

EX 9268  
P

C



2 JULY 1983

CERN LIBRARIES, GENEVA



CM-P00050332

Das asymptotische Verhalten von Feynman-  
-Integralen im Limes mehrerer großer  
Impulsüberträge

D I S S E R T A T I O N  
zur Erlangung des Doktorgrades  
des Fachbereichs Physik  
der Universität-Gesamthochschule-Siegen

vorgelegt von  
Theophil Ohrndorf  
Siegen 1983



## Abstract

A general method is developed which allows the calculation of the asymptotic behavior of Feynman integrals in the limit of several large scales. It is employed to determine the asymptotic behavior of various parton amplitudes.

We make use of the parametric representation of Feynman integrals. Topological formulae for the various parametric functions of the parametric representation are derived. The asymptotic behavior is discussed within the general context of singularities of Feynman integrals set by the Landau equations. It is shown how the asymptotic behavior of a Feynman integral can be calculated systematically in the limit of several independent large scales with the aid of a multiple Mellin transform of its parametric representation. In order to calculate the asymptotic behavior the parameter space has to be sliced. A general algorithm is presented.

We report the results of an explicit calculation of the leading asymptotic behavior of the quark form factor in QCD in the limit of a large virtual mass of the photon up to  $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ . In contrast to previous investigations we regularize infrared singularities by keeping either one, or both quarks off shell, or both quarks on shell. Our final result is represented by the beginning of an exponential series. We determine the asymptotic behavior of the deep inelastic lepton production structure functions in the quasielastic region in the leading double logarithmic approximation. Finally we investigate the end-point singularities of the hard scattering amplitude of the pion's electromagnetic form factor. We calculate the leading double logarithmic corrections to the hard scattering amplitude up to two loop order.



	<u>Inhaltsverzeichnis</u>	Seite
	Einleitung	4
Teil A	<u>Allgemeine Methode</u>	
1.	<u>Parametrische Darstellung von Feynman-Integralen</u>	7
1.1	Einige Begriffe aus der Graphentheorie	9
1.2	Parametrische Darstellung eines Feynman-Integrals einer skalaren Theorie	13
1.3	Topologische Formeln	18
1.3.1	Topologische Formel für $C(\alpha)$	18
1.3.2	Topologische Formel für $D(\alpha)$	23
1.3.2.1	Schleifendarstellung von $D(\alpha)$	24
1.3.2.2	Schnittdarstellung von $D(\alpha)$	27
1.4	Spin	29
2.	<u>Singularitäten von Feynman-Integralen</u>	35
2.1	Singularitäten von Integralen	36
2.2	Die Landau-Gleichungen	39
2.3	Singularitäten auf dem physikalischen Blatt	42
2.4	Massensingularitäten	47
2.5	Asymptotische Singularitäten	54
2.5.1	Regularisierung	56
2.5.2	Skalierungsmengen	58
2.5.3	"Disconnected Scalings"	63
2.5.4	Nichtlineare Skalierungen	65
2.5.5	"Pinch"-Singularitäten	68
3.	<u>Asymptotische Entwicklung durch Mellin-Transformation</u>	71
3.1	Die Mellin-Transformation	73



3.2	Beispiel	75
3.3	Mellin-Transformation eines Feynman- Integrals	77
3.4	Doppelte Mellin-Transformation	85
3.4.1	$D'(\alpha) = h(\alpha) + \tilde{\epsilon}_1 g_1(\alpha) + \tilde{\epsilon}_2 g_2(\alpha)$	86
3.4.2	$D'(\alpha) = h(\alpha) + \tilde{\epsilon}_1 g_1(\alpha) + \tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2 g_{12}(\alpha)$	90
3.4.3	$D'(\alpha) = h(\alpha) + \tilde{\epsilon}_1 g_1(\alpha) + \tilde{\epsilon}_2 g_2(\alpha) + \tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2 g_{12}(\alpha)$	94
3.5	Mehrfache Mellin-Transformation	97
4.	<u>Konstruktion unabhängiger Sequenzen</u>	100
4.1	Zerlegung des $\alpha$ -Raumes	101
4.2	$\lambda$ -Transformation	104
Teil B	<u>Anwendungen</u>	
5.	<u>Die Infrarot-Regularisierungssabhängigkeit des asymptotischen Verhaltens des Sudakov- Formfaktors in der QCD</u>	107
5.1	Das asymptotische Verhalten des Quark Formfaktors	112
5.2	Regularisierungssabhängigkeit	119
5.2.1	OFF-Shell	119
5.2.2	ON/OFF-Shell	120
5.2.3	ON-Shell	121
6.	<u>Die tiefinelastische Streuung in der quasielastischen Region</u>	123
6.1	Dominante Diagramme	125
6.2	Das asymptotische Verhalten	130
6.3	Einbeziehung der gleitenden Kopplungs- konstanten	135
6.4	Vergleich	138



7.	<u>Die Aufsummation großer Korrekturen zum elektromagnetischen Formfaktor des Pions in der QCD</u>	141
7.1	Der elektromagnetische Formfaktor des Pions in der perturbativen QCD	146
7.2	Das Endpunktverhalten der Wellenfunktion	150
7.2.1	Das Endpunktverhalten von $\phi(x, Q^2)$	150
7.2.2	Die $Q^2$ -Variation des Endpunktverhaltens	151
7.3	Die führende doppellogarithmische Näherung des Formfaktors in der Endpunktregion	154
7.4	Das Endpunktverhalten der Amplitude der harten Streuung $T_H(x, y, Q^2)$	169
7.5	Phänomenologische Konsequenzen	172
7.6	Schlußfolgerungen	176
Teil C	<u>Beispiele</u>	
8.	<u>Beispiel I</u>	178
9.	<u>Beispiel II</u>	190
Anhang A	Verallgemeinerung des Karplus-Kroll-Operators	197
Anhang B	Lichtkegelvariablen	201
Anhang C	Einige Eigenschaften der hypergeometrischen Funktion ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$	203
Anhang D	Einige Eigenschaften der Gegenbauer Polynome $C_n^{3/2}(x)$	205
	Literatur	206



### Einleitung

In den letzten Jahren haben sich die Hinweise darauf, daß die starke Wechselwirkung durch die Quantenchromodynamik (QCD) angemessen beschrieben wird, stark verdichtet. Da nichtstörungstheoretische Methoden gegenwärtig noch in der Entwicklung begriffen sind, beruht diese Evidenz hauptsächlich auf den Voraussagen der perturbativen QCD. Der Anwendungsbereich perturbativer Methoden ist aufgrund der asymptotischen Freiheit der QCD auf solche Streuprozesse beschränkt, in denen mindestens ein großer Impulsübertrag auftritt. Diese Tatsache hat weitreichende Konsequenzen.

Wegen des großen Impulsübertrages können sämtliche Quarkmassen vernachlässigt werden. Daher treten verschiedene Arten von Singularitäten auf. Kürzen sich die durch das Verschwinden der Gluonenmasse verursachten Singularitäten im allgemeinen aus den Übergangswahrscheinlichkeiten heraus, so gilt dies nicht für die durch das Verschwinden der Quarkmassen hervorgerufenen kollinearen Singularitäten. Dies erfordert eine Reorganisation der Störungsreihe. Für eine große Klasse von Streuprozessen konnte in Analogie zur Lösung der Renormierungsgruppen-gleichung (RGE) gezeigt werden, daß solch eine Reorganisation tatsächlich durchführbar ist [EL 79]. Sie besteht in einer Aufsummation der kollinearen Singularitäten über alle Ordnungen von  $\alpha_s$ , der Kopplungskonstanten der starken Wechselwirkung.

Hängt ein Prozess von mehreren unabhängigen großen Impulsüberträgen ab, so treten zusätzliche Singularitäten auf. Bekannte Beispiele sind die Partonenverteilungen an den Grenzen des erlaubten Phasenraumes oder der Drell-Yan-



Prozeß in der Region  $Q_1^2 \ll Q^2$ . In solchen Regionen sind daher weitergehende Summationen nötig. Die Vorschläge, wie solche Summationen vorgenommen werden können, die in der Literatur zu finden sind, haben oft einen ad hoc Charakter und die Begründungen sind häufig unvollständig, so daß verschiedene dieser Vorschläge nicht konsistent untereinander sind [PA 79, DO 80b, FR 82].

Angesichts der Schwierigkeiten, die ein Beweis der Summierbarkeit solcher Singularitäten in allen Ordnungen von  $\alpha_s$  aufgibt, ist es wichtig, die präzise Form der Singularitäten in niedrigen Ordnungen zu kennen. Zu diesem Zweck benötigt man eine effektive Technik, die es erlaubt, solche Singularitäten aus Feynman-Integralen (FI) zu isolieren. Die Entwicklung solch einer Technik ist das Ziel der vorliegenden Arbeit.

Grundlage bilden die Methoden zur Bestimmung des asymptotischen Verhaltens eines FI, wie sie zu Beginn der sechziger Jahre zur Untersuchung des Reggeverhaltens in der Feldtheorie entwickelt und eingesetzt worden sind [ED 66, PO 80]. Der Anwendungsbereich dieser Methoden ist auf Prozesse beschränkt, in denen ein einziger großer Impulsübertrag auftritt. Wir werden diese Methode so verallgemeinern, daß auch das asymptotische Verhalten eines FI im Limes mehrerer großer unabhängiger Impulsüberträge berechnet werden kann.

Ausgangspunkt unserer Untersuchungen ist die Form des FI, die man nach Ausführung der invarianten Integration erhält, die sogenannte parametrische Darstellung. Im ersten Kapitel werden wir topologische Regeln ableiten, mit deren Hilfe die parametrische Darstellung eines FI direkt aus dem Feynman-Graphen bestimmt werden kann, ohne



daß die invariante Integration explizit ausgeführt werden muß. Das zweite Kapitel enthält einen Überblick über die Singularitäten von FI. Ziel dieses Kapitels ist es, einen Zusammenhang zwischen Massensingularitäten und asymptotischen Singularitäten herzustellen, sowie allgemein zu erläutern, welche Teilregionen des Integrationsraumes der parametrischen Darstellung eines FI für die beiden genannten Arten von Singularitäten verantwortlich sind. Im Kapitel 3 wird gezeigt werden, wie man die asymptotische Entwicklung eines FI systematisch mittels einer Mellin-Transformation bestimmt. Dies geschieht zuerst für den Fall von zwei großen Impulsüberträgen und wird anschließend auf den Fall von drei und mehreren großen Impulsüberträgen verallgemeinert. Das letzte Kapitel des Teils A, Kapitel 4, enthält die Beschreibung einer Methode, die es erlaubt, das Integrationsgebiet systematisch zum Zweck der Berechnung des asymptotischen Verhaltens zu zerlegen.

Im Teil B berichten wir über die Resultate, die mit der Technik, die in Teil A beschrieben wird, für das asymptotische Verhalten

- a. des Sudakov-Formfaktors (Kapitel 5)
- b. der tiefinelastischen Streuung in der quasielastischen Region (Kapitel 6)
- c. des Formfaktors des Pions in der Endpunktregion (Kapitel 7)

berechnet wurden.

Im Teil A wird weitestgehend auf die Illustration der einzelnen Schritte zur Berechnung des asymptotischen Verhaltens durch Beispiele verzichtet. Statt dessen führen wir sämtliche Schritte nacheinander für zwei Graphen der Prozesse aus Kapitel 5 und 7 in Kapitel 8 und 9 vor.



Teil A Allgemeine Methode

1 Parametrische Darstellung von FI

Die Berechnung eines Feynman-Graphen erfolgt gewöhnlich in mehreren Schritten. Nach Wahl der unabhängigen Integrationsimpulse wird der Impuls jeder einzelnen Linie des Graphen ermittelt und der entsprechende analytische Ausdruck nach den bekannten Feynman-Regeln niedergeschrieben. Im Anschluß daran werden die Nenner der einzelnen Propagatoren durch Einführung eines Feynman-Parameters (FP)  $\alpha_j$  für jede Linie mittels der bekannten Feynmanschen Identität zu einem Integral kombiniert, dessen Integrand nur noch einen einzigen Nenner aufweist. Dann werden die inneren Impulse so transformiert, daß der Nenner ein reinquadratischer Ausdruck wird, und die invariante Integration über die inneren Impulse ausgeführt. Dadurch gelangt man zu der sogenannten parametrischen Darstellung des FI. Zum Schluß bleibt noch über die einzelnen FP zu integrieren.

Die Analyse des asymptotischen Verhaltens eines FI lässt sich prinzipiell sowohl vor als auch nach der invarianten Integration durchführen. Da in der Regel eine Vielzahl von Graphen zu analysieren ist, spielt dabei der notwendige Aufwand eine wesentliche Rolle. Im ersten Fall ist es offensichtlich wichtig, die unabhängigen Impulse geeignet zu wählen (siehe z.B. [SU 56]). Diese Methode erweist sich dann als vorteilhaft, wenn die Impulsflüsse, von denen das asymptotische Verhalten herrührt, bekannt sind. Sind diese jedoch erst zu bestimmen, so ist die zweite Methode vorzuziehen (siehe z.B. [HA 74]). In dieser Arbeit werden wir ausschließlich den zweiten Weg wählen.

Sind zur exakten Berechnung von FI in der 1-Schleifen-näherung noch sämtliche oben genannten Schritte für einen



Graphen ohne weiteres explizit ausführbar, so ist dieses Verfahren bereits in der 2-Schleifennäherung äußerst mühsam. Allerdings ist es auch gar nicht notwendig, für einen bestimmten Graphen alle einzelnen Schritte explizit auszuführen. Vielmehr lässt sich die parametrische Darstellung eines FI mittels der sogenannten topologischen Formeln direkt aus dem Graphen ablesen. Diese Methode besitzt nicht nur für die exakte Berechnung von FI eine große Bedeutung, sie ist auch Ausgangspunkt für die Bestimmung des asymptotischen Verhaltens. Aus diesem Grunde werden wir diese Methode im vorliegenden Kapitel im Detail entwickeln.

Historisch wurde die allgemeine Form eines FI zuerst von Chisholm [CH 52] abgeleitet. Die parametrische Integraldarstellung entwickelten Nambu [NA 57a, 58] und Nakanishi [NA 57b]. Allgemeine Regeln zur Berechnung der darin auftretenden parametrischen Funktionen wurden von Symanzik [SY 58] angegeben. Diese Regeln sind später von verschiedenen Autoren ergänzt worden. Eine gute Übersicht liefert [NA 71]. Besondere Erwähnung verdient die Arbeit von Shimamoto [SH 62], der als erster topologische Formeln für die parametrischen Funktionen unter Ausnutzung von Resultaten der Graphentheorie ableitete.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden wir eine Reihe von grundlegenden Begriffen der Graphentheorie einführen, die in den darauf folgenden Abschnitten zur Herleitung der topologischen Formeln der parametrischen Funktionen benötigt werden (Abschnitt 1.3). Die allgemeine Form des FI wird der Einfachheit halber zunächst nur für eine rein skalare Theorie abgeleitet. (Abschnitt 1.2). Die Erweiterung auf Theorien mit Feldern beliebigen Spins erfolgt in Abschnitt 1.4. Wir werden uns in diesem Kapitel



auf die Darstellung von Standardmethoden beschränken und nicht auf Verfeinerungen [KI 62, AL 70, CV 74a,b, TR 74, PO 82] eingehen.

### 1.1

#### Einige Begriffe aus der Graphentheorie

Unter einem Graph  $\mathcal{G}$  ist ein Triplet aus

- i. einer Menge von  $n$  Kanten  $\{e_1, \dots, e_n\}$
- ii. einer Menge von  $v$  Vertizes  $\{v_1, \dots, v_v\}$
- iii. einer Abbildung, die jeder Kante genau zwei Vertizes zuordnet,

zu verstehen. Im Zusammenhang mit Feynman-Graphen ist es sinnvoll, jeder Kante eine Richtung zuzuordnen. Ein solcher Graph heißt gerichteter Graph. Ein zusammenhängender Graph ist ein Graph, bei dem jedes Paar von Vertizes durch Kantenzüge verbunden werden kann. Zur Analyse von FI reicht die Betrachtung von zusammenhängenden Graphen aus. Durch Einschränkung der Abbildung zwischen Kanten und Vertizes auf eine Untermenge von beiden bekommt man einen Teilgraphen  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ . Da isolierte Vertizes keine Bedeutung haben, ist ein Teilgraph  $\mathcal{H}$  vollkommen durch die Angabe seiner Kanten festgelegt. Aus diesem Grunde werden wir nicht zwischen einem Teilgraphen und der Menge seiner Kanten unterscheiden.

Sind zwei Teilgraphen  $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{G}$  gegeben, so lassen sich daraus folgende neue Graphen konstruieren:

- i.  $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$  ( $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ ) die Vereinigung (Durchschnitt) zweier Teilgraphen ist durch die Vereinigung (Durchschnitt) ihrer Kanten bestimmt  
Falls zusätzlich  $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$  gilt, so ist
- ii.  $\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_1$  durch die Kantenmenge  $\mathcal{H}_2 \cap \mathcal{H}_1^{\perp}$  gegeben und



iii.  $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_1$  bekommt man durch Zusammenziehen sämtlicher Vertizes aus  $\mathcal{H}_1$  zu einem einzigen Vertex. In diesem Falle spricht man auch von einer Kontraktion des Teilgraphen  $\mathcal{H}_1$ .

Ein Pfad ist eine geordnete Menge von Kanten, die so gewählt wird, daß

- i. aufeinanderfolgende Kanten jeweils einen Vertex gemeinsam haben,
- ii. die Vertizes ansonsten verschieden sind.

Ein geschlossener Pfad heißt Schleife  $\mathcal{L}$ . Jeder Schleife wird eine Orientierung zugeordnet. Wir nennen eine Kante, die zu mindestens einer (keiner) Schleife gehört, eine innere (äußere) Kante. Falls nichts anderes gesagt wird, verstehen wir unter einer Kante immer eine innere Kante. Die Schleifen  $\mathcal{L}$  eines Graphen  $\mathcal{G}$  werden algebraisch durch die Schleifenmatrix  $\mathcal{B}^{\mathcal{L}}$  charakterisiert. Ihre Elemente  $b_{ij} := \langle \mathcal{B} \rangle_{ij}$  sind folgendermaßen bestimmt:

$$b_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{falls } e_j \in \mathcal{L}; \quad \text{und Orientierungen gleich} \\ -1 & \text{falls } e_j \in \mathcal{L}; \quad \text{und Orientierungen verschieden} \\ 0 & \text{falls } e_j \notin \mathcal{L}. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Offensichtlich sind nicht alle Zeilen der Schleifenmatrix  $\mathcal{B}^{\mathcal{L}}$  linear unabhängig. Ein System linear unabhängiger Zeilen definiert eine Menge von fundamentalen Schleifen. Die zugehörige Teilmatrix von  $\mathcal{B}^{\mathcal{L}}$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{B}_f^{\mathcal{L}}$ .

Die Anzahl der fundamentalen Schleifen sei  $L$ . Für einen zusammenhängenden Graphen ist  $L$  mit  $n$ , der Anzahl der Kanten, und mit  $v$ , der Anzahl der Vertizes, durch die



Eulersche Relation

$$L = n - v + 1 \quad (1.1.2)$$

verknüpft.

Zu jeder Schleife  $\mathcal{L}_i$  eines fundamentalen Systems gibt es eine nichtleere Menge von Kanten  $\Delta_i$  mit der Eigenschaft, daß ihre Elemente nicht in einer weiteren fundamentalen Schleife  $\mathcal{L}_j$ ,  $j \neq i$  auftreten. Die Elemente von  $\Delta_i$  bilden einen Pfad. Der Einfachheit halber werden wir die Orientierung der Kanten aus  $\Delta_i$  immer so wählen, daß sie mit der Orientierung der entsprechenden Schleife zusammenfallen.

Ein Baum  $\mathcal{T}$  ist ein Teilgraph, der sämtliche Vertizes von  $\mathcal{G}$  umfasst, zusammenhängend ist und keine Schleifen enthält. Er läßt sich folgendermaßen aus  $\mathcal{G}$  konstruieren: Man zerschneide nacheinander eine Reihe von Kanten, so daß im dabei jeweils entstehenden Teilgraphen die Anzahl der fundamentalen Schleifen um jeweils Eins gegenüber dem Vorgänger verringert ist. Dies läßt sich gerade  $L$ -mal durchführen. Daher ist die Anzahl der Kanten eines Baumes gleich  $n - L$ . Unter einem Kobaum  $\mathcal{T}^*$  ist der Teilgraph  $\mathcal{T}^* = \mathcal{G} - \mathcal{T}$  zu verstehen. In einem Feynman-Graphen wird jeder Kante ein FP  $\alpha_i$  zugeordnet. Wir werden später zur Formulierung der topologischen Formeln den Begriff des Kobaumproduktes  $\chi(\mathcal{T}^*)$  benötigen. Zu einem Kobaum  $\mathcal{T}^* = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_L}\}$  gehört das Kobaumprodukt

$$\chi(\mathcal{T}^*) = \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_L} \quad (1.1.3)$$

Falls man das oben angegebene Verfahren zur Konstruktion eines Baumes vor dem letzten Schritt abbricht, so bekommt



man einen Pseudobaum  $\mathcal{T}^0$ . Ein Pseudobaum  $\mathcal{T}^0$  enthält genau eine Schleife. Er lässt sich als die Vereinigung eines Baumes  $\mathcal{T}$  mit einer Kante  $e \in (\mathcal{G} \cdot \mathcal{T})$  darstellen  $\mathcal{T}^0 = \mathcal{T} \cup e$ .

Durch Entfernen einer Kante  $e \in \mathcal{T}$  erhält man aus  $\mathcal{T}$  einen 2-Baum  $\mathcal{T}^2 = \mathcal{T} - e$  oder allgemeiner durch Entfernen von  $k$  Kanten einen  $k$ -Baum  $\mathcal{T}^k$ . In Analogie zur Definition des Kobaums (Kobaumproduktes) ergibt sich die Definition eines  $k$ -Kobaumes  $\mathcal{T}^{k*}$  ( $k$ -Kobaumproduktes  $\chi(\mathcal{T}^{k*})$ ) zu  $\mathcal{T}^{k*} = \mathcal{G} \cdot \mathcal{T}^k$  ( $\chi(\mathcal{T}^{k*}) = \alpha_1, \dots, \alpha_{L+k}$ ,  $\alpha_i \in \mathcal{T}^{k*}$ ).

Im Zusammenhang mit den topologischen Formeln wird ein weiterer Begriff benötigt. Ein Schnitt  $\mathcal{C}$  bezeichne eine minimale Menge von Kanten, so dass  $\mathcal{G} \cdot \mathcal{C}$  nicht zusammenhängend ist <sup>+</sup>). Ähnlich wie bereits den Schleifen, so wird auch den Schnitten eine Orientierung und eine Schnittmatrix  $Q$  zugeordnet. Die Elemente  $q_{ij} = \langle Q \rangle_{ij}$  der Schnittmatrix  $Q$  sind definiert als

$$q_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{falls } e_j \in \mathcal{C} \text{ und Orientierung gleich} \\ -1 & \text{falls } e_j \in \mathcal{C} \text{ und Orientierung verschieden} \\ 0 & \text{falls } e_j \notin \mathcal{C} \end{cases} \quad (1.1.4)$$

Für einen beliebigen Schnitt  $\mathcal{C}$  und eine beliebige Schleife  $\mathcal{L}_k$  lassen sich die Kanten des Graphen  $\mathcal{L}_k \cap \mathcal{C}$  zu Paaren mit jeweils gegensätzlicher Orientierung zusammenfassen. Daher gilt

$$\sum_j q_{ij} b_{kj} = 0 \quad (1.1.5a)$$

---

<sup>+</sup>) In der englischsprachigen Literatur findet man durchgehend den Begriff "Cut set". Wir verwenden nicht seine direkte Übersetzung "Schnittmenge", wie sie teilweise in der deutschsprachigen Literatur auftaucht, da dieser Begriff im allgemeinen eine andere Bedeutung hat.



oder in kompakter Schreibweise mit der Transponierten  $B^T$

$$Q \cdot B^T = 0 \quad (1.1.5b)$$

Zu einem gegebenen  $\mathcal{T}^2 \subset \mathcal{G}$  gibt es genau einen Schnitt  $\mathcal{C}$ , der  $\mathcal{C} \cap \mathcal{T}^2 = \emptyset$  erfüllt. Umgekehrt bezeichne  $\mathcal{T}^2(\mathcal{C})$  die Menge aller 2-Bäume  $\mathcal{T}^2$ , die  $\mathcal{C} \cap \mathcal{T}^2 = \emptyset$  erfüllen, und  $\mathcal{T}^{2*}(\mathcal{C})$  die entsprechende Menge von 2-Kobäumen  $\mathcal{T}^{2*}$ .

Als Schnittprodukt  $\chi(\mathcal{C})$  definiert man die Summe aller 2-Kobaumprodukte

$$\chi(\mathcal{C}) = \sum_{\mathcal{T}^{2*} \in \mathcal{T}^{2*}(\mathcal{C})} \chi(\mathcal{T}^{2*}) \quad (1.1.6)$$

mit  $\mathcal{T} \in \mathcal{T}^2(\mathcal{C})$ . Offensichtlich lässt sich ein Schnittprodukt auch als

$$\chi(\mathcal{C}) = \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k} \left( \sum_{\mathcal{T}^* \in \mathcal{G}_L} \chi(\mathcal{T}^*) \right) \left( \sum_{\mathcal{T}^* \in \mathcal{G}_R} \chi(\mathcal{T}^*) \right), \quad e_{i_1}, \dots, e_{i_k} \in \mathcal{C} \quad (1.1.7)$$

ausdrücken. Hierbei bezeichne  $\mathcal{G}_L$  bzw.  $\mathcal{G}_R$  einen der beiden Teile des Graphen  $\mathcal{G}$ , die nach Entfernen der Kanten von  $\mathcal{C}$  übrigbleiben.

## 1.2 Parametrische Darstellung eines FI einer skalaren Theorie

In diesem Abschnitt werden wir die allgemeine Form der parametrischen Darstellung eines FI, das dem Graphen einer reinen skalaren Theorie entspricht, ableiten. Aus den bekannten Feynman-Regeln ergibt sich für einen beliebigen Graphen



ein Ausdruck, der proportional zu

$$I = \int \frac{dk_1}{(2\pi)^d} \cdots \int \frac{dk_L}{(2\pi)^d} \underbrace{\prod_{j=1}^n}_{\text{Diagramm}} \frac{1}{(q_j^2 - m_j^2 + i\epsilon_\tau)^{\tau_j}} \quad (1.2.1)$$

ist.  $L$  ist, wie bereits im Abschnitt 1.1, die Anzahl der unabhängigen Schleifen,  $n$  die Anzahl der Kanten, d.h. der Propagatoren, und  $d$  ist die Anzahl der Dimensionen des Minkowskiraumes. Die  $q_j$  setzen sich aus einer Linearkombination  $\ell_j$  der äußeren Impulse  $\rho_i$  des Graphen und einer Linearkombination  $\tilde{k}_j$  der Integrationsimpulse  $k_i$  zusammen

$$q_j = \ell_j + \tilde{k}_j \quad (1.2.2)$$

Da zu jedem Integrationsimpuls ein endlicher Impuls addiert werden kann, sind die  $\ell_j$  auch nach Wahl der fundamentalen Schleifen nicht eindeutig festgelegt. Wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, ist  $I$  selbstverständlich unabhängig von der Wahl der Integrationsimpulse.

(1.2.1) wird zunächst mit Hilfe der Feynmanschen Identität

$$\left[ \prod_{j=1}^n a_j^{\tau_j} \right]^{-1} = \Gamma(n') \int_0^1 [d\alpha] \prod_{j=1}^n \frac{\alpha_i}{\Gamma(\tau_j)} \left[ \sum_{j=1}^n \alpha_i a_j \right]^{-n'} \quad (1.2.3)$$

in

$$I = \Gamma(n') \int_0^1 [d\alpha] \prod_{j=1}^n \frac{\alpha_i}{\Gamma(\tau_j)} \int \frac{dk_1}{(2\pi)^d} \cdots \int \frac{dk_L}{(2\pi)^d} \psi^{-n'} \quad (1.2.4)$$

mit

$$\psi = \sum_{j=1}^n \alpha_j (q_j^2 - m_j^2 + i\epsilon_\tau) \quad (1.2.5)$$



und

$$n' = \sum_{j=1}^n r_j \quad (1.2.6)$$

umgeformt.  $[d\alpha]$  steht als Abkürzung von

$$[d\alpha] = d\alpha_1 \dots d\alpha_n \delta(\sum_{j=1}^n \alpha_j - 1) \quad (1.2.7)$$

Wegen der  $\delta$ -Funktion in (1.2.7) sind die Integrationsgrenzen durch  $\alpha_j > 0$  vollkommen bestimmt. Insbesondere gilt, daß aus  $\alpha_j = 1$  für alle  $j \neq i$   $\alpha_i = 0$  folgt.

Nach Einführung des Vektors  $k$  ( $\tilde{k}$ ,  $\ell$ ), dessen  $L$  ( $n, n$ ) Komponenten wiederum aus den Impulsvektoren  $k_i$  ( $\tilde{k}_i$ ,  $\ell_i$ ) gebildet werden, schreibt sich  $\psi$  als

$$\begin{aligned} \psi = & \sum_j \alpha_j (\ell_j^2 - m_j^2 + i\epsilon_f) \\ & + k^T \mathcal{B}_f Z \mathcal{B}_f^T k + 2 k^T \mathcal{B}_f Z \ell \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

$Z$  ist eine  $n \times n$  Diagonalmatrix, bei der das  $i$ -te Diagonalelement gleich  $\alpha_i$  ist

$$\langle Z \rangle_{ij} = \delta_{ij} \alpha_i \quad (\text{Keine Summation}) \quad (1.2.9)$$

$\mathcal{B}_f$  ist die in Abschnitt 1.1 eingeführte Schleifenmatrix. Solange sich die Schleifenmatrix auf den gesamten Graphen bezieht, unterdrücken wir den Index  $\mathcal{G}$ . Ihre Transponierte  $\mathcal{B}_f^T$  überführt  $k$  in  $\tilde{k}$

$$\tilde{k} = \mathcal{B}_f^T k \quad (1.2.10)$$

Um die Integration in (1.2.4) ausführen zu können, eliminieren wir zuerst den Term aus (1.2.8), der linear in  $k$  ist.



Dies leistet eine Transformation

$$k = k' - \mathcal{H}^{-1} \mathcal{B}_f Z \ell \quad (1.2.11)$$

in der

$$\mathcal{H} = \mathcal{B}_f Z \mathcal{B}_f^T \quad (1.2.12)$$

ist. Wir setzen dabei voraus, daß  $\mathcal{H}$  so gewählt werden kann, daß die  $dk_1 \dots dk_L$  Integration konvergent ist, so daß wir uns über zusätzliche Oberflächenterme [JA 76] keine Gedanken machen brauchen. Mit (1.2.11) erhält man

$$\begin{aligned} \Psi = & \sum_j d_j c \ell_j^2 - m_j^2 + i e_j \\ & + k'^T \mathcal{H} k'^T - X^T \mathcal{H}^{-1} X \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

mit

$$X = \mathcal{B}_f Z \ell \quad (1.2.14)$$

Nach einer Rotation mit einer orthogonalen Matrix  $\mathcal{R}$ ,

$$k' = \mathcal{R} k'' \quad (1.2.15)$$

die  $\mathcal{H}$  diagonalisiert,

$$\mathcal{R}^{-1} \mathcal{H} \mathcal{R} = \mathcal{H}'' \quad \text{diagonal} \quad (1.2.16)$$

erhält man schließlich

$$\Psi = \sum_{i=1}^L k_i''^2 a_{ii} + D(\alpha)/G(\alpha) \quad (1.2.17)$$

wobei die  $a_{ik}''$  die Elemente von  $\mathcal{H}''$  sind,



$$G(\alpha) = \det R = \prod_{i=1}^L a_{ii}'' \quad (1.2.18)$$

und

$$D(\alpha) = G(\alpha) \sum_{i=1}^n a_{ii} (l_i^2 - m_i^2 + \epsilon_r) - G(\alpha) X^T R^{-1} X \quad (1.2.19)$$

Wegen  $\det R = 1$  ist die Jacobideterminante der Transformation von  $k$  nach  $k''$  gleich 1.

Die  $K_i''$ -Integrationen können nun durch sukzessive Anwendung der Identität [HO 73]

$$\int \frac{dk}{(2\pi)^d} (k^2 + M^2)^{-n'} = \left( \frac{-1}{4\pi} \right)^{d/2} \frac{\Gamma(n' - d/2)}{\Gamma(n')} (M^2)^{-n' + \frac{1}{2}d} \quad (1.2.20)$$

ausgeführt werden. Das Resultat lautet

$$I = K \Gamma(\tilde{\rho}) \int_0^1 [d\alpha] \prod_{j=1}^n \frac{d\alpha_j}{\Gamma(\tau_j)} \frac{G(\alpha)}{D(\alpha)^{\tilde{\rho}}} \tilde{\rho}^{-2+\epsilon} \quad (1.2.21)$$

mit

$$K = \left[ i \left( \frac{-1}{4\pi} \right)^{d/2} \right]^L, \quad (1.2.22)$$

$$\tilde{\rho} = \rho + L\epsilon \quad (1.2.23a)$$

$$\rho = n' - 2L \quad (1.2.23b)$$

und

$$\epsilon = 2 - d/2 \quad (1.2.24)$$



### 1.3 Topologische Formeln

Wie man aus (1.2.21) ersieht, reduziert sich die Berechnung einer parametrischen Darstellung eines Graphen in der Hauptsache auf die Berechnung der parametrischen Funktionen  $\mathcal{C}(\alpha)$  und  $\mathcal{D}(\alpha)$ . Dieses Problem wird wesentlich durch die topologischen Formeln vereinfacht, die in diesem Abschnitt abgeleitet werden. Eine direkte Konsequenz der topologischen Formeln ist die Unabhängigkeit der Funktionen  $\mathcal{C}(\alpha)$  und  $\mathcal{D}(\alpha)$  von der Wahl der fundamentalen Schleifen in (1.2.1).

Vorweg führen wir einige Bezeichnungen ein. Es sei  $M$  eine Matrix der Ordnung  $a \times b$ .  $I_U$  ( $\mathcal{J}_V$ ) bezeichne eine Teilmenge der ganzen Zahlen von 1 bis  $a$  ( $b$ ) mit  $U$  ( $V$ ) Elementen. Dann ist mit  $M(I_U, \mathcal{J}_V)$  diejenige Teilmatrix von  $M$  gemeint, die nur die durch  $I_U$  ( $\mathcal{J}_V$ ) gegebenen Zeilen (Spalten) umfasst. Falls  $a \leq b$  so ist  $M(\mathcal{J}_a)$  durch

$$M(\mathcal{J}_a) = M(I_a, \mathcal{J}_a) \quad (1.3.1)$$

definiert. Um die Teilmatrix von  $M$  zu kennzeichnen, die sich durch Entfernen der  $i$ -ten Zeile aus  $M$  ergibt, verwenden wir das Symbol  $M_{-i}$ .

#### 1.3.1 Topologische Formel für $\mathcal{C}(\alpha)$

Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist der Satz von Cauchy-Binet, der die Berechnung der Determinante eines Produktes von Matrizen erlaubt. Es sei

$$M = M_1 \dots M_n \quad (1.3.2)$$



ein solches Produkt aus Matrizen  $M_i$ ,  $i=1, \dots, n$  der Ordnung  $k_{i-1} \times k_i$ ,  $k_0 \cdot k_n = k$ ,  $k_i \geq k$ . Dann gilt

$$\det M = \sum_{j_1} \dots \sum_{j_n} \det M_1(j_1) \det M_2(j_1, j_2) \dots \det M_{n-1}(j_1, \dots, j_{n-1}) \det M_n(j_1, \dots, j_n) \quad (1.3.3)$$

Die Summation erstreckt sich jeweils über alle voneinander verschiedenen Untermengen  $j_i$ ,  $i=1, \dots, n$  der Menge der ganzen Zahlen von 1 bis  $k_i$ . Zum Beweis dieses Satzes sei auf die Literatur verwiesen [AI 69].

Da  $Z$  eine Diagonalmatrix ist, läßt sich die parametrische Funktion  $G(\alpha)$  mit (1.3.3) als

$$G(\alpha) = \sum_{I_L} (\det B_f(I_L))^2 \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_L} \quad (1.3.4)$$

$$I_L = \{i_1, \dots, i_L\}$$

ausdrücken.

Zur weiteren Auswertung von (1.3.4) muß  $\det B_f(I_L)$  bestimmt werden. Dazu mache man sich folgendes klar. Durch Kontraktion einer Kante  $e_k \in \mathcal{G}$  geht eine beliebige Schleife aus  $\mathcal{G}$  entweder wieder in eine Schleife in  $\mathcal{G}/e_k$  über (a), oder aber sie zerfällt in  $\mathcal{G}/e_k$  in zwei Schleifen mit einem gemeinsamen Vertex (b). Ist (a) für alle fundamentalen Schleifen erfüllt, so gilt, daß die Matrix, die aus  $B_f$  durch Entfernen der Spalte  $k$  entsteht, gleich  $B_f^{g/e_k}$  ist, falls in  $\mathcal{G}/e_k$  ein entsprechendes System fundamentaler Schleifen gewählt wird. Falls (a) nicht für alle fundamentalen Schleifen erfüllt ist, so ist die Matrix, die aus  $B_f$  durch Entfernen der Spalte  $k$  entsteht, durch elementare Umformungen aus  $B_f^{g/e_k}$  zu erhalten. Die Elemente der Menge  $I_L$  bilden den Teilgraphen  $I_L$ .



Um  $\det B_f(I_L)$  zu bekommen, müssen alle Kanten des Graphen  $\mathcal{G} - I_L$  kontrahiert werden. Deshalb gilt

$$|\det B_f(I_L)| = |\det B_f^{\mathcal{G}/(\mathcal{G} - I_L)}| \quad (1.3.5)$$

Enthält  $\mathcal{G} - I_L$  eine oder mehrere Schleifen, so gibt es in  $\mathcal{G}/(\mathcal{G} - I_L)$  höchstens  $L-1$  fundamentale Schleifen, also ist  $\det B_f^{\mathcal{G}/(\mathcal{G} - I_L)} = 0$ . Ist  $\mathcal{G} - I_L$  hingegen ein Baum, so bilden die Kanten von  $\mathcal{G}/(\mathcal{G} - I_L)$  gerade ein System von Teilgraphen  $\Delta$ . In diesem Falle ist  $|\det B_f^{\mathcal{G}/(\mathcal{G} - I_L)}| = 1$ . Daher ist

$$|\det B_f(I_L)| = \begin{cases} +1 & \text{falls } I_L \text{ Kobaum ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.3.6)$$

Mit diesem Resultat lässt sich (1.3.4) als

$$G(\alpha) = \sum_{\mathcal{T}^* \subset \mathcal{G}} \chi(\mathcal{T}^*) \quad (1.3.7)$$

schreiben. Damit haben wir eine topologische Formel gefunden, die es erlaubt,  $G(\alpha)$  direkt aus dem zugrundeliegenden Graphen abzulesen.

An dieser Stelle möchten wir kurz einige charakteristische Eigenschaften der parametrischen Funktion  $G(\alpha)$  aufführen. Aus der Konstruktionsvorschrift (1.3.7) geht hervor, daß  $G(\alpha)$  ein homogenes Polynom der Ordnung  $L$  in den FP  $\alpha_i$  ist. Über den gesamten Parameterraum gilt  $G(\alpha) > 0$ . Die höchste Potenz, mit der ein einzelner FP auftreten kann, ist Eins.



Eine Eigenschaft, von der in den folgenden Kapiteln häufiger Gebrauch gemacht werden wird, ist das Verhalten der parametrischen C-Funktion unter Dilatation der FP eines Teilgraphen  $\mathcal{G}$ . Falls die Parameter eines verbundenen Teilgraphen  $\mathcal{G}$  mit einem Parameter  $\alpha$  skaliert werden, so verhält sich  $C(\alpha)$  wie [ZA 65]

$$C(\alpha) = \alpha^{L(\mathcal{G})} \sum_{j=0}^{n(\mathcal{G})-L(\mathcal{G})} \alpha^j C_j(\alpha) \quad (1.3.8)$$

Dabei gibt  $L(\mathcal{G})$  die Anzahl der fundamentalen Schleifen von  $\mathcal{G}$  an,  $n(\mathcal{G})$  die Anzahl der Kanten und  $C_j(\alpha)$  ist gleich

$$C_j(\alpha) = \sum C_{g_1}(\alpha) \dots C_{g_{j+1}}(\alpha) \prod \alpha_{int} \tilde{C}(\alpha) \quad (1.3.9)$$

Die Summation in (1.3.9) geht über alle Möglichkeiten, den Teilgraphen  $\mathcal{G}$  in  $j+1$  zusammenhängende Teilgraphen  $\mathcal{G}_i$  zu zerlegen. Alle externen Vertizes von  $\mathcal{G}$  werden als zu  $\mathcal{G}$  gehörig betrachtet.  $C_{g_i}(\alpha)$ ,  $i=1, \dots, j+1$  ist die parametrische C-Funktion des  $i$ -ten Teilgraphen. Falls  $\mathcal{G}_i$  keine Schleife enthält, wird  $C_{g_i}(\alpha) = 1$  gesetzt.

$\prod \alpha_{int}$  ist das Produkt der FP der geschnittenen Kanten und  $\tilde{C}(\alpha)$  schließlich ist die parametrische C-Funktion des Graphen, den man aus  $\mathcal{G}$  nach Zerschneiden von  $\mathcal{G}$  und Kontraktion der  $\mathcal{G}_i$  bekommt. Insbesondere für  $j=0$  gilt

$$C_0(\alpha) = C_g(\alpha) C_{g/g}(\alpha) \quad (1.3.10)$$

Wie man aus (1.3.8) abliest, verschwindet  $C(\alpha)$  solange nicht, wie  $\mathcal{G}$  keine Schleife enthält ( $C_0(\alpha) \neq 0$ ). Zum Beweis von (1.3.8) hat man die Summe über sämtliche Bäume von  $\mathcal{G}$  in (1.3.7) so aufzuspalten, daß sich die  $j$ -te Teilstrecke über alle diejenigen Bäume erstreckt, die die Bedingung erfüllen, daß  $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}$   $(j+1)$ -Baum ist. Dann ist diese Teilstrecke homogen vom Grade  $L(\mathcal{G})+j$ ,



sollte also gerade  $G_j(\alpha)$  (1.3.9) liefern. Jeder Baum, der zur  $j$ -ten Teilsumme beiträgt, zerlegt  $\mathcal{S}$  in genau  $(j+1)$  Teile, wobei ein Teil durchaus auch aus einem einzelnen Vertex bestehen kann. Daher entspricht erstens jedem Baum aus der  $j$ -ten Teilsumme genau ein Baum, der zu  $G_j(\alpha)$  beiträgt, und umgekehrt und zweitens sind auch deren Beiträge gleich.

Ist eine feste Kante  $e_k$  vorgegeben, so lässt sich (1.3.7) folgendermaßen aufspalten

$$G(\alpha) = \sum_{\mathcal{T}^* \ni e_k} \chi(\mathcal{T}^*) + \sum_{\mathcal{T}^* \not\ni e_k} \chi(\mathcal{T}^*) \quad (1.3.11)$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial G(\alpha)}{\partial \alpha_k} = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{\mathcal{T}^* \ni e_k} \chi(\mathcal{T}^*) \quad (1.3.12)$$

Zu jedem Kobbaum  $\mathcal{T}^* \ni e_k$  lässt sich ein Pseudobaum  $\mathcal{T}^o = \mathcal{T} \cup e_k$  konstruieren, der eine Schleife  $\mathcal{L} \ni e_k$  enthält, und umgekehrt gibt es zu jeder Schleife  $\mathcal{L} \ni e_k$  eine Menge von Kobäumen  $\mathcal{T} \ni e_k$ , so daß

$$\frac{\partial G(\alpha)}{\partial \alpha_k} = \sum_{\mathcal{L} \ni e_k} G_{\mathcal{L}/\mathcal{L}}(\alpha) \quad (1.3.13)$$

Weiterhin gilt

$$\alpha_k G(\alpha_k = 0) = \sum_{\mathcal{L} \ni e_k} \chi(\mathcal{L}) \quad (1.3.14)$$

Zum Beweis geht man von

$$\alpha_k G(\alpha_k = 0) = \alpha_k \sum_{\mathcal{T}^* \ni e_k} \chi(\mathcal{T}^*) \quad (1.3.15)$$



aus. Zu jedem  $\tilde{T} \not\ni e_k$  gibt es genau einen 2-Baum  $\tilde{T}^2 = \tilde{T} - e_k$ . Dazu gibt es wiederum genau einen Schnitt  $\mathcal{C} \cap (\tilde{T} - e_k) = \emptyset$ . Umgekehrt ist das Schnittprodukt  $\chi(\mathcal{C})$  zu  $\mathcal{C} \ni e_k$  eine Summe von 2-Kobaumprodukten, so daß  $\tilde{T}^2 \cup e_k$  ein Baum ist, also in der Summe von (1.3.15) enthalten ist. Da

$$G(\alpha) = \alpha_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} G(\alpha) + G(\alpha_i = 0) \quad (1.3.16)$$

für einen beliebigen Parameter  $\alpha_i$ , läßt sich mit (1.3.13) und (1.3.14) auch

$$G(\alpha) = \alpha_i \sum_{\mathcal{C} \ni e_i} G_{\mathcal{C}}(\alpha) + \frac{1}{\alpha_i} \sum_{\mathcal{C} \ni e_i} \chi(\mathcal{C}) \quad (1.3.17)$$

schreiben. Diese Relation werden wir im folgenden benötigen.

### 1.3.2 Topologische Formel für $D(\alpha)$

Wir wenden uns nun der Ableitung einer topologischen Formel für die parametrische Funktion  $D(\alpha)$  zu. Zuerst werden wir die sogenannte Schleifendarstellung herleiten, aus der sich dann die in der Praxis wichtige Schnittdarstellung ergibt.

Gesucht wird eine topologische Formel für  $\mathcal{A}^{-1}$ .  $A_{ik}$  bezeichne den Kofaktor des Elements  $\langle \mathcal{A} \rangle_{ik}$

$$\langle \mathcal{A}^{-1} \rangle_{ik} = \frac{1}{G(\alpha)} A_{ik} \quad (1.3.18)$$

d.h. die Determinante der Teilmatrix, die aus  $\mathcal{A}$  durch Entfernen der  $i$ -ten Zeile und der  $k$ -ten Spalte hervorgeht, multipliziert mit  $(-1)^{i+k}$ . In der Netzwerktheorie [CH 71] taucht die Matrix  $\mathcal{A}$  unter der Bezeichnung



Schleifen-Impedanz-Matrix auf. Dort spielen die FP die Rolle von Ohmschen Widerständen.

### 1.3.2.1 Schleifendarstellung von $D(\alpha)$

Wir betrachten zuerst die Diagonalelemente von  $G(\alpha) H^{-1}$ ,  $H_{ii}$ . Mit der zu Beginn dieses Abschnitts eingeführten Notation gilt

$$H_{ii} = \det \left\{ (\beta_f)_{-i} \geq ((\beta_f)_{-i})^T \right\} \quad (1.3.19)$$

Da nun nach geeigneter Wahl eines Systems fundamentaler Schleifen in  $\mathcal{G} \cdot \Delta_i$ ,

$$(\beta_f)_{-i} = \beta_f \mathcal{G}^{-1} \quad (1.3.20)$$

ist, was sich durch Konstruktion der rechten Seite von (1.3.20) sofort einsehen läßt, folgt wie schon (1.3.7)

$$H_{ii} = \sum_{\mathcal{T}^* \in \mathcal{G}(\mathcal{G} \cdot \Delta_i)} \chi(\mathcal{T}^*) \quad (1.3.21)$$

Durch Vereinigung von  $\mathcal{T} = \mathcal{G} \cdot \Delta_i \cdot \mathcal{T}^*$  mit  $\Delta_i$  entsteht zu jedem  $\mathcal{T}^*$  ein Pseudobaum  $\mathcal{T}^* \cup \Delta_i$  in  $\mathcal{G}$  mit Schleife  $\mathcal{L} \supset \Delta_i$ . Umgekehrt gibt es aber auch zu jeder Schleife  $\mathcal{L} \supset \Delta_i$  eine Menge von  $\mathcal{T}^* \in \mathcal{G}(\mathcal{G} \cdot \Delta_i)$ , so daß sich anstelle von (1.3.21)

$$H_{ii} = \sum_{\mathcal{L} \supset \Delta_i} G_{\mathcal{G}/\mathcal{L}}(\alpha) \quad (1.3.22)$$

schreiben läßt.



Für die Nichtdiagonalelemente  $A_{ij}$ ,  $i \neq j$  lässt sich ähnlich zu (1.3.19)

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \left\{ (\mathcal{B}_f)_{-i} \mathcal{Z} ((\mathcal{B}_f)_{-j})^T \right\} \quad (1.3.23)$$

ansetzen. Anwendung des Satzes von Cauchy-Binet liefert

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \sum_{I_{L-1}} \det(\mathcal{B}_f(I_{L-1}))_{-i} \det(\mathcal{B}_f(I_{L-1}))_{-j} \alpha_i \dots \alpha_{i_{L-1}} \quad (1.3.24)$$

$$I_{L-1} = \{i_1, \dots, i_{L-1}\}$$

Durch Kombination von (1.3.20) und (1.3.6) sieht man, daß

$$\det(\mathcal{B}_f(I_{L-1}))_{-i} = \begin{cases} \pm 1 & \text{falls } I_{L-1} \text{ Kobaum in } \mathcal{G} \cdot \Delta_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.3.25)$$

Also gibt  $I_{L-1}$  in (1.3.24) nur dann einen nichtverschwindenden Beitrag, falls es sowohl Kobaum in  $\mathcal{G} \cdot \Delta_i$ , als auch in  $\mathcal{G} \cdot \Delta_j$  ist. Das Vorzeichen lässt sich durch Ausschreiben der Matrix  $\mathcal{B}_f$  ermitteln (siehe z.B. [CH 71]), so daß schließlich mit den gleichen Argumenten, die von (1.3.21) zu (1.3.22) geführt haben,

$$A_{ij} = \sum_{\mathcal{L} \subset \Delta_i, \Delta_j} \pm G_{\mathcal{G}/\mathcal{L}}(\alpha) \quad (1.3.26)$$

folgt. Das positive Vorzeichen gilt, falls die Orientierung von  $\mathcal{L}$  so gewählt werden kann, daß sie sowohl mit der Orientierung von  $\Delta_i$  als auch mit derjenigen von  $\Delta_j$  übereinstimmt, ansonsten ist das negative Vorzeichen zu wählen.

Der Ausdruck, der in  $\mathcal{D}(\alpha)$  eingeht, lautet mit (1.3.22) und (1.3.26)



$$X^T A^{-1} X = \sum_{\mathcal{L}} G_{\mathcal{L}}(\alpha) \left\{ 2 \sum_{\substack{\Delta_i \neq \Delta_j \in \mathcal{L} \\ i < j}} \pm X_i X_j + \sum_{\Delta_i \in \mathcal{L}} X_i^2 \right\} \quad (1.3.27)$$

wobei  $X_i$  die  $i$ -te Komponente des in (1.2.14) eingeführten Vektors  $X$  ist

$$X_i = \langle B_i, Z \rangle, \quad i = 1, \dots, L \quad (1.3.28)$$

Für eine fundamentale Schleife  $\mathcal{L}$  reduziert sich die geschweifte Klammer in (1.3.27) auf  $X_i^2$ , während sie für eine nichtfundamentale Schleife  $\mathcal{L}$  den Wert  $(\sum_{\Delta_i \in \mathcal{L}} \pm X_i)^2$  annimmt. Mit dem Schleifenvektor  $P_{\mathcal{L}}$

$$P_{\mathcal{L}} = \sum_{\Delta_i \in \mathcal{L}} \pm d_i l_i \quad (1.3.29)$$

wobei das Vorzeichen durch die Orientierung von  $\mathcal{L}$  bezüglich  $\mathcal{L}$  festgelegt ist, ( $P_{\mathcal{L}} = X_i$  falls  $\mathcal{L}$  eine fundamentale Schleife ist) schreibt sich daher die parametrische D-Funktion zu

$$D(\alpha) = G(\alpha) \sum_{j=1}^n d_j (l_j^2 - m_j^2 + i e_i) - \sum_{\mathcal{L}} G_{\mathcal{L}}(\alpha) P_{\mathcal{L}}^2 \quad (1.3.30)$$

Dies ist die Schleifendarstellung der D-Funktion. In vielen praktischen Anwendungen erweist es sich als Nachteil, daß die Abhängigkeit von den äußeren Impulsen  $P_i$  des Graphen nur über den Umweg der  $l_j$  zu berechnen ist. Dieser Umweg lässt sich bei der Schnittdarstellung vermeiden.



### 1.3.2.2 Schnittdarstellung von $D(\alpha)$

In der Graphentheorie sind Schleifen und Schnitte zueinander dual. Es ist daher zu erwarten, daß an die Stelle der Summe über alle Schleifen in (1.3.30) eine Summe über alle Schnitte treten kann. Solch eine Darstellung von  $D(\alpha)$  heißt Schnittdarstellung.

Zur Ableitung dieser Darstellung drücken wir die Schleifenimpulse  $P_L$  durch die Elemente der Schleifenmatrix  $b_{ij}$  aus. Damit wird

$$D(\alpha) = -G(\alpha) \sum_{j=1}^n d_j (m_j^2 - i G_F) + \sum_{e: e \in \mathcal{G}} d_e l_e^2 \left[ G(\alpha) - d_e \sum_{\mathcal{L} \ni e} G_{\mathcal{G}/\mathcal{L}}(\alpha) \right] - 2 \sum_{\substack{e_i, e_j \in \mathcal{G} \\ i < j}} l_i \cdot l_j d_i d_j \sum_{\mathcal{L}_e} G_{\mathcal{G}/\mathcal{L}_e}(\alpha) b_{ei} b_{ej} \quad (1.3.31)$$

Betrachten wir zunächst den Koeffizienten von  $l_i \cdot l_j$ ,  $i \neq j$ . Für diesen Koeffizienten gilt

$$d_i d_j \sum_{\mathcal{L}_e} b_{ei} b_{ej} \sum_{\mathcal{T}^* \in \mathcal{G}/\mathcal{L}_e} \chi(\mathcal{T}^*) = - \sum_{e_k} q_{ki} q_{kj} \sum_{\mathcal{T}^{**} \in \mathcal{T}^{**}(\mathcal{L}_e)} \chi(\mathcal{T}^{**}) \quad (1.3.32)$$

Beide Summen umfassen die gleichen Elemente, da es zu jedem  $\mathcal{T}^2 \in \mathcal{T}^2(\mathcal{L}_e)$ ,  $e_i, e_j \in \mathcal{L}_e$  einen Pseudobaum  $\mathcal{T}^0 = \mathcal{T}^2 \cup e_i \cup e_j$  gibt, der in  $\mathcal{G}/\mathcal{L}_e$ ,  $e_i, e_j \in \mathcal{L}_e$  Baum ist und umgekehrt. Im Durchschnitt von  $\mathcal{L}_K$  und  $\mathcal{L}_e$  liegen gerade  $e_i$  und  $e_j$ . Daher folgt aus (1.1.5a)



$$q_{ki} b_{ej} + q_{kj} b_{ei} = 0$$

oder

$$q_{ki} q_{kj} = - b_{ei} b_{ej} \quad (1.3.33)$$

Damit ist (1.3.32) gezeigt.

Der Koeffizient von  $\ell_i^2$  wird aufgrund von (1.3.17) zu  $\sum_{e \in e_i} \chi(\ell)$ . Dies ergibt zusammen die Schnittdarstellung

$$D(\alpha) = -C(\alpha) \sum_j d_j (m_j^2 - \sum_{e \in e_j} \chi(\ell_e) P_{e_j}) + \sum_{e_i \in \mathcal{G}} \chi(\ell_i) P_{e_i}^2 \quad (1.3.34)$$

mit

$$P_{e_i} = \sum_{j=1}^n q_{ij} \ell_i \quad (1.3.35)$$

Da ein Schnitt  $\ell_i$  den Graphen  $\mathcal{G}$  in zwei Hälften teilt, ist  $P_{e_i}$  gerade die Summe der externen Impulse, die in eine dieser Hälften fließt. Welche der Hälften gewählt wird, spielt wegen der Erhaltung des Impulses keine Rolle.

Ähnlich wie schon für die parametrische C-Funktion, so lassen sich auch für die parametrische D-Funktion topologische Regeln zur Berechnung des  $(L(\mathcal{G}) + k)$ -ten Koeffizienten einer Entwicklung bezüglich des Homogenitätsgrades des Teilgraphen  $\mathcal{G}$  angeben. Skaliert man sämtliche FP des Teilgraphen  $\mathcal{G}$  mit einem Parameter  $\beta$ , so gilt [ZA 65]

$$\sum_{e_i \in \mathcal{G}} \chi(\ell_i) P_{e_i} = \beta^{L(\mathcal{G})} \sum_{j=0}^{n(\mathcal{G})-L(\mathcal{G})} \beta^j D_j(\alpha) \quad (1.3.36)$$



mit

$$D_i(\alpha) = \sum G_{\varphi_1}(\alpha) \dots G_{\varphi_{j+1}}(\alpha) \prod_{d_{INT}} \tilde{D}(\alpha) \quad (1.3.37)$$

$D_i(\alpha)$  wird in der gleichen Weise wie schon  $G_i(\alpha)$  konstruiert. Beim Beweis von (1.3.36) wird (1.1.7) in die linke Seite von (1.3.36) eingesetzt, die Summe über alle Schnitte in solche Schnitte eingeteilt, die  $\mathcal{S}$  schneiden bzw. zusammenhängend lassen und (1.3.8) ausgenutzt.

#### 1.4 Spin

Bisher haben wir uns auf Feynman-Graphen beschränkt, in denen ausschließlich Kanten auftraten, die Felder mit Spin 0 beschrieben. In diesem Abschnitt werden wir zeigen, wie die gefundenen Regeln verallgemeinert werden müssen, um auch eine Beschreibung von Teilchen mit nichtverschwindendem Spin zuzulassen.

Ein FI, in dem ein Polynom der inneren Impulse  $q_j$  im Zähler auftritt, ist eine Linearkombination von Termen der Form

$$I = \int \frac{dk_1}{(2\pi)^d} \dots \int \frac{dk_L}{(2\pi)^d} \prod_{j=1}^n \frac{q_{k_{j,1}} \dots q_{k_{j,s_j}}}{(q_j^2 - m_j^2 + i\epsilon_\tau)^{\tau_j}} \quad (1.4.1)$$

Wir nehmen an, daß der Impuls  $q_j$   $s_j$ -mal im Zähler auftritt. In der Spinorelektrodynamik (Feynman-Eichung) ist  $s_j$  höchstens Eins, in anderen Theorien wie skalarer Elektrodynamik oder in nichtabelschen Eichtheorien kann  $s_j$  auch größer als Eins sein. Wie (1.4.1) andeutet,



beschränken wir uns auf kovariante Eichungen.

Zur Berechnung von (1.4.1) wird dieser Ausdruck zunächst so umgeformt, daß man die Integration wie in (1.2.1) ausführen kann. Dazu wird für jede Kante  $e_j$  mit  $s_j \neq 0$  ein sogenannter Hilfsimpuls  $a_j$  eingeführt, so daß durch diese Kante nicht mehr der Impuls  $q_j$ , sondern  $q_j + a_j$  fließt. Dies ist entweder durch Überlagerung der externen Impulse zu erreichen, oder, falls keine äußere Kante zur Verfügung steht, durch Einfügen fiktiver äußerer Kanten. Der Impuls  $a_j$  tritt am Anfangsvertex der  $j$ -ten Kante in den Graphen ein, und er verläßt ihn wieder am Endvertex der gleichen Kante.

Der entscheidende Schritt in der Reduktion von (1.4.1) auf (1.2.1) geht auf eine Idee von Karplus und Kroll [ KA 49 ] zurück. Diese Autoren führen einen Operator

$$\mathcal{D}_{\mu_j} = \frac{1}{2} \int_{m_j^2}^{\infty} d\tilde{\epsilon}_j \frac{\partial}{\partial a_j^{\mu_j}} \dots \Big|_{a_j = 0} \quad (1.4.2)$$

ein, der die Eigenschaft hat, daß

$$\mathcal{D}_{\mu_j} \left( (q_j + a_j)^2 - \tilde{\epsilon}_j + i\epsilon_r \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{q_{\mu_j}}{(q_j^2 - m_j^2 + i\epsilon_r)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.4.3)$$

Ist in (1.4.1)  $s_j < 1$  für alle  $j$ , so ersetzt man jeden Kantenimpuls im Zähler von (1.4.1) durch einen  $\mathcal{D}$ -Operator, der vor das Integral gezogen wird. Das verbleibende Integral kann dann wie in der rein skalaren Theorie ausgeführt werden, so daß nur noch die Wirkung des Produktes von  $\mathcal{D}$ -Operatoren auf das Resultat (1.2.20) zu berechnen bleibt.



Tritt im Zähler des Integranden von (1.4.1) ein Impuls  $q_j$  mehrfach auf, d.h. ist  $s_j > 1$ , so reicht es nicht aus, einfach  $\mathcal{D}_{\mu_j}$  entsprechend oft anzuwenden, da  $\mathcal{D}_{\mu_j}$  nicht mit  $q_j$  vertauscht. Vielmehr muß man eine geeignete Verallgemeinerung des Karplus-Kroll-Operators suchen. Solch eine Verallgemeinerung wird in Anhang A vorgenommen, und es wird dort damit der Ausdruck (1.4.1) berechnet. An dieser Stelle möchten wir nur das Resultat angeben

$$I = K \int_0^1 [d\alpha] \left\{ \prod_{j=1}^n \frac{\alpha^{q_j-1}}{\Gamma(q_j)} \right\} G(\alpha)^{\tilde{\rho}-2+\epsilon} D(\alpha)^{-\tilde{\rho}} \left\{ \sum_{\sigma} \Gamma(\tilde{\rho}-\sigma) \left( \frac{D(\alpha)}{G(\alpha)} \right)^{\sigma} \left[ \prod_{j=1}^n Y_{\mu_{j,1}} \dots Y_{\mu_{j,s_j}} \right]_{\sigma \text{ KONTR.}} \right\} \quad (1.4.4)$$

Die Notation ist [CO 73] entlehnt. Unter einer Kontraktion verstehen wir die Substitution

$$Y_{\mu_{i,e}} Y_{\mu_{j,m}} \rightarrow \frac{1}{2} g_{\mu_{i,e} \mu_{j,m}} R_{ij} \quad (1.4.5)$$

mit

$$R_{ij} = \frac{1}{G(\alpha) d_i d_j} \left\{ \begin{array}{ll} d_i \sum_{\ell \in e_i} G g_{\ell, \ell}(\alpha) & \text{falls } i = j \\ \sum_{\ell \in e_i, e_j} \pm \chi(\ell) & \text{falls } i \neq j \end{array} \right. \quad (1.4.6)$$

Im Falle  $i \neq j$  trägt ein Schnittprodukt  $\chi(\ell)$  mit positivem Vorzeichen bei, falls die Kanten  $\ell_i$  und  $\ell_j$  bezüglich der beiden durch  $\ell$  gebildeten Teilgraphen ver-



schieden orientiert sind, und mit negativem Vorzeichen, falls sie gleich orientiert sind. Die Klammer  $[\ ]_{\sigma \text{ KONTR.}}$  in (1.4.4) steht für die Summe über alle Ausdrücke, die man durch Ausführen von  $\sigma$  Kontraktionen aus  $\prod_{j=1}^n Y_{\mu_j, \dots, \mu_j, s_j}$  bekommen kann. Im Unterschied zur Schnittdarstellung von  $D(\alpha)$ , tragen zur Summe der Schnittprodukte  $\chi(\mathcal{C})$  in (1.4.6) für  $i \neq j$  auch solche Schnitte bei, deren Schnittimpuls  $P_e$  verschwindet, weil eine der beiden Hälften, in die  $\mathcal{C}$  den Graphen zerteilt, keine äußere Linie enthält.  $G(\alpha) R_{ij}$  ist ein Polynom in  $\alpha$ . Wie im Anhang A gezeigt wird, berechnen sich die Kantenimpulse  $Y_j$  nach

$$Y_j = \frac{1}{\alpha_j G(\alpha)} \sum_{e \ni e_j} P_e \chi(\mathcal{C}) \quad (1.4.7)$$

Da den Impulsen  $Y_j$  bei der Analyse des asymptotischen Verhaltens eines FI eine besondere Bedeutung zufällt, möchten wir einige ihrer Eigenschaften kurz näher erläutern. Den Ausgangspunkt bildet die Relation

$$Y_j = \frac{1}{2\alpha_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} (D(\alpha)/G(\alpha)) \quad (1.4.8)$$

die leicht durch Vergleich der Schnittdarstellung (1.3.34) von  $D(\alpha)$  mit (1.4.7) abzuleiten ist. Durch Einsetzen der Schleifendarstellung (1.3.30) von  $D(\alpha)$  in (1.4.8) erhält man eine solche für  $Y_j$

$$Y_j = \ell_j - \left( \sum_{e \ni e_j} G_{g/\mathcal{L}}(\alpha) P_e \right) / G(\alpha) \quad (1.4.9)$$

Aus (1.2.19) und (1.4.8) folgt die wichtige Beziehung



$$Y_j \cdot \ell_j - \langle \beta_f^T \bar{A}^{-1} \beta_f \mathbf{z} \ell \rangle_j \quad (1.4.10)$$

Daraus wird ersichtlich, daß der Kantenimpuls  $Y_j$  gerade derjenige Anteil des inneren Impulses  $q_j'$  ist, der nicht von dem geshifteten Integrationsimpuls  $k_i'$  abhängt

$$q_j = \langle \beta_f^T k' \rangle_j + Y_j \quad (1.4.11)$$

Deshalb erfüllen die  $Y_j$  an jedem Vertex die Impulserhaltung. In der Theorie der elektrischen Netzwerke gibt  $Y_j$  den Strom an, der durch die Kante  $e_j$  fließt. Der Impulserhaltung entspricht das 1. Kirchhoffsche Gesetz. Falls der dominante Impulsfluß eines Graphen dadurch gekennzeichnet ist, daß die Integrationsimpulse  $k_i'$  klein gegenüber irgendwelchen großen äußeren Impulsen sind, so beschreiben die  $Y_j$  den Weg der großen äußeren Impulse durch den Graphen [ HA 74 ].

Aufgrund der Beziehung (1.2.17) für  $\psi$  bekommt man durch Einsetzen von (1.4.11) in (1.2.5) eine weitere Darstellung für  $D(\alpha)$

$$D(\alpha) = G(\alpha) \sum_{j=1}^n \alpha_j (Y_j^2 - m_j^2 + i e_r) \quad (1.4.12)$$

Die Identität

$$\sum_{e_i \in \mathcal{L}} \alpha_j Y_i = 0 \quad (1.4.13)$$

die für jede Schleife  $\mathcal{L}$  erfüllt ist, entspricht dem



2. Kirchhoffschen Gesetz. Sie vervollständigt die Analogie zu den elektrischen Netzwerken. Man erhält (1.4.13) durch Vergleich der linearen Terme in  $k'_i$ , dem Integrationsimpuls der Schleife  $\mathcal{L}_i$ , in (1.2.17) und (1.2.5).

Die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{D(\alpha)}{C(\alpha)} \right) = Y_i^2 - m_i^2 + i \epsilon_r \quad (1.4.14)$$

folgt wegen

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} Y_i = 0 \quad (1.4.15)$$

direkt aus (1.4.12). Zur Ableitung von (1.4.15) wird die Schleifendarstellung von  $Y_i$  benutzt

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} Y_i = - \sum_{\mathcal{L} \ni e_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{G_{B/\mathcal{L}}(\alpha)}{C(\alpha)} P_{\mathcal{L}} \right) \quad (1.4.16)$$

Man setzt (1.4.16) in die linke Seite von (1.4.15) ein, vertauscht die Summen und nutzt (1.4.13) aus.

Häufig werden die  $Y_i$  auch als eine spezielle,  $\alpha'_i$ -abhängige Wahl der  $\ell_i$  interpretiert, die so getroffen wurde, daß gerade (1.4.13) erfüllt ist. Mit anderen Worten, diese Wahl der  $\ell_i$  macht das Shiften überflüssig. Für diese Wahl reduziert sich die Schleifendarstellung (1.3.30) gerade auf (1.4.12).



2.

Singularitäten von Feynman-Integralen

Im Limes großer Impulsüberträge wachsen FI typischerweise über jede Grenze. Daher ist die Bestimmung des asymptotischen Verhaltens eines FI in den weiteren Rahmen der Untersuchung seiner analytischen Eigenschaften einzuordnen. Um die entsprechenden Singularitäten von solchen zu unterscheiden, die im asymptotischen Limes keine Rolle spielen, werden wir sie asymptotische Singularitäten nennen.

Der Untersuchung der analytischen Eigenschaften von Streuamplituden ist in den sechziger Jahren viel Aufmerksamkeit geschenkt worden. Man erhoffte sich damals nähere Aufschlüsse über die analytische Struktur der Streumatrix stark wechselwirkender Teilchen durch die Analyse von Greenschen Funktionen in der Störungstheorie zu gewinnen. Zwar ist dieses Programm für die störungstheoretische QCD ohne direkte Bedeutung, so bilden doch die in die analytischen Eigenschaften von FI gewonnenen Einsichten eine wichtige Grundlage zur Untersuchung des asymptotischen Verhaltens in der perturbativen QCD.

Das Hauptinteresse dieser älteren Untersuchungen galt der Bestimmung der Lage der Singularitäten von FI in dem durch die äußeren Impulsvariablen gebildeten komplexen Raum. Singularitäten auf der reellen Achse des physikalischen Blattes charakterisieren bekanntlich Schwellen für die Produktion neuer Teilchen. Im Gegensatz dazu werden bei der Untersuchung des asymptotischen Verhaltens die äußeren Impulse festgehalten bzw. gegen Unendlich geschickt.

In den ersten drei Abschnitten dieses Kapitels werden wir die Bedingungen untersuchen, unter denen ein allge-



meines Integral (2.1) als auch insbesondere ein FI (2.2, 2.3) singulär werden kann. Ein spezieller Typ solch einer Singularität entsteht, falls die Massen eines FI verschwinden. Diesen Massensingularitäten ist der Abschnitt 2.4 gewidmet. Im Abschnitt 2.5 werden wir uns schließlich dem eigentlichen Gegenstand dieser Arbeit zuwenden, den asymptotischen Singularitäten. Wir werden verschiedene Aspekte der Berechnung dieser Singularitäten im Detail untersuchen.

## 2.1 Singularitäten von Integralen

FI fallen in die Klasse von Funktionen  $f(\xi)$ , die als Integral

$$f(\xi) = \int_C du F(u, \xi) \quad (2.1.1)$$

einer Funktion  $F(u, \xi)$  entlang des Weges  $C$  darstellbar sind. Um Aufschluß über die Singularitäten von FI zu gewinnen, ist es daher sinnvoll, zunächst nach den Bedingungen zu fragen, unter denen  $f(\xi)$  singulär werden kann.

Die Untersuchung solcher Funktionen geht auf Hadamard [ HA 98 ] zurück. Seine Resultate wurden zur Analyse von FI zuerst in einer Arbeit von Eden im Jahre 1952 eingesetzt [ ED 52 ]. Die Form der Landau-Gleichungen, wie wir sie benutzen werden, wurde von Polkinghorne und Screamton 1959 angegeben [ PO 60 ]. Eine Übersicht über die Fülle der daran anknüpfenden Arbeiten liefert [ ED 66 ].

Es ist klar, daß  $f(\xi)$  nicht singulär werden kann, solange  $F(u, \xi)$  entlang des Integrationsweges  $C$  regulär ist. Bewegt man sich mit  $\xi$  aus dem Gebiet heraus, in



dem  $F(u, \xi)$ ,  $u \in \mathcal{C}$  regulär ist, so ist dies gleichbedeutend damit, daß sich eine Singularität von  $F(u, \xi)$  auf  $\mathcal{C}$  zubewegt. Läßt sich nun der Integrationsweg  $\mathcal{C}$  so deformieren, daß er diese Singularität meidet, ohne sich über sie hinweg zu bewegen, so bleibt  $f(\xi)$  regulär. Eine Singularität von  $f(\xi)$  kann bloß dann auftreten, wenn dies nicht mehr möglich ist. Das tritt ein, falls entweder

- i. Eine Singularität von  $F(u, \xi)$  mit einem Endpunkt des Integrationsweges  $\mathcal{C}$  zusammenfällt (Endpunkt-Singularität)

oder

- ii. Zwei Singularitäten von  $F(u, \xi)$ , von verschiedenen Seiten des Weges  $\mathcal{C}$  kommend, so zusammentreffen, daß sich durch Deformation von  $\mathcal{C}$  das Auftauchen einer Singularität auf diesem Weg nicht verhindern läßt (Pinch-Singularität).

Ein Beispiel mag dies verdeutlichen

$$f(\xi) = \int_1^4 du \frac{1}{(u^2 - \xi)} \quad (2.1.2)$$

Der Integrand hat für  $u = +\sqrt{\xi}$  und  $u = -\sqrt{\xi}$  Pole, die bei  $\xi = 0$  zusammenfallen. Der Punkt  $u = 0$  liegt jedoch nicht auf dem Integrationsweg, so daß man für  $\xi = 0$  keine Pinch-Singularität erwartet. Endpunkt-Singularitäten sollten für  $\xi = 1$  und  $\xi = 16$  auftreten. Explizite Integration ergibt

$$f(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \log \frac{(1 + \sqrt{\xi})(4 - \sqrt{\xi})}{(1 - \sqrt{\xi})(4 + \sqrt{\xi})} \quad (2.1.3)$$

Tatsächlich hat  $f(\xi)$  für  $\xi = 1$  und  $\xi = 16$  logarithmische Ver-



zweigungspunkte und ist für  $\zeta = 0$  regulär. Das letztere gilt allerdings nur für das "Hauptblatt" der von (2.1.3) definierten Riemannschen Fläche. Auf allen anderen Blättern befindet sich im Punkt  $\zeta = 0$  ein Verzweigungspunkt. Diese Tatsache steht in völliger Übereinstimmung mit ii. .

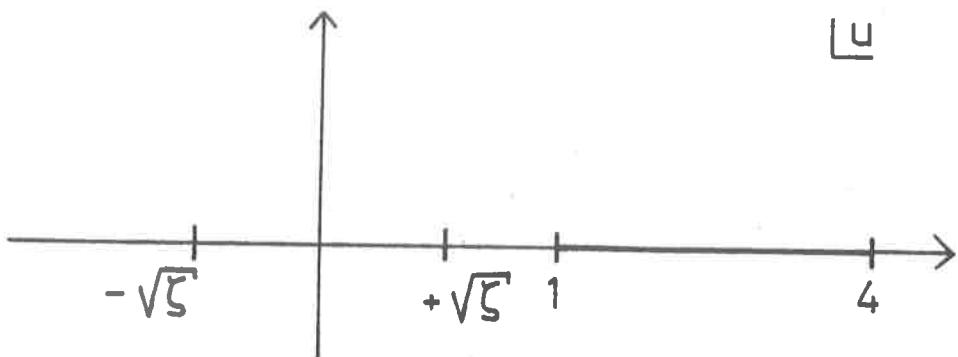


Abb. 2.1 Integrationsweg von (2.1.2)

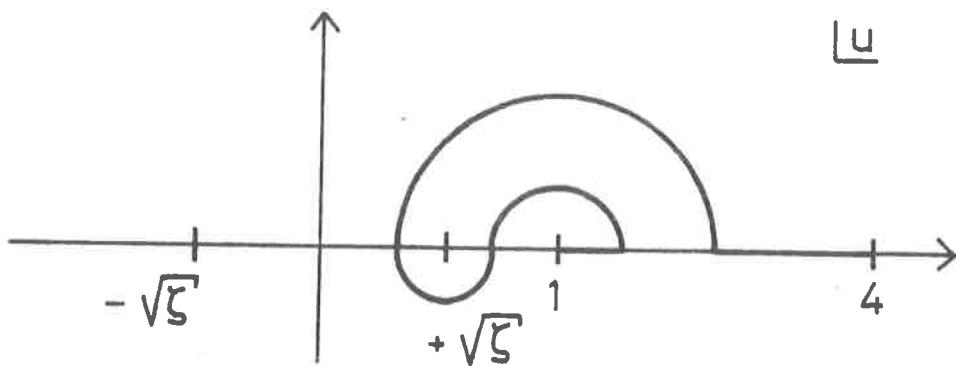


Abb. 2.2 Integrationsweg der analytischen Fortsetzung von (2.1.2)

Die analytische Fortsetzung der durch (2.1.2) definierten Funktion auf das nächste Blatt durch Überschreiten des Schnittes von  $f(\zeta)$  zwischen  $\zeta = 1$  und  $\zeta = 16$  macht es



notwendig, den Integrationsweg wie in Abb. 2.2 gezeigt zu deformieren. Deshalb sind nach Überschreiten des Schnittes die Bedingungen für eine Pinch-Singularität erfüllt.

## 2.2 Die Landau-Gleichungen

Zur Analyse der Singularitäten eines FI reicht es aus, sich auf eine rein skalare Theorie zu beschränken. Daher tritt (1.2.21) an die Stelle von (2.1.1). Es gilt also die Singularitäten des Ausdrucks

$$I' = \int_0^1 [d\alpha] \frac{G(\alpha)^{-2+\epsilon}}{(D(\alpha)/G(\alpha))^{\tilde{\rho}}} \quad (2.2.1)$$

zu bestimmen. Dazu müssen die Überlegungen, die im letzten Abschnitt für ein einfaches Integral angestellt wurden, auf Mehrfachintegrale erweitert werden.

Die Verallgemeinerung der Bedingungen i. und ii. ist in [LA 59, Po 60] vorgenommen worden. Eine mathematisch einwandfreie Behandlung erfordert den Einsatz von Methoden der algebraischen Topologie [FO 65, HW 66]. Man gelangt dazu, daß jeweils eine der beiden Bedingungen i. und ii. für jede einzelne Integration des Mehrfachintegrals erfüllt sein muß.

Um (2.1.4) in die Form eines gewöhnlichen Mehrfachintegrals zu bringen, wird die  $\delta$ -Funktion aus  $[d\alpha]$  durch Ausführung der  $k'$ -ten Integration eliminiert. Daher tritt an die Stelle der Funktion  $D(\alpha)(G(\alpha))$  die Funktion  $D'(\alpha)(G'(\alpha))$ , die durch Einsetzen von

$$\alpha_{k'} = 1 - \alpha_1 \dots - \alpha_n \quad (2.2.2)$$



in  $D(\alpha)/G(\alpha)$ ) entsteht. Die Bedingungen i. und ii. sind damit äquivalent zu der Forderung, daß

$$D'(\alpha)/G'(\alpha) = 0 \quad (2.2.3)$$

ist und außerdem für jeden Parameter  $d_i$ ,  $i \neq k'$  entweder

i.  $d_i = 0$  oder  $d_{k'} = 0$   
oder

ii.  $\frac{\partial}{\partial d_i} (D'(\alpha)/G'(\alpha)) = 0$  (2.2.4)

erfüllt ist. Die erste Bedingung lässt sich in der Form  $d_{k'} = 0$  nur für eine einzige Teilintegration  $K$  erfüllen und für den entsprechenden FP gilt dann  $d_k \neq 0$ . Da nun aber gerade dieser Parameter  $d_k$  von vornherein aus integriert werden kann, reicht es aus, sich auf Endpunkt-Singularitäten zu beschränken, die von unteren Endpunkten herrühren, d.h.  $k = k'$ . Ist hingegen die zweite Bedingung erfüllt, so muß zusätzlich gefordert werden, daß die entsprechenden zusammenfallenden Singularitäten den Integrationsweg auch tatsächlich "pinchen".

Diese Bedingungen lassen sich in eine symmetrische Form bringen. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial d_i} (D'(\alpha)/G'(\alpha)) = \frac{\partial}{\partial d_i} (D(\alpha)/G(\alpha)) - \frac{\partial}{\partial d_k} (D(\alpha)/G(\alpha)) \quad (2.2.5)$$

Multipliziert man nun (2.2.5) mit  $d_i$ , summiert über alle  $i \neq k$  und nutzt aus, daß  $D(\alpha)/G(\alpha)$  eine homogene Funktion vom Grade 1 ist

$$D(\alpha)/G(\alpha) = \sum_{i=1}^n d_i \frac{\partial}{\partial d_i} (D(\alpha)/G(\alpha)) \quad (2.2.6)$$



so folgt mit (2.2.3)

$$\sum_{i \neq k} d_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{D(\alpha)}{G(\alpha)} \right) = - \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left( \frac{D(\alpha)}{G(\alpha)} \right) \quad (2.2.7)$$

Damit erhält man schließlich die symmetrische Form der Landau-Gleichungen

$$d_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{D(\alpha)}{G(\alpha)} \right) = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2.8)$$

Aufgrund der Relation (1.4.14) lautet eine alternative Formulierung

$$d_i (Y_i^2 - m_i^2) = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2.9)$$

Ein Punkt  $\tilde{\alpha}_i$  im  $\alpha$ -Parameterraum, in dem (2.2.8,9) erfüllt ist, werden wir einen Pinch-Singulären-Punkt (PSP) nennen. Die Forderung, daß  $D(\alpha)/G(\alpha)$  an einem PSP verschwindet, braucht nicht zusätzlich zu (2.2.8,9) gestellt werden. Sie ist automatisch für jede Lösung wegen (2.2.6) erfüllt.

Auch die Forderung nach "Pinchen" des Integrationsweges kann entfallen. Wie bereits im vorausgehenden Beispiel gezeigt wurde, können zwei zusammenfallende Singularitäten, die jedoch keine Pinch-Singularitäten sind, durch Wechsel des Blattes auf dem  $f(\beta)$ , bzw. hier  $I'$ , betrachtet wird, zu Pinch-Singularitäten werden. Der Preis dafür ist, daß  $I'$  aufgefasst als Funktion der Skalarprodukte der äußeren Impulse in die komplexe Ebene fortgesetzt werden muß. Solch eine Fortsetzung ist äquivalent dazu, daß man anstelle des Weges  $\mathcal{C}$  sämtliche Wege im komplexen  $\alpha$ -Parameterraum zuläßt, die die Endpunkte von  $\mathcal{C}$  mit-



einander verbinden. Daher "pincht" jedes Paar von zusammenfallenden Singularitäten immer irgendeinen dieser Wege. Eine Konsequenz der Fortsetzung ist, daß die Parameter  $\tilde{\alpha}_j$  nicht mehr unbedingt reell sein müssen und auch nicht mehr unbedingt  $0 < \tilde{\alpha}_j < 1$  erfüllen.

Einige der FP sind dadurch ausgezeichnet, daß sie an einem PSP verschwinden. Wir bezeichnen die Menge der entsprechenden Kanten mit  $\mathcal{S}$ . Es ist üblich, eine Lösung von (2.2.8,9) durch einen sogenannten reduzierten Graphen  $\mathcal{R}$  zu beschreiben. Man bekommt solch einen reduzierten Graphen aus  $\mathcal{G}$  durch Kontraktion sämtlicher Kanten  $e_i \in \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{R} = \mathcal{G}/\mathcal{S}$ . Wegen (2.2.9) liegen alle Kantenimpulse von  $\mathcal{R}$  im PSP auf der Massenschale.

### 2.3 Singularitäten auf dem physikalischen Blatt

Eine detaillierte Untersuchung der analytischen Eigenschaften eines FI, wie sie beispielsweise im Zusammenhang mit dem Beweis der Gültigkeit von Dispersionsrelationen benötigt wird, ist im allgemeinen sehr kompliziert. Die Beschränkung auf Singularitäten im physikalischen Bereich bringt wesentliche Vereinfachungen mit sich.

Der relevante Zweig der durch  $I'$  definierten Funktion wird durch die Feynmansche  $i\epsilon_\tau$ -Vorschrift festgelegt. Diese fordert, daß sämtliche Skalarprodukte der äußeren Impulse strikt reell sind, für die Massen wird  $m^2/i\epsilon_\tau$  gesetzt und die reelle und positive Größe  $\epsilon_\tau$  gegen Null geschickt. Solange  $\epsilon_\tau \neq 0$ , ist das FI für Integrationen entlang der reellen  $d^4x$ -Achsen wohl definiert und es ist keine Deformation der Integrationswege nötig, um  $I'$  einen Sinn zu verleihen. Daher sind die  $\tilde{\alpha}_j$  reell, erfüllen



$$\tilde{\alpha}_i > 0 \quad (2.3.1)$$

und für die Kantenimpulse am PSP  $\tilde{Y}_i$  gilt

$$\tilde{Y}_i = \tilde{Y}_i^* \quad (2.3.2)$$

Die Einschränkung auf den physikalischen Bereich erlaubt es nicht mehr, die Überprüfung, ob zwei zusammenfallende Singularitäten auch tatsächlich Pinch-Singularitäten sind, ohne weiteres zu übergehen. Daß dies dennoch für Lösungen der Landau-Gleichungen, die (2.3.1,2) erfüllen, geschehen kann, ist von Coleman und Norton [CO 65] bewiesen worden. Darüber hinaus ist in [CO 65] gezeigt worden, daß der reduzierte Graph einem physikalischen Streuprozess entspricht, bei dem jeder Vertex eine Punktwechselwirkung beschreibt.

Bei dem Beweis, daß jede reelle Lösung der Landau-Gleichungen auch tatsächlich zu einer Pinch-Singularität auf der reellen Achse des physikalischen Blattes führt, spielt die Feynmansche  $i\epsilon_F$ -Vorschrift eine wesentliche Rolle. Für endliches  $\epsilon_F$  ist die physikalische Region frei von Singularitäten. Wir gehen davon aus, daß bereits über alle Endpunktssingularitäten integriert wurde, so daß wir o.B.d.A.  $\mathcal{S} = \emptyset$  annehmen können. Daher läßt sich für  $D(\alpha)/C(\alpha)$

$$\frac{D(\alpha)}{C(\alpha)} = \frac{1}{2} \sum \left. \frac{\partial^2 (D(\alpha)/C(\alpha))}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j} \Delta \alpha_i \Delta \alpha_j + O(\Delta \alpha^3) + i\epsilon_F \quad (2.3.3)$$

$$\Delta \alpha_i = \alpha_i - \tilde{\alpha}_i \quad (2.3.4)$$



schreiben.  $\frac{\partial^2(D(\alpha)/G(\alpha))}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}$  ist eine reelle, symmetrische Matrix, die durch eine orthogonale Transformation diagonalisiert werden kann. Falls  $D(\alpha)$  durch die transformierten Parameter ausgedrückt wird, so ist es einfach zu sehen, daß sich die Nullstellen von  $D(\alpha)$  im Limes  $\epsilon_F \rightarrow 0$  dem Punkt  $\tilde{\alpha}_i$  von verschiedenen Seiten her nähern,  $\tilde{\alpha}_i$  also ein PSP ist. Auf den pathologischen Fall, daß einige der Eigenwerte von  $\frac{\partial^2(D(\alpha)/G(\alpha))}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}$  verschwinden, soll hier nicht näher eingegangen werden [CO 65].

Offensichtlich liefern die Landau-Gleichungen bloß ein notwendiges Kriterium für das Auftreten einer Singularität. Um Aufschluß darüber zu erhalten, ob tatsächlich eine Singularität vorliegt und von welcher Art sie ist, muß man die Integration in der Nähe des PSP explizit ausführen. Wir betrachten hier den Fall, daß eine sogenannte normale Lösung [KI 62] der Landau-Gleichungen vorliegt. Normale Lösungen sind dadurch gekennzeichnet, daß der entsprechende PSP ein isolierter Punkt im  $\alpha$ -Parameterraum ist. Im allgemeinen können an einem PSP die äußeren Impulse eines FI nicht frei variieren, sondern sie müssen auf einer "singulären" Fläche liegen. Wir nehmen an, daß die Impulse  $\rho_i$  auf solch einer Fläche gleich  $\tilde{\rho}_i$  sind. Die Lage des PSP ist dann eine Funktion der  $\tilde{\rho}_i$ :

$$\tilde{\alpha}_i = \tilde{\alpha}_i(\tilde{\rho}_i, m_k) \quad (2.3.5)$$

Im Unterschied zu den normalen Lösungen stehen die pathologischen Lösungen bei denen einer oder auch mehrere der FP beliebige Werte annehmen können. Normale Lösungen führen gewöhnlich zu Schwellensingularitäten, während pathologische Lösungen im Zusammenhang mit den



asymptotischen Singularitäten, auf die im nächsten Abschnitt näher eingegangen werden wird, eine Rolle spielen.

Wir gehen davon aus, daß der Teilgraph  $\mathcal{G}$  aus  $m$  Kanten bestehen. Zur Isolation der Endpunkt-Singularitäten wird eine Transformation

$$d_i = g \bar{d}_i, \quad i = 1, \dots, m \quad \sum_{i=1}^m \bar{d}_i = 1 \quad (2.3.6a)$$

vorgenommen. Die Jacobideterminante dieser Transformation ist

$$\frac{\partial(d_1, \dots, d_m)}{\partial(\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_m, g)} = g^{m-1} \mathcal{S}(1 - \sum_{i=1}^m \bar{d}_i) \quad (2.3.6b)$$

Damit ist der PSP durch  $g=0$  und  $\bar{d}_i, i \leq m$  charakterisiert. Unter der Transformation (2.3.6) verhalten sich die parametrischen Funktionen  $G(\alpha)$  und  $D(\alpha)$  wie

$$\begin{aligned} G(\alpha) &= g^{L(\mathcal{G})} \bar{G}(g, \bar{d}_i, \alpha) \\ D(\alpha) &= g^{L(\mathcal{G})+1} \bar{D}(g, \bar{d}_i, \alpha) \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Falls in  $\bar{G}(g, \bar{d}_i, \alpha)$   $g=0$  gesetzt wird, so faktorisiert das Resultat nach (1.3.10) in

$$G_g(\alpha) G_R(\alpha) \quad (2.3.8)$$

Ähnlich wie schon  $D(\alpha)/G(\alpha)$  in (2.3.3) entwickelt wurde, so entwickeln wir hier  $\bar{D}(g, \bar{d}_i, \alpha)$  um  $d_i = \tilde{d}_i$  und  $\tilde{p}_i$ . Der führende Term  $\bar{D}_0$  ist gleich

$$\bar{D}_0(g, \bar{d}_i, \alpha) = \tilde{D}_{PSP} + \left( \frac{\partial \bar{D}}{\partial g} \right)_{PSP} g + \frac{1}{2} \sum_{i,j=m+1}^{n-1} \left( \frac{\partial}{\partial d_i} \frac{\partial}{\partial d_j} \bar{D} \right)_{PSP} d_i d_j. \quad (2.3.9)$$



$\tilde{D}_{PSP}$  ist eine Funktion von  $\tilde{\alpha}_i$  und  $\rho_i$ , die für  $\rho_i \cdot \tilde{\rho}_i$  verschwindet. Da die Singularität bloß von einer endlichen Umgebung um den PSP herröhrt, können die Integrationsintervalle beliebig erweitert werden, solange nur das resultierende Integral existiert, ohne daß das singuläre Verhalten beeinflußt wird. Deshalb entspricht der Singularität des FI  $\mathcal{I}'$  (2.2.1) am betrachteten PSP gerade das Verhalten des Ausdrucks

$$\int_0^\infty dS S^{m-1-L(\mathcal{S})(2-\epsilon)} \int_0^1 [d\tilde{\alpha}_1, \dots, m] \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha_{m+1} \dots d\alpha_{n-1} \cdot \\ \cdot \left( C_g(\tilde{\alpha}) C_R(\tilde{\alpha}_i) \right)^{\tilde{\rho}-2+\epsilon} D_0^{-\tilde{\rho}} \quad (2.3.10)$$

Integration von (2.3.10) ergibt

$$C_R(\tilde{\alpha})^{\tilde{\rho}-2+\epsilon} \frac{(\sqrt{2\pi})^{n-m-1}}{\det \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \tilde{D} \right)_{PSP} \right)} \cdot \Gamma(m - L(\mathcal{S})(2-\epsilon)) \quad (2.3.11)$$

$$\cdot \int_0^1 [d\tilde{\alpha}_1, \dots, m] C_g(\tilde{\alpha}) \left( \left( \frac{\partial \tilde{D}}{\partial S} \right)_{PSP} \right)^{-m+L(\mathcal{S})(2-\epsilon)} \cdot \frac{\Gamma(\tilde{k})}{\Gamma(\tilde{\rho})} \tilde{D}_{PSP}^{-\tilde{k}}$$

mit dem asymptotischen Index

$$\tilde{k} = \tilde{\rho} - \frac{1}{2}(n-m-1) - m + L(\mathcal{S})(2-\epsilon) \quad (2.3.12)$$

(2.3.11) gilt, falls  $\tilde{k} > 0$  ist. Dies läßt sich prinzipiell immer durch eine geeignete Wahl von  $\epsilon$  erreichen. Ist  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{k} < 0$  und ganzzahlig, so treten im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  zusätzliche Logarithmen von  $\tilde{D}_{PSP}$  auf. Da  $m = n(\mathcal{S})$  ist, läßt sich  $\tilde{k}$  auch als

$$\tilde{k} = \frac{1}{2} n(\mathcal{R}) - (2-\epsilon)L(\mathcal{R}) + \frac{1}{2} \quad (2.3.13)$$



ausdrücken. Damit haben wir eine Zahl gefunden, die es gestattet, die Stärke einer Singularität direkt aus den reduzierten Graphen abzulesen. Für pathologische Lösungen der Landau-Gleichungen erhöht sich  $\tilde{K}$  um die Anzahl der freien Parameter. Es ist also zu erwarten, daß solche Lösungen Anlaß zu stärkeren Singularitäten geben.

## 2.4 Massensingularitäten

In vielen Fällen ist die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens eines FI im Limes großer Impulsüberträge äquivalent zur Untersuchung seines Verhaltens im Limes, der durch das Verschwinden einiger Massen charakterisiert ist. Im zweiten Fall treten typischerweise sogenannte Massensingularitäten auf. Daß Massensingularitäten als eine Form der asymptotischen Singularitäten aufgefaßt werden können, läßt sich leicht durch eine Dimensionsanalyse der parametrischen Funktion  $D(\alpha)$  einsehen. Da Massensingularitäten in der Literatur gründlich untersucht worden sind, möchten wir hier einige der Resultate, soweit sie für unsere Zielsetzung von Interesse sind, zusammenfassen.

Wir haben bereits im vorausgehenden Abschnitt darauf hingewiesen, daß Massensingularitäten mit pathologischen Lösungen der Landau-Gleichungen im Zusammenhang stehen. Pathologische Lösungen der Landau-Gleichungen zeichnen sich dadurch aus, daß die entsprechenden PSP nicht isolierte Punkte sind, sondern Hyperflächen im  $\alpha$ -Parameterraum bilden. In vielen Fällen tritt solch eine Entartung gerade dann auf, wenn einige der Massen verschwinden. Eine allgemeine Untersuchung der pathologischen Lösungen ist leider sehr kompliziert und eine vollständige Klassi-



fizierung erscheint aussichtslos. Daher werden wir uns hier mit dem einfachsten Fall begnügen. Wie sich in der Praxis herausgestellt hat, deckt dieser einfache Typ eine Fülle von physikalisch interessanten Fällen ab.

Wir werden hier bloß den Typ von pathologischen Lösungen untersuchen, der dadurch gekennzeichnet ist, daß alle FP die zu Kanten des reduzierten Graphen  $\mathcal{R}$  gehören, beliebige Werte annehmen können, die lediglich durch die  $\mathcal{S}$ -Funktion aus  $[\partial\alpha]$  eingeschränkt werden. Im Gegensatz dazu steht die Form der Lösungen der Landau-Gleichungen wie sie in Abschnitt 2.5.5 vorgestellt werden wird. Die allgemeinen Bedingungen für das Auftreten solch einer Massensingularität lassen sich leicht ableiten.

Dazu betrachte man den reduzierten Graphen  $\mathcal{R}$ .  $\mathcal{R}$  besteht aus verschiedenen irreduziblen Teilgraphen  $\mathcal{R}_\beta$ ,  $\beta = 1, \dots, \varsigma$ , die jeweils nur durch einen einzigen Vertex mit dem übrigen Graphen verbunden sind. Falls  $\mathcal{S}$  zusammenhängend ist, so hat der reduzierte Graph eine Struktur wie sie in Abb. 2.3 gezeigt wird.

Die Kantenimpulse  $\gamma_i$  der irreduziblen Komponenten  $\mathcal{R}_\beta$  haben die Eigenschaft, nicht von den  $\alpha$ -Parametern der Kanten aus  $\mathcal{R}_\beta$ ,  $\beta' \neq \beta$  abhängig zu sein. Innerhalb eines irreduziblen Teilgraphen  $\mathcal{R}_\beta$  sind genau  $L(\mathcal{R}_\beta)$  der Kantenimpulse linear unabhängig. Sämtliche übrigen  $\gamma_i$  lassen sich aufgrund der Impulserhaltung als Linearkombinationen dieser unabhängigen Impulse und der äußeren Impulse  $\rho_\beta$  mit konstanten Koeffizienten darstellen. Damit kann gezeigt werden [KI 76], daß dann und nur dann eine Lösung der Landau-Gleichungen vorliegt, falls

$$m_i^2 = 0 \quad \forall i \in \mathcal{R} \quad (2.4.1)$$



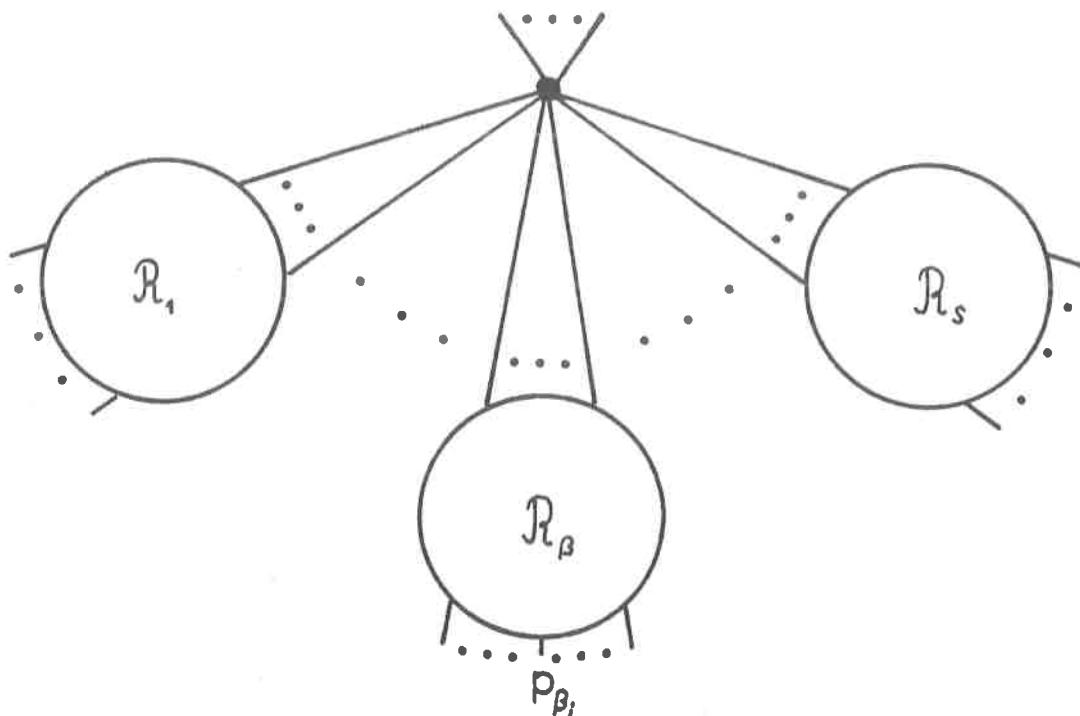


Abb. 2.3 Struktur des reduzierten Graphen

und

$$\rho_{\beta_i} \cdot \rho_{\beta_0} = 0 \quad (2.4.2)$$

erfüllt sind. Mit anderen Worten, alle externen Impulse einer irreduziblen Komponente müssen parallel zu einem lichtartigen Vektor sein. Der asymptotische Index  $\tilde{k}$  der vorliegenden Singularität berechnet sich mittels einer Transformation (2.3.6) als

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= k + e L(\mathcal{R}) \\ k &= n(\mathcal{R}) - 2 L(\mathcal{R}) \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Dies gilt für eine rein skalare Theorie. In einer Spinortheorie gibt (2.4.3) lediglich eine obere Grenze an.



Der Wert (2.4.3) des asymptotischen Index gilt für den Fall, daß  $D(\alpha)$  wie  $\gamma^{L(\alpha)+1}$  verschwindet. Es ist jedoch auch möglich, daß  $D(\alpha)$  stärker gegen Null geht [KI 76,77]. In solch einem Fall kann  $k$  einem größeren Wert annehmen. Dies hängt damit zusammen, daß an die Stelle der linearen Transformation (2.3.6) natürlich auch eine nichtlineare Transformation treten kann.

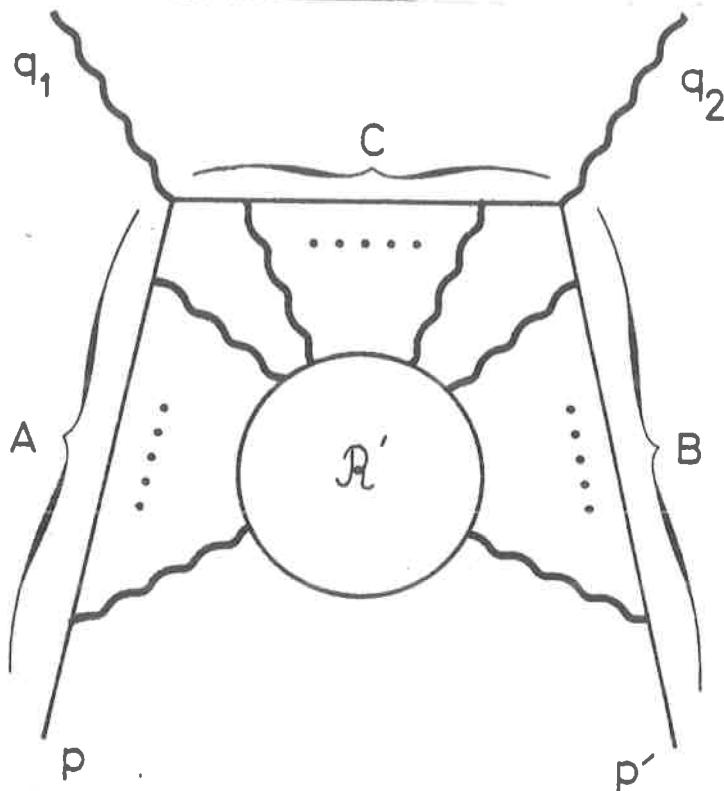


Abb. 2.4 Graph, dessen Massensingularitäten im Text diskutiert werden

Wir möchten dies hier am Beispiel des in Abb. 2.4 gezeigten Graphen der Quantenelektrodynamik darstellen. Die durchgezogenen Linien repräsentieren Fermionen der Masse  $m$ , die geschlängelten Linien masselose Photonen. Die mit  $R'$  bezeichnete Blase enthält nur Photonen. Offensichtlich erfüllt  $\mathcal{G}/(\mathcal{G} \cdot R')$  sämtliche Bedingungen, die an einen reduzierten Graphen gestellt werden müssen, der die Landau-Gleichungen löst. Wir haben die fermionischen



Kanten in drei Mengen  $A, B, C$  aufgeteilt. Lassen wir einmal die Möglichkeit, daß  $\mathcal{S}$  Schleifen enthalte außer acht, so folgt aus (2.4.3), daß  $K$  genau dann seinen größten Wert annimmt, wenn gerade sämtliche Fermionkanten kontrahiert werden. Da der entsprechende asymptotische Index (2.4.3) in jedem Falle negativ ( $\epsilon = 0$ ) ist, folgert man, daß das Verschwinden von  $D(\alpha)$  wie  $\mathcal{S}$  nicht ausreicht, um eine Singularität zu erzeugen. Durch eine nicht-lineare Transformation kann nun erreicht werden, daß  $D(\alpha)$  stärker als  $\mathcal{S}$  gegen Null geht. Im Hinblick auf unser Interesse an vollständig masselosen Theorien, werden wir hier solch eine nichtlineare Transformation als Überlagerung zweier linearer Transformationen ausführen.

Zunächst läßt sich jeder Kantenimpuls aus  $A$  und  $B$  als

$$Y_i = \rho + Y'_i \quad e_i \in A \quad (2.4.4a)$$

$$Y_i = \rho' + Y'_i \quad e_i \in B \quad (2.4.4b)$$

schreiben, wobei  $Y'_i$  eine Linearkombination von  $Y_i$ ,  $e_i \in \mathcal{R}'$  ist. Damit nimmt  $D(\alpha)$  die Gestalt

$$D(\alpha) = C(\alpha) \left\{ \left( \sum_{e_i \in A} \lambda_i (\rho^2 - m^2) + 2 \sum_{e_i \in A} \lambda_i \rho Y'_i + \sum_{e_i \in A} \lambda_i Y'^2_i \right. \right. \quad (2.4.5)$$

$$\left. \left. + \rho \overset{\rho}{\leftrightarrow} \rho' \right) + \sum_{e_i \in \mathcal{R}'} \lambda_i Y'^2_i + \sum_{e_i \in C} \lambda_i (Y'^2_i - m^2) \right\}$$

an. Wir kontrahieren nun die Kanten von  $A \cup C$  und von  $B \cup C$  nacheinander, d.h. wir skalieren sämtliche FP aus  $A \cup C$  ( $B \cup C$ ) mit  $\mathcal{S}_A$  ( $\mathcal{S}_B$ ) wie in (2.3.6). Das hat zur Folge, daß



$$d_i \sim \begin{cases} g_A & e_i \in A \\ g_B & e_i \in B \\ g_A g_B & e_i \in G \\ \mathcal{O}(1) & e_i \in \mathcal{R}' \end{cases} \quad (2.4.6)$$

und

$$Y_i \sim g_A \rho + g_B \rho' + \mathcal{O}(g_A g_B) \quad ; \in \mathcal{R}' \quad (2.4.7)$$

ist. Setzt man diese Beziehungen in  $D(\alpha)$  ein, so erhält man

$$D(\alpha) = G(\alpha) \left\{ \left( g_A \sum_{i \in A} \bar{\lambda}_i c \rho^2 \cdot m^2 \right) + \rho \xleftrightarrow{A \leftrightarrow B} \rho' \right. \\ \left. + \rho^2 \mathcal{O}(g_A^2) + \rho \rho' \mathcal{O}(g_A g_B) + \rho'^2 \mathcal{O}(g_B^2) \right\} \quad (2.4.8)$$

Unterwerfen wir nun die Parameter  $g_A$  und  $g_B$  selbst einer Transformation (2.3.6) mit einem Parameter  $\mathcal{S}$ , so ist klar, daß  $D(\alpha) \sim \mathcal{S}^2$  ist, falls nur die externen Impulse  $\rho, \rho'$

$$\rho^2 = m^2 \\ \rho'^2 = m^2 \quad (2.4.9)$$

erfüllen. Angemerkt sei, daß die Transformation mit  $\mathcal{S}$  eine nichtlineare Transformation ist. Der asymptotische Index wird

$$\tilde{k} = 2(n(\mathcal{S}) - (2-\epsilon)L(\mathcal{S})) - n_A \cdot n_B - 2n_c \quad (2.4.10)$$

Er ist nicht mehr in jedem Falle negativ. Der wesentliche Unterschied zum vorher untersuchten allgemeinen Fall ist die zusätzliche Forderung (2.4.9). Die allgemeinen Bedingungen, unter denen solch eine "Verstärkung" einer Singularität auftreten kann, findet man in [KI 77].



Es ist klar, daß in einer masselosen Theorie mit externen Impulsen auf der Massenschale

$$D(\alpha) \sim g_A g_B \quad (2.4.11)$$

gilt. Hier liegen also wieder die zu Anfang untersuchten Verhältnisse vor, so daß das Verschwinden von  $g_A$  oder  $g_B$  alleine ausreicht, um eine Singularität zu erzeugen.

Selbstverständlich lassen sich Massensingularitäten auch direkt in  $K$ -Raum untersuchen, ohne erst FP einzuführen [ST 78]. Dies hat einerseits den Vorteil einer anschaulicheren Interpretation der Singularitäten, erlaubt aber andererseits nicht mehr eine systematische Berechnung im Limes mehrerer großer Impulsüberträge, wie wir sie beabsichtigen.

Man unterscheidet im allgemeinen zwischen sogenannten infraroten und kollinearen Divergenzen. Unter einer kollinearen Divergenz [EL 79] ist eine Massensingularität zu verstehen, die von einer Region des Phasenraumes herrührt, in der einige Impulse lichtartig werden, jedoch kein Impuls komponentenweise verschwindet. Das Auftreten von Infrarotdivergenzen hingegen ist an das komponentenweise Verschwinden des Impulses eines strikt masselosen Teilchens geknüpft. Lassen wir in unserem Beispiel bloß  $g_A$  ( $g_B$ ) gegen Null streben, so haben wir es, falls  $p$  ( $p'$ ) lichtartig ist, mit einer kollinearen Divergenz zu tun. Gehen hingegen sowohl  $g_A$  als auch  $g_B$  gegen Null, so liegt eine Infrarotdivergenz vor.

Die Infrarotdivergenzen der Quantenelektrodynamik, die durch das Verschwinden der Photonenmasse hervorgerufen werden, sind in der Literatur ausführlich untersucht



worden. Bereits im Jahre 1937 konnten Bloch und Nordsieck [ BL 37 ] zeigen, daß sich die Divergenzen von virtuellen und reellen Korrekturen so organisieren lassen, daß man zu physikalischen Wirkungsquerschnitten gelangt, die frei von Infrarotdivergenzen sind. Ihre Argumentation ist in [ YE 61, ET 67, GR 73 ] vervollständigt worden.

Die Kürzung von reellen und virtuellen Infrarotdivergenzen ist eine Konsequenz des allgemeinen Theorems, das die Namen von Kinoshita, Lee und Nauenberg trägt [KI 62, LE 63, 81] . Danach ist eine Übergangswahrscheinlichkeit endlich, falls über alle entarteten Eingangs- und Ausgangszustände summiert wird. Damit ist auch eine Vorschrift gefunden, die es erlaubt, Übergangswahrscheinlichkeiten zu definieren, die im Limes verschwindender Elektronenmasse endlich bleiben.

Es hat in den letzten Jahren nicht an Versuchen gefehlt, das Verständnis der Massensingularitäten in der QCD auf ein ähnliches Niveau zu heben. Trotz erheblicher Fortschritte konnte dieses Programm bisher nicht abgeschlossen werden. Insbesondere wurde gezeigt, daß in Reaktionen mit zwei Quarks im Eingangskanal, falls über die Farbe gemittelt wird, keine vollständige Kürzung der Infrarotsingularitäten à la Bloch-Nordsieck eintritt [ DO 80a, LI 81 ] .

## 2.5 Asymptotische Singularitäten

Im letzten Abschnitt haben wir die Massensingularitäten als eine besonders ausgezeichnete Art der asymptotischen Singularitäten untersucht. Als Massensingularität faßt



man im allgemeinen solche Singularitäten auf, deren Auftreten nicht daran gebunden ist, daß die äußeren Impulse des Graphen besondere Bedingungen erfüllen, abgesehen davon, daß einige eventuell auf der Massenschale liegen müssen [ KI 62 ]. In diesem Abschnitt nun möchten wir uns der Situation zuwenden, in der einige der Skalarprodukte der äußeren Impulse sehr groß werden.

Zunächst werden wir unsere Betrachtungen auf eine rein skalare Theorie beschränken. Es sei daran erinnert, daß ein Graph mit  $e$  äußeren Vertizes höchstens von  $e(e-1)/2$  unabhängigen Skalarprodukten  $S_{ij} = \rho_i \rho_j$ ,  $i, j = 1, \dots, e-1$  abhängen kann. Die Abhängigkeit eines FI von diesen Skalarprodukten wird ausschließlich durch die parametrische D-Funktion hervorgerufen. Wir werden von hier an, so wie es auch in der störungstheoretischen QCD üblich ist, sämtliche internen Massen vernachlässigen. Dann ist  $D(\alpha)$  von der Form

$$D(\alpha) = \sum h_{ij}(\alpha) S_{ij} \quad (2.5.1)$$

Im asymptotischen Limes, der durch einen einzigen großen Impulsübertrag charakterisiert wird, streben eine Reihe von Skalarprodukten  $S_{ij}$  gleichmäßig gegen Unendlich. Um diese Skalarprodukte von den restlichen zu unterscheiden, nennen wir die Menge der Paare  $(i, j)$ , für die  $S_{ij}$  groß wird  $\mathcal{A}$ . Die Annäherung an Unendlich werde durch die Variable  $Q^2$  kontrolliert, d.h.

$$S_{ij} = Q^2 \hat{S}_{ij} \quad (i, j) \in \mathcal{A} \quad (2.5.2)$$

und  $\hat{S}_{ij}$   $(i, j) \in \mathcal{A}$  sowie  $S_{ij}$   $(i, j) \notin \mathcal{A}$  bleiben endlich.



Später werden wir auch den Limes untersuchen, bei dem mehrere Impulsüberträge unabhängig voneinander gegen Unendlich gehen. Häufig ist es sinnvoll, den asymptotischen Limes durch die Wahl eines Bezugssystems zu realisieren und alle  $S_{ij}'$  ( $i, j \in \mathcal{A}$ ) explizit verschwinden zu lassen. Besonders übersichtlich ist eine Zerlegung der Impulse nach den lichtartigen Vektoren  $\rho_{\pm}$  und dem darauf orthogonalen Vektor  $\rho_{\perp}$  (siehe Anhang B).

### 2.5.1 Regularisierung

Mit (2.5.2) wird  $D(\alpha)$

$$D(\alpha) = Q^2 \left\{ h(\alpha) + \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} h_{ij}(\alpha) \frac{S_{ij}}{Q^2} \right\} \quad (2.5.3)$$

wobei

$$h(\alpha) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} h_{ij}(\alpha) \vec{S}_{ij} \quad (2.5.4)$$

ist. Setzen wir (2.5.3) in (2.2.1) ein und vernachlässigen im Limes  $Q^2 \rightarrow \infty$  einmal die Terme  $S_{ij}/Q^2$ , so bekommen wir

$$\lim_{Q^2 \rightarrow \infty} I' = (Q^2)^{-\tilde{\rho}} I'' \quad (2.5.5)$$

mit

$$I'' = \int [d\alpha] G(\alpha)^{\tilde{\rho}-2+\epsilon} h(\alpha)^{-\tilde{\rho}} \quad (2.5.6)$$

Die Vernachlässigung der Terme  $S_{ij}/Q^2$  in (2.5.3) ist ohne weiteres gerechtfertigt, solange das Integral  $I''$  endlich ist.



$I''$  kann jedoch singulär werden, falls  $G(\alpha)$  und/oder  $h(\alpha)$  innerhalb des Integrationsbereichs verschwinden.  $G(\alpha)$  verschwindet nur dann, wenn die Parameter eines Teilgraphen  $\mathcal{S}$  mit  $L(\mathcal{S}) \neq 0$  gegen Null gehen. Aus (1.3.8,9) und (1.3.36) folgt, daß, falls  $G(\alpha)$  verschwindet, auch  $h(\alpha)$  mit mindestens gleicher Stärke verschwindet. Daher reicht es aus, sich auf das Verschwinden von  $h(\alpha)$  zu konzentrieren. Wie (1.3.36) zeigt, verschwindet  $h(\alpha)$ , falls die Parameter eines Teilgraphen  $\mathcal{S}$  mit  $\mathcal{S}$  gegen Null gehen mindestens wie  $\mathcal{S}^{L(\mathcal{S})}$ . Führt ein Verschwinden von  $h(\alpha)$  wie  $\mathcal{S}^{L(\mathcal{S})}$ , jedoch nicht stärker, zu einer Singularität, so geschieht dies in jedem Fall unabhängig von den externen Impulsen, also auch schon vor Vernachlässigung der Terme  $S_{ij}/Q^2$ . Dann haben wir eine Ultraviolettdivergenz vor uns. Wir nehmen durchweg an, daß wir es mit "off-shell" renormierten FI zu tun haben und werden Ultraviolettdivergenzen keine Beachtung schenken.

Führt das Verschwinden von  $h(\alpha)$  stärker als  $\mathcal{S}^{L(\mathcal{S})}$  zu einer Singularität in (2.5.6), so gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten, sie zu regularisieren. Entweder setzen wir die Terme  $S_{ij}/Q^2$  nicht von vornherein gleich Null, nehmen aber  $\epsilon = 0$  (off-shell Regularisierung), oder aber wir wählen  $\epsilon < 0$ , setzen  $S_{ij}/Q^2 = 0$  und führen zum Schluß den Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  aus (dimensionale Regularisierung) [GA 73, MA 75]. Eine führende Singularität, die sich in der off-shell Regularisierung in der Form

$$I'' \sim (Q^2)^k \log^a(Q^2) \quad (2.5.7a)$$

zeigt, nimmt mit der dimensionalen Regularisierung die Form

$$I'' \sim \frac{1}{(\alpha \epsilon + k)^a}, \quad a > 0 \quad (2.5.7b)$$

an, wobei  $a$  eine reelle Zahl ist. Dieser Zusammenhang wird in Kapitel 3 offenbar werden. Vom praktischen Stand-



punkt aus ist zur Berechnung des asymptotischen Verhaltens in der Regel die Methode der dimensionalen Regularisierung gegenüber der off-shell Regularisierung vorzuziehen. Wie (2.5.7b) jedoch zeigt, ist sie nur für solche Singularitäten sinnvoll einzusetzen, für die  $k \cdot O$  ist, da für  $k > O$  der Limes  $\epsilon \rightarrow O$  nicht ausgeführt werden kann.

Ist  $k = O$  und wird die dimensionale Regularisierung gewählt, so führt ein Verhalten von  $I''$  wie  $\epsilon^{-q}$  im Limes  $\epsilon \rightarrow O$  zusammen mit dem Faktor  $(Q^2)^{-p}$  in (2.5.5) dazu, daß der logarithmisch führende Term wie  $(\log Q^2)^q$  geht, was man auch von (2.5.7a) erwartet. Daher ist, was das Abzählen der Logarithmen betrifft, eine Singularität  $\frac{1}{\epsilon}$  äquivalent zu  $\log Q^2$ .

### 2.5.2 Skalierungsmengen

Wie im letzten Abschnitt festgestellt wurde, ist die Berechnung des asymptotischen Verhaltens von  $I'$  äquivalent zur Bestimmung der Singularitäten von  $I''$ . Im allgemeinen ist  $I''$  ein kompliziertes Integral, das nicht explizit ausgeführt werden kann. Offenbar ist dies aber auch gar nicht notwendig. Zu diesem Zweck reicht schon die Integration über eine kleine Umgebung der Hyperfläche aus, auf der  $h(\alpha)$  verschwindet [PO 63, FE 63].

Tragen die Quadrate der einzelnen Schnittimpulse  $\rho_\alpha^2$  aus (1.3.34) zu  $h(\alpha)$  mit jeweils gleichem Vorzeichen bei, so kann  $h(\alpha)$  nur dann Null werden, wenn eine Reihe von FP gemeinsam verschwindet. Der Fall, daß die Vorzeichen unterschiedlich sind, wird später unter die Lupe genommen werden. Wir nenne solch eine Menge von Parametern eine Skalierungsmenge (SM)  $\mathcal{S}$ . Selbstverständlich ist jede



Obermenge einer SM selbst ebenfalls wieder eine SM. In der Literatur findet man für minimale SM, die keine Schleifen enthalten, Bezeichnungen wie "d-lines" [HA 63,64] oder auch "t-path" [TI 63]. SM mit Schleifen werden auch "singular configurations" genannt [TI 63, PO 80]. Da sich diese Bezeichnungen auf spezielle Prozesse beziehen, werden wir sie hier nicht benutzen.

Um das Integral  $I''$  in einer Umgebung der Hyperfläche zu untersuchen, auf der die Parameter von  $\mathcal{S}$  verschwinden, führen wir eine Skalierung wie in (2.3.6) aus. Wie bereits festgestellt wurde, kann eine Singularität, die nicht eine Ultravioleットsingularität ist, nur dann auftreten, falls  $h(\alpha)$  stärker als  $\beta^{L(\mathcal{S})}$  gegen Null strebt. Dazu ist es offensichtlich notwendig, daß  $\lim_{Q \rightarrow \infty} (D_0 C_\alpha) / Q^2$  (siehe (1.3.36)) verschwindet. Mit anderen Worten, die parametrische D-Funktion des Graphen  $\mathcal{G}/\mathcal{S}$  muß unabhängig von  $Q^2$  sein. Da wir bereits alle Skalarprodukte, die nicht aus  $\mathcal{A}$  sind, explizit gleich Null gesetzt haben, bedeutet diese Forderung nichts anderes, als daß der reduzierte Graph  $\mathcal{G}/\mathcal{S}$  in 1-vertex-irreduzible Komponenten zu zerfallen hat, so daß für alle externen Impulse  $P_{\beta_i}$  einer Komponente  $\beta$ ,  $(\beta, \beta_i) \notin \mathcal{A}$  gilt. Dies ist genau die gleiche Bedingung, wie sie schon für das Auftreten einer Massensingularität in 2.4 abgeleitet wurde. Ist insbesondere  $\mathcal{S}$  verbunden, so ist der reduzierte Graph von der in Abb. 2.3 dargestellten Form.

Nehmen wir einmal an, daß

$$h(\alpha) = \beta^{L(\mathcal{S})+1} \bar{h}(\alpha, \beta) \quad (2.5.8)$$

und

$$C(\alpha) = \beta^{L(\mathcal{S})} \bar{C}(\alpha, \beta) \quad (2.5.9)$$



ist, so ergibt sich als asymptotischer Index  $\tilde{k}$  der schon bekannte Ausdruck (2.4.3). In (2.5.8,9) steht  $\alpha'$  sowohl für die transformierten Parameter  $\bar{\alpha}$ ; , als auch für diejenigen Parameter, die keiner Transformation unterworfen wurden. Um die Stärke einer SM zu charakterisieren, wird in [HA 64] die effektive Länge  $m_{eff}$  eingeführt

$$m_{eff} = n(\mathcal{S}) - 2L(\mathcal{S}) \quad (2.5.10)$$

Damit wird

$$k = p - m_{eff} \quad (2.5.11)$$

Ist  $p < m_{eff}$ , so liegt keine Singularität vor, ist  $p = m_{eff}$ , so handelt es sich um eine logarithmische Singularität und im Falle  $p > m_{eff}$  haben wir es mit einer sogenannten "power-law" Singularität zu tun. Ein wichtiger Schritt zur Berechnung des asymptotischen Verhaltens eines FI ist selbstverständlich die Bestimmung der SM. Wir werden uns im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich auf den führenden Term mit größtem  $k$  beschränken. Daher reicht es aus, sämtliche SM minimaler effektiver Länge (MSM) zu bestimmen. Kann der asymptotische Limes dadurch realisiert werden, daß jeder externen Impuls als Linearkombination der Impulse  $p_t$  dargestellt wird, so besteht jeder reduzierte Graph aus zwei irreduziblen Komponenten. In diesem Fall werden die MSM durch verbundene Graphen dargestellt. Hat man einmal eine MSM gefunden, so ist es häufig leicht, sofort weitere anzugeben. Alle verbundenen Graphen, die aus einer MSM  $\mathcal{S}$  durch Hinzufügen von zwei Kanten entstehen, so daß die Anzahl der Schleifen um Eins steigt, sind ebenfalls wieder MSM.



Zur Berechnung der Singularität setzen wir (2.5.8) und (2.5.9) in (2.5.6) ein, approximieren  $\bar{h}G(\alpha, \beta)$  ( $\bar{G}(\alpha, \beta)$ ) durch  $h(\alpha, 0)$  ( $\bar{G}(\alpha, 0)$ ), integrieren über ein Intervall  $0 < \beta < \delta$  und betrachten nur den singulären Anteil. Ist  $K=0$  so erhält man mit der dimensionalen Regularisierung

$$I'' = \frac{1}{-L(\varphi/\varphi)_{\mathcal{E}}} \int_0^1 [d\bar{\alpha}] \int_0^1 [d\tilde{\alpha}] \frac{\bar{G}(\alpha', 0)}{\bar{h}(\alpha', 0)} \tilde{\alpha}^{\tilde{\rho}-2+\epsilon} + \dots \quad (2.5.12)$$

mit

$$[d\bar{\alpha}] = d\bar{\alpha}_1 \dots d\bar{\alpha}_m \delta(\bar{\alpha}_1 + \dots + \bar{\alpha}_m - 1) \quad (2.5.13a)$$

und

$$[d\tilde{\alpha}] = d\tilde{\alpha}_{m+1} \dots d\tilde{\alpha}_n \delta(\tilde{\alpha}_{m+1} + \dots + \tilde{\alpha}_n - 1) \quad (2.5.13b)$$

Selbstverständlich muß das verbleibende Integral, das die Singularität in (2.5.12) multipliziert, keinesfalls endlich sein. Im allgemeinen gibt es mehrere SM, die  $h(\alpha)$  verschwinden lassen, und es können mehrere unabhängige Skalierungen ausgeführt werden. Der gleiche Parameter kann natürlich auch mehrmals skaliert werden. Allerdings können wegen der  $\delta$ -Funktion in (2.5.13a) nicht sämtliche Parameter einer SM ein zweites mal skaliert werden. Wir nennen eine Reihe von SM, deren Skalierungen nacheinander ausgeführt werden können, eine Sequenz. Da wir uns lediglich für führende Beiträge interessieren, sind sämtliche SM einer Sequenz MSM. Ist es aufgrund der Einschränkungen durch die  $\delta$ -Funktionen nicht möglich, eine gegebene Sequenz um eine weitere SM zu erweitern, so nennen wir sie vollständig. Die Konstruktion solcher vollständiger Sequenzen ist der Gegenstand des Kapitels 4.



Ist die SM der in (2.5.12) ausintegrierten Skalierung Teil einer nichttrivialen Sequenz, so charakterisieren die Punkte in (2.5.12) logarithmisch nichtführende Terme. Beschränkt man sich auf die Berechnung der führenden Logarithmen, so spielt, wie aus (2.5.12) ersichtlich ist, die obere Integrationsgrenze  $\mathcal{S}$  keine Rolle. Möchte man hingegen auch nichtführende Beiträge berechnen, so muß die obere Integrationsgrenze, die allgemein eine Funktion der  $\alpha_i$  ist, berücksichtigt werden.

Falls wir unsere bisherigen Überlegungen auch auf Theorien mit Feldern mit nichtverschwindendem Spin ausweiten wollen, so müssen wir anstelle des Integrals (2.2.1) ein Integral der Form (1.4.4) untersuchen. Ein Term mit  $\mathfrak{S}$  Kontraktionen trägt wie

$$I' = \int_0^1 [d\alpha] \frac{G(\alpha)^{-2+\epsilon}}{(D\alpha)/G(\alpha))^{\tilde{p}-\epsilon}} R_{12} \dots R_{2\epsilon-1,2\epsilon} Y_{\mu_{2\epsilon+1}} \dots Y_{\mu_n} \quad (2.5.14)$$

bei. Wir haben der Einfachheit halber die Indizes willkürlich gewählt. Die bisher gezogenen Schlüsse müssen lediglich insofern geändert werden, wie sie das Verhalten des Integranden von (2.5.14) bei Skalierung der Parameter einer SM betreffen. Der führende Term der Kantenimpulse  $Y_i$  bleibt bei einer Skalierung entweder konstant oder er verschwindet wie eine Potenz von  $\mathcal{S}$ . Die  $R_{ij}$  hingegen verhalten sich wie  $\mathcal{S}^{-1}$ , falls es eine Schleife  $\mathcal{L} \subset \mathcal{S}$  gibt mit  $e_i, e_j \in \mathcal{L}$ . Liegen eine oder auch beide der Kanten  $e_i, e_j$  nicht auf solch einer Schleife, so bleibt der führende Term von  $R_{ij}$  konstant. Daher muß, falls  $\mathfrak{S} = 0$  ist, eine SM, die das (2.5.14) entsprechende FI einer skalaren Theorie singulär macht, nicht unbedingt auch zu einer Singularität in (2.5.14) führen. Eine Entscheidung darüber erfordert die Untersuchung der  $Y_i$ .



Ist  $\bar{c} \neq 0$ , so muß, abgesehen vom Einfluß der  $\gamma_i$ , die effektive Länge einer SM um  $\bar{c}$  steigen, damit sie eine Singularität gleicher Stärke verursacht, wie für ein skalares FI, es sei denn, diese Unterdrückung wird teilweise durch die  $R_{ij}$  kompensiert.

An einem PSP der bisher betrachteten Art wird jeder Kantenimpuls  $\gamma_i$  des reduzierten Graphen parallel zu einem der externen Impulse. Lassen sich sämtliche externen Impulse als Linearkombinationen von  $\rho_+$  und  $\rho_-$  ausdrücken, so ist der Tensor im Integranden von (2.5.14) im wesentlichen ein Produkt aus diesen Vektoren. Im allgemeinen wird der Tensor im Zähler des Integranden von (2.5.14) mit einem numerischen Tensor kontrahiert, der ein Produkt aus metrischen Tensoren  $g_{\mu\nu}$  und Dirac-Matrizen  $\gamma_\mu$  ist. Daher ist es in vielen Fällen vorteilhaft, eine Lichtkegelbasis zu wählen (siehe Anhang B).

### 2.5.3 "Disconnected Scalings"

An dieser Stelle ist es nötig, einen Punkt zu klären, über den nicht nur in der älteren Literatur einige Verwirrung herrscht [ME 64, GR 65a, HA 65, PO 80]. Hat man einmal eine Singularität wie in (2.5.12) isoliert, so mag man versucht sein, als nächstes eine Singularität zu isolieren, die einer MSM von  $\bar{h}(\alpha', 0)$  entspricht. Solch eine MSM muß natürlich nicht unbedingt auch eine MSM von  $\bar{h}(\alpha)$  sein. Ist es ein allgemeines Kennzeichen der MSM von  $\bar{h}(\alpha)$ , durch verbundene Graphen dargestellt zu werden, so trifft dies für eine MSM von  $\bar{h}(\alpha', 0)$  nicht mehr zu. Solche SM sind daher unter der Bezeichnung "disconnected



scalings" bekannt. Isoliert man die einem "disconnected scaling" entsprechende Singularität des Integrals (2.5.12) auf die gleiche Weise, wie schon (2.5.12) selbst gewonnen wurde, so ist das Resultat im allgemeinen unbrauchbar. Der Grund ist, daß nun die vernachlässigten Anteile nicht mehr nichtföhrend sind.

Dieser Sachverhalt läßt sich an folgendem Beispiel einsehen.  $g_1$  sei der Parameter der Skalierung einer SM  $\mathcal{S}_1$  und  $\bar{h}(\alpha', g_1)$  sei durch

$$\bar{h}(\alpha', g_1) = \bar{h}(\alpha') + g_1 \bar{h}(\alpha') \quad (2.5.15)$$

gegeben. Es existiere eine zweite SM  $\mathcal{S}_2$  mit Parameter  $g_2$ , die zwar  $\bar{h}(\alpha')$ , jedoch nicht  $\bar{h}(\alpha')$  zum Verschwinden bringe. Der Einfachheit halber sei  $L(\mathcal{S}_1) = L(\mathcal{S}_2) = 0$ . Dann ist

$$h(\alpha) = g_1 \bar{h}(\alpha', g_1, g_2) \quad (2.5.16)$$

mit

$$\bar{h}(\alpha', g_1, g_2) = g_2 \bar{h}(\alpha') + g_1 \bar{h}(\alpha') \quad (2.5.17)$$

Es ist klar, daß wir hier den Ausdruck  $\bar{h}(\alpha', g_1, g_2)$  nicht mehr einfach um  $g_1 = 0$  und  $g_2 = 0$  entwickeln können, wie es bei der Ableitung von (2.5.12) mit  $\bar{h}(\alpha', g)$  geschah.

Es ist daher falsch, die Singularitäten zu isolieren, indem abwechselnd skaliert wird und das Integral wie beschrieben approximiert wird. Vielmehr müssen zuerst alle Skalierungen der SM einer vollständigen Sequenz ausgeführt werden, erst dann darf das Integral approximiert werden. Eine Sequenz bricht ab, falls das Integral von



$\bar{h}(\alpha')$  über  $\alpha'$  am PSP endlich ist. Haben wir es beispielsweise mit einer vollständigen Sequenz zu tun, für deren SM  $\mathcal{S}_k$  jeweils  $L(\mathcal{S}_k) = 0$  ist, so wird

$$h(\alpha) = g_1 \dots (\bar{h}(\alpha') + O(g_k)) \quad (2.5.18)$$

In diesem Ausdruck dürfen wir ohne Gefahr in der Klammer  $g_k = 0$  setzen. Das Auftreten von "disconnected scalings" muß daher als eine Konsequenz der fehlerhaften Approximation des Integrals  $I$ " betrachtet werden.

#### 2.5.4 Nichtlineare Skalierungen

Bisher sind wir davon ausgegangen, daß man mit einer linearen Skalierung wie (2.3.6) eine Singularität korrekt isoliert. Wie wir jedoch schon im Abschnitt 2.4 gesehen haben, kann es unter Umständen auch notwendig werden, eine nichtlineare Skalierung auszuführen. Im folgenden möchten wir zeigen, daß zur Isolation des asymptotischen Verhaltens einer völlig masselosen Theorie, lineare Transformationen bzw. deren Überlagerungen völlig ausreichen.

Wir gehen davon aus, daß die FP  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  eine SM  $\mathcal{S}$  bilden. Dann lautet die allgemeine Form einer nichtlinearen Skalierung

$$\alpha_i = g^{v_i} \bar{\alpha}_i \quad i = 1, \dots, m \quad (2.5.19)$$

Die Exponenten  $v_i$  seien so gewählt, daß

$$\min \{v_i\} = 1 \quad (2.5.20)$$



Normieren wir die  $\bar{\alpha}_i$  auf

$$\sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i^{\gamma_{\alpha_i}} = 1 \quad (2.5.21)$$

so wird die Jacobideterminante der Transformation (2.5.19, 20, 21) gerade

$$\frac{\partial(d_1, \dots, d_m)}{\partial(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_m, \beta)} = \beta^{\sum_{i=1}^m \gamma_{\alpha_i} - 1} \delta(\bar{\alpha}_1^{\gamma_{\alpha_1}} + \dots + \bar{\alpha}_m^{\gamma_{\alpha_m}} - 1) \quad (2.5.22)$$

Wegen der Bedingung (2.5.20) verschwindet die Jacobideterminante einer nichtlinearen Skalierung einer vorgegebenen SM immer stärker als die einer linearen Skalierung. Daher kann eine nichtlineare Skalierung nur dann eine gleich starke oder auch stärkere Singularität im Vergleich mit einer linearen Skalierung verursachen, falls die Funktion  $h(\alpha)$  für die nichtlineare Skalierung stärker verschwindet, als dies für eine lineare Skalierung eintreten kann. Solch ein Fall läßt sich einfach durch Überlagerung mehrerer linearer Skalierungen konstruieren. Sind beispielsweise zwei SM  $\mathcal{S}_A$  und  $\mathcal{S}_B$  vorgegeben mit  $\mathcal{S}_A \cap \mathcal{S}_B \neq \emptyset$ , so dürfte im allgemeinen eine nichtlineare Skalierung mit

- $\gamma_i = 2$  falls  $e_i \in (\mathcal{S}_A \cap \mathcal{S}_B)$
- $\gamma_i = 1$  sonst

$h(\alpha)$  stärker verschwinden lassen, als wenn  $\gamma_i = 1$  für alle Kanten aus  $\mathcal{S}_A \cup \mathcal{S}_B$  gewählt wird. Dieser Fall wurde bereits im Abschnitt 2.4 vorgeführt. Hier möchten wir nun zeigen, daß sich umgekehrt jede nichtlineare Skalierung, die  $h(\alpha)$  stärker gegen Null gehen läßt, als eine entsprechende lineare Skalierung, als solch eine Überlagerung darstellen läßt.



Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß  $\mathcal{G}$  keine Schleifen enthalte, zusammenhängend ist und  $h(\alpha)$  bei linearer Skalierung von  $\mathcal{G}$  wie  $\mathcal{G}$  verschwindet. Wir nehmen an, daß eine nichtlineare Skalierung vorliege, die  $h(\alpha)$  wie  $\mathcal{G}^2$  gegen Null gehen lasse und daß sich in zwei Teilgraphen zerlegen lasse, so daß alle Kanten aus  $\mathcal{G}_1$  mit  $\mathcal{G}$  und alle Kanten aus  $\mathcal{G}_2$  mit  $\mathcal{G}^2$  gehen. Skalieren wir zunächst die Parameter aus  $\mathcal{G}_2$ . Dann verhält sich  $h(\alpha)$  wie

$$h(\alpha) = \bar{h}(\alpha') + \mathcal{G}^2 \bar{h}(\alpha', \mathcal{G}^2) \quad (2.5.23)$$

$\bar{h}(\alpha')$  ist die  $h$ -Funktion des Graphen  $\mathcal{G}/\mathcal{G}_2$ . Nun zerlegen wir  $\mathcal{G}_1$  in einen beliebigen zusammenhängenden Teilgraphen  $\mathcal{G}_A'$  und das Komplement  $\mathcal{G}_B' = \mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_A'$ . Werden sämtliche Kanten aus  $\mathcal{G}_A'$  ( $\mathcal{G}_B'$ ) mit  $\mathcal{G}_A$  ( $\mathcal{G}_B$ ) linear skaliert, so muß sich  $\bar{h}(\alpha')$  wie

$$\bar{h}(\alpha') = \mathcal{G}_A \mathcal{G}_B h_1(\alpha') + \mathcal{G}_A^2 h_2(\alpha') + \mathcal{G}_B^2 h_3(\alpha') + \dots \quad (2.5.24)$$

verhalten, d.h. es sind keine Terme erlaubt, die linear in  $\mathcal{G}_A$  oder  $\mathcal{G}_B$  sind. Andernfalls kann  $h(\alpha)$  nicht quadratisch verschwinden. Gibt es eine Zerlegung von

$\mathcal{G}_1$  in  $\mathcal{G}_A''$  und  $\mathcal{G}_B''$ , so daß  $h_2(\alpha') = h_3(\alpha') = 0$ , so ist die vorliegende nichtlineare Skalierung als Überlagerung der linearen Skalierungen von  $\mathcal{G}_A'' \cup \mathcal{G}_2$  und  $\mathcal{G}_B'' \cup \mathcal{G}_2$  darstellbar. Die Tatsache, daß die linearen Terme in  $\mathcal{G}_A$  bzw.  $\mathcal{G}_B$  für beliebige Zerlegungen verschwinden müssen, läßt sich mit den topologischen Regeln von (1.3.34) folgendermaßen ausdrücken. Falls  $\mathcal{G}_A'$  ( $\mathcal{G}_B'$ ) in zwei zusammenhängende Teile zerschnitten wird und anschließend alle Kanten von  $\mathcal{G}_1$  kontrahiert werden, so muß die  $\mathcal{G}^2$  Abhängigkeit des resultierenden Graphen verschwinden. Diese Bedingung kann aber nur dann erfüllt werden, falls  $\mathcal{G}_1$  aus zwei zu-



sammenhängenden Teilen besteht, so daß die Kontraktion schon eines dieser Teile ausreicht, um den resultierenden Graphen unabhängig von  $Q^2$  zu machen. Diese beiden Teile erfüllen aber gerade die Bedingungen, die oben an  $\mathcal{S}_\alpha''$  und  $\mathcal{S}_\beta''$  gestellt wurden. Damit ist gezeigt, daß die vorgegebene nichtlineare Skalierung eine Überlagerung der linearen Skalierungen von  $\mathcal{S}_\alpha'' \cup \mathcal{S}_2$  und  $\mathcal{S}_\beta'' \cup \mathcal{S}_2$  ist. Unter Zu-hilfenahme der topologischen Regeln zur Konstruktion von (1.3.34) läßt sich die präsentierte Argumentation ver-allgemeinern.

### 2.5.5 "Pinch"-Singularitäten

Im Abschnitt 2.5.2 wurde ausdrücklich vorausgesetzt, daß die Quadrate sämtlicher Schnittimpulse  $P_\mu$  zu  $h(\alpha)$  mit gleichen Vorzeichen beitragen. In diesem Abschnitt werden wir die Folgen erörtern, die eintreten, falls diese Voraussetzung verletzt wird. Wir möchten dies an einem einfachen Beispiel durchführen [PO 63, TI 63].

Wir betrachten den sogenannten Regge-Limes,  $\zeta \rightarrow \infty$  und  $t$  fest, eines Graphen, der zu der Vier-Punkt-Funktion in einer rein skalaren Theorie beiträgt.  $\zeta$  und  $t$  sind die bekannten Mandelstam-Variablen. Aufgrund der Relation

$$s + t + u = 0 \quad (2.5.25)$$

muß die dritte Mandelstam-Variable  $u$

$$u \approx -s \quad (2.5.26)$$



erfüllen. Als Beispiel haben wir den in Abb. 2.5 gezeigten Graphen ausgewählt. Die externen Impulse erfüllen

$$2 \rho_+ \rho_- = 5 \quad (2.5.27)$$

Die D-Funktion dieses Graphen ist

$$\begin{aligned} D(d) = & [d_1' d_2' d_3' d_4' + d_1 d_2 d_3 d_4] s \\ & + [d_1 d_2 d_3' d_4' + d_1' d_2' d_3 d_4] v + O(t) \end{aligned} \quad (2.5.28)$$

Dies wird mit (2.5.26) zu

$$D(d) = (d_1 d_2 - d_1' d_2') (d_3 d_4 - d_3' d_4') s + O(t) \quad (2.5.29)$$

Im Gegensatz zu den in 2.5.2 betrachteten D-Funktionen kann (2.5.29) auch außerhalb der Region verschwinden, in der einige FP gleich Null sind. Beispielsweise falls

$$d_1 / d_1' = d_2 / d_2' \quad (2.5.30)$$

ist. (2.5.30) repräsentiert eine Lösung der Landau-Gleichungen. Es ist aufschlußreich, die Impulsflüsse am vorliegenden PSP zu studieren.

In der Sprache der elektrischen Netzwerke besagt (2.5.30), daß die Potentiale an den Punkten  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  in Abb. 2.5 übereinstimmen. Daher fließt an einem PSP durch die Kanten  $e_1, e_1', e_2, e_2', (e_3, e_3', e_4, e_4')$  ausschließlich der Impuls  $\rho_+$  ( $\rho_-$ ), während die Kantenimpulse von  $e_5$  und  $e_6$  verschwinden.



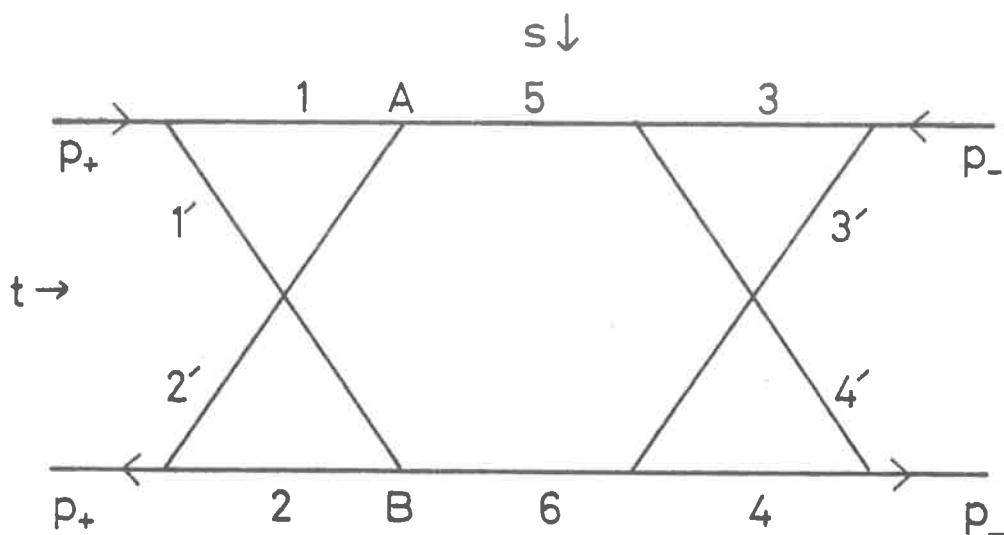


Abb. 2.5 Ein Graph, der eine "Pinch"-Singularität aufweist

Ein analoger Mechanismus ist für die als "Landshoff-Pinch"-Singularitäten [LA 73, CV 74a] bekannte Abweichung des asymptotischen Verhalten der elastischen  $pp$ -Streuung im "Large-Angle"-Limes von den Regeln des " Dimensional Counting" [BR 73, MA 73] verantwortlich.

Läßt sich der zu untersuchende asymptotische Limes so realisieren, daß sämtliche externen Impulse des jeweiligen Graphen Linearkombinationen der Impulse  $p_{\pm}$  sind, so spielen "Pinch"-Singularitäten keine Rolle, falls diese Impulse an mindestens einem externen Vertex gleichzeitig auftreten [CO 73]. Es muß also für mindestens einen externen Vertex  $p_i^2 \sim Q^2$  gelten.



### 3. Asymptotische Entwicklung durch Mellin-Transformation

In 2.5 haben wir die Singularitäten eines FI in einem Limes untersucht, bei dem ein Teil der Skalarprodukte  $S_{ij}$   $(i, j) \in \mathcal{A}$  der äußeren Impulse mit  $Q^2$  gegen Unendlich gingen, während alle übrigen Skalarprodukte festgehalten wurden. Diese Form des Limes behandelt alle großen Skalarprodukte  $S_{ij}$   $(i, j) \in \mathcal{A}$  auf gleichem Niveau. Sie berücksichtigt nicht die relativen Unterschiede der einzelnen Skalarprodukte. Lassen wir beispielsweise die beiden Invarianten  $s$  und  $t$  gemeinsam gegen Unendlich gehen, so gibt es in der logarithmisch führenden Näherung keinen Unterschied zwischen  $\log s$  und  $\log t$ . Dieser Unterschied wird aber wichtig, falls wir z.B.  $s \gg t$  werden lassen, es also zwei große, voneinander unabhängige Impulsüberträge gibt. Offensichtlich reicht die in 2.5 vorgestellte Methode nicht aus, um die Singularitäten eines FI im Limes mehrerer unabhängiger großer Impulsüberträge zu bestimmen. Es ist das Ziel dieses Kapitels zu zeigen, wie das asymptotische Verhalten eines FI im Limes mehrerer großer Impulsüberträge mit Hilfe einer mehrfachen Mellin-Transformation bestimmt werden kann.

Die Nützlichkeit der Mellin-Transformation zur Berechnung des asymptotischen Verhaltens eines FI im Limes eines einzigen großen Impulsübertrages, falls nicht zusätzlich wie in Kapitel 2 die dimensionale Regularisierung eingesetzt wird, wurde zuerst von Bjorken und Wu erkannt [BJ 63]. Ihre Methode wird ausführlich in [ED 66] und [PO 80] dargestellt. Eine doppelte Mellin-Transformation ist zur Berechnung eines FI zuerst von Polkinghorne [PO 64] benutzt worden.



Im Gegensatz zu diesen Arbeiten aus den sechziger Jahren steht im Mittelpunkt der Arbeiten [BE 74, 77, 78a, 79] und [CA 80, 81] die Entwicklung einer allgemeinen Methode zur systematischen Berechnung des asymptotischen Verhaltens eines FI. Kernstück solch einer Methode ist immer eine Zerlegung des  $\alpha$ -Integrationsgebietes in Sektoren und eine Transformation der FP, so daß der Teil des Integranden, der nach Faktorisierung der transformierten Parameter verbleibt, die den Integranden als Ganzes multiplizieren, eine Taylorentwicklung mit nichtverschwindendem ersten Glied in dem betrachteten Sektor besitzt. In den erwähnten Arbeiten wird das Integrationsgebiet in sogenannte Hepp-Sektoren zerlegt

$$d_{i_1} < d_{i_2} \dots < d_{i_n}$$

wobei  $i_1, \dots, i_n$  eine Permutation der Zahlen von 1 bis  $n$  ist. In diesem Sektor werden dann entsprechend

$$d_{i_k} = \beta_n \dots \beta_k$$

mit  $0 < \beta_i < 1$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  neue Variablen eingeführt. Inwiefern diese Zerlegung die geforderte Eigenschaft aufweist, hängt ganz von den parametrischen Funktionen ab. In [BE 78a] wird ein Polynom derart, daß es in jedem Hepp-Sektor die beschriebene Eigenschaft aufweist, FINE genannt. So sind beispielsweise  $\alpha_1 + \alpha_2$ ,  $\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 d_3 + \alpha_2 d_3$  FINE Polynome, während  $\alpha_1^2 + \alpha_2 \alpha_3$  im Sektor  $d_2 < d_1 < d_3$  gleich  $\beta_3 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)$  ist, also nicht FINE ist. Die parametrische C-Funktion ist immer FINE. Dies ist der Grund dafür, daß Hepp-Sektoren die angemessene Zerlegung zur Untersuchung von Ultraviolettsingularitäten sind [HE 66]. In [BE 74] wird gezeigt, wie im Limes eines einzigen großen Impulsübertrages eine asymptotische Entwicklung mittels einer einfachen Mellin-Transformation systematisch bestimmt werden kann, falls  $D(\alpha)$  FINE ist. Ist  $D(\alpha)$  nicht



FINE, so ist eine Aufspaltung in ein Produkt aus Polynomen, die FINE sind, durch eine mehrfache Mellin-Transformation möglich [ BE 78a, CA 80, 81 ].

Unsere Methode unterscheidet sich in zweifacher Hinsicht von [ BE 74, 77, 78a, 79, CA 80, 81 ]. Erstens wählen wir die Aufspaltung des  $\alpha$ -Integrationsgebietes von vornherein so, daß der faktorisierte Teil des Integranden immer eine Taylorentwicklung mit nichtverschwindendem ersten Glied hat. Wie dies systematisch geschehen kann wird in Kapitel 4 gezeigt. Daher spielt bei unserer Methode die FINE-Eigenschaft keine Rolle. Zweitens setzen wir die mehrfache Mellin-Transformation ein, um das asymptotische Verhalten im Limes mehrerer großer Impulsüberträge zu finden.

Wie mit einer einfachen Mellin-Transformation auch eine exakte Berechnung eines FI durchgeführt werden kann, ist in [ KA 81 ] gezeigt worden.

Wir werden unsere Darstellung in Abschnitt 3.1 mit einer Einführung der Mellin-Transformation beginnen. Daran anschließend präsentieren wir ein Beispiel (3.2), das illustriert, wie die Koeffizienten einer asymptotischen Entwicklung mittels einer einfachen Mellin-Transformation berechnet werden können. In 3.3 werden wir uns dem asymptotischen Verhalten eines FI im Limes zweier großer Impulsüberträge zuwenden. Verallgemeinerungen auf drei und mehrere Impulsüberträge werden in 3.4 und 3.5 vorgenommen.

### 3.1 Die Mellin-Transformation

In diesem Abschnitt werden wir die Mellin-Transformation einführen. Die Mellin-Transformation  $MT\{f\}$  einer



Funktion  $f(y)$  ist durch

$$MT\{f\} = \int_0^\infty dy y^{-\ell-1} f(y) \quad (3.1.1)$$

definiert. Das Integral (3.1.1) konvergiere im Streifen  $\alpha < \operatorname{Re} \ell < \beta$ . Um  $MT\{f\}$  zu invertieren, gehen wir von dem Integral

$$\bar{MT}\{f\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} dy y^\ell MT\{f\} \quad \alpha < \gamma < \beta \quad (3.1.2)$$

aus. Die Integrationskontur verlaufe parallel zur imaginären Achse. Aufgrund der Konvergenz von (3.1.1) kann die  $dy$ -Integration mit der  $d\ell$ -Integration vertauscht werden, so daß

$$\bar{MT}\{f\} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy' f(y') \left(\frac{y}{y'}\right)^\ell \frac{\sin\{R \log \frac{y}{y'}\}}{\log \frac{y}{y'}} \quad (3.1.3)$$

Lassen wir nun  $R$  gegen Unendlich gehen und nutzen die Relation [LI 66]

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sin Rx}{x} = \pi \delta(x) \quad (3.1.4)$$

aus, so erhalten wir die Inversionsformel der Mellin-Transformation

$$f(y) = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{d\ell}{2\pi i} y^\ell \bar{MT}\{f\} \quad \alpha < \gamma < \beta \quad (3.1.5)$$



3.2

Beispiel

In diesem Abschnitt möchten wir an einem Beispiel [ DA 78 ] vorführen, wie mit Hilfe der Mellin-Transformation eine asymptotische Entwicklung bestimmt werden kann.

Es sei

$$f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = (1+\varepsilon)^{-\rho} \quad (3.2.1)$$

Diese Funktion lässt sich bekanntlich für kleine  $\varepsilon$  in einer Reihe

$$f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\rho+n)}{\Gamma(\rho)} (-\varepsilon)^n \quad |\varepsilon| < 1 \quad (3.2.2a)$$

und für große  $\varepsilon$  in

$$f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon^{\rho}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\rho+n)}{\Gamma(\rho)} \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)^n \quad |\varepsilon| > 1 \quad (3.2.2b)$$

entwickeln. Wir haben also eine aufsteigende (3.2.2a) und eine absteigende (3.2.2b) asymptotische Entwicklung.

Als Mellin-Transformation von  $f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$  erhält man

$$MT\{f\} = \int_0^{\infty} d\tilde{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}^{\ell-1} (1+\tilde{\varepsilon})^{-\rho} \quad (3.2.3)$$

Dieses Integral ist für kleine  $\tilde{\varepsilon}$  konvergent, falls  $\ell > 0$ , und an der oberen Grenze konvergiert es, falls  $\ell - \rho < 0$ . (3.2.3) ist gerade eine Eulersche  $\beta$ -Funktion



$$MT\{f\} = \frac{\Gamma(\ell)\Gamma(\rho-\ell)}{\Gamma(\rho)} \quad (3.2.4)$$

Da (3.2.3) im Streifen  $0 < \ell < \rho$  konvergiert, ist  $MT\{f\}$  dort auch analytisch. Außerhalb dieses Bereichs hat  $MT\{f\}$  Pole auf der reellen Achse und zwar für  $\ell = 0, -1, -2, \dots$  und  $\ell = \rho = 0, 1, 2, \dots$  (siehe Abb. 3.1)

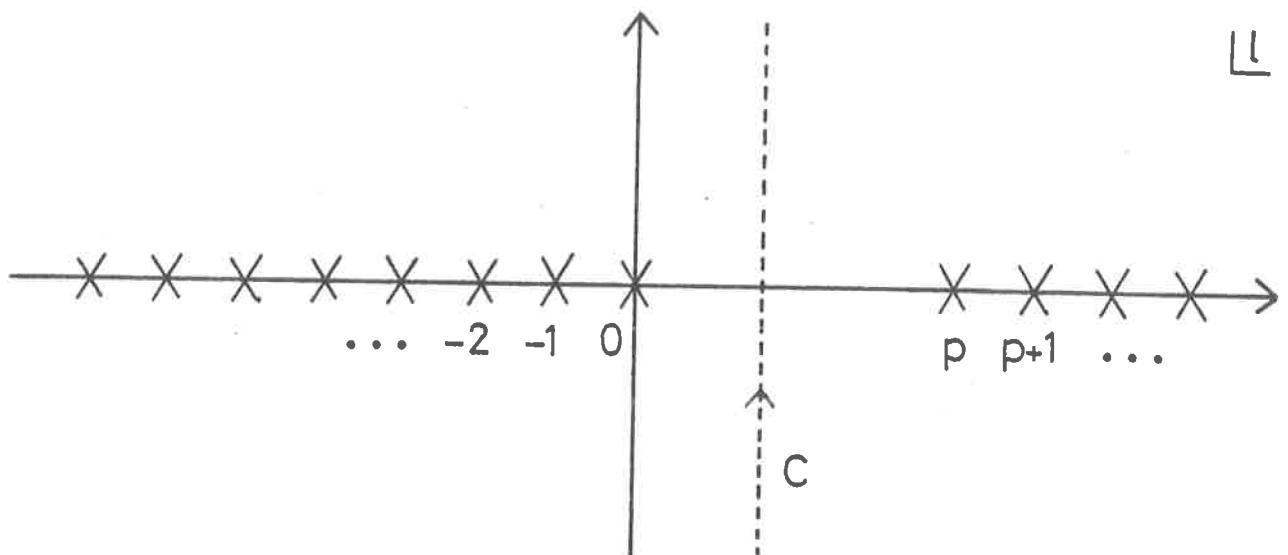


Abb. 3.1 Analytische Struktur von  $MT\{f\}$

In Abb. 3.1 haben wir mit  $C$  die Kontur bezeichnet, entlang der in (3.1.2) integriert wird. Wählen wir zuerst  $|t| < 1$ . Dann können wir  $C$  entlang eines Kreisbogens im Unendlichen in der linken Halbebene schließen. Daher ist  $f$  gleich der Summe der Residuen der Eulerschen  $\beta$ -Funktion an den Polen  $\ell = 0, -1, -2, \dots$ . Bekanntlich hat  $\Gamma(\ell)$  am Pol  $\ell = -n$  das Residuum  $(-1)^n/n!$ , so daß die Summe der Residuen der  $\beta$ -Funktion genau (3.2.2a) ergibt. Auf



analoge Weise lässt sich auch (3.2.2b) für  $|\varepsilon| > 1$  ableiten. In diesem Fall ist  $\mathcal{C}$  in der rechten Halbebene zu schließen. Jeder Pol in der  $\ell$ -Ebene repräsentiert also einen Term der asymptotischen Entwicklung von  $f(\frac{1}{\varepsilon})$ , und die Pole der aufsteigenden und der absteigenden asymptotischen Entwicklung sind durch die Kontour  $\mathcal{C}$  voneinander getrennt.

Durch einfache Modifikation von  $f(\frac{1}{\varepsilon})$  lässt sich eine der beiden Serien von Polen zum Verschwinden bringen. Ist man beispielsweise nur an der aufsteigenden Entwicklung (3.2.2a) interessiert, so kann man  $f(\frac{1}{\varepsilon})$  für  $|\varepsilon| > 1$  einfach gleich Null setzen. Damit konvergiert das Integral (3.2.3) in der Halbebene  $\ell > 0$ . Von diesem Trick werden wir im nächsten Abschnitt ausführlich Gebrauch machen.

### 3.3 Mellin-Transformation eines Feynman-Integrals

Wir wenden uns nun unserem eigentlichen Ziel zu, der asymptotischen Entwicklung eines FI. Dieses Problem unterscheidet sich von dem vorausgehenden Beispiel insofern, als daß nach Ausführung der Mellin-Transformation noch die  $\alpha$ -Integration verbleibt. In der Regel sind erst nach vollständiger Integration sämtliche Pole in der  $\ell$ -Ebene bekannt. Dies wollen wir ja aber gerade umgehen. Da wir nur am führenden Term der asymptotischen Entwicklung interessiert sind, reicht es völlig aus sich auf den führenden Pol in der  $\ell$ -Ebene zu beschränken. Zur Isolation dieses Poles kann wieder die Skalierungstechnik aus 2.5 eingesetzt werden.



In diesem Abschnitt werden wir uns mit der Situation beschäftigen, in der zwei große Impulsüberträge vorliegen. Mehr als zwei große Impulsüberträge sind der Gegenstand der folgenden Abschnitte. Haben wir es nur mit zwei großen Impulsüberträgen zu tun, so hat das FI  $I''$  einer reinen skalaren Theorie die Gestalt

$$I'' = \int_0^1 [d\alpha] C(\alpha)^{\tilde{\rho}-2+\epsilon} D'(\alpha)^{-\tilde{\rho}} \quad (3.3.1)$$

mit

$$D'(\alpha) = h(\alpha) + \tau g(\alpha) \quad (3.3.2)$$

$\tau$  ist das Verhältnis der beiden großen Impulsüberträge. Unser Interesse gilt dem Limes  $|\tau| \ll 1$ . Um aus der Mellin-Transformation von (3.3.1) solche Pole zu eliminieren, die für das Verhalten von (3.3.1) für große  $\tau$  ( $|\tau| > 1$ ) verantwortlich sind, führen wir einen Cutoff  $\nu$  ein,  $\nu > 1$ . Dieser Cutoff wird nach Inversion der Mellin-Transformation gegen Null geschickt. Damit schreibt sich die Mellin-Transformation von (3.3.1) zu

$$MT\{I''\} = \int_0^\nu d\tau \tau^{\ell-1} \int_0^1 [d\alpha] C(\alpha)^{\tilde{\rho}-2+\epsilon} (h(\alpha) + \tau g(\alpha))^{-\tilde{\rho}} \quad (3.3.3)$$

Wir führen zunächst alle Manipulationen in einem Gebiet der  $\ell$ -Ebene aus, das frei von Singularitäten ist. Daher dürfen  $\alpha$ - und  $\tau$ -Integration ohne Gefahr vertauscht werden. Eine Transformation der  $\tau$ -Integrals

$$t = \frac{1 + \nu h(\alpha)/g(\alpha)}{1 + 1/\tau} \quad (3.3.4)$$



führt auf

$$MT\{I''\} = \int [d\alpha] C(\alpha)^{\tilde{\rho}-2+\epsilon} h(\alpha) \frac{\epsilon - \tilde{\rho}}{(g(\alpha) + u h(\alpha))^{-\epsilon}} \cdot$$

Bevor wir die analytischen Eigenschaften des Ausdrucks (3.3.5) näher untersuchen, möchten wir kurz auf die Inversion von (3.3.3) eingehen. Formal wird (3.3.3) durch

$$I'' = \int_{\mathcal{C}} \frac{dl}{2\pi i} \tau^{\cdot \ell} MT\{I''\} \quad (3.3.6)$$

invertiert. Wie in (3.1.2), so verläuft die Kontur  $\mathcal{G}$  auch hier parallel zur imaginären Achse in einem Gebiet der  $\ell$ -Ebene, in dem (3.3.3) konvergiert. Da  $|\tau| < 1$ , kann die Kontur  $\mathcal{G}$  in der linken Halbebene geschlossen werden. Daher ist  $I''$  gleich der Summe aller Residuen der Pole von  $\tau^{-\ell} M T \{I''\}$ , die links von  $\mathcal{G}$  liegen. Liegt ein  $n$ -facher Pol an der Stelle  $\ell = \ell_0$  vor

$$MT\{I''\} = \frac{1}{(\ell - \ell_0)^n} \quad (3.3.7)$$

so ergibt die Inversion

$$I'' = \frac{1}{r(n)} \left( \log \frac{1}{\varepsilon} \right)^{n-1} \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\ell_0} \quad (3.3.8)$$

Beim Übergang von (3.3.7) zu (3.3.8) wurden alle logarith-



mischi nichtführende Beiträge vernachlässigt. Da sämtliche Pole von (3.3.5) auf der reellen Achse liegen, wird der führende Beitrag durch diejenigen Pole bestimmt, die zuerst getroffen werden, wenn  $\mathcal{C}$  nach links verschoben wird, und wie (3.3.8) zeigt, wird der Beitrag eines  $n$ -fachen Poles von einem  $(n-1)$ -fachen Logarithmus begleitet.

Wir untersuchen nun das Integrationsgebiet von (3.3.5) auf mögliche Regionen, die zu Singularitäten in der  $\ell$ -Ebene führen können. Beginnen wir mit der Region  $t \approx 1$ . In dieser Region kann nur das Verschwinden der eckigen Klammer des Integranden von (3.3.5) Singularitäten hervorrufen. Da  $u \neq 0$ , erfordert dies, daß  $h(\alpha)$  ebenfalls verschwindet. Verschwinden  $(1-t)$  und  $h(\alpha)$  gleichzeitig wie  $\mathcal{S}$ , so verhält sich der Integrand wie  $\mathcal{S}'$ . Daher führt die Region  $t \approx 1$  zu keiner Singularität. Anders die Region  $t \approx 0$ . Die Integration über eine kleine Umgebung um  $t=0$  führt unabhängig von  $h(\alpha)$  und  $g(\alpha)$  zu einer Serie von Polen für  $\ell = 0, -1, -2, \dots$ . Diese Pole haben aber offensichtlich nichts mit dem möglichen singulären Verhalten von  $I''$  im Limes  $T \rightarrow 0$  zu tun. Sie ergeben sich als eine natürliche Konsequenz der Definition der Mellin-Transformation. Für den führenden Beitrag zu  $I''$  ist höchstens der Pol an der Stelle  $\ell=0$  von Interesse.

Wir haben also mit der Transformation (3.3.4) erreicht, daß Pole, die mit einem singulären Verhalten von  $I''$  assoziiert werden müssen, ausschließlich durch die  $\alpha$ -Integration induziert werden können. Solche Pole treten auf, falls  $h(\alpha)$  und/oder  $g(\alpha)$  verschwinden. Das Verschwinden von  $g(\alpha)$  alleine reicht, wie man aus (3.3.5) ersieht, nicht aus, um einen Pol zu induzieren. Es muß in jedem Fall  $h(\alpha)$  verschwinden. Dazu sei es notwendig, eine



Skalierung einer SM der effektiven Länge  $m_{eff}$  auszuführen. Verschwindet  $g(\alpha)$  nicht mit dem Skalierungsparameter  $\beta$ , so tritt in der  $\ell$ -Ebene an der Stelle

$$\ell_0 = \rho - m_{eff} + \epsilon (L(\beta) - L(\beta)) \quad (3.3.9)$$

ein einfacher Pol auf. Dieser Pol kann auf die gleiche Weise isoliert werden, wie schon im letzten Kapitel der Ausdruck (2.5.12) gewonnen wurde.

Wie man aus (3.3.9) ersieht, führt die dimensionale Regularisierung zu einer Verschiebung der Position des Poles um einen Betrag  $\epsilon (L(\beta) - L(\beta))$ . Man wird also nach der Ausführung mehrerer SM, die  $h(\alpha)$  zum Verschwinden bringen, eine Reihe von Polen antreffen, die auf der reellen Achse von  $\ell_0 - \rho - m_{eff} + \epsilon L(\beta)$  bis  $\ell_0 - \rho - m_{eff} + \epsilon$  verteilt liegen. Der Beitrag dieser Pole zum Verhalten von

$I''$  wird genauso gezählt, als läge der entsprechende mehrfache Pol vor, der sich im Limes  $\epsilon \rightarrow 0_+$  ergibt. Wir werden den Limes  $\epsilon \rightarrow 0_+$  jedoch nicht vor Inversion von  $MT\{I''\}$  ausführen. Dies hat häufig den Vorteil, daß die dimensionale Regularisierung auch eine logarithmische Singularität, wie beispielsweise in (3.3.8) effektiv regularisiert. Liegen in der  $\ell$ -Ebene beispielsweise die beiden Pole

$$MT\{I''\} = \frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell - \epsilon} \quad (3.3.10)$$

vor, so liefert die Inversion

$$I'' = \frac{1}{-\epsilon} (1 - \epsilon^{-\epsilon}) \quad (3.3.11)$$



Lassen wir nun  $\epsilon \rightarrow 0$  gehen, so ist

$$I'' = -\log \tau \quad (3.3.12)$$

Dieses Resultat bekommt man natürlich auch, falls man zuerst  $\epsilon$  in (3.3.10) gegen Null schickt. (3.3.11) eröffnet jedoch eine weitere Möglichkeit, nämlich zuerst  $\tau \rightarrow 0$  auszuführen. Dann tritt an die Stelle von (3.3.12)

$$I'' = -\frac{1}{\epsilon} \quad (3.3.13)$$

Verschwindet  $g(\alpha)$  ebenfalls, so haben wir es mit einer Massensingularität zu tun, die unabhängig von  $\tau$  auftritt, wie sie schon in 2.5 behandelt wurde. Damit haben wir sämtliche Singularitäten des Integrals (3.3.5) klassifiziert. Das Ergebnis ist noch einmal in Tab. 3.1 zusammengefaßt.

Wegen (3.3.9) liegen sämtliche Pole von (3.3.5) auf der reellen Achse und das Gebiet  $\text{Re } \lambda, \rho$  ist frei von Polen. Lassen wir  $\nu$  gegen Null gehen, so treten auch in der Halbebene  $\text{Re } \lambda, \rho$  Pole auf. Wie wir allerdings wissen, spielen diese Pole keine Rolle für  $\tau \ll 1$ . Um (3.3.5) zu vereinfachen, lassen wir  $\nu$  in der eckigen Klammer gegen Null gehen und schreiben

Typ der SM		Induzierter Pol
$\underline{g(\alpha)}$	$\underline{h(\alpha)}$	
$\underline{G(\alpha)}$	$\underline{G(\alpha)}$	
$\sim 1$	$\sim 3$	$1/(l - l_0)$
$\sim 3$	$\sim 3$	$1/l_0$

Tab. 3.1



$$MT\{I''\} = \int_0^1 [d\alpha] G(\alpha)^{\tilde{\rho}-2+\epsilon} \left\{ \frac{\Gamma(\tilde{\rho}-\ell)}{\Gamma(\tilde{\rho})} \right\}_R \cdot \Gamma(\ell) \frac{h(\alpha)^{\ell-\tilde{\rho}}}{(uh(\alpha)+g(\alpha))^\ell} \quad (3.3.14)$$

Die Notation  $\left\{ \right\}_R$  soll daran erinnern, daß die Pole des Ausdrucks, der in der Klammer steht, in der  $\ell$ -Ebene unwirksam sind.

Natürlich müssen auch hier, wie schon in 2.5 angedeutet wurde, im allgemeinen mehrere Skalierungen nacheinander ausgeführt werden. Im Unterschied zu 2.5 haben wir es hier aber mit zwei unterschiedlichen Typen von SM zu tun, solchen, die bloß  $h(\alpha)$  (Typ h) und solchen, die sowohl  $h(\alpha)$  als auch  $g(\alpha)$  (Typ g,h) zum Verschwinden bringen. Nur SM vom Typ h führen zu Polen in der  $\ell$ -Ebene. Die MSM beider Typen weisen im allgemeinen unterschiedliche effektive Längen auf. Wir bezeichnen die Länge einer MSM vom Typ h (g,h) mit  $m_{eff}^h$  ( $m_{eff}^{g,h}$ ). In einer Sequenz können beide Typen von MSM beliebig kombiniert werden. Ist  $\rho > m_{eff}^h$ , d.h. liegt der führende Pol  $\ell_0$  rechts vom Ursprung, so muß jede Sequenz mindestens eine SM vom Typ h enthalten, um einen führenden Beitrag zu liefern. Falls  $\rho = m_{eff}^h$  ist, so braucht dies nicht zu sein.

Eine weitere Komplikation tritt ein, falls beispielsweise zwei SM  $\mathcal{S}_1$  und  $\mathcal{S}_2$  von Typ h mit Parametern  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$

$$h(\alpha) = \gamma_1 \gamma_2 \tilde{h}(\alpha') \quad (3.3.15)$$

die parametrische Funktion  $g(\alpha)$  wie



$$g(\alpha) = g_1 g_1(\alpha) + g_2 g_2(\alpha) \quad (3.3.16)$$

skalieren. In solch einem Fall können die entsprechenden Singularitäten nicht sofort mit der in 2.5 beschriebenen Methode isoliert werden. Vielmehr müssen die Skalierungsparameter  $g_1$  und  $g_2$  selbst erst einer Skalierung unterworfen werden. Wir bezeichnen den entsprechenden Skalierungsparameter mit  $\tilde{g}$  und nennen solch eine Skalierung eine  $\tilde{g}$ -Transformation. Eine  $\tilde{g}$ -Transformation ist eine in der Regel nichtlineare Skalierung, unter der die Funktionen  $g(\alpha)$  und  $h(\alpha)$  mit verschiedenen Potenzen verschwinden. Bezeichnen wir mit  $l_0^1$  und  $l_0^2$  die Positionen der Pole beider SM, so liefert die Integration über den Bereich  $\tilde{g} \sim 0$  einen Pol an der Stelle  $l_0 = l_0^1 + l_0^2$ . Mit anderen Worten, die Notwendigkeit einer  $\tilde{g}$ -Transformation setzt die Korrespondenz zwischen der effektiven Länge einer MSM des Typs  $h$  und der Position des führenden Poles, wie sie von (3.3.9) angegeben wird, außer Kraft. Die skalierten  $g$ -Parameter  $\tilde{g}_1$  und  $\tilde{g}_2$  können nicht mehr gemeinsam verschwinden. Wir erhalten daher im vorliegenden Beispiel nach der  $\tilde{g}$ -Transformation zwei unabhängige Sequenzen, die beide  $\tilde{g}_1 \cup \tilde{g}_2$ , jedoch jeweils nur entweder  $\tilde{g}_1$  oder  $\tilde{g}_2$  enthalten.

Allgemein sind  $\tilde{g}$ -Transformationen immer dann notwendig, wenn der Teil der Funktion  $g(\alpha)$ , der nach der Faktorisierung der Skalierungsparameter der SM vom Typ  $g, h$  verbleibt, am PSP verschwindet. In der Regel müssen in solch einem Fall mehrere  $\tilde{g}$ -Transformationen ausgeführt werden. Häufig lassen sich  $\tilde{g}$ -Transformationen vermeiden, indem man einen weiteren unabhängigen Impulsübertrag einführt (siehe die folgenden Abschnitte). Wir



werden im folgenden davon ausgehen, daß die unabhängigen Impulsüberträge so gewählt wurden, daß  $\tilde{G}$ -Transformationen nicht erforderlich sind.

Hat man einmal die führenden Singularitäten einer vollständigen Sequenz isoliert, so kann das verbleibende Integral höchstens noch nichtführende Singularitäten enthalten. Insbesondere kann das Verschwinden von  $\tilde{g}(\alpha')$  alleine keine führende Singularität hervorrufen. Für  $\epsilon = 0$  tritt  $\tilde{g}(\alpha')$  mit der Potenz  $m_{\text{eff}}^h - \rho$  auf. Gibt es eine SM der effektiven Länge  $m_{\text{eff}}^g$ , die  $\tilde{g}(\alpha')$  zum Verschwinden bringt, so ergibt sich der asymptotische Index

$$K = \rho \cdot (m_{\text{eff}}^h + m_{\text{eff}}^g) \quad (3.3.17)$$

Da die effektive Länge der MSM vom Typ  $g, h$   $m_{\text{eff}}^{g,h}$  der ausgeführten Sequenz

$$m_{\text{eff}}^{g,h} < m_{\text{eff}}^h + m_{\text{eff}}^g \quad (3.3.18)$$

erfüllt, kann die durch das Verschwinden von  $\tilde{g}(\alpha')$  mögliche Singularität nicht führend sein. (3.3.18) ist eine Konsequenz der Vollständigkeit der Sequenz. Wäre (3.3.18) nicht erfüllt, so ließe sich in jedem Fall noch eine Skalierung vom Typ  $g, h$  ausführen. Ist der asymptotische Index der MSM der Sequenz, die vom Typ  $g, h$  sind, gleich Null, so existiert der Limes  $\epsilon \rightarrow 0_-$  des verbleibenden Integrals.

### 3.4 Doppelte Mellin-Transformation

In diesem Abschnitt werden wir die Methode zur Berechnung des asymptotischen Verhaltens eines FI von zwei



großen Impulsüberträgen auf drei erweitern. Wir werden dabei von einer doppelten Mellin-Transformation Gebrauch machen.

Im Limes von drei großen unabhängigen Impulsüberträgen treten die Variablen  $\tilde{\varepsilon}_1$  und  $\tilde{\varepsilon}_2$  an die Stelle von  $\varepsilon$ . Wir definieren die "abgeschnittene" Mellin-Transformation einer Funktion  $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  durch

$$MT\{f\} = \int_0^{u_1} d\tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_1^{\ell_1-1} \int_0^{u_2} d\tilde{\varepsilon}_2 \tilde{\varepsilon}_2^{\ell_2-1} f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad (3.4.1)$$

$$0 < u_i < 1 \quad i = 1, 2$$

Die Cutoffs  $u_i$  sorgen dafür, daß  $MT\{f\}$  keine Singularitäten aus dem Integrationsbereich großer  $\tilde{\varepsilon}_i$  enthält.

3.4.1  $D'(\alpha) = h(\alpha) + \tilde{\varepsilon}_1 g_1(\alpha) + \tilde{\varepsilon}_2 g_2(\alpha)$

Die spezielle Form des Integrals  $I''$  (3.3.1) für drei große Impulsüberträge wird durch die parametrische Funktion  $D'(\alpha)$  bestimmt. Im einfachsten Fall hat  $D'(\alpha)$  die Gestalt

$$D'(\alpha) = h(\alpha) + \tilde{\varepsilon}_1 g_1(\alpha) + \tilde{\varepsilon}_2 g_2(\alpha) \quad (3.4.2)$$

Wir setzen (3.4.2) und (3.3.1) in (3.4.1) ein und führen eine zu (3.3.4) analoge Transformation aus, mit dem Resultat

$$MT\{I''\} = \int_0^1 [d\alpha] G(\alpha)^{\tilde{\rho}-2+\epsilon} \frac{h(\alpha)^{\ell_1+\ell_2-\tilde{\rho}}}{(u_1 h(\alpha) + g_1(\alpha))^{\ell_1} (u_2 h(\alpha) + g_2(\alpha))^{\ell_2}} \cdot$$



$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 dt_1 t_1^{\ell_1-1} \left[ 1 - \frac{t_1 g_1(\alpha)}{v_1 h(\alpha) + g_1(\alpha)} \right]^{\tilde{\rho} - \ell_1 - 1} \\
 & \int_0^1 dt_2 t_2^{\ell_2-1} \left[ 1 - \frac{t_2 g_2(\alpha)}{v_2 h(\alpha) + g_2(\alpha)} \right]^{\tilde{\rho} - \ell_2 - 1} \\
 & \left\{ 1 - \frac{t_1 t_2 g_1(\alpha) g_2(\alpha)}{(v_1 h(\alpha) + g_1(\alpha))(v_2 h(\alpha) + g_2(\alpha))} \right\}^{-\tilde{\rho}}
 \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Dieses Integral kann man auf die gleiche Weise, wie es bereits mit dem Integral (3.3.5) geschehen ist, auf Regi-  
onen hin untersuchen, die zu Singularitäten in der  
 $\ell$ -Ebene führen. Wir verzichten darauf, dies hier in  
allen Einzelheiten vorzuführen. Das Resultat ist in  
Tab. 3.2 zusammengefaßt

Typ der SM			Induzierter Pol
$\frac{-g_1(\alpha)}{G(\alpha)}$	$\frac{g_2(\alpha)}{G(\alpha)}$	$\frac{h(\alpha)}{G(\alpha)}$	
$\sim 1$	$\sim 1$	$\sim 8$	$1/(\ell_1 + \ell_2 - \ell_{120})$
$\sim 8$	$\sim 1$	$\sim 8$	$1/(\ell_2 - \ell_{20})$
$\sim 1$	$\sim 8$	$\sim 8$	$1/(\ell_1 - \ell_{10})$
$\sim 8$	$\sim 8$	$\sim 8$	$1/\ell_0$

Tab. 3.2



Wiederum muß in jedem Falle  $h(\alpha)$  verschwinden, und die  $t_1, t_2$ -Integration ist uninteressant. Die Position der Pole  $\ell_{120}, \ell_{10}, \ell_{20}$  und der Wert von  $\ell_0$  berechnen sich nach (3.3.9). Läßt man die Cutoffs  $\nu_i$  unter dem Integral in (3.4.3) verschwinden, so erhält man den handlicheren Ausdruck

$$MT\{I''\} = \int [d\alpha] C(\alpha)^{\tilde{\rho}-2+\epsilon} \left\{ \frac{\Gamma(\tilde{\rho}-\ell_1-\ell_2)}{\Gamma(\tilde{\rho})} \right\}_R \cdot \frac{\Gamma(\ell_1)\Gamma(\ell_2)}{(\nu_1 h(\alpha) + g_1(\alpha))^{\ell_1} (\nu_2 h(\alpha) + g_2(\alpha))^{\ell_2}} \cdot \frac{h(\alpha)^{\ell_1+\ell_2-\tilde{\rho}}}{(\nu_1 h(\alpha) + g_1(\alpha))^{\ell_1} (\nu_2 h(\alpha) + g_2(\alpha))^{\ell_2}}. \quad (3.4.4)$$

Die doppelte Mellin-Transformation (3.4.1) wird durch

$$f(\tau_1, \tau_2) = \int_{C_1} \frac{d\ell_1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{d\ell_2}{2\pi i} \tau_1^{-\ell_1} \tau_2^{-\ell_2} MT\{f\} \quad (3.4.5)$$

invertiert. Die Integrationskonturen  $C_i, i = 1, 2$  verlaufen rechts von allen Polen von  $MT\{f\}$ , parallel zu den imaginären Achsen mit  $-\infty \leq \operatorname{Re} \ell_i \leq +\infty$ . Sämtliche Pole des Ausdrucks (3.4.4), den es zu invertieren gilt, liegen auf den reellen Achsen. Es ist daher sinnvoll, ihre Positionen in einer  $\operatorname{Re} \ell_1, \operatorname{Re} \ell_2$ -Ebene darzustellen. Dies wird für die nach Tabelle 3.2 möglichen Pole in Abb. 3.2 gezeigt. Die Position der Integrationskonturen wird durch einen Punkt in der schraffierten Region fixiert. Selbstverständlich kann man die Lage innerhalb dieser Region beliebig verändern, ohne daß sich der Wert von (3.4.5) ändert, solange nur ihre Grenzen nicht berührt werden. Zur Berechnung von (3.4.5) schließt man beispielsweise zuerst die  $\ell_1$ -Kontur in der linken komplexen Halbebene. Anschließend wird das gleiche



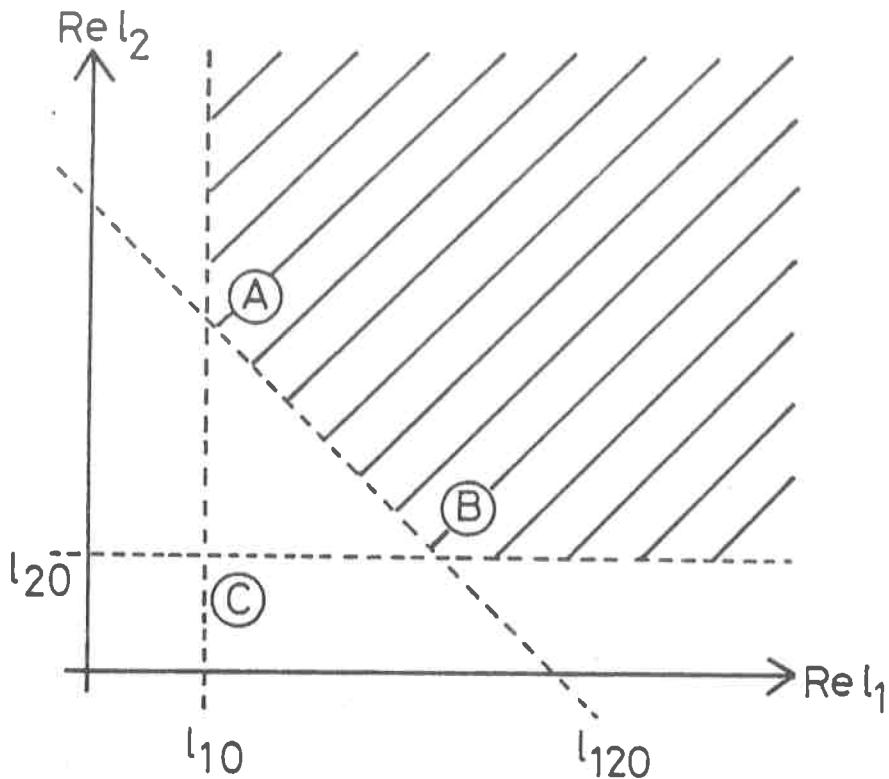


Abb. 3.2 Position der Pole aus Tab. 3.2

für die  $\ell_2$ -Integration durchgeführt. Deshalb bekommt man nur von denjenigen Punkten der  $\text{Re } \ell_1, \text{Re } \ell_2$ -Ebene Beiträge zu (3.4.5), in denen mindestens ein  $\ell_1$ -Pol und ein  $\ell_2$ -Pol zusammenfallen. Der Beitrag des doppelten Pols im Punkt  $G$  ist gerade ein Produkt von einzelnen Termen der Form (3.3.8). Eine wichtige Einschränkung an die Beiträge der doppelten Pole in  $A$  und  $B$  folgt aus der relativen Größe von  $\tilde{\tau}_1$  und  $\tilde{\tau}_2$ . Ist beispielsweise  $\tilde{\tau}_2 > \tilde{\tau}_1$  ( $\tilde{\tau}_1 > \tilde{\tau}_2$ ), so liefern die in  $B$  ( $A$ ) zusammenfallenden Pole keinen Beitrag. Der Grund ist, daß nach der  $\ell_1$  ( $\ell_2$ )-Integration, falls  $\tilde{\tau}_2 > \tilde{\tau}_1$  ( $\tilde{\tau}_1 > \tilde{\tau}_2$ ) ist, die  $G_2$  ( $G_1$ )-Kontur in der rechten Halbebene geschlossen werden muß. In dieser Halbebene ist  $MT\{I''\}$  aber analytisch, so daß der Beitrag von  $B$  ( $A$ ) verschwindet.



Zur Illustration nehmen wir einmal an, daß sich  $MT\{I''\}$  in der Umgebung von  $\mathcal{B}$  wie

$$MT\{I''\} = \frac{1}{(\ell_1 - \ell_{10})^{n_1}} \frac{1}{(\ell_1 + \ell_2 - \ell_{120})^{n_{12}}} g(\ell_1, \ell_2) \quad (3.4.6)$$

verhält.  $n_1$  und  $n_{12}$  seien ganze Zahlen.  $g(\ell_1, \ell_2)$  sei an der Stelle  $\ell_1 = \ell_{10}$ ,  $\ell_2 = \ell_{120} - \ell_{10}$  analytisch. Dann erhält  $I''$  wegen

$$\frac{1}{(\ell - \ell_0)^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \left( \frac{\partial}{\partial \ell_0} \right)^{n-1} \frac{1}{\ell - \ell_0} \quad (3.4.7)$$

den Beitrag

$$I'' = \frac{1}{\Gamma(n_1)} \frac{1}{\Gamma(n_{12})} \left( \frac{\partial}{\partial \ell_{10}} \right)^{n_1-1} \left( \frac{\partial}{\partial \ell_{120}} \right)^{n_{12}-1} \cdot \quad (3.4.8)$$

$$\cdot \int_{\mathcal{C}_1} \frac{d\ell_1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{d\ell_2}{2\pi i} \tilde{\ell}_1^{-\ell_1} \tilde{\ell}_2^{-\ell_2} \frac{g(\ell_1, \ell_2)}{(\ell_1 - \ell_{10})(\ell_1 + \ell_2 - \ell_{120})}.$$

Vernachlässigen wir einmal logarithmisch nicht führende Terme, so ergibt dies

$$I'' = \frac{1}{\Gamma(n_1)} \frac{1}{\Gamma(n_{12})} \tilde{\ell}_1^{-\ell_{120}} \left( \frac{\tilde{\ell}_2}{\tilde{\ell}_1} \right)^{-\ell_{10}} \left( \log \frac{\tilde{\ell}_1}{\tilde{\ell}_2} \right)^{n_1-1} \left( \log \frac{1}{\tilde{\ell}_1} \right)^{n_{12}-1} g(\ell_{10}, \ell_{120} - \ell_{10}) \Theta(\tilde{\ell}_1 - \tilde{\ell}_2) \quad (3.4.9)$$

In analoger Weise berechnet man  $I''$  im entarteten Fall, in dem die Punkte  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  zusammenfallen.

3.4.2  $D'(a) = h(a) + \tilde{\ell}_1 g_1(a) + \tilde{\ell}_1 \tilde{\ell}_2 g_{12}(a)$

Es ist keinesfalls so, daß die parametrische D-Funktion immer die Gestalt (3.4.2) aufweisen muß. Prin-



zipiell kann auch ein gemischter Term  $\tilde{\zeta}_1 \tilde{\zeta}_2$  erscheinen. Wir untersuchen zunächst den Fall, daß der Term linear in  $\tilde{\zeta}_2$  fehlt

$$D(\alpha) = h(\alpha) + \tilde{\zeta}_1 g_1(\alpha) + \tilde{\zeta}_1 \tilde{\zeta}_2 g_{12}(\alpha) \quad (3.4.10)$$

Die Mellin-Transformation des Integrals  $I''$  mit (3.4.10) ist

$$\begin{aligned} MT\{I''\} &= \int_0^1 [d\alpha] G(\alpha)^{\tilde{\rho}-2+\epsilon} \frac{h(\alpha)^{\ell_1-\tilde{\rho}} g_1^{\ell_2}}{(u_1 h(\alpha) + g_1(\alpha))^{\ell_1} (u_2 g_1(\alpha) + g_{12}(\alpha))^{\ell_2}} \cdot \\ &\quad \int_0^1 dt_1 t_1^{\ell_1-1} \left[ 1 - \frac{t_1 g_1(\alpha)}{(u_1 h(\alpha) + g_1(\alpha))} \right] \cdot \\ &\quad \int_0^1 dt_2 t_2^{\ell_2-1} \left[ 1 - \frac{t_2 g_{12}(\alpha)}{(u_2 g_1(\alpha) + g_{12}(\alpha))} \right] \cdot \\ &\quad \left\{ 1 - t_2 \frac{g_{12}(\alpha)}{u_2 g_1(\alpha) + g_{12}(\alpha)} \left( 1 - \frac{t_1 g_1(\alpha)}{(u_1 h(\alpha) + g_1(\alpha))} \right) \right\}^{-\tilde{\rho}} \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Sämtliche SM, die Singularitäten hervorrufen können, sind in Tab. 3.3 aufgelistet.

Der doppelte Pol  $1/(\ell_1 - \ell_{012})(\ell_2 - \ell_{012})$ , der durch eine SM vom Typ  $h, g_1$  hervorgerufen wird, verdient einen besonderen Kommentar. Der Pol  $1/(\ell_2 - \ell_{012})$  wird durch das Verschwinden von  $h(\alpha)$  und  $g_1(\alpha)$  unabhängig von  $t_1$  und  $t_2$  her-



Typ der SM			Induzierter Pol
$\frac{g_{12}(\alpha)}{G(\alpha)}$	$\frac{-g_1(\alpha)}{G(\alpha)}$	$\frac{h(\alpha)}{G(\alpha)}$	
$\sim 1$	$\sim 1$	$\sim 8$	$1/(l_1 - l_{10})$
$\sim 1$	$\sim 8$	$\sim 8$	$1/(l_2 - l_{012})(l_1 - l_{012})$
$\sim 8$	$\sim 8$	$\sim 8$	$1/l_0$

Tab. 3.3

vorgerufen. Gleichzeitig mit  $h(\alpha)$  und  $g_1(\alpha)$  können aber auch  $t_1$  und  $(1-t_2)$  gegen Null gehen, so daß der Pol  $1/(l_2 - l_{012})$  von einem zweiten Pol  $1/(l_1 - l_{012})$  begleitet wird.

In der gleichen Weise, wie wir in den bereits untersuchten Fällen die Cutoffs  $\nu_i$  teilweise gegen Null haben lassen, so können wir auch hier  $\nu_1$  und  $\nu_2$  in den eckigen Klammern gleich Null setzen. Die geschweifte Klammer bedarf jedoch besonderer Aufmerksamkeit. Nimmt man in dieser Klammer keine Vernachlässigungen vor, so ist das  $t_1, t_2$ -Integral als hypergeometrische Funktion ausführbar. Einige Eigenschaften der hypergeometrischen Funktion haben wir im Anhang C zusammengestellt.

$$MT\{I''\} = \int_0^1 [d\alpha] G(\alpha)^{\tilde{p}-2+\epsilon} \left\{ \frac{\Gamma(\tilde{p}-l_1) \Gamma(\tilde{p}-l_2)}{\Gamma^2(\tilde{p})} \right\}_R \quad (3.4.12)$$

$$\cdot \Gamma(l_1) \Gamma(l_2) \frac{h(\alpha)^{l_1-\tilde{p}} (v_1 h(\alpha) + g(\alpha))^{l_2-l_1}}{(v_2 (g_1(\alpha) + v_1 h(\alpha) + g_{12}(\alpha)))^{l_2}} \tilde{F}(l_2, \tilde{p}-l_1, \tilde{p}; z)$$



mit

$$z = \frac{g_{12}(\alpha)}{v_2(v_1 h(\alpha) + g_1(\alpha)) + g_{12}(\alpha)} \quad (3.4.13)$$

Würde man in (3.4.13)  $v_2$  gegen Null schicken, so würde die hypergeometrische Funktion in (3.4.12) singulär werden wie  $\Gamma(\ell_1 - \ell_2)$ . Da der ursprüngliche Ausdruck (3.4.11) jedoch keine Singularität dieser Art besitzt, ist dies nicht erlaubt. Um die  $z$ -Abhängigkeit, die in der hypergeometrischen Funktion steckt, explizit ausschreiben zu können, wendet man die Transformation (C.4) an. Nun kann in den transformierten hypergeometrischen Funktionen  $z = 1$  gesetzt werden, so daß

$$MT\{I''\} = \int_0^1 [d\alpha] G(\alpha)^{\tilde{\rho}-2+\epsilon} \frac{1}{\Gamma(\tilde{\rho})} h(\alpha)^{\ell_1 - \tilde{\rho}}. \quad (3.4.14)$$

$$\left\{ \Gamma(\rho - \ell_1) \right\}_R \Gamma(\ell_2) \Gamma(\ell_2 - \ell_1) \frac{(v_1 h(\alpha) + g_1(\alpha))^{\ell_2 - \ell_1}}{(v_2(g_1(\alpha) + v_1 h(\alpha)) + g_{12}(\alpha))^{\ell_2}}$$

$$+ \left\{ \Gamma(\rho - \ell_2) \right\}_R \Gamma(\ell_1) \Gamma(\ell_2 - \ell_1) v_2^{\ell_1 - \ell_2} \frac{1}{(v_2(g_1(\alpha) + v_1 h(\alpha)) + g_{12}(\alpha))^{\ell_1}} \}.$$

Ist  $Re \ell_1 > Re \ell_2$ , so kann der zweite Term in der geschweiften Klammer vernachlässigt werden. Für das führende Verhalten von  $I''$  besitzt er nur entlang der Geraden  $Re \ell_1 = Re \ell_2$  eine Bedeutung. Solange entlang dieser Geraden keine weiteren Pole auftreten, die nicht die geschweifte Klammer als Ganzes multiplizieren, so heben sich die scheinbaren



Singularitäten beider Funktionen  $\Gamma(\ell_1 - \ell_2)$  und  $\Gamma(\ell_2 - \ell_1)$  gegenseitig auf. Anders jedoch, falls nach Isolation der durch eine SM von Typ  $h, g_1$  verursachten Singularität der erste Term in der geschweiften Klammer mit  $1/(\ell_2 - \ell_{012})$  und der zweite mit  $1/(\ell_1 - \ell_{012})$  multipliziert werden. Dann liefert die Beziehung

$$\frac{1}{\ell_1 - \ell_2} \left\{ \frac{1}{\ell_2 - \ell_{012}} - \frac{1}{\ell_1 - \ell_{012}} \right\} = \frac{1}{\ell_2 - \ell_{012}} - \frac{1}{\ell_1 - \ell_{012}} \quad (3.4.15)$$

genau das in Tab. 3.3 angegebene Verhalten. Da jeder Pol in  $\ell_2$  wie in (3.4.15) von einem Pol in  $\ell_1$  begleitet wird, liegen in der Region  $\text{Re } \ell_2 > \text{Re } \ell_1$  keine führenden Pole. Daher ist der führende Term unabhängig von  $\nu_2$ .

3.4.3  $D'(\alpha) = h(\alpha) + \tilde{\nu}_1 g_1(\alpha) + \tilde{\nu}_2 g_2(\alpha) + \tilde{\nu}_1 \tilde{\nu}_2 g_{12}(\alpha)$

Lassen wir schließlich auch die Annahme fallen, daß der Term, der linear in  $\tilde{\nu}_2$  ist, aus  $D'(\alpha)$  verschwindet, so ist

$$D'(\alpha) = h(\alpha) + \tilde{\nu}_1 g_1(\alpha) + \tilde{\nu}_2 g_2(\alpha) + \tilde{\nu}_1 \tilde{\nu}_2 g_{12}(\alpha) \quad (3.4.16)$$

Die Mellin-Transformation von  $I''$  mit (3.4.16) hat die gleiche Form wie (3.4.3). Die geschweifte Klammer im Integranden von (3.4.3) ist allerdings durch

$$\left\{ 1 - \tilde{\nu}_1 \tilde{\nu}_2 z \right\}^{-\rho} \quad (3.4.17)$$

zu ersetzen, wobei  $z$  durch

$$z = \frac{g_1(\alpha)g_2(\alpha) - g_{12}(\alpha)h(\alpha)}{(\nu_1 h(\alpha) + g_1(\alpha))(\nu_2 h(\alpha) + g_2(\alpha))} \quad (3.4.18)$$

definiert ist. Die SM und die entsprechenden Pole sind in Tab. 3.4 aufgelistet.



Typ der SM				Induzierter Pol
$g_{12}(\alpha)$	$g_1(\alpha)$	$g_2(\alpha)$	$h(\alpha)$	
$G(\alpha)$	$G(\alpha)$	$G(\alpha)$	$G(\alpha)$	
$\sim 1$	$\sim 1$	$\sim 1$	$\sim 8$	$1/(\ell_1 + \ell_2 - \ell_{120})$
$\sim 1$	$\sim 8$	$\sim 1$	$\sim 8$	$1/(\ell_2 - \ell_{20})$
$\sim 1$	$\sim 1$	$\sim 8$	$\sim 8$	$1/(\ell_1 - \ell_{10})$
$\sim 1$	$\sim 8$	$\sim 8$	$\sim 8$	$1/(\ell_1 - \ell_{012})(\ell_2 - \ell_{012})$
$\sim 8$	$\sim 8$	$\sim 8$	$\sim 8$	$1/\ell_0$

Tab. 3.4

Auf die gleiche Weise wie schon für (3.4.4) und (3.4.11) bekommt man für (3.4.16)

$$MT\{I''\} = \int_0^1 [d\alpha] G(\alpha)^{\tilde{\rho}-2+G} \left\{ \frac{\Gamma(\tilde{\rho}-\ell_1) \Gamma(\tilde{\rho}-\ell_2)}{\Gamma^2(\tilde{\rho})} \right\}_R .$$

$$\frac{\Gamma(\ell_1) \Gamma(\ell_2)}{\Gamma(\ell_1 + \ell_2)} \frac{h(\alpha)^{\ell_1 + \ell_2 - \tilde{\rho}}}{(u_1 h(\alpha) + g_1(\alpha))^{\ell_1} (u_2 h(\alpha) + g_2(\alpha))^{\ell_2}} . \quad (3.4.19)$$

$$F(\ell_1, \ell_2, \tilde{\rho}, z)$$

Dieser Ausdruck ist brauchbar solange  $|z| < 1$ . Nach Isolation eines Poles vom Typ  $h$ , wird in (3.4.19)  $z = 1$ . Wäre  $Re(\tilde{\rho} - \ell_1 - \ell_2) \leq 0$ , so würde die hypergeometrische



Funktion weitere Pole induzieren. In der Nähe eines Poles vom Typ  $h$  gilt jedoch immer  $\operatorname{Re}(\tilde{p} - \ell_1 - \ell_2) > 0$ . Haben wir es mit einer SM vom Typ  $h, g_1, g_2$  zu tun, so geht  $|z|$  gegen Unendlich. In diesem Fall muß (3.4.19) analytisch fortgesetzt werden. Ist  $\operatorname{Re} \ell_2 > \operatorname{Re} \ell_1$ , so können wir (C.3) benutzen

$$MT\{I''\} = \int_0^1 [d\alpha] C(\alpha)^{\tilde{p}-2+\epsilon} \left\{ \frac{\Gamma(\tilde{p} - \ell_1) \Gamma(\tilde{p} - \ell_2)}{\Gamma^2(\tilde{p})} \right\}_R$$

$$\cdot \frac{\Gamma(\ell_1) \Gamma(\ell_2)}{\Gamma(\ell_1) \Gamma(\ell_2)} \frac{h(\alpha)^{\ell_2 - \tilde{p}} (v_2 h(\alpha) + g_2(\alpha))^{\ell_1 - \ell_2}}{(v_1 v_2 h(\alpha) + v_1 g_2(\alpha) + v_2 g_1(\alpha) + g_{12}(\alpha))^{\ell_1}} \quad (3.4.20)$$

$$\cdot F(\ell_1, \tilde{p} - \ell_2; \tilde{p}; \frac{z}{z-1})$$

Da  $D(\alpha)$  symmetrisch in  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  ist, erhält man in der Region  $\operatorname{Re} \ell_2 < \operatorname{Re} \ell_1$  einen geeigneten Ausdruck durch Vertauschen von  $g_1(\alpha)$  ( $\ell_1$ ) und  $g_2(\alpha)$  ( $\ell_2$ ) in (3.4.20). Im Streifen  $|\operatorname{Re}(\ell_1 - \ell_2)| < 1$  kann (3.4.19) mit (C.5) fortgesetzt werden

$$MT\{I''\} = \int_0^1 [d\alpha] C(\alpha)^{\tilde{p}-2+\epsilon} \frac{1}{\Gamma(\tilde{p})} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \left\{ \Gamma(\tilde{p} - \ell_2) \right\}_R \right. \frac{\Gamma(\ell_1) \Gamma(\ell_2 - \ell_1)}{\Gamma(\ell_1) \Gamma(\ell_2)} \frac{h(\alpha)^{\ell_2 - \tilde{p}} (v_2 h(\alpha) + g_2(\alpha))^{\ell_1 - \ell_2}}{(v_1 v_2 h(\alpha) + v_1 g_2(\alpha) + v_2 g_1(\alpha) + g_{12}(\alpha))^{\ell_1}} \left. \right\} \quad (3.4.21)$$

$$\cdot F(\ell_1, \tilde{p} - \ell_2; \ell_1 - \ell_2 + 1; \frac{1}{1-z})$$



$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \Gamma(\tilde{\rho} - \ell_1) \right\}_R \frac{h(\alpha)^{\ell_1 - \tilde{\rho}} (v_1 h(\alpha) + g_1(\alpha))^{\ell_2 - \ell_1}}{(v_1 v_2 h(\alpha) + v_1 g_2(\alpha) + v_2 g_1(\alpha) + g_{12}(\alpha))^{\ell_2}} \\
 & \cdot F(\ell_2, \tilde{\rho} - \ell_1; \ell_2 - \ell_1 - 1; \frac{1}{1 - z}) \quad \} \quad .
 \end{aligned}$$

Diese Formel ist das Analogon zu (3.4.14).

Besondere Beachtung muß noch dem Fall geschenkt werden, in dem eine Sequenz sowohl SM vom Typ  $h$  ( $z \rightarrow 1$ ) als auch SM vom Typ  $h, g_1, g_2$  ( $|z| \rightarrow \infty$ ) enthält. In solch einem Fall sind zunächst beide Typen von SM zu überlagern und anschließend der Integrationsbereich so zu zerlegen, daß nur noch entweder die SM des Typs  $h$  oder die des Typs  $h, g_1, g_2$  verschwinden können.

### 3.5 Mehrfache Mellin-Transformation

In gleicher Weise wie die doppelte Mellin-Transformation dem Limes von drei großen Impulsüberträgen angemessen ist, so ist die  $N$ -fache Mellin-Transformation dazu geeignet, das asymptotische Verhalten eines FI im Limes von  $N+1$  unabhängigen großen Impulsüberträgen zu berechnen. Wir definieren die  $N$ -fache "abgeschnittene" Mellin-Transformation von  $f(\tilde{\tau}_i)$ ,  $i=1, \dots, N$  durch

$$M\tilde{T}\{f\} = \prod_{i=1}^N \left\{ \int_0^{v_i} d\tilde{\tau}_i \tilde{\tau}_i^{\ell_i - 1} \right\} f(\tilde{\tau}_i) \quad (3.5.1)$$

$$0 < v_i < 1 \quad i = 1, \dots, N$$



Wie in den vorausgehenden Abschnitten gezeigt wurde, führt die Anwesenheit eines gemischten Terms in  $\mathcal{D}'(\alpha)$  zu erheblichen Komplikationen. Wir werden diesen Fall daher in diesem Abschnitt nicht betrachten. Prinzipiell kann ein gemischter Term immer als neuer unabhängiger Impulsübertrag interpretiert werden, so daß dies keine Einschränkung bedeutet.  $\mathcal{D}'(\alpha)$  hat also die Form

$$\mathcal{D}'(\alpha) = h(\alpha) + \sum_{i=1}^N \tilde{c}_i g_i(\alpha) \quad (3.5.2)$$

Damit wird (3.4.4) auf

$$\begin{aligned} \text{MT}\{I''\} &= \int_0^1 [d\alpha] C(\alpha)^{\tilde{p}-2+\epsilon} \left\{ \frac{\Gamma(\tilde{p} - \ell_1 - \dots - \ell_N)}{\Gamma(\tilde{p})} \right\}_R \\ &\cdot h(\alpha)^{-\tilde{p}} \prod_{i=1}^N \left( \frac{\Gamma(\ell_i) h(\alpha)^{\ell_i}}{(v_i h(\alpha) + g_i(\alpha))^{\ell_i}} \right) \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

verallgemeinert. Aus (3.5.3) läßt sich ablesen, daß eine SM in jedem Fall  $h(\alpha)$  zum Verschwinden bringen muß, um einen Pol in der  $\ell$ -Ebene zu induzieren. Nehmen wir einmal o.B.d.A. an, daß außer  $h(\alpha)$  noch  $g_1(\alpha), \dots, g_x(\alpha)$  verschwinden, so induziert solch eine SM einen Pol

$$1/(\ell_{\alpha+1} + \dots + \ell_N - \ell_0) \quad (3.5.4)$$

(3.5.1) wird durch

$$f(\tilde{c}_i) = \prod_{i=1}^N \left\{ \int_{\mathcal{C}_i} \frac{d\ell_i}{(2\pi i)} \tilde{c}_i^{-\ell_i} \right\} \text{MT}\{f\} \quad (3.5.5)$$

invertiert.  $\Delta$  bezeichne die konvexe Region der  $\text{Re } \ell_i$ -



Hyperebene, in der  $M\cap\{I''\}$  analytisch ist. Wir betrachten diese Region für  $\epsilon=0$ . Um den führenden Pol zu finden, definieren wir

$$\psi = l_1 x_1 + \dots + l_N x_N \quad (3.5.6)$$

mit

$$x_i = \log \tau_i \quad i = 1, \dots, N \quad (3.5.7)$$

Wir verwenden zur Inversion eine Variante des Verfahrens aus [BE 78a, CA 80]. Es sei

$$\rho_{\max} = \inf_{\Delta} \psi \quad (3.5.8)$$

Da die Region  $\Delta$  konvex ist, ist  $\rho_{\max}$  der kleinste Wert, den  $\psi$  in einem Randpunkt von  $\Delta$  annehmen kann, in dem mehrere Pole zusammentreffen. Diese Pole bestimmen das führende asymptotische Verhalten, Es ist gleich  $e^{-\rho_{\max}}$  modulo logarithmischer Korrekturen. Wie schon in 3.4, so hängt auch hier das asymptotische Verhalten im allgemeinen von der relativen Größe der  $\tau_i$  ab.



#### 4. Konstruktion unabhängiger Sequenzen

Bisher haben wir uns im wesentlichen bloß mit einzelnen SM befaßt. Wie jedoch schon mehrfach betont wurde, hat man es im allgemeinen mit einer Vielzahl von SM zu tun, von denen mehrere nacheinander ausgeführt werden können. Versucht man sämtliche MSM eines Graphen hintereinander auszuführen, so wird man unweigerlich auf Schwierigkeiten stoßen. Offensichtlich können beispielsweise sämtliche FP eines FI wegen der  $\delta$ -Funktion in  $[d\alpha]$  nicht gemeinsam verschwinden. Im Abschnitt 2.5.2 haben wir eine Reihe von SM, die nacheinander ausgeführt werden können, eine Sequenz genannt. Wir betrachten Sequenzen, die die gleichen SM enthalten, jedoch in unterschiedlicher Reihenfolge, als voneinander verschieden. Ein wichtiger Schritt bei der Berechnung des asymptotischen Verhaltens eines FI ist die Bestimmung eines geeigneten Satzes von Sequenzen. In diesem Kapitel werden wir eine Methode vorstellen, die es erlaubt, solch eine Bestimmung systematisch durchzuführen.

Jeder Sequenz kann eine Teilregion des  $\alpha$ -Raumes zugeordnet werden. Wie dies geschehen kann, wird später erläutert werden. Sequenzen gelten als unabhängig, falls die entsprechenden Regionen disjunkt sind. Daher gilt es, eine Menge von unabhängigen Sequenzen zu bestimmen, deren zugeordnete Teilregionen den gesamten  $\alpha$ -Raum ausschöpfen. Wir werden solch eine Menge einen vollständigen Satz unabhängiger Sequenzen nennen. Wie gezeigt werden wird, ist die Wahl solch eines Satzes im allgemeinen nicht eindeutig.

Prinzipiell lässt sich natürlich auch umgekehrt vorgehen, d.h. man kann zuerst den  $\alpha$ -Raum in disjunkte



Sektoren zerlegen und dann danach fragen, welche Sequenzen in den einzelnen Sektoren ausgeführt werden können. Dies ist der Weg, der in [BE 74,77,78a,79] beschritten wird. Der  $\alpha$ -Raum wird dort zuerst in Hepp-Sektoren zerlegt. Diese Methode erweist sich für unsere Absichten in zweifacher Weise als unpraktikabel. Erstens gibt es zu jedem Graphen mit  $n$  Kanten  $n!$  Hepp-Sektoren, der technische Aufwand einer expliziten Berechnung wächst also für Graphen höherer Ordnung sehr stark. Zweitens ist  $D(\alpha)$  im allgemeinen nicht FINE, so daß man nicht ohne zusätzliche Transformationen auskommt.

Im Gegensatz zu [BE 74,77,78a,79] beschränken wir uns auf die führenden Logarithmen. Deshalb spielen Sequenzen, die nicht von maximaler Länge sind, keine Rolle. Wir brauchen daher in der Praxis nur verhältnismäßig wenige Teilregionen zu untersuchen.

#### 4.1 Zerlegung des $\alpha$ -Raumes

In diesem Abschnitt erläutern wir das prinzipielle Vorgehen zur Ermittlung eines vollständigen Satzes unabhängiger Sequenzen. Zur praktischen Berechnung ist es empfehlenswert, einige weiteren Schritte einzufügen, die im nächsten Abschnitt beschrieben werden.

In 2.5.4 wurde Folgendes gezeigt. Führt eine nicht-lineare Skalierung einer vorgegebenen SM  $\mathcal{S}$  zu einer gleich starken oder auch stärkeren Singularität als ihre lineare Skalierung, so kann diese nichtlineare Skalierung durch Überlagerung linearer Skalierungen von MSM  $\mathcal{S}_1 c \mathcal{S}$  erzeugt werden. Deshalb läßt sich jede Skalierung, die eine führende Singularität hervorruft, als



Überlagerung linearer Skalierungen ausdrücken. Abgesehen von den in 3.3 erläuterten Einschränkungen spielt es dabei keine Rolle, welchen Typs die überlagerten MSM sind.

Quantitativ lässt sich der beschriebene Sachverhalt folgendermaßen ausdrücken. Wir gehen davon aus, daß sämtliche MSM bekannt sind.  $S'$  bezeichne die Menge der Überlagerungen, die eine führende Singularität hervorrufen können. Jede dieser Skalierungen sei charakterisiert durch einen Vektor  $s$ ,  $\langle s \rangle_i = 0, 1, 2, \dots, i = 1, \dots, n$ . Die  $i$ -te Komponente  $\langle s \rangle_i$  gebe an, mit welcher Potenz von  $\beta$   $\alpha_i$  in einer Skalierung wie (2.5.19) verschwindet. Da jedes Element von  $S'$  eine Überlagerung linearer Skalierungen ist, können die Exponenten  $\nu_i$  in (2.5.19) ganz-zahlig gewählt werden. Die Normierung (2.5.20) kann allerdings nicht mehr zusätzlich gefordert werden. Die Menge  $S$  ergibt sich als das Bild der Vektoren unter einer linearen Abbildung mit der Skalierungsmatrix  $\{N\}$ . Es gebe  $m$  MSM  $S_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Dann ist  $M$  durch

$$\langle M \rangle_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{falls } e_i \in S_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.1.1)$$

definiert.  $N$  ist ein beliebiger Vektor mit  $\langle N \rangle_i = 0, 1, 2, \dots, i = 1, \dots, m$ . Damit gibt es zu jedem Vektor  $N$  einen Vektor  $s \in S$

$$s = M \cdot N \quad (4.1.2)$$

Zur Bestimmung eines vollständigen Satzes von unabhängigen Sequenzen gehen wir folgendermaßen vor. Zunächst teilen wir das Integrationsgebiet in  $n$  Sektoren auf. Der  $k$ -te Sektor ist dadurch gekennzeichnet, daß der FP



$\alpha_k$  darin nicht verschwinden kann. Solche Sektoren können in jedem Fall disjunkt gewählt werden. Die genauen Grenzen spielen für die führenden logarithmischen Singularitäten keine Rolle. Da in jedem Sektor nur noch  $(n-1)$  FP gemeinsam verschwinden können, brauchen wir uns um die  $\delta$ -Funktion in  $[\tilde{\alpha}_k]$  nicht mehr zu kümmern. Anschließend führen wir in jedem Sektor eine Skalierung durch und teilen danach die skalierte Region auf die gleiche Weise auf, wie schon die ursprüngliche Region. Diese Prozedur wird laufend fortgesetzt. In den folgenden Skalierungen kann prinzipiell auch ein Skalierungsparameter  $\delta$  einer vorausgehenden Skalierung selbst wieder skaliert werden. Diese Tatsache wird in den älteren Arbeiten [TI 63, HA 65] übergegangen.

Um zu entscheiden, wann eine Sequenz abbricht, führen wir die Matrix  $\bar{M}$  ein. Es seien bereits  $m'$  Skalierungen  $\mathcal{S}'_k$   $k=1, \dots, m'$  ausgeführt worden. Bei den entsprechenden SM handele es sich nicht unbedingt um solche MSM, von denen ursprünglich ausgegangen wurde. Dann sei  $\bar{M}$  durch

$$\langle \bar{M} \rangle_{ik} = \begin{cases} \gamma_{ik} & \text{falls } e_i \in \mathcal{S}'_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.1.3)$$

gegeben.  $\gamma_{ik}$  gibt die Potenz an, mit der der  $i$ -te FP in der  $k$ -ten Skalierung transformiert worden ist. Die Aufteilung in Sektoren werde durch die Diagonalmatrix  $D$  charakterisiert

$$\langle D \rangle_{ik} = \delta_{ik} \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha_i \text{ unabhängig verschwinden kann} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.1.4)$$

Wir vergleichen nun  $\mathcal{S}'$  mit der Menge  $\mathcal{T}$  der Skalierungen, die in einen Sektor noch ausgeführt werden können.  $\mathcal{T}$  be-



steht aus den Vektoren

$$t = \bar{M} \cdot N' + D N'' \quad (4.1.5)$$

$N'$  und  $N''$  haben die gleichen Eigenschaften wie  $N$ . Gibt es ein Element  $t \in S$ , so daß nicht alle Komponenten von  $N''$  in (4.1.5) verschwinden, so läßt sich noch eine weitere Skalierung ausführen. Gibt es nur noch solche  $t \in S$ , bei denen  $N'' = 0$ , so ist die Sequenz vollständig. Im zweiten Fall können neue Skalierungen  $\in S$  nur noch durch Transformation der Skalierungsparameter  $\mathcal{S}$  untereinander konstruiert werden.

## 4.2 $\lambda$ -Transformationen

Das Verfahren zur Bestimmung eines vollständigen Satzes von unabhängigen Sequenzen, wie wir es im vorausgehenden Abschnitt beschrieben haben, besitzt offensichtlich einen hohen Grad an Beliebigkeit. So werden an die auszuführenden Skalierungen keinerlei weitere Forderungen gestellt, außer daß sie aus  $S$  sein müssen. Die Berechnung des asymptotischen Verhaltens gestaltet sich um so einfacher, je mehr lineare Skalierungen ausgeführt werden können. Die vorgestellte Methode erlaubt es nicht, auf nicht-lineare Skalierungen ganz zu verzichten. In diesem Abschnitt werden wir zeigen, wie sich die Zahl der möglichen linearen Skalierungen, durch zusätzliche Skalierungen, die wir  $\lambda$ -Transformationen nennen werden, erheblich steigern läßt.

Besitzt die Skalierungsmatrix von vornherein Dreiecksform, so lassen sich die MSM so ordnen, daß sie jeweils einen Parameter enthalten, der in den folgenden MSM nicht



mehr auftritt. Daher liefern die nach jeder Skalierung auftauchenden  $\delta$ -Funktionen keine Einschränkungen, und sämtliche MSM können aufeinanderfolgend ausgeführt werden. Ziel der  $\lambda$ -Transformationen ist es,  $M$  der Dreiecksform möglichst nahe zu bringen.

Kommt ein Parameter  $\alpha_i$  in allen MSM, von denen aus gegangen wird, immer nur in Begleitung mit einem, bzw. mehreren anderen Parametern vor, so skalieren wir diesen Parameter und seine Begleiter nach (2.3.6). Da der Parameter  $\alpha_i$  nach der Transformation in keiner MSM mehr auftritt, liefert die assozierte  $\delta$ -Funktion keine Einschränkungen an die folgenden Skalierungen. Um solche Transformationen von den Skalierungen aus  $S$  zu unterscheiden, nennen wir den Skalierungsparameter  $\lambda$ . Das Verschwinden von  $\lambda$  alleine wird im allgemeinen nicht zu einer Singularität führen. Wir behandeln  $\lambda$  in gleicher Weise wie einen FP.

Der Vorteil, den solch eine  $\lambda$ -Transformation bringt, besteht darin, daß die begleitenden FP teilweise von den MSM eliminiert werden, da der Parameter  $\lambda$  an ihre Stelle tritt. Taucht beispielsweise ein begleitender FP nach der  $\lambda$ -Transformation nur noch in einer einzigen MSM auf, so kann die entsprechende lineare Skalierung immer unabhängig von den übrigen MSM ausgeführt werden.

Ein Beispiel mag dies illustrieren. Es seien die MSM

$$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$$

$$S_2 = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$$

$$S_3 = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$$

(4.2.1)



vorgegeben. Sie lassen sich als lineare Skalierungen nicht hintereinander ausführen. Skaliert man jedoch beispielsweise erst  $\alpha_3$  und  $\alpha_4$  mit  $\lambda$  und hält  $\alpha_4$  groß, so bekommt man

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \\ \mathcal{S}_2 &= \{\alpha_2, \lambda\} \\ \mathcal{S}_3 &= \{\alpha_1, \lambda\}\end{aligned}\tag{4.2.2}$$

Diese SM sind in der angegebenen Reihenfolge ausführbar.

Unter praktischen Gesichtspunkten ist es zur Berechnung des logarithmisch führenden Verhaltens empfehlenswert, folgendermaßen vorzugehen. Hat man einmal das Integrationsgebiet in  $n$  Sektoren zerlegt, so kann man im  $i$ -ten Sektor, in dem ja  $\alpha_i$  nicht verschwinden darf, alle MSM vernachlässigen, die  $\alpha_i$  enthalten. Man führt dann fortlaufende Skalierungen von solchen MSM aus, die einen Parameter enthalten, der in den übrigen, noch nicht skalierten MSM nicht auftritt. Erst wenn es keine weiteren solcher MSM gibt, führt man mögliche  $\lambda$ -Transformationen aus, so daß danach die Skalierung von MSM fortgesetzt werden kann. Läßt sich auch nach einer  $\lambda$ -Transformation keine MSM finden, die einen Parameter enthält, der nur in dieser MSM auftritt, so führt man eine Skalierung irgendeiner der verbleibenden MSM durch. Anschließend spaltet man das Gebiet genauso auf, wie bereits zu Anfang und wiederholt das Ganze mit den übrigbleibenden MSM solange, bis jede MSM entweder bereits skaliert wurde oder in dem betreffenden Sektor ausgeschlossen ist. Nun erst setzt man die Methode aus 4.1 ein, um eventuelle gemischte Skalierungen, die  $\beta$  und  $\alpha$  enthalten, zu bestimmen.



Teil B Anwendungen

5. Die Infrarot-Regularisierungsabhängigkeit des asymptotischen Verhaltens des Sudakov-Formfaktors in der QCD

Die Berechnung von Korrekturen höherer Ordnung zu Prozessen, die in der Störungstheoretischen QCD als prinzipiell berechenbar gelten, hat gezeigt, daß die Korrekturen unter Umständen recht groß werden können, so daß die Konvergenz der Störungsreihe in Frage gestellt werden muß. In verschiedenen Fällen ist es möglich, solche großen Korrekturen in jeder Ordnung von  $\alpha_s$  zu berechnen und anschließend explizit aufzusummieren. Es ist zu erwarten, daß solche Teilsummationen zu einer wesentlichen Verbesserung der Konvergenz der Störungsreihe führen. Wie bereits in der Einleitung herausgestellt wurde, ist es gegenwärtig wohl verstanden, wie eine Teilsummation durch Anwendung der RGE erreicht werden kann. Die RGE ist jedoch in vielen Fällen nur von beschränkten Wert, da sie lediglich die sogenannten Einzellogarithmen aufsummiert. Einzellogarithmen werden typischerweise in Prozessen, die lediglich von einem einzigen großen Impulsübertrag abhängen, durch kollineare Singularitäten hervorgerufen. Infrarote Singularitäten kürzen sich gewöhnlich aus den Übergangswahrscheinlichkeiten solcher Prozesse heraus. Hängt ein Prozess jedoch von mehreren unabhängigen großen Impulsüberträgen ab, so können einige zu effektiven Infrarotregulatoren werden, so daß die Kürzung der Infrarotdivergenzen nur noch teilweise eintritt und große doppellogarithmische Korrekturen verbleiben, die nicht mit der RGE behandelt werden können.

Gestützt auf die Resultate der Berechnung von Korrekturen zur Ordnung  $\alpha_s$  ist in [BR 79, CU 80a, AM 80, PA 80]



die Vermutung ausgesprochen worden, daß solche doppellogarithmischen Korrekturen exponentieren, genau wie die logarithmisch führenden Korrekturen zum elektromagnetischen Formfaktor des Elektrons im Limes großer virtueller Masse des Photons  $q^2$ . Die verschiedenen Vorschläge zur Aufsummation der großen Korrekturen zur tiefinelastischen Streuung in der sogenannten quasielastischen Region sind allerdings nicht konsistent untereinander. Dies zeigt, daß es wichtig ist, ein klares Verständnis der großen doppellogarithmischen Korrekturen in endlicher Ordnung von  $\alpha_s$  zu haben. Abgesehen davon, daß dies einen nichttrivialen Test der Vorschläge von [ BR 79, CU 80a, AM 80, PA 80 ] liefert, können solche Einsichten äußerst willkommen bei der Berechnung der vollständigen Korrekturen sein. Nicht zuletzt mag es auf Verallgemeinerungen der Resultate von [ BR 79, CU 80a, AM 80, PA 80 ] führen.

Da die doppellogarithmischen Korrekturen eng mit den verschiedenen Limites des Quark-Formfaktors verwandt sind, ist es wünschenswert den Formfaktor in diesen Limites genau zu kennen. Dies ist das Ziel des vorliegenden Kapitels. Die gewonnenen Ergebnisse werden im nächsten Kapitel zur Berechnung der Strukturfunktionen in der quasielastischen Region eingesetzt.

Wir möchten nun einen kurzen Überblick darüber geben, was gegenwärtig über das asymptotische Verhalten des Quark-Formfaktors, beziehungsweise seiner abelschen Version, des Elektron-Formfaktors, bekannt ist. Anknüpfend an die grundlegende Arbeit von Sudakov [ SU 56 ] ist das asymptotische Verhalten des Elektron-Formfaktors von verschiedenen Autoren untersucht worden [ JA 68, FI 71, AP 71, BE 80, 81, DA 82 ]. Sudakov hat das Verhalten des Formfaktors



$\Gamma(p^2, p'^2, q^2)$  in der Spinorelektrodynamik im Limes

$$|q^2| \gg p^2, p'^2 \gg m^2 \quad (5.1.1)$$

untersucht. Die Bezeichnung der Impulse entnehme man Abb. 5.1. In jeder Ordnung der Störungsreihe in  $\alpha$ ,

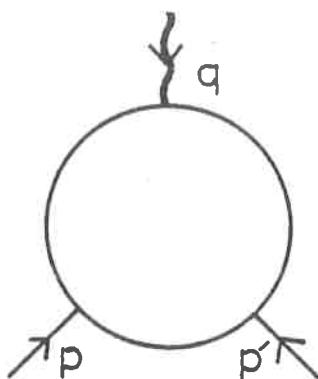


Abb. 5.1 Bezeichnung der Impulse der Vertexfunktion

der Feinstrukturkonstanten, tauchen große Logarithmen der Form  $\log |q^2|$  auf. Die Aufsummation der logarithmisch führenden Korrekturen ergibt in der "Off-Shell"-Version von  $\Gamma(p^2, p'^2, q^2)$

$$\Gamma_{\text{OFF}}(p^2, p'^2, q^2) = \exp \left\{ -\frac{\alpha}{2\pi} \log \frac{|q^2|}{p^2} \log \frac{|q^2|}{p'^2} \right\} \quad (5.1.2)$$

Die "Off-Shell"-Massen  $p^2$  und  $p'^2$  haben die Funktion von Infrarotregulatoren.

Geht man mit den Fermionen auf die Massenschale, so muß ein alternativer Infrarotregulator eingeführt werden. Gibt man beispielsweise dem Photon eine kleine Masse  $\lambda$ , so erhält man anstelle von (5.1.2)

$$\Gamma_{\text{ON}}(q^2) = \exp \left\{ -\frac{\alpha}{4\pi} \log^2 \frac{|q^2|}{\lambda^2} \right\} \quad (5.1.3)$$



Daß in beiden Fällen das asymptotische Verhalten durch eine Exponentialfunktion beschrieben wird, ist darauf zurückzuführen, daß die Aufsummation der großen Logarithmen äquivalent zur Aufsummation der Infrarotdivergenzen ist, die bekanntlich in abelschen Eichtheorien exponentieren  
[ YE 61, GR 73, ET 67 ].

Das stark abfallende Verhalten, das man nach Aufsummation der logarithmisch führenden Terme erhält, deutet darauf hin, daß es wichtig ist, auch logarithmisch nichtführende Beiträge zu berücksichtigen. Fortschritt in dieser Richtung ist in [ MU 79, CO 80 ] erzielt worden.

Wegen der Selbstkopplung der Gluonen in nichtabelschen Eichtheorien hat die explizite Aufsummation der logarithmisch führenden Beiträge zum Quark-Formfaktor über alle Ordnungen von  $\alpha_s$  bisher jedem Versuch getrotzt. Berechnungen bis zur vierten Ordnung in  $\alpha_s$  [ CA 75, CO 76, BE 80, 81 ] stehen in Übereinstimmung mit (5.1.2) und (5.1.3), falls man nur  $\alpha$  durch  $\zeta_f \alpha_s$  ersetzt. Die Demonstration der Exponentierung in allen Ordnungen von  $\alpha_s$  scheint nichtstörungstheoretischen Methoden vorbehalten zu sein  
[ DA 81, SE 81 ].

Bisherige Untersuchungen des asymptotischen Verhaltens des Formfaktors haben dem Infrarotregulator kaum Beachtung geschenkt. Er wird meist lediglich als ein Artefakt der Regularisierungsmethode betrachtet. Dies ist gerechtfertigt, solange ausschließlich der Limes untersucht wird, in dem  $q^2$  größer ist als jeder andere Impulsübertrag. Daher werden in der logarithmisch führenden Näherung beispielsweise Terme der Art  $\log p^2/p'^2$  vernachlässigt. Solche Terme können aber groß werden, falls wir beispielsweise  $p'^2$  gegen Null gehen lassen und  $p^2$  festhalten. Dieser Limes entspricht nicht mehr (5.1.1). Um Aufschluß



über solche Terme zu bekommen, haben wir das führende Verhalten des Quark-Formfaktors erneut untersucht.

Im nächsten Abschnitt werden wir die Resultate der Berechnung der logarithmisch führenden Beiträge zum asymptotischen Verhalten des Quark-Formfaktors vorstellen. Die Berechnung wurde in der vollständig masselosen QCD durchgeführt. Sie geht bis einschließlich zur dritten Ordnung. Wir haben die Feynman-Eichung benutzt, und die Quarks bilden ein Farbsingulett. Infrarotdivergenzen werden mittels der dimensionalen Methode regularisiert. Für die Impulse der äußeren Quarks werden wir drei verschiedene Konventionen benutzen. Entweder sind beide Quarks "off-shell" (OFF) oder eines ist "off-shell" während das andere "on-shell" ist (ON/OFF) oder beide Quarks sind "on-shell" (ON).

Im ersten Fall (OFF) liefern die virtuellen Massen der externen Quarks einen Infrarotregulator, so daß  $\alpha$ , die Zahl der Raum-Zeit Dimensionen, gegen Vier gehen kann, ohne daß irgendwelche Massensingularitäten auftreten. Dieser Fall kann aufgefasst werden als ein Limes von drei unabhängigen Impulsüberträgen  $p^2$ ,  $p'^2$  und  $q^2$ , die, abgesehen von  $|q^2| \gg |p^2|$  und  $|q^2| \gg |p'^2|$ , unabhängig sind.

$p^2$  und  $p'^2$  sind groß gegenüber den Massen der Quarks, die vernachlässigt werden. Unsere Ergebnisse zeigen, daß es keine Korrekturen der Form  $\log p^2/p'^2$  gibt. Dies steht in völliger Übereinstimmung mit [CA 75, CO 76, BE 80, 81].

Der zweite Fall (ON/OFF) scheint am interessantesten zu sein. Da  $p'^2 = 0$  ist, ist er äquivalent zum Limes von zwei großen Impulsüberträgen  $|q^2| \gg |p^2|$ . Genau dieser Limes führt zu den großen Korrekturen der Strukturfunktionen. Er ist bisher nicht untersucht worden.



Sowohl im ON- als auch im ON/OFF-Fall treten Massensingularitäten als Pole für  $d=4$  auf. In allen drei Fällen exponentieren die führenden Beiträge, egal ob manifest singulär oder endlich.

5.1

Das asymptotische Verhalten des Quark-Formfaktors

In der massiven Theorie setzt sich die "On-Shell"-Vertexfunktion eines  $q\bar{q}$ -Paars  $\Gamma_\mu(q^2)$ , das ein Farbsingulett ist, wie die Vertexfunktion des Elektrons aus zwei Anteilen zusammen

$$\Gamma_\mu(q^2) = \gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} q^\nu F_2(q^2) \quad (5.1.1)$$

Im Falle des Elektrons ist  $F_1(q^2)$  ( $F_2(q^2)$ ) als Dirac- (Pauli-) -Formfaktor bekannt. Für große  $q^2$  gilt

$$F_1(q^2) \sim (q^2)^0, \quad F_2(q^2) \sim \left(\frac{m^2}{q^2}\right)^{1/2} \quad (5.1.2)$$

modulo logarithmischer Korrekturen. Daher kann  $F_2(q^2)$  gegenüber  $F_1(q^2)$  vernachlässigt werden.

Wir definieren den Quark-Formfaktor  $\Gamma(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2, q^2)$  in der masselosen Theorie für

$$\tilde{\epsilon}_1 = \frac{p^2}{q^2} \ll 1, \quad \tilde{\epsilon}_2 = \frac{p'^2}{q^2} \ll 1 \quad (5.1.3)$$

durch

$$\Gamma(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2, q^2) = \frac{-i}{8pq} \text{Tr} \not{p} \Gamma_\mu(q^2) (\not{p} + \not{q}) \not{\gamma}^\mu \quad (5.1.4)$$



Es gilt

$$\Gamma(0,0,q^2) = F_1(q^2) \Big|_{m^2=0} \quad (5.1.5)$$

Die parametrische D-Funktion eines Graphen, der zu  $\Gamma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, q^2)$  beiträgt, hat im allgemeinen die Gestalt

$$D(\alpha) = q^2 [h(\alpha) + \varepsilon_1 g_1(\alpha) + \varepsilon_2 g_2(\alpha)] \quad (5.1.6)$$

so daß wir die in 3.4.1 beschriebene Methode zur Berechnung des asymptotischen Verhaltens einsetzen können.

In Abb. 5.2 sind die Graphen abgebildet, die bis zur dritten Ordnung in  $\alpha_s$  einen Beitrag zur logarithmisch führenden Näherung liefern. Wir haben sie durch Zahlen von 0 bis 20 gekennzeichnet. Der Beitrag jedes einzelnen Graphen zum Formfaktor schreibt sich als

$$\Gamma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, q^2) = G K^L I' \quad (5.1.7)$$

mit

$$K = - \left( \frac{-q^2}{4\pi \mu^2} \right)^{-\epsilon} \frac{\alpha_s}{2\pi} \quad (5.1.8)$$

$\Gamma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, q^2)$  ist so normiert, daß  $\Gamma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, q^2) = 1$  für den Born Graphen 0. Da wir nur führende Terme berechnen, ist das Argument der Kopplungskonstanten  $\alpha_s$  nicht bestimmt. Unsere Resultate gelten sowohl für raumartiges als auch für zeitartiges  $q^2$ .  $G$  ist der gruppentheoretische Faktor des betrachteten Graphen und  $\mu^2$  ist ein Parameter, der eingeführt werden muß, um  $\alpha_s$  in  $d$  Dimensionen dimensionslos zu halten:



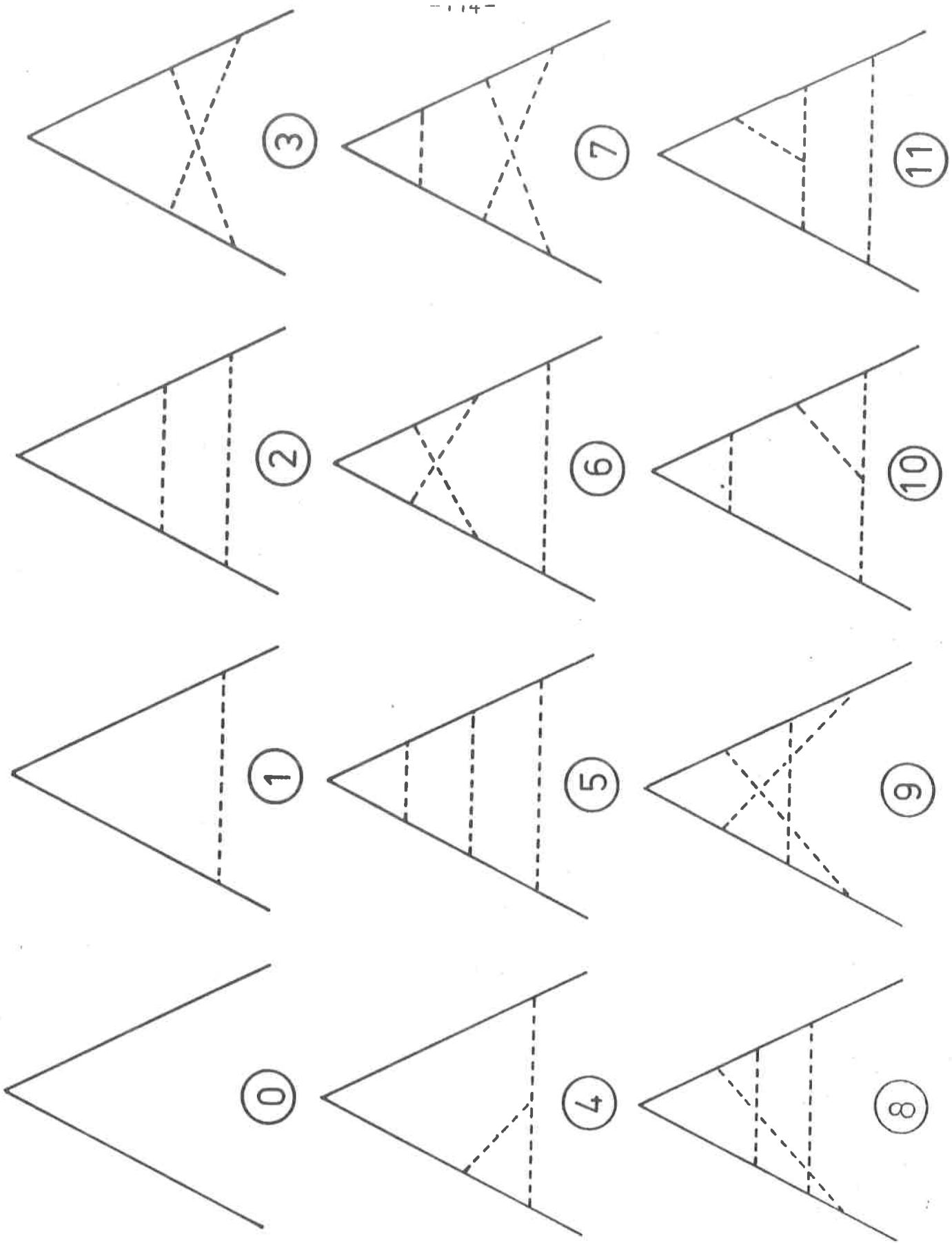


Abb. 5.2 Feynman-Graphen, die zum logarithmisch führenden Verhalten des Quark-Formfaktors beitragen



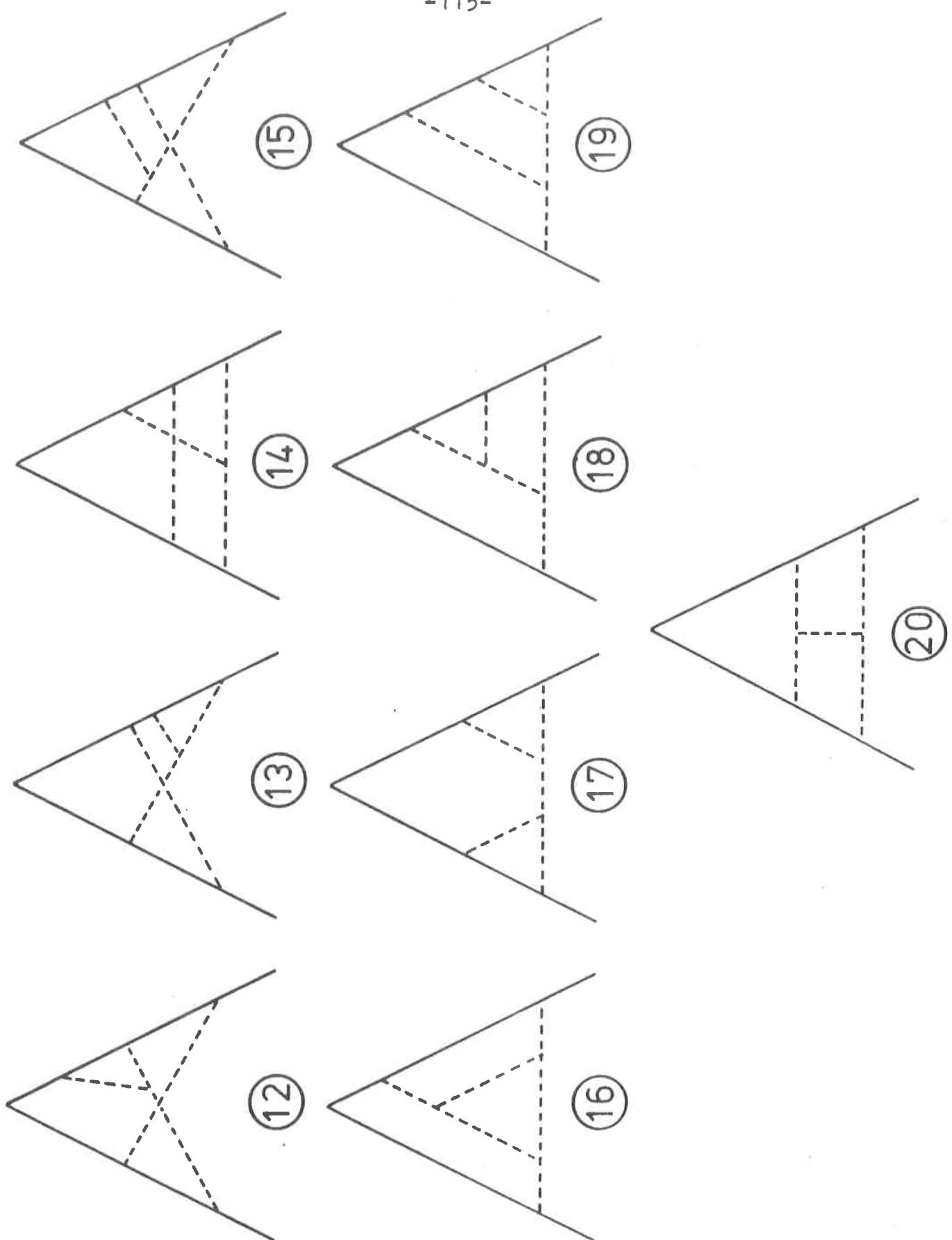


Abb. 5.2 (Fortsetzung)



$$\alpha_s \rightarrow \alpha_s (\mu^2)^\epsilon$$

(5.1.9)

Zunächst werden wir beide Quarks "off-shell" nehmen und  $\epsilon$  endlich. Nachdem man alle Pole der Mellin-Transformation von  $\Gamma(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, q^2)$  isoliert hat, ist  $MT\{\Gamma(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, q^2)\}$  eine Summe aus Termen der Form

$$\left\{ \frac{\Gamma(\tilde{p} - \ell_1 - \ell_2)}{\Gamma(\tilde{p})} \right\}_R \Gamma(\ell_1) \Gamma(\ell_2) \left\{ \prod_{k=1}^{k_1} \frac{1}{(\ell_1 - \tau_k^{(1)} \epsilon)} \right\} \left\{ \prod_{k=1}^{k_2} \frac{1}{(\ell_2 - \tau_k^{(2)} \epsilon)} \right\} \left\{ \prod_{k=1}^{k_{12}} \frac{1}{(\ell_1 + \ell_2 - \tau_k^{(12)} \epsilon)} \right\} \quad (5.1.10)$$

Der logarithmisch führende Beitrag ist durch  $k_1 + k_2 + k_{12} = 2L$  charakterisiert. Für jeden einzelnen Graphen findet eine erstaunliche Kürzung der Beiträge der verschiedenen Sequenzen statt, die dazu führt, daß

$$k_{12} = 0$$

$$k_1 = k_2 = L$$

$$\tau_k^{(1)} = \tau_k^{(2)} = k\epsilon$$

wird. Daher gilt

$$I' = c X_L \quad (5.1.12)$$

mit

$$X_L = \int_{c_1} \frac{d\ell_1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{d\ell_2}{2\pi i} \tilde{t}_1^{-\ell_1} \tilde{t}_2^{-\ell_2} \quad (5.1.13)$$



$$\prod_{k=0}^L \frac{1}{(l_1 - k\epsilon)} \quad \prod_{k=0}^L \frac{1}{(l_2 - k\epsilon)}$$

Beim Übergang von (5.1.10) zu (5.1.13) haben wir die verschiedenen  $\Gamma$ -Funktionen, die vor (5.1.10) stehen, entwickelt. Die Größen  $G$  und  $c$  sind in Tab.5.1 für jeden Graphen einzeln aufgelistet. Falls es zu einem Graphen einen Partner gibt, der durch Vertauschen von  $\tilde{\epsilon}_1$  und  $\tilde{\epsilon}_2$  entsteht, so haben wir in  $c$  die Beiträge beider Graphen addiert. In Kapitel 8 präsentieren wir die Berechnung des Graphen 13 im Detail. Der gruppentheoretische Faktor wurde unter Zuhilfenahme folgender Relationen

$$[T_i, T_j] = i G_{ijk} T_k \quad (5.1.14a)$$

$$i G_{ijk} T_i T_j = - G_A T_k \quad (5.1.14b)$$

$$T_i T_i = \mathbb{1} G_F \quad (5.1.14c)$$

$$T_i T_j T_i = (G_F - G_A) T_j \quad (5.1.14d)$$

mit

$$G_F = (N^2 - 1) / 2N \quad (5.1.15a)$$

$$G_A = 1 / 2N \quad (5.1.15b)$$

zwischen den Generatoren  $T_i$  und den Strukturkonstanten  $G_{ijk}$  der Gruppe  $SU(N)$  berechnet. Führt man die Summe über alle Graphen aus, so erhält man

$$\Gamma(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2, q^2) = \sum_{L=0}^3 L! (G_F \cdot K)^L X_L \quad (5.1.16)$$



Graph	$G$	$c$	$L$
1	$G_F$	1	1
2	$G_F^2$	1	
3	$G_F(G_F - G_A)$	1	2
4	$G_F G_A$	1	
5	$G_F^3$	1	
6	$G_F^2(G_F - G_A)$	1	
7	$G_F^2(G_F - G_A)$	1	
8	$G_F (G_F - G_A)^2$	2	
9	$G_F(G_F - G_A)(G_F - 2G_A)$	1	
10	$G_F^2 G_A$	2	
11	$G_F^2 G_A$	1	
12	$G_F G_A (G_F - G_A)$	2	
13	$G_F G_A (G_F - G_A)$	1	3
14	$G_F G_A (G_F - G_A)$	2	
15	$G_F G_A (G_F - G_A)$	1	
16	$G_A^2 G_F$	1/4	
17	$G_A^2 G_F$	1/4	
18	$G_A^2 G_F$	1/2	
19	$G_A^2 G_F$	1/2	
20	$G_A^2 G_F$	1/2	

Tab. 5.1



Sämtliche Beiträge, die proportional zu  $G_A$  sind, heben sich auf. Wir werden nun die Beiträge der einzelnen Graphen für die drei Regularisierungsvorschriften ableiten.

## 5.2 Regularisierungssabhängigkeit

### 5.2.1 OFF-Shell

Im OFF-Fall ist  $\Gamma_{OFF}(\rho^2, \rho'^2, q^2)$  in vier Raum-Zeit Dimensionen endlich. Daher können wir in (5.1.10)  $\epsilon = 0$  setzen. Inversion à la (5.1.13) ergibt

$$X_L = \frac{1}{L!} (\log \tau_1)^L \frac{1}{L!} (\log \tau_2)^L \quad (5.2.1)$$

(5.2.1) enthält nur führende Terme, d.h. alle Beiträge  $\sim (\log \tau_1)^i (\log \tau_2)^k$  mit  $i+k < 2L$  sind vernachlässigt worden. Im allgemeinen würde man auf dem führenden Niveau ein Polynom in  $(\log \tau_1)^i (\log \tau_2)^k$ ,  $i+k = 2L$  erwarten, das symmetrisch in  $\tau_1$  und  $\tau_2$  ist. Wegen (5.1.11) tritt aber lediglich der Term (5.2.1) mit  $i = k$  auf. Setzt man (5.2.1) in (5.1.16) ein, so erhält man

$$\Gamma_{OFF}(\rho^2, \rho'^2, q^2) = \sum_{L=0}^3 \frac{1}{L!} (Y_{OFF})^L \quad (5.2.2)$$

mit

$$Y_{OFF} = -G_F \frac{ds}{2\pi} \log \tau_1 \log \tau_2 \quad (5.2.3)$$



### 5.2.2 ON/OFF-Shell

Läßt man die virtuelle Masse des Quarks, das den Impuls  $p'$  trägt, verschwinden, so hängt die parametrische D-Funktion nicht mehr von  $\tau_2$  ab. Daher braucht man nur noch die Mellin-Transformation bezüglich  $\tau_1$  auszuführen. Wir bezeichnen die entsprechende Variable mit  $\ell_1$ . Das führt dazu, daß zwischen den Polen, die bei der OFF-Regularisierung auftreten, und den Polen hier folgende Korrespondenz gilt

$$\frac{1}{\ell_2 - \tau_k^{(2)} \epsilon} \rightarrow \frac{1}{-\tau_k^{(2)} \epsilon} \quad (5.2.4a)$$

$$\frac{1}{\ell_1 + \ell_2 - \tau_k^{(12)} \epsilon} \rightarrow \frac{1}{(\ell_1 - \tau_k^{(12)} \epsilon)} \quad (5.2.4b)$$

Definiert man in Analogie zu (5.1.13)

$$X_L = \frac{1}{L!} \frac{1}{(-\epsilon)^L} \int_{\Gamma} \frac{d\ell_1}{2\pi i} \tau_1^{-\ell_1} \prod_{k=0}^L \frac{1}{(\ell_1 - k\epsilon)}, \quad (5.2.5)$$

so ist  $\mathcal{I}'$  wieder durch (5.1.12) gegeben. (5.2.5) berechnet sich zu

$$X_L = \frac{1}{(L!)^2} \left( \frac{1 - \tau_1^{-\epsilon}}{\epsilon^2} \right)^L \quad (5.2.6)$$

falls nichtführende Terme  $\sim \epsilon^{-\ell} (\log \tau_1)^m$ ,  $\ell+m < 2L$  wiederum vernachlässigt werden. Setzt man (5.2.6) und (5.1.12) in (5.1.7) ein, so erhält man

$$\Gamma_{ON/OFF}^3(p^2, q^2) = \sum_{L=0}^3 \frac{1}{L!} (Y_{ON/OFF})^L \quad (5.2.7)$$



mit

$$Y_{ON/OFF} = -G_F \frac{ds}{2\pi} \left( -\frac{q^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon} \frac{1}{\epsilon^2} (1 - \epsilon_1^{-\epsilon}) \quad (5.2.8)$$

oder falls man  $Y_{ON/OFF}$  nach  $\epsilon$  entwickelt

$$Y_{ON/OFF} = G_F \frac{ds}{2\pi} \log \epsilon_1 \left[ \log \left( -\frac{q^2}{\mu^2} \right) + \frac{1}{2} \log \epsilon_1 - \frac{1}{\epsilon} \right] + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (5.2.9)$$

Nach dem Kinoshita-Lee-Nauenberg Theorem ist damit zu rechnen, daß sich der Pol  $\frac{1}{\epsilon}$  wegbürtzt, falls mit  $\Gamma_{ON/OFF}^1(p^2, q^2)$  eine physikalische Größe berechnet wird und die Abstrahlung weicher, reeller Gluonen ebenfalls Berücksichtigung findet. Oder aber er läßt sich durch "Renormierung" von Partonen-Verteilungsfunktionen absorbieren.

### 5.2.3 ON-Shell

Befassen wir uns schließlich mit dem Fall, bei dem beide Quarks "on-shell" sind. Da nun  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$  ist, braucht keine Mellin-Transformation ausgeführt werden, und wir haben folgende Korrespondenz mit der ON/OFF-Regularisierung

$$\frac{1}{\ell_1 - \tau_k^{(1)} \epsilon} \rightarrow \frac{1}{-\tau_k^{(1)} \epsilon} \quad (5.2.10)$$

Daher gilt

$$X_L = \frac{1}{(L!)^2} \frac{1}{\epsilon^{2L}} \quad (5.2.11)$$

für jeden Graphen.  $\Gamma_{ON}(q^2)$  wird

$$\Gamma_{ON}(q^2) = \sum_{L=0}^3 \frac{1}{L!} (Y_{ON})^L \quad (5.2.12)$$



mit

$$Y_{ON} = -C_F \frac{ds}{2\pi} \left( -\frac{q^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon} \frac{1}{\epsilon^2} \quad (5.2.13)$$

Entwickelt man  $Y_{ON}$  nach  $\epsilon$ , so bekommt man

$$Y_{ON} = -C_F \frac{ds}{4\pi} \left\{ \log^2 \left( -\frac{q^2}{\mu^2} \right) \cdot \frac{2}{\epsilon} \log \left( -\frac{q^2}{\mu^2} \right) + \frac{2}{\epsilon^2} \right\} + O(\epsilon) \quad (5.2.14)$$

Auch hier muß davon ausgegangen werden, daß sich die singulären Terme aus physikalischen Größen herauskürzen. Subtrahiert man diese Singularitäten, so steht (5.2.14) in Übereinstimmung mit [CA 75, CO 76], falls  $\mu$  als eine kleine Gluonenmasse interpretiert wird.

Zum Schluß dieses Kapitels möchten wir noch einen Ausdruck für den Formfaktor angeben, aus dem sich die drei vorgestellten Resultate einfach durch Vertauschen der Grenzwertbildung ableiten lassen:

$$\Gamma(p^2, p'^2, q^2) = \sum_{L=0}^3 \frac{1}{L!} \left\{ -C_F \frac{ds}{2\pi} \frac{1}{\epsilon^2} \left( -\frac{q^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon} (1-\epsilon_1^{-\epsilon})(1-\epsilon_2^{-\epsilon}) \right\}^L \quad (5.2.15)$$

Dieser Ausdruck ist uniform in  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$ . Der OFF-Limes ergibt sich als  $\epsilon \rightarrow 0$ , während der ON/OFF- (ON-) Limes erfordert, daß zuerst  $\epsilon_2$  ( $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$ ) gegen Null geschickt wird.



6.

Die tiefinelastische Streuung in der quasi-  
elastischen Region

Wie bereits betont wurde, ist das Auftreten von großen Korrekturen an den Grenzen des Phasenraumes verschiedener Parton-Prozesse ein Problem der störungstheoretischen QCD, dem im letzter Zeit viel Beachtung geschenkt worden ist. Zum Beispiel gibt es zur tiefinelastischen Streuung Korrekturen der Form  $[\log(1-z)]/(1-z)$ , die in der sogenannten quasielastischen Region sehr groß werden. Die quasielastische Region ist dadurch gekennzeichnet, daß  $z$ , die partonische Bjorken-Variable, fast gleich Eins ist. Diese Region ist begrenzt durch  $z \leq 1 - Q_0^2/Q^2$  ( $Q_0^2 \ll Q^2$ ).  $Q_0^2$  ist ein charakteristischer Impulsübertrag, der den Übergang der Region, in der die Störungstheorie angewandt werden darf, in die Confinement-Region markiert.  $-Q^2$  ist die Masse des virtuellen Photons zum Quadrat. Es gelte

$$\frac{\alpha_s(Q_0^2)}{2\pi} < 1 \quad (6.0.1)$$

Die elastische Region  $z > 1 - \frac{Q_0^2}{Q^2}$  ist mit störungstheoretischen Methoden nicht zugänglich und muß daher ausgeschlossen werden. Bildet man die Momente  $M_n(Q^2)$  der Strukturfunktionen, so wird die quasielastische Region besonders von den hohen Momenten hervorgehoben ( $1 \ll n < Q^2/Q_0^2$ ). Ein Verhalten der Strukturfunktionen wie  $[\log(1-z)]/(1-z)$  ergibt für die Momente  $M_n(Q^2) \sim \log^2 n$ . Da man erwarten muß, daß Korrekturen höherer Ordnung wie  $(\alpha_s \log^2 n)^L$  beitragen, bricht die naive Störungsreihe in der quasielastischen Region zusammen. Es sei denn, man findet einen Weg, diese Korrekturen in allen Ordnungen von  $\alpha_s$  aufzusummen.

In der Literatur sind verschiedene Vorschläge gemacht worden, wie solch eine Aufsummation durchgeführt werden kann. Die erste Lösung dieses Problems ist von Gribov



und Lipatov in ihrer klassischen Arbeit [GR 72] im Rahmen der Spinorelektrodynamik vorgeschlagen worden. Die Verallgemeinerung auf nichtabelsche Eichtheorien wurde von Dokshitzer [DO 77] vorgenommen. Daran anknüpfend sind ähnliche Lösungen von verschiedenen Autoren vorgeschlagen worden [BR 79, PA 80, CU 80a, AM 80, CI 80, 81, MU 81]. Es herrscht allgemein Übereinstimmung darüber, daß die großen Korrekturen exponentiell sind und so zu einer starken Unterdrückung in der quasielastischen Region führen. Allerdings gibt es, wie bereits erwähnt, keine Übereinstimmung über die detaillierte Form. Insbesondere in [FR 82] ist darauf hingewiesen worden, daß die Vorschläge von [BR 79] und [AM 80] zwar die Korrekturen niedrigster Ordnung [AL 78, 79, KU 79, HA 79] reproduzieren, sich jedoch in höherer Ordnung unterscheiden. Um mindestens einen der beiden Vorschläge ausschließen zu können, reicht es aus, das logarithmisch führende Verhalten in höherer als erster Ordnung zu bestimmen. Dies ist die Absicht dieses Kapitels.

Wir haben den Limes  $\zeta \rightarrow 1$  der Strukturfunktionen der tiefinelastischen Streuung in der führenden doppellogarithmischen Näherung (LDLA) untersucht. Unsere Untersuchung geht bis zur dritten Ordnung in  $\alpha_s$ . Da die Ergebnisse eine Erweiterung auf alle Ordnungen von  $\alpha_s$  nahelegen, stellen wir sie hier in ihrer erweiterten Form dar. Wir benutzen die gleichen Konventionen wie im vorausgehenden Kapitel. Anstatt die Diagramme, die zum Leptoproduktionsprozeß beitragen, direkt zu untersuchen, ist es wesentlich einfacher, die Vorwärtsamplitude der Comptonstreuung zu nehmen und das asymptotische Verhalten der Strukturfunktionen über das optische Theorem abzuleiten. Der Vorteil der Comptonstreuamplitude ist, daß keine reellen Korrekturen berücksichtigt werden brauchen.



Wir finden, daß der ( $z \rightarrow 1$ )-Limes der Vorwärtssamplitude der Comptonstreuung im wesentlichen durch den ON/OFF-Limes des Sudakov-Formfaktors gegeben ist, wie er im letzten Kapitel abgeleitet wurde. Auf dieser Basis bestimmen wir das asymptotische Verhalten der Strukturfunktionen. Es stimmt mit [DO 77] überein und steht im Widerspruch zu [BR 79].

Im Abschnitt 6.1 werden wir die LDLA der Strukturfunktionen definieren und zeigen, wie sie mit der LDLA der virtuellen Parton-Photon-Streuung zusammenhängt. Anschließend werden wir die Struktur der dominanten Diagramme diskutieren. Das asymptotische Verhalten der Strukturfunktionen wird im Abschnitt 6.2 für feste Kopplungskonstante berechnet. Wir berücksichtigen die Variation der Kopplungskonstanten durch Vergleich der allgemeinen Form von  $M_n(Q^2)$ , wie sie sich als Lösung der RGE ergibt, mit dem in 6.2 erhaltenen asymptotischen Verhalten (Abschnitt 6.3). Im letzten Abschnitt 6.4 schließlich vergleichen wir unsere Resultate mit den Vorschlägen, die in der Literatur zu finden sind.

### 6.1 Dominante Diagramme

Bevor wir erläutern, welche Diagramme in der quasi-elasticen Region dominant sind, möchten wir kurz einige Definitionen einführen und präzisieren, was genau unter der LDLA zu verstehen ist.

Wir zerlegen die Vorwärtssamplitude der Photon-Parton-Streuung, bzw. ihren absorptiven Teil, auf die gleiche Weise wie z.B. in [AL 79]. Die Bezeichnung der Impulse



ist in Abb. 6.1 angegeben.  $p$  bezeichnet den Impuls des einlaufenden Partons und  $q$  ist der Impuls des elektromagnetischen Stromes ( $Q^2 = -q^2$ ). So schreibt sich die Amplitude der Photon-Parton-Streuung nach Summation über die Spins der Partonen als

$$T^{\mu\nu} = \left( -q^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \frac{1}{2} \mathcal{T}_1(Q^2, z) + \left( p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left( p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right) \frac{z}{p \cdot q} \mathcal{T}_2(Q^2, z) \quad (6.1.1)$$

Dabei ist die partonische Bjorken-Variable  $z$  durch

$$z = -\frac{q^2}{2p \cdot q} \quad (6.1.2)$$

definiert. Durch Kontraktion mit  $-q_{\mu\nu}$  und  $p_\mu p_\nu$  lassen sich aus  $T^{\mu\nu}$  zwei Linearkombinationen der invarianten Amplituden  $\mathcal{T}_i(Q^2, z)$ ,  $i=1,2$  herausprojizieren

$$-q_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = (1-\epsilon) \mathcal{T}_2(Q^2, z) - \left( \frac{3}{2} - \epsilon \right) (\mathcal{T}_2(Q^2, z) \cdot \mathcal{T}_1(Q^2, z)) \quad (6.1.3)$$

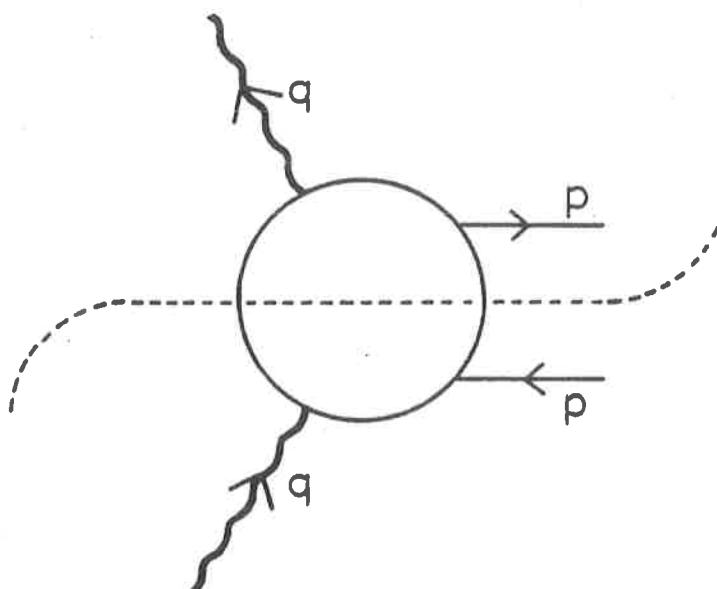


Abb. 6.1 Bezeichnung der Impulse der Vorwärtsamplitude der Comptonstreuung



$$p_\mu p_\nu T^{\mu\nu} = \frac{Q^2}{8z^2} (\mathcal{F}_2(Q^2, z) - \mathcal{F}_1(Q^2, z)) \quad (6.1.4)$$

Die partonischen Strukturfunktionen bezeichnen wir mit  $\mathcal{F}_k(Q^2, z)$ ,  $k=1,2$ . Sie stehen mit  $\mathcal{F}_k(Q^2, z)$ ,  $k=1,2$  durch das optische Theorem

$$\mathcal{F}_k(Q^2, z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im}(-i \mathcal{F}_k(Q^2, z)) \quad (6.1.5)$$

in Beziehung. Wir normieren die  $\mathcal{F}_k(Q^2, z)$  so, daß im einfachen Parton-Modell

$$\mathcal{F}_k(Q^2, z) = \delta(1-z) \quad k=1,2 \quad (6.1.6)$$

gilt. Momente werden durch

$$M_n^k(Q^2) = \int_0^1 dz z^n \mathcal{F}_k(Q^2, z) \quad (6.1.7)$$

definiert.

Wenden wir uns nun der LDLA zu. Es ist beabsichtigt, die Koeffizienten  $a_{pq}$  einer Entwicklung der subtrahierten Momente  $M_n^{sub}(Q^2, Q_0^2)$ , die frei von Massensingularitäten sind,

$$M_n^{sub}(Q^2, Q_0^2) = \sum_p \sum_q a_{pq} (1 + O(\alpha_s)) \left( \log \frac{Q^2}{Q_0^2} \right)^q (log n)^{2p-q} \quad (6.1.8)$$

zu berechnen.  $Q_0^2$  ist die Faktorisierungsskala.

Wir möchten betonen, daß unsere Näherung über eine einfache LDLA in  $\log^2 n$  hinausgeht, die nur Terme mit  $q=0$  berücksichtigt. Solch eine Näherung würde in der Region  $Q^2/Q_0^2 \sim n$  zusammenbrechen. Da  $M_n^{sub}(Q^2, Q_0^2)$  eine Lösung der RGE ist, wissen wir, daß für  $q > p$   $a_{pq} = 0$  ist. Um eine



Entwicklung der Momente  $M_n^{SU(3)}(Q^2, Q_0^2)$  wie (6.1.8) durch Anwendung des optischen Theorems zu erhalten, müssen die Koeffizienten  $\tilde{a}_{pq}$  der Entwicklung

$$\mathcal{T}_i^{SU(3)}(Q^2, Q_0^2) = \left[ \frac{-i}{1-z+i\epsilon_r} \sum_p \alpha_s^p \sum_q \tilde{a}_{pq} (1 + \mathcal{O}(\alpha_s)) \right. \\ \left. \cdot \left( \log \frac{Q^2}{Q_0^2} \right)^q \left( \log [-(1-z)] \right)^{2p-q} \right]_+ \quad (6.1.9)$$

der Comptonamplitude  $\mathcal{T}_i^{SU(3)}(Q^2, Q_0^2)$ , von der ebenfalls die Massensingularitäten subtrahiert wurden, bekannt sein. Die  $[ ]_+$ -Regularisierung ist wie gewöhnlich für zwei Funktionen  $f(z)$  und  $g(z)$  durch

$$\int_0^1 dz z f(z) [g(z)]_+ = \int_0^1 dz [f(z) \cdot f(1)] g(z) \quad (6.1.10)$$

definiert. Die Äquivalenz von (6.1.9) und (6.1.8) ergibt sich durch Einsetzen von (6.1.9) in (6.1.5) und Bildung der Momente. Wegen (6.1.5) geht zunächst eine Potenz von  $\log|1-z|$  verloren. Sie wird wiedergewonnen durch

$$\int_0^1 dz z^n \left[ \frac{\log^k (1-z)}{1-z} \right]_+ = \frac{1}{k+1} \log^{k+1} \frac{1}{n} + \mathcal{O}(\log^k \frac{1}{n}) \quad (6.1.11)$$

Im folgenden möchten wir die Struktur der dominanten Diagramme diskutieren. Aus (6.1.9) geht hervor, daß sich der Beitrag eines dominanten Diagramms in der Region, in der  $z \approx 1$  ist, wie  $1/(1-z)$  modulo logarithmischer Korrekturen verhalten muß. Momente von Beiträgen, die schwächer singulär sind, sind im Vergleich zu (6.1.8) um einen Faktor  $1/n$  unterdrückt. Es gibt verschiedene Ursachen, die dazu führen können, daß der Beitrag eines Diagramms an der Stelle  $z=1$  einen Pol besitzt. Ist ein Diagramm in einem Kanal reduzibel, dessen invariante Masse



an der Stelle  $z = 1$  verschwindet, so besitzt es solch einen Pol. Aber auch das FI eines irreduziblen Graphen kann solch einen Pol hervorrufen. Dies kann entweder auf das Verschwinden eines Eichnenners oder eines Feynman-Nenners zurückgehen. Da wir die Feynman-Eichung benutzen, bleibt bloß die zweite Ursache. Die Untersuchung aller Diagramme, die bis zur dritten Ordnung in  $\alpha_s$  zu  $T_{\mu\nu}$  beitragen, hat uns zu dem Schluß geführt, daß alle Diagramme, die einen Beitrag zur LDLA liefern, eine reduzible Struktur besitzen, wie sie in Abb.6.2 gezeigt wird. Die irreduziblen Blasen in Fig.6.2 stellen die Quark-Photon-Vertexfunktion dar. Es ist gerade der im letzten Kapitel untersuchte ON/OFF-Limes, der hier eine Rolle spielt. Wie unsere Untersuchung gezeigt hat, können Diagramme, die nicht die faktorierte Struktur aufweisen, zwar durchaus einen Pol an der Stelle  $z = 1$  haben, dieser kann aber allem Anschein nach in der  $k$ -ten Ordnung von höchstens  $k$  Logarithmen begleitet werden. Eine wesentliche Voraussetzung für die Faktorisierung der zur LDLA beitragenden Graphen ist die Wahl der Feynman-Eichung. Die Faktorisierung gilt beispielsweise nicht für die planare Eichung [DO 80b]. Wie wohlbekannt ist, tragen Leitergraphen in dieser Eichung zu den Momenten wie  $(\alpha_s \log \frac{Q^2}{Q_0^2} / \log n)^k$  bei. Die Faktorisierung bricht ebenfalls in der Landau-Eichung zusammen.

Als Folge der Faktorisierung verschwindet die rechte Seite von (6.1.4). Deshalb besteht in der LDLA kein Unterschied zwischen  $\tilde{F}_1(Q^2, z)$  und  $\tilde{F}_2(Q^2, z)$ . Aus diesem Grunde werden wir im folgenden einfach nur noch  $\tilde{F}(Q^2, z)$  schreiben.



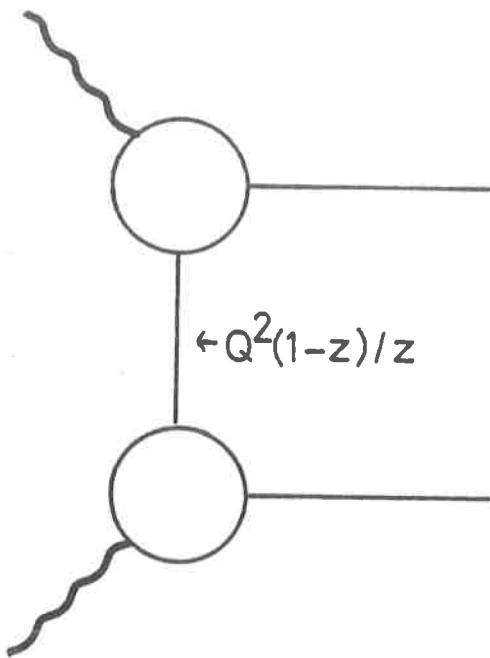


Abb.6.2 Struktur der dominanten Diagramme

## 6.2 Das asymptotische Verhalten

In diesem Abschnitt werden wir das asymptotische Verhalten der Strukturfunktionen in der quasielastischen Region ableiten. Ausgangspunkt bilden der ON/OFF-Limes des Sudakov-Formfaktors  $\Gamma_{ON/OFF}(\tau, Q^2)$  und die Faktorisierungseigenschaft, die im vorausgehenden Abschnitt beschrieben wurde.

Aufgrund der Faktorisierung gilt in der LDIA

$$\tilde{\Gamma}(Q^2, z) = \frac{-i}{(1-z) + i\epsilon_F} \Gamma_{ON/OFF}^2(\tilde{\tau}, Q^2) \quad (6.2.1)$$

mit

$$\tilde{\tau} = \frac{(\rho + q)^2}{q^2} = -\frac{(1-z)}{z} \quad (6.2.2)$$



$\Gamma_{ON/OFF}(\varepsilon, Q^2)$  ist bis zur dritten Ordnung in  $\alpha_s$  in (5.2.7) angegeben worden. Wir extrapolieren (5.2.7) auf alle Ordnungen von  $\alpha_s$

$$\Gamma_{ON/OFF}(\varepsilon, Q^2) = \exp \left\{ -\tilde{K} (1 - \varepsilon^{-\varepsilon}) \right\} \quad (6.2.3)$$

mit

$$\tilde{K} = -K \frac{1}{\varepsilon^2} \quad (6.2.4)$$

Setzt man (6.2.1) in die rechte Seite des optischen Theorems (6.1.5) ein und entwickelt  $\Gamma_{ON/OFF}(\varepsilon, Q^2)$  nach Potenzen von  $\alpha_s$ , so bekommt man für die Strukturfunktion

$$\begin{aligned} \tilde{f}(Q^2, z) = e^{-2\tilde{K}} & \left\{ \delta(1-z) - \sum_{L=1}^{\infty} \frac{1}{L!} (2\tilde{K})^L \right. \\ & \left. (1-z)^{-\varepsilon L - 1} \frac{\sin(L\pi\varepsilon)}{\pi} \right\} \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  enthält (6.2.5) Pole, die als Massensingularitäten interpretiert werden müssen. Aufgrund des Theorems über die Faktorisierung solcher Massensingularitäten [EL 79] kann eine endliche Strukturfunktion  $\tilde{f}^{SUB}(Q^2, Q_0^2, z)$  durch

$$\tilde{f}(Q^2, z) = \int_0^1 \frac{dy}{y} \tilde{f}^0(Q_0^2, \frac{1}{\varepsilon}, y) \tilde{f}^{SUB}(Q^2, Q_0^2, \frac{1}{z}) \quad (6.2.6)$$

definiert werden, oder nach Bildung der Momente

$$M_n(Q^2) = M_n^0(Q_0^2, \frac{1}{\varepsilon}) M_n^{SUB}(Q^2, Q_0^2) \quad (6.2.7)$$

Sämtliche Massensingularitäten können in  $\tilde{f}^0(Q_0^2, \frac{1}{\varepsilon}, y)$  bzw.  $M_n(Q_0^2, \frac{1}{\varepsilon})$  absorbiert werden, die dann die "nackten" Parton-Verteilungsfunktionen "renormieren".



(6.2.5) lässt sich leicht in die Form eines Konvolutionsintegrals wie (6.2.6) bringen. Dazu entwickelt man zunächst

$$(1-z)^{-\epsilon L-1} = \left(\log \frac{1}{z}\right)^{-\epsilon L-1} (1 + \mathcal{O}(1-z)) \quad (6.2.8)$$

und setzt danach die rechte Seite der Identität

$$\int_1^z dy \left[ \frac{\left(\log \frac{y}{z}\right)^{a-1}}{\Gamma(a)} \right] \left[ \frac{\left(\log \frac{1}{y}\right)^{b-1}}{\Gamma(b)} \right] = \begin{cases} \frac{\left(\log \frac{1}{z}\right)^{a+b-1}}{\Gamma(a+b)} & \text{falls } a \neq b \\ \delta(1-z) & \text{falls } a = b \end{cases} \quad (6.2.9)$$

in (6.2.5) mit  $a = -\frac{1}{\epsilon} - \epsilon L$  und  $b = \zeta_0$  ein.  $\zeta_0 = \zeta_0(Q_0^2, \frac{1}{\epsilon})$  ist eine Konstante, die eingeführt wird, um die Massensingularitäten zu subtrahieren. Sie ist hier von der Ordnung  $\frac{1}{\epsilon}$ . Die Identität (6.2.9) lässt sich zeigen, indem man entweder die linke Seite explizit ausrechnet ( $a \neq b$ ) oder die Momente beider Seiten bildet ( $a = b$ ). Mit (6.2.9) erhält man

$$\tilde{F}^{SVB}(Q^2, Q_0^2, z) = e^{-2\tilde{K}} \sum_{L=0}^{\infty} \frac{1}{L!} (2\tilde{K})^L \frac{\left(\log \frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{\epsilon} - \epsilon L - 1}}{\Gamma(-\frac{1}{\epsilon} - \epsilon L)} \quad (6.2.10)$$

und

$$\tilde{F}^0(Q_0^2, \frac{1}{\epsilon}, z) = \frac{\left(\log \frac{1}{z}\right)^{\zeta_0 - 1}}{\Gamma(\zeta_0)} \quad (6.2.11)$$

Bevor wir  $\epsilon$  in (6.2.10) gegen Null gehen lassen können, müssen wir die Singularität an der Stelle  $z=1$



regularisieren. Dies geschieht mittels der in (6.1.10) definierten  $[ ]_+$ -Vorschrift. Wegen

$$\int_0^1 dz \tilde{F}^{sub}(Q^2, Q_0^2, z) = \int_0^1 dz \tilde{F}^0(Q_0^2, \frac{1}{\epsilon}, z) = 1 \quad (6.2.12)$$

folgt

$$\tilde{F}(Q^2, Q_0^2, z) = \left[ \tilde{F}^{sub}(Q^2, Q_0^2, z) \right]_+ + \delta(1-z) \quad (6.2.13)$$

und

$$\tilde{F}^0(Q_0^2, \frac{1}{\epsilon}, z) = \left[ \tilde{F}^0(Q_0^2, \frac{1}{\epsilon}, z) \right]_+ + \delta(1-z) \quad (6.2.14)$$

Nun kann  $\epsilon$  in (6.2.13) verschwinden. In der LDA lässt sich in (6.2.10)

$$\frac{1}{\Gamma(-Z_0 - \epsilon L)} = (-Z_0 - \epsilon L) + \dots \quad (6.2.15)$$

setzen. Damit bekommt man

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{sub}(Q^2, Q_0^2, z) &= \left[ \frac{\partial}{\partial(1-z)} \exp \left\{ 2 \tilde{K} [(1-z)^{-\epsilon} - 1] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - Z_0 \log(1-z) \right\} \right]_+ + \delta(1-z) \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

Entwickelt man das Argument der Exponentialfunktion nach  $\epsilon$ , so nimmt (6.2.16) die Form

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{sub}(Q^2, Q_0^2, z) &= \left[ \frac{\partial}{\partial(1-z)} \exp \left\{ G_F \frac{ds}{\pi} \log(1-z) \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left( \log \frac{Q^2}{\mu^2} + \frac{1}{2} \log(1-z) - \frac{1}{\epsilon} - Z_0 \frac{\tilde{K}}{ds G_F} \right) \right\} \right]_+ + \delta(1-z) \end{aligned} \quad (6.2.17)$$



an. Um die Massensingularitäten aus (6.2.17) endgültig zu entfernen, wählen wir

$$Z_0 = -C_F \frac{ds}{\pi} \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{Q^2}{Q_0^2} \right)^{-\epsilon} \quad (6.2.18)$$

Damit erhalten wir das Resultat für feste Koppungskonstante

$$\tilde{F}^{sub}(Q^2, Q_0^2, z) = \left[ C_F \frac{ds}{\pi} \frac{1}{1-z} \left( \log \frac{Q^2}{Q_0^2} - \log(1-z) \right) \right]$$

$$\cdot \exp \left\{ C_F \frac{ds}{\pi} \log(1-z) \left[ \log \frac{Q^2}{Q_0^2} + \frac{1}{2} \log(1-z) \right] \right\} \Big]_+ + \delta(1-z) \quad (6.2.19)$$

Die Momente  $M_n^0(Q_0^2, \epsilon)$  und  $M_n^{sub}(Q^2, Q_0^2)$  lassen sich aus (6.2.10) und (6.2.11) unter Ausnutzung der Identität

$$\int_0^1 dz z^a \left( \log \frac{1}{z} \right)^{a-1} \frac{1}{\Gamma(a)} = n^{-a} \left( 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right) \quad (6.2.20)$$

ableiten. Man erhält

$$M_n(Q^2) = \exp \left\{ -2 \tilde{K} \left( 1 - n^\epsilon \right) \right\} \quad (6.2.21a)$$

$$M_n^{sub}(Q^2, Q_0^2) = \exp \left\{ C_F \frac{ds}{\pi} \log \frac{1}{n} \left( \log \frac{Q^2}{Q_0^2} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{n} \right) \right\} \quad (6.2.21b)$$

und



$$M_n^0(Q_0^2, \frac{1}{\epsilon}) = \exp \left\{ -Z_0 \log n \right\} \quad (6.2.22)$$

An dieser Stelle ist es aufschlußreich, (6.2.3) und (6.2.21a) miteinander zu vergleichen. Das asymptotische Verhalten der Momente ist durch die gleiche Funktion gegeben wie das Quadrat des Sudakov-Formfaktors, wobei lediglich

$\tau$  durch  $\gamma_n$  ersetzt werden muß. Diese Korrespondenz gilt allerdings nur auf den Niveau der LDLA. Den ersten Term in der Exponentialfunktion von (6.2.21b)  $\sim \log \frac{1}{n} \log \frac{Q^2}{Q_0^2}$  erhält man gewöhnlich als Lösung der RGE, während der zweite Term der Koeffizientenfunktion zuzuordnen ist. Es ist bemerkenswert, daß man hier den Limes  $n \rightarrow \infty$  der anomalen Dimensionen  $\gamma(n)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n) = 8 G_F \log n \quad (6.2.23)$$

alleine aus dem ON/OFF Sudakov-Formfaktor abgeleitet hat. Eine ähnliche Relation liegt auch der Argumentation in [ MU 79 ] zugrunde.

### 6.3 Einbeziehung der gleitenden Kopplungskonstanten

Im Rahmen des Klassifikationsschemas aus 6.1 ist die Variation der Kopplungskonstanten ein nichtführender Effekt. Daher kann in der LDLA nur eine feste Kopplungskonstante auftreten. Allerdings ist die Variation der Kopplungskonstanten

$$d_s(Q^2) = \frac{4\pi}{b} \frac{1}{\log(Q^2/\Lambda^2)} \quad (6.3.1)$$

$$b = \frac{22 G_F - 4 T(R)}{3} \quad T(R) = \frac{1}{2} n_f \quad (6.3.2)$$



eine Erscheinung, die zu wichtig ist, um einfach vernachlässigt zu werden. Glücklicherweise wissen wir, daß eine teilweise Aufsummation der großen Logarithmen in  $Q^2$  mittels der RGE vorgenommen werden kann. Wir werden eine Berücksichtigung der  $Q^2$ -Variation der Kopplungskonstanten durch einen Vergleich von (6.2.21) mit der allgemeinen Lösung der RGE erreichen.

Die Formulierung der RGE in  $d$  Dimensionen, wie sie hier benötigt wird, läßt sich beispielsweise [FL 77, CU 80b] entnehmen. Die  $\beta$ -Funktion in  $d$  Dimensionen  $\beta(g, \epsilon)$  ist durch

$$\beta(g, \epsilon) = \beta(g) - g \epsilon \quad (6.3.3)$$

gegeben. Wir bezeichnen den  $\beta(g) \rightarrow 0$  Limes der gleitenden Kopplungskonstanten  $\alpha_s(Q^2)$  in  $d$  Dimensionen mit  $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ .  $\bar{\alpha}_s(Q^2)$  ist gleich

$$\bar{\alpha}_s(Q^2) = \alpha_s(\mu^2) \left( \frac{Q^2}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \quad (6.3.4)$$

Setzt man

$$\gamma(n, \alpha_s) = \frac{\alpha_s}{4\pi} \gamma(n) + \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \gamma_1(n) + \dots, \quad (6.3.5)$$

so hat die Lösung der RGE die Form

$$M_n^{CUB}(Q^2, Q_0^2) = \left( \alpha_s(Q^2) / \alpha_s(Q_0^2) \right)^{-\frac{\gamma(n)}{2b}} \quad (6.3.6)$$

$$\exp \frac{1}{2b} \left[ -\frac{\gamma(n)}{4\pi} (\alpha_s(Q^2) - \alpha_s(Q_0^2)) + \dots \right] G_n(\alpha_s(Q^2)),$$

wobei die  $G_n(\alpha_s(Q^2))$  die Momente der Koeffizientenfunktion aus der Operatorproduktentwicklung sind. Ein ähnlicher Aus-



druck ergibt sich für  $M_n(Q^2, \frac{1}{\epsilon})$ . Im Limes  $b \rightarrow 0$  nimmt  $M_n(Q^2, \frac{1}{\epsilon})$  die Form

$$M_n(Q^2, \frac{1}{\epsilon}) = \exp \left\{ \frac{1}{2\epsilon} \left[ \frac{\bar{\alpha}_s(Q^2)}{4\pi} f(n) + \left( \frac{\bar{\alpha}_s(Q^2)}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{2} f_1(n) + \dots \right] \right\} G_n(\bar{\alpha}_s(Q^2)) \quad (6.3.7)$$

an. Durch Vergleich von (6.3.7) mit (6.2.21a) kann  $f(n)$  und  $G_n(\bar{\alpha}_s(Q^2))$  bestimmt werden. In der LDLA ist  $f_k(n) = 0$  für  $k \geq 1$ . Setzt man die so gefundenen Funktionen wiederum in (6.3.6) ein, so erhält man die durch die RGE verbesserte LDLA

$$M_n^{SUD}(Q^2, Q_0^2) = \exp \left\{ \frac{\bar{\alpha}_s(Q^2)}{2\pi} C_F \log^2 n \right\} \left( \frac{\bar{\alpha}_s(Q^2)}{\bar{\alpha}_s(Q_0^2)} \right)^{\frac{4C_F}{b} \log n} \quad (6.3.8)$$

Selbstverständlich kann die gleitende Kopplungskonstante auf die gleiche Weise auch in den ON/OFF Sudakov-Formfaktor einbezogen werden

$$\Gamma_{ON/OFF}(\epsilon, Q^2) = \exp \left\{ -\frac{2C_F}{b} \log \tilde{\tau} \log \left( \frac{\frac{b}{4\pi} \bar{\alpha}_s(Q^2) + \epsilon}{\epsilon} \right) + C_F \frac{\bar{\alpha}_s(Q^2)}{4\pi} \log^2 \tilde{\tau} \right\} \quad (6.3.9)$$

Leider können (6.3.7) und (6.2.21a) nicht verglichen werden, ohne daß  $(1 - n^\epsilon)$  in (6.2.21a) nach  $\epsilon$  entwickelt wird. Deshalb ist es nicht möglich, den ON Sudakov-Formfaktor durch das Verschwindenlassen von  $\tilde{\tau}$  aus (6.3.9) zu erhalten.



## 6.4 Vergleich

In diesem Abschnitt möchten wir unser Resultat mit Vorschlägen vergleichen, wie sie in der Literatur zu finden sind.

In [GR 72, DO 77] ist das asymptotische Verhalten der Strukturfunktionen für große  $Q^2$  außerhalb der quasielastischen Region, wo nur die Einzellogarithmen  $\log Q^2$  eine Rolle spielen, untersucht worden. Es wird gezeigt, daß nach Wahl einer axialen Eichung nur Leitergraphen zur führenden logarithmischen Näherung beitragen. Ihre Aufsummation liefert

$$M^{SUB}(Q^2, Q_0^2) = \exp \left\{ 2C_F \int_0^1 dy y^n \left[ \frac{1+y^2}{1-y} \right]_+ \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dk^2}{k^2} ds(k^2) \right\} \quad (6.4.1)$$

Wie in [GR 72, DO 77] behauptet wird, lassen sich die doppellogarithmischen Korrekturen in der quasielastischen Region dadurch aufsummieren, daß man die exakten kinematischen Grenzen jedes Leiterimpulses berücksichtigt.

Dies führt dazu, daß in (6.4.1) die Substitution  $Q^2 \rightarrow Q^2(1-y)$  der oberen Grenze der  $k^2$ -Integration vorgenommen werden muß. Da die Unterschiede zwischen der modifizierten Form von (6.4.1) und unserem Resultat (6.3.8) nichtführend sind, sind beide Ergebnisse kompatibel.

Eine andere Lösung ist in [AM 80] vorgeschlagen worden. Man erhält sie aus (6.4.1), indem man das Argument der Kopplungskonstanten  $ds(k^2)$  in  $k^2(1-y)$  umändert. Dies impliziert, daß im Limes  $\beta(g) \rightarrow 0$ , für feste Kopplungskonstante, kein Unterschied zwischen (6.4.1) und der modifizierten Form besteht. Solch ein Verhalten wird von unserer Rechnung nicht bestätigt. Der Grund dieser Dis-



krepanz ist leicht gefunden. In [AM 80] ergibt sich die modifizierte Form von (6.4.1) als Lösung einer modifizierten Altarelli-Parisi-Gleichung [AL 77]. Die Modifikation der Altarelli-Parisi-Gleichung besteht in der gleichen Ersetzung des Arguments der gleitenden Kopplungskonstanten wie für (6.4.1). Diese modifizierte Form der Altarelli-Parisi-Gleichung wird in [AM 80] mit der Randbedingung  $M_n^{s_{03}}(Q_0^2, Q_0^2) = 1$  integriert. Da jedoch zumindest ein Teil der doppellogarithmischen Effekte mit der Koeffizientenfunktion identifiziert werden muß, ist die korrekte Randbedingung  $M_n^{s_{03}}(Q_0^2, Q_0^2) = C_n(\lambda_s(Q_0^2))$ .

Eine dritte Lösung ist in [BR 79] vorgeschlagen worden. Im Gegensatz zum Vorschlag von [GR 72, DO 77], der die Integrationsgrenzen sämtlicher Leiterimpulse korrigiert, wird in [BR 79] nur die Integrationsgrenze des transversalen Leiterimpulses der härtesten Leiterzelle abgeändert. Es wird behauptet, daß diese Vorschrift einen zusätzlichen Beitrag  $\delta q(z, Q^2)$  zur Strukturfunktion liefert

$$\tilde{F}(Q^2, z) \sim q(z, Q^2) + \delta q(z, Q^2) \quad (6.4.2)$$

wobei  $q(z, Q^2)$  die gewöhnliche einzellogarithmische Parton-Verteilungsfunktion ist. Um den Vorschlag von [BR 79] mit unserem Resultat vergleichen zu können, haben wir den Limes fester Kopplungskonstanten der Größe

$$\frac{q(z, Q^2) + \delta q(z, Q^2)}{q(z, Q^2)} \quad (6.4.3)$$

berechnet. Mit den Ergebnissen aus [BR 79] folgt, daß

$$\frac{q(z, Q^2) + \delta q(z, Q^2)}{q(z, Q^2)} = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!} \left[ C_F \frac{ds}{\pi} \log^2(1-z) \right]^{i-1} \quad (6.4.4)$$



Mit unserem eigenen Resultat (6.2.19) gilt

$$\frac{q(z, Q^2) + \delta q(z, Q^2)}{q(z, Q^2)} = \left\{ 1 - \frac{\log(1-z)}{\log Q^2/Q_0^2} \right\} \exp \left\{ \frac{C_F \alpha_s}{2\pi} \log^2(1-z) \right\} \quad (6.4.5)$$

Die Diskrepanz ist offensichtlich.

In [CA 80,81] sind nichtführende Logarithmen analysiert worden. Es wird behauptet, daß alle großen Logarithmen  $(\alpha_s \log n)^i$ ,  $i > 2$  die möglicherweise zu den anomalen Dimensionen  $\gamma(n)$  beitragen könnten, nicht auftreten. Nicht-führende Korrekturen zu der Koeffizientenfunktion werden dort allerdings nicht diskutiert. Aufgrund des engen Zusammenhangs beider Effekte, ist es nicht unwahrscheinlich, daß auch die logarithmischen Korrekturen zu der Koeffizientenfunktion stark reduziert werden.



7.

### Die Aufsummation großer Korrekturen zum elektromagnetischen Formfaktor des Pions

In diesem Kapitel möchten wir die Resultate der Berechnung von großen Korrekturen zum elektromagnetischen Formfaktor des Pions in der perturbativen QCD vorstellen. In der Einleitung wurde darauf hingewiesen, daß durch den Beweis der Faktorisierung der Massensingularitäten in einer Reihe von inklusiven Prozessen der Anwendungsbereich der störungstheoretischen QCD entscheidend erweitert wurde. In paralleler Weise läßt sich auch für verschiedene exklusive Prozesse die Faktorisierung der Massensingularitäten nachweisen [EF 80, LE 79, 80, DU 80]. Die Wahl einer axialen Eichung führt zu einigen Vereinfachungen, stellt jedoch keine unbedingte Voraussetzung dar. In dieser Eichung läßt sich ein exklusiver Prozeß, insofern die Massensingularitäten faktorisieren, durch eine Konvolution der Amplitude  $\bar{T}_H$  des harten Anteils der Parton-Streuung mit je einer Wellenfunktion  $\phi(x, Q^2)$  für jedes beteiligte Hadron beschreiben, die lediglich die Valenzzustände enthält. Nicht-Valenzzustände sind mit einem Faktor  $1/Q^2$  unterdrückt.

Der harte Anteil  $\bar{T}_H$  wird durch den kurzreichweiten Teil der Wechselwirkung bestimmt. Er ist frei von Massensingularitäten. Daher ist eine Entwicklung in  $\alpha_s(Q^2)$  sinnvoll. In der Operatorproduktentwicklung entspricht dieser Anteil der Koeffizientenfunktion. Für eine weite Klasse von exklusiven Prozessen erfüllt  $\bar{T}_H$  die "Dimensional-Counting-Rules" [BR 73, MA 73].

Die Wellenfunktion  $\phi(x, Q^2)$  hingegen entspricht einer Summe hadronischer Matrixelemente von Operatoren der Operatorproduktentwicklung. Sämtliche kollinearen Singularitäten



können in  $\phi(x, Q^2)$  faktorisiert werden.  $\phi(x, Q^2)$  repräsentiert den langreichweiten Anteil der Wechselwirkung, der dem Zugang mittels Methoden der störungstheoretischen QCD prinzipiell verschlossen ist. Was allerdings berechnet werden kann, ist die  $Q^2$ -Abhängigkeit dieser Wellenfunktion. In einem gewissen Sinne spielen die Wellenfunktionen bei den exklusiven Prozessen die gleiche Rolle wie die Parton-Verteilungsfunktionen und Fragmentationsfunktionen bei den inklusiven Prozessen.

Ein typisches Beispiel für solch einen exklusiven Prozess ist der elektromagnetische Formfaktor des Pions, dem wir uns in diesem Kapitel widmen werden. Entsprechend dem skizzierten Bild der exklusiven Prozesse in der QCD wird der Pion-Formfaktor durch

$$F_\pi(Q^2) = \int_{-1}^{+1} dx \int_{-1}^{+1} dy \phi^+(y, Q^2) T_H(x, y, Q^2) \phi(x, Q^2) \quad (7.0.1)$$

beschrieben. Abb. 7.1 stellt diese Relation anschaulich dar.

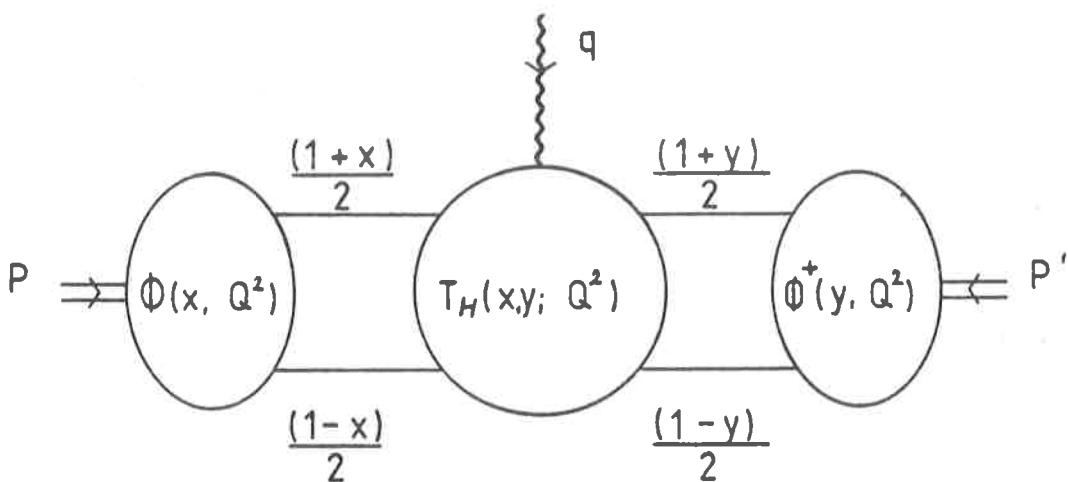


Abb. 7.1 Der Pion-Formfaktor in der störungstheoretischen QCD



$p$  ( $p'$ ) ist der Impuls des einlaufenden (auslaufenden) Pions. Das virtuelle Photon trägt den Impuls

$$q = -(\mathcal{P} + \mathcal{P}') \quad (7.0.2)$$

mit

$$Q^2 = -q^2 \quad (7.0.3)$$

und  $(1 \pm x)/2$  ( $(1 \pm y)/2$ ) sind die Anteile der longitudinalen Impulse der Valenzpartonen vom Impuls des Pions  $p$  ( $p'$ ). In niedrigster Ordnung in  $\alpha_s$  tragen lediglich die beiden in Abb. 7.2 gezeigten Graphen zum harten Anteil bei

$$T_H^0(x, y, Q^2) = 16\pi G_F \frac{\alpha_s(Q^2)}{Q^2} \frac{1}{(1-x)(1-y)} \quad (7.0.4)$$

Wie man aus (7.0.4) ersieht, ist  $T_H^0(x, y, Q^2)$  an den Stellen  $x=1$  und  $y=1$  singulär. Deshalb ist die Darstellung (7.0.1) nur sinnvoll, falls die Wellenfunktion  $\phi(x, Q^2)$  in der Endpunktregion so stark verschwindet, daß das Integral konvergiert. Jedoch selbst dann muß damit gerechnet werden, daß der Hauptbeitrag zu  $\bar{T}_H(Q^2)$  aus der

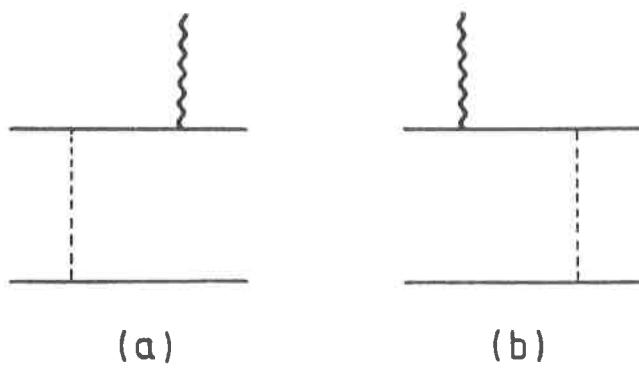


Abb. 7.2 Führende Beiträge zu  $T_H(x, y, Q^2)$



Endpunktregion kommt. Dies hängt ganz von der speziellen Form von  $\phi(x, Q^2)$  ab. Es ist davon auszugehen, daß die Singularität in (7.0.4) durch logarithmische Korrekturen noch verstärkt wird. Daher kann nicht ausgeschlossen werden, daß die Störungsreihe von  $\tilde{T}_\mu(Q^2)$  divergiert. 1-Schleifen-Korrekturen zu (7.0.4) sind von verschiedenen Gruppen berechnet worden [FI 81, DI 81]. Die Endpunktregion ist besonders in [DI 81] untersucht worden. Es wurden große Korrekturen gefunden.

Wir haben die führenden doppellogarithmischen Korrekturen zu (7.0.4) bis zur 2-Schleifen-Ordnung berechnet. Unser Resultat deutet darauf hin, daß die führenden doppellogarithmischen Korrekturen exponentieren. Unter der Annahme, daß dies in allen Ordnungen geschieht, wird das Integral (7.0.1) tatsächlich divergent. Die Singularität wird dadurch hervorgerufen, daß die Entwicklung von  $\tilde{T}_\mu(x, y, Q^2)$ , die mit (7.0.4) beginnt, nicht gilt, falls  $x = 1$  oder  $y = 1$ . Diese Singularität kann vermieden werden, indem man die Integrationsgrenzen in (7.0.1) mit größerer Sorgfalt behandelt. Geschieht dies, so wird die Endpunktregion für große  $Q^2$  unterdrückt.

Es sei auf die Analogie zum Verhalten der Strukturfunktion in der quasielastischen Region hingewiesen, wie es im letzten Kapitel abgeleitet wurde. Das Verhalten, das dort gefunden wurde, läßt sich qualitativ folgendermaßen erklären. Aufgrund des in der quasielastischen Region stark eingeschränkten Phasenraumes ist die Abstrahlung von reellen weichen Quanten stark unterdrückt, so daß eine Neutralisierung der Infrarotsingularitäten zwischen reellen und virtuellen Korrekturen dem Kinoshita-Lee-Nauenberg Theorem entsprechend nur noch teilweise stattfinden kann und die virtuellen Singularitäten überwiegen.



Die Vermutung liegt nahe, daß die Region  $x, y \approx 1$  des Pion-Formfaktors auf ähnliche Weise unterdrückt wird. Die Beiträge individueller Graphen zum Pion-Formfaktor weisen, genau wie zur tiefinelastischen Streuung, Infrarotsingularitäten auf, die durch die verschwindende Masse des Gluons hervorgerufen werden. Nun können farblose Quark-Antiquark-Systeme, wie sie von Mesonen gebildet werden, nicht durch den Austausch weicher Gluonen wechselwirken. Selbst der Austausch weicher Gluonen zwischen einem Meson und einem einzelnen Quark ist unterdrückt [ CO 76, CH 80 ]. In einer abelschen Theorie ist dieser Sachverhalt leicht einzusehen. Zu jedem singulären Beitrag, der durch die Kopplung eines weichen Gluons an ein Quark hervorgerufen wird, gibt es einen Partner, der Kopplung an das Antiquark, der sich lediglich durch das Vorzeichen unterscheidet. Ein ähnlicher Mechanismus arbeitet auch für nichtabelsche Theorien. Daher kürzen sich die Infrarotsingularitäten aus der Summe über alle Graphen, die zum Pion-Formfaktor beitragen, heraus. Die Farblosigkeit der Mesonen spielt für die exklusiven Prozesse also die gleiche Rolle, wie die Summe über die Endzustände für die inklusiven Prozesse. In der Region  $x, y \approx 1$  wird nun allerdings die Symmetrie zwischen Quark und Antiquark derart gestört, daß erwartet werden muß, daß der beschriebene Kürzungsmechanismus außer Kraft tritt. Diese Erwartung wird von unseren Ergebnissen bestätigt.

Der Rest dieses Kapitels ist folgendermaßen gegliedert. Im ersten Abschnitt werden wir kurz erläutern, auf welche Weise der Formfaktor des Pions in der störungstheoretischen QCD beschrieben wird. Der zweite Abschnitt befaßt sich mit dem Endpunktverhalten der Wellenfunktion. Im dritten Abschnitt werden wir dann die Resultate unserer Rechnung vorstellen und anschließend daraus (Abschnitt 4) den



harten Anteil isolieren. Im Abschnitt 5 wird illustriert werden, welche Konsequenzen die Aufsummation der führenden großen Korrekturen für den Formfaktor mit sich bringt. Abschnitt 6 schließlich ist einigen Schlußfolgerungen vorbehalten.

7.1 Der elektromagnetische Formfaktor des Pions in der perturbativen QCD

Die grundlegenden Eigenschaften des elektromagnetischen Formfaktors des Pions sind bereits in der Einführung zu diesem Kapitel beschrieben worden. In diesem Abschnitt möchten wir einige Details erläutern.

Mit

$$t = \log(d_s(Q_0^2)/d_s(Q^2)) \quad (7.1.1)$$

ergibt sich die Wellenfunktion  $\phi(x, Q^2)$  als Lösung von

$$\frac{d}{dt} \phi(z, t) = -\frac{1}{2} b \int_{-1}^{+1} dx V(z, x) \phi(x, t) \quad (7.1.2)$$

(7.1.2) kann nur dann vollständig gelöst werden, falls die "Anfangsbedingung"  $\phi(z, Q_0^2)$  bekannt ist. Der Bezugspunkt  $Q_0^2$  kann prinzipiell beliebig gewählt werden. Die Gleichung (7.1.2) ist das Analogon zur Altarelli-Parisi-Gleichung [AL 77]. Wie schon im letzten Kapitel, so wählen wir auch hier  $Q_0^2 \ll Q^2$ . In niedrigster Ordnung ist der Brodsky-Lepage-Kern  $V(z, x)$  gleich

$$V(z, x) = -2 C_F \left\{ \frac{1+z}{1+x} \left[ 1 + \frac{2}{(x-z)_+} \right] \Theta(x-z) \right\} \quad (7.1.3)$$



$$+ \frac{1-z}{1-x} \left[ 1 + \frac{2}{(z-x)_+} \right] \Theta(z-x) - \delta(z-x) \quad \} \quad (6.1.10)$$

Die  $[ ]_+$ -Regularisierung ist hier im Unterschied zu (6.1.10) durch

$$\frac{1}{(x-z)_+} = \frac{1}{x-z} - \delta(x-z) \int_{-1}^x dy \frac{1+y}{1+x} \frac{1}{x-y} \quad (7.1.4)$$

definiert.

Zur Lösung der Entwicklungsgleichung (7.1.2) bestimmt man zunächst die Eigenfunktionen  $f_n(x)$  in

$$\int_{-1}^{+1} dx V(z,x) f_n(x) = \gamma(n) f_n(z) \quad (7.1.5)$$

Durch Ausnutzen der Symmetrie von  $V(z,x)$  bei Vertauschung der Argumente lässt sich zeigen, daß  $f_n(x)$  im wesentlichen durch die Gegenbauer Polynome  $C_n^{3/2}$  (siehe Anhang D) bestimmt ist

$$f_n(x) = (1-x^2) C_n^{3/2}(x) \quad (7.1.6)$$

Das Auftreten dieser Orthogonalpolynome ist eine Konsequenz der Tatsache, daß gerade konform kovariante Operatoren die RGE diagonalisieren [OH 82]. Für die Eigenwerte  $\gamma(n)$  ergeben sich die schon von der tiefinelastischen Streuung her bekannten anomalen Dimensionen

$$\gamma(n) = -2 C'_n \left\{ \frac{2}{(1+n)(2+n)} - 1 - 4 \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \right\} \quad (7.1.7)$$

Daß hier die gleichen anomalen Dimensionen auftreten wie in der tiefinelastischen Streuung, liegt an der Verwandt-



schaft der entsprechenden Operatoren. Damit schreibt sich die allgemeine Lösung von (7.1.2) als

$$\phi(x, Q^2) = (1-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n^{3/2}(x) \exp\left\{-\frac{\gamma(n)}{2b} t\right\} \quad (7.1.8)$$

Aufgrund der Orthogonalität der Gegenbauer Polynome lassen sich die Koeffizienten  $a_n$  aus der Wellenfunktion  $\phi(x, Q_0^2)$  berechnen

$$a_n = \frac{1}{b_n} \int_{-1}^{+1} dx \phi(x, Q_0^2) C_n^{3/2}(x) \quad (7.1.9)$$

Sie entsprechen den Matrixelementen der aus zwei Quarkfeldern aufgebauten Operatoren, die ein Pion repräsentieren, zwischen dem Vakuum und dem Einpionenzustand. Im Rahmen der störungstheoretischen QCD müssen diese Koeffizienten bzw. die Wellenfunktion  $\phi(x, Q_0^2)$  als Inputgrößen angesehen werden. Eine experimentelle Bestimmung ist zwar prinzipiell möglich [BA 80], praktisch jedoch äußerst schwierig. Daher bleibt beim momentanen Stand der Dinge nur der Rückgriff auf Modellannahmen für  $\phi(x, Q_0^2)$  übrig.

Eine Ausnahme macht der Koeffizient  $a_0$ . Er lässt sich in Beziehung zur Zerfallskonstante des Pions  $f_{\pi} \approx 0.093 \text{ GeV}$  setzen

$$a_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} f_{\pi} \quad (7.1.10)$$

Damit ist die Normierung der Wellenfunktion festgelegt

$$\int_{-1}^{+1} dx \phi(x, Q^2) = \frac{1}{\sqrt{3}} f_{\pi} \quad (7.1.11)$$



Die anomalen Dimensionen haben die Eigenschaft, daß  $\gamma(n) > 0$  ist für alle  $n > 0$ , lediglich  $\gamma(0) = 0$ . Daher sind im ultrahochrelativistischen Limes  $Q^2 \rightarrow \infty$  alle Beiträge zu (7.1.8) mit  $n > 0$  durch gebrochenzahlige Potenzen von  $e^t$  unterdrückt

$$\lim_{Q^2 \rightarrow \infty} \phi(x, Q^2) = (1 - x^2) a_0 \quad (7.1.12)$$

Damit erhält man

$$\lim_{Q^2 \rightarrow \infty} \bar{F}_\pi(Q^2) = 12 \pi G_F \alpha_s(Q^2) f_\pi^2 / Q^2 \quad (7.1.13)$$

Wie schnell die Wellenfunktion  $\phi(x, Q^2)$  die asymptotische Form (7.1.12) erreicht, hängt ganz von  $\phi(x, Q_0^2)$  ab. Hat  $\phi(x, Q^2)$  beispielsweise exakt die asymptotische Form (7.1.12), so gilt dies auch für alle anderen Werte von  $Q^2$ . Weicht  $\phi(x, Q_0^2)$  hingegen stark von (7.1.12) ab, so wird die asymptotische Form erst für sehr große Werte von  $Q^2$  angenommen.

Wird die Brechung der Flavour-Symmetrie vernachlässigt, so ist

$$\phi(x, Q^2) = \phi(-x, Q^2) \quad (7.1.14)$$

Dann tragen in (7.1.8) nur gerade  $n$  bei.

Da die Details des Bindungsmechanismus des Pions in die Beschreibung des Formfaktors lediglich durch die Koeffizienten  $a_n$  einfließen, kann an die Stelle des Pions jedes andere pseudoskalare Teilchen treten. Dabei darf die Bedingung, daß  $Q^2$  groß gegenüber sämtlichen Massen ist, allerdings nicht verletzt werden.



Ein gewisses Problem stellt der Vergleich von (7.0.1) mit den experimentellen Daten dar. Nimmt man einmal an, daß  $\phi(x, Q^2)$  schon früh das asymptotische Verhalten (7.1.12) erreicht, (7.1.13) also auch für niedrige  $Q^2$  gilt, so liegt der Wert von (7.1.13) im Bereich von  $Q^2 \approx 5 \text{ GeV}^2$  bis  $Q^2 \approx 10 \text{ GeV}^2$  um etwa einen Faktor 4 unter den experimentellen Daten [DO 82], während die Übereinstimmung für kleine  $Q^2$  besser wird. Es ist daher anzunehmen, daß die Wellenfunktion in diesem Bereich stark von der asymptotischen Form abweicht. In Abschnitt 7.5 werden wir zeigen, daß eine geeignete Berücksichtigung der Endpunktregion tatsächlich zu einer Form von  $F_\eta(Q^2)$  führen kann, die eher im Einklang mit den experimentellen Daten zu stehen scheint.

## 7.2 Das Endpunktverhalten der Wellenfunktion

### 7.2.1 Das Endpunktverhalten von $\phi(x, Q_0^2)$

Wie bereits in der Einleitung dieses Kapitels herausgestellt wurde, macht der Ausdruck (7.0.1) nur Sinn, falls die Wellenfunktion in der Region  $x \approx 1$  genügend stark verschwindet. Formal reicht es aus, daß

$$\lim_{x \rightarrow 1} \phi(x, Q^2) < (1-x)^\eta \quad \eta > 0 \quad (7.2.1)$$

Damit ist die Konvergenz des Integrals in (7.0.1) gewährleistet.

In [LE 80] wird argumentiert, daß Lösungen der homogenen Bethe-Salpeter-Gleichung die Randbedingung (7.2.1)



tatsächlich erfüllen. Selbst falls dies zutrifft, so bleiben doch zwei außerordentlich wichtige Fragen unbeantwortet. Nämlich erstens, inwiefern es gerechtfertigt ist, die Wellenfunktion beispielsweise eines leichten Mesons, wie des Pions, als Lösung einer homogenen Bethe-Salpeter-Gleichung zu betrachten und zweitens, nach der Größe von  $\eta$ . Da die Endpunktregion einen Beitrag der Größenordnung  $1/\eta$  zu  $F_\pi(Q^2)$  liefert, ist ein genügend starkes Verschwinden der Wellenfunktion offenbar Voraussetzung für die Abwesenheit von anomal großen Beiträgen aus dieser Region.

In der Tat stellt es sich heraus, daß die Endpunktregion von  $\phi(x, Q^2)$  unter gewissen Voraussetzungen nur wenig unterdrückt ist. So ist beispielsweise die nicht-relativistische Wellenfunktion eines aus einem schweren Quark der Masse  $M$  und einem leichten Quark der Masse  $m$  zusammengesetzten Mesons in der Nähe von  $(1-x)/2 \approx m/(m+M)$  stark überhöht [HO 81, LE 82, CH 82]. In [JO 82] wird als Ansatz für die Wellenfunktion eines solchen Teilchens

$$\phi(x, Q_0^2) \sim \delta\left(x - \frac{M-m}{M+m}\right) \quad (7.2.2)$$

vorgeschlagen, wobei sich  $Q_0^2$  in der Größenordnung von  $1 \text{ GeV}^2$  bewegt. Läßt man einmal die  $Q^2$  Variation von  $\phi(x, Q^2)$  außer acht, so führt (7.2.2) zusammen mit (7.0.4) zu einer starken Erhöhung des Wertes von  $F_\pi(Q^2)$  gegenüber dem Formfaktor eines Mesons, das aus etwa gleich schweren Quarks besteht.

### 7.2.2 Die $Q^2$ -Variation des Endpunktverhaltens

Wir haben bisher die  $Q^2$  Variation der Wellenfunktion  $\phi(x, Q^2)$  außer acht gelassen. Wie (7.1.12) jedoch zeigt,



muß die Änderung des Endpunktverhaltens mit  $Q^2$  eine wichtige Rolle spielen. Da bekannt ist, wie sich  $\phi(x, Q^2)$  mit  $Q^2$  ändert, läßt sich dieser Effekt ohne weiteres ableiten.

Ist die Reihe, durch die die Wellenfunktion  $\phi(x, Q^2)$  in (7.1.8) dargestellt wird, gleichmäßig konvergent, so verschwindet  $\phi(x, Q^2)$  wenigstens wie  $(1-x)$ , die Endpunktregion spielt also keine Rolle. Umgekehrt erfordert ein Verschwinden von  $\phi(x, Q^2)$  schwächer als  $(1-x)$ , daß die Summe in (7.1.8) für  $x = 1$  divergiert. Da jeder einzelne Beitrag endlich ist, wird der führende divergente Anteil durch das Verhalten von  $a_n \exp\{-\gamma(n)t/2b\}$  für  $n \rightarrow \infty$  festgelegt. Der Limes  $n \rightarrow \infty$  von  $a_n$  wiederum wird durch das Endpunktverhalten der Wellenfunktion  $\phi(x, Q_0^2)$  bestimmt. Es sei denn, die Reihe, die  $\phi(x, Q_0^2)$  darstellt, ist gleichmäßig konvergent. Es sei

$$\phi(x, Q_0^2) = (1-x^2)(1-x)^{2-1} \quad (7.2.3)$$

mit  $\eta < 1$ , dann folgt aus (D.6)

$$\phi(x, Q^2) = (1-x^2) 2^n \left\{ \Gamma(1+\eta) / \Gamma(1-\eta) \right\} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n' G_n^{3/2}(x) \exp\{-\gamma(n)t/2b\} \quad (7.2.4)$$

mit

$$a_n' = (2n+3) \Gamma(n+1-\eta) / \Gamma(n+3+\eta) \quad (7.2.5)$$

Wegen

$$\Gamma(n+a) / \Gamma(n) = n^a (1 + \sigma(\frac{1}{n})) \quad (7.2.6)$$

(6.2.23) und (D.4) ist



$$a_n' C_n^{3/2} (1) \exp \left\{ -\gamma(n)t/2b \right\} = n^{1-2\eta - 4 \frac{G_F t}{b}} (1 + O(\alpha_s, \frac{1}{n})) \quad (7.2.7)$$

Ist  $\eta + 2G_F t/b > 1$ , so ist die Reihe in (7.2.4) gleichmäßig konvergent. Im umgekehrten Fall divergiert die Reihe für  $x = 1$ . Dann kann das Endpunktverhalten von  $\phi(x, Q^2)$  bestimmt werden, indem man die Schritte von (7.2.3) nach (7.2.7) umkehrt, mit dem Resultat

$$\lim_{x \rightarrow 1} \phi(x, Q^2) = (1-x)^{\eta + 2 \frac{G_F t}{b}} (1 + O(\alpha_s)) \quad (7.2.8)$$

$$\eta + 2G_F t/b < 1$$

Würden wir in (7.2.3) auch  $\eta = 1$  zulassen, so verschwinden in (7.2.4) alle Terme mit  $n > 1$ . Daher kann die Argumentation, die zu (7.2.8) geführt hat, nicht in den Bereich  $\eta \geq 1$  erweitert werden. Damit haben wir die Variation des Endpunktverhaltens bestimmt. Setzt man

$$\phi(x, Q^2) \sim (1-x)^{\eta(Q^2)} \quad (7.2.9)$$

so wird

$$\eta(Q^2) = \eta(Q_0^2) + 2G_F t/b \quad (7.2.10)$$

Die Endpunktregion wird also für  $Q^2 \gg Q_0^2$  stark unterdrückt. Ein ähnliches Verhalten ist schon in [DI 81, CH 81, JO 82] ermittelt worden. Es steht in Übereinstimmung mit (7.1.12). Sieht man einmal von möglichen Korrekturen zu  $T_H(x, y, Q^2)$  ab, so kann die Endpunktregion, falls überhaupt, nur für kleine Werte von  $Q^2$  ( $\eta(Q^2) < 1$ ) zu einer entscheidenden Abweichung vom asymptotischen Verhalten des Pion-Formfaktors (7.1.13) führen, die eventuell die Übereinstimmung mit den experimentellen Daten verbessert. Insbesondere ist ein Ansatz wie (7.2.3),



der nur das Endpunktverhalten richtig beschreibt, für  $\eta(Q^2) \gg 1$  nicht mehr gerechtfertigt. In [DI 81] wird für  $\eta(Q_0^2)$  die Abschätzung  $\eta(Q_0^2) = 0.2 \pm 0.1$  angegeben.  $Q_0^2$  liegt dabei in der Größenordnung  $6.5 \text{ GeV}^2$ .

Das Resultat (7.2.9) basiert auf der Näherung der anomalen Dimensionen  $\gamma(n, \alpha_s)$  durch die niedrigste Ordnung in  $\alpha_s$ . Dies lässt prinzipiell die Möglichkeit offen, daß höhere Ordnungen das Verhalten (7.2.9) wesentlich verändern. Die Übereinstimmung der anomalen Dimensionen des Formfaktors mit denen der tiefinelastischen Streuung gilt auch in höheren Ordnungen von  $\alpha_s$ . Explizit ist dies zur Ordnung  $\alpha_s^2$  in [SA 82] verifiziert worden. Es lässt sich daher von den Ergebnissen aus [CI 80] Gebrauch machen. Danach kann  $\gamma(n, \alpha_s)$  in der  $k$ -ten Ordnung ( $k \geq 2$ ) in  $\alpha_s$  höchstens wie  $\log^{k-1} n$  anwachsen. Dementsprechend haben die Korrekturen zu (7.2.12), die aus den Korrekturen zu  $\gamma(n, \alpha_s)$  resultieren, die Form

$$\alpha_s^i \log^k (1-x) \quad \text{mit } k < i \quad (7.2.11)$$

### 7.3 Die führende doppellogarithmische Näherung des Formfaktors in der Endpunktregion

Ein wesentlicher Beitrag zum Verhalten der Strukturfunktionen in der quasielastischen Region wurde von der Koeffizientenfunktion geliefert. Es ist daher zu erwarten, daß auch der harte Anteil  $T_H(x, y, Q^2)$  in der Endpunktregion durch Korrekturen höherer Ordnung zu (7.0.4) stark modifiziert wird. Um über solche Korrekturen nähere Aufschlüsse zu erhalten, haben wir die führenden doppellogarithmischen Korrekturen zum Formfaktor in der End-



punktrelation bis zur 2-Schleifen-Näherung berechnet. Die Resultate dieser Rechnung möchten wir in diesem Abschnitt vorstellen.

Dem Formfaktor entspricht die Parton-Amplitude  $T_p(u, v; Q^2)$  des Parton-Prozesses  $q\bar{q} + \gamma^* \rightarrow q\bar{q}$ . Sie wird in Abb. 7.3 dargestellt. Die Impulse der einlaufenden (auslaufenden) Quarks werden zu  $(1+u)p/2$  ( $(1+v)p'/2$ ) gewählt. Es ist

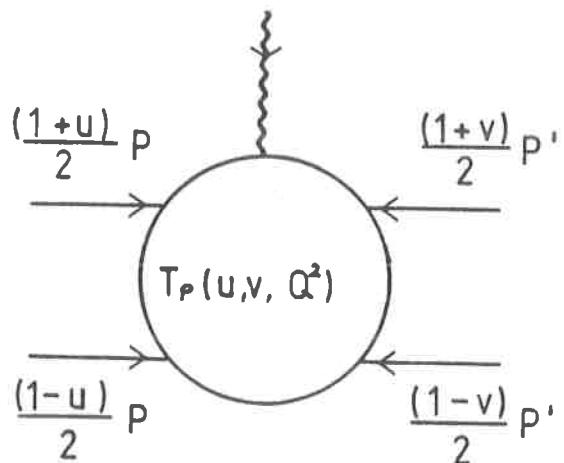


Abb. 7.3 Die Parton-Amplitude  $q\bar{q} + \gamma^* \rightarrow q\bar{q}$

$p^2 = p'^2 = 0$  und sämtliche Partonen sind masselos. Um den Eingangs-(Ausgangs-)zustand auf den Einpionzustand zu projizieren kontrahieren wir die der Abb. 7.3 entsprechende Amplitude auf der linken (rechten) Seite mit  $\rho_5$  ( $\rho'_5$ ). Üblicherweise ist der Formfaktor des Pions durch

$$\langle p' | j_\mu(O) | p \rangle = (\rho + \rho')_\mu \bar{F}_\pi(Q^2) \quad (7.3.1)$$

definiert.  $j_\mu(O)$  ist der elektromagnetische Strom. Die Form der rechten Seite von (7.3.1) ist eine Konsequenz der Eichinvarianz. Summiert man die Beiträge aller Dia-



gramme, der von Abb. 7.3 gezeigten Amplitude zu fester Ordnung von  $\alpha_S$  auf, so muß die Summe ebenfalls proportional zu  $(P+P')_\mu$  sein. Das gilt jedoch nicht für jeden einzelnen Graphen. Daher führt die Berücksichtigung nur solcher Beiträge, die beispielsweise zu  $\tilde{t}_\mu$  proportional sind, zu einer weitgehenden Vereinfachung der Rechnung. Technisch erreicht man dies, indem man den elektromagnetischen Strom einfach mit  $P'_\mu$  kontrahiert. Dies hat in der niedrigsten Ordnung zur Folge, daß der Graph (a) in Abb. 7.2 keinen Beitrag liefert.

Wir werden den Pion-Formfaktor durch eine Reihe approximieren, die im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  die Form

$$T_p(u, v, Q^2) = T_H^0(u, v, Q^2) \sum_{L=0}^{\infty} \alpha_S^L \cdot \sum_{j_1+j_2+j_3+j_4=2L} C_{j_1, j_2, j_3, j_4} \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{j_1} \left(\log \frac{Q^2}{\mu^2}\right)^{j_2} \left(\log \tilde{t}_1\right)^{j_3} \left(\log \tilde{t}_2\right)^{j_4} \quad (7.3.2)$$

aufweist, wobei

$$\tilde{t}_1 = (1-u)/2 \quad \text{und} \quad \tilde{t}_2 = (1-v)/2 \quad (7.3.3)$$

Die Bedingungen dafür, daß ein Beitrag in der LLDIA berücksichtigt wird, sind also, daß er singulär wie  $1/\epsilon, \tilde{t}_2$  ist und daß er außerdem in der  $(L+1)$ -ten Ordnung in  $\alpha_S$   $2L$  Logarithmen mit sich führt. Wie (7.3.2) zeigt, behandeln wir die Größen  $Q^2/\mu^2$ ,  $\tilde{t}_1$  und  $\tilde{t}_2$  bezüglich der Logarithmen so, als seien sie von der gleichen Größenordnung. Die Pole  $1/\epsilon$  werden durch kollineare Singularitäten verursacht. Daher gilt  $j_1 < L$ . Da wir wissen, daß die kollinearen Singularitäten faktorisieren, ist es im Prinzip ausreichend, nur solche Beiträge zu (7.3.2) zu berechnen, für die  $j_1 = 0$  ist. Daß wir dennoch sämtliche Infrarotsingularitäten  $1/\epsilon$  auf gleicher Stufe mit den



übrigen Logarithmen behandeln, hat zwei Gründe. Zum einen erfordert es technisch keinen Mehraufwand und zum anderen liefert es einen willkommenen Test unserer Ergebnisse. Es erweist sich als vorteilhaft, den Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  erst auszuführen, wenn die Beiträge sämtlicher Graphen aufsummiert worden sind.

Sämtliche Graphen, die einen nichtverschwindenden Beitrag zur LDLA liefern, werden in Abb. 7.4 gezeigt. Alle Graphen, die nicht gezeigt werden, sind entweder logarithmisch nichtführend oder aber ihr Farbfaktor  $G$  verschwindet. Graphen, die Fermionenloops enthalten, sind nicht berücksichtigt worden, da sie nicht logarithmisch führend sind. Der Beitrag eines einzelnen Graphen ist

$$T_p(u, v, Q^2) = T_H^0(u, v, Q^2) \left[ i \left( \frac{ds}{2\pi} \right) \left( \frac{Q^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon} \frac{1}{\epsilon^2} \right]^L G \mathcal{A} \quad (7.3.4)$$

worin  $L$  die Anzahl der Schleifen angibt. Die Größen  $G$  und  $\mathcal{A}$  sind in Tab. 7.1 aufgelistet. Wir benutzen die Abkürzungen

$$\begin{aligned} G_I &= G_F - G_A \\ G_{II} &= (G_F - G_A)(G_F - 2G_A) \\ G_{III} &= (G_F - G_A) G_A \\ G_{IV} &= G_F G_A \\ G_V &= G_A \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

In Kapitel 9 wird die Berechnung des Graphen 55 stellvertretend für alle Graphen im Detail erläutert. Die Resultate für die Graphen 1 bis 6 stehen in Überein-



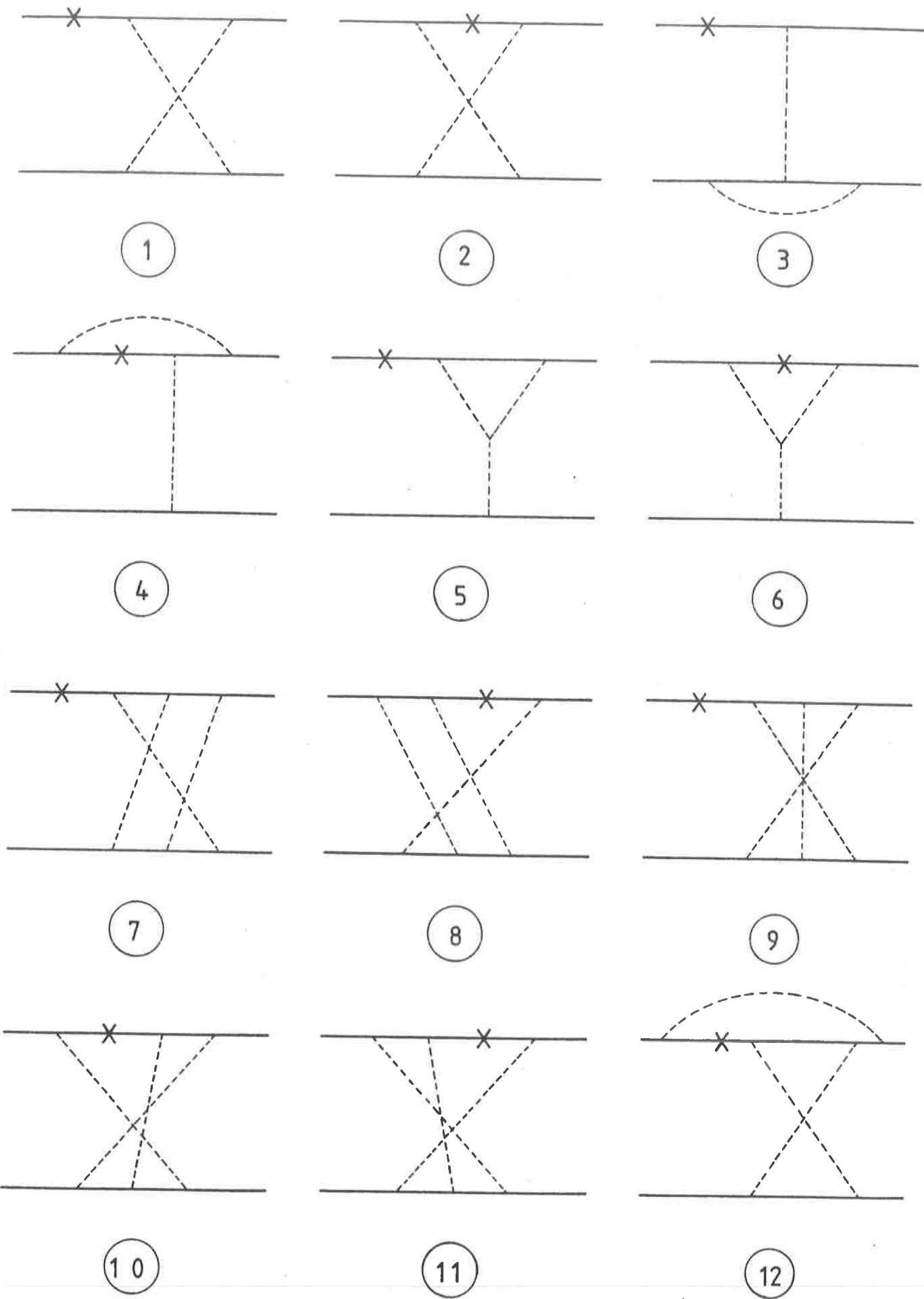
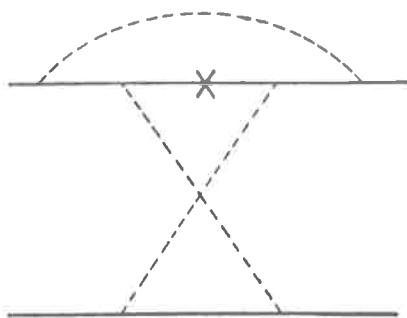
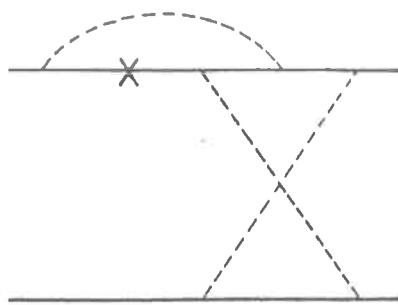


Abb. 7.4 Diagramme, die in der LDLA zu  $q\bar{q} + \gamma^* \rightarrow q\bar{q}$  beitragen  
 (X markiert den elektromagnetischen Strom)

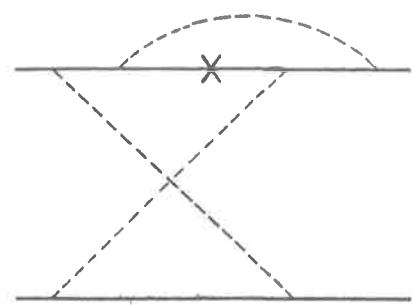




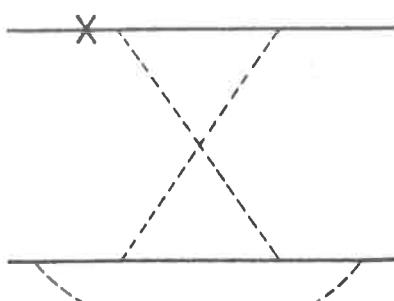
13



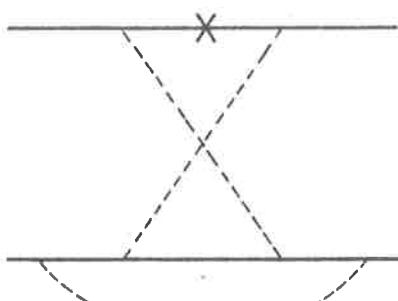
14



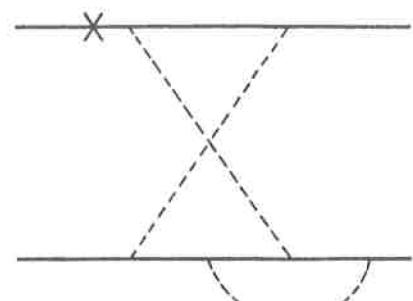
15



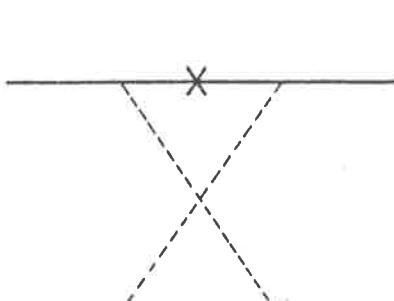
16



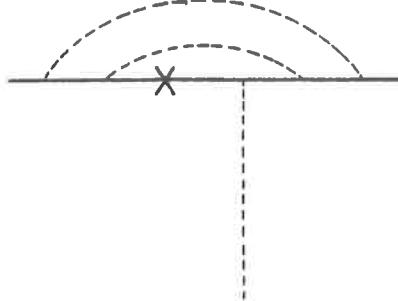
17



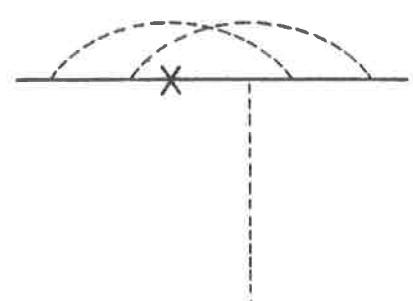
18



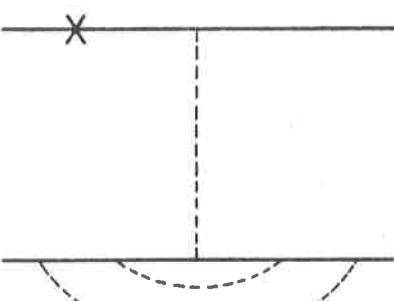
19



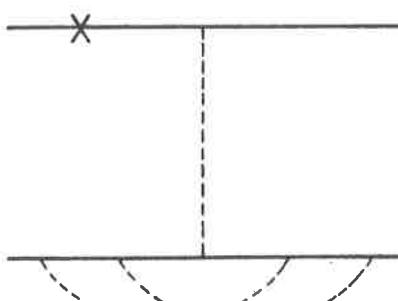
20



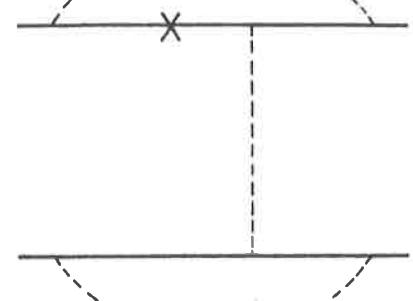
21



22



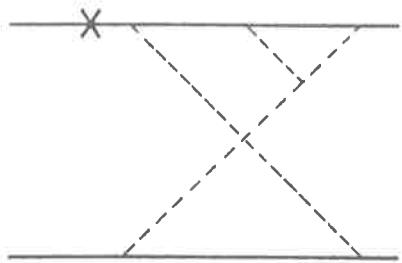
23



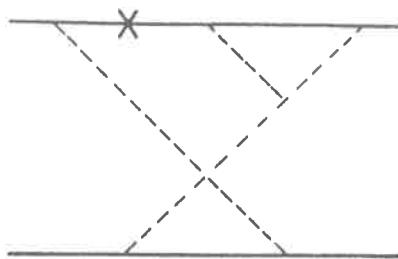
24

Abb. 7.4 (Fortsetzung)

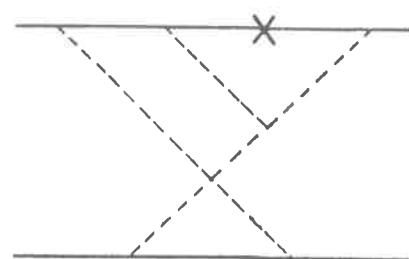




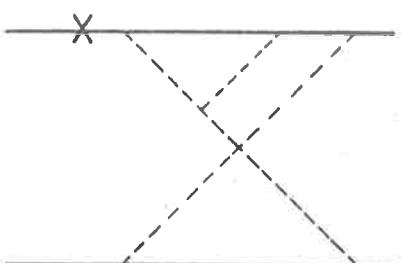
25



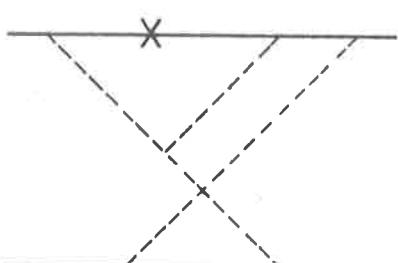
26



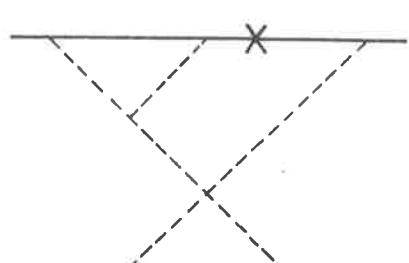
27



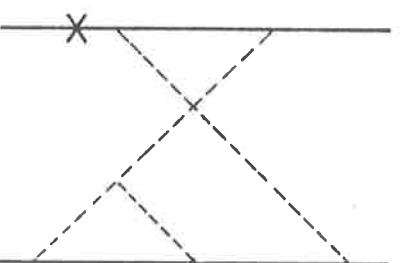
28



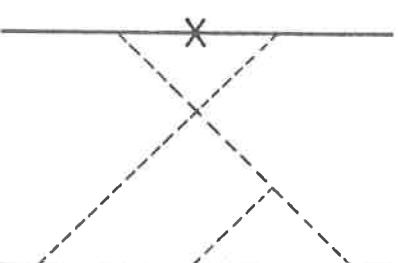
29



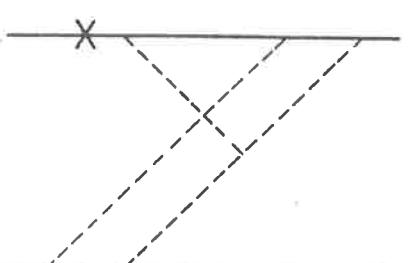
30



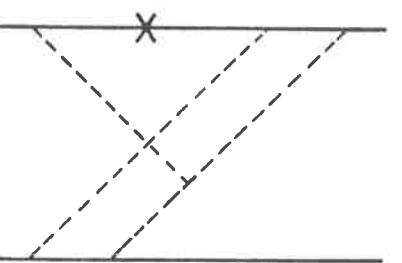
31



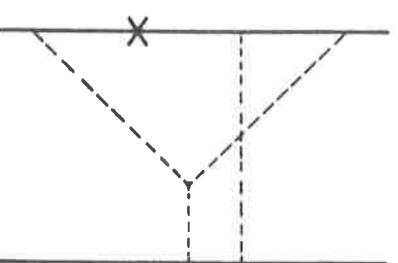
32



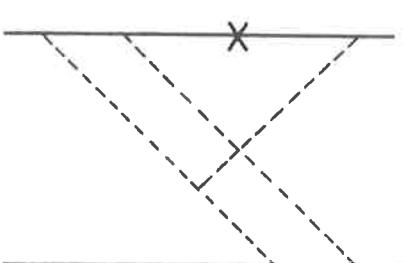
33



34



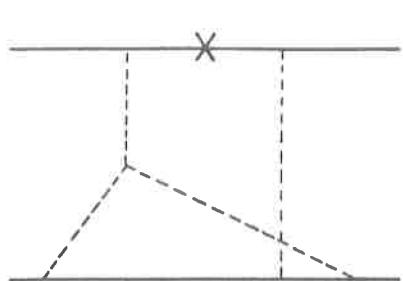
35



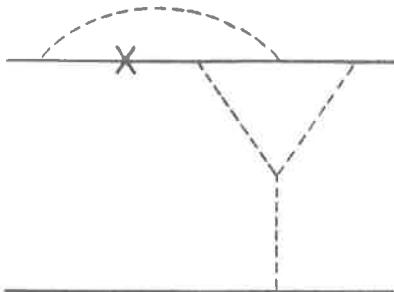
36

Abb. 7.4 (Fortsetzung)

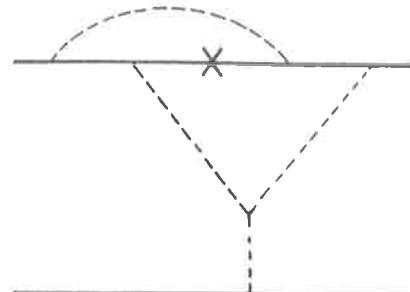




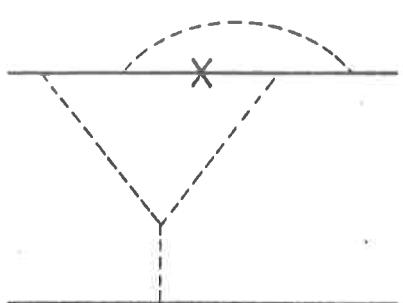
(37)



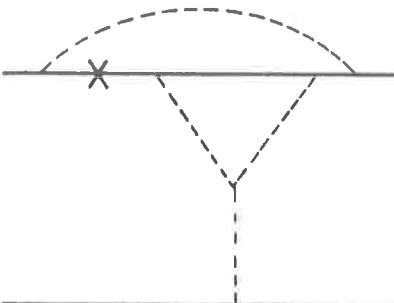
(38)



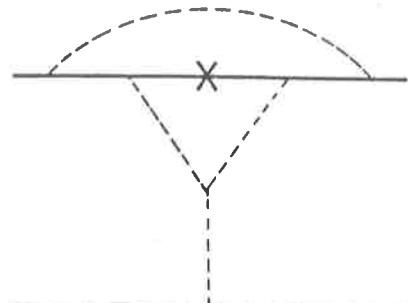
(39)



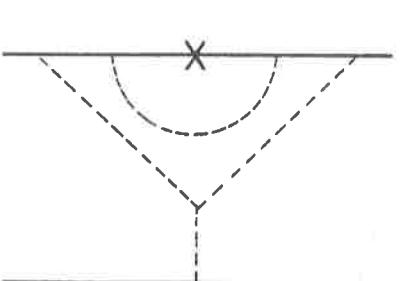
(40)



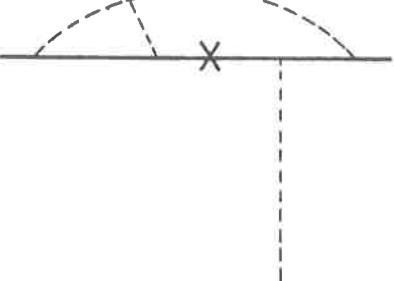
(41)



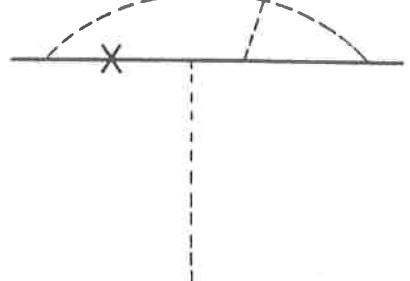
(42)



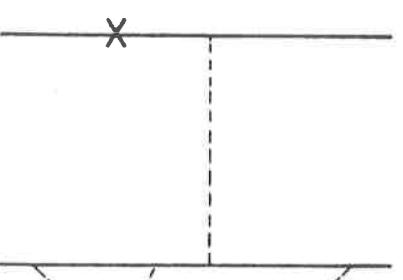
(43)



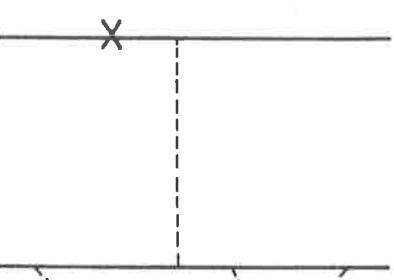
(44)



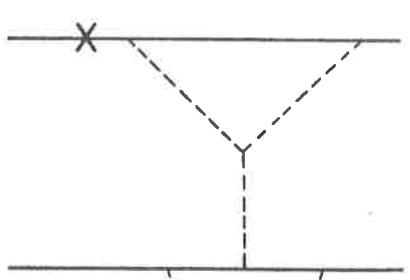
(45)



(46)



(47)



(48)

Abb. 7.4 (Fortsetzung)



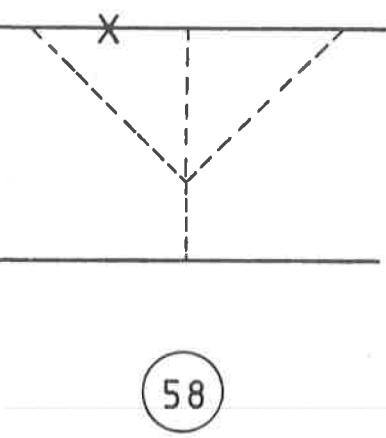
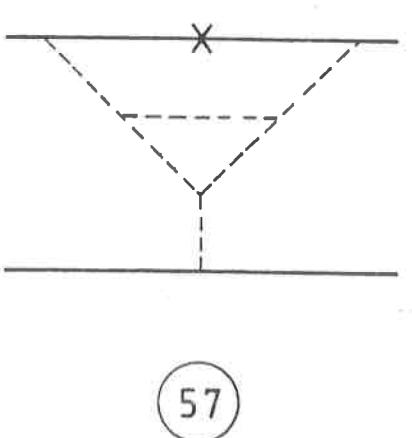
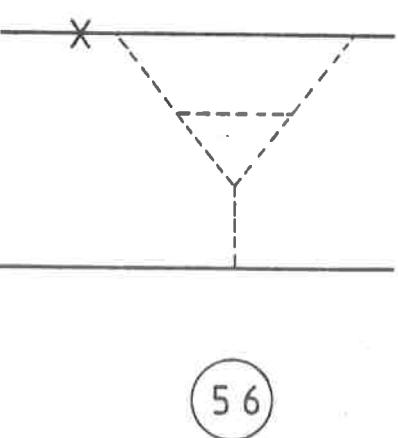
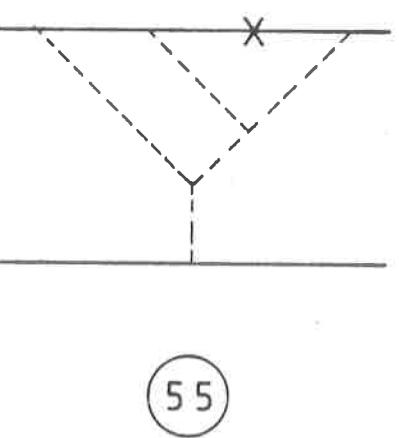
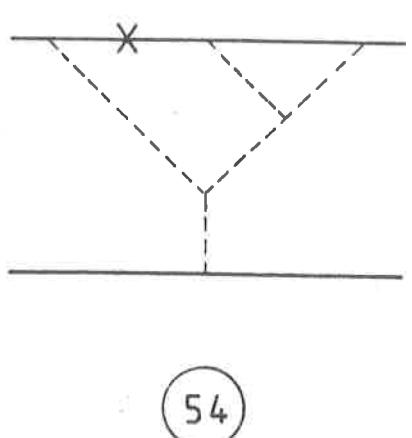
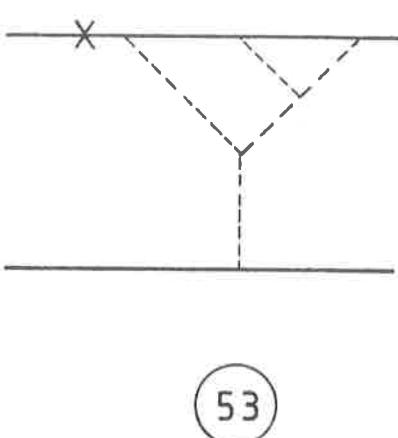
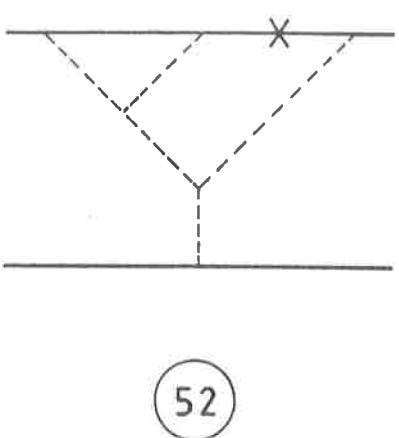
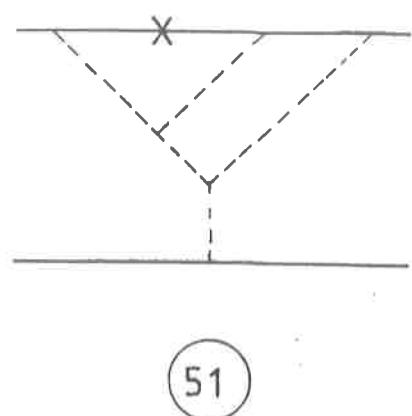
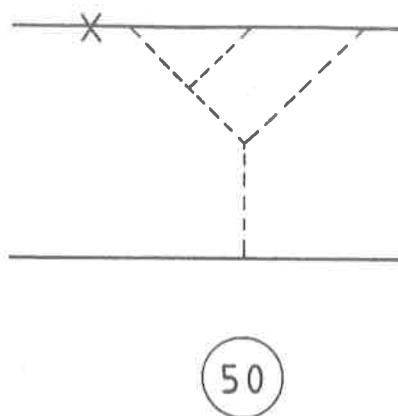
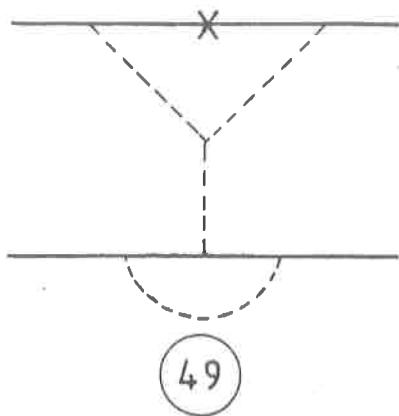


Abb. 7.4 (Fortsetzung)



Graph	G	A	L
1	$i G_x$	$-(\tau_1 \tau_2)^{-\epsilon}$	
2	$i G_x$	$-(\tau_1 \tau_2)^{-\epsilon}$	
3	$i G_x$	$(\tau_1 \tau_2)^{-\epsilon}$	1
4	$i G_x$	1	
5	$i G_{\bar{x}}$	$\tau_1^{-\epsilon} (1 - \tau_2^{-\epsilon})$	
6	$i G_{\bar{x}}$	$(1 - \tau_1^{-\epsilon})$	
7	$G_x^2$	$-(\tau_1 \tau_2)^{-2\epsilon}/4$	
8	$G_x^2$	$-(\tau_1 \tau_2)^{-2\epsilon}/4$	
9	$G_{\bar{x}}$	$-(\tau_1 \tau_2)^{-2\epsilon}/4$	
10	$G_{\bar{x}}$	$-(\tau_1 \tau_2)^{-2\epsilon}$	
11	$G_{\bar{x}}$	$-(\tau_1 \tau_2)^{-2\epsilon}/4$	2
12	$G_{\bar{x}}$	$\tau_1^{-2\epsilon} \tau_2^{-\epsilon}/2$	
13	$G_{\bar{x}}$	$\tau_1^{-\epsilon} \tau_2^{-2\epsilon}/2$	
14	$G_x^2$	$(\tau_1 \tau_2)^{-\epsilon} (1 - \tau_1^{-\epsilon}/2)$	
15	$G_x^2$	$(\tau_1 \tau_2)^{-\epsilon} (1 - \tau_2^{-\epsilon}/2)$	

Tab. 7.1



Graph	G	A	L
16	$G_{\text{II}}$	$(\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2)^{-2\epsilon} / 2$	
17	$G_{\text{II}}$	$(\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2)^{-2\epsilon} / 2$	
18	$G_{\text{I}}^2$	$(\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2)^{-2\epsilon} / 2$	
19	$G_{\text{I}}^2$	$(\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2)^{-2\epsilon} / 2$	
20	$G_{\text{I}}^2$	$-1/4$	
21	$G_{\text{II}}$	$-1/4$	
22	$G_{\text{I}}^2$	$-(\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2)^{-2\epsilon} / 4$	
23	$G_{\text{II}}$	$-(\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2)^{-2\epsilon} / 4$	2
24	$G_{\text{I}}^2$	$-(\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2)^{-\epsilon}$	
25	$G_{\text{III}}$	$\tilde{\epsilon}_1^{-2\epsilon} \tilde{\epsilon}_2^{-\epsilon} (1 - \tilde{\epsilon}_2^{-\epsilon} / 2) / 4$	
26	$G_{\text{III}}$	$\tilde{\epsilon}_1^{-2\epsilon} \tilde{\epsilon}_2^{-\epsilon} (1 - \tilde{\epsilon}_2^{-\epsilon})$	
27	$G_{\text{III}}$	$(\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2)^{-\epsilon} (1 - \tilde{\epsilon}_1^{-\epsilon}) (1 - \tilde{\epsilon}_2^{-\epsilon} / 2)$	
28	$G_{\text{III}}$	$\tilde{\epsilon}_1^{-2\epsilon} \tilde{\epsilon}_2^{-\epsilon} (1 - \tilde{\epsilon}_2^{-\epsilon}) / 2$	
29	$G_{\text{III}}$	$(\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2)^{-\epsilon} (1 - \tilde{\epsilon}_1^{-\epsilon})$	
30	$G_{\text{III}}$	$\tilde{\epsilon}_2^{-2\epsilon} \tilde{\epsilon}_1^{-\epsilon} (1 - \tilde{\epsilon}_1^{-\epsilon} / 2) / 4$	

Tab. 7.1 (Fortsetzung)



Graph	G	A	L
31	$G_{\text{III}}$	$(\tau_1 \tau_2)^{-2\epsilon} / 8$	
32	$G_{\text{III}}$	$(\tau_1 \tau_2)^{-2\epsilon} / 8$	
33	$G_{\text{III}}$	$\tilde{\tau}_1^{-2\epsilon} \tilde{\tau}_2^{-\epsilon} (1 - \tilde{\tau}_2^{-\epsilon}) / 2$	
34	$G_{\text{III}}$	$\tilde{\tau}_2^{-2\epsilon} \tilde{\tau}_1^{-\epsilon} (1 - \tilde{\tau}_1^{-\epsilon} / 2) / 4$	
35	$G_{\text{III}}$	$\tilde{\tau}_1^{-2\epsilon} \tilde{\tau}_2^{-\epsilon} (1 - \tilde{\tau}_2^{-\epsilon} / 2) / 4$	
36	$G_{\text{III}}$	$\tilde{\tau}_2^{-2\epsilon} \tilde{\tau}_1^{-\epsilon} (1 - \tilde{\tau}_1^{-\epsilon}) / 2$	
37	$G_{\text{IV}}$	$-(\tau_1 \tau_2)^{-2\epsilon} / 4$	
38	$G_{\text{III}}$	$-\tilde{\tau}_1^{-\epsilon} (1 - \tilde{\tau}_2^{-\epsilon}) (1 - \tilde{\tau}_1^{-\epsilon} / 2)$	2
39	$G_{\text{III}}$	$-(1 - \tilde{\tau}_2^{-2\epsilon}) (1 - \tilde{\tau}_1^{-\epsilon})^2 / 4$	
40	$G_{\text{III}}$	$-\tilde{\tau}_2^{-\epsilon} (1 - \tilde{\tau}_1^{-\epsilon}) (1 - \tilde{\tau}_2^{-\epsilon} / 2)$	
		$-(1 - \tilde{\tau}_1^{-2\epsilon}) (1 - \tilde{\tau}_2^{-\epsilon})^2 / 4$	
41	$G_{\text{III}}$	$-\tilde{\tau}_1^{-2\epsilon} (1 - \tilde{\tau}_2^{-\epsilon}) / 2$	
42	$G_{\text{IV}}$	$-\tilde{\tau}_2^{-2\epsilon} (1 - \tilde{\tau}_1^{-\epsilon}) / 2$	
		$-(1 - \tilde{\tau}_1^{-2\epsilon}) (1 - \tilde{\tau}_2^{-2\epsilon}) / 4$	
43	$G_{\text{IV}}$	$-(1 - \tilde{\tau}_1^{-\epsilon})^2 (1 - \tilde{\tau}_2^{-\epsilon})^2 / 4$	

Tab. 7.1 (Fortsetzung)



Graph	G	A	L
44	$G_{\text{IV}}$	$-1/8$	
45	$G_{\text{III}}$	$-1/8$	
46	$G_{\text{II}}$	$-(\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2)^{-2\epsilon} / 8$	
47	$G_{\text{I}}$	$-(\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2)^{-2\epsilon} / 8$	
48	$G_{\text{III}}$	$-\tilde{\epsilon}_1^{-2\epsilon} \tilde{\epsilon}_2^{-\epsilon} (1 - \tilde{\epsilon}_2^{-\epsilon})$	
49	$G_{\text{II}}$	$-(\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2)^{-\epsilon} (1 - \tilde{\epsilon}_1^{-\epsilon})$	
50	$G_{\text{V}}^2$	$-\tilde{\epsilon}_1^{-2\epsilon} (1 - \tilde{\epsilon}_2^{-\epsilon})^2 / 4$	
51	$G_{\text{VI}}^2$	$-\tilde{\epsilon}_1^{-\epsilon} (1 - \tilde{\epsilon}_1^{-\epsilon}) (1 - \tilde{\epsilon}_2^{-\epsilon})$ $-(1 - \tilde{\epsilon}_2^{-2\epsilon}) (1 - \tilde{\epsilon}_1^{-\epsilon})^2 / 8$	2
52	$G_{\text{VII}}^2$	$-(1 - \tilde{\epsilon}_1^{-\epsilon})^2 / 8$	
53	$G_{\text{VIII}}^2$	$-\tilde{\epsilon}_1^{-2\epsilon} (1 - \tilde{\epsilon}_2^{-\epsilon})^2 / 8$	
54	$G_{\text{IX}}^2$	$-(1 - \tilde{\epsilon}_1^{-2\epsilon}) (1 - \tilde{\epsilon}_2^{-2\epsilon}) / 4$	
55	$G_{\text{X}}^2$	$-\tilde{\epsilon}_2^{-\epsilon} (1 - \tilde{\epsilon}_2^{-\epsilon}/2) (1 - \tilde{\epsilon}_1^{-\epsilon})^2 / 2$	
56	$G_{\text{XI}}^2 / 2$	$-\tilde{\epsilon}_1^{-2\epsilon} (1 - \tilde{\epsilon}_2^{-\epsilon})^2 / 4$	
57	$G_{\text{XII}}^2 / 2$	$-\tilde{\epsilon}_2^{-2\epsilon} (1 - \tilde{\epsilon}_1^{-\epsilon})^2 / 4$	
58	$-G_{\text{XIII}}^2$	$-(1 - \tilde{\epsilon}_1^{-2\epsilon}) (1 - \tilde{\epsilon}_2^{-2\epsilon}) / 4$	

Tab. 7.1 (Fortsetzung)



stimmung mit [DI 81, FI 81]. Ein partieller Test unserer Resultate ist mit Hilfe der Eichinvarianz möglich. Bildet man die Summe über die Beiträge aller Graphen, die man aus einem vorgegebenen Graphen und seinem Partner, bei dem  $\tilde{\tau}_1$  und  $\tilde{\tau}_2$  vertauscht sind, durch Verschieben des elektromagnetischen Vertex in der oberen Fermionlinie erhält, so muß sie symmetrisch in  $\tilde{\tau}_1$  und  $\tilde{\tau}_2$  sein. (Beispielsweise die Graphen 33-36).

Die parametrische D-Funktion hat im allgemeinen die Form (3.4.16). Dementsprechend treten vier verschiedene Arten von SM auf. Jede der SM vom Typ  $h, g_1, g_2, g_{12}$  enthält den in Abb. 7.5 stark herausgezeichneten Teilgraphen. Daher kann man sagen, daß für endliche  $\tilde{\tau}_1$  und  $\tilde{\tau}_2$  der dominante Impulsübertrag durch diesen Teilgraphen fließt. Die Symbole  $+$ ,  $-$  und  $\perp$  kennzeichnen den Spinor-

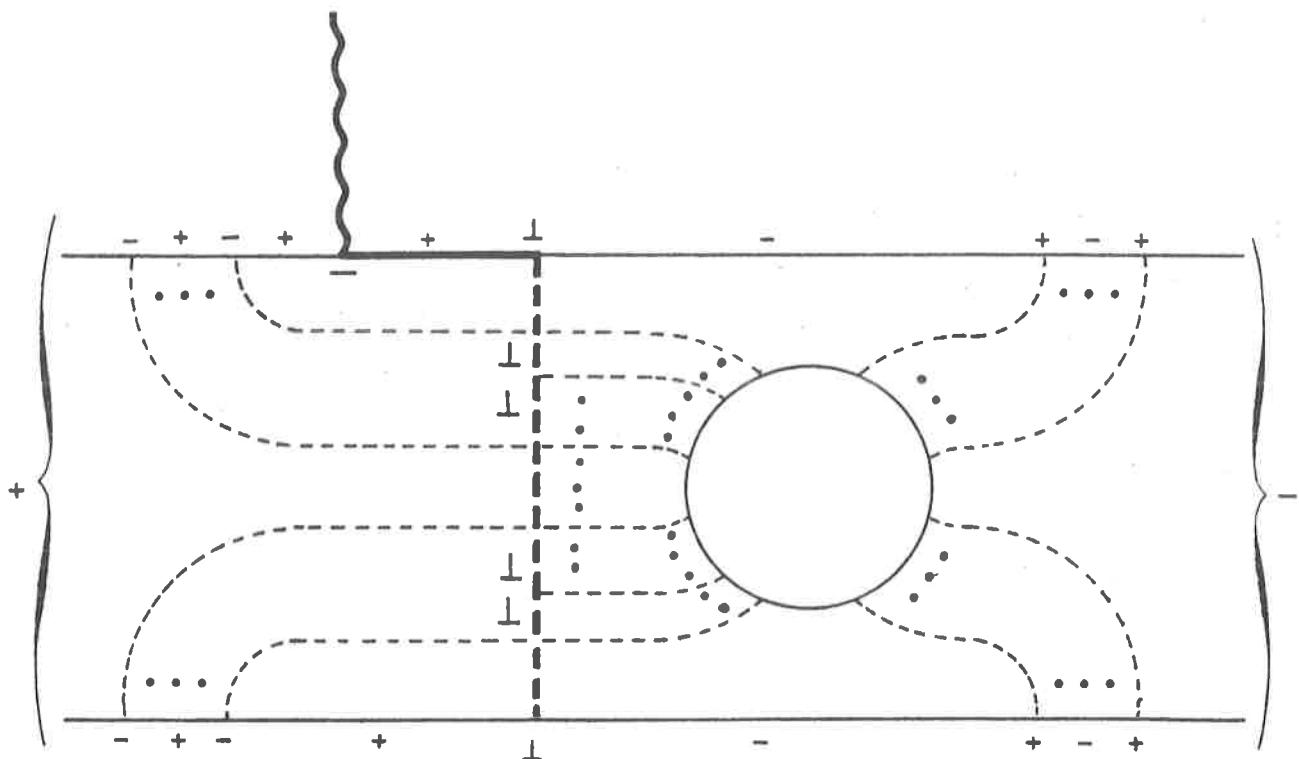


Abb. 7.5 Dominanter Impulsfluß



oder Vektorindex am jeweiligen Vertex, bzw. die dominante Spinorkomponente des Fermionpropagators in einem System, in dem  $P \cdot P_-, P \cdot P'_-, P'_+ \cdot P'_+$  ist und alle anderen Komponenten von  $P$  und  $P'$  verschwinden. Die dominanten Impulsflüsse für verschwindendes  $\tilde{\epsilon}_1$  oder  $\tilde{\epsilon}_2$ , die zu den restlichen Typen von SM gehören, sind komplizierter. Wir gehen darauf nicht ein.

Wie man aus der Tabelle 7.1 ersieht, gibt es keine logarithmischen Terme solange  $\epsilon \neq 0$ . Mit anderen Worten, sieht man einmal von der Singularität von  $T_H^0(u, v, Q^2)$  ab, so liefert die dimensionale Regularisierung nicht nur eine Regularisierung der kollinearen Singularitäten, sondern auch der Endpunktsingularitäten. Dies gilt nicht für die Beiträge der einzelnen Sequenzen. Hier treten in der Regel logarithmische Terme wie z.B.  $\log \tilde{\epsilon}_1$  auf. Summiert man allerdings die Beiträge aller Sequenzen eines Graphen auf, so heben sich die logarithmischen Singularitäten gegenseitig auf. Ein ähnlicher Sachverhalt wurde schon in Kapitel 5 beobachtet.

Durch Aufsummation aller aufgelisteten Beiträge erhalten wir das Resultat

$$T_P(u, v, Q^2) = T_H^0(u, v, Q^2) \sum_{L=0}^2 \frac{1}{L!} \left( -\frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left( \frac{Q^2}{4\pi \mu^2} \right)^{-\epsilon} \epsilon^2 (1 - (\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2)^{-\epsilon}) \right)^L \quad (7.3.6)$$

Damit ist die Exponentierung der führenden logarithmischen Beiträge aus [DI 81, FI 81] in nichttrivialer Weise verifiziert. Wir werden im folgenden davon ausgehen, daß die Exponentierung der führenden logarithmischen Singularitäten in jeder Ordnung von  $\alpha_s$  eintritt.



7.4 Das Endpunktverhalten der Amplitude der harten Streuung  $T_H(x, y, Q^2)$

Die Parton-Amplitude  $T_P(u, v, Q^2)$  darf nicht mit der Amplitude der harten Streuung  $T_H(x, y, Q^2)$  gleichgesetzt werden. Mit  $T_P(u, v, Q^2)$  schreibt sich der Pion-Formfaktor als

$$\bar{T}_\pi(Q^2) = \int_{-1}^{+1} du dv \phi_o^+(u) T_P(u, v, Q^2) \phi_o(v) \quad (7.4.1)$$

Im Gegensatz zu  $T_H(x, y, Q^2)$  enthält  $T_P(u, v, Q^2)$  sämtliche Massensingularitäten und die damit assoziierten großen Logarithmen.

Um die Massensingularitäten von  $T_P(u, v, Q^2)$  abzuspalten, lassen wir  $\epsilon$  im Exponenten der Verallgemeinerung von (7.3.6) auf alle Ordnungen von  $\alpha_s$  gegen Null gehen.

$$T_P(u, v, Q^2) = T_H^0(u, v, Q^2) \cdot \exp \left\{ -\frac{ds}{2\pi} G_F \log \tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2 \left[ \frac{1}{\epsilon} - \log \frac{Q^2}{\mu^2} - \frac{1}{2} \log \tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2 \right] \right\} \quad (7.4.2)$$

"Renormieren" wir  $\phi_o(u)$  nach

$$\phi(u, Q_o^2) = \exp \left\{ -\frac{ds}{2\pi} G_F \log \tilde{\epsilon}_1 \left[ \frac{1}{\epsilon} - \log \frac{Q_o^2}{\mu^2} \right] \right\} \phi_o(u) \quad (7.4.3)$$

und  $\phi_o(v)$  entsprechend, so tritt in (7.4.1)  $\phi(u, Q_o^2)$  an die Stelle von  $\phi_o(u)$  und  $T_P(u, v, Q^2)$  wird durch den endlichen Ausdruck

$$T_P^{\text{sub}}(u, v, Q^2) = T_H^0(u, v, Q^2) \cdot \exp \left\{ \frac{ds}{2\pi} G_F \log \tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2 \left[ \log \frac{Q^2}{Q_o^2} + \frac{1}{2} \log \tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2 \right] \right\} \quad (7.4.4)$$

ersetzt.  $Q_o^2$  markiert hier die Faktorisierungsskala. Prinzipiell ist die "Renormierung" von  $\phi_o(u)$  nur bis auf



einen endlichen Faktor festgelegt. Unser "Faktorisierungsschema" ist durch (7.4.3) fixiert.

Mit Hilfe des durch

$$\phi(x, Q^2) = \int_{-1}^{+1} du \bar{E}(x, Q^2; u, Q_o^2) \phi(u, Q_o^2) \quad (7.4.5)$$

definierten Entwicklungskerns  $\bar{E}(x, Q^2; u, Q_o^2)$  ist es möglich, die sogenannte "Inside-Out"-Methode [FI 81], wie wir sie zur Berechnung von  $T_p(u, v, Q^2)$  angewandt haben, mit der "Outside-In"-Methode, wie sie in (7.0.1) verwendet wird, in Beziehung zu setzen. Graphisch wird dies für die axiale Eichung in Abb. 7.6 dargestellt.

$$\bar{T}_p^{sub}(u, v, Q^2) = \int dx dy \bar{E}^+(v, Q_o^2; y, Q^2). \quad (7.4.6)$$

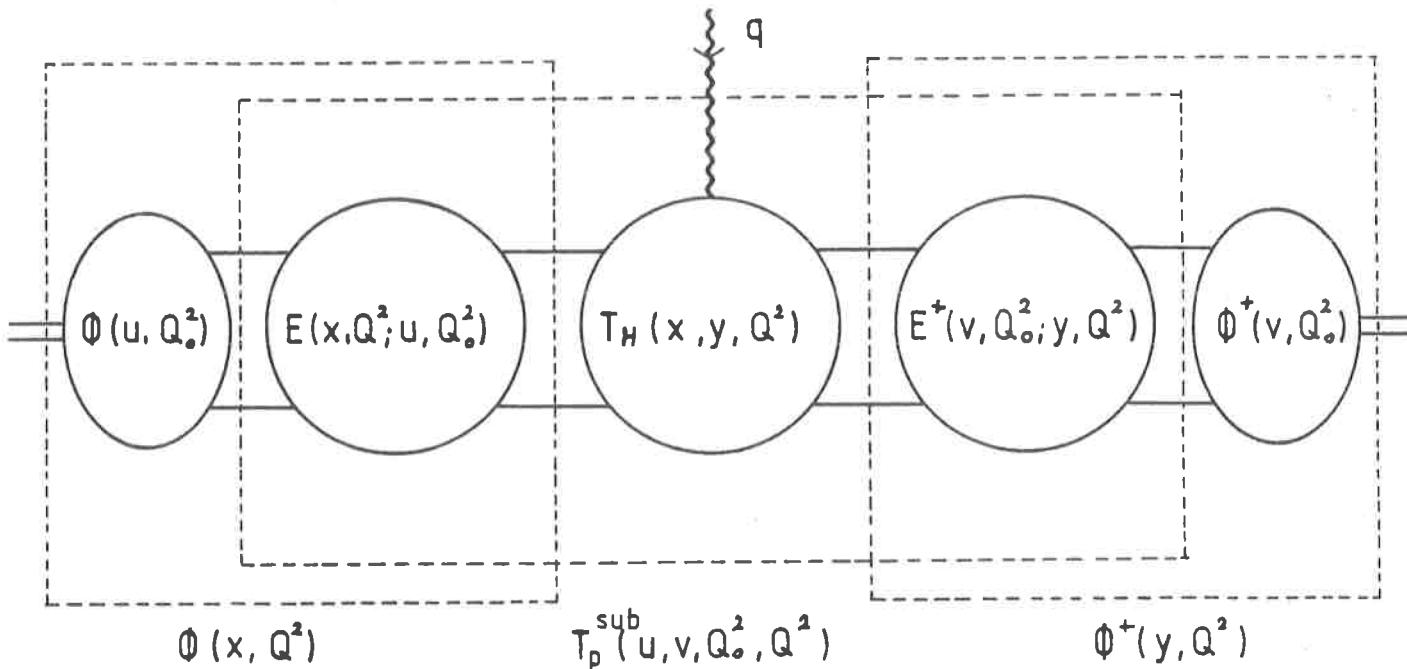


Abb. 7.6 "Inside-Out" versus "Outside-In"-Methode der Faktorisierung



$$T_H(x, y, Q^2) E(x, Q^2; v, Q_0^2)$$

mit

$$E^+(v, Q_0^2; x, Q^2) = E(x, Q^2; v, Q_0^2) \quad (7.4.7)$$

$E(x, Q^2; v, Q_0^2)$  ist explizit durch

$$E(x, Q^2; v, Q_0^2) = (1-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b_n} G_n^{3/2}(x) G_n^{3/2}(v) \exp\{-\gamma(n)t/2b\} \quad (7.4.8)$$

gegeben. Wegen (D.3) ist

$$E(x, Q^2; v, Q_0^2) = \left( \frac{(1-x^2)}{(1-v^2)} \right)^{\nu_2} \delta(x-v) \quad (7.4.9)$$

so daß allgemein gilt

$$T_P^{SVB}(v, v, Q^2, Q^2) = T_H(v, v, Q^2) \quad (7.4.10)$$

Daher haben wir in unserem Fall

$$T_H(v, v, Q^2) = T_H^0(v, v, Q^2) \exp\left\{-\frac{ds}{4\pi} C_F \log \varepsilon_1 \varepsilon_2\right\} \quad (7.4.11)$$

Der erste Term im Exponenten von (7.4.4), der in (7.4.11) nicht mehr auftaucht, ist der  $Q^2$ -Variation des Endpunktverhaltens der Wellenfunktion, die im Abschnitt 7.2.2 untersucht wurde, zuzuordnen. Um (7.2.10) und (7.4.4) direkt vergleichen zu können, muß in (7.2.10) die Kopplungskonstante eingefroren werden. Zu diesem Zweck lassen wir die  $\beta$ -Funktion verschwinden, die in (7.4.4) nur durch den führenden Koeffizienten  $b$  ihrer



Entwicklung in  $\alpha_s$  eingeht

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{b} t = \frac{\alpha_s}{4\pi} \log \frac{Q^2}{Q_0^2} \quad (7.4.12)$$

Wie man sieht, stehen die Resultate (7.2.10) und (7.4.4), die auf völlig unterschiedlichem Wege gewonnen wurden, in totaler Übereinstimmung. Während (7.4.4) nur für kleine  $\tilde{\epsilon}_1$  und  $\tilde{\epsilon}_2$  Gültigkeit besitzt, ist (7.4.6) eine exakte Relation. Daher kann durch Einsetzen von (7.4.11) in (7.4.6) die volle  $Q^2$  Abhängigkeit rekonstruiert werden. Wir werden von dieser Möglichkeit jedoch nicht Gebrauch machen.

## 7.5 Phänomenologische Implikationen

Dieser Abschnitt ist der Untersuchung der Konsequenzen gewidmet, die die Aufsummation der führenden Logarithmen in der Endpunktregion für die Größe des Formfaktors des Pions hat. Im Abschnitt 7.1 wurde bereits darauf hingewiesen, daß eine erhebliche Diskrepanz zwischen dem asymptotischen Verhalten (7.1.13) und den experimentellen Daten im Bereich von  $Q^2 \approx 5 \text{ GeV}^2$  bis  $Q^2 \approx 10 \text{ GeV}^2$  besteht. Wie wir sehen werden, führt die Berücksichtigung der Endpunkt-singularitäten zu einer wesentlichen Veränderung des Verlaufs von  $\bar{F}_\pi(Q^2)$  für nichtasymptotische Werte von  $Q^2$ , so daß eine bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Daten erreicht worden zu sein scheint.

Ausgangspunkt unserer Betrachtungen ist die "renormierte" Version von (7.4.1) mit dem harten Anteil  $T_p^{\text{sun}}(u, v, Q^2)$  aus (7.4.4). Als Ansatz für die Wellenfunktion  $\phi(u, Q_0^2)$  in der Region  $\tilde{\epsilon}_1 \approx 1$  wählen wir

$$\phi(u, Q_0^2) \sim \tilde{\epsilon}_1^{-\eta} \quad (7.5.1)$$



Da davon ausgegangen wird, daß (7.5.1) die Wellenfunktion  $\phi(u, Q_0^2)$  nur in der Endpunktregion  $\varepsilon_1 \approx 1$  angemessen wieder-  
gibt, kann die Normierung von  $\phi(u, Q_0^2)$  leider nicht mit  
(7.1.12) bestimmt werden.

Bevor wir (7.4.1) mit (7.5.1) und (7.4.4) auswerten  
können, müssen wir uns noch kurz einige Gedanken über  
den Gültigkeitsbereich von (7.4.4) machen. Bei der Ab-  
leitung von (7.4.4) wurde implizit angenommen, daß  $Q^2 \varepsilon_1, \varepsilon_2$   
groß ist gegenüber der Masse des Pions, der Massen der  
Quarks und ihren mittleren Transversalimpulsen. Um diese  
Einschränkungen zu berücksichtigen, führen wir einen Cut-  
off  $\delta \sim 1/Q^2$  ein, so daß

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \gg \delta \quad (7.5.2)$$

Daher führt (7.4.4) für große  $Q^2$  zu einer starken Unter-  
drückung der Endpunktregion. Das gleiche gilt selbstver-  
ständlich auch, falls eine Wellenfunktion der Form (7.2.2)  
an die Stelle von (7.5.1) tritt, solange nur

$$m^2/M^2 \gg \delta \quad (7.5.3)$$

ist.

Berücksichtigen wir diese Einschränkung, so sieht  $\bar{F}_\pi(Q^2)$   
folgendermaßen aus

$$\bar{F}_\pi(Q^2) \sim \alpha_s(Q^2) I / Q^2 \quad (7.5.4)$$

mit

$$I = \int_0^1 d\varepsilon_1 \int_0^1 d\varepsilon_2 (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^{2-1} \Theta(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \delta) \cdot \exp \left\{ D \log \varepsilon_1 \varepsilon_2 + B \log^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right\}, \quad (7.5.5)$$



$$D = 2 G_F t / b \quad (7.5.6)$$

und

$$B = d_s(Q^2) G_F / 4\pi \quad (7.5.7)$$

Wir haben in (7.5.5) die gleitende Kopplungskonstante "per Hand" eingeführt. Das Integral (7.5.5) ist in geschlossener Form ausführbar mit dem Resultat

$$I = \frac{\eta + D}{2 B^{\nu_2}} \left\{ \bar{F} \left( \frac{\eta + D}{2 B^{\nu_2}} \right) - \frac{B^{\nu_2}}{\eta + D} \right. \\ \left. - \exp \left\{ \log \delta [B \log \delta + \eta + D] \right\} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[ \bar{F} \left( B^{\nu_2} \log \delta + \frac{\eta + D}{2 B^{\nu_2}} \right) - \frac{B^{\nu_2}}{\eta + D} \right] \right\} \quad (7.5.8)$$

Darin ist  $\bar{F}(x)$  Dawson's Integral [AB 72]

$$\bar{F}(x) = e^{-x^2} \int_0^x dt e^{t^2} \quad (7.5.9)$$

(7.5.4) ist in Abb.7.7 für verschiedene Werte von  $\eta$  dargestellt. Sämtliche Kurven sind auf  $\bar{F}_\eta(Q^2 = 5 \text{ GeV}^2) \cdot 1$  normiert worden. Die gestrichelte Linie entspricht dem asymptotischen Verhalten (7.1.14). Zur Auswertung von (7.5.4) wurde  $\delta = Q^2/Q_0^2$ ,  $Q_0^2 = 1 \text{ GeV}^2$  und  $\lambda^2 = 0,5 \text{ GeV}^2$  gesetzt. Die experimentellen Daten sind [BE 78b] entnommen. Der experimentelle Wert an der Stelle  $Q^2 = 6,3 \text{ GeV}^2$  ist will-



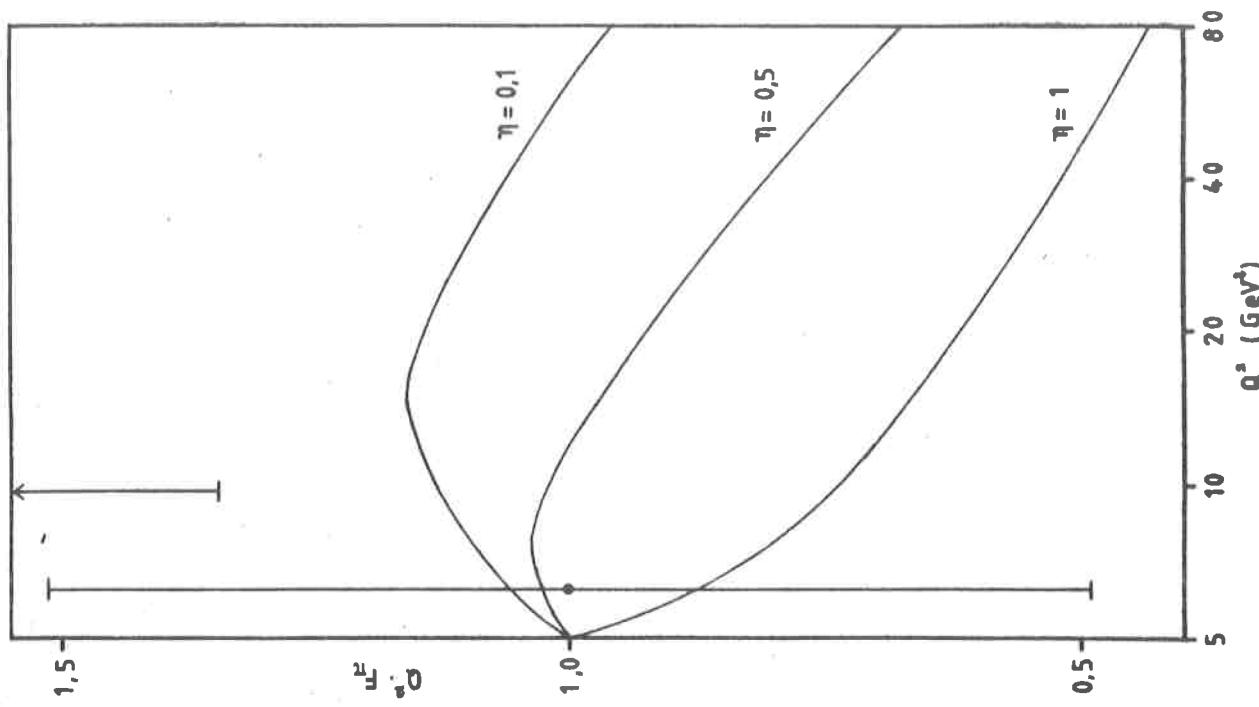


Abb. 7.8 Beitrag der Endpunktregion zu  $F_q^2(Q^2)$  mit  $\theta = 0$

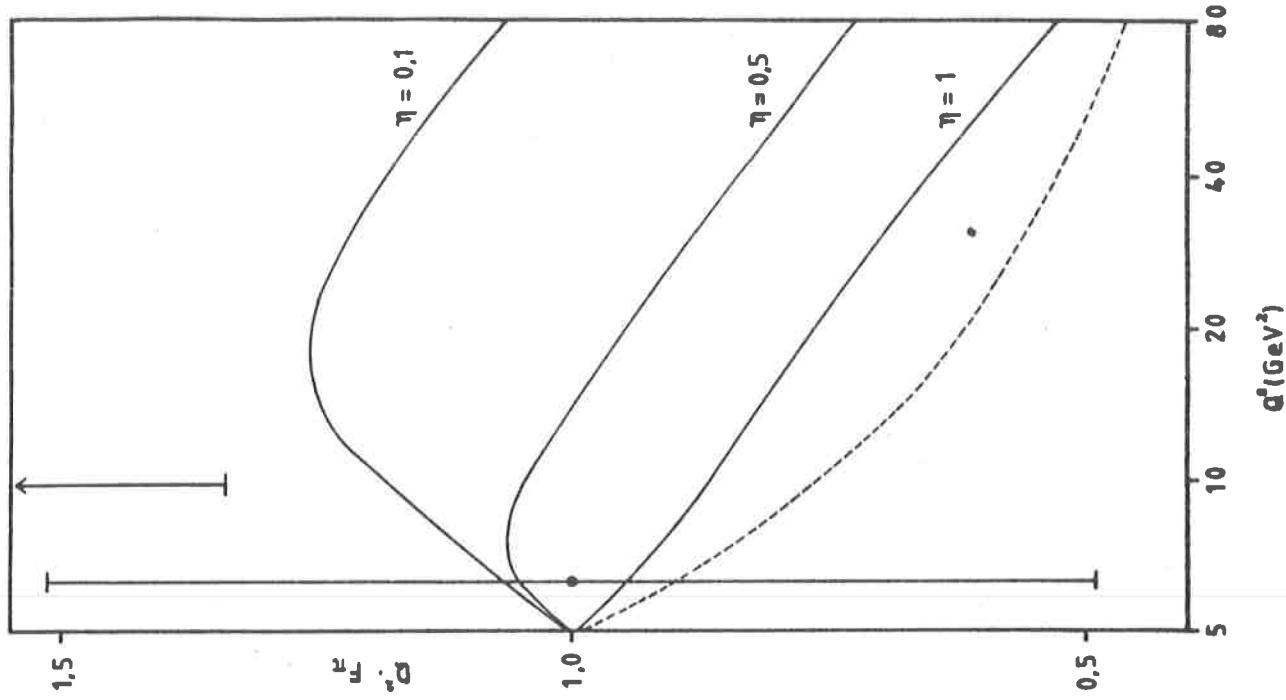


Abb. 7.7 Beitrag der Endpunktregion zu  $F_q^2(Q^2)$  mit  $\theta \neq 0$



kürlich normiert worden. Wie man sieht, stimmt die Gestalt des Verlaufs von  $F_\pi(Q^2)$  für kleine  $Q^2 (< 0,5)$  wesentlich besser mit den experimentellen Daten überein, als die asymptotische Form. Da die Normierung von (7.5.4) nicht fixiert werden kann, bedeutet dies aber nicht, daß auch die absoluten Werte besser übereinstimmen. In Abb. 7.8 haben wir (7.5.4) mit  $B=0$  dargestellt, es wird also nur die Wellenfunktion modifiziert. Auch in diesem Fall bleibt die Tendenz erhalten.

## 7.6 Schlußfolgerungen

In diesem Kapitel haben wir gezeigt, daß die Beiträge der Endpunktregion zum Pion-Formfaktor für große  $Q^2$  unterdrückt sind. Umgekehrt liefert diese Region für nichtasymptotische Werte von  $Q^2$  einen Verlauf des Formfaktors als Funktion von  $Q^2$ , der zumindestens der Form nach besser mit den experimentellen Daten im Bereich von  $Q^2 \approx 5 \text{ GeV}^2$  bis  $Q^2 \approx 10 \text{ GeV}^2$  übereinstimmt, als der Ausdruck, bei dem die Endpunktregion keine besondere Rolle spielt. Leider ist es nicht möglich, die Normierung der Wellenfunktion aus ihrem Verlauf in der Endpunktregion zu bestimmen. Aus diesem Grunde muß nicht jede Form der Wellenfunktion, die in der Endpunktregion einen dominanten Beitrag leistet, auch zu einer besseren Übereinstimmung mit den experimentellen Daten führen.

Der Ausdruck, den man nach Aufsummation der führenden logarithmischen Korrekturen in der Endpunktregion für  $T_\rho(u, v, Q^2)$  erhält, hat viele Gemeinsamkeiten mit den Strukturfunktionen, falls das Produkt  $\tau_1 \tau_2$  durch die Bjorken-Variable  $(1-z)$  ersetzt wird. Im Gegensatz zur tiefinelastischen Streuung jedoch, bei der die großen



Korrekturen durch Veränderung des Argumentes von  $\alpha_s(Q^2)$  in der Altarelli-Parisi-Gleichung berücksichtigt werden können, reproduziert die analoge Modifikation des Arguments von  $\alpha_s(Q^2)$  in der Brodsky-Lepage-Entwicklungs-gleichung (7.1.2) nicht die logarithmisch führende Näherung von  $T_p(u, v, Q^2)$ .

Ein weiterer Unterschied zur tiefinelastischen Streuung resultiert aus der Tatsache, daß über  $\tilde{\iota}_1$  und  $\tilde{\iota}_2$  integriert werden muß, um  $\bar{F}_\pi(Q^2)$  zu erhalten. Daher kann die Region  $\tilde{\iota}_1, \tilde{\iota}_2 < \delta$ , die dem Grenzfall der elastischen Streuung bei der tiefinelastischen Streuung entspricht, nicht ohne weiteres vernachlässigt werden. In [LE 80,82] ist allerdings gezeigt worden, daß der Beitrag zu  $\bar{F}_\pi(Q^2)$  aus dieser Region mit einer Potenz von  $1/Q^2$  unterdrückt ist. Unsere Analyse ist nur im Bereich  $\tilde{\iota}_1, \tilde{\iota}_2 > \delta$  gültig. Die Be-achtung dieser Einschränkung ist wichtig, da ansonsten die  $(n+1)$ -te Ordnung wie  $(2n)!/(n-1)!$  anwächst.

Zerfälle von schweren Quarkonia lassen sich in der störungstheoretischen QCD in einer ähnlichen Weise be-schreiben wie der Pion-Formfaktor. In [CH 82] wird argumentiert, daß die Zerfallsrate in Mesonen, die aus einem leichten und einem schweren Quark zusammengesetzt sind, wie beispielsweise  $\Upsilon \rightarrow D^+ D^-$ , um zwei Größenordnungen über der Rate von Zerfällen in Mesonen liegt, deren Konstituenten gleiche Massen haben (z.B.  $\Upsilon \rightarrow K^+ K^-$ ). Als verursachender Mechanismus wird das Zusammenwirken eines starken Pols der Amplitude der harten Streuung mit einer Wellenfunktion der Form (7.2.2) angegeben. Angesichts der Resultate dieses Kapitels bedarf dieses Ergebnis der Revision. Das gleich gilt auch für [HO 81].



Teil C Beispiele

In den beiden folgenden Abschnitten möchten wir an Hand von zwei Beispielen illustrieren, wie die in Teil A entwickelte Technik in einer konkreten Situation anzuwenden ist. Wir werden das logarithmisch führende Verhalten eines Graphen, der zum Sudakov-Formfaktor aus Kapitel 5 (Beispiel I) beiträgt, und eines Graphen des Prozesses  $q\bar{q} + \gamma^* \rightarrow q\bar{q}$  aus Kapitel 7 (Beispiel II) berechnen.

8. Beispiel I

Der Graph, dessen logarithmisch führendes Verhalten berechnet werden soll, ist in Abb.8.1 dargestellt. Er entspricht dem Graphen 13 aus Abschnitt 5.1.

Der Beitrag dieses Graphen zum Sudakov-Formfaktor  $\Gamma(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2, q^2)$  ist durch (5.2.7) gegeben mit

$$I' = \int_0^1 [d\alpha] \frac{C(\alpha)^{\tilde{\rho}-2+\epsilon}}{D(\alpha)^{\tilde{\rho}} (q^2)^{-3\epsilon}} Z(\alpha) \quad (8.1)$$

$$\tilde{\rho} = 3 + 3\epsilon \quad (8.2)$$

Im allgemeinen wird der Zähler  $Z(\alpha)$  nach den in 1.4 angegebenen Regeln berechnet. Da hier, im Unterschied zum Beispiel II, keine Kontraktionen von Kantenimpulsen beitragen, haben wir

$$Z(\alpha) = \frac{-1}{16} \frac{1}{(2pq)} \text{Tr} \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\beta \gamma_4 \gamma^\nu \gamma_3 \gamma^\lambda \gamma_2 \gamma^\sigma \gamma_1 \gamma^\tau \rho^\rho \gamma_\mu \quad (8.3)$$

$$\Delta_{\alpha\beta\gamma}(Y_8, Y_7, Y_9)$$



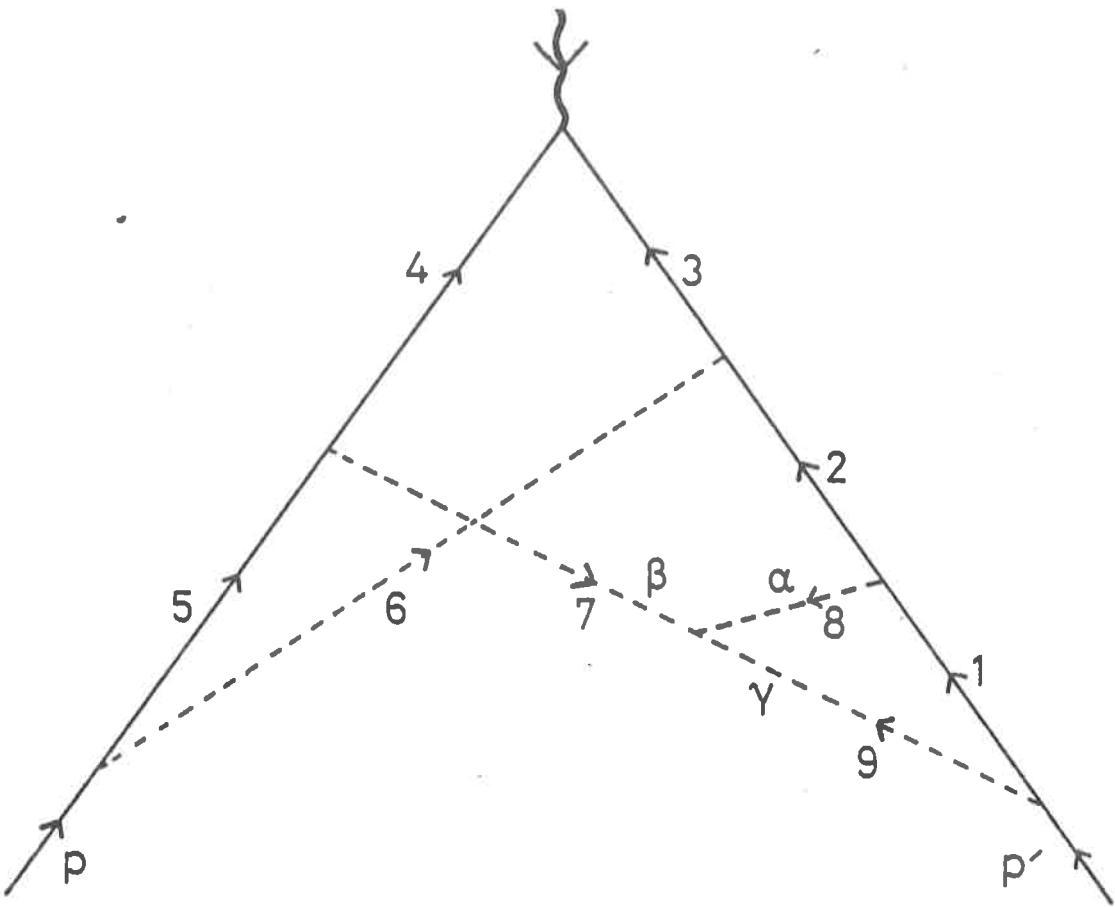


Abb. 8.1 Graph 13 aus Abschnitt 5.1

mit dem Drei-Gluonen-Vertex

$$\begin{aligned}
 & \Delta_{\alpha\beta\gamma}(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \cdot g_{\alpha\beta}(\rho_1 - \rho_2) \\
 & + g_{\beta\gamma}(\rho_2 - \rho_3)_{\alpha} + g_{\gamma\alpha}(\rho_3 - \rho_1)_{\beta} .
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Mit der Abkürzung

$$\alpha_{ijk\dots} = \alpha_i + \alpha_j + \alpha_k + \dots \tag{8.5}$$

schreibt sich die parametrische C-Funktion

$$\begin{aligned}
 C(\alpha) = & \alpha_{19} (\alpha_{56} \alpha_{34} + \alpha_{28} \alpha_{3456}) \\
 & + \alpha_8 (\alpha_{29} \alpha_{56} + \alpha_{34} \alpha_{2567}) .
 \end{aligned} \tag{8.6}$$



und die D-Funktion

$$\begin{aligned}
 D(d) = & q^2 \left[ d_3 d_4 (d_{19} d_{2567} + d_8 d_{125679}) + d_3 d_5 d_8 d_9 \right. \\
 & \left. + d_2 d_4 d_6 d_{189} + d_4 d_6 d_7 d_8 + d_3 d_5 d_7 d_{189} \right] \\
 & + p^2 \left[ d_5 d_6 (d_{19} d_{2347} + d_8 d_{123479}) \right. \\
 & \left. + d_4 d_6 d_7 d_{189} + d_4 d_6 d_8 d_9 \right. \\
 & \left. + d_2 d_3 d_5 d_{189} + d_7 d_3 d_5 d_8 \right] \\
 & + p'^2 \left[ d_7 d_9 (d_{56} d_{278} + d_{34} d_{25678}) \right. \\
 & \left. + d_3 d_6 d_8 d_9 + d_7 d_8 d_{3456} \right. \\
 & \left. + d_1 d_4 d_5 d_8 + d_2 d_8 d_9 d_{3456} \right. \\
 & \left. + d_2 d_7 d_{3456} d_{189} + d_2 d_4 d_5 d_{189} \right. \\
 & \left. + d_3 d_6 d_7 d_{189} \right] \tag{8.7}
 \end{aligned}$$

Die Indizes der FP sind in Abb.8.1 angegeben. Die Kanten-impulse sind

$$\begin{aligned}
 GY_1 = & p' \left[ d_9 (d_{278} d_{56} + d_{34} d_{25678}) + d_4 d_5 d_8 \right. \\
 & \left. + d_7 d_8 d_{3456} \right] - q d_4 d_6 d_8 - p d_3 d_5 d_8 \tag{8.8a}
 \end{aligned}$$

$$GY_2 = p' \left[ d_7 d_{189} d_{3456} + d_8 d_9 d_{3456} + d_4 d_5 d_{189} \right] \tag{8.8b}$$



$$-q d_4 d_6 d_{189} - p d_3 d_5 d_{189}$$

$$\begin{aligned}
 C Y_3 = & -q [d_4 (d_{19} d_{2567} + d_8 d_{125679}) \\
 & + d_5 d_7 d_{189} + d_5 d_8 d_9] \\
 & + p' [d_6 d_7 d_{189} + d_6 d_8 d_9] + p [d_2 d_5 d_{189} + d_1 d_5 d_8] \\
 & + p' [d_6 d_8 d_9 + d_6 d_7 d_{189}] + p' d_1 d_5 d_8
 \end{aligned} \tag{8.8c}$$

$$\begin{aligned}
 C Y_4 = & -q [d_3 (d_{19} d_{2567} + d_8 d_{125679}) \\
 & + d_2 d_6 d_{189} + d_1 d_6 d_8] \\
 & + p [d_6 d_8 d_9 + d_6 d_7 d_{189}] + p' d_1 d_5 d_8
 \end{aligned} \tag{8.8d}$$

$$\begin{aligned}
 C Y_5 = & p [d_6 (d_{2347} d_{19} + d_8 d_{123479}) + d_2 d_3 d_{189} \\
 & + d_1 d_3 d_6] - q [d_3 d_7 d_{189} + d_3 d_8 d_9] \\
 & + p' [d_1 d_4 d_8 + d_2 d_4 d_{189}]
 \end{aligned} \tag{8.8e}$$

$$\begin{aligned}
 C Y_6 = & p [d_5 (d_{2347} d_{19} + d_8 d_{123479}) + d_4 d_7 d_{189} + d_4 d_8 d_9] \\
 & - q [d_4 d_1 d_8 + d_2 d_4 d_{189}] \\
 & - p' [d_3 d_7 d_{189} + d_3 d_8 d_9]
 \end{aligned} \tag{8.8f}$$



$$C' Y_7 = \rho d_4 d_6 d_{189} + q d_3 d_5 d_{189} \quad (8.8g)$$

$$- \rho' [d_1 d_8 d_{3456} + d_2 d_{189} d_{3456} + d_3 d_6 d_{189}]$$

$$C' Y_8 = \rho' [d_3 d_6 d_9 + d_2 d_9 d_{3456} - d_1 d_7 d_{3456} - d_1 d_4 d_5] \quad (8.8h)$$

$$C' Y_9 = \rho' [d_1 (d_{278} d_{56} + d_{34} d_{25678}) + d_3 d_6 d_8 + d_2 d_8 d_{3456}] - q [d_3 d_5 d_9 - d_1 d_4 d_6] \quad (8.8i)$$

Die Orientierung der  $Y_i$  ist in Abb.8.1 gekennzeichnet.

Zur Bestimmung der MSM ermittelt man zunächst alle SM, die  $h(\alpha)$  zum Verschwinden bringen. Daran anschließend wird die Potenz berechnet, mit der  $Z(\alpha)$  bei linearer Skalierung dieser SM verschwindet. Dazu zerlegt man die Kantenimpulse  $Y_i$  nach den beiden unabhängigen Impulsen  $\rho$  und  $\rho'$ , die, was  $Z(\alpha)$  betrifft, als lichtartig betrachtet werden. Skaliert man beispielsweise die SM  $\{d_3, d_4\}$  so gilt

$$Y_i \sim \rho' + O(\mathcal{S}) \quad i = 1, 2, 7, 8, 9 \quad (8.9a)$$

$$Y_i \sim \rho + O(\mathcal{S}) \quad i = 5, 6 \quad (8.9b)$$

Daher ist



$$\begin{aligned}
 & Y_2 \gamma^* Y_1 \gamma^* p' \Delta_{\alpha\beta\gamma} \\
 & = 2 p'_\beta p'_\gamma 2 p' (Y_8 \cdot Y_9) + \mathcal{O}(g^2) \sim \mathcal{O}(g) \tag{8.10}
 \end{aligned}$$

so daß die effektive Länge dieser SM  $m_{\text{eff}} = 3$  ist. Auf diese Weise erhält man die in Tab. 8.1 aufgelisteten MSM.

Aus den MSM muß nun ein vollständiger Satz unabhängiger Sequenzen konstruiert werden. Zur logarithmisch führenden

MSM	Typ	$L(g)$
$\{d_3, d_4\}$	h	0
$\{d_2, d_3, d_8\}$	h	0
$\{d_2, d_3, d_4, d_7, d_8\}$	h	1
$\{d_4, d_5\}$	h, g <sub>1</sub>	0
$\{d_3, d_4, d_5, d_6\}$	h, g <sub>1</sub>	1
$\{d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8\}$	h, g <sub>1</sub>	2
$\{d_1, d_2, d_3\}$	h, g <sub>2</sub>	0
$\{d_1, d_2, d_3, d_8, d_9\}$	h, g <sub>2</sub>	1
$\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_7, d_8, d_9\}$	h, g <sub>2</sub>	2

Tab. 8.1



Näherung tragen nur die Sektoren bei, in denen entweder  $\alpha_6$ ,  $\alpha_7$  oder  $\alpha_9$  nicht verschwinden kann.

Im Sektor, der durch  $\alpha_7$  gekennzeichnet ist, lassen sich folgende Skalierungen nacheinander ausführen

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_8, \underline{\alpha_9}\}$$

$$\{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \underline{\alpha_6}\}$$

$$\{\alpha_2, \alpha_3, \underline{\alpha_8}\}$$

(8.11)

$$\{\underline{\alpha_1}, \underline{\alpha_2}, \alpha_3\}$$

$$\{\underline{\alpha_3}, \alpha_4\}$$

$$\{\underline{\alpha_4}, \underline{\alpha_5}\}$$

Wir haben jeweils den Parameter unterstrichen, der in den nachfolgenden Skalierungen nicht mehr auftaucht. Da im vorliegenden Sektor keine weiteren Skalierungen möglich sind, ist die Sequenz vollständig.

Im Sektor, in dem  $\alpha_6$  nicht verschwindet, können zunächst alle MSM, die  $\alpha_6$  enthalten, aus Tab. 8.1 gestrichen werden. Von den verbleibenden MSM kann  $\{\alpha_4, \underline{\alpha_5}\}$  sofort ausgeführt werden, da  $\alpha_5$  in keiner weiteren MSM auftritt. Führt man eine  $\lambda$ -Transformation von  $\{\alpha_4, \underline{\alpha_5}\}$  aus, so läßt sich als nächstes  $\{\alpha_3, \underline{\alpha_4}\}$  skalieren. Danach ist dann keine weitere  $\lambda$ -Transformation mehr möglich, so daß auch eine der MSM unabhängig wird. Daher führen



wir als nächstes die Skalierung von  $\{d_1, d_2, d_3, d_8, d_9, \lambda\}$  aus. Bleibt  $\lambda$  groß, so können

$$\{d_1, d_2, d_3, d_8, \underline{d_9}\}$$

$$\{\underline{d_1}, d_2, d_8\}$$

$$\{\underline{d_2}, \underline{d_3}, \underline{d_8}\}$$

bleibt  $d_9$  groß, so können

$$\{d_2, d_3, d_8, \underline{\lambda}\}$$

$$\{\underline{d_1}, d_2, d_3\}$$

$$\{\underline{d_2}, \underline{d_3}, \underline{d_8}\}$$

ausgeführt werden. Sämtliche anderen Sektoren, die nach Ausführung der Skalierung von  $\{d_1, d_2, d_3, d_8, d_9, \lambda\}$  durch Nichtverschwinden können einer der skalierten Variablen gekennzeichnet sind, liefern keinen Beitrag zur LDLA. Dies kann mit der in 4.1 beschriebenen Methode nachgeprüft werden. In ähnlicher Weise werden auch die Sequenzen in dem Sektor konstruiert, in dem  $d_9$  von vornherein groß bleibt.

Ist gesichert, daß die den Sequenzen zugeordneten Regionen disjunkt sind, so spielt in der logarithmisch führenden Näherung die Reihenfolge der MSM innerhalb einer Sequenz keine Rolle mehr. Deshalb kann von hier ab auf die Einhaltung der Reihenfolge der MSM verzichtet werden.



Insgesamt bekommt man folgende unabhängige Sequenzen:

F

$$\{d_1, d_2, d_3, d_8, d_9\}$$

$$\{d_3, d_4, d_5, d_6\}$$

$$\{d_2, d_3, d_8\}$$

$$\{d_1, d_2, d_3\}$$

$$\{d_3, d_4\}$$

$$\{d_4, d_5\}$$

B

$$\{d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8\}$$

$$\{d_3, d_4, d_5, d_6\}$$

$$\{d_2, d_3, d_8\}$$

$$\{d_1, d_2, d_3\}$$

$$\{d_3, d_4\}$$

$$\{d_4, d_5\}$$

C

$$\{d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8\}$$

$$\{d_2, d_3, d_4, d_7, d_8\}$$

$$\{d_2, d_3, d_8\}$$

$$\{d_1, d_2, d_3\}$$

$$\{d_3, d_4\}$$

$$\{d_4, d_5\}$$

D

(8.12)

$$\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_7, d_8, d_9\}$$

$$\{d_1, d_2, d_3, d_8, d_9\}$$

$$\{d_2, d_3, d_8\}$$

$$\{d_1, d_2, d_3\}$$

$$\{d_3, d_4\}$$

$$\{d_4, d_5\}$$



E

$$\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_7, d_8, d_9\}$$

$$\{d_2, d_3, d_4, d_7, d_8\}$$

$$\{d_2, d_3, d_8\}$$

$$\{d_1, d_2, d_3\}$$

$$\{d_3, d_4\}$$

$$\{d_4, d_5\}$$

Stellvertretend für die übrigen Sequenzen, berechnen wir nun den Beitrag der Sequenz  $H$  zu  $I'$ . Skalieren wir die an der  $i$ -ten Stelle in (8.12) aufgelistete MSM der Sequenz  $H$  mit  $s_i$ , so ist

$$d_1 = s_1 s_4 \bar{d}_1$$

$$d_2 = s_1 s_2 s_3 \bar{d}_2$$

$$d_3 = s_1 s_2 s_3 s_4 s_5$$

$$d_4 = s_2 s_5 s_6 \bar{d}_4$$

$$d_5 = s_2 s_6 \bar{d}_5$$

(8.13)

$$d_6 = s_2$$

$$d_7 = 1$$

$$d_8 = s_1 s_3$$

$$d_9 = s_1$$



Dabei wurden Beiträge von höheren Ordnungen in den  $\zeta_i$ , als sie in (8.13) angegeben sind, vernachlässigt. In der gleichen Näherung ist

$$\begin{aligned} \int [d\alpha] &= \int \left( \prod_{i=1}^6 d\zeta_i \right) (\zeta_1^4 \zeta_2^3 \zeta_3^2 \zeta_4^2 \zeta_5 \zeta_6) \cdot \\ &\cdot \int d\bar{\alpha}_1 d\bar{\alpha}_2 \delta(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 - 1) \int d\bar{\alpha}_4 d\bar{\alpha}_5 \delta(\bar{\alpha}_4 + \bar{\alpha}_5 - 1) \end{aligned} \quad (8.14)$$

$$C'(\alpha) = \zeta_1 \zeta_2 \quad , \quad (8.15)$$

$$h(\alpha) = C'(\alpha) \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \zeta_5 \zeta_6 \quad , \quad (8.16)$$

$$g_1(\alpha) = C'(\alpha) \zeta_2 \zeta_6 \bar{\alpha}_5 \quad , \quad (8.17)$$

$$g_2(\alpha) = C'(\alpha) \zeta_1 \zeta_4 \bar{\alpha}_1 \quad , \quad (8.18)$$

$$Y_i = \rho' \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad Y_i = \rho \quad i = 4, 5 \quad , \quad (8.19)$$

$$Y_6 = \rho \zeta_6 \bar{\alpha}_5 \quad , \quad (8.20a)$$

$$Y_7 = \rho \zeta_2 \zeta_5 \zeta_6 \bar{\alpha}_4 - \rho' \zeta_1 \zeta_3 \zeta_4 \quad , \quad (8.20b)$$

$$Y_8 = -\rho' \zeta_4 \bar{\alpha}_1 - \rho \zeta_2 \zeta_5 \zeta_6 \bar{\alpha}_4 \quad , \quad (8.20c)$$

$$Y_9 = \rho' \zeta_4 \bar{\alpha}_1 - \rho \zeta_2 \zeta_3 \zeta_5 \zeta_6 \bar{\alpha}_4 \quad , \quad (8.20d)$$

und

$$Z(\alpha) = (q^2)^3 \bar{\alpha}_4 \zeta_2 \zeta_5 \zeta_6 \quad (8.21)$$

Damit ergibt die Integration über die  $\zeta_i$  für die Mellin-Transformation von  $I'$



$$M\tilde{I}\{I'\} = \left\{ \frac{\Gamma(\tilde{\rho} - \ell_1 - \ell_2)}{\Gamma(\tilde{\rho})} \right\}_R \Gamma(\ell_1) \Gamma(\ell_2). \quad (8.22)$$

$$\frac{1}{\ell_1 - 2\epsilon} \quad \frac{1}{\ell_2 - 3\epsilon} \quad \frac{1}{\ell_1 + \ell_2 - 3\epsilon} \quad \frac{1}{\ell_1 - 3\epsilon} \quad \frac{1}{\ell_1 + \ell_2 - 3\epsilon} \quad \frac{1}{\ell_2 - 3\epsilon} \quad \tilde{I}$$

mit

$$\tilde{I} = \int d\tilde{\alpha}_1 d\tilde{\alpha}_2 \delta(\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 - 1) \int d\tilde{\alpha}_4 d\tilde{\alpha}_5 \delta(\tilde{\alpha}_4 + \tilde{\alpha}_5 - 1). \quad (8.23)$$

$$\cdot \tilde{\alpha}_4 / (\tilde{\alpha}_5^{\ell_1} \tilde{\alpha}_1^{\ell_2})$$

In der Nähe von  $\ell_1, \ell_2 \approx 0$  ist  $\tilde{I} = 1/2$ . In analoger Weise bekommt man die Beiträge der übrigen Sequenzen. Diese Beiträge erhält man aus (8.22), indem die den einzelnen MSM zugeordneten Pole ausgetauscht werden. Dies geschieht mit den in Tab.3.2 angegebenen Regeln, wobei sich  $\ell_{120}, \ell_{20}$  und  $\ell_{10}$  nach (3.3.9) berechnen. Addiert man die Beiträge der einzelnen Sequenzen auf, so wird

$$I' = \frac{1}{2} X_L \quad (8.24)$$

Der Ausdruck für  $X_L$  wird in (5.1.13) angegeben. Addiert man das Resultat für den gespiegelten Graphen hinzu, so bekommt man genau den in Tab.5.1 angegebenen Ausdruck.



9. Beispiel II

Als zweites Beispiel möchten wir die Berechnung des Graphen 55 der Parton-Amplitude  $q\bar{q} + f^* \rightarrow q\bar{q}$  aus Abschnitt 7.3 vorführen (siehe Abb. 9.1). Sein Beitrag zu  $T_p(u, v, Q^2)$  lautet

$$T_p(u, v, Q^2) = G \left[ i \frac{d\alpha}{2\pi} \left( \frac{Q^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon} \right]^2 T_H^0(u, v, Q^2) I' \quad (9.1)$$

mit

$$I' = \int_0^1 [d\alpha] \frac{C(\alpha)^{\tilde{\rho}-2+\epsilon}}{D(\alpha)^{\tilde{\rho}} (q^2)^{-2\epsilon}} Z(\alpha) \quad (9.2)$$

$$\tilde{\rho} = 3 + 2\epsilon \quad (9.3)$$

worin  $Z(\alpha)$  durch

$$Z(\alpha) = \frac{-1}{8(q^2)^2} \text{Tr} \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\beta \gamma_1 \gamma^\delta \gamma_2 \gamma^\alpha \gamma_3 \gamma^\rho \gamma_5 \gamma^\nu \cdot \Delta_{\alpha\beta\gamma}(Y_6, Y_5, -Y_7) \Delta_{\mu\nu\delta}(Y_4, Y_8, Y_7) g^{\delta\gamma} \quad (9.4)$$

+ Kontraktionen

gegeben ist.

Die parametrische C-Funktion ist

$$C(\alpha) = d_{236} d_{147} + d_5 d_{123467} \quad (9.5)$$

die D-Funktion



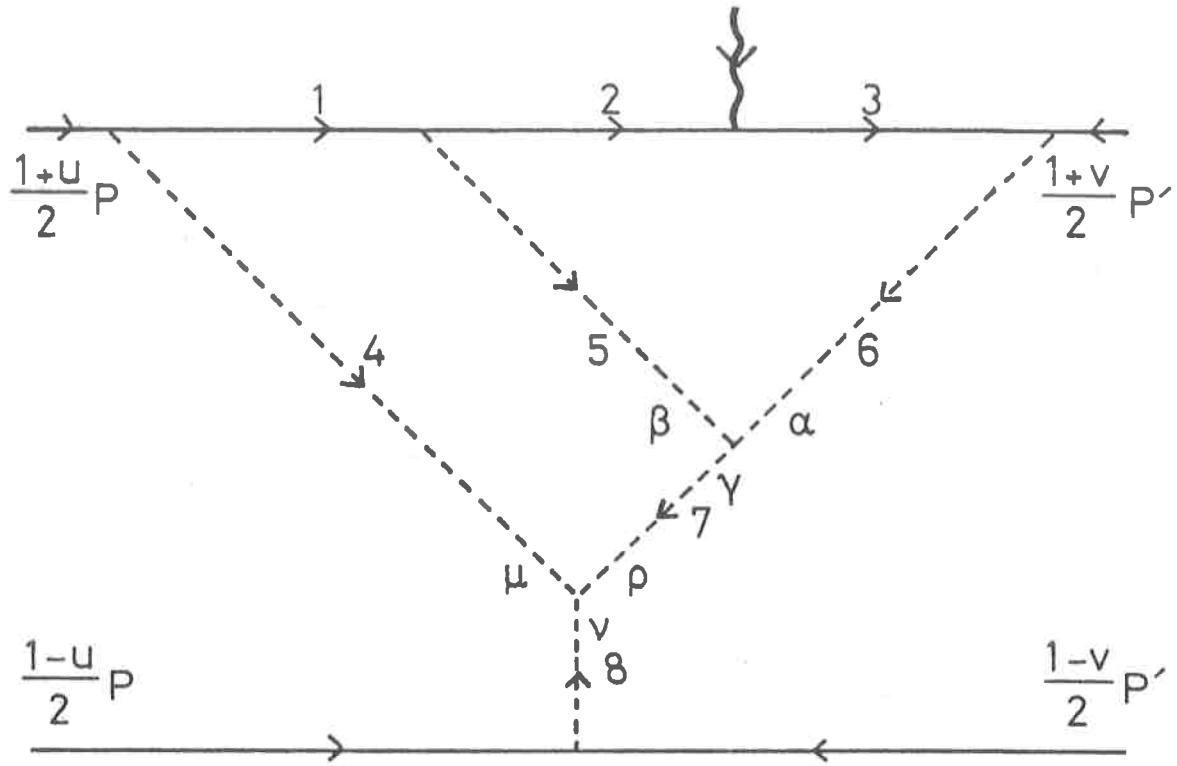


Abb. 9.1 Graph 55 aus Abschnitt 7.3

$$\begin{aligned}
 D(\alpha) = & q^2 \left\{ d_2 d_3 d_{1457} + d_1 d_3 d_5 \right. \\
 & + \bar{\epsilon}_1 d_3 d_4 d_5 \\
 & + \bar{\epsilon}_2 \left[ d_2 d_6 d_{1457} + d_1 d_5 d_6 + d_2 d_5 d_7 \right. \\
 & \quad \left. + d_1 d_7 d_{2356} \right] \\
 & \left. + \bar{\epsilon}_1 \bar{\epsilon}_2 \left[ d_4 d_7 d_{2356} + d_4 d_5 d_6 \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{9.6}$$

und die  $\gamma_i$  sind gleich



$$C_1 Y_1 = (1 - \varepsilon_1) P d_4 d_{2356} + (P + \varepsilon_2 P') [d_7 d_{2356} + d_5 d_6] + (P + P') d_3 d_5 \quad (9.7a)$$

$$C_1 Y_2 = (P + \varepsilon_2 P') [d_5 d_7 + d_6 d_{1457}] + (1 - \varepsilon_1) P d_4 d_5 + (P + P') d_3 d_{1457} \quad (9.7b)$$

$$C_1 Y_3 = -(P + P') [d_2 d_{1457} + d_1 d_5] - (\varepsilon_1 P + P') d_4 d_5 - (1 - \varepsilon_2) P' [d_6 d_{1457} + d_5 d_7] \quad (9.7c)$$

$$C_1 Y_4 = (1 - \varepsilon_1) P [d_1 d_{2356} + d_2 d_5] - (\varepsilon_1 P + P') d_3 d_5 - (\varepsilon_1 P + \varepsilon_2 P') [d_7 d_{2356} + d_5 d_6] \quad (9.7d)$$

$$C_1 Y_5 = (1 - \varepsilon_1) P d_2 d_4 + (P + \varepsilon_2 P') (d_2 d_7 - d_1 d_6) - (P + P') d_1 d_3 - (\varepsilon_1 P + P') d_3 d_4 - (1 - \varepsilon_2) P' d_3 d_7 - (\varepsilon_1 P + \varepsilon_2 P') d_4 d_6 \quad (9.7e)$$

$$C_1 Y_6 = (1 - \varepsilon_2) P' d_3 d_{1457} - (\varepsilon_2 P' + P) (d_2 d_{1457} + d_1 d_5) - (\varepsilon_1 P + \varepsilon_2 P') d_4 d_5 \quad (9.7f)$$

$$C_1 Y_7 = -(\varepsilon_1 P + \varepsilon_2 P') d_4 d_{2356} + (1 - \varepsilon_2) P' d_3 d_5 - (P + \varepsilon_2 P') (d_1 d_{2356} + d_2 d_5) \quad (9.7g)$$



Zusätzlich definieren wir

$$Y_g = \tilde{\epsilon}_1 P + \tilde{\epsilon}_2 P' \quad (9.8)$$

Die MSM werden auf die gleiche Art wie schon im vorausgehenden Beispiel bestimmt. Im Unterschied zum Beispiel I tragen hier auch solche Terme zu  $Z(\alpha)$  bei, die proportional zu Potenzen von  $\tilde{\epsilon}_1$  und  $\tilde{\epsilon}_2$  sind. Daher müssen die MSM für jeden Term einer Entwicklung in  $\tilde{\epsilon}_1$  und  $\tilde{\epsilon}_2$  einzeln bestimmt werden. Es kommen die in Tab.9.1 aufgelisteten SM als MSM in Frage. Um später darauf Bezug nehmen zu können, haben wir die einzelnen SM durchnummieriert. Mit

Nr.	SM	Typ	$L(g)$
1	$\{d_3\}$	$h, g_1$	0
2	$\{d_1, d_2\}$	$h, g_2$	0
3	$\{d_3, d_6, d_7\}$	$h, g_1, g_2, g_{12}$	0
4	$\{d_2, d_3, d_5, d_6\}$	$h, g_1$	1
5	$\{d_1, d_2, d_3, d_5, d_6\}$	$h, g_1, g_2$	1
6	$\{d_2, d_3, d_5, d_6, d_7\}$	$h, g_1, g_2, g_{12}$	1

Tab.9.1



$$Y_i = \bar{Y}_i^+ \rho + \bar{Y}_i^- \rho' \quad (9.9)$$

wird

$$Z(\alpha) = -\frac{1}{2} \left\{ \bar{Y}_1^+ \bar{Y}_2^+ \bar{Y}_3^+ (\bar{Y}_6 - \bar{Y}_5) \cdot (\bar{Y}_4 - \bar{Y}_8) \right. \\ \left. + \bar{Y}_1^+ \bar{Y}_2^+ \bar{Y}_3^+ (\bar{Y}_8 - \bar{Y}_7) (\bar{Y}_6 + \bar{Y}_7) \right\}, \quad (9.10)$$

falls die Kontraktionen zunächst unterdrückt werden. Entwickelt man (9.10) nach Potenzen von  $\bar{\epsilon}_1$  und  $\bar{\epsilon}_2$ , so stellt sich heraus, daß nur der  $\bar{\epsilon}_1^0$  Term des zweiten Summanden in der geschweiften Klammer einen Beitrag zur logarithmisch führenden Näherung liefert.

Betrachten wir zuerst den Term, der proportional zu  $\bar{\epsilon}_2^2 \bar{\epsilon}_1^0$  ist. Er ergibt sich mit der Substitution

$$(\bar{Y}_8 - \bar{Y}_7)(\bar{Y}_7 + \bar{Y}_6) \rightarrow -\bar{\epsilon}_2^2 [C(\alpha) + \alpha_{14} \alpha_{2356} + \alpha_2 \alpha_5] \\ \cdot [\alpha_{14} \alpha_{2356} + \alpha_2 \alpha_5 + \alpha_2 \alpha_{1457} + \alpha_5 \alpha_{14}] \quad (9.11)$$

aus (9.10). Führende Beiträge liefern solche SM, die in der  $\ell$ -Ebene Pole in der Umgebung von  $\ell_1=0$ ,  $\ell_2=2$  hervorrufen. Dies leisten die SM (1), (2), (3), (5), (6). Sie bilden gerade eine vollständige Sequenz. Da die MSM (5) vom Typ  $h, g_1, g_2$  ist, gilt für die in (3.4.18) definierte Funktion  $\mathcal{Z} \mid \mathcal{Z} \rightarrow \infty$ . Daher muß die Form (3.4.20) der Mellin-Transformation benutzt werden. Die Skalierung erfolgt auf die gleiche Weise wie in Beispiel I. Man erhält

$$MT\{I'\} = -2 \left\{ \frac{\Gamma(\hat{\rho} - \ell_1) \Gamma(\hat{\rho} - \ell_2)}{\Gamma^2(\hat{\rho})} \right\}_R \Gamma(\ell_1) \Gamma(\ell_2) \quad (9.12)$$

$$\frac{1}{(\ell_2 - 2 - 2\epsilon)} \frac{1}{(\ell_1 - 2\epsilon)} \frac{1}{(-2\epsilon)} \frac{1}{(-\epsilon)} \frac{1}{(\ell_1 - \epsilon)} \tau_2^2.$$



Die Inversion ergibt

$$I' = (-1) \frac{1}{4\epsilon^4} \tilde{\epsilon}_2^{-2\epsilon} (1 - \tilde{\epsilon}_1^{-\epsilon})^2 \quad (9.13)$$

Betrachten wir als nächstes den Term, der proportional zu  $\tilde{\epsilon}_1^{\epsilon} \tilde{\epsilon}_2$  ist. Man erhält ihn durch die Substitution

$$(\tilde{Y}_8 - \tilde{Y}_7)(\tilde{Y}_6 + \tilde{Y}_7) \rightarrow -\tilde{\epsilon}_2 [G(\alpha) + d_{2356} d_{14} + d_2 d_5] \cdot \\ \cdot (1 - \tilde{\epsilon}_2) [d_3 d_5 + d_3 d_{1457}] \quad (9.14)$$

Nun sind die Singularitäten um  $\ell_1=0, \ell_2=1$  von Interesse. Die MSM (1), (2), (4), (5) und (6) führen zu solchen Singularitäten. Auch sie bilden gerade eine Sequenz. Das Resultat ist

$$I' = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\epsilon^4)} (\tilde{\epsilon}_2^{-\epsilon} - \tilde{\epsilon}_2^{-2\epsilon}) (1 - \tilde{\epsilon}_1^{-\epsilon})^2 \quad (9.15)$$

Wenden wir uns nun den Kontraktionen zu, die in (9.10) vernachlässigt wurden. Durch eine Kontraktion erhöht sich der Index  $\tilde{\rho}$  um Eins. Dieser Effekt kann nur dadurch kompensiert werden, daß  $R_{ij}$  wie  $1/8$  skaliert. Daher scheidet die SM (3) aus. Die Analyse aller möglichen Kontraktionen zeigt, daß nur die Kontraktionen der Kanten  $\ell_3, \ell_5$  und  $\ell_3, \ell_6$  beitragen. Es ist

$$R_{35} = -(\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_7) / G(\alpha) \quad (9.16a)$$

und



$$R_{36} = (\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7) / G(\alpha) \quad (9.16b)$$

In beiden Fällen bilden die MSM (1), (2), (4), (5) und (6) wieder eine vollständige Sequenz. Die Isolation der Pole geschieht auf die gleiche Weise wie bei Abwesenheit der Kontraktionen. Man erhält das Resultat

$$I' = -\frac{3}{2} \frac{1}{2\epsilon^4} (\tilde{\epsilon}_2^{-\epsilon} - \tilde{\epsilon}_2^{-2\epsilon}) (1 - \tilde{\epsilon}_1^{-\epsilon})^2 \quad (9.17)$$

Addition von (9.13), (9.15) und (9.17) ergibt

$$I' = -\frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon^4} \tilde{\epsilon}_2^{-\epsilon} (1 - \tilde{\epsilon}_2^{-\epsilon}/2) (1 - \tilde{\epsilon}_1^{-\epsilon})^2 \quad (9.18)$$



Anhang A Verallgemeinerung des Karplus-Kroll-Operators

In diesem Anhang werden wir eine Verallgemeinerung des  $\mathcal{D}$ -Operators von Karplus und Kroll [KA 49] vorstellen, mit dessen Hilfe die Relation (1.4.4) gezeigt werden kann. Ist der Operator  $\mathcal{D}_{\mu_i}$ , der ursprünglich von Karplus und Kroll eingeführt wurde, dazu geeignet, um  $q_{\mu_i}$  im Zähler von (1.4.1) zu ersetzen, so ersetzt der Operator

$$\mathcal{D}_{\mu_{i_1} \dots \mu_{i_s}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a_i} \mu_{i_s} \int_{m_i^2}^{\infty} d\tilde{\tau}_{i_s} \dots \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a_i} \mu_{i_1} \int_{\tilde{\tau}_{i_2} + a_i^2}^{\infty} d\tilde{\tau}_{i_1} \dots \quad (A.1)$$

$$\dots \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a_i} \mu_{i_1} \int_{a_i=0}^{\infty} d\tilde{\tau}_{i_1}$$

aufgrund von

$$\mathcal{D}_{\mu_{i_1} \dots \mu_{i_s}} \left[ (q_i + a_i)^2 - \tilde{\tau}_{i_1} + i\epsilon_F \right]^{-\tau_i} \quad (A.2)$$

$$= q_{\mu_{i_1}} \dots q_{\mu_{i_s}} \left[ q_i^2 - m_i^2 + i\epsilon_F \right]^{-\tau_i}$$

das Produkt  $q_{\mu_{i_1}} \dots q_{\mu_{i_s}}$ . Falls  $s_i = 1$ , so ist  $m_i^2$  als untere Grenze der  $d\tilde{\tau}_{i_1}$ -Integration in (A.1) zu nehmen. Wir werden hier (1.4.4) nur für den Fall ableiten, in dem alle  $s_i \geq 1$  sind. Der Fall, in dem einige  $s_i$  verschwinden, erfordert nur geringfügige Modifikationen.

Durch Einführung der Hilfsimpulse  $a_i$ ,  $i = 3 \dots, n$  wie in 1.4 beschrieben, bekommt man die parametrische Funktion

$$\mathcal{D}'' = \sum_e \frac{P_e^2}{e} \chi(e) \cdot G(a) \sum_{s=1}^n \alpha_s (\tilde{\tau}_{s_1} - i\epsilon_F) + \tilde{\mathcal{D}} \quad (A.3)$$



mit

$$\hat{D} = 2 \sum_{1 \leq i \leq n} a_i y_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \tau_{ij} + \sum_{1 \leq i \leq n} a_i^2 z_i \quad (A.4)$$

und

$$y_i = \sum_{\ell \ni e_i} P_\ell \chi(\ell) \quad (A.5a)$$

$$\tau_{ij} = \sum_{\ell \ni e_i, e_j} \pm \chi(\ell) \quad i \neq j \quad (A.5b)$$

$$z_i = \sum_{\ell \ni e_i} \chi(\ell) \quad (A.5c)$$

In (A.5b) ist das positive (negative) Vorzeichen zu wählen, falls die Kanten  $e_i, e_j$  bezüglich  $\ell$  gleich (verschieden) orientiert sind.

Zur Ableitung von (1.4.4) ist im wesentlichen der Ausdruck

$$\prod_{i=1}^n D_{\mu_{i,1} \dots \mu_{i,s_i}} D''^{-\tilde{\rho}} \quad (A.6)$$

zu ermitteln. Dies geschieht am zweckmäßigsten, indem zuerst sämtliche Integrationen, die in (A.6) enthalten sind, ausgeführt werden, um anschließend die Ableitungen vorzunehmen. Die Integration in (A.6) führt auf

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^n \int_{m_i^2}^{\infty} d\tilde{\tau}_{i,1} \dots \int_{\tilde{\tau}_{i,2} + n_i^2}^{\infty} d\tilde{\tau}_{i,s_i} D''^{-\tilde{\rho}} \\ &= \prod_{i=1}^n \left[ \frac{(-1)}{d \tilde{\tau}_i} \right]^{s_i} \frac{\Gamma(\tilde{\rho} - s_1 - \dots - s_n)}{\Gamma(\tilde{\rho})} D'^{-\tilde{\rho} + s_1 + \dots + s_n} \end{aligned} \quad (A.7)$$

Dabei ist



$$D' = D(\alpha) + \tilde{D} - C(\alpha) \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \alpha_i \quad (A.8)$$

Mit den beiden Regeln

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \mu_{i,\epsilon} D'^{-\tau} = (-\tau) D'^{-\tau-1} d_{\mu_{i,\epsilon}} \quad \ell \leq s; \quad (A.9a)$$

und

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \mu_{i,\epsilon} d_{\mu_{i,m}} = \frac{1}{2} g_{\mu_{i,\epsilon}} g_{\mu_{i,m}} \tau_{ij} \quad (A.9b)$$

lassen sich die Ableitungen in (A.6) einfach berechnen.

In (A.9) bedeuten

$$d_{\mu_{i,\epsilon}} = (y_i + \sum_{j=1}^n \alpha_j \tau_{ji})_{\mu_{i,\epsilon}} \quad (A.10a)$$

und

$$\tau_{ii} = z_i - G d_i \quad (A.10b)$$

Man erhält

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_n} \mu_{n,s_n} \dots \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \mu_{1,1} D'^{-\tilde{\rho} + s_1 \dots + s_n} \\ &= \sum_{\sigma \geq 0} (-1)^{s_1 + \dots + s_n - \sigma} \frac{\Gamma(\tilde{\rho} - \sigma)}{\Gamma(\tilde{\rho} - s_1 - \dots - s_n)} D'^{-\tilde{\rho} + \sigma} \end{aligned} \quad (A.11)$$

$$[d_{\mu_{n,s_n}} \dots d_{\mu_{1,1}}]_{\sigma \text{ KONTR}}$$

Hierbei ist  $[ ]_{\sigma \text{ KONTR}}$  die Summe aller Terme, die man durch Auswahl von  $\sigma$  Paaren aus der Menge der  $d_{\mu_{i,i}}$  und Kontraktion jedes Paars nach



$$\partial_{\mu_{i,e}} \partial_{\mu_{i,m}} \rightarrow \frac{1}{2} g_{\mu_{i,e} \mu_{i,m}} \tau_{ij} \quad (A.12)$$

erhält. Durch Einsetzen von (A.11) und (A.7) in (A.6) bekommt man schließlich (1.4.4), wobei

$$R_{ij} = - \frac{\tau_{ij}}{d_i d_j C(\alpha)} \quad (A.12a)$$

$$Y_i = - \frac{Y_i}{d_i C(\alpha)} \quad (A.12b)$$



## Anhang B Lichtkegelvariablen

In diesem Anhang möchten wir einige Eigenschaften der Dirac-Matrizen vorstellen, falls anstelle der gewöhnlichen 0,1,2,3-Basis eine  $+, -, \perp$ -Basis gewählt wird [ CH 68 ]. Diese Basis erweist sich bei der Berechnung des asymptotischen Verhaltens eines FI häufig als vorteilhaft. Sie ist für einen allgemeinen Vektor  $a$  durch

$$a_{\pm} = (a_0 \pm a_3) / \sqrt{2} \quad (B.1)$$

$$a_{\perp} = (a_1, a_2)$$

definiert. Damit schreibt sich das Skalarprodukt

$$a \cdot b = a_+ b_- + a_- b_+ - a_{\perp} b_{\perp} \quad (B.2)$$

In analoger Weise führt man

$$\gamma_{\pm} = (\gamma_0 \pm \gamma_3) / \sqrt{2} \quad (B.3)$$

$$\gamma_{\perp} = (\gamma_1, \gamma_2)$$

ein. Damit wird

$$\gamma_+ \gamma_+ = \gamma_- \gamma_- = 0 \quad (B.4a)$$

$$\{ \gamma_+, \gamma_- \} = 2 \quad (B.4b)$$

$$\{ \gamma_{\pm}, \gamma_{\perp} \} = 0 \quad (B.4c)$$

$$\{ \gamma_{\perp}, \gamma_{\perp} \} = -2 \mathbb{1} \quad (B.4d)$$



Bei der Berechnung eines Produktes aus  $\gamma$ -Matrizen kann man die  $\gamma_{\pm}$ -Matrizen getrennt von den  $\gamma_{\perp}$ -Matrizen betrachten, da ihre Vertauschung aufgrund von (B.4c) lediglich das Vorzeichen ändert. Für die  $\gamma_{\pm}$ -Matrizen gilt

$$\gamma_{\pm} (\gamma_{\pm} \gamma_{\pm}) \dots (\gamma_{\pm} \gamma_{\pm}) = 2^k \gamma_{\pm} \quad (B.5)$$

und für die  $\gamma_{\perp}$

$$\sum_{i=1,2} \gamma_i \gamma_{k_1} \dots \gamma_{k_\ell} \gamma^i = 0 \quad (B.6)$$

$$k_1, \dots, k_\ell = 1, 2 \quad \ell \text{ ungerade}$$



Anhang C Einige Eigenschaften der hypergeometrischen Funktion  $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$

Die hypergeometrische Funktion  $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$  (siehe z.B. [GR 65b]) ist durch die Reihe

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \quad (C.1)$$

definiert. Diese Reihe konvergiert für  $|z| < 1$ . Auf dem Konvergenzkreis  $|z| = 1$  ist sie

- i. divergent, falls  $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) \leq -1$
- ii. absolut konvergent, falls  $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0$
- iii. bedingt konvergent, falls  $-1 < \operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) \leq 0$   
 $z = 1$  ausgenommen

Ist  $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\beta$  so kann  $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$  durch ein Integral dargestellt werden

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{1}{\Gamma(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 dt t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha} \quad (C.2)$$

Um  $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$  über den Bereich hinaus, in dem die Reihe (C.1) konvergiert, analytisch fortzusetzen, können folgende Transformationen benutzt werden

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1-z)^{-\alpha} F(\alpha, \gamma - \beta; \gamma; z/(z-1)) \quad (C.3)$$

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta; \gamma; z) &= \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)} F(\alpha, \beta; \alpha + \beta - \gamma + 1; 1-z) \\ &+ (1-z)^{\gamma - \alpha - \beta} \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta; \gamma - \alpha - \beta + 1; 1-z) \end{aligned} \quad (C.4)$$



$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta; \gamma; z) &= (1-z)^{-\alpha} \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma-\alpha)} F(\alpha, \gamma-\beta; \alpha-\beta+1; 1/(1-z)) \\ &+ (1-z)^{-\beta} \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma-\beta)} F(\beta, \gamma-\alpha; \beta-\alpha+1; 1/(1-z)) \end{aligned} \quad (C.5)$$



Anhang D Einige Eigenschaften der Gegenbauer Polynome  $C_{1/n}^{3/2}(x)$

Siehe z.B. [GR 65b]

Orthogonalität:

$$\int_{-1}^{+1} dx (1-x^2) C_m^{3/2}(x) C_n^{3/2}(x) = \delta_{mn} b_n \quad (D.1)$$

$$b_n = 2 \frac{(1+n)(2+n)}{(3+2n)} \quad (D.2)$$

Vollständigkeit:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b_n} C_n^{3/2}(x) C_n^{3/2}(y) = \delta(x-y) \left( (1-x^2)(1-y^2) \right)^{-1/2} \quad (D.3)$$

$$C_{1/n}^{3/2}(1) = (n+1)(n+2)/2 \quad (D.4)$$

$$|C_{1/n}^{3/2}(x)| < C_{1/n}^{3/2}(1) \quad (D.5)$$

$$\int_{-1}^{+1} dx (1-x^2) C_n^{3/2}(x) (1-x)^{y-1} = b_n (2n+3) \cdot 2^y \frac{\Gamma(1+y) \Gamma(n+1-y)}{\Gamma(1-y) \Gamma(n+3+y)} \quad (D.6)$$



Literatur

- AB 72 M. Abramowitz, I.A. Stegun; *Handbook of Mathematical Functions* (New York 1972)
- AI 69 A.C. Aitken; *Determinanten und Matrizen* (Mannheim 1969)
- AL 70 J. Aldins, S.J. Brodsky, A.J. Dufner, T. Kinoshita; *Phys. Rev. D* 1 (1970) 2378
- AL 77 G. Altarelli, G. Parisi; *Nucl. Phys.* B126 (1977) 298
- AL 78 G. Altarelli, R.K. Ellis, G. Martinelli; *Nucl. Phys.* B143 (1978) 521, B146 (1978) 544
- AL 79 G. Altarelli, R.K. Ellis, G. Martinelli; *Nucl. Phys.* B157 (1979) 461
- AM 80 D. Amati, A. Bassetto, M. Ciafaloni, G. Marchesini, G. Veneziano; *Nucl. Phys.* B173 (1980) 429
- AP 71 Th. Appelquist, J.R. Primack; *Phys. Rev. D* 4 (1971) 2454
- BA 80 V.N. Baier, A.G. Grozin; *Phys. Lett.* 96B (1980) 181
- BE 74 M.C. Bergère, Yuk-Ming P. Lam; *Comm. Math. Phys.* 39 (1974) 1
- BE 77 M.C. Bergère, C. Gilain; *J. Math. Phys.* 19 (1978) 1495
- BE 78a M.C. Bergère, C. Calan, A.P.C. de Malbouisson; *Comm. Math. Phys.* 62 (1978) 137
- BE 78b C.J. Bebek et. al.; *Phys. Rev. D* 17 (1978) 1693
- BE 79 M.C. Bergère, C. de Calan; *Phys. Rev. D* 20 (1979) 2047
- BE 80 V.V. Belokurov, M.I. Usyukina; *Phys. Lett.* 96B (1980) 375
- BE 81 V.V. Belokurov, M.I. Usyukina; *Teor. Math. Phys.* 44 (1981) 657, 45 (1981) 957
- BJ 63 J.D. Bjorken, T.T. Wu; *Phys. Rev.* 130 (1963) 2566
- Bi 37 F. Bloch, A. Nordsieck; *Phys. Rev.* 52 (1937) 54
- BR 73 S.J. Brodsky, G. Farrar; *Phys. Rev. Lett.* 31 (1973) 1153, *Phys. Rev. D* 11 (1975) 1309



- BR 79 S.J. Brodsky, G.P. Lepage; Preprint SLAC-PUB-2447
- CA 75 J.J. Carazzone, E.C. Poggio, H.R. Quinn; Phys. Rev. D11 (1975) 2283, E D12 (1975) 3368
- CA 80 C. de Calan, A.P.C. Malbouisson; Ann. Inst. H. Poincaré 32 (1980) 91
- CA 81 C. de Calan, F. David, V. Rivasseau; Comm. Math. Phys. 78 (1981) 531
- CH 52 J.S.R. Chisholm; Proc. Camb. Phil. Soc. 48 (1952) 300
- CH 68 S.J. Chang, S.K. Ma; Phys. Rev. 180 (1969) 1506
- CH 71 W.-K. Chen; Applied Graph Theory (Amsterdam 1971)
- CH 80 V.L. Chernyak, A.R. Zhitnitski; Sov. J. Nucl. Phys. 31 (1980) 544
- CH 81 M.K. Chase; Nucl. Phys. B189 (1981) 461
- CH 82 S.C. Chao; Nucl. Phys. B195 (1982) 381
- CI 80 M. Ciafaloni; Phys. Lett 95B (1980) 113
- CI 81 M. Ciafaloni, G. Curci; Phys. Lett 102B (1981) 352
- CO 65 S. Coleman, R.E. Norton; Nuovo Cimento 38 (1965) 438
- CO 73 J. Cornwall, G. Tiktopoulos; Phys. Rev. D3 (1973) 2687
- CO 76 J. Cornwall, G. Tiktopoulos; Phys. Rev. D13 (1976) 3370
- CO 80 J.C. Collins; Phys. Rev. D22 (1980) 1478
- CU 80a G. Curci, M. Greco; Phys. Lett. 92B (1980) 175
- CU 80b G. Curci, W. Furmanski, R. Petronzio; Nucl. Phys. B175 (1980) 27
- CV 74a P. Cvitanović; Phys. Rev. D10 (1974) 338
- CV 74b P. Cvitanović, T. Kinoshita; Phys. Rev. D10 (1974) 3978
- DA 78 B. Davis; Integral Transforms and Their Applications (New York 1978)
- DA 81 H.D. Dahmen, F. Steiner; Z. Phys. C11 (1981) 247
- DA 82 H.D. Dahmen, B. Scholz, F. Steiner; Nucl. Phys. B202 (1982) 365
- DI 81 F.M. Dittes, A.V. Radyuskin; Yad. Fiz. 34 (1981) 529
- DO 77 Yu.L. Dokshitzer; Sov. J. Nucl. Phys. 46 (1977) 641
- DO 80a R. Doria, J. Frenkel, J.C. Taylor; Nucl. Phys. B168 (1980) 93



- DO 80b Yu. Dokshitzer, D.I. Dyakonov, S.I. Troyan; Phys. Reports 58 (1980) 269
- DO 82 C.A. Dominguez; Phys. Rev. D25 (1982) 3084
- DU 80 A. Duncan, A. Mueller; Phys. Rev. D21 (1980) 1636
- ED 52 R.J. Eden; Proc. Roy. Soc. A210 (1952) 388
- ED 66 R.J. Eden, P.V. Landshoff, D.T. Olive, J.C. Polkinghorne; The Analytic S-Matrix (Cambridge 1966)
- EF 80 A.V. Efremov, A.V. Radyuskin; Teor. Mat. Fiz. 42 (1980) 147
- EL 79 R.K. Ellis, H. Georgi, M. Machacek, H.D. Politzer, G.G. Ross; Nucl. Phys. B152 (1979) 285
- ET 67 E. Etim, G. Pancheri, B. Touschek; Nuovo Cimento 51B (1967) 276
- FE 63 P.G. Federbush, M.T. Grisaru; Ann. of Phys. 22 (1963) 263, 299
- FI 71 P.M. Fishbane, J.P. Sullivan; Phys. Rev. D4 (1971) 458
- FI 81 R.D. Field et al. ; Nucl. Phys. B186 (1981) 429
- FL 77 E.G. Floratos, D.A. Ross, C.T. Sachrajda; Nucl. Phys. B129 (1977) 66, E B139 (1978) 545, B152 (1979) 493
- FO 65 D. Fotiadi, M. Froissart, J. Lascoux, F. Pham; Topology 4 (1965) 159
- FR 82 W.F. Frazer, G. Rossi; Phys. Rev. D25 (1982) 843
- GA 73 R. Gastmans, R. Meuldermans; Nucl. Phys. B63 (1973) 277
- GR 65a J.V. Greenman; J. Math. Phys. 6 (1965) 660
- GR 65b I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik; Table of Integrals, Series, and Products (New York 1965)
- GR 72 V.N. Gribov, L.N. Lipatov; Sov. J. Nucl. Phys. 15 (1972) 458, 675
- GR 73 G. Grammer, D.R. Yennie; Phys. Rev. D8 (1973) 4332
- HA 63 I.G. Halliday; Nuovo Cimento 30 (1963) 177
- HA 64 I.G. Halliday; Ann. of Phys. 28 (1964) 320
- HA 65 B. Humprecht; Nuovo Cimento 40A (1965) 542
- HA 74 I.G. Halliday, J. Huskins, C.T. Sachrajda; Nucl. Phys. B 83 (1974) 189



- HA 79 K. Harada, T. Kaniko, N. Sakai; CERN Preprint  
TH 2619
- HA 98 J. Hadamard; *Acta Math.* 22 (1898) 55
- HE 66 K. Hepp; *Comm. Math. Phys.* 2 (1966) 361
- HO 73 't Hooft, M. Veltman; 'Diagrammar' CERN-Report  
73-9 (1973)
- HO 81 R.R. Horgan, P.V. Landshoff, D.M. Scott; *Phys. Lett.*  
110B (1982) 493
- HW 66 C. Hwa, R. Teplitz; *Homology and Feynman Integrals*  
(Reading 1966)
- JA 68 R. Jackiw; *Ann. of Phys.* 48 (1968) 292
- JA 76 J.M. Jauch, F. Rohrlich; *The Theory of Photons and  
Electrons*, 2nd Edition (New York 1976)
- JO 82 H.F. Jones; *Phys. Lett.* 117B (1982) 238
- KA 49 R. Karplus, N.M. Kroll; *Phys. Rev.* 77 (1949) 536
- KA 81 F. Khalafi; *Z. Phys.* C11 (1981) 251
- KI 62 T. Kinoshita, J. *Math. Phys.* 3 (1962) 650
- KI 76 T. Kinoshita, A. Ukawa; *Phys. Rev.* D13 (1976) 1573
- KI 77 T. Kinoshita, A. Ukawa; *Phys. Rev.* D15 (1977) 1598
- KU 79 J. Kubar-Andre, F.E. Paige; *Phys. Rev.* D19 (1979)  
221
- LA 59 L.D. Landau; *Nucl. Phys.* 13 (1959) 181
- LA 73 P.V. Landshoff; *Phys. Rev.* D10 (1974) 1024
- LE 63 T.D. Lee, M. Nauenberg; *Phys. Rev.* 133(1963) 1549
- LE 79 G. Lepage, S.J. Brodsky; *Phys. Lett.* 87B (1979) 359
- LE 80 G. Lepage, S.J. Brdosky; *Phys. Rev.* D22 (1980) 2157
- LE 81 T.D. Lee; *Particle Physics and Introduction to  
Field Theory* (New York 1981)
- LE 82 G.P. Lepage; Preprint CLNS 82/522
- LI 66 M.J. Lighthill; *Einführung in die Theorie der  
Fourier-Analysis und der Verallgemeinerten Funktionen*  
(Mannheim 1966)
- LI 81 C. Di Lieto, S. Gendron, I.G. Halliday, C.T. Sach-  
rajda; *Nucl Phys.* B183 (1981) 223



- MA 73 V.A. Mateev, R.M. Muradyan, A.V. Tavkeldize; Nuovo Cim. Lett. 7 (1973) 719
- MA 75 W.J. Marciano, H. Sirlin; Nucl Phys. B88 (1975) 86
- ME 64 M.M. Menke; Nuovo Cimento 34 (1964) 351
- MU 79 A.H. Mueller; Phys. Rev. D20 (1979) 2037
- MU 81 A.H. Mueller; Phys. Reports 73 (1981) 238
- NA 57a Y. Nambu; Nuovo Cimento 6 (1957) 1064
- NA 57b N. Nakanishi; Prog. Theor. Phys. 17 (1957) 401
- NA 58 Y. Nambu; Nuovo Cimento 9 (1958) 610
- NA 71 N. Nakanishi; Graph Theory and Feynman Integrals (New York 1971)
- OH 82 Th. Ohrndorf; Nucl. Phys. B198 (1982) 26
- PA 79 G. Parisi, R. Petronzio; Nucl Phys. B 154 (1979) 427
- PA 80 G. Parisi; Phys. Lett 90B (1980) 295
- PO 60 J.C. Polkinghorne, G.R. Screamton; Nuovo Cimento 15 (1960) 289, 925
- PO 63 J.C. Polkinghorne; J. Math. Phys. 4 (1963) 503, 1393, 1396
- PO 64 J.C. Polkinghorne; Nuovo Cimento 36 (1965) 857
- PO 80 J.C. Polkinghorne; Models of High Energy Processes (Cambridge 1980)
- PO 82 K. Pohlmeier; J. Math. Phys. 23 (1982) 2511
- SA 82 M.H. Sarmaldi; University of Pittsburgh Preprint FITT-82-10
- SE 81 A. Sen; Phys. Rev. D24 (1981) 295
- SH 62 Y. Shimamoto; Nuovo Cimento 25 (1962) 1292
- ST 78 G. Sterman; Phys. Rev. D17 (1978) 2773
- SU 56 V. Sudakov; Sov. Phys. JETP 3 (1956) 65.
- SY 58 K. Symanzik; Prog. Theor. Phys. 20 (1958) 690
- TI 63 G. Tiktopoulos; Phys. Rev. 131 (1963) 480, 2373
- TR 74 H. Trute; DESY-Preprint 74/44 (1974)
- YE 61 D.R. Yennie, S.C. Frautschi, H. Surra; Ann. of Phys. 13 (1961) 379
- ZA 65 O.I. Zav'yalov, B.M. Stephanov; Sov. Jour. Nucl. Phys. 1 (1965) 658



Danksagung

Herzlich bedanken möchte ich mich bei Herrn Dr. I. Halliday, der mein Interesse an den asymptotischen Eigenschaften von FI geweckt hat, bei Herrn Prof. E. Etim für die zahlreichen Anregungen im Anfangsstadium dieser Arbeit, bei Herrn Prof. L. Schülke für die hilfreiche Betreuung und zahllosen kritischen Diskussionen und bei Herrn Dr. F. W. Bopp, Herrn Dr. J. Nölle und Herrn Dr. B. Ragutt für ihr reges Interesse. Nicht zuletzt gebührt der Studienstiftung des deutschen Volkes besonderer Dank, ohne deren großzügige Unterstützung diese Arbeit nicht hätte entstehen können.

Ich versichere diese Arbeit selbstständig unter Verwendung der angegebenen Quellen angefertigt zu haben.

Siegen, den.....

.....

