso die Frage, ob man aus einer gegebenen Funktionen- und Gruppenalgebra oder einer Universellen Einhüllenden wieder die Gruppe bzw. die Lie-Algebra rekonstruieren kann.

2.1.1 Gruppen und ihre Wirkungen

In der Physik tauchen Gruppen insbesondere als Transformationsgruppen von Räumen auf. Eine Transformation ist ein Automorphismus auf einem Raum. Zu jeder Transformation gibt es eine Inverse, und es gibt die neutrale Transformation. Transformationen können verknüpft werden. Diese Verknüpfung ist zudem assoziativ. Auf infinitesimalem Niveau werden Transformationen durch Lie-Algebren vermittelt. Diese wirken derivativ. Die Multiplikation ist hierbei nichtassoziativ. Dafür gilt die Jacobi-Identität. Es sind gerade die infinitesimalen Transformationen, die in der Physik wesentlich für die Formulierung von Erhaltungsgrößen und Quantenzahlen sind. Es sei an dieser Stelle auf die offene Frage hingewiesen, ob verallgemeinerte Symmetrien in der NKG eine ähnliche Rolle spielen werden. Transformationen können als Wirkungen einer Gruppe auf einen Raum aufgefaßt werden. Sei also G eine Gruppe und X eine Menge (ein Raum). Dann definiert man die Wirkung als die zweistellige Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha:\ G\times X &\longrightarrow X, \\ (g,x) &\longmapsto \alpha(g,x)\equiv\alpha_g(x)\equiv g\triangleright x. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Genauer gesagt wurde oben eine Linkswirkung der Gruppe definiert. Solche Linkswirkungen führen auf Gruppenhomomorphismen

$$\alpha_{gh}=\alpha_g\circ\alpha_h, \qquad g,h\in G,$$

während die analog definierten Rechtswirkungen

$$\begin{aligned} \tilde\alpha:\ X\times G &\longrightarrow X, \\ (x,g) &\longmapsto \tilde\alpha(x,g)\equiv\tilde\alpha_g(x)\equiv x\triangleleft g \end{aligned}$$

auf Gruppenantihomomorphismen

$$\tilde\alpha_{gh}=\tilde\alpha_h\circ\tilde\alpha_g, \qquad g,h\in G$$

führen. Die Wirkung einer Gruppe auf einen Raum induziert auf natürliche Weise eine Wirkung auf die kommutative Algebra der Funktionen über diesem Raum (wir setzen für den Körper in der Regel $\mathbb{K}=\mathbb{C}$):

$$\begin{aligned} \hat\alpha:\ G\times\mathcal{F}(X) &\longrightarrow \mathcal{F}(X) \\ (g,\xi) &\longmapsto \hat\alpha(g,\xi), \qquad \hat\alpha(g,\xi)(x):=\xi(g^{-1}x). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Wie man leicht zeigt, ist diese Wirkung eine Linkswirkung, da $g^{-1}x$ eine Rechtswirkung ist. Die Wirkung eines Elementes aus G auf X induziert demnach einen Automorphismus der Funktionenalgebra $\mathcal{F}(X)$. Naturgemäß interessieren wir uns insbesondere für Wirkungen der Gruppe auf Vektorräume V. Die Linksdarstellung einer Gruppe auf einem Vektorraum V ergibt sich als partielle Abbildung aus der Wirkung:

$$\begin{aligned} \rho:\ G &\longrightarrow End(V), \\ g &\longmapsto \rho(g), \qquad \rho(g)(v):=\alpha_g(v)\equiv g\triangleright v. \end{aligned}$$

Ein Charakteristikum von Gruppen ist, daß das Tensorprodukt zweier Darstellungen wieder eine Darstellung bildet: Seien ρ_1 und ρ_2 Darstellungen. Dann ist auch $\rho:=\rho_1\otimes\rho_2$

eine Darstellung. Für zwei Darstellungen ρ_1, ρ_2 einer Algebra A gilt dies wegen fehlender Linearität nicht:

$$\rho(\lambda a) \neq \rho_1(\lambda a) \otimes \rho_2(\lambda a) = \lambda^2 \rho(a),\ \lambda \in \mathbb{K},\ a \in A.$$

Hopf-Algebren haben jedoch, wie wir sehen werden, diese wichtige Eigenschaft. Das wird durch eine zusätzliche Strukturabbildung ermöglicht: die Komultiplikation. An dieser Stelle sei, da wir sie nachfolgend immer wieder benötigen, auf die Multiplikation in einer Algebra eingegangen. Die Multiplikation ist eine bilineare Abbildung der Form

$$\begin{aligned} \cdot : A \times A &\longrightarrow A, \\ (a,b) &\longmapsto a \cdot b. \end{aligned}$$

Für unsere Zwecke ist es jedoch weitaus günstiger dieser bilinearen Abbildung eine lineare Abbildung zuzuordnen:

$$\begin{aligned} \mu : A \otimes A &\longrightarrow A, \\ a \otimes b &\longmapsto \mu(a \otimes b) := a \cdot b. \end{aligned}$$

Die Zuordnung der linearen zu der bilinearen Multiplikation ist dabei (bis auf Isomorphie) eindeutig. Auch wenn wir in dieser Arbeit Methoden der Kategorientheorie nicht explizit verwenden werden, wollen wir doch zumindest den Begriff des sogenannten „Universellen Objektes“ einführen, den wir gelegentlich benutzen. Eine Kategorie besteht aus Objekten (z.B. Vektorräume, Algebren, Hopf-Algebren) und Morphismen (z.B. Vektorraum-Morphismen, Algebren-Morphismen). Ein Objekt in einer solchen Kategorie heißt universell, falls es zu jedem anderen Objekt der gleichen Kategorie genau einen Morphismus dieser Kategorie gibt. Betrachten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A \\ A \times A \arrow[u, "\otimes"] \arrow[ur, "\cdot"'] & \end{tikzcd}$$

Abbildung 2.1: Universelle Eigenschaft des Tensorproduktes

Die Universalität des Tensorproduktes drückt sich darin aus, daß es zu jeder bilinearen Abbildung $\cdot$ genau eine lineare Abbildung μ gibt. Eine ausführlichere Darstellung von kategoriellen Aspekten findet sich in meiner Arbeit [22].

2.1.2 Funktionenalgebra $\mathcal{F}(G)$ über einer endlichen Gruppe

Betrachten wir die Funktionenalgebra über einer endlichen Gruppe G, die wir mit $\mathcal{F}(G)$ bezeichnen. Die Elemente aus $\mathcal{F}(G)$ sind also körperwertige Funktionen. Die Eins der Algebra notieren wir mit $1_{\mathcal{F}(G)}$. Es gilt, daß

$$\mathcal{F}(G \times G) \cong \mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G).$$

Der Isomorphismus wird auf einer Basis durch (2.5) definiert. Die Algebrenstruktur ist durch punktweise Multiplikation gegeben. Wir werden nun zeigen, daß die Gruppenmultiplikation, das neutrale Element und die Inversenbildung weitere lineare Strukturabbildungen auf der Funktionenalgebra ergeben:

Die Gruppenmultiplikation induziert eine Komultiplikation Δ auf $\mathcal{F}(G)$:

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{F}(G) &\longrightarrow \mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G) \cong \mathcal{F}(G \times G), \\ f &\longmapsto \Delta(f). \end{aligned}$$

Die Komultiplikation macht aus einer einstelligen eine zweistellige Abbildung:

$$\Delta(f)(s,t) := f(st), \quad \forall s,t \in G.$$

Durch das neutrale Element wird die sogenannte Koeins ϵ definiert:

$$\begin{aligned} \epsilon : \mathcal{F}(G) &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ f &\longmapsto \epsilon(f) := f(e). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Die Anwendung der Koeins auf eine Funktion entspricht demnach der Auswertung der Funktion auf dem neutralen Element.

Die Inverse der Gruppe G induziert eine Antipode auf $\mathcal{F}(G)$:

$$\begin{aligned} S : \mathcal{F}(G) &\longrightarrow \mathcal{F}(G), \\ f &\longmapsto S(f), \qquad S(f)(g) := f(g^{-1}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Die auf der Funktionenstufe induzierten Abbildungen Δ, ϵ, S haben weitere Eigenschaften, die sich wiederum aus den Eigenschaften der Gruppenstrukturen ergeben. Bevor wir diese ableiten, wollen wir die Strukturabbildungen konkret auf Basiselementen definieren. Eine Basis von $\mathcal{F}(G)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{B}(\mathcal{F}(G)) = \{e_s | s \in G, e_s(t) = \delta_{s,t}\}.$$

Die Identifizierung $\mathcal{F}(G \times G) \cong \mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G)$ wird durch den Isomorphismus

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G) &\longrightarrow \mathcal{F}(G \times G), \\ e_s \otimes e_t &\longmapsto e_{s,t} \end{aligned} \tag{2.5}$$

definiert, wobei $\{e_{s,t} | s,t \in G, e_{s,t}(p,q) = \delta_{s,p}\delta_{t,q}\}$ eine Basis von $\mathcal{F}(G \times G)$ ist. Wir geben die Strukturabbildungen auf den Basiselementen tabellarisch an ($s,t \in G$):

Multiplikation	$e_s \cdot e_t = \delta_{s,t} e_t,$
Eins	$1_{\mathcal{F}(G)} = \sum_s e_s,$
Komultiplikation	$\Delta(e_s) = \sum_{rt=s} e_r \otimes e_t,$
Koeins	$\epsilon(e_s) = \delta_{s,e},$
Antipode	$S(e_s) = e_{s^{-1}}.$

Die Richtigkeit dieser Relationen prüft man leicht nach, indem man jeweils beide Seiten der Gleichungen auf Elementen aus G auswertet:

$$\begin{aligned}
&(e_s \cdot e_t)(p) = e_s(p)e_t(p) = \delta_{s,p}\delta_{t,p} = \delta_{s,t}e_t(p),\\
&1_{\mathcal{F}(G)}(p) = 1_{\mathbb{C}} = (\sum\nolimits_s e_s)(p),\\
&\Delta(e_s)(p,q) = e_s(pq) = \delta_{s,pq} = \sum\nolimits_{rt=s} \delta_{r,p}\delta_{t,q} = (\sum\nolimits_{rt=s} e_r \otimes e_t)(p,q).
\end{aligned}$$

Koeins und Antipode sind wegen (2.3) und (2.4) klar. Wir werden nun einige Eigenschaften von Komultiplikation, Koeins und Antipode herleiten und dabei auch ein wenig Übung im Umgang mit diesen Strukturen erlangen:

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes id)\Delta(e_s) &= (\Delta \otimes id)\sum\nolimits_{rt=s} e_r \otimes e_t = \sum\nolimits_{rt=s} \Delta e_r \otimes e_t\\
&= \sum\nolimits_{rt=s}\sum\nolimits_{kl=r} e_k \otimes e_l \otimes e_t = \sum\nolimits_{klt=s} e_k \otimes e_l \otimes e_t.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(id \otimes \Delta)\Delta(e_s) &= (id \otimes \Delta)\sum\nolimits_{kn=s} e_k \otimes e_n = \sum\nolimits_{kn=s} e_k \otimes \Delta e_n\\
&= \sum\nolimits_{kn=s}\sum\nolimits_{lt=n} e_k \otimes e_l \otimes e_t = \sum\nolimits_{klt=s} e_k \otimes e_l \otimes e_t.
\end{aligned}$$

$$(\epsilon \otimes id)\Delta e_s = (\epsilon \otimes id)\sum\nolimits_{rt=s} e_r \otimes e_t = \sum\nolimits_{rt=s} \epsilon(e_r)e_t = \sum\nolimits_{rt=s} \delta_{r,e}e_t = e_s.$$

$$(id \otimes \epsilon)\Delta e_s = (id \otimes \epsilon)\sum\nolimits_{rt=s} e_r \otimes e_t = \sum\nolimits_{rt=s} e_r\epsilon(e_t) = \sum\nolimits_{rt=s} e_r\delta_{t,e} = e_s.$$

$$\begin{aligned}
\mu(S \otimes id)\Delta e_s &= \mu(\sum\nolimits_{rt=s} S(e_r) \otimes e_t) = \mu(\sum\nolimits_{rt=s} e_{r^{-1}} \otimes e_t)\\
&= \sum\nolimits_{rt=s} e_{r^{-1}}e_t = \sum\nolimits_{rt=s} \delta_{r^{-1},t}e_t = \sum\nolimits_{rr^{-1}=s} e_{r^{-1}} = 1_{\mathcal{F}(G)}\delta_{s,e}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(id \otimes S)\Delta e_s &= \mu(\sum\nolimits_{rt=s} e_r \otimes S(e_t)) = \mu(\sum\nolimits_{rt=s} e_r \otimes e_{t^{-1}})\\
&= \sum\nolimits_{rt=s} e_r e_{t^{-1}} = \sum\nolimits_{rt=s} \delta_{r,t^{-1}}e_{t^{-1}} = 1_{\mathcal{F}(G)}\delta_{s,e}.
\end{aligned}$$

$$\iota(\epsilon(e_s)) = \iota(\delta_{s,e}) = \delta_{s,e}1_{\mathcal{F}(G)}.$$

Dabei ist ι die sogenannte Körperwirkung: $\iota(\lambda 1_{\mathbb{K}}) := \lambda 1_{\mathcal{F}(G)}$. Die Körperwirkung ι bildet insbesondere die Eins des Körpers auf die Eins der Funktionenalgebra ab.

Aus diesen Relationen können wir die folgenden (für die Definition von Hopf-Algebren grundlegenden) Gleichungen ablesen:

Koassoziativität	$(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta,$
Koeinsbedingung	$(\epsilon \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \epsilon) \circ \Delta,$
Antipodenbedingung	$\mu \circ (S \otimes id) \circ \Delta = \mu(id \otimes S)\Delta = \iota \circ \epsilon.$

Wir sehen außerdem, daß Komultiplikation und Koeins Algebrenmorphismen sind:

$$\begin{aligned}\Delta(e_s e_t) &= \delta_{s,t}\Delta(e_t) = \delta_{s,t}\sum\nolimits_{kl=t} e_k \otimes e_l = \sum_{\substack{kl=s\\ kl=t}} e_k \otimes e_l = \sum_{\substack{ab=s\\ kl=t}} \delta_{a,k}e_k \otimes \delta_{b,l}e_l \\ &= \sum_{\substack{ab=s\\ kl=t}} e_a e_k \otimes e_b e_l = (\sum_{ab=s} e_a \otimes e_b)(\sum_{kl=t} e_k \otimes e_l) = \Delta(e_s)\Delta(e_t).\end{aligned}$$

$$\epsilon(e_s e_t) = \delta_{s,t}\epsilon(e_t) = \delta_{s,t}\delta_{t,e} = \delta_{s,e}\delta_{t,e} = \epsilon(e_s)\epsilon(e_t).$$

Die Antipode ist dagegen ein Algebrenantimorphismus:

$$S(e_s e_t) = \delta_{s,t}S(e_t) = \delta_{s,t}e_{t^{-1}} = \delta_{t^{-1},s^{-1}}e_{s^{-1}} = e_{t^{-1}}e_{s^{-1}} = S(e_t)S(e_s).$$

Damit haben wir gezeigt, daß die Funktionenalgebra über einer endlichen Gruppe G (neben den Algebrenstrukturen) weitere kanonische Abbildungen besitzt. Die Algebrenstruktur und diese Zusatzstrukturen ergeben gerade eine Hopf-Algebra, die wir in Kürze exakt definieren werden. Natürlich ist die Funktionenalgebra wegen ihrer Kommutativität eine spezielle Algebra (und damit auch eine spezielle Hopf-Algebra). Es gibt Theoreme, welche wir nicht beweisen und nicht benötigen werden, die besagen, daß (im wesentlichen) alle kommutativen Hopf-Algebren von der Form „Funktionenalgebra über einer Gruppe“sind. Auf einen weiteren Punkt wollen wir aufmerksam machen: Wir haben die Gruppe G nicht als abelsch vorausgesetzt. Falls die Gruppe G jedoch abelsch ist, so folgt, daß die Komultiplikation von einer speziellen Form ist. Man darf dann nämlich die Faktoren im Tensorprodukt vertauschen:

$$\Delta(e_s) = \sum\nolimits_{rt=s} e_r \otimes e_t = \sum\nolimits_{rt=s} e_t \otimes e_r.$$

Man nennt die Komultiplikation in diesem Fall kokommutativ.

2.1.3 Gruppenalgebra $\mathbb{K}G$

Betrachten wir wiederum eine endliche Gruppe G. Die Wirkung der Gruppe auf einen Vektorraum, wie sie durch (2.1) definiert wird, ist bezüglich der Gruppe nicht linear (da die Gruppe eben kein linearer Raum ist). Man kann aber sofort daraus eine bilineare Wirkung konstruieren, indem man die Gruppe zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum auf die folgende Weise erweitert: Man bildet die Algebra, deren Basiselemente gerade die Elemente der Gruppe G sind. Die Multiplikation ist durch die Multiplikation der Basiselemente natürlich festgelegt. Die Eins der Algebra wird duch das neutrale Element der Gruppe gegeben. Diese Algebra, deren Elemente nun i.a. nicht mehr invertierbar sind, heißt die Gruppenalgebra der Gruppe G und wird mit $\mathbb{K}G$ bezeichnet. Diese Gruppenalgebra besitzt nun neben den Strukturabbildungen der Algebra noch weitere kanonische Abbildungen:

Komultiplikation	$\Delta : \mathbb{K}G \longrightarrow \mathbb{K}G \otimes \mathbb{K}G,$	$g \longmapsto \Delta(g) := g \otimes g,$
Koeins	$\epsilon : \mathbb{K}G \longrightarrow \mathbb{K},$	$g \longmapsto \epsilon(g) := 1_{\mathbb{K}},$
Antipode	$S : \mathbb{K}G \longrightarrow \mathbb{K}G,$	$g \longmapsto S(g) := g^{-1}.$

Die Antipode S wird dabei als Algebrenantimorphismus, die Komultiplikation und Koeins ϵ als Algebrenmorphismus auf den Basiselementen definiert und linear auf die ganze Gruppenalgebra fortgesetzt. Wie man sich leicht überzeugt, genügen die linearen Abbildungen Δ, S, ϵ wieder den Gleichungen, die wir für die Funktionenalgebra über der Gruppe G gefunden haben, d.h. es gilt Koassoziativität, Koeins- und Antipodenbedingung. Die Komultiplikation Δ hat auf den Basiselementen (also auf den Elementen der Gruppe G) eine sehr spezielle Form mit $\Delta(g) = g \otimes g$. Elemente, bezüglich derer die Komultiplikation diese Form besitzt, nennt man gruppenartig.

Auch die Gruppenalgebra besitzt somit die Struktur einer Hopf-Algebra. Umgekehrt kann man in einer beliebigen Hopf-Algebra H nach den gruppenartigen Elementen suchen. Ist $g \in H$ gruppenartig, so folgt aus der Koeinsbedingung

$$(\epsilon \otimes id)(\Delta g) = \epsilon(g) g = g$$

und somit $\epsilon(g) = 1_{\mathbb{K}}$. Daraus ergibt sich mit der Antipodenbedingung

$$g \cdot S(g) = S(g) \cdot g = \iota(\epsilon(g)) = 1_H.$$

g ist deshalb invertierbar und hat die Inverse $g^{-1} = S(g)$. Zudem ist $\Delta(g^{-1}) = g^{-1} \otimes g^{-1}$. Die gruppenartigen Elemente aus H bilden somit eine Untergruppe der invertierbaren Elemente aus H. Ist $H = \mathbb{K}G$, so sind die gruppenartigen Elemente gerade die Gruppe G.

In (2.2) hatten wir gesehen, daß die Wirkung der Gruppe auf einen Raum X einen Automorphismus auf $\mathcal{F}(X)$ induziert. Man kann diese Wirkung nun durch lineare Fortsetzung zu einer linearen Abbildung der Form

$$\mathbb{K}G \otimes \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(X)$$

erweitern.

Wir haben somit gesehen, daß man aus einer (endlichen) Gruppe zwei Algebren konstruieren kann, von denen die eine, die Gruppenalgebra, eine Linearisierung der Gruppe darstellt, während die andere, die Funktionenalgebra, sich durch „Hochhebung “auf die Funktionenstufe ergibt. Beide Algebren besitzen aber weitere Strukturabbildungen: die Komultiplikation Δ, die Koeins ϵ und die Antipode S. Es ist nun naheliegend zu „vergessen“, auf welche Art man zu diesen Strukturen gekommen ist, stattdessen Räumen, die solche Strukturen tragen, einen eigenen Namen zu geben und deren Eigenschaften etwas abstrakter zu studieren. Wir werden allerdings immer wieder auf die oben eingeführten Spezialfälle von Gruppenalgebra und insbesondere der Funktionenalgebra eingehen. Wir hatten bereits angemerkt, daß diese speziellen Algebren spezielle Eigenschaften besitzen. Die Funktionenalgebra ist kommutativ, während die Komultiplikation der Gruppenalgebra symmetrisch und damit kokommutativ ist. Kommutativität und Kokommutativität lassen sich mit der sogenannten Flipabbildung, welche die Faktoren im Tensorprodukt vertauscht, schreiben:

Flipabbildung	$\tau : H \otimes H \longrightarrow H \otimes H, \;\; a \otimes b \longmapsto b \otimes a,$
Kommutativität	$\mu \circ \tau = \mu,$
Kokommutativität	$\tau \circ \Delta = \Delta.$

Bevor wir in Abschnitt 2.2 die abstrakte Definition einer Hopf-Algebra geben, wollen wir zuerst noch zeigen, daß auch auf der Lie-Algebren-Stufe kanonisch eine Hopf-Algebra gefunden werden kann.

2.1.4 Die Universelle Einhüllende einer Lie-Algebra

Sei $\mathcal{G}$ eine Lie-Algebra. Dann definiert man die Universelle Einhüllende $U(\mathcal{G})$ der Lie-Algebra $\mathcal{G}$ als die von $1_{\mathbb{K}}$ und den Elementen der Lie-Algebra erzeugte Algebra mit den zusätzlichen Relationen

$$[\eta, \xi] := \eta\xi - \xi\eta, \;\; \forall \eta, \xi \in \mathcal{G}.$$

Auf dieser Algebra lassen sich wiederum Abbildungen Δ, ϵ, S definieren, welche die Eigenschaften der entsprechenden Abbildungen auf der Funktionen- und der Gruppenalgebra besitzen ($\eta \in \mathcal{G}$):

Komultiplikation	$\Delta(\eta) := 1 \otimes \eta + \eta \otimes 1,$
Koeins	$\epsilon(\eta) := 0,$
Antipode	$S(\eta) := -\eta.$

Δ, ϵ werden dabei als Algebrenmorphismen und S als Algebrenantimorphismus linear fortgesetzt. Man kann nun leicht nachprüfen, daß auch hier Koassoziativität, Koeins- und Antipodenbedingung gelten. Elemente aus $U(\mathcal{G})$, für welche die Komultiplikation von der Form $\Delta(\eta) := 1 \otimes \eta + \eta \otimes 1$ ist, heißen primitive Elemente. Ähnlich wie im Fall der Gruppenalgebra kann man in einer beliebigen Hopf-Algebra nach primitiven Elementen suchen. Diese bilden eine Lie-Algebra. Im Fall der Universellen Einhüllenden einer Lie-Algebra $U(\mathcal{G})$ besteht die Menge der primitiven Elemente gerade aus $\mathcal{G}$. Wir haben hier die Universelle Einhüllende relativ kurz behandelt, werden aber im Zusammenhang mit Hopf-Idealen auf sie zurückkommen. Es wird sich zeigen, daß man die Universelle Einhüllende durch Quotientenbildung aus der Tensoralgebra über $\mathcal{G}$ erhalten kann. Außerdem werden wir uns mit der Interpretation der primitiven Elemente in Zusammenhang mit Wirkungen (Abschnitt 2.4) ausführlicher beschäftigen.

2.2 Hopf-Algebren

2.2.1 Definition von Hopf-Algebren

Nachdem wir gesehen haben, daß man einer endlichen Gruppe zwei Algebren mit gewissen Zusatzstrukturen zuordnen kann und sich auch jeder Lie-Algebra durch die Universelle Einhüllende die gleichen Strukturen assoziieren lassen, wollen wir nun die Eigenschaften solcher Algebren abstrakter studieren, d.h. losgelöst von den Gruppenbeispielen, auf die wir aber immer wieder zurückkommen werden. Dazu definieren wir zunächst den Begriff der Hopf-Algebra.

Definition 1*: Hopf-Algebra H*
Eine Hopf-Algebra H besteht aus einem Vektorraum mit den folgenden linearen Strukturabbildungen:

Multiplikation	$\mu: \; H \otimes H \longrightarrow H,$	$g \otimes h \longmapsto \mu(g \otimes h) = g \cdot h \equiv gh,$
Körperwirkung	$\iota: \; \mathbb{K} \longrightarrow H,$	$\lambda \longmapsto \iota(\lambda), \; \iota(\lambda)(g) := \lambda g, \; g \in H,$

Komultiplikation $\Delta: H \longrightarrow H \otimes H, \quad h \longmapsto \Delta(h) = \sum_i (h_1)_i \otimes (h_2)_i$

Koeins $\epsilon: H \longrightarrow \mathbb{K}, \quad h \longmapsto \epsilon(h),$

Antipode $S: H \longrightarrow H, \quad h \longmapsto S(h).$

Die Antipode muß die Antipodenbedingung erfüllen:

$$\mu \circ (S \otimes id) \circ \Delta = \mu \circ (id \otimes S) \circ \Delta = \iota \circ \epsilon. \tag{2.6}$$

Insbesondere bildet die Körperwirkung die Eins des Körpers auf die Eins der Hopf-Algebra ab. Die Komultiplikation muß koassoziativ sein. Koassoziativ bedeutet hierbei, daß

$$(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta. \tag{2.7}$$

Die Koeins muß zusammen mit der Komultiplikation der sogenannten Koeinsbedingung genügen:

$$(\epsilon \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \epsilon) \circ \Delta = id. \tag{2.8}$$

(μ, ι) definieren eine Algebren-, (Δ, ϵ) eine Koalgebrenstruktur. Die Strukturen müssen miteinander verträglich sein. Eine miteinander verträgliche Algebren- und Koalgebrenstruktur (Komultiplikation und Koeins müssen Algebrenmorphismen und daraus folgend Multiplikation und Körperwirkung Koalgebrenmorphismen sein) wird eine Bialgebra genannt. Die Antipode ist ein Algebren-Antimorphismus , d.h

$$S(ab) = S(b)S(a). \tag{2.9}$$

Die Antipode ist eindeutig. Manche Autoren verlangen außerdem, daß die Antipode bijektiv ist. Wir werden dies nicht voraussetzen. Eine Hopf-Algebra heißt kokommutativ, falls sie symmetrisch bezüglich der Vertauschung der Faktoren des Tensorproduktes ist:

$$\tau \circ \Delta = \Delta, \text{ mit } \tau(a \otimes b) = b \otimes a. \tag{2.10}$$

Multiplikation und Körperwirkung statten also H mit der Struktur einer unitalen Algebra aus. Komultiplikation und Koeins sind Abbildungen, die eine Koalgebra charakterisieren. Nimmt man Algebren- und Koalgebrenstrukturen zusammen und unterwirft sie noch Verträglichkeitsbedingungen, so ergibt sich die Bialgebra. Besitzt diese Bialgebra zusätzlich eine Antipode, so spricht man von einer Hopf-Algebra. Auf nichtunitale Hopf-Algebren (also Hopf-Algebren, die keine Eins besitzen) werden wir in Kapitel 3 eingehen.

Bevor wir die einzelnen Strukturabbildungen einer Hopf-Algebra weiter diskutieren, wollen wir noch kurz die verschiedenen Morphismen definieren, die wir immer wieder benötigen werden.

Definition 2: ***Algebren-, Koalgebren- und Bialgebrenmorphismen***

Seien $(A, \mu_A, 1_A)$, $(B, \mu_B, 1_B)$ *Algebren.* Φ *ist ein unitaler Algebrenmorphismus, falls*

$$\Phi \circ \mu_A = \mu_B \circ (\Phi \otimes \Phi),$$
$$1_B = \Phi(1_A).$$

Seien $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$, $(D, \Delta_D, \epsilon_D)$ *Koalgebren. Ein Koalgebrenmorphismus* Ψ *erfüllt:*

$$(\Psi \otimes \Psi) \circ \Delta_C = \Delta_D \circ \Psi,$$
$$\epsilon_D \circ \Psi = \epsilon_C.$$

Ein Bialgebrenmorphismus ist eine Abbildung, die sowohl ein Algebren- als auch ein Koalgebrenmorphismus ist. Kurz gesagt: Algebren- und Koalgebrenmorphismen müssen die jeweiligen Strukturen eines Raumes respektieren.

Strukturabbildungen der Hopf-Algebra werden üblicherweise in kommutativen Diagrammmen dargestellt. Die Verwendung von solchen Diagrammen um die Eigenschaften von Abbildungen zu beschreiben, ist aus der Kategorientheorie entlehnt. Insbesondere werden wir sehen, daß die Eigenschaften einer Koalgebra sich gerade dadurch ergeben, daß man in den kommutativen Diagrammen für die Algebra die Pfeilrichtungen herumdreht. Dies nennt man „Dualisieren“. Nimmt man eine Hopf-Algebra und betrachtet die Diagramme, so sieht man, daß man durch das Dualisieren gerade wieder die gleichen Diagramme bekommt. In diesem Sinne ist eine Hopf-Algebra selbstdual. Gerade diese Eigenschaft wird von einigen Autoren als eine der wichtigsten Charakteristiken von Hopf-Algebren überhaupt angesehen (z.B. Majid: Prinzip der Repräsentationstheoretischen Selbstdualität). Die Selbstdualität läßt sich konkret durch die Betrachtung von Hopf-Algebra und dualer Hopf-Algebra realisieren (siehe Unterabschnitt 2.2.3). Wir betrachten die einzelnen Strukturabbildungen nun im Detail.

Eigenschaften der Multiplikation:

Die Multiplikation wird als assoziativ vorausgesetzt und ist im allgemeinen nicht kommutativ. Wir haben die Multiplikation als lineare Abbildung definiert. Die gebräuchliche Form der Multiplikation ist eigentlich die einer bilinearen Abbildung $\cdot : A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$. Der bilinearen Abbildung kann man jedoch immer (wie bereits angesprochen), per universeller Eigenschaft des Tensorproduktes, eine lineare Abbildung zuordnen. Die Assoziativität läßt sich mit einem kommutativen Diagramm folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \otimes H \arrow[r, "\mu\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes\mu"'] & H \otimes H \arrow[d, "\mu"] \\ H \otimes H \arrow[r, "\mu"'] & H \end{tikzcd}$$

Abbildung 2.2: Assoziativität der Multiplikation

Eigenschaften der Körperwirkung:

Durch ι wird die Wirkung des Körpers $\mathbb{K}$ auf den Raum H realisiert. Das Bild der Körperwirkung, die wir auch oftmals etwas unpräzise als Eins bezeichnen (da sie die Eins des Körpers auf die Eins der Algebra abbildet), liegt im Zentrum der Algebra. Die Eigenschaften der Eins lassen sich in Diagrammform schreiben als:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}\otimes H \arrow[r, "\iota\otimes id"] \arrow[dr, "\cong"'] & H\otimes H \arrow[d, "\mu"'] & H\otimes\mathbb{K} \arrow[l, "id\otimes\iota"'] \arrow[dl, "\cong"] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 2.3: Körperwirkung

Eigenschaften der Komultiplikation:

Die Komultiplikation Δ ist eine Abbildung

$$\Delta:\ H \longrightarrow H\otimes H, \qquad h \longmapsto \sum_i h_{1i}\otimes h_{2i} \equiv h_1\otimes h_2.$$

Die Komultiplikation spaltet Elemente aus H in eine Summe über zerlegbare Elemente aus $H\otimes H$ auf. Für diese Summe wird die *Abkürzung* $h_1\otimes h_2$ geschrieben. Diese Notation wird „Sweedler-Notation“ genannt. In der gesamten Arbeit stehen solche numerierten Ausdrücke wie $h_1\otimes h_2$ <u>immer</u> als Abkürzung im obigen Sinne. Als zusätzliche Eigenschaft fordert man, daß die Komultiplikation koassoziativ ist:

$$(\Delta\otimes id)\circ\Delta = (id\otimes\Delta)\circ\Delta. \tag{2.11}$$

Das Diagramm für die Koassoziativität ergibt sich formal aus dem Diagramm für die Assoziativität der Multiplikation durch Pfeilumdrehen:

$$\begin{tikzcd}
H\otimes H\otimes H & H\otimes H \arrow[l, "\Delta\otimes id"'] \\
H\otimes H \arrow[u, "id\otimes\Delta"] & H \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

Abbildung 2.4: Koassoziativität der Komultiplikation

Eigenschaften der Koeins:

Die Eigenschaften der Koeins ergeben sich durch Pfeilumdrehen im Diagramm für die Eins:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}\otimes H & H\otimes H \arrow[l, "\epsilon\otimes id"'] \arrow[r, "id\otimes\epsilon"] & H\otimes\mathbb{K} \\
& H \arrow[ul, "\cong"] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 2.5: Koeinsbedingung

Abschließend wollen wir konkret die Koassoziativität und die Koeinsbedingung nochmals durch Anwendung auf ein Element h der Hopf-Algebra berechnen:

$$(\Delta \otimes id)(\Delta h) = (\Delta \otimes id)(h_1 \otimes h_2) = (h_1)_1 \otimes (h_1)_2 \otimes h_2,$$
$$(id \otimes \Delta)(\Delta h) = (id \otimes \Delta)(h_1 \otimes h_2) = h_1 \otimes (h_2)_1 \otimes (h_2)_2.$$

Die Koassoziativität besagt dann gerade, daß:

$$(h_1)_1 \otimes (h_1)_2 \otimes h_2 = h_1 \otimes (h_2)_1 \otimes (h_2)_2. \tag{2.12}$$

Es ist also egal, welchen Faktor des Koproduktes man nochmals komultipliziert. Deswegen kann man für beide Seiten der Gleichung (2.12) einfach $h_1 \otimes h_2 \otimes h_3$ als Abkürzung verwenden. Die Koeinsbedingung schreibt sich als:

$$(\epsilon \otimes id)(\Delta h) = (\epsilon \otimes id)(h_1 \otimes h_2) = \epsilon(h_1)h_2 = h.$$
$$(id \otimes \epsilon)(\Delta h) = (id \otimes \epsilon)(h_1 \otimes h_2) = h_1\epsilon(h_2) = h.$$

Eigenschaften der Antipode S:

Im kommutativen Diagramm lautet die Antipodenbedingung

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[d, "id\otimes S"'] & H \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\iota\circ\epsilon"] & H \otimes H \arrow[d, "S\otimes id"] \\
H \otimes H \arrow[r, "\mu"] & H & H \otimes H \arrow[l, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

Abbildung 2.6: Antipodenbedingung

Ist $\Delta(h) = h_1 \otimes h_2$, so besagt die Antipodenbedingung gerade

$$\epsilon(h)1_H = h_1 S(h_2) = S(h_1)h_2.$$

Wir wollen uns die Antipodenbedingung etwas genauer ansehen: Sei $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ eine Koalgebra und (A, μ_A, ι_A) eine Algebra. Mit $Hom(C, A)$ sei der Raum der $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen von C nach A bezeichnet. Dieser Raum besitzt eine zusätzliche Multiplikation: das Faltungsprodukt. Dieses ist definiert als eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} * : Hom(C, A) \otimes Hom(C, A) &\longrightarrow Hom(C, A), \\ F \otimes G &\longmapsto F * G, \qquad F * G := \mu_A(F \otimes G)\Delta_C. \end{aligned}$$

$$(F * G)(c) = F(c_1) \cdot G(c_2),\ \forall c \in C.$$

Das Faltungsprodukt ist assoziativ. Die Antipodenbedingung (2.6) können wir mit dem Faltungsprodukt schreiben:

$$S * id = id * S = \iota \circ \epsilon. \tag{2.13}$$

Welche Bedeutung hat $\iota \circ \epsilon$ für eine Hopf-Algebra H? Dazu betrachten wir das folgende Faltungsprodukt:

$$\begin{aligned}(S * (\iota \circ \epsilon))(h) &= \mu(S \otimes (\iota \circ \epsilon))(h_1 \otimes h_2) \\ &= S(h_1) \cdot \iota(\epsilon h_2) \\ &= S(h_1 \epsilon h_2) \cdot \iota(1_{\mathbb{K}}) \\ &= S(h).\end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde benutzt, daß $\epsilon(a) \in \mathbb{K}\ \forall a \in H$ gilt. In der letzten Zeile wurde die Koeinsbedingung ausgenutzt. Analog berechnet man $((\iota \circ \epsilon) * S)(h) = S(h)$. $\iota \circ \epsilon$ ist also gerade die Eins bezüglich des Faltungsproduktes. Die Antipode einer Hopf-Algebra H ist demnach die Inverse der Eins bezüglich des Faltungsproduktes. Außerdem ist sie ein Algebren- und ein Koalgebrenantimorphismus, d.h. es ist insbesondere

$$\begin{aligned}&S \circ \mu = \mu \circ \tau \circ (S \otimes S) \Longleftrightarrow S(a \cdot b) = S(b) \cdot S(a)\ \forall a, b \in H, \\ &\Delta \circ S = (S \otimes S) \circ \tau \circ \Delta.\end{aligned}$$

Ein Bialgebrenmorphismus Φ zwischen zwei Hopf-Algebren H und H' ist automatisch ein Hopf-Algebrenmorphismus, d.h. es gilt

$$\Phi \circ S = S' \circ \Phi.$$

Solche Faltungsprodukte spielen im Formalismus der Quantengruppen eine große Rolle. Aus physikalischer Sicht besonders interessant ist ihre Bedeutung für das algebraische Analogon zu den Faserbündeln. Innerhalb eines solchen sogenannten Quantenbündels werden Eichtransformationen gerade mittels eines Faltungsproduktes ausgedrückt, genauer gesagt durch Abbildungen, die bezüglich eines Faltungsproduktes invertierbar sind.

2.2.2 Tensorprodukträume

Eine Aussage, die wir gelegentlich benötigen, betrifft den Tensorproduktraum $H \otimes H$ einer Hopf-Algebra H:

Satz 1: *Der Tensorproduktraum $H \otimes H$ einer Hopf-Algebra H ist eine Hopf-Algebra.*

Deren Strukturabbildungen schreiben wir oftmals mit hochgestelltem Index $^{\otimes}$.

Beweis: Wir wollen an dieser Stelle nicht die Axiome nachprüfen, sondern nur die Strukturabbildungen angeben:

$$\mu^{\otimes} \equiv \mu_{H\otimes H} = (\mu_H \otimes \mu_H)(id \otimes \tau \otimes id) \qquad \text{Multiplikation}$$

$$\iota^{\otimes} \equiv \iota_{H\otimes H} = \iota_H \otimes \iota_H \qquad \text{Körperwirkung}$$

$$\Delta^{\otimes} \equiv \Delta_{H\otimes H} = (id \otimes \tau \otimes id)(\Delta_H \otimes \Delta_H) \qquad \text{Komultiplikation}$$

$$\epsilon^{\otimes} \equiv \epsilon_{H\otimes H} = \epsilon_H \otimes \epsilon_H \qquad \text{Koeins}$$

$$S^{\otimes} \equiv S_{H\otimes H} = S_H \otimes S_H \qquad \text{Antipode}$$

Obiger Satz gilt auch für das Tensorprodukt zweier verschiedener Hopf-Algebren. •

2.2.3 Der Dualraum einer endlichdimensionalen Hopf-Algebra

Die Axiome und definierenden Eigenschaften einer Hopf-Algebra sind selbstdual in folgendem Sinne: Kehrt man in den kommutativen Diagrammen, mit denen die Eigenschaften der Hopf-Algebren beschrieben wurden, die Pfeilrichtungen herum und vertauscht μ, ι mit Δ, ϵ, so ergeben sich wiederum die gleichen Diagramme. Diese Dualität findet in dem folgenden wichtigen Sachverhalt ihren Ausdruck: Der Dualraum einer endlichdimensionalen Hopf-Algebra besitzt kanonisch eine Hopf-Algebren-Struktur. Die Strukturabbildungen der dualen Hopf-Algebra sind dual (oder adjungiert) zu denen der ursprünglichen Hopf-Algebra. Während der Dualraum einer Koalgebra kanonisch eine Algebrenstruktur besitzt, gilt das umgekehrte nur für endlichdimensionale Algebren.

Wir benutzen folgende Notation:

$$(H, \mu, \iota, \Delta, \epsilon, S) \qquad \text{Hopf-Algebra,}$$
$$(H^*, \mu_{H^*}, \iota_{H^*}, \Delta_{H^*}, \epsilon_{H^*}, S_{H^*}) \qquad \text{duale Hopf-Algebra.}$$

Außerdem schreiben wir für $\phi \in H^*, h \in H$:

$$\phi(h) \equiv \langle \phi | h \rangle.$$

Satz 2: *Der Dualraum einer endlichdimensionalen Hopf-Algebra ist eine Hopf-Algebra mit den folgenden Strukturabbildungen (in der mittleren Spalte befinden sich die relevanten Relationen zwischen Abbildungen auf H und den dualen Abbildungen):*

$$\left.\begin{array}{lll} \mu_{H^*} \overset{id}{=} \Delta^*, & \langle \mu_{H^*}(\phi \otimes \psi) \,|\, h \rangle = \langle \phi \otimes \psi \,|\, \Delta(h) \rangle, & \text{Multiplikation}, \\ \iota_{H^*} = \epsilon^*, & \langle 1_{H^*} \,|\, h \rangle = \epsilon(h), & \text{Körperwirkung}, \\ \Delta_{H^*} \overset{id}{=} \mu^*, & \langle \Delta_{H^*}(\phi) \,|\, g \otimes h \rangle = \langle \phi \,|\, \mu(g \otimes h) \rangle, & \text{Komultiplikation}, \\ \epsilon_{H^*} = 1_H, & \epsilon_{H^*}(\phi) = \langle \phi \,|\, 1_H \rangle, & \text{Koeins}, \\ S_{H^*} = S^*, & \langle S_{H^*}(\phi) \,|\, h \rangle = \langle \phi \,|\, S(h) \rangle, & \text{Antipode}. \end{array}\right\} \quad (2.14)$$

Wir wollen diesen Satz nicht beweisen. Man muß nur durch einfaches Nachrechnen zeigen, daß die in (2.14) definierten Strukturabbildungen des dualen Raumes tatsächlich alle Eigenschaften der Strukturabbildungen einer Hopf-Algebra besitzen. Statt eines Beweises wollen wir uns kurz die einzelnen Abbildungen ansehen.

Multiplikation in H^*:

Wir haben die Identifikation $\mu_{H^*} \overset{id}{=} \Delta^*$ getroffen. Dazu benötigen wir die Abbildungen Θ und Θ^{-1}, welche wir wie folgt definieren: Sei $\{e_i\}$ eine Basis von H und $\{c^j\}$ die dazu duale Basis von H^* (d.h. $c^j(e_i) = \delta_i^j$). Wir definieren eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Theta:\ H^* \otimes H^* &\longrightarrow (H \otimes H)^*, \\ c^i \otimes c^j &\longmapsto \Theta(c^i \otimes c^j) \equiv c^{ij},\ c^{ij}(e_k \otimes e_l) = \delta_k^i \delta_l^j. \end{aligned}$$

und deren Inverse Θ^{-1}

$$\begin{aligned} \Theta^{-1}:\ (H \otimes H)^* &\longrightarrow H^* \otimes H^*, \\ c^{ij} &\longmapsto c^i \otimes c^j. \end{aligned}$$

An dieser Stelle sei angemerkt, daß im unendlichdimensionalen Fall die Abbildung Θ keinen Isomorphismus ergibt, da $H^* \otimes H^* \subset (H \otimes H)^*$. Da die duale Abbildung zur Komultiplikation auf H von der Form $(\Delta_H)^* : (H \otimes H)^* \to H^*$ ist, wird durch

$$\mu_{H^*} := (\Delta)^* \circ \Theta :\ H^* \otimes H^* \longrightarrow H^*$$

eine Multiplikation im Dualraum H^* definiert. Wir können deshalb die Identifizierung $\mu_{H^*} \overset{id}{=} (\Delta)^*$ treffen. Natürlich müßte man noch die Assoziativität der Multiplikation zeigen. Sie ist eine Folge der Koassoziativität der Komultiplikation in der Hopf-Algebra H. Die Multiplikation μ_{H^*} ist der Spezialfall eines Faltungsproduktes. Wir sehen dies, indem wir die folgende Gleichung betrachten (mit der Notation $\langle \alpha \,|\, c \rangle \equiv \alpha(c)$, $\alpha \in H^*$, $c \in H$):

$$\langle \mu_{H^*}(\alpha \otimes \beta) \,|\, c \rangle = \langle \alpha \otimes \beta \,|\, \Delta(c) \rangle = \langle \alpha \otimes \beta \,|\, c_1 \otimes c_2 \rangle \equiv \alpha(c_1)\beta(c_2).$$

Das Faltungsprodukt lautet in diesem Fall:

$$\begin{aligned} * \equiv \mu_{H^*}: \quad Hom(H,\mathbb{K}) \otimes Hom(H,\mathbb{K}) &\longrightarrow Hom(H,\mathbb{K}), \\ \alpha \otimes \beta &\longmapsto \alpha * \beta := \mu_{\mathbb{K}} \circ (\alpha \otimes \beta) \circ \Delta. \end{aligned}$$

Körperwirkung auf H^*:

Wir wenden uns nun der Körperwirkung auf H^* zu. Dazu betrachten wir auf H die Koeins $\epsilon : H \to \mathbb{K}$ und ihre duale Abbildung $(\epsilon)^* : \mathbb{K}^* \stackrel{id}{=} \mathbb{K} \longrightarrow H^*$. ϵ ist offensichtlich ein Element von H^*. Wir setzen für die Körperwirkung auf H^*:

$$\iota_{H^*} := (\epsilon)^* : \mathbb{K} \longrightarrow H^*.$$

Wir wollen uns noch kurz überlegen, was eigentlich die Eins der Algebra H^* ist. Dazu betrachten wir für $\lambda \in \mathbb{K}, c \in H$:

$$(\iota_{H^*}(\lambda))(c) = \langle (\epsilon)^*(\lambda) \,|\, c \rangle = \langle \lambda \,|\, \epsilon(c) \rangle = \lambda \epsilon(c).$$

Die Eins der Algebra H^* bekommen wir, indem wir in obiger Gleichung $\lambda = 1_{\mathbb{K}}$ setzen. Es zeigt sich, daß die Eins des Dualraumes H^* gerade gleich der Koeins von H ist:

$$\iota_{H^*}(1_{\mathbb{K}}) = 1_{H^*} = \epsilon.$$

Bemerkung 1: *Damit haben wir gezeigt, daß aus der Koalgebrenstruktur von H eine Algebrenstruktur auf H^* folgt. An keiner Stelle wurde dabei benutzt, daß H endlichdimensional ist. Somit gilt allgemein, daß der Dualraum einer Koalgebra eine Algebra mit Eins ist.*

Komultiplikation in H^*:

Um die Komultiplikation in H^* zu definieren, benötigen wir die Abbildung Θ^{-1}. Θ ist jedoch nur im endlichdimensionalen Fall ein Isomorphismus, d.h. nur dann existiert i.a. die inverse Abbildung Θ^{-1}. Deswegen muß man sich auf endliche Dimensionen von H beschränken.

Die Multiplikation und ihre duale Abbildung sind:

$$\begin{aligned} \mu: &\quad H \otimes H \longrightarrow H, \\ (\mu)^*: &\quad H^* \longrightarrow (H \otimes H)^*. \end{aligned}$$

Die Komultiplikation auf H^* sollte eine Abbildung folgender Form sein:

$$\Delta_{H^*}: \quad H^* \longrightarrow H^* \otimes H^*.$$

Wir definieren deshalb für die Komultiplikation auf H^*:

$$\Delta_{H^*} := \Theta^{-1} \circ (\mu)^*.$$

Da Θ^{-1} im endlichdimensionalen Fall ein Isomorphismus ist, kann die Identifizierung $\Delta_{H^*} \overset{id}{=} (\mu)^*$ getroffen werden. Wir schreiben (mit $\alpha \in H^*;\ a, b \in H$):

$$\langle \alpha \,|\, \mu(a \otimes b) \rangle = \langle \Delta_{H^*}(\alpha) \,|\, a \otimes b \rangle.$$

Koeins in H^*:

Um die Koeins auf H^* festzulegen, betrachten wir die Körperwirkung auf H und die entsprechende duale Abbildung:

$$\begin{aligned} \iota: \quad & \mathbb{K} \longrightarrow H, \\ (\iota)^*: \quad & H^* \longrightarrow \mathbb{K}^* \overset{id}{=} \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Die Koeins des Dualraumes von H wird definiert als:

$$\epsilon_{H^*} := (\iota)^*.$$

Auch hier wollen wir uns anschauen, welche Bedeutung die Koeins des Dualraumes hat: ϵ_{H^*} ist offensichtlich ein Element des Bidualraumes (den wir hier mit dem Ausgangsraum kanonisch identifizieren können). Wir schreiben (mit $\lambda \in \mathbb{K}, \alpha \in H^*$):

$$\langle \alpha \,|\, \iota(\lambda) \rangle = \langle \epsilon_{H^*}(\alpha) \,|\, \lambda \rangle.$$

Wird $\lambda = 1$ gesetzt, so ergibt sich daraus:

$$\epsilon_{H^*}(\alpha) = \langle \alpha \,|\, 1_H \rangle.$$

Die Koeins des Dualraumes H^* kann also mit der Eins der Ausgangsalgebra H identifiziert werden.

Bemerkung 2: *Wir sehen aus diesen Betrachtungen, daß der Dualraum einer Algebra eine natürliche Koalgebrenstruktur hat. Dies gilt allerdings nur für endliche Dimensionen.*

Antipode in H^*:

Die Antipode in H^* ist einfach die duale Abbildung von S. S_{H^*} muß der Antipodenbedingung $\mu_{H^*} \circ (S_{H^*} \otimes id_{H^*}) \circ \Delta_{H^*} = \iota_{H^*} \circ \epsilon_{H^*}$ genügen. Wir wollen dies kurz überprüfen um mit dem Formalismus ein wenig Übung zu bekommen ($\Delta_{H^*} \equiv \partial$):

$$\begin{aligned} & \langle (\mu_{H^*} \circ (S_{H^*} \otimes id_{H^*}) \circ \partial)(\phi) \,|\, h \rangle \\ = {} & \langle \mu_{H^*}(S_{H^*}(\phi_1) \otimes \phi_2) \,|\, h \rangle = \langle S_{H^*}(\phi_1) \otimes \phi_2 \,|\, h_1 \otimes h_2 \rangle \\ = {} & \langle \phi_1 \otimes \phi_2 \,|\, S(h_1) \otimes h_2 \rangle = \langle \partial\phi \,|\, S(h_1) \otimes h_2 \rangle \\ = {} & \langle \phi \,|\, (Sh_1) \cdot h_2 \rangle = \langle \phi \,|\, (\mu \circ (S \otimes id) \circ \Delta)(h) \rangle \\ = {} & \langle \phi \,|\, (\iota \circ \epsilon)(h) \rangle = \langle \phi \,|\, \iota(1_{\mathbb{K}}) \rangle \epsilon(h) \\ = {} & \epsilon_{H^*}(\phi)\epsilon(h) = \langle \epsilon_{H^*}(\phi) \,|\, \epsilon(h) \rangle \\ = {} & \langle \iota_{H^*}\epsilon_{H^*}(\phi) \,|\, h \rangle. \end{aligned}$$

Somit ist die Antipodenbedingung erfüllt. •

Duale Hopf-Algebra in Basisschreibweise

In Kapitel 6 werden wir konkret für eine Hopf-Algebra die duale Hopf-Algebra berechnen. Dabei erweist es sich als nützlich die Strukturabbildungen auf den Basiselementen zu betrachten. Sei H eine endlichdimensionale Hopf-Algebra mit Basis $\{e_i\}$. Dann schreiben wir für die Multiplikation, die Komultiplikation und die Antipode ($\alpha_{ij}^k, \beta_{ij}^k, \lambda_{ij}^k \in \mathbb{K}$):

$$\mu_H(e_i \otimes e_j) = \lambda_{ij}^k e_k, \tag{2.15}$$
$$\Delta_H(e_i) = \alpha_i^{jk} e_j \otimes e_k, \tag{2.16}$$
$$S(e_i) = \beta_i^j e_j. \tag{2.17}$$

Für die entsprechenden Strukturabbildungen der dualen Hopf-Algebra ergibt sich dann:

$$\mu_{H^*}(c^j \otimes c^k) = \alpha_i^{jk} c^i, \tag{2.18}$$
$$\Delta_{H^*}(c^k) = \lambda_{ij}^k c^i \otimes c^j, \tag{2.19}$$
$$S_{H^*}(c^j) = \beta_i^j c^i. \tag{2.20}$$

Dabei sind die Koeffizienten λ_{ij}^k, α_i^{jk} und β_i^j in (2.15) und (2.19), in (2.16) und (2.18) sowie in (2.17) und (2.20) gleich.

Beispiel 1*: **Dualität von Funktionenalgebra $\mathcal{F}(G)$ und Gruppenalgebra $\mathbb{K}G$***

Die Funktionenalgebra $\mathcal{F}(G)$ über einer endlichen Gruppe G ist dual zur Gruppenalgebra $\mathbb{K}G$. Um dies zu sehen, muß man zunächst Elemente $\phi \in \mathcal{F}(G)$ linear auf $\mathbb{K}G$ fortsetzen. Mit den Strukturabbildungen aus den Abschnitten 2.1.3 und 2.1.2 sieht man dann z.B. leicht ($\forall \phi, \psi \in \mathcal{F}(G)$ und $g, h \in G$):

$$\langle \phi \otimes \psi | \Delta g \rangle = \langle \phi \otimes \psi | g \otimes g \rangle = \phi(g)\psi(g) \equiv \langle \phi \cdot \psi | g \rangle,$$
$$\langle \Delta\phi | g \otimes h \rangle \equiv (\Delta\phi)(g \otimes h) = \phi(gh) = \langle \phi | \mu(g \otimes h) \rangle.$$

Auch die anderen Relationen sind direkt nachzurechnen. Der Bidualraum zu $\mathbb{K}G$ ist wiederum $\mathbb{K}G$. Es sei angemerkt, daß sich im Fall einer endlichen abelschen Gruppe G die Aussage $(\mathbb{K}G)^{**} \cong \mathbb{K}G$ gerade zu Pontryagins Theorem reduziert, welches besagt, daß $\hat{\hat{G}} \cong G$, wobei $\hat{G}$ der Raum der Charaktere ist (auch Pontryagin-Dual genannt).

Zu unendlichdimensionalen Hopf-Algebren und ihren Dualräumen

Der Dualraum einer unendlichdimensionalen Hopf-Algebra H ist -wie gesagt- i.a. keine Hopf-Algebra, da $H^* \otimes H^* \subset (H \otimes H)^*$. Eine Möglichkeit mit diesem Fall umzugehen, bietet die Verwendung des sogenannten Sweedler-Duals $H^o \subset H^*$. Dieser Teilraum des

Dualraumes ist definiert als

$$H^o := \{\phi \in H^* \,|\, \Delta_{H^*} \in H^* \otimes H^*\}. \tag{2.21}$$

Da wir auch später nicht mit dem Sweedler-Dualen rechnen, sei an dieser Stelle nur darauf hingewiesen, daß $(H^o, \mu_{H^*}, \iota_{H^*}, \Delta_{H^*}, \epsilon_{H^*}, S_{H^*})$ eine Hopf-Algebra ist. Diese Hopf-Algebra ist aber oftmals zu klein um von Nutzen zu sein. Eine andere Strategie ist die Einführung dualer Paarungen von Hopf-Algebren. Dazu definieren wir:

Definition 3*: Duale Hopf-Algebren-Paarungen*
Zwei Hopf-Algebren H und H' heißen ein duales Paar, falls ihre Elemente die Gleichungen aus (2.14) erfüllen und falls die Paarung nichtdegeneriert ist, d.h. falls für $\phi \in H'$, $h \in H$ aus

$$\langle \phi \,|\, h \rangle = 0 \;\forall h \Rightarrow \phi = 0,$$
$$\langle \phi \,|\, h \rangle = 0 \;\forall \phi \Rightarrow h = 0.$$

Die Nichtdegeneriertheit bedeutet, daß der Kern der Abbildungen $\langle\ | : H' \to H^*$ und $|\ \rangle : H \to H'^*$ Null ist, d.h. diese Abbildungen sind injektiv. Die Nichtdegeneriertheit erlaubt die folgenden Inklusionen:

$$H' \subseteq H^*, \;\; H \subseteq {H'}^*.$$

Im endlichdimensionalen Fall bedeutet dies gerade, daß $H' = H^*$ und $H = H^{**}$.

2.2.4 Ideale von Hopf-Algebren

In der Mathematik und damit natürlich auch in der Theoretischen Physik ist es häufig sinnvoll und nützlich Quotientenräume zu betrachten. Um Quotienten-Hopf-Algebren zu definieren, müssen wir zuerst den Begriff des Ideals einer Hopf-Algebra einführen. Er ist gerade so konstruiert, daß die Division einer Hopf-Algebra mit einem ihrer Ideale wiederum eine Hopf-Algebra ergibt. Wir werden später sehen, daß die Quotientenbildung eine Möglichkeit darstellt, um aus unendlichdimensionalen Hopf-Algebren endlichdimensionale zu erzeugen.

Definition 4*: Hopf-Ideal*
Ein Hopf-Ideal einer Hopf-Algebra H ist ein beidseitiges Ideal I, d.h. $H \cdot I \subseteq I$ und $I \cdot H \subseteq I$. Zudem müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

$$\Delta(I) \subseteq I \otimes H + H \otimes I, \quad \epsilon(I) = 0, \quad S(I) \subseteq I. \tag{2.22}$$

Die beiden ersten Bedingungen definieren ein Koideal. Alle obigen Bedingungen zusammen garantieren, daß der Quotient aus der Hopf-Algebra H mit dem Ideal I wiederum eine wohldefinierte Hopf-Algebra ist. Wir wollen kurz erläutern, wie man zu den Bedingungen kommt. Wir nehmen an, daß

$$\Delta(h) := h_1 \otimes h_2, \quad \epsilon(h) := \lambda, \quad S(h) := \tilde{h}.$$

Der Äquivalenzklassen im Quotienten H/I werden mit $[h]$ oder $h + I$ geschrieben. Wir benutzen für die Strukturabbildungen auf dem Quotienten H/I die gleichen Bezeichnungen wie auf H. Dann muß für die Komultiplikation gelten:

$$\Delta(h+I) = (h_1 + I) \otimes (h_2 + I) = h_1 \otimes h_2 + h_1 \otimes I + I \otimes h_2 + I \otimes I \stackrel{!}{=} \Delta(h) + \Delta(I)$$
$$\Rightarrow \Delta I \subseteq H \otimes I + I \otimes H.$$

Die Koeins bildet die gesamte Äquivalenzklasse $[h]$ auf λ ab. Deshalb ist

$$\epsilon(h+I) = \epsilon(h) + \epsilon(I) = \lambda + \epsilon(I) \Rightarrow \epsilon(I) = 0.$$

Die Forderung nach Wohldefiniertheit der Antipode ergibt

$$S(h+I) = S(h) + S(I) = \tilde{h} + S(I) \Rightarrow S(I) \subseteq I.$$

Betrachten wir zur Illustration, wie sich durch Quotientenbildung die Universelle Einhüllende einer Lie-Algebra aus der Tensorproduktalgebra ergibt.

Beispiel 2*: Tensoralgebra und Universelle Einhüllende*

Die Bedeutung der Tensoralgebra als Hopf-Algebra liegt darin begründet, daß viele wichtige Hopf-Algebren ein Quotient aus der Tensoralgebra mit einem Hopf-Ideal sind. Dies gilt insbesondere für die bereits in 2.1.4 vorgestellte Universelle Einhüllende einer Lie-Algebra. Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, so kann man über ihm die Tensoralgebra $T(V)$ bilden. Diese ist eine Algebra, die von der $1_{\mathbb{K}}$ und den Elementen aus V erzeugt wird. Als Vektorraum ist

$$T(V) = \mathbb{K} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \ldots$$

Ein Element dieser Tensoralgebra ist eine Linearkombination von endlichen Ketten aus dem Vektorraum V. Die Multiplikation ist einfach die Verknüpfung solcher Ketten. Die Verknüpfung selbst ist das Tensorprodukt $\otimes$ (sind z.B. $u, v \in V$ dann ist das Produkt $u \cdot v \equiv uv \equiv u \otimes v \in V \otimes V$). Die Tensoralgebra ist i.a. nichtkommutativ. Ist nun $V = \mathcal{G}$ eine Lie-Algebra mit der Klammer $[\,,\,]_{\mathcal{G}}$, dann wird die Tensoralgebra $T(\mathcal{G})$ von den Elementen aus $\mathcal{G}$ erzeugt und die Hopf-Algebrenstruktur ist formal wie bei der Universellen Einhüllenden definiert ($\eta \in \mathcal{G}$):

Komultiplikation	$\Delta(\eta) := 1 \otimes \eta + \eta \otimes 1,$
Koeins	$\epsilon(\eta) := 0,$
Antipode	$S(\eta) := -\eta.$

Dabei werden die Strukturabbildungen Δ, ϵ als Algebrenmorphismen, die Antipode S als Algebrenantimorphismus auf ganz $T(\mathcal{G})$ fortgesetzt. Aufgrund der obigen Form der Komultiplikation ist $T(\mathcal{G})$ eine kokommutative Hopf-Algebra (das gilt natürlich auch für einen beliebigen Vektorraum V und dessen Tensoralgebra $T(V)$). Man sieht dies, indem man die Komultiplikation auf Produkten betrachtet ($\eta, \xi \in \mathcal{G}$):

$$\begin{aligned} & \Delta(\eta) = 1 \otimes \eta + \eta \otimes 1, \qquad\qquad \Delta(\xi) = 1 \otimes \xi + \xi \otimes 1. \\ \Rightarrow \quad & \Delta(\eta\xi) = \eta\xi \otimes 1 + 1 \otimes \eta\xi + \xi \otimes \eta + \eta \otimes \xi. \end{aligned}$$

In dieser Hopf-Algebra sind genau die Lie-Algebren-Elemente primitive Elemente (siehe Unterabschnitt 2.1.4). Aus der letzten Gleichung sieht man sofort, daß die primitiven Elemente eine Lie-Algebra bilden, da

$$\Delta([\eta, \xi]) = \eta\xi \otimes 1 + 1 \otimes \eta\xi - \xi\eta \otimes 1 - 1 \otimes \xi\eta = [\eta, \xi] \otimes 1 + 1 \otimes [\eta, \xi].$$

Die Universelle Einhüllende $U(\mathcal{G})$ der Lie-Algebra $\mathcal{G}$ wird nun als der Quotient $T(\mathcal{G})/I$ definiert, wobei I das von den Elementen der Form $\eta\xi - \xi\eta - [\eta, \xi]_{\mathcal{G}}$ erzeugte beidseitige Hopf-Ideal in $T(\mathcal{G})$ ist. Die Universelle Einhüllende ist (wie jede assoziative Algebra) mit dem üblichen Kommutator kanonisch auch eine Lie-Algebra. Die Wahl des Ideals I führt dazu, daß diese kanonische Lie-Algebrenstruktur für die Elemente aus $\mathcal{G} \subset U(\mathcal{G})$ mit der ursprünglichen Lie-Algebrenstruktur auf $\mathcal{G}$ übereinstimmt, d.h. $[\eta, \xi] = [\eta, \xi]_{\mathcal{G}}$.

Wir wollen noch ein paar Worte zur Struktur der Universellen Einhüllenden aus Sicht der Kategorientheorie verlieren: Bezeichnet $j : \mathcal{G} \to U(\mathcal{G})$ den injektiven Lie-Algebrenmorphismus, der die Einbettung von $\mathcal{G}$ in $U(\mathcal{G})$ beschreibt, und ist A eine beliebige unitale assoziative Algebra (mit der kanonischen Kommutator-Lie-Algebrenstruktur) dann gilt:

***Universelle Eigenschaft von** $U(\mathcal{G})$**:** Ist $\psi : \mathcal{G} \to A$ ein Lie-Algebrenmorphismus so existiert ein eindeutiger unitaler Algebrenmorphismus $\phi : U(\mathcal{G}) \to A$ mit $\psi = \phi \circ j$. Darüber hinaus gibt es zu jedem Lie-Algebrenmorphismus $\chi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ einen eindeutigen unitalen Algebrenmorphismus $U(\chi) : U(\mathcal{G}) \to U(\mathcal{G}')$. Kurz gesagt: U ist ein Funktor von der Kategorie der Lie-Algebren in die Kategorie der unitalen assoziativen Algebren.*

$$\begin{tikzcd} U(\mathcal{G}) \arrow[r, "\phi"] & A \\ \mathcal{G} \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Abbildung 2.7: Universelle Eigenschaft der Univers. Einhüllenden

Für ein tiefergehendes Verständnis der Universellen Einhüllenden empfiehlt sich die Lektüre von [40], für viele hier ausgelassene Beweise sei auf [22] verwiesen.

2.3 Haar-Integral

Wir wollen nun auf der algebraischen Stufe das Äquivalent zum Haar-Integral der Gruppentheorie definieren. Die Vorgehensweise ist wiederum: Zuerst drückt man die Eigenschaften des Haar-Integrals für eine Funktionenalgebra über einer Gruppe aus, dann übernimmt man diese Definition für beliebige Hopf-Algebren. Sei also G eine kompakte Gruppe, $C(G,\mathbb{K})$ die Algebra der stetigen Funktionen auf der Gruppe. Eine Rechtstranslation auf $C(G,\mathbb{K})$ ist definiert als

$$\begin{aligned} R_h : C(G,\mathbb{K}) &\longrightarrow C(G,\mathbb{K}), \\ \phi &\longmapsto R_h(\phi),\ R_h(\phi)(g) := \phi(gh). \end{aligned}$$

Ein lineares Funktional $\mathcal{J} : C(G,\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ heißt ein rechtes Haar-Integral, wenn es positiv und rechtsinvariant ist, d.h.

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}(\phi^2) > 0,\ \forall \phi \in C(G,\mathbb{K}), \phi \neq 0, \\ &\mathcal{J}(R_h\phi) = \mathcal{J}(\phi),\ \forall h \in G, \phi \in C(G,\mathbb{K}). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Betrachten wir jetzt eine endliche Gruppe G mit der Funktionenalgebra $C(G,\mathbb{K})$. Die Rechtstranslation ergibt sich zu

$$(R_h\phi)(g) = \phi(gh) = \Delta\phi(g,h) = \phi_1(g)\phi_2(h), \forall g,h \in G; \phi \in C(G,\mathbb{K}),$$

wobei die Komultiplikation auf der Funktionenalgebra über einer Gruppe benutzt wurde. Läßt man das Argument g weg, so erhält man

$$R_h\phi = \phi_1 \underbrace{\phi_2(h)}_{\in\mathbb{K}}.$$

Dies wird in Gleichung (2.23) eingesetzt:

$$(\mathcal{J} \circ R_h)(\phi) \equiv \mathcal{J}(R_h\phi) = \mathcal{J}(\phi_1)\phi_2(h) \stackrel{!}{=} \mathcal{J}(\phi).$$

Nun benutzt man die Körperwirkung $\iota(\mathcal{J}(\phi)) = \mathcal{J}(\phi)\iota(1_{\mathbb{K}})$ und $\iota(1_{\mathbb{K}})(h) = 1_{\mathbb{K}}$:

$$\Rightarrow \mathcal{J}(\phi_1)\phi_2(h) = [(\mathcal{J} \otimes id)\Delta\phi](h) \stackrel{!}{=} \mathcal{J}(\phi) = (\iota \circ \mathcal{J})(\phi)(h).$$

$$\Rightarrow ((\mathcal{J} \otimes id) \circ \Delta)(\phi) = (\iota \circ \mathcal{J})(\phi).$$

$$\Rightarrow (\mathcal{J} \otimes id) \circ \Delta = \iota \circ \mathcal{J}.$$

Dies ist der Ausdruck für die Rechtsinvarianz des Haar-Integrals auf der endlich-dimensionalen Funktionenalgebra $C(G,\mathbb{K})$, d.h. auf einer speziellen Hopf-Algebra. Diese Definition erweitert man auf beliebige Hopf-Algebren.

Definition 5*: Haar-Integral*

Ein rechtes Haar-Integral auf einer Hopf-Algebra H ist ein lineares, positives Funktional $\mathcal{J} : H \longrightarrow \mathbb{K}$, so daß

$$(\mathcal{J} \otimes id) \circ \Delta = \iota \circ \mathcal{J}. \tag{2.24}$$

Positiv bedeutet hier, daß $\mathcal{J}(h^2) > 0$, falls $h \neq 0$ ist. Analog ist ein linkes Haar-Integral durch die Gleichung

$$(id \otimes \mathcal{J}) \circ \Delta = \iota \circ \mathcal{J}. \tag{2.25}$$

definiert. Falls linkes und rechtes Haar-Integral existieren und übereinstimmen, heißt die Hopf-Algebra unimodular. Das Integral wird normalisiert genannt, wenn $\mathcal{J}(1_H) = 1_{\mathbb{K}}$ gilt.

Wie für Gruppen, so ist das Haar-Integral für Hopf-Algebren und Quantengruppen ein fundamentales Hilfsmittel in der Darstellungstheorie. Insbesondere für die kompakten und lokalkompakten Quantengruppen ist seine Existenz für viele zentrale Aussagen wesentlich. Beispielsweise wird mit Hilfe des Haar-Integrals die rechtsreguläre Darstellung konstruiert, in der alle irreduziblen unitären Darstellungen enthalten sind. Kompakte Quantengruppen, die wir in Kapitel 4 behandeln werden (und natürlich damit auch endlichdimensionale Hopf-Algebren) besitzen glücklicherweise ein Haar-Integral, während man für die Definition von lokalkompakten Quantengruppen seine Existenz postulieren muß. Ein normalisiertes, unimodulares Haar-Integral für die Funktionenalgebra $\mathcal{F}(G)$ über einer endlichen Gruppe wird durch:

$$\mathcal{J}(\phi) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \phi(g)$$

gegeben.

2.4 Darstellungen von Hopf-Algebren

Bisher haben wir die „innere Struktur"von Hopf-Algebren betrachtet. Genauso wie bei Gruppen ist es jedoch ebenso wichtig zu studieren, wie eine Hopf-Algebra auf andere Objekte wirkt und wie man diese Wirkungen so konstruiert, daß sie mit den Strukturabbildungen der Hopf-Algebra verträglich sind. Da eine Hopf-Algebra sehr viel Struktur mit sich bringt, kann man sich leicht vorstellen, daß auch in der Darstellungstheorie eine große Vielzahl von unterschiedlichen Konstruktionen gemacht werden kann, zumal wenn die Wirkung auch noch die Struktur des Darstellungsraumes berücksichtigen soll. Ein gutes Verständnis der Wirkungen von Hopf-Algebren ist unerläßlich für einen Einblick in die Frage ob und wie Hopf-Algebren als (verallgemeinerte) Symmetriestrukturen eine Rolle spielen können. In diesem Sinne ist der Inhalt des Abschnittes grundlegend für die Motivation der gesamten Arbeit. Genaugenommen können Hopf-Algebren auf andere Räume nicht nur wirken sondern auch kowirken. Während die Wirkung die Multiplikation in der Algebra auf eine Multiplikation von Elementen aus verschiedenen Räumen verallgemeinert, ist die Kowirkung eine Verallgemeinerung der Komultiplikation: die Kowirkung spaltet in das Tensorprodukt verschiedener Räume auf.

Bevor wir jedoch diese verschiedenen Wirkungen und Kowirkungen abstrakt definieren, ist es sinnvoll, ein wenig genauer auf den Zusammenhang von Funktionenalgebren mit Universellen Einhüllenden einzugehen und gruppenartige oder primitive Elemente einer Hopf-Algebra im Kontext der Darstellungstheorie zu interpretieren. Der folgende Abschnitt ist insbesondere von [66] inspiriert.

2.4.1 Repräsentative Funktionen und Universelle Einhüllende

In diesem Abschnitt machen wir einen Schritt weg von endlichen Gruppen hin zu den (in der Physik besonders wichtigen) kompakten Lie-Gruppe. Wir werden sehen, daß die Begriffsbildungen, die für endliche Gruppen sinnvoll waren, auch hier ihre volle Gültigkeit behalten. Es sei vorab angemerkt, daß wir an dieser Stelle nicht den Ehrgeiz haben die oftmals sehr technischen Beweise aus der Gruppentheorie zu führen. Es geht uns vielmehr um ein mehr intuitives und prinzipielles Verständnis. Nachfolgend arbeiten wir über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Betrachten wir also eine kompakte Lie-Gruppe G (oder etwas allgemeiner eine kompakte topologische Gruppe). Aus der Gruppentheorie (insbesondere aus dem Peter-Weyl-Theorem) weiß man:

- Jede unitäre irreduzible Darstellung π von G ist endlichdimensional.
- Jedes Matrix-Element $\pi_{ij}(x)$ ist eine stetige Funktion auf G.
- Der Vektorraum $\mathcal{R}(G)$, der von diesen Matrix-Elementen erzeugt wird (π durchläuft alle unitären irreduziblen Darstellungen) ist eine dichte Unteralgebra von $C(G)$.

Die Elemente $\phi \in \mathcal{R}(G)$ können als diejenigen stetigen Funktionen charakterisiert werden, deren Translationen der Form $\phi_t : x \to \phi(xt), t \in G$, einen endlichdimensionalen Unterraum von $C(G)$ erzeugen. Sie heißen repräsentative Funktionen. Wir wollen diese und die folgenden Aussagen hier nicht beweisen (siehe z.B. [37]). Wichtig ist vielmehr, daß die repräsentativen Funktionen eine Unteralgebra der stetigen Funktionen bilden. Sie haben die Eigenschaft:

$$\mathcal{R}(G \times G) \cong \mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(G).$$

Die Isomorphie wird durch folgende Abbildung gegeben:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(G) &\longrightarrow \mathcal{R}(G \times G), \\ \phi \otimes \psi &\longmapsto \Phi(\phi \otimes \psi), \qquad \Phi(\phi \otimes \psi)(g, g') = \phi(g)\psi(g'). \end{aligned}$$

Es war gerade diese Isomorphie, die es uns bei den endlichen Gruppen erlaubte, auf der Funktionenstufe eine Komultiplikation zu definieren. Für $\phi \in \mathcal{R}(G)$ gilt wiederum in völliger Analogie zu den endlichen Gruppen:

$$\Delta\phi(g,h) := \phi(gh), \qquad \epsilon(\phi) := \phi(e), \qquad S\phi(g) := \phi(g^{-1}).$$

Aus der Kenntnis von $\mathcal{R}(G)$ ist es übrigens möglich die Gruppe G wieder zu rekonstruieren. Die Charaktergruppe eines Raumes X bezeichnen wir im Folgenden mit $\hat{X}$. Die Gruppe G ist isomorph zur Charaktergruppe von $\mathcal{R}(G)$:

$$\widehat{\mathcal{R}(G)} \cong G. \tag{2.26}$$

Es gilt ganz allgemein, daß die Charaktere auf einer reellen Hopf-Algebra $(H, \mu, \iota, \Delta, \epsilon, S)$ eine Gruppe bilden. Die Gruppenmultiplikation ist (für $\phi, \psi \in \hat{H}$)

$$\phi\psi := (\phi \otimes \psi) \circ \Delta.$$

Sie wird durch die Komultiplikation gegeben und ist ein Faltungsprodukt. Die Koeins ϵ ist das neutrale Element:

$$\begin{aligned} \epsilon\phi &= (\epsilon \otimes \phi) \circ \Delta = \phi, \\ \phi\epsilon &= (\phi \otimes \epsilon) \circ \Delta = \phi. \end{aligned}$$

Dies ergibt sich aus der Koeinsbedingung. Die Inverse der Charaktergruppe wird über die Antipode definiert:

$$\phi^{-1} := \phi \circ S.$$

$$\begin{aligned} \phi(\phi \circ S) &= (\phi \otimes (\phi \circ S)) \circ \Delta = \phi \circ \mu \circ (id \otimes S) \circ \Delta = \phi(\iota \circ \epsilon) = \epsilon, \\ \phi(S \circ \phi) &= (\phi \otimes (S \circ \phi)) \circ \Delta = \phi \circ \mu \circ (S \otimes id) \circ \Delta = \phi(\iota \circ \epsilon) = \epsilon. \end{aligned}$$

Dabei wurde die Antipodenbedingung verwendet.

Ebenso gilt, daß jede kommutative Hopf-Algebra H, welche ein Haar-Integral besitzt, isomorph zur Hopf-Algebra von repräsentativen Funktionen auf der Charaktergruppe von H ist:

$$H \cong \mathcal{R}(\widehat{H}). \tag{2.27}$$

Die Gleichungen (2.26) und (2.27) bilden die sogenannte Tannaka-Krein-Dualität, die in mancherlei Hinsicht zum (kommutativen) Gelfand-Naimark-Theorem verwandt ist.

Nun wollen wir den Zusammmenhang zwischen den repräsentativen Funktionen über einer kompakten Lie-Gruppe G und der Universellen Einhüllenden der Lie-Algebra von G genauer betrachten. Bekanntermaßen kann man die Elemente der Lie-Algebra $\mathcal{G}$ zur Lie-Gruppe G mit den linksinvarianten Vektorfeldern der Mannigfaltigkeit G identifizieren. Die

Universelle Einhüllende $U(\mathcal{G})$ kann als Algebra von linksinvarianten Differentialoperatoren auf G aufgefaßt werden. Ist $X \in \mathcal{G}, f \in \mathcal{R}(G)$, so definiert man

$$\langle X \mid f \rangle := (Xf)(e) = \frac{d}{dt} |_{t=0} f(\exp tX).$$

Ist $\{X_i\}_{i \in I}$ eine total geordnete Basis der Lie-Algebra $\mathcal{G}$, so wird eine Basis von $U(\mathcal{G})$ durch Elemente der Form $X_{i_1} \dots X_{i_n}$ mit $i_1 \leq \dots \leq i_n \in I, n \in \mathbb{N}$ gegeben. Das ist das Poincare-Birkhoff-Witt-Theorem, siehe [40]. Für ein solches Basis-Element aus $U(\mathcal{G})$ schreiben wir etwas abkürzend $X_{(1)} \dots X_{(n)}$.

Die Wirkung solcher Basis-Elemente von $U(\mathcal{G})$ definieren wir als (mit e neutrales Element von G):

$$\langle X_{(1)} \dots X_{(n)} \mid f \rangle := X_{(1)}(\dots(X_{(n)} f))(e), \qquad \langle 1 \mid f \rangle := f(e).$$

Die Universelle Einhüllende $U(\mathcal{G})$ und die repräsentativen Funktionen bilden eine duale Paarung nach Definition 3. Das kann man leicht nachprüfen, indem man die Leibniz-Regel für die Wirkung von Vektorfeldern auf Funktionen $X(fh) = (Xf)h + fX(h)$ benutzt:

$$\begin{aligned} \langle X \mid fh \rangle &= (X(fh))(e) \\ &= (Xf)(e)h(e) + f(e)(Xh)(e) = (X \otimes 1 + 1 \otimes X)(f \otimes h)(e,e) \\ &= \Delta X(f \otimes h)(e,e) = \langle \Delta X \mid f \otimes h \rangle. \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} \langle X \otimes Y \mid \Delta f \rangle &= \frac{d}{dt} |_{t=0} \frac{d}{ds} |_{s=0} (\Delta f)(\exp tX, \exp sY) \\ &= \frac{d}{dt} |_{t=0} \frac{d}{ds} |_{s=0} f(\exp tX \exp sY) \\ &= \frac{d}{dt} |_{t=0} (Yf)(\exp tX) = X(Yf)(e) = \langle XY \mid f \rangle. \end{aligned}$$

Die Paarung ist nichtdegeneriert. Wir wollen dies hier nicht beweisen, sondern stattdessen auf einen wichtigen Punkt in Gleichung (2.28) aufmerksam machen. Die Komultiplikation

$$\Delta X = X \otimes 1 + 1 \otimes X \tag{2.29}$$

ist nichts anderes als die Leibniz-Regel für Vektorfelder. Wir hatten bereits darauf hingewiesen, daß man in einer Hopf-Algebra H Elemente, welche nach (2.29) komultipliziert werden, primitive Elemente nennt. Der übliche Kommutator von primitiven Elementen ergibt wieder ein primitives Element. Anders gesagt: Die Menge der primitiven Elemente bildet eine Lie-Algebra. Man kann zeigen, daß in der Universellen Einhüllenden einer Lie-Algebra $U(\mathcal{G})$ genau die Elemente der Lie-Algebra $\mathcal{G}$ primitiv sind, d.h.

$$Prim(U(\mathcal{G})) = \mathcal{G}.$$

Wir können nun verallgemeinern und uns fragen, wie man eine Wirkung einer beliebigen Hopf-Algebra H auf eine Algebra A sinnvoll definieren kann. Nach dem oben dargestellten erscheint es natürlich, daß die primitiven Elemente in der Hopf-Algebra derivativ wirken sollten. Andererseits wissen wir, daß eine Gruppenwirkung auf einen Raum M einen Endomorphismus der Gruppe auf die Funktionen über dem Raum induziert (d.h. $g \triangleright (fh) = (g \triangleright f)(g \triangleright h), \forall g \in G; f, h \in \mathcal{F}(M)$). Deshalb sollten die gruppenartigen Elemente der Hopf-Algebra (welche ja eine Gruppe bilden) als Endomorphismen auf die Algebra A wirken. Beide Forderungen lassen sich erfüllen, wenn man definiert:

$$h \triangleright (ab) := \mu(\Delta h(a \otimes b)) \equiv (h_1 \triangleright a)(h_2 \triangleright b), \forall h \in H; a, b \in A. \tag{2.30}$$

Dies wollen wir in den folgenden Abschnitten ausführlicher und systematischer studieren.

2.4.2 Wirkungen

Die einfachste Möglichkeit eine Hopf-Algebren-Wirkung auf einen Vektorraum zu definieren, besteht darin, nur die Algebrenstruktur der Hopf-Algebra zu berücksichtigen:

Definition 6*: Darstellung und Wirkung einer Hopf-Algebra*
Eine Darstellung einer Hopf-Algebra H auf einem Vektorraum V ist ein Algebrenmorphismus $\pi : H \longrightarrow End(V)$, d.h. es gilt:

$$\pi(hg) = \pi(h)\pi(g), \forall h, g \in H.$$

Die entsprechende Wirkung ist eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha :\ H \otimes V &\longrightarrow V, \\ h \otimes v &\longmapsto \alpha(h \otimes v) \equiv \pi(h)(v). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Hier ist (wie auch in der gesamten Arbeit) die Konvention getroffen, daß mit Wirkung oder Darstellung immer Linkswirkung oder Linksdarstellung gemeint ist. Die Rechtsdarstellung ist dagegen als Algebrenantimorphismus definiert, d.h. $\pi_R(hg) = \pi_R(g)\pi_R(h)$. Der Darstellungsraum V wird auch als Links-H-Modul bezeichnet. Für $\alpha(h \otimes v)$ schreiben wir auch kurz: $h \triangleright v$. In dieser Schreibweise gilt dann für die Wirkung

$$(hg) \triangleright v = h \triangleright (g \triangleright v), \qquad 1_H \triangleright v = v, \ \forall h \in H, v \in V. \tag{2.32}$$

Die erste Gleichung ist nichts anderes als eine verallgemeinerte Assoziativität. Die zweite Gleichung besagt, daß die Eins der Algebra auf das Linksmodul als Identität wirkt. Die Diagramme für die Wirkung (siehe folgende Seite) sind völlig analog zu denen der Multiplikation in einer Algebra.

Modul-Algebren

Die Definition der Darstellung einer Algebra macht von den zusätzlichen Strukturen der Hopf-Algebra keinen Gebrauch. Dies ändert sich, wenn man Darstellungsräume verwendet,

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \otimes V \arrow[r, "\mu\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes\alpha"'] & H \otimes V \arrow[d, "\alpha"] \\ H \otimes V \arrow[r, "\alpha"'] & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{K} \otimes V \arrow[r, "\iota\otimes id"] \arrow[dr, "\cong"'] & H \otimes V \arrow[d, "\alpha"] \\ & V \end{tikzcd}$$

Abbildung 2.8: Wirkung einer Hopf-Algebra auf einen Vektorraum

die selbst weitere Strukturen besitzen. Betrachten wir zunächst den Fall, daß der Darstellungsraum eine Algebra ist. Der naheliegende Ansatz, die Wirkung der Hopf-Algebra H auf die Algebra als $h \triangleright (a \cdot b) := (h \triangleright a) \cdot (h \triangleright b)$ zu definieren, scheitert, da diese Darstellung nicht linear in H wäre. Auch eine Wirkung der Form $h \triangleright (ab) := (h \triangleright a)b$ ist zwar formal korrekt, aber uninterressant, da hierbei die Algebrenstruktur des Darstellungsraumes eigentlich keine Rolle spielt und außerdem (dies geht aus Kapitel 3 über Multiplikator-Hopf-Algebren hervor) wäre dann H isomorph zu einer Unteralgebra von A. Man verwendet die Komultiplikation und definiert:

Definition 7: ***Links-H-Modulalgebra***
Eine Algebra A heißt Links-H-Modulalgebra, falls A ein Links-H-Modul ist und zusätzlich gilt:

$$h \triangleright (ab) = (h_1 \triangleright a)(h_2 \triangleright b), \ \forall h \in H; a, b \in A, \tag{2.33}$$

$$h \triangleright 1_A = \epsilon(h) 1_A. \tag{2.34}$$

Die so definierte Wirkung einer Hopf-Algebra auf eine Algebra hat die gewünschte Eigenschaft, daß gruppenartige Elemente als Endomorphismen und primitive Elemente als Derivationen wirken. Es gibt aber noch einen anderen Ansatzpunkt um die obige Wirkung zu motivieren. Dazu benötigen wir den folgenden Sachverhalt, der eine der wichtigsten Eigenschaften von Hopf-Algebren darstellt:

Satz 3: *Das Tensorprodukt zweier Darstellungen einer Hopf-Algebra H ist eine Darstellung.*

Beweis: Sei also H eine Hopf-Algebra und V, W seien zwei H-Moduln. Dann besitzt H eine Darstellung auf dem Tensorproduktraum $V \otimes W$ durch

$$\begin{aligned} h &\triangleright (v \otimes w) := (h_1 \triangleright v)(h_2 \triangleright w), \ \forall h \in H; v \in V; w \in W, \\ 1_H &\triangleright (v \otimes w) = v \otimes w. \end{aligned}$$

Wir müssen nun zeigen, daß hierdurch tatsächlich eine Wirkung gemäß (2.32) definiert ist:

$$\begin{aligned} (hg) \triangleright (v \otimes w) &= ((hg)_1 \triangleright v) \otimes ((hg)_2 \triangleright w) = ((h_1 g_1) \triangleright v) \otimes ((h_2 g_2) \triangleright w) \\ &= (h_1 \triangleright (g_1 \triangleright v)) \otimes (h_2 \triangleright (g_2 \triangleright w)) = h \triangleright (g \triangleright (v \otimes w)). \end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, daß

$$(hg)_1 \otimes (hg)_2 \equiv \Delta(hg) = \Delta(h) \cdot \Delta(g) = (h_1 \otimes h_2) \cdot (g_1 \otimes g_2) = (h_1 g_1) \otimes (h_2 g_2)$$

gilt. Außerdem ist natürlich

$$1_H \triangleright (v \otimes w) = (1_H \triangleright v) \otimes (1_H \triangleright w) = v \otimes w,$$

da $\Delta 1_H = 1_H \otimes 1_H$. •

Die Eigenschaften einer H-Modulalgebra A bedeuten somit einfach, daß die Wirkung von H mit der Multiplikation auf der Algebra A vertauscht:

$$h \triangleright (ab) = h \triangleright (\mu(a \otimes b)) = \mu(h \triangleright (a \otimes b)) = (h_1 \triangleright a)(h_2 \triangleright b).$$

Dabei wurde verwendet, daß H nach obigem Satz 3 eine Wirkung auf $A \otimes A$ besitzt. Auch die Wirkung (2.34) auf die Eins der Algebra $h \triangleright 1_A = \epsilon(h) 1_A$ läßt sich als einfache Konsistenzbedingung auffassen:

$$h \triangleright (a 1_A) = (h_1 \triangleright a)(h_2 \triangleright 1_A) \stackrel{!}{=} h \triangleright a.$$

Dies ist offenbar erfüllt, wenn man $\epsilon(h_2) 1_A = h_2 \triangleright 1_A$ setzt, da man dann unter Benutzung der Koeinsbedingung (2.8) schreiben kann:

$$(h_1 \triangleright a)(h_2 \triangleright 1_A) = (h_1 \epsilon(h_2) \triangleright a) 1_A = h \triangleright a.$$

Wie wir sehen, gibt es somit viele gute Gründe die Hopf-Algebren-Wirkung auf eine Algebra wie oben zu definieren. Die Art und Weise wie wir dabei vorgegangen sind ist typisch für den Hopf-Algebren- und Quantengruppen-Bereich. Man analysiert zuerst Eigenschaften auf der Stufe von Gruppen, Lie-Algebren und ihren Wirkungen und hebt dann alles auf die Funktionenstufe, auf der man dann nach sinnvollen Verallgemeinerungen sucht.

Modul-Koalgebren

Besitzt der H-Modul eine Koalgebren-Struktur, so kann man postulieren, daß die Wirkung diese respektiert. Mit „respektieren"ist in diesem Falle einfach gemeint, daß die Wirkung ein Koalgebren-Morphismus ist.

Definition 8*: Links-H-Modul-Koalgebra*
Wir betrachten die Wirkung $\triangleright$ einer Hopf-Algebra H auf eine Koalgebra C. Diese Wirkung wird als Koalgebrenmorphismus der Form

$$\begin{aligned} \triangleright : H \otimes C &\longrightarrow C, \\ h \otimes c &\longmapsto h \triangleright c, \end{aligned}$$

definiert. Genauer gesagt: Eine Koalgebra C heißt eine Links-H-Modul-Koalgebra, falls C ein Links-H-Modul ist und außerdem $\forall h \in H, c \in C$ gilt:

$$\Delta_C(h \triangleright c) = (h_1 \triangleright c_1) \otimes (h_2 \triangleright c_2), \tag{2.35}$$

$$\epsilon_C(h \triangleright c) = \epsilon(h)\epsilon(c). \tag{2.36}$$

Man überprüft leicht, daß $\Delta_C \circ \triangleright = (\triangleright \otimes \triangleright) \circ \Delta^{\otimes}$ gilt (mit $\Delta^{\otimes}$ Komultiplikation auf dem Tensorproduktraum $H \otimes C$ nach Satz 1) und außerdem $\epsilon_C \circ \triangleright = \epsilon_H \otimes \epsilon_C$. Die Wirkung ist also tatsächlich ein Koalgebrenmorphismus.

2.4.3 Beispiele

Die folgenden Beispiele illustrieren nicht nur die vorherigen Definitionen und Begriffsbildungen, sondern führen spezielle Wirkungen ein, die im Zusammenhang mit Symmetrien Spektraler Tripel benötigt werden.

Beispiel 3*: Linksreguläre Wirkung*
Sei H eine Hopf-Algebra. Die linksreguläre Wirkung

$$\begin{aligned} L : H \otimes H &\longrightarrow H, \\ g \otimes h &\longmapsto L_g(h) := gh, \end{aligned}$$

macht H zu einer Links-H-Modul-Koalgebra. Dies liegt natürlich einfach daran, daß die Multiplikation μ ein Koalgebren-Morphismus sein muß.

Beispiel 4*: Linksadjungierte Wirkung*
Sei H eine Hopf-Algebra. Die linksadjungierte Wirkung

$$\begin{aligned} Ad : H \otimes H &\longrightarrow H, \\ g \otimes h &\longmapsto Ad_g(h) := g_1 h S(g_2), \end{aligned}$$

versieht H mit der Struktur einer Links-H-Modulalgebra. Im Fall der Gruppenalgebra führt diese Wirkung auf die übliche konjugierte oder adjungierte Wirkung, im Fall der Universellen Einhüllenden auf den Kommutator.

Beispiel 5*: Gruppenalgebra*

Wir betrachten als wirkende Hopf-Algebra die Gruppenalgebra $\mathbb{K}G$ für eine endliche Gruppe G. A sei eine beliebige $\mathbb{K}G$-Modulalgebra. Die definierenden Relationen (2.33) und (2.34) nehmen dann die folgende Form an:

$$g \triangleright (ab) = (g \triangleright a)(g \triangleright b), \qquad g \triangleright 1_A = 1_A, \qquad \forall g \in G; a, b \in A.$$

Dies ist die gewohnte Wirkung einer Gruppe auf eine Algebra als Endomorphismen.

Wie sieht für den Fall der Gruppenalgebra die adjungierte Wirkung aus?

$$Ad_g(h) = g_1 h S(g_2) = ghg^{-1}$$

Auf den Basiselementen der Gruppenalgebra ist das gerade die übliche adjungierte Wirkung einer Gruppe auf sich selbst.

Beispiel 6*: Universelle Einhüllende*

Sei $U(\mathcal{G})$ die Universelle Einhüllende einer Lie-Algebra $\mathcal{G}$ und A eine Algebra. Die Relationen für eine $U(\mathcal{G})$-Modulalgebra lauten:

$$\xi \triangleright (ab) = (\xi \triangleright a)b + a(\xi \triangleright b), \qquad \xi \triangleright 1_A = 0 \qquad \forall \xi \in \mathcal{G}; a, b \in A.$$

Die Wirkung ist also derivativ.

Für die adjungierte Wirkung von $U(\mathcal{G})$ auf sich selbst erhält man gerade den Kommutator:

$$Ad_\xi(\eta) = \xi_1 \eta S(\xi_2) = \xi \eta S(1) + 1 \eta S(\xi) = \xi\eta - \eta\xi = [\eta, \xi].$$

2.5 Kowirkungen

Hopf-Algebren können aufgrund ihrer Zusatzstrukturen nicht nur wirken, sondern auch kowirken. Kowirkungen sind Verallgemeinerungen der Komultiplikation auf einer Hopf-Algebra. Die nachfolgenden Definitionen und Begriffsbildungen sind dual zu denen aus dem Abschnitt über Wirkungen.

Definition 9*: Kowirkung und Kodarstellung von Hopf-Algebren*
Eine Kowirkung oder Kodarstellung einer Hopf-Algebra H auf einem Vektorraum V ist eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \beta : V &\longrightarrow H \otimes V, \\ v &\longmapsto v^{(1)} \otimes v^{(2)}, \end{aligned} \tag{2.37}$$

welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$(\Delta \otimes id) \circ \beta = (id \otimes \beta) \circ \beta, \tag{2.38}$$

$$(\epsilon \otimes id) \circ \beta = id. \tag{2.39}$$

Diese Bedingungen sind Verallgemeinerungen der Koassoziativität und der Koeins-Bedingung. Die Schreibweise $\beta(v) = v^{(1)} \otimes v^{(2)}$ ist wieder als abkürzende Schreibweise für eine Summe aus zerlegbaren Elementen in $H \otimes V$ zu verstehen. Die hier definierten Kowirkungen sind Links-Kowirkungen. Rechts-Kowirkungen lassen sich dementsprechend definieren. Die Diagramme für die Kowirkung sind analog zu denen der Koalgebrenstruktur:

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \otimes V & H \otimes V \arrow[l, "\Delta \otimes id"'] \\
H \otimes V \arrow[u, "id \otimes \beta"] & V \arrow[l, "\beta"] \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \otimes H & H \otimes V \arrow[l, "\epsilon \otimes id"'] \\
 & H \arrow[ul, "\cong"] \arrow[u, "\beta"]
\end{tikzcd}$$

Abbildung 2.9: Kowirkung einer Hopf-Algebra auf einen Vektorraum

In den nächsten beiden Unterabschnitten betrachten wir wieder den Fall, daß die Komodule zusätzliche Strukturen besitzen, die von der Kowirkung respektiert werden sollen.

2.5.1 Komodul-Algebren

Definition 10*: Links-H-Komodulalgebra*
Es sei H eine Bialgebra oder Hopf-Algebra. Eine Algebra A heißt Links-H-Komodulalgebra, falls A ein Links-H-Komodul ist und β ein Algebrenmorphismus:

$$\beta(a \cdot b) = \beta(a) \cdot \beta(b), \quad \forall a, b \in A, \tag{2.40}$$

$$\beta(1_A) = 1_H \otimes 1_A. \tag{2.41}$$

Eine Hopf-Algebra H ist natürlich durch Komultiplikation und Koeins, die ja beide per Definition Algebrenmorphismen sind, eine H-Komodulalgebra.

In Diagramm-Form schreiben sich diese Bedingungen wie folgt:

$$\begin{tikzcd}
H \otimes A & A \arrow[l, "\beta"'] & A \otimes A \arrow[l, "\mu_A"'] \arrow[d, "\beta \otimes \beta"'] \\
H \otimes H \otimes A \otimes A \arrow[u, "\mu_H \otimes \mu_A"] & & H \otimes A \otimes H \otimes A \arrow[ll, "id_H \otimes \tau \otimes id_A"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\beta"'] & \mathbb{K} \arrow[l, "\iota_A"'] \arrow[dl, "\iota_H \otimes \iota_A"] \\
H \otimes A &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 2.10: Links-Komodulalgebra

2.5.2 Komodul-Koalgebren

Definition 11*: Links-H-Komodul-Koalgebra*
Ist H eine Bialgebra oder Hopf-Algebra und C eine Koalgebra, so heißt C eine Links-H-Komodul-Koalgebra, falls C ein Links-H-Komodul ist und außerdem gilt:

$$c^{(1)} \otimes {c^{(2)}}_1 \otimes {c^{(2)}}_2 = {c_1}^{(1)} \cdot {c_2}^{(1)} \otimes {c_1}^{(2)} \otimes c_2^{(2)}, \tag{2.42}$$

$$c^{(1)} \epsilon(c^{(2)}) = \epsilon(c) 1_H, \quad \forall c \in C. \tag{2.43}$$

Diese Gleichungen bedeuten einfach, daß die Koalgebrenstruktur von C mit der Links-Kowirkung verträglich gemacht wird.

Auch hier sei die (zugegebenermaßen nicht sehr übersichtliche) Diagramm-Form angegeben:

$$\begin{tikzcd}
H\otimes C\otimes C & H\otimes C \arrow[l, "id\otimes\Delta_C"'] & C \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, "\Delta_C"] & C\otimes C \arrow[d, "\beta\otimes\beta"'] \\
H\otimes H\otimes C\otimes C \arrow[u, "\mu_H\otimes id_C\otimes id_C"] & & & H\otimes C\otimes H\otimes C \arrow[lll, "id_H\otimes\tau\otimes id_C"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\epsilon_C"] \arrow[d, "\beta"'] & H \\
H\otimes C \arrow[ur, "id\otimes\epsilon_C"'] &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 2.11: Links-Komodul-Koalgebra

Schon obige Definition läßt vermuten, daß die Beispiele für Komodul-Koalgebren relativ unanschaulich sind. Wir wollen sie deshalb hier nicht weiter vorstellen, sondern verweisen auf [46].

2.5.3 Anwendung auf homogene Räume

Die Kowirkung, wie sie oben definiert wurde, läßt sich im Prinzip genauso herleiten, wie die Komultiplikation auf der Funktionenalgebra über einer Gruppe. Dort induziert die Gruppenmultiplikation die Komultiplikation von Funktionen. Die Kowirkung ist davon einfach eine Verallgemeinerung. Die Wirkung einer Gruppe auf einen Raum induziert eine Kowirkung der Funktionen. Ein besonders wichtiger Spezialfall sind die homogenen Räume. Die Zutaten der homogenen Räume, die wir betrachten wollen, sind eine kompakte Gruppe G, ein Raum M, auf den die Gruppe transitiv wirkt und die Stabilitäts- oder Isotropiegruppe K zu einem beliebigen Punkt $x_0 \in M$ (d.h. K läßt den Punkt x_0 invariant). K ist eine abgeschlossene Untergruppe von G. Unter diesen Bedingungen gilt die Isomorphie

$$M \cong G/K. \tag{2.44}$$

Für $g \in G$ bedeute $\overline{g}$ das entsprechende Element in $G/K \cong M$. Es sei auf einen „Notations-Mißbrauch“in den folgenden Gleichungen hingewiesen: Wir benutzen für die auftretenden Funktionen das Symbol f, welches aber jeweils aus unterschiedlichen Räumen stammt.

Betrachten wir die Funktionenalgebren $\mathcal{F}(M)$ und $\mathcal{F}(G)$, die wir uns so gewählt denken, daß die Isomorphie

$$\mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(M) \cong \mathcal{F}(G \times M)$$

gilt. Dann kann man jede Funktion $f \in \mathcal{F}(M)$ mit einer Funktion $f \in \mathcal{F}(G)^K$ identifizieren, wobei die Funktionen $\mathcal{F}(G)^K$ gerade die K-invarianten Funktionen auf G sind:

$$\mathcal{F}(G)^K := \{f \in \mathcal{F}(G) \mid f(gk) = f(g), \forall k \in K, g \in G\}.$$

Es existiert demnach ein Isomorphismus

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{F}(G)^K &\longrightarrow \mathcal{F}(M), \\ f &\longmapsto \Phi(f), \qquad\qquad \Phi(f)(\overline{g}) := f(g). \end{aligned}$$

Wir definieren nun eine Abbildung

$$\begin{aligned} \beta : \mathcal{F}(M) &\longrightarrow \mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(M) \cong \mathcal{F}(G \times M), \\ f &\longmapsto \beta(f), \end{aligned}$$

mit

$$\beta(f)(g, \overline{x}) := f(\overline{gx}).$$

Die Wirkung der Gruppe G induziert demnach tatächlich eine Kowirkung β auf die Funktionenalgebra. Der Isomorphismus Φ vertauscht im unten dargestellten Sinne die Kowirkung mit der Komultiplikation.

$$(\beta\Phi(f))(g, \overline{x}) = \Phi f(\overline{gx}) = f(gx) = \Delta f(g, x) = ((id \otimes \Phi)\Delta f)(g, \overline{x}).$$

In mittlerweile gewohnter Art und Weise können wir nun diese algebraische Beschreibung von homogenen Räumen verallgemeinern.

Definition 12*: Homogener Raum für eine Hopf-Algebra*

Ein eingebetteter homogener Raum für eine Hopf-Algebra H ist eine Links-H-Komodulalgebra A mit der Kowirkung $\beta : A \to H \otimes A$, so daß eine Unteralgebra $B \subseteq H$ und ein Algebren-Isomorphismus $\Phi : B \to A$ existieren, mit $\beta\Phi = (id \otimes \Phi)\Delta : B \to H \otimes A$.

2.6 Kreuzproduktalgebren

Kreuzproduktalgebren bilden eine der strukturell wichtigsten Konstruktionen, die man mit Hopf-Algebren machen kann. Wir werden sie im II. Teil dieser Dissertation in drei wichtigen Funktionen benötigen und kennenlernen:

1. Kreuzproduktalgebren sind Lösungen von universellen algebraischen Quantisierungsproblemen.

2. Kreuzproduktalgebren bilden die Grundlage für eine Formulierung der Quanten-Faserbündel-Theorie.

3. Kreuzproduktalgebren sind die algebraische Vorstufe zu den C^*-dynamischen Systemen.

Wir wollen an dieser Stelle die Kreuzproduktalgebren nur relativ kurz mathematisch einführen. Anwendungen und Ergänzungen zu dem hier dargestellten, finden sich dann in Teil II.

Wirkt eine Gruppe G auf eine Algebra A, so kann man auf dem Tensorprodukt $A \otimes \mathbb{K}G$ eine Multiplikation der folgenden Form definieren:

$$(a \otimes g)(b \otimes h) := a(g \triangleright b) \otimes gh, \forall a, b \in A; g \in G; .$$

A und $\mathbb{K}G$ sind dabei als Unteralgebren in diesem semidirekten Produkt oder Kreuzprodukt enthalten. Kreuzprodukte werden mit dem Symbol $\rtimes$ bezeichnet. Man kann die Kreuzproduktalgebra $A \rtimes \mathbb{K}G$ als die von A und $\mathbb{K}G$ frei erzeugte Algebra mit der Kreuzrelation $(a \otimes g)(b \otimes h) := a(g \triangleright b) \otimes gh$ bezeichnen. Obige Kreuzproduktalgebra ist natürlich sehr speziell wegen der $\mathbb{K}G$-Wirkung. Man kann diese Konstruktion sehr leicht auf allgemeine Hopf- oder Bialgebren und ihre Moduln verallgemeinern:

Definition 13*: Links-Kreuzproduktalgebra*
Sei A eine Links-H-Modulalgebra und H eine Bialgebra oder Hopf-Algebra. Dann definiert man die Links-Kreuzproduktalgebra $A \rtimes H$ als das Tensorprodukt $A \otimes H$ mit der Multiplikation

$$(a \otimes u)(b \otimes v) := a(u_1 \triangleright b) \otimes u_2 v. \tag{2.45}$$

Man beachte, daß es hierbei die Komultiplikation der Bialgebra H ist, welche diese Kreuzprodukt-Struktur ermöglicht.

2.7 Hopf-*Algebren

Mit *-Strukturen haben wir es später automatisch deswegen zu tun, weil wir in einem topologischen Kontext mit C^*-Algebren arbeiten werden. Hier definieren wir diese Strukturen auf der algebraischen Stufe. Die *-Strukturen werden von vielen Autoren auch als reelle Formen bezeichnet. Der Stern * sollte in diesem Abschnitt nicht mit dem Faltungsprodukt $*$ verwechselt werden. Wir arbeiten über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Ist A eine assoziative Algebra mit Eins, so definiert man eine *-Struktur auf A als eine konjugiert-lineare Abbildung $^* : A \longrightarrow A, a \longmapsto a^*$, die involutiv, anti-multiplikativ und unital ist, d.h. $\forall a, b \in A$

$$\begin{aligned}(a^*)^* &= a,\\ (ab)^* &= b^* a^*,\\ 1_A^* &= 1_A.\end{aligned}$$

Ein Homomorphismus $\phi : A \to B$ zwischen zwei *-Algebren A und B ist ein *-Homomorphismus, falls er mit der *-Abbildung vertauscht:

$$\phi(a^*) = \phi(a)^*, \ \forall a \in A.$$

Das Tensorprodukt zweier *-Algebren A und B ist ebenfalls eine *-Algebra:

$$(a \otimes b)^* := a^* \otimes b^*.$$

Definition 14*: **Hopf-*-Algebra***

Eine Hopf-*-Algebra H ist eine *-Algebra mit dazu verträglicher Koalgebren-Struktur, d.h. Komultiplikation und Koeins sind *-Homomorphismen. Für die Komultiplikation und die Koeins gilt demnach:

$$\begin{aligned}\Delta(a^*) &= a_1^* \otimes a_2^*,\\ \epsilon(a^*) &= \overline{\epsilon(a)}.\end{aligned}$$

Für die Antipode soll gelten:

$$(S \circ {}^*)^2 = id.$$

Bemerkung 3*: Während die Bedingungen für die Komultiplikation und die Koeins natürlich erscheinen, obgleich (siehe Bemerkung unten) sie nicht zwingend sind, bedarf die Verknüpfung von Antipode mit dem * einer Erklärung. Wir haben die Antipode nicht als eine bijektive Abbildung vorausgesetzt. Für kommutative und kokommutative Hopf-Algebren kann man jedoch zeigen, daß die Antipode bijektiv ist und somit eine Inverse besitzt. Dann ist aber obige Beziehung $(S \circ {}^*)^2 = id$ automatisch erfüllt, was eine Konsequenz der Eindeutigkeit der Antipode ist.*

Bemerkung 4*: Eine Bemerkung zur Komultiplikation $\Delta(a^*) = a_1^* \otimes a_2^*$ sei noch angebracht. Diese Definition der Komultiplikation erscheint natürlich. Es ist jedoch ebenso möglich [18] die Komultiplikation in einer dazu getwisteten Version zu definieren:*

$$\Delta(a^*) := a_2^* \otimes a_1^*.$$

Die unterschiedliche Wahl von Hopf-* und getwistetem Hopf-* hat Konsequenzen, wenn man Darstellungen betrachtet und auf den Darstellungsräumen Skalarprodukte definieren möchte. Eine ausführliche Diskussion solcher Sachverhalte findet sich in [18].

Kapitel 3

Multiplikator-Hopf-Algebren

Es ist möglich, eine Verallgemeinerung der Hopf-Algebren-Struktur zu definieren, bei der die zugrundeliegende Algebra keine Eins besitzt. Die Definition der relevanten Strukturabbildungen muß dazu angepaßt werden. Das Konzept der Multiplikator-Hopf-Algebren bietet hierfür den passenden Rahmen. Die dabei entwickelten Methoden und Betrachtungsweisen sind zudem sehr nützlich für das Verständnis von kompakten Quantengruppen und können leicht übertragen werden. Nebenbei erhält man eine alternative Definition von Hopf-Algebren.

In manchen Fällen ist es wünschenswert, allgemeinere Objekte als Hopf-Algebren, in deren Definition die Existenz der Eins der Algebra eingeht, zur Verfügung zu haben. Ein solcher Fall liegt beispielsweise vor, wenn man über die Funktionenalgebren auf endlichen Gruppen hinausgehen will, aber noch nicht topologische Konzepte (wie die Verwendung von C^*-Algebren) benutzen möchte. Multiplikator-Hopf-Algebren sind eine solche Verallgemeinerung, die in [64] eingeführt wurde. Die Fragen, die letztlich zur Definition der Multiplikator-Hopf-Algebren führen, lauten:

- Wie definiert man eine Hopf-Algebren-Struktur, wenn die zugrundeliegende Algebra keine Eins besitzt?
- Wie modifiziert man die Komultiplikation, wenn die „kanonischen“Kandidaten für die Komultiplikation nicht die gewünschte Form haben (man denke an den Dualraum einer unendlichdimensionalen Hopf-Algebra, wo das Bild der durch Dualisieren gewonnenen Komultiplikation nicht im Tensorproduktraum liegt)?

Die üblichen Hopf-Algebren sind als „Grenzfall“in den Multiplikator-Hopf-Algebren enthalten: Eine Multiplikator-Hopf-Algebra mit Eins ist eine gewöhnliche Hopf-Algebra. Die Notwendigkeit Multiplikator-Hopf-Algebren innerhalb dieser Arbeit zu betrachten, resultiert daraus, daß wir für das Studium der Hopf-Algebren-Struktur des Quantendoppeltorus (und dessen multidimensionaler Verallgemeinerung) auch den Dualraum betrachten. Dabei treten die üblichen Probleme mit der Komultiplikation im dualen Raum auf. Als erfolgreiche Strategie wird sich erweisen, daß wir zunächst eine Unteralgebra (ohne Eins) des Dualraumes definieren und dann von dieser Unteralgebra die Multiplikator-Hopf-Algebra bilden. Auf diese Art und Weise werden wir im Dualen eine mathematisch sauber formulierte verallgemeinerte Hopf-Algebren-Struktur definieren können. Diese Vorgehensweise ist nicht zu verwechseln mit der Bildung des bereits kurz erwähnten Sweedler-Dualen auf Seite 40. Bei dieser Methode benutzt man ebenfalls einen Teilraum des Dualraumes, der gerade so gewählt wird, daß man auf ihm eine Hopf-Algebra definieren kann. Dieser Teilraum kann jedoch sehr klein (zu klein) sein. Für diese Arbeit ist die Methode der Multiplikator-Hopf-Algebren eindeutig vorzuziehen. Gerade die duale Hopf-Algebra des Quantendoppeltorus bietet ein schönes und nichttriviales Beispiel für die Nützlichkeit von Multiplikator-Hopf-Algebren. Es sei darauf hingewiesen, daß auch bei den unendlichdimensionalen Multiplikator-Hopf-Algebren im Dualraum die gleichen Probleme auftreten wie bei den üblichen Hopf-Algebren: Der Dualraum einer Multiplikator-Hopf-Algebra ist im allgemeinen keine Multiplikator-Hopf-Algebra. Will man eine verallgemeinerte Hopf-Algebra so definieren, daß der Dualraum ebenfalls eine Hopf-Algebra der gleichen Art ist, so muß man auf topologische Theorien ausweichen. Wir werden darauf im nächsten Kapitel zu sprechen kommen. In den folgenden Abschnitten wollen wir kurz die Multiplikator-Hopf-Algebren motivieren und definieren, da sie (wie erwähnt) das mathematische Grundgerüst für die Formulierung der dualen Hopf-Struktur des Quantendoppeltorus liefern werden. Die dabei erworbenen Einsichten erleichtern zudem den Umgang mit kompakten Quantengruppen, die wir im nächsten Kapitel definieren. Außerdem lernen wir eine alternative Definition der Hopf-Algebren kennen, die sich als äußerst nützlich erweist. Interessanterweise erhalten wir ein Konstruktionsverfahren für Koeins und Antipode bei gegebener Komultiplikation. Zuerst wollen wir als Vorbereitung und als motivierendes Beispiel den Fall der Funktionenalgebra mit endlichem Träger über einer (unendlichen) Gruppe diskutieren.

Beispiel 7*: Funktionenalgebra von Funktionen mit endlichem Träger (1)*

Wesentlich bei der Definition der Hopf-Algebren-Struktur für die Funktionenalgebra über einer endlichen Gruppe war die Isomorphie $\mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G) \cong \mathcal{F}(G \times G)$. Diese geht für eine unendliche Gruppe verloren. Man kann sich jedoch überlegen, daß man eine solche Isomorphie bekommen kann, wenn man zwar für G eine unendliche Gruppe nimmt, aber nur die Algebra der Funktionen mit einem endlichen Träger betrachtet. Wir wollen diese Algebra mit $\mathcal{F}_e(G)$ bezeichnen. Es gilt die Isomorphie

$$\mathcal{F}_e(G) \otimes \mathcal{F}_e(G) \cong \mathcal{F}_e(G \times G)$$

Wir wollen die Isomorphie hier nicht beweisen. Sie ist jedoch relativ leicht zu zeigen, wenn man bedenkt, daß für einen festen, endlichen Träger die Funktionenalgebra jeweils endlichdimensional ist. Wenn wir analog zu den endlichen Gruppen eine Komultiplikation *über*

$$\Delta(\phi)(g,h) := \phi(gh),\ \phi \in \mathcal{F}_e(G); g,h \in G$$

zu definieren versuchen, scheitert dies zunächst daran, daß $\Delta(\phi) \in \mathcal{F}(G\times G) \supseteq \mathcal{F}_e(G\times G)$ *ist. An dieser Stelle sieht man, daß eine verallgemeinerte Hopf-Algebren-Definition nötig wird. Im Übrigen besitzt* $\mathcal{F}_e(G)$ *natürlich auch keine Eins. Betrachten wir jedoch einmal einen Ausdruck der Form* $(\Delta\phi)\cdot(1\otimes\psi)$ *mit* $\phi,\psi \in \mathcal{F}_e(G)$ *und* Δ *wie oben definiert:*

$$\begin{aligned}(\underbrace{(\Delta\phi)}_{\in\mathcal{F}(G\times G)} \cdot \underbrace{(1\otimes\psi)}_{\in\mathcal{F}(G\times G)})(g,h) &= ((\Delta\phi)(g,h))((1\otimes\psi)(g,h)) \\ &= (\phi(gh))\psi(h) = \underbrace{(\phi\otimes\psi)}_{\in\mathcal{F}_e(G)\otimes\mathcal{F}_e(G)\cong\mathcal{F}_e(G\times G)}(gh,h).\end{aligned}$$

Wir halten an dieser Stelle fest: Wenn wir auf $\mathcal{F}_e(G)$ *in der üblichen Weise eine Komultiplikation definieren, dann hat diese nicht die gewünschte Form, da sie nicht nach* $\mathcal{F}_e(G)\otimes\mathcal{F}_e(G)$ *abbildet. Allerdings liegen Produkte der Form* $(\Delta\phi)\cdot(1\otimes\psi)$ *in diesem Tensorprodukt. Im Vorgriff auf Abschnitt 3.2 können wir sagen, daß die Komultiplikation von der Form*

$$\Delta : \mathcal{F}_e(G) \longrightarrow M(\mathcal{F}_e(G)\otimes\mathcal{F}_e(G))$$

ist. Dabei steht $M(\mathcal{F}_e(G)\otimes\mathcal{F}_e(G)) \cong M(\mathcal{F}_e(G\times G))$ *für die Multiplikatoralgebra von* $\mathcal{F}_e(G\times G)$ *(siehe Definition 15). Die Multiplikatoralgebra* $M(A)$ *zu einer Algebra* A *ist (grob gesagt) die „größte"Algebra linearer Abbildungen auf* A*, die* A *als Ideal enthält (mit gewissen Verträglichkeitsbedingungen). Man kann zeigen, daß* $M(\mathcal{F}_e(G\times G)) = \mathcal{F}(G\times G)$*. Anschaulich ist dies klar, denn wenn man eine beliebige Funktion auf der Gruppe mit einer Funktion, die nur einen endlichen Träger besitzt, multipliziert, bekommt man natürlich ebenfalls eine Funktion mit endlichem Träger.*

3.1 Multiplikatoralgebren

Um die Definition von Multiplikatoralgebren zu motivieren, analysieren wir zuerst typische Eigenschaften von assoziativen Algebren A mit (oder auch ohne) Eins. Zunächst bemerken wir, daß jedes $a \in A$ eine lineare Abbildung definiert:

$$a \equiv L_a :\ A \longrightarrow A, \qquad b \longmapsto L_a(b) := a\cdot b \equiv ab.$$

Diese Abbildung ist kein Algebrenmorphismus, denn

$$L_a(bc) = L_a(b)c.$$

Die Abbildung L_a ist gerade die Multiplikation von links. Natürlich definiert jedes $a \in A$ auch eine Multiplikation von rechts:

$$R_a : A \longrightarrow A, \qquad b \longmapsto R_a(b) := ba.$$

Das Assoziativgesetz läßt sich als Verträglichkeit von Links- und Rechtsmultiplikation interpretieren:

$$a(bc) = (ab)c \Longleftrightarrow R_b(a) \cdot c = a \cdot L_b(c).$$

Wir nennen die Multiplikation nichtdegeneriert, falls aus $ab = 0 \ \forall b \Rightarrow a = 0$ und $ab = 0 \, \forall a \Rightarrow b = 0$ (oder anders ausgedrückt: die links- und rechtsregulären Darstellungen der Algebra sind treue Darstellungen, d.h. injektiv). Für Algebren mit Eins ist die Multiplikation immer nichtdegeneriert:

$$ab = 0 \ \forall b \in A \Rightarrow a1_A = 0 \Rightarrow a = 0.$$

Die nichtdegenerierte Multiplikation führt zu einer Kürzungseigenschaft, die wir des öfteren bei den Beweisen verwenden werden:

$$a \cdot b = c \cdot b \ \forall b \Rightarrow (a - c) \cdot b = 0 \ \forall b \Rightarrow a = c.$$

Nach diesen -sehr elementaren- Betrachtungen können wir nun die Multiplikatoralgebren definieren:

Definition 15: ***Multiplikatoralgebra***
Sei A eine Algebra über $\mathbb{C}$ mit oder ohne Eins. Ein Linksmultiplikator der Algebra A ist eine lineare Abbildung $L : A \to A$, so daß $L(ab) = L(a)b \, \forall a, b \in A$. Ein Rechtsmultiplikator ist eine lineare Abbildung $R : A \to A$ mit $R(ab) = aR(b) \, \forall a, b \in A$. Ein Multiplikator von A ist ein Paar (L, R) von verträglichen Links- und Rechtsmultiplikatoren, d.h. es gilt $R(a)b = aL(b)$. Die Menge der Linksmultiplikatoren bildet einen Vektorraum $L(A)$, die der Rechtsmultiplikatoren einen Vektorraum $R(A)$ und die Menge der Multiplikatoren einen Vektorraum $M(A)$. Die Komposition von Abbildungen macht aus diesen Vektorräumen Algebren.

Da jede der obigen Multiplikatoralgebren $L(A)$, $R(A)$ und $M(A)$ eine Eins besitzt, ist das Produkt in den Multiplikatoralgebren immer nichtdegeneriert. Falls das Produkt in A nichtdegeneriert ist, so gibt es eine natürliche Einbettung (d.h. einen injektiven Algebrenmorphismus) von A als Unteralgebra in $L(A)$, $R(A)$ und $M(A)$. Wenn die Multiplikation in A degeneriert ist, dann ist im allgemeinen keine injektive Einbettung möglich, denn für $ab = 0 \, \forall b \in A$ und $a \neq 0$ sind c und $a + c \ \forall c \in A$ die gleichen Multiplikatoren. Wie man sich leicht überlegt, gilt:

Satz 4: *Ist A eine Algebra mit Eins, dann ist $L(A) = R(A) = M(A) = A$.*

Dies sehen wir wie folgt: Die Eins der Algebra A läßt sich eindeutig auf die gesamte Multiplikatoralgebra fortsetzen. Außerdem ist die Algebra A ein Ideal der Multiplikatoralgebra.

Da die Eins zum Ideal gehört, müssen alle Elemente der Multiplikatoralgebra ebenfalls zum Ideal gehören.

Wir betrachten nun den Fall einer *-Algebra A. Wir rekapitulieren: Ist A eine assoziative Algebra über $\mathbb{C}$, dann ist eine *-Struktur eine konjugiert-lineare Abbildung $*$: $A \to A$, so daß $(a^*)^* = a$ und $(ab)^* = b^* a^*$. Ist A zusätzlich eine Algebra mit Eins, dann gilt außerdem $1^* = 1$. Ist $L \in L(A)$ so definieren wir $L^* \in R(A)$ durch $aL^* := (La^*)^*$. Analog wird durch den * ein Rechtsmultiplikator zu einem Linksmultiplikator und ein Multiplikator wiederum zu einem Multiplikator. Durch diese Definitionen werden die Multiplikatoralgebren zu *-Algebren mit A als *-Unteralgebra.

In Beispiel 7 hatten wir gesehen, daß man eine modifizierte Komultiplikation auf einer Algebra A erhält, deren Bild in einer Multiplikatoralgebra $M(A)$ liegt. Wenn wir auf der Ausgangsalgebra eine Koeins und eine Antipode definieren wollen, müssen wir überlegen, ob diese Abbildungen auf die Multiplikatoralgebra fortgesetzt werden können, da wir z.B. Ausdrücke der Form $(\epsilon \otimes id) \circ \Delta$ benötigen. Auch das Tensorprodukt zweier Algebren A und B mit nichtdegeneriertem Produkt muß genauer betrachtet werden. Dies alles wird in den Sätzen 5-7 behandelt.

Satz 5: *Seien A und B Algebren mit nichtdegeneriertem Produkt und der üblichen Algebrenstruktur auf dem Tensorprodukt $A \otimes B$. Die Multiplikation in $A \otimes B$ ist dann ebenfalls nichtdegeneriert.*

Beweis: Wir zeigen zunächst die Nichtdegeneriertheit der Rechtsmultiplikation: Es sei $x = \sum a_i \otimes b_i \in A \otimes B$. Außerdem sei $(c \otimes d)x = 0 \; \forall c \in A$ und $d \in B$. Dann gilt für jedes lineare Funktional ϕ aus dem Dualraum B^*:

$$(id \otimes \phi)((c \otimes d)x) = 0, \;\Rightarrow\; c \sum a_i \underbrace{\phi(db_i)}_{\in \mathbb{C}} = 0.$$

Dies gilt für alle $c \in A$. Wegen der Nichtdegeneriertheit der Multiplikation in A folgt:

$$\sum a_i \phi(db_i) = 0.$$

Die Gleichung gilt für alle linearen Funktionale $\phi \in B^*$, somit ergibt sich

$$\sum a_i \otimes db_i = 0. \tag{3.1}$$

Der letzte Folgerung kann man mit Basen von A und B leicht zeigen: Sei $\{e_{Ai}\}$ eine Basis von A und $\{e_{Bj}\}$ eine Basis von B. Für ein beliebiges Element aus dem Tensorprodukt hat man die Basisdarstellung $\sum \lambda^{ij} e_{Ai} \otimes e_{Bj}$. Ist nun

$$\sum (id \otimes \phi)(\lambda^{ij} e_{Ai} \otimes e_{Bj}) = 0 \; \forall \phi \in B^*,$$

dann folgt, indem wir für ϕ die kanonischen Dualraum-Elemente c_B^k nehmen (die in diesem unendlichdimensionalen Fall keine Basis im Dualraum bilden), mit $c_B^k(e_{Bi}) = \delta_i^k$:

$$\sum_{i,j}(id \otimes c_B^k)(\lambda^{ij} e_{Ai} \otimes e_{Bj}) = \sum_i \lambda^{ik} e_{Ai} = 0 \,\forall k \Longrightarrow \lambda^{ij} = 0 \,\forall i, j.$$

Führen wir in (3.1) die gleiche Argumentation nochmals für den ersten Faktor im Tensorprodukt durch (mit $\psi \in A^*$):

$$\sum \psi(a_i) d b_i = 0 \Rightarrow d \sum \psi(a_i) b_i = 0.$$

Dies gilt wiederum für alle $d \in B$, so daß wegen der Nichtdegeneriertheit der Multiplikation in B gilt:

$$\sum \psi(a_i) b_i = 0 \ \forall \psi \in A^* \Rightarrow \sum a_i \otimes b_i = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Analog überprüft man die Nichtdegeneriertheit der Linksmultplikation in $A \otimes B$ und damit letztlich die Nichtdegeneriertheit der Multiplikation in $A \otimes B$. •

Man kann nun leicht zeigen, daß der folgende Satz gilt :

Satz 6: *Es existiert eine natürliche Einbettung der Form $L(A) \otimes L(B) \subseteq L(A \otimes B)$, sowie $R(A) \otimes R(B) \subseteq R(A \otimes B)$ und $M(A) \otimes M(B) \subseteq M(A \otimes B)$.*

Beweis: Man muß für die jeweiligen Einbettungen injektive Homomorphismen definieren. Zum Beispiel für die Linksmultiplikation

$$\Phi(L_A \otimes L_B)(a \otimes b) := L_A a \otimes L_B b,$$
$$L_A \in L(A), L_B \in L(B), a \in A, b \in B.$$

$\Phi(L_A \otimes L_B)$ ist damit ein Linksmultiplikator, der durch die Abbildung $\Phi : L(A) \otimes L(B) \to L(A \otimes B)$ gegeben ist. Wir wollen auf den Beweis der Injektivität verzichten. •

Nun betrachten wir Homomorphismen der Form $\Phi : A \to M(B)$. Diese Homomorphismen können eindeutig auf $M(A)$ fortgesetzt werden, falls Φ nichtdegeneriert ist. Diese Eigenschaft müssen wir zunächst definieren.

Definition 16: ***Nichtdegenerierte Abbildung***

Ein Morphismus $\Phi : A \to M(B)$ heißt nichtdegeneriert, falls B von Vektoren der Form $\Phi(a)b$ und $b\Phi(a)$, $a \in A, b \in B$ aufgespannt wird.

Gerade solche Homomorphismen besitzen eindeutige Fortsetzungen auf die Multiplikatoralgebra (wie wir sie für eine Definition von Koeins und Antipode benötigen werden):

Satz 7: *Ist Φ ein nichtdegenerierter Homomorphismus von A nach $M(B)$, dann besitzt Φ eine eindeutige Erweiterung zu einem Homomorphismus $\tilde{\Phi} : M(A) \to M(B)$.*

Beweis: Es muß gelten, daß ($\forall c, c' \in M(A), a \in A, b \in B$):

$$\Phi(ca)b = \tilde{\Phi}(c)\Phi(a)b. \tag{3.2}$$

Nach Voraussetzung ist Φ nichtdegeneriert, d.h. die Elemente $\Phi(a)b$ spannen B auf. Deswegen ist $\tilde{\Phi}$ eindeutig. Es muß nur noch gezeigt werden, daß $\tilde{\Phi}$ ein Homomorphismus ist:

$$\begin{aligned} &\Phi(c(c'a))b = \tilde{\Phi}(c)\Phi(c'a)b = \tilde{\Phi}(c)\tilde{\Phi}(c')\Phi(a)b, \\ &\Phi((cc')a)b = \tilde{\Phi}(cc')\Phi(a)b. \end{aligned}$$

Die Fortsetzung von Φ auf ganz $M(A)$ als Homomorphismus wird demnach durch Gleichung (3.2) eindeutig definiert. •

Eine analoge Aussage, die wir hier nicht beweisen wollen, gilt für den Fall der *-Algebren:

Satz 8: *Ist Φ ein nichtdegenerierter *-Homomorphismus von A nach $M(B)$, dann besitzt Φ eine eindeutige Erweiterung zu einem *-Homomorphismus $M(A) \to M(B)$.*

3.2 Multiplikator-Hopf-Algebren

In diesem Abschnitt wollen wir die zu Beginn des Kapitels angesprochene Verallgemeinerung von Hopf-Algebren studieren: die Multiplikator-Hopf-Algebren. Insbesondere die Komultiplikation erfährt hierbei eine Redefinition. Die Verallgemeinerung ist natürlich nicht beliebig, sondern so konstruiert, daß für eine Hopf-Algebra mit Eins die Multiplikator-Hopf-Algebra gleich der Hopf-Algebra ist. Um die Verallgemeinerung zu konstruieren und zu motivieren, müssen wir zuerst die Definition einer Hopf-Algebra genauer analysieren. Wir werden feststellen, daß (bei gegebener Komultiplikation) eine Hopf-Algebra durch zwei bilineare Abbildungen $T_1, T_2 : H \otimes H \to H \otimes H$ vollständig charakterisiert wird. Gerade diese Abbildungen werden wir dann für die Definition der Multiplikator-Hopf-Algebra verwenden.

Satz 9: *Sei H eine Hopf-Algebra. Dann gilt, daß die linearen Abbildungen*

$$\begin{aligned} T_1 :\ H \otimes H &\longrightarrow H \otimes H, \\ a \otimes b &\longmapsto T_1(a \otimes b) := \Delta(a)(1 \otimes b), \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} T_2 :\ H \otimes H &\longrightarrow H \otimes H, \\ a \otimes b &\longmapsto T_2(a \otimes b) := (a \otimes 1)\Delta(b) \end{aligned} \tag{3.4}$$

bijektiv sind.

Beweis: Der Beweis erfolgt durch explizite Angabe der Umkehrabbildungen. Wir definieren sie wie folgt:

$$\begin{aligned} R_1 : \; H \otimes H &\longrightarrow H, \\ a \otimes b &\longmapsto R_1(a \otimes b) := ((id \otimes S)\Delta(a)) \cdot (1 \otimes b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2 : \; H \otimes H &\longrightarrow H, \\ a \otimes b &\longmapsto R_2(a \otimes b) := (a \otimes 1) \cdot ((S \otimes id)\Delta(b)). \end{aligned}$$

Wir müssen nun zeigen, daß $T_1R_1 = R_1T_1 = T_2R_2 = R_2T_2 = id$ gilt. Wir zeigen dies am Beispiel von T_1R_1 und R_1T_1:

$$\begin{aligned} (T_1R_1)(a \otimes b) &= T_1(a_1 \otimes S(a_2) \cdot b) = \Delta(a_1) \cdot (1 \otimes S(a_2) \cdot b) \\ &= a_1 \otimes a_2 \cdot S(a_3) \cdot b = a_1 \otimes \epsilon(a_2)b \\ &= a \otimes b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (R_1T_1)(a \otimes b) &= R_1(\Delta(a) \cdot (1 \otimes b)) = R_1(a_1 \otimes a_2 \cdot b) \\ &= ((id \otimes S)\Delta(a_1)) \cdot (1 \otimes a_2 \cdot b) = (a_1 \otimes S(a_2))(1 \otimes a_3 \cdot b) \\ &= a_1 \otimes S(a_2) \cdot a_3 \cdot b = a_1 \otimes \epsilon(a_2)b = a_1\epsilon(a_2) \otimes b \\ &= a \otimes b. \end{aligned}$$

In den Rechnungen wurden wiederholt Koeins- und Antipodenbedingung benutzt. Eine völlig analoge Rechnung zeigt, daß $R_2T_2 = T_2R_2 = id$. •

Wir werden später sehen, daß eine Algebra mit Eins, die eine Komultiplikation besitzt, so daß die Abbildungen T_1 und T_2 bijektiv sind, bereits eine Hopf-Algebra ist.

Bemerkung 5: *Man kann sich allerdings an dieser Stelle fragen, ob man z.B. die Abbildung T_1 nicht auch definieren könnte als*

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 : \; H \otimes H &\longrightarrow H, \\ a \otimes b &\longmapsto \tilde{T}_1(a \otimes b) := \Delta(a)(b \otimes 1). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Diese Abbildung muß jedoch in einer Hopf-Algebra nicht bijektiv sein. Sie ist es, falls die Antipode S eine Inverse besitzt. Dies ist für alle endlichdimensionalen Hopf-Algebren der Fall und für alle Hopf-Algebren, die kommutativ oder kokommutativ sind. Wir hatten auch schon erwähnt, daß einige Autoren die Antipode sowieso als bijektiv voraussetzen. Ein wenig mag diese „Asymmetrie“einen verwundern, da die Komultiplikation selbst keinen Faktor im Tensorprodukt in irgendeiner Form auszeichnet. Man kann sich aber klarmachen, daß die Abbildungen $\Delta(a)(1 \otimes b)$ und $\Delta(a)(b \otimes 1)$ strukturell durchaus verschieden sind. Man betrachte beispielsweise $\mu(\Delta(a)(1 \otimes b)) = a_1a_2b$ und $\mu(\Delta(a)(b \otimes 1)) = a_1ba_2$.

Im ersten Fall werden a_1 *und* a_2 *nur von links an* b *multipliziert, während sie im zweiten Fall von links und rechts multipliziert werden. Man sieht auch schnell, daß die obige Konstruktion von* R_1 *mit* $\tilde{T}_1$ *so nicht funktioniert.*

Wir benutzen nun die Abbildungen T_1 und T_2, sowie die Multiplikatoralgebren, um verallgemeinerte Hopf-Algebren zu definieren. Diese Hopf-Algebren werden zwar weiterhin durch die Abbildungen T_1 aus (3.3) und T_2 aus (3.4) charakterisiert, die Komultiplikation ist jedoch etwas allgemeiner definiert. Wir wollen von nun an voraussetzen, daß die Algebren mit einer nichtdegenerierten Multiplikation versehen sind, so daß sie in ihre Multiplikatoralgebra eingebettet werden können. Zunächst soll die Definition der Komultiplikation gegeben werden:

Definition 17: ***Komultiplikation***
Eine Komultiplikation auf der Algebra H *(mit oder ohne Eins) ist ein Algebrenmorphismus*

$$\begin{aligned} \Delta: \ H &\longrightarrow M(H \otimes H), \\ a &\longmapsto \Delta(a), \end{aligned}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

$$\Delta(a)(1 \otimes b) \in H \otimes H, \ \forall a, b \in H, \tag{3.6}$$

$$(a \otimes 1)\Delta(b) \in H \otimes H, \ \forall a, b \in H, \tag{3.7}$$

Die Komultiplikation ist koassoziativ im folgenden Sinne($\forall a, b, c \in H$*):*

$$(a \otimes 1 \otimes 1)(\Delta \otimes id)(\Delta(b)(1 \otimes c)) = (id \otimes \Delta)((a \otimes 1)\Delta(b))(1 \otimes 1 \otimes c). \tag{3.8}$$

Die Koassoziativität hat hier eine etwas ungewohnte Gestalt angenommen. Die Multiplikation mit Termen wie $(a \otimes 1 \otimes 1)$, $(1 \otimes c)$, etc. sorgt jedoch dafür, daß immer wieder in den Definitionsbereich von Δ „zurückgekehrt“wird. Ein Ausdruck der Form $(\Delta \otimes id) \circ \Delta$ wäre mit obiger Definition der Komultiplikation gar nicht definiert. Man beachte, daß in (3.6) und (3.7) die $1 \in M(H \otimes H)$ ist, d.h. daß sie die Eins der Multiplikatoralgebra ist und nicht in H liegen muß. Deswegen sind diese Bedingungen nichttrivial. Wir wollen kurz zeigen, daß die Komultiplikation einer Hopf-Algebra mit Eins im obigen Sinne koassoziativ ist (und sich damit die Definition rechtfertigen läßt):

$$\begin{aligned} &(a \otimes 1 \otimes 1)(\Delta \otimes id)(\Delta(b)(1 \otimes c)) \\ =\ &(a \otimes 1 \otimes 1)(\Delta \otimes id)(b_1 \otimes b_2 c) = (a \otimes 1 \otimes 1)(b_{11} \otimes b_{12} \otimes b_2 c) \\ =\ &ab_1 \otimes b_2 \otimes b_3 c. \end{aligned}$$

$$(id \otimes \Delta)((a \otimes 1)\Delta(b))(1 \otimes 1 \otimes c)$$

$$= (id \otimes \Delta)(ab_1 \otimes b_2)(1 \otimes 1 \otimes c) = (ab_1 \otimes b_{21} \otimes b_{22})(1 \otimes 1 \otimes c)$$
$$= ab_1 \otimes b_2 \otimes b_3 c.$$

Wir haben hierbei die Techniken beim Rechnen mit der Komultiplikation in üblichen Hopf-Algebren mit Eins benutzt. Nun können wir Multiplikator-Hopf-Algebren als verallgemeinerte Hopf-Algebren definieren.

Definition 18: ***Multiplikator-Hopf-Algebra***
Sei H eine Algebra mit oder ohne Eins und sei Δ eine Komultiplikation in obigem Sinne auf H. Man nennt H eine Multiplikator-Hopf-Algebra, falls die linearen Abbildungen $T_1, T_2 : H \otimes H \to H \otimes H$, die durch

$$T_1(a \otimes b) = \Delta(a)(1 \otimes b), \qquad T_2(a \otimes b) = (a \otimes 1)\Delta(b). \tag{3.9}$$

definiert werden, beide bijektiv sind.

Wegen der Bijektivität von T_1 und T_2 sieht man, daß $\Delta(a)(1 \otimes b)$ und $(a \otimes 1)\Delta(b)$ ganz $H \otimes H$ aufspannen. Deshalb ist Δ ein nichtdegenerierter Homomorphismus und kann nach Satz 7 eindeutig auf ganz $M(H)$ fortgesetzt werden.

Da wir wissen, daß für eine Hopf-Algebra die Abbildungen T_1, T_2 bijektiv sind, bilden Hopf-Algebren also einen Spezialfall der Multiplikator-Hopf-Algebren. Wir müssen allerdings noch zeigen, daß die Existenz einer Komultiplikation, sowie der Abbildungen T_1 und T_2, auch die Existenz einer Koeins und einer Antipode zur Folge haben.

3.2.1 Konstruktion der Koeins

Wir wollen nun bei gegebener Multiplikator-Hopf-Algebra (H, Δ) eine Koeins ϵ konstruieren, genauer gesagt eine Abbildung, welche die Eigenschaften der Koeins für Hopf-Algebren erfüllt. Dazu definieren wir zuerst eine lineare Abbildung von H in den Linksmultiplikator:

$$\begin{aligned} E : H &\longrightarrow L(H), \\ a &\longmapsto E(a). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Diese Abbildung wird eindeutig mittels der bijektiven Abbildung T_1 definiert:

$$E(a)b := (\mu \circ T_1^{-1})(a \otimes b).$$

Es ist allerdings zu zeigen, daß $E(a)$ für alle $a \in H$ ein Linksmultiplikator ist. Wir führen den Beweis in drei Schritten. In den beiden ersten Schritten beweisen wir Eigenschaften der Abbildungen T_1^{-1} und μ, im dritten Schritt wird die Linksmultiplikator-Eigenschaft von $E(a)$ gezeigt:

1. $T_1^{-1}(x(1 \otimes c)) = T_1^{-1}(x)(1 \otimes c), \forall x \in H \otimes H, c \in H.$

2. $\mu(x(1 \otimes c)) = \mu(x)c$, $\forall x \in H \otimes H, c \in H$.

3. $E(a)bc = (E(a)b)c$, $\forall a, b, c \in H$.

Zu 1.:

Sei $x = a \otimes b$ und $a, b \in H$. Dann gilt unter Verwendung der Definition von T_1 aus (3.3) einerseits

$$T_1(x(1 \otimes c)) = T_1((a \otimes b)(1 \otimes c)) = T_1(a \otimes bc) = \Delta(a)(1 \otimes bc)$$

und andererseits

$$T_1(x)(1 \otimes c) = T_1(a \otimes b)(1 \otimes c) = \Delta(a)(1 \otimes bc).$$

also

$$T_1(x(1 \otimes c)) = T_1(x)(1 \otimes c).$$

Schreibt man in dieser Gleichung nun $x = T_1^{-1}(y)$, $y \in H \otimes H$ (dies ist wegen der Bijektivität von T_1 möglich) ergibt sich

$$T_1(T_1^{-1}(y)(1 \otimes c)) = y(1 \otimes c),$$

und damit letztlich

$$T_1^{-1}(y)(1 \otimes c) = T_1^{-1}(y(1 \otimes c), \forall y \in H \otimes H, c \in H.$$

Zu 2.:

$$\mu((x(1 \otimes c)) = \mu((a \otimes b)(1 \otimes c)) = abc = \mu(a \otimes b)c = \mu(x)c.$$

Zu 3.:

$$\begin{aligned} E(a)(bc) &= (\mu \circ T_1^{-1})(a \otimes bc) = (\mu \circ T_1^{-1})((a \otimes b)(1 \otimes c)) = \mu(T_1^{-1}(a \otimes b)(1 \otimes c)) \\ &= \mu(T_1^{-1}(a \otimes b))c = (E(a)b)c. \end{aligned}$$ •

Als nächstes betrachten wir das Bild der Abbildung E und zeigen, daß

$$E(H) \subseteq \mathbb{C}1.$$

Wir benutzen dazu die Abbildung T_2 wie sie in (3.4) definiert wurde und überlegen zunächst, daß

$$(id \otimes E)(T_2(a \otimes b)) \equiv (id \otimes E)((a \otimes 1)\Delta(b)) = ab \otimes 1 \tag{3.11}$$

gilt. Wenn man dies für ein beliebiges zerlegbares Element $a \otimes b \in H \otimes H$ bewiesen hat, folgt wegen der Linearität der Abbildungen und der Surjektivität von T_2 sofort, daß

$(id \otimes E)(H \otimes H) \subseteq H \otimes 1$ ist. Dies liefert das gewünschte Ergebnis: $E(b) \subseteq \mathbb{C}1$, $\forall b \in H$. Wir müssen allerdings nun noch (3.11) beweisen. Wegen der Bijektivität von T_1 hat jedes Element $a \otimes b \in H \otimes H$ ein Urbild $a_i \otimes b_i$. Hierbei ist i ein Summationsindex und steht ausnahmsweise nicht für das Bild der Komultiplikation. Wir setzen also

$$a \otimes b := T_1(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i) = \Delta(a_i)(1 \otimes b_i).$$

Anwendung von $(\Delta \otimes id)$ auf die obige Gleichung und Links-Multiplikation mit $c \otimes 1 \otimes 1$, $c \in H$ liefert:

$$\underbrace{(c \otimes 1 \otimes 1)(\Delta(a) \otimes b)}_{=((c\otimes 1)\Delta(a))\otimes b} = (c \otimes 1 \otimes 1)(\Delta \otimes id)(\Delta(a_i)(1 \otimes b_i))$$

Unter Ausnutzung der Koassoziativität auf der rechten Seite erhält man

$$((c \otimes 1)\Delta(a)) \otimes b = (id \otimes \Delta)((c \otimes 1)\Delta(a_i))1 \otimes 1 \otimes b_i).$$

Es sei $\phi \in H^*$ ein beliebiges Funktional. Wir wenden $\phi \otimes id \otimes id$ auf die letzte Gleichung an:

$$\begin{aligned} &(\phi \otimes id)((c \otimes 1)\Delta(a)) \otimes b \\ = {} &\Delta((\phi \otimes id)((c \otimes 1)\Delta(a_i)))(1 \otimes b_i) = T_1((\phi \otimes id)((c \otimes 1)\Delta(a_i)) \otimes b_i. \end{aligned}$$

Unter Benutzung der Definition (3.10) von E ergibt sich

$$E((\phi \otimes id)((c \otimes 1)\Delta(a)))b = (\phi \otimes id)((c \otimes 1)\Delta(a_i))b_i.$$

Dies kann man noch ein wenig weiter umformen:

$$\begin{aligned} (\phi \otimes id)((id \otimes E)((c \otimes 1)\Delta(a))(1 \otimes b)) &= (\phi \otimes id)((c \otimes 1)\Delta(a_i)(1 \otimes b_i)) \\ &= (\phi \otimes id)((c \otimes 1)(a \otimes b)). \end{aligned}$$

Dies gilt für alle Funktionale ϕ und somit ergibt sich das gewünschte Ergebnis

$$(id \otimes E)((c \otimes 1)\Delta(a))(1 \otimes b) = (ca \otimes 1)(1 \otimes b).$$

und damit die zu beweisende Gleichung (3.11). •

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Koeins der Multiplikator-Hopf-Algebren definieren.

Definition 19*: Koeins der Multiplikator-Hopf-Algebra*

Die Koeins der Multiplikator-Hopf-Algebra (H, Δ) ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \epsilon : H &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ h &\longmapsto \epsilon(h), \qquad \epsilon(h)1 = E(h). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Es soll kurz gezeigt werden, daß die oben definierte Koeins die üblichen Eigenschaften besitzt und insbesondere die Koeinsbedingung erfüllt. Wir wollen dies in einem Satz festhalten:

Satz 10: *Die Koeins einer Multiplikator-Hopf-Algebra ist ein Algebrenmorphismus, d.h. es gilt*

$$\epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b). \tag{3.13}$$

Die Koeins erfüllt die Koeinsbedingung

$$(\epsilon \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \epsilon) \circ \Delta = id, \tag{3.14}$$

wobei $\epsilon \otimes id$ *und* $id \otimes \epsilon$ *die eindeutigen Fortsetzungen auf die gesamte Multiplikator-Hopf-Algebra* $M(H \otimes H)$ *sind.*

Beweis: Wir wollen hier nur die Koeinsbedingung nachprüfen: Aus (3.11) und (3.12) ergibt sich sofort

$$(id \otimes \epsilon)((a \otimes 1)\Delta(b)) = ab \Rightarrow a((id \otimes \epsilon) \circ \Delta(b)) = ab \Rightarrow (id \otimes \epsilon) \circ \Delta = id.$$

Andererseits folgt aus (3.10):

$$\begin{aligned} & E(a)b = (\mu \circ T_1^{-1})(a \otimes b), \\ \Rightarrow\ & (\epsilon \otimes id)(a \otimes b) = (\mu \circ T_1^{-1})(a \otimes b), \\ \Rightarrow\ & (\epsilon \otimes id)(T_1(a \otimes b)) = \mu(a \otimes b) \equiv ab, \\ \Rightarrow\ & (\epsilon \otimes id)(\Delta(a)(1 \otimes b)) = ab, \\ \Rightarrow\ & ((\epsilon \otimes id) \circ \Delta(a))b = ab \Rightarrow (\epsilon \otimes id) \circ \Delta = id. \end{aligned}$$

•

3.2.2 Konstruktion der Antipode

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß aus der Definition der Multiplikator-Hopf-Algebra die Existenz einer Antipode folgt. Da die bei den Beweisen angewandten Techniken sehr ähnlich zu denen bei der Koeins sind, werden wir sie auslassen.

Satz 11: *Es sei* S *eine Abbildung der Form*

$$\begin{aligned} S : H &\longrightarrow L(H), \\ a &\longmapsto S(a), \qquad\qquad S(a)b := (\epsilon \otimes id)T_1^{-1}(a \otimes b). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Man kann für diese Abbildung zeigen, daß $S(a)$ nicht nur ein Links- sondern auch ein Multiplikator ist, d.h. $S(a) \in M(H)$, $\forall a \in H$. Außerdem ist S ein Algebren-Antimorphismus: $S(ab) = S(b)S(a)$, $\forall a, b \in H$. Daraus ergibt sich der folgende Satz:

Satz 12: *Falls H eine Multiplikator-Hopf-Algebra ist, existiert ein Algebren-Antimorphismus $S : H \to M(H)$ (wie in (3.15) definiert), s.d $\forall a, b, c \in H$*

$$\mu((id \otimes S)((c \otimes 1)\Delta(a))(1 \otimes b)) = c\epsilon(a)b, \tag{3.16}$$

$$\mu((c \otimes 1)(S \otimes id)(\Delta(a)(1 \otimes b))) = c\epsilon(a)b. \tag{3.17}$$

Falls H eine Algebra mit Eins ist, ergibt S gerade die übliche Antipode und (3.16), (3.17) sind die Antipodenbedingung.

Wir haben somit gezeigt, daß sich auch für eine Algebra ohne Eins eine Hopf-Algebren-Struktur definieren läßt, wobei die Strukturabbildungen und ihre Bedingungen etwas modifiziert werden mußten. Die üblichen Hopf-Algebren sind in den Multiplikator-Hopf-Algebren als Spezialfall enthalten. Abschließend wollen wir das am Anfang des Kapitels vorgestellte Beispiel 7 noch vervollständigen.

Beispiel 8: ***Funktionenalgebra von Funktionen mit endlichem Träger (2)***

Wir betrachten wieder die Funktionen mit endlichem Träger auf einer Gruppe G und benutzen Beispiel 7. Die Komultiplikation ist wie üblich gegeben durch

$$\Delta(f)(h, h') = f(hh'), \ f \in \mathcal{F}_e(G); h, h' \in G.$$

Das hatten wir bereits gezeigt. Betrachten wir nun noch Koeins und Antipode.

Für die Koeins ergibt sich (mit $f, g \in \mathcal{F}_e(G); t \in G$):

$$\begin{aligned} \epsilon(f)g(t) &= (\mu T_1^{-1}(f \otimes g))(t) = (T_1^{-1}(f \otimes g))(t, t) \\ &= (f \otimes g)(tt^{-1}, t) = f(e)g(t). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Somit ergibt sich wie bei den üblichen Hopf-Algebren, daß $\epsilon(f) = f(e)$.

Für die Antipode gilt (mit $f, g \in \mathcal{F}_e(G); t \in G$)

$$\begin{aligned} (S(f)g)(t) &= ((\epsilon \otimes id)T_1^{-1}(f \otimes g))(e, t) \\ &= (f \otimes g)(t^{-1}, t) = f(t^{-1})g(t). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Auch hier bekommen wir die bekannte Formel $S(f)(t) = f(t^{-1})$.

Kapitel 4

Von Gruppen zu Quantengruppen

Man kann in Analogie zu Funktionenalgebren über einer endlichen Gruppe auch die Eigenschaften der Funktionenalgebren über kompakten Gruppen analysieren und sie verallgemeinern, indem man nichtkommutative Algebren, welche die gleichen Eigenschaften besitzen, als kompakte Quantengruppen auffaßt. Diese Quantengruppen sind keine Hopf-Algebren, da sie i.a. keine Koeins und Antipode besitzen. Statt diesen linearen Abbildungen, muß man topologische Bedingungen einführen, die im Grenzfall der Funktionenalgebra über einer kompakten Gruppe, zum neutralen Element und zur Inversen korrespondieren. Auch für diskrete Gruppen ist eine solche Prozedur möglich und führt zu diskreten Quantengruppen, die dual zu den kompakten Quantengruppen sind. Kompakte und diskrete Quantengruppen sind Spezialfälle der lokalkompakten Quantengruppen.

4.1 Einführung

Bisher haben wir uns im Wesentlichen mit endlichen Gruppen und den ihnen assoziierten Hopf-Algebren beschäftigt. Die allgemeine Definition einer Hopf-Algebra ergab sich als Verallgemeinerung der Eigenschaften von Funktionenalgebren über einer (endlichen) Gruppe. Die Auseinandersetzung mit Fragen topologischer Natur mußte dabei nicht geführt werden. Die Situation ändert sich natürlich schlagartig, wenn man versucht, ganz in Analogie zu den endlichen Gruppen, auch für lokalkompakte oder kompakte Gruppen Funktionenalgebren mit einer Art „Hopf-Algebren-Struktur“zu finden. Da eine lokalkompakte Gruppe ein topologischer, lokalkompakter Raum mit einer Gruppenstruktur ist, kann man erwarten, daß eine lokalkompakte Quantengruppe ein (nichtkommutativer) Raum mit Strukturen sein wird, die zu den Gruppenstrukturen korrespondieren, und daß die Topologie der lokalkompakten Gruppe durch Zusatzstrukturen ausgedrückt wird. Der „topologische Anteil“läßt sich dadurch erledigen, daß man mit C^*-Algebren arbeitet. Dies ist nicht unbedingt zwingend (es gibt auch andere Zugänge zur Quantengruppen-Theorie), aber aus Sicht der Nichtkommutativen Geometrie und dem Gelfand-Naimark-Theorem sehr natürlich. Die Definition von Komultiplikation, Koeins und Antipode ist für den Fall der lokalkompakten Gruppe schwieriger als im Fall der endlichen Gruppe, da die kanonischen Kandidaten für diese Abbildungen modifiziert werden müssen; im ungünstigsten Fall existieren diese Abbildungen überhaupt nicht, wobei dies empfindlich davon abhängt, wie man eine Quantengruppe genau definiert. Ein Teil der Probleme resultiert daraus, daß man gezwungen ist, mit dem topologischen Tensorprodukt zu arbeiten. Ausdrücke der Form $\epsilon \otimes id$ oder $S \otimes id$ aus der Koeins- und der Antipodenbedingung sind aber i.a. nicht auf dem topologischen Tensorprodukt definiert. Auch die Multiplikation ist in der Form, in der wir sie bisher benutzt haben, nur auf dem algebraischen Tensorprodukt gegeben. Um diese Probleme zu umgehen, empfiehlt es sich, statt mit Koeins und Antipode (die algebraischer Ausdruck von neutralem Element und Inverse sind) zu arbeiten, einen anderen Weg zu finden, um die Gruppenstrukturen algebraisch zu charakterisieren.

Die Definition der lokalkompakten Quantengruppe ist so zu wählen, daß man im Spezialfall der endlichen Gruppe wieder die übliche Hopf-Algebrenstruktur erhält und außerdem die wohlbekannten kompakten und diskreten Quantengruppen eingeschlossen werden. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß die Frage, wie man lokalkompakte, kompakte, diskrete, ja sogar endliche Quantengruppen definiert, in der Literatur keineswegs eindeutig beantwortet wird. Die Definitionen hängen entscheidend davon ab, welche Axiome man benutzt und welche Beispiele man gerne einschließen möchte. Vor dem Hintergrund der Nichtkommutativen Geometrie, die mit C^*-Algebren arbeitet, erscheint es uns natürlich, dies auch von Beginn an für Quantengruppen zu tun. Die folgende Behandlung von kompakten Quantengruppen geht wesentlich auf die grundlegenden Arbeiten von Woronowicz [71, 70, 69] zurück. Die Darstellung orientiert sich an [45]. In erster Linie werden wir uns im Folgenden mit kompakten Quantengruppen beschäftigen. Es ist allerdings nützlich, kompakte Quantengruppen als kompakte lokalkompakte Quantengruppen aufzufassen. Dies entspricht dem momentanen Forschungsstand und motiviert die Definition der kompakten Quantengruppe aus dem Wunsch heraus, sie als Spezialfall von lokalkompakten Quantengruppen zu behandeln. Die Theorie der lokalkompakten Quantengruppen ist erst kürzlich bis zu einem gewissen Grad befriedigend aufgestellt worden [43], kann aber noch nicht den Anspruch erheben, ähnlich etabliert und studiert zu sein wie der kompakte Fall. Deswegen werden wir nur kurz auf die Probleme, die im lokalkompakten Fall auftreten, eingehen und uns dann auf kompakte Quantengruppen konzentrieren. Wir werden in der Darstellung auf Beweise, die sich mit Stetigkeit und Normierungen befassen, weitestgehend verzichten, da dies den Rahmen der Dissertation sprengen würde. Stattdessen wird ein mehr intuitiver Umgang mit den Grundlagen vermittelt, wobei sich die Erfahrungen mit den Multiplikator-Hopf-Algebren auszahlen werden. Wir wollen noch erwähnen, daß es mittlerweile eine Theorie von Hopf-C^*-Algebren gibt [62], welche die lokalkompakten Quantengruppen einschließt. Dort werden viele der auftretenden Probleme durch Einführung des Haagerup-Tensorproduktes gelöst.

Wir müssen an dieser Stelle noch ein wenig Notation einführen. Es seien A und B C^*-Algebren. Dann benutzen wir folgende Bezeichnungsweisen:

$$\begin{aligned} A \odot B: &\quad \text{algebraisches Tensorprodukt} \\ \\ A \otimes B: &\quad \text{Vervollständigung des algebraischen Tensorproduktes.} \\ \\ M(A): &\quad \text{Multiplikatoralgebra von } A. \end{aligned}$$

Die Vervollständigung des algebraischen Tensorproduktes ist bezüglich der minimalen C^*-Norm gemeint [67].

4.1.1 Einschub: Multiplikatoralgebren

Um die Einführung von Multiplikatoralgebren (die wir in rein algebraischer Form aus Kapitel 3 kennen) zu motivieren, betrachten wir zunächst einen lokal-kompakten Hausdorff-Raum X und dessen Kompaktifizierungen Y. Unter diesen gibt es eine maximale, die sogenannte Stone-Cech-Kompaktifizierung. Sie wird üblicherweise mit βX bezeichnet. Der Philosophie der Nichtkommutativen Geometrie entsprechend, können wir dies alles aber auch auf der Funktionenstufe betrachten. Dem lokalkompakten Raum X entspricht dann die C^*-Algebra $C_0(X)$ (=Menge der komplexwertigen stetigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden), den Kompaktifizierungen Y entsprechen unitale C^*-Algebren $C(Y)$ (=Menge der komplexwertigen stetigen Funktionen), in die $C_0(X)$ als wesentliches Ideal eingebettet ist, und die Stone-Cech-Kompaktifizierung ergibt eine unitale C^*-Algebra $C(\beta X)$, die wir als die Multiplikatoralgebra $M(C_0(X)) := C(\beta X)$ definieren. Sie ist die größte unitale, kommutative C^*-Algebra, die $C_0(X)$ als wesentliches Ideal enthält. Ein wesentliches Ideal hat einen nichttrivialen Durchschnitt mit allen anderen Idealen. Man kann nun wieder verallgemeinern: Ist A eine beliebige C^*-Algebra, dann ist ihre Multiplikatoralgebra $M(A)$ die größte C^*-Algebra, die A als wesentliches Ideal enthält. Eine andere, äquivalente Möglichkeit Multiplikatoralgebren zu definieren, besteht darin, auf A die strikte Topologie einzuführen und $M(A)$ als die Vervollständigung von A bezüglich der strikten Topologie zu schreiben [67].

$$\begin{array}{lcl} \text{Kompaktifizierung} & \Longleftrightarrow & \text{Unitisierung} \\ \text{Stone-Cech-Kompaktifizierung} & \Longleftrightarrow & \text{Multiplikatoralgebren} \end{array}$$

Ist X ein lokalkompakter Raum so gilt, daß

$$M(C_0(X)) = C_b(X),$$

d.h. die Multiplikatoralgebra der im Unendlichen verschwindenden, stetigen Funktionen ist gleich mit der Menge der stetigen, beschränkten Funktionen (für einen Beweis siehe z.B. [37]).

4.1.2 Komultiplikation auf C^*-Algebren

Die aus Sicht des Gelfand-Naimark-Theorems relevante Funktionenalgebra über einer kompakten Gruppe ist die unitale C^*-Algebra $C(G)$. Diese besteht aus den stetigen komplexwertigen Funktionen auf G. Man kann nun versuchen, auf dieser Algebra eine Komultiplikation kanonisch durch

$$(\Phi(f))(g,h) := f(gh),\ \ f \in C(G); g,h \in G$$

zu definieren. Dabei ist folgendes anzumerken.

1. Φ ist eine Abbildung der Form $\Phi : C(G) \to C(G) \otimes C(G)$.
   Dabei ist $\otimes$ das topologische Tensorprodukt, d.h. das Bild von ϕ liegt nicht im algebraischen Tensorprodukt.

2. Für eine lokalkompakte Gruppe ist die relevante Funktionenalgebra $C_0(G)$, d.h. die stetigen im Unendlichen verschwindenden komplexwertigen Funktionen auf G. Diese C^*-Algebra besitzt keine 1. Um Φ auf einer lokalkompakten Gruppe zu definieren, ist es notwendig, als Bildbereich die Multiplikatoralgebra $M(C_0(G)\otimes C_0(G))$ zuzulassen.

3. Φ ist ein *Homomorphismus zwischen C^*-Algebren und demnach automatisch stetig (oder damit gleichbedeutend beschränkt).

Im nächsten Schritt wollen wir wiederum verallgemeinern und eine Komultiplikation auf einer C^*-Algebra (mit oder ohne Eins) definieren. Um die Koassoziativität formulieren zu können, müssen wir den Begriff der nichtdegenerierten Abbildung einführen.

Definition 20: ***Nichtdegenerierter*** ****Homomorphismus***

Es sei A eine C^*-Algebra und $M(A \otimes A)$ die Multiplikatoralgebra des Tensorproduktes. Ein *Homomorphismus

$$\begin{aligned} \psi : A &\longrightarrow M(A \otimes A), \\ a &\longmapsto \Psi(a) \end{aligned}$$

heißt nichtdegeneriert, falls $\Psi(A)(A \otimes A)$ dicht in $A \otimes A$ liegt.

Wir werden sehen, daß es gerade diese Eigenschaft ist, die eine Definition von Quantengruppen im lokalkompakten (und insbesondere kompakten) Fall ermöglicht. Wichtig sind auch *-Homomorphismen der folgenden Form auf dem algebraischen Tensorprodukt $\odot$:

$$\begin{aligned} \Psi \otimes id : A \odot A &\longrightarrow M(A \otimes A \otimes A), \\ id \otimes \Psi : A \odot A &\longrightarrow M(A \otimes A \otimes A), \end{aligned}$$

die zu *-Homomorphismen auf dem Tensorprodukt $\otimes$ fortgesetzt werden können:

$$\Psi \otimes id : A \otimes A \longrightarrow M(A \otimes A \otimes A),$$
$$id \otimes \Psi : A \otimes A \longrightarrow M(A \otimes A \otimes A).$$

Falls Ψ nichtdegeneriert ist, kann man weiter fortsetzen zu *-Homomorphismen

$$\Psi \otimes id : M(A \otimes A) \longrightarrow M(A \otimes A \otimes A),$$
$$id \otimes \Psi : M(A \otimes A) \longrightarrow M(A \otimes A \otimes A).$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun eine Komultiplikation definieren. Aus der Existenz einer solchen Komultiplikation folgt jedoch nicht die Existenz von Antipode und Koeins.

Definition 21*: Komultiplikation*
Ein nichtdegenerierter *Homomorphismus $\Phi : A \longrightarrow M(A \otimes A)$ auf einer C^*-Algebra A heißt koassoziativ, falls

$$(\Phi \otimes id)\Phi = (id \otimes \Phi)\Phi \tag{4.1}$$

gilt. Man nennt dann Φ eine Komultiplikation.

Als *Homomorphismus zwischen C^*-Algebren ist die Komultiplikation stetig und die Nichtdegeneriertheit von Φ stellt sicher, daß die Koassoziativität in der von Hopf-Algebren gewohnten Form geschrieben werden kann. Hat man eine Funktionenalgebra mit einer solchen Komultiplikation über einem Raum, dann korrespondiert diese Komultiplikation zu einer assoziativen Verknüpfung auf dem Raum, anders gesagt: Die Algebra ist eine Funktionenalgebra über einer Halbgruppe. Es stellt sich die Frage, welche zusätzlichen Bedingungen man stellen muß, damit der darunterliegende Raum eine Gruppe wird. Wir werden sehen, daß die Forderung nach Existenz einer Koeins und einer Antipode keine gute Wahl ist.

4.2 Endliche Quantengruppen

Betrachten wir zunächst nochmals den Fall einer endlichen Gruppe. Wie wir wissen, bildet die Algebra der komplexwertigen Funktionen $\mathbb{C}(G)$ auf dieser Gruppe eine Hopf-Algebra. Definiert man

$$f^*(g) = \overline{f(g)}$$

so kann man leicht zeigen, daß $\mathbb{C}(G)$ eine Hopf-*Algebra bildet. Es gilt:

1. Die Koeins ϵ ist automatisch ein *Homomorphismus.

2. Die Antipode ist automatisch ein Antihomomorphismus.

3. Für den Zusammenhang zwischen Antipode κ und der Inversion * erhält man:

$$\kappa(\kappa(h)^*)^* = h,\ \forall h \in A.$$

Es sei extra darauf hingewiesen, daß die Antipode für nichtkommutative *Hopf-Algebren kein *Homomorphismus ist. Dies folgt aus der Antipodenbedingung. Wir haben uns dem in der Quantengruppentheorie üblichen Gebrauch angepaßt und bezeichnen die Antipode mit κ, sowie die Komultiplikation mit Φ. Koeins und Antipode sind eindeutig. Die Algebra $\mathbb{C}(G)$ ist endlichdimensional, da jede Funktion eindeutig durch ihren Wert auf der endlichen Anzahl von Elementen aus G festgelegt wird. Ist $|G| = n$, so erhält man eine n-dimensionale unitale Algebra. In diesem endlichdimensionalen Fall ist das algebraische gleich dem topologischen Tensorprodukt. Es genügt auf $C(G) \odot C(G)$ zu arbeiten. Man könnte nun eine endlichdimensionale Quantengruppe einfach als eine endlich-dimensionale Hopf-Algebra definieren. Es gibt aber gute Gründe eine andere Definition zu wählen:

Definition 22*: Endliche Quantengruppe*
Eine endliche Quantengruppe ist ein Paar (A, Φ) bestehend aus einer endlichdimensionalen C^*-Algebra A und einer Komultiplikation Φ, so daß (A, Φ) eine Hopf-*Algebra ist.

Wir werden künftig Quantengruppen mit (A, Φ) bezeichnen. Wenn man eine endliche Quantengruppe dergestalt definiert, ergibt sich die wichtige Aussage:

Satz 13*: Eine endliche Quantengruppe (A, Φ) ist genau dann die komplexwertige Funktionenalgebra über einer endlichen Gruppe G, falls die Algebra A kommutativ ist.*

Für beliebige endlichdimensionale Hopf-Algebren gilt diese Aussage natürlich nicht mehr. Die Aussage ist im Sinne einer Äquivalenz zu verstehen: Die Kategorie der endlichen kommutativen Quantengruppen ist äquivalent zu der Kategorie der endlichen Gruppen. Wir werden sehen, daß es eine analoge Aussage auch für den Fall kompakter Quantengruppen gibt.

Mit obiger Definition endlicher Quantengruppen gilt, daß jede endliche Quantengruppe ein Haar-Integral (links- und rechtsinvariant) besitzt. Außerdem ist die duale Algebra einer endlichen Quantengruppe wiederum eine C^*-Algebra.

Wenn man nun keine endliche Gruppe betrachten, sondern zum lokalkompakten Fall übergehen und (in Verallgemeinerung davon) nichtkommutative (lokal)kompakte Quantengruppen einführen möchte, ergeben sich sofort einige schwierige Probleme:

1. Die natürlichen Kandidaten für Koeins und Antipode sind i.a. nur noch dicht definiert und nicht stetig.

2. Die Definition der Antipode als Antihomomorphismus, so daß (4.2) erfüllt wird, ist schwierig.

3. Das Bild der Komultiplikation liegt in der Multiplikatoralgebra $M(H \otimes H)$. Wie definiert man $\epsilon \otimes id$, $\kappa \otimes id \ldots$?

4. Die lineare Multiplikation ist nur auf dem algebraischen Tensorprodukt definiert. Auf dem topologischen Tensorproduktraum sind die Elemente jedoch nicht mehr einfache Summen über zerlegbare Elemente und die Multiplikation verhält sich bei dem Versuch einer Fortsetzung auf das topologische Tensorprodukt keineswegs „gutmütig“. Eine Möglichkeit mit diesem Problem umzugehen, ist die Verwendung des Haagerup-Tensorproduktes [62].

4.3 Kompakte Quantengruppen

4.3.1 Definition von kompakten Quantengruppen

Grob gesprochen ist eine Quantengruppe ein Paar (A, Φ), wobei Φ eine C^*-Algebra mit Eins und Φ eine Komultiplikation im Sinne von Definition 4.1 ist, das zusätzliche Eigenschaften haben muß, in denen sich das neutrale Element der Gruppe und die Gruppeninverse wiederspiegelt.

Zunächst bemerken wir, daß (da A unital ist) gilt: $M(A \otimes A) = A \otimes A$. Damit ist der *Homomorphismus $\Phi : A \to A \otimes A$. Außerdem gilt: Φ unital $\Leftrightarrow$ Φ ist nichtdegeneriert. Wir können also festhalten: die Komultiplikation Φ auf A ist ein unitaler *Homomorphismus von A nach $A \otimes A$, der zudem koassoziativ ist: $(\Phi \otimes id)\Phi = (id \otimes \Phi)$.

(A, Φ) ist bisher lediglich eine kompakte Quantenhalbgruppe, da Φ nur die Gruppenmultiplikation wiederspiegelt. Um (A, Φ) zu einer kompakten Quantengruppe zu machen, müssen noch neutrales Element und Inverse algebraisch beschrieben werden. Wir hatten bereits gesagt, daß die Forderung nach Existenz von Koeins und Antipode, wie man sie auf der Stufe der Funktionenalgebren über endlichen Gruppen kanonisch einführt, in diesem topologischen Rahmen keine geeignete Wahl darstellt, da sie hier i.a. nicht als stetige, überall definierte Abbildungen existieren müssen. Deshalb ist es sinnvoll zu überlegen, wie man den Unterschied zwischen einer Gruppe und einer Halbgruppe (d.h. die Existenz von neutralem Element und Inverse) durch Eigenschaften beschreibt, die sich dann algebraisieren lassen und die ihre Gültigkeit im topologischen Rahmen behalten. Dies wir durch den folgenden Satz ermöglicht:

Satz 14: *Eine kompakte Halbgruppe G mit der Kürzungseigenschaft ist eine Gruppe. Kürzungseigenschaft bedeutet dabei: aus $ca = cb \Rightarrow a = b$.*

Beweis: Sei $s \in G$. H sei die von s erzeugte abgeschlossene Halbgruppe, d.h $H = \{s^n | n \in \mathbb{N}\}$. Seien I_1, I_2 abgeschlossene Ideale von H. Es folgt, daß der Durchschnitt von I_1 und I_2 ein abgeschlossenes Ideal von H ist. Dieses Ideal ist nicht leer, da H von s erzeugt wird: Sei z.B. $x = s^r \in I_1, y = s^m \in I_2 \Rightarrow s^{r+m} \in I_1 \cap I_2$. Der Durchschnitt aller beschränkten Ideale ist somit nicht leer (dies folgt aus der Kompaktheit) und ist das kleinste abgeschlossene Ideal von H, bezeichnet mit I. Sei nun $p \in I$. Dann ist $pI \subseteq I$. pI ist ein abgeschlossenes Ideal in H und somit $pI = I$. Dadurch existiert ein $e \in I$, so daß $pe = p$. Rechtsmultiplikation mit $q \in G$ ergibt $peq = pq, \forall q \in G$. Nun kann die Kürzungseigenschaft benutzt werden: $eq = q, \forall q \in G$. Linksmultiplikation mit $r \in G$ ergibt $req = rq, \forall r \in G$ und somit $re = r$. Damit ist gezeigt, daß e das neutrale Elemnt von G ist. Mit diesem Ergebnis betrachtet man $se = s$, $s \in G$. Da $e \in I$ folgt $s \in I$ und $sI = I$. Dann existiert aber ein s^{-1}, so daß $ss^{-1} = e$ und $s^{-1}s = e$. Dadurch ist die Existenz der Inversen sichergestellt und G ist damit tatsächlich eine Gruppe. •

Man sieht, daß die Kürzungseigenschaft den Unterschied zwischen einer Halbgruppe und einer Gruppe ausmacht. Deshalb muß die Kürzungseigenschaft auf der algebraischen Stufe formuliert werden. Dies wollen wir für eine lokalkompakte Halbgruppe durchführen.

Satz 15: *Sei G eine lokalkompakte Halbgruppe und $A = C_0(G)$, sowie $\Phi : A \to M(A \otimes A)$ wie üblich als $(\Phi(f))(p, q) := f(pq)$ definiert. Dann hat G genau dann die Kürzungseigenschaft, falls $\Phi(A)(1 \otimes A)$ und $\Phi(A)(A \otimes 1)$ dichte Teilmengen von $A \otimes A$ sind.*

Beweis: Sei $\Phi(A)(1 \otimes A)$ eine dichte Teilmenge von $A \otimes A$ und $pr = qr$, mit $p, q, r \in G$. Dann gilt $\forall f, g \in A$:

$$(\Phi(f)(1 \otimes g))(p, r) = (\Phi(f)((p, r))((1 \otimes g)(p, r)) = f(pr)g(r),$$
$$(\Phi(f)(1 \otimes g))(q, r) = (\Phi(f)((q, r))((1 \otimes g)(q, r)) = f(qr)g(r).$$

Wegen $pr = qr$ ergeben beide Gleichungen dasselbe für alle $f, g \in A$. Nach Voraussetzung liegen $\Phi(A)(A \otimes 1)$ und $\Phi(A)(1 \otimes A)$ dicht in $A \otimes A$, und deshalb ist

$$h(p, r) = h(q, r), \ \forall h \in A \otimes A.$$

Daraus folgt, daß $p = q$ und damit die rechte Kürzungseigenschaft. Analog ergibt sich die linke Kürzungseigenschaft, wenn $\Phi(A)(A \otimes 1)$ dicht liegt.

Nehmen wir andererseits an, daß G eine lokalkompakte Gruppe ist, so gibt es den Homöomorphismus $(p, q) \mapsto (pq, q)$, der einen Isomorphismus $f \otimes g \mapsto \Phi(f)(1 \otimes g)$ induziert. Damit liegt $\Phi(A)(1 \otimes A)$ dicht in $A \otimes A$, da die Menge der $f \otimes g$ dicht in $A \otimes A$ liegt. Analoges gilt für $\Phi(A)(A \otimes 1)$. Damit sind $\Phi(A)(A \otimes 1)$ und $\Phi(A)(1 \otimes A)$ dicht in $A \otimes A$. •

Dies führt zu der zentralen Definition der gesamtem Quantengruppentheorie, wie sie von Woronowicz in [69] gegeben wurde. Ihr Zusammenhang mit dem Begriff der kompakten Matrixquantengruppen werden wir in Abschnitt 4.5 kurz darlegen.

Definition 23*: Kompakte Quantengruppe*
Eine kompakte Quantengruppe ist ein Paar (A, Φ)*, das aus einer* C^**-Algebra* A *mit Eins und einer Komultiplikation* Φ *besteht, so daß die Mengen* $\Phi(A)(1 \otimes A)$ *und* $\Phi(A)(A \otimes 1)$ *in* $A \otimes A$ *dicht liegen.*

Damit haben wir die „Quantisierung“der Funktionenalgebra über einer kompakten Gruppe definiert. Im Gegensatz zur Hopf-Algebra mußten die Gruppenstrukturen teilweise durch topologische Bedingungen ausgedrückt werden. Diese Dichtheitsbedingungen sind unter Umständen jedoch schwer nachprüfbar und ein wenig unhandlich. Im folgenden Abschnitt sollen deshalb Bedingungen angegeben werden, mit denen leichter überprüft werden kann, ob eine kompakte Quantengruppe vorliegt.

4.3.2 Kriterien für kompakte Quantengruppen

Der Begriff der endlichdimensionalen Darstellung einer kompakten Quantengruppe ist von fundamentaler Bedeutung. Der Grund dafür ist, daß alle irreduziblen, unitären Darstellungen einer kompakten Quantengruppe endlichdimensional sind.

Definition 24*: Endlichdimensionale Darstellung*
Es sei (A, Φ) *ein Paar, bestehend aus einer* C^**-Algebra* A *und einem* **Homomorphismus* $\Phi : A \to A \otimes A$*. Eine endlichdimensionale Darstellung von* (A, Φ) *ist eine* $n \times n$*-Matrix* (v_{pq}) *mit Einträgen aus* A*, so daß*

$$\Phi(v_{pq}) = \sum_{k=1}^{n} v_{pk} \otimes v_{kq}, \qquad \forall p, q = 1, \dots, n..$$

Die Darstellung heißt nichtdegeneriert, falls sie eine Inverse besitzt.

Wir müssen an dieser Stelle darauf hinweisen, daß der Begriff „Darstellung“, den wir in obiger Definition gebrauchen, in der Literatur üblich, aber mißverständlich ist. Er kommt daher, daß man sich vorstellt, daß A die Funktionenalgebra über einer Gruppe ist. Auf diese Gruppe bezieht sich das Wort „Darstellung“. In Wirklichkeit handelt es sich dann eigentlich um eine Kodarstellung der Koalgebra A. Wir gehen darauf in Unterabschnitt 4.4.2 ein. Die Definition der endlichdimensionalen Darstellung einer kompakten Quantengruppe wird auch benötigt, um Kriterien zu finden, anhand derer man leicht nachprüfen kann, ob eine kompakte Quantengruppe vorliegt. Dies ist insbesondere für die Forderung, daß $\Phi(A)(A \otimes 1)$ und $\Phi(A)(1 \otimes A)$ dicht in $A \otimes A$ liegen sollen, oft nicht leicht nachprüfbar. Wir geben die folgenden Kriterien ohne Beweis an. Die letzten beiden Sätze ergeben sich leicht aus dem ersten. Alle Beweise sind in [45] zu finden.

Satz 16: *Sei A eine C^*-Algebra mit Eins und $\Phi : A \to A \otimes A$ ein *-Homomorphismus. Falls A von den Matrixeinträgen seiner nichtdegenerierten endlichdimensionalen Darstellungen als eine normierte Algebra erzeugt wird, so ist (A, Φ) eine kompakte Quantengruppe.*

Satz 17: *Sei A eine C^*-Algebra mit Eins und $\Phi : A \to A \otimes A$ ein *-Homomorphismus. Falls A als C^*-Algebra von den Matrixeinträgen seiner nichtdegenerierten endlichdimensionalen Darstellungen (v_{pq}) erzeugt wird, so daß (v_{pq}^*) ebenfalls eine invertierbare Matrix in $M_n(A)$ ist, dann ist (A, Φ) eine kompakte Quantengruppe.*

Satz 18: *Sei A eine C^*-Algebra mit Eins und $\Phi : A \to A \otimes A$ ein *-Homomorphismus. Falls A als C^*-Algebra von Elementen u_{pq} erzeugt wird, so daß*

$$\Phi(u_{pq}) = \sum_k u_{pk} \otimes u_{kq} \tag{4.2}$$

gilt und außerdem sowohl die Matrix (u_{pq}) als auch die transponierte Matrix (u_{qp}) invertierbar sind, dann ist (A, Φ) eine kompakte Quantengruppe.

4.4 Elemente der Darstellungstheorie

Die Darstellungstheorie von kompakten Quantengruppen zu behandeln, geht weit über den Rahmen dieser Dissertation hinaus. Deswegen werden wir uns darauf beschränken, einige wesentliche Konzepte und grundlegende Ergebnisse zu präsentieren.

4.4.1 Haar-Integral

Eine der wesentlichsten Eigenschaften kompakter Quantengruppen (und ein gewichtiger Grund für die Form ihrer Definition) ist, daß man die Existenz und Eindeutigkeit eines Haar-Integrals (oder Haar-Maßes) zeigen kann. Wir haben schon bei den endlichdimensionalen Hopf-Algebren in Abschnitt 2.3 die Existenz eines Haar-Integrals festgestellt und die Definition eines solchen Integrals $\mathcal{J}$ als ein positives, translationsinvariantes Funktional gegeben, wobei diese Links- und Rechts-Tranlationsinvarianz algebraisch durch

$$(id \otimes \mathcal{J})\Phi(f) = \mathcal{J}(f)1, \tag{4.3}$$

$$(\mathcal{J} \otimes id)\Phi(f) = \mathcal{J}(f)1. \tag{4.4}$$

beschrieben wird. Dabei ist in unserer Notation Φ die Komultiplikation und $f \in A$. Der Beweis der Existenz eines Haar-Integrals auf einer kompakten Quantengruppe ist z.B. in [65], in [71] oder auch wiederum in [45] zu finden. Warum ist aber nun die Existenz des

Haar-Integrals besonders wichtig? Die Antwort darauf ist, daß man mit Hilfe des Haar-Integrals die rechtsreguläre Darstellung konstruieren kann. In dieser Darstellung sind alle irreduziblen unitären Darstellungen enthalten. In praktisch allen Beweisen, welche die reguläre Darstellung oder die unitären irreduziblen Darstellungen betreffen, spielt das Haar-Integral die zentrale Rolle. Ein Hindernis für die Entwicklung der Theorie von lokalkompakten Quantengruppen war genau das Fehlen eines Äquivalents zum Haar-Integral.

4.4.2 Zum Begriff der Kodarstellung einer Hopf-Algebra

Wir haben bereits vorher gesagt, daß in der Sprache der Quantengruppen mit dem Begriff „Darstellung" eigentlich eine Kodarstellung gemeint ist. Wir wollen dies nun verständlich machen und präzisieren. Außerdem müssen wir dann natürlich erklären, was mit irreduziblen oder unitären Darstellungen eigentlich gemeint ist, wenn es sich in Wirklichkeit um Kodarstellungen handelt. Auch hierbei gilt wiederum, daß wir uns nicht mit den topologischen und analytischen Details befassen wollen, sondern zuerst die Begriffe algebraisch (d.h. für Hopf-Algebren) klären und dann auf Quantengruppen übertragen.

Wir hatten in Abschnitt 2.5 den Begriff der Kodarstellung einer Hopf-Algebra H auf einem Vektorraum V als eine Abbildung

$$\begin{aligned} \beta : V &\longrightarrow V \otimes H, \\ v &\longmapsto v^{(1)} \otimes v^{(2)}, \end{aligned}$$

eingeführt (wir benutzen hier die Rechtskodarstellung). Betrachten wir eine endlichdimensionale Kodarstellung der Hopf-Algebra H, d.h. V ist endlichdimensional. Sei $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ eine Basis von V. Dann gibt es Elemente v_{ij} aus H mit

$$\beta(e_j) = \sum_i e_i \otimes v_{ij}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Die v_{ij} werden Matrixkoeffizienten oder Matrixelemente der Rechtskodarstellung β genannt. Für eine Kodarstellung gilt per Definition, daß

$$(\beta \otimes id) \circ \beta = (id \otimes \Delta) \circ \beta. \tag{4.5}$$

Wertet man die Gleichung auf den Basiselementen aus, so sieht man, daß sie äquivalent ist zu

$$\Delta(v_{ij}) = \sum_k v_{ik} \otimes v_{kj}, \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{4.6}$$

Man kann zudem leicht zeigen, daß $\epsilon(v_{ij}) = \delta_{ij}$ ist. Umgekehrt nennt man jede Matrix $(v_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, welche Gleichung 4.6 und $\epsilon(v_{ij}) = \delta_{ij}$ erfüllt, eine Matrixkodarstellung der Hopf-Algebra H. Mit diesen Erläuterungen erklärt sich die früher gegebene Definition 24.

Gleichung (4.6) kann auch auf andere Weise geschrieben werden. Dazu führen wir für die Menge der linearen Abbildungen auf einem Vektorraum V die Bezeichnung $L(V)$ ein. Sei nun $\phi \in L(V, V \otimes H)$. Die Vektorräume $L(V, V \otimes H)$ und $L(V) \otimes H$ sind für endlichdimensionales V isomorph, wobei der Isomorphismus durch

$$\begin{aligned} L(V) \otimes H &\longrightarrow L(V, V \otimes H) \\ \tilde{\beta} := \sum_k F_k \otimes a_k &\longmapsto \beta(.) := \sum_k F_k(.) \otimes a_k \end{aligned} \tag{4.7}$$

gegeben wird (die Summation geht hier über endliche Summen von zerlegbaren Elementen und steht an dieser Stelle nicht für die Komultiplikation). Man kann nun leicht zeigen, daß die folgenden Bedingungen äquivalent sind und demnach Matrixkodarstellungen der Hopf-Algebra H charakterisieren:

1. $(\beta \otimes id) \circ \beta = (id \otimes \Delta) \circ \beta$.
2. $\Delta(v_{ij}) = \sum_k v_{ik} \otimes v_{kj}, \quad i, j = 1, \dots, n.$
3. $(id \otimes \Delta) \circ \tilde{\beta} = \tilde{\beta}_{12}\tilde{\beta}_{13}$.

Die Äquivalenz der ersten beiden Bedingungen wurde oben im Prinzip gezeigt; die Äquivalenz mit der letzten Bedingung ergibt sich aus der Isomorphie (4.7). Es erweist sich, daß die letzte der äquivalenten Bedingungen am Besten geeignet ist, um die Darstellung einer kompakten Quantengruppe auf einem Hilbert-Raum zu definieren.

Definition 25*: Invarianter Teilraum und irreduzible Kodarstellung*

Falls für einen Teilraum $W \subseteq V$ gilt, daß

$$\beta(W) \subseteq W \otimes H,$$

dann nennt man W einen β-invarianten Teilraum. Eine Kodarstellung β auf einem Vektorraum V heißt irreduzibel, falls nur die Teilräume $\{0\}$ und V β-invariant sind.

Satz 19*: Jede irreduzible Kodarstellung β einer Hopf-Algebra H auf einem Vektorraum V ist endlichdimensional.*

Beweis: Der Satz ist eine unmittelbare Konsequenz des folgenden Sachverhaltes: Jedes Element v ist in einem endlichdimensionalen β-invarianten Teilraum enthalten. Um dies zu sehen, wählt man eine Basis $\{h_i\}$ von H, schreibt $\beta(v) = \sum_i v_i \otimes h_i$ als Summe über zerlegbare Elemente (mit $v_i \in V$) und $\Delta(h_i) = \sum_{j,k} c_{ijk} h_j \otimes h_k, \; c_{ijk} \in \mathbb{C}$. Dann benutzt man 4.5 und erhält:

$$\sum_k \beta(v_k) \otimes h_k = (\beta \otimes id)\beta(v) = (id \otimes \Delta)\beta(v) = \sum_{i,j,k} v_i \otimes c_{ijk} h_j \otimes h_k.$$

Es sei darauf hingewiesen, daß alle Summen hier endlich sind. Koeffizientenvergleich bezüglich h_k ergibt

$$\beta(v_k) = \sum_{i,j} c_{ijk} v_i \otimes h_j.$$

Damit ergibt sich, daß $W := Lin\{v, v_i\}$ ein endlichdimensionaler β-invarianter Teilraum ist, der v enthält. Und damit folgt sofort die Aussage des Satzes, denn für die irreduzible Kodarstellung darf nur $\{0\}$ oder V invariant sein. •

Wenn wir Kodarstellungen auf einem Hilbert-Raum betrachten wollen, müssen wir den Begriff der unitären Kodarstellung einführen.

Definition 26*: Unitäre Kodarstellung*

Eine Kodarstellung der *Hopf-Algebra H auf einem endlichdimensionalen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ heißt unitär, falls für die entsprechende Matrixkodarstellung $v = (v_{ij})$ (bezüglich einer Basis $\{e_i\}$) gilt:

$$v^* v = v v^* = 1.$$

Eine dazu äquivalente Bedingung ist, daß für $\tilde{\beta} \in L(\mathcal{H}) \otimes H$ gilt:

$$\tilde{\beta}^* \tilde{\beta} = 1.$$

Dabei beachte man, daß $L(\mathcal{H}) \otimes H$ eine *Algebra ist.

4.4.3 Zum Begriff der Darstellung einer kompakten Quantengruppe

Alle Begriffsbildungen und Aussagen, die wir im vorigen Abschnitt für Hopf-Algebren eingeführt haben, können in fast unveränderter Form auch für kompakte Quantengruppen übernommen werden. Allerdings sei nochmals darauf hingewiesen, daß in der Literatur (und auch in der vorliegenden Arbeit) bei Quantengruppen das Wort „Darstellung“in Wirklichkeit Kodarstellung bedeutet.

Die endlichdimensionale Darstellung einer kompakten Quantengruppe haben wir bereits in Definition 24 eingeführt. Bei der Darstellung einer kompakten Quantengruppe auf einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ ist zu beachten, daß die Darstellung eine Abbildung der Form

$$\beta : \mathcal{H} \longrightarrow M(B_0(\mathcal{H}) \otimes A)$$

ist, also in die Multiplikatoralgebra abbildet. B_0 sind die Menge der kompakten Operatoren auf $\mathcal{H}$. Diese besitzen keine Eins. Deswegen muß hier die Multiplikatoralgebra benutzt werden.

Definition 27*: Unitäre Darstellung einer kompakten Quantengruppe*

Das Paar (A, Φ) sei eine kompakte Quantengruppe. Eine Darstellung von (A, Φ) auf einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ ist ein Element $\tilde{\beta}$ aus $M(B_0(\mathcal{H}) \otimes A)$, so daß

$$(id \otimes \Phi)(\tilde{\beta}) = \tilde{\beta}_{12}\tilde{\beta}_{13}.$$

Falls $\tilde{\beta}$ unitär ist, heißt die Darstellung eine unitäre Darstellung.

Falls $\mathcal{H}$ ein endlichdimensionaler Hilbert-Raum ist, reduziert sich die obige Definition zum vorher diskutierten Begriff der unitären Kodarstellung einer Hopf-Algebra.

Mit Hilfe des Haar-Integrals kann man die sogenannte rechtsreguläre Darstellung konstruieren und zeigen, daß jede unitäre irreduzible Darstellung einer kompakten Quantengruppe in der regulären Darstellung enthalten ist. Besonders wichtig ist die Eigenschaft von kompakten Quantengruppen, daß alle irreduziblen unitären Darstellungen endlichdimensional sind. Die (zumeist umfänglichen) Beweise zu allen diesen Aussagen sind in [45] zu finden.

4.5 Zusammenhang mit Matrixquantengruppen

In den vorangegangenen Abschnitten ist die Verbindung zwischen Quantengruppen und Hopf-Algebren noch ein wenig unklar geblieben, sehen doch die Axiome für Quantengruppen deutlich anders aus als diejenigen für Hopf-Algebren (wenngleich wir den Übergang motiviert haben), in denen es Abbildungen wie Koeins und Antipode gibt, die für kompakte Quantengruppen i.a nicht existieren. Es läßt sich jedoch zeigen [45], daß eine kompakte Quantengruppe A immer eine Hopf-*Algebra A_0 als Unteralgebra enthält und diese sogar dicht in A liegt. A_0 ist der Teilraum von A, der von den Matrixelementen der unitären endlichdimensionalen Darstellungen aufgespannt wird. Die Komultiplikation Φ auf A ist auf A_0 eingeschränkt die übliche Komultiplikation einer Hopf-Algebra.

In manchen Arbeiten (wie in [24]) wird eine kompakte Quantengruppe als eine Hopf-*Algebra definiert, die von ihren unitären, endlichdimensionalen, irreduziblen Darstellungen erzeugt wird. Es wurde ebenfalls gezeigt, daß man eine so definierte „Quantengruppe“zu einer C^*Algebra vervollständigen kann (in einer allerdings nicht eindeutigen Weise).

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß die von Woronowicz in [71] und [70] eingeführten kompakten Matrixquantengruppen (oder auch kompakten Matrixpseudogruppen) tatsächlich kompakte Quantengruppen in dem von uns benutzten Sinn sind. Wegen ihrer Wichtigkeit für die Entwicklung der kompakten Quantengruppen sei ihre Definition hier angegeben:

Definition 28: ***Kompakte Matrixquantengruppen***
Eine kompakte Matrixquantengruppe ist ein Paar (A, u), bestehend aus einer C^*-Algebra A und einer Matrix u aus $M_n(A)$, das die folgenden Axiome erfüllt:

1. *Die *Unteralgebra A_0 von A, die von den Matrixelementen aus u erzeugt wird, liegt dicht in A.*

2. *Es existiert ein *Homomorphismus $\Phi : A \longrightarrow A \otimes A$, so daß $(\forall p, q = 1, \ldots, n)$*
$$\Phi(u_{pq}) = \sum_k u_{pk} \otimes u_{kq}.$$

3. *Es existiert ein linearer Antimorphismus $\kappa : A_0 \longrightarrow A_0$, so daß*
$$\kappa(\kappa(a^*)^*) = a, \forall a \in A_0$$
und außerdem
$$\sum_k \kappa(u_{pk}) u_{kq} = \delta_{pq} 1,$$
$$\sum_k u_{pk} \kappa(u_{kq}) = \delta_{pq} 1.$$

Diese beiden Gleichungen sind letztlich nichts anderes als die Antipodenbedingung. Φ entspricht der Komultiplikation und die Existenz und Eindeutigkeit einer Koeins kann ebenfalls gezeigt werden.

Wir haben oben bereits auf die Beziehung zwischen kompakten Quantengruppen und kompakten Matrixquantengruppen hingewiesen: Jede kompakte Quantengruppe A enthält eine dichte *Unteralgebra A_0, die eine kompakte Matrixquantengruppe ist. Die Komultiplikation auf A_0 ist die Einschränkung der Komultiplikation auf A. Umgekehrt kann man eine kompakte Matrixquantengruppe zu einer kompakten Quantengruppe vervollständigen. Allerdings ist diese Vervollständigung nicht eindeutig; es gibt i.a. mehrere Möglichkeiten eine C^*-Norm auf A_0 zu implementieren.

4.6 Diskrete Quantengruppen

Für lokalkompakte abelsche Gruppen gilt, daß die Charaktere auf der Gruppe wiederum eine lokalkompakte abelsche Gruppe bilden, die sogenannte duale Gruppe. Das duale von dieser Gruppe ist die Ausgangsgruppe (nach dem Pontryagin-Van Kampen Theorem). Für nichtabelsche kompakte Gruppen gibt es eine ähnliche Aussage, die Tannaka-Krein-Dualität. Statt der Charaktere benutzt man hierbei allerdings die unitären irreduziblen

Darstellungen. Diese enthalten genügend Informationen, um die Ausgangsgruppe zu rekonstruieren. Genau das Geiche gilt für kompakte Quantengruppen. Das Duale zu einer kompakten Quantengruppe A bildet die diskrete Quantengruppe. Diese bildet einen Teilraum des Dualraumes zu A. Wir wollen an dieser Stelle nur abschließend die Definition der diskreten Quantengruppe angeben [19] und auf ein uns bereits bekanntes Beispiel für eine diskrete Quantengruppe hinweisen:

Definition 29: ***Diskrete Quantengruppe***
Eine diskrete Quantengruppe ist ein Paar (B_0, Φ)*, wobei* B_0 *eine direkte Summe von vollen Matrixalgebren ist und* Φ *eine Komultiplikation auf* B_0*, so daß* B_0 *eine Multiplikator-Hopf-***Algebra ist.*

Die Funktionenalgebra von Funktionen mit endlichem Träger über einer diskreten Gruppe aus Kapitel 3 ist das Standardbeispiel für eine diskrete Quantengruppe. Diese diskrete Quantengruppe ist kommutativ und die Zerlegung in Matrixalgebren ist einfach eine Zerlegung in $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \dots$
Eine Basis dieser Funktionenalgebra ist die Menge der charakteristischen Funktionen e_g, $g \in G$ mit der Eigenschaft $e_g(h) = \delta_{g,h}$, $\forall g, h \in G$. Die Basiselemente erzeugen die oben angegebene Zerlegung und sind Projektoren in die einzelnen Unteralgebren $\mathbb{C}$.

Jede diskrete Gruppe führt auf diese Weise zu einer diskreten Quantengruppe und umgekehrt korrespondiert jede kommutative diskrete Quantengruppe zu einer „darunterliegenden“diskreten Gruppe.

Das Duale zu einer diskreten Quantengruppe ist wiederum eine kompakte Quantengruppe. Eines der grundlegenden Postulate beim Aufstellen einer Theorie von lokalkompakten Quantengruppen ist, daß sowohl die kompakten, als auch die diskreten Quantengruppen in dieser Theorie enthalten sein müssen. Beide sollten lokalkompakte Quantengruppen sein. Dies ist in den letzten Jahren gelungen. Die kompakten und diskreten Quantengruppen gehören zur gleichen Kategorie (die Kategorie der lokalkompakten Quantengruppen) und diese Kategorie ist selbstdual.

Teil II

Nichtkommutative Multi-Tori und Hopf-Algebren-Symmetrien

Überblick:

Im ersten Teil dieser Dissertation haben wir die mathematischen Grundlagen der Hopf-Algebren- und Quantengruppentheorie dargestellt. Von Beginn an wurden dabei Hopf-Algebren als Verallgemeinerungen von Gruppen und Lie-Algebren aufgefaßt, wobei wir versucht haben klarzumachen, daß die Gruppen- und Lie-Algebren-Theorie in den Hopf-Algebren und Quantengruppen als klassischer „kommutativer"Grenzfall enthalten ist. Der Vorteil der Benutzung von Hopf-Algebren liegt aber eben gerade darin begründet, daß sie allgemeiner sind und darüberhinaus der Nichtkommutativen Geometrie und ihren Beschreibungsweisen besser angepaßt sind.

Im folgenden Hauptteil der Arbeit wollen wir uns nun konkreten, von uns konstruierten Beispielen widmen. Wie bereits in der Einführung zu dieser Dissertation erklärt, erscheint es uns grundsätzlich interessant, Räume, die ihre Bedeutung im Rahmen der Nichtkommutativen Geometrie gezeigt haben und die in Bezug auf Spektrale Tripel wohluntersucht sind, auch im Hinblick auf ihre Hopf-Algebren-Strukturen und (gegebenenfalls) auf ihre Hopf-Algebren-Symmetrien zu diskutieren. Der Nichtkommutative Torus kann sicherlich als einer der am genauesten untersuchten nichtkommutativen Räume gelten und ist neben den nichtkommutativen Sphären und dem Standardmodell das Standardbeispiel für Spektrale Tripel, also für ein nichtkommutatives Analogon zu einer Riemannschen Spinmannigfaltigkeit. Es sei darauf hingewiesen, daß Heisenberg-Algebra (bzw. -Gruppe) mit Vertauschungsrelationen der Form $UV = qVU$, die in der Hopf-Algebren-Theorie besonders wichtige Quantenebene mit ihrer Vertauschungsrelation $xy = qyx$, sowie der Nichtkommutative Torus, dessen unitäre Generatoren die Relation $UV = qVU$ erfüllen, strukturelle Ähnlichkeiten besitzen.

Wir beginnen im folgenden Kapitel damit, daß wir eine unendliche Klasse von Hopf-Algebren (genauer geagt Multiplikator-Hopf-Algebren) konstruieren, die Deformationen der Kreuzproduktalgebra $FG \ltimes \mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ sind. Dabei ist G eine endliche Gruppe. Kreuzproduktalgebren dieser Form sind universelle Lösungen von algebraischen Quantisierungsproblemen. Wir können diese Kreuzproduktalgebra als Quantisierung der Bewegung eines Teilchens auffassen, das sich in $\mathbb{Z}^n$ auf einem G-Orbit bewegt. Die von uns benutzte Kreuzproduktalgebra $FG \ltimes \mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ ist wegen der Multiplikator-Hopf-Algebren-Struktur von $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ selbst eine Multiplikator-Hopf-Algebra. Daß die Kreuzproduktalgebra $FG \ltimes \mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ eine (Multiplikator-)Hopf-Algebra bildet, gilt für Algebren dieser speziellen Form immer, ist aber trotzdem nicht-trivial. Die Frage, wann eine Kreuzproduktalgebra eine Hopf-Algebra ist, führt zu einer sehr bekannten und enorm wichtigen Konstruktion, den sogenannten Bikreuzproduktalgebren. Unsere Kreuzproduktalgebra ist eine spezielle Bikreuzproduktalgebra. Solche Bikreuzproduktalgebren sind einfache algebraische Modelle für Räume, die sowohl geometrische Strukturen, als auch quantisierte Strukturen tragen. Die Nichtkokommutativität einer solchen Hopf-Algebra korrespondiert geometrisch zu einem Raum mit Krümmung, während die nichtkommutative Algebrenstruktur (als Lösung des algebraischen Quantisierungsproblems) der Quantisiserung einer klassischen Observablenalgebra entspricht. Das Duale der Bikreuzproduktalgebra ist wiederum eine solche Hopf-Algebra. Interpretiert man diese, so sind in der dualen Hopf-Algebra gerade die Rollen von geometrischer Struktur und quantisierter Struktur vertauscht. Ob eine Struktur in einem solchen Raum als geometrisch oder quantenmechanisch interpretiert wird, ist also eine Frage des Standpunktes.

Für die von uns konstruierte Klasse von Multiplikator-Hopf-Algebren untersuchen wir die dualen Räume und zeigen, daß die dualen Räume Summen aus einem Kommutativen n-Torus und Nichtkommutativen n-Tori sind. Diese Klasse von Hopf-Algebren verallgemeinert das in der Literatur bekannte Beispiel des Quantendoppeltorus, der eine Summe aus Kommutativem und Nichtkommutativem Torus ist.

Daran anschließend beschäftigen wir uns mit der Bildung von endlichdimensionalen Hopf-Algebren, die wir aus den von uns konstruierten unendlichdimensionalen Multiplikator-Hopf-Algebren und ihren Dualen erhalten. Ein interessantes Resultat dieser Untersuchungen ist, daß wir zeigen konnten, wie man die bekannten und sehr populären niederdimensionalen Kac-Algebren aus unseren Nichtkommutativen Multi-Tori bekommen kann.

Im darauf folgenden Kapitel studieren wir die Multi-Tori unter dem Gesichtspunkt der Quantenfaserbündel-Theorie. Wir zeigen, daß (für den Fall von Wurzeln der Eins) die Nichtkommutativen Multi-Tori eine Hopf-Galois-Erweiterung des kommutativen Torus sind, d.h. sie sind Quantenprinzipalbündel mit dem Kommutativen Torus als Basis-Raum, wobei die Fasern von den oben angesprochenen endlichdimensionalen Hopf-Algebren gebildet werden.

Im abschließenden Kapitel dieser Arbeit wird gezeigt, daß der Nichtkommutative Torus eine Symmetrie bezüglich des Quantendoppeltorus besitzt. Diese Symmetrie „reagiert“(im Gegensatz zu der bekannten $u(1) \times u(1)$-Symmetrie) sensitiv auf den Deformationsparameter in der Vertauschungsrelation, die den Nichtkommutativen Torus charakterisiert. Allerdings läßt sich diese verallgemeinerte Symmetrie nicht auf die kanonischen spektralen Tripel des Nichtkommutativen Torus fortsetzen; es gibt also keine invarianten spektralen Tripel bezüglich der (dualen) Quantendoppeltorus-Symmetrie.

Kapitel 5

$FG \ltimes \mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ und das algebraische Quantisierungsproblem

Wir wollen in diesem Kapitel die Kreuzproduktalgebra $FG \ltimes \mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ und ihre Deformationen als Lösung eines verallgemeinerten algebraischen Quantisierungsproblems vorstellen. Dabei ist FG die Gruppenalgebra der endlichen Gruppe G mit der Mächtigkeit $|G|$ und $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ die Algebra der Funktionen mit kompaktem (d.h. in diesem Fall endlichen) Träger auf $\mathbb{Z}^n$. G fassen wir als Untergruppe der Permutationsgruppe S_n auf. Das algebraische Quantisierungsproblem werden wir zunächst physikalisch motivieren und dann die Lösungen diskutieren. Dabei kann und soll es nicht um eine Darstellung einer formalen Quantisierungsprozedur gehen, als vielmehr darum ein Gefühl dafür zu bekommen, warum Kreuzproduktalgebren geradezu „intrinsisch"für Quantisierungen geeignet sind. Es sei angemerkt, daß wir zwar ausschließlich algebraisch arbeiten, eine Verallgemeinerung auf C^*-Algebren jedoch nicht nur möglich, sondern in der theoretischen Physik im Kontext der sogenannten Mackey-Quantisierung wohlbekannt ist [44], [36]. Wir müssen noch anmerken, daß wir unter „algebraischer Quantisierung"nicht die formale Quantisierungsprozedur in [3], sondern einfach das Quantisieren unter Verwendung von algebraischen Strukturen verstehen wollen. Die Überlegungen und Konstruktionen lassen sich aber (wenn man sie weiter ausführt) durchaus in den Rahmen der formalen algebraischen Quantisierung oder der auf Gruppen und Symmetrien beruhenden Quantisierung in [36] einordnen. Außerdem werden wir nur den kinematischen Anteil des Quantisierungsproblems besprechen (Auswahl von zu quantisierenden Observablen und Darstellung auf einem Hilbert-Raum), während wir den dynamischen Anteil (Hamilton-Funktion oder Bewegungsgleichungen) nicht diskutieren. Das rein algebraische Arbeiten hat den Vorteil, daß die grundlegenden Strukturen deutlich und nicht durch funktionalanalytische Details verdunkelt werden. Man sieht dies sehr schön, wenn man sich die Theorie der C^*-dynamischen Systeme ansieht. Algebraisch sind diese nichts anderes als Kreuzproduktalgebren. Es sind erst die geforderten zusätzlichen Eigenschaften (Stetigkeit, Konvergenz etc.), welche die Definition eines solchen C^*-dynamischen Systems komplizierter werden lassen. Wir greifen für die Theorie der Kreuzproduktalgebren auf Abschnitt 2.6 und die dort gegebene Definition 13 zurück.

5.1 Kanonische Quantisierung und Symmetrien

Wir geben nachfolgend einen kurzen Einblick in die Quantisierungsprozedur, die auf Symmetrieüberlegungen und damit auf Gruppen- und Lie-Algebren-Theorie beruht [36]. Die formale algebraische Quantisierung, wie sie in [3] entwickelt wurde, ist in vielerlei Hinsicht eine Erweiterung dieser Quantisierung. Wir wollen in erster Linie zeigen, wie im Umfeld dieser Quantisierungsprozeduren Kreuzproduktalgebren auftauchen. Auf mathematische Pedanterie werden wir hierbei weitestgehend verzichten. Ausgangspunkt für die Quantisierung ist der Wunsch, ein klassisches System auf einem Phasenraum P, der in der Regel als Kotangentialbündel T^*Q eines klassischen Konfigurationsraumes Q gegeben ist, zu quantisieren, d.h. nach den Gesetzen der Quantenmechanik zu beschreiben. Im Rahmen einer solchen Quantisierung muß man unter anderem einen geeigneten Hilbert-Raum finden und eine Auswahl der klassischen Observablen treffen, die man quantisieren möchte. Außerdem stellt sich die Frage, welche selbstadjungierten Operatoren den klassischen Observablen assoziiert werden können. Diese Probleme bilden den kinematischen Teil des Quantisierungsproblems.

Betrachten wir als Beispiel die Quantisierung für $Q = \mathbb{R}^n$, die einen in vielerlei Hinsicht einfachen Fall darstellt. Die kanonischen Poisson-Klammern zwischen Ort und Impuls werden in der Quantenmechanik bekanntlich durch die Kommutatoren von selbstadjungierten Operatoren

$$[\hat{q}^i, \hat{q}^j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \qquad [\hat{q}^i, \hat{p}_j] = i\delta^i_j \tag{5.1}$$

ersetzt. Diese Relationen charakterisieren die Darstellung einer Lie-Algebra, der Heisenberg-Algebra. Auf der Stufe der entsprechenden Lie-Gruppe betrachtet man die unitären Operatoren

$$U(a) := e^{-ia\cdot\hat{p}}, \qquad V(b) := e^{-ib\cdot\hat{q}}, \qquad a, b \in \mathbb{R}^3. \tag{5.2}$$

Man rechnet leicht nach, daß die selbstadjungierten Operatoren $\hat{q}^i$ und $\hat{p}_j$ tatsächlich die Kommutatorrelationen (5.1) erfüllen. Während (5.1), wie bereits gesagt, eine Darstellung der Heisenberg-Algebra charakterisiert, wird durch (5.2) eine Darstellung der Heisenberg-Gruppe gegeben. Die unitären Operatoren $U(a)$ und $V(b)$ erfüllen offensichtlich (mit $a, b, a_i, b_j \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}$)

$$U(a_1)U(a_2) = U(a_1 + a_2), \qquad V(b_1)V(b_2) = V(b_1 + b_2), \tag{5.3}$$

und es gilt eine Vertauschungsrelation der Form:

$$U(a)V(b) = V(b)U(a)e^{i\mu ab}. \tag{5.4}$$

Wir wollen nur kurz anmerken, daß die Heisenberg-Algebra auf dem Raum $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$ durch folgende Vertauschungsrelation gegeben wird (mit $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$):

$$[(a_1, b_1, c_1)(a_2, b_2, c_2)] := (0, 0, b_1 \cdot a_2 - b_2 \cdot a_1).$$

Die Heisenberg-Gruppe ist auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ definiert, und die Multiplikation ist charakterisiert durch:

$$(a_1, b_1, c_1)(a_2, b_2, c_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2 + \frac{1}{2}(b_1 \cdot a_2 - b_2 \cdot a_1)).$$

Ein Grund, warum man konzeptionell lieber mit der Darstellung der Heisenberg-Gruppe als mit der Lie-Algebra arbeitet, ist, daß die unitären Operatoren $U(a)$ und $V(b)$ im Gegensatz zu den Operatoren $\hat{q}^i$ und $\hat{p}_j$ beschränkt sind. Ein weiterer fundamentaler Vorteil liegt darin begründet, daß es (aufgrund des Stone-Von Neumann-Theorems) für die Heisenberg-Gruppe mit den Relationen (5.3) genau eine unitäre, irreduzible Darstellung (modulo unitärer Äquivalenz) gibt. Dies ist wiederum im Gegensatz zur Darstellung der Lie-Algebra. Die Irreduzibilität ist wichtig, da sie garantiert, daß sich jeder selbstadjungierte Operator auf dem Hilbert-Raum als Funktion der Generatoren $\hat{q}^i$ und $\hat{p}_j$ schreiben läßt (in Analogie zum klassischen Fall, in dem sich alle Funktionen auf dem Phasenraum als Funktionen der q^i und der p_j bilden lassen). Man kann sich die Frage stellen, ob es möglich ist jeder klassischen Observablen einen selbstadjungierten Operator zuzuordnen, so daß alle Bedingungen, die man an die Quantisierung üblicherweise stellt, erfüllt werden können? Die Antwort lautet, daß dies nicht möglich ist. Man kann immer nur eine Auswahl der Observablen quantisieren [1], [38].

Für einen beliebigen Phasenraum (bzw. Konfigurationsraum) haben obige Überlegungen in einem wichtigen Punkt keine Gültigkeit mehr. Es gibt i.a. viele irreduzible Darstellungen der Heisenberg-Gruppe, die demnach unterschiedliche Quantisierungen des klassischen Systems ergeben. Außerdem muß man auch hier eine Auswahl von klassischen Observablen treffen, die man quantisieren kann. Es zeigt sich (ohne daß wir an dieser Stelle den Anspruch erheben wollen, in die Details zu gehen), daß ein guter Startpunkt die Suche nach einer Lie-Gruppe G (und ihrer Lie-Algebra $\mathcal{L}(G)$) darstellt, die als Gruppe von symplektischen Diffeomorphismen auf den Phasenraum wirkt. Jede 1-Parameter-Untergruppe von G erzeugt eine 1-Parameter-Untergruppe symplektischer Transformationen auf P. Ist $A \in \mathcal{L}(G)$ so kann man A ein Vektorfeld X_A auf P zuordnen. Dieses muß ein Hamiltonsches Vektorfeld sein (das führt zu Obstruktionen an die Lie-Gruppe G und an ihre Wirkung auf P). Den so konstruierten Hamiltonschen Vektorfeldern kann man (unter weiteren Bedingungen an die Lie-Gruppe G) nun Observable zuordnen und damit eine Unter-Lie-Algebra von Observablen auswählen. Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß die einzelnen Schritte vereinfacht dargestellt wurden und eine Vielzahl von weiteren Obstruktionen an die Lie-Gruppe G und an die Kohomologie von G bzw. $\mathcal{L}(G)$ nicht erwähnt wurden. Nun muß man die unitären, irreduziblen Darstellungen der Lie-Gruppe suchen und deren selbstadjungierte Generatoren mit den ausgewählten klassischen Observablen assoziieren.

Was ist nun die Essenz dieser kurzen Abhandlung über Quantisierung? Zuerst einmal die Feststellung, daß man i.a. keineswegs die gesamte Observablenalgebra konsistent quantisieren kann. Zum anderen sieht man, daß Quantisierung eng mit einer Gruppenwirkung zu tun hat. Es ist in gewissem Sinn die Lie-Gruppe, die bestimmt, welche Observablen quantisiert werden können und die über ihre Darstellungen diesen Observablen selbstadjungierte Operatoren zuordnet. Natürlich gibt es Quantisierungsverfahren, die andere Methoden benutzen, als die hier vorgestellten Symmetrieüberlegungen.

5.2 Das algebraische Quantisierungsproblem

In diesem Abschnitt soll ein spezielles algebraisches Quantisierungsproblem dargestellt werden. Auf dieses Problem wird man beispielsweise bei der Quantisierung auf homogenen Räumen geführt. Das Konzept läßt sich jedoch leicht auf andere Räume ausdehnen. Wir werden sehen, daß sich das algebraische Quantisierungsproblem für gewisse Klassen von Räumen durch eine Kreuzproduktalgebra lösen läßt. Allgemein können wir solche Kreuzproduktalgebren als universelle Lösung von verallgemeinerten algebraischen Quantisierungsproblemen interpretieren und in diesem Sinne als Quantenalgebra physikalischer Observabler.

Zunächst betrachten wir das klassische System eines Teilchens, das sich in einem homogenen Raum bewegt. Dieser Raum wird gegeben durch eine glatte Mannigfaltigkeit M, eine Lie-Gruppe G mit der Lie-Algebra $\mathcal{L}(G)$ und eine Rechtswirkung $\alpha : M \times G \to M$. Man bezeichnet das Tripel (G, M, α) als klassische Daten des Systems. Ist die Wirkung der Gruppe auf M transitiv und effektiv und bezeichnet $H \subset G$ die Isotropiegruppe (die Menge aller $h \in G$, welche einen Punkt $x \in M$ invariant läßt), so kann man identifizieren:

$$M \cong {}_H\diagdown^G .$$

Jedes Element ξ der Lie-Algebra $\mathcal{L}(G)$ erzeugt einen Fluß auf M

$$x(t) = \alpha_{e^{t\xi}}(x(0)).$$

Die Algebra $C^\infty(M)$ ist die klassische Algebra der Ortsobservablen. Die Trajektorien werden charakterisiert durch Elemente aus der Lie-Algebra $\mathcal{L}(G)$. Sie werden deshalb als klassische Impulsobservablen bezeichnet. Die klassische Observablenalgebra $C^\infty(P)$ ist auf dem Phasenraum $P = T^*M$ definiert. Bei der Quantisierung ist es nützlich, sich auf die folgende Untermenge dieser Observablenalgebra zu beschränken:

$$\mathcal{L}(G) \otimes C^\infty(M) \subset C^\infty(P). \tag{5.5}$$

Diese Algebra wird von den Unteralgebren der Impuls- und der Ortsobservablen erzeugt. Wir müssen überlegen, daß die Lie-Algebra $\mathcal{L}(G)$ und die Ortsobservablenalgebra $C^\infty(M)$ tatsächlich als Funktionen auf dem Phasenraum aufgefaßt werden können. Die Algebra $C^\infty(M)$ ist eine Untermenge von $C^\infty(P)$ durch die Pullbackabbildung der Projektion $\pi : P \to M$. Dazu sei $f \in C^\infty(M)$. Dann kann man f als Funktion $\tilde{f}$ auf P auffassen:

$$\tilde{f}(p) := (\pi^* f)(p) = f(\pi(p)).$$

Die Lie-Algebra $\mathcal{L}(G)$ ist eine Untermenge wegen der Differentialabbildung

$$\begin{aligned} \alpha_* : \mathcal{L}(G) &\longrightarrow \text{Vekt}(M) \\ \xi &\longmapsto \alpha_*\xi, \qquad (\alpha_*\xi)(f)(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\alpha_{e^{t\xi}}(x)), \;\; \forall f \in C^\infty(M). \end{aligned}$$

und der Inklusion $\text{Vekt}(M) \subset C^\infty(P)$, die durch die Auswertung des Vektorfeldes auf einem Kovektor (d.h. einem Element aus P) gegeben ist. Diese Inklusion ist letztlich möglich, weil die Elemente aus P selbst Abbildungscharakter besitzen.

Bemerkung 6 *Aufgrund obiger Konstruktion ist klar, daß man hier nur eine Teilmenge der Observablenalgebra auf P herausgreift. Man nimmt nur diejenigen Funktionen, die linear in der Faserrichtung sind. Wir hatten schon festgestellt, daß eine derartige Auswahl in praktisch allen Zugängen zur Quantisierung nötig ist. Der Zusammenhang der oben vorgestellten Quantisierung auf homogenen Räumen mit der Quantisierungsmethode des Abschnittes 5.1 ist, daß man dort statt der Produktalgebra $\mathcal{L}(G) \otimes C^\infty(M)$ das semidirekte Produkt $G \circledS C^\infty(M)$ (oder eine Teilmenge davon) als Ausgangspunkt wählen würde. Die Elemente dieses Produktes erzeugen dann symplektische Transformationen auf dem Phasenraum. Aus diesen erhält man Hamiltonsche Vektorfelder und darüber die Observablen. Wir haben hier die Observablen direkt angegeben. Je nach Bedarf und Problemstellung muß man entscheiden, ob man auf der Stufe der Lie-Algebra oder lieber mit der Gruppe arbeitet. Für unsere Zwecke erweist es sich als zweckmäßiger, im weiteren Verlauf mit der Gruppe zu arbeiten.*

Wir wollen nun eine Quantisierung der Observablenalgebra $\mathcal{L}(G) \otimes C^\infty(M) \subset C^\infty(P)$ durchführen. Mit Quantisierung meinen wir an dieser Stelle, daß wir unsere klassische Observablenalgebra durch eine „Quantisierungsabbildung" $\widehat{\ }$ auf eine andere Algebra abbilden, in der gewisse, durch die Quantenmechanik motivierte, Vertauschungsrelationen gelten sollen. Für Orts- und Impulsobservablen soll die Quantisierungsabbildung eine Inklusion darstellen. Wir fordern somit:

$$[\widehat{\xi}, \widehat{\eta}] = \widehat{[\xi, \eta]}, \;\; \forall \eta, \xi \in \mathcal{L}(G); \qquad \widehat{f}\widehat{h} = \widehat{fh}, \;\; \forall f, h \in C^\infty(M).$$

Als Vertauschungsrelationen in unserer Quantenalgebra postulieren wir die Heisenberg-Vertauschungsrelationen zwischen Ort und Impuls (wobei die rechte Bedingung besagt, daß ein Parameter $\hbar$ eingehen soll, so daß der Kommutator für $\hbar \to 0$ verschwindet):

$$[\widehat{\xi}, \widehat{f}] = \widehat{(\alpha_*\xi)(f)}, \qquad \alpha_*\xi = O(\hbar).$$

Dies ist nichts anderes als die üblichen Heisenberg-Vertauschungsrelationen in koordinatenfreier Form geschrieben. Wir können dies auch in Gruppenform umformulieren:

$$\widehat{e^{t\xi}}\widehat{f}\widehat{e^{-t\xi}} = \widehat{\alpha_{e^{t\xi}}(f)}. \tag{5.6}$$

Das hier skizzierte Verfahren beschreibt die Quantisierung der Bewegung eines Teilchens auf einem homogenen Raum. Man kann dies nun formal verallgemeinern, indem man allgemeinere Räume und Gruppen betrachtet. Man kann beispielsweise die Bedingung fallen lassen, daß die Gruppenwirkung transitiv ist. Man erhält dann die Quantisierung für ein Teilchen, dessen Bewegung auf einen Gruppenorbit eingeschränkt ist. Man kann noch weiter gehen und auch allgemeinere Räume zulassen, die beispielsweise endlich sind. Für uns ist in diesem Kontext nur wichtig, daß man hierbei ganz natürlich auf Kreuzproduktalgebren geführt wird. Eine ausführliche Darstellung dieser Quantisierungsmethoden im Kontext mit topologischen Aspekten der Quantentheorie findet sich in [36]. Dort wird auch die Mackey-Quantisierung behandelt, die sich insbesondere mit Quantisierung und Darstellungen semidirekter Produkte beschäftigt.

5.2.1 Universelle Lösung des algebraischen Quantisierungsproblems

Wir wollen nun die Gedanken des vorigen Abschnittes als Motivation im Hintergrund lassen und uns mathematisch ein einfaches Quantisierungsproblem stellen. Es sei G eine endliche Gruppe, M eine endliche Menge und $\alpha : M \times G \to M$ eine Rechtswirkung der Gruppe G auf M. α induziert eine Links-Wirkung der Gruppe auf $\mathcal{F}(M)$, d.h. auf die komplexwertigen Funktionen über der Menge M. Wir können dann folgende Problemstellung formulieren:

Definition 30*: Algebraisches Quantisierungsproblem*
Gesucht ist eine Algebra B und die Inklusionsabbildungen $\widehat{\ }$, so daß

$$\mathcal{F}(M) \overset{\widehat{}}{\hookrightarrow} B \overset{\widehat{}}{\hookleftarrow} FG \qquad \hat{u}\hat{f}\widehat{u^{-1}} = \widehat{\alpha_u(f)}, \ \ \forall u \in G, f \in \mathcal{F}(M). \tag{5.7}$$

Die Funktionenalgebra $\mathcal{F}(M)$ und die Gruppenalgebra FG sollen demnach (als Unteralgebren) B erzeugen, wobei die nichttriviale Vertauschungsrelation

$$\hat{u}\hat{f}\widehat{u^{-1}} = \widehat{\alpha_u(f)}, \ \ \forall u \in G, f \in \mathcal{F}(M)$$

gelten soll.

Die Vertauschungsrelation in (5.7) ist die Heisenberg-Vertauschungsrelation (vergleiche mit (5.6)). Wir werden nun zeigen, daß dieses Problem durch eine Kreuzproduktalgebra universell gelöst wird.

Satz 20: *Die Kreuzproduktalgebra $\mathcal{F}(M) \rtimes FG$ mit den kanonischen Inklusionsabbildungen $\mathcal{F}(M) \hookrightarrow \mathcal{F}(M) \rtimes FG$ und $\mathcal{F}(M) \rtimes FG \hookleftarrow FG$ ist eine universelle Lösung des algebraischen Quantisierungsproblems.*

Universelle Lösung bedeutet:

- $B := \mathcal{F}(M) \rtimes FG$ ist eine Lösung des algebraischen Quantisierungsproblems (5.7).
- Zu jeder anderen Lösung B' des Problems (5.7) existiert ein eindeutiger Algebrenmorphismus $\Phi_{B'} : \mathcal{F}(M) \rtimes FG \to B'$, so daß $(\forall u \in G, f \in \mathcal{F}(M))$

$$\begin{aligned} 1 \otimes u &\longmapsto \Phi_{B'}(1 \otimes u) = \hat{u} \\ f \otimes 1 &\longmapsto \Phi_{B'}(f \otimes 1) = \hat{f}. \end{aligned}$$

Beweis:

1. Zunächst müssen wir zeigen, daß $\mathcal{F}(M)$ eine Links-FG-Modulalgebra ist, da wir nur dann eine Kreuzproduktalgebra bilden können $(f, h \in \mathcal{F}(M), u \in G, s \in M)$.

$$\begin{aligned} &(u \triangleright f)(s) := f(\alpha_u(s)), \\ &(u \triangleright (fh))(s) = (fh)(\alpha_u(s)) = f(\alpha_u(s))h(\alpha_u(s)) = ((u \triangleright f)(u \triangleright h))(s), \\ &(u \triangleright 1)(s) = 1(\alpha_u(s)) = 1_{\mathbb{K}} = \epsilon(u). \end{aligned}$$

Damit sind die geforderten Eigenschaften aus Definition 7 für eine Links-Modulalgebra erfüllt, und wir können eine Kreuzproduktalgebra $\mathcal{F}(M) \rtimes FG$ bilden, wobei das Produkt gegeben wird durch:

$$(f \otimes u)(h \otimes v) = f(u \triangleright h) \otimes uv, \quad \forall f, h \in \mathcal{F}(M), u, v \in G.$$

Diese Multiplikation läßt sich natürlich linear auf ganz FG fortsetzen. Die Algebren $\mathcal{F}(M)$ und FG sind als Unteralgebren in $\mathcal{F}(M) \rtimes FG$ enthalten. Identifiziert man $u \equiv 1 \otimes u \equiv \hat{u}$ und $f \equiv f \otimes 1 \equiv \hat{f}$, so erhält man die Kreuzrelation

$$ufu^{-1} \equiv (1 \otimes u)(f \otimes 1)(1 \otimes u^{-1}) = (1 \otimes u)(f \otimes u^{-1}) = (u \triangleright f) \otimes 1 = \widehat{\alpha_u(f)}$$

Damit ist $\mathcal{F}(M) \rtimes FG$ eine Lösung des algebraischen Quantisierungsproblems (5.7).

2. Als nächstes beweisen wir die Universalität der Lösung. Es sei $(B', \widehat{\ })$ eine weitere Lösung des algebraischen Quantisierungsproblems. Dann definieren wir die folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} &\Phi_{B'} : \mathcal{F}(M) \rtimes FG \longrightarrow B', \qquad f \otimes v \longmapsto \Phi_{B'}(f \otimes v) := \hat{f}\hat{u}, \\ &\Phi_{B'}(f \otimes u)\Phi_{B'}(h \otimes v) = \hat{f}\hat{u}\hat{h}\hat{v} = \widehat{fu \triangleright h}\hat{u}\hat{v} = \Phi_{B'}(f(u \triangleright h) \otimes uv) \\ = \; &\Phi_{B'}((f \otimes u)(h \otimes v)). \end{aligned}$$

$\Phi_{B'}$ ist demnach ein Algebrenmorphismus. Außerdem gilt $\Phi_{B'}(1 \otimes 1) = 1$. $\Phi_{B'}$ ist natürlich eindeutig, da $\mathcal{F}(M) \rtimes FG$ von $\mathcal{F}(M)$ und FG erzeugt wird. •

Die Universelle Eigenschaft von $\mathcal{F}(M) \rtimes FG$ ist in Diagramm 5.1 dargestellt und besagt gerade, daß es zu jeder weiteren Lösung B' des Universellen Quantisierungsproblems genau einen Algebrenmorphismus $\Phi_{B'}$ gibt:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(M) \arrow[r] \arrow[dr, "\frown"'] & \mathcal{F}(M) \rtimes FG \arrow[d, "\Phi_{B'}"'] & FG \arrow[l] \arrow[dl, "\frown"] \\
& B' &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 5.1: Universalität des Kreuzproduktes $\mathcal{F}(M) \rtimes FG$

Da sowohl $\mathcal{F}(M) \rtimes FG$ als auch B' von den Unteralgebren $\mathcal{F}(M)$ und FG erzeugt werden, folgt aus der Universalität, daß B' (und damit jede Lösung des Universellen Quantisierungsproblems) ein Quotient der Kreuzproduktalgebra $\mathcal{F}(M) \rtimes FG$ ist. Wir können nun eine Verallgemeierung vornehmen, indem wir FG durch eine Hopf-Algebra H ersetzen und die Algebra $\mathcal{F}(M)$ durch eine Links-H-Modulalgebra A.

Satz 21: *Sei H eine Hopf-Algebra und A eine Links-H-Modulalgebra. Die Kreuzproduktalgebra $A \rtimes H$ mit ihren kanonischen Inklusionen $A \hookrightarrow A \rtimes H \hookleftarrow H$ ist universell. Ist B' eine weitere Algebra, die von A und H erzeugt wird, mit Abbildungen $A \stackrel{\frown}{\to} B' \stackrel{\frown}{\leftarrow} H$, und gilt*

$$\hat{h}\hat{a} = (\widehat{h_1 \triangleright a})\widehat{h_2}, \tag{5.8}$$

so gibt es genau einen Algebrenmorphismus $\Phi_{B'}$, der das nachstehende Diagramm kommutativ macht.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dr, "\frown"'] & A \rtimes H \arrow[d, "\Phi_{B'}"'] & H \arrow[l] \arrow[dl, "\frown"] \\
& B' &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 5.2: Universalität des Kreuzproduktes

Wir wollen den einfachen Beweis hier nicht führen, da wir nur den Spezialfall $A = \mathcal{F}(M)$ und $H = FG$ benötigen, den wir weiter oben bereits gezeigt haben. Der allgemeinere obige Satz zeigt wiederum, daß Konstruktionen, die mit Gruppenwirkungen gemacht werden, in der Regel mit Hilfe von Hopf-Algebren verallgemeinert werden können. Wir wollen uns abschließend noch kurz mit den Darstellungen von Kreuzproduktalgebren befassen. Es gilt dabei der folgende interessante Satz:

Satz 22: *Es gibt eine eindeutige Zuordnung zwischen Darstellungen der Kreuzproduktalgebra $A \rtimes H$ und den H-kovarianten A-Moduln.*

Beweis: Ein H-kovarianter A-Modul ist (per Definition) ein A-Modul V, der auch ein H-Modul ist, so daß

$$h \triangleright (a \triangleright v) = (h_1 \triangleright a) \triangleright (h_2 \triangleright v), \ \ \forall h \in H, a \in A, v \in V.$$

Sei V also ein H-kovarianter A-Modul. Definiert man die Darstellung von $A \rtimes H$ auf V durch

$$(a \otimes h) \triangleright v := a \triangleright (h \triangleright v), \tag{5.9}$$

so muß man zeigen, daß damit die Kreuzrelation (5.8) richtig dargestellt wird.

$$(h_1 \triangleright a) \triangleright (h_2 \triangleright v) \stackrel{(5.9)}{=} ((h_1 \triangleright a) \otimes h_2) \triangleright v \equiv ((h_1 \triangleright a)h_2) \triangleright v. \tag{5.10}$$

Dies ist nach Voraussetzung gleich mit

$$h \triangleright (a \triangleright v) = (1 \otimes h)(a \otimes 1) \triangleright v \equiv (ha) \triangleright v. \tag{5.11}$$

Vergleich der letzten Terme in (5.10) und (5.11) zeigt dann die Gültigkeit der Kreuzrelation (5.8). Es existiert also eine Darstellung des Kreuzproduktes auf V. Setzt man andererseits voraus, daß $A \rtimes H$ auf V entsprechend (5.9) dargestellt ist, so erhält man Darstellungen von A und H auf V durch Einschränkung der Kreuzproduktalgebra auf diese Unteralgebren, und mit (5.8) ergibt sich sofort

$$(h \triangleright a) \triangleright v = (1 \otimes h)(a \otimes 1) \triangleright v = (ha) \triangleright v = ((h_1 \triangleright a)h_2) \triangleright v = (h_1 \triangleright a) \triangleright (h_2 \triangleright v),$$

und V ist damit ein H-kovarianter A-Modul. •

Eine spezielle Darstellung, die sogenannte Schrödinger-Darstellung, kann man damit sofort auf A definieren, indem man einfach $V = A$ setzt. Da nach Voraussetzung A eine H-Modulalgebra ist, ist sie insbesondere auch ein H-kovarianter A-Modul. Der Name Schrödinger-Darstellung rechtfertigt sich damit, daß im Spezialfall der Kreuzproduktalgebra $\mathcal{F}(M) \rtimes FG$ die Darstellung auf den Funktionen über dem Konfigurationsraum (Ortsraum) erhalten wird.

Abschließend müssen wir noch kurz über $*$-Strukturen sprechen. Wir übernehmen die Bezeichnungsweisen aus Satz 21, nur daß A und H *Algebren, bzw Hopf-*Algebren sind. Man kann zeigen, daß die Kreuzproduktalgebra dann ebenfalls eine *Algebra ist. Die Inklusionen von A und H in $A \rtimes H$ sind allerdings nur dann *Abbildungen, falls

$$(h \triangleright a)^* = (Sh)^* \triangleright a^*, \ \ \forall h \in H, a \in A.$$

In diesem Fall heißt die Wirkung von H auf A unitär. Alle anderen Bezeichnungsweisen und Begriffe übertragen sich dann völlig analog auf den *Algebren-Fall.

5.2.2 Rechtsversion von Kreuzproduktalgebren

Wir wollen kurz die im Folgenden benutzte Rechtsversion der vorhergehenden Abschnitte angeben. Es sei jetzt also A eine Rechts-H-Modulalgebra, H eine Hopf-Algebra. Die Rechts-Kreuzproduktalgebra $H \ltimes A$ ist als Menge gleich dem Tensorprodukt $H \otimes A$, besitzt aber die folgende Multiplikation:

$$(h \otimes a)(g \otimes b) = hg_1 \otimes (a \triangleleft g_2)b. \tag{5.12}$$

Damit ergibt sich insbesondere

$$\begin{aligned} h \cdot a &\equiv (h \otimes 1)(1 \otimes a) = h \otimes a, \\ a \cdot h &\equiv (1 \otimes a)(h \otimes 1) = h_1 \otimes (a \triangleleft h_2) \equiv (h_1 \otimes 1)(1 \otimes a \triangleleft h_2) \equiv h_1(a \triangleleft h_2). \end{aligned}$$

Sei A eine Rechts-H-Modulalgebra. Ein H-kovarianter Rechts-A-Modul V ist dann ein Rechts-A-Modul, so daß die Kovarianzbedingung

$$(v \triangleleft a) \triangleleft h = (v \triangleleft h) \triangleleft (a \triangleleft h), \ \forall v \in V, a \in A, h \in H$$

erfüllt ist. Wir werden nachfolgend sowohl Links- als auch Rechtswirkungen je nach Zweckmäßigkeit verwenden.

5.3 Die Kreuzproduktalgebra $FG \ltimes \mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt die Verbindung von Kreuzproduktalgebren und algebraischer Quantisierung motiviert wurde, wenden wir uns nun einem konkreten Beispiel zu. Dieses Beispiel wird uns letztlich zur Definition von Hopf-Algebren- und Quantengruppenstrukturen auf vielfachen nichtkommutativen Tori führen. Betrachten wir zunächst $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$. Mit $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ ist die Algebra der Funktionen mit kompaktem Träger auf $\mathbb{Z}^n$ bezeichnet:

$$\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n) = \{f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C} | f \text{ hat kompakten Träger}\}.$$

Dies bedeutet einfach, daß jede Funktion dieser Algebra nur auf endlich vielen Elementen aus $\mathbb{Z}^n$ ungleich Null ist. $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ hat die folgende Basis:

$$\mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)) = \{\delta^I | I \in \mathbb{Z}^n, \delta^I(J) = \delta^{I,J}\}.$$

Für Funktionen ohne kompakten Träger wäre dies keine Basis. Die Algebrenstruktur von $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ ist die übliche punktweise Multiplikation

$$(\phi\psi)(I) = \phi(I)\psi(I),$$

die für die Basiselemente folgende Form annimmt:

$$\delta^I \delta^J = \delta^{I,J} \delta^J.$$

Dabei ist $\delta^{I,J}$ das übliche Kronecker-delta. Der Preis, den man für die Einschränkung auf Funktionen mit kompaktem Träger zahlen muß, ist, daß die Algebra $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ keine Eins besitzt. Formal wäre diese Eins durch die Summe $\sum_{I\in\mathbb{Z}^n}\delta^I$ gegeben. Diese unendliche Summe ist jedoch nicht wohldefiniert. Deswegen beschränken wir uns auf die Funktionen mit kompaktem Träger, werden jedoch bei Bedarf diese Algebra zu einer Multiplikator-Algebra erweitern (vergleiche Kapitel 3). Die endliche Gruppe G wirkt von links auf $\mathbb{Z}^n$ als Untergruppe der Permutationsgruppe S_n:

$$g \triangleright I = g(I).$$

Dadurch wird eine Rechtswirkung von G auf die Algebra $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ induziert:

$$(\phi \triangleleft g)(I) := \phi(g(I)), \quad \forall \phi \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}^n), g \in G, I \in \mathbb{Z}^n.$$

Für Basis-Elemente ergibt dies

$$(\delta^I \triangleleft g)(J) = \delta^I(g(J)) = \delta^{g^{-1}(I),J},$$

d.h.

$$(\delta^I \triangleleft g) = \delta^{g^{-1}(I)}.$$

Wir wollen nun aus den beiden Algebren FG und $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ eine Rechts-Kreuzproduktalgebra konstruieren. Dazu benötigen wir zunächst folgenden Satz:

Satz 23: *Die Algebra $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ ist eine Rechts-FG-Modulalgebra.*

Beweis: Wir müssen nur zeigen, daß $(\phi\psi) \triangleleft g = (\phi \triangleleft g)(\psi \triangleleft g), \ \forall \phi, \psi \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}^n), g \in G$:

$$\begin{aligned}((\phi\psi) \triangleleft g)(I) &= (\phi\psi)(g(I)) = \phi(g(I))\psi(g(I)) = ((\phi \triangleleft g)(I))((\psi \triangleleft g)(I)) \\ &= ((\phi \triangleleft g)(\psi \triangleleft g))(I)\end{aligned}$$

•

Damit sind die Voraussetzungen zur Bildung einer Kreuzproduktalgebra erfüllt. Wir greifen nun auf Gleichung (5.12) über Rechts-Kreuzproduktalgebren zurück. Für unsere Rechts-Kreuzproduktalgebra $FG \ltimes \mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ erhalten wir auf den Basis-Elementen die folgende Multiplikation:

$$(g \otimes \delta^I)(h \otimes \delta^J) = gh \otimes (\delta^I \triangleleft h)\delta^J = gh \otimes \delta^{h^{-1}(I)}\delta^J = gh \otimes \delta^{I,h(J)}\delta^J. \tag{5.13}$$

Wir wollen eine andere Schreibweise für Elemente der Kreuzproduktalgebra $FG \ltimes \mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ einführen. Das Basiselement $g \otimes \delta^I$ schreiben wir als C_g^I, d.h. die Basis ist

$$\mathcal{B}(FG \ltimes \mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)) = \{C_g^I | g \in G, I \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Die Multiplikation in der Kreuzproduktalgebra schreibt sich damit als:

$$C_g^I C_h^J = \delta^{I,h(J)} C_{gh}^J.$$

5.3.1 Die Multiplikator-Hopf-Algebra $\mathcal{C}_n \equiv FG \ltimes_\theta \mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$

Unser nächstes Ziel ist es, aus der Kreuzproduktalgebra eine Hopf-Algebra zu konstruieren. Wir werden sie mit $\mathcal{C}_n \equiv FG \ltimes_\theta \mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ bezeichnen, um anzudeuten, daß sie eine Deformation der Kreuzproduktalgebra $FG \ltimes \mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ darstellt. Die Deformation wird dabei durch eine schiefsymmetrische Bilinearform θ gegeben. Die Kreuzproduktalgebra $FG \ltimes \mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ besitzt keine Eins. Deswegen werden wir nachfolgend mit Multiplikator-Hopf-Algebren arbeiten.

Satz 24: *Sei $\mathcal{C}_n$ der Vektorraum mit der Basis $\mathcal{B}(\mathcal{C}_n) = \{C_g^I | g \in G, I \in \mathbb{Z}^n\}$. Die Algebrenstruktur wird durch das Produkt*

$$C_g^I C_h^J = \delta^{I,h(J)} C_{gh}^J \tag{5.14}$$

definiert. Die Algebra $\mathcal{C}_n$ ist eine Multiplikator-Hopf-Algebra mit den Strukturabbildungen

$$\begin{array}{ll} \textit{Komultiplikation} & \Delta(C_g^I) = \sum_{K+L=I} e^{2\pi i \theta_g(K,L)} C_g^K \otimes C_g^L, \\ \textit{Koeins} & \epsilon(C_g^I) = \delta^{I,0}, \\ \textit{Antipode} & S(C_g^I) = C_{g^{-1}}^{-g(I)}. \end{array} \tag{5.15}$$

Für θ muß eine Kozykelbedingung gelten:

$$\theta_{gh}(I,J) = \theta_h(I,J) + \theta_g((h(I), h(J)). \tag{5.16}$$

Dabei ist θ_g eine reellwertige, antisymmetrische Bilinearform auf dem Raum $\mathbb{Z}^n$.

Die Summe in der Formel für die Komultiplikation ist als eine formale Summe zu verstehen. Sie ist nur sinnvoll als ein Element der Multiplikatoralgebra. θ_g ist eine reellwertige, antisymmetrische Bilinearform auf dem Raum $\mathbb{Z}^n$. Die Wahl von θ als Bilinearform stellt die Koassoziativität der Komultiplikation sicher. Darüber hinaus soll θ_g eine weitere Bedingung erfüllen, die eine einfache Interpretation erlaubt: Sie ist notwendig, damit Δ ein Algebrenmorphismus ist (siehe Beweis von obigem Satz). Diese Bedingung besagt, daß

$$\theta_{gh}(I,J) = \theta_h(I,J) + \theta_g(h(I), h(J)) \tag{5.17}$$

gelten muß. Mathematisch elegant lautet diese Bedingung, daß θ_g ein Gruppen-1-Kozykel bezüglich der nachfolgend definierten Gruppenkohomologie sein muß: Es sei $\mathcal{C}^k$ der Vektorraum aller Abbildungen von G^k in den Raum aller reellen antisymmetrischen Bilinearformen über $\mathbb{Z}^n$. Dieser Raum werde mit $\mathcal{B}$ bezeichnet. Beispielsweise

$$\begin{array}{lll} \phi \in \mathcal{C}^1, & \phi : G \longrightarrow \mathcal{B}, & g \longmapsto \phi_g \equiv \phi(g) \\ \phi \in \mathcal{C}^2, & \phi : \ G \times G \longrightarrow \mathcal{B}, & (g_1, g_2) \longmapsto \phi_{g_1,g_2} \equiv \phi(g_1, g_2). \end{array}$$

Auf $\mathcal{B}$ gibt es eine Rechtswirkung der Gruppe G, die über die Wirkung auf die Multiindizes definiert ist:

$$(\phi \lhd g)(I,J) = \phi(g(I), g(J)),\ \forall g \in G, \phi \in \mathcal{B}; I, J \in \mathbb{Z}^n. \tag{5.18}$$

Der Korandoperator wird als eine Abbildung $\delta : \mathcal{C}^k \to \mathcal{C}^{k+1}$ der folgenden Form definiert:

$$\begin{aligned}(\delta\phi)(g_1, \ldots, g_{k+1}) &= \phi(g_2, \ldots, g_{k+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \phi(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{k+1}) \\ &+ (-1)^{k+1} \phi(g_1, \ldots, g_k) \lhd g_{k+1}.\end{aligned}$$

δ ist nilpotent, d.h. $\delta^2 = 0$. Der Beweis dieser Eigenschaft ist zwar durch direktes Nachrechnen zu erbringen, allerdings etwas länglich und wenig instruktiv. Deswegen wollen wir ihn hier auslassen (5.17) besagt nun gerade, daß θ ein 1-Kozykel ist (d.h. $\delta\theta = 0$), denn

$$\delta\theta(g,h) = \theta(h) - \theta(gh) + \theta(g) \lhd h \stackrel{!}{=} 0$$

ergibt mit Hilfe von (5.18) genau (5.17), wenn man die Gleichung auf die Multiindizes I und J anwendet. Für das neutrale Element $e \in G$ folgt aus der 1-Kozykel-Bedingung , daß $\theta_e = 0$:

$$\theta(e) - \theta(g) + \theta(g) \lhd e = 0 \Rightarrow \theta(e) \equiv \theta_e = 0.$$

Beweis von Satz 24: Wir müssen folgendes zeigen:

1. Δ ist eine Komultiplikation im Sinne der Multiplikator-Hopf-Algebren.
2. Die Abbildungen T_1 und T_2 aus (3.3) und (3.4) sind bijektiv.
3. Koeins und Antipode sind die kanonischen Strukturabbildungen der Multiplikator-Hopf-Algebra.

Zu 1: Wir erinnern uns an die Definition einer Komultiplikation in einer Multiplikator-Hopf-Algebra A aus Kapitel 3: Sie ist ein Homomorphismus $\Delta : A \to M(A \otimes A)$, so daß $\forall a, b \in A$

$$\Delta(a)(1 \otimes b) \subseteq A \otimes A \text{ und } (a \otimes 1)\Delta(b) \subseteq A \otimes A, \tag{5.19}$$

und außerdem Koassoziativität in folgendem Sinne gilt:

$$(a \otimes 1 \otimes 1)(\Delta \otimes id)(\Delta(b)(1 \otimes c)) = (id \otimes \Delta)((a \otimes 1)\Delta(b))(1 \otimes 1 \otimes c). \tag{5.20}$$

Dies prüfen wir nun für die Basiselemente C_g^I nach. Zuerst zeigen wir die Erste der Gleichungen (5.19)

$$\begin{aligned}\Delta(C_g^K)(1\otimes C_h^R) &= (\sum_{I+J=K} e^{2\pi i\theta_g(I,J)} C_g^I \otimes C_g^J)(1\otimes C_h^R)\\ &= \sum_{I+J=K} e^{2\pi i\theta_g(I,J)} C_g^I \otimes \delta^{J,h(R)} C_{gh}^R\\ &= e^{2\pi i\theta_g(K,h(R))} C_g^{K-h(R)} \otimes C_{gh}^R.\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung aus (5.19) führt ebenfalls zum gewünschten Ergebnis. Auch der Nachweis der Koassoziativität (5.20) ist durch direktes Nachrechnen zu erbringen. Für Basiselemente ergibt die linke Seite der Gleichung (5.20):

$$\begin{aligned}&(C_g^I\otimes 1\otimes 1))(\Delta\otimes id)(\Delta(C_h^J)(1\otimes C_i^K))\\ &= (C_g^I\otimes 1\otimes 1))(\Delta\otimes id)e^{2\pi i\theta_h(J,i(K))} C_h^{J-i(K)}\otimes C_{hi}^K\\ &= (C_g^I\otimes 1\otimes 1))e^{2\pi i\theta_h(J,i(K))} \sum_{R+S=J-i(K)} e^{2\pi i\theta_h(R,S)} C_h^R\otimes C_h^S\otimes C_{hi}^K\\ &= e^{2\pi i\theta_h(J,i(K))} \sum_{R+S=J-i(K)} e^{2\pi i\theta_h(R,S)}\delta^{I,h(R)} C_{gh}^R\otimes C_h^S\otimes C_{hi}^K\\ &= e^{2\pi i\theta_h(J,i(K))} e^{2\pi i\theta_h(h^{-1}(I),J-i(K))} C_{gh}^{h^{-1}(I)}\otimes C_h^{J-i(K)-h^{-1}(I)}\otimes C_{hi}^K. \qquad (5.21)\end{aligned}$$

Die rechte Seite von (5.20) ergibt:

$$\begin{aligned}&(id\otimes\Delta)((C_g^I\otimes 1)\Delta(C_h^J))(1\otimes 1\otimes C_i^K)\\ &= (id\otimes\Delta)((C_g^I\otimes 1)(\sum_{R+S=J} e^{2\pi i\theta_h(R,S)} C_h^R\otimes C_h^S)(1\otimes 1\otimes C_i^K)\\ &= (id\otimes\Delta)(\sum_{R+S=J} e^{2\pi i\theta_h(R,S)}\delta^{I,h(R)} C_{gh}^R\otimes C_h^S)(1\otimes 1\otimes C_i^K)\\ &= (id\otimes\Delta)(e^{2\pi i\theta_h(h^{-1}(I),J)} C_{gh}^{h^{-1}(I)}\otimes C_h^{J-h^{-1}(I)}))(1\otimes 1\otimes C_i^K)\\ &= (e^{2\pi i\theta_h(h^{-1}(I),J)} C_{gh}^{h^{-1}(I)}\otimes \sum_{R+S=J-h^{-1}(I)} e^{2\pi i\theta_h(R,S)} C_h^R\otimes C_h^S)(1\otimes 1\otimes C_i^K)\\ &= e^{2\pi i\theta_h(h^{-1}(I),J)} C_{gh}^{h^{-1}(I)}\otimes e^{2\pi i\theta_h(J-h^{-1}(I),i(K))} C_h^{J-h^{-1}(I)-i(K)}\otimes C_{hi}^K\\ &= e^{2\pi i(\theta_h(h^{-1}(I),J)+\theta_h(J-h^{-1}(I),i(K)))} C_{gh}^{h^{-1}(I)}\otimes C_h^{J-h^{-1}(I)-i(K)}\otimes C_{hi}^K. \qquad (5.22)\end{aligned}$$

Vergleich von (5.21) mit (5.22) zeigt die Koassoziativität. Außerdem muß Δ ein Algebrenmorphismus sein: Einerseits ist

$$\Delta(C_g^I\cdot C_h^K) = \delta^{I,h(K)} \sum_{M+N=K} e^{2\pi i\theta_{gh}(M,N)} C_{gh}^M\otimes C_{gh}^N.$$

Andererseits können wir berechnen

$$\Delta C_g^I\Delta C_h^K = \sum_{R+S=I}\sum_{M+N=K} e^{2\pi i(\theta_g(R,S)+\theta_h(M,N))}\delta^{R,h(M)}\delta^{S,h(N)} C_{gh}^M\otimes C_{gh}^N$$

$$= \sum_{\substack{h(M+N)=I \\ M+N=K}} e^{2\pi i(\theta_g(h(M),h(N))+\theta_h(M,N))} C_{gh}^M \otimes C_{gh}^N$$
$$= \delta^{I,h(K)} \sum_{M+N=K} e^{2\pi i(\theta_g(h(M),h(N))+\theta_h(M,N))} C_{gh}^M \otimes C_{gh}^N.$$

An dieser Stelle sieht man, daß die Kozykelbedingung (5.16) für θ erfüllt sein muß, damit Δ ein Algebrenmorphismus ist.

Zu 2: Wir geben zunächst T_1 und T_2 auf den Basiselementen an:

$$\begin{aligned} T_1 : (\mathcal{C}_n) \otimes (\mathcal{C}_n) &\longrightarrow (\mathcal{C}_n) \otimes (\mathcal{C}_n) \\ (C_g^I \otimes C_h^J) &\longmapsto e^{2\pi i\theta_g(I,h(J))} C_g^{I-h(J)} \otimes C_{gh}^J, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 : (\mathcal{C}_n) \otimes (\mathcal{C}_n) &\longrightarrow (\mathcal{C}_n) \otimes (\mathcal{C}_n) \\ (C_g^I \otimes C_h^J) &\longmapsto e^{2\pi i\theta_h(J,-h^{-1}(I))} C_{gh}^{h^{-1}(I)} \otimes C_h^{J-h^{-1}(I)}. \end{aligned}$$

Der Beweis ergibt sich durch explizite Angabe der Umkehrfunktionen

$$\begin{aligned} R_1 \equiv T_1^{-1} : (\mathcal{C}_n) \otimes (\mathcal{C}_n) &\longrightarrow (\mathcal{C}_n) \otimes (\mathcal{C}_n), \\ C_g^J \otimes C_h^K &\longmapsto e^{2\pi i\theta_g(J,-g^{-1}h(K))} C_g^{J+g^{-1}h(K)} \otimes C_{g^{-1}h}^K, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2 \equiv T_2^{-1} : (\mathcal{C}_n) \otimes (\mathcal{C}_n) &\longrightarrow (\mathcal{C}_n) \otimes (\mathcal{C}_n), \\ C_g^J \otimes C_h^K &\longmapsto e^{2\pi i\theta_h(-J,K)} C_{gh^{-1}}^{h(J)} \otimes C_h^{K+J}. \end{aligned}$$

Man zeigt nun leicht, daß $R_1T_1 = T_1R_1 = T_2R_2 = R_2T_2 = id$. Wir wollen dies nur beipielhaft für T_1R_1 nachrechnen:

$$\begin{aligned} T_1R_1(C_g^J \otimes C_h^K) &= e^{2\pi i\theta_g(J,-g^{-1}h(K))} T_1(C_g^{J+g^{-1}h(K)} \otimes C_{g^{-1}h}^K) \\ &= e^{2\pi i\theta_g(J,-g^{-1}h(K))} e^{2\pi i\theta_g(J,g^{-1}h(K))} C_g^{J+g^{-1}h(K)-g^{-1}h(K)} \otimes C_h^K \\ &= C_g^J \otimes C_h^K. \end{aligned}$$

Zu 3: Betrachten wir zunächst die Koeins ϵ, welche die Gleichung

$$\epsilon(C_g^I)C_h^J = \mu T_1^{-1}(C_g^I \otimes C_h^J)$$

erfüllen muß. Wir berechnen beide Seiten der Gleichung:

$$\begin{aligned} \epsilon(C_g^I)C_h^J &= \delta^{I,0} C_h^J, \\ \mu T_1^{-1}(C_g^I \otimes C_h^J) &= \underbrace{e^{2\pi i\theta_g(I,-g^{-1}h(J))}}_{=0 \text{ für } I=0} \underbrace{C_g^{I+g^{-1}h(J)} C_{g^{-1}h}}_{=\delta^{I,0}C_h^J} = \delta^{I,0} C_h^J. \end{aligned}$$

Zuletzt wenden wir uns der Antipode S zu. Sie muß folgender Gleichung genügen:

$$S(C_g^J)C_h^K = (\epsilon \otimes id)T_1^{-1}(C_g^J \otimes C_h^K).$$

Auch hier berechnen wir beide Gleichungsseiten:

$$S(C_g^J)C_h^K = C_{g^{-1}}^{-g(J)}C_h^K = \delta^{-g(J),h(K)}C_{g^{-1}h}^K,$$

$$\begin{aligned}(\epsilon \otimes id)T_1^{-1}(C_g^J \otimes C_h^K) &= (\epsilon \otimes id)(e^{2\pi i\theta_g(J,-g^{-1}h(K))}C_g^{J+g^{-1}h(K)} \otimes C_{g^{-1}h}^K) \\ &= e^{2\pi i\theta_g(J,g^{-1}h(K))}\delta^{J,-g^{-1}h(K)}C_{g^{-1}h}^K = C_{g^{-1}h}^{-h^{-1}g(J)}.\end{aligned}$$

Wir haben damit gezeigt, daß $\mathcal{C}_n$ eine Multiplikator-Hopf-Algebra ist. •

Satz 25: *Die Algebra $\mathcal{C}_n$ ist mit der Involution*

$$(C_g^I)^* := C_{g^{-1}}^{g(I)}. \tag{5.23}$$

eine Multiplikator-Hopf-*Algebra.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß Δ ein *Homomorphismus ist, d.h.

$$\Delta(C_g^I)^* = (\Delta C_g^I)^*.$$

Die linke Seite ergibt

$$\Delta(C_g^I)^* = \Delta C_{g^{-1}}^{g(I)} = \sum_{R+S=g(I)} e^{2\pi i\theta_{g^{-1}}(R,S)}C_{g^{-1}}^R \otimes C_{g^{-1}}^S.$$

Die rechte Seite ergibt

$$\begin{aligned}(\Delta C_g^I)^* &= \left(\sum_{M+N=I} e^{2\pi i\theta_g(M,N)}C_g^M \otimes C_g^N\right)^* \\ &= \sum_{M+N=I} e^{-2\pi i\theta_g(M,N)}C_{g^{-1}}^{g(M)} \otimes C_{g^{-1}}^{g(S)} \\ &= \sum_{R+S=g(I)} e^{-2\pi\theta_g(g^{-1}(R),g^{-1}(S))}C_{g^{-1}}^R \otimes C_{g^{-1}}^S.\end{aligned}$$

Dabei wurde in der letzten Zeile $g(M) = R$ und $g(N) = S$ substituiert. $e^{-2\pi i\theta_g(g^{-1}(R),g^{-1}(S))}$ kann man mit der Kozykelbedingung (5.16) umformen:

$$\theta_g(g^{-1}(R), g^{-1}(S)) = -\theta_{g^{-1}}(R,S) + \underbrace{\theta_e(R,S)}_{\equiv=0} = -\theta_{g^{-1}}(R,S).$$

Damit ergibt sich die Behauptung. •

Satz 26: *Die Algebra $\mathcal{C}_n$ ist eine diskrete Quantengruppe.*

Der Beweis für diese Aussage ergibt sich aus dem dualen Fall in Kapitel 6.

5.4 Quasitrianguläre Struktur der Algebra $\mathcal{C}_n$

5.4.1 Exkurs: Kohomologie, Twists und quasitrianguläre Strukturen

Wir werden im folgenden Abschnitt feststellen, daß die Multiplikator-Hopf-Algebra $\mathcal{C}_n$ der Twist einer kokommutativen Multiplikator-Hopf-Algebra ist (und dadurch eine nichttriviale quasitrianguläre Struktur erbt). Wir wollen hier vorher in kurzer Form die Zusammenhänge zwischen Kohomologie, Twists und quasitriangulärer Struktur darstellen.

Definition 31: ***Quasitrianguläre Struktur***
Eine quasitrianguläre Bialgebra oder Hopf-Algebra ist ein Paar (H, R), wobei H eine Bialgebra bzw. eine Hopf-Algebra und $R \in H \otimes H$ invertierbar ist. R soll die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes id_H)(R) &= R_{13} \cdot R_{23} \equiv R^{(1)} \otimes R^{(1)} \otimes R^{(2)} \cdot R^{(2)}, \\
(id_H \otimes \Delta)(R) &= R_{13} \cdot R_{12} \equiv R^{(1)} \cdot R^{(1)} \otimes R^{(2)} \otimes R^{(2)}, \\
(\tau \circ \Delta)(h) &= R \cdot (\Delta h) \cdot R^{-1}, \quad \forall\, h \in H.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Dabei wurde als Notation gewählt:
$R = \sum_i R_i^{(1)} \otimes R_i^{(2)} \equiv R^{(1)} \otimes R^{(2)}$. *$R$ wird also durch eine Summe zerlegbarer Elemente ausgedrückt.*
$R_{ij} = 1_H \otimes \ldots \otimes \underbrace{R^{(1)}}_{i-te Stelle} \otimes 1_H \otimes \ldots \otimes \underbrace{R^{(2)}}_{j-te Stelle} \otimes 1_H \otimes \ldots \otimes 1_H.$
R wird als quasitrianguläre Struktur bezeichnet. R erfüllt automatisch die Quanten-Yang-Baxter-Gleichung:

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

Die unmittelbare Bedeutung der quasitriangulären Struktur läßt sich an Gleichung (5.24) ablesen: Eine quasitrianguläre Hopf-Algebra ist i.a. nicht kokommutativ, aber ihre Nichtkokommutativität wird durch R kontrolliert. Quasitrianguläre Hopf-Algebren ähneln in ihren Eigenschaften kokommutativen Hopf-Algebren. Da R automatisch die Quanten-Yang-Baxter-Gleichung erfüllt, erzeugt jede quasitrianguläre Struktur automatisch Lösungen dieser Gleichung. Ebenso erfüllt R in jeder Darstellung der zugehörigen quasitriangulären Bi- oder Hopf-Algebra eine Matrix-Lösung der Yang-Baxter-Gleichung. Man nennt R deshalb auch universelle R-Matrix. Natürlich besitzt jede kokommutative Hopf-Algebra eine triviale quasitrianguläre Struktur $R = 1 \otimes 1$, die prinzipiell völlig uninteressant wäre, könnte man sie nicht durch eine Twist-Abbildung zu einer nichttrivialen quasitriangulären Struktur der getwisteten Hopf-Algebra machen. Dies wollen wir nun kurz beschreiben. Dazu definieren wir zunächst, was eine Twist-Abbildung ist und wie man eine getwistete quasitrianguläre Hopf-Algebra damit erhält.

Definition 32: ***Twist-Abbildung und getwistete Hopf-Algebra***
Eine Twist-Abbildung oder kurz ein Twist für eine Hopf-Algebra H ist ein invertierbares Element $\chi \equiv \sum \chi^{(1)} \otimes \chi^{(2)} \in H \otimes H$, für das gilt:

$$(1 \otimes \chi)(id \otimes \Delta)\chi = (\chi \otimes 1)(\Delta \otimes id)\chi.$$

Satz 27: *Sei (H, R) eine quasitrianguläre Hopf-Algebra und χ eine Twist-Abbildung auf H. Dann erhält man eine getwistete quasitrianguläre Hopf-Algebra (H_χ, R_χ) durch*

$$\Delta_\chi(h) = \chi(\Delta h)\chi^{-1}, \qquad R_\chi = \chi_{21} R \chi^{-1}, \qquad S_\chi h = U(Sh)U^{-1}.$$

Dabei ist $U = \sum \chi^{(1)}(S\chi^{(2)})$.

Wir wollen den Beweis hier nicht führen, sondern verweisen auf [46]. Das besondere an dieser Konstruktion ist, daß man aus einer Hopf-Algebra im Prinzip beliebig viele neue Hopf-Algebren erzeugen kann, und auch wenn die Ausgangs-Hopf-Algebra H nur eine triviale quasitrianguläre Struktur besitzt, kann R_χ trotzdem nichttrivial sein.

An dieser Stelle kann und sollte man die Frage aufwerfen, ob Hopf-Algebren, die durch eine Twist-Abbildung auseinander hervorgehen, eine innere Verwandschaft besitzen und wie man diese gegebenenfalls beschreiben kann. Eine Antwort darauf wird durch die-Kohomologietheorie von Hopf-Algebren gegeben. Wir können im Rahmen dieser Dissertation nur wenige Grundzüge und Aspekte behandeln, die uns für ein tieferes Verständnis notwendig erscheinen.

Wir benutzen folgende Notation (für $h \in H^{\otimes n}$):

$$\begin{aligned} \Delta_i h &= (id \otimes \ldots \otimes \Delta \otimes \ldots id)(h), \quad \Delta_0 h := 1 \otimes h, \quad \Delta_{n+1} h = h \otimes 1, \\ \epsilon_i h &= (id \otimes \ldots \otimes \epsilon \otimes \ldots id)(h). \end{aligned}$$

Die Operatoren Δ und ϵ stehen dabei an der i-ten Stelle.

Definition 33: ***Hopf-Algebren-Kohomologie***
Sei H eine Bialgebra oder Hopf-Algebra. Eine n-Kokette wird definiert als ein kounitales invertierbares Element aus $H^{\otimes n}$. Kounital bedeutet, daß $\epsilon_i \chi = 1 \, \forall i$ gilt. Der n-Korand von χ wird gegeben als die (n+1)-Kokette

$$\partial\chi := \left(\prod_{i=0}^{i \text{ gerade}} \Delta_i \chi \right) \left(\prod_{i=1}^{i \text{ ungerade}} \Delta_i \chi_i^{-1} \right) \equiv (\partial_+ \chi)(\partial_- \chi) \tag{5.25}$$

Ein n-Kozykel χ ist eine n-Kokette mit $\partial\chi = 1$.

So ungewohnt diese Ausdrücke aussehen mögen: Für die Funktionenalgebra über einer Gruppe ergeben sich die üblichen Kohomologie-Definitionen [46]. In den Anwendungen werden nur die ersten 3 Kohomologie-Räume $\mathcal{H}^1$, $\mathcal{H}^2$, und $\mathcal{H}^3$ benötigt. Wir wollen uns die entsprechenden Koketten, Kozykel und Koränder genauer ansehen.

(a) Ein 1-Kozykel χ ist ein invertierbares Element aus H, so daß

$$(\chi \otimes \chi) = \Delta\chi,$$

d.h. die gruppenartigen Elemente aus H sind gleich den 1-Kozykeln. Wegen der Koeinsbedingung sind die 1-Kozykel automatisch kounital.

(b) Ein 2-Kozykel χ ist ein invertierbares Element aus $H \otimes H$ mit

$$(1 \otimes \chi)(id \otimes \Delta)\chi = (\chi \otimes 1)(\Delta \otimes id)\chi. \tag{5.26}$$

Er ist kounital, falls $(\epsilon \otimes id)\chi = (id \otimes \epsilon)\chi = 1$ ist.

(c) Ein 3-Kozykel ist ein invertierbares Element aus $H^{\otimes 3}$ mit

$$(1 \otimes \chi)((id \otimes \Delta \otimes id)\chi)(\chi \otimes 1) = ((id \otimes id \otimes \Delta)\chi)((\Delta \otimes id \otimes id)\chi).$$

Er ist kounital, falls $(id \otimes \epsilon \otimes id)\chi = 1 \otimes 1$.

Wir sehen, daß die Twist-Abbildung eine Interpretation im Rahmen der Kohomologie erfährt: Die Twist-Abbildung ist ein 2-Kozykel.

Die Kohomologie von nichtkommutativen Hopf-Algebren unterscheidet sich von „der üblichen Kohomologie“in einem wichtigen Punkt. $\partial^2 = 1$ gilt i.a. nicht. Für die Kohomologieräume H^1 und H^2 hat man aber in jedem Fall die übliche Interpretation. Sie sind immer wohldefiniert [46]. Bezeichnen wir den Raum der n-Koketten mit $\mathcal{C}^n$ den Raum der n-Kozykel mit $\mathcal{Z}^n$ und entsprechend den Raum der n-Koränder mit $\mathcal{B}^n$, so können wir leicht $\mathcal{H}^1 \equiv \mathcal{Z}^1/\mathcal{B}^1$ und $\mathcal{H}^2 \equiv \mathcal{Z}^2/\mathcal{B}^2$ bestimmen:

$\mathcal{H}^1$: Da $\mathcal{H}^0$ aus allen invertierbaren Elementen des Körpers $\mathbb{K}$ besteht, erhält man aus der allgemeinen Formel (5.25), daß $\mathcal{B}^1 = 1$. Oben wurde bereits festgestellt, daß die 1-Kozykel gerade die gruppenartigen Elemente aus der Hopf-Algebra H sind. Damit hat man für die Kohomologiegruppe $\mathcal{H}^1 = \mathcal{Z}^1 = \{h \in H |\ \text{h ist gruppenartig}\}$. Zur Erinnerung: Die gruppenartigen Elemente einer Hopf-Algebra bilden eine Gruppe.

$\mathcal{H}^2$: Sei $\gamma \in \mathcal{C}^1$. Dann ist es per Definition invertierbar und kounital. Der Korand $\partial\gamma$ ist dann ein kounitaler 2-Kozykel. Dies zeigt man, indem man einfach $\partial(\partial\gamma) = 1$ ausrechnet. Ist nun wiederum χ ein 2-Kozykel, so ist

$$\chi^\gamma = (\partial_+\gamma)\chi(\partial_-\gamma^{-1}) = (\gamma \otimes \gamma)\chi\Delta\gamma^{-1} \tag{5.27}$$

ein 2-Kozykel. Der (allerdings etwas längliche) Beweis ist auch hier durch direktes Nachrechnen zu führen. χ^γ wird zu χ kohomolog genannt. $\mathcal{H}^2$ besteht aus den 2-Kozykeln modulo Kohomologietransformationen der Form (5.27)

Ein Wort sei bezüglich $\mathcal{H}^3$ angebracht: Deren Elemente spielen eine Rolle in der Theorie der Quasi-Hopf-Algebren. Diese sind nichtassoziative Hopf-Algebren, deren Nichtassoziativität (ähnlich wie bei den quasitriangulären Hopf-Algebren die Nichtkokommutativität) durch Elemente aus $\mathcal{H}^3$ kontrolliert wird.

5.4.2 $\mathcal{C}_n$ als getwistete Hopf-Algebra

Wir haben oben θ als Kozykel eingeführt. Falls θ ein Korand ist, d.h. falls $\theta = \delta\phi$, dann ist $\mathcal{C}_n$ eine getwistete Hopf-Algebra, genauer gesagt:

Satz 28: *Für ein triviales Kozykel θ ist die Hopf-Algebra $\mathcal{C}_n$ ein Twist der kokommutativen Hopf-Algebra $FG \ltimes_{\theta=0} \mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$.*

Beweis: Ausgangspunkt ist die Multiplikator-Hopf-Algebra $\mathcal{C}_n \equiv FG \ltimes_\theta \mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ für den Fall $\theta = 0$. Wir wollen sie mit $\mathcal{C}_n^0$ abkürzen. Ihre Komultiplikation sei mit Δ_0 bezeichnet. Wir haben somit eine kokommutative Multiplikator-Hopf-Algebra vorliegen. Um zu zeigen, daß $\mathcal{C}_n$ ein Twist dieser Algebra ist, muß gelten: Es gibt ein invertierbares Element $\chi \in M(\mathcal{C}_n^0 \otimes \mathcal{C}_n^0)$, so daß

$$\Delta(c) = \chi\Delta_0(c)\chi^{-1}, \quad \forall c \in \mathcal{C}_n.$$

Wir geben χ an und prüfen diese Gleichung auf den Basiselementen nach:

$$\chi := \sum_{I,J\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi i\phi(I,J)} C_e^I \otimes C_e^J, \qquad \chi^{-1} = \sum_{I,J\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i\phi(I,J)} C_e^I \otimes C_e^J,$$

$$\begin{aligned}
&\chi\Delta_0(C_g^K)\chi^{-1} = \chi\left(\sum_{I+J=K} C_g^I \otimes C_g^J\right)\chi^{-1} \\
&= \left(\sum_{M,N\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi i\phi(M,N)} C_e^M \otimes C_e^N\right)\left(\sum_{I+J=K} C_g^I \otimes C_g^J\right)\left(\sum_{R,S\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i\phi(R,S)} C_e^R \otimes C_e^S\right) \\
&= \sum_{M,N,R,S}\sum_{I+J=K} e^{-2\pi i(\phi(M,N)-\phi(R,S))}(C_e^M \otimes C_e^N)(C_g^I \otimes C_g^J)(C_e^R \otimes C_e^S) \\
&= \sum_{M,N,R,S}\sum_{I+J=K} e^{-2\pi i(\phi(M,N)-\phi(R,S))}\delta^{M,g(I)}\delta^{N,g(J)}\delta^{I,R}\delta^{J,S} C_g^R \otimes C_g^S \\
&= \sum_{R+S=K} e^{2\pi i(\phi(R,S)-\phi(g(R),g(S))} C_g^R \otimes C_g^S \\
&= \sum_{R+S=K} e^{2\pi i((\delta\phi)_g(R,S))} C_g^R \otimes C_g^S = \Delta C_g^K.
\end{aligned}$$

Damit χ ein 2-Kozykel ist, muß nach Gleichung 5.26 gelten:

$$(1 \otimes \chi)(id \otimes \Delta)\chi = (\chi \otimes 1)(\Delta \otimes id)\chi.$$

Berechnen wir zuerst die linke Seite:

$$\begin{aligned}
&(1 \otimes \sum_{I,J} e^{-2\pi i\phi(I,J)} C_e^I \otimes C_e^J)(id \otimes \Delta)(\sum_{R,S} e^{-2\pi i\phi(R,S)} C_e^R \otimes C_e^S) \\
&= (1 \otimes \sum_{I,J} e^{-2\pi i\phi(I,J)} C_e^I \otimes C_e^J)(\sum_{R,S} e^{-2\pi i\phi(R,S)} \sum_{M+N=S} C_e^R \otimes C_e^M \otimes C_e^N) \\
&= \sum_{R,M,N} e^{-2\pi i(\phi(M,N)+\phi(R,M+N))} C_e^R \otimes C_e^M \otimes C_e^N.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite ergibt:

$$\begin{aligned}
&(\sum_{I,J} e^{-2\pi i\phi(I,J)} C_e^I \otimes C_e^J \otimes 1)(\Delta \otimes id)(\sum_{R,S} e^{-2\pi i\phi(R,S)} C_e^R \otimes C_e^S) \\
&= \sum_{I,J} e^{-2\pi i\phi(I,J)} C_e^I \otimes C_e^J \otimes 1)(\sum_{R,S} \sum_{M+N=R} e^{-2\pi i\phi(R,S)} C_e^M \otimes C_e^N \otimes C_e^S) \\
&= \sum_{M,N,S} e^{-2\pi i(\phi(M,N)+\phi(R+M,N))} C_e^M \otimes C_e^N \otimes C_e^S \\
&= \sum_{R,M,N} e^{-2\pi i(\phi(R,M)+\phi(R+M,N))} C_e^R \otimes C_e^M \otimes C_e^N.
\end{aligned}$$

Der Vergleich liefert das gewünschte Resultat. Für eine getwistete Hopf-Algebra muß darüber hinaus noch gelten, daß $Sh = U(S_0 h)U^{-1}$, wobei $U = \chi^{(1)}(S_0\chi^{(2)})$. Dabei ist S_0 die Antipode der ungetwisteten Hopf-Algebra. Durch direktes Nachrechnen beweist man auch diese Eigenschaften. Man kann aber auch ohne rechnen leicht überlegen: Da in die Definition von S die Multiparameterdeformation θ gar nicht eingeht, d.h. insbesondere auch $\theta = 0$ gelten darf, folgt sofort, daß $S = S_0$ ist. Abschließend zeigen wir, daß χ kounital ist. Kounital bedeutet in diesem Fall:

$$(\epsilon \otimes id)\chi \stackrel{!}{=} 1$$

Dies läßt sich ebenfalls leicht nachrechnen:

$$\begin{aligned}
(\epsilon \otimes id)\chi &= \sum_{R,S} e^{-2\pi i\phi(R,S)} \epsilon(C_e^R) \otimes C_e^S \\
&= \sum_{R,S} e^{-2\pi i\phi(R,S)} \delta^{R,0} C_e^S = \sum_S C_e^S = 1.
\end{aligned}$$

•

Zusammenfassend können wir sagen: Auf der Kreuzproduktalgebra $\mathcal{C}_n \equiv FG \ltimes_\theta \mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ läßt sich gemäß Satz 24 eine Hopf-Algebrenstruktur definieren. Wählt man $\theta = 0$, so erhält man die kanonische kokommutative Hopf-Algebra, die sich auf Kreuzproduktalgebren obiger Form immer bilden läßt (dies gilt zumindest für Hopf-Algebren als Faktoren im Kreuzprodukt - wir haben in Verallgemeinerung mit Multiplikator-Hopf-Algebren gearbeitet). Ist θ, in der von uns definierten Kohomologie, ein Korand, so ist die damit definierte Hopf-Algebra mit der kanonischen, kokommutativen durch einen Twist verbunden. Um Verwechslungen zu vermeiden, sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß ϕ und θ Koketten in der von uns eingeführten Kohomologie sind. χ dagegen ist ein 2-Kozykel in der allgemeinen Hopf-Algebren-Kohomologie (siehe z.B. [46]). Die Bedeutung von Twists liegt darin, daß man mit ihrer Hilfe neue Hopf-Algebren erzeugen kann. Insbesondere kann man auch neue quasitrianguläre Hopf-Algebren konstruieren (das sind Hopf-Algebren, die eine quasitrianguläre Struktur, oft auch R-Matrix genannt, besitzen), wenn man von einer vorhandenen quasitriangulären Hopf-Algebra ausgeht. Jede Hopf-Algebra besitzt die triviale quasitrianguläre Struktur $R = 1 \otimes 1$, die man als Ausgangsstruktur benutzen kann. Die oben eingeführte Twist-Abbildung χ führt tatsächlich zu einer nichttrivialen quasitriangulären Struktur R. Diese wollen wir im Folgenden konstruieren und bei dieser Gelegenheit die erforderlichen Definitionen kurz angeben.

5.4.3 Quasitrianguläre Struktur von $\mathcal{C}_n$

Für den Fall des trivialen Kozykels θ besitzt die Kreuzproduktalgebra $\mathcal{C}_n \equiv \mathcal{F}(\mathbb{Z}^n) \rtimes_\theta FG$ eine quasitrianguläre Struktur R (genauer gesagt eine trianguläre Struktur), die sich über den Twist χ nach Satz 27 berechnen läßt.

Satz 29: *Die Multiplikator-Hopf-Algebra $\mathcal{C}_n \equiv \mathcal{F}(\mathbb{Z}^n) \rtimes_\theta FG$ besitzt für ein triviales Kozykel θ eine quasitrianguläre Struktur*

$$R = \sum_{I,J} e^{-4\pi i \phi(J,I)} C_e^I \otimes C_e^J. \tag{5.28}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} R &= \chi_{21}(1 \otimes 1)\chi^{-1} \\ &= \Big(\sum_{R,S} e^{-2\pi i \phi(R,S)} C_e^S \otimes C_e^R\Big)\Big(\sum_{I,J} e^{2\pi i \phi(I,J)} C_e^I \otimes C_e^J\Big) \\ &= \sum_{I,J} e^{-2\pi i(\phi(J,I)-\phi(I,J))} C_e^I \otimes C_e^J = \sum_{I,J} e^{-4\pi i \phi(J,I)} C_e^I \otimes C_e^J. \end{aligned}$$

•

5.5 Zusammenfassung

Wir haben in diesem Kapitel die Kreuzproduktalgebra $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n) \rtimes_\theta FG$ als Modell für eine algebraische Quantisierung eingeführt. Man kann sie als Quantisierung der Bewegung eines Teilchens interpretieren, das sich in dem Raum $\mathbb{Z}^n$, auf einem G-Orbit bewegt. Es werden dabei alle G-Orbits quantisiert. Wir haben gezeigt, daß die Kreuzproduktalgebra $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n) \rtimes_\theta FG$ eine nichtkokommutative Multiplikator-Hopf-Algebren-Struktur besitzt. Diese nichtkokommutative Struktur resultiert aus einer Multiparameterdeformation, die durch eine antisymmetrische Bilinearform θ gegeben wird. θ wurde von uns im Rahmen einer Kohomologie als 1-Kozykel interpretiert. Wir konnten zeigen, daß, falls θ ein Korand ist, $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n) \rtimes_\theta FG$ als Twist der kokommutativen Multiplikator-Hopf-Algebra $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n) \rtimes_{\theta=0} FG$ hergeleitet werden kann. Für diesen Fall konnte gezeigt werden, daß $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n) \rtimes_\theta FG$ eine nichttriviale quasitrianguläre Struktur besitzt. Es sei darauf hingewiesen, daß wir im Rahmen der Theorie von Multiplikator-Hopf-Algebren gearbeitet haben. Diese Theorie ist in ihren Anwendungen bei weitem noch nicht so ausgearbeitet wie die Theorie der Hopf-Algebren. Deshalb wurden weitestgehend alle Rechnungen angegeben, da Sätze und Beweise aus der Hopf-Algebren-Theorie nicht immer ohne weiteres übernommen werden konnten. Man kann die Betrachtungen auch für C^*-Algebren erweitern und dann zeigen, daß $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n) \rtimes_\theta FG$ eine diskrete Quantengruppe ist.

Kapitel 6

Verallgemeinerungen des Quantendoppeltorus

In diesem Kapitel wollen wir uns mit Räumen beschäftigen, die mit dem Nichtkommutativen Torus assoziiert sind. Dieser ist (wir haben das schon einige Male früher erwähnt) der vielleicht best-studierte Raum der Nichtkommutativen Geometrie. Es ist naheliegend diesen Raum unter dem Gesichtspunkt von Symmetrien zu untersuchen. Zwar ist auf dem Nichtkommutativen Torus keine Hopf-Algebren-Struktur bekannt, man weiß jedoch [32], daß auf dem Quantendoppeltorus, der eine Summe von einem kommutativen und einem nichtkommutativen Torus ist, eine solche Struktur existiert. Wir werden im Folgenden zeigen, daß dies nur der Spezialfall einer allgemeineren Konstruktion ist, mit deren Hilfe man eine unendliche Klasse von Hopf-Algebren und Quantengruppen erzeugen kann, die alle dem Nichtkommutativen Torus assoziiert sind. Die Konstruktion ist hierbei übersichtlicher als in [32], wo die Hopf-Algebren-Struktur über eine Kozykeldeformation hergeleitet wird, während wir es in [23] vorgezogen haben, direkt mit Generatoren der Algebra zu arbeiten. Die Multiplikator-Hopf-Algebren des 5. Kapitels erweisen sich als dual zu den multidimensionalen Nichtkommutativen Tori, genauer: Es gibt eine duale Paarung zwischen diesen (Multiplikator-)Hopf-Algebren. Das Studium der nachfolgend konstruierten Hopf-Algebren bei Wurzeln der Eins (Kapitel 7) ermöglicht die Bildung interessanter endlichdimensionaler Hopf-Algebren. Wir werden zeigen, wie diese mit den Kac-Paljutkin-Algebren zusammenhängen. Ein wesentliches Resultat dieser Betrachtungen ist die Darstellung des Quantendoppeltorus als Hopf-Galois-Erweiterung des kommutativen Torus mittels einer der ebenfalls endlichdimensionalen Hopf-Algebren (Kapitel 8). Hopf-Galois-Erweiterungen stehen im Formalismus der Nichtkommutativen Geometrie zu Prinzipal-Faserbündeln in der gleichen Beziehung wie Quantengruppen zu Gruppen: Sie sind die nichtkommutativen Verallgemeinerungen und Gegenstücke zu den klassischen Prinzipal-Faserbündeln. Die in diesem Kapitel konstruierten Hopf-Algebren und Quantengruppen können die Grundlage für interessante Modelle in der Nichtkommutativen Geometrie bilden.

6.1 Nichtkommutativer Torus

Der Nichtkommutative Torus und seine spektralen Tripel sind das Standardbeispiel für einen nichtkommutativen Raum und für eine nichtkommutative Spinmannigfaltigkeit. Wir wollen nur ganz kurz die Definition des Nichtkommutativen Torus geben, wobei für uns nur die algebraischen Relationen wichtig sind, während wir die C^*-Algebren-Struktur nicht explizit benötigen.

Definition 34: ***Nichtkommutativer Torus***
Der Nichtkommutative Torus T^2_θ ist definiert als die Algebra

$$T^2_\theta := \{a = \sum_{r,s\in\mathbb{Z}} a_{rs} u^r v^s |\, a_{rs} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^2)\}.$$

Dabei ist $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^2)$ der Raum der schnell fallenden Doppelfolgen. Der Nichtkommutative Torus liegt dicht in der Algebra A^2_θ, die isomorph ist zu der universellen C^*-Algebra A, welche von zwei unitären Generatoren u und v erzeugt wird, so daß die Relation

$$vu = e^{2\pi i\theta} uv$$

gilt. Da wir uns in dieser Arbeit primär auf die algebraischen Aspekte beschränken wollen, werden wir etwas unpräzise auch für die Menge der Polynome $a = \sum_{r,s\in\mathbb{Z}} a_{rs} u^r v^s$ vom Nichtkommutativen Torus reden. Die Übertragung und Erweiterung zur vollen analytischen Betrachtungsweise bildet für die von uns behandelten Konstruktionen keine Schwierigkeit. Insbesondere werden wir ohne Probleme beweisen können, daß die von uns konstruierten Multi-Tori kompakte Quantengruppen sind. Man kann den Nichtkommutativen Torus auch auf den Fall mit N Generatoren verallgemeinern, wobei die Vertauschungsrelationen dann nicht mehr durch einen Parameter, sondern durch eine Matrix gegeben wird.

6.2 Nichtkommutative Multi-Tori

6.2.1 Algebrenstruktur

Wir benutzen die gleichen Bezeichnungsweisen und Konventionen wie in Kapitel 5. Es sei G eine endliche Gruppe der Mächtigkeit $|G|$. Eine solche endliche Gruppe kann immer als Untergruppe der Permutationsgruppe S_n aufgefaßt werden (um dies zu sehen, muß man nur die Elemente aus G numerieren und die reguläre Wirkung der Gruppe auf sich selbst betrachten). Mit $h \in G$ und $I \in \mathbb{Z}^n$ ist $h(I)$ einfach eine Permutation des Multiindex I.

Wir betrachten den Vektorraum $\mathcal{T}_n$, der konkret durch eine Basis U^I_g, $g \in G, I \in \mathbb{Z}^n$ gegeben wird, d.h. er besitzt eine Basis, deren Elemente durch die Elemente der Gruppe G

und durch einen Multiindex „numeriert“ wird. Elemente aus $\mathcal{T}_n$ können als *endliche* Linearkombinationen der Basiselemente geschrieben werden. Eine unitale Algebrenstruktur ergibt sich, wenn man eine Multiplikation wie folgt definiert:

$$U_g^I U_h^J = \delta_{g,h} e^{2\pi i\theta_g(I,J)} U_g^{I+J}. \tag{6.1}$$

θ ist wiederum eine reelle antisymmetrische Bilinearform. Wir fordern wie in Kapitel 5, daß θ ein 1-Kozykel in der dort definierten Kohomologie ist. Aus (6.1) erhält man sofort die Vertauschungsrelation, wenn man die Antisymmetrie von θ_g berücksichtigt:

$$U_g^I U_h^J = e^{4\pi i\theta_g(I,J)} U_h^J U_g^I.$$

$\mathcal{T}_n$ ist eine unitale Algebra, wobei die Eins der Algebra $\mathcal{T}_n$ offensichtlich durch

$$1_{\mathcal{T}_n} = \sum_{g\in G} U_g^0.$$

gegeben ist. Zu festem $g \in G$ existiert eine Unteralgebra mit Basiselementen U_g^I, $I \in \mathbb{Z}^n$. Die Algebra $\mathcal{T}_n$ kann demnach als eine Summe von diesen Unteralgebren aufgefasst werden. $\mathcal{T}_n$ ist zusätzlich auch eine *Algebra. Die Involution ist als

$$(U_g^I)^* = U_g^{-I}. \tag{6.2}$$

definiert. Die U_g^0 sind selbstadjungierte, paarweise orthogonale Projektoren in der Algebra. Bezeichnet man mit $e_1, \dots, e_n$ die kanonische Basis von $\mathbb{Z}^n$, dann sind die Elemente

$$U^i := \sum_{g\in G} U_g^{e_i},\ i = 1, \dots, n$$

unitär. Sie erfüllen die Gleichung

$$(U^i)^*(U^j)^* U^i U^j = \sum_{g\in G} e^{4\pi i\theta_g(e_i,e_j)} U_g^0,\ i,j = 1, \dots, n. \tag{6.3}$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die Unitarität der U^i:

$$(U^i)^* = \sum_{g\in G} (U_g^{e_i})^* = \sum_{g\in G} U_g^{-e_i}$$

$$(U^i)^* U^i = \sum_{g,h\in G} U_g^{-e_i} U_h^{e_i} = \sum_{g,h\in G} \delta_{g,h} e^{2\pi i\theta_g(-e_i,e_i)} U_g^0 = \sum_{g\in G} U_g^0 \equiv 1_{\mathcal{T}_n}.$$

Analog zeigt man $U^i(U^i)^* = 1_{\mathcal{T}_n}$. Damit ist die Unitarität der U^i bewiesen. Es bleibt noch Gleichung (6.3) zu zeigen:

$$\begin{aligned}(U^i)^*(U^j)^* U^i U^j &= \sum_{g\in G} e^{2\pi i\theta_g(e_i,e_j)} U_g^{i+j} \sum_{h\in G} e^{2\pi i\theta_h(e_i,e_j)} U_h^{-i-j} \\ &= \sum_{g,h\in G} \delta_{g,h} e^{2\pi i(\theta_g(e_i,e_j)+\theta_h(e_i,e_j))} U_g^{i+j} U_h^{-i-j} = \sum_{g\in G} e^{4\pi i\theta_g(e_i,e_j)} U_g^0.\end{aligned}$$

Fassen wir diese Ergebnisse in einem Satz zusammen:

Satz 30: *Auf dem Vektorraum $\mathcal{T}_n$ mit der Basis $B(\mathcal{T}_n) = \{U_g^I | g \in G, I \in \mathbb{Z}^n\}$ wird durch*

$$U_g^I U_h^J = \delta_{g,h} e^{2\pi i \theta_g(I,J)} U_g^{I+J}.$$

eine unitale *Algebrenstruktur definiert. Die Eins und die Involution sind durch

$$1_{\mathcal{T}_n} = \sum_{g \in G} U_g^0, \qquad (U_g^I)^* = U_g^{-I}.$$

gegeben. Die Algebra wird von den selbstadjungierten Projektoren U_g^0, mit $g \in G$, und den unitären Elementen

$$U^i := \sum_{g \in G} U_g^{e_i},\ i = 1, \ldots, n$$

erzeugt.

Man erhält also für jede endliche Gruppe G eine unendliche Algebra. Wir wollen ihre Struktur noch ein wenig deutlicher herausarbeiten. Betrachtet man die Multiplikation (6.1), so sieht man, daß die Algebra $\mathcal{T}_n$ offensichtlich in zueinander orthogonale Unteralgebren $\mathcal{T}_n^g$, $g \in G$ zerlegt werden kann. Die Unteralgebra $\mathcal{T}_n^g$ wird von $U_g^{e_i}$, $i = 1, \ldots, n$ erzeugt (wobei die e_i wieder die Standardbasis in $\mathbb{Z}^n$ sind). Die einzelnen $\mathcal{T}_n^g$ sind nicht nur Unteralgebren, sondern sie sind Ideale der Algebra $\mathcal{T}_n$. Dies ist aufgrund der Multiplikation (6.1) klar. Eine Sonderstellung nimmt das Ideal $\mathcal{T}_n^e$ ein. Da $\theta_e = 0$ ist, ist diese Unteralgebra kommutativ. Bedenkt man, daß der Nichtkommutative n-Torus definiert ist als C^*-Algebra, die von n Generatoren $V_1, \ldots, V_n$ mit den Relationen

$$V_i V_j = e^{4\pi i \theta(e_i, e_j)} V_j V_i$$

erzeugt wird, so können wir unsere Überlegungen in einem Satz zusammenfassen:

Satz 31: *Die Algebra $\mathcal{T}_n$ ist die direkte Summe von $|G| - 1$ Algebren, die als Polynomalgebren auf dem nichtkommutativen n-Torus aufgefaßt werden können, und einem kommutativen n-Torus.*

6.2.2 Hopf-Algebren-Struktur auf $\mathcal{T}_n$

$\mathcal{T}_n$ ist nicht nur eine Algebra, sondern besitzt sogar eine Hopf-Algebren-Strukur.

Satz 32: *Die Algebra $\mathcal{T}_n$ ist eine Hopf-Algebra mit den folgenden Strukturabbildungen:*

$$\Delta U_g^I = \sum_{fh=g} U_f^{h(I)} \otimes U_h^I, \quad \textit{Komultiplikation}$$

$$\epsilon(U_g^I) = \delta_{ge}, \quad \textit{Koeins}$$

$$S(U_g^I) = U_{g^{-1}}^{-g(I)} \quad \textit{Antipode.}$$

Beweis: Da die Hopf-Algebren-Struktur von $\mathcal{T}_n$ zentral für dieses Kapitel ist, wird der Nachweis aller erforderlichen Eigenschaften nachfolgend ausführlich gerechnet. Es genügt dabei, alle Relationen auf den Basiselementen der Algebra zu überprüfen, da alle Strukturabbildungen als Algebrenmorphismen (oder -antimorphismen) definiert werden. Wir müssen also zeigen:

1. Koassoziativität.
2. Koeinsbedingung.
3. Antipodenbedingung.
4. Δ, ϵ sind Algebrenmorphismen.

Zu 1: Zu zeigen: $(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes id)(\Delta U_g^I) &= \sum_{fh=g} \Delta U_f^{h(I)} \otimes U_h^I = \sum_{fh=g} \sum_{ab=f} U_a^{bh(I)} \otimes U_b^{h(I)} \otimes U_h^I \\ &= \sum_{abh=g} U_a^{bh(I)} \otimes U_b^{h(I)} \otimes U_h^I.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(id \otimes \Delta)(\Delta U_g^I) &= \sum_{ak=g} U_a^{k(I)} \otimes \Delta U_k^I = \sum_{ak=g} \sum_{bh=k} U_a^{k(I)} \otimes U_b^{h(I)} \otimes U_h^I \\ &= \sum_{abh=g} U_a^{bh(I)} \otimes U_b^{h(I)} \otimes U_h^I.\end{aligned}$$

Dabei wurde wiederholt die Definition der Komultiplikation benutzt.

Zu 2: Zu zeigen: $(\epsilon \otimes id)(\Delta U_g^I) = (id \otimes \epsilon)(\Delta U_g^I) = U_g^I$, $\forall g \in G, I \in \mathbb{Z}^n$.

$$(\epsilon \otimes id)(\Delta U_g^I) = (\epsilon \otimes id)(\sum_{fh=g} U_f^{h(I)} \otimes U_h^I) = \sum_{fh} \delta_{f,e} = U_g^I.$$

Analog zeigt man $(id \otimes \epsilon)(\Delta U_g^I) = U_g^I$.

Zu 3: Zu zeigen: $\mu(S\otimes id)\Delta(U_g^I) = \mu(id\otimes S)\Delta(U_g^I) = \epsilon(U_g^I)1_{\mathcal{T}_n}$.

$$\begin{aligned}
\mu(S\otimes id)\Delta(U_g^I) &= \mu(S\otimes id)(\sum_{fh=g} U_f^{h(I)}\otimes U_h^I) \\
&= \sum_{fh=g} S(U_f^{h(I)})\cdot U_h^I = \sum_{fh=g} U_{f^{-1}}^{-f(h(I))}\cdot U_h^I \\
&= \sum_{fh=g} \delta_{f^{-1},h} e^{2\pi i\theta_h(-f(h(I)),I)} U_h^0 = \sum_h \delta_{g,e} e^{2\pi i\theta_h(-I,I)} U_h^0 \\
&= \delta_{g,e} 1_{\mathcal{T}_n} = \epsilon(U_g^I)1_{\mathcal{T}_n}.
\end{aligned}$$

Zu 4: Zu zeigen: $\Delta(U_g^I U_h^J) = \delta_{g,h} e^{2\pi i\theta_g(I,J)}\Delta(U_g^{I+J})$.

$$\begin{aligned}
\Delta(U_g^I U_h^J) &= (\Delta U_g^I)(\Delta U_h^J) = (\sum_{kl=g} U_k^{l(I)}\otimes U_l^I)(\sum_{rs=h} U_r^{s(J)}\otimes U_s^J) \\
&= \sum_{\substack{kl=g\\ rs=h}} U_k^{l(I)} U_r^{s(J)}\otimes U_l^I U_s^J \\
&= \sum_{\substack{kl=g\\ rs=h}} \delta_{k,r}\delta_{l,s} e^{2\pi i(\theta_r(l(I),s(J))+\theta_s(I,J))} U_r^{l(I)+s(J)}\otimes U_s^{I+J} \\
&= \sum_{rs=g} \delta_{g,h} e^{2\pi i(\theta_r(s(I),s(J))+\theta_s(I,J))} U_r^{s(I+J)}\otimes U_s^{I+J} \\
&= \sum_{rs=g} \delta_{g,h} e^{2\pi i\theta_{rs}(I,J)} U_r^{s(I)+s(J)}\otimes U_s^{I+J} \\
&= \delta_{g,h} e^{2\pi i\theta_g(I,J)}\Delta(U_g^{I+J})
\end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt wurde die 1-Kozykelbedingung (5.16) benutzt.

Zu zeigen: $\epsilon(U_g^I)\epsilon(U_h^J) = \epsilon(U_g^I U_h^J)$

$$\begin{aligned}
\epsilon(U_g^I)\epsilon(U_h^J) &= \delta_{g,e}\delta_{h,e} = \delta_{g,h}\delta_{g,e} \\
\epsilon(U_g^I U_h^J) &= \epsilon(\delta_{g,h} e^{2\pi i\theta_g(I,J)} U_g^{I+J}) = \delta_{g,h}\delta_{g,e} e^{2\pi i\theta_g(I,J)} = \delta_{g,h}\delta_{g,e}.
\end{aligned}$$

Satz 33: *$\mathcal{T}_n$ ist mit der Involution (6.2) eine Hopf-*Algebra.*

Beweis: Eine Hopf-*Algebra muß folgende Bedingungen erfüllen

$$\Delta\circ^* = (^*\otimes^*)\circ\Delta, \tag{6.4}$$
$$\epsilon\circ^* =^* \circ\epsilon, \tag{6.5}$$

d.h. Δ und ϵ sind *-Homomorphismen. Diese Bedingungen sind leicht nachzurechnen:

$$\begin{aligned}
\Delta((U_g^I)^*) = \Delta(U_g^{-I}) &= \sum_{rs=g} U_r^{-s(I)}\otimes U_s^{-I}, \\
(^*\otimes^*)(\Delta U_g^I) = (^*\otimes^*)(\sum_{rs=g} U_r^{s(I)}\otimes U_s^I) &= \sum_{rs=g} U_r^{-s(I)}\otimes U_s^{-I}.
\end{aligned}$$

Damit ist (6.4) gezeigt. (6.5) ist mit der Definition von ϵ klar, wobei auf $\mathbb{C}$ die Involution durch Komplex-Konjugation gegeben ist. Für die Antipode S folgt aus (6.4) und (6.5), daß

$$(S(h))^* = S^{-1}(h^*),\ h \in \mathcal{T}_n. \tag{6.6}$$

Das zeigt man, indem man zuerst beweist, daß $^* \circ S^{-1} \circ^*$ eine Antipode in $\mathcal{T}_n$ ist. Aus der Eindeutigkeit der Antipode folgt sofort (6.6).

6.3 Multi-Tori als kompakte Quantengruppen

Auch wenn wir uns entschlossen haben, im Rahmen dieser Dissertation ausschließlich eine algebraische Betrachtungsweise zu wählen, wollen wir doch zeigen, daß es ohne weiteres möglich ist, die nichtkommutativen Multi-Tori in einem C^*-Algebren-Kontext als kompakte Quantengruppe im Sinne des 4. Kapitels zu beschreiben. Die C^*-Algebren-Struktur der nichtkommutativen Tori setzen wir als gegeben und bekannt voraus. Zunächst werden wir zeigen, daß die Multi-Tori eine kompakte Matrixquantengruppe entsprechend Definition 28 bilden. Bereits in Kapitel 4 hatten wir angemerkt, daß kompakte Matrixquantengruppen automatisch kompakte Quantengruppen sind. Die Hopf-Algebrenstruktur auf $\mathcal{T}_n$ haben wir bereits gezeigt. Was übrig bleibt ist die Konstruktion einer Matrix M mit Einträgen $M_{ij} \in \mathcal{T}_n$, so daß die Komultiplikation die einfache symbolische Schreibweise

$$\Delta M = M \otimes M$$

annimmt. Die Einträge dieser Matrix müssen dabei die Algebra $\mathcal{T}_n$ erzeugen. Wir numerieren die Elemente der endlichen Gruppe G einfach als $e, g_1, \ldots, g_k$ durch. Betrachten wir o.B.d.A irgendein Basiselement $U^{g_1(e_i)}_{g_2 g_1^{-1}}$ (mit e_i kanonisches Basiselement aus $\mathbb{Z}^n$). Wir nehmen ein solches „unnötig kompliziert“aussehendes Basiselement, weil wir die Matrix M mit solchen Einträgen bilden werden. Auf dieses Element wenden wir nun die Komultiplikation entsprechend (6.4) an.

$$\Delta U^{g_1(e_i)}_{g_2 g_1^{-1}} = \sum_{fh = g_2 g_1^{-1}} U^{hg_1(e_i)}_f \otimes U^{g_1(e_i)}_h = \sum_h U^{hg_1(e_i)}_{g_2 g_1^{-1} h^{-1}} \otimes U^{g_1(e_i)}_h. \tag{6.7}$$

Man kann nun überprüfen, daß die folgende Komultiplikation für jeden einzelnen Eintrag dieser Gleichung entspricht.

$$\Delta \begin{pmatrix} U^{e_i}_e & U^{g_1(e_i)}_{g_1^{-1}} & U^{g_2(e_i)}_{g_2^{-1}} & \ldots & U^{g_k(e_i)}_{g_k^{-1}} \\ U^{e_i}_{g_1} & U^{g_1(e_i)}_e & U^{g_2(e_i)}_{g_1 g_2^{-1}} & \ldots & U^{g_k(e_i)}_{g_1 g_k^{-1}} \\ U^{e_i}_{g_2} & U^{g_1(e_i)}_{g_2 g_1^{-1}} & U^{g_2(e_i)}_e & \ldots & U^{g_k(e_i)}_{g_2 g_k^{-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U^{e_i}_{g_k} & U^{g_1(e_i)}_{g_k g_1^{-1}} & U^{g_2(e_i)}_{g_k g_2^{-1}} & \ldots & U^{g_k(e_i)}_{g_e} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} U_e^{e_i} & U_{g_1^{-1}}^{g_1(e_i)} & U_{g_2^{-1}}^{g_2(e_i)} & \ldots & U_{g_k^{-1}}^{g_k(e_i)} \\ U_{g_1}^{e_i} & U_e^{g_1(e_i)} & U_{g_1 g_2^{-1}}^{g_2(e_i)} & \ldots & U_{g_1 g_k^{-1}}^{g_k(e_i)} \\ U_{g_2}^{e_i} & U_{g_2 g_1^{-1}}^{g_1(e_i)} & U_e^{g_2(e_i)} & \ldots & U_{g_2 g_k^{-1}}^{g_k(e_i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{g_k}^{e_i} & U_{g_k g_1^{-1}}^{g_1(e_i)} & U_{g_k g_2^{-1}}^{g_2(e_i)} & \ldots & U_{g_e}^{g_k(e_i)} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} U_e^{e_i} & U_{g_1^{-1}}^{g_1(e_i)} & U_{g_2^{-1}}^{g_2(e_i)} & \ldots & U_{g_k^{-1}}^{g_k(e_i)} \\ U_{g_1}^{e_i} & U_e^{g_1(e_i)} & U_{g_1 g_2^{-1}}^{g_2(e_i)} & \ldots & U_{g_1 g_k^{-1}}^{g_k(e_i)} \\ U_{g_2}^{e_i} & U_{g_2 g_1^{-1}}^{g_1(e_i)} & U_e^{g_2(e_i)} & \ldots & U_{g_2 g_k^{-1}}^{g_k(e_i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{g_k}^{e_i} & U_{g_k g_1^{-1}}^{g_1(e_i)} & U_{g_k g_2^{-1}}^{g_2(e_i)} & \ldots & U_{g_e}^{g_k(e_i)} \end{pmatrix} \qquad (6.8)$$

Diese Matrixgleichung ist symbolisch für

$$\Delta M_{kl} = \sum_u M_{ku} \otimes M_{ul}.$$

Ein einziger Schritt ist nun noch zu vollziehen: In der obigen Matrix stehen noch nicht alle Generatoren von $\mathcal{T}_n$. Man muß noch e_i „laufen lassen“. Bezeichnen wir die obige Matrix mit M^i, so bilden wir einfach die größere Matrix

$$\begin{pmatrix} M^1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & M^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & M^n \end{pmatrix} \qquad (6.9)$$

In dieser stehen sicherlich alle Generatoren, und sie besitzt bezüglich der Komultiplikation die gewünschte Form. Damit ergibt sich:

Satz 34: *Die Hopf-Algebra $\mathcal{T}_n$ (erweitert zu einer C^*-Algebra) ist eine kompakte Matrixquantengruppe im Sinne von Woronowicz [71] und damit eine kompakte Quantengruppe.*

6.4 Die Dualität von $\mathcal{T}_n$ und $\mathcal{C}_n$

Auf der Stufe der Basiselemente von $\mathcal{T}_n$ und $\mathcal{C}_n$ wird die Dualität der beiden Vektorräume durch

$$\langle C_g^I | U_h^J \rangle = \delta_{g,h} \delta^{I,J}$$

definiert. Bevor wir mit der Untersuchung der Dualität fortfahren, ist es an dieser Stelle vielleicht angebracht, darauf einzugehen, wie man praktisch bei Kenntnis der Hopf-Algebren-Struktur von $\mathcal{T}_n$ zu $\mathcal{C}_n$ kommt. Wir wissen zwar, daß der Dualraum von $\mathcal{T}_n$ keine Hopf-Algebra sein muß, da $\mathcal{T}_n$ unendlichdimensional ist (siehe Unterabschnitt 2.2.3), man kann aber trotzdem versuchen, einfach formal mit den Gleichungen (2.15)-(2.20) zu dualisieren. Man gelangt dann auch tatsächlich zu den Formeln (5.14) und (5.15). Allerdings tauchen dort die unendlichen Summen in der Komultiplikation auf, die als abkürzende Schreibweise für Elemente der Multiplikatoralgebra interpretiert werden müssen. Man kann auch umgekehrt von der Multiplikator-Hopf-Algebra $\mathcal{C}_n$ ausgehen und zeigen, daß $\mathcal{T}_n$ dual zu dieser Multiplikator-Hopf-Algebra ist, indem man die Konstruktion aus [19] benutzt. Wir wollen die Beweise und Definitionen hier nicht führen, sondern geben das Ergebnis als Satz an:

Satz 35: *Die (Multiplikator-)Hopf-Algebren $\mathcal{C}_n$ und $\mathcal{T}_n$ sind in der Kategorie der Multiplikator-Hopf-Algebren dual zueinander.*

6.5 Der Quantendoppeltorus

Wir wollen nun einen wichtigen und interessanten Spezialfall betrachten, der sich aus der allgemeinen Konstruktion der vorherigen Abschnitte ergibt. Als Algebra wählen wir $\mathcal{T}_2$. Die Gruppe G ist gerade $\mathbb{Z}_2$. Diese Gruppe besteht nur aus zwei Elementen: dem neutralen Element e und σ. Die Multiindizes sind Elemente aus $\mathbb{Z}^2$. Die Wirkung von $\mathbb{Z}_2$ auf $\mathbb{Z}^2$ ist durch den Flip $\sigma : (n,m) \to \sigma(n,m) = (m,n)$ gegeben. Der Quantendoppeltorus ist eine direkte Summe aus einem Kommutativen Torus (korrespondierend zum neutralen Element $e \equiv +$) und einem Nichtkommutativen Torus (korrespondierend zu $\sigma \equiv -$). Das Kozykel θ wird (wegen der Antisymmetrie) durch einen einzigen reellen Parameter gegeben:

$$q = e^{4\pi i\theta(e_1,e_2)},$$

wobei $\{e_1, e_2\}$ die kanonische Basis in $\mathbb{Z}^2$ ist (es sei zur Sicherheit angemerkt, daß natürlich nicht q der reelle Deformationsparameter ist, sondern, daß dieser in der Matrix θ steht). Wir fassen die Eigenschaften des Quantendoppeltorus in einer Definition zusammen:

Definition 35: ***Quantendoppeltorus***
Der Quantendoppeltorus DT_q ist eine nichtkommutative und nichtkokommutative Hopf-Algebra. Er wird als Algebra erzeugt von den unitären Generatoren U, V und den selbstadjungierten Projektoren P_+, P_- mit den Relationen

$$\begin{aligned} VU &= P_+UV + qP_-UV, \\ P_+U &= UP_+, \\ P_+V &= VP_+, \\ P_+ + P_- &= 1. \end{aligned}$$

Die Komultiplikation ist (mit $U_\pm = UP_\pm, V_\pm = VP_\pm$):

$$\Delta \begin{pmatrix} U_+ & V_- \\ U_- & V_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_+ & V_- \\ U_- & V_+ \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} U_+ & V_- \\ U_- & V_+ \end{pmatrix}.$$

Koeins ϵ und Antipode S sind gegeben durch

$$\epsilon(U_+) = \epsilon(V_+) = \epsilon(P_+) = 1,$$

$$\begin{aligned} S(U_+) &= U^{-1}P_+, & S(U_-) &= V^{-1}P_-, \\ S(V_+) &= V^{-1}P_+, & S(V_-) &= U^{-1}P_-, \\ S(P_+) &= P_+. \end{aligned}$$

DT_q ist die direkte Summe von Polynomen auf dem Kommutativen Torus, die von U_+, V_+ erzeugt werden, und den Polynomen auf dem Nichtkommutativen Torus, die von U_-, V_- mit der Relation $U_-V_- = qV_-U_-$ generiert werden.

Bisher haben wir in diesem Abschnitt nur algebraisch gearbeitet. Selbstverständlich können wir DT_q durch einen geeigneten Abschluß zu einer C^*-Algebra machen (wir haben das schon allgemein gezeigt). Diese wollen wir ebenfalls einfach als Quantendoppeltorus bezeichnen. Das wird im Folgenden kaum zu Verwirrungen führen.

Satz 36: *Der Quantendoppeltorus ist eine kompakte Matrixquantengruppe im Sinne von Woronowicz und damit eine kompakte Quantengruppe.*

Der Beweis ergibt sich einfach durch Überprüfen der Axiome in Definition 28 für eine kompakte Matrixquantengruppe, wie sie in Kapitel 4 eingeführt wurden. Dort hatten wir bereits darauf hingewiesen, daß solche kompakten Matrixquantengrupen tatsächlich kompakte Quantengruppen im Sinne von [45] sind.

6.6 Beispiele

Wir haben sowohl im Fall der Multiplikator-Hopf-Algebra $\mathcal{C}_n$, als auch für die Hopf-Algebra $\mathcal{T}_n$ auf den Nichtkommutativen Multi-Tori gesehen, daß die Deformation durch eine antisymmetrische Bilinearform θ gegeben ist, die als 1-Kozykel in einer von uns definierten Kohomologie interpretiert werden kann. Die Konstruktionen sind prinzipiell für alle endlichen Gruppen G durchführbar. Es stellt sich die Frage, ob man zumindest für spezielle endliche Gruppen weitergehende Aussagen über die Bilinearform θ machen kann. Wir werden zeigen, daß dies zumindest für zyklische Gruppen ohne weiteres möglich ist.

Wir betrachten die Gruppe $G = \mathbb{Z}_N$, also die zyklische Gruppe mit N Elementen. Diese

Gruppe wird durch ein einziges Element erzeugt, und genau diesen Sachverhalt macht man sich für die Bestimmung von θ zunutze. Aus der 1-Kozykelbedingung (5.16), der θ genügen muß, bekommt man zunächst

$$0 \overset{!}{=} \theta_{g_{n-1}g}(I,J) = \theta_g(I,J) + \theta_{g_{n-1}}(g(I),g(J)).$$

Den zweiten Summanden $\theta_{g_{n-1}}(g(I),g(J))$ kann man nun weiter mit der Kozykelbedingung bearbeiten und dies so lange fortsetzen, bis man man letztlich zu der Formel

$$0 = \theta_g(I,J) + \theta_g(g(I),g(J)) + \theta_g(g_2(I),g_2(J)) + \ldots + \theta_g(g_{N-1}(I),g_{N-1}(J)) \quad (6.10)$$

gelangt. Die gesamte Deformation wird damit durch eine einzige Bilinearform $\theta_g \equiv \Theta$ bestimmt. Da $\Theta(I,J)$ auch als $\sum_{jk} I_j \Theta_{jk} J_k$ geschrieben werden kann, ist (6.10) gleichbedeutend mit folgender Relation für die Matrix Θ:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \Theta_{i+k,j+k} = 0, \; 0 \le i,j < N.$$

Wir berechnen dies für den Fall von $\mathbb{Z}_2$.

Beispiel 9: *$G = \mathbb{Z}_2$*

Für $\mathbb{Z}_2$ lauten die obigen Gleichungen der Matrixeinträge von $\Theta = \theta_1$:

$$\begin{aligned} \Theta_{12} + \Theta_{21} &= 0, \\ \Theta_{11} + \Theta_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Sie werden von der antisymmetrischen Matrix

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Diese Lösung ist (wie man sofort sehen kann) ein triviales Kozykel, da es δ einer konstanten Bilinearform ist. Die Hopf-Algebra ist die Duale des Quantendoppeltorus.

Beispiel 10: *$G = \mathbb{Z}_3$*

Wir wollen die antisymmterische Matrix Θ für die Gruppe $\mathbb{Z}_3$ berechnen. Berücksichtigt man die Antisymmetrie, so erhält man die folgende Bedingung für die Matrixeinträge:

$$\Theta_{01} + \Theta_{12} + \Theta_{20} = 0.$$

Die Lösung wird durch die folgende Matrix gegeben:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & \theta & -\rho \\ -\theta & 0 & -(\theta+\rho) \\ \rho & (\theta+\rho) & 0 \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

Wiederum können alle Matrizen (Bilinearformen) θ_{g_i} rekursiv aus der oben berechneten hergeleitet werden, so daß die gesamte Deformation durch 2 Parameter beschrieben wird.

Beispiel 11: $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

An diesem Beispiel, daß immer noch relativ einfach ist, werden wir sehen, daß für beliebige endliche Gruppen die Deformation deutlich komplizierter wird, da man nicht mehr mit einer Matrix θ auskommt. Die Gruppe $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ wirkt auf $\mathbb{Z}^4$ durch vertauschen der ersten beiden Einträge bzw. der letzten beiden Einträge der Vektoren aus $\mathbb{Z}^4$. Sie besteht aus 4 Elementen$\{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12} = \sigma_1\sigma_2\}$. e ist natürlich das neutrale Element, und σ_1, σ_2 haben die Matrixdarstellung

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

Natürlich gilt $[\sigma_1, \sigma_2] = 0$, sowie $\sigma_i^2 = e$. Aus der Kozykelbedingung folgt für die Matrizen θ_{σ_1} und θ_{σ_2}:

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma_i \theta_{\sigma_i} \sigma_i + \theta_{\sigma_i}, \\ \theta_{\sigma_{12}} \equiv \theta_{\sigma_1\sigma_2} &= \sigma_2 \theta_{\sigma_1} \sigma_2 + \theta_{\sigma_2}, \\ \theta_{\sigma_{21}} \equiv \theta_{\sigma_2\sigma_1} &= \sigma_1 \theta_{\sigma_2} \sigma_1 + \theta_{\sigma_1}. \end{aligned}$$

Als Ergebnis bekommt man

$$\theta_{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & -b & -c \\ -b & b & 0 & 0 \\ -c & c & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \theta_{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b' & -b' \\ 0 & 0 & (b'-b+c) & (b-b'-c) \\ -b' & -(b'-b+c) & 0 & f' \\ b' & -(b-b'-c) & -f' & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\theta_{\sigma_{12}}$ ist damit ebenfalls festgelegt, so daß die Deformation insgesamt 5 freie Parameter enthält.

Kapitel 7

Multi-Tori und duale Multi-Tori bei Wurzeln der Eins

7.1 Endlichdimensionale Hopf-Algebren

Will man Modelle für Spektrale Tripel mit Quantengruppensymmetrie konstruieren, so wird man insbesondere nach endlichdimensionalen Beispielen suchen, da man hier (sowohl bezüglich der spektralen Tripel, als auch bezüglich der Hopf-Algebren) die Dinge besser klassifizieren, kontrollieren und auch konkret berechnen kann. Dies gilt, obwohl selbst die endlichdimensionalen Hopf-Algebren keineswegs vollständig klassifiziert sind. Einen guten Überblick über den Stand der Forschung, endlichdimensionale Hopf-Algebren betreffend, gibt [2]. Es sei hier ein kleiner Überblick darüber gegeben, wie man sich endlichdimensionale Hopf-Algebren „beschafft“:

- **Duale Hopf-Algebren:** Ist H eine endlichdimensionale Hopf-Algebra, so ist (wie wir bereits wissen) auch die duale Hopf-Algebra H^* eine endlichdimensionale Hopf-Algebra.

- **Funktionenalgebren über endlichen Gruppen:** Die komplexwertigen Funktionen über einer endlichen Gruppe bilden eine endlichdimensionale Hopf-Algebra. Diese ist immer halbeinfach.

- **Gruppenalgebra:** Die Algebra, die von den Elementen einer endlichen Gruppe frei erzeugt wird, ist eine endlichdimensionale Hopf-Algebra. Auch diese Algebra ist halbeinfach.

- **Erweiterungen:** Bei Erweiterungen von Hopf-Algebren, ist die grundlegende Idee, daß man „größere“Hopf-Algebren aus „kleineren“aufbaut. Dazu betrachtet man Sequenzen von Hopf-Algebren der Form

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} C \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 1.$$

Dabei ist (für eine exakte Sequenz) ι eine injektive und π eine surjektive Abbildung, und 1 bezeichnet die Hopf-Algebra $\mathbb{K}$. Mit Erweiterungen werden wir uns in Kapitel 8 beschäftigen.

- **„Twisting“:** Daß man aus einer Hopf-Algebra unter Umständen durch eine Twistabbildung eine neue Hopf-Algebra erhalten kann, wobei dabei quasitrianguläre Strukturen eine große Rolle spielen, haben wir bereits im unendlichdimensionalen Fall in Abschnitt 5.4 gesehen. Dies gilt natürlich insbesondere auch für endlichdimensionale Hopf-Algebren. Eine kurze Einführung in die mathematischen Aspekte der Erweiterungen, insbesondere von endlichdimensionalen Hopf-Algebren, findet sich in [2].

- **Quantendoppel:** Eine, auch historisch wichtige, Konstruktion ist das Quantendoppel, das im Wesentlichen aus einer Hopf-Algebra H und der Hopf-Algebra $(H^*)^{cop}$ (cop steht für das „opposite“Koprodukt) aufgebaut ist. Hiermit wollen wir uns im Rahmen dieser Arbeit nicht beschäftigen.

In den folgenden Abschnitten und in Kapitel 8 befassen wir uns mit der Konstruktion von endlichdimensionalen Hopf-Algebren durch Erweiterungen und Quotientenbildung.

7.2 Die Algebra der Multi-Tori bei Wurzeln der Eins

Nachdem wir die Hopf-Algebren-Struktur der Nichtkommutativen Multi-Tori ausgiebig diskutiert haben, wollen wir uns der Frage zuwenden, wie wir aus den Multi-Tori neue, endlichdimensionale Hopf-Algebren konstruieren können. Um das allgemeine Verfahren anhand eines einfachen Spezialfalles (auf den wir später in Abschnitt 7.2.1 zurückkommen werden) zu motivieren, betrachten wir den Quantendoppeltorus $\mathcal{T}_2$. Die relevante endliche Gruppe ist hierbei $G = \mathbb{Z}_2$ (siehe Abschnitt 6.5). Der Quantendoppeltorus wird als Algebra von den Generatoren $U_\pm, V_\pm$ mit den Relationen

$$\begin{aligned} V_+U_+ &= U_+V_+, \\ V_-U_- &= qU_-V_- \end{aligned}$$

erzeugt. q kann hierbei als $q = e^{4\pi i\theta(e_1,e_2)}$ geschrieben werden, wobei e_1, e_2 die kanonische Basis von $\mathbb{Z}^2$ ist ($\mathbb{Z}^2$ wird als $\mathbb{Z}$-Modul aufgefaßt). Zu einer endlichdimensionalen Algebra gelangt man, indem man setzt:

$$U_\pm^N = V_\pm^N = 1, \qquad\qquad (q)^N = 1.$$

q ist also eine Wurzel der Eins. Natürlich muß man nachprüfen, ob die so entstandene Algebra auch eine Hopf-Algebra ist. Wir werden, wie gesagt, auf dieses Beispiel zurückkommen. Zunächst wollen wir jedoch die Konstruktion von endlichdimensionalen Hopf-Algebren nun allgemeiner durchführen, d.h. wir verlassen den einfachen Fall mit nur einem Deformationsparameter und wenden uns der durch Matrizen θ_g gegebenen Multiparameterdeformation zu.

Wir setzen folgendes voraus:

1. $\theta_g \in M_N(\mathbb{Q})\,\forall g \in G$, d.h. θ_g enthält nur rationale Einträge.
2. $\mathcal{L}$ bezeichne eine G-invariante Untergruppe von $\mathbb{Z}^n$, d.h. aus $I \in \mathcal{L} \Rightarrow g(I) \in \mathcal{L}$.
3. Außerdem gelte $\theta_g(I, J) \in \mathbb{Z}\ \ \forall I \in \mathcal{L}, J \in \mathbb{Z}^n, g \in G$.

Die erste Bedingung ist dabei eine nötige Voraussetzung um Bedingung 3 erfüllen zu können. Die Bedingung, daß $\mathcal{L}$ eine G-invariante Untergruppe von $\mathbb{Z}^n$ sein soll, ist eine Konsistenzbedingung: Sie stellt sicher, daß die Kozykelbedingung

$$\theta_{gh}(I, J) = \theta_h(I, J) + \theta_g(h(I), h(J))$$

erfüllt wird, wenn $I \in \mathcal{L}$ ist. Dann ist nämlich nach Voraussetzung die linke Seite der Gleichung ebenso wie der erste Summand der rechten Seite eine ganze Zahl. Da wegen der Invarianz $h(I) \in \mathcal{L}$ für $I \in \mathcal{L}$ gilt, ist auch der zweite Summand ein Element aus $\mathbb{Z}$. Wir werden sehen, daß die ersten beiden Bedingungen garantieren, daß man immer eine Untergruppe $\mathcal{L}$ von $\mathbb{Z}^n$ finden kann, so daß der Quotient $\mathbb{Z}^n/\mathcal{L}$ endlich wird.

Kommen wir zur eigentlichen Konstruktion: Im ersten Schritt bilden wir den Quotienten $Q := \mathbb{Z}^n/\mathcal{L}$. Damit können wir die folgende Algebra $\mathcal{F}_n$ definieren.

Definition 36 *Wir bezeichnen mit $\mathcal{F}_n$ die Algebra, welche als Vektorraum von der Basis $\{w_g^{[I]} | g \in G, [I] \in Q\}$ aufgespannt und als Algebra durch die Relation*

$$w_g^{[I]} w_h^{[J]} = \delta_{g,h} e^{2\pi i \theta_g([I],[J])} w_g^{[I+J]}. \tag{7.1}$$

erzeugt wird.

Wir müssen nun noch zeigen, daß $e^{2\pi i \theta_g([I],[J])}$ wohldefiniert, d.h. unabhängig vom Repräsentanten ist. Sei also $I, J \in \mathbb{Z}^n, I', J' \in \mathcal{L}$. Dann ist

$$\theta(I + I', J + J') = \theta(I, J) + \underbrace{\theta(I, J')}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{\theta(I', J)}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{\theta(I', J')}_{\in\mathbb{Z}}.$$

Deswegen gilt $e^{2\pi i \theta_g(I+I',J+J')} = e^{2\pi i \theta_g(I,J)}$. Wir wollen die Projektion von $-I \in \mathbb{Z}^n$ auf Q mit $-[I]$ bezeichnen. Es gilt der folgende Satz:

Satz 37: *Die Algebra $\mathcal{F}_n$ ist eine involutive Hopf-Algebra. Sei $\mathcal{L}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}^n$ derart, daß der Quotient $\mathbb{Z}^n/\mathcal{L}$ endlich ist. Dann ist $\mathcal{F}_n$ eine endlichdimensionale Hopf-Algebra.*

Beweis: Den Beweis, daß $\mathcal{F}_n$ eine Hopf-*Algebra ist, wollen wir auslassen, da er völlig analog zu $\mathcal{T}_n$ gezeigt werden kann. •

Man kann sich leicht überlegen, daß solche Untergruppen $\mathcal{L}$ immer existieren. Sei beispielsweise N eine ganze Zahl, so daß $N\theta_g(I,J) \in \mathbb{Z}\ \forall g \in G$ und $I, J \in \mathbb{Z}^n$. Dies ist möglich, da wir nach Voraussetzung endlich viele $n \times n$-Matrizen mit rationalen Einträgen betrachten. Untergruppen von $\mathbb{Z}^n$, die von allen $N(e_i), i = 1, \ldots, n$. erzeugt werden, führen dann zu endlichen Quotienten. Dabei haben wir wiederum mit e_i, $i = 1, \ldots n$ die kanonischen Basiselemente aus $\mathbb{Z}^n$ bezeichnet.

Satz 38: *Die Algebra $\mathcal{F}_n$ ist eine halbeinfache, endlichdimensionale, komplexe Algebra.*

Beweis: Wir bemerken, daß die $w_g^{[0]}, g \in G$ zentrale Projektoren sind, die (wenn man sie addiert) die Eins der Algebra $\mathcal{F}_n$ ergeben. Deshalb können wir $\mathcal{F}_n$ als direkte Summe schreiben:

$$\mathcal{F}_n = \oplus_{g \in G} \mathcal{F}_n^g. \tag{7.2}$$

Jede Komponente (zu festem g) der direkten Summe enthält dabei alle Elemente $w_g^{[I]}, [I] \in Q$. Da $\mathcal{F}_n$ eine involutive Antipode (d.h. $S^2 = id$) besitzt, gilt nach [2], daß $\mathcal{F}_n$ halbeinfach ist. •

Wir betrachten im Folgenden ausschließlich den Fall, daß $\mathcal{F}_n$ endlichdimensional ist, d.h. der Quotient $Q = \mathbb{Z}^n/\mathcal{L}$ ist endlich.

7.2.1 Der Quantendoppeltorus bei Wurzeln der Eins

Wir wenden die Ergebnisse des vorherigen Abschnittes nun auf den Quantendoppeltorus an. Dieser wird (wie wir gesehen haben) von den Generatoren $U_\pm$ und $V_\pm$ mit den Relationen $U_+V_+ = V_+U_+$ und $U_-V_- = qV_-U_-$ erzeugt. Dabei ist $q = e^{4\pi i\theta(e_1,e_2)}$ durch einen einzigen reellen Deformationsparameter gegeben. e_1, e_2 sei wie bisher die kanonische Basis in $\mathbb{Z}^2$. Für den Quantendoppeltorus ist $G = \mathbb{Z}_2$. Wir betrachten nun den Fall, daß $q^N = 1$ ist. Die Untergruppe $\mathcal{L} \subseteq G$ werde von Elementen der Form Ne_1 und Ne_2 aufgespannt. Der Quotient $Q = \mathbb{Z}^2/\mathcal{L}$ ist gleich mit $(\mathbb{Z}_N)^2$. Nach Satz 37 erhalten wir damit eine endlichdimensionale Hopf-Algebra $\mathcal{F}_2$, welche die Basis $w_\pm^{[I]}$, mit $[I] \in \mathbb{Z}^n/\mathcal{L}$ besitzt. Wir wollen die Struktur der endlichdimensionalen Hopf-Algebra nun näher untersuchen.

Satz 39: *Die oben konstruierte endlichdimensionale Hopf-Algebra $\mathcal{F}_2$ ist isomorph zu der Matrixalgebra $M_N(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^{N^2}$:*

$$\mathcal{F}_n \cong M_N(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^{N^2}.$$

Beweis: Die Basiselemente $w_+^{[I]}$ erzeugen eine kommutative Algebra, die gerade die Gruppenalgebra $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_N)^2$ und damit gleich $\mathbb{C}^{N^2}$ ist. Der Teilraum, der von den $w_-^{[I]}$ aufgespannt ist, wird erzeugt von den beiden Elementen $w_-^{[e_i]}$, $i = 1, 2$, wobei die $[e_i]$ wiederum Generatoren von $(\mathbb{Z}_N)^2$ sind. Die Vertauschungsrelation schreibt sich als

$$w_-^{[e_1]} w_-^{[e_2]} = e^{2\pi i/N} w_-^{[e_2]} w_-^{[e_1]}. \tag{7.3}$$

Setzen wir

$$q := e^{2\pi i/N},$$

so können wir (7.3) in kompakterer Form

$$w_-^{[e_1]} w_-^{[e_2]} = q w_-^{[e_2]} w_-^{[e_1]}$$

schreiben. Die von den $w_-^{[e_i]}$ erzeugte Algebra ist isomorph zu $M_N(\mathbb{C})$. Der Beweis dieser Aussage kann in [68] gefunden werden. $w_-^{[e_1]}$ und $w_-^{[e_2]}$ können dabei als folgende Matrizen definiert werden [16]:

$$w_-^{[e_1]} := \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & 1_{N-1} & \\ \vdots & & & \\ 1 & 0 & \dots & \dots\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_-^{[e_2]} := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & q^{-1} & & & \\ & & q^{-2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & q^{-(N-1)} \end{pmatrix}.$$

7.2.2 Endliche Multi-Tori und Kac-Algebren

Ein wesentliches mathematisches Resultat unserer Arbeit [23] ist, daß die bekanntesten endlichdimensionalen Beispiele von Kac- bzw. Kac-Paljutkin-Algebren sich nach Satz 39 aus der von uns durchgeführten Konstruktion ergeben. Wir wollen im Rahmen dieser Dissertation nicht auf Kac-Algebren detailiert eingehen, sondern nur ihre Definition angeben, einige wenige Anmerkungen machen und desweiteren auf die Literatur verweisen [63].

Anmerkungen zu Hopf-von Neumann- und Kac-Algebren

Für von Neumann-Algebren gibt es eine analytische und eine algebraische Charakterisierung. Wir geben hier die algebraische Definition:

Definition 37*: von Neumann-Algebra*

Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum, so ist eine $*$-Unteralgebra A der beschränkten Operatoren $B(\mathcal{H})$ eine von Neumann-Algebra, falls $A = A''$. Dabei ist $A' = \{x \in B(\mathcal{H}) | xa = ax, \forall a \in A\}$ die Kommutante von A bezüglich $B(\mathcal{H})$.

Eine Hopf-von Neumann-Algebra ist eine von Neumann-Algebra A mit einem injektiven Morphismus Γ von A in das von Neumann-Tensorprodukt $A \otimes A$, so daß

$$\Gamma(1) = 1, \qquad (\Gamma \otimes id)\Gamma = (id \otimes \Gamma)\Gamma.$$

Γ ist das Analogon zur Komultiplikation bei Quantengruppen. Fügt man noch eine „Antipode"κ hinzu, so nennt man das Tripel (A, Γ, κ) eine koinvolutive Hopf-von Neumann-Algebra, falls κ ein involutiver Antimorphismus auf A ist [29]. Für eine Kac-Algebra fordert man noch die Existenz eines sogenannten halbendlichen, normalen, treuen Gewichtes. Hierauf wollen wir nicht weiter eingehen. Näheres ist in [29] zu finden.

Kac-Algebren sind ursprünglich aus ähnlichen Motiven studiert worden, wie Hopf-Algebren. Sie resultierten aus der Beschäftigung mit Gruppenringen und ihren Dualen. Der Wunsch lokalkompakte Gruppen in die Theorie einzuschließen und ihre Deformationen zu studieren, führte zur Kategorie der Kac-Algebren. Es besteht insbesondere im kompakten Fall eine enge Verwandschaft mit den kompakten Quantengruppen. Kompakte Quantengruppen müssen etwas schwächeren Bedingungen genügen, wie kompakte Kac-Algebren. Endlichdimensionale Kac-Algebren sind nichts anderes als endlichdimensionale Hopf-C^*Algebren, wie wir sie bereits in Kapitel 4 als endlichdimensionale Quantengruppen definiert haben.

Man kann sich die Frage stellen, ob es (grob gesagt), viele niederdimensionale Kac- oder Hopf-C^*-Algebren gibt, oder ob dies eher Ausnahmen sind. Untersuchungen zeigen, daß letzteres der Fall ist - zumindest, wenn man nichttriviale Beispiele haben möchte. Nichttrivial heißt nicht kommutativ und nicht kokommutativ. Die wenigen Beispiele sind deshalb von einem großen Interesse. Man weiß, daß es nur eine einzige nichttriviale Kac-Algebra der Dimension ≤ 11 gibt: Dies ist die berühmte Kac-Paljutkin-Algebra der Dimension 8. Sie ist selbstdual, d.h. sie ist isomorph zu ihrer eigenen dualen Algebra. Diese Algebra ist genau die Hopf-Algebra, die wir in Satz 39 für den Fall $N = 2$ erhalten haben. Wir wollen dies in einem Satz festhalten.

Satz 40 *Die endlichdimensionale Hopf-Algebra $\mathcal{F}_2$ ist für den Fall $N = 2$ isomorph zur 8-dimensionalen Kac-Paljutkin-Algebra [39]*

$$M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \equiv M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^4. \tag{7.4}$$

Die nächst-höherdimensionale nichttriviale Kac-Algebra hat die Dimension 12. In [56] wurde eine Serie von Kac-Algebren der Dimension $2N^2$, $N \geq 3$ konstruiert. Auch diese Kac-Algebren erhält man aus unserem Konstruktionsverfahren:

Satz 41 *Die endlichdimensionale Hopf-Algebra $\mathcal{F}_2$ ist für $N \geq 3$ isomorph zu den Kac-Algebren $\mathcal{K}_N$ in [56], mit der Struktur*

$$M_N(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^{N^2}.$$

7.2.3 Der $G = \mathbb{Z}_3$-Fall

Wie wir aus Gleichung (6.11) wissen, wird für den Fall der zyklischen Gruppe $G = \mathbb{Z}_3 = \{e, g_1, g_2\}$ die Struktur der Hopf-Algebra durch eine einzige antisymmetrische Matrix Θ gegeben, die von zwei Parametern ρ und θ abhängt. Um nun endlichdimensionale Hopf-Algebren zu erhalten, setzen wir voraus, daß $N\rho \in \mathbb{Z}$ und $N\theta \in \mathbb{Z}$ sind (wir nehmen das kleinstmögliche N). Die G-invariante Untergruppe $\mathcal{L}$ von $\mathbb{Z}^3$ wählen wir als $N\mathbb{Z}^3$. Sie besteht aus allen ganzzahligen Multiindizes, so daß alle Komponenten durch N teilbar sind. Die Matrix Θ_1 hat somit folgende Gestalt:

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{N} & \frac{b}{N} \\ -\frac{a}{N} & 0 & \frac{b-a}{N} \\ -\frac{b}{N} & -\frac{b-a}{N} & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

Wir haben also $\theta := \frac{a}{N}$, $-\rho := \frac{b}{N}$ und $-(\theta+\rho) := \frac{b-a}{N}$ gesetzt, wobei $a, b \in \mathbb{Z}$. Die endlichdimensionale Hopf-Algebra, die man damit erhält, besitzt die Generatoren $U_0^{e_i}, U_1^{e_i}, U_2^{e_i}$, wobei die e_i die Standardbasisvektoren von $\mathbb{Z}^3$ sind. Wegen der Multiplikation

$$U_j^v U_k^u = 0, \quad j \neq k$$

ist die Algebra die direkte Summe von 3 Unteralgebren, die wir getrennt untersuchen. Wir betrachten für $g \in G = \{0, 1, 2\}$ die jeweiligen Vertauschungsrelationen (wir setzen nachfolgend wieder $q := e^{2\pi i/N}$):

- $g = 0$

$$U_0^{e_i} U_0^{e_j} = U_0^{e_j} U_0^{e_i}, \qquad (U_0^{e_i})^N = P_0$$

- $g = 1$

$$\begin{aligned} U_1^{e_1} U_1^{e_2} &= q^a U_1^{e_2} U_1^{e_1}, \\ U_1^{e_1} U_1^{e_3} &= q^b U_1^{e_3} U_1^{e_1}, \\ U_1^{e_2} U_1^{e_3} &= q^{b-a} U_1^{e_3} U_1^{e_2}, \\ (U_1^{e_i})^N &= P_1. \end{aligned}$$

  Dabei ist $q^N = 1, a := N\theta, b := -N\rho$.

- $g = 2$

  Die relevante Deformationsmatrix ist

$$\Theta_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{N} & \frac{b-a}{N} \\ -\frac{b}{N} & 0 & \frac{-a}{N} \\ -\frac{b-a}{N} & \frac{a}{N} & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.6}$$

$$
\begin{aligned}
U_2^{e_1} U_2^{e_2} &= q^b U_2^{e_2} U_2^{e_1}, \\
U_2^{e_1} U_2^{e_3} &= q^{b-a} U_2^{e_3} U_2^{e_1}, \\
U_2^{e_2} U_2^{e_3} &= q^{-a} U_2^{e_3} U_2^{e_2}, \\
(U_2^{e_i})^N &= P_2.
\end{aligned}
$$

Die P_i, $i = 0, 1, 2$ sind die Projektoren in die jeweiligen Unteralgebren. Ihre Summe ist gerade die Eins der gesamten Algebra. Die erste Unteralgebra (mit $g = 0$) ist kommutativ und deshalb einfach isomorph zu $\mathbb{C}^{N^3}$, während die beiden anderen Komponenten ($g = 1$ und $g = 2$) stark von N, sowie a und b abhängen. Der Fall $N = 2$ und der Fall $N = 3$ wurde von uns explizit durchgerechnet.

Beispiel: $N = 2$

In diesem Fall ist $q = -1$ (der triviale Fall $q = 1$ interessiert uns natürlich hierbei nicht) und a, b können die Werte 0 oder 1 besitzen. Die zweite und dritte Komponente der Algebra, die zu $g = 1$ und $g = 2$ korrespondieren, sind (außer im Fall $a = b = 0$) nichtkommutativ. In jedem der möglichen nichttrivialen Fälle

- $a = 1,\ b = 0,$
- $a = 0,\ b = 1,$
- $a = 1,\ b = 1,$

erhält man $M_2(\mathbb{C})$. Die algebraische Struktur der gesamten Algebra ist deswegen isomorph zu $M_2(\mathbb{C})^2 \oplus \mathbb{C}^8$.

Beispiel: $N = 3$

Der kommutative Anteil der Algebra ist wiederum einfach zu berechnen. Als 27-dimensionale kommutative Algebra ist dieser Anteil isomorph zu $\mathbb{C}^{27}$.

Weitaus schwieriger zu behandeln sind die Algebren, die zu $g = 1$ und $g = 2$ gehören. Da zu diesen beiden Fällen Unteralgebren der gesamten Algebra assoziiert sind, ist es sinnvoll, das Zentrum der jeweiligen Unteralgebren zu bestimmen.

Es sei $g = 1$. Dann wird die Algebra von Monomialen der Form

$$(U_1^{e_1})^\alpha (U_1^{e_2})^\beta (U_1^3)^\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2.$$

aufgespannt. Um das Zentrum der Algebra zu finden, müssen wir folgende Gleichung lösen:

$$\left[\sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^{2} \alpha_{ijk} (U_1^{e_1})^\alpha (U_1^{e_2})^\beta (U_1^{e_3})^\gamma, (U_1^{e_1})^{n_1} (U_1^{e_2})^{n_2} (U_1^{e_3})^{n_3} \right], \quad \forall n_i = 0, 1, 2$$

Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\gamma b - \beta a &= 0 \ (\mathrm{mod}\ 3)\ , \\ (\alpha+\gamma)a - \gamma b &= 0 \ (\mathrm{mod}\ 3), \\ \beta(b-a) + \alpha b &= 0 \ (\mathrm{mod}\ 3)\ . \end{aligned}$$

Betrachten wir den speziellen Fall $a = 2$, $b = 1$. Dann liefert obiges Gleichungssystem die Lösungen

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta = \gamma = 0, \\ \alpha &= \beta = \gamma = 1, \\ \alpha &= \beta = \gamma = 2. \end{aligned}$$

Wir erhalten also 3 unabhängige Lösungen. Nun wissen wir, daß die Algebra die Dimension 27 haben muß. Das Zentrum ist wegen der obigen 3 unabhängigen Lösungen isomorph zu $\mathbb{C}^3$. Das bedeutet: Die Algebra der Dimension 27 ist die direkte Summe von drei Matrixalgebren. Die einzigen beiden Möglichkeiten, die aus Dimensionsgründen übrig bleiben, sind $M_3(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C})$ und $M_5(\mathbb{C}) \oplus M_1(\mathbb{C}) \oplus M_1(\mathbb{C})$. Um zwischen diesen beiden Möglichkeiten die richtige Wahl treffen zu können, betrachtet man Matrixdarstellungen der Zentrumselemente und analysiert Eigenwerte und Eigenräume. Daraus kann man die eindeutige Folgerung ziehen, daß die Struktur der Algebra durch $M_3(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C})$ gegeben wird. Untersuchung der Fälle

$$\begin{aligned} a &= 1, b = 2, \\ a &= b = 2, \\ a &= b = 1, \\ a &= 0, b = 1, \\ a &= 0, b = 2 \end{aligned}$$

ergibt das gleiche Ergebnis. Auch für den Fall $g = 2$ gelangt man zum selben Resultat.

Wir können somit festhalten:

Satz 42: *Aus dem multiplen 3-Torus erhält man im Falle $N = 3$ eine endlichdimensionale Hopf-Algebra mit der Algebrenstruktur $\mathbb{C}^{27} \oplus M_3(\mathbb{C})^6$.*

7.3 Die Algebra der dualen Multi-Tori bei Wurzeln der Eins

Analog zum vorigen Unterkapitel betrachten wir jetzt die Multiplikator-Hopf-Algebra $\mathcal{C}_n$ bei Wurzeln der Eins. Die Bezeichnungsweisen übernehmen wir dabei aus den vorherigen Abschnitten. Wir definieren zunächst die folgende Algebra:

Definition 38: *$\mathcal{C}_n$ **bei Wurzeln der Eins***
Sei $\mathcal{F}_n^*$ die Algebra mit der Basis $c_g^{[I]}$, wobei $[I] \in \mathbb{Z}^n/\mathcal{L}, g \in G$ sein soll. Die Multiplikation sei als

$$c_g^{[I]} c_h^{[J]} = \delta^{[I],h[J]} c_{gh}^{[J]} \tag{7.7}$$

gegeben. $\mathcal{F}_n^*$ ist eine endlichdimensionale Hopf-Algebra mit ($[I],[J],[K] \in \mathbb{Z}^n/\mathcal{L}, g \in G$):

Komultiplikation $\quad \Delta(c_g^{[K]}) = \sum_{[I]+[J]=[K]} e^{2\pi i \theta_g([I],[J])} c_g^{[I]} \otimes c_g^{[J]},$

Koeins $\quad \epsilon(c_g^{[I]}) = \delta^{[I],[0]},$

Antipode $\quad S(c_g^{[K]}) = c_{g^{-1}}^{-g([K])}.$

Wie in den vorherigen Abschnitten kann man leicht die Wohldefiniertheit aller Abbildungen nachprüfen. Alle Strukturabbildungen sind völlig analog zu den Abbildungen auf $\mathcal{C}_n$.

Satz 43: *Analog zu Satz 28 gilt, daß für ein triviales Kozykel $\theta = \delta\phi$ und $\mathcal{L}$-invariantes ϕ die Hopf-Algebra $\mathcal{F}^{*n}$ ein Twist der Hopf-Algebra $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n/\mathcal{L}) \rtimes FG$ ist.*

Die $\mathcal{L}$-Invarianz des Kozykels ϕ ist hierbei aus Gründen der Wohldefiniertheit zu fordern. Intuitiv erscheint es klar, daß die so definierte Algebra $\mathcal{F}_n^*$ eine Hopf-Unteralgebra von $\mathcal{C}_n$ ist. Man muß jedoch bedenken, daß $\mathcal{C}_n$ keine Hopf-Algebra, sondern eine Multiplikator-Hopf-Algebra ist. Deswegen ist der folgende Satz nichttrivial:

Satz 44: *$\mathcal{F}_n^*$ ist eine Hopf-Unteralgebra der Multiplikator-Hopf-Algebra $\mathcal{C}_n$.*

Beweis: Wir definieren den Algebrenmorphismus

$$\begin{aligned} j : \mathcal{F}_n^* &\longrightarrow \mathcal{C}_n, \\ c_g^{[I]} &\longmapsto j(c_g^{[I]}) := \sum_{J \in \mathcal{L}} C_g^{I+J}, \quad I \in \mathbb{Z}^n, g \in G. \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert und tatsächlich ein Algebrenmorphismus. Wie bereits gesagt, müssen wir beachten, daß $\mathcal{C}_n$ eine Multiplikator-Hopf-Algebra ist. Deswegen muß man, um zu überprüfen, daß j ein Hopf-Algebren-Morphismus ist, insbesondere folgende Bedingung für alle $a \in \mathcal{C}_n$ nachrechnen (was wir hier nicht tun wollen):

$$((j \otimes j)\Delta c_g^{[I]})(1 \otimes a) = (\Delta j(c_g^{[I]}))(1 \otimes a), \quad I \in \mathbb{Z}^n, g \in G.$$

7.4 Dualität der Hopf-Algebren $\mathcal{F}_n$ und $\mathcal{F}_n^*$

Während $\mathcal{C}_n$ und $\mathcal{T}_n$ dual zueinander in der Kategorie der Multiplikator-Hopf-Algebren sind, gibt es eine duale Paarung der endlichdimensionalen Hopf-Algebren $\mathcal{F}_n^*$ und $\mathcal{F}_n$. Die Paarung wird durch die folgende Abbildung gegeben:

$$\begin{aligned} \langle\, ,\, \rangle : \mathcal{F}_n^* \otimes \mathcal{F}_n &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ c_g^{[I]} \otimes w_h^{[J]} &\longmapsto \langle c_g^{[I]}, w_h^{[J]} \rangle := \delta_{g,h} \delta^{[I],[J]}. \end{aligned}$$

Die Nichtdegeneriertheit der Paarung ist offensichtlich. Wir wollen hier nur die Eigenschaften von Multiplikation und Komultiplikation nachrechnen. Für das Produkt in $\mathcal{F}_n$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle c_g^{[I]}, w_h^{[J]} w_p^{[K]} \rangle &= \delta_{hp} e^{2\pi i \theta_h([J],[K])} \langle c_g^{[I]}, w_h^{[J]+[K]} \rangle \\ &= \delta_{hp} \delta_{gh} e^{2\pi i \theta_h([J],[K])} \delta^{[I],[J]+[K]}. \end{aligned}$$

Dies muß aber gleich $\langle \Delta c_g^{[I]}, w_h^{[J]} \otimes w_p^{[K]} \rangle$ sein:

$$\begin{aligned} \langle \Delta c_g^{[I]}, w_h^{[J]} \otimes w_p^{[K]} \rangle &= \sum_{[S] \in \mathbb{Z}^n/\mathcal{L}} e^{2\pi i \theta_h([I],[S])} \langle c_g^{[I]-[S]}, w_h^{[J]} \rangle \langle c_g^{[S]}, w_p^{[K]} \rangle \\ &= \delta_{gh} \delta_{gp} e^{2\pi i \theta_h([J],[K])} \delta^{[I],[K]+[J]}. \end{aligned}$$

Analog zeigt man, daß

$$\langle c_g^{[I]} c_h^{[J]}, w_p^{[K]} \rangle = \langle c_g^{[I]} \otimes c_h^{[J]}, \Delta w_p^{[K]} \rangle.$$

Für Eins und Koeins gilt (mit $[I] \in \mathbb{Z}^n/\mathcal{L}, g \in G$):

$$\begin{aligned} \langle c_g^{[I]}, 1 \rangle &= \epsilon(c_g^{[I]}), \\ \langle 1, w_g^{[I]} \rangle &= \epsilon(w_g^{[I]}), \end{aligned}$$

und für die Antipode erhält man

$$\langle S(c_g^{[I]}), w_h^{[J]} \rangle = \langle c_g^{[I]}, S(w_h^{[J]}) \rangle.$$

7.5 Der Dualraum des Quantendoppeltorus bei Wurzeln der Eins

In diesem Abschnitt betrachten wir die duale Version der Ergebnisse aus Abschnitt 7.2.1. Wie dort ist $G = \mathbb{Z}_2$. Wir studieren also die endlichdimensionale Hopf-Algebra $\mathcal{F}_2^*$. Ziel ist es, die Struktur dieser Algebra herauszuarbeiten. Für diese endlichdimensionale, halbeinfache Algebra wissen wir, daß sie sich als Summe von Matrixalgebren schreiben läßt.

Die Vorgehensweise, die dabei zum Ziel führt, ist, daß man zuerst das Zentrum der Algebra bestimmt, d.h. den Unterraum aller kommutierenden Elemente. Dann versucht man, alle unabhängigen Projektoren auszurechnen, da man weiß, daß es zu jeder Matrixalgebra $M_N(\mathbb{C})$ genau einen unabhängigen, zentralen Projektor gibt (ein Vielfaches der Einheitsmatrix), der wiederum aus unabhängigen Projektoren zusammengesetzt ist.

Die Basis von $\mathcal{F}_n^*$ wird durch die Elemente $c_\pm^{[I]}$ gegeben. $[I] \in (\mathbb{Z}_N)^2$ kann dabei die Werte $[a,b],\ a,b = 0,1,\ldots,N-1$ annehmen. Wir schreiben hier nochmals Gleichung (7.7) auf:

$$c_\sigma^{[I]} c_{\sigma'}^{[J]} = \delta^{\sigma'[I],[J]} c_{\sigma\sigma'}^{[J]}, \quad \sigma, \sigma' = +, -.$$

Aus dieser Gleichung erhält man sowohl die unabhängigen Projektoren, als auch die zentralen Elemente der Algebra. Die $c_+^{[I]}$ sind genau die unabhängigen Projektoren. Für die zentralen Elemente erhält man folgendes Resultat:

- $c_+^{[I]}$ ist zentrales Element, falls $[a,b] := [I] = [\hat{I}] := [b,a]$,
- $c_+^{[I]} + c_+^{[\hat{I}]}$ ist zentrales Element, falls $[I] \neq [\hat{I}]$.

Alle anderen zentralen Elemente sind linear abhängig. Dies legt es nun nahe, die folgende Matrixdarstellung unserer Algebra $\mathcal{F}_2^*$ auf dem $\mathbb{C}^2$ zu konstruieren. Man kann dann leicht zeigen, daß diese Darstellung ein Isomorphismus ist.

Satz 45: *Die Algebra $\mathcal{F}_2^*$ ist isomorph zur Matrixalgebra*

$$\underbrace{M_2(\mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus M_2(\mathbb{C})}_{\frac{1}{2}N(N-1)} \oplus \mathbb{C}^{2N} \cong \mathcal{F}_2^*. \tag{7.8}$$

Der Isomorphismus wird dabei gegeben durch die folgenden Matrixdarstellungen auf $\mathbb{C}^2$:

- Feste a, b mit $a \neq b,\ \ a,b = 0,1,\ldots,N-1$.

$$c_+^{[a,b]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; c_+^{[b,a]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c_-^{[a,b]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; c_-^{[b,a]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Feste $a = b$ mit $a = 0,1,\ldots,N-1$.

$$c_+^{[a,a]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; c_-^{[a,a]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

7.5.1 Endliche duale Multi-Tori und Kac-Algebren

Abschließend wollen wir noch anmerken, daß die hier konstruierte Hopf-Algebra dual zu der entsprechenden Kac-Algebra aus Unterabschnitt 7.2.2 ist. Wir hatten bereits darauf hingewiesen, daß man im Fall $N = 2$ eine 8-dimensionale Kac-Algebra erhält. Da es nur eine nichttriviale Kac-Algebra dieser Dimension gibt, muß die Duale, die wir hier konstruiert haben, isomorph dazu sein.

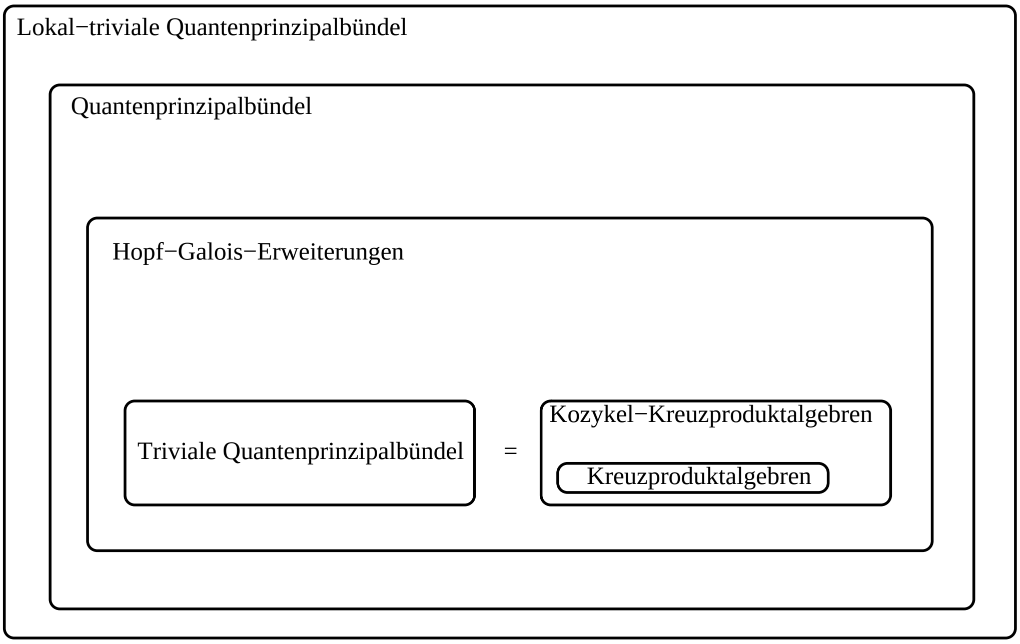
Kapitel 8

Hopf-Galois-Erweiterung des kommutativen Torus

Eine der wichtigsten Funktionen, die eine Gruppe im Rahmen der klassischen Physik und deren geometrischen Beschreibung einnehmen kann, ist ihre Rolle als Strukturgruppe (und damit verbunden als Eichgruppe) von Faserbündeln. Es ist naheliegend, die Konstruktion von Faserbündeln, bei der man klassische Mannigfaltigkeiten und Gruppen benutzt, im Sinne der Nichtkommutativen Geometrie durch eine algebraische Beschreibungsweise zu ersetzen, die auf der Verwendung von Algebren und Hopf-Algebren beruht. Für Vektorbündel ist der algebraische Standpunkt in der Nichtkommutativen Geometrie in Form des Serre-Swan-Theorems wohlbekannt: Es sind die endlich-erzeugten projektiven Moduln, welche das algebraische Analogon zu Vektorbündeln bilden. Die endlich-erzeugten projektiven Moduln folgen strenggenommen nicht der Philosophie der Nichtkommutativen Geometrie. Entsprechend dieser Philosophie würde man das klassische Vektorbündel als einen klassischen topologischen Raum mit Zusatzstrukturen auffassen. Auf der algebraischen Stufe müßte man dann das Vektorbündel durch eine kommutative Funktionenalgebra beschreiben, die ebenfalls Zusatzstrukturen aufweisen sollte. Das gleiche gilt natürlich auch für allgemeinere Faserbündel und insbesondere für Prinzipalbündel. Natürlich läßt man dann wiederum auch nichtkommutative Algebren zu und verallgemeinert damit die klassischen Faserbündel zu Quantenfaserbündeln. Totalraum und Basisraum des Quantenbündels bestehen dabei aus (nichtkommutativen) Algebren, während die Rolle der Strukturgruppe und der Fasern durch eine Hopf-Algebra oder -in einem topologischen Rahmen- durch eine Quantengruppe übernommen wird. Natürlich ist die Verallgemeinerung zu Quantenfaserbündeln nicht beliebig, sondern soll als „kommutativen Grenzfall" die Theorie der klassischen Faserbündel beinhalten.

Nach einer kurzen Einführung in die Theorie der Quantenfaserbündel, die sich darauf beschränken wird, wesentliche Konzepte und Grundbegriffe einzuführen, sowie den Zusammenhang mit Hopf-Galois-Erweiterungen zu erläutern, werden wir für den Fall von Wurzeln der Eins zeigen, daß die Nichtkommutativen Multi-Tori Hopf-Galois-Erweiterungen des Kommutativen Torus sind, wobei die Fasern von den endlichdimensionalen Hopf-Algebren $\mathcal{F}_n$ gebildet werden. Die Bezeichnungsweisen aus den vorangegangenen Kapiteln werden beibehalten.

Um von Anfang an die Übersicht über die verschiedenen Strukturen zu behalten, wollen wir schon an dieser Stelle die „Hierarchie"der auftretenden Räume in einem Diagramm angeben.



Die Definitionen der verschiedenen Strukturen werden wir in den folgenden Abschnitten angeben. Zu den im Diagramm stehenden Kozykel-Kreuzproduktalgebren sei angemerkt, daß es sich hierbei genaugenommen um solche mit einem Faltungs-invertierbaren Kozykel handeln muß.

8.1 Quantengruppen-Eichtheorie

In diesem und dem folgenden Abschnitt 8.2 wollen wir den Versuch unternehmen, in kompakter Form den Zusammenhang zwischen Sequenzen von Hopf-Algebren, Erweiterungen von Hopf-Algebren und Quantengruppen-Eichtheorie darzustellen. Dies ist ein relativ schwieriges Unterfangen, da eine Unzahl von Konstruktionen und algebraischen Begriffen auftauchen, deren korrekte Darstellung den Rahmen dieser Dissertation völlig sprengen würde. Deswegen werden wir uns darauf beschränken, die Grundgedanken zu entwickeln und den Zusammenhang von Erweiterungen und Quantenprinzipalbündeln in möglichst übersichtlicher Form klarzumachen. Aus unserer Sicht ist gerade die Quantengruppen-Eichtheorie von größtem physikalischen Interesse, enthält sie doch die Theorie der klassischen Faserbündel als kommutativen Grenzfall (und die Bedeutung von Faserbündeln in der Physik kann sicherlich kaum überschätzt werden). In mathematischer Hinsicht kann es an dieser Stelle der Dissertation kaum noch überraschen, daß die Theorie der Erweiterungen von Hopf-Algebren den Fall der Erweiterungen von Gruppen und Lie-Algebren beinhaltet und vereinheitlicht. Ab Abschnitt 8.4 werden wir die Theorie der Erweiterungen auf die Multi-Tori anwenden. Kenntnisse der Differentialgeometrie wie sie z.B. in [50], [61] oder in [41] zu finden sind, werden im Folgenden vorausgesetzt.

8.1.1 Quantenprinzipalbündel

Ein klassisches triviales Prinzipalbündel besteht aus einer Mannigfaltigkeit P (dem Totalraum), einer Basismannigfaltigkeit B und einer Lie-Gruppe G (der Strukturgruppe), die von rechts auf P wirkt. Diese Wirkung soll frei sein, d.h. die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi_R : \; P \times G &\longrightarrow P \times P, \\ (u, g) &\longmapsto (u, ug) \end{aligned} \tag{8.1}$$

ist eine Inklusion. Die kanonische Projektion π ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \pi : P &\longrightarrow M, \\ u \equiv (p, g) &\longmapsto \pi(u) := p. \end{aligned}$$

Darüber hinaus ist die Wirkung der Strukturgruppe transitiv auf den Fasern, d.h.

$$\pi(u) = \pi(u') \;\Rightarrow \exists g \in G : u' = ug.$$

Die globale Gruppen-Koordinatenkarte

$$\begin{aligned} j : \; P &\longrightarrow G, \\ u \equiv (p, g) &\longmapsto g \end{aligned} \tag{8.2}$$

ist surjektiv und vertauscht bezüglich der Wirkung von G auf P mit der Rechts-Multiplikation von G auf sich selbst:

$$j(ug) = j(u)g.$$

Lokal ist in einem Prinzipalbündel immer $P \cong M \times G$. In einem trivialen Bündel gilt dies global.

In der Theorie der Quantenprinzipalbündel muß man zunächst die klassischen Räume durch Funktionenalgebren ersetzen und die Eigenschaften der Prinzipalbündel auf dieser algebraischen Stufe ausdrücken. $E \equiv \mathbb{C}(P)$ ist dann eine Algebra, die den Totalraum beschreibt, die Gruppe G wird durch eine Hopf-Algebra $H \equiv \mathbb{C}(G)$ ersetzt, wobei auf dieser dualen Stufe die Rechtswirkung von G auf P durch eine Rechtskowirkung von $\mathbb{C}(G)$ auf $\mathbb{C}(P)$ ersetzt wird:

$$\begin{aligned} \beta_R : \mathbb{C}(P) &\longrightarrow \mathbb{C}(P) \otimes \mathbb{C}(G), \\ f &\longmapsto \beta_R(f) \end{aligned}$$

In dieser Rechtskowirkung muß aber noch die Projektion π berücksichtigt werden: Man erreicht dies, indem man fordert, daß $\mathbb{C}(M)$ eine Fixpunkt-Unteralgebra von $\mathbb{C}(P)$ sein soll, d.h. $\mathbb{C}(M)$ muß unter β_R koinvariant bleiben:

$$\mathbb{C}(M) \equiv \mathbb{C}(P)^{\mathbb{C}(G)} := \{f \in \mathbb{C}(P) | \beta_R(f) = f \otimes 1\} \subseteq \mathbb{C}(P).$$

Da β_R ein Algebrenmorphismus ist, bilden die koinvarianten Elemente eine Unteralgebra. Die Bedingung, daß $\mathbb{C}(M)$ koinvariant sein muß, ist die duale Formulierung der Eigenschaft, daß die Rechtswirkung der Gruppe G auf das Prinzipalbündel P den Fußpunkt invariant läßt. Sei $f \in \mathbb{C}(M)$. Die Zurückziehung der Projektion π bettet f in $\mathbb{C}(P)$ ein:

$$(\pi^* f)(u) := f(\pi(u)) \equiv: f_\pi(u), \ u \in P.$$

Wir benutzen nun die Definition 9 der Kowirkung (siehe auch Abschnitt 2.5.3 über homogene Räume):

$$\beta_R(f_\pi)(u,g) = f_\pi(ug) = (f_\pi^{(1)} \otimes f_\pi^{(2)})(u,g) = (f_\pi^{(1)} \otimes f_\pi^{(2)})(u,e) = f_\pi(u), \ u \in P, g \in G.$$

Die letzten beiden Gleichungen ergeben sich aus der Invarianz des Fußpunktes unter der G-Wirkung. Deswegen kann man statt g das neutrale Element e benutzen. Daraus liest man unmittelbar

$$\beta_R(f_\pi)(u,g) = f_\pi(u) = (f_\pi \otimes 1)(u,g) \Rightarrow \beta_R(f_\pi) = f_\pi \otimes 1$$

ab. Man benötigt nun noch das Analogon zu (8.2), der globalen Trivialisierungsabbildung j. Diese muß, als duale Abbildung zu einer surjektiven Abbildung, injektiv sein und außerdem die Rechtskowirkung von $\mathbb{C}(G)$ auf $\mathbb{C}(P)$ mit der Rechtskowirkung von $\mathbb{C}(G)$ auf sich selbst vertauschen. Dieses Analogon ist einfach die Zurückziehung von j:

$$\begin{aligned} \Phi := j^* : \mathbb{C}(G) &\longrightarrow \mathbb{C}(P), \\ f &\longmapsto \Phi(f), \qquad (\Phi(f))(u) := f(j(u)). \end{aligned}$$

Die globale Trivialisierungsabbildung Φ ist invertierbar bezüglich des Faltungsproduktes, wobei Φ^{-1} durch

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} : \mathbb{C}(G) &\longrightarrow \mathbb{C}(P), \\ f &\longmapsto \Phi^{-1}(f), \qquad \Phi^{-1}(f)(u) := f(j(u)^{-1}) \end{aligned}$$

gegeben wird. Die Invertierbarkeit läßt sich leicht nachrechnen. Es muß gelten:

$$(\Phi * \Phi^{-1})(f) = \Phi(f_1) \cdot \Phi^{-1}(f_2) \stackrel{!}{=} \epsilon(f) 1_{\mathbb{C}(P)} = f(e) 1_{\mathbb{C}(P)}.$$

Mit der Definition von Φ bzw Φ^{-1} prüft man dies nach:

$$\begin{aligned}(\Phi(f_1) \cdot \Phi^{-1}(f_2))(u) &= (\Phi(f_1))(u)(\Phi^{-1}(f_2))(u) = f_1(\underbrace{j(u)}_{=:g}) f_2(\underbrace{j(u)^{-1}}_{=:g^{-1}}) = \Delta(f)(g, g^{-1}) \\ &= f(e).\end{aligned}$$

Darüber hinaus ist Φ kovariant bezüglich der Rechtskowirkung von H, wobei wir mit kovariant einen Ausdruck der Form

$$\beta_R \circ \Phi = (\Phi \otimes id) \circ \Delta_{\mathbb{C}(G)}$$

bezeichnen. Dies können wir leicht unter Ausnutzung der Definition der Rechtskowirkung und der globalen Trivialisierung zeigen. Einerseits ist

$$\begin{aligned}((\Phi \otimes id)(\underbrace{f_1 \otimes f_2}_{=\Delta f}))(u, h) &= (\Phi(f_1) \otimes f_2)(u, h) = \Phi(f_1)(u) f_2(h) \\ &= f_1(\underbrace{j(u)}_{=:g}) f_2(h),\end{aligned}$$

andererseits gilt

$$\begin{aligned}(\beta_R(\Phi(f))(u, h) &= \Phi(f)(uh) = f(j(uh)) \\ &= f(gh) = f_1(g) f_2(h).\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt verallgemeinert man, indem statt der Funktionenalgebren auch nichtkommutative Algebren zugelassen werden. $\mathbb{C}(G)$ wird durch eine Hopf-Algebra H ersetzt, $\mathbb{C}(P)$ durch eine Algebra E, auf die H von rechts durch einen Algebrenmorphismus $\beta_R : E \to E \otimes H$ kowirkt und $\mathbb{C}(M)$ durch eine Algebra A von Koinvarianten (oder Fixpunkten)

$$A \equiv E^H = \{p \in E | \beta_R(p) = p \otimes 1\}.$$

Wir müssen natürlich darauf aufmerksam machen, daß wir wiederum in einem rein algebraischen Kontext arbeiten. Alle Algebren müssen dementsprechend geeignet gewählt werden, so daß hier mit algebraischen Tensorprodukten gearbeitet werden kann. Die Erweiterung der Begriffsbildungen auf C^*-Algebren ist nicht eindeutig und Bedingungen, die auf rein algebraischem Niveau sinnvoll und einfach erscheinen, sind nicht ohne weiteres auf die C^*-Algebren-Stufe zu übertragen.

Definition 39: ***Triviales Quantenprinzipalbündel***
$E = E(A, H)$ ist ein triviales Quantenprinzipalbündel, mit Strukturquantengruppe H und Basisraum A, falls gilt:

1. *H ist eine Hopf-Algebra.*
2. *(E, Δ_R) ist eine Rechts-H-Komodulalgebra.*
3. *$A = E^H = \{u \in E \,|\, \beta_R u = u \otimes 1\}$.*
4. *Es existiert eine, bezüglich der Konvolution, invertierbare Abbildung $\Phi : H \to E$, die kovariant unter der Rechtskowirkung von H ist. Außerdem gelte $\Phi(1_H) = 1_E$.*

Die ersten drei Bedingungen definieren eine Erweiterung der Algebra A durch die Hopf-Algebra H. Existiert zusätzlich die Abbildung Φ aus Bedingung 4, so nennt man die Erweiterung „cleft". Sie drückt die Trivialität des Bündels aus.

Um allgemeine Quantenprinzipalbündel, die keine globale Trivialisierung besitzen, zu beschreiben, fordert man statt der Existenz einer solchen globalen Trivialisierung etwas schwächere Bedingungen [5]:

Definition 40: ***Quantenprinzipalbündel***
$E = E(A, H)$ ist ein Quantenprinzipalbündel, mit Strukturquantengruppe H und Basisraum A, falls gilt:

1. *H ist eine Hopf-Algebra.*
2. *(E, Δ_R) ist eine Rechts-H-Komodulalgebra.*
3. *$A = E^H = \{u \in E \,|\, \beta_R u = u \otimes 1\}$.*
4. *$(\mu_E \otimes id)(id \otimes \beta_R) : E \otimes E \to E \otimes H$ ist eine Surjektion.*
5. *$ker\tilde{} = \Gamma_{hor}$.*

Die 4. Bedingung wird Bedingung der freien Wirkung genannt (sie korrespondiert zu (8.1)), die 5. Bedingung ist die Exaktheitsbedingung.

Im klassischen Fall stellen die freie Wirkung von G auf das Prinzipalbündel zusammen mit Differenzierbarkeit und Dimensionsbetrachtungen sicher, daß $M = P/G$ tatsächlich eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist und daß die Fasern isomorph zur Strukturgruppe sind. Diese Betrachtungen werden in der algebraischen Beschreibungsweise durch die obigen Bedingungen 4 und 5 ersetzt. Die 5. Bedingung ist auf der Stufe der universellen Differentialkalküle formuliert und soll hier nur kurz erklärt werden. $\Gamma_{hor} := Ei(\Gamma_B)E \subseteq \Gamma_E$

ist, grob gesprochen, das von der Einbettung i der 1-Formen über dem Basisraum B in die 1-Formen über E erzeugte natürliche Subbimodul. Die Abbildung $\tilde{}$ erzeugt dagegen die fundamentalen Vektorfelder bezüglich der Kowirkung β_R. Eine Erörterung dieser Definitionen findet sich in [5].

Ein triviales Quantenprinzipalbündel erfüllt diese Bedingungen automatisch. Die ersten drei Bedingungen stammen aus der Definition des trivialen Bündels, während die letzten beiden Bedingungen allgemeine Prinzipalbündel charakterisieren und die globale Trivialisierung durch schwächere Bedingungen ersetzen. Die im folgenden Abschnitt definierten Hopf-Galois-Erweiterungen erfüllen die Bedingungen für ein Quantenprinzipalbündel. Wir machen darauf aufmerksam, daß Quantenprinzipalbündel alle algebraischen Aspekte von klassischen Prinzipalbündeln besitzen, die lokale Trivialisierung aber natürlich hier noch nicht eingearbeitet ist. Lokal-triviale Prinzipalbündel werden (in Details durchaus unterschiedlich) in [5], [27], [28], [6] behandelt, wobei (außer in der ersten Referenz) auch mit C^*-Algebren gearbeitet wird.

Wir haben im Rahmen dieser Arbeit einige Male Anlaß gehabt, uns mit Kreuzproduktalgebren zu beschäftigen. Die Kreuzproduktalgebren sind Spezialfälle der sogenannten Kozykel-Kreuzproduktalgebren. In diesen ist insbesondere die Multiplikation nochmals durch ein Kozykel deformiert. Wir wollen an dieser Stelle nicht weiter darauf eingehen, sondern folgenden wichtigen Satz angeben, der insbesondere für Kreuzproduktalgebren gilt:

Satz 46: *Jede Kozykel-Kreuzproduktalgebra $A \rtimes_\chi H$ mit einem bezüglich der Konvolution invertierbaren Kozykel χ ist eine cleft-Erweiterung und damit ein triviales Quantenprinzipalbündel. Umgekehrt gilt, daß jede cleft-Erweiterung isomorph zu einem solchen Kozykel-Kreuzprodukt ist (mit einem Konvolutions-invertierbaren Kozykel). Somit gilt, daß alle inäquivalenten cleft-Erweiterungen (und damit alle trivialen Quantenprinzipalbündel) durch Elemente der Kohomologie-Klassen $\mathcal{H}^2(H, A)$ charakterisiert werden.*

8.2 Hopf-Galois-Erweiterungen und Kreuzprodukte

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, daß Kreuzproduktalgebren, wie wir sie nun schon einige Male benutzt haben, Spezialfälle von Hopf-Galois-Erweiterungen sind. Kreuzproduktalgebren haben eine geometrische Interpretation: Sie sind global-triviale Quantenprinzipalbündel. Sie besitzen automatisch eine Abbildung, die das Analogon zur globalen Trivialisierung ist. Ein Wort zur Warnung sei angebracht: Unsere „Kreuzproduktalgebren“ werden manchmal als „Smash-Produkt-Algebren“ bezeichnet [17].

In Abschnitt 8.5 werden wir die folgenden Definitionen benutzen, um zu zeigen, daß die Nichtkommutativen Multi-Tori eine Hopf-Galois-Erweiterung des kommutativen Torus sind und (da eine cleft-Abbildung existiert) als triviale Quantenprinzipalbündel interpretiert werden können.

Definition 41: ***Hopf-Galois-Erweiterung***
Sei H eine Hopf-Algebra und $A \subseteq E$ seien zwei Algebren. E wird eine Rechts-Erweiterung von A durch H genannt, falls E eine Rechts-H-Komodulalgebra ist, so daß

$$A = E^H := \{u \in E | \beta_R = u \otimes 1_H\}$$

gilt. Dabei ist β_R die Rechts-Kowirkung. Die Algebra A muß also als Unteralgebra E^H von Koinvarianten in E enthalten sein. Falls die Abbildung

$$\begin{aligned}\gamma : E \otimes_A E &\longrightarrow E \otimes H,\\ (u \otimes_A v) &\longmapsto \gamma(u \otimes_A v) := (\mu_E \otimes id) \circ (id \otimes \beta_R)(u \otimes_A v) = uv^{(1)} \otimes v^{(2)}\end{aligned}$$

bijektiv ist, nennt man E eine Hopf-Galois-Erweiterung der Algebra A durch die Hopf-Algebra H. γ wird auch als Galois-Abbildung bezeichnet.

Satz 47: *Sei A eine Links-H-Modulalgebra bezüglich der Hopf-Algebra H. Dann ist die Links-Kreuzproduktalgebra $A \rtimes H$ eine Hopf-Galois-Erweiterung der Algebra A.*

Beweis: Wir müssen zeigen:

1. $A \rtimes H$ ist eine Rechts-H-Komodulalgebra.
2. A ist die Algebra von Koinvarianten.
3. Es existiert eine bijektive Galois-Abbildung γ.

Zu 1: Definiere die Kowirkung von H auf $A \rtimes H$ durch

$$\begin{aligned}\beta_R : A \rtimes H &\longrightarrow (A \rtimes H) \otimes H,\\ (a \otimes h) &\longmapsto \beta_R(a \otimes h) := (a \otimes h_1) \otimes h_2.\end{aligned} \tag{8.3}$$

Zu 2: Mit der Definition der Kowirkung aus (8.3) gilt:

$$\beta_R(a) \equiv \beta_R(a \otimes 1) = (a \otimes 1) \otimes 1, \ \ \forall a \in A.$$

Zu 3: Siehe [17].

Wir erinnern uns, daß Kreuzproduktalgebren, wenn sie Lösungen von algebraischen Quantisierungsproblemen sind, eine Interpretation als Algebra von Observablen erlauben. Wir sehen, daß sie aber offensichtlich auch eine geometrische Struktur besitzen. Dies ist der Kernpunkt, um zu begreifen, warum man mit Kreuzprodukten und ihren Verallgemeinerungen (den Bikreuzprodukten) Modelle aufstellen kann, die mathematische Aspekte von Gravitation und Quantenmechanik besitzen und vereinheitlichen.

8.3 Sequenzen von Hopf-Algebren

Wir hatten kurz in Kapitel 7 exakte Sequenzen als eine Möglichkeit angeführt, um zu endlichdimensionalen Hopf-Algebren zu kommen. Die genaue Definition der exakten Sequenz von Hopf-Algebren wollen wir an dieser Stelle geben.

Definition 42*: Exakte Sequenz von Hopf-Algebren*
Eine Sequenz von Hopf-Algebren-Morphismen

$$\mathbb{K} \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} C \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow \mathbb{K}. \tag{8.4}$$

heißt exakt, falls

1. ι *ist injektiv.*
2. π *ist eine Surjektion.*
3. *ker*(π)= CA^+.
4. $A = \{x \in C : (\pi \otimes id)\Delta(x) = 1 \otimes x\}$.

Dabei ist A^+ das Augmentations-Ideal, d.h. der Kern der Koeins. Die Hopf-Algebra C wird eine Erweiterung der Hopf-Algebren A und B genannt. Aus den letzten beiden Bedingungen kann man jeweils $\pi \circ \iota = \epsilon_A$ ableiten.

8.4 Nichtkommutative endliche Multi-Tori und kommutative Tori

Wenn man sich die Definition der Nichtkommutativen Multi-Tori ansieht und vor Augen führt, daß die Deformation durch die θ-Matrizen gegeben wird, so ist klar, daß man durch $\theta_g = 0, \forall g \in G$ natürlich eine kommutative Algebra bekommt. Es ist allerdings im Folgenden günstig (für den Fall von Wurzeln der Eins) diese kommutativen Multi-Tori als Unteralgebra der nichtkommutativen aufzufassen.

Definition 43*: Kommutative Multi-Tori*
Wir definieren die vielfachen kommutativen Tori $\mathcal{T}_n^c$ als $\mathcal{T}_n$ mit der Eigenschaft, daß alle Deformationsmatrizen Null sind: $\theta_g = 0 \ \forall g \in G$. Die Algebra $\mathcal{T}_n^c$ ist isomorph zu der Algebra von Polynomen auf der disjunkten Summe von n Kopien des kommutativen n-Torus T^n.

Es sei $\mathcal{L}$ wie gewohnt eine Untergruppe von $\mathbb{Z}^n$, so daß der Quotient $\mathbb{Z}^n/\mathcal{L}$ endlich ist. Wir betrachten allerdings hier die unendlich-dimensionale Algebra $\mathcal{T}_n$ und bilden nicht $\mathcal{F}_n$.

Satz 48: *Der Unterraum, der von den Elementen U_g^I mit $I \in \mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^n, g \in G$ aufgespannt wird, ist isomorph zur Algebra $\mathcal{T}_n^c$.*

Beweis: Für den Beweis reicht es aus, sich klarzumachen, daß jede Untergruppe $\mathcal{L} \in \mathbb{Z}^n$, so daß der Quotient $\mathbb{Z}^n/\mathcal{L}$ endlich wird, isomorph zu $\mathbb{Z}^n$ ist. •

$\mathcal{T}_n^c$ ist eine kommutative Unter-Hopf-Algebra von $\mathcal{T}_n$. Die Inklusionsabbildung wird im Folgenden mit i bezeichnet. In Abschnitt 2.2.4 hatten wir Ideale von Hopf-Algebren definiert. Das sogenannte Augmentations-Ideal besteht aus dem Kern der Koeins. Man muß natürlich zeigen, daß der Kern tatsächlich ein Ideal nach Definition 4 ist. Daß es das größte Ideal ist, folgt aus der Definition des Hopf-Algebren-Ideals: Alle Elemente müssen notwendigerweise zum Kern der Koeins gehören. Mit dem Augmentations-Ideal können weitere Ideale erzeugt werden, mit deren Hilfe dann wichtige Quotienten-Hopf-Algebren konstruierbar sind.

Satz 49: *Sei $Q_n \subset \mathcal{T}_n$ das Hopf-Ideal, welches durch das Augmentations-Ideal von $\mathcal{T}_n^c$ mittels*

$$Q_n = \mathcal{T}_n(\mathcal{T}_n^c)^+$$

algebraisch erzeugt wird. Die Quotienten-Hopf-Algebra $\mathcal{T}_n/Q_n$, ist isomorph zur Gruppenalgebra der abelschen Gruppe $\mathbb{Z}^n/\mathcal{L}$, und die folgende Sequenz von Hopf-Algebren ist exakt (siehe Definition 42):

$$\mathcal{T}_n^c \xrightarrow{i} \mathcal{T}_n \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n/\mathcal{L}] \cong \mathcal{T}_n/Q_n. \tag{8.5}$$

π ist dabei als

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{T}_n &\longrightarrow \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n/\mathcal{L}], \\ U_g^I &\longmapsto \delta_{g,e}[I]. \end{aligned}$$

definiert.

Beweis: Wir wollen die wesentlichen Bedingungen, die für eine exakte Sequenz nach Definition 42 erfüllt sein müssen, überprüfen. Die Inklusion von $\mathcal{T}_n^c$ in $\mathcal{T}_n$ ist klar, da wir $\mathcal{T}_n^c$ oben gerade als diese Einbettung konstruiert haben.
Für die Elemente aus $(\mathcal{T}_n^c)^+$ muß gelten, daß $\epsilon(U_g^I) = 0, \forall I \in \mathcal{L}, g \neq e$. Deswegen enthält das Ideal Q_n alle Elemente U_g^I, für $g \neq e$, so daß wir uns in dieser Frage nur noch um den Unterraum zu kümmern brauchen, welcher zu $g = e$ gehört. Daß π eine Surjektion ist, folgt sofort aus der Definition. Wir müssen demnach nur noch zeigen:

1. π ist ein Algebren- und ein Koalgebrenmorphismus.

2. Q_n ist der Kern von π.

3. $\mathcal{T}_n^c = \{x \in \mathcal{T}_n : (\pi \otimes id)\Delta(x) = 1 \otimes x\}$, d.h. $\mathcal{T}_n^c$ ist die Algebra der Koinvarianten von $\mathcal{T}_n$.

Zu 1: Zuerst zeigen wir, daß π ein Algebrenmorphismus ist:

$$\begin{aligned}\pi(U_g^I U_h^J) &= \pi(U_g^I)\pi(U_h^J) = \delta_{g,h}\delta_{g,e}[I][J] \\ &= \delta_{g,h}\delta_{g,e}[I+J].\end{aligned}$$

Andererseits ist $U_g^I U_h^J = e^{2\pi i\theta_g(I,J)}\delta_{g,h}U_g^{[I+J]}$ und

$$\pi(e^{2\pi i\theta_g(I,J)}\delta_{g,h}U_g^{[I+J]}) = \delta_{g,h}\delta_{g,e}[I+J].$$

Dabei haben wir benutzt, daß θ_g auf dem Gitter $\mathcal{L}$ natürlich Null ist. Die Koalgebrenmorphismus-Eigenschaft ergibt sich aus

$$(\pi \otimes \pi)(\Delta U_g^I) = (\pi \otimes \pi)(\sum_{fh=g} U_f^{h(I)} \otimes U_h^I) = \sum_{fh=g} \delta_{f,e}\delta_{h,e}[h(I)] \otimes [I] = \delta_{g,e}[I] \otimes [I]$$

und aus

$$\Delta\pi(U_g^I) = \delta_{g,e}\Delta[I] = \delta_{g,e}[I] \otimes [I].$$

Δ ist hierbei die Komultiplikation auf der Gruppenalgebra $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n/\mathcal{L}]$.

Zu 2: Ein beliebiges Element a aus $U_e^0 Q_n$ ist eine Linearkombination von Produkten der Form

$$\underbrace{(\sum_{J\in\mathbb{Z}^n} \alpha_J U_e^J)}_{\in\mathcal{T}_n} \cdot \underbrace{(\sum_{I\in\mathcal{L}} \beta_I U_e^I)}_{\in(\mathcal{T}_n^c)^+}.$$

Berechnen wir

$$\begin{aligned}\pi((\sum_{J\in\mathbb{Z}^n} \alpha_J U_e^J) \cdot (\sum_{I\in\mathcal{L}} \beta_I U_e^I)) &= \pi(\sum_{J\in\mathbb{Z}^n}\sum_{I\in\mathcal{L}} \alpha_J\beta_I U_e^J U_e^I) = \sum_{J\in\mathbb{Z}^n}\sum_{I\in\mathcal{L}} \alpha_J\beta_I[I+J] \\ &= \sum_{J\in\mathbb{Z}^n}\sum_{I\in\mathcal{L}} \alpha_J\beta_I[J] = \sum_{J\in\mathbb{Z}^n} \alpha_J[J] \underbrace{\sum_{I\in\mathcal{L}} \beta_I}_{=0}.\end{aligned}$$

$\sum_{I\in\mathcal{L}} \beta_I = 0$ folgt aus der Definition des Augmentation-Ideals, denn aus

$$\epsilon(\sum_{I\in\mathcal{L}} \beta_I U_e^I) \overset{!}{=} 0 \ \text{ und } \epsilon(U_e^I) = 1 \Rightarrow \sum_{I\in\mathcal{L}} \beta_I = 0.$$

Damit ist gezeigt, daß $Q_n \in Ker(\pi)$. Den Beweis, daß $Ker(\pi) = Q_n$ ist, wollen wir hier auslassen. Er wird auf ähnliche Art geführt.

Zu 3: Wir müssen zeigen, daß $\mathcal{T}_n^c = \{x \in \mathcal{T}_n : (\pi \otimes id)\Delta(x) = 1 \otimes x\}$ gilt. Dazu betrachten wir für festes $g \in G$ den Term $x := \sum_{I\in\mathbb{Z}^n} \alpha_I U_g^I$:

$$\begin{aligned}(\pi \otimes id)\Delta(\sum_{I\in\mathbb{Z}^n} \alpha_I U_g^I) &= (\pi \otimes id)(\sum_{I\in\mathbb{Z}^n} \alpha_I \sum_{fh=g} U_f^{h(I)} \otimes U_h^I) \\ &= \sum_{I\in\mathbb{Z}^n} \alpha_I \sum_{fh=g} \delta_{f,e}[h(I)]U_h^I = \sum_{I\in\mathbb{Z}^n} [g(I)] \otimes \alpha_I U_g^I.\end{aligned}$$

Dies ist aber offensichtlich nur dann von der Form $1 \otimes x$, falls $I \in \mathcal{L}$ gilt und damit $x = \sum_{I\in\mathcal{L}} \alpha_I U_g^I \in \mathcal{T}_n^c$. •

Somit haben wir die Rolle der kommutativen Multi-Tori im Rahmen einer exakten Sequenz untersucht. Im folgenden Abschnitt geht es nun um die Frage, wie der kommutative n-Torus T^n(genauer gesagt die entsprechende Algebra) und die endlichen Hopf-Algebren $\mathcal{F}_n$ mit den Nichtkommutativen Multi-Tori $\mathcal{T}_n$ im Rahmen der Quantenfaserbündel zusammenhängen.

8.5 Die Rolle der endlichen Algebra $\mathcal{F}_n$

Nachdem im vorigen Abschnitt die Rolle der kommutativen Algebra $\mathcal{T}_n^c$ im Rahmen einer exakten Sequenz beleuchtet wurde, wollen wir uns nun der endlichdimensionalen Hopf-Algebra $\mathcal{F}_n$ zuwenden und sie im Rahmen von Hopf-Algebren-Erweiterungen beschreiben. Die Algebra $\mathcal{T}_n$ der nichtkommutativen Multi-Tori wird sich als triviales Quantenprinzipalbündel mit der kommutativen Algebra T_n als Basis und $\mathcal{F}_n$ als typischer Faser erweisen.

Wir betrachten wieder den Fall einer Wurzel der Eins (d.h. wir wählen wieder ein Untergitter $\mathcal{L}$ von $\mathbb{Z}^n$ mit den mittlerweile bekannten Eigenschaften).

Satz 50: *Sei die folgende lineare Abbildung j definiert als*

$$\begin{aligned} j : \mathcal{T}_n &\longrightarrow \mathcal{F}_n, \\ U_g^I &\longmapsto j(U_g^I) := w_g^{[I]}, \ \ [I] \in \mathbb{Z}^n/\mathcal{L}. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Dann ist j ein Hopf-Algebren-Morphismus.

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß j ein Algebrenmorphismus ist:

$$\begin{aligned} j(U_g^I U_h^J) &= \delta_{g,h} e^{2\pi i\theta_g(I,J)} j(U_g^{I+J}) \\ &= \delta_{g,h} e^{2\pi i\theta_g([I],[J])} w_g^{[I+J]} \\ &= \delta_{g,h} e^{2\pi i\theta_g([I],[J])} = w_g^{[I]} w_h^{[J]} \\ &= j(U_g^I) j(U_h^J). \end{aligned}$$

Auch die Koalgebrenmorphismus-Eigenschaft läßt sich leicht zeigen:

$$\begin{aligned}\Delta j(U_g^I) &= \sum_{h\in G} w_{gh^{-1}}^{h([I])} \otimes w_h^{[I]} \\ &= \sum_{h\in G} j(U_{gh^{-1}}^{h(I)}) \otimes j(U_h^I) = (j\otimes j)\Delta U_g^I.\end{aligned}$$

Wie im vorherigen Abschnitt betten wir die Algebra $\mathcal{T}_n^c$ wieder in $\mathcal{T}_n$ ein

$$\mathcal{T}_n^c \hookrightarrow \mathcal{T}_n,$$

wobei wir die Inklusion wiederum mit i bezeichnen wollen. Die endliche Hopf-Algebra $\mathcal{F}_n$ besitzt eine Rechts-Kowirkung auf $\mathcal{T}_n$:

$$\begin{aligned}\beta_R : \mathcal{T}_n &\longrightarrow \mathcal{T}_n \otimes \mathcal{F}_n, \\ U_g^I &\longmapsto \beta_R(U_g^I) := \sum_{fh=g} U_f^{h(I)} \otimes w_h^{[I]}.\end{aligned} \tag{8.7}$$

Wir wollen nun die Koinvarianten von $\mathcal{T}_n$ bezüglich der Rechts-Kowirkung β_R ausrechnen. Dazu nehmen wir ein beliebiges Element $Z := \sum_{g\in G, I\in\mathbb{Z}^n} \alpha(g,I)U_g^I$ und überprüfen, unter welchen Bedingungen es koinvariant ist, d.h. unter welchen Bedingungen $\beta_R(Z) = Z\otimes 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\beta_R(\sum_{g\in G, I\in\mathbb{Z}^n} \alpha(g,I)U_g^I) &= \sum_{g\in G, I\in\mathbb{Z}^n} \alpha(g,I) \sum_{fh=g} U_f^{h(I)} \otimes w_h^{[I]} \\ &= \sum_{g,h\in G, I\in\mathbb{Z}^n} \alpha(g,I) U_{gh^{-1}}^{h(I)} \otimes w_h^{[I]} \stackrel{!}{=} \sum_{g\in G, I\in\mathbb{Z}^n} \alpha(g,I) U_g^I \otimes 1_{\mathcal{F}_n}.\end{aligned}$$

Da $1_{\mathcal{F}_n} = \sum_{h\in G} w_g^{[0]}$, muß für festes $h\in G$ gelten:

$$\sum_{g\in G, I\in\mathbb{Z}^n} \alpha(g,I) U_{gh^{-1}}^{h(I)} \otimes w_h^{[I]} = \sum_{g\in G, I\in\mathbb{Z}^n} \alpha(g,I) U_g^I \otimes w_h^{[0]}.$$

Dies ist nur erfüllt, wenn $I\in\mathcal{L}$ oder gleichbedeutend $[I]=[0]$ ist. Weiterhin ergibt sich dann (mit h immer noch fest):

$$\sum_{g'\in G, I'\in\mathcal{L}} \alpha(g',I') U_{g'h^{-1}}^{h(I')} = \sum_{g\in G, I\in\mathcal{L}} \alpha(g,I) U_g^I. \tag{8.8}$$

Koeffizientenvergleich liefert folgende Bedingung an die $\alpha(g,I)$:

$$\alpha(g,I) = \alpha(gh, h^{-1}(I)),\ \forall g,h\in G; I\in\mathcal{L}.$$

$\alpha(gh, h^{-1}(I))$ ist dabei der Koeffizient von $U_{g'h^{-1}}^{h(I')} = U_g^I$ auf der linken Seite von Gleichung (8.8). Das bedeutet, daß für alle $h\in G$ die $U_{g'h^{-1}}^{h(I')}$ den gleichen Koeffizienten besitzen müssen. Daraus folgt dann aber, daß die Basiselemente der Koinvarianten-Unteralgebra von der Form $Z_g^I = \sum_{p\in G} U_{gp^{-1}}^{p(I)},\ g\in G, I\in\mathcal{L}$ sind.

Die Koinvarianten-Algebra, die wir mit $\mathcal{T}_n^{co}$ bezeichnen wollen, ist offensichtlich eine Unteralgebra von $\mathcal{T}_n^c$. Darüber hinaus ist sie isomorph zu der Polynomalgebra auf dem kommutativen Torus T^n. Dies sehen wir wie folgt: Als erstes bemerken wir, daß eine Basis der Koinvariantenalgebra durch

$$\mathcal{B}(\mathcal{T}_n^{co}) := \{Z_e^I \equiv: Z^I \mid I \in \mathcal{L}\}.$$

gegeben ist. Dies liegt an

$$Z_g^I = \sum_{rp \in G} U^{rp(I)}_{g(rp)^{-1}} = \sum_{r \in G} U^{r(p(I)}_{gp^{-1}r^{-1}} = Z^{p(I)}_{gp^{-1}} \ \forall p \in G, I \in \mathcal{L}.$$

Die Multiplikation der Basiselemente ergibt sich zu

$$Z^I \cdot Z^J = \sum_{p \in G} U^{p(I)}_{p^{-1}} \sum_{r \in G} U^{p(J)}_{r^{-1}} = \sum_{p,r \in G} \delta_{p^{-1},r^{-1}} U^{p(I)+r(J)}_{r^{-1}} = \sum_{r \in G} U^{r(I+J)}_{r-1} = Z^{I+J}.$$

Dies entspricht aber gerade der Multiplikation der Gruppenalgebra von $\mathcal{L}$. Diese ist nach dem Beweis von Satz 48 isomorph zur Gruppe $\mathbb{Z}^n$. Diese Gruppenalgebra $\mathbb{C}\mathbb{Z}^n$ ist aber wiederum isomorph zur Algebra der Polynome auf dem kommutativen n-Torus T^n.

Wir wollen diese Ergebnisse in einem Satz festhalten:

Satz 51: *Die Algebra der Koinvarianten wird durch Elemente der Form*

$$Z_g^I = \sum_{p \in G} U^{p(I)}_{gp^{-1}}, \qquad g \in G, I \in \mathcal{L}$$

erzeugt. Die Algebra der Koinvarianten ist eine Unteralgebra von $\mathcal{T}_n^c$ mit Basis $Z_e^I, I \in \mathcal{L}$. Sie ist isomorph zur Algebra der Polynome auf dem kommutativen n-Torus T^n.

Bezeichnet i die in (8.5) benutzte Einbettung der kommutativen Multi-Tori $\mathcal{T}_n^c$ (hier eingeschränkt auf den kommutativen n-Torus T^n) und j die in (8.6) definierte Abbildung, dann können wir zeigen, daß die Algebra der Nichtkommutativen Multi-Tori ein Quantenprinzipalbündel (oder genauer ein spezielles Quantenprinzipalbündel, nämlich eine Hopf-Galois-Erweiterung) ist.

Satz 52: *Die Algebra $\mathcal{T}_n$ ist eine Hopf-Galois-Erweiterung des kommutativen Torus T^n mit der Faser $\mathcal{F}_n$:*

$$T^n \xrightarrow{i} \mathcal{T}_n \xrightarrow{j} \mathcal{F}_n.$$

Beweis: Daß T^n die Koinvarianten-Algebra ist, wurde bereits oben gezeigt. Die Rechts-Kowirkung der endlichen Algebra $\mathcal{F}_n$ auf $\mathcal{T}_n$ ist in (8.7) definiert. Die Galois-Abbildung γ muß in unserem Fall die Form

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{T}_n \otimes_{\mathcal{T}_n^{co}} \mathcal{T}_n &\longrightarrow \mathcal{T}_n \otimes \mathcal{F}_n, \\ x \otimes_{\mathcal{T}_n^{co}} y &\longmapsto xy^{(1)} \otimes y^{(2)} \end{aligned}$$

haben. Die Existenz einer solchen Abbildung werden wir durch die explizite Angabe der inversen Abbildung beweisen. Wir machen uns zunutze, daß γ ein Links-$\mathcal{T}_n$-Modulmorphismus ist, d.h.

$$\gamma(a \triangleright (x \otimes y)) = a \triangleright \gamma(x \otimes y)\ \forall a \in \mathcal{T}_n.$$

Die Wirkung ist dabei jeweils einfach durch Multiplikation in den ersten Faktor des Tensorproduktes gegeben:

$$a \triangleright (x \otimes y) = ax \otimes y.$$

Auch die Inverse muß dann ein solcher Modulmorphismus sein, so daß wir die Abbildungen vollständig durch Wirkung auf Elemente definieren können, die nur im zweiten Faktor des Tensorproduktes nichttrivial sind.

Die Inverse zu γ ist durch

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{T}_n \otimes \mathcal{F}_n &\longrightarrow \mathcal{T}_n \otimes_{\mathcal{T}_n^{co}} \mathcal{T}_n \\ 1 \otimes w_g^{[I]} &\longmapsto \sigma(1 \otimes w_g^{[I]}) := \sum_{h \in G} U_{hg^{-1}}^{-g(I)} \otimes_{\mathcal{T}_n^{co}} U_h^I. \end{aligned} \tag{8.9}$$

definiert. Die Definition von σ ist Repräsentanten-unabhängig: Sei $K \in \mathcal{L}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sigma(1 \otimes w_g^{[I+K]}) &= \sum_{a \in G} U_{ag^{-1}}^{-g(I+K)} \otimes_{\mathcal{T}_n^{co}} U_a^{I+K} = \sum_{a \in G} U_{ag^{-1}}^{-g(I)} \cdot \underbrace{\sum_{p \in G} U_{p^{-1}}^{-pa(K)}}_{=Z^{-a(K)}} \otimes_{\mathcal{T}_n^{co}} U_a^{I+K} \\ &= \sum_{a \in G} U_{ag^{-1}}^{-g(I)} \otimes_{\mathcal{T}_n^{co}} \sum_{p \in G} U_{p^{-1}}^{-pa(K)} \cdot U_a^{I+K} = \sum_{a \in G} U_{ag^{-1}}^{-g(I)} \otimes_{\mathcal{T}_n^{co}} U_a^I. \end{aligned}$$

Vergleich mit (8.9) liefert die Repräsentanten-Unabhängigkeit. Als nächstes zeigen wir, daß $\gamma \circ \sigma = id$ ist:

$$\begin{aligned} (\gamma \circ \sigma)(1 \otimes w_g^{[I]}) &= \gamma(\sum_{h \in G} U_{hg^{-1}}^{-g(I)} \otimes U_h^I) = \sum_{h,p \in G} U_{hg^{-1}}^{-g(I)} U_{hp^{-1}}^{p(I)} \otimes w_p^{[I]} \\ &= \sum_{h \in G} U_{hg^{-1}}^{0} \otimes w_g^{[I]} = 1 \otimes w_g^{[I]}. \end{aligned}$$

Nun bleibt nur noch $\sigma \circ \gamma = id$ zubeweisen:

$$\begin{aligned} (\sigma \circ \gamma)(1 \otimes_{\mathcal{T}_n^{co}} U_g^I) &= \sigma(\sum_{h \in G} U_{gh^{-1}}^{h(I)} \otimes w_h^{[I]}) = \sum_{p,h \in G} U_{gh^{-1}}^{h(I)} U_{ph^{-1}}^{-h(I')} \otimes_{\mathcal{T}_n^{co}} U_p^{I'} \\ &= \sum_{h \in G} U_{gh^{-1}}^{h(I-I')} \otimes_{\mathcal{T}_n^{co}} U_g^{I'} = Z^{I-I'} \otimes_{\mathcal{T}_n^{co}} U_g^{I'} = 1 \otimes_{\mathcal{T}_n^{co}} Z^{I-I'} U_g^{I'} \\ &= 1 \otimes_{\mathcal{T}_n^{co}} U_g^I. \end{aligned}$$

•

Damit wurde die Hopf-Galois-Eigenschaft von γ bewiesen und gezeigt, daß die Nicht-kommutativen Multi-Tori $\mathcal{T}_n$ eine Hopf-Galois-Erweiterung des kommutativen n-Torus sind oder geometrischer interpretiert: $\mathcal{T}_n$ ist ein Quantenprinzipalbündel mit Strukturquantengruppe $\mathcal{F}_n$ über dem Basisraum T^n. Dieses Quantenprinzipalbündel ist trivial, da es cleft ist. Dies wollen wir mit dem nachfolgenden Satz beweisen, wobei wir, anstatt das Analogon Φ zur globalen Trivialisierung zu konstruieren, mit der sogenannten „Normalbasis-Eigenschaft“ arbeiten. Nach dem Theorem von Doi und Takeuchi [25] ist eine Hopf-Galois-Erweiterung genau dann cleft, wenn sie die Normalbasis-Eigenschaft besitzt. Diese Eigenschaft müssen wir natürlich noch definieren, wobei wir dies gleich für unseren konkreten Fall formulieren.

Satz 53: *Die Hopf-Galois-Erweiterung $\mathcal{T}_n$ des kommutativen n-Torus T^n durch die Hopf-Algebra $\mathcal{F}_n$ besitzt die Normalbasis-Eigenschaft, d.h. es existiert ein Isomorphismus*

$$\xi : T^n \otimes \mathcal{F}_n \longrightarrow \mathcal{T}_n,$$

der T_n-links-linear und ein Rechts-$\mathcal{F}_n$-Komodulmorphismus ist.

Beweis: Wir müssen zeigen

1. Bijektivität von ξ.
2. ξ ist ein Links-T^n-Modulmorphismus.
3. ξ ist ein Rechts-$\mathcal{F}_n$-Komodulmorphismus.

Zu 1:

Wir definieren ξ auf den Basiselementen:

$$\xi(Z^I \otimes w_g^{[J]}) := U_g^{\alpha([J])+g^{-1}(I)}, \; I \in \mathcal{L}, [J] \in \mathbb{Z}^n/\mathcal{L}, g \in G.$$

α ist dabei die injektive Abbildung $\mathbb{Z}^n/\mathcal{L} \to \mathbb{Z}^n$, so daß $[\alpha([J])] = [J]$ gilt. Diese Abbildung ist wohldefiniert, wenn man feste Repräsentanten für alle Äquivalenzklassen wählt.

Zu 2:

$$\begin{aligned}\xi(Z^I Z^J \otimes w_g^{[K]}) &= \xi(Z^{I+J} \otimes w_g^{[K]}) \\ &= U_g^{\alpha([K])+g^{-1}(I)+g^{-1}(J)} = Z^I U_g^{\alpha([K])+g^{-1}(J)} \\ &= Z^I \xi(Z^J \otimes w_g^{[K]}).\end{aligned}$$

Zu 3:

$$\begin{aligned}\beta_R \xi(Z^J \otimes w_g^{[K]}) &= \beta_R(U_g^{\alpha([J])+g^{-1}(I)}) \\ &= \sum_{h\in G} U_{gh^{-1}}^{h(\alpha([K]))+hg^{-1}(J)} \otimes w_h^{[K]} \\ &= \sum_{h\in G} \xi(Z^J \otimes w_{gh^{-1}}^{h([K])}) \otimes w_h^{[K]} = (\xi \otimes id)(id \otimes \Delta)(Z^J \otimes w_g^{[K]}).\end{aligned}$$

Satz 54: *Die Erweiterung $\mathcal{T}_n$ des kommutativen Torus T^n ist cleft und somit ein triviales Quantenprinzipalbündel.*

Damit ist die zentrale Aussage dieses Kapitels erledigt, und wir wollen uns abschließend noch ein wenig den Zusammenhang einiger auftretender Räume ansehen. Dazu definieren wir die folgenden Projektionen:

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{T}_n &\longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{Z}^n, \\ U_g^I &\longmapsto \pi(U_g^I) := \delta_{g,e} I, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi' : \mathcal{F}_n &\longrightarrow \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n/\mathcal{L}], \\ w_g^{[I]} &\longmapsto \pi'(w_g^{[I]}) := \delta_{g,e}[I]. \end{aligned}$$

Mit diesen Projektionen so wie den kanonischen Abbildungen j und ρ können wir das folgende kommutative Diagramm aufstellen:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}_n \arrow[r, "j"'] \arrow[d, "\pi'"'] & \mathcal{F}_n \arrow[d, "\pi_0"] \\ \mathbb{C}\mathbb{Z}^n \arrow[r, "\rho"'] & \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n/\mathcal{L}] \end{tikzcd}$$

Abbildung 8.1: Beziehung von $\mathcal{T}_n$ und $\mathcal{F}_n$

8.6 Zusammenfassung und Anmerkungen

Man sollte dieses Kapitel unbedingt im Zusammenhang mit Kapitel 5 über Quantisierungsprobleme verstehen. Die grundlegende Struktur in beiden Kapiteln ist die Kreuzproduktalgebra. In Kapitel 5 hatten wir gezeigt, daß solche Kreuzproduktalgebren als Lösungen von algebraischen Quantisierungsproblemen auftreten. Im jetzigen Kapitel sahen wir, daß die gleiche Struktur eine geometrische Interpretation besitzt. Sie ist immer ein triviales Quantenprinzipalbündel. Es ist klar, daß Kreuzproduktalgebren deshalb eine zentrale Rolle in der Aufstellung von Modellen bilden, in denen auf einem algebraischen Niveau Elemente von Quantenmechanik und Gravitation vereinigt sind. Interessant ist natürlich insbesondere der Fall, daß die gleiche Kreuzproduktalgebra Lösung eines algebraischen Quantisierungsproblems und (das gilt immer) ein Quantenprinzipalbündel ist. Dies ist der Ausgangspunkt für die Konstruktion der sogenannten Bikreuzproduktalgebren. Diese sind Kreuzproduktalgebren, die zudem Hopf-Algebren sind. Hier taucht die interessante Möglichkeit auf, daß, wenn man zur dualen Hopf-Algebra übergeht, gerade die Rolle von Quantisierung und Geometrie vertauscht wird. Die Algebrenstruktur einer solchen Bikreuzproduktalgebra beschreibt eine Quantisierung (wie wir dies für Kreuzproduktalgebren in Kapitel 5 untersucht haben). Diese Algebrenstruktur beschreibt aber im Dualen die Geometrie, d.h. die Quantenprinzipalbündel-Struktur. Andererseits beschreibt die Koalgebrenstruktur eines Bikreuzproduktes Geometrie und im Dualen dann die Struktur der Quantisierung. Diese Sachverhalte werden ausführlich in [46] dargestellt.

Wir haben in diesem Kapitel für den Fall der Wurzeln der Eins gezeigt, daß die nichtkommutativen Multi-Tori eine Hopf-Galois-Erweiterung der entsprechenden kommutativen Tori sind, wobei die Rolle der Strukturgruppe von der endlichdimensionalen Hopf-Algebra $\mathcal{F}_n$ gespielt wurde. Wir weisen darauf hin, daß in [32] der Quantendoppeltorus im Hinblick auf solche Hopf-Galois-Erweiterungen untersucht wurde.

Kapitel 9

Symmetrien und der Nichtkommutative Torus

In dieser Arbeit haben wir uns im wesentlichen mit der Konstruktion von Hopf-Algebren als eigenständigen algebraischen Objekten befaßt, wobei wir aber immer wieder darauf hingewiesen haben, daß sich Hopf-Algebren auf natürliche Weise aus dem Begriff der Gruppe ergeben, wenn man zu einer algebraischen Stufe übergeht. In diesem Sinne kann man von einer Algebraisierung des klassischen Symmetriebegriffes reden. Im folgenden Kapitel wollen wir ausführlicher über den Symmetriebegriff in der Nichtkommutativen Geometrie sprechen und (zum Teil Aspekte der vorangegangenen Kapitel aufgreifend) Symmetrien in Zusammenhang mit spektralen Tripeln, dem algebraischen Analogon zu den Spinmannigfaltigkeiten, diskutieren.

Wenn man versucht, auf der algebraischen Stufe verallgemeinerte Symmetrien zu definieren, wird man ganz natürlich auf Hopf-Algebren geführt. Wir haben das bereits ausführlich in dieser Dissertation dargestellt. Dies ist aber nicht die einzige Möglichkeit um verallgemeinerte Symmetrien zu definieren. Eine andere Möglichkeit ist, von der Wirkung einer Gruppe auf einen Raum auszugehen. Auf der Stufe der Funktionen über diesem Raum induziert dies Automorphismen. Man kann demnach als verallgemeinerte Symmetrien eines nichtkommutativen Raumes die Automorphismen betrachten. Dies ist genau die Art und Weise wie in der Formulierung des Standardmodells nach Connes die klassischen Symmetrien implementiert werden. Diese Symmetrien sind also mit der Automorphismengruppe der zugrundeliegenden Algebra verbunden.

Die Verallgemeinerung von Symmetrien mittels Hopf-Algebren und Quantengruppen hat den Vorzug, daß man die Symmetrien als eigenständige Objekte betrachtet und zudem, nach der Philosophie der NKG, als Räume mit Zusatzstrukturen auffassen kann, die im kommutativen Fall zu den Gruppenstrukturen des „darunterliegenden“Raumes korrespondieren. Außerdem ermöglicht die Verwendung von Hopf-Algebren die Konstruktion von eigenständigen Modellen und Strukturen (wie Kreuzproduktalgebren oder Bikreuzprodukten), die auf einer algebraischen Stufe Aspekte von quantenmechanischer und geometrischer Betrachtungsweise vereinigen.

Die Untersuchung von verallgemeinerten Symmetrien muß natürlich zum Ziel haben, solche Symmetrien in der Physik zu finden und somit ihre physikalische Relevanz zu demonstrieren. Man weiß (wir haben darauf auch in der Einleitung zu dieser Dissertation hingewiesen), daß in Modellen der diskreten Eichtheorie sogenannte Quantendoppel (die nichts mit dem Quantendoppeltorus zu tun haben) als Symmetriestruktur eine wichtige Rolle spielen, und daß Hopf-Algebren ein zentrales Werkzeug in der Renormierungstheorie bilden. Bezüglich des Standardmodells in der Nichtkommutativen Geometrie wäre es natürlich von herausragender Bedeutung zusätzliche Symmetrien zu finden, die das Standardmodell mit seinen Parametern vor anderen möglichen Modellen auszeichnet. Insbesondere wäre es schön, eine Symmetrie zu finden, die den „richtigen“Dirac-Operator fixiert und damit eindeutig festlegt. Obwohl es durchaus einen Kandidaten für eine solche Symmetrie gibt (siehe die Einführung zu dieser Dissertation), ist es bisher nicht gelungen, diese Symmetrie zu implementieren. Dies liegt einerseits an der komplizierten Struktur des Standardmodells und andererseits an der in Frage kommenden Quantengruppe selbst, die mathematisch von schwieriger Natur ist. Aufgrund der Schwierigkeiten ist es sinnvoll, zunächst an einfacheren Modellen und Beispielen nichtkommutative Symmetrien zu erproben und „durchzuspielen“, um auch ein Gefühl für Symmetrien in der Nichtkommutativen Geometrie zu entwickeln.

Nachdem wir aus dem Nichtkommutativen Torus Räume aufgebaut haben, die eine Hopf-Algebren- oder allgemeiner eine Multiplikator-Hopf-Algebren-Struktur besitzen, stellt sich die Frage, ob der Nichtkommutative Torus selbst irgendwelche Hopf-Algebren-Symmetrien besitzt. Natürlich kennen wir als klassische Symmetrie des Nichtkommutativen Torus die $u(1) \times u(1)$-Symmetrie. Diese ist jedoch nicht sensitiv bezüglich des Deformationsparameters λ in der Vertauschungsrelation $\lambda UV = VU$. Der Deformationsparameter spielt für diese klassische Symmetrie keine Rolle. Wir werden in diesem Kapitel zeigen, daß der Nichtkommutative Torus in der „Quantengruppen-Welt “eine „größere Symmetrie“besitzt. Die Symmetrie ist selbst deformiert (enthält einen Deformationsparameter) und die Deformationsparameter des Nichtkommutativen Torus und der Symmetrie sind nicht unabhängig voneinander. Diese Symmetrie wird durch die Multiplikator-Hopf-Algebra $(DT_q)^*$ gegeben und damit im wesentlichen durch die Duale des Quantendoppeltorus. Sie bildet eine Symmetrie, die im Gegensatz zur klassischen $u(1) \times u(1)$-Symmetrie sensitiv bezüglich der deformierten Struktur des Nichtkommutativen Torus ist.

Die nächste Frage, die sich daraus ergibt, ist, ob sich diese Symmetrie auf die bekannten Spektralen Tripel des Nichtkommutativen Torus fortsetzen läßt. Wir werden sehen, daß dies nicht der Fall ist.

9.1 Algebraische Spektrale Tripel

Spektrale Tripel sind das nichtkommutative Analogon zu den Riemann-Spin-Mannigfaltigkeiten. Die exakte (sehr umfangreiche) Definition des Begriffs der Spektralen Tripel findet sich beispielsweise in [9],[10] oder in [37]. Wir begnügen uns nachfolgend mit den algebraischen Eigenschaften, wie sie z.B. in [57] zu finden sind.

9.1.1 Allgemeine Definition

Definition 44: ***Algebraische Spektrale Tripel***
Ein algebraisches, reelles, gerades Spektrales Tripel wird durch das Tupel $(\mathcal{A}, \pi, \mathcal{H}, D, J, \gamma)$ *gegeben. Dabei soll gelten:*

1. $\mathcal{A}$ *ist eine involutive Algebra.*
2. π *ist eine treue, beschränkte* $*$*-Darstellung von* $\mathcal{A}$ *auf dem Hilbert-Raum* $\mathcal{H}$.
3. D *ist ein selbstadjungierter Operator mit kompakter Resolvente, so daß* $[D, \pi(a)],\ \forall a \in \mathcal{A}$ *beschränkt ist.*
4. γ *ist eine hermitesche* $\mathbb{Z}_2$*-Graduierung mit* $D\gamma = -\gamma D$.
5. J *ist eine antilineare Isometrie, so daß*

$$[JaJ^{-1}, b] = 0,\ \forall a, b \in \mathcal{A},$$
$$[JaJ^{-1}, [D, b]] = 0,\ \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

6. *Es existiert ein n-Hochschild-Zykel* $c \in Z_0(\mathcal{A}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{op})$, $c = a_0 \otimes b_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$, *für dessen Darstellung auf dem Hilbert-Raum* $\mathcal{H}$ *gilt:*

$$\pi(c) = \pi(a_0)(J\pi(b_0)J^{-1})[D, \pi(a_1)] \ldots [D, \pi(a_n)] = \gamma.$$

7. *Es gelten die Relationen*

$$DJ = \epsilon JD, \quad J^2 = \epsilon', \quad J\gamma = \epsilon'' \gamma J.$$

Die $\epsilon, \epsilon', \epsilon''$ *ergeben sich aus der folgenden Tabelle:*

n mod 8	0	1	2	3	4	5	6	7
ϵ	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
ϵ'	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
ϵ''	$+$		$-$		$+$		$-$	

Klassisches Beispiel:

Statt im Einzelnen auf diese Bedingungen einzugehen, wollen wir nur kurz das grundlegende klassische Beispiel angeben: Man geht aus von einer 4-dim. kompakten euklidischen Raumzeit M. Die Algebra $\mathcal{A}$ sind die glatten Funktionen auf dieser Raumzeit, d.h. $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(M)$. Der Hilbert-Raum sind die quadratintegrablen Spinoren auf M: $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathcal{S})$. Der Dirac-Operator ist $D = \not{\partial} = i\gamma^\mu \partial/\partial x^\mu$, wobei die γ^μ die üblichen Gamma-Matrizen sind. Die Graduierung γ ist nichts anderes als der Chiralitätsoperator γ_5, während der Realitätsoperator J der Ladungskonjugationsoperator ist:

$$J = C := \gamma^0\gamma^2 \circ \text{Komplexkonjugation.}$$

Er permutiert Teilchen mit Antiteilchen. Während die Relation $[D, J] = 0$ besagt, daß Teilchen und Antiteilchen die gleiche Dynamik besitzen, folgt aus $D\gamma + \gamma D$, daß sich die Chiralität bei der Zeitentwicklung nicht ändert. Die Ordnung-1-Bedingung $[JaJ^{-1}, [D, b]] = 0$ stellt sicher, daß D ein Differentialoperator 1. Ordnung ist. Die Existenz des Hochschild-Zykels c besagt in diesem klassischen Fall, daß γ die Darstellung der Volumenform auf $\mathcal{H}$ ergibt. •

Spektrale Tripel müssen i.a. noch einige weitere mehr analytische Bedingungen erfüllen, die wir hier aber nicht betrachten wollen. Sie sind für uns aus zwei Gründen nicht wesentlich: Einerseits arbeiten wir rein algebraisch und verwenden statt Quantengruppen Hopf-Algebren (oder Multiplikator-Hopf-Algebren) und andererseits reichen obige Bedingungen aus, um zu zeigen, daß die verallgemeinerte Symmetrie, die der Nichtkommutative Torus besitzt, nicht zu invarianten Spektralen Tripeln führt.

9.1.2 Nichtkommutativer Torus als Spektrales Tripel

Da wir hier rein algebraisch arbeiten wollen, betrachten wir den Nichtkommutativen Torus als die von den Generatoren U und V erzeugte Algebra mit der Relation $\lambda UV = VU$. Die folgenden Eigenschaften des Nichtkommutativen Torus sind wohlbekannt und können z.B. in [51] oder [37] nachgelesen werden.

Eine Darstellung auf dem Hilbert-Raum $l^2(\mathbb{Z}^2)$ ist durch

$$\begin{aligned} U \mid n, m\rangle &= \mid n+1, m\rangle, \\ V \mid n, m\rangle &= \lambda^n \mid n, m+1\rangle \end{aligned}$$

gegeben, wobei wir mit $\mid n, m\rangle$, $n, m \in \mathbb{Z}$ die Basis aus $l^2(\mathbb{Z}^2)$ bezeichnen. Um die Graduierung γ zu definieren, muß der Hilbert-Raum zu $l^2(\mathbb{Z}^2) \oplus l^2(\mathbb{Z}^2)$ verdoppelt werden. Die Basiselemente werden als $\mid n, m; \pm\rangle$ geschrieben. Graduierung und Realitätsstruktur lassen sich als Matrix angeben

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -J_0 \\ J_0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei diese Matrizen auf den $\pm$-Anteil der Basen $\mid n, m; \pm\rangle$ wirken. J_0 wirkt wie folgt auf $\mathcal{H}$:

$$J_0 \mid n, m\rangle := \lambda^{nm} \mid -n, -m\rangle.$$

Der Dirac-Operator ist von der Form

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine Folge davon, daß der Dirac-Operator selbstadjungiert ist und mit der Graduierung antikommutieren soll. Der Nichtkommutative Torus besitzt eine Symmetrie bezüglich der Lie-Algebra $u(1) \times u(1)$. Diese Symmetrie läßt sich durch Wirkung der beiden Generatoren δ_1, δ_2 der Lie-Algebra auf die Generatoren U und V des Nichtkommutativen Torus beschreiben:

$$\begin{aligned} \delta_1 \triangleright U &= U, & \delta_1 \triangleright V &= 0, \\ \delta_2 \triangleright U &= 0, & \delta_2 \triangleright V &= V. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man diese Symmetrie für den Dirac-Operator, so kann man zeigen, daß

$$\partial \mid n, m; -\rangle = d_{n,m} \mid n, m; +\rangle.$$

Die $d_{n,m}$ können weiter durch die Ordnung-1-Bedingung fixiert werden, und man erhält die Gleichungen

$$\begin{aligned} d_{n+2,m} &= 2d_{n+1,m} - d_{n,m}, \\ d_{n,m+2} &= 2d_{n,m+1} - d_{n,m}, \end{aligned}$$

welche die Lösungen

$$d_{n,m} = n + \tau m, \ \tau \in \mathbb{C} \tag{9.1}$$

besitzen. Diese Lösungen sind eindeutig bis auf eine multiplikative Konstante.

9.2 Symmetrien Spektraler Tripel

Wir verwenden im Folgenden den Symmetriebegriff für Spektrale Tripel, wie er in [52] eingeführt wurde (siehe auch [51]).

Definition 45*: Kovariante Spektrale Tripel*
Sei G eine kompakte Quantengruppe und $H = G^*$ die dazu duale Quantengruppe. Außerdem sei $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D, \gamma, J)$ ein Spektrales Tripel. Das Spektrale Tripel heißt dann H-symmetrisch oder H-kovariant oder H-äquivariant, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. *Die Algebra $\mathcal{A}$ des spektralen Tripels ist eine Links-H-Modulalgebra.*
2. *Der Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ ist ein H-Modul. Die Darstellung von $\mathcal{A}$ ist diesbezüglich kovariant.*
3. *Der Dirac-Operator D des Spektralen Tripels vertauscht mit allen Elementen aus H:*
$$[D, h] = 0, \ \forall h \in H.$$
4. *Die Graduierung γ vertauscht mit allen Elementen aus H:*
$$[\gamma, h] = 0, \ \forall h \in H.$$
5. *Es gilt der folgende Zusammenhang zwischen Realitätsstruktur J und der Antipode S:*
$$S(h) = Jh^* J^{-1}.$$

Eine ausführlichere Erklärung des hier definierten Symmetriebegriffes findet sich in der oben angegebenen Literatur. Wir wollen hier nur kurz die einzelnen Punkte erläutern. Die ersten beiden Bedingungen besagen einfach, daß es für die Kreuzproduktalgebra $A \rtimes H$ eine Darstellung auf dem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ gibt. Dies ist gerade die Aussage von Satz 22. Bedingungen 3 und 4 korrespondieren zur Invarianz der Metrik und der Graduierung. Die fünfte Bedingung ergibt sich aus der Forderung, daß die Wirkung von H_{op}^{op} (d.h. die Hopf-Algebra H mit vertauschter Multiplikation und Komultiplikation) auf die „opposite"-Algebra $\mathcal{A}^{op}$ (das ist die Algebra $\mathcal{A}$ aber mit vertauschter Multiplikation), die durch die Realitätsstruktur induziert wird, mit der Darstellung übereinstimmt, die man durch die Antipode von H erhält. Es gibt eine duale Formulierung der oben angegebenen Symmetriedefinition, die mit Kowirkungen arbeitet [51]. Diese ist eigentlich die natürliche, die sich aus klassischen Räumen ergibt. Wir ziehen es allerdings vor mit Wirkungen zu arbeiten.

9.3 Verallgemeinerte Symmetrien des Nichtkommutativen Torus

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, daß der Nichtkommutative Torus über die bekannte $u(1) \times u(1)$-Symmetrie hinaus eine größere Symmetrie besitzt. Die Symmetrie ist durch die Wirkung der dualen Hopf-Algebra $(DT_q)^*$ des Quantendoppeltorus gegeben. Diese Symmetrie ist zwar kovariant, führt aber nicht zu kovarianten Spektralen Tripeln, da (wie wir sehen werden) die Ordnung-1-Bedingung nicht zu erfüllen ist. Die folgenden Formeln ergeben sich aus den Gleichungen (5.14) und (5.15) in Kapitel 5 für den Spezialfall $G = \mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Z}^n$ mit $n = 2$. Die Multiplikation der Algebra $(DT_q)^*$ ist

$$
\begin{aligned}
C_+^{kl} C_+^{mn} &= \delta^{k,m} \delta^{l,n} C_+^{mn}, \\
C_+^{kl} C_-^{mn} &= \delta^{k,n} \delta^{l,m} C_-^{mn}, \\
C_-^{kl} C_+^{mn} &= \delta^{k,m} \delta^{l,n} C_-^{mn}, \\
C_-^{kl} C_-^{mn} &= \delta^{k,n} \delta^{l,m} C_+^{mn}.
\end{aligned}
$$

Da $(DT_q)^*$ eine Multiplikator-Hopf-Algebra ist, sind die folgenden Definitionen für Komultiplikation, Koeins und Antipode wieder im Sinne der Multiplikator-Hopf-Algebren zu verstehen.

$$
\begin{aligned}
\Delta C_+^{kl} &= \sum_{a+c=k} \sum_{b+d=l} C_+^{ab} \otimes C_+^{cd}, \\
\Delta C_-^{kl} &= \sum_{a+c=k} \sum_{b+d=l} q^{\frac{1}{2}(bc-ad)} C_-^{ab} \otimes C_-^{cd},
\end{aligned}
$$

Dabei ist $q = e^{2\pi i\theta}$ und θ ein reeller Parameter.

$$
\epsilon(C_\pm^{kl}) = \delta^{k,0} \delta^{l,0},
$$

$$
\begin{aligned}
S(C_+^{kl}) &= C_+^{(-k)(-l)}, \\
S(C_-^{kl}) &= C_-^{(-l)(-k)}.
\end{aligned}
$$

Eine $*$-Struktur ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
(C_+^{kl})^* &= C_+^{kl}, \\
(C_-^{kl})^* &= C_-^{-l,-k}.
\end{aligned}
$$

Der Nichtkommutative Torus besitzt die Vertauschungsrelation

$$
\lambda UV = VU, \tag{9.2}
$$

wobei U, V die unitären Generatoren und λ ein komplexer Deformationsparameter mit $\mid \lambda \mid = 1$ ist.

Die Wirkung der Generatoren von $(DT_q)^*$ auf die Generatoren des Nichtkommutativen Torus wird definiert als

$$
\begin{aligned}
C_+^{kl} \triangleright U &= \delta^{k,1} \delta^{l,0} U, \\
C_+^{kl} \triangleright V &= \delta^{k,0} \delta^{l,1} V, \\
C_-^{kl} \triangleright U &= \delta^{k,1} \delta^{l,0} V, \\
C_-^{kl} \triangleright V &= \delta^{k,0} \delta^{l,1} U.
\end{aligned}
$$

Wir müssen an dieser Stelle nachprüfen, daß diese Definition der Darstellung mit der Vertauschungsrelation (9.2) verträglich ist. Verträglichkeit bedeutet hierbei, daß $C_\pm^{kl} \triangleright (\lambda UV) = C_\pm^{kl} \triangleright (VU)$. Aus der Wirkung von C_+^{kl} folgt keine Relation zwischen λ und q:

$$\begin{aligned}
C_+^{kl} \triangleright (\lambda UV) &= \lambda \sum_{a+c=k} \sum_{b+d=l} ((C_+^{ac} \triangleright U) \cdot (C_+bd \triangleright V)) \\
&= \lambda \sum_{a+c=k} \sum_{b+d=l} ((\delta^{a,1}\delta^{c,0}U) \cdot (\delta^{b,0}\delta^{d,1}V)) = \lambda \delta^{k,1}\delta^{l,1}UV, \\
C_+^{kl} \triangleright (VU) &= \sum_{a+c=k} \sum_{b+d=l} ((C_+^{ac} \triangleright V) \cdot (C_+bd \triangleright U)) \\
&= \sum_{a+c=k} \sum_{b+d=l} ((\delta^{a,1}\delta^{c,0}V) \cdot (\delta^{b,0}\delta^{d,1}U)) = \delta^{k,1}\delta^{l,1}VU.
\end{aligned}$$

Die Wirkung der C_-^{kl} liefert dagegen eine Obstruktion für λ und q:

$$\begin{aligned}
C_-^{kl} \triangleright (\lambda UV) &= \lambda \sum_{a+c=k} \sum_{b+d=l} q^{\frac{1}{2}(bc-ad)} (C_-^{ab} \triangleright U) \cdot (C_-^{cd} \triangleright V) \\
&= \lambda \sum_{a+c=k} \sum_{b+d=l} q^{\frac{1}{2}(bc-ad)} (\delta^{a,1}\delta^{b,0}V) \cdot (\delta^{c,0}\delta^{d,1}U) = \lambda \delta^{k,1}\delta^{l,1} q^{-\frac{1}{2}} VU, \\
C_-^{kl} \triangleright (VU) &= \sum_{a+c=k} \sum_{b+d=l} q^{\frac{1}{2}(bc-ad)} (C_-^{ab} \triangleright V) \cdot (C_-^{cd} \triangleright U) \\
&= \sum_{a+c=k} \sum_{b+d=l} q^{\frac{1}{2}(bc-ad)} (\delta^{a,0}\delta^{b,1}U) \cdot (\delta^{c,1}\delta^{d,0}V) = \delta^{k,1}\delta^{l,1} q^{\frac{1}{2}} UV.
\end{aligned}$$

Es folgt also, daß $\lambda q^{-\frac{1}{2}} VU = q^{\frac{1}{2}} UV$ und mit (9.2) ergibt sich

$$\lambda^2 = q.$$

Die übliche treue Darstellung des Nichtkommutativen Torus auf dem Hilbert-Raum $l^2(\mathbb{Z}^2)$ ist

$$\begin{aligned}
U|n,m\rangle &= |n+1,m\rangle, \\
V|n,m\rangle &= \lambda^n |n,m+1\rangle.
\end{aligned}$$

Wir benötigen eine Darstellung von $(DT_q)^*$ auf $l^2(\mathbb{Z}^2)$, welche den Nichtkommutativen Torus zu einem kovarianten $(DT_q)^*$-Modul macht. Dies wird durch

$$\begin{aligned}
C_+^{ij}|n,m\rangle &= \delta^{i,n}\delta^{j,m}|n,m\rangle, \\
C_-^{ij}|n,m\rangle &= \delta^{i,n}\delta^{j,m}|m,n\rangle
\end{aligned}$$

ermöglicht. Wir müssen nun die Kovarianz dieser Darstellung zeigen, d.h. es muß gelten:

$$\begin{aligned}
C_\pm^{kl} \triangleright (U \mid n,m\rangle) &= ((C_\pm^{kl})_1 \triangleright U) \triangleright ((C_\pm^{kl})_2 \mid n,m\rangle) \\
C_\pm^{kl} \triangleright (V \mid n,m\rangle) &= ((C_\pm^{kl})_1 \triangleright V) \triangleright ((C_\pm^{kl})_2 \mid n,m\rangle).
\end{aligned}$$

Wir berechnen erst die linken Seiten:

$$C_+^{kl} \triangleright (U \mid n,m\rangle) = C_+^{kl} \triangleright \mid n+1,m\rangle = \delta^{k,n+1}\delta^{l,m} \mid n+1,m\rangle, \tag{9.3}$$

$$C_-^{kl} \triangleright (U \mid n,m\rangle) = C_-^{kl} \triangleright \mid n+1,m\rangle = \delta^{k,n+1}\delta^{l,m} \mid m,n+1\rangle, \tag{9.4}$$

$$C_+^{kl} \triangleright (V \mid n,m\rangle) = C_+^{kl} \triangleright \lambda^n \mid n,m+1\rangle = \lambda^n\delta^{k,n}\delta^{l,m+1} \mid n,m+1\rangle, \tag{9.5}$$

$$C_-^{kl} \triangleright (V \mid n,m\rangle) = C_-^{kl} \triangleright \lambda^n \mid n,m+1\rangle = \lambda^n\delta^{k,n}\delta^{l,m+1} \mid m+1,n\rangle. \tag{9.6}$$

Die rechten Seiten ergeben:

$$\begin{aligned}((C_+^{kl})_1 \triangleright U) \triangleright ((C_+^{kl})_2 \mid n,m\rangle) &= \sum_{a+b=k}\sum_{c+d=l} (C_+^{ac} \triangleright U) \triangleright (C_+^{bd} \mid n,m\rangle) \\ &= \sum_{a+b=k}\sum_{c+d=l} (\delta^{a,1}\delta^{c,0}U) \triangleright (\delta^{b,n}\delta^{d,m} \mid n,m\rangle) \\ &= \delta^{k,n+1}\delta^{l,m} \mid n+1,m\rangle, \end{aligned} \tag{9.7}$$

$$\begin{aligned}((C_-^{kl})_1 \triangleright U) \triangleright ((C_-^{kl})_2 \mid n,m\rangle) &= \sum_{a+b=k}\sum_{c+d=l} \lambda^{bc-ad}(C_-^{ac} \triangleright U) \triangleright (C_-^{bd} \mid n,m\rangle) \\ &= \sum_{a+b=k}\sum_{c+d=l} \lambda^{bc-ad}(\delta^{a,1}\delta^{c,0}V) \triangleright (\delta^{b,n}\delta^{d,m} \mid m,n\rangle) \\ &= \lambda^{-m}\delta^{k,n+1}\delta^{l,m}\lambda^m \mid m,n+1\rangle, \end{aligned} \tag{9.8}$$

$$\begin{aligned}((C_+^{kl})_1 \triangleright V) \triangleright ((C_+^{kl})_2 \mid n,m\rangle) &= \sum_{a+b=k}\sum_{c+d=l} (C_+^{ac} \triangleright V) \triangleright (C_+^{bd} \mid n,m\rangle) \\ &= \sum_{a+b=k}\sum_{c+d=l} (\delta^{a,0}\delta^{c,1}V) \triangleright (\delta^{b,n}\delta^{d,m} \mid n,m\rangle) \\ &= \lambda^n\delta^{k,n}\delta^{l,m+1} \mid n,m+1\rangle, \end{aligned} \tag{9.9}$$

$$\begin{aligned}((C_-^{kl})_1 \triangleright V) \triangleright ((C_-^{kl})_2 \mid n,m\rangle) &= \sum_{a+b=k}\sum_{c+d=l} \lambda^{bc-ad}(C_-^{ac} \triangleright V) \triangleright (C_-^{bd} \mid n,m\rangle) \\ &= \sum_{a+b=k}\sum_{c+d=l} \lambda^{bc-ad}(\delta^{a,0}\delta^{c,1}U) \triangleright (\delta^{b,n}\delta^{d,m} \mid m,n\rangle) \\ &= \lambda^n\delta^{k,n}\delta^{l,m+1} \mid m+1,n\rangle. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Vergleich der Gleichungen (9.3) - (9.6) mit den entsprechenden Gleichungen (9.7) - (9.10) zeigt die Kovarianz der Darstellungen.

Wir sehen, daß es möglich ist, das Duale des Quantendoppeltorus als eine verallgemeinerte Symmetrie des Nichtkommutativen Torus zu implementieren. Es stellt sich nun die Frage, ob es auch möglich ist, invariante Spektrale Tripel zu finden. Wir wissen, daß der Dirac-Operator für das Spektrale Tripel des Nichtkommutativen Torus von der Form

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial^* & 0 \end{pmatrix}, \qquad \partial \mid n,m;-\rangle = d_{n,m} \mid n,m;+\rangle,$$

mit $d_{n,m} = n + \tau m$ sein muß. Dies gilt allerdings nur, falls eine $u(1) \times u(1)$-Symmetrie gefordert wird. Es ist zunächst also denkbar, daß ein bezüglich $(DT_q)^*$ invariantes Spektrales Tripel einen Dirac-Operator von einer anderen Form besitzt. Eine einfache Überlegung zeigt jedoch, daß dies nicht der Fall ist, und daß darüber hinaus $\tau = 1$ gelten muß. Der Grund dafür ist, daß die verallgemeinerte Symmetrie eine $u(1) \times u(1)$-Untersymmetrie besitzt. Dies sehen wir wie folgt: Betrachten wir Elemente aus $(DT_q)^*$ der Form

$$\begin{aligned}
\delta_1 &:= \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} k C_+^{kl}, \\
\delta_2 &:= \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} l C_+^{kl}.
\end{aligned}$$

Diese Elemente, die im Sinne der Multiplikator-Hopf-Algebren wohldefiniert sind, erfüllen genau die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\delta_1 \triangleright U &= U, & \delta_1 \triangleright V &= 0, \\
\delta_2 \triangleright U &= 0, & \delta_2 \triangleright V &= V
\end{aligned}$$

und außerdem rechnet man leicht unter Benutzung der Multiplikation in $(DT_q)^*$ aus:

$$[\delta_1, \delta_2] = 0.$$

Damit ist gezeigt, daß $(DT_q)^*$ eine $u(1) \times u(1)$-Unteralgebra besitzt. Nun wissen wir aber bereits aus (9.1), daß der Dirac-Operator für eine solche Symmetrie notwendigerweise durch

$$d_{n,m} = n + \tau m$$

ausgedrückt werden kann. Man kann nun τ aus der Bedingung $[D, C_\pm^{kl}] = 0$ bestimmen. Während aus $[D, C_+^{kl}] = 0$, wegen

$$\begin{aligned}
\partial(C_+^{kl} \triangleright |n,m;-\rangle) &= \delta^{k,n}\delta^{l,m}(n + \tau m)|n,m;+\rangle, \\
C_+^{kl} \triangleright (\partial|n,m;-\rangle) &= (n + \tau m) C_+^{kl} \triangleright |n,m;+\rangle = \delta^{k,n}\delta^{l,m}(n + \tau m)|n,m;+\rangle
\end{aligned}$$

keine Einschränkung für τ folgt, ergibt sich aus $[D, C_-^{kl}] = 0$ mit

$$\begin{aligned}
\partial(C_-^{kl} \triangleright |n,m;-\rangle) &= \delta^{k,n}\delta^{l,m}(m + \tau n)|m,n;+\rangle, \\
C_-^{kl} \triangleright (\partial|n,m;-\rangle) &= (n + \tau m) C_-^{kl} \triangleright |n,m;+\rangle = \delta^{k,n}\delta^{l,m}(n + \tau m)|m,n;+\rangle
\end{aligned}$$

$n - m = \tau(n - m)$ und deshalb $\tau = 1$. Der Dirac-Operator wird also durch

$$\partial|n,m;-\rangle = (n + m)|n,m;+\rangle$$

festgelegt. Es ist aber letztlich die Graduierung γ bzw. ihr Zusammenhang mit dem Zykel c, welche die Existenz eines invarianten Spektralen Tripels verhindert. Dieser Zusammenhang wird hier durch die Formel

$$\pi(a_0) J \pi(b_0) J^{-1} [D, \pi(a_1)][D, \pi(a_2)] = \gamma \tag{9.11}$$

bestimmt. Man kann sich aber sehr leicht überlegen, daß die linke Seite der Gleichung proportional zur Einheitsmatrix ist und somit nicht die Graduierung ergeben kann. Um dies zu sehen, stellen wir zuerst fest, daß alle Terme auf der linken Seite 2×2-Matrizen sind. Die Generatoren der Algebra U und V sind in der Darstellung von der Form

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \qquad A = U, V.$$

Damit hat aber auch jedes Element des Nichtkommutativen Torus bezüglich seiner Darstellung auf den Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ diese Form, ist also ein Vielfaches der Einheitsmatrix. J und J^{-1} sind antisymmetrisch. Da sie jedoch beide genau einmal im Produkt auftauchen, ist also $\pi(a_0)J\pi(b_0)J^{-1}$ ein Vielfaches der Einheitsmatrix. Bleiben also nur noch die Kommutatoren $[D, \pi(a_1)]$ und $[D, \pi(a_2)]$ übrig. Aufgrund der oben dargelegten Einschränkungen ist D von symmetrischer Form, d.h.

$$D = \begin{pmatrix} \partial & 0 \\ 0 & \partial \end{pmatrix}$$

Die Kommutatoren sind also selbst von symmetrischer Form und ihr Produkt demnach proportional zur Einheitsmatrix. Damit ist gezeigt, daß die linke Seite von Gleichung (9.11) insgesamt proportional zur Einheitsmatrix ist und deshalb keine Graduierung ergibt.

Als Ergebnis halten wir fest: Der Nichtkommutative Torus (bzw. die ihn beschreibende Algebra) besitzt eine über die bekannte $u(1) \times u(1)$-Symmetrie hinaus eine verallgemeinerte Symmetrie: Die übliche Darstellung der Algebra $\mathcal{A}$ des kanonischen Spektralen Tripels des Nichtkommutativen Torus ist kovariant bezüglich der Wirkung der Dualen des Quantendoppeltorus, d.h. sie besitzt eine $(DT_q)^*$-Symmetrie. Es ist allerdings nicht möglich diese Symmetrie auf das gesamte Spektrale Tripel auszudehnen, also ein kovariantes Spektrales Tripel zu konstruieren.

Kapitel 10

Zusammenfassung und Ausblick

10.1 Motivation

Wir wollen in diesem letzten, abschließenden Kapitel nochmals zusammenfassend sagen, was die Motivation für diese Dissertation war, wie das Themengebiet in einen größeren mathematischen und physikalischen Rahmen einzuordnen ist und welche Ergebnisse im Rahmen der Arbeit erzielt wurden. Am Ende wollen wir noch darstellen, in welcher Richtung man die Arbeit fortführen und ergänzen könnte. Außerdem werden wir etwas darüber spekulieren, welche Entwicklung der übergeordnete Themenbereich der Hopf-Algebren- und Quantengruppen-Theorie, zu dem diese Dissertation gehört, nehmen wird oder nehmen sollte.

Bevor wir mit einer Darstellung der Motivation für den speziellen Stoff dieser Dissertation beginnen, wollen wir nochmals, in Ergänzung der Einleitung zu dieser Dissertation, darstellen, was die Grundzüge der Nichtkommutativen Geometrie sind, welche Rolle Hopf-Algebren und Quantengruppen darin spielen und was die Vorzüge einer solchen Beschreibungsweise sind. Konzeptioneller (nicht historischer) Ausgangspunkt der Nichtkommutativen Geometrie, ist die Erkenntnis, daß man topologische Räume mit ihren Strukturen und letztlich auch Geometrien auf einer algebraischen Stufe ausdrücken kann. Ein lokalkompakter Hausdorff-Raum läßt sich genauso gut durch eine C^*-Algebra beschreiben (Gelfand-Naimark-Theorem), einem klassischen Vektorbündel entspricht algebraisch ein endlich-erzeugter projektiver Modul (Serre-Swan-Theorem), das Analogon zu einer Riemann-Spinmannigfaltigkeit sind die Spekralen Tripel, und das entsprechende Gegenstück zu Gruppen bilden die Hopf-Algebren oder Quantengruppen (die wir als die topologische Version der Hopf-Algebren betrachten). Der Vorteil dieser algebraischen Formulierung klassischer Räume und Strukturen liegt darin begründet , daß man die Möglichkeit der Verallgemeinerung hat. Während die „klassischen Räume“mit Hilfe kommutativer Algebren beschrieben werden, kann man auf der algebraischen Stufe dann auch nichtkommutative Algebren zulassen. Man kann beispielsweise eine kompakte Lie-Gruppe als spezielle kommutative Quantengruppe auffassen, hat aber auch die Möglichkeit nichtkommutative Quantengruppen zuzulassen, auch wenn diese dann (im Gegensatz zu den kommutativen Quantengruppen) nicht mehr eine Funktionenalgebra auf einer Gruppe sein können. Was gewinnt man nun dadurch? Diese Frage läßt sich insbesondere als Physiker leicht beantworten, wenn man sich vor Augen führt, in welchen mathematischen Sprachen die Grundpfeiler der Physik formuliert sind. Während die Allgemeine Relativitätstheorie als klassische geometrische Theorie im Rahmen der Riemann-Geometrie dargestellt wird, benutzt man für die Quantenmechanik die Sprache von Operatoralgebren und Hilbert-Räumen. Die Nichtkommutative Geometrie besitzt das Potential (zumindest auf der mathematischen Ebene) diese so unterschiedlich formulierten und interpretierten physikalischen Theorien in einer gemeinsamen Sprache zu formulieren. Erfolge solcher Formulierungen sind z.B. das Standardmodell in nichtkommutativer Beschreibungsweise nach Connes in einer Form, welche die Gravitation einbezieht oder das in der Einleitung erwähnte sogenannte Mainz-Marseille-Modell, welches die Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkungen behandelt. Beide Modelle, die sich in ihren Methoden und Intentionen duchaus stark unterscheiden, sind klassische Beschreibungen, d.h. sie behandeln nicht die quantisierte Theorie.

Hopf-Algebren und Quantengruppen sind das algebraische Analogon zu Gruppen und Lie-Algebren. Da Gruppen und Lie-Algebren der mathematische Ausdruck für Symmetrien sind, kann man Quantengruppen als algebraisierte Symmetrien bezeichnen. Hopf-Algebren und Quantengruppen sind Nichtkommutative Geometrie im engen Sinne: Man drückt die Eigenschaften eines Raumes (der Gruppe oder Lie-Algebra) durch eine kommutative Funktionenalgebra (mit zusätzlichen Abbildungen, welche zur Gruppenmultiplikation, der Inversen und dem neutralen Element korrespondieren) aus und läßt dann, in Verallgemeinerung davon, auch nichtkommutative Algebren zu, die ansonsten die gleichen Eigenschaften haben. Quantengruppen sind also die nichtkommutative Verallgemeinerung von Gruppen und Lie-Algebren und damit die nichtkommutative oder algebraisierte Form des gewohnten klassischen Symmetriebegriffes. Die Rolle von Quantengruppen im Rahmen der Nichtkommutativen Geometrie ist zumindest zweigeteilt: Einerseits entsprechen sie verallgemeinerten Symmetrien, andererseits bilden sie selbst einfache Modelle für Räume, die sowohl geometrische als auch quantenmechanische Strukturen aufweisen. Diese Modelle kann man auf mehrere Arten konstruieren. Betrachtet man beispielsweise die Funktionenalgebra über einer nichtabelschen Lie-Gruppe, so hat diese Algebra die Struktur einer nicht-kokommutativen Quantengruppe. Die Nichtkokommutativität entspricht der nichtabelschen Struktur der zugrundeliegenden Lie-Gruppe. Die nichtkokommutative Quantengruppe entspricht einer speziellen Mannigfaltigkeit (Lie-Gruppe) mit Krümmung. Natürlich ist diese Quantengruppe als Funktionenalgebra kommutativ. Unterzieht man nun noch ihre Multiplikation einer Deformation, so erhält man einen nichtkommutativen, nichtkokommutativen Raum. Er trägt Züge von „Quantenmechanik“(eine nichtkommutative Multiplikation) und von Geometrie (eine Krümmung). Die nichtkommutative Struktur der Quantengruppe bedeutet aber i.a. nicht, daß man diese Algebra als Quantisierung einer klassischen Observablenalgebra auffassen kann. In dieser Hinsicht realistischere Modelle erhält man durch die sogenannten Bikreuzproduktalgebren, die wir nicht im Detail erläutern wollen. Ausgangspunkt sind hierbei Kreuzproduktalgebren, die Lösungen von algebraischen Quantisierungsproblemen sind. Die Frage, wann solche Kreuzproduktalgebren Hopf-Algebren bilden, führt zur Definiton der angesprochenen Bikreuzproduktalgebren, die dann i.a. nichtkommutative, nichtkokommutative Hopf-Algebren sind. Die nichtkommutative Algebrenstruktur korrespondiert hier zur echten Quantisierung klassischer Observabler, während man die Nichtkokommutativität als Krümmung interpretiert. Interessant an solchen Modellen ist, daß die duale Bikreuzproduktalgebra wiederum eine solche Bikreuzproduktalgebra ist, wobei aber die Nichtkommutativität zur Krümmung und die Nichtkokommutativität zur quantisierten Struktur korrespondiert.

Wenngleich Spektrale Tripel und Quantengruppen beide zur Nichtkommutativen Geometrie gehören, sind Modelle, die Methoden beider Zugänge benutzen, immer noch sehr selten. Ein Grund mag darin liegen, daß die klassischen Symmetrien in der Spektralen Tripel-Formulierung des Standardmodells nach Connes als Algebren-Automorphismen implementiert sind. Trotzdem hofft man, daß sich vielleicht das Standardmodell in der Nichtkommutativen Formulierung durch spezielle Hopf-Algebren-Symmetrien auszeichnet. Solche Symmetrien könnten insbesondere den Dirac-Operator fixieren. Es gibt eine Hopf-Algebra, die wegen einer sehr ähnlichen Darstellungstheorie wie die Eichgruppe des Standardmodells als Kandidatin für eine solche Symmetrie in Frage käme. Ausgangspunkt ist die kommutative Funktionen-Hopf-Algebra $\mathcal{F}(SL(2,\mathbb{C}))$. Man betrachtet dann die deformierte Algebra $SL_q(2,\mathbb{C})$ bei $q^3 = 1$, d.h. bei einer kubischen Wurzel der Eins. Die duale endlichdimensionale Hopf-Algebra ist eine Universelle Einhüllende $U_q(sl(2,\mathbb{C}))$. Diese ist die Kandidatin für eine verallgemeinerte Symmetrie des Standardmodells. Allerdings ist diese Hopf-Algebra nicht halbeinfach und aus mathematischer Sicht relativ schwierig, obwohl der halbeinfache Teil (die Matrixalgebra $M(3,\mathbb{C}) \oplus M(2,\mathbb{C}) \oplus M(1,\mathbb{C})$) dieser Hopf-Algebra sehr nah am diskreten Teil des Standardmodells in Nichtkommutativer Formulierung ist. $SL_q(2,\mathbb{C})$ ist übrigens ein sogenanntes Quantenprinzipalbündel mit $\mathcal{F}(SL(2,\mathbb{C}))$ als Basis und der endlichdimensionalen Hopf-Algebra bei kubischer Wurzel der Eins als Strukturgruppe.

Die Implementierung dieser Symmetrie ist wie bereits gesagt allerdings bisher nicht gelungen, was auch darin begründet liegt, daß diese Hopf-Algebra eben nicht halbeinfach und deswegen technisch schwer zu behandeln ist. Natürlich ist auch keineswegs von vornherein klar, wie man solche verallgemeinerten Symmetrien in Modellen, welche auf Spektralen Tripeln beruhen, definieren soll. Hier bedarf es möglichst vieler Beispiele, um ein Gefühl für den Umgang mit diesen Symmetrien zu erlangen und an diesen Beispielen die Nützlichkeit solcher Definitionen von Symmetrie zu zeigen.

Aus dem bisher Gesagten heraus, erscheint es natürlich, da das Spektrale Tripel, welches das Standardmodell beschreibt, schon sehr kompliziert ist, auch andere wohlbekannte Räume der Nichtkommutativen Geometrie im Hinblick darauf zu untersuchen, ob sie verallgemeinerte Symmetrien besitzen oder zur Konstruktion von Hopf-Algebren und Quantengruppen benutzt werden können.

10.2 Zusammenfassung der Arbeit

Damit sind wir beim Thema und der Motivation für diese Dissertation angelangt. Der wahrscheinlich best-studierte Raum der Nichtkommutativen Geometrie dürfte der Nichtkommutative Torus sein. Dieser wird als Algebra von zwei unitären Generatoren U und V mit der Vertauschungsrelation $UV = \lambda VU$ erzeugt (er ähnelt damit in mancher Hinsicht der Heisenberg-Algebra). Für diesen ist keine Hopf-Algebren-Struktur bekannt. Man weiß jedoch, daß die Summe aus Kommutativem und Nichtkommutativem Torus eine Hopf-Algebren-Struktur trägt. Man nennt diese Summe den Quantendoppeltorus. Allerdings ist in der Literatur die Struktur dieser Hopf-Algebra nicht in einer sehr eingängigen und handhabbaren Form zu finden. Ausgangspunkt für diese Dissertation war der Wunsch, die Hopf-Algebren-Struktur des Quantendoppeltorus näher zu studieren. Außerdem stellten wir uns die Frage, ob sich der Quantendoppeltorus als Hopf-Algebra nicht als Spezialfall einer wesentlich größeren Klasse von ähnlich konstruierten Hopf-Algebren darstellen lassen könnte. Zudem interessierte uns die Frage, inwiefern der Quantendoppeltorus vielleicht eine Symmetrie des Nichtkommutativen Torus sein könnte, die über die bekannte $u(1) \times u(1)$-Symmetrie hinausgehen würde. Hieran schließt sich das Problem an, ob diese Symmetrie zu kovarianten Spektralen Tripeln führt.

Wir konnten in der Arbeit zeigen, daß der Quantendoppeltorus, der wie der Nichtkommutative Torus durch einen einzigen Deformationsparameter charakterisiert wird, tatsächlich der Spezialfall einer allgemeineren Konstruktion ist, mit deren Hilfe man eine unendliche Klasse von Hopf-Algebren definieren kann, die alle aus Nichtkommutativen n-Tori aufgebaut sind. Die Deformationsstruktur der von uns so genannten Nichtkommutativen Multi-Tori ist eine Multi-Parameterdeformation, die durch reellwertige antisymmetrische Matrizen gegeben werden, wobei die Matrizen durch Elemente einer endlichen Gruppe G indiziert werden und untereinander Abhängigkeiten aufweisen. Diese Abhängigkeiten konnten als eine Kozykelbedingung im Rahmen einer von uns definierten Gruppenkohomologie interpretiert werden. Wenngleich die Algebrenstruktur der Nichtkommutativen Multi-Tori eine relativ einfache Form besitzt (sie ist die direkte Summe von einem Kommutativen Torus und Nichtkommutativen n-Tori), so zeigt sich ihre volle Struktur erst durch Betrachtung der dualen Räume. Hier hat man eine weitaus klarere Konstruktion, die man auch in einem physikalischen Kontext interpretieren kann. Die allgemeine Struktur, aus der wir die dualen Hopf-Algebren zu den Multi-Tori herleiten konnten, ist die einer Kreuzproduktalgebra $FG \rtimes \mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$. G ist dabei eine endliche Untergruppe der

Permutationsgruppe S_n, die auf Vektoren aus $\mathbb{Z}^n$ als Permutationen der Einträge wirkt. FG bezeichnet die Gruppenalgebra, während $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ für die Funktionenalgebra über $\mathbb{Z}^n$ steht. Diese Kreuzproduktalgebra besitzt eine quantenmechanische Interpretation als die Quantisierung eines Teilchens, daß sich auf Orbits der Gruppe G in $\mathbb{Z}^n$ bewegt. Mit dieser Kreuzproduktalgebra haben wir zudem ein Beispiel für eine Multiplikator-Hopf-Algebra konstruiert (genauer gesagt auch hier wiederum eine unendliche Klasse). Da die Multi-Tori bezüglich ihrer Algebrenstruktur deformiert sind, haben wir im Dualen eine deformierte Komultiplikation vorliegen, welche $FG \rtimes \mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ nicht-kokommutativ macht. Wir haben damit den Spezialfall einer Bikreuzproduktalgebra vorliegen, also der Struktur, die sowohl Züge von Quantenmechanik als auch von Geometrie (wegen der Nichtkokommutativität) trägt.

Wie bereits oben gesagt, wird die Deformation durch Matrizen $\theta_g, g \in G$ beschrieben, wobei aus Konsistenzgründen diese Matrizen (aufgefaßt als Bilinearformen) 1-Kozykel sein müssen. Sind sie darüber hinaus triviale 1-Kozykel, so tragen die deformierten Multiplikator-Hopf-Algebren zusätzlich eine quasitrianguläre Struktur. Solche quasitriangulären Strukturen spielen eine wichtige Rolle als Lösungen der Quanten-Yang-Baxter-Gleichung und außerdem für die Braid-Gruppen-Theorie.

In der Formulierung des Standardmodells mittels der Nichtkommutativen Geometrie spielen diskrete Spektrale Tripel und damit endlichdimensionale Algebren eine wichtige Rolle. Auch aus diesem Grund ist es interessant endlichdimensionale Hopf-Algebren zu konstruieren, um sie eventuell als Symmetrien endlichdimensionaler Spektraler Tripel zu implementieren. Eine vollständige Klassifizierung von Hopf-Algebren endlicher Dimension steht noch aus. Es ist wichtig Klassen solcher Hopf-Algebren zu konstruieren. Wir haben dies (sowohl für die Multi-Tori als auch für die dualen Räume) durchgeführt, indem wir die Multiparameterdeformation bei Wurzeln der Eins betrachtet haben. Man kann damit im Prinzip unendlich viele endlichdimensionale Hopf-Algebren erzeugen. Interessanterweise kann man im Fall von Wurzeln der Eins zeigen, daß man aus den Multi-Tori die aus der Literatur sehr bekannte selbstduale 8-dim Kac-Paljutkin-Algebra erhalten kann. Auch weitere Kac-Algebren können auf die gleiche Art erzeugt werden.

Mit Hilfe von Hopf-Algebren kann man eine nichtkommutative Verallgemeinerung von Prinzipalfaserbündeln definieren. Die Rolle der Struktur- und damit der Eichgruppe wird hierbei von einer Hopf-Algebra oder (in einem topologischen Kontext) von einer Quantengruppe eingenommen. Im Rahmen der Arbeit wurde von uns die Faserbündel-Struktur der Multi-Tori untersucht. Dabei wurde von uns festgestellt, daß die Multi-Tori eine Hopf-Galois-Erweiterung des Kommutativen Torus sind. Solche Hopf-Galois-Erweiterungen sind das algebraische Analogon zu Quantenprinzipalbündeln. Wir können also die Multi-Tori als ein Quantenfaserbündel interpretieren, wobei der Kommutative Torus als Basis und eine der von uns konstruierten endlichdimensionalen Hopf-Algebren die typische Faser des Bündels bilden. Man beachte, daß die Konstruktion dieses Quantenprinzipalbündels eine gewisse Analogie zur Konstruktion des Bündels $SL_q(2,\mathbb{C})$ ist, mittels dessen dualer Faser man hofft, eine zusätzliche Symmetrie des Standardmodells zu finden.

Abschließend wurde von uns gezeigt, daß der Nichtkommutative Torus über die wohlbekannte $u(1) \times u(1)$-Symmetrie hinaus eine Hopf-Algebren-Symmetrie besitzt. Diese ist durch die duale Hopf-Algebra des Quantendoppeltorus gegeben. Allerdings muß man feststellen, daß diese Symmetrie nicht zu kovarianten (oder äquivarianten) Spektralen Tripeln führt, da beispielsweise die Annahme einer solchen Symmetrie im Widerspruch zur geforderten Existenz einer Graduierung für das Spektrale Tripel des Nichtkommutativen Torus führt. Interessant an dieser Hopf-Algebren-Symmetrie ist, daß sie (im Gegensatz zur $u(1) \times u(1)$-Symmetrie) sensitiv bezüglich des Deformationsparameters im Nichtkommutativen Torus ist.

10.3 Ausblick

In dieser Arbeit sind einige Punkte übrig geblieben, die zu bearbeiten durchaus interessant sein könnte. An erster Stelle wäre die Frage, ob man zu den endlichdimensionalen Algebren, die in dieser Arbeit konstruiert wurden, invariante Spektrale Tripel konstruieren kann. Man könnte beispielsweise versuchen, die Duale zu einer solchen endlichdimensionalen Algebra als Symmetrie zu implementieren. Aufgrund der vollständigen Klassifizierung der diskreten Spektralen Tripel sollte man hier zu definitiven Aussagen über die Existenz (oder Nicht-Existenz) einer solchen Symmetrie kommen können. Ein weiterer Punkt, der von uns nicht behandelt wurde, ist die Konstruktion der sogenannten bikovarianten Differentialkalküle. Generell könnte man auch versuchen durch andere Definitionen von Symmetrie bestimmte Spektrale Tripel des Nichtkommutativen Torus auszuzeichnen oder den Dirac-Operator zu fixieren. Ein sicherlich interessantes Unterfangen wäre die Ausarbeitung unserer Faserbündel in Bezug auf assoziierte Vektorbündel und auf Quanten-Riemann-Geometrie, in deren Mittelpunkt der Begriff des Rahmenbündels steht.

Zum Schluß wollen wir noch ein wenig von dem speziellen Thema dieser Dissertation zurücktreten und überlegen in welche Richtung man Nichtkommutative Geometrie und Quantengruppen-Theorie ausbauen könnte. Man kann den Standpunkt einnehmen, daß sowohl der Zugang zu Nichtkommutativer Geometrie nach Connes, der das Spektrale Tripel in den Mittelpunkt stellt, als auch der Quantengruppen-Zugang, der naturgemäß stärker an Symmetrien orientiert ist, nur Hinweise liefern, wie eine richtige und weitaus allgemeinere Nichtkommutative Geometrie aussehen müßte, in der Quantengruppen und Spektrale Tripel eher als Spezialfälle enthalten sind.

Mit der mathematischen Frage nach einer übergeordneten Theorie von Nichtkommutativer Geometrie zusammenhängend ist die physikalische Frage, wie eigentlich die Quantenmechanik in diesen Rahmen paßt. Entgegen mancher recht oberflächlicher Aussagen in der Literatur, ist die Quantenmechanik keineswegs Nichtkommutative Geometrie. Natürlich benutzt man dort auch Operatoralgebren und Hilbert-Räume, aber der Übergang von Klassischer Mechanik zu Quantenmechanik hat wenig mit dem Konzept der Nichtkommutativen Geometrie zu tun. Nach diesem Konzept müßte man die vollständige geometrische Struktur der Klassischen Mechanik in Form oder auf der Stufe einer Funktionenalgebra kodieren und diese dann deformieren.

Erst recht fehlt natürlich eine Formulierung des Standardmodells mittels Nichtkommutativer Geometrie auf der Stufe einer Quantenfeldtheorie.

Von der Lösung dieser (und natürlich vieler weiterer Punkte) wird es abhängen, ob man mit Methoden der Nichtkommutativen Geometrie zu einer besseren Formulierung des Standardmodells (unter Einbeziehung der Gravitation) gelangt, die auch Vorhersagekraft besitzt, oder ob Nichtkommutative Geometrie und Quantengruppen-Theorie nur für gewisse spezielle Modelle und enge Teilbereiche eine gewisse Nützlichkeit besitzt.

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1978.

[2] N. Andruskiewitsch. About finite dimensional Hopf algebras. 2000.

[3] A. Ashtekar and R. S. Tate. An algebraic extension of Dirac quantization. *J. Math. Phys.*, 35, 1994.

[4] J. Bellisard, A. van Elst, and H. Schulz-Baldes. The noncommutative geometry of the quantum Hall effect. *J. Math. Phys.*, pages 5373–5451, 1994.

[5] T. Brzezinski and S. Majid. Quantum group gauge theory on quantum spaces. *Comm. Math. Phys.*, 1994.

[6] R. J. Budzynski and W. Kondrcki. Quantum Principal Fibre Bundles: Topological Aspects. *hep-th/9401019*, 1994.

[7] A. Chamseddine and A. Connes. The spectral action principle. *Comm. Math. Phys.*, 186:731–750, 1997.

[8] V. Chari and A. Pressley. *Quantum Groups*. Cambridge University Press, 1994.

[9] A. Connes. *Noncommutative Geometry*. Acad. Press, San Diego, 1994.

[10] A. Connes. Gravity coupled with matter and foundation of noncommmutative geometry. *Comm. Math. Phys.*, (182):155–176, 1996.

[11] A. Connes and D.Kreimer. Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry. *Comm. Math. Phys.*, 1998.

[12] A. Connes and D.Kreimer. Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem I: the Hopf algebra structure of graphs and the main theorem. *Comm. in Math. Phys.*, 2000.

[13] A. Connes and D.Kreimer. Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem II: the ß-function, diffeomorphisms and the renormalization group of graphs and the main theorem. *hep-th/0003188, IHES, Bures-sur-Yvette*, 2000.

[14] A. Connes and H. Moscovici. Cyclic cohomology and Hopf symmetry. *math/0002125*, 2000.

[15] R. Coquereaux, G. Esposito-Farese, and F. Scheck. Noncommutative Geometry and graded algebras in electroweak interactions. *J. Mod. Phys. A 7*, 1992.

[16] R. Coquereaux, A. O. Garcia, and R. Trinchero. Finite dimensional quantum group covariant differential calculus on a complex matrix algebra. *math.QA/9804021*, 1998.

[17] R. Coquereaux, A. O. Garcia, and R. Trinchero. Associated quantum vector bundles and symplectic structure on a quantum plane. *math-ph/9908007*, 1999.

[18] R. Coquereaux, A. O. Garcia, and R. Trinchero. Hopf stars, twisted Hopf stars and scalar products on quantum spaces. *math-ph/9904037*, 1999.

[19] A. Van Daele. Discrete Quantum Groups. *Journal of Algebra*, (180):431–444, 1996.

[20] M. de Wild Propitius. *Topological interactions in broken gauge theory, school = Amsterdam.* PhD thesis, 1995.

[21] M. de Wild Propitius and F. A. Bais. Discrete Gauge Theories. hep-th/9511201.

[22] M. Debert. *Quantengruppen und Hopf-Algebren in Anwendung auf diskrete Eichtheorien und universell Einhüllende Lie-Algebren. Diplomarbeit.* Gutenberg-Universität Mainz, 1999.

[23] M. Debert, M. Paschke, and A. Sitarz. Multiple Noncommutative Tori and Hopf Algebras. *Communications in Algebras*, 2003.

[24] M. S. Dijkhuizen and T. H. Koornwinder. CQG algebras : a direct algebraic approach to quantum groups. *Lett. Math. Phys.*, (32):315–330, 1994.

[25] Y. Doi and M. Takeuchi. Cleft comodule algebras for a bialgebra. *Comm. in Alg.*, 14:801–817, 1986.

[26] S. Doplicher, K. Fredenhagen, and J. E. Roberts. The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields. *Commun. Math. Phys.*, 172:187–220, 1995.

[27] M. Durdevich. Geometry of Quantum Principal Bundles I. *Comm. in Math. Physics*, 175:457–521, 1996.

[28] M. Durdevich. Geometry of Quantum Principal Bundles II. *Reviews in Math. Phys.*, 9(5):531–607, 1997.

[29] M. Enock and J.-M. Schwartz. *Kac algebras and duality of locally compact groups.* Springer, 1992.

[30] I. M. Gelfand and M. A. Naimark. On the embedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space. *Mat. Sbornik*, (12):197–213, 1943.

[31] M. Goeckeler and T. Schuecker. Does noncommutative geometry encompass lattice gauge theory? *Phys.Lett. B*, (80), 1998. hep-th/9805077.

[32] P. Hajac and T. Masuda. Quantum double torus. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. Math.*, 327(6):553–558, 1998.

[33] A. Heil, N. A. Papadopoulos, B. Reifenhauser, and F. Scheck. Scalar matter field in a fixed point compactified five dimensional Kaluza-Klein theory. *Nuclear Physics B*, (281):426–444, 1987.

[34] A. Holfter. *Elemente der Nichtkommutativen Geometrie, Diplomarbeit.* Gutenberg-University, Mainz, 1999.

[35] R. Häußling, N. A. Papadopoulos, and F. Scheck. su(2/1) symmetry, algebraic superconnections and a generalized theory of electroweak interactions. *Phys. Lett. B 260*, 1991.

[36] C. J. Isham. Topological and Global Aspects of Quantum Theory. In *Relativity, groups and topology II*, Les Houches, Session XL. 1983.

[37] J. M. Gracia-Bondia and J. C. Varilly and H. Figueroa. *Elements of Noncommutative Geometry.* Birkhäuser, 2000.

[38] A. Joseph. Derivations of Lie brackets and canonical quantization. *Comm. Math. Phys.*, 1970.

[39] G. I. Kac and V.G. Paljutkin. An example of a ring group of order eight. *Soviet Math. Surveys*, 1965.

[40] C. Kassel. *Quantum Groups.* Springer, 1994.

[41] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry vol I.* New York: Interscience, 1963.

[42] D. Kreimer. On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 1998.

[43] J. Kustermans and S. Vaes. Locally compact quantum groups. *Preprint*, 1999.

[44] G. W. Mackey. *Induced Representations.* Benjamin, New York, 1968.

[45] A. Maes and A. van Daele. Notes on Compact Quantum Groups. *math.FA/9803122*, 1998.

[46] S. Majid. *Foundations of Quantum Group Theory*. Cambridge University Press, 1995.

[47] S. Majid. Quantum and braided group Riemannian geometry. *J. Geom. Phys.*, pages 113–146, 1999.

[48] S. Majid and T. Schucker. $Z_2 \times Z_2$ Lattice as a Connes-Lott-Quantum Group Model. hep-th/0101217, 2001.

[49] P. J. McCann. *Geometry and the integer quantum Hall effect*. Cambridge Univ. Press, 1997.

[50] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics Publishing, 1990.

[51] M. Paschke. *Über nichtkommutative Geometrien, ihre Symmetrien und etwas Hochenergiephysik*. PhD thesis, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2001.

[52] M. Paschke and A. Sitarz. The geometry of noncommutative symmetries. 2000.

[53] M. Reuter. Quantum Mechanics as a Gauge Theory of Metaplectic Spinor Fields. *Int. J. Mod. Phys.*, A(13):3835, 1998. hep-th/9804036.

[54] M. Reuter. Symplectic Dirac-Kähler-Fields, 1999. hep-th/9910085.

[55] T. Schilling. *Geometry of Quantum Mechanics*. PhD thesis.

[56] Y. Sekine. An example of finite dimensional Kac algebras of Kac-Paljutkin type. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124(4), 1996.

[57] A. Sitarz. Equivariant Spectral Triples.

[58] J. Sladkowski. Generalized G-Theory. *Int. J. Theo. Phys.*, (30):517–520, 1991.

[59] R. G. Swan. Vector bundles and projective modules, 1962.

[60] M. Sweedler. *Hopf Algebras*. W.A. Benjamin, Inc, 1969.

[61] A. Trautmann. *Differential Geometry for Physicists*. Stony Brook Lectures.

[62] S. Vaes and A. Van Daele. Hopf-C*-algebras. arxiv:math.QA/9907030, 1999.

[63] L. Vainerman. 2-Cocycles and Twisting of Kac Algebras. *Comm. Math Phys.*, 191(3), 1998.

[64] A. van Daele. Multiplier Hopf Algebras. 1994.

[65] A. van Daele. The Haar Measure on a Compact Quantum Group. Number 123, pages 3125–3128. Proc. Amer. Math. Soc., 1995.

[66] J. C. Varilly. Hopf Algebras in Noncommutative Geometry. *hep-th/0109077*, 2001.

[67] N. E. Wegge-Olsen. *K-theory and C*-algebras - a friendly approach.* Oxford Univ. Press, 1993.

[68] H. Weyl. *The theory of groups and quantum mechanics.* Dover Publications, 1931.

[69] S. L. Woronowicz. Compact Quantumgroups. University of Warszawa.

[70] S. L. Woronowicz. A remark on Compact Matrix Quantumgroups. *Lett. Math. Phys.*, 1991.

[71] S.L. Woronowicz. Compact Matrix Pseudogroups. *Comm. Math. Phys.*, 1987.

Index