

Universidade de São Paulo  
Instituto de Física

Constantes de Acoplamento a partir  
das Regras de Soma da QCD

Rômulo Rodrigues da Silva

*Tese apresentada ao Instituto de  
Física da Universidade de São  
Paulo para a obtenção do título  
de Doutor em Ciências.*

Orientadora: Profa. Dra. Marina Nielsen

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Marina Nielsen (IF-USP)

Prof. Dr. Airton Deppman (IF-USP)

Profa. Dra. Frederique Marie B. Sylvie Grassi (IF-USP)

Profa. Dra. Mirian Enriqueta Bracco (UERJ)

Prof. Dr. Adriano Antonio Natale (IFT/UNESP)

São Paulo  
— Junho 2005 —

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do  
Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Silva, Rômulo Rodrigues da

Constantes de Acoplamento a partir  
das Regras de Soma da QCD. São Paulo -2005.

(Doutoramento) - Universidade de São Paulo.  
Orientadora: Profa. Dra. Marina Nielsen

Instituto de Física - Departamento de Física Experimental

Área de Concentração: Física

Unitermos:

1. Física de partículas e campos;
2. Física moderna;
3. Física teórica;
4. Física nuclear;
5. Física de partículas;
6. partículas;

USP/IF/SBI-046/2005

À Glenda e Guilherme.

# Agradecimentos

A Profa. Marina Nielsen por sua orientação e grande dedicação ao nosso projeto de doutorado.

Ao Prof. Fernando Silveira Navarra por formar juntamente com a Profa. Marina Nielsen um grupo de pesquisa, com alta produção científica.

Ao colega Ricardo Matheus por todos trabalhos que realizamos em conjunto.

Ao colega Leandro Batista por ter nos ajudado nos primeiros cálculos de regra de soma.

Ao Dr. Markus Eidemüller por todo trabalho realizado em conjunto no vértice  $\Theta nK$  e por ter cedido a sua Tese de doutorado.

A todos que fazem parte do Grupo de Hádrons e Física Teórica (GRHAFITE), pelo grande astral que é trabalhar no nosso corredor.

Aos meus pais, Olinto e Cassinha, pelo apoio constante.

Aos amigos Evaldo, Ivan, Fábio e Marcos pela força.

Agradeço a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo suporte financeiro.

## Resumo

Usamos as regras de soma da QCD para obter a massa dos pentaquarks  $\Theta^+(1540)$  e  $\Xi^{--}(1862)$ , a largura de decaimento da  $\Theta^+$  e a constante de acoplamento e fator de forma presentes no vértice  $J/\psi DD^*$ .

No estudo dos pentaquarks, usamos dois tipos de campos interpolantes contendo dois diquarks altamente correlacionados. Obtemos as massas consistentes com os dados experimentais, porém esta regra de soma têm uma grande contribuição do contínuo e a OPE não é muito boa. Obtivemos uma largura de decaimento compatível com os valores experimentais desde que sejam subtraídos diagramas que representam a  $\Theta^+$  como um estado ligado  $K - n$ .

No estudo do vértice  $J/\psi DD^*$  calculamos o fator de forma e a constante de acoplamento, considerando três casos:  $D$  *off-shell*,  $D^*$  *off-shell* e  $J/\psi$  *off-shell*. A constante de acoplamento é a mesma nesses três casos, porém o fator de forma depende da escolha da partícula *off-shell*, onde para a  $J/\psi$  *off-shell* o fator de forma é bem mais duro que o fator de forma obtido para os outros casos. Também comparamos os nossos resultados com outros métodos: o modelo de quark méson constituintes e o modelo de quarks relativísticos constituintes.

## Abstract

We use the QCD sum rules to obtain the masses of the pentaquarks  $\Theta^+(1540)$  and  $\Xi^{--}(1862)$ ,  $\Theta^+$  decay width and the coupling constant and the form factor for the  $J/\psi DD^*$  vertex.

In the study of the pentaquarks, we use two kinds of interpolating fields, containing two highly correlated diquarks. We get the masses in a good agreement with the experimental value, but this sum rule has a large continuum contribution and the OPE convergence is not so good. We get the decay width compatible with the experimental value, since we subtract the diagrams that represent  $\Theta^+$  as a  $K - n$  bound state.

In the study of  $J/\psi DD^*$  vertex, we calculate the form factor and the coupling constant considering three cases:  $D$  *off-shell*,  $D^*$  *off-shell* and  $J/\psi$  *off-shell*. The coupling constant is the same in those three cases, however the form factor depends on the choice of the particle *off-shell*, where for the  $J/\psi$  *off-shell* the form factor is much harder than the form factor obtained for the other cases. We also compare our results with other methods: the constituent quark meson model and the relativistic constituent quark model.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Método das Regras de Soma da QCD</b>	<b>6</b>
2.1	Função de correlação de dois pontos . . . . .	8
2.1.1	Lado Fenomenológico . . . . .	9
2.2	Função de correlação de três pontos . . . . .	10
2.2.1	Lado Fenomenológico . . . . .	11
2.3	Transformada de Borel . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Regra de Soma para <math>\Theta(1540)</math> e <math>\Xi(1862)</math></b>	<b>15</b>
3.1	O campo interpolante dos pentaquarks . . . . .	15
3.1.1	Cálculo da paridade para as correntes . . . . .	18
3.2	Lado Fenomenológico . . . . .	19
3.3	Lado da QCD . . . . .	21
3.3.1	Corrente da Eq.(3.16) . . . . .	21
3.3.2	Corrente da Eq.(3.15) . . . . .	24
3.4	Resultados . . . . .	25
3.4.1	Regra de soma para a $\Theta^+$ com $I=0$ . . . . .	26
3.4.2	Regra de soma para a $\Theta^+$ com $I=1$ . . . . .	29
3.4.3	Regra de soma para a $\Xi^{--}$ da Eq.(3.15) . . . . .	31
3.4.4	Regra de soma para a $\Xi^{--}$ da Eq.(3.16) . . . . .	32

<b>4</b>	<b>O vértice <math>\Theta nK</math></b>	<b>35</b>
4.1	Lado fenomenológico . . . . .	35
4.2	Lado da QCD . . . . .	37
4.3	Regra de soma na estrutura $\sigma^{\mu\nu}\gamma_5 q_\mu p_\nu$ . . . . .	39
4.3.1	Modelos para o acoplamento pólo contínuo . . . . .	40
4.3.2	Regra de soma no pólo do kaon . . . . .	41
4.3.3	Regra de soma via dupla transformada de Borel . . . . .	42
4.3.4	Regra de soma via três momentos iguais . . . . .	42
4.4	Resultados . . . . .	43
4.4.1	Regra de soma no pólo do kaon . . . . .	45
4.4.2	Regra de soma via dupla transformada de Borel . . . . .	46
4.4.3	Largura de decaimento . . . . .	47
<b>5</b>	<b>O vértice <math>J/\psi DD^*</math></b>	<b>49</b>
5.1	Lado da Fenomenologia . . . . .	50
5.2	Lado da QCD . . . . .	52
5.2.1	Tratamento genérico para $D$ e $D^*$ off-shell . . . . .	53
5.2.2	$D$ off-shell . . . . .	55
5.2.3	$D^*$ off-shell . . . . .	56
5.2.4	$J/\psi$ off-shell . . . . .	56
5.3	Resultados . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>63</b>
<b>A</b>	<b>Funcional Fenomenológico de dois pontos</b>	<b>65</b>
<b>B</b>	<b>Funcional Fenomenológico de três pontos</b>	<b>67</b>
<b>C</b>	<b>Cálculo do Isospin para a <math>\Theta</math> e <math>\Xi</math></b>	<b>73</b>
C.1	Isospin para a $\Theta$ da Eq.(3.16) . . . . .	74

C.2	Isospin para a $\Xi$ . . . . .	75
<b>D</b>	<b>propagador de quarks “cheio”</b>	<b>77</b>
D.1	Parcela perturbativa . . . . .	77
D.2	Parcela não perturbativa . . . . .	81
D.3	Parcela não fatorável . . . . .	83
D.4	Propagador de quarks leves no espaço das configurações . . . . .	85
<b>E</b>	<b>Transformadas de Fourier para quarks leves</b>	<b>87</b>
E.1	$\int d^4x \frac{e^{iqx}}{(x^2-i\epsilon)^n}$ . . . . .	87
E.2	$\int d^4q \frac{e^{-iqx}}{(q^2+i\epsilon)^n}$ . . . . .	89
E.3	$\int d^4x \frac{e^{iqx}}{(x^2-i\epsilon)^n} \ln(-x^2)$ . . . . .	89
<b>F</b>	<b>Relação de dispersão</b>	<b>92</b>
F.1	Transformada de Borel para $\frac{\ln(Q^2)}{Q^{2n}}$ . . . . .	94
<b>G</b>	<b>Fórmulas úteis para as QCDSR</b>	<b>95</b>
G.1	Algebra das matrizes de Gell-Mann . . . . .	95
G.2	Algebra das matrizes de Dirac . . . . .	95
<b>H</b>	<b>Regras de Cutkosky</b>	<b>97</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Em 1997, Diakonov, Petrov e Polyakov, usando um modelo de sólitons quirais [1], previram a existência de um bárion com spin  $1/2$ , isospin 0 carga  $+1$  e estranheza  $+1$ . O fato da estranheza desse bárion ser  $+1$ , garante que seu conteúdo mínimo de quarks seja  $udud\bar{s}$ , ou seja, um pentaquark. A previsão para a massa desse bárion foi de  $m = 1530$  MeV e a sua largura foi de 15MeV.

Até 2003, ainda não tinha sido observado nenhuma partícula que fosse compatível com essa previsão teórica. As evidências para essa partícula só surgiram recentemente com os experimentos [2, 3], onde foi observado o pentaquark  $\Theta^+(1540)$ , com massa e largura de decaimento compatíveis com as previsões de Diakonov *et al.*. O fato dessa partícula não ter sido observada anteriormente foi explicada pela sua largura muito estreita, que deixou essa partícula invisível aos antigos dados [4]. Outros pentaquarks também foram posteriormente observados:  $\Xi^{--}(1862)$  [5] e a  $\Theta_C^0(3099)$  [6], porém com uma evidência bem mais fraca que a  $\Theta^+$ .

O fato de vários experimentos recentes não terem observado esses pentaquarks [7], deixa claro que a existência dos pentaquarks ainda não está completamente consolidada. Dzierba *et. al.* [8] usa esses resultados, sobre a não observação dos pentaquarks, para defender a inexistência dessas partículas. Por outro lado, Kabana [9] apresenta várias explicações para esses resultados nulos para a observação dos pentaquarks.

Uma propriedade interessante desses pentaquarks é a sua largura de decaimento muito pequena, que sugere que os pentaquarks possuem uma estrutura interna muito

estável. Atualmente existe uma grande quantidade de estimativas para a largura de decaimento da  $\Theta^+$ , recentemente catalogadas no Particle Data Group [10].

Um modelo interessante para a estrutura dos pentaquarks é o estado diquark-diquark-antiquark proposto por Jaffe e Wilczek (JW) [11]. Em JW, cada par de diquark possui spin zero e o estado resultante dessa combinação é um antidecuplete  $\overline{10}_f$  e um octeto  $\mathbf{8}_f$  fig. 1.1, em SU(3) de sabor, que consegue acomodar os pentaquarks  $\Theta^+(1540)$  e  $\Xi^{--}(1862)$ , além da ressonância Roper N(1440), que é o primeiro estado excitado do nucleon.

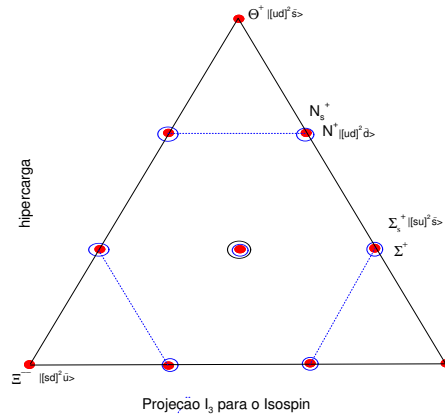


Figura 1.1: Os pentaquarks representantes do modelo de Jaffe e Wilczek.

O valor da massa do  $\Xi^{--}(1862)$  nesse modelo de quarks é aproximadamente 100 MeV menor do que o observado experimentalmente. A extensão desse modelo para incluir a  $\Theta_C^0(3099)$  fornece um desvio maior de 400 MeV [11].

Uma abordagem para o estudo dos pentaquarks consiste em usar métodos não-perturbativos da cromodinâmica quântica (QCD), onde destacamos o uso das Regras de Soma da QCD (QCDSR). Vários grupos têm usado as QCDSR para o estudo da  $\Theta^+(1540)$  [12, 13, 14, 15, 16, 17],  $\Xi^{--}(1862)$  [18] e  $\Theta_C^0(3099)$  [19]. Nosso grupo desenvolveu trabalhos para dois desses pentaquarks, a  $\Theta^+(1540)$  [17] e o  $\Xi^{--}(1862)$  [18], usando dois tipos de corrente para os pentaquarks, motivadas na proposta de JW. Todos esses trabalhos em regras de soma da QCD se limitaram em obter a massa dos pentaquarks. Entretanto, no trabalho da Ref.[13], foi feita a primeira previsão para a

paridade da  $\Theta^+$  em QCDSR.

O entendimento da largura de decaimento tão pequena da  $\Theta^+(1540)$  tem se mostrado um grande desafio teórico. Recentemente, Jaffe [20] mostrou que a largura obtida pelo método de sólitons quirais é o dobro do valor previsto por Diakonov *et al.* [1], que nos leva a sérias dúvidas sobre a confiabilidade deste método para a obtenção da largura de decaimento.

Usando as QCDSR, Oganesian [15] sugeriu uma explicação qualitativa para a largura da  $\Theta^+$ . Ele partiu de observações simples a respeito das simetrias das correntes que descrevem os hádrons no decaimento, e as propriedades do diagrama básico do decaimento no lado teórico da regra de soma. As análises apresentadas em [15] são apenas qualitativas, mas chega-se à conclusão de que a largura de decaimento seria proporcional a  $\alpha_s^2 \langle \bar{q}q \rangle^2$ , devido a necessidade de troca de gluons para se obter estados finais singletos de cor, a partir de um pentaquark que tem uma estrutura de cor não trivial.

Num trabalho recente, Diakonov [21] apresenta uma outra interpretação para a largura estreita da  $\Theta^+$ . Nesse trabalho se considera que o nucleon produzido no decaimento está num estado de cinco quarks. Assim a largura de decaimento estreita da  $\Theta^+$  é explicada qualitativamente pela baixa superposição entre o nucleon e a sua componente de cinco quarks.

A largura de decaimento da  $\Theta^+$  foi recentemente estudada pelo nosso grupo [22], usando as QCDSR. Nossos estudos mostram que a largura de decaimento obtida só seria compatível com as observações experimentais se a paridade da  $\Theta^+$  fosse positiva. Também exploramos a interpretação de Kondo *et al.* [23] para a estrutura interna dos pentaquarks, através da seleção de diagramas para a nossa função de vértice.

Um outro problema atual na física de hádrons consiste na busca da evidência da formação do plasma de quarks e gluons (QGP). A QCD prevê [24] que a densidades de energia altas, a matéria hadrônica sofre uma transição de fase para um estado

de quarks e gluons desconfiados, permitindo que uma nova física, semelhante aos instantes iniciais após ao *Big Bang*, possa ser estudada.

Matsui e Satz [25] mostraram que no QGP, além do desconfinamento ocorre também a blindagem de cor, em virtude da qual, o potencial entre o quark e o anti-quark se torna de alcance tão curto que a formação de um estado ligado se torna bastante difícil. Assim, uma das assinaturas da formação do plasma é a supressão na formação da partícula  $J/\psi$ .

A supressão da  $J/\psi$  já foi observada experimentalmente [26] em colisões de íons pesados relativísticos  $p + A$ ,  $O + U$ ,  $S + U$  e  $Pb + Pb$ . Para as colisões  $p + A$ , a supressão observada da  $J/\psi$  e  $\psi'$  pode ser explicada pela absorção de um precursor comum, provavelmente um estado não ressonante octeto de cor nos quarks  $((c\bar{c})_8g)$ , pelos nucleons [27]. Esta explicação pode ser estendida para colisões do tipo  $O + U$  e  $S + U$  para a  $J/\psi$ , mas não para a  $\psi'$ , onde uma supressão adicional é observada. Nas colisões  $Pb + Pb$  também se observou uma supressão adicional para a  $J/\psi$ , que poderia ser interpretada como um sinal da formação do QGP. Entretanto, existem outros mecanismos, além da formação do QGP, que poderiam explicar a supressão observada.

Portanto, enquanto existem sugestões de que a supressão anômala evidencia a formação do QGP, outros mecanismos mais convencionais, baseados na reação da  $J/\psi$  com os fragmentos da colisão, ainda devem ser considerados, antes de termos uma conclusão acerca do QGP.

O principal ingrediente nos cálculos baseados na dissociação hadrônica da  $J/\psi$  é a seção de choque de absorção da  $J/\psi$  pelos hádrons. Estimativas usando QCD perturbativa dão valores muito pequenos para explicar a supressão observada. Por exemplo, para explicar a supressão da  $J/\psi$  observada nas colisões  $p + A$  precisa-se de uma seção de choque de absorção de  $\approx 7.5\text{mb}$  [27, 28], enquanto que a QCD perturbativa fornece  $\approx 2 - 3\text{mb}$ . Essa seção de choque tem sido investigada usando vários métodos, em

particular, pelas teorias hadrônicas baseadas em lagrangianas efetivas [29, 30, 31].

O problema desses modelos baseados em lagrangianas efetivas é que eles dependem de constantes de acoplamento e fatores de forma que não são fenomenologicamente conhecidos e raramente podem ser obtidas de dados experimentais. Os vários cálculos feitos com lagrangianas efetivas diferem devido aos métodos usados para estimar essas constantes, e principalmente pela escolha dos fatores de forma nos vértices, que reduzem drasticamente a seção de choque de dissociação [29].

Nos trabalhos mais antigos, em geral se assume um fator de forma de monopólo nos vértices hadrônicos, que introduz um outro parâmetro desconhecido, o *cutoff*. Além disso, usa-se as relações de SU(4) e o método da dominância do méson vetorial, que são aproximações questionáveis, para estimar as constantes de acoplamento. Por exemplo, as relações de SU(4) colocam num mesmo multiplete o quark pesado  $c$  e outros quarks leves. Como os resultados obtidos para as seções de choque são muito sensíveis com a escolha das constantes de acoplamento e dos fatores de forma, isso nos mostra a importância de se ter um cálculo confiável para obter os fatores de forma e constantes de acoplamento.

As QCDSR vem sendo utilizadas no cálculo das constantes de acoplamento e fatores de forma nesses vértices hadrônicos [32, 33, 34, 35, 36, 37]. Nós mostramos aqui o cálculo do fator de forma e constante de acoplamento no vértice  $J/\psi DD^*$ .

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No capítulo 2, apresentamos o método das QCDSR e o formalismo para o cálculo das funções de correlação de dois e três pontos. No capítulo 3, aplicamos as QCDSR para calcular a massa e a paridade dos pentaquarks  $\Theta^+$  e  $\Xi^{--}$ . No capítulo 4, apresentamos o cálculo para a largura de decaimento da  $\Theta^+$  e a teoria de conexão de cores. No capítulo 5, mostramos o estudo do vértice  $J/\psi DD^*$ , onde calculamos o acoplamento e o seu fator de forma, além de comparar nossos resultados com outros trabalhos recentes. Concluimos, então, com um resumo dos principais resultados obtidos e as perspectivas futuras deste trabalho.

## Capítulo 2

# Método das Regras de Soma da QCD

O método das regras de soma da QCD tem sido usado com bastante sucesso na descrição das propriedades hadrônicas (massas, constantes de acoplamento, larguras de decaimentos, fatores de forma) a partir de parâmetros da QCD. O método foi originalmente introduzido por Shifman, Vainshtein e Zakharov em 1979 [38] para descrever propriedades mesônicas. A extensão para bárions foi feita por Ioffe [39] (ver também [40]). Existem várias revisões detalhadas sobre o assunto [41, 42, 43, 44].

O método das regras de soma da QCD se baseia no cálculo de funções de correlação (também chamadas de correlatores) de operadores locais compostos. Cada operador composto é construído usando campos de quarks e/ou glúons, de tal forma a possuírem os mesmos números quânticos do hádron que queremos estudar. Em geral esses operadores são chamados de campos interpolantes. A suposição fundamental do método das QCDSR é o princípio da dualidade, que assume que um hádron pode ser equivalentemente descrito em termos dos graus de liberdade hadrônicos e em termos dos graus de liberdade da QCD. Assim, o procedimento básico do método das QCDSR consiste de três pontos: 1) calcula-se a função de correlação em termos dos graus de liberdade da QCD, empregando-se a expansão no produto de operadores (OPE) de Wilson [45], 2) calcula-se a mesma função de correlação em termos de estados intermediários físicos empregando-se relações de dispersão [46] que incorporam um ansatz simples para a

densidade espectral e 3) compara-se, através de um procedimento adequado, essas duas descrições para se extrair informações sobre as propriedades hadrônicas em termos das quantidades fundamentais do vácuo da QCD.

A essência da OPE é a separação de todas flutuações de campos em escalas: pequenas e grandes distâncias ou, no espaço dos momentos, grandes e pequenos momentos (tipo espaço). Na QCD essa separação quase sempre corresponde à separação entre a física perturbativa e a não-perturbativa. Assim, na OPE, os coeficientes da expansão são calculados a partir da QCD usando-se a teoria de perturbação, e portanto possuem informação sobre a física de pequenas distâncias (ou grandes momentos) enquanto que a física não perturbativa é parametrizada através dos elementos de matriz de uma série de operadores locais: os condensados. Em princípio, os condensados são calculáveis diretamente da QCD (usando-se, por exemplo, simulações na rede), mas na prática eles são usualmente determinados fenomenologicamente a partir de uma série de regras de soma, e aplicados em outras. Conseqüentemente, o sucesso do método depende crucialmente do fato de ser possível truncar essa série infinita num número finito e pequeno de termos.

Apesar dos condensados conterem informações não perturbativas, a OPE é basicamente uma expansão em curtas distâncias, e numa ordem finita só pode descrever precisamente a função de correlação se os momentos (tipo espaço) forem suficientemente grandes. Por outro lado, nós queremos obter informações sobre as excitações de mais baixa energia da densidade espectral, que sabemos dominar a função de correlação somente para momentos pequenos. Como será então possível comparar essas duas descrições ? O segredo está na aplicação da transformada de Borel a essas duas representações [38]. As QCDSR são o resultado da identificação da transformada de Borel da função de correlação calculada na OPE com a transformada de Borel da função de correlação fenomenológica. A transformada de Borel melhora a convergência da OPE suprimindo a contribuição dos condensados de dimensões mais altas. No lado

fenomenológico a transformada de Borel muda a supressão dos estados excitados de uma lei de potência para uma lei exponencial, além de eliminar os polinômios de subtração presentes na representação espectral do correlator.

É importante enfatizar que o método das QCDSR é aproximado. Ele requer uma certa quantidade de análise e não pode ser formalizado da mesma forma que, por exemplo, a solução da equação de Shrödinger. Por outro lado, ele não é um modelo. Qualquer modelo requer necessariamente suposições ad hoc, e a precisão das previsões correspondentes não pode ser controlada de dentro do modelo. No método das QCDSR, uma vez que os valores dos condensados forem estabelecidos, não existe mais nenhuma liberdade; eles próprios nos contam se este ou aquele problema em particular é solúvel. A virtude do método é que ele é analítico, simples e aberto para análises qualitativas onde se pode facilmente ver o que se relaciona com o que.

## 2.1 Função de correlação de dois pontos

A função de correlação de dois pontos é usada, nas regra de soma, para a obtenção da massa e da constante de acoplamento entre o campo interpolante e o hádron considerado. Para mésons vetoriais descarregados, podemos relacionar diretamente essa constante de acoplamento com a largura de decaimento desses mésons no par elétron-pósitron.

A função de correlação de dois pontos é definida por:

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ j(x) j^\dagger(0) \} | 0 \rangle, \quad (2.1)$$

onde  $|0\rangle$  é o vácuo da QCD,  $T$  é o operador de ordenação temporal e  $j(x)$  é a corrente (ou campo interpolante) do hádron.

O campo interpolante é construído a partir dos operadores de campos dos quarks, combinados de forma a obtermos os mesmos números quânticos da partícula em questão. No caso dos mésons, o  $D^*$  por exemplo, o campo interpolante tem a forma:

$$j_\mu(x) = \bar{q}_a(x) \gamma_\mu c_a(x), \quad (2.2)$$

onde  $q(x)$  e  $c(x)$  são operadores de campo de um quark leve ( $u$  ou  $d$ ) e do quark charme respectivamente, com o índice de cor  $a$ . A matriz  $\gamma_\mu$  representa a matriz de Dirac, que dá o carácter vetorial à corrente na Eq. (2.2). Para um méson pseudoescalar, o méson  $D$  por exemplo, a corrente é dada por:

$$j_5(x) = i\bar{q}_a(x)\gamma_5 c_a(x) . \quad (2.3)$$

### 2.1.1 Lado Fenomenológico

No lado fenomenológico da regra de soma, a função de correlação pode ser avaliada pela inserção de uma série completa de estados físicos hadrônicos intermediários, que se acoplam com a corrente considerada, cujo espectro está representado na Fig.(2.1).

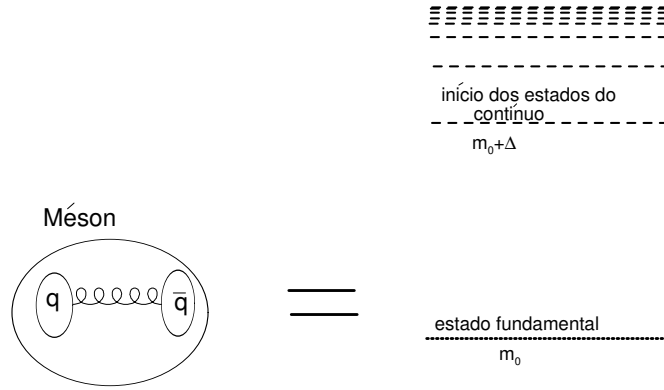


Figura 2.1: Estados ressonantes de um sistema  $\bar{q}q$ .

As propriedades analíticas da função de correlação podem ser obtidas através de uma representação espectral,

$$\Pi(q) = \int_0^\infty ds \frac{\rho(s, q)}{s - q^2 - i\epsilon} + \dots \quad (2.4)$$

onde  $\rho(s, q)$  é a densidade espectral, que contém as propriedades espectrais dos hádrons e as reticências representam os termos de subtração (polinômios em  $q^2$  com coeficientes desconhecidos) que asseguram que a contribuição do contorno de integração no infinito se anula.

Nas QCDSR, o modelo adotado para a densidade espectral é

$$\rho(s, q) = \rho_P(s, q)\delta(s - m_0^2) + \rho^C(s, q)\Theta(s - m^{*2}), \quad (2.5)$$

onde  $\rho_P(s, q) = \langle 0 | j | q \rangle \langle q | j^\dagger | 0 \rangle$  (ver apêndice A).

A informação sobre  $\rho^C(s, q)$  virá do lado teórico da QCD via uso da **dualidade quark-hádron**:  $\rho^C(s, q) = \rho^{QCD}(s, q)$ .

Na Ref.[10] podemos observar que o espectro medido para a maioria dos hádrons obedece aproximadamente ao esboço da Fig.(2.1), mas com um pequeno número de estados excitados medidos. A  $J/\psi$  é uma das partículas com o maior número de estados excitados medidos, e comparando a diferença entre as massas da  $J/\psi$  e da  $\psi'$  obtemos  $\Delta = 589\text{MeV}$ . Para as partículas  $D^0$  e  $D^*$  ainda não foram medidos seus estados ressonantes.

Nesta situação de completa ignorância sobre os estados excitados, uma postura utilizada nas QCDSR [47] consiste em ajustar o valor do parâmetro  $\Delta$ , representado na Fig.(2.1), de tal forma a reproduzir a massa experimental dos hádrons. Na Ref.[43] usa-se teoricamente um valor comum para todos os hádrons que é  $\Delta \sim 500\text{MeV}$ .

## 2.2 Função de correlação de três pontos

A função de correlação de três pontos nos permite estudar vértices, como o mostrado na Fig. 2.2, que nos fornecerá informações sobre as constantes de acoplamento entre as partículas, e sobre seus fatores de forma.

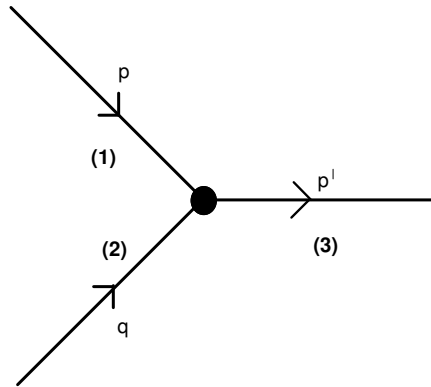


Figura 2.2: Vértice de três partículas.

A função de correlação de três pontos é definida por:

$$\Gamma(p, p') = \int d^4x d^4y e^{-i(p'-p)y} e^{ip'x} \langle 0 | T \{ j_3(x) j_2^\dagger(y) j_1^\dagger(0) \} | 0 \rangle. \quad (2.6)$$

### 2.2.1 Lado Fenomenológico

No caso da função de correlação de três pontos, o lado fenomenológico da regra de soma também pode ser avaliada pela inserção de séries completas dos estados físicos hadrônicos intermediários. Assim, saturando a função de três pontos na Eq.(2.6) com os estados que representam as partículas 1, 2 e 3 na Fig. 2.2 obtemos (ver apêndice B):

$$\Gamma(p, p') = \frac{\langle 0 | j_3 | 3 \rangle V(p, p') \langle 2 | j_2^\dagger | 0 \rangle \langle 1 | j_1^\dagger | 0 \rangle}{(p^2 - m_1^2 + i\epsilon)(q^2 - m_2^2 + i\epsilon)(p'^2 - m_3^2 + i\epsilon)}. \quad (2.7)$$

Além da contribuição dos pólos, dada na Eq.(2.7), devemos incluir também a contribuição dos estados excitados, e isso pode ser feito expressando a função de três pontos através de uma relação de dispersão dupla. Ioffe e Smilga [48] propuseram o seguinte modelo para a parte invariante do lado fenomenológico da função de vértice Eq.(2.6):

$$\Gamma(p^2, p'^2) = \int \frac{\rho(s, u, q^2) ds du}{(s - p^2)(u - p'^2)} + \dots, \quad (2.8)$$

onde,

$$\rho(s, u, q^2) = \rho^A(s, u, q^2) + \rho^B(s, u, q^2) + \rho^C(s, u, q^2), \quad (2.9)$$

com

$$\rho^A(s, u, q^2) = a(q^2) \delta(s - m_1^2) \delta(u - m_3^2), \quad (2.10)$$

que dá a contribuição dos pólos, fornecida na Eq.(2.7),

$$\rho^B(s, s', p^2) = b_1(u, q^2) \delta(s - m_1^2) \Theta(u - u_0) + b_2(s, q^2) \delta(u - m_3^2) \Theta(s - s_0), \quad (2.11)$$

que fornece a contribuição de transições envolvendo um pólo e estados excitados, onde  $u_0$  e  $s_0$  fornecem os limiares do contínuo, e

$$\rho^C(s, u, q^2) = C(s, u, q^2) \Theta(s - s_0) \Theta(u - u_0), \quad (2.12)$$

que dá a contribuição dos estados no contínuo. Na Eq.(2.8), as reticências representam novamente os termos de subtração, que asseguram que a contribuição do contorno de integração no infinito se anula.

Comparando as Eqs.(2.7), (2.8) e (2.10) podemos identificar  $a(q^2)$  como

$$a(q^2) = \frac{\langle 0|j_3|3\rangle V(q^2)\langle 2|j_2^\dagger|0\rangle\langle 1|j_1^\dagger|0\rangle}{(q^2 - m_2^2)}. \quad (2.13)$$

Um problema deste modelo, para a inclusão da contribuição dos estados excitados na regra de soma de três pontos, está relacionado com a região de integração na Eq.(2.8). Ioffe e Smilga [49] consideraram a regra de soma considerando apenas as regiões de integração I e II na Fig. 2.3. Nesse modelo, a região I, que é a região onde os seus lados são os limiares do contínuo, representa a contribuição dos estados fundamentais, Eq.(2.10). A região II, representaria a contribuição dos estados no contínuo, Eq.(2.12), que podemos aproximar pela expressão obtida no lado da QCD, via uso da dualidade quark-hádron. As regiões III não são muito bem entendidas e, segundo Ioffe e Smilga, a contribuição dessas regiões seria pequena. Eles estudaram o caso onde uma pequena parte da região III é considerada, domínio triangular Fig. 2.3, e observaram que o efeito dessa mudança não foi significativo. Na Ref.[50] foi analisado efeitos importantes da região III.

Num outro trabalho [48], Ioffe e Smilga consideram o efeito da região III, através da contribuição das transições pólo contínuo Eq.(2.11).

Em todos nossos trabalhos usamos o modelo de Ioffe: consideramos a contribuição das transições pólo-contínuo, e a região retangular II para a contribuição dos estados no contínuo.

Seguindo a prescrição descrita acima, e transferindo a contribuição dos estados no contínuo para o lado direito da regra de soma, obtemos:

$$\Gamma_{PP}(p^2, p'^2) + \Gamma_{PC1}(p^2, p'^2) + \Gamma_{PC2}(p^2, p'^2) = \int_0^{s_0} \int_0^{u_0} ds du \frac{\rho^{QCD}(s, u, q^2)}{(s - p^2)(u - p'^2)}, \quad (2.14)$$

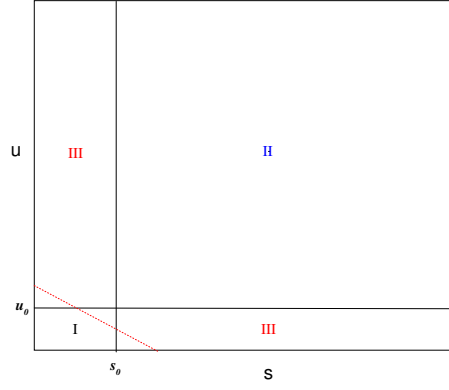


Figura 2.3: Região de integração s,u.

onde

$$\Gamma_{PP}(p, p') = \frac{\langle 0 | j_3 | p' \rangle V(p, p') \langle q | j_2^\dagger | 0 \rangle \langle p | j_1^\dagger | 0 \rangle}{(p^2 - m_1^2 + i\epsilon)(q^2 - m_2^2 + i\epsilon)(p'^2 - m_3^2 + i\epsilon)}, \quad (2.15)$$

$$\Gamma_{PC1}(p^2, p'^2) = \frac{1}{m_1^2 - p^2} \int_{u_0}^{\infty} du \frac{b_1(u, q^2)}{u - p'^2}, \quad (2.16)$$

$$\Gamma_{PC2}(p^2, p'^2) = \frac{1}{m_3^2 - p'^2} \int_{s_0}^{\infty} ds \frac{b_2(s, q^2)}{s - p^2}. \quad (2.17)$$

## 2.3 Transformada de Borel

Com o objetivo de suprimir a contribuição dos estados excitados no lado fenomenológico e reduzir a contribuição dos operadores de dimensões mais altas na OPE, utilizamos a transformada de Borel na regra de soma. A transformada de Borel é definida por:

$$\frac{(-1)^n (Q^2)^{n+1}}{n!} \left( \frac{d}{dQ^2} \right)^n f(Q^2) = \tilde{f}(M^2), \quad (2.18)$$

onde  $Q^2 = -q^2$ , e  $M^2$ , finito, é definido por,

$$M^2 = \frac{Q^2}{n} \Big|_{n \rightarrow \infty, Q^2 \rightarrow \infty}.$$

Definindo a operação transformada de Borel por:  $B[f(Q^2)] = \tilde{f}(M^2)$ , podemos mostrar facilmente que,

$$B \left[ \frac{1}{Q^2 + m^2} \right] = e^{-\frac{m^2}{M^2}}, \quad (2.19)$$

$$B[\ln(Q^2)] = -M^2, \quad (2.20)$$

$$B\left[\frac{1}{Q^2}\right] = 1. \quad (2.21)$$

Transformadas de Borel de funções do tipo  $1/(Q^2 + m^2)^k$ , podem ser obtidas pela aplicação o operador  $\frac{\partial}{\partial m^2}$  na Eq.(2.19). Pela definição na Eq.(2.18), vemos claramente que a transformada de Borel de qualquer polinômio é zero. É esse fato que nos permite não nos preocuparmos com os termos de subtração nas Eqs. (2.4) e (2.8).

O ideal, no formalismo das QCDSR, seria encontrar uma região de  $M^2$  em que ocorresse tanto a supressão dos operadores de ordem mais alta, quanto uma melhor descrição do estado fundamental. Isso resultaria numa boa superposição entre os lados fenomenológico e da QCD. De uma forma ainda mais ideal, o resultado deveria ser independente de  $M^2$ . Na verdade, estamos a procura de um resultado, o mais independente possível de  $M^2$ , que forneça uma comparação razoável entre os dois lados das regras de soma.

## Capítulo 3

# Regra de Soma para $\Theta(1540)$ e $\Xi(1862)$

### 3.1 O campo interpolante dos pentaquarks

Ao contrário dos mésons <sup>1</sup>, o campo interpolante que descreve um bárion não é único e, no caso dos pentaquarks, as possibilidades são ainda maiores do que para estados de três quarks. Até o presente momento foram usadas várias propostas de campos interpolantes nas QCDSR [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]. A primeira corrente usada foi a de Zhu [12], que se baseou num esquema de estado ligado  $K - n$ . Uma outra possibilidade seria seguir a sugestão dada por JW na Ref.[11], de que o pentaquark possui uma estrutura diquark-diquark-antiquark. Assim, nosso primeiro passo será o da construção da corrente para um diquark.

Um diquark é simplesmente a combinação de dois quarks. Portanto o campo interpolante para um diquark deve ser semelhante ao campo interpolante de um méson, que é da forma:

$$j_{meson} = \bar{q}\Gamma q, \quad (3.1)$$

onde  $\Gamma$  é uma matriz de Dirac. Por simplicidade não estamos considerando graus de liberdade de isospin e cor. Para construir o campo de um diquark temos apenas que trocar o  $\bar{q}$  em  $j_{meson}$  por seu análogo na conjugação de carga. O análogo na conjugação

---

<sup>1</sup>Só existe uma única corrente para o méson vetorial e para o méson pseudoescalar existe duas correntes que se acoplam com esse estado: a corrente axial vetorial e a corrente pseudoescalar.

de carga de um campo de quark é dado por:

$$q^c = \delta C \bar{q}^T, \quad (3.2)$$

onde  $C = i\gamma^2\gamma^0$  é a matriz conjugação de carga e  $\delta$  é uma fase arbitrária. Da Eq.(3.3) é fácil ver que

$$\bar{q}^c = \delta^* q^T C. \quad (3.3)$$

Assim, tomando  $\delta = 1$ , o campo interpolante de um diquark é dado genericamente por:

$$j_{diquark} = q^T C \Gamma q. \quad (3.4)$$

JW propõe que os diquarks dos pentaquarks no antidecuplete da Fig. 1.1 tenham spin zero e estejam na representação  $\bar{3}$  de cor e sabor. Assim, no caso de diquarks  $ud$  temos

$$j_c^{ud} = \epsilon_{abc} u_a^T C \Gamma d_b, \quad (3.5)$$

onde  $\Gamma = 1$  ou  $\gamma_5$  para diquarks com spin zero. Em particular, o diquark na Eq.(3.5) possui isospin zero. Isso pode ser mostrado usando-se as relações de isospin dadas pela álgebra de  $SU(2)$  [47],

$$I_3 u = \frac{1}{2}u, I_3 d = -\frac{1}{2}d, \quad (3.6)$$

$$I_+ d = u, I_- u = d,$$

$$I_+ u = I_- d = 0, \quad (3.7)$$

onde  $I_{\pm} = \frac{I_1 \pm iI_2}{2}$ , representam os operadores de nível que transformam os quarks  $u$  e  $d$ . Em termos dos operadores  $I_3$ ,  $I_+$  e  $I_-$  o operador de isospin é definido como:

$$I^2 = I_3^2 + \frac{1}{2} (I_+ I_- + I_- I_+), \quad (3.8)$$

onde

$$I_k = I_k(1) + I_k(2), \quad (3.9)$$

onde  $I_k(n)$  age no quark número  $n$ . Assim, obtemos de imediato  $I_3 j_c^{ud} = 0$ . Por outro lado temos,

$$I_+ j_c^{ud} = \epsilon_{abc} u_a^T C \Gamma u_b, \quad (3.10)$$

$$I_- j_c^{ud} = \epsilon_{abc} d_a^T C \Gamma d_b. \quad (3.11)$$

Como esses diquarks possuem spin zero, temos que a parte de spin de sua função de onda é antissimétrica pela troca de partículas, logo temos a propriedade,

$$q_a^T(1) C \Gamma q_b(2) = -q_a^T(2) C \Gamma q_b(1), \quad (3.12)$$

onde estamos usando genericamente a letra  $q$  para designar qualquer um dos quarks  $u$  ou  $d$ , e usamos os números (1) e (2) para deixar explícita a troca nos quarks. Usando o fato de que a corrente do diquark é um número, temos que  $j_c^{ud} = j_c^{udT}$ , assim obtemos a relação,

$$(q_a^T(1) C \Gamma q_b(2))^T = q_a^T(1) C \Gamma q_b(2) = -q_b^T(2) C \Gamma q_a(1), \quad (3.13)$$

já que  $\Gamma^T = \Gamma$ ,  $[\Gamma, C] = 0$  para  $\Gamma = 1, \gamma_5$ , e  $C^T = -C$ . Portanto, contraindo com o tensor antissimétrico  $\epsilon_{abc}$  as Eqs.(3.12) e (3.13), vemos que:

$$\epsilon_{abc} u_a^T C \Gamma u_b = \epsilon_{abc} d_a^T C \Gamma d_b = 0. \quad (3.14)$$

Assim,  $I_+ j_c^{ud} = I_- j_c^{ud} = 0$ , que nos fornece isospin zero para o diquark na Eq.(3.8).

A corrente do pentaquark que obedece a uma estrutura diquark-diquark-antiquark pode ter isospin zero somente se for construída com dois diquarks diferentes, já que dois diquarks iguais se comportam como bósons idênticos, e se são antisimétricos na cor, o estado final tem que ser simétrico em isospin. Assim, a corrente para o pentaquark  $\Theta^+$  construída à partir de dois diquarks  $ud$  que tenham spin e isospin zero e estejam na representação  $\bar{3}$  de cor é dada por [13]:

$$\eta_2(x) = \epsilon^{abc} \epsilon^{def} \epsilon^{cfdg} [u_a^T(x) C d_b(x)] [u_d^T(x) C \gamma_5 d_e(x)] C \bar{s}_g^T(x), \quad (3.15)$$

como cada diquark na Eq.(3.15) tem isospin zero, fica direta a demonstração de que a corrente na Eq.(3.15) tem também isospin zero.

Por outro lado, podemos construir uma corrente para a  $\Theta^+$  com dois diquarks iguais, se permitirmos que o estado representado tenha isospin 1. Apesar de haver uma forte indicação experimental de que o estado de pentaquark observado possui isospin zero [3], nós iremos considerar também o caso de uma corrente com isospin 1. Assim temos [17]:

$$\eta_1(x) = t\theta_1(x) + \theta_2(x), \quad (3.16)$$

onde,

$$\theta_n(x) = \epsilon^{abc}[u_a^T(x)C\Gamma_n d_b(x)][u_c^T(x)C\Gamma_n d_e(x)]C\bar{s}_e^T(x), \quad n = 1, 2,$$

onde  $t$  é um parâmetro arbitrário, e  $\Gamma_1 = \gamma_5$ ,  $\Gamma_2 = 1$ . No apêndice C mostramos explicitamente que o isospin dessa corrente é 1.

Podemos obter a corrente para o pentaquark  $\Xi^{--}$  através da troca  $u \rightleftharpoons s$ , como podemos ver na Fig. 1.1. Assim obtemos das correntes nas Eqs.(3.16) e (3.15):

$$\eta_1^{\Xi} = t\epsilon^{abc}[s_a^T C\gamma_5 d_b][s_c^T C\gamma_5 d_e]C\bar{u}_e^T + \epsilon^{abc}[s_a^T C d_b][s_c^T C d_e]C\bar{u}_e^T, \quad (3.17)$$

$$\eta_2^{\Xi} = \epsilon^{abc}\epsilon^{def}\epsilon^{cfd}[s_a^T C d_b][s_d^T C\gamma_5 d_e]C\bar{u}_g^T. \quad (3.18)$$

No apêndice C mostramos explicitamente que o isospin dessas correntes é  $I = 3/2$ .

### 3.1.1 Cálculo da paridade para as correntes

Para férimons a transformação de paridade é definida por,

$$\psi(-\vec{r}, t) = \xi\gamma_0\psi(\vec{r}, t), \quad (3.19)$$

onde a paridade é positiva se  $\xi = 1$  e negativa se  $\xi = -1$ .

Por outro lado, a conjugação de carga de  $\psi$  definida por  $\psi^C = C\bar{\psi}^T$ , se transforma via,

$$\psi^C(-\vec{r}, t) = C\bar{\psi}^T(-\vec{r}, t),$$

onde usando a Eq.(3.19), obtemos

$$\psi^C(-\vec{r}, t) = -\xi\gamma_0\psi^C(\vec{r}, t). \quad (3.20)$$

Assim, vemos que os campos  $\psi$  e  $\psi^C$  possuem paridade oposta.

Para bósons a transformação de paridade é dada por:

$$\phi(-\vec{r}, t) = \xi \phi(\vec{r}, t), \quad (3.21)$$

onde novamente a paridade é positiva se  $\xi = 1$  e negativa se  $\xi = -1$ .

Para calcular a paridade dos diquarks,

$$\begin{aligned} P^c(x) &= \epsilon^{abc} u_a^T(x) C d_b(x), \\ S^c(x) &= \epsilon^{abc} u_a^T(x) C \gamma_5 d_b(x), \end{aligned} \quad (3.22)$$

usamos a definição na Eq.(3.19). Assim, para o diquark  $P^c(x)$  obtemos,

$$P'^c(-\vec{r}, t) = \epsilon^{abc} u_a'^T(-\vec{r}, t) C d_b'(-\vec{r}, t) = \epsilon^{abc} u_a^T(\vec{r}, t) \gamma_0 C \gamma_0 d_b(\vec{r}, t) = -\epsilon^{abc} u_a^T(x) C d_b(x), \quad (3.23)$$

onde usamos o fato de que, por definição, todos os quarks possuem paridade positiva.

Assim, vemos que o diquark  $P^c(x)$  tem paridade negativa, ou seja, é um pseudoescalar.

Usando o mesmo procedimento, obtemos que o diquark  $S^c(x)$  tem paridade positiva, ou seja, é um escalar.

A corrente Eq.(3.16) é composta de dois diquarks iguais e um spinor de conjugação de carga, assim a paridade da nossa corrente é negativa. Para a corrente na Eq.(3.15) temos dois diquarks de paridades diferentes, o que fornece paridade positiva. Assim:

$$\begin{aligned} \eta_1(-\vec{r}, t) &= -\gamma_0 \eta_1(\vec{r}, t), \\ \eta_2(-\vec{r}, t) &= +\gamma_0 \eta_2(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (3.24)$$

## 3.2 Lado Fenomenológico

Como já vimos no capítulo 2, o correlator fenomenológico para os bárions é dado por:

$$\Pi_{\alpha\beta}^m(q) = - \sum_{s=1,2} \frac{\langle 0 | j_\alpha | q, s \rangle \langle q, s | \bar{j}_\beta | 0 \rangle}{q^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.25)$$

Considere uma corrente de paridade positiva, se o bárion com o qual ela se acopla possui também paridade positiva, temos a regra fenomenológica,

$$\langle 0 | j_\alpha(0) | q, s \rangle_+ = \lambda_+ U_\alpha^s(q), \quad (3.26)$$

onde  $\lambda$  é o parâmetro que fornece o acoplamento da corrente com o pentaquark.

Entretanto, essa corrente pode também se acoplar com um bárion de paridade negativa [40, 51]. No tratamento do lado fenomenológico é importante considerar o fato, de que não sabemos a paridade do pentaquark e portanto temos que considerar também a possibilidade do pentaquark ter paridade negativa. Assim

$$\langle 0 | \gamma_5 j_\alpha(0) | q, s \rangle_- = \lambda_- U_\alpha^s(q),$$

multiplicando por  $\gamma_5$  obtemos,

$$\langle 0 | j_\alpha(0) | q, s \rangle_- = \lambda_- \gamma_5 U_\alpha^s(q), \quad (3.27)$$

que é uma equação equivalente a Eq.(3.26).

Inserindo as relações nas Eqs.(3.26) e (3.27) na Eq.(3.25), obtemos para os dois casos

$$\Pi_{\alpha\beta}^{m_+}(q) = -\frac{\lambda_{m_+}^2}{q^2 - m_+^2 + i\epsilon} \sum_{s=1,2} U_\alpha^s(q) \bar{U}_\beta^s(q), \quad (3.28)$$

$$\Pi_{\alpha\beta}^{m_-}(q) = \frac{\lambda_{m_-}^2}{q^2 - m_-^2 + i\epsilon} \gamma_5 \left( \sum_{s=1,2} U_\alpha^s(q) \bar{U}_\beta^s(q) \right) \gamma_5. \quad (3.29)$$

Sabendo que,

$$\sum_{s=1,2} U_\alpha^s(q) \bar{U}_\beta^s(q) = (\not{q} + m)_{\alpha\beta}, \quad (3.30)$$

temos dois tipos de correladores para o lado fenomenológico, dados por,

$$\Pi^{m_\pm}(q) = -\lambda_\pm^2 \frac{\not{q} \pm m_\pm}{q^2 - m_\pm^2 + i\epsilon} = \not{q} \Pi_q + \Pi_1. \quad (3.31)$$

Escrevendo o lado da QCD em termos de uma relação de dispersão e passando a contribuição dos estados do contínuo para o lado teórico da regra de soma obtemos:

$$\frac{\lambda_\pm^2}{m_\pm^2 - q^2} = \int_0^{s_0 \pm} ds \frac{\rho_q^{QCD}(s)}{s - q^2}, \quad (3.32)$$

$$\pm m_{\pm} \frac{\lambda_{\pm}^2}{m_{\pm}^2 - q^2} = \int_0^{s_{0\pm}} ds \frac{\rho_1^{QCD}(s)}{s - q^2}. \quad (3.33)$$

Onde, podemos notar por essas equações que a paridade só pode ser determinada através da regra de soma na estrutura 1, devido a mudança do sinal do correlator para os casos de paridade positiva ou negativa. Para o caso de uma corrente com paridade positiva o aparecimento de um fator  $-1$  na Eq.(3.33) indica que a paridade da partícula é negativa, por outro lado, se a paridade da corrente for negativa o sinal  $-1$  indica que a partícula possui paridade positiva. Nas Refs.[13, 23, 51] é usado um tratamento alternativo para o lado fenomenológico, que considera simultaneamente as partículas de paridade positiva e negativa.

Um importante estudo para a corrente dos pentaquarks é a análise do acoplamento da corrente com o pólo  $P$ . As definições das contribuições do pólo e da ressonância  $R$ , na estrutura  $\Pi_q$  são:

$$P = \frac{\lambda_{\pm}^2}{m_{\pm}^2 - q^2}, \quad (3.34)$$

$$R = \int_{s_{0\pm}}^{\infty} ds \frac{\rho_q^{QCD}(s)}{s - q^2} = T - P, \quad (3.35)$$

onde  $T$  é o correlator total,

$$T = \int_0^{\infty} ds \frac{\rho_q^{QCD}(s)}{s - q^2}. \quad (3.36)$$

Uma corrente é considerada boa, quando a contribuição do pólo for da ordem de 50% do correlator total. A importância desse critério se deve ao desejo de suprimir a contribuição das altas ressonâncias na regra de soma.

### 3.3 Lado da QCD

#### 3.3.1 Corrente da Eq.(3.16)

Inserindo a nossa corrente Eq.(3.16) no funcional de correlação, obtemos,

$$\langle 0 | T \{ \eta(x) \bar{\eta}(0) \} | 0 \rangle = t^2 \Pi_{11}(x) + t(\Pi_{12} + \Pi_{21}) + \Pi_{22}, \quad (3.37)$$

onde genericamente podemos definir,

$$\Pi_{RR'}(x) = \langle 0 | T \{ \theta_R(x) \bar{\theta}_{R'}(0) \} | 0 \rangle, \quad (3.38)$$

com  $R, R' = 1, 2$  e

$$\begin{aligned} \theta_R(x) &= \epsilon^{abc} [u_a^T(x) C \Gamma_R d_b(x)] [u_c^T(x) C \Gamma_R d_e(x)] C \bar{s}_e^T(x), \\ \bar{\theta}_{R'}(0) &= \epsilon^{abc} s_e^T(0) C [\bar{d}_e(0) \Gamma_{R'} C \bar{u}_c^T(0)] [\bar{d}_b(0) \Gamma_{R'} C \bar{u}_a^T(0)]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Assim obtemos:

$$[\Pi_{RR'}(x)]_{mp} = \epsilon_{abc} \epsilon_{a'b'c'} (C \Gamma_R)_{ij} (C \Gamma_{R'})_{kl} C_{mn} C_{op} (\Gamma_{R'} C)_{qr} (\Gamma_R C)_{sv} G(x),$$

onde  $G(x)$  é dado por

$$G(x) = \langle 0 | T \{ u_i^a(x) d_j^b(x) u_k^c(x) d_l^e(x) \bar{s}_n^e(x) s_o^{e'}(0) \bar{d}_q^{e'}(0) \bar{u}_r^{c'}(0) \bar{d}_s^{b'}(0) \bar{u}_v^{a'}(0) \} | 0 \rangle. \quad (3.40)$$

Para avaliar a função  $G(x)$  o procedimento usual consiste em usar o Teorema de Wick, onde os condensados de quarks surgem nos termos que possuem os produtos normal da expansão. A aplicação desse procedimento para um produto de 10 campos tornaria o cálculo extremamente longo. Neste trabalho usamos o princípio da fatorização para os condensados de quarks, assim usando esse princípio conseguimos gerar os múltiplos condensados de quarks apenas utilizando a expansão perturbativa, onde devemos inserir no propagador de quarks uma componente não perturbativa:

$$S_{ab}(x) = \langle 0 | T \{ q_a(x) \bar{q}_b(0) \} | 0 \rangle = S_{ab}^{Pert}(x) + \langle 0 | : q_a(x) \bar{q}_b(0) : | 0 \rangle. \quad (3.41)$$

Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned} G(x) &= -S_{on}^{e'e}(-x, m_s) [S_{kr}^{cc'}(x, m_u) S_{iv}^{aa'}(x, m_u) - S_{ir}^{ac'}(x, m_u) S_{kv}^{ca'}(x, m_u)] \\ &\quad \times [S_{lq}^{ee'}(x, m_d) S_{js}^{bb'}(x, m_d) - S_{jq}^{be'}(x, m_d) S_{ls}^{eb'}(x, m_d)]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Portanto temos finalmente a matriz,

$$\langle 0|T\{\theta_R(x)\bar{\theta}_{R'}(0)\}|0\rangle = -CS_{e,e}^T(-x, m_s)C\epsilon_{abc}\epsilon_{a'b'c'}\sum_{j=1}^4\Pi_j(x), \quad (3.43)$$

com

$$\begin{aligned} \Pi_1(x) &= \text{Tr}[C\Gamma_R S_{ee'}(x, m_d)\Gamma_{R'}CS_{cc'}^T(x, m_u)] \times \text{Tr}[C\Gamma_R S_{bb'}(x, m_d)\Gamma_{R'}CS_{aa'}^T(x, m_u)], \\ \Pi_2(x) &= \text{Tr}[C\Gamma_R S_{be'}(x, m_d)\Gamma_{R'}CS_{ac'}^T(x, m_u)] \times \text{Tr}[C\Gamma_R S_{eb'}(x, m_d)\Gamma_{R'}CS_{ca'}^T(x, m_u)], \\ \Pi_3(x) &= -\text{Tr}[C\Gamma_R S_{be'}(x, m_d)\Gamma_{R'}CS_{cc'}^T(x, m_u)C\Gamma_R S_{eb'}(x, m_d)\Gamma_{R'}CS_{aa'}^T(x, m_u)], \\ \Pi_4(x) &= -\text{Tr}[C\Gamma_R S_{bb'}(x, m_d)\Gamma_{R'}CS_{ac'}^T(x, m_u)C\Gamma_R S_{ee'}(x, m_d)\Gamma_{R'}CS_{aa'}^T(x, m_u)]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Inserindo esse propagador de quarks “cheio” dado no apêndice D no correlator, calculando as transformadas de Fourier de cada diagrama, e tomando a parte imaginária do correlator  $\Pi(q^2)$  para  $q^2 = s > 0$ , obtemos as densidades espectrais  $\rho(s) = \frac{1}{\pi}\text{Im}\Pi(s)$ , fornecendo as regras de soma nas Eqs.(3.32) e (3.33).

Neste trabalho consideramos a OPE até dimensão 6. Além disso, trabalhamos no limite de SU(2) simétrico e tomamos  $m_u = m_d = 0$  e  $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle$ .

Para a  $\Theta^+$ , as densidades espectrais, até dimensão 6 são dadas por

$$\begin{aligned} \rho_q &= c_1 \frac{s^5}{5!5!2^{13}7\pi^8} + c_1 \frac{s^3}{5!3!2^{11}\pi^6} m_s \langle \bar{s}s \rangle + c_2 \frac{s^3}{5!3!2^{14}\pi^6} \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle \\ &- c_1 \frac{s^2}{4!3!2^{12}\pi^6} m_s \langle \bar{s}g_s\sigma \cdot \mathbf{G}s \rangle + c_3 \frac{s^2}{4!3!2^7\pi^4} \langle \bar{q}q \rangle^2, \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= c_1 \frac{s^5}{5!5!2^{13}\pi^8} m_s - c_1 \frac{s^4}{5!4!2^{10}\pi^6} \langle \bar{s}s \rangle \\ &+ c_1 \frac{s^3}{4!3!2^{12}\pi^6} \langle \bar{s}g_s\sigma \cdot \mathbf{G}s \rangle + c_2 \frac{s^3}{4!3!2^{14}\pi^6} m_s \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle, \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde  $c_1 = 5t^2 + 2t + 5$ ,  $c_2 = (1 - t)^2$  and  $c_3 = 7t^2 - 2t - 5$ .

Para  $\Xi^{--}$  obtemos

$$\begin{aligned} \rho_q^{\Xi} &= c_1 \frac{s^5}{5!5!2^{13}7\pi^8} + c_4 \frac{s^3}{5!2^{11}\pi^6} m_s \langle \bar{s}s \rangle - c_5 \frac{s^3}{5!2^9\pi^6} m_s \langle \bar{q}q \rangle \\ &+ c_2 \frac{s^3}{5!3!2^{14}\pi^6} \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle + 7c_5 \frac{s^2}{2^{17}\pi^6} m_s \langle \bar{q}g_s\sigma \cdot \mathbf{G}q \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - c_5 \frac{s^2}{4!2^{14}\pi^6} m_s < \bar{q} g_s \sigma \cdot \mathbf{G} q > \left[ 6 \ln \left( \frac{s}{\Lambda_{QCD}^2} \right) - \frac{43}{2} \right] \\
& + c_2 \frac{s^2}{3^2 2^{12} \pi^4} \left( < \bar{s} s >^2 + < \bar{q} q >^2 \right) + c_5 \frac{s^2}{3!2^9 \pi^4} < \bar{s} s > < \bar{q} q > \\
& - c_6 \frac{s^2}{4!3!2^{12} \pi^6} m_s < \bar{s} g_s \sigma \cdot \mathbf{G} s >, \tag{3.47}
\end{aligned}$$

$$\rho_1^{\Xi} = -c_1 \frac{s^4}{5!4!2^{10} \pi^6} < \bar{q} q > + c_1 \frac{s^3}{4!3!2^{12} \pi^6} < \bar{q} g_s \sigma \cdot \mathbf{G} q >, \tag{3.48}$$

onde  $c_4 = (t+1)^2$ ,  $c_5 = t^2 - 1$ ,  $c_6 = t^2 + 22t + 1$ .

### 3.3.2 Corrente da Eq.(3.15)

Procedendo de maneira análoga ao caso anterior e usando a corrente dada na Eq.(3.15), obtemos o correlator,

$$< 0 | T \{ \eta(x) \bar{\eta}(0) \} | 0 > = C S_{e,e}^T(-x, m_s) C \epsilon_{abc} \epsilon_{def} \epsilon_{cfg} \epsilon_{a,b,c} \epsilon_{d,e,f} \epsilon_{c,f,g} \sum_{j=1}^4 \Pi_j(x), \tag{3.49}$$

onde,

$$\begin{aligned}
\Pi_1(x) &= \text{Tr}[C S_{bb}(x, m_d) C S_{aa}^T(x, m_u)] \times \text{Tr}[C \gamma_5 S_{ee}(x, m_d) \gamma_5 C S_{dd}^T(x, m_u)], \\
\Pi_2(x) &= \text{Tr}[C S_{be}(x, m_d) \gamma_5 C S_{ad}^T(x, m_u)] \times \text{Tr}[C \gamma_5 S_{eb}(x, m_d) C S_{da}^T(x, m_u)], \\
\Pi_3(x) &= -\text{Tr}[C S_{be}(x, m_d) \gamma_5 C S_{dd}^T(x, m_u) C \gamma_5 S_{eb}(x, m_d) C S_{aa}^T(x, m_u)], \\
\Pi_4(x) &= -\text{Tr}[C S_{bb}(x, m_d) C S_{da}^T(x, m_u) C \gamma_5 S_{ee}(x, m_d) \gamma_5 C S_{ad}^T(x, m_u)]. \tag{3.50}
\end{aligned}$$

Uma propriedade interessante dessa corrente é o fato de que os termos que possuem no traço os 4 propagadores,  $\Pi_3$  e  $\Pi_4$ , não contribuirão para os casos  $\Theta^+$  e  $\Xi^{--}$ , tanto para a estrutura  $\delta_{ab}$  quanto para  $\tau_{ab}^A$  do propagador de quarks, gerando uma grande supressão de gráficos. O cancelamento desses termos se deve a uma ação combinada do traço e da contração dos fatores de cor característicos dessa corrente.

Procedendo da mesma forma já mencionada, obtemos para as densidades espectrais até dimensão 6 para a  $\Theta^+$ :

$$\begin{aligned}
\rho_q &= \frac{s^5}{5!5!2^{10}7\pi^8} + \frac{s^3}{5!3!2^8\pi^6} m_s < \bar{s} s > + \frac{s^3}{5!3!2^{10}\pi^6} < \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 > \\
&- \frac{s^2}{4!3!2^9\pi^6} m_s < \bar{s} g_s \sigma \cdot \mathbf{G} s >, \tag{3.51}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{s^5}{5!5!2^{10}\pi^8}m_s - \frac{s^4}{5!4!2^7\pi^6} \langle \bar{s}s \rangle \\
&+ \frac{s^3}{4!3!2^9\pi^6} \langle \bar{s}g_s\sigma.\mathbf{G}s \rangle + \frac{s^3}{4!3!2^{10}\pi^6}m_s \langle \frac{\alpha_s}{\pi}G^2 \rangle,
\end{aligned} \tag{3.52}$$

e para a  $\Xi^{--}$ :

$$\begin{aligned}
\rho_q^{\Xi} &= \frac{s^5}{5!5!2^{10}\pi^8} + \frac{s^3}{5!3!2^7\pi^6}m_s \langle \bar{s}s \rangle + \frac{s^3}{5!3!2^{10}\pi^6} \langle \frac{\alpha_s}{\pi}G^2 \rangle \\
&+ \frac{s^2}{4!3!2^9\pi^6}m_s \langle \bar{s}g_s\sigma.\mathbf{G}s \rangle,
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\rho_1^{\Xi} = -\frac{s^4}{5!4!2^7\pi^6} \langle \bar{q}q \rangle + \frac{s^3}{4!3!2^9\pi^6} \langle \bar{q}g_s\sigma.\mathbf{G}q \rangle. \tag{3.54}$$

### 3.4 Resultados

Usamos neste trabalho os valores:  $\Lambda_{QCD} = 100\text{MeV}$ ,  $m_s = 0.10\text{GeV}$ ,  $\langle \bar{q}q \rangle = -(0.23)^3\text{GeV}^3$ ,  $\langle \bar{s}s \rangle = 0.8\langle \bar{q}q \rangle$ ,  $\langle \bar{s}g_s\sigma.\mathbf{G}s \rangle = \langle \bar{s}s \rangle m_0^2$  com  $m_0^2 = 0.8\text{GeV}^2$  e  $\langle \frac{\alpha_s}{\pi}G^2 \rangle = (0.33)^4\text{GeV}^4$ , além da definição para o limiar do contínuo para os pentaquarks,

$$s_{0P} = (m_P + \Delta_P)^2.$$

Fazendo a transformada de Borel das Eqs.(3.32) e (3.33) temos as regras de soma,

$$\lambda_{\pm}^2 e^{-\frac{m_{\pm}^2}{M^2}} = \int_0^{s_{0\pm}} ds \rho_q^{QCD}(s) e^{-\frac{s}{M^2}}, \tag{3.55}$$

$$\pm m_{\pm} \lambda_{\pm}^2 e^{-\frac{m_{\pm}^2}{M^2}} = \int_0^{s_{0\pm}} ds \rho_1^{QCD}(s) e^{-\frac{s}{M^2}}, \tag{3.56}$$

Para extrair a massa do pentaquark podemos usar dois procedimentos. Como as regras de soma são independentes, podemos derivar a equação da regra de soma Eqs.(3.55) e (3.56) com respeito a  $M^2$  e dividirmos por ela mesma, eliminando a dependência no acoplamento  $\lambda_{\pm}$ . Outro procedimento consiste apenas em dividir a Eq.(3.55) pela Eq.(3.56).

O método de divisão de estruturas se mostrou bastante instável para ambos os casos:  $\Theta^+$  e  $\Xi^{--}$ , para ambas as correntes. A regra de soma que usamos nos trabalhos apresentados nas Refs.[17, 18] considera apenas a estrutura  $\not{q}$ . Um dos motivos para

usar esse tipo de regra de soma, é o fato de que a estrutura-1 é mais instável com relação a variação do limiar do contínuo, além disso, não conseguimos encontrar um valor para  $\Delta$  capaz de reproduzir o valor da massa experimental do pentaquark. Na Fig. 3.1 mostramos a curva da massa para a  $\Theta^+$  de isospin zero calculado nessa estrutura Eq.(3.56). Ao contrário da regra de soma na estrutura  $\not{q}$ , o aumento no limiar do contínuo não fornece um valor maior para a massa e para valores maiores de  $\Delta > 0.5\text{GeV}$  a curva da massa é instável. Assim, não é possível obter a massa experimental da  $\Theta^+$  através dessa regra de soma.

Neste trabalho usamos a regra de soma na estrutura  $\not{q}$ , pois além de ser mais estável ela possui mais termos da OPE até dimensão 6, o que a torna mais confiável.

Para estimarmos o valor do acoplamento da corrente com o estado fundamental,  $\lambda$ , usamos a massa experimental dos pentaquarks. A paridade é obtida pela análise do sinal do lado direito da Eq.(3.56). Em todos os casos, foi obtido um sinal negativo o que nos leva a paridade negativa para as partículas que se acoplam com a corrente Eq.(3.15) e paridade positiva para as partículas que se acoplam com a corrente Eq.(3.16). Por outro lado, esse sinal pode ser mudado com a inclusão de novos termos na OPE, pois o valor absoluto do correlator total é bem inferior ao valor absoluto da componente de dimensão 5. Assim, mesmo que o próximo termo da OPE seja bem menor que o termo de dimensão 5, o sinal pode mudar, e portanto, desse modo, a paridade prevista pela regra de soma não é um resultado confiável.

### 3.4.1 Regra de soma para a $\Theta^+$ com $I=0$

Como já foi comentado no capítulo 2, na regra de soma dos hádrons usuais, usa-se para o limiar do contínuo um salto  $\Delta = 0.5\text{GeV}$ . Essa escolha permite obter a maioria das massas hadrônicas e constantes de decaimento que estão muito próximas dos dados experimentais.

Em muitos casos o conhecimento do primeiro estado excitado é obtido experimentalmente, por outro lado, para os pentaquarks não existe nenhum dado sobre  $s_0$ , assim

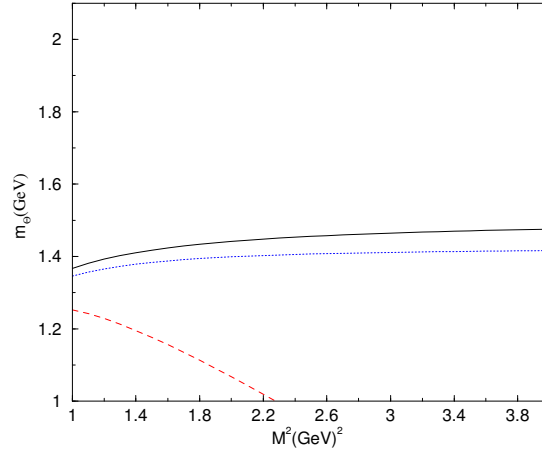


Figura 3.1: Curva da massa para a  $\Theta^+$  com  $I=0$  na estrutura 1, linha sólida  $\Delta_\Theta = 0.3\text{GeV}$ , linha pontilhada  $\Delta_\Theta = 0.4\text{GeV}$ , linha tracejada  $\Delta_\Theta = 0.5\text{GeV}$ .

adotamos a postura de escolher o limiar do contínuo de modo a reproduzir a massa observada experimentalmente.

Apresentamos na Fig. 3.2 o estudo da estabilidade da massa da  $\Theta^+$  de isospin zero em função da massa de Borel, para um intervalo do limiar do contínuo em torno do valor que melhor se ajustou com a massa experimental da  $\Theta$ ,  $\Delta = 0.26\text{GeV}$ . Vemos que a regra de soma possui uma boa estabilidade com respeito a massa de Borel e que o erro gerado pela variação do limiar do contínuo de  $0.16 < \Delta < 0.36\text{GeV}$  é de  $\approx 100\text{MeV}$ . Para  $M^2 = 1\text{GeV}^2$ , temos

$$m_\Theta = 1.5 \pm 0.1\text{GeV}.$$

Nas regras de soma para os hádrons usuais o intervalo para a massa de Borel é escolhido de modo a possuir uma boa convergência para a OPE e que a contribuição do contínuo não seja muito grande. A análise da convergência do lado direito da Eq.(3.55) é apresentada na Fig. 3.3 para  $\Delta = 0.26\text{GeV}$ , onde são analisados os termos da OPE em valor absoluto. Infelizmente obtivemos um ordenamento bastante não usual para a OPE no domínio  $M^2 < 4\text{GeV}^2$ . Um outro sério problema aparece no estudo da contribuição do pólo Fig. 3.4. Como podemos ver a contribuição do pólo só alcança

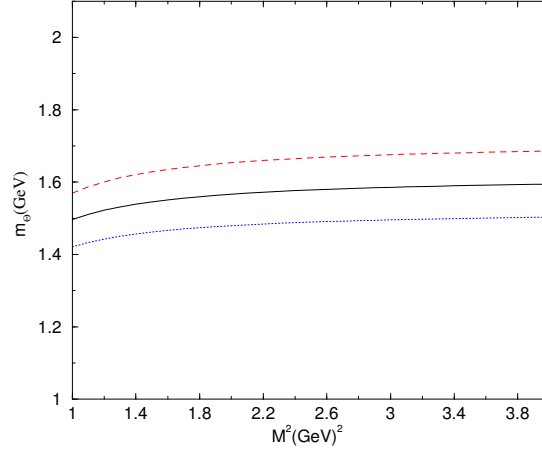


Figura 3.2: Curva da massa para a  $\Theta^+$  com  $I=0$  na estrutura  $\not{A}$ , linha sólida  $\Delta_\Theta = 0.26\text{GeV}$ , linha pontilhada  $\Delta_\Theta = 0.16\text{GeV}$ , linha tracejada  $\Delta_\Theta = 0.36\text{GeV}$ .

50% para valores de  $M^2$  menores que  $1\text{GeV}^2$ . Esse é um sério problema, pois nesse domínio o ordenamento da OPE é muito ruim. Assim justificamos o uso da janela de Borel para analisarmos a massa e o seu acoplamento, para  $1 < M^2 < 4\text{GeV}^2$ , onde no limite inferior fornece uma boa contribuição do pólo e no limite superior a convergência da OPE aceitável.

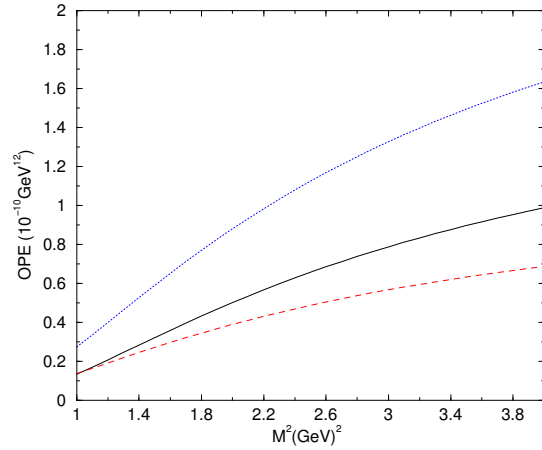


Figura 3.3: Termos da OPE, linha sólida termo perturbativo, linha pontilhada operadores de dimensão 4, linha tracejada operadores de dimensão 6.

Na Fig. 3.5 mostramos o estudo da estabilidade do acoplamento  $\lambda$ . Esse acoplamento não pode ser medido experimentalmente, por outro lado, esse acoplamento será usado no cálculo da largura de decaimento da  $\Theta^+$  que é o tema do nosso próximo capítulo.

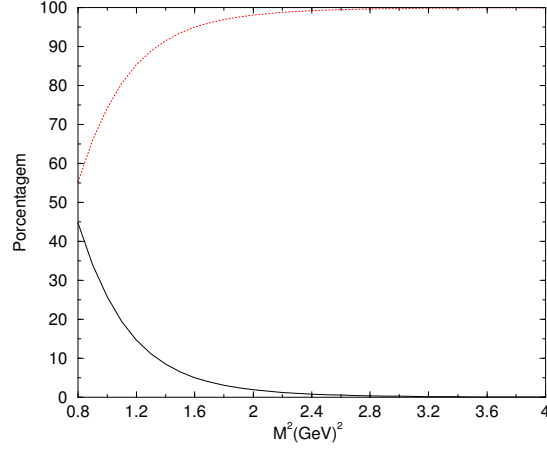


Figura 3.4: Linha sólida contribuição do pólo, linha pontilhada contribuição da ressonância.

Para  $M^2 = 1\text{GeV}^2$ , temos

$$\lambda_\Theta = (2.4 \pm 0.3) \times 10^{-5} \text{GeV}^6.$$

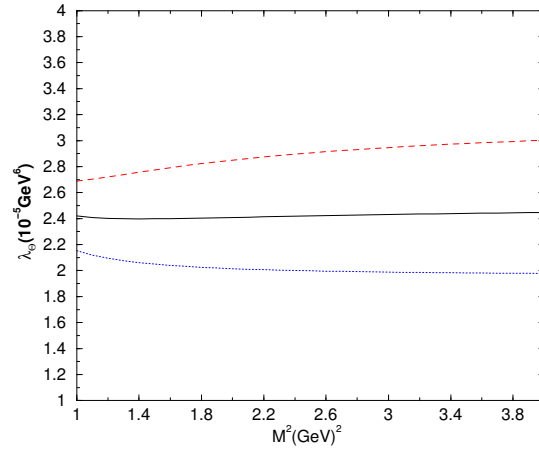


Figura 3.5: Curva do acoplamento da  $\Theta^+$  com  $I=0$ , linha sólida  $\Delta_\Theta = 0.26\text{GeV}$ , linha pontilhada  $\Delta_\Theta = 0.16\text{GeV}$ , linha tracejada  $\Delta_\Theta = 0.36\text{GeV}$ .

### 3.4.2 Regra de soma para a $\Theta^+$ com $I=1$

Para a  $\Theta^+$  de isospin 1 com a corrente dada pela Eq.(3.16), vemos que a mesma possui um parâmetro livre  $t$ . Estudando o comportamento dos termos da OPE com a

variação de  $t$ , observamos que para  $t = 1$  obtemos uma melhor convergência da OPE, que é mostrado na Fig. 3.6. Mesmo obtendo uma boa organização dos termos da OPE, podemos notar que a convergência é muito lenta, o que mostra que essa corrente também possui problemas. A contribuição do pólo para esse valor de  $t$  continua sendo muito pequena (Fig. 3.7) e o valor de  $s_0$  coincidiu com o valor utilizado para a  $\Theta^+$  de isospin zero no ajuste para a obtenção da massa experimental da  $\Theta^+$  Fig. 3.8. Vemos nessa figura que a curva da massa é muito estável com a massa de Borel. Para

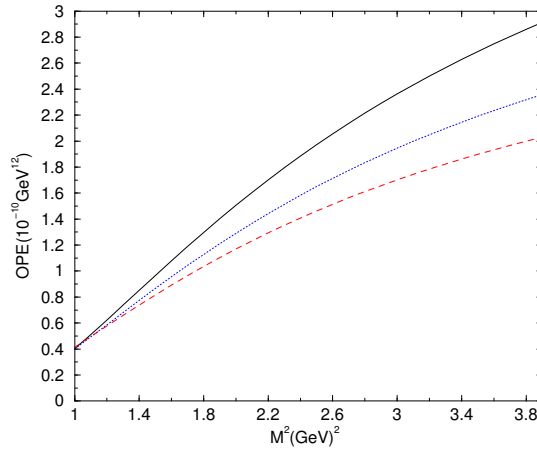


Figura 3.6: Termos da OPE, linha sólida termo perturbativo, linha pontilhada operadores de dimensão 4, linha tracejada operadores de dimensão 6.

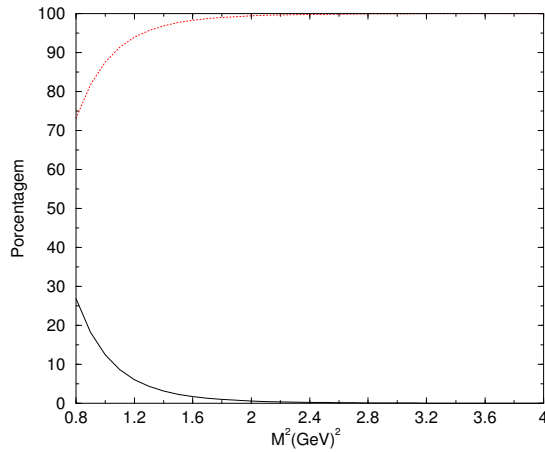


Figura 3.7: Linha sólida contribuição do pólo, linha pontilhada contribuição da ressonância.



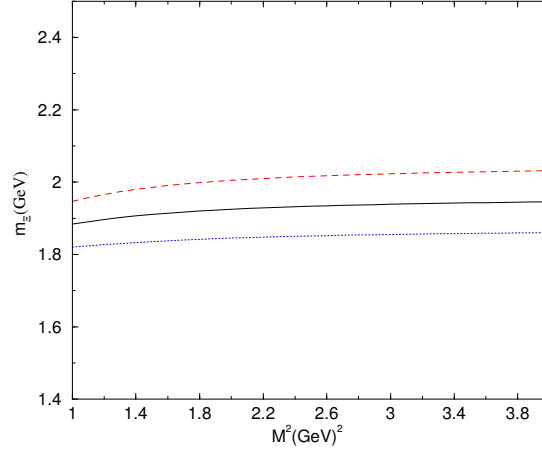


Figura 3.9: Curva da massa para a  $\Xi$  no campo da Eq.(3.15) na estrutura  $\not{q}$ , linha sólida  $\Delta_\Xi = 0.26\text{GeV}$ , linha pontilhada  $\Delta_\Xi = 0.16\text{GeV}$ , linha tracejada  $\Delta_\Xi = 0.36\text{GeV}$ .

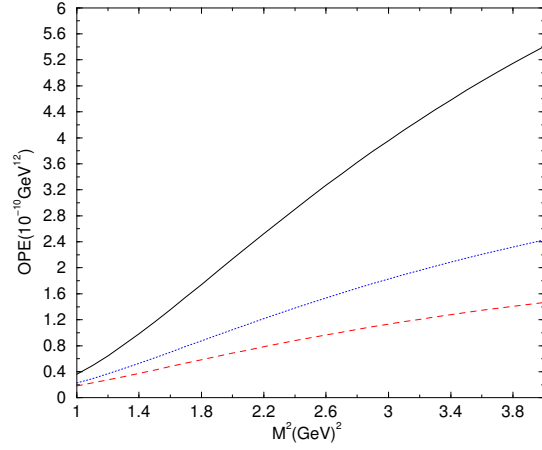


Figura 3.10: Termos da OPE, linha sólida termo perturbativo, linha pontilhada operadores de dimensão 4, linha tracejada operadores de dimensão 6.

### 3.4.4 Regra de soma para a $\Xi^{--}$ da Eq.(3.16)

Novamente o valor de  $t$  que fornece a melhor organização diagramal é  $t = 1$ . O valor de  $s_0$  que ajustou melhor a massa experimental da  $\Xi^{--}$  da Eq.(3.16), Fig. 3.12, é de  $\Delta = 0.44\text{GeV}$ . A análise da convergência da OPE se mostrou equivalente a da regra de soma da  $\Xi^{--}$  da Eq.(3.15), Fig. 3.13. Esse valor mais realista para o limiar do contínuo forneceu uma maior contribuição do pólo, Fig. 3.14. A estabilidade da massa em função da massa de Borel não é tão boa, como pode ser visto pela Fig. 3.12 e o ajuste foi feito para  $M^2 = 1\text{GeV}^2$ . O erro da massa gerado pela variação do

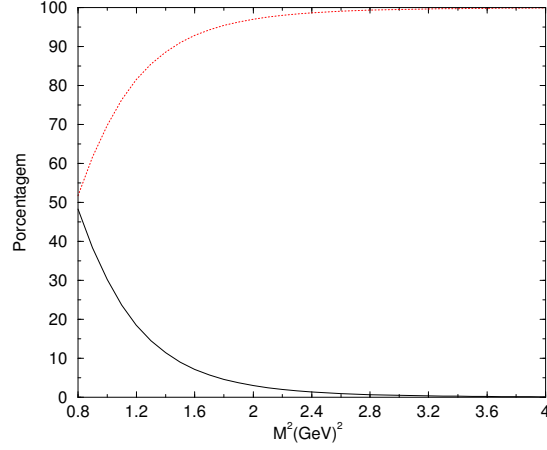


Figura 3.11: Linha sólida contribuição do pólo, linha pontilhada contribuição da ressonância.

limiar do contínuo de  $0.34 < \Delta < 0.54\text{GeV}$  é de  $\approx 100\text{MeV}$ . Para  $\Delta = 0.54\text{GeV}$  a estrutura 1 possui uma inversão de sinal para  $M^2 \approx 2\text{GeV}^2$ . Esse fato nos leva a uma indeterminação da paridade para altos valores do limiar do contínuo.

Para  $M^2 = 1\text{GeV}^2$ , temos

$$m_{\Xi} = 1.9 \pm 0.1\text{GeV}.$$

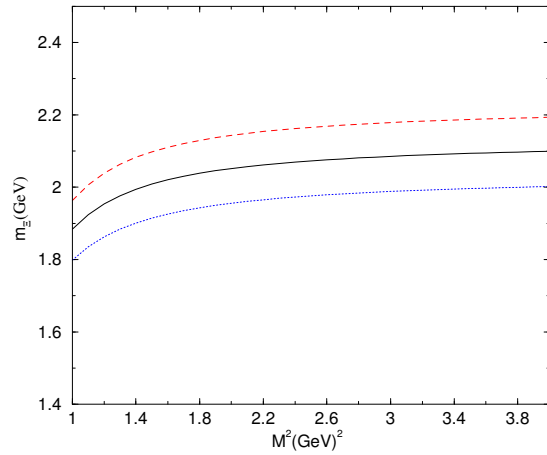


Figura 3.12: Curva da massa para a  $\Xi$  no campo da Eq.(3.16) na estrutura  $/q$ , linha sólida  $\Delta_{\Xi} = 0.44\text{GeV}$ , linha pontilhada  $\Delta_{\Xi} = 0.34\text{GeV}$ , linha tracejada  $\Delta_{\Xi} = 0.54\text{GeV}$ .

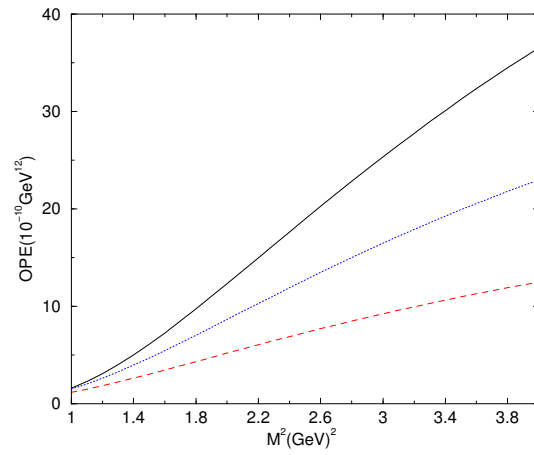


Figura 3.13: Termos da OPE, linha sólida termo perturbativo, linha pontilhada operadores de dimensão 4, linha tracejada operadores de dimensão 6.

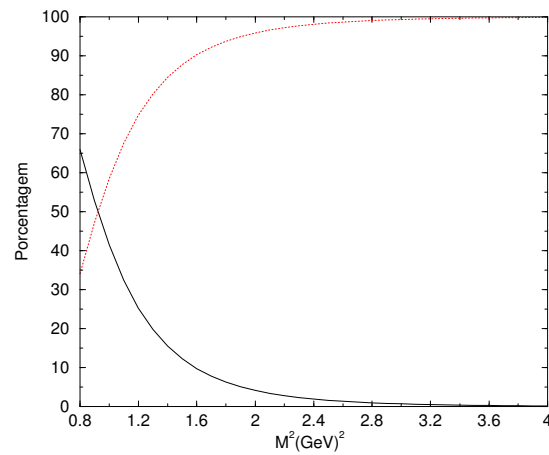


Figura 3.14: Linha sólida contribuição do pólo, linha pontilhada contribuição da ressonância.

# Capítulo 4

## O vértice $\Theta nK$

O cálculo da constante de acoplamento  $g_{\Theta nK}$  permite a obtenção da largura de decaimento do processo:

$$\Theta^+ \rightarrow nK^+.$$

O primeiro cálculo desta constante de acoplamento, foi realizado em 1997 por Diakonov *et al.*[1] usando o modelo de sólitons quirais (QSM), para uma  $\Theta^+$  de paridade positiva e considerando o kaon como uma partícula pseudoescalar, obtendo  $g_{\Theta nK} = 4.1$ , que fornece a largura de decaimento  $\Gamma_{\Theta} = 18\text{MeV}$ <sup>1</sup>.

Nós fizemos um cálculo da constante de acoplamento  $g_{\Theta nK}$  usando as as QCDSR [22], num tratamento distinto do proposto na Ref.[15], onde não consideramos as correções radiativas.

### 4.1 Lado fenomenológico

A lagrangeana que dá a constante de acoplamento do vértice  $\Theta nK$  [52], considerando o kaon como uma partícula pseudoescalar é:

$$\mathcal{L} = ig_{\Theta nK} \bar{\Theta} K n, \tag{4.1}$$

para a paridade negativa da  $\Theta$ . Para a paridade positiva a lagrangeana efetiva é obtida via adição de  $\gamma_5$  nessa lagrangeana [1].

---

<sup>1</sup>Usando  $m_{\Theta} = 1530\text{MeV}$  obtemos  $\Gamma_{\Theta} = 16\text{MeV}$ .

No capítulo 3, estudamos a paridade da  $\Theta^+$  através da análise da estrutura 1, onde obtivemos um indício de que a paridade dessa partícula é negativa. Na Ref.[13] é usado uma outra parametrização para o lado fenomenológico, onde a estrutura 1 está misturada com a estrutura  $q$ . Neste caso, só é possível obter uma regra de soma estável para uma  $\Theta^+$  de paridade negativa.

Analogamente ao tratamento dado no capítulo 2, a função de três pontos para o vértice  $\Theta nK$  é dada por

$$\Gamma(p, p') = \int d^4x d^4y e^{-iqy} e^{ip'x} \Gamma(x, y), \quad (4.2)$$

$$\Gamma(x, y) = \langle 0 | T \{ \eta_n(x) j_K(y) \bar{\eta}_\Theta(0) \} | 0 \rangle. \quad (4.3)$$

Usando a Eq.(2.7), obtemos:

$$\Gamma(p, p') = \sum_{s, s'} \frac{\langle 0 | \eta_n | p', s' \rangle V(p, p') \langle q | j_K | 0 \rangle \langle p, s | \bar{\eta}_\Theta | 0 \rangle}{(p'^2 - m_n^2)(q^2 - m_K^2)(p^2 - m_\Theta^2)}, \quad (4.4)$$

onde,

$$V(p, p') = \bar{U}^{s'}(p') i g_{\Theta nK} U^s(p),$$

$$\langle 0 | \eta_n | p, s \rangle = \lambda_n U^s(p), \quad (4.5)$$

$$\langle p, s | \bar{\eta}_\Theta | 0 \rangle = -\lambda_\Theta \bar{U}^s(p) \gamma_5, \quad (4.6)$$

$$\langle q | j_K | 0 \rangle = \lambda_K. \quad (4.7)$$

Os acoplamentos  $\lambda_n$  e  $\lambda_\Theta$  só podem ser obtidos através das QCDSR. Por outro lado,  $\lambda_K$  pode ser determinado através da relação com a sua constante de decaimento [53],

$$\lambda_K = \frac{f_K m_K^2}{m_u + m_s}. \quad (4.8)$$

Assim ficamos com a expressão para o correlator,

$$\Gamma(p, p') = -i g_{\Theta nK} \lambda_\Theta \lambda_n \lambda_K \frac{(\not{p}' + m_n)(\not{p} + m_\Theta) \gamma_5}{(p'^2 - m_n^2)(q^2 - m_K^2)(p^2 - m_\Theta^2)}. \quad (4.9)$$

Expressando esse correlator numa base ortogonal para os momentos  $q$  e  $p'$ , obtemos,

$$\Gamma(p, p') = \frac{-g_{\Theta nK} \lambda_\Theta \lambda_n \lambda_K}{(p'^2 - m_n^2)(q^2 - m_K^2)(p^2 - m_\Theta^2)} \Gamma_E,$$

$$\Gamma_E = \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 q_\mu p_\nu - i m_n \not{q} \gamma_5 + i(m_\Theta + m_n) \not{p} \gamma_5 + i(p^2 + m_\Theta m_n - qp) \gamma_5. \quad (4.10)$$

Neste trabalho iremos considerar apenas a estrutura  $\sigma^{\mu\nu} \gamma_5 q_\mu p_\nu$ . Essa estrutura têm a vantagem de ser indiferente da paridade da  $\Theta^+$  e principalmente ser independente das massas das partículas. No estudo do vértice  $J/\psi DD$  [34, 36] observamos que essas estruturas com massa são mais instáveis que as estruturas sem massa, o mesmo acontecendo com a regra de soma de dois pontos para os pentaquarks, onde observamos que a estrutura 1 é mais instável que a estrutura  $\not{q}$  com a variação do limiar do contínuo.

## 4.2 Lado da QCD

No lado da QCD consideraremos as correntes [53, 54, 13],

$$j_K(y) = \bar{s}(y) i \gamma_5 u(y), \quad (4.11)$$

$$\eta_n(x) = \epsilon^{abc} (d_a^T(x) C \gamma_\mu d_b(x)) \gamma_5 \gamma^\mu u_c(x), \quad (4.12)$$

$$\bar{\eta}_\Theta(0) = -\epsilon^{abc} \epsilon^{def} \epsilon^{cfg} s_g^T(0) C [\bar{d}_e(0) \gamma_5 C \bar{u}_d^T(0)] [\bar{d}_b(0) C \bar{u}_a^T(0)]. \quad (4.13)$$

Inserindo as correntes na função de vértice Eq.(4.3), obtemos o correlator escrito na forma,

$$\begin{aligned} \Gamma(x, y) &= 2i \epsilon^{abc} \epsilon^{def} \epsilon^{cfg} \epsilon^{a'b'c'} \tilde{\Gamma}(x, y), \\ \tilde{\Gamma}(x, y) &= [N_2(x) - N_1(x)] K(y) \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde

$$\begin{aligned} N_1(x) &= \gamma_5 \gamma^\beta S_{c'd}(x) C S_{a'e}^T(x) C \gamma_\beta S_{b'b}(x) \gamma_5, \\ N_2(x) &= \gamma_5 \gamma^\beta S_{c'd}(x) \gamma_5 C S_{a'e}^T(x) C \gamma_\beta S_{b'b}(x), \\ K(y) &= C S_{ha}^T(y) C \gamma_5 C S_{gh}^T(-y, m_s). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Procedendo de maneira análoga ao capítulo 3, onde inserimos o propagador de quarks cheio nas Eqs.(4.15), obtemos a parte invariante da função de vértice Eq.(4.14) escrita na forma:

$$\Gamma(x^2, y^2) = H(x^2) L(y^2). \quad (4.16)$$

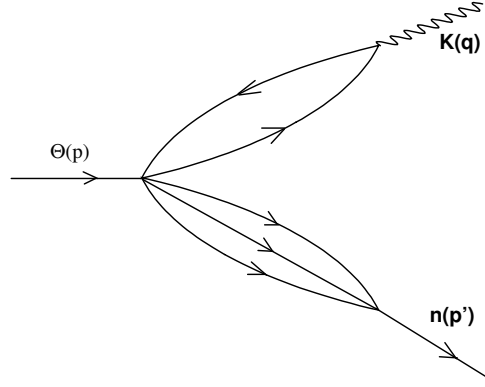


Figura 4.1: Diagrama que representa o correlator escrito em um produto das matrizes  $N(x)K(y)$ .

A transformada de Fourier, Eq.(4.2), age separadamente nas funções  $H(x^2)$  e  $L(y^2)$ , tornando o cálculo muito simples e obtemos a função de vértice dependente de apenas dois momentos,

$$\Gamma(p'^2, q^2) = \widetilde{H}(p'^2) \widetilde{L}(q^2). \quad (4.17)$$

Para os diagramas onde é possível escrever uma relação de dispersão simples para cada função  $\widetilde{H}(p'^2)$  e  $\widetilde{L}(q^2)$ , podemos escrever a função de vértice numa relação de dispersão dupla:

$$\Gamma^{dupla}(p'^2, q^2) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty ds du \frac{\text{Im} \widetilde{H}(s) \text{Im} \widetilde{L}(u)}{(s - p'^2)(u - q^2)}. \quad (4.18)$$

Como foi visto no capítulo 2, a relação de dispersão dupla permite descontarmos as contribuições do contínuo, por outro lado, uma parcela do diagrama (f), Fig. 4.2, não possui uma parte imaginária bem definida (ver apêndice F).

Assim temos a função de vértice para a estrutura  $\sigma^{\mu\nu} \gamma_5 q_\mu p_\nu$  após a subtração dos estados do contínuo,

$$\Gamma_{QCD}(p'^2, q^2) = \int_0^{s_0} \int_0^{u_0} ds du \frac{\rho^{QCD}(s, u)}{(s - p'^2)(u - q^2)} + \int_0^{s_0} \int_0^\infty ds du \frac{\phi_{f_2}^{QCD}(s, u)}{(s - p'^2)(u - q^2)^2} \quad (4.19)$$

onde,

$$\rho_a(s, u) = -\frac{m_s}{\pi^6 2^{11}} s^2$$

$$\begin{aligned}
\rho_b(s, u) &= \frac{\langle \bar{s}s \rangle + \langle \bar{q}q \rangle}{\pi^4 3! 2^6} s^2 \delta(u) \\
\rho_c(s, u) &= -\frac{m_s \langle g_s^2 G^2 \rangle}{\pi^6 2^{12}} \\
\rho_d(s, u) &= \frac{3 \langle \bar{q}g_s \sigma \cdot G q \rangle - \langle \bar{s}g_s \sigma \cdot G s \rangle}{\pi^4 3^2 2^7} s \delta(u) \\
\rho_e(s, u) &= -m_s \frac{\langle g_s^2 G^2 \rangle}{\pi^6 3^2 2^{10}} s \delta(u) \\
\rho_{f1}(s, u) &= -m_s \frac{\langle g_s^2 G^2 \rangle}{\pi^6 3^2 2^{10}} s \delta(u) \\
\phi_{f2}(s, u) &= m_s \frac{\langle g_s^2 G^2 \rangle}{\pi^6 3^2 2^{11}} s \ln(u/\Lambda_{\text{QCD}}^2)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

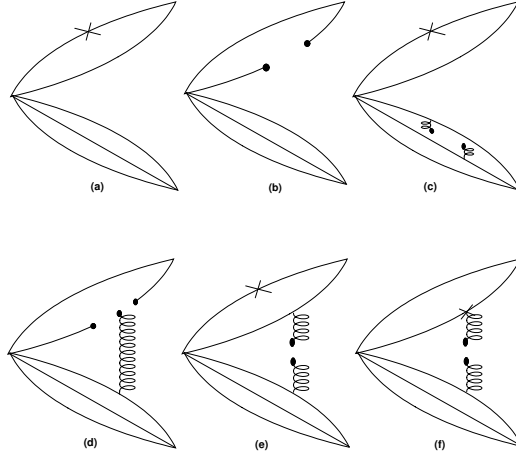


Figura 4.2: Diagramas efetivos para o vértice  $\Theta n K$ .

### 4.3 Regra de soma na estrutura $\sigma^{\mu\nu}\gamma_5 q_\mu p_\nu$

Usando o modelo para as excitações pólo-contínuo discutidas no capítulo 2, temos:

$$\Gamma_{PP}(p^2, p'^2, q^2) + \Gamma_{PC1}(p^2, p'^2, q^2) + \Gamma_{PC2}(p^2, p'^2, q^2) = \Gamma^{QCD}(p'^2, q^2) \tag{4.21}$$

onde,

$$\Gamma_{PP}(p^2, p'^2, q^2) = \frac{G}{(p'^2 - m_n^2)(q^2 - m_K^2)(p^2 - m_\Theta^2)}, \tag{4.22}$$

$$\Gamma_{PC1}(p^2, p'^2, q^2) = \frac{1}{m_N^2 - p'^2} \int_{m_K^{*2}}^{\infty} du \frac{b_2(u, p^2)}{u - q^2}, \tag{4.23}$$

$$\Gamma_{PC2}(p^2, p'^2, q^2) = \frac{1}{m_K^2 - q^2} \int_{m_N^{*2}}^{\infty} ds \frac{b_1(s, p^2)}{s - p'^2}, \quad (4.24)$$

e  $G = -g_{\Theta n K} \lambda_{\Theta} \lambda_N \lambda_K$ .

### 4.3.1 Modelos para o acoplamento pólo contínuo

Como podemos notar na regra de soma da Eq.(4.21), o lado direito dessa equação só depende de dois momentos, enquanto o lado esquerdo depende de três momentos. Neste trabalho seguimos o tratamento proposto na Ref.[55], que consiste em estabelecer um vínculo entre os momentos, tornando possível a relação entre os dois lados da regra de soma.

Devido ao fato de que a massa do nucleon é próxima da massa da  $\Theta^+$ , optamos pela escolha,

$$p^2 = p'^2.$$

Este vínculo entre os momentos nos leva a uma regra de soma onde as contribuições das transições pólo-contínuo não são suprimidas, tornando o termo pólo-pólo misturado a essas contribuições. Além disso, essas contribuições envolvem funções completamente desconhecidas  $b_1(s, p^2)$  e  $b_2(u, p^2)$ , que representam respectivamente as contribuições do contínuo do nucleon e do kaon.

Assim precisamos de um modelo para essas funções, e consideramos o seguinte modelo para as Eqs.(4.23) e (4.24):

$$b_1(s, p^2) = \delta(s - m_n^{*2}) \int_{m_{\Theta}^2}^{\infty} dw \frac{b_1(w)}{w - p^2}, \quad (4.25)$$

$$b_2(u, p^2) = \tilde{b}_2(u) \int_{m_{\Theta}^2}^{\infty} dw \frac{b_2(w)}{w - p^2}. \quad (4.26)$$

Esse modelo pode ser interpretado como a transição de todas as  $\Theta^+$  em todos os kaons, mas saturamos a contribuição dos nucleons no seu primeiro estado excitado, a ressonância Roper,  $N(1440)$ . Essa assimetria pode ser justificada pelo fato que o primeiro estado excitado do kaon ainda não está completamente estabelecido [10].

Inserindo as Eqs.(4.25) e (4.26) nas Eqs.(4.23) e (4.24), temos:

$$\Gamma_{PC1}(p^2, p'^2, q^2) = \int_{m_K^{*2}}^{\infty} du \frac{\tilde{b}_2(u)}{u - q^2} \int_{m_\Theta^2}^{\infty} dw \frac{b_2(w)}{(m_N^2 - p^2)(w - p^2)}, \quad (4.27)$$

$$\Gamma_{PC2}(p^2, p'^2, q^2) = \frac{1}{m_K^2 - q^2} \int_{m_\Theta^2}^{\infty} dw \frac{b_1(w)}{(m_n^{*2} - p^2)(w - p^2)}. \quad (4.28)$$

### 4.3.2 Regra de soma no pólo do kaon

Na regra de soma no pólo do kaon fazemos a aproximação  $m_K = 0$ , assim obtemos uma dependência  $1/q^2$  para a Eq.(4.21). Nesse tipo de regra de soma fazemos  $q^2 \rightarrow 0$ , onde só os diagramas proporcionais a  $1/q^2$  contribuem do lado da QCD [56]. Assim na Fig. 4.2 iremos excluir os diagramas (a), (c) e a parte logarítmica de (f).

O uso desta regra de soma, nos fornece também uma supressão da contribuição  $\Gamma_{PC1}$ , Eq.(4.27). Assim fazendo a transformada de Borel em  $p^2$  na Eq.(4.28) e eliminando os termos que são suprimidos exponencialmente, temos a contribuição do pólo-contínuo nessa regra de soma:

$$\Gamma^{PC}(q^2, M^2) = \frac{A}{-q^2} e^{-\frac{m_N^{*2}}{M^2}}, \quad (4.29)$$

onde,

$$A = \int_{m_\Theta^2}^{\infty} dw \frac{b_1(w)}{w - m_n^{*2}}. \quad (4.30)$$

Assim obtemos:

$$G \frac{e^{-\frac{m_\Theta^2}{M^2}} - e^{-\frac{m_n^2}{M^2}}}{m_\Theta^2 - m_N^2} + A e^{-\frac{m_n^{*2}}{M^2}} = \int_0^{s_0} ds \rho_{polo}(s) e^{-\frac{s}{M^2}}, \quad (4.31)$$

onde,

$$\rho_{polo}(s) = \frac{\langle \bar{s}s \rangle + \langle \bar{q}q \rangle}{\pi^4 3! 2^7} s^2 + \frac{3\langle \bar{q}Gq \rangle - \langle \bar{s}Gs \rangle}{\pi^4 3^2 2^8} s - m_s \frac{\langle g_s^2 G^2 \rangle}{\pi^6 3^2 2^{10}} s. \quad (4.32)$$

Para eliminar o acoplamento fenomenológico,  $A$ , da Eq.(4.31) geramos uma nova regra de soma via derivação dessa equação com relação a  $M^2$ , obtendo um sistema de duas equações com duas incógnitas ( $G$  e  $A$ ) que pode ser facilmente resolvido.

### 4.3.3 Regra de soma via dupla transformada de Borel

Na regra de soma via dupla transformada de Borel em  $q^2$  e  $p^2$ , temos todos os diagramas da Fig. 4.2 contribuindo, e neste caso a contribuição  $\Gamma_{PC1}$  é suprimida exponencialmente. A parcela  $\Gamma_{PC2}$  é semelhante a regra de soma no pólo do kaon, exceto pela transformada de Borel na parcela que depende de  $q^2$ . Assim temos:

$$Ge^{-\frac{m_K^2}{M'^2}} \frac{e^{-\frac{m_\Theta^2}{M^2}} - e^{-\frac{m_n^2}{M^2}}}{m_\Theta^2 - m_N^2} + Ae^{-\frac{m_K^2}{M'^2}} e^{-\frac{m_n^{*2}}{M^2}} = \int_0^{s_0} ds \rho_{dupla}(s) e^{-\frac{s}{M^2}}, \quad (4.33)$$

onde,

$$\rho_{dupla}(s) = \rho_{polo}(s) + \rho_{a+c}(s) + \rho_{f2}(s). \quad (4.34)$$

A função  $\rho_{polo}(s)$  é a mesma da Eq.(4.32). Para as outras densidades espectrais temos:

$$\rho_{a+c}(s) = M'^2 (1 - e^{-\frac{u_0}{M'^2}}) \left( -\frac{m_s}{\pi^6 2^{11}} s^2 - \frac{m_s \langle g_s^2 G^2 \rangle}{\pi^6 2^{12}} \right), \quad (4.35)$$

$$\rho_{f2}(s) = \ln(M'^2/\tilde{\Lambda}^2) m_s \frac{\langle g_s^2 G^2 \rangle}{\pi^6 3^2 2^{11}} s, \quad (4.36)$$

onde  $\tilde{\Lambda} = e^{\frac{\gamma_E}{2}} \Lambda_{\text{QCD}}$ .

Um fato interessante nessa regra de soma é que se  $m_K = 0$  e usando o resultado que  $\rho_{polo}$  é o termo dominante da Eq.(4.34), temos que a regra de soma via dupla relação se torna idêntica a regra de soma no pólo do kaon.

### 4.3.4 Regra de soma via três momentos iguais

Na Ref.[55] Narison estudou o decaimento de mésons exóticos formados de quatro quarks, que apresenta essa mesma necessidade de vincular os momentos. Nessa Ref.[55] o procedimento adotado foi igualar todos os momentos e fazer uma única transformada de Borel. Seguindo Narison nós tomamos  $p'^2 = p^2 = q^2$  e fizemos uma única transformada de Borel nas Eqs.(4.27) e (4.28), obtendo:

$$\Gamma^{PC}(M^2) = \tilde{A} \frac{e^{-\frac{m_N^{*2}}{M^2}} - e^{-\frac{m_K^2}{M^2}}}{m_N^{*2} - m_K^2} + \tilde{B} e^{-\frac{m_N^2}{M^2}}, \quad (4.37)$$

onde,

$$\tilde{A} = - \int_{m_\Theta^2}^{\infty} dw \frac{b_1(w)}{w - m_K^2}, \quad (4.38)$$

$$\tilde{B} = \int_{m_\Theta^2}^{\infty} dw \frac{b_2(w)}{w - m_n^2} \int_{m_K^{*2}}^{\infty} ds \frac{\tilde{b}_2(s)}{s - m_n^2}, \quad (4.39)$$

uma vez que

$$\left| \frac{1}{m_j^2 - m_i^{*2}} \int_{m_\Theta^2}^{\infty} dw \frac{b_i(w)}{w - m_j^2} \right| \gg \left| \int_{m_\Theta^2}^{\infty} dw \frac{b_i(w)}{(w - m_i^{*2})(w - m_j^2)} \right|. \quad (4.40)$$

Neste caso, a integral dupla do lado da QCD não pode ser fatorada em duas integrais independentes, assim obtemos a seguinte regra de soma

$$\begin{aligned} \frac{G}{m_\Theta^2 - m_K^2} \left[ \frac{e^{-\frac{m_\Theta^2}{M^2}} - e^{-\frac{m_N^2}{M^2}}}{m_N^2 - m_\Theta^2} + \frac{e^{-\frac{m_N^2}{M^2}} - e^{-\frac{m_K^2}{M^2}}}{m_N^2 - m_K^2} \right] + \tilde{A} \frac{e^{-\frac{m_N^{*2}}{M^2}} - e^{-\frac{m_K^2}{M^2}}}{m_N^{*2} - m_K^2} + \tilde{B} e^{-\frac{m_N^2}{M^2}} = \\ - \int_0^{u_0} \int_0^{s_0} duds \rho^{QCD}(s, u) F(s, u) + \int_0^{s_0} \int_0^{\infty} duds \phi_{f_2}^{QCD}(s, u) G(s, u) \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde  $F(s, u) = \frac{e^{-\frac{s}{M^2}} - e^{-\frac{u}{M^2}}}{s - u}$  e  $G(s, u) = \frac{\partial}{\partial u} F(s, u)$ .

## 4.4 Resultados

Neste trabalho usamos os parâmetros apresentados no capítulo 3 junto com os valores das massas  $m_K = 0.493\text{GeV}$ ,  $m_n = 0.938\text{GeV}$ ,  $m_\Theta = 1.54\text{GeV}$ ,  $m_n^* = 1.44\text{GeV}$ , além da definição para o limiar do contínuo para o nucleon e para o kaon:

$$s_0 = (m + \Delta)^2.$$

Os acoplamentos  $\lambda_\Theta$  e  $\lambda_n$  foram obtidos das respectivas regras de soma de dois pontos na estrutura  $\not{q}$ . A regra de soma da  $\Theta^+$  foi estudada no capítulo 3 e a regra de soma do nucleon pode ser vista no trabalho [57], onde usamos  $\Delta_n = 0.5\text{GeV}$ . Os valores numéricos são:

$$\lambda_n = 2.4 \times 10^{-2} \text{GeV}^3, \lambda_\Theta = 2.4 \times 10^{-5} \text{GeV}^6.$$

Para o acoplamento  $\lambda_K$ , Eq.(4.8), usamos o valor experimental para a constante de decaimento  $f_K = 160\text{MeV}$  [53], e para a massa do quark leve usamos a relação de Gell-Mann-Oakes-Renner [58] para  $m_u = m_d$ , obtendo  $m_u = 6.7\text{MeV}$  e

$$\lambda_K = 0.36 \text{GeV}^2.$$

A regra de soma com todos os momentos iguais possui uma contribuição do contínuo muito grande, tornando essa regra de soma pouco confiável. Para a regra de soma no pólo do kaon, estudamos a influência do contínuo na mesma, através da região III na Fig. 2.3. Mesmo não possuindo uma interpretação clara sobre o significado físico dessa região, o fato dessa região ser importante é um forte fator de incerteza nessa regra de soma. Os resultados mostraram que a região III contribui com mais de 60% do total, que é um resultado muito ruim, pois o modelo de Ioffe despreza essa região. Para a regra de soma via dupla transformada de Borel, a região III continua com essa contribuição de 60% do total, por outro lado, a região II só possui uma contribuição da ordem da região I para valores da massa de Borel  $M^2 > 2\text{GeV}^2$ .

Obtivermos para  $g_{\Theta n K}$ , nos três tipos de regras de soma, um valor bastante elevado e incompatível com a observação de uma largura menor que 1MeV para a  $\Theta^+$ , mesmo para o caso que a  $\Theta^+$  possua paridade positiva. Numa interpretação mais conservadora, esse fato pode indicar que a corrente da Eq.(4.13) não descreve a  $\Theta^+$  ou que os problemas gerados pela presença dominante da região III tornou inválida essa regra de soma.

Uma outra interpretação para este resultado ruim, consiste no fato que muitos dos diagramas da Fig. 4.2 representam um estado ligado  $K - n$  e não um autêntico pentaquark. Assim a corrente da  $\Theta^+$  [13], possui uma componente similar a uma molécula  $K - n$  que não representa o pentaquark e que deve ser subtraída da regra de soma <sup>2</sup>.

Podemos ver na Fig. 4.1, o decaimento da  $\Theta^+$  em duas “pétalas”, uma associada com o kaon e outra associada com o nucleon. Podemos interpretar na Fig. 4.2 a parcela relacionada com o estado ligado  $K - n$  os diagramas (a)+(b)+(c), pois a estrutura de cor que liga as “pétalas” é uma delta, tornado esses estados com uma estrutura de cor semelhante a um estado final contendo dois singletos de cor, que pode ser inter-

---

<sup>2</sup>Na Ref.[23] foi apresentada pela primeira vez a idéia que as correntes existentes para a  $\Theta^+$  [12, 13, 17] possuem uma grande componente de estados  $K - n$ .

pretado como sendo um estado ligado  $K - n$ . Para os diagramas (d)+(e)+(f), temos uma troca de cor entre as “pétalas”, que pode ser interpretado como um autêntico pentaquark. Chamamos de **diagramas conectados na cor (CC)**, quando estamos apenas considerando os diagramas: (d)+(e)+(f).

Em todos os nossos resultados usamos apenas os diagramas CC e obtivemos, para todos os casos, um valor negativo para a constante de acoplamento.

#### 4.4.1 Regra de soma no pólo do kaon

Apresentamos na Fig. 4.3 o estudo da estabilidade da constante de acoplamento em função da massa de Borel, para um intervalo do limiar do contínuo do nucleon em torno do valor usado na função de dois pontos,  $\Delta_N = 0.5\text{GeV}$ . Escolhemos a massa de Borel no intervalo  $1 < M^2 < 2\text{GeV}^2$ , pois nesse intervalo a OPE é mais confiável e o efeito da região III não excedeu 70% do total, como pode ser visto na Fig. 4.4.

Vemos que a regra de soma possui uma boa estabilidade com respeito a massa de Borel e que o erro gerado pela variação do contínuo é muito pequeno. Para  $M^2 = 1\text{GeV}^2$ , temos:

$$|g_{\Theta n K}| = 0.80 \pm 0.01$$

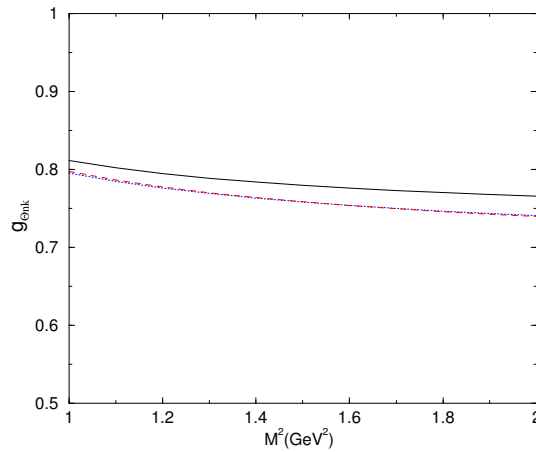


Figura 4.3: Acoplamento  $|g_{\Theta n K}|$ : linha sólida  $\Delta_N = 0.5\text{GeV}$ , linha pontilhada  $\Delta_N = 0.4\text{GeV}$ , linha-traço  $\Delta_N = 0.6\text{GeV}$ .

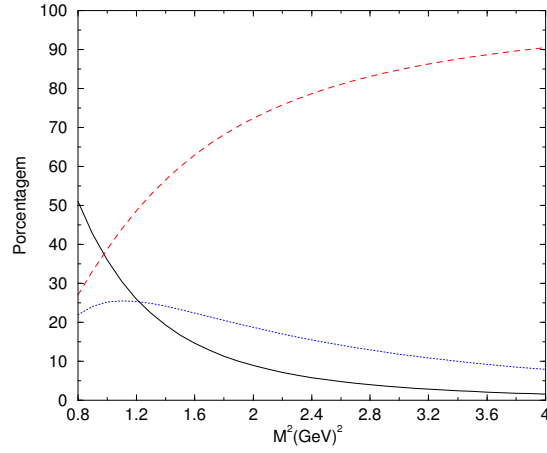


Figura 4.4: Análise das contribuições do contínuo para  $\Delta_N = 0.5\text{GeV}$ ; linha sólida contribuição do pólo, linha pontilhada contribuição do pólo-contínuo, linha-traço contribuição da região III.

#### 4.4.2 Regra de soma via dupla transformada de Borel

Apresentamos na Fig. 4.5 o estudo da estabilidade da constante de acoplamento em função da massa de Borel. A estabilidade da constante de acoplamento é muito estável em  $M'^2$ , e como observamos que na teoria completa o uso de  $M'^2 = 1\text{GeV}^2$  diminui a contribuição do contínuo-contínuo, optamos por usar esse valor também no método CC. A curva das contribuições do contínuo é semelhante ao obtido na regra de soma no pólo do kaon, justificando novamente o uso do intervalo  $1 < M^2 < 2\text{GeV}^2$ .

Vemos que a regra de soma é bem semelhante com a regra de soma no pólo do kaon e que o erro da constante de acoplamento é igualmente pequeno. Para  $M^2 = 1\text{GeV}^2$ , temos:

$$|g_{\Theta nK}| = 0.91 \pm 0.01.$$

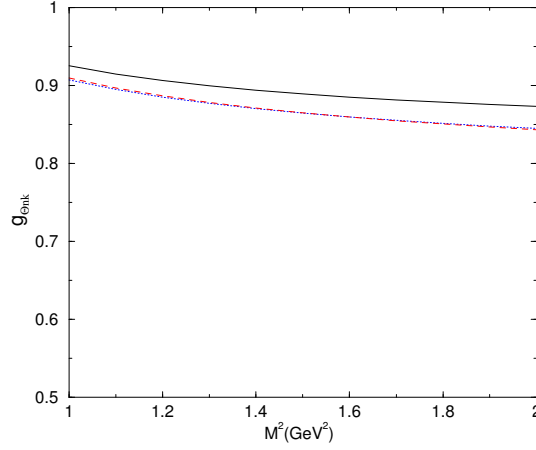


Figura 4.5: Acoplamento  $|g_{\Theta n K}|$  para  $M'^2 = 1 \text{ GeV}^2$ : linha sólida  $\Delta_N = 0.5 \text{ GeV}$ , linha pontilhada  $\Delta_N = 0.4 \text{ GeV}$ , linha-traço  $\Delta_N = 0.6 \text{ GeV}$ .

#### 4.4.3 Largura de decaimento

A largura de decaimento da  $\Theta^+$ ,  $\Gamma_\Theta$ , considerando o caso mais geral, onde desconhecemos a paridade desse pentaquark é dada por [59]:

$$\Gamma_{\Theta_\pm} = \frac{1}{8\pi m_\Theta^3} g_{\Theta n K}^2 [(m_n \mp m_\Theta)^2 - m_K^2] \sqrt{\lambda(m_\Theta^2, m_n^2, m_K^2)}, \quad (4.42)$$

onde  $\Gamma_{\Theta_+}(\Gamma_{\Theta_-})$  é a largura de decaimento para a  $\Theta^+$  de paridade positiva (negativa) e

$$\lambda(m_\Theta^2, m_n^2, m_K^2) = (m_\Theta^2 + m_n^2 - m_K^2)^2 - 4m_\Theta^2 m_n^2.$$

Os experimentos mais recentes [10] indicam que  $\Gamma_\Theta < 1 \text{ MeV}$ . Nosso resultado mostrado na Tabela 4.1 é incompatível com a  $\Theta^+$  de paridade negativa.

Tabela 4.1: Acoplamento e largura de decaimento nos diagramas CC.

	pólo do kaon	dupla Borel
$ g_{\Theta n K} $	$0.80 \pm 0.01$	$0.91 \pm 0.01$
$\Gamma_{\Theta_+} (\text{MeV})$	$0.70 \pm 0.02$	$0.90 \pm 0.02$
$\Gamma_{\Theta_-} (\text{MeV})$	$34.4 \pm 1$	$44.6 \pm 1$

A teoria total fornece uma largura muito grande para uma  $\Theta^+$  de paridade negativa, por outro lado, a teoria total para uma  $\Theta^+$  de paridade positiva fornece uma largura

compatível com o modelo de sólitons quirais [1]. Na Tabela 4.2 são apresentados os resultados com a teoria total, onde no método da dupla transformada de Borel, consideramos a variação do limiar do contínuo do kaon em torno de  $\Delta_K = (0.5 \pm 0.1)\text{GeV}$ .

Tabela 4.2: Acoplamento e largura de decaimento com todos os diagramas.

	pólo do kaon	dupla Borel
$ g_{\Theta nK} $	$2.71 \pm 0.05$	$3.89 \pm 0.08$
$\Gamma_{\Theta_+}(\text{MeV})$	$8.31 \pm 0.3$	$16.5 \pm 0.7$
$\Gamma_{\Theta_-}(\text{MeV})$	$396.0 \pm 14.6$	$816.0 \pm 33.5$

# Capítulo 5

## O vértice $J/\psi DD^*$

O cálculo das constantes de acoplamento  $g_{J/\psi DD}$ ,  $g_{J/\psi DD^*}$  e  $g_{J/\psi D^* D^*}$  possibilitam o estudo do processo de dissociação da  $J/\psi$  por píons,

$$\pi + J/\psi \rightarrow D^{(*)} \bar{D}^{(*)}.$$

Estas constantes de acoplamento têm sido estimados por três diferentes métodos: modelo de quark méson constituintes (CQMM) [60], pelo modelo relativístico de quarks constituintes (RCQM) [61] e pelas QCDSR [34, 35, 36, 37].

A constante de acoplamento  $g_{J/\psi DD^*}$  aparece em 5 diagramas do processo de dissociação da  $J/\psi$  por píons [60]. Em particular temos os processos da Fig. 5.1.

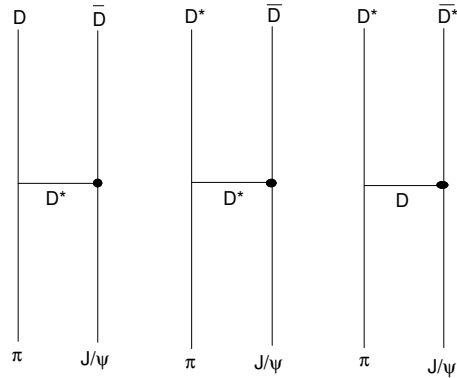


Figura 5.1: Diagramas do processo de dissociação da  $J/\psi$  por píons, onde aparece a constante de acoplamento  $g_{J/\psi DD^*}$ .

## 5.1 Lado da Fenomenologia

A lagrangeana de interação, Ref.[62], que descreve a interação das partículas:  $J/\psi$ ,  $D^*$  e  $D$ , é dada por,

$$\mathcal{L}_{\psi DD^*} = g_{\psi DD^*} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \psi_\mu (\partial_\nu \bar{D} \partial_\beta D_\alpha^* + \partial_\nu D \partial_\beta \bar{D}_\alpha^*). \quad (5.1)$$

Usando as regras de Feynman, o vértice da interação  $J/\psi DD^*$  Fig. 5.2, com  $p_1, p_2$  e  $p_3$  sendo os quadrimomentos das partículas  $J/\psi$ ,  $D^*$  e  $D$  respectivamente, é dado por:

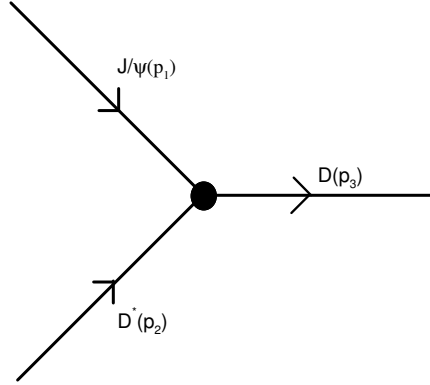


Figura 5.2: Vértice  $J/\psi DD^*$ .

$$iV_{\lambda,\lambda'}(p_1, p_2, p_3) = ig_{\psi DD^*} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_\alpha^\lambda(p_1) \epsilon_\gamma^{\lambda'}(p_2) p_{3\beta} p_{2\delta}. \quad (5.2)$$

Para o caso da  $D^*$  saindo e da  $D$  entrando no vértice, podemos obter esse novo vértice através da transformação no tensor de polarização do méson  $D^*$ ,  $\epsilon_\gamma^{\lambda'}(p_2) \rightarrow \epsilon_\gamma^{*\lambda'}(p_2)$ , aplicada ao vértice Eq.(5.2).

Analogamente ao tratamento dado no capítulo 2, a função de três pontos para o vértice Fig. 5.2 é dada por

$$\Gamma(p, p') = \int d^4x d^4y e^{-i(p'-p)y} e^{ip \cdot x} \Gamma(x, y), \quad (5.3)$$

$$\Gamma(x, y) = \langle 0 | T \{ j_3(x) j_2^\dagger(y) j_1^\dagger(0) \} | 0 \rangle. \quad (5.4)$$

Usando a Eq.(2.7), obtemos as seguintes regras, para os vários tipos de vértices:

- Para o caso  $J/\psi$  off-shell, usando  $p_1 = q$ ,  $p_2 = p$  e  $p_3 = p'$  com  $q = p' - p$ , onde

$$\Gamma_{\mu\nu}^\psi(x, y) = \langle 0 | T \{ j^{(D)}(x) j_\mu^{\dagger(J/\psi)}(y) j_\nu^{\dagger(D^*)}(0) \} | 0 \rangle, \quad (5.5)$$

temos:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\psi(p, p') = \sum_{\lambda, \lambda'} \frac{\langle 0 | j^{(D)}(0) | p' \rangle V_{\lambda, \lambda'}^\psi(p, p') \langle q, \lambda | j_\mu^{\dagger(J/\psi)}(0) | 0 \rangle \langle p, \lambda' | j_\nu^{\dagger(D^*)}(0) | 0 \rangle}{(p'^2 - m_D^2 + i\epsilon)(q^2 - m_\psi^2 + i\epsilon)(p^2 - m_{D^*}^2 + i\epsilon)}, \quad (5.6)$$

onde,

$$V_{\lambda, \lambda'}^\psi(p, p') = g_{\psi DD^*} \epsilon^{\gamma\delta\alpha\beta} \epsilon_\gamma^\lambda(q) \epsilon_\alpha^{\lambda'}(p) p'_\delta p_\beta, \quad (5.7)$$

$$\langle 0 | J_\mu^{(J/\psi)}(0) | J/\psi(p) \rangle = m_{J/\psi} f_{J/\psi} \epsilon_\mu^{(J/\psi)}(p),$$

$$\langle 0 | J_\mu^{(D^*)}(0) | D^*(p) \rangle = m_{D^*} f_{D^*} \epsilon_\mu^{D^*}(p),$$

$$\langle 0 | J^{(D)}(0) | D(p) \rangle = \frac{m_D^2 f_D}{m_c + m_q}. \quad (5.8)$$

Desse modo ficamos com o correlator escrito na forma,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\psi(p, p') = F_{\mu\nu} \frac{g_{\psi DD^*} \frac{m_D^2 f_D}{m_c} m_{J/\psi} f_{J/\psi} m_{D^*} f_{D^*}}{(p'^2 - m_D^2 + i\epsilon)(q^2 - m_\psi^2 + i\epsilon)(p^2 - m_{D^*}^2 + i\epsilon)}, \quad (5.9)$$

onde,

$$F_{\mu\nu} = \epsilon^{\gamma\delta\alpha\beta} p'_\delta p_\beta \sum_{\lambda, \lambda'} \epsilon_\mu^{*\lambda}(q) \epsilon_\gamma^\lambda(q) \epsilon_\nu^{*\lambda'}(p) \epsilon_\alpha^{\lambda'}(p). \quad (5.10)$$

Inserindo a relação,

$$\sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q) \epsilon_\nu^{(*) (\lambda)}(q) = \frac{q_\mu q_\nu}{m^2} - g_{\mu\nu}, \quad (5.11)$$

obtemos quatro termos para o correlator fenomenológico. Entretanto, como a contração de um tensor anti-simétrico por um simétrico é zero, ficamos apenas com um único termo:

$$F_{\mu\nu} = \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p^\alpha p'^\beta. \quad (5.12)$$

- Para o caso  $D^*$  off-shell, usando  $p_1 = p$ ,  $p_2 = q$  e  $p_3 = p'$ , onde

$$\Gamma_{\mu\nu}^{D^*}(x, y) = \langle 0 | T \{ j^{(D)}(x) j_\nu^{\dagger(D^*)}(y) j_\mu^{\dagger(J/\psi)}(0) \} | 0 \rangle, \quad (5.13)$$

temos:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{D^*}(p, p') = \sum_{\lambda, \lambda'} \frac{\langle 0 | j^{(D)}(0) | p' \rangle V_{\lambda, \lambda'}^{D^*}(p, p') \langle q, \lambda' | j_\nu^{\dagger(D^*)}(0) | 0 \rangle \langle p, \lambda | j_\mu^{\dagger(J/\psi)}(0) | 0 \rangle}{(p'^2 - m_D^2 + i\epsilon)(q^2 - m_{D^*}^2 + i\epsilon)(p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon)}, \quad (5.14)$$

com

$$V_{\lambda, \lambda'}^{D^*}(p, p') = g_{\psi DD^*} \epsilon^{\gamma\delta\alpha\beta} \epsilon_\gamma^\lambda(p) \epsilon_\alpha^{\lambda'}(q) p'_\delta q_\beta. \quad (5.15)$$

Procedendo de modo análogo ao caso anterior, temos:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{D^*}(p, p') = -\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p^\alpha p'^\beta \frac{g_{\psi DD^*} \frac{m_D^2 f_D}{m_c} m_{J/\psi} f_{J/\psi} m_{D^*} f_{D^*}}{(p'^2 - m_D^2 + i\epsilon)(q^2 - m_{D^*}^2 + i\epsilon)(p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon)}. \quad (5.16)$$

- Para o caso  $D$  off-shell, usando  $p_1 = p$ ,  $p_2 = p'$  e  $p_3 = q$ , onde

$$\Gamma_{\mu\nu}^D(x, y) = \langle 0 | T \{ j_\nu^{(D^*)}(x) j_\mu^{\dagger(D)}(y) j_\mu^{\dagger(J/\psi)}(0) \} | 0 \rangle, \quad (5.17)$$

temos:

$$\Gamma_{\mu\nu}^D(p, p') = \sum_{\lambda, \lambda'} \frac{\langle 0 | j_\nu^{(D^*)}(0) | p', \lambda' \rangle V_{\lambda, \lambda'}^D(p, p') \langle q | j_\mu^{\dagger(D)}(0) | 0 \rangle \langle p, \lambda | j_\mu^{\dagger(J/\psi)}(0) | 0 \rangle}{(p'^2 - m_{D^*}^2 + i\epsilon)(q^2 - m_D^2 + i\epsilon)(p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon)}, \quad (5.18)$$

onde,

$$V_{\lambda, \lambda'}^D(p, p') = g_{\psi DD^*} \epsilon^{ab\alpha\beta} \epsilon_a^\lambda(p) \epsilon_\alpha^{*\lambda'}(p') q_b p'_\beta.$$

Procedendo da mesma forma, obtemos:

$$\Gamma_{\mu\nu}^D(p, p') = \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p^\alpha p'^\beta \frac{g_{\psi DD^*} \frac{m_D^2 f_D}{m_c} m_{J/\psi} f_{J/\psi} m_{D^*} f_{D^*}}{(p'^2 - m_{D^*}^2 + i\epsilon)(q^2 - m_D^2 + i\epsilon)(p^2 - m_\psi^2 + i\epsilon)}. \quad (5.19)$$

## 5.2 Lado da QCD

Vimos no estudo do lado fenomenológico que os correlatores são diferentes para cada caso, isto possibilita calcularmos a constante de acoplamento,  $g_{\psi DD^*}$ , por três formas distintas.

No lado da QCD, iremos trabalhar diretamente com as correntes

$$J_\mu^{(J/\psi)}(x) = \bar{c}(x) \gamma_\mu c(x), \quad (5.20)$$

$$J_\nu^{(D^*)}(x) = \bar{q}(x)\gamma_\nu c(x), \quad (5.21)$$

$$J^{(D)}(x) = \bar{q}(x)i\gamma_5 c(x). \quad (5.22)$$

### 5.2.1 Tratamento genérico para $D$ e $D^*$ off-shell

Considere os correlatores definidos nas Eqs.(5.17) e (5.13), que diferem apenas pela troca das partículas  $D$  e  $D^*$ , que possuem o mesmo conteúdo de quarks. Isso nos permite trabalhar com uma função de correlação genérica dada por

$$\Gamma_\mu^G(x, y) = \langle 0|T\{j^{(D_1)}(x)j^{\dagger(D_2)}(y)j_\mu^{\dagger(J/\psi)}(0)\}|0\rangle, \quad (5.23)$$

onde

$$J^{(D_i)} = \bar{q}D_i c,$$

assim  $D_i = \gamma_\nu$  para  $D^*$  e  $i\gamma_5$  para  $D$ , assim o produto das correntes nos fornece

$$j^{(D_1)}(x)j^{\dagger(D_2)}(y)j_\mu^{\dagger(J/\psi)}(0) = \delta_{aa'}\delta_{bb'}\delta_{ff'}(D_1)_{\beta_1\alpha_1}(D_2)_{\beta_2\alpha_2}(\gamma_\mu)_{\beta_3\alpha_3} \\ \bar{q}_{\beta_1}^a(x)c_{\alpha_1}^{a'}(x)\bar{c}_{\beta_2}^b(y)q_{\alpha_2}^{b'}(y)\bar{c}_{\beta_3}^f(0)c_{\alpha_3}^{f'}(0). \quad (5.24)$$

O produto temporalmente ordenado só irá atuar no termo,

$$G^D(x, y) = \langle 0|T\{\bar{q}_{\beta_1}^a(x)c_{\alpha_1}^{a'}(x)\bar{c}_{\beta_2}^b(y)q_{\alpha_2}^{b'}(y)\bar{c}_{\beta_3}^f(0)c_{\alpha_3}^{f'}(0)\}|0\rangle. \quad (5.25)$$

Essa função  $G^D(x, y)$  é comum para os casos:  $D$  e  $D^*$  off-shell e também para os vértices  $J/\psi DD$  e  $J/\psi D^* D^*$  [34, 37].

Iremos calcular a função  $G^D(x, y)$  em ordem mais baixa na OPE, onde os diagramas não perturbativos se limitam ao condensados de quarks. Uma justificativa para nos limitar nessa ordem consiste no fato que a regra de soma de dois pontos dos mésons  $D$  e  $D^*$  possuem, como termos dominantes, apenas esses dois termos. Na Ref.[36] foi introduzido o condensado de gluons nas funções de três pontos, cuja contribuição se mostrou quase nula. Por outro lado, na regra de soma da  $J/\psi$  [43], as correções radiativas se mostraram importantes contribuindo com quase 50% do diagrama perturbativo.

Entretanto acreditamos que nas funções de três pontos a dependência das correções radiativas não sejam importantes. Na Ref.[33] foram calculadas as correções radiativas para a constante de acoplamento  $g_{D^*D\pi}$  [32], e a correção encontrada foi menor que o erro da regra de soma sem correções radiativas. Assim motivamos o nosso formalismo, nessa ordem mais baixa na OPE.

O correlator total Eq.(5.23) avaliado nessa ordem da OPE é dado por:

$$\Gamma_\mu^G(x, y) = \Gamma_\mu^{Pert}(x, y) + \Gamma_\mu^{\bar{q}q}(x, y),$$

que, no espaço dos momentos, corresponde aos diagramas Figs. 5.3 e 5.4.

$$\Gamma_\mu^{Pert}(x, y) = -3\text{Tr} [S(-y, m_c)D_2S(y-x, m_q)D_1S(x, m_c)\gamma_\mu]. \quad (5.26)$$

$$\Gamma_\mu^{\bar{q}q}(x, y) = \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{4} \text{Tr} [S(-y, m_c)D_2D_1S(x, m_c)\gamma_\mu]. \quad (5.27)$$

Neste trabalho além de usarmos  $m_q = m_u = m_d = 0$  e  $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle$ , usamos o fato que o quark pesado possui  $\langle \bar{c}c \rangle = 0$ .

Assim o correlator genérico no espaço dos momentos é dado por

$$\Gamma_\mu^{Pert}(p, p') = 3i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} [(k - \not{p}) + m_c] D_2(\not{k} - \not{p}') D_1(\not{k} + m_c) \gamma_\mu]}{((p-k)^2 - m_c^2 + i\epsilon)((k-p')^2 + i\epsilon)(k^2 - m_c^2 + i\epsilon)}. \quad (5.28)$$

$$\Gamma_\mu^{\bar{q}q}(p, p') = -\frac{\langle \bar{q}q \rangle}{4} \frac{\text{Tr} [(\not{q} + m_c) D_2 D_1(\not{p}' + m_c) \gamma_\mu]}{(q^2 - m_c^2 + i\epsilon)(p'^2 - m_c^2 + i\epsilon)}, \quad (5.29)$$

onde  $q = p' - p$ .

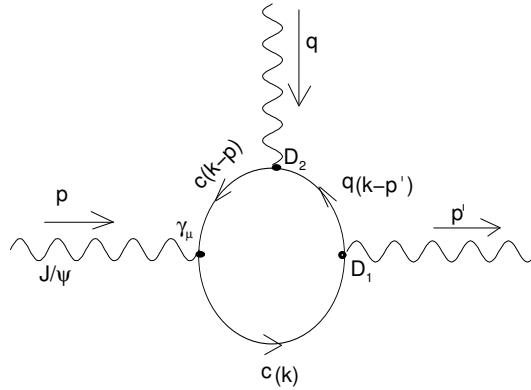
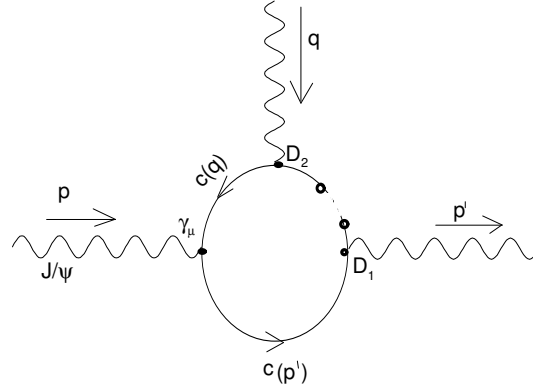


Figura 5.3: Diagrama perturbativo.

Figura 5.4: Diagrama não-perturbativo  $\langle \bar{q}q \rangle$ .

Podemos ver que o diagrama não perturbativo independe do momento  $p$ . Como iremos fazer uma transformada de Borel nesse momento, esse diagrama não contribuirá. Portanto, para essa família de diagramas, teremos apenas a contribuição perturbativa.

### 5.2.2 $D$ off-shell

Para o caso do  $D$  off-shell, temos o traço perturbativo Eq.(5.28),

$$T_{\mu\nu}^{Pert}(k, p, p') = \text{Tr}[(\not{k} - \not{p}') + m_c] i\gamma_5 (\not{k} - \not{p}') \gamma_\nu (\not{k} + m_c) \gamma_\mu \quad (5.30)$$

Onde obtemos com a ajuda da Ref.[63],

$$T_{\mu\nu}^{Pert}(k, p, p') = 4m_c \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} (p^\alpha p'^\beta - p^\beta k^\alpha), \quad (5.31)$$

e ficamos com

$$\Gamma_{\mu\nu}^{Pert}(p, p') = 12m_c \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p^\alpha p'^\beta \Theta(q, p', p) - 12m_c \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p^\alpha \Pi^\beta(q, p, p'), \quad (5.32)$$

$$\Pi^\beta(q, p, p') = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\beta}{((p-k)^2 - m_c^2 + i\epsilon)((k-p')^2 + i\epsilon)(k^2 - m_c^2 + i\epsilon)}, \quad (5.33)$$

$$\Theta(q, p', p) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{((p-k)^2 - m_c^2 + i\epsilon)((k-p')^2 + i\epsilon)(k^2 - m_c^2 + i\epsilon)}. \quad (5.34)$$

O uso das regras de Cutkosky, permite escrever o correlator através de uma relação de dispersão dupla (ver apêndice H):

$$\Gamma_{\mu\nu}^{Pert}(p, p') = \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p^\alpha p'^\beta \frac{1}{4\pi^2} \int_{4m_c^2}^{\infty} \int_{u_{min}}^{u_{max}} ds du \frac{\rho^{Pert(D)}(u, s, t)}{(s - p^2)(u - p'^2)}, \quad (5.35)$$

onde

$$\rho^{Pert(D)}(u, s, t) = \frac{3m_c}{\sqrt{\lambda}} \left( 1 + \frac{s\lambda_2}{\lambda} \right), \quad (5.36)$$

$$\lambda = (u + s - t)^2 - 4us, \quad (5.37)$$

$$\lambda_2 = u + t - s + 2m_c^2, \quad (5.38)$$

$$u_{min}^{max} = \frac{1}{2m_c^2} \left[ -st + m_c^2(s + 2t) \pm \sqrt{s(s - 4m_c^2)(t - m_c^2)^2} \right]. \quad (5.39)$$

### 5.2.3 $D^*$ off-shell

Para o  $D^*$  off-shell, temos o correlator definido em Eq.(5.13),

$$\Gamma_{\mu\nu}^{D^*}(x, y) = \langle 0 | T \{ j^{(D)}(x) j_\nu^{\dagger(D^*)}(y) j_\mu^{\dagger(J/\psi)}(0) \} | 0 \rangle. \quad (5.40)$$

O traço perturbativo Eq.(5.28) é dado por

$$T_{\mu\nu}^{Pert}(k, p, p') = \text{Tr}((\not{k} - \not{p}) + m_c) \gamma_\nu (\not{k} - \not{p}') i\gamma_5 (\not{k} + m_c) \gamma_\mu, \quad (5.41)$$

onde por simples álgebra, temos que esse traço é

$$T_{\mu\nu}^{Pert(D^*)}(k, p, p') = -T_{\mu\nu}^{Pert(D)}(k, p, p'), \quad (5.42)$$

logo obtemos:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{Pert}(p, p') = -\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p^\alpha p'^\beta \frac{1}{4\pi^2} \int_{4m_c^2}^{\infty} \int_{u_{min}}^{u_{max}} ds du \frac{\rho^{Pert(D^*)}(u, s, t)}{(s - p^2)(u - p'^2)}, \quad (5.43)$$

onde,  $\rho^{Pert(D^*)}(u, s, t) = \rho^{Pert(D)}(u, s, t)$ .

Analisando os correlatores do lado fenomenológico Eqs.(5.16) e (5.19), vemos também o efeito da mudança de sinal.

### 5.2.4 $J/\psi$ off-shell

Considere o correlator definido em Eq.(5.5),

$$\Gamma_{\mu\nu}^\psi(x, y) = \langle 0 | T \{ j^{(D)}(x) j_\mu^{\dagger(J/\psi)}(y) j_\nu^{\dagger(D^*)}(0) \} | 0 \rangle. \quad (5.44)$$

Procedendo da mesma maneira realizada nos casos anteriores, temos o correlator:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{J/\psi}(x, y) = \Gamma_{\mu\nu}^{Pert}(x, y) + \Gamma_{\mu\nu}^{\bar{q}q}(x, y),$$

que corresponde aos diagramas Figs. 5.5 e 5.6,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{Pert}(x, y) = -3\text{Tr} [S(y, m_c)\gamma_\nu S(-x)i\gamma_5 S(x - y, m_c)\gamma_\mu]. \quad (5.45)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\bar{q}q}(x, y) = \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{4} \text{Tr} [S(y, m_c)\gamma_\nu i\gamma_5 S(x - y, m_c)\gamma_\mu]. \quad (5.46)$$

O correlator no espaço dos momentos, via transformada de Fourier, Eq.(5.3), é dado por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{Pert}(p, p') = 3i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} [(\not{p}' - \not{k} + m_c)\gamma_\nu (-\not{k})i\gamma_5 (\not{p} - \not{k} + m_c)\gamma_\mu]}{((p - k)^2 - m_c^2 + i\epsilon)(k^2 + i\epsilon)((p - k)^2 - m_c^2 + i\epsilon)}. \quad (5.47)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\bar{q}q}(p, p') = -\frac{\langle \bar{q}q \rangle}{4} \frac{\text{Tr} [(\not{p} + m_c)\gamma_\nu i\gamma_5 (\not{p}' + m_c)\gamma_\mu]}{(p^2 - m_c^2 + i\epsilon)(p'^2 - m_c^2 + i\epsilon)}. \quad (5.48)$$

Procedendo da mesma forma anterior, ficamos com

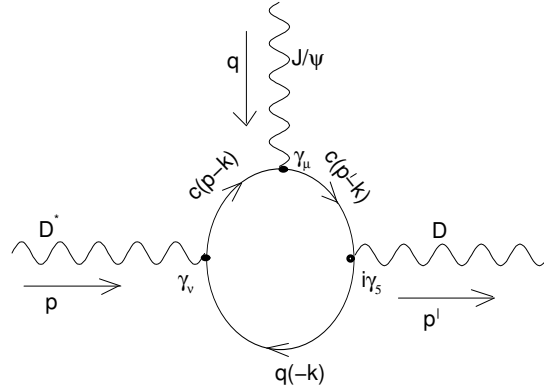


Figura 5.5: Diagrama perturbativo para  $J/\psi$  off-shell.

$$\Gamma_{\mu\nu}(p, p') = \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p^\alpha p'^\beta \left( \Pi^{Pert}(p^2, p'^2) + \Pi^{\bar{q}q}(p^2, p'^2) \right). \quad (5.49)$$

Agrupando o termo não-perturbativo, obtemos,

$$\Gamma_{\mu\nu}(p, p') = \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p^\alpha p'^\beta \frac{1}{4\pi^2} \int_{m_c^2}^{\infty} \int_{u_{min}}^{u_{max}} ds du \frac{\rho^{(J/\psi)}(u, s, t)}{(s - p^2)(u - p'^2)} \quad (5.50)$$

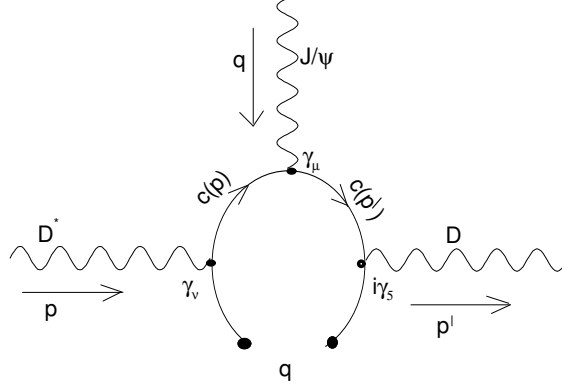


Figura 5.6: Diagrama não-perturbativo  $\langle \bar{q}q \rangle$  para  $J/\psi$  off-shell.

com

$$\rho^{(J/\psi)}(u, s, t) = \frac{3m_c}{\lambda^{3/2}} \left[ (u - s)^2 - t(u + s - 2m_c^2) \right] - 16\pi^2 \langle \bar{q}q \rangle \delta(s - m_c^2) \delta(u - u_{min}). \quad (5.51)$$

Neste caso obtemos,

$$u_{min}^{max} = \frac{1}{2m_c^2} \left[ -st + m_c^2(2s + t) \pm \sqrt{t(t - 4m_c^2)(s - m_c^2)^2} \right]. \quad (5.52)$$

### 5.3 Resultados

Usamos os mesmos parâmetros utilizados no capítulo 3 e para a massa do quark  $c$ , usamos o valor  $m_c = 1.3\text{GeV}$ .

Para a massa dos mésons, usamos os valores  $m_{J/\psi} = 3.1\text{GeV}$ ,  $m_D = 1.87\text{GeV}$  e  $m_{D^*} = 2.01\text{GeV}$ . Na constante de decaimento da  $J/\psi$  usamos o valor experimental  $f_{J/\psi} = 405\text{MeV}$  e para os outros constante de acoplamento usamos os valores extraídos via QCDSR [32],  $f_D = 170\text{MeV}$  e  $f_{D^*} = 240\text{MeV}$ , pois os dados experimentais [10] fornecem uma grande margem de erro para  $f_D$  e nenhuma informação sobre  $f_{D^*}$ .

Também usamos a definição para o limiar do contínuo para esses mésons,

$$s_{0M} = (m_M + \Delta_M)^2.$$

Fazendo uma transformada de Borel dupla nos momentos  $p^2$  e  $p'^2$ , temos que as contribuições pólo-contínuo são suprimidas. Assim não temos o problema de considerar

modelos para  $\Gamma_{PC}$  como foi mostrado no capítulo 4.

Transferindo a contribuição dos estados no contínuo para o lado da QCD, ficamos com as regras de soma:

- Para o caso  $D$  off-shell,

$$\frac{g_{\psi DD^*}}{(t - m_D^2)} A e^{-\frac{m_{D^*}^2}{M'^2}} e^{-\frac{m_\psi^2}{M^2}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{4m_c^2}^{s_0} \int_{u_{min}}^{u_{max}} ds du \rho^{Pert(D)}(u, s, t) e^{-\frac{s}{M^2}} e^{-\frac{u}{M'^2}} \Theta(u_0 - u),$$

onde,

$$A = \frac{m_D^2 f_D}{m_c} m_{J/\psi} f_{J/\psi} m_{D^*} f_{D^*}.$$

- Caso  $D^*$  off-shell,

$$\frac{g_{\psi DD^*}}{(t - m_{D^*}^2)} A e^{-\frac{m_D^2}{M'^2}} e^{-\frac{m_\psi^2}{M^2}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{4m_c^2}^{s_0} \int_{u_{min}}^{u_{max}} ds du \rho^{Pert(D^*)}(u, s, t) e^{-\frac{s}{M^2}} e^{-\frac{u}{M'^2}} \Theta(u_0 - u).$$

- Caso  $J/\psi$  off-shell,

$$\frac{g_{\psi DD^*}}{(t - m_\psi^2)} A e^{-\frac{m_D^2}{M'^2}} e^{-\frac{m_{D^*}^2}{M^2}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{m_c^2}^{s_0} \int_{u_{min}}^{u_{max}} ds du \rho^{(J/\psi)}(u, s, t) e^{-\frac{s}{M^2}} e^{-\frac{u}{M'^2}} \Theta(u_0 - u).$$

Vemos que  $g_{\psi DD^*} < 0$  para todos os casos. Neste trabalho iremos considerar o valor absoluto do constante de acoplamento.

Nosso tratamento fornece o fator de forma  $g_{\psi DD^*}(t, M^2, M'^2)$ . Para obtermos a constante de acoplamento é necessário extrapolar o fator de forma para um valor de  $t$  igual a massa da partícula off-shell.

Na Fig. 5.7 mostramos a estabilidade do fator de forma, para valores fixos de  $t = -Q^2$ , em função da massa de Borel considerando, por simplicidade, as duas massas de Borel relacionadas por:

$$M'^2 = M^2 \frac{m_D^2}{m_{J/\psi}^2}.$$

Na Fig. 5.8 mostramos o caso onde as massas de Borel não estão vinculadas.

A estabilidade para os casos  $D$  e  $J/\psi$  off-shell é semelhante.

Escolhendo os limiares do contínuo como sendo:  $\Delta_\psi = \Delta_{D^*} = \Delta_D = 0.5\text{GeV}$  e fixando os valores das massas de Borel em  $M^2 = m_\psi^2$  e  $M'^2 = m_{D^*}^2$ , podemos estudar

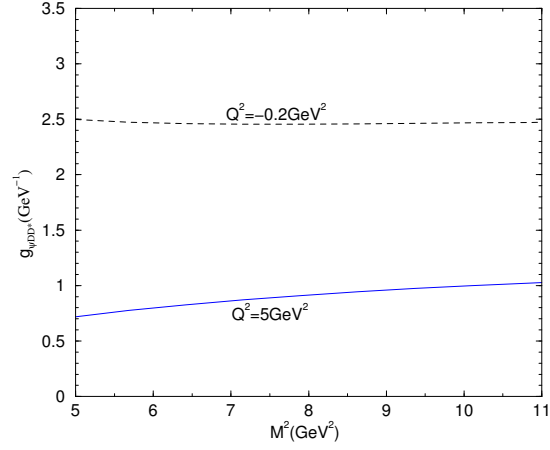


Figura 5.7: Estabilidade para o caso  $D^*$  off-shell usando  $M'^2 = M^2 \frac{m_D^2}{m_{J/\psi}^2}$  e  $\Delta_\psi = \Delta_D = 0.5\text{GeV}$ .

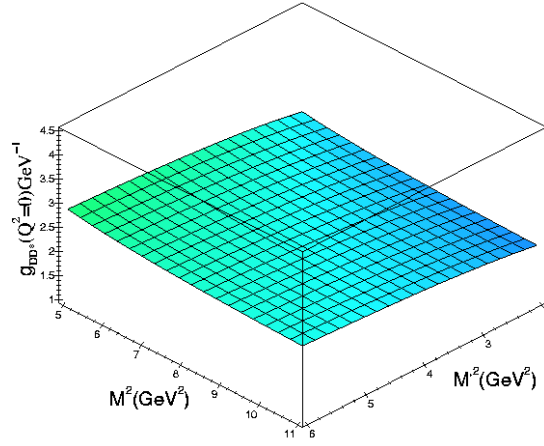


Figura 5.8: Estabilidade para o caso  $D^*$  off-shell para  $Q^2 = 0$  e  $\Delta_\psi = \Delta_D = 0.5\text{GeV}$ .

o comportamento do fator de forma, para o caso  $D$  off-shell, como função de  $Q^2$ . Para os outros dois casos,  $J/\psi$  off-shell e  $D^*$  off-shell, escolhemos as massas de Borel por esse mesmo critério de fixar a massa de Borel nas respectivas massas das partículas on-shell. Nossos resultados são mostrados pelos pontos na Fig. 5.9 para os três casos considerados.

Esses pontos podem ser fitados pelas seguintes expressões:

$$g_{\psi DD^*}^{(J/\psi)}(Q^2) = \frac{199.2}{Q^2 + 56.8},$$

$$g_{\psi DD^*}^{(D^*)}(Q^2) = 19.9 \exp \left[ -\frac{(Q^2 + 27)^2}{345} \right],$$

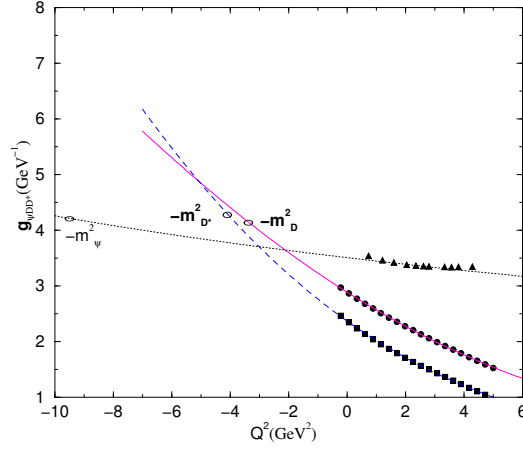


Figura 5.9: Fator de Forma para as três psrtículas off-shell.

$$g_{\psi DD^*}^{(D)}(Q^2) = 12.7 \exp \left[ -\frac{(Q^2 + 25.8)^2}{450} \right].$$

Essas expressões podem ser usadas para estimarmos o valor da constante de constante de acoplamento  $g_{\psi DD^*}$ , definida como  $g_{\psi DD^*} = g_{\psi DD^*}^{(M)}(Q^2 = -m_M^2)$ . Os valores obtidos estão representados pelos pontos vazados na Fig. 5.9 e podemos observar que os três casos considerados nos levam a um mesmo valor da constante de acoplamento:

$$g_{\psi DD^*} \simeq 4.2 \text{GeV}^{-1}.$$

Isso pode ser interpretado como uma grande “vitória” do nosso método. A análise de erros é mostrada na Fig. 5.10, da onde podemos estimar a incerteza no valor da constante de acoplamento.

Fizemos também a comparação com outros métodos, que mostramos na Tabela 5.1. Nas Refs.[60, 61] a constante de acoplamento é extraída em  $Q^2 = -2\text{GeV}^2$ , pois nessas referências não foram realizadas extrapolações, e esse é o momento máximo onde os cálculos são confiáveis. Observamos um acordo muito bom entre nosso resultado e o resultado da Ref.[60].

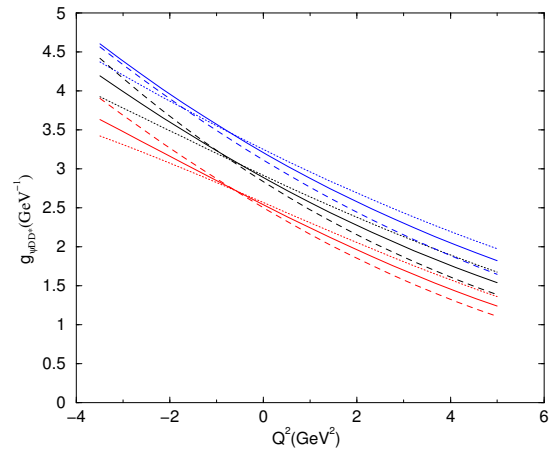


Figura 5.10: linha sólida  $\Delta_\psi = 0.5\text{GeV}$ , linha-ponto  $\Delta_\psi = 0.6\text{GeV}$  e linha tracejada  $\Delta_\psi = 0.4\text{GeV}$ . Os três níveis, foram gerados pela variação  $\Delta_{D^*} = 0.4..0.6\text{GeV}$ .

Tabela 5.1: Acoplamento em diferentes métodos.

	Nosso	Ref.[60]	Ref.[61]
$g_{\psi DD^*}(\text{GeV}^{-1})$	$4.0 \pm 0.6$	$4.05 \pm 0.25$	3.0

# Capítulo 6

## Conclusão

No presente trabalho usamos as QCDSR para estudar dois importantes problemas da física hadrônica atual: o estudo dos pentaquarks,  $\Theta^+$  e  $\Xi^{--}$ , e a obtenção da constante de acoplamento  $g_{J/\psi DD^*}$  que podem ser usada em cálculos da dissociação hadrônica da  $J/\psi$  em colisões de íons pesados relativísticos.

No capítulo 3, apresentamos o estudo dos pentaquarks  $\Theta^+$  e  $\Xi^{--}$ , baseados na regra de soma para funções de dois pontos, onde incluímos todos os diagramas até dimensão 6. Obtivemos essas massas e estudamos a paridade e as contribuições do pólo, usando dois tipos de campos interpolantes inspirados no arranjo diquark-diquark-antiquark. Nossos resultados forneceram valores das massas compatíveis com os dados experimentais, porém mostramos que a regra de soma dos pentaquarks não possui uma janela de Borel onde sejam satisfeitas simultaneamente um bom ordenamento da OPE e uma boa contribuição do pólo. Além disso, mostramos que a estrutura que fornece a paridade é instável, o que torna a regra de soma para a obtenção das paridades não confiável.

No capítulo 4, apresentamos o estudo da largura de decaimento da  $\Theta^+$ , baseados no cálculo da função de três pontos, onde incluímos todos os diagramas até dimensão 5. Esse estudo do decaimento da  $\Theta^+$  em  $n + K$ , revelou que só é possível obter uma largura compatível com os valores experimentais, se considerarmos que a corrente usada para a  $\Theta^+$  [13] possui uma grande componente de estados ligados  $K - n$  fato que já tinha sido mencionado na Ref.[23], no contexto das funções de dois pontos.

Mostramos que a obtenção de uma largura menor que um 1MeV só é compatível para uma  $\Theta^+$  de paridade positiva e que não possua contribuições de estados ligados  $K - n$ . A verificação dessa componente  $K - n$  no campo interpolante da  $\Theta^+$  forneceu uma maior compreensão do que é um pentaquark, considerando os resultados do capítulo 4, sugerimos que uma boa corrente para a  $\Theta^+$  deva ter uma componente nula para os diagramas  $K - n$  (Fig. 4.2).

No capítulo 5, estudamos o vértice  $J/\psi DD^*$  em QCDSR envolvendo o quark pesado *charme*. Como o condensado de quarks charmosos é muito pequeno, os efeitos não perturbativos envolvendo o quark  $c$  são gerados, em ordem mais baixa, pelos condensados de gluons, que na maioria das regras de soma, são suprimidos. No nosso cálculo consideramos apenas uma componente não perturbativa originada pelo condensado de quarks leve. Para calcular a função de vértice em termos de uma relação de dispersão dupla, usamos as regras de Cutkosky, que forneceu o fator de forma, num domínio de  $Q^2$ , onde a regra de soma é confiável. Fazendo um ajuste do fator de forma obtido pela QCDSR, por curvas tipicamente usadas para descrever fatores de forma (monopólo, gaussiana e exponencial), obtivemos o comportamento do fator de forma no domínio  $Q^2 \ll 0$ , onde a QCDSR não pode ser aplicada. É neste domínio que encontramos a constante de acoplamento  $g_{J/\psi DD^*}$ . Nós analisamos três casos: i)  $D$  *off-shell*, ii)  $D^*$  *off-shell* e iii)  $J/\psi$  *off-shell*. Para a  $J/\psi$  *off-shell* o fator de forma é bem mais “duro” que o fator de forma obtido para os outros casos, que sugere que a partícula mais pesada no vértice vê as outras partículas como pontuais, enquanto as partículas leves vêm a  $J/\psi$  com um certo tamanho.

Nossos resultados mostraram que o valor da constante de acoplamento é independente da escolha da partícula *off-shell* e que o erro gerado pela variação no limiar do contínuo é da ordem de 15%. Nossos resultados são compatíveis com outros métodos: modelo de quark méson constituintes [60] e com modelo de quarks relativísticos [61].

# Apêndice A

## Funcional Fenomenológico de dois pontos

O funcional fenomenológico de dois pontos é definido por:

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iqx} \Pi(x), \quad (\text{A.1})$$

onde

$$\Pi(x) = \langle 0 | T \{ j_S(x) j_S^\dagger(0) \} | 0 \rangle. \quad (\text{A.2})$$

A corrente do méson de massa  $m$  obedece a relações :

$$j(x) = e^{iPx} j(0) e^{-iPx}, \quad (\text{A.3})$$

e a relação de completeza

$$\mathbf{1} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{q}}{2q^0} |q\rangle \langle q|. \quad (\text{A.4})$$

Usando a definição do produto temporalmente ordenado temos:

$$\Pi(x) = \langle 0 | j_S(x) j_S^\dagger(0) | 0 \rangle \theta(x_0) + \langle 0 | j_S^\dagger(0) j_S(x) | 0 \rangle \theta(-x_0). \quad (\text{A.5})$$

Inserindo as Eqs.(A.3) e (A.4) em Eq.(A.5), temos:

$$\Pi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{q}}{2q^0} \left( e^{-iqx} \theta(x_0) + e^{iqx} \theta(-x_0) \right) \langle 0 | j_S(0) | q \rangle \langle q | j_S^\dagger(0) | 0 \rangle. \quad (\text{A.6})$$

Usando a relação

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{q}}{2q^0} \left( e^{-iqx} \theta(x_0) + e^{iqx} \theta(-x_0) \right) F(q) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} F(p), \quad (\text{A.7})$$

no nosso correlator Eq.(A.6) temos de imediato,

$$\Pi(x) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \langle 0 | j_S(0) | p \rangle \langle p | j_S^\dagger(0) | 0 \rangle. \quad (\text{A.8})$$

Assim o correlator no espaço dos momentos Eq.(A.1) é

$$\Pi^m(q) = - \frac{\langle 0 | j_S(0) | q \rangle \langle q | j_S^\dagger(0) | 0 \rangle}{q^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (\text{A.9})$$

Como já comentamos no capítulo 2, a corrente se acopla também com as ressonâncias, assim podemos escrever o correlator Eq.(A.9), numa relação de dispersão,

$$\Pi(q) = \int_0^\infty ds \frac{\rho(s, q)}{s - q^2 - i\epsilon}, \quad (\text{A.10})$$

onde  $\rho(s, q) = \rho_P(s, q)\delta(s - m_0^2) + \rho^C(s, q)\Theta(s - m^{*2})$  e  $\rho_P(s, q) = \langle 0 | j_M | q \rangle \langle q | j_M^\dagger | 0 \rangle$ .

Para o cálculo do correlator para mésons vetoriais, o procedimento é análogo ao caso anterior, onde neste caso introduzimos um índice de polarização para os estados.

No caso dos bárions, inserimos nos estados um índice de spin.

## Apêndice B

# Funcional Fenomenológico de três pontos

As fórmulas de redução de Lehman, Symanzik e Zimmermann (LSZ) fornecem a seguinte relação para o vértice da Fig. 2.2,

$$\langle S3(p)|S2(q)S1(p) \rangle = i^3 \int D^{12}X e^{-i(qx_2+px_1)} e^{ip \cdot x_3} \square_X \langle 0|T\{\phi(x_3)\phi^\dagger(x_2)\phi^\dagger(x_1)\}|0 \rangle, \quad (\text{B.1})$$

onde  $D^{12}X = d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3$ ,  $\square_X = (\square_{x_1} + m^2)(\square_{x_2} + m^2)(\square_{x_3} + m^2)$ , e  $\phi$  representa o campo associado a cada uma das partículas: S1, S2 e S3, consideradas como idênticas.

A função de Green de 3-pontos para esse processo é definida por

$$G(x_1, x_2, x_3) = \langle 0|T\{\phi(x_3)\phi^\dagger(x_2)\phi^\dagger(x_1)\}|0 \rangle, \quad (\text{B.2})$$

e obedece a propriedade de invariância translacional:

$$G(x_1, x_2, x_3) = G(0, x_2 - x_1, x_3 - x_1). \quad (\text{B.3})$$

Executando as transformações,

$$y = x_2 - x_1, x = x_3 - x_1, x_1 = x_1, \quad (\text{B.4})$$

cujo jacobiano da transformação é 1 e transformando o operador  $\square_X$ , para essas novas variáveis, obtemos:

$$\square_X = (\square_y + m^2)(\square_x + m^2)(\square_y + \square_x + 2\square_{xy} + m^2), \quad (\text{B.5})$$

onde  $\square_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial y_0} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}}$ .

Dessa forma ficamos com a fórmula de redução dependente de apenas duas variáveis:

$$\langle S3(p') | S2(q) S1(p) \rangle = i^3 N \int D^8 X e^{-iqy} e^{ip'x} \square_X \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi^\dagger(y) \phi^\dagger(0) \} | 0 \rangle, \quad (\text{B.6})$$

com

$$N = (2\pi)^4 \delta^4(p' - (p + q)) \text{ e } D^8 X = d^4 x d^4 y.$$

Obtemos a importante delta de conservação de energia-momento do vértice, deduzido aqui, via hipótese da invariância translacional para a função de Green Eq.(B.3).

Assim a função de Green desse problema é,

$$G(x, y, 0) = \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi^\dagger(y) \phi^\dagger(0) \} | 0 \rangle, \quad (\text{B.7})$$

que pode ser reescrita em termos da transformada de Fourier da função de Green no espaço dos momentos como:

$$G(x, y, 0) = \int \frac{d^4 \bar{p}}{(2\pi)^4} \frac{d^4 \bar{p}'}{(2\pi)^4} e^{i(\bar{p}' - \bar{p})y} e^{-i\bar{p}'x} G(\bar{p}, \bar{p}'). \quad (\text{B.8})$$

Inserindo a Eq.(B.8) na Eq.(B.6), obtemos a relação que conecta a função de Green ao vértice:

$$(2\pi)^4 \delta^4(p' - (p + q)) G(p, p') = i^3 \frac{\langle S3(p') | S2(q) S1(p) \rangle}{(q^2 - m^2)(p'^2 - m^2)(p^2 - m^2)}. \quad (\text{B.9})$$

No lado fenomenológico das QCDSR, as correntes são identificadas com os operadores de campo. Assim, comparando a função de correlação de três pontos:

$$\Gamma(p, p') = \int d^4 x d^4 y e^{-i(p' - p)y} e^{ip'x} \Gamma(x, y), \quad (\text{B.10})$$

onde

$$\Gamma(x, y) = \langle 0 | T \{ j_{S3}(x) j_{S2}^\dagger(y) j_{S1}^\dagger(0) \} | 0 \rangle, \quad (\text{B.11})$$

com a Eq. (B.7) vemos que  $\Gamma(x, y) = G(x, y, 0)$ .

Usando a definição do produto temporalmente ordenado, podemos escrever:

$$\Gamma(x, y) = \langle 0 | j_3(x) j_2^\dagger(y) j_1^\dagger(0) | 0 \rangle \theta(x_0 - y_0) \theta(y_0) + \langle 0 | j_3(x) j_1^\dagger(0) j_2^\dagger(y) | 0 \rangle \theta(x_0) \theta(-y_0) +$$

$$\begin{aligned}
& + \langle 0 | j_1^\dagger(0) j_3(x) j_2^\dagger(y) | 0 \rangle \theta(-x_0) \theta(x_0 - y_0) + \\
& + \langle 0 | j_1^\dagger(0) j_2^\dagger(y) j_3(x) | 0 \rangle \theta(-y_0) \theta(y_0 - x_0) + \langle 0 | j_2^\dagger(y) j_1^\dagger(0) j_3(x) | 0 \rangle \theta(y_0) \theta(-x_0) + \\
& + \langle 0 | j_2^\dagger(y) j_3(x) j_1^\dagger(0) | 0 \rangle \theta(y_0 - x_0) \theta(x_0).
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Aplicando a evolução dos operadores, já discutida,

$$j(x) = e^{iPx} j(0) e^{-iPx}, \tag{B.13}$$

mais a definição do vácuo,  $P|0\rangle = 0|0\rangle$ , podemos reescrever a Eq.(B.12), na forma,

$$\begin{aligned}
\Gamma(x, y) = & \langle 0 | j_3(0) e^{iP(y-x)} j_2^\dagger(0) e^{-iPy} j_1^\dagger(0) | 0 \rangle \theta(x_0 - y_0) \theta(y_0) + \\
& + \langle 0 | j_3(0) e^{-iPx} j_1^\dagger(0) e^{iPy} j_2^\dagger(0) | 0 \rangle \theta(x_0) \theta(-y_0) + \\
& + \langle 0 | j_1^\dagger(0) e^{iPx} j_3(0) e^{iP(y-x)} j_2^\dagger(0) | 0 \rangle \theta(-x_0) \theta(x_0 - y_0) + \\
& + \langle 0 | j_1^\dagger(0) e^{iPy} j_2^\dagger(0) e^{iP(x-y)} j_3(0) | 0 \rangle \theta(-y_0) \theta(y_0 - x_0) + \\
& + \langle 0 | j_2^\dagger(0) e^{-iPy} j_1^\dagger(0) e^{iPx} j_3(0) | 0 \rangle \theta(y_0) \theta(-x_0) + \\
& + \langle 0 | j_2^\dagger(0) e^{iP(x-y)} j_3(0) e^{-iPx} j_1^\dagger(0) | 0 \rangle \theta(y_0 - x_0) \theta(x_0).
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Definindo a relação de completeza para os vários estados por

$$1_i = \int Dp_i |p_i\rangle \langle p_i|, \tag{B.15}$$

onde  $Dp_i = \frac{d^3 \vec{p}_i}{2p_i (2\pi)^3}$ , e inserindo essas relações de completeza na Eq.(B.14), obtemos para o primeiro termo do lado direito da Eq.(B.14):

$$\Gamma_1(x, y) = \theta(x_0 - y_0) \theta(y_0) \int \int Dp_1 Dp_3 e^{ip_3(y-x)} e^{-ip_1 y} \rho_1(p_3, p_1), \tag{B.16}$$

onde  $\rho_1(p_3, p_1) = \langle 0 | j_3(0) | p_3 \rangle \langle p_3 | j_2^\dagger(0) | p_1 \rangle \langle p_1 | j_1^\dagger(0) | 0 \rangle$ .

De forma análoga obtemos para os demais termos:

$$\Gamma_2(x, y) = \theta(x_0) \theta(-y_0) \int \int Dp_2 Dp_3 e^{-ip_3 x} e^{ip_2 y} \rho_2(p_3, p_2), \tag{B.17}$$

onde  $\rho_2(p_3, p_2) = \langle 0 | j_3(0) | p_3 \rangle \langle p_3 | j_1^\dagger(0) | p_2 \rangle \langle p_2 | j_2^\dagger(0) | 0 \rangle$ .

$$\Gamma_3(x, y) = \theta(-x_0)\theta(x_0 - y_0) \int \int Dp_1 Dp_2 e^{ip_1 x} e^{ip_2(y-x)} \rho_3(p_1, p_2), \quad (\text{B.18})$$

onde  $\rho_3(p_1, p_2) = \langle 0 | j_1^\dagger(0) | p_1 \rangle \langle p_1 | j_3(0) | p_2 \rangle \langle p_2 | j_2^\dagger(0) | 0 \rangle$ .

$$\Gamma_4(x, y) = \theta(-y_0)\theta(y_0 - x_0) \int \int Dp_1 Dp_3 e^{ip_1 y} e^{ip_3(x-y)} \rho_4(p_1, p_3), \quad (\text{B.19})$$

onde  $\rho_4(p_1, p_3) = \langle 0 | j_1^\dagger(0) | p_1 \rangle \langle p_1 | j_2^\dagger(0) | p_3 \rangle \langle p_3 | j_3(0) | 0 \rangle$ .

$$\Gamma_5(x, y) = \theta(y_0)\theta(-x_0) \int \int Dp_2 Dp_3 e^{-ip_2 y} e^{ip_3 x} \rho_5(p_2, p_3), \quad (\text{B.20})$$

onde  $\rho_5(p_2, p_3) = \langle 0 | j_2^\dagger(0) | p_2 \rangle \langle p_2 | j_1^\dagger(0) | p_3 \rangle \langle p_3 | j_3(0) | 0 \rangle$ .

$$\Gamma_6(x, y) = \theta(y_0 - x_0)\theta(x_0) \int \int Dp_1 Dp_2 e^{ip_2(x-y)} e^{-ip_1 x} \rho_6(p_2, p_1), \quad (\text{B.21})$$

onde  $\rho_6(p_2, p_1) = \langle 0 | j_2^\dagger(0) | p_2 \rangle \langle p_2 | j_3(0) | p_1 \rangle \langle p_1 | j_1^\dagger(0) | 0 \rangle$ .

Para as funções de vértice, observamos que em geral temos

$$\langle p_i | j_k^\dagger(0) | p_j \rangle = \langle p_j | j_k^\dagger(0) | p_i \rangle, \quad (\text{B.22})$$

e, portanto, obtemos:

$$\rho_1(p_3, p_1) = \rho_4(p_1, p_3),$$

$$\rho_2(p_3, p_2) = \rho_5(p_2, p_3), \quad (\text{B.23})$$

$$\rho_3(p_1, p_2) = \rho_6(p_2, p_1),$$

o que nos permite reescrever o correlator na Eq.(B.14), na forma,

$$\Gamma(x, y) = \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned} & \int \int Dp_1 Dp_3 \rho_1(p_3, p_1) \left[ e^{ip_3(y-x)} e^{-ip_1 y} \theta(x_0 - y_0) \theta(y_0) + e^{ip_1 y} e^{ip_3(x-y)} \theta(-y_0) \theta(y_0 - x_0) \right] + \\ & + \int \int Dp_1 Dp_2 \rho_3(p_1, p_2) \left[ e^{i(p_1-p_2)x} e^{ip_2 y} \theta(-x_0) \theta(x_0 - y_0) + e^{-ip_2 y} e^{-i(p_1-p_2)x} \theta(y_0 - x_0) \theta(x_0) \right] + \\ & + \int \int Dp_2 Dp_3 \rho_2(p_3, p_2) \left[ e^{-ip_3 x} e^{ip_2 y} \theta(x_0) \theta(-y_0) + e^{-ip_2 y} e^{ip_3 x} \theta(y_0) \theta(-x_0) \right]. \end{aligned}$$

Considerando ainda que

$$\theta(x_0 - y_0)\theta(-y_0) = \theta(x_0 - y_0)\theta(-x_0) + \theta(x_0)\theta(-y_0), \quad (\text{B.25})$$

$$\theta(y_0 - x_0)\theta(y_0) = \theta(y_0 - x_0)\theta(x_0) + \theta(y_0)\theta(-x_0),$$

e que

$$p_2 = p_1 + p_3, \quad (\text{B.26})$$

obtemos

$$\rho_3(p_1, p_1 + p_3) = \rho_2(p_3, p_1 + p_3) = \rho_1(p_3, p_1). \quad (\text{B.27})$$

Assim, o correlator na Eq.(B.24) pode ser escrito numa integral dupla apenas nas variáveis  $p_1$  e  $p_3$ :

$$\begin{aligned} \Gamma(x, y) = & \int \int Dp_1 Dp_3 \rho_1(p_3, p_1) \times \\ & \times \left[ e^{ip_3(y-x)} e^{-ip_1 y} \theta(x_0 - y_0) \theta(y_0) + e^{ip_1 y} e^{ip_3(x-y)} \theta(-y_0) \theta(y_0 - x_0) + \right. \\ & \left. + e^{ip_3(y-x)} e^{ip_1 y} \theta(x_0 - y_0) \theta(-y_0) + e^{-ip_1 y} e^{ip_3(x-y)} \theta(y_0) \theta(y_0 - x_0) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Usando a relação

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{q}}{2q_0} \left( e^{-iqx} \theta(x_0) + e^{iqx} \theta(-x_0) \right) F(q) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} F(p), \quad (\text{B.29})$$

e definindo

$$g_i(q, x) = \left( e^{-iqx} \theta(x_0) + e^{iqx} \theta(-x_0) \right) F_i(q), \quad (\text{B.30})$$

observamos que o integrando da Eq.(B.28) pode ser reescrito como o produto de  $g_1(p_3, y - x) \times g_2(p_1, y)$  onde

$$g_1(p_3, y - x) = \left( e^{ip_3(y-x)} \theta(x_0 - y_0) + e^{ip_3(x-y)} \theta(y_0 - x_0) \right) F_1(p_3), \quad (\text{B.31})$$

$$g_2(p_1, y) = \left( e^{-ip_1 y} \theta(y_0) + e^{ip_1 y} \theta(-y_0) \right) F_2(p_1),$$

com

$$\rho_1(p_3, p_1) = F_1(p_3) F_2(p_1). \quad (\text{B.32})$$

Portanto obtemos finalmente

$$\Gamma(x, y) = - \int \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \rho_1(p_3, p_1) \frac{e^{ip_3 x} e^{-i(p_1 + p_3)y}}{(p_3^2 - m_3^2 + i\epsilon)(p_1^2 - m_1^2 + i\epsilon)}. \quad (\text{B.33})$$

Fazendo a transformada de Fourier da Eq.(B.10), temos:

$$\Gamma(p, p') = - \frac{\rho_1(-p', p)}{(p'^2 - m_3^2 + i\epsilon)(p^2 - m_1^2 + i\epsilon)}, \quad (\text{B.34})$$

onde

$$\rho_1(-p', p) = \langle 0 | j_3(0) | -p' \rangle \langle -p' | j_2^\dagger(0) | p \rangle \langle p | j_1^\dagger(0) | 0 \rangle. \quad (\text{B.35})$$

Os elementos de matriz entre a partícula e o vácuo são conhecidos. Para avaliar  $\langle -p' | j_2^\dagger(0) | p \rangle$ , podemos usar a propriedade de **Crossing symmetry** e escrever:

$$\langle -p' | j_2^\dagger(0) | p \rangle = \langle -p, -p' | j_2^\dagger(0) | 0 \rangle. \quad (\text{B.36})$$

Usando a relação

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{q}}{2q_0} F(q) = i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{F(q)}{q^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (\text{B.37})$$

e introduzindo um conjunto completo de estados  $|q\rangle$  obtemos:

$$\langle -p, -p' | j_2^\dagger(0) | 0 \rangle = i \int \frac{D^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\langle -p, -p' | q \rangle \langle q | j_2^\dagger(0) | 0 \rangle}{q^2 - m_2^2 + i\epsilon}. \quad (\text{B.38})$$

Definindo,

$$\langle -p, -p' | q \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p' - (p + q)) V(p, p'), \quad (\text{B.39})$$

onde  $V(p, p')$  é independente de correntes, ficamos com:

$$\langle -p, -p' | j_2^\dagger(0) | 0 \rangle = - \frac{V(p, p') \langle q | j_2^\dagger(0) | 0 \rangle}{q^2 - m_2^2 + i\epsilon}, \quad (\text{B.40})$$

onde  $q = p' - p$ . Portanto a expressão final para o lado fenomenológico da função de correlação é:

$$\Gamma(p, p') = \frac{\langle 0 | j_3(0) | -p' \rangle V(p, p') \langle q | j_2^\dagger(0) | 0 \rangle \langle p | j_1^\dagger(0) | 0 \rangle}{(q^2 - m_2^2 + i\epsilon)(p'^2 - m_3^2 + i\epsilon)(p^2 - m_1^2 + i\epsilon)}. \quad (\text{B.41})$$

Comparando as Eqs.(B.9) e (B.41) vemos que podemos interpretar  $iV(p, p')$  como o vértice da interação.

# Apêndice C

## Cálculo do Isospin para a $\Theta$ e $\Xi$

Como já vimos no capítulo 3 a corrente da Eq.(3.15) não pode descrever um estado com dois diquarks iguais. Assim só uma corrente de isospin 1 pode descrever esse estado. Para provar essas duas propriedades, considere a forma mais geral da Eq.(3.15),

$$\eta_G(x) = \epsilon^{abc} \epsilon^{def} \epsilon^{cfd} Q_{ab}^1 Q_{de}^2 C \bar{s}_g^T(x), \quad (C.1)$$

onde  $Q_{ab}^i$  é o diquark,

$$Q_{ab}^i = u_a^T(x) C \Gamma^i d_b(x).$$

Usando a relação,

$$\epsilon_{abc} \epsilon_{dec} = \delta_{ad} \delta_{be} - \delta_{ae} \delta_{bd}, \quad (C.2)$$

na Eq.(C.1), obtemos,

$$\eta_G(x) = \epsilon^{abc} Q_{ab}^1 (Q_{gc}^2 - Q_{cg}^2) C \bar{s}_g^T(x). \quad (C.3)$$

Por outro lado escolhendo, uma outra possibilidade de contração entre os tensores de cor na Eq.(C.1), obtemos,

$$\eta_G(x) = -\epsilon^{def} Q_{de}^2 (Q_{gf}^1 - Q_{fg}^1) C \bar{s}_g^T(x), \quad (C.4)$$

onde para o caso de dois diquarks iguais  $Q^2 = Q^1$ , obtemos  $\eta_G(x) = -\eta_G(x)$  via Eqs.(C.3) e (C.4). Logo, para o caso de dois diquarks iguais  $\eta_G(x) = 0$ , como discutido no capítulo 3.

Logo temos a propriedade para  $\eta_G(x) = 0$ ,

$$\epsilon^{abc} u_a^T(x) C \Gamma d_b(x) [u_g^T(x) C \Gamma d_c(x)] C \bar{s}_g^T(x) = \epsilon^{abc} u_a^T(x) C \Gamma d_b(x) [u_c^T(x) C \Gamma d_g(x)] C \bar{s}_g^T(x). \quad (C.5)$$

## C.1 Isospin para a $\Theta$ da Eq.(3.16)

Usando o mesmo procedimento realizado nas Eqs.(3.12) e (3.13), temos a propriedade,

$$d_c^T(3) C \Gamma u_e(4) = u_e^T(3) C \Gamma d_c(4). \quad (C.6)$$

Inserindo essa propriedade na Eq.(C.5), podemos escrever a corrente da Eq.(3.16) em duas partes iguais da forma,

$$\theta_n(x) = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} [u_a^T(1) C \Gamma_n d_b(2)] \left( [u_c^T(3) C \Gamma_n d_e(4)] + [d_c^T(3) C \Gamma_n u_e(4)] \right) C \bar{s}_e^T(5). \quad (C.7)$$

Como o quark  $s$  não pertence ao multiplete de isospin, podemos consider apenas 4 componentes para os operadores de isospin:

$$I_k = I_k(1) + I_k(2) + I_k(3) + I_k(4). \quad (C.8)$$

Inserindo essas componentes no operador de isospin,

$$I^2 = I_3^2 + \frac{1}{2} (I_+ I_- + I_- I_+), \quad (C.9)$$

obtemos,

$$I^2 = I_{12}^2 + I_{34}^2 + M^2, \quad (C.10)$$

onde,  $I_{ij}$  é o operador de isospin que age apenas nos quarks (i) e (j),  $M^2$  é um operador de mistura dado por,

$$M^2 = I_-^{34} I_+^{12} + I_+^{34} I_-^{12}. \quad (C.11)$$

Para o diquark 1,2 temos que:  $I_+^{12} \theta_n(x) = I_-^{12} \theta_n(x) = 0$ , como mostrado na Eq.(3.14). Logo  $M^2 \theta_n(x) = 0$ .

No capítulo 3 mostramos que o diquark formado pelos quarks (1) e (2), possui isospin zero, logo  $I_{12}^2 \theta_n(x) = 0$ . Assim o nosso problema consiste em calcular  $I_{34}^2$ .

Considere o diquark composto pelos quarks (3) e (4) da Eq.(C.7),

$$\eta^{ce} = [u_c^T(3)C\Gamma d_e(4)] + [d_c^T(3)C\Gamma u_e(4)]. \quad (C.12)$$

Obtemos de imediato  $I_3\eta^{ce} = 0$  e

$$I_+\eta^{ce} = 2[u_c^T(3)C\Gamma u_e(4)], \quad (C.13)$$

$$I_-\eta^{ce} = 2[d_c^T(3)C\Gamma d_e(4)], \quad (C.14)$$

$$I_+I_-\eta^{ce}(x) = I_-I_+\eta^{ce}(x) = 2\eta^{ce}(x), \quad (C.15)$$

Assim obtemos diretamente da Eq.(C.9),

$$I_{34}^2\eta^{ce} = 2\eta^{ce}. \quad (C.16)$$

que fornece  $I = 1$ , para esse diquark e também para a corrente da Eq.(C.7).

## C.2 Isospin para a $\Xi$

Como já vimos no capítulo 3, as correntes da  $\Xi^{--}$  são:

$$\eta_1^{\Xi}(x) = \epsilon^{abc}[s_a^T(1)C\Gamma d_b(2)][s_c^T(3)C\Gamma d_e(4)]C\bar{u}_e^T(5), \quad (C.17)$$

$$\eta_2^{\Xi}(x) = \epsilon^{abc}\epsilon^{def}\epsilon^{cfdg}[s_a^T(x)C\Gamma d_b(x)][s_d^T(x)C\Gamma \gamma_5 d_e(x)]C\bar{u}_g^T(x). \quad (C.18)$$

Para este caso iremos acrescentar na álgebra dada nas Eqs.(3.6) e (3.7), as novas equações,

$$I_3\bar{u} = -\frac{1}{2}\bar{u}, I_3\bar{d} = \frac{1}{2}\bar{d}, \quad (C.19)$$

$$I_+\bar{u} = -\bar{d}, I_-\bar{d} = -\bar{u},$$

$$I_-\bar{u} = I_+\bar{d} = 0. \quad (C.20)$$

Assim obtemos para as correntes Eqs.(C.17) e (C.18),

$$I_3\eta_i^{\Xi}(x) = -\frac{3}{2}\eta_i^{\Xi}(x), \quad (C.21)$$

$$I_-\eta_i^{\Xi}(x) = 0, \quad (C.22)$$

$$I_- I_+ \eta_i^\Xi(x) = 3\eta_i^\Xi(x), \quad (\text{C.23})$$

logo calculamos de imediato o autovalor das correntes  $\eta_i^\Xi(x)$ , via Eq.(C.9), resultando,

$$I^2 \eta_i^\Xi(x) = \frac{15}{4} \eta_i^\Xi(x), \quad (\text{C.24})$$

ou seja  $I = 3/2$ .

# Apêndice D

## propagador de quarks “cheio”

O propagador de quarks “cheio” é dado por:

$$S_{ab}^{cheio}(x) = S_{ab}^0(x) + \langle 0 | : q_a(x) \bar{q}_b(0) : | 0 \rangle. \quad (D.1)$$

### D.1 Parcela perturbativa

Numa teoria onde os quarks estão interagindo, o cálculo do propagador em termos do vácuo perturbativo, definido por  $|0_p\rangle$ , é dado pela fórmula de Gell-Mann Low,

$$S_{ab}^0(x) = \langle 0_p | T \{ q_a(x) \bar{q}_b(0) e^{i \int d^4 z \mathcal{L}_{QCD}(z)} \} | 0_p \rangle, \quad (D.2)$$

a lagrangeana do acoplamento quark-gluon da QCD é

$$\mathcal{L}_{QCD} = g_s \bar{q}_a [\gamma_\mu B^{A\mu} \tau_{ab}^A] q_b, \quad (D.3)$$

onde  $g_s$  é a constante de acoplamento da QCD,  $\tau_{ab}^A$  são as matrizes de Gell-Mann,  $B^{A\mu}(x)$  é o campo do gluon e  $A$  é um índice que varia de 1 a 8.

Assim temos a expansão,

$$S_{ab}^0(x) = \langle 0_p | T \{ q_a(x) \bar{q}_b(0) \} | 0_p \rangle + i \int d^4 z \langle 0_p | T \{ q_a(x) \bar{q}_b(0) \mathcal{L}_{QCD}(z) \} | 0_p \rangle + \dots \quad (D.4)$$

O primeiro termo dessa expansão é o propagador de quarks livres,

$$\langle 0_p | T \{ q_a(x) \bar{q}_b(0) \} | 0_p \rangle = i \delta_{ab} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{\not{p} + m_q}{p^2 - m_q^2 + i\epsilon}. \quad (D.5)$$

Na regra de soma, consideramos que o gluon possui uma componente de campo clássico, chamado de condensado de gluons, assim o segundo termo da expansão Eq.(D.4) é não nulo.

No gauge do ponto fixo, o campo clássico gluônico é dado por

$$B_\mu^A(x) = -\frac{1}{2}G_{\mu\nu}^A(0)x^\nu, \quad (D.6)$$

onde  $G_{\mu\nu}^A = \partial_\mu B_\nu^A - \partial_\nu B_\mu^A + g_s f_{ABC} B_\mu^B B_\nu^C$ , que é um tensor antissimétrico.

Definindo  $S_{ab}^{II}(x) = i \int d^4z \langle 0_p | T \{ q_a(x) \bar{q}_b(0) \mathcal{L}_{QCD}(z) \} | 0_p \rangle$ , temos,

$$S_{ab}^{II}(x) = i g_s \tau_{a'b'}^A \int d^4z B^{A\mu}(z) \langle 0_p | T \{ q_a(x) \bar{q}_b(0) \bar{q}_{a'}(z) \gamma_\mu q_{b'}(z) \} | 0_p \rangle. \quad (D.7)$$

Aplicando o Teorema de Wick, obtemos,

$$S_{ab}^{II}(x) = \int d^4z S_{aa'}(x-z) [i \gamma_\mu g_s \tau_{a'b'}^A B^{A\mu}(z)] S_{b'b}(z), \quad (D.8)$$

chamamos  $S_{ab}(x) = \langle 0_p | T \{ q_a(x) \bar{q}_b(0) \} | 0_p \rangle$ .

Inserindo a expressão do propagador de quarks, Eq.(D.5), e a transformada de Fourier para o campo do gluon, definida por:

$$B^{A\mu}(z) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iqz} B^{A\mu}(q), \quad (D.9)$$

na Eq.(D.8), ficamos com a expressão:

$$S_{ab}^{II}(x) = -i g_s \tau_{ab}^A \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{\not{p} + m_q}{p^2 - m_q^2 + i\epsilon} F(p), \quad (D.10)$$

onde,

$$F(p) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [\gamma_\mu B^{A\mu}(q)] \frac{\not{p} - \not{q} + m_q}{(p-q)^2 - m_q^2 + i\epsilon}. \quad (D.11)$$

A transformada de Fourier do campo gluônico Eq.(D.6) é dada por:

$$B_\mu^A(q) = i(2\pi)^4 \frac{1}{2} G_{\mu\nu}^A(0) \partial^\nu \delta^4(q). \quad (D.12)$$

Assim temos a expressão para  $F(p)$ ,

$$F(p) = -i \frac{1}{2} G_{\mu\nu}^A(0) \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial q_\nu} \frac{\not{p} - \not{q} + m_q}{(p-q)^2 - m_q^2 + i\epsilon} \Big|_{q=0}, \quad (D.13)$$

obtemos,

$$F(p) = i\frac{1}{2}G_{\mu\nu}^A(0)\gamma^\mu \left( \frac{\gamma^\nu}{p^2 - m_q^2 + i\epsilon} - 2p^\nu \frac{\not{p} + m_q}{(p^2 - m_q^2 + i\epsilon)^2} \right). \quad (D.14)$$

Assim ficamos com a expressão para o propagador Eq.(D.10) no espaço dos momentos:

$$S(p) = \frac{1}{2}g_s\tau_{ab}^AG_{\mu\nu}^A(0)\frac{\not{p} + m_q}{p^2 - m_q^2 + i\epsilon} \left( \frac{\gamma^\mu\gamma^\nu}{p^2 - m_q^2 + i\epsilon} - 2\gamma^\mu p^\nu \frac{\not{p} + m_q}{(p^2 - m_q^2 + i\epsilon)^2} \right). \quad (D.15)$$

Usando a relação

$$(\not{p} + m_q)\gamma^\mu p^\nu (\not{p} + m_q) = -\gamma^\mu p^\nu (p^2 - m^2) + 2p^\mu p^\nu (\not{p} + m_q),$$

no segundo termo da Eq.(D.15), temos em um dos termos uma contração entre o tensor simétrico,  $p^\mu p^\nu$ , pelo tensor antissimétrico,  $G_{\mu\nu}^A(0)$ , assim temos a expressão mais simplificada:

$$S(p) = \frac{g_s\tau_{ab}^AG_{\mu\nu}^A(0)}{2(p^2 - m_q^2 + i\epsilon)^2} [(\not{p} + m_q)\gamma^\mu\gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu]. \quad (D.16)$$

Podemos decompor o tensor  $\gamma^\mu p^\nu$  em dois tensores: um tensor antissimétrico e um tensor simétrico. Devido a presença do tensor antissimétrico,  $G_{\mu\nu}^A(0)$ , temos que apenas a parcela antissimétrica irá contribuir, logo podemos realizar a troca,

$$2\gamma^\mu p^\nu \rightarrow \gamma^\mu p^\nu - \gamma^\nu p^\mu.$$

Usando a relação

$$2(\gamma^\mu p^\nu - \gamma^\nu p^\mu) = \gamma^\mu\gamma^\nu \not{p} - \not{p}\gamma^\mu\gamma^\nu,$$

temos

$$4\gamma^\mu p^\nu \rightarrow \gamma^\mu\gamma^\nu \not{p} - \not{p}\gamma^\mu\gamma^\nu. \quad (D.17)$$

O tensor  $\gamma_\mu\gamma_\nu$  contraído com o tensor  $G_{\mu\nu}^A(0)$ , pode ser efetivamente trocado por,

$$\gamma_\mu\gamma_\nu \rightarrow -i\sigma_{\mu\nu}. \quad (D.18)$$

Inserindo as Eqs.(D.18) e (D.17)em Eq.(D.16) e aplicando a transformada de Fourier, temos:

$$S_{ab}^{II}(x) = \frac{-i}{4} g_s \tau_{ab}^A G_{\mu\nu}^A(0) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{\sigma^{\mu\nu} \not{p} + \not{p} \sigma^{\mu\nu} + 2m_q \sigma^{\mu\nu}}{(p^2 - m_q^2 + i\epsilon)^2}. \quad (D.19)$$

Nos capítulos 3 e 4 trabalhamos com quarks leves, portanto podemos trabalhar no espaço das configurações considerando uma expansão em primeira ordem na massa do quark. Assim temos a expansão da Eq.(D.5) até primeira ordem na massa do quark:

$$\langle 0_p | T \{ q_a(x) \bar{q}_b(0) \} | 0_p \rangle = i \delta_{ab} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{\not{p} + m_q}{p^2 + i\epsilon}. \quad (D.20)$$

Usando as transformadas de Fourier (ver apêndice E),

$$\int d^4 x e^{-ipx} \frac{\not{p}}{p^2 + i\epsilon} = \not{x} \frac{8\pi^2}{x^4}, \quad (D.21)$$

$$\int d^4 p \frac{e^{-ipx}}{p^2 + i\epsilon} = i \frac{4\pi^2}{x^2}, \quad (D.22)$$

obtemos:

$$\langle 0_p | T \{ q_a(x) \bar{q}_b(0) \} | 0_p \rangle = \delta_{ab} \left( \frac{i}{2\pi^2 x^4} \not{x} - \frac{m_q}{4\pi^2 x^2} \right). \quad (D.23)$$

Para a Eq.(D.19), temos a expansão para quarks leves:

$$S_{ab}^{II}(x) = \frac{-i}{4} g_s \tau_{ab}^A G_{\mu\nu}^A(0) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{\sigma^{\mu\nu} \not{p} + \not{p} \sigma^{\mu\nu} + 2m_q \sigma^{\mu\nu}}{(p^2 + i\epsilon)^2}. \quad (D.24)$$

Usando as transformadas de Fourier,

$$\int d^4 x e^{-ipx} \frac{\not{p}}{(p^2 + i\epsilon)^2} = \not{x} \frac{2\pi^2}{x^2}, \quad (D.25)$$

$$\int d^4 p \frac{e^{-ipx}}{(p^2 + i\epsilon)^2} = -i\pi^2 \ln(-x^2), \quad (D.26)$$

obtemos:

$$S_{ab}^{II}(x) = -\tau_{ab}^A \frac{i}{32\pi^2 x^2} g_s G_{\mu\nu}^A(0) (\not{x} \sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} \not{x}) - \tau_{ab}^A \frac{m_q}{32\pi^2} g_s G_{\mu\nu}^A(0) \sigma^{\mu\nu} \ln(-x^2). \quad (D.27)$$

Desse modo temos o propagador de quarks leves em primeira ordem na constante na constante de acoplamento,

$$\begin{aligned} S_{ab}^0(x) &= \delta_{ab} \left( \frac{i}{2\pi^2 x^4} \not{x} - \frac{m_q}{4\pi^2 x^2} \right) - \tau_{ab}^A \frac{i}{32\pi^2 x^2} g_s G_{\mu\nu}^A(0) (\not{x} \sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} \not{x}) \\ &- \tau_{ab}^A \frac{m_q}{32\pi^2} g_s G_{\mu\nu}^A(0) \sigma^{\mu\nu} \ln(-x^2). \end{aligned} \quad (D.28)$$

Podemos ver no final desse apêndice um novo termo para o propagador de quarks, gerado pelo segundo termo da expansão Eq.(D.4). Este novo termo, possui uma dimensão elevada e só contribui no vértice  $\Theta nK$ .

## D.2 Parcela não perturbativa

Podemos relacionar a parcela não perturbativa para o propagador de quarks Eq.(D.1) com um singlete de cor:

$$\langle 0 | : \bar{q}_\beta(0) q_\alpha(x) : | 0 \rangle = -\delta_{ab} \langle 0 | : q_\alpha^a(x) \bar{q}_\beta^b(0) : | 0 \rangle. \quad (D.29)$$

Considerando que:

$$\langle 0 | : q_\alpha^a(x) \bar{q}_\beta^b(0) : | 0 \rangle = \delta^{ab} \Delta_{\alpha\beta}(x), \quad (D.30)$$

temos,

$$\Delta_{\alpha\beta}(x) = -\frac{1}{3} \langle 0 | : \bar{q}_\beta(0) q_\alpha(x) : | 0 \rangle. \quad (D.31)$$

Para obter esse propagador em termos de parâmetros do vácuo da QCD o procedimento consiste em fazer a expansão numa série de Taylor do campo  $q_\alpha(x)$ , assim temos:

$$q_\alpha(x) = q_\alpha(0) + x^\mu \partial_\mu q_\alpha(x)|_{x=0} + \frac{1}{2} x^\mu x^\nu \partial_\mu \partial_\nu q_\alpha(x)|_{x=0} + \frac{1}{6} x^\mu x^\nu x^\rho \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho q_\alpha(x)|_{x=0} + \dots,$$

que pode ser reescrito como

$$\langle 0 | : \bar{q}_\beta(0) q_\alpha(x) : | 0 \rangle = [A_1]_{\alpha\beta} + x^\mu [A_{2\mu}]_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} x^\mu x^\nu [A_{3\mu\nu}]_{\alpha\beta} + \frac{1}{6} x^\mu x^\nu x^\rho [A_{4\mu\nu\rho}]_{\alpha\beta} + \dots, \quad (D.32)$$

onde,

$$[A_1]_{\alpha\beta} = \langle 0 | : \bar{q}_\beta(0) q_\alpha(0) : | 0 \rangle, \quad (D.33)$$

$$[A_{2\mu}]_{\alpha\beta} = \langle 0 | : \bar{q}_\beta(0) \partial_\mu q_\alpha(x)|_{x=0} : | 0 \rangle, \quad (D.34)$$

$$[A_{3\mu\nu}]_{\alpha\beta} = \langle 0 | : \bar{q}_\beta(0) \partial_\mu \partial_\nu q_\alpha(x)|_{x=0} : | 0 \rangle, \quad (D.35)$$

$$[A_{4\mu\nu\rho}]_{\alpha\beta} = \langle 0 | : \bar{q}_\beta(0) \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho q_\alpha(x)|_{x=0} : | 0 \rangle. \quad (D.36)$$

O condensado de quarks se relaciona com  $[A_1]_{\alpha\beta}$  através de:

$$\langle \bar{q}q \rangle = \delta^{\beta\alpha} [A_1]_{\alpha\beta}. \quad (\text{D.37})$$

Considerando que:

$$[A_1]_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} N_1, \quad (\text{D.38})$$

temos,

$$N_1 = \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{4}, \quad (\text{D.39})$$

ou seja,  $\langle 0 | : q^a(0) \bar{q}^b(0) : | 0 \rangle = -\frac{\langle \bar{q}q \rangle}{12} \delta_{ab}$ .

Para avaliar o coeficiente  $[A_{2\mu}]_{\alpha\beta}$  usamos o fato que os quarks obedecem a equação de movimento,

$$\not{D}q(x) = -im_q q(x), \quad (\text{D.40})$$

onde  $D_\mu = \partial_\mu - ig_s \tau^A B_\mu^A(x)$ . Aplicando o gauge do ponto fixo, podemos trocar a derivada usual pela derivada covariante em todos os termos da expansão Eq.(D.32), assim temos a relação para o coeficiente  $[A_{2\mu}]_{\alpha\beta}$ ,

$$\gamma_{\beta\alpha}^\mu [A_{2\mu}]_{\alpha\beta} = \langle 0 | : \bar{q}(0) \not{D}q(x) |_{x=0} : | 0 \rangle = -im_q \langle \bar{q}q \rangle. \quad (\text{D.41})$$

Considerando que:

$$[A_{2\mu}]_{\alpha\beta} = [\gamma_\mu]_{\alpha\beta} N_2, \quad (\text{D.42})$$

temos,

$$N_2 = \frac{-im_q \langle \bar{q}q \rangle}{16}. \quad (\text{D.43})$$

Para avaliar o coeficiente  $[A_{3\mu\nu}]_{\alpha\beta}$  usamos uma nova equação de movimento válida para quarks leves,

$$D^2 q(x) = \frac{1}{2} g_s \sigma \cdot G(x) q(x), \quad (\text{D.44})$$

onde  $\sigma \cdot G(x) = \sigma_{\mu\nu} \tau^A G^{A\mu\nu}(x)$ .

Assim ficamos com a relação:

$$g^{\mu\nu} \delta^{\beta\alpha} [A_{3\mu\nu}]_{\alpha\beta} = \langle 0 | : \bar{q}(0) D^2 q(x) |_{x=0} : | 0 \rangle = \frac{1}{2} \langle \bar{q} g_s \sigma \cdot G q \rangle. \quad (\text{D.45})$$

Considerando que:

$$[A_{3\mu\nu}]_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta}N_3, \quad (D.46)$$

temos,

$$N_3 = \frac{\langle \bar{q}g_s\sigma.Gq \rangle}{2^5}. \quad (D.47)$$

Para avaliar o coeficiente  $[A_{4\mu\nu\rho}]_{\alpha\beta}$  usamos as duas equações de movimento Eqs.(D.40) e (D.44), assim ficamos com a relação:

$$g^{\mu\nu}[\gamma^\rho]_{\beta\alpha}[A_{4\mu\nu\rho}]_{\alpha\beta} = \langle 0 | : \bar{q}(0) D^2 \not{p} q(x) |_{x=0} : | 0 \rangle = \frac{-im_q}{2} \langle \bar{q}g_s\sigma.Gq \rangle. \quad (D.48)$$

Considerando a estrutura simétrica:

$$[A_{4\mu\nu\rho}]_{\alpha\beta} = [g_{\mu\nu}\gamma_\rho + g_{\rho\nu}\gamma_\mu + g_{\rho\mu}\gamma_\nu]_{\alpha\beta} N_4, \quad (D.49)$$

temos,

$$N_4 = \frac{-im_q \langle \bar{q}g_s\sigma.Gq \rangle}{2^6 3}. \quad (D.50)$$

Assim temos o propagador de quarks Eq.(D.30) até dimensão 6.

$$\langle 0 | : q_a(x) \bar{q}_b(0) : | 0 \rangle = \delta_{ab} \left( -\frac{\langle \bar{q}q \rangle}{12} + \frac{im_q \langle \bar{q}q \rangle}{48} \not{x} - \frac{x^2}{2^6 3} \langle \bar{q}g_s\sigma.Gq \rangle + \frac{ix^2 m_q}{2^7 3^2} \langle \bar{q}g_s\sigma.Gq \rangle \not{x} \right) \quad (D.51)$$

## D.3 Parcela não fatorável

Na regra de soma existe a formação de novos termos para o propagador que estão relacionados ao valor esperado  $\langle q_a(x) g_s G_{\mu\nu}^A(0) \bar{q}_b(0) \rangle$ , que aparece no produto dos propagadores Eq.(D.19) e Eq.(D.30). Podemos relacionar essa parcela não fatorável para o propagador de quarks com um singlete de cor:

$$\langle 0 | : \bar{q}_\beta(0) g_s G_{\mu\nu}^A(0) q_\alpha(x) : | 0 \rangle = -\tau_{ba}^A \langle 0 | : q_\alpha^a(x) g_s G_{\mu\nu}^A(0) \bar{q}_\beta^b(0) : | 0 \rangle. \quad (D.52)$$

Considerando que:

$$\langle 0 | : q_\alpha^a(x) g_s G_{\mu\nu}^A(0) \bar{q}_\beta^b(0) : | 0 \rangle = \tau^{Aab} [\Delta_{\alpha\beta}(x)]_{\mu\nu}, \quad (D.53)$$

temos,

$$[\Delta_{\alpha\beta}(x)]_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\langle 0 | : \bar{q}_\beta(0)g_s G_{\mu\nu}^A(0)q_\alpha(x) : | 0 \rangle. \quad (D.54)$$

Fazendo a expansão do campo  $q_\alpha(x)$  e aplicando o gauge do ponto fixo, temos a expansão para o propagador de quarks não fatorável até dimensão 6,

$$\langle 0 | : \bar{q}_\beta(0)g_s G_{\mu\nu}^A(0)q_\alpha(x) : | 0 \rangle = [A_{1\mu\nu}]_{\alpha\beta} + x^\rho [A_{2\rho\mu\nu}]_{\alpha\beta}. \quad (D.55)$$

onde,

$$[A_{1\mu\nu}]_{\alpha\beta} = \langle 0 | : \bar{q}_\beta(0)g_s G_{\mu\nu}^A(0)q_\alpha(0) : | 0 \rangle, \quad (D.56)$$

$$[A_{2\rho\mu\nu}]_{\alpha\beta} = \langle 0 | : \bar{q}_\beta(0)g_s G_{\mu\nu}^A(0) D_\rho q_\alpha(x)|_{x=0} : | 0 \rangle, \quad (D.57)$$

Considerando a forma antissimétrica:

$$[A_{1\mu\nu}]_{\alpha\beta} = [\sigma_{\mu\nu}]_{\alpha\beta} N_1, \quad (D.58)$$

temos o valor de  $N_1$  através da contração da Eq.(D.56) por  $\sigma^{\mu\nu}$ ,

$$N_1 = \frac{\langle \bar{q}g_s\sigma.Gq \rangle}{2^4 3}. \quad (D.59)$$

Considerando a forma antissimétrica em  $\mu\nu$ :

$$[A_{2\rho\mu\nu}]_{\alpha\beta} = [\sigma_{\mu\nu}\gamma_\rho + \gamma_\rho\sigma_{\mu\nu}]_{\alpha\beta} N_2, \quad (D.60)$$

temos o valor de  $N_2$  através da contração da Eq.(D.57) por  $\sigma^{\mu\nu}\gamma^\rho$ ,

$$N_2 = \frac{-im_q \langle \bar{q}g_s\sigma.Gq \rangle}{2^6 3}. \quad (D.61)$$

Assim a componente não fatorável para o propagador de quarks até dimensão 6.

$$\langle q_a(x)g_s G_{\mu\nu}^A \bar{q}_b(0) \rangle = -\tau_{ab}^A \left( \frac{1}{2^6 3} \langle \bar{q}g_s\sigma.Gq \rangle \sigma_{\mu\nu} - \frac{i}{2^8 3} m_q \langle \bar{q}g_s\sigma.Gq \rangle (\not{x}\sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}\not{x}) \right). \quad (D.62)$$

Desse modo, temos finalmente o propagador de quarks “cheio”, Eqs.(D.1,D.62), escrito com duas estruturas de cor,

$$S_{ab}(x) = \delta_{ab}S_I(x) + \tau_{ab}S_{II}(x). \quad (D.63)$$

## D.4 Propagador de quarks leves no espaço das configurações

Resumindo os cálculos realizados neste apêndice, temos o propagador de quarks no espaço das configurações até dimensão 6.

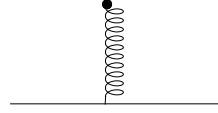
$$\delta_{ab} \frac{i}{2\pi^2 x^4} \not{x}$$



$$-\delta_{ab} \frac{m_q}{4\pi^2 x^2}$$



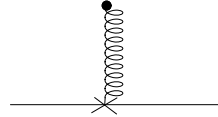
$$-\tau_{ab}^A \frac{i}{32\pi^2 x^2} g_s G_{\mu\nu}^A(0) (\not{x} \sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} \not{x})$$



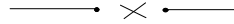
$$-\delta_{ab} \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{12}$$



$$-\tau_{ab}^A \frac{m_q}{32\pi^2} g_s G_{\mu\nu}^A(0) \sigma^{\mu\nu} \ln(-x^2)$$



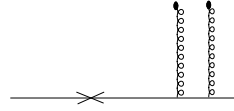
$$\delta_{ab} \frac{i m_q \langle \bar{q}q \rangle}{48} \not{x}$$



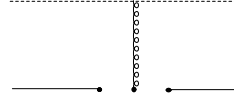
$$-\delta_{ab} \frac{x^2}{2^6 3} \langle \bar{q} g_s \sigma \cdot \mathbf{G} q \rangle$$



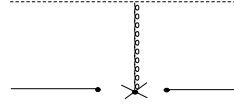
$$-\delta_{ab} \frac{m_q \langle g_s^2 G^2 \rangle}{2^9 3 \pi^2} x^2 \ln(-x^2)$$



$$-\tau_{ab}^A \frac{1}{2^6 3} \langle \bar{q} g_s \sigma \cdot \mathbf{G} q \rangle \sigma_{\mu\nu}$$



$$-\tau_{ab}^A \frac{i}{2^8 3} m_q \langle \bar{q} g_s \sigma \cdot \mathbf{G} q \rangle (\not{x} \sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} \not{x})$$



$$\delta_{ab} \frac{i x^2 m_q}{2^7 3^2} \langle \bar{q} g_s \sigma \cdot \mathbf{G} q \rangle \not{x}$$



# Apêndice E

## Transformadas de Fourier para quarks leves

**E.1**  $\int d^4x \frac{e^{iqx}}{(x^2 - i\epsilon)^n}$

Considere a integral,

$$I_n = \int d^4x \frac{e^{iqx}}{(x^2 - i\epsilon)^n}, \quad (\text{E.1})$$

para  $\epsilon > 0$ . Usando a identidade,

$$\frac{1}{(x^2 - i\epsilon)^n} = \frac{1}{(-i)^n (n-1)!} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{n-1} e^{-i\alpha(x^2 - i\epsilon)}, \quad (\text{E.2})$$

na integral Eq.(E.1), obtemos:

$$I_n = \frac{1}{(-i)^n (n-1)!} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{n-1} e^{-\alpha\epsilon} \int d^4x e^{iqx} e^{-i\alpha x^2}. \quad (\text{E.3})$$

Transformando a função  $e^{iqx} e^{-i\alpha x^2}$  numa gaussiana e usando a fórmula da integral gaussiana complexa [64, 65],

$$\int_{-\infty}^\infty dk e^{-i\alpha k^2} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad (\text{E.4})$$

onde para a integral  $\int_{-\infty}^\infty dk e^{i\alpha k^2}$  o procedimento consiste em operar o conjugado complexo na Eq.(E.4), obtemos:

$$\int d^4x e^{iqx} e^{-i\alpha x^2} = i \frac{\pi^2}{\alpha^2} e^{i\frac{q^2}{4\alpha}}. \quad (\text{E.5})$$

Inserindo a Eq.(E.5) e fazendo uma mudança de variáveis,  $u = \frac{1}{\alpha}$ , e aplicando o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , podemos expressar a integral da Eq.(E.3) na forma:

$$I_n = \frac{i\pi^2}{(-i)^n (n-1)!} \int_0^\infty du \frac{e^{i\frac{q^2}{4u}}}{u^{n-1}}, \quad (\text{E.6})$$

Na QCDSR os processos ocorrem para  $q^2 < 0$ , portanto devemos escolher a parte de baixo de um semi-círculo de integração complexa, assim transformamos essa integral complexa numa integral real, do tipo,

$$\int_0^\infty du \frac{e^{i\frac{q^2}{4}u}}{u^{n-1}} = \frac{1}{(-i)^{n-2}} \int_0^\infty dz \frac{e^{\frac{q^2}{4}z}}{z^{n-1}}. \quad (\text{E.7})$$

Usando a identidade,

$$\frac{1}{z^{n-1}} = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{n-2} e^{-\alpha z}, \quad (\text{E.8})$$

na Eq.(E.7), obtemos a integral:

$$\int_0^\infty dz \frac{e^{\frac{q^2}{4}z}}{z^{n-1}} = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^\infty d\alpha \frac{\alpha^{n-2}}{\alpha - \frac{q^2}{4}}. \quad (\text{E.9})$$

A integral  $\int_0^\infty d\alpha \frac{\alpha^{n-2}}{\alpha - \frac{q^2}{4}}$  é divergente. Controlamos essa divergência através do método de regularização do *cut-off*, onde substituímos o infinito pelo parâmetro de regularização  $\Lambda$ , assim temos:

$$\int_0^\Lambda d\alpha \frac{\alpha^{n-2}}{\alpha - \frac{q^2}{4}} = (q^2/4)^{n-2} \ln(-q^2/4) + \text{Polinômios Reais}(q^2, \Lambda). \quad (\text{E.10})$$

onde os coeficientes polinomiais divergem para o limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

Os polinômios são eliminados pela transformada de Borel, assim para a QCDSR ficamos com a integral através das Eqs.(E.6),(E.7), (E.9) e (E.10),

$$\int d^4x \frac{e^{iqx}}{(x^2)^n} = \frac{i\pi^2(-1)^n 2^{4-2n}}{(n-1)!(n-2)!} (q^2)^{n-2} \ln \left( \frac{-q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right), \quad (\text{E.11})$$

válido para  $n \geq 2$ .

Na Ref.[66] essa integral é obtida por regularização dimensional.

Para o caso,  $n = 1$ , obtemos facilmente a integral da Eq.(E.7) sem usar a regularização do *cut-off*, assim através das Eqs.(E.6) e (E.7), temos:

$$\int d^4x \frac{e^{iqx}}{x^2} = i \frac{4\pi^2}{-q^2}. \quad (\text{E.12})$$

Uma generalização imediata dessas fórmulas, consiste na aplicação do operador,

$$\frac{\partial}{\partial q^\mu} = 2q_\mu \frac{\partial}{\partial q^2}. \quad (\text{E.13})$$

Assim obtemos as fórmulas,

$$\int d^4x e^{iqx} \frac{\not{x}}{(x^2)^n} = \not{x} \frac{\pi^2 (-1)^n 2^{5-2n}}{(n-1)!(n-2)!} (q^2)^{n-3} \left[ 1 + (n-2) \ln \left( \frac{-q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right) \right]. \quad (\text{E.14})$$

$$\int d^4x e^{iqx} \frac{\not{x}}{x^2} = \not{x} \frac{8\pi^2}{q^4}. \quad (\text{E.15})$$

**E.2**  $\int d^4q \frac{e^{-iqx}}{(q^2 + i\epsilon)^n}$

Neste caso, o cálculo da transformada de Fourier é idêntico ao procedimento anterior, onde devemos usar uma outra identidade,

$$\frac{1}{(q^2 + i\epsilon)^n} = \frac{1}{(i)^n (n-1)!} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{n-1} e^{i\alpha(q^2 + i\epsilon)}. \quad (\text{E.16})$$

Seguindo os mesmos passos descritos na seção anterior e considerando que os processos da QCDSR ocorrem para  $x^2 < 0$ , obtemos:

$$\int d^4q \frac{e^{-iqx}}{(q^2)^n} = \frac{i\pi^2 (-1)^{n+1} 2^{4-2n}}{(n-1)!(n-2)!} (x^2)^{n-2} \ln \left( \frac{-x^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right), \quad (\text{E.17})$$

$$\int d^4q \frac{e^{-iqx}}{q^2} = i \frac{4\pi^2}{x^2}, \quad (\text{E.18})$$

$$\int d^4q e^{-iqx} \frac{\not{q}}{(q^2)^n} = \not{x} \frac{\pi^2 (-1)^n 2^{5-2n}}{(n-1)!(n-2)!} (x^2)^{n-3} \left[ 1 + (n-2) \ln \left( \frac{-x^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right) \right], \quad (\text{E.19})$$

$$\int d^4q e^{-iqx} \frac{\not{q}}{q^2} = \not{x} \frac{8\pi^2}{x^4}. \quad (\text{E.20})$$

**E.3**  $\int d^4x \frac{e^{iqx}}{(x^2 - i\epsilon)^n} \ln(-x^2)$

Definimos:

$$I_n = \int d^4x \frac{e^{iqx}}{(x^2 - i\epsilon)^n} \ln\left(-\frac{x^2}{\mu}\right).$$

Usando n=2 na Eq.(E.17), temos:

$$\ln\left(-\frac{x^2}{\mu}\right) = \frac{i}{\pi^2} \int d^4p \frac{e^{-ipx}}{(p^2 + i\epsilon)^2}, \quad (\text{E.21})$$

onde de imediato temos a transformada de Fourier,

$$I_0 = \int d^4x e^{iqx} \ln\left(-\frac{x^2}{\mu}\right) = i \frac{16\pi^2}{q^4}. \quad (\text{E.22})$$

Agora queremos calcular a integral desconhecida,

$$I_1 = \int d^4x \frac{e^{iqx}}{x^2} \ln\left(-\frac{x^2}{\mu}\right), \quad (\text{E.23})$$

onde aplicando o operador, ficamos com a equação diferencial,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q^\alpha \partial q_\alpha} I_1 &= -I_0 \\ \frac{\partial}{\partial q^\alpha \partial q_\alpha} &= 4q^2 \frac{\partial^2}{\partial q^4} + 8 \frac{\partial}{\partial q^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

Assim ficamos com uma equação diferencial, cuja solução que não interfere com a solução homogênea dessa equação é:

$$I_1 = i \frac{4\pi^2}{q^2} \ln\left(\frac{-q^2}{\mu}\right). \quad (\text{E.25})$$

Para obter  $I_2$ , geramos novamente a equação diferencial que conecta essa nova solução com a solução anterior, escrita na forma:

$$\frac{\partial}{\partial q^\alpha \partial q_\alpha} I_n = -I_{n-1}.$$

Assim por esse método iterativo, temos as novas integrais, desprezando as termos polinomiais:

$$I_2 = -i \frac{\pi^2}{2} \left[ \ln^2\left(\frac{-q^2}{\mu}\right) - 2 \ln\left(\frac{-q^2}{\mu}\right) \right]. \quad (\text{E.26})$$

$$I_3 = i \frac{\pi^2 q^2}{16} \left[ \ln^2\left(\frac{-q^2}{\mu}\right) - 5 \ln\left(\frac{-q^2}{\mu}\right) \right]. \quad (\text{E.27})$$

$$I_4 = -i \frac{\pi^2 q^4}{2^7 3} \left[ \ln^2\left(\frac{-q^2}{\mu}\right) - \frac{20}{3} \ln\left(\frac{-q^2}{\mu}\right) \right]. \quad (\text{E.28})$$

$$I_5 = i \frac{\pi^2 q^6}{2^{11} 3^2} \left[ \ln^2\left(\frac{-q^2}{\mu}\right) - \frac{47}{6} \ln\left(\frac{-q^2}{\mu}\right) \right]. \quad (\text{E.29})$$

Para o  $\Xi^{--}$  na nossa corrente, capítulo 3, a transformada de Fourier que estávamos interessado é dada pela integral  $I_5$ . Aplicando novamente o operador Eq.(E.13), temos:

$$\int d^4x e^{iqx} \frac{\not{x}}{x^{10}} \ln(-x^2) = \not{q} \frac{\pi^2}{2^{10} 3^2} q^4 \left[ 3 \ln^2\left(\frac{-q^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right) - \frac{43}{2} \ln\left(\frac{-q^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right) \right]. \quad (\text{E.30})$$

Para o vértice  $\Theta nK$ , capítulo 4, usamos a transformada de Fourier de  $I_2$ , assim temos:

$$\int d^4x e^{iqx} \frac{\not{x}}{x^4} \ln(-x^2) = \not{q} \frac{2\pi^2}{q^2} \left[ 1 - \ln \left( \frac{-q^2}{\Lambda_{QCD}^2} \right) \right]. \quad (\text{E.31})$$

# Apêndice F

## Relação de dispersão

Considere uma função invariante, escrita numa relação de dispersão,

$$\Pi(q^2) = \int_0^\infty ds \frac{\rho(s)}{s - q^2 - i\epsilon}. \quad (\text{F.1})$$

Usando a relação para  $\epsilon > 0$ ,

$$\frac{1}{s - q^2 - i\epsilon} = i\pi\delta(s - q^2) + \Delta(s - q^2), \quad (\text{F.2})$$

onde,

$$\Delta(s - q^2) = \frac{s - q^2}{(s - q^2)^2 + \epsilon^2}, \quad (\text{F.3})$$

temos que a função Eq.(F.1) é dada por:

$$\Pi(q^2) = i\pi\rho(q^2) + \text{parte real}. \quad (\text{F.4})$$

Assim obtemos a bem conhecida relação de dispersão,

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\text{Im}\Pi(s)}{s - q^2 - i\epsilon}. \quad (\text{F.5})$$

Para esse tipo de função onde conhecemos a sua parte imaginária, a transformada de Borel em  $Q^2 = -q^2$  é imediata, pois o operador diferencial Eq.(2.18) só atua na parcela que depende de  $Q^2$ , logo temos:

$$B[\Pi(Q^2)] = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \text{Im}\Pi(s) e^{-s/M^2}. \quad (\text{F.6})$$

No apêndice E, obtemos algumas formas funcionais para os correladores, por exemplo:

$$\Pi(Q^2) = \ln(Q^2)Q^{2k}, \quad (\text{F.7})$$

onde no domínio  $q^2 = s > 0$ , geramos uma parte imaginária para o logaritmo, via:

$$\ln(Q^2) = \ln(-s) = \ln(-1) + \ln(s), \quad (\text{F.8})$$

Onde para que a relação de dispersão Eq.(F.5) seja válida para  $\epsilon > 0$ , temos que considerar,

$$\ln(-1) = -i\pi. \quad (\text{F.9})$$

Assim temos de imediato a parte imaginária da Eq.(F.7), dada por:

$$\frac{\text{Im}\Pi(s)}{\pi} = (-1)^{k+1} s^k. \quad (\text{F.10})$$

Assim temos a transformada de Borel,

$$B[\ln(Q^2)Q^{2k}] = (-1)^{k+1} \int_0^\infty ds e^{-s/M^2} s^k = (-1)^{k+1} k! (M^2)^{k+1}. \quad (\text{F.11})$$

Podemos ver que para  $k = 0$ , temos o mesmo valor que do método derivativo Eq.(2.20).

Na maioria dos casos o uso de uma relação de dispersão permite um cálculo bem mais simples para a transformada de Borel que o uso da sua forma derivativa.

Existe alguns correlatores onde o uso da relação de dispersão Eq.(F.5) não fornece uma expressão simples para a transformada de Borel, por exemplo:

$$\Pi(q^2) = \frac{\ln(-q^2)}{q^2 + i\epsilon}, \quad (\text{F.12})$$

onde a sua parte imaginária é:

$$\frac{\text{Im}\Pi(s)}{\pi} = -\frac{1}{s} - 2\delta(s) \ln\left(\frac{s}{\mu}\right). \quad (\text{F.13})$$

O uso da relação de dispersão Eq.(F.5) e da transformada de Borel fornece termos divergentes, que são controlados se admitirmos que os infinitos se cancelem. Para o correlator  $\frac{\ln(-q^2)}{(q^2 + i\epsilon)^2}$ , a situação é bem mais complicada e não temos como controlar essas divergências.

Assim a nossa postura, consiste em escrever esses correlatores através da identidade,

$$\frac{\ln(\frac{Q^2}{\mu})}{Q^2} = \int_0^\infty ds \frac{\ln(\frac{s}{\mu})}{(s + Q^2)^2}, \quad (\text{F.14})$$

onde neste caso não temos termos de subtração.

Para provar essa identidade, fazemos a transformação  $s = Q^2\lambda$ , no lado direito da equação Eq.(F.14), obtendo,

$$\int_0^\infty ds \frac{\ln(\frac{s}{\mu})}{(s + Q^2)^2} = \frac{1}{Q^2} \int_0^\infty d\lambda \frac{\ln(\lambda)}{(1 + \lambda)^2} + \frac{\ln(\frac{Q^2}{\mu})}{Q^2} \int_0^\infty d\lambda \frac{1}{(1 + \lambda)^2},$$

onde a primeira integral é zero e a segunda é 1.

Uma outra relação pode ser construída derivando em  $Q^2$  a Eq.(F.14), obtendo,

$$\frac{\ln(\frac{Q^2}{\mu})}{Q^4} = 2 \int_0^\infty ds \frac{\ln(\frac{es}{\mu})}{(s + Q^2)^3}. \quad (\text{F.15})$$

Desse modo podemos construir relações para o caso mais geral  $\frac{\ln(\frac{Q^2}{\mu})}{Q^{2n}}$ .

## F.1 Transformada de Borel para $\frac{\ln(\frac{Q^2}{\mu})}{Q^{2n}}$

Considere a transformada de Borel em Eq.(F.14),

$$B \left[ \frac{\ln(\frac{Q^2}{\mu})}{Q^2} \right] = \int_0^\infty ds \ln \left( \frac{s}{\mu} \right) \frac{e^{-s/M^2}}{M^2}, \quad (\text{F.16})$$

onde fazendo a transformação  $s = M^2\lambda$ , ficamos com a transformada de Borel,

$$B \left[ \frac{\ln(\frac{Q^2}{\mu})}{Q^2} \right] = -\gamma_E + \ln \left( \frac{M^2}{\mu} \right), \quad (\text{F.17})$$

onde  $\gamma_E = -\int_0^\infty d\lambda \ln(\lambda) e^{-\lambda} = 0.5772 \dots$

Analogamente, temos, para a Eq.(F.15):

$$B \left[ \frac{\ln(\frac{Q^2}{\mu})}{Q^4} \right] = \frac{1 - \gamma_E}{M^2} + \frac{\ln \left( \frac{M^2}{\mu} \right)}{M^2}. \quad (\text{F.18})$$

# Apêndice G

## Fórmulas úteis para as QCDSR

### G.1 Algebra das matrizes de Gell-Mann

Destacamos as seguintes propriedades para as matrizes de Gell-Mann,

$$\tau_{aa}^A = 0, \quad (\text{G.1})$$

$$\tau_{ab}^A \tau_{ba}^B = \frac{1}{2} \delta_{AB}, \quad (\text{G.2})$$

$$\tau_{ab}^A \tau_{cd}^A = \frac{1}{2} \left[ \delta_{ad} \delta_{bc} - \frac{1}{3} \delta_{ab} \delta_{cd} \right]. \quad (\text{G.3})$$

### G.2 Algebra das matrizes de Dirac

Temos as seguintes definições:

$$C = i\gamma^2\gamma^0, \quad (\text{G.4})$$

$$\sigma_{\mu\nu} = i\gamma_\mu\gamma_\nu - ig_{\mu\nu}, \quad (\text{G.5})$$

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (\text{G.6})$$

Essas matrizes obedecem as seguintes propriedades,

$$C^{-1} = C^T = C^\dagger = -C, \quad (\text{G.7})$$

$$C\gamma_\mu^T C = \gamma_\mu, \quad (\text{G.8})$$

$$C\sigma_{\mu\nu}^T C = \sigma_{\mu\nu}, \quad (\text{G.9})$$

chamando

$$T^{\mu\nu}(x) = \not{x}\sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} \not{x}, \quad (\text{G.10})$$

obtemos

$$CT^{\mu\nu}(x)^T C = -T^{\mu\nu}(x), \quad (\text{G.11})$$

$$T^{\mu\nu}(x)T_{\mu\nu}(x) = 24x^2, \quad (\text{G.12})$$

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4, \quad (\text{G.13})$$

$$\sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = 12, \quad (\text{G.14})$$

$$\gamma_0^\dagger = \gamma_0^T = \gamma_0, \quad (\text{G.15})$$

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5^T = \gamma_5, \quad (\text{G.16})$$

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0, \quad (\text{G.17})$$

$$\sigma_{\mu\nu} \gamma_\alpha \sigma^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{G.18})$$

$$\gamma_\mu \sigma_{\alpha\beta} \gamma^\mu = 0, \quad (\text{G.19})$$

$$\not{x} \not{y} = -\not{y} \not{x} + 2xy, \quad (\text{G.20})$$

$$\not{x} T^{\mu\nu}(x) = T^{\mu\nu}(x) \not{x}, \quad (\text{G.21})$$

$$\gamma^\alpha \not{x} \sigma^{\mu\nu} \not{x} \gamma_\alpha \sigma_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{G.22})$$

$$\gamma^\alpha \sigma^{\mu\nu} \not{x} \gamma_\alpha \sigma_{\mu\nu} = 24 \not{x}, \quad (\text{G.23})$$

$$\gamma^\alpha \not{x} \sigma^{\mu\nu} \not{x} \gamma_\alpha \not{y} \sigma_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{G.24})$$

$$\gamma^\alpha \not{x} \sigma^{\mu\nu} \not{x} \gamma_\alpha \not{x} \sigma_{\mu\nu} \not{y} = 0, \quad (\text{G.25})$$

$$T^{\mu\nu}(x) \not{y} \sigma_{\mu\nu} = -4 \not{x} \not{y} + 16xy, \quad (\text{G.26})$$

$$T^{\mu\nu}(x) \sigma_{\mu\nu} \not{y} = 12 \not{x} \not{y}. \quad (\text{G.27})$$

Para maiores detalhes Ref.[67].

# Apêndice H

## Regras de Cutkosky

O uso das regras de Cutkosky [49] possibilita escrever uma integral do tipo:

$$F(q^2, p^2, p^2) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\rho(k, q^2, p^2, p^2)}{((p-k)^2 - m^2 + i\epsilon)((k-p)^2 + i\epsilon)(k^2 - m^2 + i\epsilon)}, \quad (\text{H.1})$$

através de uma dupla relação de dispersão,

$$F(p^2, p^2, q^2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty ds du \frac{DD.F(s, u, q^2)}{(s-p^2)(u-p^2)}, \quad (\text{H.2})$$

onde  $DD.F$  é a dupla descontinuidade de  $F$  dada por

Através da regra de Cutkosky,

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow -2\pi i \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0), \quad (\text{H.3})$$

aplicada a todos os denominadores da Eq.(H.1), temos a dupla descontinuidade de  $F$ ,

$$DD.F(q^2, p^2, p^2) = - \int d^4 k f_C(p^2, p^2, k) \rho(k, q^2, p^2, p^2), \quad (\text{H.4})$$

onde,

$$f_C(p^2, p^2, k) = \frac{1}{2\pi} \delta[(p-k)^2 - m^2] \delta[(k-p)^2] \delta[k^2 - m^2] \theta(p^0 - k^0) \theta(p^0 - k^0) \theta(k^0). \quad (\text{H.5})$$

Definindo o referencial:

$$p^\mu = (p^0, \vec{0}),$$

$$p'^\mu = (p^0, 0, 0, p_3). \quad (\text{H.6})$$

Podemos expressar os parâmetros  $p^0, p'^0$  e  $p_3$  em termos dos invariantes,

$$\begin{cases} u &= p'^2, \\ s &= p^2, \\ t &= (p' - p)^2, \end{cases} \quad (\text{H.7})$$

obtendo:

$$\begin{aligned} p^0 &= \sqrt{s} \\ p'^0 &= \frac{u + s - t}{2\sqrt{s}} \\ p_3 &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{s}}, \end{aligned}$$

onde,

$$\lambda = (u + s - t)^2 - 4us. \quad (\text{H.8})$$

Assim podemos expressar as funções delta na forma:

$$\delta[k^2 - m^2] = \delta[k_0^2 - m^2 - \vec{k}^2], \quad (\text{H.9})$$

$$\delta[(p - k)^2 - m^2] = \delta[p^2 - 2p_0k_0 + (k^2 - m^2)] = \delta[s - 2\sqrt{s}k_0], \quad (\text{H.10})$$

$$\delta[(k - p')^2] = \delta[k^2 - 2(p'_0k_0 - p'_3k_3) + p'^2] = \delta[(m^2 - 2p'_0k_0 + u) + 2p'_3k_3]. \quad (\text{H.11})$$

Na Eq.(H.10), podemos ver que a função delta depende apenas de  $k_0$ ,

$$\delta[(p - k)^2 - m^2] = \frac{1}{2\sqrt{s}} \delta[k_0 - \bar{k}_0], \quad (\text{H.12})$$

onde  $\bar{k}_0 = \frac{\sqrt{s}}{2}$ . Efetuando uma integração em  $k_0$ , temos que a função delta Eq.(H.9) dependente apenas de  $\vec{k}^2$ . Efetuando uma integração em  $\vec{k}^2$ , temos para a função delta Eq.(H.11) uma dependência em  $k_3$ . Adotando o sistema de coordenadas esféricas na integração da Eq.(H.4), onde  $k_3 = \sqrt{\vec{k}^2} \cos(\Theta)$ , podemos expressar a Eq.(H.11) na forma,

$$\delta[(k - p')^2] = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\vec{k}^2}} \delta[\cos(\Theta) - \cos(\bar{\Theta})], \quad (\text{H.13})$$

onde  $\bar{\vec{k}}^2 = \vec{k}_0^2 - m^2$  e

$$\cos(\bar{\Theta}) = -\frac{\lambda_2\sqrt{s}}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{\vec{k}^2}},$$

onde,

$$\lambda_2 = u + t - s + 2m^2. \quad (\text{H.14})$$

Para que as funções  $\theta$  da Eq.(H.5) sejam diferentes de zero e que a dupla descontinuidade seja uma função contínua em  $u$  e  $s$ , temos:  $s > 4m^2$  e  $u > t$ . Desse modo ficamos com a expressão para a dupla descontinuidade,

$$\begin{aligned} DD.F(t, u, s) &= -\frac{1}{4\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \int_0^{\infty} dR \int_{-1}^1 dw \delta[k_0 - \bar{k}_0] \delta[R - \bar{k}^2] \delta[w - \cos(\bar{\Theta})] \\ &\times \rho(k_0, R, w, t, u, s) = -\frac{1}{4\sqrt{\lambda}} \rho(\bar{k}_0, \bar{k}^2, \cos(\bar{\Theta}), t, u, s). \end{aligned} \quad (\text{H.15})$$

Para  $\rho = 1$  e  $m = m_c$ , temos a dupla descontinuidade da Eq.(5.34) do capítulo 5,

$$DD.\Theta(u, s, t) = -\frac{1}{4\sqrt{\lambda}}. \quad (\text{H.16})$$

Para que a dupla descontinuidade seja não nula, temos que  $-1 < \cos(\bar{\Theta}) < 1$ . Assim os valores máximos e mínimos de  $u$  são obtidos para  $\cos(\bar{\Theta})^2 = 1$ , que fornece a equação

$$s(u + t - s + 2m^2)^2 = [(u + s - t)^2 - 4us](s - 4m^2), \quad (\text{H.17})$$

onde os valores máximos e mínimos de  $u$  são:

$$u_{min}^{max} = \frac{1}{2m^2} \left[ -st + m^2(s + 2t) \pm \sqrt{s(s - 4m^2)(t - m^2)^2} \right], \quad (\text{H.18})$$

com  $s > 4m^2$ .

Para que  $u > t$ , temos que  $u_{min} > t$ , assim temos que  $t < m^2$ .

Para calcular a dupla descontinuidade da Eq.(5.33), usamos o fato que podemos expressar a Eq.(5.33) em termos de duas estruturas invariantes,

$$\Pi^\beta(q, p, p') = F_1(q^2, p^2, p'^2)p^\beta + F_2(q^2, p^2, p'^2)p'^\beta \quad (\text{H.19})$$

onde no referencial Eq.(H.7), temos a sua dupla descontinuidade,

$$\begin{cases} DD.\Pi^0(q, p, p') &= [DD.F_1(q^2, p^2, p'^2)]p^0 + [DD.F_2(q^2, p^2, p'^2)]p'^0, \\ DD.\Pi^1(q, p, p') &= DD.\Pi^2(q, p, p') = 0, \\ DD.\Pi^3(q, p, p') &= [DD.F_2(q^2, p^2, p'^2)]p_3. \end{cases} \quad (\text{H.20})$$

Usando a expressão Eq.(H.15), podemos obter facilmente  $DD.\Pi^0(q, p, p')$  e  $DD.\Pi^3(q, p, p')$ .

Usando os valores de  $p^0$ ,  $p'^0$  e  $t = q^2$ , obtemos a dupla descontinuidade:

$$DD.\Pi^\beta(u, s, t) = -\frac{1}{8\lambda^{3/2}} \left\{ [\lambda + \lambda_2(u + s - t)]p^\beta - 2s\lambda_2 p'^\beta \right\}. \quad (\text{H.21})$$

# Bibliografia

- [1] D. Diakonov, V. Petrov, M.V. Polyakov, *Z. Phys* **A359**, 305 (1997).
- [2] T. Nakano *et al.*, LEPs Coll., *Phys. Rev. Lett.* **91**, 012002 (2003); V.V. Barmin *et al.*, DIANA Coll., *Phys. Atom. Nucl.* **66**, 1715 (2003); A.E. Asratyan, A. G. Dolgolenko, M. A. Kubantsev, *Phys. Atom. Nucl.* **67**, 682 (2004); M. Abdel-Bary *et al.*, COSY Coll., *Phys. Lett.* **B595**, 127 (2004).
- [3] A. Airapetian *et al.*, HERMES Coll., *Phys. Lett.* **B585**, 213 (2004); S. Chekanov *et al.*, ZEUS Coll., *Phys. Lett.* **B591**, 7 (2004); V. Kubarovsky *et al.*, CLAS Coll., *Phys. Rev. Lett.* **92**, 032001 (2004); J. Barth *et al.*, SAPHIR Coll., *Phys. Lett.* **B572**, 127 (2003); S. Stepanyan *et al.*, CLAS Coll., *Phys. Rev. Lett.* **91**, 252001 (2003).
- [4] J. Haidenbauer, G. Krein, *Phys. Rev.* **C68**, 052201 (2003).
- [5] C. Alt *et al.*, NA49 Coll., *Phys. Rev. Lett.* **92**, 042003 (2004).
- [6] A. Aktas *et al.*, H1 Coll., *Phys. Lett.* **B588**, 17 (2004).
- [7] S. Schael *et al.*, ALEPH Coll., *Phys. Lett.* **B599**, 1 (2004); J. Bai *et al.*, CLAS Coll., *Phys. Rev.* **D70**, 012004 (2004); I. Abt *et al.*, HERA-B Coll., *Phys. Rev. Lett.* **93**, 212003 (2004); K. Knoepfle *et al.*, HERA-B Coll., *J. Phys.* **G30**, S1363 (2004); C. Pinkenburg *et al.*, PHENIX Coll., *J. Phys.* **G30**, S1201 (2004); Yu. Antipov *et al.*, SPHINX Coll., *Eur. Phys. J.* **A21**, 455 (2004).
- [8] A. R. Dzierba *et al.*, hep-ph/0412077
- [9] Sonia Kabana, *Proceedings IX Hadron Physics and VII Relativistic Aspects of Nuclear Physics*, Rio de Janeiro, Brasil, Abril 2004, hep-ph/0501121
- [10] Particle Data Group, S. Eidelman *et al.*, *Phys. Lett.* **B592**, 1 (2004).
- [11] R. L. Jaffe e F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 232003 (2003).
- [12] S.-L. Zhu, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 232002 (2003).
- [13] Jun Sugiyama, Takumi Doi, Makoto Oka, *Phys. Lett.* **B581**, 167 (2004).
- [14] Markus Eidemüller, *Phys. Lett.* **B597**, 314 (2004).
- [15] A.G. Oganesian, hep-ph/0410335
- [16] Ricardo Matheus, Stephan Narison, hep-ph/0412063
- [17] R.D. Matheus, F.S. Navarra, M. Nielsen, R. Rodrigues da Silva, S.H. Lee, *Phys. Lett.* **B578**, 323 (2004).

- [18] R.D. Matheus, F.S. Navarra, M. Nielsen, R. Rodrigues da Silva, *Phys. Lett.* **B602**, 185 (2004).
- [19] H. Kim, S.H. Lee e Y. Oh, *Phys. Lett.* **B595**, 293 (2004).
- [20] R. L. Jaffe, hep-ph/0401187; hep-ph/0405268.
- [21] D. Diakonov, hep-ph/0412272; hep-ph/0406043.
- [22] Markus Eidemüller, F.S. Navarra, M. Nielsen, R. Rodrigues da Silva, hep-ph/0503193
- [23] Y. Kondo, O. Morimatsu e T. Nishikawa, *Phys. Lett.* **B611**, 93 (2005).
- [24] F. Karsch, *Lect. Notes Phys.* **583**, 209 (2002).
- [25] T. Matsui, H. Satz, *Phys. Lett.* **B178**, 416 (1986).
- [26] M.C. Abreu *et al.*, NA50 Coll., *Phys. Lett.* **B477**, 28 (2000); M.C. Abreu *et al.*, NA50 Coll., *Phys. Lett.* **B410**, 327 (1997); M. Gonin *et al.*, NA50 Coll., *Nucl. Phys.* **A610**, 404c (1996); C. Baglin *et al.*, NA38 Coll., *Phys. Lett.* **B251**, 472 (1990); **B270**, 105 (1991); **B345**, 617 (1995).
- [27] D. Kharzeev, H. Satz, *Phys. Lett.* **B366**, 316 (1996).
- [28] D. Kharzeev, C. Lourenço, M. Nardi, H. Satz, *Z. Phys.* **C74**, 307 (1997).
- [29] S.C. Matinyan, B. Müller, *Phys. Rev.* **C58**, 2994 (1998);
- [30] K.L. Haglin, *Phys. Rev.* **C61**, 031902 (2000); Z. Lin, C.M. Ko, *Phys. Rev.* **C62**, 034903 (2000); A. Sibirtsev, K. Tsushima, A.W. Thomas, *Phys. Rev.* **C63**, 044906 (2001); K.L. Haglin, C. Gale, *Phys. Rev.* **C63**, 065201 (2001); Y. Oh, T. Song, S.H. Lee, *Phys. Rev.* **C63**, 034901 (2001).
- [31] R.S. Azevedo e M. Nielsen, *Phys. Rev.* **C69**, 035201 (2004).
- [32] V.M. Belyaev, V.M. Braun, A. Khodjamirian, R. Rückl, *Phys. Rev.* **D51** 6177 (1995)
- [33] A. Khodjamirian, R. Rückl, S. Weinzierl, O. Yakovlev *Phys. Lett.* **B457**, 245 (1999).
- [34] R.D. Matheus, F.S. Navarra, M. Nielsen, R. Rodrigues da Silva, *Phys. Lett.* **B541**, 265 (2002).
- [35] R. Rodrigues da Silva, R.D. Matheus, F.S. Navarra, M. Nielsen, *Braz. J. Phys.* **34**, 236 (2004).
- [36] R.D. Matheus, F.S. Navarra, M. Nielsen, R. Rodrigues da Silva, hep-ph/0310280, aceito para publicação no *IJMPE*.
- [37] M.E. Bracco, M. Chiapparini, F.S. Navarra, M. Nielsen, *Phys. Lett.* **B605**, 326 (2005).
- [38] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov, *Nucl. Phys.* **B147** (1979) 385; **B147** (1979) 448; **B147** (1979) 519.
- [39] B. L. Ioffe, *Nucl. Phys.* **B188** (1981) 317; **B191** (1981) 591(E).

- [40] Y. Chung, H. G. Dosch, M. Kremer, D.Schall, *Phys. Lett.* **B102** (1981) 175; *Nucl. Phys.* **B197** (1982) 55.
- [41] L. J. Reinders, H. R. Rubinstein, S. Yazaki, *Phys. Rep.* **127** (1985) 1.
- [42] S. Narison, *QCD Spectral Sum Rules* (World Scientific, Singapore, 1989).
- [43] M. A. Shifman, ed., *Vacuum Structure and QCD Sum Rules* (North Holland, Amsterdam, 1992).
- [44] H. G. Dosch, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **33** (1994) 121.
- [45] K. G. Wilson, *On Products of Operators at Short Distance* (Cornell Report 1964); *Phys. Rev.* **179** (1969) 1499; para uma revisão veja J. C. Collins, *Renormalization* (Cambridge University Press, New York, 1984).
- [46] H. Lehmann, *Nuovo Cimento* **11** (1954) 342; a representação de Lehmann é discutida na maioria dos bons textos sobre teoria quântica de campos. Veja por exemplo, Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [47] Walter Greiner e Andreas Schafer; *Quantum chromodynamics*, Springer, Berlim(1994).
- [48] B. L. Ioffe, A.V. Smilga *Nucl. Phys.* **B232**, 109 (1984).
- [49] B. L. Ioffe, A.V. Smilga *Nucl. Phys.* **B216**, 373 (1983).
- [50] R.S. Marques de Carvalho, F.S. Navarra, M. Nielsen, E. Ferreira, H.G. Dosch, *Phys. Rev.* **D60**, 034009 (1999).
- [51] Y. Kondo, O. Morimatsu e T. Nishikawa, hep-ph/0503150; D. Jido *et al.*, *Phys. Rev.* **D54**, 4532 (1996).
- [52] S.I. Nam, A.Hosaka, H.-Ch. Kim, *Phys. Lett.* **B579**, 43 (2004).
- [53] T.D. Lee, *Particle physics and introduction to field theory*, Harwood academic publishers, Switzerland(1988).
- [54] B. L. Ioffe, *Nucl. Phys.* **B188**, 317 (1981).
- [55] S. Narison, *Phys. Lett.* **B175**, 88 (1986).
- [56] L.J. Reinders, H. Rubinstein, S. Yazaki, *Nucl. Phys.* **B213**, 109 (1983).
- [57] Seungho Choe *Phys. Rev.* **C62** 025204 (2000)
- [58] M. Gell-Mann, R.J. Oakes, B. Renner *Phys. Rev.* **175**, 2195 (1968).
- [59] Vernon Barger, Roger Phillips, *Collider Physics*, Addison-Wesley, California(1987).
- [60] A. Deandrea, G. Nardulli, A.D. Polosa, *Phys. Rev.* **D68**, 034002 (2003).
- [61] M.A. Ivanov, J.G. Korner, P. Santorelli, *Phys. Rev.* **D70**, 014005 (2004).
- [62] Y. Oh, T. Song, S.H. Lee, *Phys. Rev.* **C63** 034901 (2001)
- [63] Walter Greiner, Joachin Reinhardt, *Quantum electrodynamics*, Springer, Berlim(1994)

- [64] Richard Courant, *Cálculo diferencial e integral II*, Editora Globo, Porto Alegre (1963)
- [65] Julian Schwinger, *Particles, sources and fields*, Addison-Wesley, v.2 (1973)
- [66] V.A. Novikov, M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov, *Fortschr. Phys.* **32**, 600 (1984).
- [67] Marcelo Otavio Caminha Gomes, *Teoria Quântica dos Campos*, Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo (2002)