

---

# Relativistic wave packets in a field theoretical approach to neutrino oscillations



*V.A. Naumov – Senior Staff Scientist of the Lab. of Theoretical Physics, JINR, Dubna. The main areas of research are elementary particle phenomenology (neutrino interactions with nucleons and nuclei, neutrino oscillations in vacuum and matter), radiation and particle transport theory, cosmic ray physics, high energy muon and neutrino astronomy.*

---

**Abstract:** We report an introduction to a covariant theory of wave packets and its application to the field-theoretical method for calculating the neutrino oscillation probability in vacuum, based upon the technique of macroscopic Feynman diagrams which describe the processes of production and detection of virtual massive neutrinos  $\nu_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) at the macroscopically separated space-time regions (“source” and “detector”). In this approach, the effect of flavor oscillations is a result of interference of the diagrams with different  $\nu_i$  in the intermediate states. We calculate the macroscopic amplitude which describes a class of the lepton number violating processes, and then perform a statistical averaging of the probability (the squared absolute value of the amplitude). The averaged probability of the process with exchange of ultrarelativistic neutrinos is representable as a multidimensional integral from the product of three multipliers: the differential flux density of massless neutrinos from the source, differential cross section of the neutrino interaction with the detector and a dimensionless factor describing the flavor transition. The restrictions are analyzed under which the last factor can be treated as the flavor transition probability in the usual quantum mechanical sense.

---

# Релятивистские волновые пакеты в квантовополево́м подходе к теории нейтринных осцилляций

В.А. Наумов<sup>1</sup>, Д.В. Наумов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Лаборатория Теоретической Физики им. Н.Н. Боголюбова, Объединенный Институт Ядерных Исследований, 141980 Дубна, Российская Федерация, e-mail: vnaumov@theor.jinr.ru

<sup>2</sup>Лаборатория Ядерных Проблем им. В.П. Джелепова, Объединенный Институт Ядерных Исследований, 141980 Дубна, Российская Федерация, e-mail: dnaumov@jinr.ru

## Аннотация

Даётся введение в ковариантную теорию волновых пакетов и её применение к квантовополево́му методу расчёта вероятностей нейтринных осцилляций в вакууме, основанному на технике макроскопических фейнмановских диаграмм, описывающих процессы испускания и поглощения виртуальных массивных нейтрино  $\nu_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в макроскопически разделённых пространственно-временных областях («источнике» и «детекторе»). Эффект флэйворных осцилляций сводится в этом подходе к интерференции диаграмм с разными  $\nu_i$  в промежуточном состоянии. Вычисляется макроскопическая амплитуда, описывающая класс процессов, идущих с несохранением лептонных чисел и проводится статистическое усреднение вероятности – квадрата модуля этой амплитуды. Усреднённая вероятность процесса с обменом ультрарелятивистскими нейтрино представима в виде многомерного интеграла от произведения трёх множителей: дифференциальной плотности потока безмассовых нейтрино из источника, дифференциального сечения взаимодействия нейтрино с детектором и безразмерного фактора, описывающего флэйворный переход. Анализируются условия, при которых последний фактор можно интерпретировать как вероятность флэйворного перехода в обычном квантовомеханическом смысле.

## 1 Введение

Гипотеза нейтринных осцилляций, предложенная Бруно Понтекорво [1], считается сегодня наиболее вероятным объяснением аномалий, наблюдавшихся во многих экспериментах с солнечными, атмосферными, реакторными и ускорительными

ми нейтрино и антинейтрино. Однако, стандартная квантовомеханическая теория нейтринных осцилляций сталкивается с рядом принципиальных трудностей и парадоксов, на которые указывали многие авторы (см., например, [2, 3, 4, 5, 6, 7] и многочисленные ссылки в этих работах). Приведем пример одного из таких парадоксов. Будем считать, как это принято в квантовомеханическом подходе, что флэйворное состояние нейтрино сорта  $\alpha = e, \mu, \tau$  является линейной суперпозицией состояний с определенной массой  $m_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), т.е.  $|\nu_\alpha\rangle = \sum_i V_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle$  (здесь  $V_{\alpha i}$  – элементы вакуумной матрицы смешивания Понтекорво-Маки-Накагавы-Сакаты [1, 8]). Предположим, как обычно, что состояния  $|\nu_i\rangle$  обладают определенными импульсом и энергией. Тогда состояние  $|\nu_\alpha\rangle$  тоже имеет определенный импульс, но не имеет определенной энергии (так как не обладает определенной массой). Пусть состояние  $|\nu_\mu\rangle$  рождается в распаде  $\pi \rightarrow \mu\nu_\mu$ . Так как у этого состояния нет определенной энергии, то по крайней мере у одной из двух других частиц, участвующих в распаде энергия тоже неопределенна. Поскольку же как пион, так и мюон обладают определенными массами, то у одной из этих частиц (или, что более естественно, у обеих сразу) нет и определенного импульса. Но тогда и нейтрино  $\nu_\mu$  не может иметь определенного импульса, что противоречит исходному предположению. Этот парадокс и подобные ему заставляют многих физиков сомневаться в корректности наивного квантовомеханического вывода формулы для вероятностей нейтринных осцилляций.

Оставаясь в рамках квантовой механики, ряд трудностей теории нейтринных осцилляций можно преодолеть, если отказаться от описания частиц, участвующих в рождении и детектировании нейтрино (включая само нейтрино) чистыми состояниями с определенными значениями энергии или импульса, заменив их волновыми пакетами, характеризруемыми средними (или наиболее вероятными) значениями 4-импульсов. На этом пути был получен ряд концептуально важных результатов. Было показано, например, что нейтринные осцилляции должны затухать на достаточно больших расстояниях между источником и детектором.

В ряде работ был предложен более радикальный подход к проблеме, основанный на применении аппарата релятивистской квантовой теории поля (КТП) [9, 10, 11, 12, 13]. В этом подходе последовательность реакций рождения и детектирования нейтрино трактуется как единый процесс, который можно описывать, используя  $S$ -матричный формализм КТП. Необычность или, лучше сказать, непривычность подхода заключается в использовании фейнмановских диаграмм, вершины которых разделены макроскопически большим пространственно-временным интервалом. Кроме того, как и в квантовомеханическом случае, в качестве асимптотически свободных состояний оказывается необходимым использовать волновые пакеты, а не обычные для КТП фоковские состояния с определенными 4-импульсами. В новом формализме массивные нейтрино  $\nu_i$  считаются виртуальными полями и описываются пропагаторами. При этом не возникает необходимости в использовании понятия флэйворного нейтрино, а эффект «ос-

цилляцияй» является результатом обычной интерференции фейнмановских амплитуд с разными  $\nu_i$  в промежуточном состоянии. Такая трактовка позволяет не только воспроизвести известные квантовомеханические формулы для вероятностей флэйворных переходов и получить поправки к ним (допускающие экспериментальную проверку теории), но заставляет переосмыслить саму концепцию смешивания квантовомеханических состояний и – еще шире – квантовополевую теорию  $S$ -матрицы.

В вышеупомянутых пионерских работах использовались (явно или неявно) нековариантные, чаще всего гауссовы волновые пакеты, применимые, как мы покажем, только для нерелятивистских частиц. Но в реакциях рождения и детектирования нейтрино, используемых в экспериментах по нейтринным осцилляциям, как правило, участвуют релятивистские частицы.<sup>1</sup> Более того, выбором подходящей системы отсчёта любую частицу всегда можно превратить в ультра-релятивистскую. Поэтому необходимо построить релятивистски-ковариантную (т.е. независимую от выбора инерциальной системы отсчёта) теорию волновых пакетов, применимую для описания состояний с произвольными средними 4-импульсами.

В данной работе мы даём конспективное изложение ковариантной теории волновых пакетов (§2), которая затем применяется к расчету интерференции макроскопических амплитуд с обменом массивными нейтрино (§3). Вычисление квадрата модуля суммарной амплитуды и его статистическое усреднение, приводящее к формуле для скорости счёта событий в детекторе, проводятся в §4. Там же обсуждаются условия применимости стандартной квантовомеханической формулы для вероятности флэйворных переходов. В §5 мы суммируем основные результаты.

В работе используется принятая в физике высоких энергий система единиц  $\hbar = c = 1$ , в которой энергия и импульс имеют размерность массы, а время и длина – размерность обратную массе.

## 2 Теория релятивистских волновых пакетов

### 2.1 Общий формализм

В  $S$ -матричном формализме КТП в качестве состояний свободных полей обычно используются одночастичные фоковские состояния

$$|\mathbf{k}, s\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}s}^\dagger |0\rangle, \quad (1)$$

<sup>1</sup>Важным исключением из правила возможно станут эксперименты с т.н. мёссбауэровскими антинейтрино, которые сейчас оживлённо обсуждаются в литературе [14, 15, 16, 17, 18].

где  $|0\rangle$  – состояние вакуума,  $a_{\mathbf{k}s}^\dagger$  – операторы рождения частиц с импульсом  $\mathbf{k}$  и проекцией спина  $s$ , удовлетворяющие (анти)коммутиационным соотношениям  $\{a_{\mathbf{q}r}, a_{\mathbf{k}s}\} = \{a_{\mathbf{q}r}^\dagger, a_{\mathbf{k}s}^\dagger\} = 0$ ,  $\{a_{\mathbf{q}r}, a_{\mathbf{k}s}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta_{sr} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})$ , в которых фигурные скобки обозначают коммутатор для бозонов или антикоммутатор для фермионов;  $E_{\mathbf{k}} = k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$  – полная энергия, а  $m$  – масса частицы. Релятивистски-инвариантная норма состояний (1) сингулярна:

$$\langle \mathbf{q}, r | \mathbf{k}, s \rangle = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}} \delta_{sr} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}). \quad (2)$$

Определим волновой пакет как линейную суперпозицию одночастичных состояний (1) в пространственно-временной точке  $x$ :

$$|\mathbf{p}, s, x\rangle = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) e^{i(k-p)x}}{2E_{\mathbf{k}}} |\mathbf{k}, s\rangle. \quad (3)$$

В (3) введена лоренц-инвариантная функция  $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ . Будем считать, что эта функция имеет единственный острый максимум при  $\mathbf{k} = \mathbf{p}$ , а её поведение в окрестности максимума задаётся малым параметром  $\sigma$  размерности массы.<sup>2</sup> Потребуем, чтобы при устремлении  $\sigma$  к нулю волновой пакет (3) превращался в фоковское состояние с определенным импульсом (1), что возможно если

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}). \quad (4)$$

Этот принцип соответствия позволяет наложить на функцию  $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$  лоренц-инвариантное условие

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})}{2E_{\mathbf{k}}} = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\phi(\mathbf{k}, \mathbf{0})}{2E_{\mathbf{k}}} = 1. \quad (5)$$

Действительно, безразмерный лоренц-инвариантный интеграл (5) не зависит от импульса  $\mathbf{p}$  и, следовательно, может зависеть лишь от безразмерного отношения  $\sigma/m$ . Но, согласно условию (4), интеграл (5) стремится к единице в пределе  $\sigma = 0$ , так что естественно положить его равным единице и при конечных (малых)  $\sigma$ . Таким образом, с точностью до множителя  $16\pi^3 E_{\mathbf{p}}$ , функция  $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$  – это просто «размазанная»  $\delta$ -функция.

Найдем вид волнового пакета в конфигурационном представлении. В качестве примера сделаем это для фермиона со спином  $\frac{1}{2}$ , полевой оператор которого имеет вид

$$\Psi(x) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \sum_s \left[ a_{\mathbf{k}s} u_s(\mathbf{k}) e^{-ikx} + b_{\mathbf{k}s}^\dagger v_s(\mathbf{k}) e^{ikx} \right].$$

<sup>2</sup>В общем случае  $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$  может зависеть от конечного или даже бесконечного набора параметров. Однако, в окрестности максимума существенна лишь их комбинация, обезмеривающая инвариантную переменную  $(p - k)^2$ , от которой только и может зависеть лоренц-инвариантная функция  $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ .

Состояние  $\langle 0|\Psi(x)$  может быть интерпретировано как линейная суперпозиция одностичных состояний с определенными импульсами в точке  $x$ , но его нельзя характеризовать каким-либо выделенным импульсом. Координатное представление фоковского состояния (1) даётся его проекцией на состояние  $\langle 0|\Psi(x)$ ,

$$\langle 0|\Psi(x)|\mathbf{p}, s\rangle = u_s(\mathbf{p})e^{-ipx}, \quad (6)$$

т.е., фоковское состояние в координатном представлении есть плоская волна, равномерно распределенная по всему пространству-времени. В отличие от фоковского состояния, волновой пакет (3) характеризуется импульсным распределением, заданным функцией  $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ , сосредоточенной около наиболее вероятного импульса  $\mathbf{p}$ . Кроме того, волновой пакет распределен в пространстве-времени неравномерно, что можно увидеть из аналога формулы (6) для состояния (3):

$$\begin{aligned} \langle 0|\Psi(x)|\mathbf{p}, s, y\rangle &= e^{-ipy} [u_s(\mathbf{p}) - \nabla_{\mathbf{p}}u_s(\mathbf{p}) \cdot (i\nabla_{\mathbf{x}} + \mathbf{p}) + \dots] \psi(\mathbf{p}, y - x), \\ &\approx e^{-ipy} u_s(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p}, y - x). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь мы ввели лоренц-инвариантную функцию

$$\psi(\mathbf{p}, x) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) e^{ikx} = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{0}) e^{ikx_{\star}} = \psi(\mathbf{0}, x_{\star}), \quad (8)$$

удовлетворяющую уравнению Клейна-Гордона и описывающую волновой пакет в координатном представлении. Последнее равенство в (8) записано в системе покоя пакета ( $\mathbf{p}_{\star} = 0$ ); 4-вектор  $x_{\star} = (x_{\star}^0, \mathbf{x}_{\star})$  связан с  $x = (x^0, \mathbf{x})$  лоренцевским бустом в направлении  $-\mathbf{p}$ . Поскольку функция  $\psi(\mathbf{0}, x_{\star})$  четна по переменной  $\mathbf{x}_{\star}$ , она может зависеть только от переменных  $x_{\star}^0$  и  $|\mathbf{x}_{\star}|$ , связанных с инвариантами  $(px)$  и  $x^2$  соотношениями

$$x_{\star}^0 = \frac{(px)}{m}, \quad \mathbf{x}_{\star}^2 = (x_{\star}^0)^2 - x^2 = \frac{1}{m^2} [(px)^2 - m^2 x^2]. \quad (9)$$

Приближение (7) справедливо при условии  $|i\nabla_{\mathbf{x}} \ln \psi(\mathbf{p}, y - x) + \mathbf{p}| \ll 2E_{\mathbf{p}}$ , которое согласуется с приближениями, используемыми в дальнейшем.<sup>3</sup> Из (8) и (4) следует, что  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \psi(\mathbf{p}, x) = e^{ipx}$ , т.е., как и следовало ожидать, волновой пакет предельно локализованный в импульсном пространстве предельно делокализован («размазан») в пространстве-времени.

Скалярное произведение состояний (3) несингулярно (при  $\sigma > 0$ ) и даётся выражением

$$\langle \mathbf{q}, r, y | \mathbf{p}, s, x \rangle = \delta_{sr} e^{i(qy - px)} \mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x - y), \quad (10)$$

<sup>3</sup>Заметим, что приближенное равенство (7) становится точным для (псевдо)скалярных полей. В принципе, за счет некоторого ущерба для простоты и универсальности формализма, можно было бы вовсе избавиться от этого приближения, введя вместо скалярной функции (8) спинорную волновую функцию.

в котором

$$\mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \phi^*(\mathbf{k}, \mathbf{q}) e^{i\mathbf{k}x}. \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует, что нормировка состояния (3) также конечна:

$$\langle \mathbf{p}, s, x | \mathbf{p}, s, x \rangle = \mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{p}; 0) = 2\bar{E}_{\mathbf{p}} V(\mathbf{p}). \quad (12)$$

Величины  $\bar{E}_{\mathbf{p}}$  и  $V(\mathbf{p})$  в (12) представляют собой среднюю энергию и эффективный пространственный объём пакета, заданные соотношениями

$$\bar{E}_{\mathbf{p}} = \frac{\int d\mathbf{x} \psi(\mathbf{p}, x) i\partial_0 \psi^*(\mathbf{p}, x)}{\int d\mathbf{x} |\psi(\mathbf{p}, x)|^2} = \frac{1}{V(\mathbf{p})} \int \frac{d\mathbf{k} |\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})|^2}{4(2\pi)^3 E_{\mathbf{k}}}, \quad (13)$$

$$V(\mathbf{p}) = \int d\mathbf{x} |\psi(\mathbf{p}, x)|^2 = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{|\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})|^2}{(2E_{\mathbf{k}})^2} = \frac{V(\mathbf{0})}{\Gamma_{\mathbf{p}}} \quad \left( \Gamma_{\mathbf{p}} = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m} \right). \quad (14)$$

Обе эти величины, как и средний импульс  $\bar{\mathbf{p}}$ , определяемый соотношением аналогичным (13), являются интегралами движения. Нетрудно показать, что среднее положение пакета следует классической траектории:

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{V(\mathbf{p})} \int d\mathbf{x} \psi^*(\mathbf{p}, x) \mathbf{x} \psi(\mathbf{p}, x) = \mathbf{v}_{\mathbf{p}} x_0. \quad (15)$$

Здесь  $\mathbf{v}_{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}}/\bar{E}_{\mathbf{p}}$  – средняя групповая скорость пакета, совпадающая с его наиболее вероятной скоростью, равной  $\nabla_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/E_{\mathbf{p}}$ .

Свойства функции (11) становятся особенно прозрачными в системе центра инерции двух пакетов  $\mathbf{p}_* + \mathbf{q}_* = 0$  (значек «\*» используется для обозначения этой системы). Нетрудно видеть, что

$$\mathcal{D}(\mathbf{p}_*, -\mathbf{p}_*; x_* - y_*) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}_*) \phi^*(\mathbf{k}, -\mathbf{p}_*) e^{i\mathbf{k}(x_* - y_*)}. \quad (16)$$

Из-за резкого максимума  $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$  в точке  $\mathbf{k} = \mathbf{p}$ , следует ожидать, что функция  $|\mathcal{D}(\mathbf{p}_*, -\mathbf{p}_*; x_* - y_*)|$  имеет резкий максимум при  $\mathbf{p}_* = 0$  (т.е. при  $\mathbf{q} = \mathbf{p}$ ) и быстро уменьшается при больших значениях  $|\mathbf{p}_*|$ , поскольку максимумы сомножителей  $|\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}_*)|$  и  $|\phi(\mathbf{k}, -\mathbf{p}_*)|$  под интегралом сильно разделены в этом случае, а значит их произведение  $|\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}_*) \phi^*(\mathbf{k}, -\mathbf{p}_*)|$  мало при любых  $\mathbf{k}$ , как показано на рис. 1. Кроме того видно, что интеграл (16) мал при любых значениях  $|\mathbf{p}_*|$ , если точки  $x_*$  и  $y_*$  достаточно сильно разнесены в пространстве (а именно, если  $|\mathbf{x}_* - \mathbf{y}_*| \gg 1/\sigma$ ), т.к. при этом фазовый множитель  $e^{-i\mathbf{k}(x_* - y_*)}$  под интегралом быстро осциллирует.

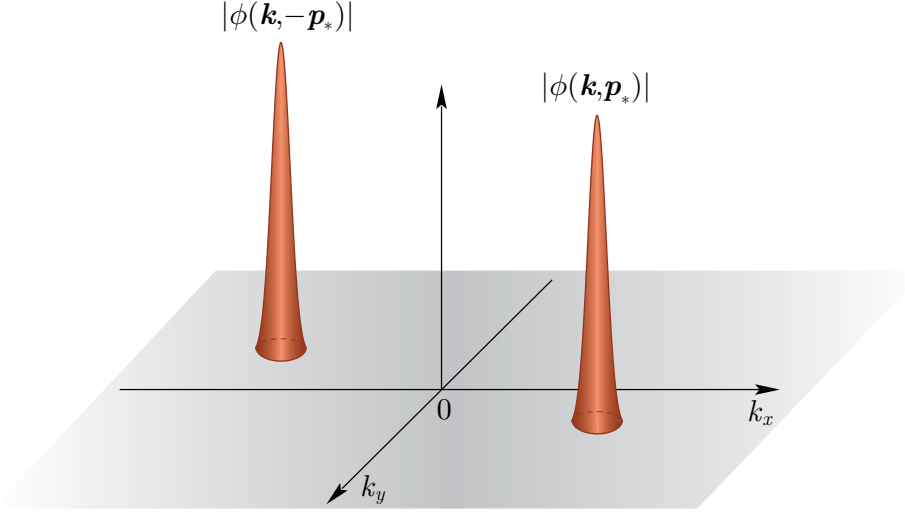


Рис. 1: Схематическая иллюстрация подавления подынтегрального выражения в (16) при больших значениях  $|\mathbf{p}_*| = \frac{1}{2}\sqrt{-(p-q)^2}$ .

## 2.2 Релятивистский гауссов пакет

В дальнейших расчётах мы будем использовать простую модель волнового пакета (3) – релятивистский гауссов пакет (РГП), в которой функция  $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$  имеет вид:

$$\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \frac{2\pi^2}{\sigma^2 K_1(m^2/2\sigma^2)} \exp\left(-\frac{E_{\mathbf{k}}E_{\mathbf{p}} - \mathbf{k}\mathbf{p}}{2\sigma^2}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p}), \quad (17)$$

где  $K_1(t)$  – модифицированная функция Бесселя 3-го рода порядка 1. Можно показать, что функция (17) имеет правильный плосковолновой предел (4) и удовлетворяет условию (5). Всюду далее мы будем считать выполненным условие  $\sigma^2 \ll m^2$ . Тогда функция (17) может быть записана в виде асимптотического разложения по параметру  $\sigma^2/m^2$ :

$$\phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \frac{2\pi^{3/2}}{\sigma^2} \frac{m}{\sigma} \exp\left[\frac{(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2}{4\sigma^2}\right] \left[1 + \frac{3\sigma^2}{4m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\sigma^4}{m^4}\right)\right] \quad (18)$$

Нетрудно убедиться, что в нерелятивистском пределе функция (18) совпадает, с точностью до нормировки, с обычным (нековариантным) гауссовым распределением  $\varphi_G(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \propto \exp[-(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2/4\sigma^2]$ , часто используемым в литературе. Однако, при релятивистских импульсах разница между  $\phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p})$  и  $\varphi_G(\mathbf{k} - \mathbf{p})$  может быть сколь угодно большой (безотносительно разницы в нормировке). Так, например, в окрестности максимума  $\mathbf{k} = \mathbf{p}$

$$\phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \approx \frac{2\pi^{3/2}}{\sigma^2} \frac{m}{\sigma} \exp\left[-\frac{(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2}{4\sigma^2 \Gamma_{\mathbf{p}}^2}\right] \quad (\mathbf{k} \sim \mathbf{p}).$$

Как видим, релятивистский эффект в данном случае заключается в «перенормировке» ширины пакета ( $\sigma \rightarrow \sigma \Gamma_{\mathbf{p}}$ ). Эта перенормировка существенна для всех процессов рождения и детектирования нейтрино, происходящих с участием релятивистских частиц.

Координатное представление для РГП даётся волновой функцией

$$\psi_G(\mathbf{p}, x) = \frac{K_1(\zeta m^2/2\sigma^2)}{\zeta K_1(m^2/2\sigma^2)}, \quad (19)$$

где  $\zeta$  – безразмерная скалярная переменная:<sup>4</sup>

$$\zeta = \sqrt{1 - \frac{4\sigma^2}{m^2} [\sigma^2 x^2 + i(px)]}.$$

На рис. 2 показан модуль функции (19) в зависимости от безразмерных переменных  $\sigma^2 x_*^0/m$  и  $\sigma^2 x_*^3/m$  в собственной системе отсчёта пакета, ось  $z$  которой направлена вдоль вектора  $\mathbf{x}_*$ . Расчет сделан при  $\sigma/m = 0.1$ . Разумеется,  $|\psi_G(\mathbf{0}, x_*)|$  – четная функция обеих переменных. Из рисунка видно, что  $|\psi_G(\mathbf{0}, x_*)|$  быстро спадает при увеличении расстояния от центра пакета, причем ширина распределения увеличивается с ростом  $x_*^0$ , т.е. пакет расплывается со временем, как любой волновой пакет, описывающий состояние частиц с ненулевой массой. На первый взгляд, поведение  $|\psi_G(\mathbf{0}, x_*)|$ , изображенное на рис. 2, может показаться противоречащим утверждению, что эффективный 3-мерный объём пакета (14) есть интеграл движения. На самом деле никакого противоречия нет, поскольку уменьшение модуля волновой функции со временем в точности компенсируется её пространственным уширением.

В РГП модели функция (11), определяющая скалярное произведение состояний (10), имеет следующий вид:

$$\mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x) = 2\bar{E}_{\mathbf{p}} V(\mathbf{p}) \frac{K_1(zm^2/\sigma^2)}{zK_1(m^2/\sigma^2)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_G(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x), \quad (20)$$

где инвариантная безразмерная переменная  $z$  даётся выражением

$$z = \frac{1}{2m} \sqrt{(p+q)^2 - 4\sigma^2 [\sigma^2 x^2 + i(p+q)x]}.$$

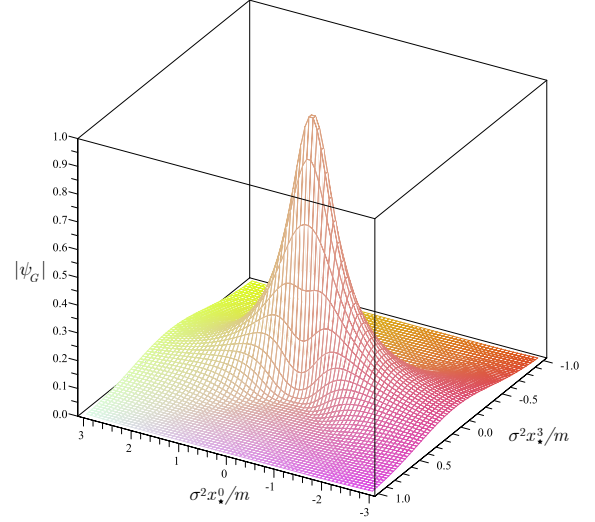


Рис. 2: Поведение функции  $|\psi_G(\mathbf{0}, x_*)|$  в безразмерных координатах  $\sigma^2 x_*^0/m$  и  $\sigma^2 x_*^3/m$  ( $\mathbf{x}_* = (0, 0, x_*^3)$ ). Вычисления сделаны для  $\sigma/m = 0.1$ .

<sup>4</sup>Здесь и далее под квадратным корнем имеется в виду его главное значение.

Приведенные формулы позволяют детально изучить свойства волновых пакетов и многопакетных состояний.<sup>5</sup> Однако, даже в такой простой модели как РГП, расчеты интересующих нас макроскопических фейнмановских диаграмм становятся технически очень сложными из-за необходимости вычислять многомерные интегралы от произведений функций Бесселя, зависящих от комплексных переменных. Кроме того, для большинства практически важных случаев интересен режим, в котором можно пренебречь распылением волновых пакетов. Такой режим характерен, например, для частиц не слишком разреженного газа, в котором среднее время между двумя последовательными столкновениями частицы много меньше эффективного времени распыления пакета, описывающего её состояние между столкновениями. В следующем параграфе мы рассмотрим соответствующее приближение в модели РГП.

### 2.3 Приближение нераспыляющихся РГП

Из аккуратного анализа асимптотического разложения  $\ln [\psi_G(\mathbf{0}, x_*)]$  по параметру  $\sigma^2/(m^2\zeta)$  с учётом неравенств  $|\zeta| \geq 1$  и  $|\arg \zeta| < \pi/2$ , можно найти следующие необходимые и достаточные условия стабильности РГП:

$$\sigma^2(x_*^0)^2 \ll m^2/\sigma^2, \quad \sigma^2 \mathbf{x}_*^2 \ll m^2/\sigma^2, \quad (21a)$$

или, в эквивалентной, но явно релятивистски-инвариантной форме,

$$(px)^2 \ll m^4/\sigma^4, \quad (px)^2 - m^2x^2 \ll m^4/\sigma^4. \quad (21b)$$

При выполнении этих условий функция (19) принимает простой вид:

$$\psi_G(\mathbf{0}, x_*) = \exp(imx_*^0 - \sigma^2 \mathbf{x}_*^2) = \exp \left\{ i(px) - \frac{\sigma^2}{m^2} [(px)^2 - m^2x^2] \right\}. \quad (22)$$

Приведем некоторые свойства этого приближения, которое мы будем называть приближением стабильного РГП (СРГП). Нетрудно проверить, что средняя координата волнового пакета следует классической траектории (15) и что модуль волновой функции не меняется при преобразованиях  $x_0 \mapsto x_0 + \tau$ ,  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{v}_p \tau$ . Очевидно также, что  $|\psi_G(\mathbf{p}, x)| = 1$  вдоль классической траектории  $\mathbf{x} = \mathbf{v}_p x_0$  и  $|\psi_G(\mathbf{p}, x)| < 1$  при любом отклонении от нее. В нерелятивистском пределе (22) принимает вид

$$\psi_G(\mathbf{p}, x) \approx \exp [im(x_0 - \mathbf{v}_p \mathbf{x}) - \sigma^2 |\mathbf{x} - \mathbf{v}_p x_0|^2].$$

Отметим, что в СРГП приближении

$$V(\mathbf{0}) = [\pi/(2\sigma^2)]^{3/2} \equiv V_* \quad \text{и} \quad \bar{E}_p = E_p.$$

<sup>5</sup>Из-за ограничения в объёме статьи мы не рассматриваем в этой работе многопакетные состояния тождественных частиц, важные для теории нейтринных осцилляций в веществе.

Поведение функции (20) в СРГП режиме определяется из анализа асимптотического разложения её логарифма по параметру  $\sigma^2/(m^2z)$  с учётом неравенств  $|z| \geq 1$  и  $|\arg z| < \pi/2$ . Искомое приближение имеет вид:

$$\mathcal{D}_G(\mathbf{p}_*, -\mathbf{p}_*; x_*) = \frac{2mV_*}{\Gamma_*^{3/2}} \exp \left[ imx_*^0 - \frac{m^2(\Gamma_* - 1)}{\sigma^2} - \frac{\sigma^2 \mathbf{x}_*^2}{2\Gamma_*} \right], \quad (23)$$

где  $\Gamma_* = E_*/m$  ( $E_* \equiv E_{\mathbf{p}^*}$ ). Условия применимости этого приближения согласуются с условиями (21a):

$$\sigma^2(x_*^0)^2 \ll E_*^2/\sigma^2, \quad \sigma^2 \mathbf{x}_*^2 \ll E_*^2/\sigma^2. \quad (24)$$

Как и ожидалось (см. предыдущий параграф), функция  $\mathcal{D}_G(\mathbf{p}_*, -\mathbf{p}_*; x_*)$  быстро убывает, если  $|\mathbf{p}_*|$  или  $|\mathbf{x}_*|$  (или обе эти величины) достаточно велики [точные условия очевидны из (23)]. Функция (23) обладает также рядом заранее неочевидных свойств. Так, например,  $|\mathcal{D}_G|$  экспоненциально исчезает при субрелятивистских энергиях ( $\Gamma_* - 1 \sim 1$ ). При нерелятивистских энергиях в лаб. системе функция  $\mathcal{D}_G$  имеет вид:

$$\mathcal{D}_G(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x) \approx 2mV_* \exp \left[ im(x_0 - \mathbf{v}\mathbf{x}) - \frac{m^2|\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_q|^2}{8\sigma^2} - \frac{\sigma^2|\mathbf{x} - \mathbf{v}x_0|^2}{2} \right],$$

где  $\mathbf{v}_p = \mathbf{p}/m$ ,  $\mathbf{v}_q = \mathbf{q}/m$ ,  $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_p + \mathbf{v}_q)$  и предполагается, что  $|\mathbf{v}_{p,q}| \ll 1$ .

В качестве важного примера использования приближения (23) рассмотрим норму состояния двух тождественных невзаимодействующих пакетов, для которой можно получить точное (безмодельное) соотношение

$$\frac{\langle \mathbf{p}_1, s_1, x_1; \mathbf{p}_2, s_2, x_2 | \mathbf{p}_1, s_1, x_1; \mathbf{p}_2, s_2, x_2 \rangle}{[2\bar{E}_p V(\mathbf{p})]^2} = 1 \pm \delta_{s_1 s_2} \frac{|\mathcal{D}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; x_1 - x_2)|^2}{[2\bar{E}_p V(\mathbf{p})]^2} \quad (25)$$

(здесь знак «+» относится к бозонам, а «-» – к фермионам). Из (23) следует, что при  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2$  правая часть (25) равна

$$1 \pm \delta_{s_1 s_2} \exp(-\sigma^2|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2),$$

откуда можно заключить, что бозевское притяжение и фермиевское отталкивание важны лишь на расстояниях между центрами пакетов, сравнимых с их эффективными размерами ( $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2 \lesssim \sigma^{-2}$ ), т.е. как раз тогда, когда уже необходимо учитывать динамическое взаимодействия пакетов. При достаточно больших расстояниях между пакетами различие квантовых статистик не играет роли. Этот вывод остается в силе для состояний с произвольным числом невзаимодействующих тождественных пакетов.

## 2.4 Интегралы перекрытия

Мы будем иметь дело с фейнмановскими диаграммами, общая структура которых показана на рис. 3. Внешние линии таких диаграмм соответствуют асимптотически свободным начальным («in») и конечным («out») волновым пакетам в координатном представлении, т.е. волновым функциям  $\psi_a(\mathbf{p}_a, x_a)$  и  $\psi_b^*(\mathbf{p}_b, x_b)$ , характеризваемым наиболее вероятными импульсами  $\mathbf{p}_{a,b}$  и пространственно-временными координатами  $x_{a,b}$ , а также массами  $m_{a,b}$  и параметрами  $\sigma_{a,b}$ . Здесь и далее используются такие обозначения:  $I_s$  ( $F_s$ ) – совокупность in (out) пакетов, в блоке  $X_s$  («источнике»),  $I_d$  ( $F_d$ ) – совокупность in (out) пакетов, в блоке  $X_d$  («детекторе»). Внутренняя линия, соединяющая блоки  $X_s$  и  $X_d$ , обозначает причинную функцию Грина массивного нейтрино  $\nu_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Блоки  $X_s$  и  $X_d$  считаются макроскопически разделенными в пространстве-времени, что объясняет смысл термина «макроскопическая диаграмма».

При расчете подобного рода макродиаграмм нам встретятся 4-мерные интегралы перекрытия волновых пакетов в источнике и детекторе,  $\mathbb{V}_s(q)$  и  $\mathbb{V}_d(q)$ , которые определяется следующим образом:

$$\mathbb{V}_{s,d}(q) = \int dx e^{\pm iqx} \left[ \prod_{a \in I_{s,d}} e^{-ip_a x_a} \psi_a(\mathbf{p}_a, x_a - x) \right] \left[ \prod_{b \in F_{s,d}} e^{ip_b x_b} \psi_b^*(\mathbf{p}_b, x_b - x) \right].$$

В СРГП приближении эти интегралы можно записать в виде

$$\mathbb{V}_{s,d}(q) = \int dx \exp \left[ i(\pm qx - q_{s,d}x) - \sum_{\varkappa \in S,D} T_{\varkappa}^{\mu\nu} (x_{\varkappa} - x)_{\mu} (x_{\varkappa} - x)_{\nu} \right], \quad (26)$$

где  $T_{\varkappa}^{\mu\nu} = \sigma_{\varkappa}^2 (u_{\varkappa}^{\mu} u_{\varkappa}^{\nu} - g^{\mu\nu})$ ,  $S = I_s \oplus F_s$ ,  $D = I_d \oplus F_d$ ,  $q_s = \sum_{a \in I_s} p_a - \sum_{b \in F_s} p_b$ ,  $q_d = \sum_{a \in I_d} p_a - \sum_{b \in F_d} p_b$ ,  $u_{\varkappa} = \mathbf{p}_{\varkappa}/m_{\varkappa} = \Gamma_{\varkappa}(1, \mathbf{v}_{\varkappa})$  – 4-скорость пакета  $\varkappa$  ( $\varkappa = a, b$ ) и, наконец,  $q$  – 4-импульс виртуального нейтрино. Введем в рассмотрение симметричные тензоры перекрытия в источнике и детекторе:

$$\mathfrak{R}_s^{\mu\nu} = \sum_{\varkappa \in S} T_{\varkappa}^{\mu\nu} \quad \text{и} \quad \mathfrak{R}_d^{\mu\nu} = \sum_{\varkappa \in D} T_{\varkappa}^{\mu\nu}. \quad (27)$$

Можно доказать, что при  $\sigma_{\varkappa} \neq 0$  ( $\forall \varkappa$ ) эти тензоры положительно определены, а значит, существуют положительно-определенные тензоры  $\tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu}$  и  $\tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\nu}$  такие, что

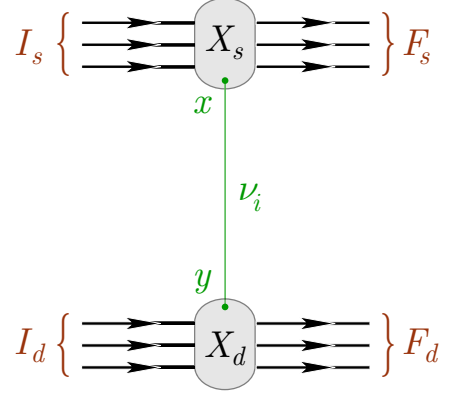


Рис. 3: Макродиаграмма с обменом массивным нейтрино.

$\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\lambda} (\mathfrak{R}_{s,d})_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu$  или, в матричной форме,  $\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d} = \|\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu}\| = g \mathfrak{R}_{s,d}^{-1} g$ , где  $\mathfrak{R}_{s,d} = \|\mathfrak{R}_{s,d}^{\mu\nu}\|$  и  $g = \|g_{\mu\nu}\|$ . Разумеется,  $|\mathfrak{R}_{s,d}| > 0$  и  $|\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}| = |\mathfrak{R}_{s,d}|^{-1}$ . Эти факты позволяют вычислить интегралы перекрытия (26) в явном виде. Для этого нам понадобятся следующие определения:

$$\tilde{\delta}_{s,d}(K) = \frac{1}{(4\pi)^2 \sqrt{|\mathfrak{R}_{s,d}|}} \exp\left(-\frac{1}{4} \tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu} K_\mu K_\nu\right), \quad (28)$$

$$X_{s,d}^\mu = \tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu} \sum_{\varkappa} T_{\varkappa\nu}^\lambda x_{\varkappa\lambda} = \tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu} \sum_{\varkappa} \sigma_\varkappa^2 [(u_{\varkappa} x_\varkappa) u_{\varkappa\nu} - x_{\varkappa\nu}], \quad (29)$$

$$\mathfrak{S}_{s,d} = \sum_{\varkappa, \varkappa'} \left( \delta_{\varkappa\varkappa'} T_\varkappa^{\mu\nu} - T_{\varkappa\mu'}^\mu \tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu'\nu'} T_{\varkappa'\nu'}^\nu \right) x_{\varkappa\mu} x_{\varkappa'\nu} \quad (30)$$

(здесь  $\varkappa, \varkappa' \in S, D$  и  $K$  – произвольный 4-импульс). Используя (28)–(30) можно записать интеграл (26) в следующей компактной форме:

$$\mathbb{V}_{s,d}(q) = (2\pi)^4 \tilde{\delta}_{s,d}(q \mp q_{s,d}) \exp[-\mathfrak{S}_{s,d} \pm i(q \mp q_{s,d}) X_{s,d}]. \quad (31)$$

Обсудим физический смысл введенных величин.

В плосковолновом пределе ( $\sigma_\varkappa \rightarrow 0$ ) факторы  $\tilde{\delta}_s(q - q_s)$  и  $\tilde{\delta}_d(q + q_d)$  превращаются в обычные  $\delta$ -функции, которые обеспечивают точное сохранение энергии-импульса в источнике и детекторе. При  $\sigma_\varkappa > 0$  факторы (28) приводят к сохранению энергии и импульса лишь в статистическом смысле, а именно, вероятность процесса  $I_s \oplus I_d \rightarrow F_s \oplus F_d$  оказывается сильно подавленной уже при небольшом дисбалансе суммарных 4-импульсов начальных и конечных состояний, причем допустимая «разбалансировка» определяется тензорами  $\tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu}$  и  $\tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\nu}$ , т.е., в конечном счете, размазками 4-импульсов in- и out-пакетов.

Функции  $\exp(-\mathfrak{S}_s)$  и  $\exp(-\mathfrak{S}_d)$  представляют собой геометрические факторы подавления, обусловленного неполным перекрытием волновых пакетов в пространственно-временной области их взаимодействия. Это можно увидеть, преобразовав выражение (30) к виду<sup>6</sup>

$$\mathfrak{S}_{s,d} = \sum_{\varkappa} T_\varkappa^{\mu\nu} (x_\varkappa - X_{s,d})_\mu (x_\varkappa - X_{s,d})_\nu \quad (32)$$

и заметив, что  $\mathfrak{S}_{s,d}$  и  $X_{s,d}$  инвариантны относительно группы преобразований  $\{x_\varkappa^0 \mapsto x_\varkappa^0 + \tau_\varkappa, \mathbf{x}_\varkappa \mapsto \mathbf{x}_\varkappa + \mathbf{v}_\varkappa \tau_\varkappa\}$  с произвольными параметрами  $\tau_\varkappa$ . Эта симметрия позволяет для каждого пакета  $\varkappa \in S, D$ , имеющего ненулевую скорость  $\mathbf{v}_\varkappa$ , заменить вектор  $\mathbf{x}_\varkappa$  в (32) вектором

$$\mathbf{b}_\varkappa = (\mathbf{x}_\varkappa - \mathbf{X}_{s,d}) - [\mathbf{n}_\varkappa (\mathbf{x}_\varkappa - \mathbf{X}_{s,d})] \mathbf{n}_\varkappa \quad (\mathbf{n}_\varkappa = \mathbf{v}_\varkappa / |\mathbf{v}_\varkappa|), \quad (33)$$

<sup>6</sup>Для чего следует воспользоваться трансляционной инвариантностью  $\mathfrak{S}_{s,d}$ .

равным по модулю  $|\mathbf{n}_\varkappa \times (\mathbf{x}_\varkappa - \mathbf{X}_{s,d})|$  – минимальному расстоянию между классической мировой линией центра пакета  $\varkappa$  и точкой  $\mathbf{X}_{s,d}$ , а нулевую компоненту  $x_\varkappa^0$  – моментом времени максимального сближения центра пакета с точкой  $\mathbf{X}_{s,d}$ , равным

$$b_\varkappa^0 = (x_\varkappa^0 - X_{s,d}^0) - |\mathbf{v}_\varkappa|^{-1} \mathbf{n}_\varkappa (\mathbf{x}_\varkappa - \mathbf{X}_{s,d}). \quad (34)$$

Построенный из (33) и (34) 4-вектор  $b_\varkappa = (b_\varkappa^0, \mathbf{b}_\varkappa)$  является релятивистским аналогом прицельного параметра. Естественно поэтому назвать его прицельным вектором, а 4-векторы  $X_s$  и  $X_d$  – прицельными точками. Если  $\mathbf{v}_\varkappa \neq 0$  ( $\forall \varkappa$ ), то, после замены  $x_\varkappa \mapsto b_\varkappa$ , выражение (32) принимает очень простой вид:

$$\mathfrak{S}_{s,d} = \sum_\varkappa \sigma_\varkappa^2 \left[ (\Gamma_\varkappa^2 - 1) (b_\varkappa^0)^2 + \mathbf{b}_\varkappa^2 \right] = \sum_\varkappa \sigma_\varkappa^2 |\mathbf{b}_\varkappa^*|^2. \quad (35)$$

В последнем равенстве вклад каждого пакета записан в его собственной системе отсчёта (в которой  $|\mathbf{b}_\varkappa^*| = |\mathbf{x}_\varkappa^* - \mathbf{X}_{s,d}^*|$ ), а следовательно, временное ограничение  $\mathbf{v}_\varkappa \neq 0$  можно снять. Физический смысл факторов  $\exp(-\mathfrak{S}_s)$  и  $\exp(-\mathfrak{S}_d)$  теперь прозрачен: взаимодействие in- и out-пакетов не будет подавлено ( $\mathfrak{S}_{s,d} \ll 1$ ), если все прицельные параметры  $|\mathbf{b}_\varkappa^*|$  малы по сравнению с эффективными размерами пакетов ( $\sim 1/\sigma_\varkappa$ ). В лаб. системе подавление «неправильных» конфигураций мировых линий пакетов определяется как временными, так и пространственными компонентами прицельных векторов  $b_\varkappa$ . При этом, вклад временных компонент  $b_\varkappa^0$  не важен для нерелятивистских пакетов (с  $\Gamma_\varkappa \sim 1$ ), но весьма существен для ультрарелятивистских пакетов (с  $\Gamma_\varkappa \gg 1$ ).

Из приведенного обсуждения видно, что прицельные точки  $X_s$  и  $X_d$  характеризуют пространственно-временное положение эффективных областей взаимодействия пакетов в источнике и детекторе. Взаимодействие пакетов тем интенсивнее, чем ближе от этих точек проходят их мировые линии. Конфигурация мировых линий и координаты прицельных точек никак не связаны с динамикой (т.е. с лагранжианом взаимодействия), т.к. однозначно задаются координатами и групповыми скоростями асимптотически свободных in- и out-пакетов, а также их эффективными размерами. Но, разумеется, полную вероятность процесса  $I_s \oplus I_d \rightarrow F_s \oplus F_d$ , описываемого макроскопической диаграммой рис. 3, можно вычислить только с учетом динамики взаимодействия.

Теперь мы можем сформулировать необходимые условия, при которых in- и out-пакеты в лаб. системе отсчёта можно считать свободными:<sup>7</sup>

$$x_a^0 \ll X_{s,d}^0 \text{ для } a \in I_{s,d}, \quad x_b^0 \gg X_{s,d}^0 \text{ для } b \in F_{s,d}. \quad (36)$$

Эти условия должны быть согласованы с условиями применимости СРГП приближения (21), так что все координаты имеют конечные значения.

<sup>7</sup> Аналогичные неравенства для пространственных координат не являются, вообще говоря, необходимыми, т.к. некоторые пакеты могут просто оставаться в покое вблизи точки  $\mathbf{X}_s$  или  $\mathbf{X}_d$  до или после взаимодействия.

### 3 Пример расчёта макродиаграммы

В качестве практически важного примера рассмотрим класс процессов

$$I_s \oplus I_d \rightarrow F'_s + \ell_\alpha^+ \oplus F'_d + \ell_\beta^-, \quad (37)$$

в которых  $I_s$ ,  $I_d$ ,  $F'_s$  и  $F'_d$  обозначают совокупности асимптотически свободных волновых пакетов, описывающих состояния адронов, а  $\ell_\alpha^+$  и  $\ell_\beta^-$  – пакеты заряженных лептонов ( $\alpha, \beta = e, \mu, \tau$ ). Если  $\alpha \neq \beta$ , то процесс (37) идет с нарушением лептонных чисел  $L_\alpha$  и  $L_\beta$ , что возможно только за счет обмена массивными (дираковскими или майорановскими) нейтрино.

В главном исчезающем порядке по электрослабому взаимодействию процесс (37) описывается суммой диаграмм, показанных на рис. 4. Пусть  $X_s$  и  $X_d$  – прицельные точки, определяемые формулой (29). Предполагается, что они (а значит и эффективные области взаимодействия в источнике и детекторе, ограниченные на рис. 4 пунктирными кривыми) макроскопически разделены в пространстве и что выполнены условия (36). Тогда начальные и конечные состояния можно считать прямыми произведениями свободных однопакетных состояний (3), нормированных согласно (12).

В рамках Стандартной Модели (СМ), минимально расширенной добавлением массовой матрицы нейтрино, кварк-лептонные блоки диаграммы описываются лагранжианом

$$\mathcal{L}_W(x) = -\frac{g}{2\sqrt{2}} [j_\ell(x)W(x) + j_q(x)W(x) + \text{H.c.}],$$

в котором  $g$  – константа связи СМ,  $j_\ell$  и  $j_q$  – лептонный и кварковый заряженные токи,

$$j_\ell^\mu(x) = \sum_{\alpha i} V_{\alpha i}^* \bar{\nu}_i(x) O^\mu \ell_\alpha(x), \quad j_q^\mu(x) = \sum_{qq'} V_{qq'}^* \bar{q}(x) O^\mu q'(x),$$

$V_{\alpha i}$  ( $\alpha = e, \mu, \tau$ ,  $i = 1, 2, 3$ ) и  $V_{qq'}$  ( $q = u, c, t$ ,  $q' = d, s, b$ ) – элементы матриц смешивания нейтрино и кварков ( $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{V}'$ , соответственно),  $O^\mu = \gamma^\mu(1 - \gamma_5)$ ,  $\ell_{\alpha, \beta}(x)$  – поля заряженных лептонов, а для остальных полей и  $\gamma$ -матриц Дирака использованы стандартные обозначения. Нормированная безразмерная амплитуда процесса (37)

$$\langle \text{out} | \mathbb{S} | \text{in} \rangle (\langle \text{in} | \text{in} \rangle \langle \text{out} | \text{out} \rangle)^{-1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_{\beta\alpha}$$

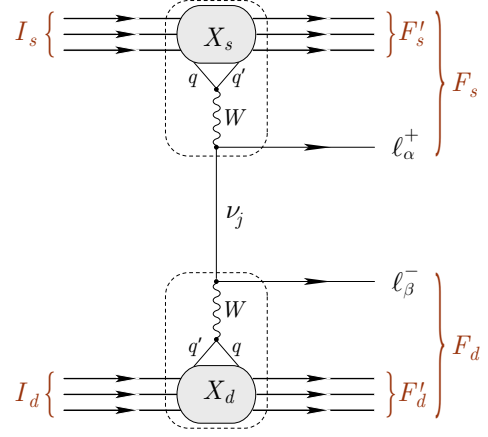


Рис. 4: Макроскопическая диаграмма, описывающая процесс (37).

дается четвертым порядком теории возмущений по константе  $g$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\beta\alpha} = & \frac{1}{\mathcal{N}} \left( \frac{-g}{2\sqrt{2}} \right)^4 \langle F_s \oplus F_d | T \int dx dx' dy dy' : j_\ell(x) W(x) :: j_q(x') W^\dagger(x') : \\ & \times : j_\ell^\dagger(y) W^\dagger(y) :: j_q^\dagger(y') W(y') : \mathbb{S}_h | I_s \oplus I_d \rangle. \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь  $\mathbb{S}_h = \exp \left[ i \int dz \mathcal{L}_h(z) \right]$ , а  $\mathcal{L}_h(z)$  – лагранжиан сильных и электромагнитных взаимодействий СМ, ответственный за непертурбативные процессы фрагментации и адронизации;  $T$  и  $: \dots :$  – обычные символы хронологического и нормально упорядочения локальных операторов. Нормировочный множитель  $\mathcal{N}$  в СРГП приближении определяется формулой

$$\mathcal{N}^2 = \langle \mathbf{in} | \mathbf{in} \rangle \langle \mathbf{out} | \mathbf{out} \rangle = \prod_{\varkappa \in I_s \oplus I_d \oplus F_s \oplus F_d} 2E_\varkappa V_\varkappa(\mathbf{p}_\varkappa). \quad (39)$$

Узость волновых пакетов в импульсном пространстве и макроскопическая разделенность областей взаимодействия адронов в источнике и детекторе, а также соображения трансляционной инвариантности позволяют представить адронную часть амплитуды (38) в факторизованном виде:

$$\begin{aligned} \langle F'_s \oplus F'_d | T [ : j_q^\mu(x) :: j_q^{\nu\dagger}(y) : \mathbb{S}_h ] | I_s \oplus I_d \rangle = & \mathcal{J}_s^\mu(p_S) \mathcal{J}_d^{\nu*}(p_D) \\ & \times \left[ \prod_{a \in I_s} e^{-ip_a x_a} \psi_a(\mathbf{p}_a, x_a - x) \right] \left[ \prod_{b \in F'_s} e^{ip_b x_b} \psi_b^*(\mathbf{p}_b, x_b - x) \right] \\ & \times \left[ \prod_{a \in I_d} e^{-ip_a x_a} \psi_a(\mathbf{p}_a, x_a - y) \right] \left[ \prod_{b \in F'_d} e^{ip_b x_b} \psi_b^*(\mathbf{p}_b, x_b - y) \right], \end{aligned} \quad (40)$$

где  $\mathcal{J}_s(p_S)$  и  $\mathcal{J}_d(p_D)$  –  $c$ -числовые заряженные адронные токи, в которых сильные взаимодействия учтены без использования теории возмущений, а  $p_S$  и  $p_D$  обозначают совокупности импульсных и спиновых переменных адронных состояний в источнике и детекторе. Теперь, используя обычные правила Вика и свойства лептонных волновых пакетов, можно преобразовать амплитуду (38) к виду

$$\mathcal{A}_{\beta\alpha} = \frac{g^4}{64\mathcal{N}} \sum_j V_{\beta j} \mathcal{J}_d^{\nu*} \bar{u}(\mathbf{p}_\beta) O^{\nu'} \mathbb{G}_{\nu\nu'\mu'\mu}^j(\{\mathbf{p}_\varkappa, x_\varkappa\}) O^{\mu'} v(\mathbf{p}_\alpha) \mathcal{J}_s^\mu V_{\alpha j}^*, \quad (41)$$

где введена тензорная функция

$$\mathbb{G}_{\nu\nu'\mu'\mu}^j(\{\mathbf{p}_\varkappa, x_\varkappa\}) = \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \mathbb{V}_d(q) \Delta_{\nu\nu'}(q - p_\beta) \Delta^j(q) \Delta_{\mu'\mu}(q + p_\alpha) \mathbb{V}_s(q). \quad (42)$$

Здесь  $\mathbb{V}_s(q)$  и  $\mathbb{V}_d(q)$  – интегралы перекрытия, явный вид и свойства которых обсуждались в предыдущем параграфе, а  $\Delta^j(q) = i(\hat{q} - m_j + i0)^{-1}$  и  $\Delta_{\mu\nu}(k) =$

$-i(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / m_W^2)(k^2 - m_W^2 + i0)^{-1}$  – пропагаторы массивного нейтрино  $\nu_j$  и  $W$ -бозона (последний – в унитарной калибровке),  $v(\mathbf{p}_\alpha)$  и  $\bar{u}(\mathbf{p}_\beta)$  – дираковские биспиноры, описывающие лептоны  $\ell_\alpha^+$  и  $\ell_\beta^-$ ; спиновые индексы и аргументы функций  $\mathcal{J}_{s,d}$  для краткости опущены.

Изучим поведение амплитуды (41) при больших расстояниях между точками  $\mathbf{X}_s$  и  $\mathbf{X}_d$ . Для оценки интеграла (42) воспользуемся теоремой Гримуса-Стокингера [9]. Пусть  $\Phi(\mathbf{q})$  – трижды непрерывно дифференцируемая функция, убывающая вместе со своими первой и второй производными не медленнее, чем  $|\mathbf{q}|^{-2}$  при  $|\mathbf{q}| \rightarrow \infty$ . Тогда, согласно теореме Гримуса-Стокингера, при  $L = |\mathbf{L}| \rightarrow \infty$  имеет место асимптотическое равенство

$$\int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{\Phi(\mathbf{q})e^{i\mathbf{q}\mathbf{L}}}{s - \mathbf{q}^2 + i0} \sim \begin{cases} -\frac{\Phi(\sqrt{s}\mathbf{L}/L)}{4\pi L} \exp(i\sqrt{s}L) + \mathcal{O}(L^{-3/2}) & \text{при } s > 0, \\ \mathcal{O}(L^{-2}) & \text{при } s < 0. \end{cases}$$

(В нашем случае  $\mathbf{L} = \mathbf{X}_d - \mathbf{X}_s$ ). После применения этой формулы к (42), оставшийся интеграл по  $q_0$  можно оценить методом перевала. Мы приведем здесь лишь результат этого довольно громоздкого вычисления, сделанного в ультрарелятивистском приближении, означающем, что нейтринные массы малы по сравнению с характерной энергией виртуального нейтрино (а точнее,  $q_s^0 \approx -q_d^0 \gg m_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ ). В этом приближении стационарная точка  $q_0 = E_j$ , которую естественно интерпретировать как эффективную энергию виртуального нейтрино  $\nu_j$ , может быть найдена в виде разложения по степеням малого параметра  $r_j = m_j^2/(2E_\nu^2)$ :<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} E_j &= E_\nu [1 - \mathbf{n}r_j + \mathcal{O}(r_j^2)], \\ E_\nu &= (Yl)/R, \quad \mathbf{n} = (\mathbf{Y}\mathbf{l})/R, \quad l = (1, \mathbf{l}), \quad \mathbf{l} = \mathbf{L}/L, \\ Y^\mu &= \tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu} q_{s\nu} - \tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\nu} q_{d\nu} \quad \text{и} \quad R = \left( \tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu} + \tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\nu} \right) l_\mu l_\nu. \end{aligned}$$

Эффективные импульс и скорость виртуального нейтрино найдутся при этом как  $\mathbf{p}_j = P_j \mathbf{l}$  и  $\mathbf{v}_j = \mathbf{p}_j/E_j = v_j \mathbf{l}$ , соответственно, где

$$P_j = \sqrt{E_j^2 - m_j^2} = E_\nu [1 - (\mathbf{n} + 1)r_j + \mathcal{O}(r_j^2)] \quad \text{и} \quad v_j = 1 - r_j + \mathcal{O}(r_j^2).$$

Нетрудно увидеть, что при  $m_j = 0$  и точном сохранении энергии-импульса  $E_j = P_j = E_\nu = q_s^0 = -q_d^0$ . В общем же случае эффективный 4-импульс  $p_j = (E_j, \mathbf{p}_j)$  определяется средними импульсами и эффективными размерами внешних паке-

<sup>8</sup>Мы ограничились здесь первым порядком по  $r_j$ , хотя поправки следующего порядка важны для определения границ применимости получаемых формул.

тов, участвующих в процессе (37). Введя обозначения

$$\Omega_j(T, L) = i(E_j T - P_j L) + 2 \left( \tilde{\mathfrak{D}}_j / P_j \right)^2 (P_j T - E_j L)^2, \quad (43)$$

$$\Theta = X_s q_s + X_d q_d, \quad L = |\mathbf{X}_d - \mathbf{X}_s|, \quad T = X_d^0 - X_s^0, \quad (44)$$

$$\tilde{\mathfrak{D}}_j = \mathfrak{D}_j (1 + 8ir_j E_\nu^2 \mathfrak{D}_j^2 L / P_j^3)^{-1/2}, \quad \mathfrak{D}_j = (1 + \mathbf{n}r_j) / \sqrt{2R}, \quad (45)$$

мы можем выписать асимптотическую оценку для функции (42):

$$\mathbb{G}_{\nu\nu'\mu'\mu}^j = \Delta_{\nu\nu'}(p_j - p_\beta)(\hat{p}_j + m_j)\Delta_{\mu'\mu}(p_j + p_\alpha) |\mathbb{V}_d(p_j)\mathbb{V}_s(p_j)| \frac{\tilde{\mathfrak{D}}_j e^{-\Omega_j - i\Theta}}{i(2\pi)^{3/2}L}. \quad (46)$$

Эту формулу можно (и нужно) несколько упростить, положив параметр  $r_j$  равным нулю всюду, где он не является множителем при  $L$  или  $T$  (величинах, которые могут быть произвольно большими). При этом 4-вектор  $p_j$  заменится на изотропный 4-вектор  $p_\nu = (E_\nu, \mathbf{p}_\nu) = E_\nu l$  ( $p_\nu^2 = 0$ ). С учетом сказанного заметим, что комплексная фаза (43) может быть записана в явно инвариантном виде:

$$\Omega_j = i(p_j X) + 2 \left( \tilde{\mathfrak{D}}_j / E_\nu \right)^2 [(p_j X)^2 - m_j^2 X^2], \quad X = X_d - X_s. \quad (47)$$

Сравнивая фактор  $\psi_j^* = e^{-\Omega_j}$  в (46) с волновой функцией (22) в СРГП приближении видим, что  $\psi_j^*$  можно интерпретировать как волновой пакет (вылетающего) нейтрино, в котором роль параметра  $\sigma$  играет функция  $\Sigma_j = \sqrt{2}\tilde{\mathfrak{D}}_j/\Gamma_j$ , где  $\Gamma_j = E_j/m_j$ . Поскольку эта функция комплекснозначна, пакет  $\psi_j^*$  расплывается с ростом  $L = |\mathbf{X}|$ . Хотя эффект расплывания, проявляющийся при очень больших значениях  $L$  и приводящий к подавлению суммарной амплитуды (41), а также относительных вкладов с разными  $j$  в (41), может представлять известный интерес для нейтринной астрофизики, в данной работе мы ограничимся анализом вероятности процесса (37) в «земных» условиях, для которых заведомо можно считать, что  $E_j L \ll (\Gamma_j E_j / 2\mathfrak{D}_j)^2$  и положить  $\tilde{\mathfrak{D}}_j \simeq \mathfrak{D}_j \simeq 1/\sqrt{2R} \equiv \mathfrak{D}$ ,  $\Sigma_j \simeq \sqrt{2}\mathfrak{D}/\Gamma_j = 1/(\Gamma_j \sqrt{R})$ . Т.о., относительная неопределенность энергии-импульса ультрарелятивистского нейтринного пакета  $\delta E_j/E_j \sim \delta P_j/P_j \sim \mathfrak{D}/E_\nu$  мала и определяется размазками импульсов внешних in- и out-пакетов. Именно в этом смысле следует понимать квантовомеханическое предположение о том, что состояния  $|\nu_i\rangle$  обладают определёнными 4-импульсами (см. Введение). Как и всякий релятивистский пакет, нейтринный пакет в среднем движется по классической траектории,  $\bar{\mathbf{L}} = \mathbf{v}_j T$ , квантовые отклонения от которой  $\sim \delta \mathbf{L}$  подавлены фактором  $\exp\{-4\mathfrak{D}^2 [\delta \mathbf{L}^2/\Gamma_j^2 + (\mathbf{v}_j \delta \mathbf{L})^2]\}$ .

Применим теперь тождество

$$P_- \hat{p}_\nu P_+ = P_- u_-(\mathbf{p}_\nu) \bar{u}_-(\mathbf{p}_\nu) P_+,$$

в котором  $P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ , а  $u_-(\mathbf{p}_\nu)$  – дираковский биспинор для свободного безмассового лево-спирального нейтрино  $\nu$  и определим матричные элементы

$$\begin{aligned} M_s &= (g^2/8)\bar{u}_-(\mathbf{p}_\nu)\mathcal{J}_s^\mu\Delta_{\mu\mu'}(p_\nu+p_\alpha)O^{\mu'}u(\mathbf{p}_\alpha), \\ M_d^* &= (g^2/8)\bar{v}(\mathbf{p}_\beta)O^{\mu'}\Delta_{\mu'\mu}(p_\nu-p_\beta)\mathcal{J}_d^{*\mu}u_-(\mathbf{p}_\nu), \end{aligned} \quad (48)$$

описывающие рождение *реального* безмассового нейтрино в реакциях  $I_s \rightarrow F'_s\ell_\alpha^+\nu$  и  $\nu I_d \rightarrow F'_d\ell_\beta^-$ , соответственно. Тогда, с учетом вышеприведенных результатов, мы получаем окончательное выражение для амплитуды (41):

$$\mathcal{A}_{\beta\alpha} = \frac{\mathfrak{D}|\mathbb{V}_{s,d}(p_\nu)\mathbb{V}_d(p_\nu)|M_sM_d^*}{i(2\pi)^{3/2}\mathcal{N}L} \sum_j V_{\alpha j}V_{\beta j}^* e^{-\Omega_j - i\Theta}. \quad (49)$$

Из вывода формулы (49) и её структуры видно, что она справедлива не только для рассмотренного класса процессов, но, при соответствующем переопределении матричных элементов (48), и для любых других процессов, идущих за счет обмена виртуальными нейтрино между «источником» и «детектором», находящимися на больших расстояниях друг от друга. Нетрудно обобщить (49) и на случай реакций с обменом антинейтрино, для чего следует сделать в ней замену  $\mathbf{V} \mapsto \mathbf{V}^\dagger$  и должным образом модифицировать матричные элементы (48).

## 4 Вероятность и скорость счета.

Нетрудно показать, что  $|\mathbb{V}_{s,d}(p_\nu)|^2 = (2\pi)^4\delta_{s,d}(p_\nu \mp q_{s,d})V_{s,d}$ , где  $\delta_{s,d}$  («размазанные»  $\delta$ -функции, аналогичные  $\delta_{s,d}$ ) и  $V_{s,d}$  (эффективные четырехмерные объёмы перекрытия пакетов) даются следующими формулами:

$$\delta_{s,d}(K) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu}K_\mu K_\nu\right)}{(2\pi)^2\sqrt{|\mathfrak{R}_{s,d}|}}, \quad V_{s,d} = \int dx \prod_{\varkappa \in S,D} |\psi_\varkappa(\mathbf{p}_\varkappa, x_\varkappa - x)|^2. \quad (50)$$

Теперь, с помощью (49) и (39) получаем микроскопическую вероятность процесса (37)

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_{\beta\alpha}|^2 &= \frac{(2\pi)^4\delta_s(p_\nu - q_s)V_s|M_s|^2}{\prod_{\varkappa \in S} 2E_\varkappa V_\varkappa} \frac{(2\pi)^4\delta_d(p_\nu + q_d)V_d|M_d|^2}{\prod_{\varkappa \in D} 2E_\varkappa V_\varkappa} \\ &\quad \times \frac{\mathfrak{D}^2}{(2\pi)^3L^2} \left| \sum_j V_{\alpha j}^* V_{\beta j} e^{-\Omega_j} \right|^2, \end{aligned} \quad (51)$$

зависящую от координат  $x_\varkappa$  и средних импульсов  $\mathbf{p}_\varkappa$  всех участвующих в реакции волновых пакетов, а также от параметров  $\sigma_\varkappa$ . Вероятность (51) исчезающе мала, если мало произведение объёмов перекрытия

$$V_s V_d = (\pi/2)^4 (|\mathfrak{R}_s||\mathfrak{R}_d|)^{-1/2} \exp[-2(\mathfrak{S}_s + \mathfrak{S}_d)],$$

т.е., если in- и out-пакеты в источнике и детекторе не пересекаются в пространственно-временных областях, окружающих прицельные точки  $X_s$  и  $X_d$ .

Отметим, что и 4-вектор  $p_\nu$  является функцией  $p_\varkappa$  и  $\sigma_\varkappa$ , причем  $p_\nu = q_s = -q_d$  в пределе  $\sigma_\varkappa = 0, \forall \varkappa$ . Поэтому при достаточно малых  $\sigma_\varkappa$

$$\delta_s(p_\nu - q_s)\delta_d(p_\nu + q_d) \approx \delta_s(0)\delta_d(0) = (2\pi)^{-4} (|\mathfrak{R}_s||\mathfrak{R}_d|)^{-1/2}.$$

А чем же определяется приближенное равенство  $q_s$  и  $q_d$ ? Для ответа на этот вопрос преобразуем выражение (51) способом, предложенным Кардаллом [11]. Используя явный вид функций  $\delta_{s,d}$  и  $\mathfrak{D}$ , нетрудно вывести следующее приближенное соотношение:<sup>9</sup>

$$2\sqrt{\pi}\mathfrak{D}\delta_s(p_\nu - q_s)\delta_d(p_\nu + q_d)F(p_\nu) = \int dE'_\nu \delta_s(p'_\nu - q_s)\delta_d(p'_\nu + q_d)F(p'_\nu),$$

в котором  $F(p_\nu)$  – произвольная медленно меняющаяся функция  $p_\nu$ , а  $p'_\nu = (E'_\nu, \mathbf{p}'_\nu) = E'_\nu \mathbf{l}$ . С помощью этого соотношения получаем

$$|\mathcal{A}_{\beta\alpha}|^2 = \int dE_\nu \frac{(2\pi)^4 \delta_s(p_\nu - q_s) V_s |M_s|^2}{\prod_{\varkappa \in S} 2E_\varkappa V_\varkappa} \frac{(2\pi)^4 \delta_d(p_\nu + q_d) V_d |M_d|^2}{\prod_{\varkappa \in D} 2E_\varkappa V_\varkappa} \times \frac{\mathfrak{D}}{2\sqrt{\pi}(2\pi)^3 L^2} \left| \sum_j V_{\alpha j}^* V_{\beta j} e^{-\Omega_j} \right|^2, \quad (52)$$

где штрих у «немой» переменной интегрирования  $E_\nu$  опущен, но теперь она (как и вектор  $\mathbf{p}_\nu = E_\nu \mathbf{l}$ ) уже никак не связана с параметрами внешних пакетов. В рамках сделанных приближений формулы (51) и (52) эквивалентны, но из (52) видно, что закон сохранения энергии-импульса регулируется подынтегральными факторами  $\delta_s(p_\nu - q_s)$  и  $\delta_d(p_\nu + q_d)$ , которые, при достаточно малых  $\sigma_\varkappa$ , можно заменить обычными  $\delta$ -функциями.

В большинстве современных нейтринных экспериментов информация о координатах частиц в источнике, а чаще всего и в детекторе, недоступна или не используется при обработке данных. Более того, измеряются, как правило, лишь импульсы вторичных частиц в детекторе. Поэтому для экспериментаторов представляет интерес вероятность (52), усредненная по всем неизмеряемым переменным. Такое усреднение можно выполнить лишь с помощью некоторой математической модели реального эксперимента. Здесь мы будем использовать простую, но достаточно реалистичную модель, в которой предполагается, что распределения волновых пакетов in-частиц по средним импульсам, проекциям спинов и координатам в источнике и детекторе можно описать одночастичными функциями распределения  $f_a(\mathbf{p}_a, s_a, x_a)$ , нормированными согласно условию

$$\sum_{s_a} \int \frac{d\mathbf{x}_a d\mathbf{p}_a}{(2\pi)^3} f_a(\mathbf{p}_a, s_a, x_a) = N_a(x_a^0) \quad (a \in I_{s,d}),$$

<sup>9</sup>Это соотношение справедливо с той же точностью, с какой была получена формула (49) для амплитуды, а именно, – с точностью использованного при выводе метода перевала.

где  $N_a(x_a^0)$  – полное число частиц  $a$  в момент времени  $x_a^0$ . Мы можем теперь уточнить (а вернее – переопределить) термины «источник» и «детектор», использовавшиеся при расчете амплитуды для обозначения блоков макроскопической диаграммы. В дальнейшем мы будем называть «источником» и «детектором» носители  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{D}$  произведений функций распределения по пространственно-временным переменным (т.е.,  $\mathcal{S} = \text{supp}_{\{x_a\}} \prod_a f_a$ ,  $a \in I_s$  и аналогично для  $\mathcal{D}$ ), которые будем считать ограниченными и непересекающимися. Примем, кроме того, что характерные пространственные размеры  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{D}$  малы по сравнению с расстоянием между ними, но очень велики по сравнению с эффективными размерами всех движущихся в них волновых пакетов. Для определённости мы предположим еще, что в нашем эксперименте подлежат измерению только средние импульсы вторичных частиц в  $\mathcal{D}$ , причем (благодаря большому расстоянию между  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{D}$ ) можно пренебречь фоном от вторичных частиц, попадающих в  $\mathcal{D}$  из  $\mathcal{S}$ . В этих предположениях макроскопически усредненная вероятность процесса (37) есть

$$\begin{aligned}
\langle\langle |\mathcal{A}_{\beta\alpha}|^2 \rangle\rangle &= \sum_{\text{spins}} \int \prod_{a \in I_s} \frac{d\mathbf{x}_a d\mathbf{p}_a f_a(\mathbf{p}_a, s_a, x_a)}{(2\pi)^3 2E_a V_a} \int \prod_{b \in F_s} \frac{d\mathbf{x}_b d\mathbf{p}_b}{(2\pi)^3 2E_b V_b} V_s \\
&\times \int \prod_{a \in I_d} \frac{d\mathbf{x}_a d\mathbf{p}_a f_a(\mathbf{p}_a, s_a, x_a)}{(2\pi)^3 2E_a V_a} \int \prod_{b \in F_d} \frac{d\mathbf{x}_b [d\mathbf{p}_b]}{(2\pi)^3 2E_b V_b} V_d \\
&\times \int dE_\nu (2\pi)^4 \delta_s(p_\nu - q_s) |M_s|^2 (2\pi)^4 \delta_d(p_\nu + q_d) |M_d|^2 \\
&\times \frac{\mathfrak{D}}{2\sqrt{\pi}(2\pi)^3 L^2} \left| \sum_j V_{\alpha j} V_{\beta j}^* e^{-\Omega_j} \right|^2. \tag{53}
\end{aligned}$$

Здесь и далее символ  $\sum_{\text{spins}}$  обозначает суммирование по спинам всех in-частиц и усреднение по спинам всех out-частиц в  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{D}$ , а символ  $[d\mathbf{p}_b]$  означает, что по переменной  $\mathbf{p}_b$  интегрирование не производится, т.е.  $\int [d\mathbf{p}_b] = d\mathbf{p}_b$ . Нетрудно видеть, что (53) представляет собой полное число,  $dN_{\alpha\beta}$ , регистрируемых в  $\mathcal{D}$  событий с частицами  $b \in F_d$ , импульсы которых находятся в интервалах от  $\mathbf{p}_b$  до  $\mathbf{p}_b + d\mathbf{p}_b$ .<sup>10</sup>

Интегрирование по координатам пакетов в (53) можно выполнить в явном виде, если воспользоваться интегральным представлением (50) для объёмов перекрытия  $V_{s,d}$  и учесть, что функции распределения  $f_a$  в  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{D}$ , равно как и фактор  $e^{-\Omega_j - \Omega_j^*} / L^2$ , заметно меняются во времени и пространстве лишь на макроскопических масштабах, тогда как подынтегральные факторы в  $V_s$  и  $V_d$  существенно отличны от нуля лишь в малой окрестности соответствующей переменной интегрирования. Вспомнив теперь определение эффективного объёма пакета (14) и

<sup>10</sup>Для простоты мы рассматриваем «идеальный» эксперимент, эффективность регистрации в котором равна 1, хотя формализм позволяет учесть реальные эффективность и акцептанс детектора, а также триггерные условия и критерии отбора событий.

свойства прицельных точек (29) и пренебрегая краевыми эффектами, мы можем записать (53) в виде

$$dN_{\alpha\beta} = \sum_{\text{spins}} \int dx \int dy \int d\mathfrak{P}_s \int d\mathfrak{P}_d \int dE_\nu \frac{\mathfrak{D} \left| \sum_j V_{\alpha j} V_{\beta j}^* e^{-\Omega_j} \right|^2}{16\pi^{7/2} |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}, \quad (54)$$

где дифференциальные формы  $d\mathfrak{P}_{s,d}$  определены следующим образом:

$$d\mathfrak{P}_s = \prod_{a \in I_s} \frac{d\mathbf{p}_a f_a(\mathbf{p}_a, s_a, x)}{(2\pi)^3 2E_a} \prod_{b \in F_s} \frac{d\mathbf{p}_b}{(2\pi)^3 2E_b} (2\pi)^4 \delta_s(p_\nu - q_s) |M_s|^2, \quad (55a)$$

$$d\mathfrak{P}_d = \prod_{a \in I_d} \frac{d\mathbf{p}_a f_a(\mathbf{p}_a, s_a, y)}{(2\pi)^3 2E_a} \prod_{b \in F_d} \frac{[d\mathbf{p}_b]}{(2\pi)^3 2E_b} (2\pi)^4 \delta_d(p_\nu + q_d) |M_d|^2. \quad (55b)$$

Для фазы  $\Omega_j$  в (54) по-прежнему справедливы определения (43) и (47), в которых теперь  $T = X_0 = y_0 - x_0$  и  $L = |\mathbf{X}| = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ . Следует подчеркнуть, что соображения, использованные при выводе (54) основаны на свойствах принятой нами математической модели, которая может не отвечать условиям реальных экспериментов по исследованию нейтринных осцилляций.<sup>11</sup> Поэтому сравнительно простая, но приближенная формула (54) не эквивалентна более общему выражению (53).

С целью дальнейшего упрощения анализа проведем в (54) интегрирование по временным переменным  $x^0$  и  $y^0$ . Это легко сделать, если предположить, что функции распределения  $f_a$  в  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{D}$  слабо зависят от времени в течение эксперимента и заменить их «прямоугольными» зависимостями вида

$$\begin{aligned} f_a(\mathbf{p}_a, s_a; x) &= \theta(x^0 - x_1^0) \theta(x_2^0 - x^0) \bar{f}_a(\mathbf{p}_a, s_a; \mathbf{x}) \quad \text{для } a \in I_s, \\ f_a(\mathbf{p}_a, s_a; y) &= \theta(y^0 - y_1^0) \theta(y_2^0 - y^0) \bar{f}_a(\mathbf{p}_a, s_a; \mathbf{y}) \quad \text{для } a \in I_d. \end{aligned} \quad (56)$$

Периоды стационарности  $\tau_s = x_2^0 - x_1^0$  и  $\tau_d = y_2^0 - y_1^0$  могут быть очень велики (как в экспериментах с солнечными и атмосферными нейтрино, в которых, понятно,  $\tau_s \gg \tau_d$ ) или очень малы (как в экспериментах с импульсными пучками от ускорителя, в которых, обычно,  $\tau_s \lesssim \tau_d$ ). В любом случае модель (56) предполагает, что интервалы времени «включения» и времени «выключения» источника (детектора) пренебрежимо малы по сравнению с  $\tau_s$  ( $\tau_d$ ). При использовании модели

<sup>11</sup>Мы также неявно использовали экспериментальные ограничения на нейтринные массы, позволяющие считать, что  $\text{Im}(\Omega_j + \Omega_i^*)$  существенно меняется лишь на макроскопически больших пространственно-временных масштабах  $L_{ij}$ , а  $\text{Re}(\Omega_j + \Omega_i^*)$  – на масштабах много больших  $L_{ij}$ . Напомним, однако, что такая интерпретация экспериментальных данных основана на применении квантовомеханического подхода.

(56) единственный множитель в подынтегральном выражении (54), зависящий от переменных  $x^0$  и  $y^0$  – это  $e^{-\Omega_j - \Omega_i^*}$ , так что задача сводится к простому интегралу

$$\int_{y_1^0}^{y_2^0} dy^0 \int_{x_1^0}^{x_2^0} dx^0 e^{-\Omega_j - \Omega_i^*} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\mathfrak{D}} \tau_d \exp(i\varphi_{ij} - \mathcal{A}_{ij}^2) S_{ij}. \quad (57)$$

В (57) использованы следующие обозначения:

$$S_{ij} = \frac{\exp(-\mathcal{B}_{ij}^2)}{4\tau_d \mathfrak{D}} \sum_{l, l'=1}^2 (-1)^{l+l'+1} \text{Ierf} \left[ 2\mathfrak{D} \left( x_l^0 - y_{l'}^0 + \frac{L}{v_{ij}} \right) - i\mathcal{B}_{ij} \right], \quad (58)$$

$$\varphi_{ij} = \frac{2\pi L}{L_{ij}}, \quad \mathcal{A}_{ij} = (v_j - v_i) \mathfrak{D} L = \frac{2\pi \mathfrak{D} L}{E_\nu L_{ij}}, \quad \mathcal{B}_{ij} = \frac{\Delta E_{ij}}{4\mathfrak{D}} = \frac{\pi \mathbf{n}}{2\mathfrak{D} L_{ij}}, \quad (59)$$

где

$$L_{ij} = \frac{4\pi E_\nu}{\Delta m_{ij}^2}, \quad \Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2, \quad \Delta E_{ij} = E_i - E_j, \quad \frac{2}{v_{ij}} = \frac{1}{v_i} + \frac{1}{v_j},$$

$$\text{Ierf}(z) = \int_0^z dz' \text{erf}(z') + \frac{1}{\sqrt{\pi}} = z \text{erf}(z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2},$$

а  $\text{erf}(z)$  – интеграл ошибок. С учетом (57), вместо (54) получаем:

$$dN_{\alpha\beta} = \tau_d \sum_{\text{spins}} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} \int d\mathfrak{P}_s \int d\mathfrak{P}_d \int dE_\nu \frac{\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, |\mathbf{y} - \mathbf{x}|)}{4(2\pi)^3 |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}, \quad (60a)$$

$$= \frac{\tau_d}{V_{\mathcal{D}}} \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} \int d\Phi_\nu \int d\sigma_{\nu\mathcal{D}} \mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, |\mathbf{y} - \mathbf{x}|). \quad (60b)$$

Дифференциальные формы  $d\mathfrak{P}_{s,d}$  в (60a) определены согласно (55), где функции  $f_a$  следует заменить на  $\bar{f}_a$ , а выражение (60b) записано с учетом тождества

$$\sum_{\text{spins}} \frac{d\mathfrak{P}_s d\mathfrak{P}_d dE_\nu}{4(2\pi)^3 |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2} = \sum_{\text{spins} \in S} \frac{d\mathfrak{P}_s d\mathbf{p}_\nu}{(2\pi)^3 2E_\nu |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2 d\Omega_\nu} \sum_{\text{spins} \in D} \frac{d\mathfrak{P}_d}{2E_\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\Phi_\nu d\sigma_{\nu\mathcal{D}}}{V_{\mathcal{D}} V_S},$$

где  $V_S$  и  $V_{\mathcal{D}}$  – пространственные объемы источника и детектора. Дифференциальная форма  $d\Phi_\nu$  определена таким образом, что интеграл

$$\frac{d\mathbf{x}}{V_S} \int \frac{d\Phi_\nu}{dE_\nu} = d\mathbf{x} \sum_{\text{spins} \in S} \int \frac{d\mathfrak{P}_s E_\nu}{2(2\pi)^3 |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2} \quad (61)$$

представляет собой ни что иное, как плотность потока нейтрино в  $\mathcal{D}$ , которые возникают в  $\mathcal{S}$  за счет реакций  $I_s \rightarrow F'_s \ell_\alpha^+ \nu$ .<sup>12</sup> Величина  $d\sigma_{\nu\mathcal{D}}$  определена так, что

$$\frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \int d\mathbf{y} d\sigma_{\nu\mathcal{D}} = \sum_{\text{spins} \in D} \int \frac{d\mathbf{y} d\mathfrak{P}_d}{2E_\nu} \quad (62)$$

<sup>12</sup>Говоря точнее, интеграл (61) есть число нейтрино, возникающих за единицу времени в объёме  $d\mathbf{x}$  с центром в точке  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ , распространяющихся внутри телесного угла  $d\Omega_\nu$  в направлении  $\mathbf{l} = (\mathbf{y} - \mathbf{x})/|\mathbf{y} - \mathbf{x}|$  и пересекающих перпендикулярную к  $\mathbf{l}$  единичную площадку с центром в точке  $\mathbf{y} \in \mathcal{D}$ .

представляет собой дифференциальное поперечное сечение рассеяния нейтрино на детекторе  $\mathcal{D}$  как целом. В частном (и важнейшем на практике) случае рассеяния нейтрино в реакции  $\nu a \rightarrow F'_d \ell_\beta^-$  и при достаточно узком распределении частиц-мишеней  $a$  по импульсам дифференциальная форма  $d\sigma_{\nu\mathcal{D}}$  превращается в элементарное дифференциальное поперечное сечение этой реакции, умноженное на число частиц сорта  $a$  в детекторе.

Обратимся, наконец, к подынтегральному фактору

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L) = \sum_{ij} V_{\alpha i} V_{\beta j} V_{\alpha j}^* V_{\beta i}^* S_{ij} \exp(i\varphi_{ij} - \mathcal{A}_{ij}^2). \quad (63)$$

При  $S_{ij} = 1$  и  $\mathcal{A}_{ij} = 0$  этот фактор совпадает с известным квантовомеханическим выражением для вероятности флэйворных переходов. Естественно поэтому считать (63) обобщением квантовомеханического результата. Однако, вероятностная интерпретация величины  $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$  была бы весьма условной уже потому, что входящие в нее функции  $\mathfrak{D}$  и  $\mathfrak{n}$  (последняя, напомним, содержится в  $S_{ij}$ ) зависят от импульсов внешних пакетов и энергии нейтрино, причем импульсы  $\mathbf{p}_\kappa$  с  $\kappa \in I_s \oplus I_d \oplus F_s$  и  $E_\nu$  являются переменными интегрирования. Поэтому величина  $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$  не удовлетворяет, вообще говоря, ожидаемым соотношениям типа  $\sum_\beta \mathcal{P}_{\alpha\beta} = \sum_\alpha \mathcal{P}_{\alpha\beta} = 1$ , являющимся в квантовомеханической теории нейтринных осцилляций простым следствием унитарности. Дело в том, что фазовые объёмы процессов (37) и поведение функций  $\mathfrak{D}$  и  $\mathfrak{n}$  внутри этих объёмов различны для разных пар лептонов  $(\ell_\alpha, \ell_\beta)$ , что обусловлено как кинематикой реакций в  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{D}$  (в частности, их порогами), так и размазками средних импульсов лептонных пакетов  $\sigma_e, \sigma_\mu$  и  $\sigma_\tau$ , которые вовсе не обязаны быть одинаковыми даже по порядку величины.<sup>13</sup> Для лучшего восприятия этих фактов полезно мысленно снабдить функции  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{n}$ , а также все зависящие от  $\mathfrak{D}$  и  $\mathfrak{n}$  величины индексами  $\alpha$  и  $\beta$ .

Еще одно техническое затруднение при интерпретации (63) связано с зависимостью фактора  $S_{ij}$  (который мы будем называть фактором декогерентности) от параметров  $x_{1,2}^0$  и  $y_{1,2}^0$ . Формула (58) была получена без каких-либо предположений о «синхронизации» интервалов  $(x_1^0, x_2^0)$  и  $(y_1^0, y_2^0)$ . Не удивительно поэтому, что фактор декогерентности может оказаться сколь угодно мал по модулю, если эти интервалы не согласованы с учетом того очевидного факта, что характерное время прихода ультрарелятивистских нейтрино из  $\mathcal{S}$  в  $\mathcal{D}$  примерно равно среднему расстоянию  $\bar{L}$  между  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{D}$ . Перед обсуждением роли фактора декогерентности, сделаем ещё одно, последнее, упрощение формулы для числа событий,

<sup>13</sup>В реальных экспериментах дело осложняется еще и тем, что скорость счёта нейтринных событий (в нашем случае – событий с рождением лептона  $\ell_\beta$ ) в них обычно определяется большим числом процессов разного типа, например (как в экспериментах с атмосферными и ускорительными нейтрино) – распадами мезонов ( $\pi_{\mu 2}, K_{\mu 2}, K_{\mu 3}, K_{e 3}$  и т.д.) и мюонов в источнике (атмосфера, распадный канал), а также всевозможными взаимодействиями нейтрино в детекторе – от (квази)упругих до глубоконеупругих. Фазовые объёмы и функции  $\mathfrak{D}$  и  $\mathfrak{n}$  будут существенно разными для разных комбинаций «подпроцессов» в  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{D}$ .

воспользовавшись снова предположением о том, что характерные размеры  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{D}$  малы по сравнению с  $\bar{L}$ . Тогда в (60b) можно заменить  $|\mathbf{y} - \mathbf{x}|$  на  $\bar{L}$ , а дифференциальные формы  $d\Phi_\nu$  и  $d\sigma_{\nu\mathcal{D}}$  – на их усредненные (соответственно по  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{D}$ ) значения  $d\bar{\Phi}_\nu$  и  $d\bar{\sigma}_{\nu\mathcal{D}}$ . В результате получаем:

$$dN_{\alpha\beta} = \tau_d \int d\bar{\Phi}_\nu \int d\bar{\sigma}_{\nu\mathcal{D}} \mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, \bar{L}). \quad (64)$$

Область применимости приближения (64) существенно уже, чем у (60), что связано с дополнительными ограничениями на функции распределения  $\bar{f}_a$ , а также на абсолютные размеры и геометрию  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{D}$ , неявно использованные при переходе от (60) к (64). Из-за недостатка места мы не будем сейчас обсуждать эти важные детали.

Вернемся к фактору декогерентности, ограничившись рассмотрением синхронизированных измерений, в которых  $x_{1,2}^0 = \mp\tau_s/2$ ,  $y_{1,2}^0 = \bar{L}\mp\tau_d/2$ . После небольших упрощений технического характера, фактор (58) выражается через вещественнозначную функцию  $S(t, t', b)$  трех безразмерных вещественных переменных, а именно,

$$S_{ij} = S(\mathfrak{D}\tau_s, \mathfrak{D}\tau_d, \mathcal{B}_{ij}), \quad (65)$$

$$2t'S(t, t', b) = e^{-b^2} \operatorname{Re} [\operatorname{Ierf}(t + t' + ib) - \operatorname{Ierf}(t - t' + ib)].$$

На рис. 5 показано поведение функции  $S_0(t, t') = S_0(t, t', 0)$  и её плотности распределения в плоскости  $(t, t')$ . Можно доказать, что  $0 < S_0(t, t') < 1$  при любых

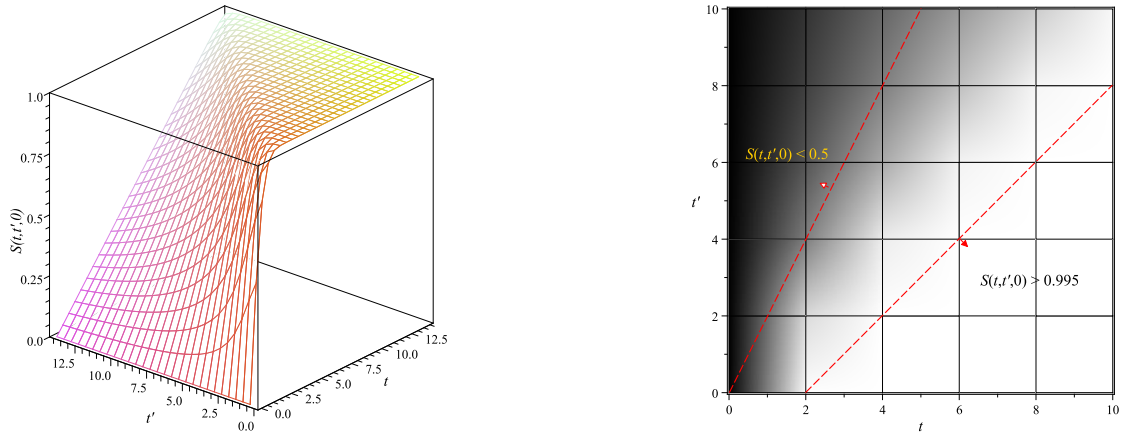


Рис. 5: Функция декогерентности  $S_0(t, t') = S_0(t, t', 0)$  (левая панель) и график её плотности распределения в плоскости  $(t, t')$  (правая панель). Тёмные области на правой панели отвечают меньшим, а светлые – большим значениям  $S_0(t, t')$ .

$t, t' > 0$  и, кроме того,  $S_0(t, t') < t/t'$  при  $t' \geq t$ . Отсюда следует, что средняя скорость счёта событий в детекторе  $dN_{\alpha\beta}/\tau_d$  (но, конечно, не полное число событий)

уменьшается с ростом отношения  $\tau_d/\tau_s > 1$ . Причина этого понятна: детектор не может зарегистрировать больше нейтрино, чем их было испущено источником. Менее очевидное заключение следует из неравенства  $S_0(t + \delta t, t) > \text{erf}(\delta t)$ , справедливого для  $\delta t > 0$ : общее подавление  $dN_{\alpha\beta}/\tau_d$  отсутствует при достаточно большом отношении  $\tau_s/\tau_d$ .<sup>14</sup> Две пунктирные прямые на правой панели рис. 5 отделяют области, в которых  $S_0 < 0.5$  ( $\tau_s < 2\tau_d$ ) и  $S_0 > 0.995$  ( $\tau_s > \tau_d + 2/\mathfrak{D}$ ).

В случае  $t = t'$ , представляющем интерес для ускорительных экспериментов, функция  $S_0$  стремится к единице только при очень больших  $t$  (на практике при  $t \gtrsim 100$ ). Т.о., для того, чтобы положить  $S_0(t, t') = 1$  необходимо (но все ещё не достаточно), чтобы время экспозиции детектора  $\tau_d$  было либо мало по сравнению с  $\tau_s$ , либо (при  $\tau_d \approx \tau_s$ ) было много больше эффективного масштаба времени  $\tau_\nu = 1/\min(\mathfrak{D})$ , где минимум берётся по тем областям фазового объёма реакций в  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{D}$ , которые дают существенный вклад в скорость счёта.

С другой стороны, сильная зависимость фактора  $S_0(t, t')$  от своих аргументов при  $t \lesssim t'$  предоставляет потенциальную возможность экспериментальной оценки функции  $\mathfrak{D}$  (точнее, – её средних значений внутри вышеупомянутых областей фазового объёма), основанной на измерении скорости счёта, как функции переменных  $\tau_d$  и  $\tau_s$  (при фиксированном  $\bar{L}$ ) и сравнении данных с результатами монте-карловского моделирования. Оптимальная стратегия подобного эксперимента должна быть предметом специального исследования.

На рис. 6 показаны профили функции  $S(t, t', b)$ , вычисленные при нескольких значениях параметра  $b$ . Видно, что с ростом  $b$  поведение  $S(t, t', b)$ , как функции  $t$  и  $t'$ , становится все более сложным. При  $b > 3 - 4$  функция  $S(t, t', b)$  быстро осциллирует вблизи нуля. Такое поведение приводит к сильному подавлению «недиагональных» (с  $i \neq j$ ) вкладов в  $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, \bar{L})$ .

На рис. 7 показана функция  $S(t, t, b)$  в зависимости от  $b$ , вычисленная при фиксированных значениях  $t$ . При небольших  $t$  эта зависимость имеет квазипериодический характер, проявляющийся на фоне быстрого падения  $S(t, t, b)$  с ростом  $b$ . При очень больших  $t$  функция  $S(t, t, b)$  перестаёт зависеть от  $t$ , очень медленно приближаясь к своему асимптотическому виду  $\exp(-b^2)$ . В таком асимптотическом режиме «вероятность» (63) принимает вид, уже известный из литературы (см., например, [6, 12, 13] и ссылки в этих работах),

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L) = \sum_{ij} V_{\alpha i} V_{\beta j} V_{\alpha j}^* V_{\beta i}^* \exp(i\varphi_{ij} - \mathcal{A}_{ij}^2 - \mathcal{B}_{ij}^2), \quad (66)$$

с той существенной разницей, что входящие в  $\mathcal{A}_{ij}$  и  $\mathcal{B}_{ij}$  функции  $\mathfrak{D}$  и  $\mathbf{n}$  зависят от импульсов внешних пакетов и энергии нейтрино. Эта зависимость качественно изменяет поведение факторов подавления «осцилляций», если хотя бы некоторые из внешних пакетов имеют релятивистские средние импульсы.

<sup>14</sup>Это условие «с большим запасом» выполняется в экспериментах с солнечными и атмосферными нейтрино, но может не выполняться в ускорительных и реакторных экспериментах.

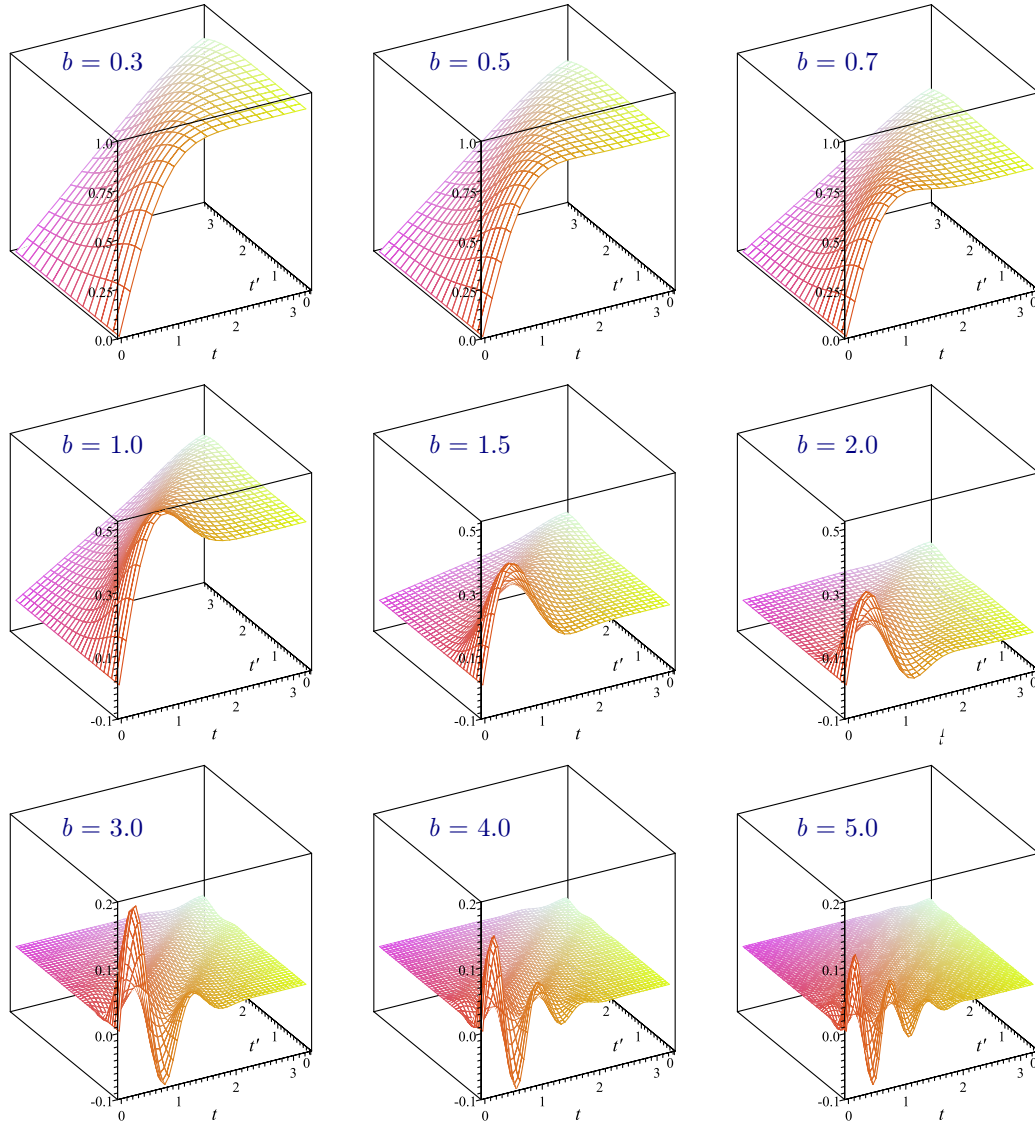


Рис. 6: Профили функции декогерентности  $S(t, t', b)$  вычисленные при девяти значениях параметра  $b$ , указанных на панелях.

Фактор  $\exp(-\mathcal{A}_{ij}^2)$  в (66) подавляет интерференцию вкладов с  $i \neq j$  на расстояниях, превышающих «длину когерентности»  $L_{ij}^{\text{coh}} = 1/(\Delta v_{ij} \mathcal{D}) \gg |L_{ij}|$  ( $\Delta v_{ij} = |v_j - v_i|$ ), на которой нейтринные волновые пакеты  $\psi_i^*$  и  $\psi_j^*$  уже сильно разделены в пространстве (из-за разницы их групповых скоростей) и перестают интерферировать. Понятно, что в плосковолновом пределе  $L_{ij}^{\text{coh}} \rightarrow \infty$ . Фактор  $\exp(-\mathcal{B}_{ij}^2)$  подавляет интерференционные вклады в прямо противоположной ситуации, т.е., в случае, когда внешние пакеты в  $\mathcal{S}$  или в  $\mathcal{D}$  (или в  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{D}$ ) сильно делокализованы (в плосковолновом пределе – размазаны по всему пространству).

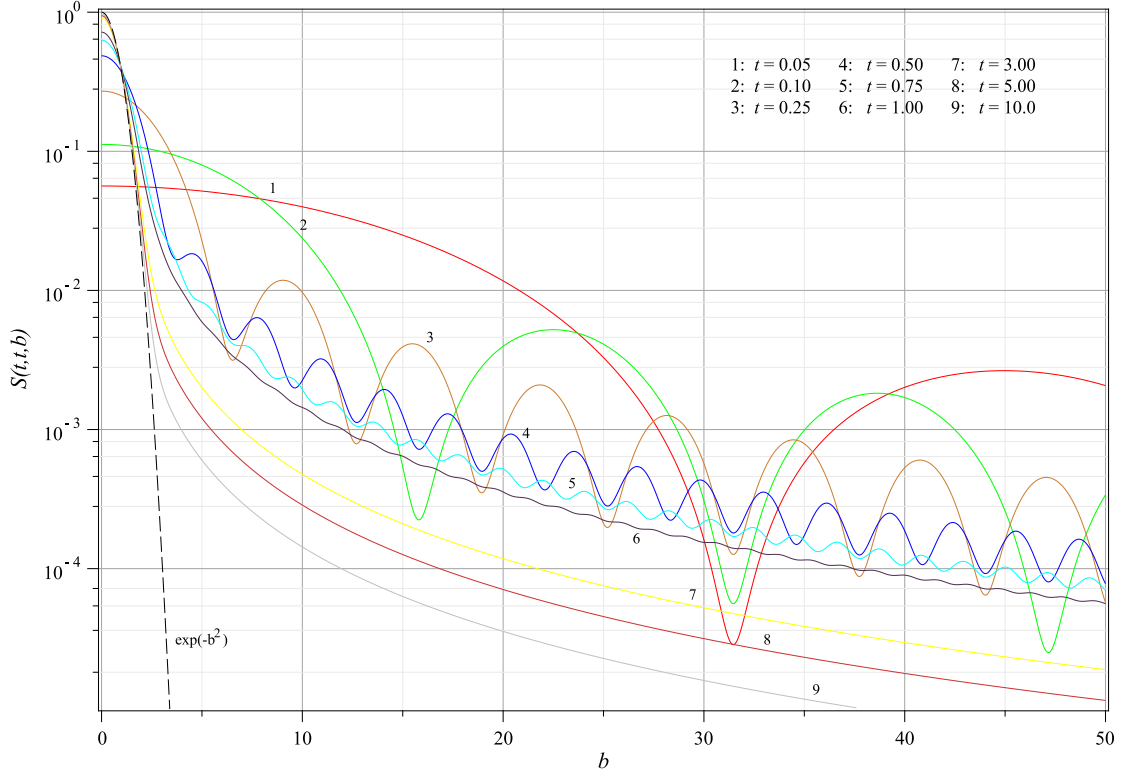


Рис. 7: Функция  $S(t, t, b)$  в зависимости от  $b$  при фиксированных значениях  $t$ , указанных в легенде. Для сравнения пунктирной кривой показана асимптотика функции  $S(t, t, b)$  при  $t \rightarrow \infty$  и конечных  $b$ .

Суммарный размер областей рождения и поглощения нейтрино в  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{D}$  по порядку величины равен  $1/\mathfrak{D}$ . Интерференционные вклады исчезают, если этот размер велик по сравнению с «длиной интерференции»  $L_{ij}^{\text{int}} = 1/(4\Delta E_{ij}) = 2L_{ij}/(\pi\mathbf{n})$ . Другими словами, в плосковолновом пределе квантовополевая теория предсказывает исчезновение нейтринных осцилляций. Вероятность флэйворных переходов при этом не зависит от  $L$  и становится равной  $\sum_i |V_{\alpha i}|^2 |V_{\beta i}|^2$ . Таким образом, нетривиальная (зависящая от  $L$ ) интерференция амплитуд с промежуточными нейтрино разных масс возможна лишь при  $\mathfrak{D} \neq 0$ .

Детальный анализ процессов  $1 \rightarrow 2$ ,  $1 \rightarrow 3$  и  $2 \rightarrow 2$  показывает, что функция  $\mathfrak{D}$  отлична от нуля, если в обеих вершинах диаграммы рис. 4, описывающей процесс (37), взаимодействуют *не менее двух* (не важно in или out) волновых пакетов  $\mathcal{K}$  с  $\sigma_{\mathcal{K}} \neq 0$ . Эти же условия с неизбежностью приводят к тому, что недиагональные вклады исчезают на достаточно больших расстояниях между источником и детектором ( $L \gg \max L_{ij}^{\text{coh}}$ ). Т.о., область применимости стандарт-

ной квантовомеханической формулы для вероятности нейтринных осцилляций ограничена довольно жёсткими условиями:

$$\left\langle \left( \frac{2\pi \mathfrak{D} L}{E_\nu L_{ij}} \right)^2 \right\rangle \ll 1, \quad \left\langle \left( \frac{\pi \mathbf{n}}{2\mathfrak{D} L_{ij}} \right)^2 \right\rangle \ll 1. \quad (67)$$

Здесь скобки  $\langle \rangle$  символизируют тот факт, что значения функций  $\mathfrak{D}$  и  $\mathbf{n}$  определяются областью фазового объёма процесса (37), дающей основной вклад в измеряемое число событий. Напомним, что условия (67), как и формула (66), были получены с использованием ряда предположений и приближений, справедливость которых в реальных экспериментах далеко не всегда очевидна. Из нашего анализа следует, что при обработке и интерпретации данных конкретных экспериментов, наряду с условиями (67), нужно учитывать периоды работы источника и детектора, их размеры и геометрию, явный вид функций распределения in-частиц в источнике и детекторе и другие технические детали.

## 5 Заключение

В работе предложена ковариантная теория волновых пакетов, в которой состояния полей строятся как линейные суперпозиции одночастичных фоковских состояний, переходящих в эти состояния в плосковолновом пределе. Средний 4-импульс волнового пакета и его эффективный пространственный объём являются точными интегралами движения, несмотря на расплывание пакета с течением времени. Средняя координата пакета следует классической траектории. В качестве простейшей модели, удовлетворяющей всем требованиям теории, изучены релятивистские гауссовы пакеты (РГП). Найдены условия, при которых можно пренебречь расплыванием таких пакетов и использовать их для описания асимптотически свободных in- out-состояний частиц в  $S$ -матричном формализме квантовой теории поля.

Развита техника расчета макроскопических фейнмановских диаграмм с обменом массивными нейтрино и с РГП в качестве внешних линий. Вычислена амплитуда процесса (37) с рождением двух разных заряженных лептонов  $\ell_\alpha$  и  $\ell_\beta$  в макроскопически разделенных вершинах диаграммы. Амплитуда представлена в виде суммы произведений матричных элементов подпроцессов рождения и поглощения нейтрино и фактора  $\psi_j^*/L$ , который можно интерпретировать как сферическую волну нейтрино массы  $m_j$  с амплитудой  $\psi_j^*$ , имеющей вид все того же РГП, «дисперсия» которого является релятивистски-инвариантной функцией энергии нейтрино  $E_\nu$  и внешних импульсов  $\mathbf{p}_\nu$ . В качестве общих множителей амплитуда содержит фактор подавления, обусловленный неполным перекрытием внешних пакетов, а также несингулярные факторы, ответственные за приближенное сохранение энергии-импульса в вершинах диаграммы.

Поскольку процесс типа (37) идёт с нарушением лептонных чисел, его экспериментальное обнаружение является указанием на неполноту Стандартной Модели, а детальное измерение его вероятности – источником информации о параметрах смешивания и разностях квадратов масс нейтрино. Получена лоренц-инвариантная формула для вероятности процесса (37), и проведено её статистическое усреднение, приводящее к экспериментально измеримой величине – дифференциальному числу событий в детекторе ( $dN_{\alpha\beta}$ ). С учётом ряда упрощающих предположений формула для  $dN_{\alpha\beta}$  может быть представлена в виде многомерного интеграла от произведения дифференциальных форм  $d\Phi_\nu$  и  $d\sigma_{\nu\mathcal{D}}$ , описывающих поток (энергетический спектр) безмассовых нейтрино и дифференциальное сечение их взаимодействия с детектором, а также фактора  $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ , служащего обобщением стандартного квантовомеханического выражения для вероятности флэйворного перехода  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ . Однако, квантовополевая функция  $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$  не обладает, вообще говоря, свойствами вероятности, поскольку содержит, помимо стандартного «осцилляционного» множителя, факторы декогерентности, зависящие как от  $E_\nu$  и  $\mathbf{p}_\nu$  – переменных интегрирования по фазовому объёму процесса (37), так и от параметров  $\sigma_\nu$  – неопределенностей импульсов внешних пакетов, включая пакеты лептонов  $\ell_{\alpha,\beta}$ .

В рамках простой модели для функций распределения in-пакетов в источнике и детекторе величина общего фактора декогерентности  $S_0$ , приводящего к подавлению средней скорости счета событий, определяется соотношением времени функционирования источника  $\tau_s$  и времени экспозиции детектора, а также пространственно-временной шириной волнового пакета нейтрино  $\tau_\nu \sim 1/\mathcal{D}$ , где  $\mathcal{D}$  – функция  $E_\nu$  и  $\mathbf{p}_\nu$ . Подавление мало, если  $\tau_s \gg \tau_d$  или  $\tau_s \sim \tau_d \gg \tau_\nu$ . Сильная зависимость  $S_0$  от параметров  $\tau_s$  и  $\tau_d$  предоставляет возможность измерения усреднённого значения функции  $\mathcal{D}$  в специальном ускорительном эксперименте, допускающем вариацию этих параметров (или одного из них). Такое измерение, пусть даже грубое, было бы очень полезно для планирования и обработки данных будущих прецизионных экспериментов на нейтринных фабриках.

Недиагональные факторы декогерентности  $S_{ij}$  ( $i \neq j$ ) имеют более сложное поведение, что иллюстрируют аналитические и численные оценки. Показано, в частности, что в асимптотическом режиме  $\tau_s \gtrsim \tau_d \gg \tau_\nu$  фактор  $S_{ij}$  перестаёт зависеть от  $\tau_s$  и  $\tau_d$  и может приводить к сильному подавлению «осцилляционных» вкладов в  $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ . Найдены условия, при которых эффекты декогерентности малы и, следовательно, применима стандартная квантовомеханическая формула для вероятности флэйворных переходов.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 07-02-00215-а. Работа одного из авторов (Д.Н.) частично поддержана грантом для молодых ученых и специалистов ОИЯИ. Мы благодарим Дмитрия Казакова, Славу Ли и Олега Теряева за полезные обсуждения.

## Литература

- [1] Б. Понтекорво, *ЖЭТФ* **33** (1957) 549 [Sov. Phys. JETP **6** (1957) 429]; Б. Понтекорво, *ЖЭТФ* **34** (1957) 247 [Sov. Phys. JETP **7** (1958) 172].
- [2] B. Kayser, Phys. Rev. D **24** (1981) 110.
- [3] C. Giunti, C.W. Kim, U.W. Lee, Phys. Rev. D **44** (1991) 3635.
- [4] C. Giunti, C.W. Kim, J.A. Lee, U.W. Lee, Phys. Rev. D **48** (1993) 4310, arXiv:hep-ph/9305276.
- [5] J. Rich, Phys. Rev. D **48** (1993) 4318.
- [6] C. Giunti, C.W. Kim, *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*, Oxford University Press Inc., New York, 2007.
- [7] E.Kh. Akhmedov, A.Yu. Smirnov, *ЯФ* **72** (2009) 1417 [Phys. Atom. Nucl. **72** (2009) 1363], arXiv:0905.1903 [hep-ph].
- [8] Z. Maki, M. Nakagawa, S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **28** (1962) 870.
- [9] W. Grimus, P. Stockinger, Phys. Rev. D **54** (1996) 3414, arXiv:hep-ph/9603430.
- [10] W. Grimus, S. Mohanty, P. Stockinger, arXiv:hep-ph/9909341; arXiv:hep-ph/9904340; Phys. Rev. D **61** (2000) 033001, arXiv:hep-ph/9904285; P. Stockinger, Pramana **54** (2000) 203.
- [11] C.Y. Cardall, Phys. Rev. D **61** (2000) 073006, arXiv:hep-ph/9909332.
- [12] M. Beuthe, Phys. Rept. **375** (2003) 105, arXiv:hep-ph/0109119.
- [13] M. Beuthe, Phys. Rev. D **66** (2002) 013003, arXiv:hep-ph/0202068.
- [14] R.S. Raghavan, arXiv:hep-ph/0511191; arXiv:hep-ph/0601079.
- [15] E.K. Akhmedov, J. Kopp, M. Lindner, JHEP **05** (2008) 005, arXiv:0802.2513 [hep-ph]; J. Phys. G **36** (2009) 078001, arXiv:0803.1424 [hep-ph].
- [16] S.M. Bilenky, F. von Feilitzsch, W. Potzel, J. Phys. G **35** (2008) 095003, arXiv:0803.0527 [hep-ph]; J. Phys. G **36** (2009) 078002, arXiv:0804.3409 [hep-ph].
- [17] J. Kopp, JHEP **06** (2009) 049, arXiv:0904.4346 [hep-ph].
- [18] W. Potzel, Acta Phys. Polon. B **40** (2009) 3033, arXiv:0912.2221 [hep-ph].