





Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

TESE DE DOUTORADO

IFT-T.001/01

OK

QUANTIZAÇÃO A BAIXAS FREQUÊNCIAS DE CAMPOS BOSÔNICOS  
NO ESPAÇO-TEMPO DE SCHWARZSCHILD E APLICAÇÕES

*Luís Carlos Bassalo Crispino*



Orientador:

*Prof. Dr. George Emanuel Avraam Matsas*

São Paulo

— Fevereiro 2001 —

177-1-000-00

177-1-000-00

QUINTAS E SEITAS REFEIÇÕES DE CAMPO ECONÔMICAS  
DO INSTITUTO DE PESQUISAS E DESENVOLVIMENTO TECNOLÓGICO  
177-1-000-00

177-1-000-00



A Ângela e Isabela.

## Agradecimentos

Ao Prof. Dr. George E. A. Matsas pela sua orientação segura e competente, pela solicitude, compreensão e disponibilidade durante a realização deste projeto. Obrigado também pela oportunidade de colaborar em alguns trabalhos e pela possibilidade de colaborar em vários outros no futuro.

Ao Prof. Dr. Atsushi Higuchi, pela colaboração que muito me ensinou e cujos frutos ainda deverão ser colhidos por muito tempo.

A todos os professores, funcionários e alunos do IFT, sempre solícitos e dispostos a colaborar.

À Universidade Federal do Pará, em especial a todos os colegas do Departamento de Física, por esta oportunidade.

Ao Prof. Dr. José M. F. Bassalo, por todo o apoio, desde minha infância, determinante para minha vocação.

Ao Prof. Bruto M. P. Escobar, por ter ajudado para que o período de realização deste trabalho não tivesse sido comprometido por questões burocráticas.

Ao Prof. Dr. Cristovam W. P. Diniz, por sua visão acadêmica ampla.

Ao Matsas, pela amizade e companheirismo, e por ter sido em quem, por muitas vezes, identifiquei a figura de um *irmão mais velho*.

Aos amigos de muito tempo e hoje colegas de Departamento Sérgio, Van e Marcelo, pelo interesse que demonstraram para com este trabalho e pela perspectiva de colaboração futura.

Ao Castiñeiras, pela amizade fraterna e por sempre estar disposto a ajudar, seja no trabalho, ou no resto da vida.

Ao Daniel, pelo companheirismo e boa vontade. Foi bom tê-lo por perto durante estes anos no IFT.

Ao Clisthenis, pela amizade e por ter voltado minha atenção para o IFT e para o George Matsas.

Aos companheiros de *galpão*: Paulo, Sérgio, Randall, Sandro, Érica, Alejandro, Iraida, Marcelo, Carlos, Maurício, Prakash e Marcos; pela convivência agradável.

A Ângela, meu referencial, obrigado pelo apoio, incentivo, compreensão, companheirismo e tantas outras coisas sem as quais viver seria muito mais difícil.

A Isabela, minha menina, por me presentear com um novo mundo e com uma nova percepção da vida. Obrigado por me tornar mais humano.

Aos meus pais, Pedro e Maria José, pelo apoio total e incondicional. Quisera eu que muitos tivessem a felicidade de ter pais como os meus.

Aos meus irmãos que, mesmo distantes, sempre estiveram presentes.

Aos queridos Mateus, Marina e Isabela, por alegrarem minha vida e por me ensinarem muitas novas maneiras de aprender.

A minha querida Belém, o meu Norte, para onde minha *bússola natural* sempre esteve indicando.

A CAPES, através do programa PICDT, pelo suporte financeiro.

A todas as pessoas que direta e indiretamente colaboraram e/ou incentivaram a realização deste trabalho.

## Resumo

Neste trabalho discutimos a quantização dos campos escalar e vetorial, com massa nula, no espaço-tempo de um buraco negro estático sem carga e realizamos algumas aplicações. Primeiramente analisamos a radiação emitida por uma carga escalar girando ao redor de um buraco negro de Schwarzschild, tanto numericamente quanto analiticamente no limite de baixas frequências. Obtemos que, para as órbitas circulares estáveis mais internas possíveis segundo a Relatividade Geral, a potência emitida é cerca de 20 a 30% menor do que a obtida no espaço-tempo de Minkowski, calculada utilizando duas diferentes possibilidades para descrever a interação gravitacional no espaço-tempo plano. Investigamos também a taxa de resposta de uma carga elétrica estática no espaço-tempo de Schwarzschild interagindo com fótons da radiação Hawking. Encontramos um resultado finito para esta taxa de resposta, que é calculada exatamente, em contraste com o resultado divergente no caso de uma carga elétrica uniformemente acelerada no espaço-tempo de Minkowski. Concluimos que a igualdade encontrada entre a taxa de resposta de uma carga escalar estática interagindo (i) com a radiação Hawking no espaço-tempo de Schwarzschild e (ii) com o banho térmico de Fulling-Davies-Unruh no espaço-tempo de Rindler não se verifica para o caso de uma carga elétrica.

Palavras chave: Teoria Quântica de Campos, espaços-tempos curvos, buraco negro, radiação eletromagnética, radiação escalar, radiação Hawking.

Áreas de conhecimento: 1.05.01.02-9, 1.05.01.03-7, 1.05.02.01-7, 1.05.03.01-3.



# Abstract

In the present work we discuss the quantization of the massless scalar and vector fields in the spacetime of a chargeless static black hole and some associated applications. First we analyze the scalar radiation emitted from a source rotating around a Schwarzschild black hole both numerically and analytically in the low-frequency limit. We obtain that as the source approaches the innermost stable circular orbit according to General Relativity the emitted power is about 20 to 30% smaller than what would be obtained in Minkowski spacetime, where we use two different assumptions to describe the gravitational interaction in the later case. Next, we investigate the response rate of a static electric charge interacting with photons from Hawking radiation. We find a finite result for this response rate, which is computed exactly, in contrast with the divergent result associated with the infrared catastrophe obtained for the case of an electric charge uniformly accelerated in Minkowski spacetime. We conclude that the equality found for the response rate of a static scalar source interacting with (i) Hawking radiation in Schwarzschild spacetime and with (ii) the Fulling-Davies-Unruh thermal bath in Rindler spacetime does not hold for electric charges.

Keywords: Quantum field theory, curved spacetimes, black hole, electromagnetic radiation, scalar radiation, Hawking radiation.

# Conteúdo

1	Introdução	9
2	Quantização do campo de Klein-Gordon na geometria de Schwarzschild no limite de baixas frequências	13
2.1	Equação de Klein-Gordon em Schwarzschild: Determinação dos modos normais	14
2.2	Forma assintótica normalizada dos modos $u_{\omega l m}$	20
2.3	Normalização dos modos no limite de baixas frequências	22
3	Radiação escalar emitida por uma fonte girando ao redor de um objeto estelar	26
3.1	Cálculo usando a TCC em Minkowski, assumindo Gravitação Newtoniana	27
3.2	Cálculo usando a TQC em Minkowski, assumindo Gravitação Newtoniana	36
3.3	Cálculo usando a TQC em Minkowski, assumindo grávitons	43
3.4	Cálculo usando a TQC em Schwarzschild, assumindo Relatividade Geral	47
3.4.1	A relação entre $R_S$ e $\Omega$ , segundo a Relatividade Geral	49
3.4.2	Cálculo numérico da potência irradiada	51
3.4.3	Cálculo da potência irradiada na aproximação de baixas frequências	53
3.5	Análise e comparação dos resultados deste capítulo	56
4	Quantização do campo eletromagnético na geometria de Schwarzschild no limite de baixas frequências	64
4.1	Soluções Clássicas	65



4.2	Soluções Clássicas no gauge de Lorenz . . . . .	72
4.3	Quantização Canônica . . . . .	74
4.4	Determinação das constantes de normalização no limite de baixas frequências . .	81
5	<b>Quantização do campo eletromagnético no espaço-tempo de Minkowski e aplicações</b>	<b>85</b>
5.1	Quantização no espaço-tempo de Minkowski com coordenadas cartesianas . . . .	86
5.2	Quantização no espaço-tempo de Minkowski com coordenadas esféricas . . . . .	88
5.3	Emissão de fótons por uma carga uniformemente acelerada no espaço-tempo de Minkowski . . . . .	90
5.4	Cálculo da função de dois pontos $G_{\mu\nu\alpha\beta}$ . . . . .	93
5.5	Dipolo elétrico oscilante no espaço-tempo de Minkowski na presença de um banho térmico . . . . .	97
6	<b>Interação entre radiação Hawking e uma carga elétrica estática</b>	<b>100</b>
6.1	Radiação emitida por cargas aceleradas segundo a TQC . . . . .	100
6.2	A corrente associada à carga elétrica estática . . . . .	104
6.3	Carga elétrica estática fora de um buraco negro de Schwarzschild no vácuo de Unruh . . . . .	106
7	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>114</b>
A	<b>Dedução da equação (6.28)</b>	<b>117</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Três das quatro interações fundamentais da natureza, a eletromagnética, a nuclear fraca e a nuclear forte, têm seu grande sucesso calcado em sua elaboração como teorias quânticas de campos desenvolvidas no espaço-tempo plano de Minkowski. Tais teorias foram e continuam a ser experimentalmente comprovadas com grande precisão.

A interação gravitacional é explicada de maneira bastante elegante e precisa através da Relatividade Geral einsteiniana, também testada com uma exatidão que nada deixa a desejar às teorias das demais interações, tratando-se em sua essência de uma teoria clássica de campos, que descreve a interação gravitacional através da curvatura do espaço-tempo.

Apesar de inúmeras terem sido as tentativas de se quantizar a gravitação, a Física ainda aguarda por uma teoria quântica de campos que venha incrementar a Relatividade Geral de maneira completa e que possa ser experimentalmente comprovada.

Enquanto alguns físicos empenharam-se na busca de uma gravitação quântica, outros dedicaram-se a elaborar uma teoria surgida da combinação dos ingredientes fundamentais da Teoria Quântica de Campos e da Relatividade Geral, que ficou conhecida como Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos (TQCEC) [1, 2]. A TQCEC dedica-se a investigar as consequências de se definir uma teoria quântica de campos para a matéria e suas interações sobre um espaço-tempo curvo clássico subjacente. Apesar de se tratar de uma teoria efetiva, incapaz de descrever fenômenos físicos em regimes extremos, como na escala de Planck, a TQCEC tem sido responsável pela predição de importantes efeitos, como a criação de partículas em uni-

versos em expansão [2], a radiação térmica obtida para observadores acelerados [3, 4] (efeito Fulling-Davies-Unruh), e a evaporação de buracos negros ocasionada por efeitos quânticos [5] (radiação Hawking), este último em total contraste com as predições clássicas.

Sob o ponto de vista de ser uma teoria efetiva, um desenvolvimento equivalente à TQCEC pode ser encontrado na Física antes do advento da Eletrodinâmica Quântica (EDQ). Previamente ao desenvolvimento da quantização do campo de Maxwell em Minkowski, realizavam-se cálculos semiclássicos nos quais o campo do elétron (descrito pela equação de Dirac) era quantizado, mas o campo do fóton era considerado como clássico. Naquele contexto semiclássico puderam-se obter resultados que estão em completo acordo com a EDQ [6].

Em espaços-tempos planos a invariância de Lorentz garante uma caracterização coerente dos estados quânticos de um sistema físico. Tal simetria garante a existência de um estado de vácuo quântico preferencial, que é o estado no qual todos os observadores inerciais concordam com a ausência de partículas, conhecido como vácuo de Minkowski. No entanto, um espaço-tempo curvo não possui a simetria de Lorentz global. No caso de espaços-tempos estacionários, que possuem um campo de Killing tipo tempo global, ainda podemos selecionar os estados quânticos de forma análoga e conseqüentemente extrair o conteúdo de partículas da teoria.

No espaço-tempo de Minkowski temos na verdade dois campos de Killing tipo tempo, o campo de Killing associado a observadores estáticos e outro associado a observadores uniformemente acelerados neste espaço-tempo. Isto nos permite selecionar dois conjuntos distintos de estados quânticos no espaço-tempo plano, permitindo inclusive a definição de dois estados de vácuo, o vácuo de Minkowski definido acima e o chamado vácuo de Rindler. É esta dupla possibilidade que nos capacita dizer que um detector uniformemente acelerado no vácuo de Minkowski com aceleração própria constante  $\alpha$ , comporta-se como se estivesse em um banho térmico de partículas com temperatura  $\alpha/2\pi$ , no sistema natural de unidades, no qual  $c = G = \hbar = k_B = 1$ , que será adotado ao longo de todo este trabalho. Este é essencialmente o efeito Fulling-Davies-Unruh.

No caso do espaço-tempo de Schwarzschild temos apenas um campo de Killing tipo



tempo, que é aquele associado a observadores estáticos nesta geometria, *i.e.*, observadores parados fora do horizonte de eventos do buraco negro. O estado de vácuo natural para estes observadores é o vácuo de Boulware, que é definido como sendo o estado quântico no qual tais observadores não *vêem* partículas. (A definição formal dos estados de vácuo mencionados aqui será apresentada ao longo deste trabalho.) É com relação a estes observadores que a quantização dos campos bosônicos escalar e vetorial sem massa é desenvolvida na literatura e nesta tese.

Uma das dificuldades na quantização dos campos bosônicos na geometria de Schwarzschild está na determinação dos modos normais associados a estes campos. Mais precisamente, na determinação da forma analítica da função radial destes modos. Pelo fato destas funções não poderem ser escritas em termos de expressões analíticas previamente existentes na literatura, teremos que ou determiná-las numericamente, ou determiná-las dentro de certas aproximações, como no limite assintótico ou no limite de baixas frequências, que caracteriza o título deste trabalho. Mesmo no limite de baixas frequências, podemos aplicar as aproximações encontradas aqui em vários fenômenos físicos, ora obtendo resultados aproximados, como no caso da radiação emitida por uma carga escalar (que chamaremos aqui de fonte) girando ao redor de um buraco negro, ora obtendo resultados exatos, como no caso da radiação emitida por uma carga parada fora de um buraco negro. Além disso, de posse deste resultado exato, podemos compará-lo com o obtido por uma carga uniformemente acelerada em Minkowski, e averiguar se existe algum tipo de equivalência quântica entre os mesmos.

A quantização do campo escalar na geometria de um buraco negro estático sem carga será revisitada no capítulo 2. No capítulo 3 calcularemos a radiação escalar emitida por uma fonte girando ao redor de um corpo estelar, usando várias abordagens, culminando com a aplicação dos resultados obtidos no capítulo 2 para calcular numericamente e analiticamente (este último na aproximação de baixas frequências) a radiação emitida por uma fonte girando ao redor de um buraco negro. A quantização do campo eletromagnético no espaço-tempo de Schwarzschild será apresentada no capítulo 4, utilizando a quantização canônica e o método de Gupta-Bleuler adaptados para o espaço-tempo exterior ao horizonte de eventos de um buraco

negro. Determinaremos a normalização dos modos relevantes do campo do fóton no limite de baixas frequências. No capítulo 5 utilizaremos o mesmo procedimento do capítulo 4 para quantizar o campo de Maxwell no espaço-tempo plano e realizar algumas aplicações que comprovam a consistência de nosso desenvolvimento, além de rediscutir o problema da radiação emitida por uma carga elétrica uniformemente acelerada em Minkowski. A emissão de radiação por uma carga elétrica parada fora de um buraco negro de Schwarzschild é calculada no capítulo 6 e comparada com o resultado obtido no caso de uma carga uniformemente acelerada em Minkowski com a mesma aceleração própria. No capítulo 7 faremos nossos comentários finais e apresentaremos nossas conclusões.

Em todo este trabalho estaremos adotando o sistema natural de unidades, no qual  $c = G = \hbar = k_B = 1$ , bem como a assinatura  $(+, -, -, -)$ .



## Capítulo 2

# Quantização do campo de Klein-Gordon na geometria de Schwarzschild no limite de baixas frequências

Neste capítulo revisitaremos a quantização do campo escalar sem massa no espaço-tempo de um buraco negro estático sem carga [7].

Na seção 2.1 determinaremos os modos normais e apresentaremos a quantização canônica do campo escalar. Os modos serão normalizados nas regiões assintóticas (muito próximo e muito distante do horizonte de eventos do buraco negro) na seção 2.2. Na seção 2.3 obteremos a normalização dos modos na aproximação de baixas frequências.

Os resultados obtidos aqui serão utilizados no capítulo seguinte, onde estudaremos a emissão de radiação por uma fonte girando em torno de um buraco negro de Schwarzschild. O processo de quantização do campo escalar em Schwarzschild antecipa vários aspectos envolvidos na quantização do campo de Maxwell na mesma geometria, que será desenvolvido no capítulo 4 desta tese.

## 2.1 Equação de Klein-Gordon em Schwarzschild: Determinação dos modos normais

Um buraco negro estático e sem carga, com massa  $M$ , é descrito pelo elemento de linha de Schwarzschild, a saber

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = f(r) dt^2 - f(r)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 , \quad (2.1)$$

onde  $f(r) = 1 - 2M/r$ .

A menos quando especificarmos o contrário, estaremos utilizando ao longo de todo este trabalho a convenção de soma de Einstein, pela qual índices repetidos estarão sempre sendo somados.

De (2.1), obtemos as componentes da métrica em questão, nas coordenadas polares esféricas definidas acima, como sendo

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(f, -f^{-1}, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta) . \quad (2.2)$$

Consideremos nesta geometria um campo escalar não-massivo livre,  $\phi(x^\mu)$ , cuja ação clássica invariante é dada por

$$S = \int d^4x \mathcal{L} , \quad (2.3)$$

onde

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-g}}{2} (\nabla^\mu \phi)(\nabla_\mu \phi) \quad (2.4)$$

é a densidade de lagrangiana e  $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ , de forma que  $d^4x \sqrt{-g}$  é o elemento de volume (quadridimensional) invariante do espaço-tempo de Schwarzschild.

A equação dinâmica de Euler-Lagrange, obtida pelo princípio da ação extrema,

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} \equiv \frac{\partial S}{\partial \phi} - \nabla_\mu \left( \frac{\partial S}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \right) = 0 , \quad (2.5)$$

é a equação de Klein-Gordon homogênea

$$\square \phi = \nabla^\mu \nabla_\mu \phi = 0 . \quad (2.6)$$

Os modos de frequência positiva com relação ao campo de Killing tipo tempo  $\partial_t$ ,

$$u_{\omega lm}(x^\mu) \propto e^{-i\omega t} \quad (\omega > 0) , \quad (2.7)$$

são soluções da equação de Klein-Gordon homogênea no espaço-tempo de Schwarzschild, que pode ser escrita como [8]

$$\square u_{\omega lm} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial u_{\omega lm}}{\partial x^\nu} \right] = 0 . \quad (2.8)$$

Usando (2.2), podemos reescrever (2.8) como

$$\square u_{\omega lm} = \left[ \frac{1}{f} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 f \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \tilde{\nabla}^2 \right] u_{\omega lm} = 0 , \quad (2.9)$$

onde

$$\tilde{\nabla}^2 \equiv -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{(\sin \theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} . \quad (2.10)$$

Em um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico, como é o caso do espaço-tempo de Schwarzschild, os modos  $u_{\omega lm}(x^\mu)$  podem ser escritos na forma

$$u_{\omega lm}(x^\mu) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \frac{\psi_{\omega l}^S(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} \quad (\omega > 0) , \quad (2.11)$$

com o fator  $\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}$  introduzido por conveniência. Usando (2.11) e que

$$\tilde{\nabla}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = +l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (2.12)$$

em (2.9), obtemos a equação diferencial a ser satisfeita pela função radial  $\psi_{\omega l}(r)$ , a saber

$$\left[ -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 f \frac{d}{dr} \right) - \frac{\omega^2}{f} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \left( \frac{\psi_{\omega l}^S(r)}{r} \right) = 0 , \quad (2.13)$$

ou ainda

$$\left[ -f(r) \frac{d}{dr} \left( f(r) \frac{d}{dr} \right) + V_S(r) \right] \psi_{\omega l}^S(r) = \omega^2 \psi_{\omega l}^S(r) , \quad (2.14)$$

com o seguinte potencial de *espalhamento* (vide figura 3.1):

$$V_S(r) = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left[ \frac{2M}{r^3} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] . \quad (2.15)$$

Em termos da coordenada adimensional de Wheeler

$$x \equiv \frac{r}{2M} + \ln \left( \frac{r}{2M} - 1 \right) , \quad (2.16)$$

a equação (2.14) pode ser reescrita como

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + 4M^2 V_S[r(x)] \right] \psi_{\omega l}^S = 4M^2 \omega^2 \psi_{\omega l}^S . \quad (2.17)$$

Para ortonormalizar os modos  $u_{\omega l m}(x^\mu)$ , lançamos mão da definição do produto interno de Klein-Gordon [2], a saber

$$\sigma_{KG}(\phi_1, \phi_2) \equiv i \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma^{(3)\mu} \left[ \phi_1^* \pi_{2\mu} - \pi_{1\mu}^* \phi_2 \right] , \quad (2.18)$$

com  $d\Sigma^{(3)\mu} \equiv d\Sigma^{(3)} n^\mu$ , onde  $d\Sigma^{(3)} \equiv \sqrt{-g^{(3)}} d^3x$  é o elemento de (tri)volume invariante da superfície de Cauchy<sup>1</sup>  $\Sigma^{(3)}$ ,  $n^\mu$  é o vetor unitário ortogonal à superfície tipo espaço  $\Sigma^{(3)}$ , direcionado para o futuro, e  $g^{(3)}$  é o determinante da métrica restrita a  $\Sigma^{(3)}$ . Além disso

$$\pi_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla^\mu \phi)} . \quad (2.19)$$

Usando-se (2.4), obtemos

$$\pi_\mu \equiv \nabla_\mu \phi , \quad (2.20)$$

de forma que  $\pi_{1\mu} = \nabla_\mu \phi_1$  e  $\pi_{2\mu} = \nabla_\mu \phi_2$ , e podemos reescrever (2.18) como

$$\sigma_{KG}(\phi_1, \phi_2) = i \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma^{(3)\mu} \left[ \phi_1^* (\nabla_\mu \phi_2) - (\nabla_\mu \phi_1^*) \phi_2 \right] . \quad (2.21)$$

O momento clássico  $\pi(x^\lambda)$  conjugado ao campo  $\phi(x^\lambda)$ , é definido como

$$\pi \equiv n^\mu \pi_\mu , \quad (2.22)$$

onde  $n^\mu$  é o versor normal definido acima. Note-se que o momento  $\pi$  é um escalar. No caso desenvolvido aqui  $\pi = n^\mu \nabla_\mu \phi$  é a derivada de  $\phi$  na direção do versor  $n^\mu$ .

---

<sup>1</sup>Uma superfície de Cauchy em uma variedade é um conjunto fechado acronal cujo domínio de dependência é toda a variedade em questão. No espaço-tempo de Minkowski, *e.g.*,  $t = \text{constante}$  constitui uma superfície de Cauchy.



Definindo-se a corrente

$$j^\mu(\phi_1, \phi_2) \equiv \phi_1^* \pi_2^\mu - \pi_1^{\mu*} \phi_2 = \phi_1^* (\nabla^\mu \phi_2) - (\nabla^\mu \phi_1^*) \phi_2 , \quad (2.23)$$

pode-se ainda reescrever o produto interno (2.18) como

$$\sigma_{KG}(\phi_1, \phi_2) = i \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma^{(3)\mu} j_\mu(\phi_1, \phi_2) . \quad (2.24)$$

Vale ressaltar que, desde que  $\phi_1$  e  $\phi_2$  satisfaçam a equação de Klein-Gordon,  $\square\phi_1 = \square\phi_2 = 0$ , a corrente (2.23) é conservada, *i.e.*,

$$\nabla^\mu j_\mu(\phi_1, \phi_2) = \nabla^\mu [\phi_1^* (\nabla_\mu \phi_2) - (\nabla_\mu \phi_1^*) \phi_2] = 0 . \quad (2.25)$$

Vamos agora mostrar que, para o caso em que  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são soluções da equação de Klein-Gordon (2.6), o produto interno  $\sigma_{KG}(\phi_1, \phi_2)$  definido em (2.18) é independente da escolha da superfície  $\Sigma^{(3)}$ , *i.e.*,

$$\sigma_{KG}(\phi_1, \phi_2)_{\Sigma_1} = \sigma_{KG}(\phi_1, \phi_2)_{\Sigma_2} , \quad (2.26)$$

sendo  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  duas superfícies diferentes que não se interceptam. Para provar isso, suponhamos que  $V$  seja um quadrivolume limitado por  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , e por fronteiras tipo tempo nas quais  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ . Podemos então escrever

$$\sigma_{KG}(\phi_1, \phi_2)_{\Sigma_2} - \sigma_{KG}(\phi_1, \phi_2)_{\Sigma_1} = i \oint_{\partial V} d\Sigma^{(3)\mu} j_\mu(\phi_1, \phi_2) , \quad (2.27)$$

onde fizemos uso de (2.24). Usando agora a versão quadridimensional do teorema de Gauss, podemos reescrever (2.27) como

$$\sigma_{KG}(\phi_1, \phi_2)_{\Sigma_2} - \sigma_{KG}(\phi_1, \phi_2)_{\Sigma_1} = i \int_V dV \nabla^\mu j_\mu(\phi_1, \phi_2) = 0 , \quad (2.28)$$

onde usamos (2.25) para obtermos a última igualdade, e que  $dV$  é o elemento de volume quadridimensional. Fica então provado que, para  $\phi_1$  e  $\phi_2$  soluções da equação de movimento, o produto interno de Klein-Gordon é independente da superfície escolhida.



Isto dito, podemos escolhê-la como sendo uma superfície com  $t = \text{constante}$ , que denotaremos por  $\Sigma_t^{(3)}$ .<sup>2</sup> Desta forma, para o espaço-tempo de Schwarzschild com coordenadas esféricas definidas em (2.1), temos

$$d\Sigma_t^{(3)} = \sqrt{-g^{(3)}} dr d\theta d\varphi = \frac{r^2}{\sqrt{f}} \sin\theta dr d\theta d\varphi, \quad (2.29)$$

e

$$n^\mu = f^{-1/2} \delta_0^\mu. \quad (2.30)$$

Para quantizar o campo  $\phi(x^\mu)$  vamos impor as relações de comutação a tempos iguais

$$[\hat{\Phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\Phi}(t, \mathbf{x}')] = [\hat{\Pi}(t, \mathbf{x}), \hat{\Pi}(t, \mathbf{x}')] = 0, \quad (2.31)$$

$$[\hat{\Phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\Pi}(t, \mathbf{x}')] = \frac{i n_0}{\sqrt{-g}} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{i}{\sqrt{-g^{(3)}}} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.32)$$

onde  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$  representam todas as componentes espaciais de  $x^\mu$  e  $x'^\mu$ , respectivamente, e

$$\hat{\Pi} \equiv n^\mu \hat{\Pi}_\mu \equiv n^\mu \nabla_\mu \hat{\Phi}. \quad (2.33)$$

Expandimos então o campo  $\hat{\Phi}(x^\mu)$ , que agora tem o *status* de operador quântico, em termos dos modos de frequência positiva  $u_{\omega lm}(x^\mu)$  e negativa  $u_{\omega lm}^*(x^\mu)$ , como

$$\hat{\Phi}(x^\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_0^{\infty} d\omega \left[ u_{\omega lm}(x^\mu) \hat{a}_{\omega lm} + u_{\omega lm}^*(x^\mu) \hat{a}_{\omega lm}^\dagger \right], \quad (2.34)$$

onde os coeficientes desta expansão,  $\hat{a}_{\omega lm}$  e  $\hat{a}_{\omega lm}^\dagger$ , são os operadores de aniquilação e criação, respectivamente. De (2.33) e (2.34) podemos escrever

$$\hat{\Pi}_\mu(x^\nu) \equiv \nabla_\mu \hat{\Phi} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_0^{\infty} d\omega \left[ (\nabla_\mu u_{\omega lm}) \hat{a}_{\omega lm} + (\nabla_\mu u_{\omega lm}^*) \hat{a}_{\omega lm}^\dagger \right]. \quad (2.35)$$

(O momento canônico  $\hat{\Pi}^C$ , definido tal que  $[\hat{\Phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\Pi}^C(t, \mathbf{x}')] = i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ , é dado por  $\hat{\Pi}^C = \sqrt{-g} \hat{\Pi}(x^\lambda)/n_0$ .)

---

<sup>2</sup>Se uma variedade  $\mathcal{M}$  tiver uma superfície de Cauchy ela será dita globalmente hiperbólica. Neste caso  $\mathcal{M}$  poderá ser folheada por uma família a um parâmetro (*e.g.*,  $t$ ) de superfícies de Cauchy  $\Sigma_t^{(3)}$ , *i.e.*,  $\mathcal{M} = \mathbf{R} \times \Sigma_t^{(3)}$ .

Vamos agora determinar as relações de comutação entre os operadores  $a_{\omega lm}$  e  $a_{\omega lm}^\dagger$  definidos em (2.34). Inicialmente requeremos que os modos  $u_{\omega lm}$  satisfaçam

$$\sigma_{KG}(u_{\omega\rho}, u_{\omega'\rho'}) = M_{\rho\rho'} \delta(\omega - \omega') , \quad (2.36)$$

$$\sigma_{KG}(u_{\omega\rho}^*, u_{\omega'\rho'}) = 0 , \quad (2.37)$$

onde  $\rho$  representa os números quânticos discretos  $l$  e  $m$ . Usando (2.21) e

$$\sigma_{KG}(\hat{\Phi}, u_{\omega\rho}) = i \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma^{(3)\mu} [\hat{\Phi}^\dagger (\nabla_\mu u_{\omega\rho}) - (\nabla_\mu \hat{\Phi}^\dagger) u_{\omega\rho}] , \quad (2.38)$$

além de (2.31)-(2.33), podemos mostrar que

$$[\sigma_{KG}(u_{\omega\rho}, \hat{\Phi}), \sigma_{KG}(\hat{\Phi}, u_{\omega'\rho'})] = \sigma_{KG}(u_{\omega\rho}, u_{\omega'\rho'}) = M_{\rho\rho'} \delta(\omega - \omega') . \quad (2.39)$$

Por outro lado, usando (2.21), (2.34), (2.36) e (2.37) obtemos

$$\sigma_{KG}(u_{\omega\rho}, \hat{\Phi}) = \sum_{\rho''} \hat{a}_{\omega\rho''} M_{\rho\rho''} , \quad (2.40)$$

e

$$\sigma_{KG}(\hat{\Phi}, u_{\omega'\rho'}) = \sum_{\rho''} \hat{a}_{\omega'\rho''}^\dagger M_{\rho'\rho''} , \quad (2.41)$$

de onde segue que

$$[\sigma_{KG}(u_{\omega\rho}, \hat{\Phi}), \sigma_{KG}(\hat{\Phi}, u_{\omega'\rho'})] = \sum_{\rho'', \rho'''} M_{\rho\rho''} [\hat{a}_{\omega\rho''}, \hat{a}_{\omega'\rho'''}^\dagger] M_{\rho'''\rho'} , \quad (2.42)$$

onde resolvemos escrever explicitamente as somas em  $\rho$ . Concluimos então de (2.39) e (2.42) que

$$[\hat{a}_{\omega\rho}, \hat{a}_{\omega'\rho'}^\dagger] = (M^{-1})_{\rho\rho'} \delta(\omega - \omega') . \quad (2.43)$$

Desta forma, exigindo que os modos  $u_{\omega lm}$  sejam ortonormalizados por este produto interno de Klein-Gordon como

$$\sigma_{KG}(u_{\omega lm}, u_{\omega' l' m'}) = \delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{mm'} , \quad (2.44)$$

$$\sigma_{KG}(u_{\omega lm}^*, u_{\omega' l' m'}) = 0 , \quad (2.45)$$

segue que

$$[\hat{a}_{\omega lm}, \hat{a}_{\omega' l' m'}^\dagger] = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega') . \quad (2.46)$$

Procedendo de maneira análoga obtemos também que

$$[\hat{a}_{\omega lm}, \hat{a}_{\omega' l' m'}] = [\hat{a}_{\omega lm}^\dagger, \hat{a}_{\omega' l' m'}^\dagger] = 0 . \quad (2.47)$$

O vácuo de Boulware [12], que denotaremos por  $|0\rangle_B$ , é o estado quântico no qual observadores estáticos (parados) fora do horizonte de eventos do buraco negro não medem nenhuma partícula.

Ele é o estado aniquilado por todos os operadores  $\hat{a}_{\omega lm}$ ,

$$\hat{a}_{\omega lm}|0\rangle_B = 0 .$$

O espaço de Fock usual é então construído aplicando-se os operadores de criação sobre o vácuo de Boulware.

## 2.2 Forma assintótica normalizada dos modos $u_{\omega lm}$

A solução geral de (2.14)-(2.15) não é fácil de ser analisada [9], pois a mesma não pode ser expressa em termos de funções especiais disponíveis na literatura. No entanto, consegue-se obter suas soluções normalizadas na região espacial assintótica, assim como no limite de baixas frequências. Nesta seção apresentaremos a forma analítica de  $\psi_{\omega l}^S$  nas proximidades do horizonte e no infinito, e determinamos sua normalização. Na seção seguinte encontraremos a forma analítica aproximada das soluções independentes de (2.14)-(2.15) no limite de  $\omega$  pequeno e, com o auxílio da forma assintótica encontrada nesta seção, determinaremos também a normalização de  $\psi_{\omega l}^S$  neste limite.

Partindo de (2.21) e (2.11), usando (2.29), (2.30) e que

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\theta d\varphi \sin\theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{m'm} , \quad (2.48)$$

obtemos

$$\sigma_{KG}(u_{\omega lm}, u_{\omega' l' m'}) = \frac{\omega \omega'}{\pi} (\omega + \omega') e^{+i(\omega - \omega')t} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \int_{r=2M}^\infty dr f^{-1} \psi_{\omega l}^{S*}(r) \psi_{\omega' l}^S(r) . \quad (2.49)$$



No entanto, da equação diferencial (2.17), lembrando da relação (2.16) entre as variáveis  $r$  e  $x$ , podemos mostrar que

$$\int_{r=2M}^{\infty} dr f^{-1} \psi_{\omega l}^{S*}(r) \psi_{\omega' l}^S(r) = - \frac{1}{2M(\omega^2 - \omega'^2)} \left[ \psi_{\omega' l}(x) \frac{d}{dx} \psi_{\omega l}^*(x) - \psi_{\omega l}^*(x) \frac{d}{dx} \psi_{\omega' l}(x) \right] \Bigg|_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty}. \quad (2.50)$$

Desta forma, de (2.44), (2.49) e (2.50) obtemos

$$\frac{1}{\omega - \omega'} \left[ \psi_{\omega' l}(x) \frac{d}{dx} \psi_{\omega l}^*(x) - \psi_{\omega l}^*(x) \frac{d}{dx} \psi_{\omega' l}(x) \right] \Bigg|_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty} = -\frac{2\pi M}{\omega} \delta(\omega - \omega'), \quad (2.51)$$

que nos permite obter a normalização da forma assintótica de  $\psi_{\omega l}$  e, por conseguinte, de  $u_{\omega l m}$ .

Note-se que o potencial (2.15) se anula tanto para  $r \rightarrow 2M$  ( $x \rightarrow -\infty$ ) como para  $r \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow +\infty$ ). Sendo assim, da equação diferencial (2.17) para as funções  $\psi_{\omega l}(r)$ , segue que muito próximo e muito longe do horizonte de eventos do buraco negro, os modos  $\psi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x)$  provenientes do horizonte passado  $H^-$  (horizonte do buraco branco), e os modos  $\psi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(x)$  provenientes do infinito passado tipo luz  $\mathcal{I}^-$ , podem ser escritos como [7]

$$\psi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x) \approx \begin{cases} A_{\omega l}^{\rightarrow} (e^{2iM\omega x} + \mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow} e^{-2iM\omega x}) & (r \gtrsim 2M), \\ 2^{i^{l+1}} A_{\omega l}^{\rightarrow} \mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow} M\omega x h_l^{(1)}(2M\omega x) & (r \gg 2M), \end{cases} \quad (2.52)$$

e

$$\psi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(x) \approx \begin{cases} A_{\omega l}^{\leftarrow} \mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow} e^{-2iM\omega x} & (r \gtrsim 2M), \\ 2A_{\omega l}^{\leftarrow} M\omega x [(-i)^{l+1} h_l^{(1)*}(2M\omega x) + i^{l+1} \mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow} h_l^{(1)}(2M\omega x)] & (r \gg 2M), \end{cases} \quad (2.53)$$

onde  $h_l^{(1)}$  é a função esférica de Hankel ou função esférica de Bessel de terceiro tipo [10, 11], definida como

$$h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + in_l(x). \quad (2.54)$$

Vale notar que  $h_l^{(1)}(x) \approx (-i)^{l+1} \exp(ix)/x$  para  $|x| \gg 1$ . Além disso  $|\mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow}|^2$ ,  $|\mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2$  e  $|\mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow}|^2$ ,  $|\mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2$  são respectivamente os coeficientes de reflexão e transmissão, que satisfazem as seguintes equações:  $|\mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 + |\mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 = 1$ , e  $|\mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 + |\mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 = 1$ . De (2.51)-(2.53) obtemos as constantes de normalização das formas assintóticas de  $\psi_{\omega l}$ ,

$$A_{\omega l}^{\leftarrow} = A_{\omega l}^{\rightarrow} = \frac{1}{2\omega}, \quad (2.55)$$

onde, para tanto, precisamos lembrar da seguinte representação da função delta de Dirac:

$$\delta(k - k_0) = \left( \frac{\text{sen}[(k - k_0)x]}{\pi(k - k_0)} \right)^{x \rightarrow +\infty}.$$

A forma assintótica normalizada dos modos  $u_{\omega lm}$  é então obtida substituindo-se os resultados desta seção em (2.11).

## 2.3 Normalização dos modos no limite de baixas frequências

Nesta seção encontraremos os modos de frequência positiva e negativa, soluções da equação de Klein-Gordon homogênea no espaço-tempo de Schwarzschild, no limite de baixas frequências e determinaremos sua normalização. Tal aproximação consiste em substituir as soluções de (2.17) por suas contribuições dominantes no limite de baixas frequências.

Após uma certa manipulação algébrica, podemos reescrever (2.14)-(2.15), com  $\omega = 0$ , de uma maneira conveniente, a saber

$$\frac{f}{2Mr} \left\{ - \left( \frac{r^2}{M^2} - \frac{2r}{M} \right) M^2 \frac{d^2}{dr^2} \left( \frac{2M}{r} \psi_{\omega=0,l}^S \right) - 2 \left( \frac{r}{M} - 1 \right) M \frac{d}{dr} \left( \frac{2M}{r} \psi_{\omega=0,l}^S \right) + l(l+1) \left( \frac{2M}{r} \psi_{\omega=0,l}^S \right) \right\} = 0. \quad (2.56)$$

Transformando esta equação diferencial na variável  $r$  para uma equação diferencial na variável

$$z \equiv \frac{r}{M} - 1, \quad (2.57)$$

temos que (2.56) será satisfeita se e somente se

$$\left[ (1 - z^2) \frac{d^2}{dz^2} - 2z \frac{d}{dz} + l(l+1) \right] \left( \frac{2 \psi_{\omega=0,l}^S(z(r))}{(z+1)} \right) = 0. \quad (2.58)$$

Esta é justamente a equação de Legendre [11] para  $\psi_{\omega=0,l}^S/(z+1)$ , cujas duas soluções independentes são as funções de Legendre de primeiro e segundo tipos,  $P_l(z)$  e  $Q_l(z)$ , respectivamente.

Desta forma, definindo a variável

$$y \equiv \frac{r}{2M}, \quad (2.59)$$



podemos aproximar as duas soluções independentes de (2.14)-(2.15), no regime de baixas frequências, por

$$\psi_{\omega l}^{I,S}(y) \approx C_{\omega}^I y Q_l(2y-1), \quad (2.60)$$

$$\psi_{\omega l}^{II,S}(y) \approx C_{\omega}^{II} y P_l(2y-1). \quad (2.61)$$

Precisamos agora associar  $\psi_{\omega l}^{I,S}$  e  $\psi_{\omega l}^{II,S}$  nas regiões assintóticas, com  $\psi_{\omega l}^{\rightarrow,S}$  e  $\psi_{\omega l}^{\leftarrow,S}$  no limite de baixas frequências. Para tanto devemos notar primeiramente que, no limite de baixas frequências,  $\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(x)$  é praticamente todo refletido de volta para o horizonte pelo potencial espalhador  $V_S$  dado em (2.15). Uma vez que  $P_l(z) \sim z^l$  para  $z \gg 1$  ( $r \gg 2M$ ), notamos que  $\psi_{\omega l}^{II}$  cresce para além do máximo do potencial em direção a  $x \rightarrow +\infty$ . Sendo assim, concluímos que toda a contribuição em  $x \rightarrow +\infty$  para  $\psi_{\omega l}^{\rightarrow,S}$ , no limite  $\omega \rightarrow 0$ , vem de  $\psi_{\omega l}^{I,S}$ .

Vejamos agora o caso do modos provenientes de  $\mathcal{J}^-$ . No limite de baixas frequências eles devem ser totalmente refletidos pelo potencial  $V_S$ , de volta para  $\mathcal{J}^+$ . Como  $Q_l(z) \approx -\log|z-1|^{1/2}$  para  $z \approx 1$ , notamos que  $\psi_{\omega l}^I$  cresce na medida em que nos aproximamos do horizonte. Concluímos então que toda a contribuição em  $x \rightarrow -\infty$  para  $\psi_{\omega l}^{\leftarrow,S}$ , no limite  $\omega \rightarrow 0$ , vem de  $\psi_{\omega l}^{II,S}$ .

Feitas essas associações, podemos determinar as constantes  $C_{\omega}^I$  e  $C_{\omega}^{II}$ , comparando as soluções radiais de (2.14), nos limites assintóticos e de baixas frequências, *i.e.*, comparando (2.60)-(2.61) nas regiões assintóticas apropriadas com (2.52)-(2.53) no limite de baixas frequências.

Para obtermos  $C_{\omega}^I$ , usemos inicialmente que [13]

$$Q_l(z) \approx \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right| - \sum_{k=1}^l \frac{1}{k} \quad (z \approx 1). \quad (2.62)$$

Além disso, sabemos de (2.16) e (2.59) que, na vizinhança do horizonte, *i.e.*, no limite  $y \gtrsim 1$ ,

$$x = y + \ln(y-1) \approx \ln(y-1).$$

Desta maneira podemos obter a forma assintótica de (2.60), na vizinhança do horizonte, como sendo

$$\psi_{\omega l}^{I,S}(x) \approx \frac{C_{\omega}^I}{2} x \quad (x \rightarrow -\infty, \omega \approx 0). \quad (2.63)$$

No entanto, de (2.52) conhecemos  $\psi_{\omega l}^{\rightarrow, S}$  na vizinhança do horizonte ( $x \rightarrow -\infty$ ), para um valor arbitrário de  $\omega$ . Usando que  $e^x \approx 1 + x$ , para  $x \ll 1$ , obtemos a forma de  $\psi_{\omega l}^{\rightarrow, S}$  no limite de baixas frequências ( $2M\omega x \ll 1$ ), como sendo

$$\psi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(x) \approx Mx \left[ \frac{1 + \mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow}}{2M\omega x} + i(1 - \mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow}) \right] \quad (x \rightarrow -\infty, 2M\omega x \ll 1), \quad (2.64)$$

onde fizemos uso de (2.55). Para que a expressão acima tenha o comportamento desejado no regime de baixas frequências, concluímos que  $\mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow} \approx -1 + \mathcal{O}(\omega)$ . Desta forma podemos reescrever (2.64) como

$$\psi_{\omega l}^{I, S}(x) \approx 2Mx \quad (x \rightarrow -\infty, 2M\omega x \ll 1). \quad (2.65)$$

De (2.63) e (2.65), concluímos que

$$C_{\omega}^I = 4M, \quad (2.66)$$

a menos de uma fase arbitrária. Portanto, podemos reescrever (2.60) como

$$\psi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(r) \approx 2r Q_l \left( \frac{r}{M} - 1 \right), \quad (2.67)$$

que é a aproximação válida no limite de baixas frequências.

O próximo passo é determinar  $C_{\omega}^{II}$  em (2.61). Para tanto usamos que

$$P_l(z) \approx \frac{(2l+1)!!}{l!} z^l = \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2} z^l \quad (z \gg 1). \quad (2.68)$$

Desta forma, de (2.61), (2.68) e (2.59), podemos escrever

$$\psi_{\omega l}^{II, S}(r) \approx \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2} \frac{C_{\omega}^{II}}{2} \left( \frac{r}{M} \right)^{(l+1)} \quad (r \gg 2M, \omega \approx 0). \quad (2.69)$$

Por outro lado, de (2.53)-(2.55) podemos escrever, para  $x \rightarrow +\infty$  e  $2M\omega x \ll 1$ ,

$$\begin{aligned} \psi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(x) \approx & Mx \left[ (-i)^{(l+1)} + (i)^{(l+1)} \mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow} \right] j_l(2M\omega x) + \\ & iMx \left[ (-i)^{(l+1)} - (i)^{(l+1)} \mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow} \right] \eta_l(2M\omega x). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Em seguida, usamos que

$$j_l(k) \approx \frac{k^l}{(2l+1)!!} = \frac{2^l l!}{(2l+1)!} k^l \quad (k \ll 1), \quad (2.71)$$

$$\eta_l(k) \approx -(2l+1)!! k^{-l-1} = -\frac{(2l)!}{2^l l!} k^{-l-1} \quad (k \ll 1), \quad (2.72)$$

e, de (2.16), que

$$x \approx \frac{r}{2M} \quad (x \rightarrow \infty), \quad (2.73)$$

para reescrever (2.70) como

$$\begin{aligned} \psi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(r) \approx & \frac{1}{2\omega} \frac{2^l l!}{(2l+1)!} \left[ (-i)^{(l+1)} + (i)^{(l+1)} \mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow} \right] (\omega r)^{(l+1)} - \\ & \frac{i}{2\omega} \frac{(2l)!}{2^l l!} \left[ (-i)^{(l+1)} - (i)^{(l+1)} \mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow} \right] (\omega r)^{-l}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

com  $r \gg 2M$  e  $\omega r \ll 1$ . Desta forma, de (2.69) e (2.74), obtemos que  $\mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow} \approx (-1)^{(l+1)} + \mathcal{O}(\omega)$

e

$$C_{\omega}^{II} = \frac{2^{(2l+1)} (l!)^3}{(2l)! (2l+1)!} M^{(l+1)} \omega^l, \quad (2.75)$$

a menos de uma fase arbitrária. Substituindo (2.75) em (2.61), chegamos à seguinte expressão

$$\psi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(r) \approx \frac{2^{2l} (l!)^3 (M\omega)^l}{(2l)! (2l+1)!} r P_l \left( \frac{r}{M} - 1 \right), \quad (2.76)$$

válida no limite de baixas frequências. As expressões (2.67) e (2.76) determinam os dos modos normais (2.11) do campo escalar fora de um buraco negro de Schwarzschild, no regime de baixas frequências.



## Capítulo 3

# Radiação escalar emitida por uma fonte girando ao redor de um objeto estelar

A análise da radiação emitida por partículas aceleradas na vizinhança de corpos estelares, tem tido papel fundamental na investigação de um dos maiores desafios da astrofísica, que é sem dúvida o da confirmação observacional da existência de buracos negros. Recentemente, alguns objetos estelares compactos em sistemas binários, com uma das componentes invisível, emitindo radiação na forma de raio-X, têm sido identificados como buracos negros, uma vez que análises criteriosas têm demonstrado que suas massas estão muito além dos limites aceitos para estrelas mortas, segundo a Relatividade Geral [14]. Existem também evidências indiretas da presença de buracos negros supermassivos no centro de galáxias [15]. No entanto, para obtermos uma confirmação experimental definitiva da existência de buracos negros, precisamos da observação de efeitos devidos a presença do horizonte de eventos dos mesmos. Tais confirmações deverão ser obtidas através de medidas precisas da radiação eletromagnética emitida pelos discos de acreção em volta de buracos negros [16, 17] e/ou da radiação gravitacional emitida pelas estrelas companheiras de buracos negros em sistemas binários [18]. Pelo fato da radiação proveniente da matéria orbitando buracos negros ter um papel tão importante na astrofísica moderna, e também porque medidas cada vez mais precisas têm levado à observação de efeitos relativísticos ocorrendo na vizinhança do horizonte de eventos de buracos negros [19], uma investigação de como os processos de emissão de radiação são modificados pela curvatura e topologia não-triviais do espaço-tempo de um buraco negro torna-se de grande relevância.

Neste capítulo analisaremos a radiação escalar emitida por uma fonte em movimento circular uniforme em torno de um objeto estelar, adotando diferentes abordagens. Boa parte dos resultados e conclusões apresentados aqui foi publicada em [20]. Na seção 3.1 usaremos a Teoria Clássica de Campos (TCC) no espaço-tempo plano de Minkowski para calcular a potência irradiada pela fonte girante, assumindo que a força gravitacional entre a fonte e o objeto estelar é dada pela Lei da Gravitação Newtoniana. Utilizaremos nesta primeira seção uma abordagem com funções de Green para calcularmos o potencial de Liénard-Wiechert correspondente, obtendo assim o análogo da fórmula de Larmor para o campo escalar. Na seção 3.2 usaremos a Teoria Quântica de Campos (TQC) a nível de árvore, no espaço-tempo de Minkowski, também assumindo que a atração gravitacional é dada pela Gravitação de Newton. Mostraremos que os resultados usando a TCC e a TQC a nível de árvore, no espaço-tempo plano, são coincidentes, ressaltando-se que assumimos a mesma interação gravitacional entre o objeto estelar e a fonte girante, em ambos os casos. Assumiremos que a força gravitacional entre a fonte e o objeto estelar é originada pela troca de grávitons na seção 3.3, onde o gráviton será definido como um campo não-massivo, de spin 2 e covariante por transformações de Lorentz. O cálculo da potência emitida pela fonte será realizado *via* TQC a nível de árvore, no espaço-tempo de Minkowski. Consideraremos que o objeto estelar seja um buraco negro na seção 3.4, assumindo portanto a Relatividade Geral e calculando a potência irradiada usando a TQC a nível de árvore, no espaço-tempo de Schwarzschild. Finalmente, na seção 3.5 faremos a análise e comparação dos resultados obtidos.

### 3.1 Cálculo usando a TCC em Minkowski, assumindo Gravitação Newtoniana

Nesta seção vamos calcular a radiação emitida por uma carga escalar (fonte) em movimento circular uniforme no espaço-tempo plano de Minkowski, usando a Teoria Clássica de Campos, assumindo Gravitação Newtoniana.



Consideremos inicialmente uma fonte acelerada seguindo uma linha de mundo  $z^\mu(\tau)$ , onde  $\tau$  é o tempo próprio da fonte, no espaço-tempo de Minkowski, com elemento de linha em coordenadas cartesianas dado por

$$ds^2 = +dt^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j. \quad (3.1)$$

(Neste capítulo índices latinos ( $i, j, \dots$ ) assumirão os valores 1, 2, e 3, enquanto que índices gregos ( $\mu, \nu, \dots$ ) assumirão os valores 0, 1, 2, e 3.) Ressaltemos que nesta tese estamos assumindo o sistema natural de unidades, no qual  $c = G = \hbar = k_B = 1$ .

O campo escalar clássico  $\phi$  produzido por uma fonte externa  $j$  satisfaz a equação de Klein-Gordon não-homogênea

$$\square\phi(x) = j(x), \quad (3.2)$$

escrita aqui no sistema Heaviside-Lorentz de unidades (no qual  $\nabla_i E^i = \rho$ ), com  $c = 1$ . A solução de (3.2) pode ser escrita em termos da função de Green retardada  $G_R(x, y)$ , na forma [21, 22]

$$\phi(x) = \int d^4y \sqrt{-g(y)} G_R(x, y) j(y), \quad (3.3)$$

onde  $g$  é o determinante da métrica do espaço-tempo em questão,  $x^\mu$  é o ponto do espaço-tempo no qual queremos determinar o campo  $\phi$ , e  $y^\mu$  é uma variável auxiliar de integração. Lembrando que [2]

$$\square_x G_R(x, y) = \frac{\delta^4(x - y)}{\sqrt{-g(y)}}, \quad (3.4)$$

a equação (3.2) pode ser diretamente verificada. A corrente escalar associada a uma fonte puntual seguindo uma linha de mundo  $z^\mu(\tau)$ , com quadrivelocidade  $u^\mu[z(\tau)] \equiv \frac{dz^\mu}{d\tau}$ , é dada por

$$j(y) = \frac{q}{\sqrt{-g(y)}} \frac{1}{u^0(y)} \delta^3[\vec{y} - \vec{z}(\tau)], \quad (3.5)$$

onde  $q$  é a magnitude da carga escalar da mesma. Usando (3.5) em (3.3), e lembrando que  $d^4y = dy^0 d^3y$ , obtemos

$$\phi(x) = q \int dy^0 d^3y \frac{1}{u^0(y)} \delta^3[\vec{y} - \vec{z}(\tau)] G_R(x, y). \quad (3.6)$$

Podemos realizar a integral em  $d^3y$  utilizando  $\delta^3[\vec{y} - \vec{z}(\tau)]$  e, como  $u^0(y) = \frac{dy^0}{d\tau}$ , temos que  $\int \frac{dy^0}{u^0(y)} = \int d\tau$ . Daí

$$\phi(x) = q \int d\tau G_R(x, z). \quad (3.7)$$

O próximo passo é lembrar que a função de Green retardada é dada por

$$G_R(x, z(\tau)) = \frac{1}{2\pi} \Theta(x^0 - z^0) \delta[(x - z(\tau))^2] = \frac{1}{2\pi} \Theta(x^0 - z^0) \frac{\delta(\tau - \tau_0)}{|2(x_\mu - z_\mu(\tau))u^\mu|}, \quad (3.8)$$

onde enfatizamos que  $\tau_0$  é o tempo próprio da fonte no instante da emissão da radiação (que ocorreu) em  $z^\mu(\tau_0)$ . O termo  $\Theta(x^0 - z^0)$  em  $G_R(x, z(\tau))$  impõe que  $x^0 > z^0$ , garantindo tratar-se efetivamente da função retardada. Substituindo então (3.8) em (3.7), obtemos o que podemos chamar de “versão escalar do potencial retardado de Liénard-Wiechert”, a saber

$$\phi(x) = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{|(x_\mu - z_\mu(\tau))u^\mu|} \Big|_{\tau=\tau_0}. \quad (3.9)$$

Na verdade o sinal de módulo em (3.8) e (3.9) é desnecessário pois podemos mostrar que  $(x_\mu - z_\mu(\tau))u^\mu > 0$ .

Definindo

$$R^\mu \equiv (x^\mu - z^\mu(\tau)), \quad (3.10)$$

podemos reescrever (3.9) como  $\phi(x) = q/(4\pi R_\mu u^\mu)|_{\tau=\tau_0}$ . Podemos ainda mostrar, usando que

$$\vec{R} = (\vec{x} - \vec{z}(\tau)), \quad (3.11)$$

e definindo

$$\hat{R} \equiv \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}, \quad (3.12)$$

que  $R_\mu u^\mu = \gamma |\vec{R}| (1 - \hat{R} \cdot \vec{v})$ , com  $\gamma \equiv u^0 = dz^0/d\tau$ , onde usamos a definição de produto escalar cartesiano, a saber

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv A^i B^i = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta_{AB}, \quad (3.13)$$

e a definição usual de norma de um trivetor

$$|\vec{A}| \equiv \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}. \quad (3.14)$$

Desta forma, podemos ainda reescrever (3.9) como uma expressão que não é explicitamente covariante, dada por

$$\phi(x) = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{\gamma |\vec{R}| (1 - \hat{R} \cdot \vec{v})} \Big|_{\tau=\tau_0}, \quad (3.15)$$

onde  $v^i \equiv dz^i/dz^0$ .

Nosso objetivo nesta seção é obter a potência emitida  $W_{class}^{M,em}$ , usando a TCC, pela fonte acelerada  $j$ , devido à sua interação com o campo  $\Phi$ . O índice superior  $M$  da potência emitida enfatiza que estamos fazendo os cálculos no espaço-tempo de Minkowski.  $W_{class}^{M,em}$  é dada pelo fluxo do trivetor de Poynting  $\vec{S}$  através da superfície esférica bidimensional (no sistema inercial de coordenadas) com centro na posição da fonte  $j$ , e raio  $|\vec{R}|$ , cujo elemento de área será denotado por  $d\vec{f}$ . Sendo assim

$$W_{class}^{M,em} = \int d\vec{f} \cdot \vec{S}, \quad (3.16)$$

onde

$$S^i = (\nabla^0 \phi)(\nabla^i \phi) = -(\partial_t \phi)(\partial_i \phi) \quad (3.17)$$

são as componentes do trivetor de Poynting no caso do espaço-tempo de Minkowski com coordenadas cartesianas. Estamos utilizando aqui que  $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ , e  $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$ .

Para obtermos  $S^i$ , devemos então calcular inicialmente  $\partial_\mu \phi(x)$ , onde  $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ . Derivando (3.3) com respeito à  $x^\mu$  obtemos

$$\partial_\mu \phi(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \int d^4 y \sqrt{-g(y)} j(y) [\partial_\mu G_R(x, y)]. \quad (3.18)$$

Substituindo (3.5) em (3.18) e usando novamente que  $d^4 y = dy^0 d^3 y$ , ficamos com

$$\partial_\mu \phi(x) = q \int dy^0 d^3 y \frac{1}{u^0(y)} \delta^3[\vec{y} - \vec{z}(\tau)] [\partial_\mu G_R(x, y)]. \quad (3.19)$$

Agora usamos que  $u^0 = \frac{dy^0}{d\tau}$  para transformar a integral em  $dy^0$  em uma integral em  $d\tau$ . Sendo assim

$$\partial_\mu \phi(x) = q \int d\tau d^3 y \delta^3[\vec{y} - \vec{z}(\tau)] [\partial_\mu G_R(x, y)]. \quad (3.20)$$

Usamos então  $\delta^3[\vec{y} - \vec{z}(\tau)]$  para realizar a integral em  $d^3 y$  e obter

$$\partial_\mu \phi(x) = q \int d\tau [\partial_\mu G_R(x, z(\tau))]. \quad (3.21)$$



A regra da cadeia pode ser utilizada para escrever

$$\partial_\mu G_R(x, y) = \frac{\partial[G_R(x, z(\tau))]}{\partial[(x - z)^2]} \frac{\partial[(x - z)^2]}{\partial x^\mu} = \frac{d[G_R(x, z(\tau))]}{d\tau} \frac{d\tau}{d[(x - z)^2]} \frac{\partial[(x - z)^2]}{\partial x^\mu}. \quad (3.22)$$

No entanto, temos que

$$\frac{d\tau}{d[(x - z)^2]} = \frac{-1}{2(x^\nu - z^\nu)u_\nu} \quad (3.23)$$

e

$$\frac{\partial[(x - z)^2]}{\partial x^\mu} = 2(x_\mu - z_\mu), \quad (3.24)$$

onde usamos que  $u^\mu \equiv \frac{dz^\mu}{d\tau}$  e  $\frac{dx^\mu}{d\tau} = 0$ . Desta forma obtemos de (3.21)-(3.24) que

$$\partial_\mu \phi(x) = -q \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left\{ \frac{d[G_R(x, z(\tau))]}{d\tau} \right\} \frac{(x_\mu - z_\mu)}{(x^\nu - z^\nu)u_\nu}. \quad (3.25)$$

Integrando por partes a expressão acima obtemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi(x) = & -q \left[ \frac{(x_\mu - z_\mu)}{(x^\nu - z^\nu)u_\nu} G_R(x, z(\tau)) \right]_{\tau \rightarrow -\infty}^{\tau \rightarrow +\infty} \\ & + q \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau G_R(x, z(\tau)) \left\{ \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{(x_\mu - z_\mu)}{(x^\nu - z^\nu)u_\nu} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

O primeiro termo à direita da igualdade em (3.26) vai a zero devido às contribuições em  $\tau \rightarrow \pm\infty$  se anularem. Usando (3.8) e efetuando a derivação com relação a  $\tau$  obtemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi(x) = & -\frac{q}{4\pi} \frac{[(x_\nu - z_\nu)(u^\nu u_\mu + \delta_\mu^\nu)]}{[(x_\lambda - z_\lambda)u^\lambda]^3} \Big|_{\tau=\tau_0} \\ & - \frac{q}{4\pi} \frac{(x_\mu - z_\mu)(x_\nu - z_\nu)}{[(x_\lambda - z_\lambda)u^\lambda]^3} \frac{du^\nu}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_0}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde lançamos mão de  $\delta(\tau - \tau_0)$  na definição da função de Green para realizarmos a integração no último termo de (3.26).

Podemos notar que, para  $|\vec{R}| \gg 1$ , o primeiro termo à direita do sinal de igualdade em (3.27) é proporcional à  $|\vec{R}|^{-2}$ , enquanto que o último termo, contendo a quadriaceleração instantânea da fonte no instante  $\tau_0$  é proporcional à  $|\vec{R}|^{-1}$ . Sendo assim, vemos que para  $|\vec{R}| \gg 1$ , *i.e.*, para pontos espacialmente distantes da linha de mundo da fonte  $j$ , o termo proporcional à quadriaceleração é dominante em  $\partial_\mu \phi(x)$ . Desta forma, uma vez que a radiação



é identificada como sendo a contribuição que sobrevive assintoticamente (muito longe da fonte emissora), vemos claramente a sua dependência da aceleração instantânea da fonte. Portanto, no restante dos cálculos consideraremos

$$\partial_\mu \phi(x) \approx - \frac{q}{4\pi} \frac{(x_\mu - z_\mu)(x_\nu - z_\nu)}{[(x_\lambda - z_\lambda)u^\lambda]^3} \frac{du^\nu}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_0}. \quad (3.28)$$

Definindo  $\zeta \equiv (x_\lambda - z_\lambda)u^\lambda$ , podemos escrever

$$\partial_\mu \phi(x) \approx - \frac{q}{4\pi} \frac{(x_\mu - z_\mu)}{\zeta^3} \left[ (x_0 - z_0) \frac{du^0}{d\tau} + (x_i - z_i) \frac{du^i}{d\tau} \right] \Big|_{\tau=\tau_0}, \quad (3.29)$$

onde decomposemos  $(x_\nu - z_\nu) \frac{du^\nu}{d\tau}$  em componentes espaciais e temporal. Utilizando (3.10), a métrica (3.1) e que  $(x^\nu - z^\nu)$  é um quadrivetor tipo luz obtemos que

$$(x_0 - z_0) = (x^0 - z^0) = |\vec{R}|,$$

$$(x_i - z_i) = -(x^i - z^i) = -|\vec{R}|(\hat{R})^i.$$

Além disso, podemos obter que

$$\frac{du^0}{d\tau} = \frac{dz^0}{d\tau} \frac{du^0}{dz^0} = \gamma^4(\vec{v} \cdot \vec{a}), \quad (3.30)$$

e

$$\frac{du^i}{d\tau} = \frac{dz^0}{d\tau} \left[ \frac{d}{dz^0} \left( \frac{dz^0}{d\tau} \frac{dz^i}{dz^0} \right) \right] = \gamma^4(\vec{v} \cdot \vec{a})v^i + \gamma^2 a^i, \quad (3.31)$$

onde utilizamos as definições  $v^i \equiv dz^i/dz^0$  e  $a^i \equiv dv^i/dz^0$ . Usando estas expressões, podemos reescrever (3.29) na seguinte forma:

$$\partial_\mu \phi(x) \approx - \frac{q}{4\pi} \frac{(x_\mu - z_\mu)}{\zeta^3} |\vec{R}| \gamma^2 \left[ \gamma^2(\vec{v} \cdot \vec{a})(1 - \vec{v} \cdot \hat{R}) - (\hat{R} \cdot \vec{a}) \right] \Big|_{\tau=\tau_0}. \quad (3.32)$$

No caso particular em que  $\vec{v}=\vec{0}$  (i.e., no referencial inercial instantaneamente em repouso com a fonte acelerada)

$$\partial_\mu \phi(x) \approx + \frac{q}{4\pi |\vec{R}|^2} (x_\mu - z_\mu) (\hat{R} \cdot \vec{a}) \Big|_{\tau=\tau_0}, \quad (3.33)$$

onde usamos que  $\gamma(\vec{v}=\vec{0}) = 1$ , e  $\zeta(\vec{v}=\vec{0}) = |\vec{R}|$ . Desta forma

$$\partial_i \phi(x) \approx + \frac{q}{4\pi |\vec{R}|} (\hat{R} \cdot \vec{a}) \Big|_{\tau=\tau_0},$$

e

$$\partial_i \phi(x) \approx - \frac{q}{4\pi |\vec{R}|} \frac{R^i}{|\vec{R}|} (\hat{R} \cdot \vec{a}) \Big|_{\tau=\tau_0}.$$

Utilizando estes resultados em (3.17), ficamos, para pontos espacialmente distantes da fonte (i.e.,  $|\vec{R}| \gg 1$ ), com

$$\vec{S} = + \frac{q^2}{16\pi^2 |\vec{R}|^2} (\hat{R} \cdot \vec{a})^2 \hat{R} \Big|_{\tau=\tau_0}. \quad (3.34)$$

A energia irradiada por unidade de tempo coordenado  $z^0$ ,  $W_{class}^{M,em}$ , é então encontrada integrando-se o vetor de Poynting na superfície esférica de raio  $|\vec{R}|$ , no referencial inercial instantaneamente em repouso com a fonte, cujo elemento de área é dado por  $d\vec{f} \equiv df \hat{R}$ , com  $df \equiv |\vec{R}|^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ , onde  $\theta$  é escolhido como sendo o ângulo entre a triaceleração  $\vec{a}$  e o vetor unitário  $\hat{R}$ , e  $\varphi$  é o ângulo azimutal correspondente. Desta forma

$$W_{class}^{M,em} = \int df^i S^i = \int d\theta d\varphi \sin\theta |\vec{R}| S^i R^i. \quad (3.35)$$

Usando (3.34) e que  $(\hat{R} \cdot \vec{a}) = |\vec{a}| \cos\theta$ , ficamos com

$$W_{class}^{M,em} = \frac{q^2 |\vec{a}|^2}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta (\cos\theta)^2. \quad (3.36)$$

Realizando as integrais angulares terminamos com

$$W_{class}^{M,em} = \frac{q^2}{12\pi} |\vec{a}|^2. \quad (3.37)$$

Vale ressaltar que este resultado é igual a metade do valor clássico encontrado para o campo (vetorial) eletromagnético  $A^\mu$ , conhecido como fórmula de Larmor [21, 22], dado por

$$W_{Larmor} = \frac{q^2}{6\pi} |\vec{a}|^2, \quad (3.38)$$

escrito aqui também em unidades de Heaviside-Lorentz, com  $c = 1$ . É razoável esperar que no caso do campo de Maxwell o valor da potência irradiada seja duas vezes maior do que no do campo escalar, devido aos dois graus de polarização físicos do campo eletromagnético.

Como (3.37) é obtida em um referencial inercial instantaneamente em repouso (no instante  $\tau_0$ ) com relação à fonte acelerada — portanto para  $\vec{v} = \vec{0}$ , ela deve ser encarada como

um resultado não-relativístico. No entanto, podemos generalizar (3.37), mediante argumentos de covariância sob transformações de Lorentz, obtendo um resultado relativístico, válido para uma velocidade  $\vec{v}$  arbitrária da fonte acelerada.

Pode-se mostrar que a potência irradiada  $W_{class}^{M,em} = dE/dz^0$  é um invariante por transformações de Lorentz [23]. Sendo assim, por covariância, também o lado direito da igualdade em (3.37) deverá ser um invariante de Lorentz. Reescrevamos então (3.37) como

$$W_{class}^{M,em} = \frac{q^2}{12\pi} \frac{d\vec{v}}{dz^0} \frac{d\vec{v}}{dz^0}, \quad (3.39)$$

preparando para a generalização para o caso relativístico. Estamos buscando um invariante de Lorentz que se reduza a (3.39), no limite  $\vec{v} \rightarrow \vec{0}$ . Na verdade podem existir vários invariantes nestas condições. No entanto, de (3.16), (3.17) e (3.27) vemos que o invariante desejado só deverá depender de  $u^\mu$  e  $du^\mu/d\tau$  (ou de  $\vec{v}$  e  $\vec{a}$ ). Com esta restrição sobre a ordem das derivadas do quadrivetor posição da fonte acelerada,  $z^\mu$ , o resultado é único, dado por

$$W_{class}^{M,em} = -\frac{q^2}{12\pi} \frac{du^\mu}{d\tau} \frac{du_\mu}{d\tau}. \quad (3.40)$$

Definindo a aceleração própria da fonte  $j$  como sendo

$$\alpha = \sqrt{-\frac{du^\mu}{d\tau} \frac{du_\mu}{d\tau}},$$

podemos reescrever (3.40) como

$$W_{class}^{M,em} = \frac{q^2}{12\pi} \alpha^2. \quad (3.41)$$

No caso geral, temos de (3.30) e (3.31), que

$$\alpha^2 = -\frac{du^\mu}{d\tau} \frac{du_\mu}{d\tau} = -\gamma^8 (\vec{v} \cdot \vec{a})^2 + [\gamma^4 (\vec{v} \cdot \vec{a}) v^i + \gamma^2 a^i]^2. \quad (3.42)$$

Vemos então que  $\alpha^2 \rightarrow |\vec{a}|^2$ , quando  $\vec{v} \rightarrow \vec{0}$ , e, portanto, que o invariante (3.40) se reduz a (3.37) nesse limite, como requerido.

No caso do movimento circular uniforme (MCU), analisado no sistema inercial, temos que a aceleração à qual está submetida a fonte girante é a aceleração centrípeta  $\vec{a}_c$ , que é perpendicular à velocidade  $\vec{v}$ , i.e.  $\vec{v} \cdot \vec{a} = \vec{v} \cdot \vec{a}_c = 0$ . Portanto, neste caso

$$\alpha_{MCU}^2 = \gamma^4 |\vec{a}_c|^2, \quad (3.43)$$



onde o módulo da aceleração centrípeta é dado por

$$|\vec{a}_c| = \frac{|\vec{v}|^2}{\mathcal{R}} = \Omega^2 \mathcal{R}. \quad (3.44)$$

Na expressão acima fizemos uso da relação conhecida entre o módulo da velocidade tangencial e a velocidade angular no MCU, *i.e.*,  $|\vec{v}| = \Omega \mathcal{R}$ . Note-se que  $\Omega$  é a velocidade angular da fonte, assim como medida por observadores inerciais e  $\mathcal{R}$  é o raio da trajetória circular da fonte  $j$ . Sendo assim, de (3.44), (3.43) e (3.41), obtemos a expressão da potência irradiada pela fonte  $j$  em MCU

$$W_{class}^{M,em} = \frac{q^2 \gamma^4 \Omega^4 \mathcal{R}^2}{12\pi}. \quad (3.45)$$

Para que possamos escrever a potência irradiada pela fonte em movimento circular uniforme em função somente de variáveis que possam em princípio ser medidas assintoticamente, é necessário relacionarmos a distância coordenada radial  $\mathcal{R}$  com a velocidade angular da referida fonte. Isto é feito aqui (enquanto não lançamos mão da Relatividade Geral) impondo a condição de que a fonte está em órbita circular devido à influência de uma força gravitacional. Entretanto, não há uma maneira única de definirmos um campo gravitacional no espaço-tempo plano de Minkowski [24].

Nesta seção e na seguinte, assumiremos uma força gravitacional newtoniana entre o objeto estelar e a fonte girante. Na seção 3.3 assumiremos que a força gravitacional responsável pela trajetória circular da fonte  $j$  é originada da troca de grávitons entre o objeto estelar massivo central e a fonte. Já na seção 3.4, assumiremos a Relatividade Geral.

Relembremos então a Lei da Gravitação Newtoniana, escrita no sistema inercial de coordenadas, a saber

$$\vec{F}_N = -\frac{mM}{\mathcal{R}^3} \vec{\mathcal{R}}, \quad (3.46)$$

onde  $m$  é a massa da fonte  $j$ ,  $M$  é a massa do objeto estelar atrativo e  $\mathcal{R}$  é a distância entre  $m$  e  $M$ . (Como foi dito no início desta seção, estamos adotando aqui o sistema natural de unidades no qual a constante gravitacional é igual a unidade.) A força centrípeta de um corpo em MCU



é dada, segundo a Mecânica Newtoniana, por [vide (3.44)]

$$\vec{F}_c = -m\Omega^2 \vec{\mathcal{R}} . \quad (3.47)$$

Igualando as expressões das forças,  $\vec{F}_N = \vec{F}_c$ , obtemos

$$\mathcal{R}^N = \left( \frac{M}{\Omega^2} \right)^{1/3} , \quad (3.48)$$

que equivale à terceira lei de Kepler aplicada a uma trajetória circular. Substituindo (3.48) em (3.45), obtemos a potência irradiada pela fonte  $j$  em MCU

$$W_{N,class}^{M,em} = \frac{q^2 M^{2/3} \Omega^{8/3} (\gamma_\Omega^N)^4}{12\pi} , \quad (3.49)$$

como função de  $q$ ,  $M$  e  $\Omega$ . Note-se que, no caso do MCU,

$$\gamma_\Omega^N = \frac{dz^0}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\mathcal{R}^N)^2 \Omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (M\Omega)^{2/3}}} . \quad (3.50)$$

## 3.2 Cálculo usando a TQC em Minkowski, assumindo Gravitação Newtoniana

Vamos agora analisar a radiação emitida por uma fonte em movimento circular uniforme no espaço-tempo plano de Minkowski, usando a Teoria Quântica de Campos a nível de árvore, assumindo que a força de atração gravitacional é dada pela Lei da Gravitação Universal de Newton.

A corrente clássica associada a uma fonte descrevendo uma trajetória circular no plano  $\theta = \pi/2$  com raio  $R_M$  e com velocidade angular constante  $\Omega > 0$  (assim como medida por observadores inerciais neste espaço-tempo plano), é dada por

$$j^M(x^\mu) = \frac{q}{R_M^2 \gamma} \delta(\tau - R_M) \delta(\theta - \pi/2) \delta(\varphi - \Omega t) , \quad (3.51)$$

onde  $\gamma = 1/\sqrt{1 - R_M^2 \Omega^2}$ , e a constante  $q$  determina a magnitude do acoplamento entre a fonte e o campo. Estamos usando aqui coordenadas polares esféricas definidas pelo elemento de linha

de Minkowski, a saber

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 . \quad (3.52)$$

De (3.52), temos que

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta) .$$

Vale ressaltar que, de acordo com a Mecânica Newtoniana, a fonte escalar especificada pela corrente (3.51) descreve um movimento circular uniforme com aceleração (centrípeta) constante, com módulo dado por (3.44).

A corrente  $j^M$  acima foi normalizada requerendo-se que  $\int d\sigma^{(3)} j^M(x^\mu) = q$ , onde  $d\sigma^{(3)}$  é o elemento de (tri)volume ortogonal à quadrivelocidade  $u_M^\mu$  da fonte clássica que, nas coordenadas polares esféricas definidas em (3.52), é dada por

$$u_M^\mu(\Omega, R_M) = (\gamma, 0, 0, \Omega\gamma) . \quad (3.53)$$

A interação entre a fonte  $j^M(x^\mu)$  e o campo escalar quântico  $\hat{\Phi}(x^\mu)$  será dada pelo acoplamento mínimo, de forma que a ação será

$$\hat{S} = \int d^4x \sqrt{-\eta} \left( \frac{1}{2} \nabla^\mu \hat{\Phi} \nabla_\mu \hat{\Phi} + j^M \hat{\Phi} \right) , \quad (3.54)$$

com  $\eta \equiv \det(\eta_{\mu\nu})$ , de forma que  $d^4x \sqrt{-\eta}$  é o elemento de volume (quadridimensional) invariante do espaço-tempo de Minkowski.

O operador campo escalar  $\hat{\Phi}^{\text{in}}(x^\mu)$  é escrito como

$$\hat{\Phi}^{\text{in}}(x^\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_0^\infty d\omega \left[ u_{\omega lm}(x^\mu) a_{\omega lm}^{\text{in}} + u_{\omega lm}^*(x^\mu) a_{\omega lm}^{\text{in}\dagger} \right] . \quad (3.55)$$

Aqui  $a_{\omega lm}^{\text{in}\dagger}$  e  $a_{\omega lm}^{\text{in}}$  são os operadores de criação e aniquilação, respectivamente, e  $u_{\omega lm}(x^\mu)$  são os modos de frequência positiva associados com observadores inerciais estáticos em  $x^i = \text{constante}$ ,

$$u_{\omega lm}(x^\mu) \propto e^{-i\omega t} \quad (\omega > 0) , \quad (3.56)$$

soluções da equação de Klein-Gordon homogênea no espaço-tempo de Minkowski,

$$\square u_{\omega lm} = \eta_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu u_{\omega lm} = 0 , \quad (3.57)$$

onde

$$\nabla_\mu u_{\omega lm} = \partial_\mu u_{\omega lm} ,$$

e

$$\nabla_\nu \nabla_\mu u_{\omega lm} = \nabla_\nu (\partial_\mu u_{\omega lm}) = \partial_\nu (\partial_\mu u_{\omega lm}) - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \partial_\lambda u_{\omega lm} ,$$

com os símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$  dados por

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\delta} (\partial_\beta \eta_{\delta\gamma} + \partial_\gamma \eta_{\delta\beta} - \partial_\delta \eta_{\beta\gamma}) . \quad (3.58)$$

No caso do espaço-tempo de Minkowski com coordenadas polares esféricas, os únicos símbolos de Christoffel não-nulos são

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r , \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r(\sin\theta)^2 , \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} ,$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin\theta\cos\theta , \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r} , \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot\theta .$$

Podemos então reescrever (3.57), neste caso, como

$$\square u_{\omega lm} = \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \tilde{\nabla}^2 \right] u_{\omega lm} = 0 , \quad (3.59)$$

com  $\tilde{\nabla}^2$  definido em (2.10). Assumindo-se que a dependência angular de  $u_{\omega lm}$  seja dada pelos harmônicos esféricos [11], podemos escrever

$$u_{\omega lm}(x^\mu) = R_{\omega l}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} \quad (\omega > 0) \quad (3.60)$$

Em seguida usamos (2.12) e (3.60) para reescrever (3.59) como

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \left( \omega^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \right] R_{\omega l}(r) = 0 , \quad (3.61)$$

ou ainda, definindo  $R_{\omega l}(r) \equiv \psi_{\omega l}^M(r)/r$ , como

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} + V_M \right] \psi_{\omega l}^M(r) = \omega^2 \psi_{\omega l}^M(r) , \quad (3.62)$$

com o potencial *espalhador* (vide figura 3.1)

$$V_M \equiv \frac{l(l+1)}{r^2} . \quad (3.63)$$



A equação diferencial (3.61) é na verdade a equação diferencial que define as funções de Bessel esféricas na variável  $\omega r$ , i.e.,  $j_l(\omega r)$  e  $\eta_l(\omega r)$ . Podemos descartar a solução  $\eta_l(\omega r)$  pois os modos a ela associados não são normalizáveis, como consequência de seu comportamento divergente na origem. Podemos, desta forma, reescrever (3.60) como

$$u_{\omega lm}(x^\mu) = C_\omega j_l(\omega r) Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} \quad (\omega > 0) , \quad (3.64)$$

onde  $C_\omega$  é a constante a ser determinada pela normalização de  $u_{\omega lm}(x^\mu)$ .

Tal normalização será obtida a partir do produto interno de Klein-Gordon,

$$\sigma_{KG}(\phi, \psi) = i \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma^{(3)} n^\mu [\phi^* (\nabla_\mu \psi) - (\nabla_\mu \phi^*) \psi] , \quad (3.65)$$

onde aqui  $d\Sigma^{(3)} = \sqrt{-\eta^{(3)}} d^3x$  é o elemento de (tri)volume invariante no espaço-tempo plano da superfície de Cauchy  $\Sigma^{(3)}$ ,  $n^\mu$  é o vetor unitário ortogonal à superfície tipo espaço  $\Sigma^{(3)}$ , direcionado para o futuro, e  $\eta^{(3)}$  é o determinante da métrica restrita a  $\Sigma^{(3)}$ . Uma vez que (3.65) é independente de  $\Sigma^{(3)}$ , escolhemos a superfície  $\Sigma_t^{(3)}$  com  $t = \text{constante}$ . Desta forma, para o caso do espaço-tempo plano com coordenadas polares esféricas, temos que

$$d\Sigma_t^{(3)} = \sqrt{-\eta^{(3)}} dr d\theta d\varphi = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi , \quad (3.66)$$

e

$$n^\mu = \delta_0^\mu . \quad (3.67)$$

À semelhança do que fizemos no capítulo 2, impomos as condições de ortonormalização dos modos  $u_{\omega lm}$  e seus complexos conjugados  $u_{\omega lm}^*$ , a saber

$$\sigma_{KG}(u_{\omega lm}, u_{\omega' l' m'}) = \delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{mm'} , \quad (3.68)$$

$$\sigma_{KG}(u_{\omega lm}^*, u_{\omega' l' m'}) = 0 . \quad (3.69)$$

Segue então que,  $[\hat{a}_{\omega lm}^{\text{in}}, \hat{a}_{\omega' l' m'}^{\text{in}}] = [\hat{a}_{\omega lm}^{\text{in}\dagger}, \hat{a}_{\omega' l' m'}^{\text{in}\dagger}] = 0$ , e  $[\hat{a}_{\omega lm}^{\text{in}}, \hat{a}_{\omega' l' m'}^{\text{in}\dagger}] = \delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{mm'}$ . Usando (3.65), podemos normalizar (3.64) encontrando assim a constante  $C_\omega$ . De (3.64)-(3.67), obtemos

$$\begin{aligned} \sigma_{KG}(u_{\omega lm}, u_{\omega' l' m'}) &= (\omega + \omega') C_\omega^* C_{\omega'} e^{i(\omega - \omega')t} \int_0^\infty dr r^2 j_{l'}(\omega' r) j_l(\omega r) \times \\ &\quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\theta d\varphi \sin\theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) . \end{aligned} \quad (3.70)$$



Substituindo (2.48) e

$$\int_0^\infty dr r^2 j_l(\omega' r) j_l(\omega r) = \frac{\pi}{2\omega^2} \delta(\omega - \omega') , \quad (3.71)$$

em (3.70), ficamos com

$$\sigma_{KG}(u_{\omega lm}, u_{\omega' l' m'}) = \frac{\pi}{\omega} |C_\omega|^2 \delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{mm'} . \quad (3.72)$$

Comparando (3.72) com (3.68), obtemos

$$C_\omega = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} , \quad (3.73)$$

a menos de uma fase multiplicativa arbitrária.

Passemos agora à determinação da potência irradiada, assim como calculada por observadores inerciais. Iniciemos pela introdução do vácuo de Minkowski,  $|0\rangle_M$ , que é o estado no qual observadores inerciais não vêem nenhuma partícula, definido por

$$\hat{a}_{\omega lm}^{\text{in}} |0\rangle_M = 0 . \quad (3.74)$$

A nível de árvore, a amplitude de transição entre este vácuo e o estado de uma partícula com números quânticos  $\omega$ ,  $l$  e  $m$ ,  $|1; \omega lm\rangle$ , é dada por [25]

$$\mathcal{A}_{\omega lm}^{em} = \langle 1; \omega lm | i \hat{S}_I | 0 \rangle_M ,$$

onde

$$\hat{S}_I \equiv \int d^4x \sqrt{-\eta} j^M \hat{\Phi}^{\text{in}} \quad (3.75)$$

é a ação de interação . Desta forma, usando (3.55), (3.74), que

$$\hat{a}_{\omega' l' m'}^{\text{in} \dagger} |0\rangle_M = |1; \omega' l' m'\rangle ,$$

e que

$$\langle 1; \omega lm | 1; \omega' l' m' \rangle = \delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{mm'} ,$$

podemos escrever

$$\mathcal{A}_{\omega lm}^{M, em} = \langle 1; \omega lm | i \int d^4x \sqrt{-\eta} j^M(x^\mu) \hat{\Phi}^{\text{in}}(x^\mu) | 0 \rangle_M = i \int d^4x \sqrt{-\eta} j^M(x^\mu) u_{\omega lm}^*(x^\mu) . \quad (3.76)$$

No espaço-tempo plano com coordenadas polares esféricas, temos que

$$d^4x \sqrt{-\eta} = dt dr d\theta d\varphi r^2 \sin\theta .$$

Sendo assim, usando as funções delta de Dirac na definição da corrente  $j^M$  dada em (3.51), e a expressão (3.64) para os modos normais com  $C_\omega$  dada em (3.73), obtemos

$$\mathcal{A}_{\omega lm}^{M,em} = i \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \frac{q}{\gamma} j_l(\omega R_M) \int_{-\infty}^{+\infty} dt Y_{lm}(\pi/2, \Omega t) e^{-i\omega t} . \quad (3.77)$$

Lembrando que

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = C_{lm} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} , \quad (3.78)$$

com

$$C_{lm} \equiv (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} , \quad (3.79)$$

podemos reescrever (3.77) como

$$\mathcal{A}_{\omega lm}^{M,em} = i \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \frac{q}{\gamma} C_{lm} P_l^m(0) j_l(\omega R_M) \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i(\omega-m\Omega)t} . \quad (3.80)$$

Lançando mão da definição usual da função delta de Dirac, a saber

$$\delta(x - x_0) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-i(x-x_0)k} , \quad (3.81)$$

obtemos

$$\mathcal{A}_{\omega lm}^{M,em} = 2i\sqrt{\pi\omega} \frac{q}{\gamma} C_{lm} j_l(m\Omega R_M) P_l^m(0) \delta(\omega - m\Omega) . \quad (3.82)$$

Vale ressaltar que a presença de  $\delta(\omega - m\Omega)$  em (3.82) indica que só serão emitidas partículas com frequência  $\omega = m\Omega$ .

A potência emitida, assim como calculada por observadores inerciais, para um valor fixo de momento angular, é dada por

$$W_{lm}^{M,em} = \int_0^{+\infty} d\omega \omega \frac{|\mathcal{A}_{\omega lm}^{M,em}|^2}{T} , \quad (3.83)$$

onde

$$T \equiv 2\pi\delta(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt$$

é o tempo total medido por observadores inerciais [25]. Usando (3.82) e (3.83), obtemos a potência total irradiada

$$W^{M,em} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l W_{lm}^{M,em} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \frac{2q^2 m^2 \Omega^2}{\gamma^2} |j_l(m\Omega R_M)|^2 |Y_{lm}(\pi/2, \Omega t)|^2, \quad (3.84)$$

onde também foi usada, uma vez mais, a definição dos harmônicos esféricos dada em (3.78). Recordemos agora o resultado obtido na seção anterior para a potência irradiada, calculado usando a TCC, a saber (vide (3.41))

$$W_{class}^{M,em} = \frac{q^2 \alpha^2}{12\pi}, \quad (3.85)$$

onde  $\alpha$  é a aceleração própria da fonte clássica com uma trajetória arbitrária. No caso de uma trajetória circular percorrida uniformemente pela fonte  $j^M$  (caso no qual a velocidade é perpendicular a aceleração, ambas medidas no sistema inercial), temos que  $\alpha = \gamma^2 \Omega^2 R_M$ , pelo que obtemos

$$W_{class}^{M,em} = \frac{q^2 \gamma^4 \Omega^4 R_M^2}{12\pi}. \quad (3.86)$$

Usando a fórmula

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l m^2 [j_l(m\zeta)]^2 |Y_{lm}(\pi/2, \varphi)|^2 = \frac{1}{24\pi} \frac{\zeta^2}{(1 - \zeta^2)^3}, \quad (3.87)$$

válida para  $|\zeta| < 1$ , podemos constatar a igualdade entre (3.84) e (3.86). A demonstração da fórmula (3.87) pode ser encontrada em [20].

Concluimos então que o resultado para a potência irradiada por uma fonte em MCU no espaço-tempo de Minkowski, assim como calculada por observadores inerciais usando a TQC a nível de árvore, coincide com o resultado encontrado, também por observadores inerciais, usando a TCC.

Assumindo-se a Lei da Gravitação Newtoniana e usando a terceira lei de Kepler,

$$R_M^N(\Omega) = \left( \frac{M}{\Omega^2} \right)^{1/3}, \quad (3.88)$$

como foi feito na seção 3.1, obtemos  $W_N^{M,em}$  como função de  $\Omega$ ,  $q$  e  $M$ , como sendo

$$W_N^{M,em} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \frac{2q^2 m^2 \Omega^2}{(\gamma_{\Omega}^N)^2} |j_l[m(M\Omega)^{1/3}]|^2 |Y_{lm}(\pi/2, \Omega t)|^2$$

$$= \frac{q^2 M^{2/3} \Omega^{8/3} (\gamma_\Omega^N)^4}{12\pi}, \quad (3.89)$$

onde

$$\gamma_\Omega^N \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - (M\Omega)^{2/3}}},$$

o que naturalmente coincide com o resultado do final da seção anterior, dado por (3.49)-(3.50), obtido usando a TCC. O índice  $N$  denota que estamos assumindo a força gravitacional newtoniana entre a fonte girante e o objeto estelar. Assintoticamente ( $R_M \rightarrow +\infty$ ), a potência emitida pode ser escrita como

$$W_N^{M,em} \Big|_{R_M \rightarrow +\infty} \approx \frac{q^2 M^{2/3} \Omega^{8/3}}{12\pi}. \quad (3.90)$$

### 3.3 Cálculo usando a TQC em Minkowski, assumindo grávitons

Conforme foi dito no final da seção 3.1, não há uma maneira única de definirmos um campo gravitacional no espaço-tempo plano de Minkowski. Uma das maneiras de fazê-lo é simplesmente admitir a Gravitação Newtoniana e identificar a distância dada pela coordenada radial  $R_M$  em (3.51)-(3.52) com a distância que figura na Lei da Gravitação Universal de Newton, como foi feito na seção anterior.

Nesta seção consideraremos que a força gravitacional responsável pela trajetória circular da fonte  $j^M$  no espaço-tempo de Minkowski, dada em (3.51), é originada da troca de grávitons entre o objeto estelar massivo central e a fonte em MCU. Por gráviton entendemos aqui um campo não-massivo, de spin 2 e covariante por transformações de Lorentz, definido no espaço-tempo plano.

A ação clássica que descreve o sistema físico composto pela fonte girante e o objeto estelar, levando em conta a interação entre ambos, é dada por [24]

$$S = S_f + S_g + S_i. \quad (3.91)$$



A ação  $S_f$  da fonte clássica  $j^M$  seguindo uma linha de mundo  $z^\alpha(\tau) = (t, x, y, z)$  é dada por

$$S_f = \frac{1}{2}m \int \frac{dz^\alpha}{d\tau} \frac{dz_\alpha}{d\tau} d\tau, \quad (3.92)$$

onde  $m$  é a massa de repouso da fonte  $j^M$ , e  $\tau$  é o tempo próprio da mesma. A ação do gráviton,  $S_g$ , representado pelo campo  $h_{\alpha\beta}$ , simétrico ( $h_{\beta\alpha} = h_{\alpha\beta}$ ), pode ser escrita como

$$S_g = \frac{-1}{32\pi G} \int \left( \frac{1}{2} \partial_\alpha h_{\gamma\beta} \partial^\alpha \bar{h}^{\gamma\beta} - \partial^\alpha \bar{h}_{\gamma\alpha} \partial_\beta \bar{h}^{\gamma\beta} \right) d^4x, \quad (3.93)$$

onde  $\bar{h}_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h^\gamma_\gamma$ , sendo  $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$  as componentes da métrica do espaço-tempo de Minkowski em coordenadas cartesianas, e  $h^\gamma_\gamma = \eta^{\alpha\beta}h_{\beta\alpha}$ . (A ação (3.93) corresponde a um campo de spin 2 no espaço-tempo plano, covariante por transformações de Lorentz e com massa nula [26].) A ação de interação  $S_i$  entre a fonte e o campo do gráviton é dada por

$$S_i = \frac{1}{2} \int h_{\alpha\beta} T_f^{\alpha\beta} d^4x, \quad (3.94)$$

onde  $T_f^{\alpha\beta}$  é o tensor energia-momentum da fonte seguindo uma linha de mundo  $z^\alpha$ , dado por

$$T_f^{\alpha\beta} = \int m \frac{dz^\alpha}{d\tau} \frac{dz^\beta}{d\tau} \delta^4[x - z(\tau)] d\tau. \quad (3.95)$$

Note-se que a ação total do problema inclui também a parte relativa ao campo quântico  $\hat{\Phi}(x^\alpha)$  e à interação entre este e a fonte clássica  $j^M(x^\alpha)$ , dada por (3.54). A ação clássica (3.91) acima representa simplesmente a dinâmica do sistema composto pela fonte e objeto estelar, cuja interação é descrita aqui através de uma teoria clássica de campos que é covariante por transformações de Lorentz.

Usando as equações de Euler-Lagrange, podemos então obter as equações de movimento do sistema. Para a dinâmica da partícula, calculando  $\delta S / \delta z^\alpha = 0$ , obtemos

$$(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \frac{d^2 z^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \frac{dz^\beta}{d\tau} \frac{dz^\gamma}{d\tau} = 0, \quad (3.96)$$

com

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} (\partial_\gamma h_{\alpha\beta} + \partial_\beta h_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha h_{\beta\gamma}). \quad (3.97)$$

Requerendo que o campo do gráviton satisfaça o *gauge* (calibre) harmônico

$$\partial_\alpha \bar{h}^{\beta\alpha} = 0, \quad (3.98)$$

obtemos para a dinâmica do campo, calculando  $\delta S/\delta h_{\alpha\beta} = 0$ , que

$$\square \bar{h}^{\alpha\beta} = \partial_\gamma \partial^\gamma \bar{h}^{\alpha\beta} = -16\pi T^{\alpha\beta}. \quad (3.99)$$

É oportuno ressaltar aqui que as equações (3.99) tratam-se, na verdade, das equações de Einstein linearizadas, obtidas assumindo-se uma métrica  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ , com  $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$  (considerando-se apenas as contribuições até primeira ordem em  $h_{\alpha\beta}$  e suas derivadas). Este é o melhor argumento a favor de usarmos a ação (3.93): ela representa uma teoria efetiva para a interação gravitacional entre a fonte e o objeto estelar que é equivalente à Gravitação Einsteiniana no limite de campo fraco desta última.

Representaremos o objeto estelar localizado na origem do sistema de coordenadas, com massa  $M$ , pelo tensor energia-momentum para uma massa puntual estática, cujas componentes são  $T^{00} = M\delta^3(x)$  e  $T^{\alpha i} = 0$ . Substituindo estas componentes em (3.99), obtemos

$$h_{00} = \frac{2M}{r}, \quad h_{0i} = 0, \quad h_{ij} = \delta_{ij} \frac{2M}{r}, \quad (3.100)$$

onde  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . A fonte em movimento circular uniforme em torno do objeto estelar dada por (3.51) pode ser representada pela linha de mundo  $z^\alpha$ , que, em coordenadas cartesianas, é escrita como

$$z^\alpha = (t, x, y, z) = [\gamma\tau, R_M \cos(\Omega\gamma\tau), R_M \sin(\Omega\gamma\tau), 0], \quad (3.101)$$

com

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - R_M^2 \Omega^2}, \quad (3.102)$$

que denota o movimento no plano equatorial. Definamos então a *quadriforça* (por unidade de massa da fonte girante), responsável pelo movimento da fonte, como sendo

$$F_\gamma \equiv \Gamma_{\gamma\alpha\beta} \frac{dz^\alpha}{d\tau} \frac{dz^\beta}{d\tau}. \quad (3.103)$$

Usando (3.100) e (3.101) em (3.103), lembrando que  $\Gamma_{\gamma\alpha\beta}$  são dados por (3.97), obtemos

$$F_\alpha = \frac{M}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \frac{[1 + \Omega^2(x^2 + y^2)]}{[1 - \Omega^2(x^2 + y^2)]} (0, x, y, 0). \quad (3.104)$$

Usando (3.104) na equação de movimento da fonte, que agora pode ser escrita como

$$(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \frac{d^2 z^\beta}{d\tau^2} + F_\alpha = 0,$$

obtemos que

$$\Omega^2 (R_M^g)^3 = \frac{M}{\gamma^2}, \quad (3.105)$$

onde  $\gamma$  é dado em (3.102) e o índice  $g$  denota que, para o cálculo das grandezas que o carregam, foi assumida uma força gravitacional originada pela troca de grávitons. Resolvendo a equação acima para  $R_M^g$ , obtemos

$$R_M^g(\Omega) = \frac{2^{\frac{1}{3}} M^2 \Omega^2}{3 \left( 27 M \Omega^4 - 2 M^3 \Omega^6 + \sqrt{-4 M^6 \Omega^{12} + (27 M \Omega^4 - 2 M^3 \Omega^6)^2} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 27 M \Omega^4 - 2 M^3 \Omega^6 + \sqrt{-4 M^6 \Omega^{12} + (27 M \Omega^4 - 2 M^3 \Omega^6)^2} \right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}} 3 \Omega^2} - \frac{M}{3}, \quad (3.106)$$

onde  $R_M^g > 0$ .

Uma vez obtida a relação entre  $R_M$  e  $\Omega$ , no caso da força gravitacional sendo originada pela troca de grávitons no espaço-tempo de Minkowski, devemos substituí-la em (3.86) para encontrarmos a potência emitida  $W_g^{M,em}$  neste caso. Fazendo isso, ficamos com

$$W_g^{M,em} = \frac{q^2 M^{2/3} \Omega^{8/3} (\gamma_\Omega^g)^{8/3}}{12\pi}, \quad (3.107)$$

onde

$$\gamma_\Omega^g \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - (R_M^g)^2 \Omega^2}},$$

com  $R_M^g(\Omega)$  dado em (3.106).

Assintoticamente ( $R_M \rightarrow +\infty$ ), a potência emitida pode ser escrita como em (3.90),

i.e.,

$$W_g^{M,em} \Big|_{R_M \rightarrow +\infty} \approx \frac{q^2 M^{2/3} \Omega^{8/3}}{12\pi}. \quad (3.108)$$



### 3.4 Cálculo usando a TQC em Schwarzschild, assumindo Relatividade Geral

Nosso próximo passo consiste em analisar a potência emitida por uma fonte em movimento circular uniforme em torno de um buraco negro sem carga e com momento angular nulo (portanto no espaço-tempo de Schwarzschild), usando a Teoria Quântica de Campos em Espaços-tempos Curvos a nível de árvore, assumindo Relatividade Geral.

Vamos então considerar uma fonte em movimento circular neste espaço-tempo de um buraco negro de Schwarzschild, com elemento de linha dado em (2.1), localizada em  $r = R_S$  com velocidade angular constante  $\Omega > 0$  (assim como medida por observadores estáticos no infinito), restrita ao plano  $\theta = \pi/2$ , descrita por

$$j^S(x^\mu) = \frac{q}{\sqrt{-g} u_S^0} \delta(r - R_S) \delta(\theta - \pi/2) \delta(\varphi - \Omega t), \quad (3.109)$$

com  $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ , e a constante  $q$  determinando, como no caso plano, a magnitude do acoplamento entre o campo quântico e a fonte clássica. A quadrivelocidade desta fonte é dada por

$$u_S^\mu(\Omega, R_S) = \left[ \frac{1}{(f(R_S) - R_S^2 \Omega^2)^{1/2}}, 0, 0, \frac{\Omega}{(f(R_S) - R_S^2 \Omega^2)^{1/2}} \right]. \quad (3.110)$$

Novamente a fonte foi normalizada requerendo-se que  $\int d\sigma^{(3)} j^S(x^\mu) = q$ , onde  $d\sigma^{(3)}$  é o elemento diferencial de (tri)volume ortogonal a  $u_S^\mu$ , pela métrica de Schwarzschild.

Vale ressaltar que, de acordo com a Relatividade Geral, uma fonte em movimento circular uniforme ao redor de um buraco negro segue uma geodésica e portanto tem aceleração própria nula. Este fato será explorado no item 3.4.1, onde obter-se-á a relação entre a coordenada radial  $R_S$  e a velocidade angular  $\Omega$  desta fonte.

Vamos assumir, como nas seções anteriores, o acoplamento mínimo da fonte  $j^S(x^\mu)$  com o campo escalar  $\hat{\Phi}(x^\mu)$ . A nível de árvore, a amplitude de emissão de uma partícula com números quânticos  $\omega, l$  e  $m$ , devido à interação do campo quântico  $\hat{\Phi}$  com a fonte  $j^S$  é

$$\mathcal{A}_{\omega lm}^{S,em} = \langle 1; \omega lm | i \int d^4x \sqrt{-g} j^S(x^\mu) \hat{\Phi}^{in}(x^\mu) | 0 \rangle_B, \quad (3.111)$$

onde escolhemos como estado inicial do campo o vácuo de Boulware  $|0\rangle_B$ , definido no capítulo 2. Usando a expansão do campo escalar quântico inicial (2.34), a definição do vácuo, que  $\hat{a}_{\omega'l'm'}^{\dagger} |0\rangle_B = |1; \omega'l'm'\rangle$ , e que os estados do espaço de Fock são ortonormais, ficamos com

$$\mathcal{A}_{\omega lm}^{S,em} = i \int d^4x \sqrt{-g} j^S(x^\mu) u_{\omega lm}^*(x^\mu). \quad (3.112)$$

De (2.2), (2.11), (3.78), (3.79) e (3.109) podemos reescrever (3.112) como

$$\mathcal{A}_{\omega lm}^{S,em} = 2i\pi q \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \frac{1}{u_S^0(R_S)} \frac{\psi_{\omega l}^{S*}(R_S)}{R_S} C_{lm} P_l^m(0) \delta(\omega - m\Omega). \quad (3.113)$$

A potência emitida, assim como calculada por observadores estáticos assintóticos, é dada por

$$W_{lm}^{S,em} = \int_0^{+\infty} d\omega \omega \frac{|\mathcal{A}_{\omega lm}^{S,em}|^2}{T}, \quad (3.114)$$

onde  $T = 2\pi\delta(0)$  é o tempo total assim como medido por estes observadores. Usando (3.113) em (3.114) obtemos

$$W_{lm}^{S,em} = 2q^2 m^2 \Omega^2 [f(R_S) - R_S^2 \Omega^2] \frac{|\psi_{\omega_0 l}^S(R_S)|^2}{R_S^2} |Y_{lm}(\pi/2, \Omega t)|^2, \quad (3.115)$$

onde  $\omega_0 \equiv m\Omega$  e  $l, m \geq 1$ . Notemos que [11]  $Y_{lm}(\pi/2, \Omega t) = 0$ , para  $l + m$  ímpar e

$$|Y_{lm}(\pi/2, \Omega t)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m-1)!!(l-m-1)!!}{(l+m)!!(l-m)!!}, \quad (3.116)$$

para  $l + m$  par. De (3.116) fica claro que  $Y_{lm}(\pi/2, \Omega t)$  não depende do tempo. Aqui  $n!! \equiv n(n-2) \cdots 1$ , se  $n$  for ímpar e  $n!! \equiv n(n-2) \cdots 2$ , se  $n$  for par.

Vemos então que, para o cálculo da potência irradiada pela fonte girante  $j^S$ , precisamos das soluções  $\psi_{\omega l}^S(r)$  de (2.17). No entanto, a solução geral de (2.17) não pode ser expressa em termos de funções especiais conhecidas [9]. Sendo assim, adotaremos duas estratégias para prosseguir com a análise do problema. A primeira, que consiste em resolver (2.17) numericamente e portanto realizar um cálculo numérico da potência emitida, será apresentada na seção 3.4.2. A outra será resolver (2.17) utilizando uma aproximação simplificadora. Na seção 3.4.3 resolveremos (2.17) e calcularemos a potência irradiada no limite de baixas frequências.

### 3.4.1 A relação entre $R_S$ e $\Omega$ , segundo a Relatividade Geral

Para que possamos expressar a potência irradiada somente em termos de grandezas que possam ser medidas assintoticamente é necessário relacionar a coordenada radial  $R_S$  da fonte girante com sua velocidade angular  $\Omega$  (assim como medida por observadores estáticos no infinito).

Seja a quadrivelocidade da fonte  $j^S$  dada por

$$u^\mu \equiv \frac{dz^\mu}{d\tau}.$$

Inicialmente, consideremos o movimento da fonte  $j^S$ , com massa de repouso  $m$  (dado portanto por uma trajetória tipo tempo), restrito ao plano  $\theta = \pi/2$ .

A equação  $u^\mu u_\mu = 1$ , no caso do movimento equatorial na geometria de Schwarzschild, reduz-se a

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = +(1 - 2M/r) \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - (1 - 2M/r)^{-1} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = +1. \quad (3.117)$$

Assumindo-se que a fonte  $j^S$  está seguindo uma geodésica, temos duas constantes de movimento [27]. Uma delas é a energia total (incluindo a energia potencial gravitacional) por unidade de massa de repouso da fonte seguindo a geodésica, com relação a um observador estático no infinito,

$$\mathcal{E} = +g_{\mu\nu} \xi^\mu u^\nu = (1 - 2M/r) \left( \frac{dt}{d\tau} \right), \quad (3.118)$$

onde  $\xi^\mu = (\partial/\partial t)^\mu = (1, 0, 0, 0)$  denota o campo de Killing estático tipo tempo. A outra é o momento angular por unidade de massa de repouso da fonte,

$$L = -g_{\mu\nu} \psi^\mu u^\nu = r^2 \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right), \quad (3.119)$$

onde  $\psi^\mu = (\partial/\partial \varphi)^\mu = (0, 0, 0, 1)$  denota o campo de Killing rotacional tipo espaço. Substituindo (3.118) e (3.119) em (3.117) e manipulando algebricamente o resultado obtemos a equação da geodésica tipo tempo, para a fonte massiva  $j^S$  no espaço-tempo de Schwarzschild, em movimento no plano equatorial, dada por

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left( \frac{L^2}{r^2} + 1 \right) = \frac{1}{2} \mathcal{E}^2, \quad (3.120)$$



escrita em termos das constantes do movimento geodésico  $\mathcal{E}$  e  $L$ . A equação (3.120) nos mostra que o movimento radial da fonte massiva seguindo uma geodésica em Schwarzschild é o mesmo do de uma partícula de massa unitária, com energia  $\mathcal{E}^2/2$ , submetida ao potencial efetivo

$$V = \frac{1}{2} - \frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3}, \quad (3.121)$$

analisado segundo a mecânica unidimensional não-relativística usual. Um eventual movimento radial da fonte é determinado pelo potencial efetivo acima, enquanto que o seu movimento angular e a mudança na coordenada temporal  $t$  são obtidos das equações (3.119) e (3.118) acima, respectivamente.

Os extremos do potencial efetivo (3.121) são obtidos da equação

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{(Mr^2 - L^2r + 3ML^2)}{r^4} = 0, \quad (3.122)$$

cujas raízes são

$$R_{\pm} = \frac{L^2 \pm (L^4 - 12L^2M^2)^{1/2}}{2M}. \quad (3.123)$$

Se  $L^2 < 12M^2$ , não há pontos extremos no potencial. Se  $L^2 = 12M^2$ , há um ponto de inflexão no potencial em  $R_+ = R_- = 6M$ , ao qual está associada uma órbita circular geodésica instável da fonte. Finalmente, se  $L^2 > 12M^2$ , há um ponto de mínimo do potencial  $V$  em  $R_+$  e um máximo em  $R_-$ . Sendo assim concluímos que, para a fonte massiva com valores suficientemente grandes do momento angular  $L$ , existem órbitas circulares estáveis para  $R_S > 6M$ , e órbitas circulares instáveis para  $3M < R_S \leq 6M$ . Pode-se ainda mostrar que a luz pode permanecer em uma órbita circular instável em  $r = 3M$ .

A fonte  $j^S$ , em MCU, dada pela equação (3.109), orbitando na geometria de Schwarzschild emitirá partículas escalares com frequência  $\omega = m\Omega = \frac{mL}{R_S^2 u_S^0}$ , devido à interação com o campo escalar quântico  $\hat{\Phi}(x^\mu)$  [vide (3.113) e (3.124)]. (Na verdade a fonte  $j^S$  também estará emitindo ondas gravitacionais, mas isto não será levado em conta nesta tese.) Devido à reação da radiação (cujos detalhes não serão tratados aqui) a fonte desviar-se-á ligeiramente do movimento geodésico. Considerando-se a fonte  $j^S$  como estando localizada originalmente

em  $R_S > 6M$ , com  $L^2 > 12M^2$ , ela deverá espiralar lentamente até raios cada vez menores, perdendo energia através da emissão de radiação escalar, permanecendo em órbitas circulares, aproximadamente, até ela atingir o raio orbital  $R_S = 6M$ . Naquele ponto, a órbita tornar-se-á instável e a fonte deverá cair rapidamente na singularidade localizada em  $r = 0$ .

Usamos então (3.123) e que

$$L = r^2 \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right) = r^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right) \left( \frac{dt}{d\tau} \right) = r^2 \Omega u^0, \quad (3.124)$$

com  $u^0$  dado em (3.110), para obter, segundo a Relatividade Geral, que as órbitas circulares estáveis são tais que

$$R_S = \left( \frac{M}{\Omega^2} \right)^{1/3}. \quad (3.125)$$

### 3.4.2 Cálculo numérico da potência irradiada

Nesta seção descreveremos o procedimento de obtenção das soluções numéricas de (2.17) e sua utilização para calcular a potência emitida pela fonte girante  $j^S$ .

Devemos encontrar as soluções de (2.17) provenientes de  $H^-$  e  $\mathcal{J}^-$ ,  $\psi_{\omega l}^{\rightarrow, S}(r)$  e  $\psi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(r)$ , cujos valores assintóticos sejam compatíveis com as equações (2.52) e (2.53), respectivamente. A seguir apresentamos um resumo do método numérico utilizado para encontrar as funções radiais  $\psi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(r)$ , provenientes do infinito passado tipo luz  $\mathcal{J}^-$ .

De (2.53) concluímos que, perto do horizonte de eventos,

$$\psi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(r) \propto \exp(-2iM\omega x) \quad (x \ll -1).$$

Iniciemos então com uma solução de (2.17), proveniente de  $\mathcal{J}^-$ , com módulo unitário, dada por

$$\chi_{\omega l}^{\leftarrow}(x_L) = \exp(-2iM\omega x_L), \quad (3.126)$$

para um valor fixo de  $\omega$ , com  $x_L \ll -1$ . Vale ressaltar que (3.126) dada acima não está normalizada.  $\chi_{\omega l}^{\leftarrow}(x_L)$  será a condição inicial na região assintótica próxima ao horizonte futuro  $H^+$ , onde  $x \rightarrow -\infty$  (ou  $r \gtrsim 2M$ ). Devemos então evoluir numericamente esta solução rumo

a  $x \rightarrow +\infty$  ( $r \rightarrow +\infty$ ), através da equação diferencial (2.17). O resultado será, para regiões suficientemente distantes do horizonte (para muito além do máximo do potencial (2.15)),

$$\chi_{\omega l}^{\leftarrow}(x_R) \approx C_{\omega l}^{\leftarrow} \exp(-2iM\omega x_R) + D_{\omega l}^{\leftarrow} \exp(2iM\omega x_R), \quad (3.127)$$

com  $x_R \gg 1$ , e  $|C_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 - |D_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 = 1$ . (Vale notar, de (2.53) para  $x \gg 1$ , usando que  $h_l^{(1)}(x) \approx (-i)^{l+1} \exp(ix)/x$  neste limite, que  $\psi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(x) \approx [\exp(-2iM\omega x) + \mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow} \exp(+2iM\omega x)]/2\omega$ .) Calculando a derivada de  $\chi_{\omega l}^{\leftarrow}$  (com relação a  $x$ ), no ponto  $x_R \gg 1$ , obtemos

$$\frac{d\chi_{\omega l}^{\leftarrow}}{dx}(x_R) \approx -2iM\omega C_{\omega l}^{\leftarrow} \exp(-2iM\omega x_R) + 2iM\omega D_{\omega l}^{\leftarrow} \exp(2iM\omega x_R). \quad (3.128)$$

Desta forma,

$$|C_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 = \frac{1}{4} \left[ |\chi_{\omega l}^{\leftarrow}(x_R)|^2 + \frac{1}{4M^2\omega^2} \left| \frac{d\chi_{\omega l}^{\leftarrow}}{dx}(x_R) \right|^2 \right] + \frac{1}{2}, \quad (3.129)$$

e

$$|D_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 = \frac{1}{4} \left[ |\chi_{\omega l}^{\leftarrow}(x_R)|^2 + \frac{1}{4M^2\omega^2} \left| \frac{d\chi_{\omega l}^{\leftarrow}}{dx}(x_R) \right|^2 \right] - \frac{1}{2}. \quad (3.130)$$

Vale lembrar que a função  $\chi_{\omega l}^{\leftarrow}$  não está normalizada. Vamos então multiplicá-la por uma constante de normalização  $K_{\omega l}$ :

$$K_{\omega l} \chi_{\omega l}^{\leftarrow}(x) \approx \begin{cases} K_{\omega l} e^{-2iM\omega x} & (r \gtrsim 2M) , \\ K_{\omega l} (C_{\omega l}^{\leftarrow} e^{-2iM\omega x} + D_{\omega l}^{\leftarrow} e^{+2iM\omega x}) & (r \gg 2M) . \end{cases} \quad (3.131)$$

Em seguida, para determinar  $K_{\omega l}$ , requeremos que as condições de contorno assintóticas de (3.131) sejam compatíveis com (2.53), que pode ser reescrita como

$$\psi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(x) \approx \begin{cases} A_{\omega l}^{\leftarrow} \tau_{\omega l}^{\leftarrow} e^{-2iM\omega x} & (r \gtrsim 2M) , \\ A_{\omega l}^{\leftarrow} (e^{-2iM\omega x} + \mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow} e^{+2iM\omega x}) & (r \gg 2M) . \end{cases} \quad (3.132)$$

Obtemos então que

$$K_{\omega l} = A_{\omega l}^{\leftarrow} \tau_{\omega l}^{\leftarrow} ,$$

$$C_{\omega l}^{\leftarrow} = \frac{1}{\tau_{\omega l}^{\leftarrow}} ,$$

$$D_{\omega l}^{\leftarrow} = \frac{\mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow}}{\tau_{\omega l}^{\leftarrow}} .$$



Podemos assim concluir que

$$\psi_{\omega l}^{\leftarrow, S}(x) = A_{\omega l}^{\leftarrow} \tau_{\omega l}^{\leftarrow} \chi_{\omega l}^{\leftarrow}(x). \quad (3.133)$$

Vale ressaltar que o erro numérico neste método será tanto menor quanto maiores os módulos de  $x_L < 0$  e  $x_R > 0$ . Para uniformizarmos este procedimento, para cada valor de  $\omega$  escolhemos  $x_L$  e  $x_R$  tais que o potencial  $V_S$ , dado em (2.15), seja sempre menor ou igual a 5% de  $\omega^2$ , de forma que as exponenciais  $e^{\pm 2iM\omega x}$  sejam de fato boas aproximações para  $\psi_{\omega l}^S(x)$ .

Desta forma, fica explicado como é feito o cálculo numérico de  $\psi_{\omega l}^{\leftarrow, S}$ , para um valor fixo de  $\omega$ . O cálculo do valor numérico de  $\psi_{\omega l}^{\rightarrow, S}$  é feito de maneira completamente análoga.

Para encontramos as amplitudes correspondentes, substituímos as funções radiais  $\psi_{\omega l}^{\leftarrow, S}$  e  $\psi_{\omega l}^{\rightarrow, S}$  em (3.113), obtendo

$$\mathcal{A}_{\omega lm}^{n, S, em} = 2iq\sqrt{\pi\omega} [f(R_S) - R_S^2\Omega^2]^{1/2} \frac{\psi_{\omega l}^{n, S*}(R_S)}{R_S} C_{lm} P_l^m(0) \delta(\omega - m\Omega), \quad (3.134)$$

para  $n = \rightarrow, \leftarrow$ , onde  $C_{lm}$  foi definido em (3.79). Em seguida encontramos as respectivas potências irradiadas, dadas por

$$W_{lm}^{n, S, em} = 2m^2\Omega^2 q^2 [f(R_S) - R_S^2\Omega^2] \frac{|\psi_{\omega l}^{n, S}(R_S)|^2}{R_S^2} |Y_{lm}(\pi/2, \Omega t)|^2, \quad (3.135)$$

onde  $\omega_0 \equiv m\Omega$  e  $l, m \geq 1$ . A expressão para  $|Y_{lm}(\pi/2, \Omega t)|^2$  foi dada em (3.116).

Na figura 3.2, mostramos a potência irradiada total para valores fixos do momento angular,

$$W_{lm}^{S, em} = W_{lm}^{\rightarrow, S, em} + W_{lm}^{\leftarrow, S, em}, \quad (3.136)$$

em função da velocidade angular  $\Omega$ . Os resultados numéricos apresentam-se como as curvas sólidas da figura 3.2, e foram calculados para  $l = m = 1, 2, 3$ . Vale notar que  $W_{lm}^{S, em} = 0$  para valores ímpares de  $(l + m)$ , uma vez que  $Y_{lm}(\pi/2, \Omega t) = 0$  nestes casos.

### 3.4.3 Cálculo da potência irradiada na aproximação de baixas frequências

Nesta seção encontraremos uma expressão analítica para a potência irradiada pela fonte girante, utilizando uma aproximação de baixas frequências, na qual as funções radiais, soluções

de (2.17), são substituídas por suas contribuições dominantes no limite de baixas frequências.

Para justificar que o limite de baixas frequências é uma boa aproximação para o problema vejamos o seguinte raciocínio. Primeiramente recordemos que, da expressão da amplitude de emissão (3.113), tem-se que  $\mathcal{A}_{\omega lm}^{S,em} \propto \delta(\omega - m\Omega)$ , de onde segue que as partículas emitidas pela fonte em movimento circular uniforme são tais que  $\omega = m\Omega$ . Além disso sabemos que órbitas geodésicas estáveis só são possíveis para  $R_S > 6M$ , sendo em  $R_S = 6M$  a órbita circular geodésica (OCG) tipo tempo mais interna possível. Como  $\Omega = \sqrt{M/R_S^3}$ , segue que esta também é a OCG com maior frequência, dada por  $\omega^{\max} = m(6\sqrt{6} M)^{-1}$ . Denotando por  $V_S^{\max}$  o máximo do potencial de espalhamento  $V_S$  expresso em (2.15), obtemos que  $\omega^2/V_S^{\max} < 10^{-1}$ . No caso particular dos modos com  $m = 1$  que, como veremos adiante, são os modos responsáveis pela contribuição dominante para a potência emitida, temos que  $\omega^2/V_S^{\max} < (\omega^{\max})^2/V_S^{\max} \approx 4 \times 10^{-2} \ll 1$ . Concluimos então que no caso da fonte  $j^S$  em MCU em torno do buraco negro de Schwarzschild, a frequência das partículas emitidas é sempre bem menor do que a raiz quadrada do potencial envolvido, o que justifica e caracteriza como apropriada a aproximação em questão.

Substituindo  $\psi_{\omega l}^{\rightarrow,S}$  e  $\psi_{\omega l}^{\leftarrow,S}$  dados pelas equações (2.67) e (2.76), respectivamente, na expressão da potência emitida com valores fixos do momento angular, dada por (3.115), obtemos

$$W_{lm}^{\rightarrow,S,em} \approx 8q^2 m^2 \Omega^2 (f(R_S) - R_S^2 \Omega^2) \left| Q_l \left( \frac{R_S}{M} - 1 \right) \right|^2 |Y_{lm}(\pi/2, \Omega t)|^2, \quad (3.137)$$

e

$$W_{lm}^{\leftarrow,S,em} \approx \frac{2^{4l+1} q^2 (l!)^6 m^{2l+2} M^{2l} \Omega^{2l+2}}{[(2l)!]^2 [(2l+1)!]^2} (f(R_S) - R_S^2 \Omega^2) \left| P_l \left( \frac{R_S}{M} - 1 \right) \right|^2 |Y_{lm}(\pi/2, \Omega t)|^2, \quad (3.138)$$

onde  $l, m \geq 1$ .

As curvas tracejadas da figura 3.2 exibem  $W_{lm}^{S,em} = W_{lm}^{\rightarrow,S,em} + W_{lm}^{\leftarrow,S,em}$ , para valores fixos do momento angular ( $l = m = 1, 2, 3$ ). Naquela figura vemos que a aproximação analítica adotada aqui é tanto melhor quanto menor o valor de  $\Omega$ . Isto pode ser entendido lembrando que  $\omega \propto \Omega$ , devido a presença da função  $\delta(\omega - m\Omega)$  em (3.113).

A potência total irradiada é então, na aproximação de baixas frequências, dada por

$$W^{S,em} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l W_{lm}^{\leftarrow, S,em} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l W_{lm}^{\rightarrow, S,em}, \quad (3.139)$$

com  $W_{lm}^{\leftarrow, S,em}$  e  $W_{lm}^{\rightarrow, S,em}$  dados por (3.138) e (3.137), respectivamente.

Para órbitas geodésicas circulares suficientemente distantes do horizonte, podemos usar as equações (3.137)-(3.139) para escrever a potência irradiada na forma

$$W^{S,em} \Big|_{R_S \gg 2M} \approx \frac{q^2 M^{2/3} \Omega^{8/3}}{12\pi}. \quad (3.140)$$



### 3.5 Análise e comparação dos resultados deste capítulo

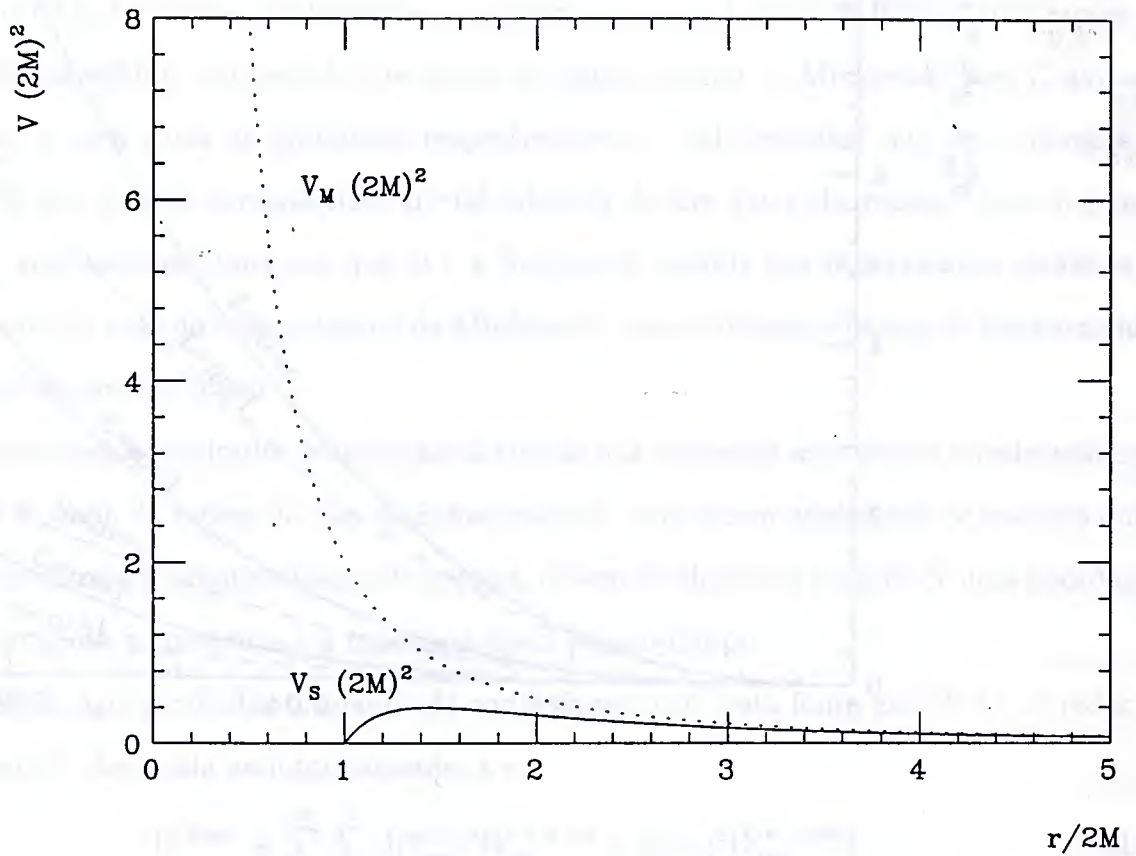
Dedicaremos esta seção final deste capítulo à comparação dos resultados das seções anteriores para a potência emitida pela fonte em movimento circular uniforme, obtidos utilizando diferentes suposições. O fato de termos expressado nossos resultados em função de grandezas medidas pelos mesmos observadores (estáticos assintóticos neste caso), permite que esta comparação tenha efetivamente um sentido quantitativo.

Na seção 3.2 vimos que, no caso do espaço-tempo plano, o resultado para a potência irradiada supondo TCC coincide com o resultado supondo TQC. Esta igualdade (entre (3.84) e (3.86)) vem do fato do cálculo *via* TQC ter sido realizado a nível de árvore (e não envolver partículas virtuais).

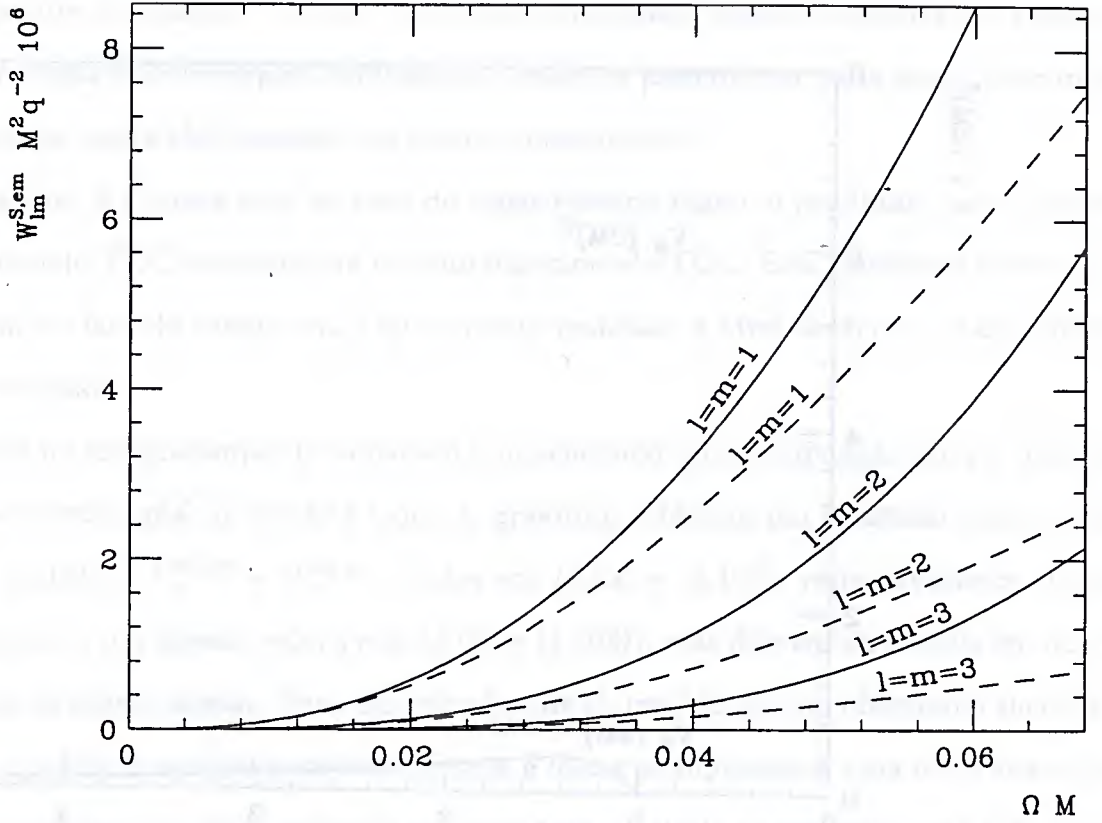
Ainda no espaço-tempo de Minkowski, dependendo qual a suposição para a força gravitacional, se newtoniana ou devida à troca de grávitons, obtemos um resultado diferente para a potência emitida.  $W_N^{M,em}$  e  $W_g^{M,em}$ , dados em (3.89) e (3.107), respectivamente, tendem assintoticamente a um mesmo valor (vide (3.90) e (3.108)), mas diferem na medida em que nos aproximamos do objeto estelar. Para um valor fixo de  $\Omega$ , medido por um observador inercial em Minkowski, a potência emitida pela fonte girante é maior se supusermos uma força newtoniana do que se supusermos uma força induzida por grávitons. A título de exemplo, para  $\Omega M \approx 0.07$ , temos que a potência irradiada é cerca de 15% maior no caso de uma força newtoniana entre a fonte e o corpo estelar massivo, do que para o caso de grávitons.

Vamos agora comparar os resultados obtidos no espaço-tempo de Minkowski com os obtidos no espaço-tempo de Schwarzschild.

Para o caso no qual a interação gravitacional no espaço-tempo de Minkowski é dada pela força gravitacional newtoniana, calculamos a razão  $W^{S,em}/W_N^{M,em}$ , que é mostrada na figura 3.3 como função de  $\Omega$ . Nela exibimos tanto o resultado numérico (curva sólida), quanto o resultado analítico aproximado (curva tracejada). Já na figura 3.4 exibimos a razão  $W^{S,em}/W_g^{M,em}$  também como função de  $\Omega$ , para o caso em que é a troca de grávitons a responsável pela



**Figura 3.1:** Nesta figura mostramos os potenciais  $V_M$  e  $V_S$  como funções de  $r/2M$  para  $l = 1$ . Vale ressaltar que  $V_M$  e  $V_S$  são definidos como funções das coordenadas radiais  $r$  de Minkowski e Schwarzschild, respectivamente. Assintoticamente, vemos que ambos  $V_M$  e  $V_S$  caem como  $1/r^2$ . O potencial  $V_S$  só é definido na região exterior ao horizonte de eventos do buraco negro ( $r > 2M$ ). Devido a não-existência de um horizonte de eventos no caso do espaço-tempo de Minkowski com coordenadas inerciais,  $V_M$  também é definido na região  $0 < r \leq 2M$ .



**Figura 3.2:** Nesta figura mostramos a potência irradiada  $W_{lm}^{S,em}$  como função de  $\Omega M$  para órbitas circulares geodésicas. As curvas sólidas e as curvas tracejadas estão associadas com os resultados numéricos e com os resultados analíticos aproximados, respectivamente. O valor máximo de  $\Omega M$  considerado acima é 0.068, que corresponde à última órbita circular estável possível, segundo a Relatividade Geral. Como era esperado, a aproximação analítica utilizada aqui é tanto melhor quanto menor a energia das partículas emitidas, como podemos ver pela proximidade entre as curvas correspondentes aos resultados numéricos e analíticos aproximados, para baixos valores de  $\Omega$ . Da figura fica claro que as ondas com menores valores de momento angular são responsáveis pelas contribuições dominantes para a potência irradiada total.



interação gravitacional no espaço-tempo plano.

Nas figuras 3.3 e 3.4, vemos que para  $\Omega \rightarrow 0$  a razão  $W^{S,em}/W^{M,em}$  tende a 1, como pode ser constatado, no caso dos resultados analíticos, pelas expressões (3.90), (3.108) e (3.140). No entanto, na medida em que a fonte se aproxima da órbita circular estável mais interna possível, os resultados numéricos e analíticos mostram que  $W^{S,em}/W^{M,em} < 1$ . De fato, obtemos que para órbitas circulares relativísticas a potência emitida é cerca de 30% e 20% menor no caso de Schwarzschild, com relação aos casos do espaço-tempo de Minkowski com Gravitação Newtoniana e com troca de grávitons, respectivamente. Vale ressaltar que esta diferença de 30% e 20% não é uma consequência trivial advinda de um fator de *redshift* (desvio para o vermelho) gravitacional, uma vez que  $\Omega$  é a frequência medida por observadores estáticos no infinito, tanto no caso do espaço-tempo de Minkowski, como do espaço-tempo de Schwarzschild, que é assintoticamente plano.

Esses nossos resultados corroboram o fato de que processos astrofísicos envolvendo comprimentos de onda da ordem do raio de Schwarzschild, para serem analisados de maneira qualitativamente correta e quantitativamente precisa, devem ser descritos através de uma abordagem que leve em conta a curvatura e a topologia deste espaço-tempo.

Vamos agora calcular o quanto da radiação emitida pela fonte em MCU ao redor do buraco negro é observada assintoticamente, *i.e.*,

$$W^{S,obs} \equiv \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \left[ |\mathcal{T}_{\omega_0 l}^{\rightarrow}|^2 W_{lm}^{\rightarrow,S,em} + |\mathcal{R}_{\omega_0 l}^{\leftarrow}|^2 W_{lm}^{\leftarrow,S,em} \right] . \quad (3.141)$$

Usando que  $|\mathcal{R}_{\omega_0 l}^{\leftarrow}|^2 = |\mathcal{R}_{\omega_0 l}^{\rightarrow}|^2 = 1 - |\mathcal{T}_{\omega_0 l}^{\rightarrow}|^2$ , podemos reescrever a expressão acima como

$$W^{S,obs} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \left[ |\mathcal{T}_{\omega_0 l}^{\rightarrow}|^2 (W_{lm}^{\rightarrow,S,em} - W_{lm}^{\leftarrow,S,em}) + W_{lm}^{\leftarrow,S,em} \right] . \quad (3.142)$$

A curva sólida na figura 3.5 mostra o resultado do cálculo numérico de  $W^{S,obs}/W^{S,em}$ . Para o cálculo analítico de  $W^{S,obs}/W^{S,em}$ , na aproximação de baixas frequências, precisamos conhecer a expressão do coeficiente de transmissão  $|\mathcal{T}_{\omega_0 l}^{\rightarrow}|^2$  neste limite, para podermos então obter  $W^{S,obs}$  para  $\omega_0^2/V_S^{\max} \ll 1$ . Pode ser mostrado que [13]

$$Q_l \approx \frac{2^l (l!)^2}{(2l+1)!} z^{-l-1} \quad \text{para } z \gg 1 . \quad (3.143)$$

Usando (3.143), podemos reescrever (2.67), assintoticamente, como

$$\psi_{\omega_0 l}^{\rightarrow, S}(r) \approx \frac{(2M)^{l+1} (l!)^2}{(2l+1)!} r^{-l} \quad (r \gg 2M, \omega_0 \approx 0) . \quad (3.144)$$

Em seguida, usando

$$h_l^{(1)}(k) \approx \eta_l(k) \approx -\frac{(2l)!}{2^l l!} k^{-l-1} \quad (k \ll 1) , \quad (3.145)$$

em (2.52) (fazendo-se  $\omega = \omega_0$ ), e também (2.55) e (2.73), obtemos

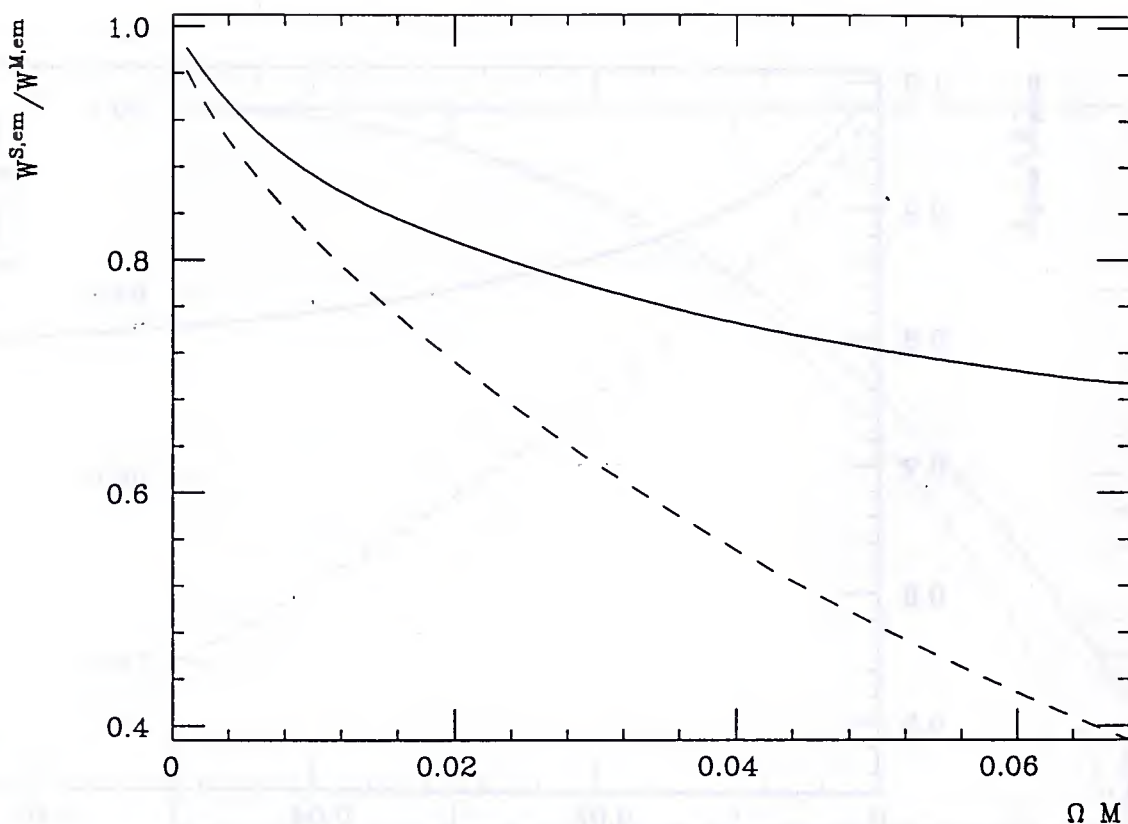
$$\psi_{\omega_0 l}^{\rightarrow, S}(r) \approx \frac{1}{2\omega} \frac{(2l)!}{2^l l!} \mathcal{T}_{\omega_0 l}^{\rightarrow} \omega^{-l} r^{-l} \quad (r \gg 2M, \omega_0 \approx 0) , \quad (3.146)$$

a menos de uma fase arbitrária. Assim, comparando (3.146) com (3.144), nos limites  $r \gg 2M$  e  $\omega_0 r \ll 1$ , ficamos com

$$|\mathcal{T}_{\omega_0 l}^{\rightarrow}| = \frac{2^{2l+2} (l!)^3 (M\omega_0)^{l+1}}{(2l+1)! (2l)!} . \quad (3.147)$$

Usando (3.147), (3.137) e (3.138) em (3.142), obtemos uma aproximação analítica para  $W^{S, obs}/W^{S, em}$ , que é mostrada na curva tracejada da figura 3.5. Nesta figura vemos que muito pouco da radiação emitida pela fonte girante é absorvida pelo buraco negro. Isto não contradiz o fato de que buracos negros de Schwarzschild têm uma seção de choque não-desprezível para partículas escalares com frequência infravermelha (baixas energias) [28] — da ordem da área do horizonte de eventos,  $16\pi M^2$  — porque a contribuição dominante para o cálculo dessa seção de choque vem dos modos com  $l = 0$ , que não são emitidos pela fonte em movimento circular uniforme (lembrar da presença de  $\delta(\omega - m\Omega)$  nas expressões das amplitudes de emissão, tanto no caso de Minkowski como de Schwarzschild).

Pode-se adaptar o procedimento deste capítulo para fontes seguindo outras trajetórias, modificando-se apropriadamente a corrente dada em (3.109). Uma outra possível extensão para o desenvolvimento apresentado aqui seria considerarmos a presença de um disco composto por partículas girando ao redor de um buraco negro (vide [29] e referências lá contidas). Claro está que a presença de matéria em volta dos buracos negros (na forma de discos de acreção) deverá aprisionar a radiação emitida naquela região, devido a efeitos de fricção [17]. Estas questões, no entanto, não serão analisadas nesta tese.



**Figura 3.3:** Na figura acima a razão  $W^{S,em}/W^{M,em}$  é mostrada como função de  $\Omega M$ , assim como calculada por observadores estáticos assintóticos.  $W^{S,em}$  e  $W^{M,em}$  são as potências emitidas pela fonte girante, assim como calculadas por observadores estáticos assintóticos que consideram espaços-tempos de Schwarzschild (assumindo Relatividade Geral) e Minkowski com Gravitação Newtoniana, respectivamente. As somas nos momentos angulares envolvidas nos cálculos de  $W^{S,em}$  e  $W^{M,em}$  foram consideradas até  $l = 3$ . O gráfico é realizado até  $\Omega M = 0.068$ , já que este é o valor correspondente à órbita circular estável mais rápida possível, de acordo com a Relatividade Geral. As curvas sólida e tracejada estão associadas aos cálculos numérico e analítico, respectivamente. Assintoticamente ( $\Omega \rightarrow 0$ ), temos que  $W^{S,em}/W^{M,em} \rightarrow 1$ . Na medida em que  $\Omega$  aumenta, vemos que a razão  $W^{S,em}/W^{M,em}$  diminui.



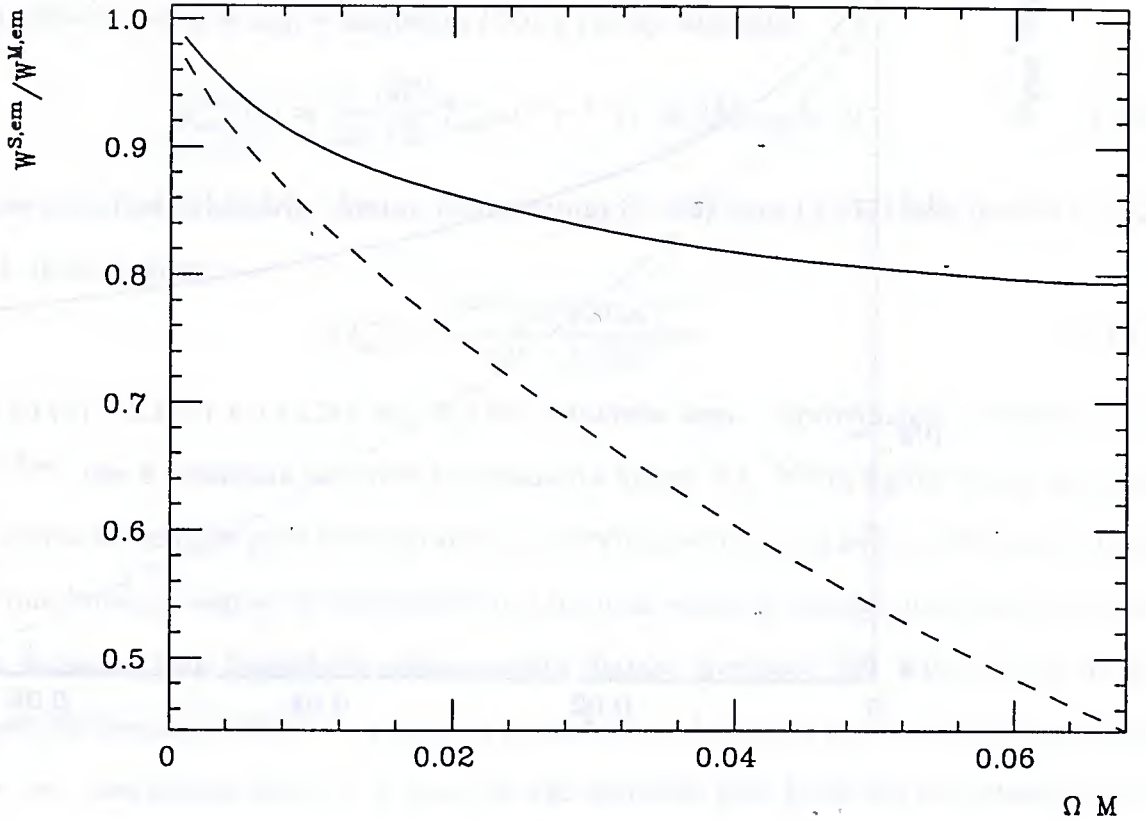
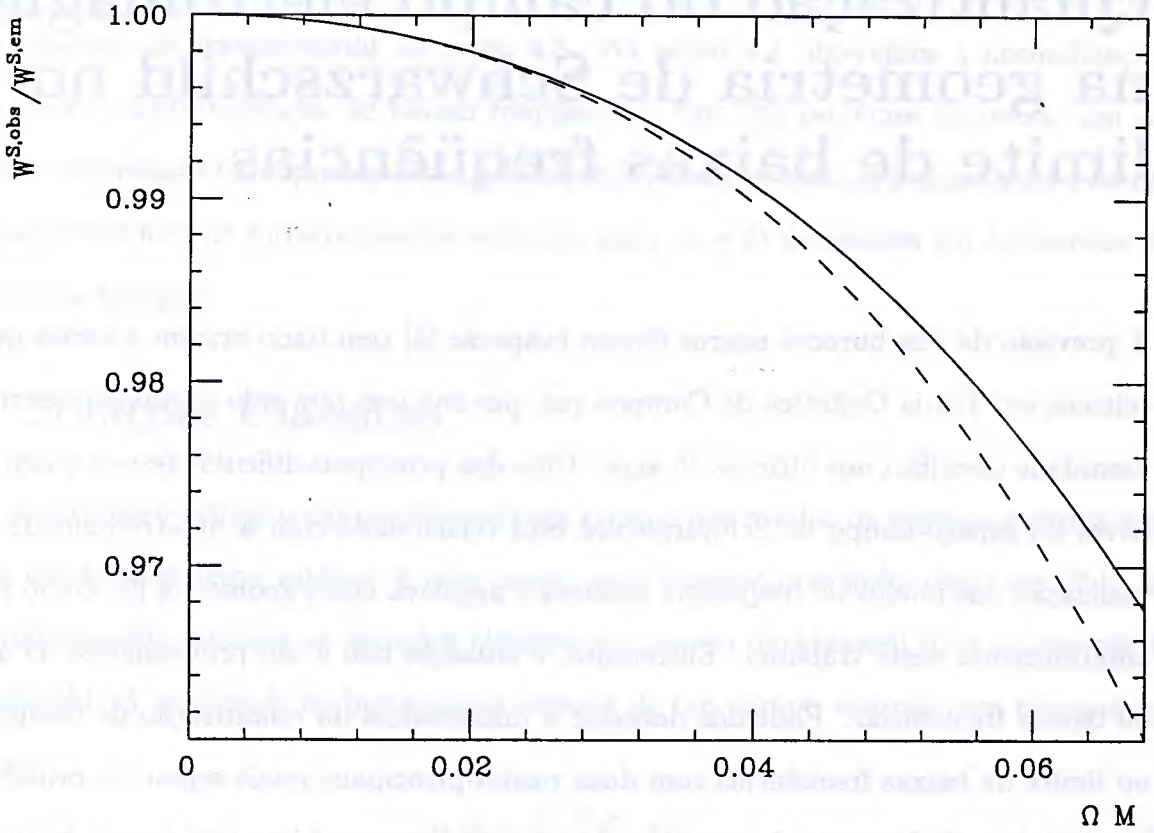


Figura 3.4: De maneira análoga à figura 3.3, a razão  $W^{S,em}/W^{M,em}$  é mostrada como função de  $\Omega M$ . Aqui, no entanto,  $W^{M,em}$  é a potência irradiada pela fonte girante  $j^M$ , assim como calculada por observadores estáticos assintóticos considerando o espaço-tempo de Minkowski, assumindo uma força gravitacional induzida por grávitons, ao invés da força newtoniana usual. Note-se que as figuras 3.3 e 3.4 têm características semelhantes, a saber (i)  $W^{S,em}/W^{M,em} \rightarrow 1$  assintoticamente ( $\Omega \rightarrow 0$ ) e, (ii)  $W^{S,em}/W^{M,em}$  diminui de até cerca de 20% (vide figura 3.4) e de até cerca de 30% (vide figura 3.3), na medida em que  $\Omega$  cresce.



**Figura 3.5:** Nesta figura mostramos a razão  $W^{S,obs}/W^{S,em}$  como função de  $\Omega M$  para órbitas circulares geodésicas. Assim como no caso das figuras 3.3 e 3.4, as somas nos momentos angulares envolvidas são realizadas até  $l = 3$ . Aqui também as curvas sólida e tracejada estão associadas com os resultados numérico e analítico, respectivamente. Da figura vemos que praticamente toda a energia emitida pela fonte girante escapa para o infinito.

## Capítulo 4

# Quantização do campo eletromagnético na geometria de Schwarzschild no limite de baixas frequências

A previsão de que buracos negros devem evaporar [5] tem dado origem a várias questões conceituais em Teoria Quântica de Campos que, por sua vez, têm sido bastante discutidas pela comunidade científica nos últimos 25 anos. Uma das principais dificuldades em quantizar campos livres no espaço-tempo de Schwarzschild está relacionada com a não-trivialidade da ortonormalização dos modos de frequência positiva e negativa nesta geometria [9], como pudemos ver anteriormente neste trabalho. Entretanto, a situação não é tão problemática na aproximação de baixas frequências. Podemos destacar a importância da quantização de campos bosônicos no limite de baixas frequências com duas razões principais, quais sejam: A primeira delas é a possibilidade de investigação analítica de processos ocorrendo na vizinhança de buracos negros envolvendo partículas com baixas energias, a exemplo do que foi feito no capítulo anterior. A outra está associada ao fato de partículas com energia nula serem cruciais para a análise de questões conceituais relevantes, como a discussão se observadores co-acelerados com fontes estáticas *detectam* radiação [7, 30] que será abordada no capítulo 6 (vide seção 6.1).

Apesar de sua grande relevância física, a quantização do campo de Maxwell em Schwarzschild [31, 32] tem recebido menos atenção do que a do campo escalar. Neste capítulo nos propomos a investigar o setor de baixas frequências do espaço de Fock associado à quantização



canônica do campo eletromagnético fora de um buraco negro estático e sem carga. Com este objetivo usaremos o procedimento de Gupta-Bleuler [33, 25, 34] adaptado ao espaço-tempo de Schwarzschild. Na seção 4.1 imporemos uma certa condição de *gauge* (condição de calibre) para obter as soluções das equações de Maxwell fora de um buraco negro estático e sem carga. Na seção 4.2 transformaremos as soluções obtidas neste gauge inicial para obter um novo conjunto satisfazendo a condição de Lorenz [21, 35]. Adaptaremos a quantização de Gupta-Bleuler para o espaço-tempo de Schwarzschild na seção 4.3. Na seção 4.4 obteremos a normalização dos modos físicos na aproximação de baixas frequências. Em [36] podemos encontrar um desenvolvimento semelhante ao apresentado neste capítulo, onde aplicamos a quantização do campo eletromagnético fora de buracos negros estáticos para  $(p + 2)$  dimensões em fenômenos envolvendo baixas energias.

## 4.1 Soluções Clássicas

Para expandirmos o campo fotônico em termos dos modos de energia positiva e negativa em um buraco negro estático e sem carga, com elemento de linha dado em (2.1), devemos primeiramente analisar as soluções clássicas do campo de Maxwell livre na geometria de Schwarzschild. A densidade de lagrangiana clássica de um campo vetorial com massa nula  $A_\mu$  é dada por

$$\mathcal{L}_M \equiv -\frac{\sqrt{-g}}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

onde  $F_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$  e  $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ . As equações de movimento de Euler-Lagrange correspondentes são  $\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0$ , ou

$$\nabla_\mu \nabla^\mu A_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu A^\mu = 0, \quad (4.2)$$

onde fizemos uso de que, no vácuo, as equações de Einstein se resumem a  $R_{\mu\nu} = 0$ . Em seguida reescrevemos (4.2) separando suas componentes da seguinte forma:

$$\square_e A_t - f^{-1} \partial_t^2 A_t + f \partial_t \partial_r A_r - r^{-2} \partial_t (\tilde{\nabla}^i A_i) + (2f/r) \partial_t A_r + f' \partial_r A_t = 0, \quad (4.3)$$

$$\square_e A_r + f \partial_r^2 A_r - f^{-1} \partial_r \partial_t A_t - r^{-2} \partial_r (\tilde{\nabla}^i A_i) + (f' + 2f/r) \partial_r A_r = 0, \quad (4.4)$$

$$\left[ f^{-1} \partial_t^2 - f \partial_r^2 - f' \partial_r \right] A_i + r^{-2} \tilde{\nabla}^2 A_i + r^{-2} A_i - (2f/r) \partial_i A_r - \partial_i (\nabla^\mu A_\mu) = 0, \quad (4.5)$$

onde  $i = \theta, \varphi$ , e

$$\nabla^\mu A_\mu \equiv f^{-1} \partial_t A_t - f \partial_r A_r - (f' + 2f/r) A_r + r^{-2} \tilde{\nabla}^i A_i. \quad (4.6)$$

Foi usada acima a convenção de que o símbolo “ $\sim$ ” é colocado sobre operadores definidos no subespaço  $(S^2, \tilde{g}_{ij})$ , caracterizado pelo elemento de linha  $dl^2 = -d\theta^2 - (\sin\theta)^2 d\varphi^2$ . Em particular, podemos escrever  $\tilde{\nabla}^2 A_i \equiv \tilde{g}^{jk} \tilde{\nabla}_j \tilde{\nabla}_k A_i$  como

$$\tilde{\nabla}^2 A_i = \begin{cases} \tilde{\nabla}_e^2 A_\theta + 2 \cot \theta (\sin\theta)^{-2} \partial_\varphi A_\varphi + (\cot \theta)^2 A_\theta & \text{para } i = \theta \\ \tilde{\nabla}_e^2 A_\varphi - 2 \cot \theta (\partial_\varphi A_\theta - \partial_\theta A_\varphi) - A_\varphi & \text{para } i = \varphi \end{cases} \quad (4.7)$$

e  $\tilde{\nabla}^i A_i \equiv -\partial_\theta A_\theta - (\sin\theta)^{-2} \partial_\varphi A_\varphi - \cot \theta A_\theta$ . Além disso, adotamos o índice “ $e$ ” para denotar operadores diferenciais *escalares*. Separando suas componentes, o operador

$$\square_e \equiv (-g)^{-1/2} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu)$$

pode ser escrito como

$$\square_e = f^{-1} \partial_t^2 - f \partial_r^2 - (f' + 2f/r) \partial_r + r^{-2} \tilde{\nabla}_e^2, \quad (4.8)$$

onde  $\tilde{\nabla}_e^2 \equiv \tilde{g}^{-1/2} \partial_i (\sqrt{\tilde{g}} \tilde{g}^{ij} \partial_j)$  é dado por

$$\tilde{\nabla}_e^2 = -\partial_\theta^2 - \cot \theta \partial_\theta - (\sin\theta)^{-2} \partial_\varphi^2. \quad (4.9)$$

Para resolver as equações (4.3)-(4.5) é conveniente adotarmos a seguinte condição de gauge:

$$\tilde{\nabla}^i A_i = 0, \quad (4.10)$$

que denominaremos gauge de Coulomb esférico. A seguir provaremos que esta é uma condição de gauge legítima, mostrando que uma solução arbitrária das equações de Maxwell pode ser levada, por uma transformação de gauge, em uma outra solução que satisfaça (4.10). Iniciemos

por assumir uma solução arbitrária  $A_\mu$  que não satisfaça (4.10), i.e.,  $\tilde{\nabla}^i A_i = \chi(t, r, \theta, \varphi)$ , onde  $\chi(t, r, \theta, \varphi)$  é uma função real não-nula. Lembrando que a esfera não possui borda, obtemos pelo teorema de Gauss que

$$\int_{S^2} \chi d\Omega = \int_{S^2} \tilde{\nabla}^i A_i d\Omega = 0, \quad (4.11)$$

onde  $d\Omega$  é o elemento de área da esfera  $S^2$ . Para resolvermos esta equação integral, vamos expandir  $\chi(t, r, \theta, \varphi)$  em termos dos harmônicos esféricos escalares  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  na forma

$$\chi(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \chi_{lm}(t, r) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (4.12)$$

Substituindo (4.12) em (4.11) e usando

$$\int_{S^2} Y_{lm}(\theta, \varphi) d\Omega = \sqrt{4\pi} \delta_{l0} \delta_{m0}, \quad (4.13)$$

obtemos que  $\chi_{00} = 0$ . Sendo assim podemos reescrever (4.12) como

$$\chi(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \chi_{lm}(t, r) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (4.14)$$

Em seguida definimos a função

$$X(t, r, \theta, \varphi) \equiv \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \chi_{lm}(t, r) Y_{lm}(\theta, \varphi) / [l(l+1)]. \quad (4.15)$$

Usando que  $\tilde{\nabla}_e^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi)$ , podemos então mostrar que  $\tilde{\nabla}_e^2 X = \chi$ . Desta forma, dada uma solução arbitrária  $A_\mu$ , sempre podemos realizar uma transformação de gauge e obter uma outra solução  $A'_\mu \equiv A_\mu - \nabla_\mu X$  satisfazendo a condição (4.10), onde  $X(t, r, \theta, \varphi)$  está definida em (4.15). Isto é verdadeiro uma vez que  $\tilde{\nabla}^i A'_i = \tilde{\nabla}^i A_i - \tilde{\nabla}_e^2 X = 0$ .

Usando a condição de gauge (4.10), as equações de campo (4.3)-(4.5) podem ser reescritas como

$$\square_e A_t - f^{-1} \partial_t^2 A_t + f \partial_t \partial_r A_r + (2f/r) \partial_t A_r + f' \partial_r A_t = 0, \quad (4.16)$$

$$\square_e A_r + f \partial_r^2 A_r - f^{-1} \partial_r \partial_t A_t + (f' + 2f/r) \partial_r A_r = 0, \quad (4.17)$$

$$(f^{-1} \partial_t^2 - f \partial_r^2 - f' \partial_r) A_i + r^{-2} \tilde{\nabla}^2 A_i + r^{-2} A_i - f^{-1} \partial_t \partial_i A_t + f \partial_r \partial_i A_r + f' \partial_i A_r = 0. \quad (4.18)$$



Classificaremos as soluções segundo suas polarizações  $\varepsilon$ . Os modos *puro-gauge*,  $\varepsilon = G$ , serão as soluções de (4.16)-(4.18) que satisfazem a condição de gauge (4.10) e que podem ser escritas como  $\nabla_\mu \Phi$ , para um dado campo escalar  $\Phi(x^\mu)$ . Os modos físicos  $\varepsilon = \lambda = I, II$ , satisfazem as equações (4.16)-(4.18) e a condição (4.10) mas não são puro-gauge, enquanto que os modos não-físicos,  $\varepsilon = NF$ , satisfazem (4.16)-(4.18) mas não a condição de gauge.

Vamos primeiramente analisar as soluções puro-gauge  $A_\mu^{(G)}$ . Impondo a condição de gauge (4.10) a  $A_\mu^{(G)} = \nabla_\mu \Phi$  obtemos

$$\tilde{\nabla}_e^2 \Phi(x^\mu) = 0. \quad (4.19)$$

Uma vez que a solução de (4.19) não tem dependência angular, ou, dito de outra forma, tem dependência angular proporcional a  $Y_{00}$  ( $= \text{constante}$ ), obtemos que  $\Phi = \Phi(t, r)$ . Desta maneira, os modos puro-gauge podem ser escritos na seguinte forma:

$$A_\mu^{(G)} = (\partial_t \Phi(t, r), \partial_r \Phi(t, r), 0, 0). \quad (4.20)$$

Note-se que a solução (4.20) satisfaz automaticamente (4.16)-(4.18).

Em seguida procuremos pelos modos físicos  $\lambda = I, II$  com frequência positiva com respeito ao campo de Killing tipo tempo  $\partial_t$

$$A_\mu^{(\lambda, n, \omega, l, m)} = \zeta_\mu^{(\lambda, n, \omega, l, m)}(r, \theta, \varphi) e^{-i\omega t} \quad (\omega > 0), \quad (4.21)$$

onde  $n = \rightarrow$  e  $n = \leftarrow$  denotam os modos provenientes do horizonte do buraco branco,  $H^-$ , e do infinito passado tipo luz,  $\mathcal{J}^-$ , respectivamente. Além disso os números inteiros  $l, m$  ( $l \geq 0$ ,  $-l \leq m \leq l$ ) são os números quânticos que determinam o momento angular dos modos  $A_\mu$ .

Os modos físicos  $\lambda = I$  podem ser escolhidos na forma

$$A_\mu^{(I, n, \omega, l, m)} = (A_t^{(I, n, \omega, l, m)}, A_r^{(I, n, \omega, l, m)}, 0, 0).$$

A condição de gauge (4.10) é então trivialmente satisfeita por estes modos. Assumindo que  $\zeta_\mu^{(I, n, \omega, l, m)}(r, \theta, \varphi) = R_\mu^{(I, n, \omega, l)}(r) \Omega_\mu^{(l, m)}(\theta, \varphi)$  (sem convenção de soma de Einstein nesta última expressão) na equação (4.21), podemos resolver (4.18), obtendo  $\Omega_t^{(l, m)}(\theta, \varphi) = \Omega_r^{(l, m)}(\theta, \varphi)$ ,

com constantes de integração convenientemente escolhidas. Usando isto em (4.17) resulta que  $\Omega_t^{(l,m)}(\theta, \varphi) = \Omega_r^{(l,m)}(\theta, \varphi) \propto Y_{lm}(\theta, \varphi)$ . Sendo assim, estaremos procurando por soluções na forma

$$A_\mu^{(I,n,\omega,l,m)} = \left( R_t^{(I,n,\omega,l)}(r), R_r^{(I,n,\omega,l)}(r), 0, 0 \right) Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} \quad (\omega > 0).$$

Analisemos inicialmente o caso  $l = 0$  ( $m = 0$ ). As equações (4.16)-(4.17), para  $l = 0$ , serão satisfeitas se e somente se  $\partial_r A_t = \partial_t A_r$ , enquanto que a equação (4.18) é trivialmente satisfeita neste caso. Segue então que

$$A_\mu^{(I,n,\omega,0,0)} = (4\pi)^{-1/2} \left( R_t^{(I,n,\omega,0)}(r), (i/\omega) \partial_r R_t^{(I,n,\omega,0)}(r), 0, 0 \right) e^{-i\omega t} \quad (\omega > 0), \quad (4.22)$$

onde  $R_t^{(I,n,\omega,0)}(r)$  pode ser escolhido arbitrariamente. No entanto, uma vez que podemos escrever  $A_\mu^{(I,n,\omega,0,0)} = \nabla_\mu \Phi$  com  $\Phi(t, r) \equiv (i/\sqrt{4\pi\omega^2}) R_t^{(I,n,\omega,0)}(r) e^{-i\omega t}$ , concluimos que a solução  $A_\mu^{(I,n,\omega,0,0)}$  corresponde a modos puro-gauge. Vamos agora analisar o caso  $l \geq 1$ . Da equação (4.18) obtemos que

$$A_t^{(I,n,\omega,l,m)} = (if/\omega) \partial_r \left( f A_r^{(I,n,\omega,l,m)} \right). \quad (4.23)$$

Definindo  $R_r^{(I,n,\omega,l)}(r) \equiv \omega^{3/2} [(z+1)^2/(z-1)] q_{\omega l}^{In}(z)$  com  $z \equiv r/M - 1$ , podemos escrever

$$A_\mu^{(I,n,\omega,l,m)} = \omega^{1/2} \left( \frac{i}{M} \left[ (z-1) \frac{dq_{\omega l}^{In}}{dz} + \frac{(z-1)}{(z+1)} q_{\omega l}^{In} \right], \omega \frac{(z+1)^2}{(z-1)} q_{\omega l}^{In}, 0, 0 \right) Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}, \quad (4.24)$$

onde, de acordo com a equação (4.17) [e usando (4.23)] podemos mostrar que os  $q_{\omega l}^{In}(z)$  são soluções da equação diferencial

$$\frac{d}{dz} \left[ (1-z^2) \frac{dq_{\omega l}^{\lambda n}}{dz} \right] + \left[ l(l+1) - \frac{2}{z+1} - M^2 \omega^2 \frac{(z+1)^3}{(z-1)} \right] q_{\omega l}^{\lambda n} = 0. \quad (4.25)$$

Pode-se mostrar que (4.16) é automaticamente satisfeita por (4.24). Usando-se a coordenada adimensional de Wheeler  $x \equiv r/2M + \ln(r/2M - 1)$ , pode-se escrever (4.25) como uma equação tipo Schrödinger para  $r q_{\omega l}^{\lambda n}$ , a saber

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} + 4M^2 V^v(x) \right) (r q_{\omega l}^{\lambda n}) = 4M^2 \omega^2 (r q_{\omega l}^{\lambda n}), \quad (4.26)$$

com  $V^v[x(r)] \equiv l(l+1)f(r)/r^2$ . Escolhemos as duas soluções independentes de (4.26) de maneira que, assintoticamente,

$$rq_{\omega l}^{\lambda \rightarrow} \approx \begin{cases} B_{\omega l}^{\lambda \rightarrow} (e^{i2M\omega x} + \mathcal{R}_{\omega l}^{\lambda \rightarrow} e^{-i2M\omega x}) & (x < 0, |x| \gg 1), \\ 2i^{l+1} B_{\omega l}^{\lambda \rightarrow} \mathcal{T}_{\omega l}^{\lambda \rightarrow} M\omega x h_l^{(1)}(2M\omega x) & (x \gg 1), \end{cases} \quad (4.27)$$

é uma onda proveniente do horizonte passado  $H^-$ , enquanto que

$$rq_{\omega l}^{\lambda \leftarrow} \approx \begin{cases} B_{\omega l}^{\lambda \leftarrow} \mathcal{T}_{\omega l}^{\lambda \leftarrow} e^{-i2M\omega x} & (x < 0, |x| \gg 1), \\ B_{\omega l}^{\lambda \leftarrow} [2(-i)^{l+1} M\omega x h_l^{(1)}(2M\omega x)^* + 2i^{l+1} \mathcal{R}_{\omega l}^{\lambda \leftarrow} M\omega x h_l^{(1)}(2M\omega x)] & (x \gg 1), \end{cases} \quad (4.28)$$

é uma onda proveniente do infinito passado tipo luz  $\mathcal{J}^-$ . Aqui  $h_l^{(1)}$  é a função esférica de Bessel do terceiro tipo [10, 13],  $B_{\omega l}^{\lambda n}$  são constantes de normalização, e  $|\mathcal{R}_{\omega l}^{\lambda n}|^2$  e  $|\mathcal{T}_{\omega l}^{\lambda n}|^2$  são os coeficientes de reflexão e transmissão, respectivamente.

Os modos físicos  $\lambda = II$  podem ser escolhidos na forma

$$A_{\mu}^{(II,n,\omega,l,m)} = (0, 0, A_{\theta}^{(II,n,\omega,l,m)}, A_{\varphi}^{(II,n,\omega,l,m)}).$$

Devemos impor que os modos  $\lambda = II$  satisfaçam a condição de gauge  $\tilde{\nabla}^i A_i = 0$ . Sabemos no entanto que  $\tilde{\nabla}^i Y_i^{(lm)}(\theta, \varphi) = 0$ , com  $l \geq 1$ , onde  $Y_j^{(lm)}(\theta, \varphi) = \epsilon_{ji} \partial^i Y_{lm}(\theta, \varphi) / \sqrt{l(l+1)}$ , são os harmônicos esféricos vetoriais [37], com  $\epsilon_{\theta\varphi} = -\epsilon_{\varphi\theta} = \sin\theta$  e  $\epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{\varphi\varphi} = 0$ . Sendo assim, buscamos por soluções de frequência positiva na forma

$$A_{\mu}^{(II,n,\omega,l,m)} = R^{(II,n,\omega,l)}(r) (0, 0, Y_{\theta}^{(lm)}(\theta, \varphi), Y_{\varphi}^{(lm)}(\theta, \varphi)) e^{-i\omega t} \quad (\omega > 0). \quad (4.29)$$

Note-se que não há modos do tipo (4.29) com momento angular nulo. As equações (4.16) e (4.17) são automaticamente satisfeitas por estes modos. Substituindo (4.29) em (4.18) obtemos  $R^{(II,n,\omega,l)}(r) = \omega^{1/2} (z+1) q_{\omega l}^{II n}(z)$ , onde  $q_{\omega l}^{II n}$  são soluções de (4.25), e usamos que

$$\tilde{\nabla}^2 Y_j^{(lm)}(\theta, \varphi) = [l(l+1) - 1] Y_j^{(lm)}(\theta, \varphi). \quad (4.30)$$

Podemos então reescrever os modos físicos  $II$  na forma

$$A_{\mu}^{(II,n,\omega,l,m)} = \omega^{1/2} (z+1) q_{\omega l}^{II n}(z) (0, 0, Y_{\theta}^{(lm)}(\theta, \varphi), Y_{\varphi}^{(lm)}(\theta, \varphi)) e^{-i\omega t}. \quad (4.31)$$



Os modos não-físicos podem ser escolhidos como

$$A_{\mu}^{(NF,n,\omega,l,m)} = \omega^{1/2} (z+1) q_{\omega l}^{NF n}(z) (0, 0, \partial_{\theta} Y_{(lm)}(\theta, \varphi), \partial_{\varphi} Y_{(lm)}(\theta, \varphi)) e^{-i\omega t}, \quad (4.32)$$

uma vez que estes satisfazem (4.16)-(4.18), mas não (4.10).

Para normalizar os modos independentes do campo eletromagnético vamos utilizar o produto interno de Klein-Gordon generalizado para o caso do campo vetorial, definido por [30]

$$\sigma_{KGV} (A^{(i)}, A^{(j)}) \equiv \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma_{\mu}^{(3)} W^{\mu} [A^{(i)}, A^{(j)}], \quad (4.33)$$

onde  $d\Sigma_{\mu}^{(3)} \equiv d\Sigma^{(3)} n_{\mu}$ . Aqui  $d\Sigma^{(3)} \equiv \sqrt{-g^{(3)}} d^3x$  é o elemento de (tri)volume invariante da superfície de Cauchy  $\Sigma^{(3)}$ , cujo vetor unitário ortogonal (apontando na direção futura) é  $n^{\mu}$ , e  $g^{(3)}$  é o determinante da métrica de Schwarzschild restrita a  $\Sigma^{(3)}$ . Além disso

$$W^{\mu} [A^{(i)}, A^{(j)}] \equiv i (A_{\nu}^{(i)*} \Pi^{(j)\mu\nu} - A_{\nu}^{(j)} \Pi^{(i)\mu\nu*}), \quad (4.34)$$

com

$$\Pi^{(i)\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\nabla_{\mu} A_{\nu}]} \Big|_{A_{\xi}=A_{\xi}^{(i)}}, \quad (4.35)$$

onde  $\mathcal{L}$  é a lagrangiana associada ao campo vetorial. Vale ressaltar que  $\sigma_{KGV} (A^{(i)}, A^{(j)})$  é linear com relação ao segundo termo, e que  $\sigma_{KGV} (A^{(i)}, A^{(j)}) = \sigma_{KGV} (A^{(j)}, A^{(i)})^*$ , o que garante que a norma definida através de (4.33) seja real. Pode-se ainda mostrar que as equações de campo garantem a conservação da corrente, *i.e.*:  $\nabla_{\mu} W^{\mu} [A^{(i)}, A^{(j)}] = 0$ . Como consequência, a exemplo do caso escalar, o produto interno (4.49) não depende da escolha da superfície de Cauchy  $\Sigma^{(3)}$  [38].

No caso particular da lagrangiana (4.1), temos

$${}^M \Pi^{(i)\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial [\nabla_{\mu} A_{\nu}]} \Big|_{A_{\xi}=A_{\xi}^{(i)}} = -[F^{\mu\nu}]_{A_{\xi}=A_{\xi}^{(i)}} \quad (4.36)$$

e, conseqüentemente,

$$\sigma_{KGV} (A^{(i)}, A^{(j)}) = \langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle \equiv i \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma_{\mu}^{(3)} [A_{\nu}^{(i)*} F^{(j)\nu\mu} - A_{\nu}^{(j)} F^{(i)\nu\mu*}], \quad (4.37)$$

com  $F^{(i)\mu\nu} \equiv F^{\mu\nu}|_{A_\xi=A_\xi^{(i)}}$ .

Em seguida vamos mostrar explicitamente que o produto interno (4.37) é invariante por uma transformação de gauge  $A_\mu^{(i)} \rightarrow A'^{(i)}_\mu = A_\mu^{(i)} + \nabla_\mu \Phi^{(i)}$ . Com este propósito, vamos inicialmente escrever

$$\langle A'^{(i)}, A'^{(j)} \rangle - \langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle = \langle \nabla \Phi^{(i)}, \nabla \Phi^{(j)} \rangle + \langle A^{(i)}, \nabla \Phi^{(j)} \rangle + \langle \nabla \Phi^{(i)}, A^{(j)} \rangle. \quad (4.38)$$

Note-se que  $\langle A'^{(i)}, A'^{(j)} \rangle = \langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle$ , pois cada um dos termos no lado direito da igualdade acima é nulo. Em particular, podemos mostrar que o último termo desta expressão se anula, fazendo

$$\begin{aligned} \langle \nabla \Phi^{(i)}, A^{(j)} \rangle &= i \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma_\mu^{(3)} (\nabla_\nu \Phi^{(i)*}) F^{(j)\nu\mu} \\ &= i \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma_\mu^{(3)} [\nabla_\nu (\Phi^{(i)*} F^{(j)\nu\mu}) - \Phi^{(i)*} \nabla_\nu F^{(j)\nu\mu}] = 0, \end{aligned} \quad (4.39)$$

onde usamos que  $F^{(j)\nu\mu}$  é um tensor anti-simétrico, o teorema de Gauss e também que o campo vetorial se anula assintoticamente; além das equações de campo de Maxwell, que são trivialmente satisfeitas por modos puro-gauge. De (4.39) segue diretamente que

$$\langle A^{(G)}, A^{(I)} \rangle = \langle A^{(G)}, A^{(II)} \rangle = \langle A^{(G)}, A^{(G)} \rangle = 0.$$

Os modos  $A_\mu^{(\varepsilon, n, \omega, l, m)}$ , com  $\varepsilon = I, II, G, NF$ , exibidos anteriormente podem então ser normalizados usando-se (4.37). O processo de quantização canônica a partir da lagrangiana (4.1) apresenta problemas relacionados com o fato de o momento conjugado ao campo  $A_0$  ser identicamente nulo. Sendo assim, para aplicarmos as regras de comutação canônicas ao campo eletromagnético e ao momento correspondente, modificaremos a lagrangiana (4.1). Este desenvolvimento será apresentado na seção 4.3.

## 4.2 Soluções Clássicas no gauge de Lorenz

Uma vez que quantizaremos o campo fotônico usando o método de Gupta-Bleuler, é conveniente obtermos as soluções das equações de Maxwell no gauge de Lorenz

$$\nabla^\mu A_\mu = 0. \quad (4.40)$$

Neste gauge as equações dinâmicas (4.2) reduzem-se a

$$\square L A_\mu = 0, \quad (4.41)$$

onde  $\square \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu$ .

Os modos puro-gauge são agora dados por  $L A_\mu^{(G)} = \nabla_\mu \Phi$  com  $\square_e \Phi = 0$ , cujas soluções foram estudadas em detalhe no capítulo 2. Os modos físicos  $L A_\mu^{(I)}$ ,  $L A_\mu^{(II)}$  também satisfazem (4.40) e (4.41) mas não são puro-gauge e os modos não-físicos  $L A_\mu^{(NF)}$  satisfazem (4.41) mas não (4.40).

Recordemos que os modos físicos  $\lambda = I$  com  $l = 0$  são puro-gauge (e assim serão em qualquer gauge legítimo). Os modos físicos  $\lambda = I$  com  $l \geq 1$  no gauge de Lorenz podem ser obtidos por uma transformação de gauge dos modos encontrados na seção anterior, *i.e.*:

$$A_\mu^{(I)} \rightarrow L A_\mu^{(I)} = A_\mu^{(I)} - \nabla_\mu \Psi, \quad (4.42)$$

com  $L A_\mu^{(I)}$  satisfazendo (4.40), o que implica que

$$\square_e \Psi = \nabla^\mu A_\mu^{(I)}. \quad (4.43)$$

Usando (4.43), (4.6) e (4.23) e obtemos

$$\square_e \Psi = -\frac{2f}{r} A_r^{(I,n,\omega,l,m)}. \quad (4.44)$$

Desta forma, os modos físicos  $I$  transformam-se para

$$L A_\mu^{(I,n,\omega,l,m)} = (A_t^{(I,n,\omega,l,m)} - \partial_t \Psi, A_r^{(I,n,\omega,l,m)} - \partial_r \Psi, -\partial_\theta \Psi, -\partial_\varphi \Psi), \quad (4.45)$$

onde  $A_t^{(I,n,\omega,l,m)}$  e  $A_r^{(I,n,\omega,l,m)}$  são definidos em (4.24).

Com relação aos modos físicos  $\lambda = II$ , segue diretamente de (4.6) que  $A_\mu^{(II,n,\omega,l,m)}$ , assim como dado em (4.31), já satisfaz a condição de Lorenz, de forma que

$$L A_\mu^{(II,n,\omega,l,m)} = (0, 0, A_\theta^{(II,n,\omega,l,m)}, A_\varphi^{(II,n,\omega,l,m)}) \quad (l \geq 1). \quad (4.46)$$

Os modos não-físicos podem em princípio ser determinados, no entanto, como os mesmos não serão usados em nosso desenvolvimento, não nos preocuparemos em obter sua forma explícita neste gauge.



### 4.3 Quantização Canônica

Para quantizarmos o campo de Maxwell, usaremos o método de Gupta-Bleuler adaptado para o espaço-tempo de Schwarzschild. Iniciemos então com a densidade de lagrangiana apropriada, que inclui o termo covariante de fixação de gauge, a saber

$$\mathcal{L}_F = -\sqrt{-g} \left[ \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha} (\nabla^\mu A_\mu)^2 \right], \quad (4.47)$$

de acordo com a proposição original de Fermi [39, 25, 34].

Neste caso as equações de Euler-Lagrange são dadas por

$$\nabla_\mu \nabla^\mu A_\nu + \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \nabla_\nu (\nabla_\mu A^\mu) = 0. \quad (4.48)$$

No gauge de Feynman,  $\alpha = 1$ , as equações (4.48) se reduzem a (4.41), sendo então satisfeitas pelos modos físicos, puro-gauge e não-físicos  $L_\mu^{(i)}$ , indicados na seção anterior, onde aqui o índice  $(i)$  representa todo o conjunto de números quânticos que indexam os modos.

Para normalizar os modos  $L_\mu^{(i)}(x)$  usaremos também o produto interno de Klein-Gordon generalizado (4.33)-(4.35), que no caso da lagrangiana (4.47), no gauge de Feynman, é dado por

$$\sigma_{KGV} (L^{(i)}, L^{(j)}) \equiv (L^{(i)}, L^{(j)}) = \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma_\mu^{(3)} F W^\mu [L^{(i)}, L^{(j)}], \quad (4.49)$$

com

$$F W^\mu [L^{(i)}, L^{(j)}] \equiv i (L_\nu^{(i)*} F \Pi^{(j)\mu\nu} - L_\nu^{(j)} F \Pi^{(i)\mu\nu*}), \quad (4.50)$$

onde

$$F \Pi^{(i)\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial [\nabla_\mu A_\nu]} \Big|_{A_\xi = L_\xi^{(i)}} = - [F^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\nabla^\sigma A_\sigma)]_{A_\xi = L_\xi^{(i)}}. \quad (4.51)$$

Para os modos que satisfazem a condição de Lorenz ( $\varepsilon = I, II, G$ ), podemos mostrar que

$$(L^{(i)}, L^{(j)}) = \langle L^{(i)}, L^{(j)} \rangle, \quad (4.52)$$

com  $\langle, \rangle$  dado por (4.37), que é invariante por uma transformação de gauge, como foi demonstrado na seção 4.1.

Como consequência direta da invariância de gauge de (4.37), podemos mostrar que, para quaisquer números quânticos  $n, \omega, l, m$ ,

$$\left( L_A^{(G)}, L_A^{(I)} \right) = \left( L_A^{(G)}, L_A^{(II)} \right) = 0$$

e

$$\left( L_A^{(G)}, L_A^{(G)} \right) = 0.$$

Estas expressões nos dizem que os modos puro-gauge são ortogonais aos modos físicos  $\lambda = I, II$ , e têm norma nula. Além disso, existem modos não-físicos que não são ortogonais aos modos puro-gauge. Para mostrarmos isso, usamos que o momento tensorial (4.51) associado com os modos puro-gauge  $L_A^{(G)} = \nabla_\mu \Phi$  (onde  $\square_e \Phi = 0$ ) é nulo. Desta forma, usando o produto interno (4.49), podemos escrever

$$\left( L_A^{(NF)}, \nabla \Phi \right) = i \int d\Sigma_\mu^{(3)} \left[ \nabla_\nu \Phi \nabla^\mu L_A^{(NF)\nu*} - \nabla_\nu \Phi \nabla^\nu L_A^{(NF)\mu*} + \nabla^\mu \Phi \nabla_\nu L_A^{(NF)\nu*} \right]. \quad (4.53)$$

Em seguida definimos o tensor anti-simétrico

$$K^{\mu\nu} \equiv \Phi (\nabla^\mu L_A^{(NF)\nu*} - \nabla^\nu L_A^{(NF)\mu*}),$$

e relembramos que o produto interno de Klein-Gordon entre modos escalares é dado por [vide (2.21)]

$$\sigma_{KG}(\Phi, \Psi) \equiv i \int d\Sigma_\mu^{(3)} [\Phi \nabla^\mu \Psi^* - (\nabla^\mu \Phi) \Psi^*].$$

Usamos estas duas últimas expressões para reescrever (4.53) como

$$\left( L_A^{(NF)}, \nabla \Phi \right) = -\sigma_{KG}(\Phi, \nabla_\nu L_A^{(NF)\nu}) + i \int d\Sigma_\mu^{(3)} \nabla_\nu K^{\mu\nu}, \quad (4.54)$$

onde também fizemos uso de que  $\square L_A^{(NF)\nu} = 0$ . Note-se que  $\Phi$  e  $\nabla_\nu L_A^{(NF)\nu}$  são soluções da equação de Klein-Gordon com massa nula. O primeiro termo a direita da igualdade de (4.54) é diferente de zero para os escalares  $\Phi$  e  $\nabla_\nu L_A^{(NF)\nu}$  associados com a mesma energia e os mesmos números quânticos de momento angular [vide (2.44)], enquanto que o último termo é nulo pelo teorema de Gauss, desde que os campos se anulem assintoticamente. Desta forma concluímos que existem modos puro-gauge que não são ortogonais aos modos não-físicos.

A seguir mostraremos que os modos físicos com  $\lambda = I$  e  $\lambda = II$  são mutuamente ortogonais. Usando (4.49), (4.52) e o fato que (4.37) é invariante por transformações de gauge, podemos escrever

$$\left( L_A^{(I)}, L_A^{(II)} \right) = i \int d\Sigma_\mu^{(3)} \left[ A^{(I)\nu*} \nabla_\nu A^{(II)\mu} - A^{(II)\nu} \nabla_\nu A^{(I)\mu*} \right], \quad (4.55)$$

onde  $A^{(I)\nu}$  e  $A^{(II)\mu}$  com  $l \geq 1$  foram definidos em (4.24) e (4.31), respectivamente. Integrando por partes apropriadamente (4.55), e lembrando que  $A^{(II)\nu}$  satisfaz a condição de Lorenz, podemos expressar (4.55) como

$$\left( L_A^{(I)}, L_A^{(II)} \right) = i \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma_\mu^{(3)} \nabla_\nu U^{\nu\mu}, \quad (4.56)$$

onde usamos que  $A_t^{(II)} = 0$  e definimos o tensor anti-simétrico  $U^{\nu\mu} \equiv A^{(I)\nu*} A^{(II)\mu} - A^{(II)\nu} A^{(I)\mu*}$ . Podemos então usar o teorema de Gauss para obter

$$\left( L_A^{(I)}, L_A^{(II)} \right) = 0.$$

Além disso, podemos sempre tornar os modos não-físicos ortogonais aos modos físicos através do método de Gram-Schmidt. Isto é importante para que possamos gerar um espaço de Hilbert físico adequado. Vamos supor que  $L_A^{(NF,i)}$  não seja ortogonal ao conjunto de modos físicos  $\{L_A^{(I,i')}\}$  e  $\{L_A^{(II,i')}\}$ , onde  $(i), (i')$  denotam aqui os números quânticos  $n, \omega, l, m$ . (A fim de evitarmos dificuldades associadas com o uso de números quânticos contínuos, podemos realizar a ortogonalização pelo método de Gram-Schmidt no interior de uma casca esférica e fazê-la arbitrariamente grande no final do procedimento.) Vamos agora definir os seguintes modos não-físicos transformados

$$L_A'^{(NF,i)} \equiv L_A^{(NF,i)} + \sum_{i'} \alpha_{(I,i')}^{(i)} L_A^{(I,i')} + \sum_{i'} \beta_{(II,i')}^{(i)} L_A^{(II,i')}, \quad (4.57)$$

onde  $\alpha_{(I,i')}^{(i)}$  e  $\beta_{(II,i')}^{(i)}$  são números complexos a serem determinados *a posteriori*. Requerendo que

$$(L_A'^{(NF,i)}, L_A^{(I,i')}) = (L_A'^{(NF,i)}, L_A^{(II,i')}) = 0, \quad (4.58)$$

para cada conjunto  $(i')$ , obtemos

$$(L_A'^{(NF,i)}, L_A^{(I,i')}) = - \sum_{i''} \alpha_{(I,i'')}^{(i)*} (L_A^{(I,i'')}, L_A^{(I,i')})$$



e

$$(L_A^{(NF,i)}, L_A^{(II,i')}) = - \sum_{i''} \beta_{(II,i'')}^{(i)*} (L_A^{(II,i'')}, L_A^{(II,i')}),$$

onde usamos o fato dos modos  $I$  e  $II$  serem mutuamente ortogonais. Desta forma, o sistema algébrico acima pode ser em princípio resolvido, determinando-se  $\alpha_{(I,i')}^{(i)}$  e  $\beta_{(II,i')}^{(i)}$ , e, conseqüentemente os novos modos não-físicos dados por (4.57), ortogonais aos modos  $\lambda = I, II$ . Note-se que, devido à estrutura linear de (4.57), pode-se concluir diretamente que  $L_A^{(NF,i)}$  também satisfaz  $\square L_A^{(NF,i)} = 0$  e  $\nabla^\mu L_A^{(NF,i)} \neq 0$ . No desenvolvimento a seguir assumiremos que os modos não-físicos já sejam ortogonais aos modos físicos. (Na verdade, como já mencionamos, a forma explícita dos modos não-físicos não será importante para o que apresentaremos aqui.)

Uma vez que o produto interno entre os modos  $L_A^{\varepsilon,n,\omega,l,m} \propto e^{-i\omega t}$  deve ser independente de  $t$ , o produto interno entre  $L_A^{\varepsilon,n,\omega,l,m}$  e  $L_A^{\varepsilon',n',\omega',l',m'}$  só poderá ser diferente de zero se  $\omega = \omega'$ . Desta forma podemos escrever

$$(L_A^{(\varepsilon,n,\omega,l,m)}, L_A^{(\varepsilon',n',\omega',l',m')}) \equiv M^{(\varepsilon)(\varepsilon')} \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega'), \quad (4.59)$$

requerendo que

$$M^{(\varepsilon)(\varepsilon')} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.60)$$

de acordo com o desenvolvimento acima, onde linhas e colunas de  $M$  são dispostas na ordem  $\varepsilon = I, II, G, NF$ .

Para quantizar o campo clássico  $L_A^\mu$ , vamos impor as relações de comutação a tempos iguais

$$[\hat{A}^\mu(t, \mathbf{x}), \hat{A}^\nu(t, \mathbf{x}')] = [\hat{\Pi}^\mu(t, \mathbf{x}), \hat{\Pi}^\nu(t, \mathbf{x}')] = 0, \quad (4.61)$$

$$[\hat{A}^\mu(t, \mathbf{x}), \hat{\Pi}^\nu(t, \mathbf{x}')] = i \frac{g^{\mu\nu}}{\sqrt{-g^{(3)}}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (4.62)$$

com

$$\hat{\Pi}^\mu \equiv n_\nu{}^F \hat{\Pi}^{\nu\mu} = -n_\nu [\hat{F}^{\nu\mu} + g^{\nu\mu} (\nabla^\beta \hat{A}_\beta)] , \quad (4.63)$$

onde  $\hat{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu$  e  $n^\mu$  é o versor tipo tempo definido abaixo do produto interno (4.33).

Usando (4.49) e as relações acima podemos mostrar que

$$[(L A^{(\kappa\omega)}, \hat{A}), (\hat{A}, L A^{(\kappa'\omega')})] = (L A^{(\kappa\omega)}, L A^{(\kappa'\omega')}) = M^{(\kappa)(\kappa')} \delta(\omega - \omega'), \quad (4.64)$$

com

$$M^{(\kappa)(\kappa')} \equiv M^{(\varepsilon)(\varepsilon')} \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (4.65)$$

onde denotamos por  $\kappa$  todos os índices discretos de  $A_\mu$ , *i.e.*,  $\varepsilon, n, l, m$ .

Podemos expandir o operador campo vetorial  $\hat{A}_\mu$  associado à lagrangiana (4.47) em termos dos modos obtidos anteriormente como

$$\hat{A}_\mu(x) = \sum_{(\kappa)} \int_0^\infty d\omega \left[ \hat{a}_{(\kappa\omega)} L A_\mu^{(\kappa\omega)}(x) + \hat{a}_{(\kappa\omega)}^\dagger L A_\mu^{(\kappa\omega)*}(x) \right]. \quad (4.66)$$

Os coeficientes desta expansão,  $\hat{a}_{(\kappa\omega)}$  e  $\hat{a}_{(\kappa\omega)}^\dagger$ , são os operadores de aniquilação e criação, respectivamente. Ressaltemos que a soma em (4.66) engloba todas as polarizações possíveis, *i.e.*,  $\varepsilon = I, II, G, NF$ .

Usando (4.49) e (4.66) podemos concluir que

$$[(L A^{(\kappa\omega)}, \hat{A}), (\hat{A}, L A^{(\kappa'\omega')})] = \sum_{(\kappa''), (\kappa''')} M^{(\kappa)(\kappa'')} [\hat{a}_{(\kappa''\omega)}, \hat{a}_{(\kappa'''\omega')}^\dagger] M^{(\kappa''')(\kappa')}, \quad (4.67)$$

onde usamos também o fato de que modos de frequência positiva e negativa são mutuamente ortogonais, *i.e.*,

$$(L A^{(\kappa\omega)}, L A^{(\kappa'\omega')*}) = (L A^{(\kappa\omega)*}, L A^{(\kappa'\omega')}) = 0,$$

e que o produto interno definido em (4.33) é antilinear na entrada da esquerda e linear na entrada da direita. De (4.64) e (4.67) obtemos

$$[\hat{a}_{(\kappa\omega)}, \hat{a}_{(\kappa'\omega')}^\dagger] = (M^{-1})_{(\kappa)(\kappa')} \delta(\omega - \omega'), \quad (4.68)$$

onde  $(M^{-1})_{(\kappa)(\kappa')}$  é a matriz inversa de  $M$ , definida por

$$\sum_{(\kappa'')} (M^{-1})_{(\kappa)(\kappa'')} M^{(\kappa'')(\kappa')} = \delta_{(\kappa)}^{(\kappa')}. \quad (4.69)$$

Analogamente

$$[\hat{a}_{(\kappa\omega)}, \hat{a}_{(\kappa'\omega')}] = [\hat{a}_{(\kappa\omega)}^\dagger, \hat{a}_{(\kappa'\omega')}^\dagger] = 0. \quad (4.70)$$

De (4.60), (4.65) e (4.69) podemos escrever

$$(M^{-1})_{(\kappa)(\kappa')} = (M^{-1})_{(\varepsilon)(\varepsilon')} \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (4.71)$$

onde

$$(M^{-1})_{(\varepsilon)(\varepsilon')} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.72)$$

Sendo assim, os comutadores não-nulos entre os operadores de criação e aniquilação são

$$[\hat{a}_{(I,n,\omega,l,m)}, \hat{a}_{(I,n',\omega',l',m')}^\dagger] = [\hat{a}_{(II,n,\omega,l,m)}, \hat{a}_{(II,n',\omega',l',m')}^\dagger] = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega'), \quad (4.73)$$

$$[\hat{a}_{(G,n,\omega,l,m)}, \hat{a}_{(G,n',\omega',l',m')}^\dagger] = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega'), \quad (4.74)$$

$$[\hat{a}_{(G,n,\omega,l,m)}, \hat{a}_{(NF,n',\omega',l',m')}^\dagger] = [\hat{a}_{(NF,n,\omega,l,m)}, \hat{a}_{(G,n',\omega',l',m')}^\dagger] = -\delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega'). \quad (4.75)$$

É sabido que a quantização canônica e a condição de Lorenz para o operador  $\hat{A}_\mu$  são incompatíveis. Isso pode ser visto de

$$[\nabla_\mu \hat{A}^\mu(t, \mathbf{x}), \hat{A}^\nu(t, \mathbf{x}')] \neq 0, \quad (4.76)$$

que em nosso caso pode ser obtido de (4.62) e (4.63). De fato, devido à presença dos modos não-físicos na expansão (4.66), temos que

$$\nabla_\mu \hat{A}^\mu(t, \mathbf{x}) \neq 0. \quad (4.77)$$

Precisamos então de uma formulação mais fraca do vínculo de Lorenz, conhecida como condição de Gupta-Bleuler, a saber

$$\nabla^\mu \hat{A}_\mu^{(+)} |EF\rangle = 0, \quad (4.78)$$



que restringe o espaço de Hilbert dos estados físicos  $|EF\rangle$ . Aqui  $\hat{A}_\mu^{(+)}$  é a parte de frequência positiva do operador  $\hat{A}_\mu$  dado em (4.66). Uma vez que  $\nabla^\mu \hat{A}_\mu^{(+)}$  só é não-nula para  $A_\mu^{(NF,n,\omega,l,m)}$ , segue que a condição (4.78) equivale a

$$a_{(NF,n,\omega,l,m)} |EF\rangle = 0, \quad (4.79)$$

para todos  $n, \omega, l, m$ . O vácuo de Boulware,  $|0\rangle_B$ , é definido requerendo-se que o mesmo seja aniquilado por todos os operadores  $a_{(\varepsilon,n,\omega,l,m)}$ , *i.e.*,

$$a_{(\varepsilon,n,\omega,l,m)} |0\rangle_B = 0, \quad (4.80)$$

com  $\varepsilon = I, II, G, NF$ . Os estados físicos são obtidos aplicando-se ao vácuo de Boulware um número qualquer de operadores de criação  $a_{(I)}^\dagger$ ,  $a_{(II)}^\dagger$ , e  $a_{(NF)}^\dagger$ . Qualquer estado obtido pela aplicação de  $a_{(G)}^\dagger$ , *i.e.*,  $a_{(G)}^\dagger |EF\rangle$  (em particular  $a_{(G)}^\dagger |0\rangle_B$ ), não será um estado físico pois, de (4.75) e (4.79)

$$a_{(NF,n,\omega,l,m)} [a_{(G,n',\omega',l',m')}^\dagger |EF\rangle] = -\delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega') |EF\rangle \neq 0, \quad (4.81)$$

onde vemos que tal estado não satisfaz a condição de Gupta-Bleuler (4.79). Conclui-se então que  $a_{(G)}^\dagger$  leva estados físicos em não-físicos. Devemos ainda ressaltar, uma vez que

$$[\hat{a}_{(NF,n,\omega,l,m)}, \hat{a}_{(NF,n',\omega',l',m')}^\dagger] = 0, \quad (4.82)$$

estados físicos na forma  $a_{(NF)}^\dagger |EF\rangle$  têm norma nula, *i.e.*,

$$\langle EF | \hat{a}_{(NF,n,\omega,l,m)} a_{(NF,n,\omega,l,m)}^\dagger |EF\rangle = \langle EF | \hat{a}_{(NF,n,\omega,l,m)}^\dagger a_{(NF,n,\omega,l,m)} |EF\rangle = 0, \quad (4.83)$$

onde usamos a condição (4.79) para obtermos a última igualdade acima. Além disso, de (4.82) e de

$$[\hat{a}_{(NF,n,\omega,l,m)}, \hat{a}_{(I,n',\omega',l',m')}^\dagger] = [\hat{a}_{(NF,n,\omega,l,m)}, \hat{a}_{(II,n',\omega',l',m')}^\dagger] = 0, \quad (4.84)$$

concluimos que os estados físicos na forma  $a_{(NF)}^\dagger |EF\rangle$  são ortogonais a quaisquer outros estados físicos. Sendo assim, um estado físico  $|EF_1\rangle$  pode ser considerado equivalente à qualquer outro estado físico na forma  $|EF_1\rangle + a_{(NF)}^\dagger |EF_2\rangle$ . Conseqüentemente, os estados físicos representativos são aqueles obtidos aplicando-se  $a_{(\lambda,n,\omega,l,m)}^\dagger$ , com  $\lambda = I, II$ , ao vácuo de Boulware  $|0\rangle_B$ , definido acima.

## 4.4 Determinação das constantes de normalização no limite de baixas frequências

Para concluirmos a quantização do campo de Maxwell em Schwarzschild, resta-nos normalizar os modos físicos de acordo com (4.59)-(4.60). Pelo fato da forma analítica das funções radiais dos modos físicos não ser conhecida, não nos foi possível realizar tal normalização para quaisquer valores de  $\omega$ . No entanto, pode-se ainda normalizar os modos físicos na aproximação de baixas frequências, de maneira análoga ao que foi feito no caso do campo de Klein-Gordon (vide seção 2.3). Para  $\omega$  pequeno o suficiente, a equação (4.25) reduz-se a

$$\frac{d}{dz} \left[ (1 - z^2) \frac{dq_{\omega l}^{\lambda n}}{dz} \right] + \left[ l(l+1) - \frac{2}{z+1} \right] q_{\omega l}^{\lambda n} \approx 0, \quad (4.85)$$

cuas duas soluções independentes são

$$q_{\omega l}^{\lambda \rightarrow}(z) \approx C_{\omega l}^{\lambda \rightarrow} \left[ Q_l(z) - \frac{(z-1)}{l(l+1)} \frac{dQ_l(z)}{dz} \right], \quad (4.86)$$

e

$$q_{\omega l}^{\lambda \leftarrow}(z) \approx C_{\omega l}^{\lambda \leftarrow} \left[ P_l(z) - \frac{(z-1)}{l(l+1)} \frac{dP_l(z)}{dz} \right], \quad (4.87)$$

onde lembramos que  $l \neq 0$ . Aqui  $P_l(z)$  e  $Q_l(z)$  são funções de Legendre de primeiro e segundo tipos [10, 13] e  $C_{\omega l}^{\lambda n}$  são as constantes de normalização a serem determinadas. Notemos que modos de baixa frequência deverão ser quase que totalmente refletidos pelo potencial  $V^v$  [vide equação (4.26)]. Uma vez que  $P_l(z) \sim z^l$  e  $Q_l(z) \sim z^{-l-1}$  para  $z \gg 1$ , e  $P_l(z) \approx 1$  e  $Q_l(z) \approx -\log \sqrt{z-1}$  para  $z \approx 1$ , obtemos de (4.86) e (4.87) que  $q_{\omega l}^{\lambda \rightarrow}$  diverge em  $H^-$  e permanece finita em  $\mathcal{J}^-$ , enquanto que  $q_{\omega l}^{\lambda \leftarrow}$  diverge em  $\mathcal{J}^-$  e permanece finita em  $H^-$ . Estas são as razões porque  $Q_l(z)$  e  $P_l(z)$  são associadas com os modos movendo-se para a direita e para a esquerda, respectivamente. Em seguida, usando que [7]  $P_l(z)|_{z \gg 1} \approx [(2l)!z^l]/[2^l(l!)^2]$ , e  $Q_l(z)|_{z \approx 1} \approx -x/2 + 1/2 - \sum_{k=1}^l 1/k$ , onde lembramos que  $x(z) = (z+1)/2 + \ln[(z-1)/2]$  é a coordenada de Wheeler, obtemos de (4.86) e (4.87) para  $\omega$  pequeno que

$$r q_{\omega l}^{\lambda \rightarrow}(z) \approx -C_{\omega l}^{\lambda \rightarrow} M x \quad (4.88)$$

para  $x < 0, |x| \gg 1$ , e

$$r q_{\omega l}^{\lambda \leftarrow}(z) \approx C_{\omega l}^{\lambda \leftarrow} \frac{2M l (2l)! x^{l+1}}{(l+1)(l!)^2} \quad (4.89)$$

para  $x \gg 1$ , respectivamente.

Para determinarmos o termo dominante na frequência das constantes de normalização  $C_{\omega l}^{\lambda n}$ , devemos comparar (4.88) e (4.89) com a expansão de  $r q_{\omega l}^{\lambda n}$  para  $\omega$  pequeno dada em (4.27) e (4.28), nas regiões assintóticas apropriadas. Com este objetivo devemos determinar inicialmente  $B_{\omega l}^{In}$  e  $B_{\omega l}^{II n}$ . De (4.24) e (4.31), e do fato de que

$$\left( L_A^{(\lambda, n, \omega, l, m)}, L_A^{(\lambda, n', \omega', l', m')} \right) = \langle A^{(\lambda, n, \omega, l, m)}, A^{(\lambda, n', \omega', l', m')} \rangle$$

para  $\lambda = I, II$ , podemos escrever

$$\left( L_A^{(I, n, \omega, l, m)}, L_A^{(I, n', \omega', l', m')} \right) = \delta^{ll'} \delta^{mm'} l(l+1) \frac{\sqrt{\omega \omega'}}{M^2} (\omega + \omega') e^{i(\omega - \omega')t} \int_{2M}^{\infty} dr \frac{r^2}{f} q_{\omega l}^{In*} q_{\omega' l'}^{In'} \quad (4.90)$$

e

$$\left( L_A^{(II, n, \omega, l, m)}, L_A^{(II, n', \omega', l', m')} \right) = \delta^{ll'} \delta^{mm'} \frac{\sqrt{\omega \omega'}}{M^2} (\omega + \omega') e^{i(\omega - \omega')t} \int_{2M}^{\infty} dr \frac{r^2}{f} q_{\omega l}^{II n*} q_{\omega' l'}^{II n'}. \quad (4.91)$$

Para obter (4.90) e (4.91) usamos que

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (4.92)$$

e

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \tilde{g}^{ij} Y_i^{(lm)*}(\theta, \varphi) Y_j^{(l'm')}(\theta, \varphi) = -\delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (4.93)$$

respectivamente, com  $\tilde{g}_{ij}$  definido abaixo de (4.6) e, de (2.29) e (2.30), que

$$d\Sigma^{(3)\mu} = \frac{r^2}{f} \sin\theta \delta_0^\mu dr d\theta d\varphi. \quad (4.94)$$

Para auxiliar no cálculo da integral em (4.90) e (4.91), definimos

$$\begin{aligned} I_{\omega \omega'}^{nn'} &\equiv \int_{2M}^{\infty} dr r^2 f^{-1} q_{\omega l}^{\lambda n*} q_{\omega' l'}^{\lambda n'} = 2M \int_{-\infty}^{+\infty} dx (r q_{\omega l}^{\lambda n*}) (r q_{\omega' l'}^{\lambda n'}) \\ &= \frac{1}{2M(\omega^2 - \omega'^2)} \left( (r q_{\omega l}^{\lambda n*}) \left[ \frac{d}{dx} (r q_{\omega' l'}^{\lambda n'}) \right] - (r q_{\omega' l'}^{\lambda n'}) \left[ \frac{d}{dx} (r q_{\omega l}^{\lambda n*}) \right] \right) \Bigg|_{-\infty}^{+\infty}, \end{aligned} \quad (4.95)$$



onde usamos (4.26) no último passo acima. Lembrando que  $|\mathcal{R}_{\omega l}^{\lambda n}|^2 + |\mathcal{T}_{\omega l}^{\lambda n}|^2 = 1$  e  $\mathcal{T}_{\omega l}^{\lambda \rightarrow *} \mathcal{R}_{\omega l}^{\lambda \leftarrow} + \mathcal{T}_{\omega l}^{\lambda \leftarrow} \mathcal{R}_{\omega l}^{\lambda \rightarrow *} = 0$ , obtemos de (4.27) e (4.28) que

$$I_{\omega \omega'}^{nn'} = 2\pi |B_{\omega l}^{\lambda n}|^2 \delta(\omega - \omega') \delta_{nn'}.$$

Substituindo esta expressão em (4.90) e (4.91) obtemos, por comparação com a condição de ortonormalização (4.59)-(4.60), que as constantes de normalização dos modos  $I$  e  $II$ , que aparecem nas expressões (4.27) e (4.28), são

$$B_{\omega l}^{In} = \frac{M}{2\omega} \frac{1}{\sqrt{\pi l(l+1)}}; \quad B_{\omega l}^{II n} = \frac{M}{2\omega} \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad (4.96)$$

a menos de uma fase multiplicativa arbitrária.

Podemos então expandir  $rq_{\omega l}^{\lambda \rightarrow}(z)$  com  $x < 0, |x| \gg 1$ , dado em (4.27), para  $|\omega x| \ll 1$ , obtendo

$$rq_{\omega l}^{I \rightarrow}(z) \approx i2M^2 x / \sqrt{\pi l(l+1)} \quad (4.97)$$

e

$$rq_{\omega l}^{II \rightarrow}(z) \approx i2M^2 x / \sqrt{\pi}, \quad (4.98)$$

onde usamos que  $\mathcal{R}_{\omega l}^{\lambda \rightarrow}|_{\omega \approx 0} \approx -1 + \mathcal{O}(\omega)$ . Comparando (4.97) e (4.98) com (4.88), obtemos

$$|C_{\omega l}^{I \rightarrow}| \approx \frac{2M}{\sqrt{\pi l(l+1)}} \quad (4.99)$$

e

$$|C_{\omega l}^{II \rightarrow}| \approx \frac{2M}{\sqrt{\pi}}. \quad (4.100)$$

Em seguida, procedamos de maneira análoga para o caso dos modos movendo-se para a esquerda. Usando que  $h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + in_l(x)$  com  $j_l(x) \approx x^l / (2l+1)!! + \mathcal{O}(x^{l+2})$  e  $n_l(x) \approx -(2l-1)!! / x^{l+1} + \mathcal{O}(x^{-l+1})$ , expandimos  $rq_{\omega l}^{\lambda \leftarrow}(z)$  com  $x \gg 1$ , dado em (4.28), para  $|\omega x| \ll 1$ , obtendo

$$rq_{\omega l}^{I \leftarrow}(z) \approx \frac{2^{l+1}(-i)^{l+1} M^{l+2} \omega^l x^{l+1}}{\sqrt{\pi l(l+1)}(2l+1)!!} \quad (4.101)$$

e

$$rq_{\omega l}^{II \leftarrow}(z) \approx \frac{2^{l+1}(-i)^{l+1} M^{l+2} \omega^l x^{l+1}}{\sqrt{\pi}(2l+1)!!}, \quad (4.102)$$

onde usamos que  $\mathcal{R}_{\omega l}^{\lambda \leftarrow} |_{\omega \approx 0} \approx (-1)^{l+1} + \mathcal{O}(\omega)$ . Comparando (4.101) e (4.102) com (4.89), obtemos

$$|C_{\omega l}^{\leftarrow I}| \approx \frac{2^{2l} M^{l+1} \sqrt{l+1} (l!)^3 \omega^l}{\sqrt{\pi} l^{3/2} (2l)! (2l+1)!} \quad (4.103)$$

e

$$|C_{\omega l}^{\leftarrow II}| \approx \frac{2^{2l} M^{l+1} (l+1) (l!)^3 \omega^l}{\sqrt{\pi} l (2l)! (2l+1)!}. \quad (4.104)$$

Com isso concluímos a determinação das constantes de normalização  $C_{\omega l}^{\lambda n}$  (a menos de uma fase multiplicativa arbitrária), que são necessárias para a obtenção dos modos físicos  $A^{(I,n,\omega,l,m)}$  e  $A^{(II,n,\omega,l,m)}$ , no regime de baixas frequências.

## Capítulo 5

# Quantização do campo eletromagnético no espaço-tempo de Minkowski e aplicações

Neste capítulo seguiremos o procedimento desenvolvido anteriormente para quantizar o campo de Maxwell no espaço-tempo de Minkowski, ora usando coordenadas cartesianas, ora coordenadas polares esféricas. Utilizaremos os modos obtidos neste capítulo para calcular taxas de emissão de radiação eletromagnética por algumas fontes clássicas e funções de correlação, mostrando assim a consistência da quantização apresentada no capítulo anterior. Note-se que tal cheque de consistência não seria possível no espaço-tempo de Schwarzschild. Por este motivo focalizaremos neste capítulo o espaço-tempo de Minkowski (que é maximalmente simétrico), antes de apresentarmos a aplicação dos resultados em Schwarzschild obtidos no capítulo 4, o que será feito no capítulo seguinte.

Na seção 5.1 quantizaremos o campo de Maxwell no espaço-tempo plano com coordenadas cartesianas. Na seção 5.2 apresentaremos a quantização do campo eletromagnético em Minkowski com coordenadas polares esféricas. Calcularemos a emissão de fótons por uma carga elétrica com aceleração própria constante na seção 5.3. Algumas componentes da função de dois pontos envolvendo o tensor intensidade de campo eletromagnético são calculadas na seção 5.4 usando coordenadas polares esféricas, onde é mostrado que os resultados coincidem com aqueles obtidos usando coordenadas cartesianas. Na seção 5.5 obtemos a taxa de emissão de fótons por



um dipolo oscilante usando os modos da seção 5.1, repetindo o cálculo com os modos da seção 5.2 e comentando a concordância dos resultados.

## 5.1 Quantização no espaço-tempo de Minkowski com coordenadas cartesianas

O elemento de linha do espaço-tempo de Minkowski com coordenadas cartesianas é dado por

$$ds^2 = +dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (5.1)$$

As equações de Euler-Lagrange, obtidas a partir da lagrangiana modificada de Fermi dada por (4.47), no gauge de Feynman ( $\alpha = 1$ ), são dadas por

$$\nabla_\mu \nabla^\mu A_\nu = 0, \quad (5.2)$$

cujas soluções no espaço-tempo plano com coordenadas cartesianas definidas em (5.1) têm a forma

$$A_\mu^{(\epsilon)} = c_\omega \epsilon_\mu^{(\epsilon)}(\mathbf{k}) e^{-ik_\nu x^\nu}, \quad (5.3)$$

com

$$k^\mu k_\mu = 0, \quad (5.4)$$

onde  $c_\omega$  são constantes de normalização,  $k_\nu$  é o quadrivetor momento constante, e  $\epsilon_\mu^{(\epsilon)}(\mathbf{k})$  são os vetores de polarização.

Exigindo que as soluções clássicas (5.3) dos modos físicos e puro-gauge satisfaçam a condição de Lorenz,  $\nabla_\mu A^\mu = 0$ , obtemos que os vetores de polarização correspondentes devem ser tais que

$$k^\mu \epsilon_\mu^{(\epsilon=I,II,G)} = 0, \quad (5.5)$$

e, por sua vez, que o vetor de polarização dos modos não-físicos deve obedecer a relação

$$k^\mu \epsilon_\mu^{(NF)} \neq 0. \quad (5.6)$$

Quando escolhemos  $k_\nu = (1, 0, 0, 1)$ , uma escolha de vetores de polarização compatível com a condição de Lorenz é:

$$\epsilon_\mu^{(\epsilon=I)} = (0, 1, 0, 0), \quad (5.7)$$

$$\epsilon_\mu^{(\epsilon=II)} = (0, 0, 1, 0), \quad (5.8)$$

$$\epsilon_\mu^{(\epsilon=G)} = (1, 0, 0, 1), \text{ e} \quad (5.9)$$

$$\epsilon_\mu^{(\epsilon=NF)} = (1, 0, 0, 0). \quad (5.10)$$

Pode-se mostrar que no caso do gauge de Feynman o produto interno definido em (4.49)-(4.51) se reduz a

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = -i \int_{\Sigma(3)} d\Sigma_\mu^{(3)} \{ A_\nu^{(i)*} [\nabla^\mu A^{(j)\nu}] - A_\nu^{(j)} [\nabla^\mu A^{(i)\nu}]^* \}. \quad (5.11)$$

Obtemos então de (5.3) e (5.11) que

$$(A^{(\epsilon, \mathbf{k})}, A^{(\epsilon', \mathbf{k}')} ) = -c_\omega^* c_{\omega'} [\epsilon_\mu^{(\epsilon)}(\mathbf{k}) \epsilon^{(\epsilon')\mu}(\mathbf{k}')] (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (5.12)$$

com  $\omega = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ . Vamos agora exigir que os modos sejam normalizados a  $\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ , i.e., que

$$(A^{(\epsilon, \mathbf{k})}, A^{(\epsilon', \mathbf{k}')} ) = M^{(\epsilon)(\epsilon')} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (5.13)$$

com

$$M^{(\epsilon)(\epsilon')} \equiv -\epsilon_\mu^{(\epsilon)}(\mathbf{k}) \epsilon^{(\epsilon')\mu}(\mathbf{k}'). \quad (5.14)$$

Segue então que

$$|c_\omega| = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}.$$

No caso particular da polarização (5.7)-(5.10), temos

$$M^{(\epsilon)(\epsilon')} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

onde linhas e colunas da matriz  $M$  são dispostas na ordem  $\varepsilon = I, II, G, NF$ . Note-se que a matriz (5.15) coincide com a obtida no caso de Schwarzschild, dada em (4.60).

O operador campo eletromagnético  $\hat{A}_\mu(x)$  pode ser expresso, analogamente a (4.66), pela seguinte expansão de Fourier:

$$\hat{A}_\mu(x) = \sum_{\varepsilon=I,II,G,NF} \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \left[ \hat{a}_{(\varepsilon)}(\mathbf{k}) \epsilon_\mu^{(\varepsilon)}(\mathbf{k}) e^{-ik_\nu x^\nu} + \hat{a}_{(\varepsilon)}^\dagger(\mathbf{k}) \epsilon_\mu^{(\varepsilon)*}(\mathbf{k}) e^{+ik_\nu x^\nu} \right]. \quad (5.16)$$

Lembremos agora de (4.64) e (4.68), para escrever a partir de (5.13) que

$$[\hat{a}_{(\varepsilon)}(\mathbf{k}), \hat{a}_{(\varepsilon')}^\dagger(\mathbf{k}')] = (M^{-1})_{(\varepsilon)(\varepsilon')} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (5.17)$$

onde  $M^{-1}$  é a matriz inversa de  $M$ . Devemos em seguida impor a condição de Gupta-Bleuler,  $\nabla^\mu \hat{A}_\mu^{(+)} |EF\rangle = 0$ , que neste caso se reduz a

$$\sum_{\varepsilon=I,II,G,NF} k_\mu \epsilon^{(\varepsilon)\mu}(\mathbf{k}) \hat{a}_{(\varepsilon)}(\mathbf{k}) |EF\rangle = 0,$$

ou simplesmente  $\hat{a}_{(NF)}(\mathbf{k}) |EF\rangle = 0$ , o que pode ser visto diretamente de (5.5)-(5.6). O espaço de Fock é então construído seguindo o desenvolvimento apresentado ao final da seção 4.3, sendo que aqui os estados de partículas são obtidos a partir do vácuo de Minkowski.

## 5.2 Quantização no espaço-tempo de Minkowski com coordenadas esféricas

Devemos ressaltar que, como no caso do espaço-tempo plano com coordenadas inerciais não há horizonte de eventos, todos os modos vêm do e vão para o infinito. Assim, não teremos aqui o índice  $n = \rightarrow, \leftarrow$ , que faz a distinção entre os modos vindos do horizonte e do infinito tipo luz passados, no caso de Schwarzschild.

O elemento de linha do espaço-tempo de Minkowski em coordenadas polares esféricas é dado por

$$ds^2 = +dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (5.18)$$



As equações de Maxwell correspondentes são dadas por (4.3)–(4.5), com  $f(r) = 1$ . Seguindo o mesmo procedimento do caso de Schwarzschild, iniciamos adotando a condição de gauge  $\tilde{\nabla}^i A_i = 0$ . Neste gauge as equações de campo assumem a seguinte forma:

$$-\partial_r^2 A_t - \frac{2}{r}(\partial_r A_t - \partial_t A_r) + \partial_t \partial_r A_r + \frac{1}{r^2} \tilde{\nabla}_e^2 A_t = 0, \quad (5.19)$$

$$\partial_t^2 A_r - \partial_r \partial_t A_t + \frac{1}{r^2} \tilde{\nabla}_e^2 A_r = 0, \quad (5.20)$$

$$\partial_t^2 A_i - \partial_r^2 A_i - \partial_i (\partial_t A_t - \partial_r A_r) + \frac{(\tilde{\nabla}^2 + 1)}{r^2} A_i = 0. \quad (5.21)$$

Neste caso os modos puro-gauge podem ser escritos como

$$A_\mu^{(G)} = (-i\omega v(r), dv(r)/dr, 0, 0) e^{-i\omega t} \quad (5.22)$$

com  $v$  sendo uma função arbitrária de  $r$ . Os modos físicos  $\lambda = I$ , com  $l \geq 1$ , podem ser escolhidos como

$$A_\mu^{(I,\omega,l,m)} = \sqrt{\frac{\omega^3}{\pi l(l+1)}} \left( \frac{i}{\omega} \frac{d[rj_l(\omega r)]}{dr}, rj_l(\omega r), 0, 0 \right) Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}. \quad (5.23)$$

Para  $l = 0$  os modos físicos  $I$  são puro-gauge. Os modos físicos  $\lambda = II$  podem ser escolhidos, para  $l \geq 1$ , como

$$A_\mu^{(II,\omega,l,m)} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} rj_l(\omega r) (0, 0, Y_\theta^{(lm)}(\theta, \varphi), Y_\varphi^{(lm)}(\theta, \varphi)) e^{-i\omega t}. \quad (5.24)$$

Vale lembrar que não há soluções da forma (5.24) com  $l = 0$ . Já os modos não-físicos podem ser escolhidos como

$$A_\mu^{(NF,\omega,l,m)} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi l(l+1)}} rj_l(\omega r) (0, 0, \partial_\theta Y_{lm}(\theta, \varphi), \partial_\varphi Y_{lm}(\theta, \varphi)) e^{-i\omega t}. \quad (5.25)$$

Para normalizar os modos acima, utilizamos o produto interno (4.37), que no caso do espaço-tempo de Minkowski com coordenadas esféricas pode ser escrito como

$$\langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle \equiv i \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin\theta \left[ A_\nu^{(i)*} F^{(j)\nu t} - A_\nu^{(j)} F^{(i)\nu t*} \right], \quad (5.26)$$

requerendo que

$$\langle A^{(I,\omega,l,m)}, A^{(I,\omega',l',m')} \rangle = \langle A^{(II,\omega,l,m)}, A^{(II,\omega',l',m')} \rangle = \delta^{ll'} \delta^{mm'} \delta(\omega - \omega'),$$

e

$$\langle A^{(NF,\omega,l,m)}, A^{(NF,\omega',l',m')} \rangle = \delta^{ll'} \delta^{mm'} \delta(\omega - \omega') .$$

Vamos em seguida obter os modos satisfazendo a condição de Lorenz. Podemos obter os modos físicos  $I$ ,  ${}^L A_\mu^{(I)}$ , a partir de  $A_\mu^{(I)}$  dado em (5.23), por uma transformação de gauge, como foi feito na seção 4.2. Fazendo-se isso resulta que

$${}^L A_\mu^{(I,\omega,l,m)} = \left[ A_\mu^{(I,\omega,l,m)} - \partial_\mu \Upsilon^{(\omega,l,m)} \right] , \quad (5.27)$$

com  $\square_e \Upsilon = -(2/r) A_r^{(I,\omega,l,m)}$ . Os modos físicos  $II$  dados em (5.24) já satisfazem a condição de Lorenz. Sendo assim

$${}^L A_\mu^{(II,\omega,l,m)} = A_\mu^{(II,\omega,l,m)} . \quad (5.28)$$

Sabemos que para modos satisfazendo a condição de Lorenz o produto interno (4.49) se reduz a (4.37), que é invariante por uma transformação de gauge [vide (4.52)]. Conclui-se então que os modos dados em (5.27) e (5.28) já estão corretamente normalizados. Modos puro-gauge são dados por  ${}^L A_\mu^{(G)} = \nabla_\mu Z$ , com  $Z \propto j_l(\omega r) Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}$ . Os modos não-físicos no gauge de Lorenz podem ser escolhidos como

$${}^L A_\mu^{(NF,\omega,l,m)} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} j_l(\omega r) Y_{lm}(\theta, \varphi) (1, 0, 0, 0) e^{-i\omega t} , \quad (5.29)$$

que têm norma negativa, i.e.,  $(A^{(NF,\omega,l,m)}, A^{(NF,\omega',l',m')}) = -\delta^{ll'} \delta^{mm'} \delta(\omega - \omega')$ , obtida de (5.11). O operador campo vetorial  $\hat{A}_\mu$  pode então ser expandido da maneira usual [vide (4.66)]. Assumimos a restrição de Gupta-Bleuler (4.78) no espaço de Hilbert dos estados físicos, e toda a quantização é feita analogamente ao que foi desenvolvido na seção 4.3.

### 5.3 Emissão de fótons por uma carga uniformemente acelerada no espaço-tempo de Minkowski

Nesta seção vamos revisitar o cálculo da emissão de fótons por uma carga elétrica uniformemente acelerada em Minkowski, como visto no referencial inercial. Em particular,

vamos calcular a taxa de emissão de fótons com valor fixo de momento transversal [30], pois utilizaremos este resultado para a comparação com o de uma carga elétrica uniformemente acelerada no espaço-tempo de Schwarzschild, que será obtido no capítulo 6.

Obtenhamos inicialmente a taxa de emissão de radiação eletromagnética por uma corrente arbitrária  $j^\mu(x)$  no espaço-tempo de Minkowski. A amplitude de emissão de um fóton com momento  $\mathbf{k}$  e polarização  $\varepsilon$  pela carga acelerada no vácuo de Minkowski é dada por

$$\mathcal{A}^{(\varepsilon, \mathbf{k})} = {}_M \langle 1; \mathbf{k}, \varepsilon | i \hat{S}_I(x) | 0 \rangle_M = {}_M \langle 1; \mathbf{k}, \varepsilon | i \int d^4x j^\mu(x) \hat{A}_\mu(x) | 0 \rangle_M, \quad (5.30)$$

onde o índice  $M$  denota os estados de Minkowski. Pode-se mostrar que somente os modos físicos têm uma contribuição não-nula para a amplitude acima pelo fato dos modos puro-gauge não contribuírem para ação de interação e dos modos não-físicos terem norma nula (vide demonstração na seção 6.3). Obtemos então as amplitudes (5.30) que não são nulas, dadas por

$$\mathcal{A}^{(\lambda, \mathbf{k})} = \frac{i}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \int d^4x j^\nu(x) \epsilon_\nu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}, \quad (5.31)$$

com  $\lambda = I, II$ , onde usamos (5.16) e (5.17). Podemos expressar a probabilidade total de emissão de fótons com momento transversal  $(k_x, k_y)$ , dividida pelo tempo próprio total  $\tau$  da carga acelerada (durante o qual a mesma interage com o campo eletromagnético) como

$$R_{(k_x, k_y)}^M = \sum_{\lambda=I, II} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \frac{|\mathcal{A}^{(\lambda, \mathbf{k})}|^2}{\tau}, \quad (5.32)$$

onde ressaltamos que a soma é somente nas polarizações físicas  $\lambda = I, II$ . Substituindo (5.31) em (5.32), obtemos

$$R_{(k_x, k_y)}^M = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{(2\pi)^3 2\omega} \int d^4x d^4x' \left[ \sum_{\lambda=I, II} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \epsilon_\nu^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \right] j^\mu(x) j^\nu(x') e^{i\omega(t-t') - i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}. \quad (5.33)$$

Lembremos agora da relação de completeza

$$\sum_{\varepsilon \varepsilon'} (M^{-1})_{\varepsilon \varepsilon'} \epsilon_\mu^{(\varepsilon)}(\mathbf{k}) \epsilon_\nu^{(\varepsilon')}(\mathbf{k}) = -\eta_{\mu\nu}, \quad (5.34)$$

ou

$$\sum_{\lambda=I, II} \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda)} = -\epsilon_\mu^{(G)} \epsilon_\nu^{(G)} + \epsilon_\mu^{(G)} \epsilon_\nu^{(NF)} + \epsilon_\mu^{(NF)} \epsilon_\nu^{(G)} - \eta_{\mu\nu}, \quad (5.35)$$



que pode ser obtida de (5.14), onde  $\eta_{\mu\nu}$  são as componentes da métrica do espaço-tempo de Minkowski. Devemos então substituir (5.35) em (5.33). Pela mesma razão que os modos puro-gauge não contribuem para a ação de interação, termos envolvendo  $\int d^4x j^\nu(x) \epsilon_\nu^{(G)}(\mathbf{k}) e^{+ik_\mu x^\mu}$  não contribuem para  $R_{(k_x, k_y)}^M$ . Desta forma,

$$R_{(k_x, k_y)}^M = -\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{(2\pi)^3 2\omega} \int d^4x \int d^4x' j^\mu(x) j_\mu(x') e^{i\omega(t-t') - i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} . \quad (5.36)$$

Vale ressaltar que a expressão acima é válida para uma corrente arbitrária  $j^\mu(x)$  no espaço-tempo plano.

Analiseemos em seguida o caso de uma carga uniformemente acelerada em Minkowski. A corrente associada a uma carga com quadriaceleração própria constante movendo-se na direção  $z$  é dada por

$$j^t = qaz\delta(\zeta)\delta(x)\delta(y), \quad j^x = j^y = 0, \quad j^z = qat\delta(\zeta)\delta(x)\delta(y), \quad (5.37)$$

onde

$$\zeta \equiv \frac{1}{2a} \ln[a^2(z^2 - t^2)],$$

e

$$\delta(\zeta) = \frac{\delta(z - \sqrt{t^2 + a^{-2}})}{a\sqrt{t^2 + a^{-2}}}. \quad (5.38)$$

A linha de mundo com  $\zeta$ ,  $x$  e  $y$  constantes tem uma aceleração própria dada por  $ae^{-a\zeta}$ .

Substituindo a corrente (5.37) na expressão (5.36) obtemos, após uma certa manipulação algébrica [30]

$$R_{(k_x, k_y)}^M = \frac{q^2}{4\pi^3 a} [K_1(k_\perp/a)]^2 dk_x dk_y, \quad (5.39)$$

onde  $K_\nu(z)$  é a função de Bessel modificada, e  $k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  é o momento transversal à direção da aceleração.

Notemos agora que a taxa total de emissão de fótons é obtida integrando (5.39) em todos os valores possíveis dos momentos  $k_x$  e  $k_y$ , i.e.,

$$R^M = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{(k_x, k_y)}^M dk_x dk_y = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} dk_\perp k_\perp R_{(k_\perp)}^M, \quad (5.40)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $k_{\perp}$  e  $k_x$ . Usando (5.39) obtemos

$$R^M = \frac{q^2}{2\pi^2 a} \int_0^{+\infty} [K_1(k_{\perp}/a)]^2 k_{\perp} dk_{\perp}. \quad (5.41)$$

O resultado da integral acima diverge, e esta divergência ocorre devido à contribuição dos modos com momento arbitrariamente pequeno. Esta é a divergência que ficou conhecida na literatura como catástrofe do infravermelho [25]. Devemos ressaltar que embora a taxa total de emissão de fótons divirja, a energia total irradiada através destes fótons é finita.

Para qualificarmos o tipo de divergência apresentada aqui, vamos introduzir um momento transversal *de corte*  $\kappa$  na região do infravermelho, reescrevendo (5.41) como

$$R^M = \frac{q^2}{2\pi^2 a} \int_{\kappa}^{+\infty} [K_1(k_{\perp}/a)]^2 k_{\perp} dk_{\perp}. \quad (5.42)$$

A integral acima pode ser resolvida [13], de forma que

$$R^M = \frac{q^2}{2\pi^2 a} \left[ \frac{k_{\perp}^2}{2} \left\{ \left[ K_1 \left( \frac{k_{\perp}}{a} \right) \right]^2 - K_0 \left( \frac{k_{\perp}}{a} \right) K_2 \left( \frac{k_{\perp}}{a} \right) \right\} \right]_{\kappa}^{+\infty}, \quad (5.43)$$

e, conseqüentemente,

$$R^M \approx \frac{q^2 a}{2\pi^2} \ln(a/\kappa) \quad (k_{\perp}/a \ll 1). \quad (5.44)$$

Sendo assim, quando  $\kappa \rightarrow 0$ ,  $R^M$  diverge logaritmicamente. Este último resultado será utilizado na comparação com o obtido na seção 6.3 deste trabalho.

## 5.4 Cálculo da função de dois pontos $G_{\mu\nu\varrho\varsigma}$

Como uma aplicação da quantização do campo eletromagnético em Minkowski, vamos calcular as componentes  $G_{trtr}(x, x')$  e  $G_{\theta\varphi\theta\varphi}(x, x')$  da função de correlação

$$G_{\mu\nu\varrho\varsigma}(x, x') \equiv {}_M\langle 0 | \hat{F}_{\mu\nu}(x) \hat{F}_{\varrho\varsigma}(x') | 0 \rangle_M, \quad (5.45)$$

que é invariante de gauge, em coordenadas polares esféricas e verificar que as mesmas coincidem com as obtidas a partir de componentes cartesianas. Relembremos que  $|0\rangle_M$  é o vácuo de Minkowski, definido tal que

$$a_{(\varepsilon, n, \omega, l, m)} |0\rangle_M = 0, \quad (5.46)$$

com  $\varepsilon = I, II, G, NF$  e normalizado a um ( ${}_M\langle 0|0\rangle_M = 1$ ).

Usando-se que  $\hat{F}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \hat{A}_\nu(x) - \partial_\nu \hat{A}_\mu(x)$ , e que

$$\hat{A}_\mu(x) = \sum_{(\varepsilon=I,II,G,NF)} \sum_{(\rho)} \int_0^\infty d\omega \left[ \hat{a}_{(\varepsilon,\omega,\rho)} A_\mu^{(\varepsilon,\omega,\rho)}(x) + \hat{a}_{(\varepsilon,\omega,\rho)}^\dagger A_\mu^{(\varepsilon,\omega,\rho)*}(x) \right], \quad (5.47)$$

podemos escrever

$$\hat{F}_{\mu\nu}(x) = \sum_{(\varepsilon)} \sum_{(\rho)} \int_0^\infty d\omega \left[ \hat{a}_{(\varepsilon,\omega,\rho)} F_{\mu\nu}^{(\varepsilon,\omega,\rho)}(x) + \hat{a}_{(\varepsilon,\omega,\rho)}^\dagger F_{\mu\nu}^{(\varepsilon,\omega,\rho)*}(x) \right], \quad (5.48)$$

com  $F_{\mu\nu}^{(\varepsilon,\omega,\rho)}(x) = \partial_\mu A_\nu^{(\varepsilon,\omega,\rho)}(x) - \partial_\nu A_\mu^{(\varepsilon,\omega,\rho)}(x)$ . Aqui o índice  $\rho$  representa os números quânticos discretos  $l$  e  $m$ , associados ao momento angular. Substituindo (5.48) em (5.45) e usando (5.46), obtemos

$$G_{\mu\nu\varrho\varsigma}(x, x') = \sum_{(\varepsilon)(\varepsilon')} \sum_{(\rho)(\rho')} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\omega' F_{\mu\nu}^{(\varepsilon,\omega,\rho)}(x) F_{\varrho\varsigma}^{(\varepsilon',\omega',\rho')}(x') {}_M\langle 0 | [\hat{a}_{(\varepsilon,\omega,\rho)}, \hat{a}_{(\varepsilon',\omega',\rho')}^\dagger] | 0 \rangle_M. \quad (5.49)$$

Modos puro-gauge não contribuem para  $G_{\mu\nu\varrho\varsigma}(x, x')$  uma vez que  $F_{\mu\nu}^{(G,\omega,\rho)}(x) = 0$ . Os únicos comutadores não-nulos do tipo que aparece em (5.49) são

$$[\hat{a}_{(I,\omega,\rho)}, \hat{a}_{(I,\omega',\rho')}^\dagger] = [\hat{a}_{(II,\omega,\rho)}, \hat{a}_{(II,\omega',\rho')}^\dagger] = \delta_{(\rho)(\rho')} \delta(\omega - \omega'). \quad (5.50)$$

Vemos então que só os modos físicos contribuem para  $G_{\mu\nu\varrho\varsigma}(x, x')$ , de forma que

$$G_{\mu\nu\varrho\varsigma}(x, x') = \sum_{(\lambda=I,II)} \sum_{(\rho)} \int_0^\infty d\omega F_{\mu\nu}^{(\lambda,\omega,\rho)}(x) F_{\varrho\varsigma}^{(\lambda,\omega,\rho)}(x'). \quad (5.51)$$

Devido a sua invariância de gauge obtemos os mesmos resultados para  $G_{\mu\nu\varrho\varsigma}(x, x')$  usando modos satisfazendo a condição de Lorenz, ou em qualquer outro gauge. Vamos efetuar os cálculos usando os modos físicos no gauge  $\tilde{\nabla}^i A_i = 0$ .

Determinemos inicialmente  $G_{trtr}(x, x')$  usando os modos (5.23) e (5.24). Como  $A_t^{(II)} = A_r^{(II)} = 0$ , somente  $A_\mu^{(I)}$  contribui para  $G_{trtr}(x, x')$ . Sendo assim, de (5.51) e (5.23) podemos escrever

$$G_{trtr}(x, x') = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \int_0^\infty d\omega \left[ (\partial_r A_t^{(I)}(x) - \partial_t A_r^{(I)}(x)) (\partial_{r'} A_t^{(I)*}(x') - \partial_{t'} A_r^{(I)*}(x')) \right]$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi r r'} \sum_{l=1}^{\infty} l(l+1) \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \int_0^{\infty} d\omega \omega j_l(\omega r) j_l(\omega r') e^{-i\omega(t-t')} \\
&= \frac{1}{8(\pi r r')^2} \sum_{l=1}^{\infty} l(l+1)(2l+1) P_l(\cos \gamma) Q_l \left[ \frac{-(t-t'-i\epsilon)^2 + r^2 + r'^2}{2rr'} \right], \quad (5.52)
\end{aligned}$$

onde usamos na última passagem que [11]

$$\sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \gamma),$$

com  $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$ , e [13]

$$\int_0^{\infty} d\omega \omega j_l(\omega r) j_l(\omega r') e^{-i\omega(t-t')} = \frac{1}{2rr'} Q_l \left[ \frac{-(t-t'-i\epsilon)^2 + r^2 + r'^2}{2rr'} \right].$$

Vamos agora calcular  $G_{\theta\varphi\theta\varphi}(x, x')$  usando os modos (5.23) e (5.24). Desta vez são somente os modos  $A_{\mu}^{(II)}$  que contribuem porque  $A_{\mu}^{(I)}$  não tem componentes angulares. Segue então de (5.51) e (5.24) que

$$\begin{aligned}
G_{\theta\varphi\theta\varphi}(x, x') &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \int_0^{\infty} d\omega \left[ (\partial_{\theta} A_{\varphi}^{(II)}(x) - \partial_{\varphi} A_{\theta}^{(II)}(x)) (\partial_{\theta'} A_{\varphi}^{(II)*}(x') - \partial_{\varphi'} A_{\theta}^{(II)*}(x')) \right] \\
&= \frac{rr'}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \left[ \partial_{\theta} Y_{\varphi}^{(lm)}(\theta, \varphi) - \partial_{\varphi} Y_{\theta}^{(lm)}(\theta, \varphi) \right] \\
&\quad \times \left[ \partial_{\theta'} Y_{\varphi}^{(lm)*}(\theta', \varphi') - \partial_{\varphi'} Y_{\theta}^{(lm)*}(\theta', \varphi') \right] \int_0^{\infty} d\omega \omega j_l(\omega r) j_l(\omega r') e^{-i\omega(t-t')} \\
&= \frac{\sin \theta \sin \theta'}{8\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} l(l+1)(2l+1) P_l(\cos \gamma) Q_l \left[ \frac{-(t-t'-i\epsilon)^2 + r^2 + r'^2}{2rr'} \right]. \quad (5.53)
\end{aligned}$$

Por outro lado, podemos calcular  $G_{\mu\nu\rho\sigma}(x, x')$  usando as componentes cartesianas, dadas por (vide, e.g., [40])

$${}^C G_{tata}(x, x') = -4\pi \{1 + 2[(\zeta_a)^2 - (\zeta_t)^2] \xi^{-2}\} G_6^+(x, x'), \quad (5.54)$$

$${}^C G_{tatt}(x, x') = -8\pi \zeta_a \zeta_b \xi^{-2} G_6^+(x, x'), \quad (5.55)$$

$${}^C G_{taab}(x, x') = G_{abta}(x, x') = -8\pi \zeta_t \zeta_b \xi^{-2} G_6^+(x, x'), \quad (5.56)$$

$${}^C G_{abab}(x, x') = 4\pi \{1 + 2[(\zeta_a)^2 + (\zeta_b)^2] \xi^{-2}\} G_6^+(x, x'), \quad (5.57)$$

$${}^C G_{acbc}(x, x') = 8\pi \zeta_a \zeta_b \xi^{-2} G_6^+(x, x'), \quad (5.58)$$

onde  $a, b, c$  podem assumir os valores  $x, y, z$  com  $a \neq b \neq c$  (não estamos usando a convenção de soma de Einstein nas expressões (5.54)-(5.58)) e  $\zeta^\alpha \equiv x^\alpha - x'^\alpha$ . Além disso  $G_6^+(x, x') \equiv (4\pi^3 \xi^4)^{-1}$ , onde

$$\xi^2 \equiv -(t - t' - i\epsilon)^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

As componentes esféricas  $G_{trtr}$ ,  $G_{\theta\varphi\theta\varphi}$  podem ser obtidas das componentes cartesianas (5.54)-(5.58) usando as transformações tensoriais usuais, a saber

$$G_{\mu\nu\varrho\varsigma}(x, x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x'^\varrho} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x'^\varsigma} G_{\alpha\beta\gamma\delta}(x, x'). \quad (5.59)$$

Procedendo desta maneira obtemos

$$\begin{aligned} G_{trtr}(x, x') &= \frac{4\pi}{rr'} \left( (xx' + yy' + zz')\xi^2 + 2 \left[ (xy' - x'y)^2 + (xz' - x'z)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (yz' - y'z)^2 \right] \right) \frac{G_6^+(x, x')}{\xi^2}, \end{aligned} \quad (5.60)$$

e

$$\begin{aligned} G_{\theta\varphi\theta\varphi}(x, x') &= 4\pi r r' \sin\theta \sin\theta' \left( (xx' + yy' + zz')\xi^2 + 2 \left[ (xy' - x'y)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (xz' - x'z)^2 + (yz' - y'z)^2 \right] \right) \frac{G_6^+(x, x')}{\xi^2}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Para que as equações (5.60) e (5.52) coincidam, a seguinte igualdade deve ser válida:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} l(l+1)(2l+1) P_l(\cos\gamma) Q_l \left[ \frac{-(t-t'-i\epsilon)^2 + r^2 + r'^2}{2rr'} \right] &= \\ \frac{8rr'}{\xi^6} \left( (xx' + yy' + zz')\xi^2 + 2 \left[ (xy' - x'y)^2 + (xz' - x'z)^2 + (yz' - y'z)^2 \right] \right). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Para mostrarmos a igualdade acima, partamos do resultado conhecido [13]

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\rho) Q_l(\sigma) = \frac{1}{\sigma - \rho}. \quad (5.63)$$

Aplicando o operador

$$\frac{d}{d\rho} \left[ (\rho^2 - 1) \frac{d}{d\rho} \right]$$

em ambos os lados de (5.63), e usando que  $P_l(\rho)$  satisfaz a equação de Legendre, a saber

$$\frac{d}{d\rho} \left[ (1 - \rho^2) \frac{d}{d\rho} P_l(\rho) \right] + l(l+1)P_l(\rho) = 0, \quad (5.64)$$

obtemos a relação

$$\sum_{l=1}^{\infty} l(l+1)(2l+1)P_l(\rho)Q_l(\sigma) = \frac{2\rho\sigma - 1}{(\sigma - \rho)^3}. \quad (5.65)$$

Esta é exatamente a igualdade (5.62), que pode ser obtida explicitamente fazendo-se

$$\rho \equiv \cos \gamma = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'},$$

e

$$\sigma \equiv \frac{-(t - t' - i\epsilon)^2 + r^2 + r'^2}{2rr'}$$

em (5.65).

Usando-se (5.62), segue diretamente que (5.61) e (5.53) são equivalentes. As demais componentes  $G_{\mu\nu\epsilon\zeta}(x, x')$  podem ser calculadas de maneira semelhante, mas omitiremos seu cálculo aqui por considerarmos que o mesmo não acrescentaria informações relevantes para nossos objetivos neste trabalho.

## 5.5 Dipolo elétrico oscilante no espaço-tempo de Minkowski na presença de um banho térmico

Vamos em seguida calcular a *taxa de resposta* (probabilidade de emissão de fótons dividida pelo tempo total) de um dipolo elétrico oscilante no espaço-tempo de Minkowski, imerso em um banho térmico com temperatura  $\beta^{-1}$ . Utilizaremos os modos do campo eletromagnético no espaço-tempo plano obtidos nas coordenadas cartesianas e nas coordenadas polares esféricas para mostrar (numericamente) que a taxa de resposta neste banho térmico é a mesma em ambos os casos.

Iniciemos exibindo brevemente o cálculo em coordenadas cartesianas. Consideremos a corrente conservada ( $\partial_\mu j^\mu = 0$ ) de um dipolo oscilante no espaço-tempo de Minkowski com



coordenadas cartesianas dada por

$$j^\mu = (j^t, j^x, 0, 0), \quad (5.66)$$

onde

$$j^t = q\sqrt{2} \cos Et [\delta(x) - \delta(x - L)] \delta(y) \delta(z), \quad (5.67)$$

e

$$j^z = q\sqrt{2} E \operatorname{sen} Et \Theta(x) \Theta(-x + L) \delta(y) \delta(z), \quad (5.68)$$

com  $\Theta(x)$  sendo a função degrau de Heaviside [11], *i.e.*,  $\Theta(x) = 1$  se  $x > 0$  e  $\Theta(x) = 0$  se  $x < 0$ .

A taxa de resposta em coordenadas cartesianas, que pode ser obtida de (5.40) e (5.36), é dada por

$$R^c = \frac{-1}{T} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} \int d^4 x \int d^4 x' j^\mu(x) j_\mu(x') e^{i\omega(t-t') - i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \coth\left(\frac{\omega\beta}{2}\right), \quad (5.69)$$

onde o fator

$$\coth\left(\frac{\omega\beta}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{e^{\omega\beta} - 1} + \frac{1}{e^{\omega\beta} - 1}\right)$$

exprime a presença do banho térmico com temperatura  $\beta^{-1}$ . Usando (5.66)-(5.68) em (5.69) obtemos, após uma certa manipulação matemática,

$$R^c = \frac{q^2}{2\pi} \left( EL [Si(EL) - Si(0)] - \left[1 - \frac{\operatorname{sen} EL}{EL}\right] - [1 - \cos(EL)] \right) E \coth\left(\frac{E\beta}{2}\right), \quad (5.70)$$

onde

$$Si(\kappa) \equiv \int_{\kappa}^{\infty} d\zeta \frac{\operatorname{sen}\zeta}{\zeta}. \quad (5.71)$$

Vamos em seguida obter a taxa de resposta do dipolo (5.66)-(5.68) fazendo o cálculo em coordenadas polares esféricas, usando para tanto os modos apresentados na seção 5.2. A corrente (5.66)-(5.68), em coordenadas polares esféricas, tem a seguinte forma:

$$j^\mu = (j^t, j^r, 0, 0), \quad (5.72)$$

onde

$$j^t = \frac{q\sqrt{2} \cos Et}{r^2 \operatorname{sen}\theta_0} [\delta(r - r_0) - \delta(r - L)] \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad (5.73)$$

e

$$j^r = \frac{q\sqrt{2}E\sin Et}{r^2\sin\theta_0} \Theta(r-r_0) \Theta(-r+L) \delta(\theta-\theta_0) \delta(\varphi-\varphi_0), \quad (5.74)$$

com  $\theta_0 = \pi/2$ ,  $\varphi_0 = 0$  e no limite  $r_0 \rightarrow 0$ . Note-se que esta corrente é conservada ( $\nabla_\mu j^\mu = 0$ ).

Novamente aqui só os modos físicos têm contribuição não-nula para a amplitude de transição. Pode-se ainda notar que os modos físicos  $II$  não se acoplam com a corrente (5.72), de forma que a única contribuição diferente de zero será dada pelos modos físicos  $I$ . Além disso, como a ação de interação é invariante por uma transformação de gauge (vide seção 6.3), obteremos o mesmo resultado usando os modos (5.23) ou os modos (5.27). Escolhamos os modos (5.23).

A amplitude de emissão de um fóton com números quânticos  $(I, \omega, l, m)$ , na ordem mais baixa da teoria de perturbações, é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(I,\omega,l,m)}^{em} &= {}_M\langle 1; I, \omega, l, m | i \int d^4x \sqrt{-g} j^\mu(x) \hat{A}_\mu(x) | 0 \rangle_M \\ &= -q \omega^{3/2} \delta(\omega - E) \sqrt{2\pi l(l+1)} Y_{lm}^*(\theta_0, \varphi_0) \left[ \int_{r_0}^L dr \frac{j_l(\omega r)}{\omega r} \right]. \end{aligned} \quad (5.75)$$

A taxa de resposta no caso da quantização do campo eletromagnético realizada em coordenadas polares esféricas pode então ser escrita como

$$\begin{aligned} R^s &= \frac{1}{T} \sum_{l,m} \int_0^\infty d\omega |\mathcal{A}_{(I,\omega,l,m)}^{em}|^2 \coth\left(\frac{\omega\beta}{2}\right) \\ &= \frac{q^2}{4\pi} E \coth\left(\frac{E\beta}{2}\right) \sum_{l=1}^\infty l(l+1)(2l+1) \left[ \int_0^{EL} d\xi \frac{j_l(\xi)}{\xi} \right]^2, \end{aligned} \quad (5.76)$$

onde já foi tomado o limite  $r_0 \rightarrow 0$ . Ressalte-se que o termo  $l = 0$  não contribui por corresponder a modos puro-gauge.

Para  $R^c$  e  $R^s$  coincidirem devemos ter

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^\infty l(l+1)(2l+1) \left[ \int_0^{EL} d\xi \frac{j_l(\xi)}{\xi} \right]^2 = \\ &= 2 \left( EL [Si(EL) - Si(0)] - \left[ 1 - \frac{\sin EL}{EL} \right] - [1 - \cos(EL)] \right). \end{aligned} \quad (5.77)$$

Embora não tenhamos demonstrado analiticamente a igualdade acima, a mesma foi verificada numericamente (usando o programa *Mathematica*) para diferentes valores de  $EL$ .

## Capítulo 6

# Interação entre radiação Hawking e uma carga elétrica estática

Após uma breve discussão do problema da radiação emitida por cargas aceleradas do ponto de vista da Teoria Quântica de Campos (TQC) realizada na seção 6.1, estudaremos uma carga elétrica parada fora do horizonte de eventos de um buraco negro estático e sem carga e sua interação com a radiação proveniente do mesmo. Na seção 6.2 descrevemos a corrente associada à carga elétrica em questão e discutiremos a necessidade de considerar, nos passos intermediários, um *regulador* caracterizado por um dipolo oscilante. Na seção 6.3 calcularemos a taxa de resposta de uma carga elétrica estática fora de um buraco negro de Schwarzschild interagindo com a radiação Hawking, representada pelo vácuo de Unruh. Será exibida a forma analítica exata para a taxa de resposta da carga elétrica, ao invés de meramente mostrar que o resultado é finito na região de baixas frequências, uma vez que trata-se de uma quantidade com significado físico e que, em princípio, pode ser medida experimentalmente. Este resultado foi publicado em [41].

### 6.1 Radiação emitida por cargas aceleradas segundo a TQC

O problema da radiação emitida por uma carga acelerada tem sido um tema bastante discutido na Física. Desde a demonstração de Larmor, em 1897 [42], de que um elétron acele-



rado irradia energia eletromagnética, físicos renomados como Born, em 1909 [43], e Pauli, em 1918 [44], dedicaram especial atenção ao problema [45]. Durante todo o século vinte, vários trabalhos científicos foram dedicados à compreensão do fenômeno da emissão de radiação por cargas aceleradas. Para termos uma idéia do quão controvertido era o problema, vale mencionar que, enquanto Pauli [44] e Von Laue [46] concluíam que cargas uniformemente aceleradas não emitem radiação, Bondi e Gold [47], entre outros, afirmavam o contrário. Seguindo esta linha de trabalho calcada na Teoria Clássica de Campos (TCC) o problema da radiação emitida por cargas uniformemente aceleradas foi analisado cuidadosamente por Rohrlich e Fulton no início dos anos 60 [48].

Dê fato este é um assunto que tem despertado o interesse da comunidade científica até tempos bastante recentes, permanecendo um tema de pesquisa até os dias de hoje. O problema ganha ainda mais interesse, se pensarmos em analisá-lo do ponto de vista de um observador co-acelerado com a carga, considerando também o princípio de equivalência, que, em uma de suas versões estabelece que “não há experimentos locais que permitam distinguir entre queda livre (sem rotação) em um campo gravitacional e movimento uniforme na ausência de campo gravitacional”, ou ainda que “um referencial linearmente (uniformemente) acelerado com relação a um referencial inercial no contexto da Relatividade Especial é localmente idêntico a um referencial em repouso num campo gravitacional” [49]. Vamos agora admitir o fato de que cargas em repouso em um campo gravitacional estático não emitem radiação, do ponto de vista de observadores em repouso com relação a estas cargas, uma vez que as mesmas (por estarem em repouso no campo gravitacional estático) não dispõem de energia para emití-la na forma de radiação. Sendo assim, classicamente, podemos pensar em usar o princípio de equivalência para concluir que cargas uniformemente aceleradas na ausência de campo gravitacional também não devem emitir radiação, do ponto de vista de observadores co-acelerados com as mesmas. No entanto, admitindo-se que cargas uniformemente aceleradas na ausência de campo gravitacional de fato emitem radiação segundo observadores inerciais (vide [21, 22]), o que acontece com esta radiação no sistema de referência de observadores co-acelerados com a carga?

Boulware, em 1980 [50], ainda no âmbito de TCC, propõe uma solução para o aparente paradoxo, afirmando que toda a radiação emitida pela carga uniformemente acelerada na ausência de campo gravitacional vai para uma região do espaço-tempo (de Minkowski) totalmente inacessível ao observador co-acelerado com relação a carga, sendo portanto impossível de ser observada por este.

Do ponto de vista da Teoria Quântica de Campos (TQC) tal aparente paradoxo foi recentemente esclarecido por Higuchi, Matsas e Sudarsky [30]. De acordo com a TQC, um detector com aceleração própria constante  $\alpha$  no vácuo de Minkowski (estado quântico no qual observadores inerciais não vêem partículas), comporta-se como se estivesse em um banho térmico de partículas com uma temperatura  $\alpha/2\pi$ , no sistema natural de unidades (efeito Fulling-Davies-Unruh). Em seus trabalhos de 1992, Higuchi, Matsas e Sudarsky mostraram que a radiação emitida por uma carga uniformemente acelerada com relação a um observador inercial no espaço-tempo de Minkowski, obtida na Eletrodinâmica Quântica usual, pode ser coerentemente interpretada no referencial co-acelerado, desde que levemos em conta o banho térmico de Fulling-Davies-Unruh. Mais especificamente, foi mostrado que a taxa de emissão de fótons (com um dado momento transversal) calculada no referencial inercial é exatamente igual a taxa de absorção mais emissão (estimulada) de fótons de Rindler com energia nula (mas com o mesmo momento transversal) do banho térmico de Fulling-Davies-Unruh, calculada no referencial de repouso da carga acelerada. Este fato está em total concordância com os trabalhos realizados no contexto clássico que afirmam que observadores co-acelerados não vêem radiação, pois fótons de energia nula, como o próprio nome sugere, não carregam energia e portanto não podem ser identificados com a radiação clássica.

Também no âmbito da TQC, para o caso de cargas escalares (que denominamos de fontes), foi obtido recentemente [7] que a taxa de resposta de uma carga escalar estática  $q$  no espaço-tempo de Schwarzschild, assumindo-se o vácuo de Unruh [4], é igual à taxa de resposta para a mesma fonte estática no espaço-tempo de Rindler, assumindo-se o vácuo de Minkowski,



dada por

$$R^e = \frac{q^2 a}{4\pi^2}, \quad (6.1)$$

desde que a fonte esteja em ambos os casos com a mesma aceleração própria  $a$ . (Vale lembrar que uma fonte estática no espaço-tempo de Rindler nada mais é do que uma fonte uniformemente acelerada no espaço-tempo de Minkowski.) Ambas as taxas de resposta são calculadas com relação a observadores co-acelerados com a carga. A escolha do vácuo adotado no espaço-tempo de Schwarzschild é crucial para que esta igualdade seja válida. Por exemplo, se substituirmos o vácuo de Unruh pelo vácuo de Hartle-Hawking [51], esta igualdade deixa de valer. No entanto, como o vácuo de Unruh corresponde ao estado quântico de um buraco negro formado por um colapso gravitacional, representando portanto a radiação Hawking, tal igualdade poderia ser o indício de uma universalidade quântica subjacente. Sendo assim, é interessante averiguar se uma tal igualdade é verificada também para outros campos quânticos. Com o intuito de averiguar se tal equivalência se mantém no caso eletromagnético, calcularemos na seção 6.3 a probabilidade de emissão e absorção de uma carga elétrica estática no espaço-tempo de Schwarzschild, assumindo o vácuo de Unruh.

O princípio de equivalência desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento da Relatividade Geral e continua a ser testado com grande sucesso[52]. Recentemente tem sido questionado por vários autores se uma versão quântica deste princípio de equivalência pode ser formulada (vide, *e.g.*, [53]). A principal dificuldade inerente ao problema está no fato de estados quânticos serem definidos globalmente enquanto que o princípio de equivalência envolve apenas quantidades locais. No caso de fenômenos caracterizados por frequências muito grandes (comprimentos de onda muito pequenos) efeitos de curvatura não devem em princípio influenciar significativamente no comportamento da função de onda. (Ressalte-se que efeitos topológicos são relevantes mesmo no caso de altas frequências.) Sendo assim, apenas no caso de fenômenos caracterizados por frequências muito grandes deve ser esperada uma equivalência entre resultados obtidos em espaços-tempos curvos e planos. Por exemplo, a radiação Hawking pode ser derivada requerendo-se que a física nas vizinhanças do horizonte de um buraco negro



seja a mesma daquela no espaço-tempo de Minkowski, no limite de frequências infinitas [54]. Desta forma não há uma razão *a priori* para esperarmos alguma equivalência, para baixas frequências, entre fenômenos em espaços-tempos planos e curvos.

A igualdade encontrada para a taxa de resposta de uma fonte estática em Rindler e em Schwarzschild, pelo fato de se tratar de uma fonte estática sem estrutura interna, é inteiramente devida à emissão e absorção de *partículas de frequência nula*. Sendo assim, aquela igualdade envolve, obviamente, baixas frequências.

Na seção 6.3 investigaremos se uma tal igualdade também é encontrada no caso eletromagnético. Antes porém, na seção seguinte, vejamos a forma da corrente associada à carga eletromagnética, que nos permite efetuar os cálculos de maneira coerente.

## 6.2 A corrente associada à carga elétrica estática

Uma linha de mundo com  $r$ ,  $\theta$  e  $\varphi$  constantes na geometria de Schwarzschild, cujo elemento de linha foi dado em (2.1), tem uma aceleração própria constante dada por  $a = M/r_0^2 f^{1/2}(r_0)$ . A corrente conservada correspondente a uma carga seguindo uma linha de mundo deste tipo é dada por

$$j^t = \frac{q}{r_0^2 \sin\theta_0} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad j^r = j^\theta = j^\varphi = 0. \quad (6.2)$$

Note-se que o intervalo infinitesimal de tempo próprio de um observador no referencial parado com esta carga estática relaciona-se com o intervalo infinitesimal de tempo coordenado por  $d\tau = f^{1/2}(r_0) dt$  (onde  $f^{1/2}(r_0)$  é o chamado fator de redshift gravitacional). Queremos obter a taxa de resposta desta corrente no vácuo de Unruh, calculada no referencial co-acelerado com a carga estática. A taxa de resposta consistir-se-á da emissão e absorção de fótons do banho térmico correspondente ao vácuo de Unruh (radiação Hawking). Note-se que a taxa de emissão espontânea é zero pelo fato da corrente (6.2) ser estática. (Deve-se ter em mente que uma corrente estática só se acopla a fótons com *energia nula*). No entanto, o fato de termos uma corrente estática não implica que a taxa de emissão estimulada e absorção sejam também zero.

Uma vez que temos um número infinito de fótons de Unruh do banho térmico com energia nula (pois a distribuição térmica de Bose-Einstein de fótons com energia nula provenientes do horizonte diverge), as taxas de emissão estimulada e absorção ficam indefinidas (ficamos diante do produto de uma quantidade nula por um número infinito). Segue então que o uso direto desta densidade de corrente leva a resultados indefinidos [7].

Precisamos então *regularizar* a corrente (6.2) para tornar finitos tanto a magnitude do acoplamento com o campo quanto o número de fótons relevante, como devem ser. (Este regulador será obviamente removido no final dos cálculos.)

Para contornar este problema, podemos modificar a corrente estática (6.2), substituindo-a pela de uma carga oscilante com frequência  $E > 0$ , dada por

$$j^t = \frac{\sqrt{2} q \cos Et}{r_0^2 \sin \theta_0} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad j^r = j^\theta = j^\varphi = 0. \quad (6.3)$$

Ao final, tomaríamos então o limite  $E \rightarrow 0$ . Deve-se ressaltar que a normalização desta corrente foi escolhida de maneira que a média temporal do quadrado da carga,  $(\int d\Sigma_\mu^{(3)} j^\mu)^2$ , seja igual a  $q^2$ .

No entanto, a corrente (6.3) não satisfaz a equação de conservação da corrente elétrica,  $\nabla_\mu j^\mu = 0$ . Por esta razão devemos usar no seu lugar a de um dipolo elétrico oscilante, dada por

$$j^\mu = (j^t, j^r, 0, 0), \quad (6.4)$$

$$j^t = \frac{\sqrt{2} q \cos Et}{r^2 \sin \theta_0} [\delta(r - r_0) - \delta(r - L)] \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad (6.5)$$

e

$$j^r = \frac{\sqrt{2} q E \sin Et}{r^2 \sin \theta_0} \Theta(r - r_0) \Theta(-r + L) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0). \quad (6.6)$$

Aqui,  $\Theta(x)$  é a função degrau de Heaviside, *i.e.*,  $\Theta(x) = 1$  se  $x > 0$  e  $\Theta(x) = 0$  se  $x < 0$ . Ao final, tomaremos o limite  $L \rightarrow \infty$  e  $E \rightarrow 0$ , para obter uma carga puntual estática sem estrutura de dipolo, localizada em  $(r, \theta, \varphi) = (r_0, \theta_0, \varphi_0)$ . Pode-se mostrar que a corrente (6.4) satisfaz a equação de conservação  $\nabla_\mu j^\mu = 0$ .

Vale ressaltar que, nem a carga elétrica extra introduzida em  $r = L$  no dipolo (6.4)-(6.6), nem a corrente  $j^r$  entre as duas cargas contribuirão para os resultados finais. Estas são introduzidas para manter a conservação da corrente e manter os cálculos coerentes antes mesmo de tomarmos o limite  $E \rightarrow 0$ .

### 6.3 Carga elétrica estática fora de um buraco negro de Schwarzschild no vácuo de Unruh

Iniciemos por assumir que a carga elétrica clássica interage com o campo de Maxwell através do acoplamento mínimo representado pela ação de interação

$$\hat{S}_{int} = \int d^4x \sqrt{-g} j^\mu \hat{A}_\mu . \quad (6.7)$$

Devemos ressaltar que a ação de interação acima é invariante por uma transformação de gauge do campo  $\hat{A}_\mu$ , desde que a corrente seja conservada e o campo eletromagnético se anule no infinito. Para demonstrarmos isso, assumamos uma transformação de gauge do tipo

$$\hat{A}'_\mu = \hat{A}_\mu - \nabla_\mu \hat{X} . \quad (6.8)$$

Desta forma

$$\hat{S}'_{int} = \hat{S}_{int} - \int_V d^4x \sqrt{-g} j^\mu \nabla_\mu \hat{X} , \quad (6.9)$$

onde  $V$  é o volume quadridimensional de integração . Integrando por partes o último termo da expressão acima obtemos

$$\int_V d^4x \sqrt{-g} j^\mu \nabla_\mu \hat{X} = \int_V d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu (j^\mu \hat{X}) - \int_V d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\mu j^\mu) \hat{X} = 0 . \quad (6.10)$$

O termo à esquerda do último sinal de igualdade na expressão acima se anula devido à conservação da corrente. Podemos usar a versão quadridimensional do teorema de Gauss para transformar a integral à direita do primeiro sinal de igualdade acima em uma integral de superfície, que por hipótese também será nula devido ao campo envolvido anular-se na borda  $\partial V$  do volume  $V$  . Segue então que

$$\hat{S}'_{int} = \hat{S}_{int} ,$$



como queríamos demonstrar.

Isto dito, podemos, ao invés de usar as soluções satisfazendo o gauge de Lorenz, apresentadas na seção 4.2, usar aquelas satisfazendo o gauge  $\tilde{\nabla}^i A_i = 0$ , apresentadas na seção 4.1, pois a ação de interação será a mesma para ambos os casos. Deve-se também ressaltar que os modos puro-gauge,  $A_\mu^{(G)} = \nabla_\mu \Phi$ , não contribuem para a ação de interação, o que pode ser diretamente visto de (6.7) e (6.10).

Vamos agora calcular a amplitude de transição a nível de árvore entre o vácuo de Boulware  $|0\rangle_B$  definido na seção 4.3, e o estado de uma partícula  $|1; \varepsilon, n, \omega, l, m\rangle_B = a_{(\varepsilon, n, \omega, l, m)}^\dagger |0\rangle_B$ , pela densidade de corrente clássica  $j^\mu$ , a saber

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(\varepsilon, n, \omega, l, m)}^{em} &= {}_B\langle 1; \varepsilon, n, \omega, l, m | i\hat{S}_{int} | 0 \rangle_B \\ &= i \int d^4x \sqrt{-g} j^\mu(x) {}_B\langle 1; \varepsilon, n, \omega, l, m | \hat{A}_\mu^{(\varepsilon)} | 0 \rangle_B. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Estamos interessados aqui em determinar a interação da carga elétrica estática com a radiação Hawking, que será representada pelo vácuo de Unruh. O vácuo de Unruh corresponde ao estado quântico de um buraco negro formado por colapso gravitacional, para o qual observadores parados fora do buraco vêem um fluxo térmico de partículas provenientes do horizonte de eventos do buraco negro. Para um observador estático localizado no infinito espacial a temperatura desse fluxo térmico é  $\beta^{-1} = 1/(8\pi M)$ . Já para um observador estático localizado em  $r = r_0$  a temperatura desse fluxo é  $\beta_0^{-1} = \beta^{-1}/\sqrt{f(r_0)}$  [55].

Como foi dito anteriormente, somente a emissão estimulada e a absorção de fótons do banho térmico em questão terão contribuições não-nulas para a taxa de resposta da carga estática. Além disso, o banho térmico de fótons de Boulware provém integralmente do horizonte de eventos passado  $H^-$  no caso do vácuo de Unruh. Desta forma, devemos considerar apenas modos com  $n = \rightarrow$ .

Já vimos que os modos puro-gauge têm contribuição nula para a ação de interação. Além disso os modos não-físicos também não contribuem para a amplitude acima pelo fato dos

mesmos terem norma nula, *i.e.*,

$${}_B\langle 1; NF, \rightarrow, \omega, l, m | 1; NF, \rightarrow, \omega', l', m' \rangle_B = {}_B\langle 0 | [\hat{a}_{(NF, \rightarrow, \omega, l, m)}, \hat{a}_{(NF, \rightarrow, \omega', l', m')}^\dagger] | 0 \rangle_B = 0, \quad (6.12)$$

como foi visto na seção 4.3 [vide (4.83)]. Além disso,

$$j^\mu A_\mu^{(II)} = 0,$$

pois de (6.4)  $j^\mu = (j^t, j^r, 0, 0)$ , e de (4.29)  $A_\mu^{(II, n, \omega, l, m)} = (0, 0, A_\theta^{(II, n, \omega, l, m)}, A_\phi^{(II, n, \omega, l, m)})$ . Sendo assim, as únicas contribuições para a amplitude (6.11) provirão dos modos  $I$ , de forma que

$$\mathcal{A}_{(\varepsilon, n, \omega, l, m)}^{em} = \mathcal{A}_{(I, \rightarrow, \omega, l, m)}^{em}.$$

Desta forma, de (6.11), ficamos com

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(I, \rightarrow, \omega, l, m)}^{em} &= i \int d^4x \sqrt{-g} j^\mu(x) \sum_{l'=0}^{+\infty} \sum_{m'=-l'}^{+l'} \int d\omega' A_\mu^{(I, \rightarrow, \omega', l', m')*} \\ &\quad \times {}_B\langle 1; I, n, \omega, l, m | \hat{a}_{(I, \rightarrow, \omega', l', m')}^\dagger | 0 \rangle_B \\ &= i \int d^4x \sqrt{-g} j^\mu(x) A_\mu^{(I, \rightarrow, \omega, l, m)*}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

onde usamos que

$$\begin{aligned} {}_B\langle 1; I, n, \omega, l, m | \hat{a}_{(I, \rightarrow, \omega', l', m')}^\dagger | 0 \rangle_B &= {}_B\langle 1; I, \rightarrow, \omega, l, m | 1; I, \rightarrow, \omega', l', m' \rangle_B \\ &= \delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Recordemos de (4.24) que

$$A_\mu^{(I, \rightarrow, \omega, l, m)} = (\omega^{1/2} K_t^{(\omega l)}(r), \omega^{3/2} K_r^{(\omega l)}(r), 0, 0) Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}, \quad (6.15)$$

com

$$K_t^{(\omega l)}(r) \equiv \frac{i}{M} \left[ (z-1) \frac{dq_{\omega l}^{I \rightarrow}}{dz} + \frac{(z-1)}{(z+1)} q_{\omega l}^{I \rightarrow} \right], \quad (6.16)$$

e

$$K_r^{(\omega l)}(r) \equiv \frac{(z+1)^2}{(z-1)} q_{\omega l}^{I \rightarrow}. \quad (6.17)$$

Com isto obtemos

$$\mathcal{A}_{(I,\rightarrow,\omega,l,m)}^{em} = I_t + I_r, \quad (6.18)$$

com

$$\begin{aligned} I_t &\equiv i \int d^4x \sqrt{-g} j^t(x) A_t^{(I,\rightarrow,\omega,l,m)*} \\ &= i\pi\sqrt{2}qE^{1/2}[K_t^{(\omega l)}(r_0) - K_t^{(\omega l)}(L)]Y_{lm}^*(\theta_0, \varphi_0)\delta(\omega - E), \end{aligned} \quad (6.19)$$

e

$$\begin{aligned} I_r &\equiv i \int d^4x \sqrt{-g} j^r(x) A_r^{(I,\rightarrow,\omega,l,m)*} \\ &= -\pi\sqrt{2}qE^{5/2} \left[ \int_{r_0}^L dr K_r^{(\omega l)}(r) \right] Y_{lm}^*(\theta_0, \varphi_0)\delta(\omega - E), \end{aligned} \quad (6.20)$$

onde usamos que  $g(\omega)\delta(\omega - E) = g(E)\delta(\omega - E)$ . Vale ressaltar a presença de  $\delta(\omega - E)$  nas expressões (6.19) e (6.20). Note-se que no limite da carga estática ( $E \rightarrow 0$ ) teremos  $\delta(\omega)$  nestas expressões, onde manifesta-se explicitamente o fato citado anteriormente, qual seja: cargas estáticas só interagem com modos de frequência nula. Sendo assim, precisaremos somente dos modos  $q_{0l}^{I\rightarrow}(z)$  dados em (4.86) e (4.99), a saber

$$q_{0l}^{I\rightarrow}(z) = \frac{2M}{\sqrt{\pi l(l+1)}} \left[ Q_l(z) - \frac{z-1}{l(l+1)} \frac{dQ_l(z)}{dz} \right]. \quad (6.21)$$

Vamos então calcular a probabilidade de emissão de partículas com um dado momento angular para uma carga estática localizada em  $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$  e imersa na radiação Hawking, representada aqui pelo vácuo de Unruh, dada por

$$\mathcal{P}_{lm}^{em} = \lim_{L \rightarrow +\infty} \lim_{E \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} d\omega |\mathcal{A}_{(I,\rightarrow,\omega,l,m)}^{em}|^2 \left[ 1 + \frac{1}{e^{\omega\beta} - 1} \right]. \quad (6.22)$$

Os dois termos entre colchetes na expressão acima estão associados à emissão espontânea e induzida, nesta ordem. Em seguida notemos que

$$\lim_{E \rightarrow 0} \left[ 1 + \frac{1}{e^{\omega\beta} - 1} \right] \delta(\omega - E) = \lim_{E \rightarrow 0} (E\beta)^{-1} \delta(\omega - E), \quad (6.23)$$

e, de (6.18)-(6.21),

$$|\mathcal{A}_{(I,\rightarrow,\omega,l,m)}^{em}|^2 = |I_t|^2 + (I_t I_r^* + I_r I_t^*) + |I_r|^2, \quad (6.24)$$



com  $|I_t|^2 \propto E$ ,  $(I_t I_r^* + I_r I_t^*) \propto E^3$ , e  $|I_r|^2 \propto E^5$ . Desta forma

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{lm}^{em} &= \lim_{L \rightarrow +\infty} \lim_{E \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} d\omega \frac{|I_t|^2}{E\beta} \\ &= \frac{\pi}{4M} \delta(0) |K_t^{(0l)}(r_0)|^2 |Y_{lm}(\theta_0, \varphi_0)|^2, \end{aligned} \quad (6.25)$$

onde usamos que  $\beta = 8\pi M$  e que  $K_t^{(0l)}(r)$  tende a zero assintoticamente. Lançando mão de (6.16), (6.21) e da equação diferencial de Legendre que define  $Q_l(z)$ , obtemos que

$$K_t^{(0l)}(r) = \frac{2i}{\sqrt{\pi l(l+1)}} \left[ (z-1) \frac{dQ_l(z)}{dz} \right]. \quad (6.26)$$

Substituindo (6.26) em (6.25), obtemos a taxa de emissão, assim como calculada por um observador co-acelerado com a carga estática

$$\frac{\mathcal{P}_{lm}^{em}}{\tau} = \frac{q^2(z_0-1)^2}{2\pi M l(l+1) f^{1/2}(r_0)} \left[ \frac{dQ_l(z_0)}{dz_0} \right]^2 |Y_{lm}(\theta_0, \varphi_0)|^2,$$

onde  $\tau = 2\pi f^{1/2}(r_0) \delta(0)$  é o tempo próprio total deste observador e  $z_0 = r_0/M - 1$ .

Podemos então somar sobre os números quânticos de momento angular,  $l$  e  $m$ , usando as fórmulas

$$\sum_{m=-l}^{+l} |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}, \quad (6.27)$$

que pode ser obtida de [21], e

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} \left[ \frac{dQ_l(z)}{dz} \right]^2 = \frac{2Q_1(z)}{(z^2-1)^2}, \quad (6.28)$$

cujas derivação será exibida no apêndice A. A taxa de emissão total é então dada por

$$\frac{\mathcal{P}^{em}}{\tau} = \frac{q^2 a(r_0)}{4\pi^2} Q_1 \left( \frac{r_0}{M} - 1 \right), \quad (6.29)$$

onde

$$a(r_0) = M r_0^{-2} f^{-1/2}(r_0) \quad (6.30)$$

é a aceleração própria da carga no espaço-tempo de Schwarzschild. Analogamente, a probabilidade de absorção para um dado valor de momento angular é

$$\mathcal{P}_{lm}^{abs} = \lim_{L \rightarrow +\infty} \lim_{E \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} d\omega |\mathcal{A}_{(l, \rightarrow, \omega, l, m)}^{abs}|^2 \left[ \frac{1}{e^{\omega\beta} - 1} \right],$$

onde, por unitariedade,  $|\mathcal{A}_{(I,\rightarrow,\omega,l,m)}^{abs}| = |\mathcal{A}_{(I,\rightarrow,\omega,l,m)}^{em}|$ . O termo entre colchetes na expressão acima indica a presença do banho térmico (com temperatura  $\beta^{-1}$ ) de fótons de Boulware com energia  $\omega$  proveniente de  $H^-$ , que caracteriza o vácuo de Unruh.

Segue então que a taxa de absorção total é dada por

$$\frac{\mathcal{P}^{abs}}{\tau} = \frac{q^2 a(r_0)}{4\pi^2} Q_1 \left( \frac{r_0}{M} - 1 \right). \quad (6.31)$$

A razão da igualdade entre  $\mathcal{P}^{em}/\tau$  e  $\mathcal{P}^{abs}/\tau$  reside no fato de que a emissão espontânea torna-se desprezível em comparação com a emissão induzida na medida em que  $E$  tende a zero. É interessante notar também que é a existência de um número infinito de fótons de Boulware com energia nula no banho térmico correspondente ao vácuo de Unruh que impede  $\mathcal{P}^{em}/\tau$  e  $\mathcal{P}^{abs}/\tau$  de se anularem. Na ausência do banho térmico, as taxas de emissão e absorção anular-se-iam.

Obtemos então, uma vez que não há interferência entre os processos de emissão e absorção de fótons de Boulware a nível de árvore, que a taxa de resposta total da carga é dada pela soma de (6.29) e (6.31), a saber

$$\begin{aligned} R^v &\equiv \frac{\mathcal{P}^{em}}{\tau} + \frac{\mathcal{P}^{abs}}{\tau} \\ &= \frac{q^2 a(r_0)}{2\pi^2} Q_1 \left( \frac{r_0}{M} - 1 \right), \end{aligned} \quad (6.32)$$

com

$$Q_1(z) = \frac{z}{2} \ln \frac{z+1}{z-1} - 1. \quad (6.33)$$

Note-se que a taxa de resposta (6.32) é finita, ao contrário de (5.41) que é divergente. Analisemos agora o comportamento de (6.32) muito próximo e muito distante do horizonte de eventos do buraco negro de Schwarzschild. Usando (6.30) e (6.33) podemos reescrever (6.32) como

$$R^v = \frac{q^2 M}{2\pi^2 r_0^2} \left( \frac{r_0}{r_0 - 2M} \right)^{1/2} \left\{ \left( \frac{r_0 - M}{r_0} \right) \ln \left[ \frac{r_0}{r_0 - 2M} \right] - 1 \right\}. \quad (6.34)$$

Em seguida usamos que

$$\ln x \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad (x \approx 0),$$

para mostrar que  $R^v$  vai a zero muito longe do horizonte como

$$R^v \approx \frac{2q^2 M^3}{3\pi^2} \frac{1}{r_0^4} \quad (r_0 \rightarrow +\infty). \quad (6.35)$$

Podemos também mostrar de (6.34) que próximo do horizonte  $R^v$  diverge na forma

$$R^v \approx \frac{q^2}{8\pi^2 M} \left( \frac{2M}{r_0 - 2M} \right)^{1/2} \ln \left[ \left( \frac{2M}{r_0 - 2M} \right)^{1/2} \right] \quad (r_0 \rightarrow 2M^+). \quad (6.36)$$

De (6.30) vemos que próximo do horizonte a aceleração própria da carga estática diverge como

$$a(r_0) \approx \frac{1}{4M} \left( \frac{2M}{r_0 - 2M} \right)^{1/2} \quad (r_0 \rightarrow 2M^+). \quad (6.37)$$

Isto nos permite reescrever (6.36) como

$$R^v \approx \frac{q^2}{2\pi^2} a(r_0) \ln[4Ma(r_0)] \quad (r_0 \rightarrow 2M^+). \quad (6.38)$$

Comparando esta expressão com a taxa de resposta de uma carga com aceleração constante  $a$  no espaço-tempo plano no vácuo de Minkowski com uma frequência de corte  $\kappa$ , dada por (5.44), a saber

$$R^M \approx \frac{q^2 a}{2\pi^2} \ln(a/\kappa) \quad (k_\perp/a \ll 1), \quad (6.39)$$

concluimos que o tamanho finito do horizonte de eventos do buraco negro age como uma frequência de corte na região do infravermelho.

A expressão (6.32) nos fornece a taxa de resposta de uma carga elétrica estática fora de um buraco negro de Schwarzschild, interagindo com a radiação Hawking no vácuo de Unruh. O resultado encontrado aqui difere do obtido para a carga escalar (fonte), dado em (6.1), por um fator  $2Q_1(r_0/M - 1)$ . No caso escalar, foi encontrado que as taxas de resposta de fontes estáticas pontuais no espaço-tempo de Schwarzschild (assumindo-se o vácuo de Unruh) e no espaço-tempo de Rindler (assumindo-se o vácuo de Minkowski) são iguais desde que as fontes pontuais tenham a mesma aceleração própria em ambas as situações. Acabamos de obter que uma tal igualdade não é verificada no caso vetorial, uma vez que a taxa de resposta de uma carga elétrica estática no espaço-tempo de Rindler (que nada mais é do que uma carga elétrica



uniformemente acelerada no espaço-tempo de Minkowski) no vácuo de Minkowski diverge na medida em que as frequências tendem a zero [vide (5.41) e a discussão logo abaixo da mesma]. Concluimos assim que a suspeita da existência de uma universalidade quântica conjecturada a partir do estudo do campo escalar não foi confirmada no caso eletromagnético.

## Capítulo 7

# Conclusões e perspectivas

Neste trabalho apresentamos a quantização dos campos escalar e vetorial, com massa nula, no espaço-tempo de um buraco negro estático e sem carga. Devido ao fato das funções radiais envolvidas satisfazerem equações diferenciais cujas soluções analíticas não se encontram disponíveis na literatura, não nos foi possível determinar analiticamente a forma e a normalização dos modos independentes dos campos em todo o espaço-tempo *para quaisquer frequências*. No entanto, uma vez que conhecemos as equações diferenciais envolvidas, é possível encontrar numericamente os resultados desejados. Ademais, devido à estrutura assintótica do espaço-tempo de um buraco negro, nos é possível obter a normalização dos modos muito próximo e muito distante do horizonte de eventos. Podemos ainda utilizar estes resultados para obter os modos normalizados em todos os pontos do espaço-tempo em questão, na aproximação de baixas frequências.

No caso do campo escalar, apresentado nos capítulos 2 e 3, determinamos numericamente os modos normalizados e com eles calculamos a potência irradiada por uma fonte girando ao redor de um buraco negro de Schwarzschild (vide seção 3.4.2). Utilizamos também nossa aproximação analítica para baixas frequências para calcular a mesma potência irradiada (vide seção 3.4.3). Comparamos então estes resultados obtidos para um buraco negro, com os obtidos assumindo-se um espaço-tempo plano, utilizando duas diferentes possibilidades para a interação gravitacional entre o corpo estelar e a fonte girante em Minkowski (força gravitacional newtoniana e troca de grávitons). Ao compararmos os resultados concluímos que os obtidos para

espaços-tempos curvos e planos diferem de 30 a 20% para as órbitas circulares estáveis mais internas possíveis segundo a Relatividade Geral. Na seção 3.5 apresentamos detalhadamente a análise e comparação destes resultados mencionados de passagem aqui. Nossa análise nos dá embasamento para afirmar que cálculos precisos da radiação emitida na vizinhança de buracos negros deverão levar em conta a Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos (TQCEC). Dito de outra forma, a TQCEC nos permite obter correções devidas à interação gravitacional einsteiniana a fenômenos quânticos ocorrendo na vizinhança de buracos negros e estrelas relativísticas.

A quantização do campo eletromagnético foi apresentada no capítulo 4. Discutimos as soluções independentes em dois gauges diferentes e adaptamos a quantização de Gupta-Bleuler para o caso do espaço-tempo de Schwarzschild, apresentando com certo detalhe a estrutura do espaço de Fock associado ao fóton. Na aproximação de baixas frequências, encontramos a normalização dos modos físicos. Para mostrar a consistência de nosso procedimento de escolha e normalização dos modos do campo eletromagnético em Schwarzschild com coordenadas polares esféricas, usamos o mesmo procedimento para quantizar o campo do fóton em Minkowski no capítulo 5. Fizemos uso dos modos normais assim obtidos para calcular quantidades que podem ser encontradas na literatura obtidas utilizando o procedimento de quantização padrão [25, 34], exibindo a concordância dos resultados. Cheques de consistência desta natureza seriam igualmente interessantes de serem realizados com o procedimento utilizado na quantização do campo de Maxwell no espaço-tempo de Schwarzschild no gauge  $A_0 = 0$ , discutido em [32].

No capítulo 6 utilizamos os modos normais obtidos na aproximação de baixas frequências para investigar a taxa de resposta de uma carga elétrica estática no espaço-tempo de Schwarzschild interagindo com fótons da radiação Hawking (com o vácuo de Unruh). Encontramos que esta taxa de resposta é finita. (Pelo fato da carga estática só interagir com modos de *frequência nula* os modos aproximados por nós obtidos são suficientes para o cálculo exato desta taxa de resposta.) Isto implica diretamente que não há uma igualdade análoga à encontrada no caso escalar, uma vez que a taxa correspondente no espaço-tempo de Rindler,



para uma carga elétrica, tem divergência na região do infravermelho. Desta forma não parece haver um princípio físico envolvido por detrás do resultado obtido no caso escalar. Com este exemplo, podemos então visualizar a importância da TQCEC na análise de aspectos conceituais relevantes da Física como a emissão de radiação por fontes aceleradas e a possibilidade de existência de um princípio de equivalência quântico.

Vale enfatizar que nossos resultados estão de acordo com a conclusão amplamente aceita em Eletrodinâmica Clássica, de que cargas estáticas em campos gravitacionais não irradiam [48, 50, 56]. Tal conclusão é obtida aqui, lembrando que modos de frequência nula, que se acoplam com a carga estática por nós considerada não carregam energia e, conseqüentemente, não podem ser identificados com radiação clássica.

Ainda com o intuito de averiguar se a equivalência obtida para a fonte acelerada em Minkowski e em Schwarzschild se manteria no caso em que o buraco negro fosse provido de carga elétrica, foi calculada a probabilidade de emissão e absorção de uma fonte estática no espaço-tempo de Reissner-Nordstrøm [57], assumindo-se o vácuo de Unruh. No entanto, também não foi encontrada equivalência entre este resultado e aquele obtido para a fonte uniformemente acelerada em Minkowski (assumindo-se o vácuo de Minkowski).

Recentemente a quantização do campo eletromagnético fora de buracos negros estáticos, semelhante a apresentada no capítulo 4, foi utilizada para calcular a seção de choque de absorção de ondas planas de baixa energia para buracos negros de Schwarzschild e de Reissner-Nordstrøm extremo em dimensões arbitrárias (maiores do que três) [36].

Um outro problema que nos parece interessante de ser investigado é o cálculo da potência irradiada por uma carga elétrica girando em torno de um buraco negro estático. Este problema é semelhante ao estudado no capítulo 3, envolvendo por sua vez a quantização do campo do fóton, desenvolvida no presente trabalho.

# Apêndice A

## Dedução da equação (6.28)

Inicialmente definamos

$$F(z) \equiv \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} \left[ \frac{d}{dz} Q_l(z) \right]^2. \quad (\text{A.1})$$

Usando a equação de Legendre, satisfeita por  $Q_l(z)$ , obtemos

$$\frac{d}{dz} \left\{ (z^2 - 1)^2 \left[ \frac{d}{dz} Q_l(z) \right]^2 \right\} = 2l(l+1)(z^2 - 1) Q_l(z) \frac{d}{dz} Q_l(z). \quad (\text{A.2})$$

Desta forma,

$$\frac{d}{dz} \left[ (z^2 - 1)^2 F(z) \right] = (z^2 - 1) \frac{d}{dz} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) [Q_l(z)]^2 \right\}. \quad (\text{A.3})$$

Lembremos agora que

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [Q_l(z)]^2 = \frac{1}{z^2 - 1}. \quad (\text{A.4})$$

(Isto pode ser obtido quadrando ambos os lados da equação (5.63) e integrando na variável  $t$  de  $-1$  a  $1$ .) Substituindo (A.4) em (A.3) obtemos

$$\frac{d}{dz} \left[ (z^2 - 1)^2 F(z) \right] = (z^2 - 1) \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{z^2 - 1} - \frac{1}{4} \left( \ln \frac{z+1}{z-1} \right)^2 \right] = -\frac{2z}{z^2 - 1} + \ln \frac{z+1}{z-1}, \quad (\text{A.5})$$

onde usamos que

$$Q_0(z) = \frac{1}{2} \log \frac{z+1}{z-1}. \quad (\text{A.6})$$

A integração de (A.5) nos leva a seguinte expressão

$$(z^2 - 1)^2 F(z) = z \ln \frac{z+1}{z-1} - 2 + C, \quad (\text{A.7})$$

onde  $C$  é uma constante. Lembrando que  $Q_l(z) \sim z^{-l-1}$  na medida em que  $z \rightarrow \infty$ , encontramos que o lado esquerdo da equação acima tende a zero neste limite. Desta forma  $C = 0$ . Com isso podemos escrever

$$F(z) = \frac{1}{(z^2 - 1)^2} \left( z \ln \frac{z+1}{z-1} - 2 \right) = \frac{2Q_1(z)}{(z^2 - 1)^2}, \quad (\text{A.8})$$

que é o que queríamos demonstrar.



# Bibliografia

- [1] G.E.A. Matsas, *Preliminaries to Quantum Field Theory in Curved Spacetimes*, em *Proceedings of the IXth Jorge André Swieca Summer School*, Campos do Jordão-SP, Brasil, 1997, editado por J.C.A. Barata, A.P.C. Malbouisson e S.F. Novaes (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998).
- [2] N.D. Birrel e P.C.W. Davies, *Quantum fields in curved space* (Cambridge University Press, 1982). S.A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time* (Cambridge University Press, 1989). R.M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics* (The University of Chicago Press, 1994). L.H. Ford, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime*, em *Proceedings of the IXth Jorge André Swieca Summer School*, Campos do Jordão-SP, Brasil, 1997, editado por J.C.A. Barata, A.P.C. Malbouisson e S.F. Novaes (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998).
- [3] S.A. Fulling, *Phys. Rev. D* **7**, 2850 (1973). P.C.W. Davies, *J. Phys. A* **8**, 609 (1975).
- [4] W.G. Unruh, *Phys. Rev. D* **14**, 870 (1976).
- [5] S.W. Hawking *Nature* **248**, 30 (1974). S.W. Hawking *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
- [6] L.W. Schiff, *Quantum mechanics*, 3<sup>a</sup>. ed. (McGraw-Hill Book Company, 1968).
- [7] A. Higuchi, G.E.A. Matsas e D. Sudarsky, *Phys. Rev. D* **56**, R6071 (1997); **58**, 104021 (1998).

- [8] L. Landau e E. Lifshitz, *Teoria do campo* (Editora Mir, 1980).
- [9] R.H. Price, Phys. Rev. D **5**, 2419 (1972). P. Candelas, Phys. Rev. D **21**, 2185 (1980). B.P. Jensen e P. Candelas, Phys. Rev. D **33**, 1590 (1986). B.P. Jensen e P. Candelas, Phys. Rev. D **35**, 4041 (1987), *erratum*.
- [10] M. Abramowitz e I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publications, 1965).
- [11] G.B. Arfken e H.J.-Weber, *Mathematical Methods for Physics* (Academic Press, 1995).
- [12] D.G. Boulware. Phys. Rev. D **11**, 1404 (1975).
- [13] I.S. Gradshteyn e I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, 1980).
- [14] J. van Paradijs e J.E. McClintock em *X-Ray Binaries*, organizado por W.H.G. Lewin, J. van Paradijs e E.P.J. van den Heuvel (Cambridge University Press, 1995).
- [15] M.J. Rees em *Black holes and relativistic stars*, organizado por R.M. Wald (The University of Chicago Press, 1998).
- [16] N.I. Shakura e R.A. Sunyaev, Astr. and Astrophys. **24**, 337 (1973). I.D. Novikov e K.S. Thorne em *Black holes*, organizado por C. DeWitt e B. DeWitt (Gordon and Breach, 1973). D. Lynden-Bell e J.E. Pringle, Mon. Not. R. Astr. Soc. **168**, 603 (1974). D. Page e K. Thorne, Ap. J. **191**, 499 (1974). J. Frank, A. King e D. Raine, *Accretion Power in Astrophysics* (Cambridge University Press, 1992).
- [17] M.J. Rees, M.C. Begelman, R.D. Blandford e E.S. Phinney, Nature **295**, 17 (1982). R. Narayan e I. Yi, Ap. J. Lett. **428**, L13 (1994); Ap. J. **444**, 231 (1995); Ap. J. **452**, 710 (1995). M. Abramowicz, X. Chen, S. Kato, J.P. Lasota e O. Regev, Ap. J. Lett. **438**, L37 (1995). R. Narayan, I. Yi e R. Mahadevan, Nature **374**, 623 (1995). R. Narayan, J.E. McClintock e I. Yi, Ap. J. **457**, 821 (1996). R. Mahadevan, Ap. J. **477**, 585 (1997).

- [18] K.S. Thorne, Ann N.Y. Acad. Science **759**, 127 (1995). D. Kennefick, Phys. Rev. D **58**, 064012 (1998).
- [19] Y. Tanaka *et al*, Nature **375**, 659 (1995). B.C. Bromley, W.A. Miller e V.I. Pariev, Nature **391**, 54 (1998).
- [20] L.C.B. Crispino, A. Higuchi e G.E.A. Matsas, Class. Quantum Grav. **17**, 19 (2000).
- [21] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3<sup>a</sup>. ed. (John Wiley & Sons Inc., 1999).
- [22] A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles* (Dover Publications Inc., 1980).
- [23] F. Rohrlich, *Classical Charged Particles* (Addison-Wesley Publ. Co. Inc., 1965).
- [24] C. Misner, K. Thorne e J.A. Wheeler, *Gravitation* (W.H. Freeman and Company, 1973).
- [25] C. Itzykson e J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill Inc., 1980).
- [26] R.P. Feynman, F.B. Morinigo e W.G. Wagner, *Feynman Lectures on Gravitation* (Addison-Wesley Publishing Company, 1995).
- [27] R. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press, 1984).
- [28] D. Page, Phys. Rev. D **13**, 198 (1976). W.G. Unruh, Phys. Rev. D **14**, 3251 (1976). S.R. Das, G. Gibbons e S.D. Mathur, Phys. Rev. Lett. **78**, 417 (1997).
- [29] J. Bičák e T. Ledvinka, Phys. Rev. Lett. **71**, 1669 (1993). G.A. González e P.S. Letelier Phys. Rev. D **62**, 064025 (2000).
- [30] A. Higuchi, G.E.A. Matsas e D. Sudarsky, Phys. Rev. D **45**, R3308 (1992); **46**, 3450 (1992).
- [31] B.P. Jensen e A. Ottewill, Phys. Rev. D **39**, 1130 (1989).
- [32] G. Cognola e P. Lecca, Phys. Rev. D **57**, 1108 (1998).



- [33] S. Gupta, Proc. Phys. Soc. **63A**, 681 (1950). K. Bleuler, Helv. Phys. Acta **23**, 567 (1950).
- [34] F. Mandl e G. Shaw *Quantum Field Theory* (John Wiley & Sons, 1984). M.O.C. Gomes, *Teoria Quântica dos Campos* (Instituto de Física da USP, 1991). W. Greiner e J. Reinhardt, *Field Quantization* (Springer-Verlag, 1996).
- [35] L.V. Lorenz, Phil. Mag. Ser. **34**, 287 (1867). A. O’Rahilly, *Electromagnetic Theory* (Dover Publications, 1965). J.V. Bladel, IEEE Ant. Prop. Mag. **33**, 69 (1991). J.D. Jackson e L.B. Okun, *Historical roots of gauge invariance* (hep-ph/0012061).
- [36] L.C.B. Crispino, A. Higuchi e G.E.A. Matsas, *Quantization of the electromagnetic field outside static black holes and its application to low energy phenomena* (gr-qc/0011070).
- [37] A. Higuchi, Class. Quant. Grav. **4**, 721 (1987).
- [38] J.L. Friedman, Commun. Math. Phys. **62**, 247 (1978).
- [39] E. Férmi, Rev. Mod. Phys. **4**, 87 (1932).
- [40] S. Takagi, Prog. Theor. Phys. **88**, 1 (1986).
- [41] L. C. B. Crispino, A. Higuchi e G. E. A. Matsas, Phys. Rev. D **58**, 084027 (1998).
- [42] J.J. Larmor, Phil. Mag. **44**, 503 (1897).
- [43] M. Born, Ann. Physik **30**, 1 (1909).
- [44] W. Pauli, em *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, vol. 5 (f. Teubner, Leipzig, 1918). Traduzido para o inglês em W. Pauli, *Theory of Relativity* (Pergamon Press, 1958).
- [45] J.M.F. Bassalo, *Crônicas da Física*, tomo 1 (Editora da Universidade Federal do Pará, 1987).
- [46] M.v. Laue, *Relativitätstheorie*, 3ª. ed., vol. 1 (Vieweg, Braunschweig, 1919).
- [47] M. Bondi e T. Gold, Proc. Roy. Soc. **A229**, 416 (1955).

- [48] T. Fulton e F. Rohrlich, *Ann. Phys.* **9**, 499 (1960). F. Rohrlich, *Nuovo Cimento* **21**, 811 (1961). F. Rohrlich, *Ann. Phys.* **22**, 169 (1963).
- [49] R. d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity* (Oxford University Press Inc., 1992).
- [50] D. G. Boulware *Ann. Phys.* **124**, 169 (1980).
- [51] J.B. Hartle e S.W. Hawking, *Phys. Rev. D* **13**, 2188 (1976).
- [52] C.M. Will, *Phys. Rept.* **113**, 345 (1984). T. Damour, *Gravitation, experiment and cosmology* (Les Houches Summer School on Gravitation and Quantizations, Les Houches, 1992). C.M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics* (Cambridge University Press, 1993).
- [53] P. Candelas e D.W. Sciama, *Phys. Rev. D* **27**, 1715 (1983). H. Kleinert, *Quantum Equivalence Principle* (NATO Advanced Study Institute on Functional Integration: Basics and Applications, Cargèse, Corse, 1996 — quant-ph/9612040).
- [54] A. Higuchi, *Some topics in quantum field theory in curved spacetime*, em *Anais do XVIII Encontro Nacional de Partículas e Campos*, Caxambu-MG, Brasil, 1997, editado por O.J.P. Éboli, M.E. de Araújo, V.B. Bezerra, J.A. Chinellato, M.B.L.G. Ducatti, G.E.A. Matsas, J.M. de Miranda, J.A.M. Simões e S. Sorella.
- [55] R.C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology* (Clarendon Press, 1934).
- [56] A.K. Singal, *Gen. Relat. Grav.* **27**, 953, (1995).
- [57] J. Castiñeiras e G. E. A. Matsas, *Phys. Rev. D*, **62**, 064001 (2000).

