Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Análisis Hamiltoniano de teorías de Kalb-Ramond en 5 dimensiones con una dimensión compacta

Tesis presentada al

Posgrado en ciencias
(Física Aplicada)

como requisito parcial para la obtención del grado de

Doctor en Ciencias
(Física Aplicada)

por

Alberto López Villanueva

asesorado por

Dr. Alberto Escalante Hernández
(IFUAP)

Puebla, Pue.
Diciembre 2014

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Análisis Hamiltoniano de teorías de Kalb-Ramond en 5 dimensiones con una dimensión compacta

Tesis presentada al

Posgrado en ciencias
(Física Aplicada)

como requisito parcial para la obtención del grado de

Doctor en Ciencias
(Física Aplicada)

por

Alberto López Villanueva

asesorado por

Dr. Alberto Escalante Hernández
(IFUAP)

Puebla, Pue.
Diciembre 2014

Título: Análisis Hamiltoniano de teorías de Kalb-Ramond en 5 dimensiones con una dimensión compacta

Estudiante: ALBERTO LÓPEZ VILLANUEVA

COMITÉ

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Presidente

Dr. Gilberto Tavares Velasco
Secretario

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla
Vocal

Dr. Alfredo Herrera Aguilar
Vocal

Dr. Alfonso Rosado Sánchez
Vocal

Dr. J. Jesús Toscano Chávez
Suplente

Dr. Alberto Escalante Hernández

(IFUAP)
Asesor

Índice general

Capítulo 1

Resumen

Se hace un análisis hamiltoniano de las teorías de Kalb-Ramond, Proca Kalb-Ramond y Stüeckelberg Kalb-Ramond en 5D con una dimensión compacta. Mediante la compactación de la quinta dimensión, se obtiene la lagrangiana efectiva cuadridimensional y esta se analiza aplicando el algoritmo de Dirac-Bergmann estricto. Se hallan todas las restricciones, se realiza el conteo de los grados de libertad y se calculan los corchetes de Dirac de las teorías. También se encuentra que las teorías de Kalb-Ramond y Stüeckelberg Kalb-Ramond 5-dimensionales son teorías de norma reducibles, y mediante una apropiada fijación de la norma, se halla la presencia de pseudo-bosones de Goldstone. Respecto a la teoría Proca Kalb-Ramond 5-dimensional se encuentra que no es una teoría de norma y que es irreducible.

Capítulo 2

Introducción

La posible existencia de dimensiones extra espaciales más allá de las cuatro que percibimos ha estado bajo consideración desde principios del siglo XX. Uno de los primeros trabajos sobre dimensiones extra en física fue realizado por Kaluza (en 1921) al intentar unificar las interacciones electromagnética y gravitacional mediante la introducción de una quinta dimensión espacial compacta sumamente pequeña; del orden de la escala de Plack, $l_p \sim 1{,}6 \times 10^{-33} cm$. La idea de dimensiones extra, después de aproximadamente medio siglo de permanecer practicamente olvidada (debido al desarrollo de la mecánica cuántica y a los avances en la teoría cuántica de campos), resurge en las teorías de supergravedad, y posteriormente, en la teoría de cuerdas, hoy en día incluidas en la llamada teoría M, en donde el intento ha consistido en unificar la gravitación con las interacciones del modelo estándar (ME). A partir del surgimiento de la teoría de cuerdas, la noción de dimensiones extra quedó profundamente influenciada por esta, ya que además de introducir el concepto de compactificación, introduce demás conceptos como la localización de campos del ME empleando defectos topológicos o en puntos fijos en el espacio compacto, el concepto de branas, entre otros [1].

Uno de los obstáculos para poner a prueba la existencia de dimensiones extra es su tamaño sumamente pequeño. Estudios recientes, sin embargo, sugieren que algunas de las dimensiones extra, si no es que todas, podrían ser mayores que l_p. Esto ha motivado a preguntarse si los efectos de las dimensiones extra pueden ser visibles ante los experimentos. La respuesta a esta pregunta apunta a la posibilidad de que si bien pueden existir dimensiones extra tan grandes del orden de milímetros, éstas puedan permanecer escondidas o no puedan ser detectadas por los experimentos. Una propuesta para resolver este problema es que el mundo observable estuviera restringido a vivir en una hipersuperficie cuadridimensional llamada brana dentro de un espacio de dimensión superior, y que las interacciones del ME no puedan escapar de la brana sino solo la interacción gravitacional, de modo que las dimensiones extra solo puedan ser probadas por esta última [2].

Otra pregunta que se ha hecho, es dónde y cómo las dimensiones extra se manifiestan en la naturaleza. Al respecto, se piensa que la existencia de dimensiones extra en la naturaleza debe tener implicaciones fenomenológicas en nuestro mundo visible cuadridimensional o efectivo. Pero para comprender esto, debe entenderse cómo una teoría efectiva emerge de una teoría de dimensiones superiores. Con este fin, se expone el siguiente ejemplo. La gravedad, es una propiedad geométrica del espacio, entonces, en un mundo de dimensión superior, donde se asume que la teoría de la relatividad de Einstein es válida, la constante de acoplamiento no necesariamente coincidirá con la constante de Newton G_N, que es la que se observa. Asumiendo que hay n dimensiones extra espaciales compactificadas en círculos de radio R y definiendo a G_* como la constante de acoplamiento gravitacional fundamental, la acción gravitacional en dimensiones superiores se escribe como

$$S_{grav} = -\frac{1}{16\pi G_*}\int d^{4+n}x\sqrt{\mid g_{(4+n)}\mid}R_{(4+n)},$$

con $g_{(4+n)}$ el tensor métrico $(4+n)$ dimensional con la signatura $(+,-,-,-,...)$, y $ds^2 = g_{MN}dx^M dx^N$, $M, N = 0, 1, 2, ..., n+3$. La acción debe seguir siendo adimensional, por lo que las dimensiones de longitud extra que provienen de la integración sobre las dimensiones extra debe equilibrarse con las dimensiones de la constante de acoplamiento G_*, y entonces, $[R_{(4+n)}] = [longitud]^{-2} = [energia]^2$, por lo que $[G_*] = [energia]^{-(n+2)}$. Asumiendo que las dimensiones extra son planas, la métrica toma la forma $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu - \delta_{ab}dy^a dy^b$, en donde $g_{\mu\nu}$ da la parte de la métrica dependiente de las coordenadas x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, y $\delta_{ab}dy^a dy^b$ da el elemento de línea en el bulk, cuyas coordenadas son parametrizadas por y^a; $a = 1, ..., n$. También se ve que $\sqrt{\mid g_{(4+n)}\mid} = \sqrt{\mid g_{(4)}\mid}$ y $R_{(4+n)} = R_{(4)}$, por lo que integrando sobre las dimensiones extra en la ecuación para S_{grav} se obtiene la acción efectiva

$$S_{grav} = -\frac{V_n}{16\pi G_*}\int d^4x\sqrt{\mid g_{(4)}\mid}R_{(4)},$$

en donde V_n es el volumen del espacio extra. La ecuación anterior es precisamente la acción gravitacional estándar en $4D$ si se hace la identificación

$$G_N = G_*/V_n.$$

Así, G_N es de hecho una cantidad efectiva, y notando que si G_* fuera un acoplamiento grande, podría entenderse la pequeñez de G_N vía supresión volumétrica. Las dimensiones extra submilimétricas, sin embargo, no han podido ser probados ante la gravedad [2].

Además de la teoría de cuerdas y de gran unificación, el estudio de modelos involucrando dimensiones extra hoy en día también tienen una actividad importante a fin de explicar y resolver problemas en física teórica. Por ejemplo, el problema de la jerarquía de masa, la explicación de la energía oscura, la materia oscura e inflación [3]. También hay motivaciones teóricas y fenomenológicas para cuantizar una teoría de norma con dimensiones extra, por ejemplo, si existen las dimensiones extras, entonces sus efectos deben poder ser probados con el actual colisionador LHC, y en el Colisionador Lineal Internacional [4].

Por otro lado, uno de los tipos de campos de importancia relevante en física teórica son los campos tensoriales antisimétricos. Los campos tensoriales antisimétricos se han usados para describir partículas con masa cero sin espín, así como partículas vectoriales [5]-[10]. En otros casos, aparecen en algunas formulaciones de teorías de supergravedad [11]-[13], y como una forma de normar la aparente supersimetría interna de las interacciones débiles [14]. En teoría de cuerdas, son los mediadores de la interacción entre cuerdas abiertas y partículas cargadas [15], y son también un elemento fundamental para describir la unificación de las teorías de Yang-Mills y supergravedad [16]. Además, los campos tensoriales antisimétricos tienen un papel importante caracterizando defectos en física de estado sólido [17].

Dado entonces el interés en el estudio de teorías de campo con dimensiones extra junto con la importancia de los campos tensoriales antisimétricos en la física teórica, en este trabajo se estudian teorías de campo involucrando campos tensoriales antisimétricos en el contexto de dimensiones extra. Las teorías que se estudian son las teorías 5D de Kalb-Ramond, Proca Kalb-Ramond, y Stüeckelberg Kalb-Ramond [18] con una dimensión compacta. Previo al estudio de las teorías en cinco dimensiones, también se estudian las correspondientes teorías en cuatro dimensiones. Se analiza su dinámica hamiltoniana aplicando el *algoritmo de Dirac-Bergmann estricto*. El formalismo de Dirac-Bergmann es esencialmente una extensión del formalismo hamiltoniano usual que permite conocer de manera clara las simetrías relevantes que son manifiestas en una teoría. De hecho, muchos de los logros que se han dado en el entendimiento de la física de partículas se debe al análisis de Dirac, ya que da un entendimiento general de cómo es la evolución dinámica de los grados de libertad, tanto a nivel clásico como a nivel cuántico, lo que lo hace una herramienta fundamental para entender la dinámica de sistemas singulares. En el formalismo de Dirac-Bergmann *estándar* [19], se trabaja sobre un espacio fase reducido al considerar como variables dinámicas a aquellas cuya derivada temporal aparezca en el lagrangiano. La desventaja de trabajar sobre un espacio reducido es el no poder conocer de forma completa elementos como las restricciones, las transformaciones de norma y el álgebra de restricciones de la teoría [20]. En el formalismo estricto, sin embargo, esto no sucede, ya que se trabaja sobre el espacio fase completo al considerar como variables dinámicas a todas las variables que definen la teoría. El formalismo estricto permite conocer, por ejemplo, la estructura correcta del hamiltoniano y la acción extendida, además de ser la mejor guía para poder estudiar la formulación cuántica de la teoría mediante una correcta identificación de las restricciones [21]. Finalmente, debe mencionarse que este formalismo estricto no se encuentra desarrollado en la literatura, por lo que su aplicación constituye una contribución general del presente trabajo.

La organización de este trabajo es la siguiente. En el capítulo 3 se expone a grandes rasgos la teoría de Kaluza Klein (KK) y se da la manera de obtener teorías de campo efectivas a partir de teorías de campo con una dimensión extra compacta. En el capítulo 4 se desarrolla el algoritmo de Dirac-Bergmann estricto. En el capítulo 5 se estudia la teoría de Kalb-Ramond 4D, y en el capítulo 6 la teoría de Kalb-Ramond 5D con una dimensión compacta. En el capítulo 7, se estudia la teoría de Proca Kalb-Ramond 4D, y en el capítulo 8, la teoría de Proca Kalb-Ramond 5D con una dimensión compacta. En el capítulo 9, se estudia la teoría de Stüeckelberg Kalb-Ramond 4D, y en el capítulo 10, la teoría de Stüeckelberg Kalb-Ramond 5D con una dimensión compacta. El capítulo 11 es de conclusiones y prospectos.

Capítulo 3

La teoría de Kaluza-Klein

En este capítulo, se expone a grandes rasgos la teoría de KK, la cual introduce una dimensión extra espacial para unificar la gravedad, el magnetismo y un campo escalar. Seguido de esto, se menciona cómo es el escenario en los mundos brana, en donde también se trabaja con dimensiones extra, y se mencionan algunas dificultades que hay para estudiar teorías de campo sin integrar las dimensiones extra. Finalmente, se muestra cómo surge una teoría de campo efectiva a partir de una teoría con dimensiones extra utilizando los modos KK.

La teoría KK para el caso gravitacional [22, 23], es esencialmente una teoría de la relatividad general en 5 dimensiones sujeta a dos restricciones que tienen como objetivo justificar por qué usualmente solo se perciben cuatro dimensiones y aparentemente no se percibe la quinta dimensión. La primera restricción, introducida por Kaluza, es la llamada *condición cilíndrica*, la cual consiste en que todas las derivadas parciales de cualquier cantidad respecto a la quinta coordenada es cero. La segunda condición, introducida por Klein, es la llamada *condición de compactación*, la cual consiste en asumir que la quinta dimensión no solo es microscópica sino que también tiene una topológia cerrada; es decir, que se cierra sobre sí misma. Esta condición de compactación será usada en este trabajo.

Como se sabe, el elemento fundamental en relatividad general es el tensor métrico g_{AB} $(A, B = 0, 1, 2, 3, 5)$ que en este caso 5-dimensional (5D) tendría 15 entradas independientes. Análogamente, se puede construir un tensor de Ricci $5D$ R_{AB} y un escalar de Ricci $5D$ R, así como un tensor de Einstein $5D$; es decir,

$$G_{AB} = R_{AB} - g_{AB}\frac{R}{2}. \tag{3.1}$$

Las ecuaciones de campo que pueden obtenerse son precisamente las ecuaciones de Einstein en $5D$, ya que estas tendrían como caso particular, cuando $A = 0, 1, 2, 3$, a las ecuaciones de Einstein usuales

$$G_{AB} = kT_{AB}, \tag{3.2}$$

donde k es una constante de acoplamiento y T_{AB} un tensor de energía-impulso $5D$. En los trabajos de Kaluza y Klein se trabaja considerando el vació, esto es $G_{AB} = 0$, lo cual implica que

$$R_{AB} = 0. \tag{3.3}$$

Las 15 relaciones anteriores sirven para determinar las 15 entradas de g_{AB}, pero en la práctica esto es posible solo si se hace una suposición sobre g_{AB}; por ejemplo, en problemas gravitacionales se asume que $g_{AB} = g_{AB}(x)$, a esto se le llama elección de coordenadas. Kaluza estuvo interesado en el electromagnetismo y relacionó a g_{AB} con el 4-potencial A_α de la teoría de Maxwell. Él postuló la condición cilíndrica y asumió que g_{55} es constante, pero en un caso más general $g_{AB} = g_{AB}(x^\alpha)$ y $g_{55} = -\phi^2(x^\alpha)$, donde ϕ es un campo escalar. Entonces, la elección general de la métrica y su respectiva inversa son [23]

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} - k^2\phi^2 A_\alpha A_\beta & -k\phi^2 A_\alpha \\ -k\phi^2 A_\beta & -\phi^2 \end{pmatrix}, \qquad g^{AB} = \begin{pmatrix} g^{\alpha\beta} & -kA^\beta \\ -kA^\alpha & -\frac{1}{\phi} + k^2 A^2 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

con $g_{\alpha\beta}$ el tensor métrico usual. En efecto, puede verse que $g^{AB} g_{AC} = \delta^B_C$. Explícitamente,

$$\begin{aligned} \delta^B_C &= \begin{pmatrix} (g_{\alpha\beta} - k^2\phi^2 A_\alpha A_\beta) g^{\alpha\mu} + k^2\phi^2 A_\beta A^\mu & -(g_{\alpha\beta} - k^2\phi^2 A_\alpha A_\beta) k A^\beta \\ -k\phi^2 A_\alpha g^{\alpha\mu} + k\phi^2 A^\mu & k^2\phi^2 A_\beta A^\beta - \phi^2 \left(-\frac{1}{\phi^2} + k^2 A^2\right) \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \delta^\beta_\mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si $k = 1$, la métrica y su respectiva inversa están dadas por

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} - \phi^2 A_\alpha A_\beta & -\phi^2 A_\alpha \\ -\phi^2 A_\beta & -\phi^2 \end{pmatrix}, \qquad g^{AB} = \begin{pmatrix} g^{\alpha\beta} & -A^\beta \\ -A^\alpha & -\frac{1}{\phi} + A^2 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Usando estas relaciones, se obtiene que

$$det(g_{AB}) = -g\phi^2, \tag{3.6}$$

con $g \equiv det(g_{\alpha\beta})$, y el escalar de Ricci $5D$ está dado por [23]

$$R^{(5)} = R^{(4)} + \frac{1}{2\phi^2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{\phi}\Box\phi + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\phi, \tag{3.7}$$

con $F_{\mu\nu}$ el tensor de Faraday usual. De este modo, la acción del sistema gravitacional está dada por

$$S[g_{AB}] = \int \sqrt{-g}\sqrt{\phi^2} R^{(5)} d^5x. \tag{3.8}$$

Sustituyendo (3.7) en (3.8), se tiene que

$$S[A_\mu, g_{\alpha\beta}, \phi] = \int \sqrt{-g}\sqrt{\phi^2}\left[R^{(4)} + \frac{1}{2\phi^2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{\phi}\Box\phi + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\phi\right] d^5x. \tag{3.9}$$

Imponiendo la condición $\int dx^5 = 1$, se obtiene la acción efectiva

$$S_e[A_\mu, g_{\alpha\beta}, \phi] = \int \sqrt{-g}\sqrt{\phi^2}\left[R^{(4)} + \frac{1}{2\phi^2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{\phi}\Box\phi + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\phi\right] d^4x. \tag{3.10}$$

Considerando como variables dinámicas a ϕ , A_α y $g_{\alpha\beta}$, se obtienen las ecuaciones de movimiento [23]

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\beta} &= \frac{k^2\phi^2}{2}T_{\alpha\beta} - \frac{1}{\phi}(\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi - g_{\alpha\beta}\Box\phi), && (3.11)\\
\nabla^\alpha F_{\alpha\beta} &= -3\frac{\nabla^\alpha\phi}{\phi}F_{\alpha\beta}, && (3.12)\\
\Box\phi &= -\frac{k^2\phi^2}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, && (3.13)
\end{aligned}$$

con $G_{\alpha\beta}$ el tensor usual de Einstein y $T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(F_{\alpha\rho}F^{\rho}{}_{\beta} - \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)$ el tensor de energía–momento de la teoría electromagnética. Así, la teoría KK unifica gravedad, electromagnetismo y un campo escalar. Lo anterior es un caso muy general; en realidad, Kaluza consideró a $g_{55} = -\phi^2 = -1$ y $k = \left(\frac{16\pi G}{c^4}\right)^{1/2}$, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\beta} &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}, && (3.14)\\
\nabla^\alpha F_{\alpha\beta} &= 0, && (3.15)\\
\frac{k^2}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} &= 0 \quad \Rightarrow F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 0. && (3.16)
\end{aligned}$$

En general, estas ecuaciones describen la propagación de un gravitón de espín 2, un fotón de spín 1 y una partícula escalar de espín 0 [23].

Ahora se muestra cómo es el escenario en *mundos brana*, en donde también se trabaja con dimensiones extra [2]. El escenario que se tiene en mente es que se vive en una superficie cuadridimensional dentro de un espacio de dimensión superior llamada "brana". Esta hipersuperficie debe estar localizada en un punto específico del espacio extra en los puntos fijos de la variedad compacta. A lo que se le ha llamado brana es en realidad una descripción de la teoría efectiva, y pensamos en ellas como defectos topológicos de anchura casi cero que pueden tener campos localizados en su superficie. Por otro lado, en la teoría de cuerdas también existen las D-branas (D de Dirichlet) y estas son superficies donde cuerdas abiertas pueden terminar sobre las branas dando lugar a todo tipo de campos localizados en la brana, incluidos campos de norma. En la aproximación de supergravedad, las D-branas aparecen como solitones de las ecuaciones de movimiento gravitacionales. Usualmente, las D-branas se caracterizan por el número de dimensiones espaciales en su superficie, por tanto, una d-brana es descrita por un espacio tiempo plano con d coordenadas espaciales y una coordenada temporal. El modelo más simple consiste en partículas del modelo estándar viviendo en una 3-brana. Entonces, se necesita describir teorías que vivan en la brana (como el modelo estándar) o en el bulk (como la gravedad), así como las interacciones entre estas dos teorías, y para esto, se usan las siguientes prescripciones de la teoría de campos:

(i) Teorías de bulk. Son descritas por una acción de dimensiones superiores, definida en términos de una densidad lagrangiana de campos en el bulk, digamos $\phi(x, \vec{y})$, evaluada sobre todas las coordenadas del bulk, es decir

$$S_{bulk}[\phi] = \int d^4x d^n y \sqrt{| g_{(4+n)} |} L(\phi(x, \vec{y})), \tag{3.17}$$

donde x son las (3+1) coordenadas de la brana y y para las n dimensiones extra.

(ii) Teorías de brana. Son descritas por la acción $(3+1)D$ de los campos brana $\varphi(x)$, que es naturalmente promovida a una expresión de dimensión superior por el uso de una delta de densidad

$$S_{brana}[\varphi] = \int d^4x d^n y \sqrt{| g_{(4)} |} L(\varphi(x)) \delta^n(\vec{y} - \vec{y}_0), \tag{3.18}$$

donde se supone que la brana está localizada en $\vec{y} = \vec{y}_0$ sobre las dimensiones extra, y $g_{(4)}$ es la métrica $(3+1)D$ usualmente plana inducida en la brana.

(iii) Finalmente, la acción puede tener acoplada campos de brana y de bulk, estas últimas localizadas en el espacio, por lo que es natural que una delta de densidad esté involucrada

$$\int d^4x d^n y \sqrt{| g_{(4)} |} \phi(x, \vec{y}) \bar{\psi}(x) \psi(x) \delta^n(\vec{y} - \vec{y}_0). \tag{3.19}$$

La presencia de la función delta en las acciones anteriores no permite una interpretación clara ni una lectura fácil de la teoría dinámica. En este caso, es más útil trabajar con una teoría efectiva cuadridimensional que pueda obtenerse después de integrar sobre la dimensión extra. A este procedimiento se le llama *reducción dimensional*. Esto también ayuda a identificar el límite de bajas energías de la teoría, en donde la dimensión extra no es visible.

Ahora se describe cómo surge una teoría efectiva de una teoría de dimensión mayor utilizando los modos de KK, la cual es otra manera de estudiar teorías con dimensiones extra, y será la manera como se estudiarán las teorías con una dimensión extra en este trabajo. Se considera un modelo 5-dimensional en donde la quinta dimensión está compactificada a un circulo de radio R. Sea ϕ un campo escalar de bulk, para el cual la acción sobre un espacio-tiempo plano tiene la forma

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int d^4x dy \left(\partial^A\phi\partial_A\phi - m^2\phi^2\right), \tag{3.20}$$

en donde $A = 0, 1, 2, 3, 5$ y y denota la quinta dimensión. La compactación de la variedad interna es reflejada en la periodicidad del campo $\phi(y) = \phi(y + 2\pi R)$, lo que permite una expansión de Fourier de la forma

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\phi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\left[\phi_n(x)\cos\left(\frac{ny}{R}\right) + \hat{\phi}_n(x)\sin\left(\frac{ny}{R}\right)\right]. \tag{3.21}$$

El primer termino ϕ_0 que no depende de la quinta dimensión es conocido como el modo cero, mientras que los modos ϕ_n y $\hat{\phi}_n$ son llamados *modos excitados o de KK* [2]. Introduciendo esta expansión en la acción e integrando sobre la dimensión extra, se obtiene

$$\begin{aligned} S[\phi] \;=\; & \frac{1}{2}\int d^4x \left(\partial_\mu\phi_0(x)\partial^\mu\phi_0(x) + m^2\phi_0^2(x)\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\int d^4x \left(\partial^\mu\phi_n\partial_\mu\phi_n - m_n^2\phi_n^2\right) \\ & + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\int d^4x \left(\partial^\mu\hat{\phi}_n\partial_\mu\hat{\phi}_n - m_n^2\hat{\phi}_n^2\right), \end{aligned} \tag{3.22}$$

en donde la masa KK está dada por $m_n^2 = m^2 + \frac{n^2}{R^2}$. Entonces, en una teoría efectiva el campo de dimensión superior aparece como una torre de campos con masa m_n con niveles de energía degenerados. Los modos excitados son campos con el mismo espín y números cuánticos que ϕ y que difieren solamente en el número KK, asociado con la quinta componente del momento, la cual es discreta debido a la compactación. Compactaciones distintas llevan a modos distintos de expansión de los campos, y debe ser elegida de acuerdo a la geometría de la dimensión extra. Condiciones de frontera extra asociados a propiedades topológicas específicas del espacio compacto pueden ayudar en la selección de una base. Un ejemplo útil es el orbifold unidimensional, $U(1)/Z_2$, el cual está construido en un círculo. Operativamente, se requiere que la teoría sea invariante bajo una simetría de paridad extra; es decir, $\phi(-y) = \pm\phi(y)$. Campos pares (impares) se expanden solo en modos cosenos (senos), y el espectro KK tendría solo la mitad de los modos. Campos impares no contarán con un modo cero y no aparecerán en teorías de bajas energías. Muchas de las presentes ideas se irán aclarando a lo largo del trabajo.

Capítulo 4

El algoritmo de Dirac-Bergmann estricto

Una de las características de la mecánica clásica usual es que la evolución del sistema está determinada completamente por las ecuaciones de movimiento; es decir, que basta dar las condiciones iniciales en su solución para saber el estado del sistema en un instante posterior. Sin embargo, hay sistemas para los cuales la solución de las ecuaciones de movimiento contiene *funciones arbitrarias* dependientes del tiempo que *no* pueden determinarse, de modo que dadas las condiciones iniciales, el estado del sistema a un instante posterior *no* está determinado de manera única; es decir, por las ecuaciones de movimiento. En este caso, es necesario hacer una generalización a la teoría que incluya a este tipo de sistemas. La teoría que proporciona esta generalización es el llamado *Algoritmo de Dirac-Bergmann para sistemas singulares.*

El algoritmo de Dirac-Bergmann para sistemas singulares es un método análogo al método de multiplicadores de Lagrange, en donde las funciones arbitrarias en las ecuaciones de movimiento son análogas a los multiplicadores y juegan el papel de forzadoras de *restricciones* sobre el sistema. Si algunas de las funciones arbitrarias o multiplicadores no pueden determinarse, se dice que la teoría posee *libertad de norma*, y si no pueden determinarse, la teoría corresponde a una *teoría de norma.*

El formalismo de Dirac-Bergmann que a continución se describe es el llamado *estricto*, el cual posee ventajas importantes respecto al formalismo usual. El formalismo estricto, al considerar el espacio fase completo (i.e., al considerar como variables dinámicas tanto a coordenadas como momentos), tiene la ventaja, entre otras cosas, de poder conocer de forma completa las restricciones, las transformaciones de norma, y la acción y el hamiltoniano extendidos, a diferencia del formalismo usual, en el que se trabaja sobre un espacio fase reducido (considerando como variables dinámicas a aquellas cuya velocidad generalizada aparece en la acción). Además, el formalismo estricto posee la ventaja de poderse aplicar a cualquier teoría.

4.1. Sistemas clásicos singulares

Por simplicidad, la teoría se desarrolla en un inicio para sistemas con grados de libertad finitos. Se parte del principio de Hamilton, el cual dice que el movimiento del sistema entre el tiempo t_1 y el tiempo t_2 es tal que la acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q^n(t), \dot{q}^n(t)\right) dt$$

tiene un valor estacionario, con q^i, $\dot{q}^i = dq^i/dt$ las coordenadas y las velocidades generalizadas, $i = 1, ..., N$, y t un parámetro de evolución que puede identificarse con el tiempo, siendo las condiciones de valor estacionario las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0. \tag{4.1}$$

Desarrollando estas ecuaciones, se obtiene

$$\ddot{q}^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} = \frac{\partial L}{\partial q^n} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^{n'} \partial \dot{q}^n} \dot{q}^{n'}. \tag{4.2}$$

De esta ecuación, si el determinante de la matriz $(\partial^2 L/\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n)$, llamada *matriz Hessiana*, es distinto de cero, entonces es invertible y pueden conocerse todas las $\ddot{q}^n$ en términos de q^n y $\dot{q}^n$. Sin embargo, si el determinante es cero, la matriz no es invertible, y sólo se podrán obtener R expresiones de la forma $\ddot{q}^j = \ddot{q}^j\left(q^i, \dot{q}^i, q^a, \dot{q}^a, \ddot{q}^a\right)$, con $R < N$ el rango de la matriz, y $\ddot{q}^a$ las aceleraciones que no se pudieron despejar de (4.2), por lo que en general, de las $\ddot{q}^j$, quedarán indeterminadas $q^{R+1}, ..., q^N$ funciones arbitrarias independientes y sus respectivas velocidades y aceleraciones. El caso de interés es cuando el determinante de la matriz Hessiana es cero, y en este caso se dice que la teoría o el lagrangiano es singular, mientras que en caso contrario, que es regular.

4.2. Restricciones primarias

Si $det(\partial^2 L/\partial\dot{q}^{n'}\partial\dot{q}^n) = 0$, esta es justamente la condición para que no todas las velocidades generalizadas puedan despejarse en términos de las coordenadas y los momentos. Esto implica que algunas de las ecuaciones que definen a los momentos, $p_n = \partial L/\partial\dot{q}^n$, se podrán escribir como

$$\phi^m = \phi^m(q,p) = 0, \tag{4.3}$$

con $m = 1, ..., M$, llamadas *restricciones primarias*, con la característica de que al sustituirse en la definición del momento se vuelven identidades, y de que para su obtención no se requiere de las ecuaciones de movimiento. Las restricciones (4.3), obtenidas mediante la definición del momento, no necesariamente son independientes. El número de restricciones primarias independientes $M' \leq M$ lo da la nulidad de la matriz Hessiana. El rango $R = N - M'$ da el número de expresiones para las velocidades generalizadas que pueden expresarse en términos de las coordenadas y los momentos. Las restricciones primarias independientes se obtienen calculando los vectores nulos de la matriz Hessiana. Así, si V^μ son los vectores nulos, V^μ_α sus componentes y ϕ^α las restricciones primarias encontradas, las restricciones primarias independientes están dadas por

$$\Phi^\mu = V^\mu_\alpha \phi^\alpha.$$

Por simplicidad, se asume que el rango de la matriz Hessiana, $N - M'$, es constante en el espacio $(q, \dot{q})$, de modo que el número de restricciones primarias M' no varíe, y que las ecuaciones (4.3) definan una subvariedad en el espacio fase $2N - M'$ dimensional.

4.3. Ecuaciones débiles y fuertes

Ahora se define el concepto de igualdad débil, el cual se representa con el símbolo "$\approx$".

Definición: Una función F del espacio fase es débilmente igual a cero si

$$F\mid_{\Sigma_1} = 0,$$

donde Σ_1 es la subvariedad definida por las restricciones primarias $\phi^m(q,p) = 0$. Se dice que F es fuertemente igual a cero si se satisfacen las condiciones

$$F\mid_{\Sigma_1} = 0, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial q^i}, \frac{\partial F}{\partial p_i}\right)\mid_{\Sigma_1} = 0, \tag{4.4}$$

con $(\partial F/\partial q^i, \partial F/\partial p_i)\mid_{\Sigma_1}$ el conjunto de las derivadas parciales de F respecto a las variables canónicas evaluadas sobre Σ_1. En particular, $\phi^m \approx 0$, y en general, puede mostrarse que una función G débilmente cero puede escribirse como una combinación lineal de las restricciones, es decir, que $G \approx 0 \Leftrightarrow G = g_m \phi^m$, para alguna función del espacio fase g_m. Si una ecuación se satisface tanto en Σ_1 como en todo el espacio fase se le llama fuerte, y se expresa utilizando el símbolo de igualdad usual.

4.4. La condición de regularidad

La subvariedad $2N - M'$ dimensional que definen las restricciones $\phi^m = 0$ puede ser cubierta por regiones abiertas, las cuales pueden dividirse (localmente) en restricciones independientes $\phi^{m'}$, $(m' = 1, ...M')$ cuya matriz jacobiana $(\partial\phi^{m'}/\partial(q^n, p_n))$ es de rango M', y en restricciones dependientes $\phi_{\hat{m}} = 0$, $(\hat{m} = M' + 1, .., M)$ que son consecuencia de las otras. La condición de regularidad sobre las restricciones $\phi^{m'}$ se establece imponiendo que el rango de la matriz jacobiana $(\partial\phi^{m'}\partial(q^j, p_j))$ sea constante, e igual a M'. La *condición de regularidad* es la condición necesaria para que la dimensión de la variedad formada por las restricciones ϕ^m sea constante e igual a M'. Así, por ejemplo, si las restricciones ϕ^m forman una variedad de dimensión M', las restricciones $(\phi^m)^2$ *no* forman una variedad de dimensión M', lo cual puede mostrarse verificando que el rango de la matriz jacobiana ya no es M'. La condición de regularidad juega un papel importante en la teoría, como lo es en el paso al formalismo hamiltoniano.

4.5. El Hamiltoniano canónico

Si se define el hamiltoniano canónico de manera usual, $H_c = \dot{q}^i p_i - L$ (mediante una transformada de Legendre), sucede que algunas velocidades no podrán expresarse como función de las coordenadas y momentos, y además, debido a las ecuaciones de restricción $\phi^m(q, p) = 0$, que las coordenadas y los momentos ya no son independientes. Por esto último, el hamiltoniano canónico sólo está bien definido sobre la subvariedad $2N - M'$ dimensional en el espacio fase. Además, si se elige el hamiltoniano canónico como

$$H_c \to H_c + u_m \phi^m, \tag{4.5}$$

en donde u_m son funciones arbitrarias en el espacio fase, el formalismo debe permanecer sin cambio (dado que cualquier combinación lineal de restricciones es débilmente cero). Con este hamiltoniano, la acción está dada por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{q}^i p_i - H_c - u_m \phi^m\right) dt. \tag{4.6}$$

Entonces, calculando su variación, usando las ecuaciones de restricción y que $\delta q^i \mid_{t_1}^{t_2} = 0$, las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_c}{\partial q^i} - u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial q^i}. \tag{4.7}$$

Debido a que las u_m o multiplicadores de Lagrange son funciones arbitrarias del espacio fase, las ecuaciones de movimiento (4.7) *no* están determinadas de manera única. Si al final del proceso no se pudieron determinar todos los multiplicadores, las ecuaciones de movimiento estarán indeterminadas por funciones arbitrarias. Esta indeterminación es lo que se conoce como la *libertad de norma de la teoría*, de la cual se hablará más adelante.

4.6. Hamiltoniano primario y restricciones secundarias

El hamiltoniano primario es el definido por (4.5),

$$H_1 \equiv H_c + u_m \phi^m, \tag{4.8}$$

el cual contiene, hasta el momento, toda la información del sistema. Las ecuaciones de movimiento (4.7) pueden escribirse de forma compacta como

$$\dot{q}^i = \{q^i, H_c\} + u_m \{q^i, \phi^m\}, \qquad \dot{p}_i = \{p_i, H_c\} + u_m \{p_i, \phi^m\}, \tag{4.9}$$

con $\{,\}$ el paréntesis de Poisson. De hecho, para una función arbitraria del espacio fase $g = g(q,p)$, se tiene que

$$\dot{g} = \{g, H_c\} + u_m \{g, \phi^m\}, \tag{4.10}$$

o bien, usado las restricciones $\phi^m = 0$, que

$$\dot{g} = \{g, H_c + u_m \phi^m\} \equiv \{g, H_1\}. \tag{4.11}$$

Debido a que las restricciones (en general) de la teoría no deben cambiar en el tiempo, a estas se les impone la llamada *condición de consistencia*, la cual se expresa mediante

$$\dot{\phi}^i = \{\phi^i, H_1\} = \{\phi^i, H_c\} + u_m \{\phi^i, \phi^m\} \approx 0. \tag{4.12}$$

La ecuación anterior se puede considerar como un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo para los multiplicadores de Lagrange u_m. Definiendo el vector columna h con entradas

$h^i \equiv \{\phi^i, H_c\}$, el vector u con entradas u_m y la matriz W de tamaño $M' \times M'$ (hay M' restricciones independientes ϕ^i) con entradas $W^{im} \equiv \{\phi^i, \phi^m\}$, la última expresión se escribe como

$$h + uW \approx 0. \tag{4.13}$$

La posibilidad de hallar los multiplicadores de Lagrange está en función de las características de estos objetos. Debido a que la obtención de los multiplicadores de Lagrange no son uno de los objetivos específicos de este trabajo, no se describirán los posibles casos en los que destacan las diferentes propiedades de h y W. Sin embargo, se describirá el caso en que caen las teorías (como las de norma) que se estudirán en los capítulos siguientes. Este caso de interés es:

Caso $h \neq 0$, $detW = 0$. Debido a que $detW = 0$, el rango de W, K, da el número de multiplicadores de Lagrange que se podrán despejar, mientras que su nulidad $M' - K$ los multiplicadores que quedarán indeterminados, de modo que habrá funciones arbitrarias en las ecuaciones de movimiento. Si V^i son los vectores nulos de W $(i = 1, ..., M' - K)$ que por definición satisfacen

$$WV^i \approx 0,$$

multiplicando (4.13) por V^i, se tiene que

$$hV^i \approx 0, \tag{4.14}$$

que en general son funciones del espacio fase independientes de los multiplicadores. Estas i relaciones implican que la teoría presenta i restricciones adicionales, a las cuales se les llama *restricciones secundarias*. Este es, recalcando, el caso en el que caen las teorías que se estudiarán (como lo son las teorías de norma).

Si al haber aplicado la condición de consistencia (4.12) a las restricciones primarias la teoría presenta restricciones secundarias, se tiene una situación similar a la de un inicio, i.e., un problema de extremos con restricciones, solo que estas restricciones viven en el espacio fase. Entonces, se construye, de manera análoga, el hamiltoniano secundario

$$H_2 \equiv H_c + u_i\phi^i,$$

en donde ϕ^i son todas las restricciones primarias y secundarias halladas hasta el momento, siendo ahora este hamiltoniano el que contiene toda la información del sistema. Las ecuaciones de movimiento toman ahora la forma

$$\dot{g} = \{g, H_c + u_i\phi^i\} \equiv \{g, H_2\},$$

de lo cual, se pueden calcular las relaciones de consistencia sobre las restricciones secundarias. Si después de realizado este proceso aparecen nuevas restricciones, llamadas terciarias, se repite el mismo el proceso construyendo un hamiltoniano terciario, y calculando las relaciones de consistencia sobre las restricciones, repitiéndose el proceso hasta que ya no haya restricciones. Al conjunto de restricciones secundarias, terciarias, etc., también se les suele llamar secundarias, simplemente.

4.7. Caso reducible y no reducible

Si algunas de las restricciones ϕ^k pueden obtenerse mediante una transformación lineal; es decir, que no son independientes, se dice que la teoría es *reducible*. En caso contrario, se dice que se la teoría es *irreducible*. En el caso reducible se pueden omitir las restricciones no independientes, puesto que siempre puede considerarse que localmente se está trabajando con el caso irreductible. La identificación de las restricciones independientes, se menciona, no siempre es fácil de hacer, incluso puede ser globalmente imposible debido a obstrucciones topológicas.

4.8. Funciones de primera y segunda clase

Definición. Una función F del espacio fase es de primera clase si su paréntesis de Poisson con todas las restricciones es débilmente cero,

$$\{F, \phi^\mu\} \approx 0,$$

en otro caso, es de segunda clase.

Nótese que si F es de primera clase, $\{F, \phi^\mu\}$ debe ser fuertemente igual a una combinación lineal de las restricciones ϕ, debido a que las ϕ's son las únicas cantidades independientes que son débilmente cero. Así , $\{F, \phi^\mu\} = f^\mu{}_\rho \phi^\rho$.

Teorema (útil). El paréntesis de Poisson entre dos funciones de primera clase, también es de primera clase. (Este se prueba usando la identidad de Jacobi y la propiedad débilmente cero de las ϕ's.)

4.9. Condiciones sobre los multiplicadores y hamiltoniano total

Las condiciones de consistencia sobre todas las restricciones,

$$\dot{\phi}^{\mu} = \{\phi^{\mu}, H_c\} + u_{\nu}\{\phi^{\mu}, \phi^{\nu}\} \approx 0, \tag{4.15}$$

representa un sistema de ecuaciones lineales para los multiplicadores u_{μ}. Las condiciones sobre los multiplicadores de las que se hablará, son las ecuaciones que satisfacen la parte de los multiplicadores que es solución particular del sistema (4.15), así como la parte que es solución al sistema homogéneo (4.15). Estas diferentes ecuaciones, como se verá más adelante, *equivalen* a poder distinguir entre restricciones de segunda y primera clase. Por el momento, estas condiciones se tratan para notar la presencia de *funciones arbitrarias* (relacionadas con la parte de los multiplicadores que es solución al sistema homogéneo) que más tarde aparecerán en las ecuaciones de movimiento.

Si en total se tienen J restricciones ϕ^{μ}, $\mu = 1, ..., J$, la solución general del sistema de ecuaciones no homogéneo (4.15) es de la forma

$$u_{\nu} = U_{\nu} + V_{\nu}, \tag{4.16}$$

con U_{ν} una solución particular al sistema no homogéneo y V_{ν} la solución más general del sistema homogéneo,

$$V_{\nu}\{\phi^{\mu}, \phi^{\nu}\} \approx 0. \tag{4.17}$$

La solución general V_{ν} puede expresarse como combinación lineal de soluciones independientes v_i, $V_{\nu} = v_i V^i_{\nu}$, $i = 1, ..., I$, con I el número de soluciones independientes. Entonces, los multiplicadores se escriben como

$$u_{\nu} = U_{\nu} + v_i V^i_{\nu}. \tag{4.18}$$

Las funciones v_i son funciones totalmente arbitrarias, de modo que las u_{ν} se han separado en una parte que puede fijarse mediante las condiciones de consistencia, y otra que es completamente arbitraria o indeterminada. Ahora, a fin de visualizar la presencia de estas funciones arbitrarias en las ecuaciones de movimiento, se define primero el hamiltoniano que contiene todas las restricciones y sus multiplicadores hasta el momento, llamado *hamiltoniano total* H_T,

$$H_T \equiv H_c + u_{\nu}\phi^{\nu}. \tag{4.19}$$

Sustituyendo (4.18) en (4.19):

$$H_T = H_c + \left(U_{\nu} + v_i V^i_{\nu}\right)\phi^{\nu} = H_c + U_{\nu}\phi^{\nu} + v_i\phi^i,$$

en donde se ha definido

$$\phi^i \equiv V^i_\nu \phi^\nu. \tag{4.20}$$

Para una función cualquiera $f = f(q,p)$, se puede calcular $\dot{f}$ como $\dot{f} = \{f, H_T\}$, esto es,

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \{f, H_T\} = \{f, H_c + U_\nu \phi^\nu + v_i \phi^i\} = \{f, H' + v_i \phi^i\} \\ &= \{f, H'\} + \{f, v_i\}\phi^i + \{f, \phi^i\} v_i \\ &= \{f, H'\} + v_i \{f, \phi^i\}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

habiéndose usando que $\phi^i = V^i_\nu \phi^\nu \approx 0$, con

$$H' \equiv H_c + U_\nu \phi^\nu. \tag{4.22}$$

Las ecuaciones (4.21) contienen I *funciones arbitrarias* que, por construcción, equivalen a las ecuaciones de Euler-Lagrange. Lo anterior es un punto muy importante porque marca una gran diferencia con la mecánica clásica usual, en donde dadas las condiciones iniciales la evolución del sistema es única, pero en este caso, dadas unas condiciones iniciales la evolución del sistema *no* es única, sino que depende de la elección de las funciones arbitrarias v_i.

Las cantidades ϕ^i son de hecho, como se mencionó al inicio de la sección, restricciones de primera clase, y H' también es de primera clase. Esto se muestra usando la definición de una función de primera clase;

$$\{\phi^i, \phi^\mu\} = \{V^i_\nu \phi^\nu, \phi^\mu\} = \{V^i_\nu, \phi^\mu\}\phi^\nu + V^i_\nu \{\phi^\nu, \phi^\mu\} \approx V^i_\nu \{\phi^\nu, \phi^\mu\},$$

pero V^i_ν es la solución general al sistema de ecuaciones homogéneo $V^i_\nu \{\phi^\nu, \phi^\mu\} \approx 0$, luego

$$\{\phi^i, \phi^\mu\} \approx V^i_\nu \{\phi^\nu, \phi^\mu\} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \{\phi^i, \phi^\mu\} \approx 0,$$

por lo que ϕ^i son de primera clase. Asimismo, se tiene que

$$\begin{aligned} \{H', \phi^\mu\} &= \{H_c + U_\nu \phi^\nu, \phi^\mu\} = \{H_c, \phi^\mu\} + \{U_\nu, \phi^\mu\}\phi^\nu + U_\nu \{\phi^\nu, \phi^\mu\} \\ &\approx \{H_c, \phi^\mu\} + U_\nu \{\phi^\nu, \phi^\mu\}, \end{aligned}$$

y sumando el cero débil $v_i \{\phi^i, \phi^\mu\} \approx 0$,

$$\begin{aligned} \{H', \phi^\mu\} &\approx \{H_c, \phi^\mu\} + U_\nu \{\phi^\nu, \phi^\mu\} + v_i \{\phi^i, \phi^\mu\} = \{H_c + U_\nu \phi^\nu + v_i \phi^i, \phi^\mu\} \\ &= \{H_T, \phi^\mu\} = -\{\phi^\mu, H_T\} \approx 0, \end{aligned}$$

habiéndose usado en la última igualdad débil la condición de consistencia de ϕ^μ. Cabe mencionar, que la descomposición de H_T en H' y ϕ^i no es única debido a que U_μ es cualquier solución particular del sistema inhomogéneo (4.15). Esto significa que pueden renombrarse o proponerse nuevas funciones v_i sin alterar H_T.

4.10. Restricciones de primera y segunda clase

Habiendo hallado todas las restricciones de la teoría, ahora deben separarse en restricciones de primera y de segundade clase. Es decir, debe identificarse los corchetes de Poisson entre todas ellas que son o no débilmente cero. La manera sistemática para hacer dicha separación es la siguiente. Si W' es la matriz $J \times J$ con entradas ${W'}^{\alpha\beta} \equiv \{\phi^\alpha, \phi^\beta\}$, en donde J es el número total de restricciones, y tal que $detW' \approx 0$, entonces, la nulidad de W', $J - R'$, con R' el rango de W', da el número de restricciones de primera clase.

Prueba. Si $detW' \approx 0$, entonces $R' < J$ y su nulidad será $J - R' \neq 0$, entonces habrá $J - R'$ vectores nulos w^j, $j = 1, ..., J - R'$, que por definición son vectores tales que $w^j_\alpha\{\phi^\alpha, \phi^\beta\} = 0$, entonces $\{w^i_\alpha\phi^\alpha, \phi^\beta\} \approx 0, \forall\phi^\beta \in \Phi$, con $\Phi = \{\phi^\beta \mid \phi^\beta$ una restricción primaria o secundaria $\}$. Así, $w^i_\alpha\phi^\alpha \equiv \gamma^i$ es un conjunto de $J - R'$ restricciones de primera clase.

Además, el rango de W', R', da el número de restricciones de segunda clase. Cabe mencionar que el número de restricciones de segunda clase debe ser par[1]. Aquí, debe notarse que los vectores nulos de $\{\phi^\alpha, \phi^\beta\}$ pueden verse como las soluciones del sistema $w^j_\alpha\{\phi^\alpha, \phi^\beta\} = 0$, el cual es similar a $v_i V^i_\nu$ propuesto en (4.18). De hecho, puede asumirse que $v_i = w^i$.

4.11. Transformaciones de norma y restricciones de primera clase

Para una función del espacio fase $f = f(q, p)$ se obtuvo que

$$\dot{f} = \{f, H'\} + v_i\{f, \phi^i\}.$$

En particular, si f es q o p se obtienen las ecuaciones de movimiento, con el hecho relevante o no usual de la presencia de funciones arbitrarias v_i. A diferencia de lo que pasa en la mecánica clásica usual, la presencia de las funciones arbitrarias v_i significa que dadas las condiciones iniciales del sistema la evolución del sistema no está determinada de manera única. La mecánica clásica, sin embargo, es determinista, por lo que dos estados con diferente valor de las funciones arbitrarias v_i pero bajo las mismas condiciones iniciales deben ser físicamente equivalentes, y se dice que estos

[1] Prueba. Sabiendo que C es antisimétrica y usando las propiedades del determinante, se tiene que $detC = det(C^t) = det(-C) = (-1)^{R'}detC$. Si se supone que R' es impar, se tendría que $detC = -detC \Rightarrow detC = 0$, lo que contradice a que R' sea el rango de W'.

sistemas son equivalentes de norma. También se dice que se trata de un sistema con *libertad de norma.*

Considérense dos estados con las mismas condiciones iniciales al tiempo t_0 y que su evolución difiere en el valor de las funciones v_i en las ecuaciones de movimiento. Utilizando el desarrollo en serie de Taylor a primer orden para la variable canónica $F = q$ o p en cada estado,

$$F(t) = F(t_0) + \dot{F}\delta t = F(t_0) + \left(\{F, H'\} + v_i\{F, \phi^i\}\right)\delta t,$$

$$F'(t) = F(t_0) + \dot{F}'\delta t = F(t_0) + \left(\{F, H'\} + v_i'\{F, \phi^i\}\right)\delta t,$$

y restando,

$$\delta F(t) = (v_i - v_i')\{F, \phi^i\}\delta t \equiv \delta v_i\{F, \phi^i\}, \tag{4.23}$$

con $\delta v_i \equiv (v_i - v_i')\delta t$. Por hipótesis, el estado físico se mantiene inalterado, mientras que las variables canónicas se transforman según lo anterior. Este cambio en las variables canónicas consiste en aplicar una transformación de contacto infinitesimal con una función generadora $\delta v_i \phi^i$, por lo que se conluye que las restricciones de primera clase son las *generadoras* de transformaciones infinitesimales de contacto que corresponden a cambios en q y p que, por hipótesis, no alteran el estado físico del sistema. A estas transformaciones se les refiere simplemente como *transformaciones de norma.*

4.12. Grados de libertad

Definición. Los grados de libertad de un sistema son el número de variables físicas independientes necesarias para describir al sistema.

En mecánica clásica, el número de grados de libertad de una teoría se obtiene restando el número de ecuaciones de restricción independientes al número de coordenadas generalizadas. Haciendo una extrapolación de esto, se puede proponer que el número de grados de libertad es

$$\begin{aligned} GL &= \frac{1}{2}\left[\left(\begin{array}{c}\text{Número total de}\\ \text{variables canónicas}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{Número de restricciones de}\\ \text{segunda clase originales}\end{array}\right)\right. \\ &\qquad \left. -2 \times \left(\begin{array}{c}\text{Número de restricciones de}\\ \text{primera clase}\end{array}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.24}$$

El $1/2$ es para compensar el hecho de que usualmente los grados de libertad se refieren a las coordenadas q, pero al considerar todas las variables canónicas también se está considerando a los momentos p. El 2 multiplicando a las restricciones de primera clase es debido a su doble carácter, tanto de restricción como de generadora de transformaciones de norma. Es decir, la teoría presenta restricciones y transformaciones de norma que pueden verse como condiciones adicionales de la teoría.

4.13. El hamiltoniano y la acción extendidos

Como se ha visto, el hamiltoniano que contiene todas las restricciones de la teoría es el hamiltoniano total $H_T \equiv H' + v_i\phi^i$, en donde, $H' \equiv H_c + U_\nu\phi^\nu$ y ϕ^i son de primera clase, sin embargo, hasta el momento no se le ha hecho alguna distinción explícita en cuanto a si las restricciones que contiene son de primera o de segunda clase. Al hamiltoniano en el cual se hace esta distinción se le llama extendido, y se suele denotar con γ a las restricciones de primera clase, y con χ a las de segunda clase. Entonces, el *hamiltoniano extendido* se define como

$$H_E \equiv H_c + U_j\chi^j + v_a\gamma^a = H' + v_a\gamma^a, \tag{4.25}$$

con $H' \equiv H_c + U_j\chi^j$. La evolución del sistema está dada por este hamiltoniano mediante

$$\dot{F} = \{F, H_E\}. \tag{4.26}$$

Para las variables dinámicas invariantes de norma, i.e., variables tales cuyo paréntesis de Poisson con los generadores de norma γ^a es débilmente cero, la evolución dinámica dada por H_1, H' y H_E es la misma. Para otra variable, es necesario usar H_E, que considera toda la libertad de norma del sistema. Debe notarse que las ecuaciones (4.26) y (4.1) son físicamente equivalentes. La necesidad de un hamiltoniano extendido no es algo que se deduzca de la formulación lagrangiana, pues el hamiltoniano primario genera las ecuaciones de movimiento (4.7) que, por construcción, equivalen a las ecuaciones de Lagrange (4.1), además de que H_E contiene más funciones arbitrarias que las que contiene H_1. La introducción del hamiltoniano H_E es entonces una nueva característica del formalismo hamiltoniano que incluye de forma manifiesta la invariancia de norma.

Por otro lado, las ecuaciones de movimiento de la forma (4.26) deben provenir de una acción de la forma (4.6). En efecto, estas ecuaciones se obtienen de la *acción extendida*

$$S_E[q,p,v] = \int (\dot{q}^n p_n - H' - v_a\gamma^a)\, dt = \int (\dot{q}^n p_n - H_E)\, dt, \tag{4.27}$$

la cual, al igual que H_E, ya considera la separación de las restricciones entre primera y segunda clase, i.e., contiene la libertad de norma, y da las ecuaciones de movimiento

$$\dot{F} = \{F, H_E\}, \qquad \phi^a = \gamma^a \approx 0. \tag{4.28}$$

4.14. Corchetes de Dirac y restricciones de segunda clase

El paréntesis o corchete de Dirac se define como

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \{F, \chi^\alpha\} C_{\alpha\beta} \{\chi^\beta, G\}, \tag{4.29}$$

con $\{,\}$ el paréntesis de Poisson y $C_{\alpha\beta}$ la inversa de $C^{\alpha\beta} \equiv \{\chi^\alpha, \chi^\beta\}$, el cual satisface las propiedades

$$\{F, G\}_D = -\{G, F\}_D, \tag{4.30}$$

$$\{F, GH\}_D = \{F, G\}_D H + G\{F, H\}_D, \tag{4.31}$$

$$\{\{F, G\}_D, H\}_D + \{\{H, F\}_D, G\}_D + \{\{G, H\}_D, F\}_D = 0, \tag{4.32}$$

$$\{\chi^\alpha, F\}_D = 0, \forall F \tag{4.33}$$

$$\{F, G\}_D \approx \{F, G\}, \quad G \text{ de primera clase y } F \text{ arbitraria}, \tag{4.34}$$

$$\{H, \{F, G\}_D\}_D \approx \{H\{F, G\}\}. \tag{4.35}$$

De estas propiedades, H_E es de primera clase, y por (4.34), las ecuaciones de movimiento (4.26) pueden reescribirse como

$$\dot{F} = \{F, H_E\}_D, \tag{4.36}$$

y, por los mismos argumentos, el efecto de una transformación de norma puede escribirse como

$$\{F, \gamma^a\} \approx \{F, \gamma^a\}_D, \forall F. \tag{4.37}$$

Nótese entonces que después de separar las restricciones de primera y segunda clase, el paréntesis de Poisson se generaliza al paréntesis de Dirac, en términos del cual pueden escribirse las ecuaciones más relevantes del formalismo [como (4.36) y (4.37)]. Las restricciones de segunda clase se convierten en identidades para algunas variables canónicas en terminos de otras. Además, es ahora el paréntesis de Dirac el que, en analogía con lo que se hace usualmente, se promueve a conmutador a fin de cuantizar la teoría.

4.15. Observables

Una observable es, por definición, una función que es invariante de norma en la superficie de restricciones. En otras palabras, una observable es una función O cuyo paréntesis de Dirac es débilmente cero con las restricciones de primera clase,

$$\{O, \gamma^a\}_D \approx 0. \tag{4.38}$$

Aunque se usa el término "observable", debe mencionarse que no se está intentando dar un significado experimental directo. Asimismo, cabe mencionar que las observables clásicas no necesariamente lo son en el caso cuántico.

Capítulo 5

La acción de Kalb-Ramond

Es sabido que la teoría de Kalb-Ramond es una teoría de norma no masiva descrita por un tensor antisimétrico de segundo rango $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$. Este campo de norma es un tensor análogo al tensor de norma de Maxwell A_μ. En la teoría de Maxwell, la intensidad de campo está dada por $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Para $B_{\mu\nu}$, la intensidad del campo de Kalb-Ramond está dada por $H_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_\nu B_{\lambda\mu} + \partial_\lambda B_{\mu\nu}$, la cual es completamente antisimétrica e invariante de norma. El campo de Kalb-Ramond es de muchas maneras la generalización tensorial del campo de norma de Maxwell. En teoría de cuerdas, el campo de Kalb-Ramond se acopla a las cuerdas de manera análoga a como el campo de Maxwell se acopla a las partículas. Mientras las partículas cargadas son la fuente del campo de Maxwell, las cuerdas son la fuente del campo de Kalb-Ramond. Así, el campo de Kalb-Ramond aparece en una especie de electrodinámica en teoría de cuerdas. En el caso gravitacional, por ejemplo, el campo $B_{\mu\nu}$ se ha introducido para estudiar las soluciones de las ecuaciones del campo gravitacional en presencia de torsión en el espacio-tiempo, siendo $B_{\mu\nu}$ el campo de fondo de torsión [24]. En otros casos, el campo $B_{\mu\nu}$ se ha usado para preservar la invariancia de norma $U(1)$ del campo electromagnético en un fondo con torsión, siendo $B_{\mu\nu}$ la posible fuente de torsión [25]. En este capítulo, se hace un análisis hamiltoniano de la teoría de Kalb-Ramond aplicando el algoritmo de Dirac-Bergmann estricto. Este análisis en sentido estricto de la teoría de Kalb-Ramond, es una *contribución* del presente trabajo, ya que no se encuentra en la literatura. Se muestra que la teoría es una teoría de norma reducible, no masiva, cuyo campo $B_{\mu\nu}$ posee un solo grado de libertad. Se obtienen además, mediante el proceso de expansión del espacio fase, los corchetes de Dirac de la teoría.

5.1. La acción de Kalb-Ramond

El lagrangiano de la teoría de Kalb-Ramond (KB) está dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\times 3!} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda}, \tag{5.1}$$

en donde $H_{\mu\nu\lambda} \equiv \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_\nu B_{\lambda\mu} + \partial_\lambda B_{\mu\nu}$ y $B_{\mu\nu}$ son la intensidad de campo y el campo de KB. Para mostrar que la teoría descrita por (5.1) es singular y saber el número de restricciones primarias que deben obtenerse, se obtiene la matriz Hessiana. Usando el hecho que $H_{\mu\nu\lambda} = -H_{\nu\mu\lambda} = -H_{\mu\lambda\nu}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 B_{\alpha\beta})} &= \frac{1}{3!} H^{\mu\nu\lambda} \Big(\frac{1}{2}\delta^0_\mu (\delta^\alpha_\nu \delta^\beta_\lambda - \delta^\beta_\nu \delta^\alpha_\lambda) + \frac{1}{2}\delta^0_\nu (\delta^\alpha_\lambda \delta^\beta_\mu - \delta^\beta_\lambda \delta^\alpha_\mu) + \frac{1}{2}\delta^0_\lambda (\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \delta^\beta_\mu \delta^\alpha_\nu) \Big) \\ &= \frac{1}{2} H^{0\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} H_{0\gamma\delta}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

luego, considerando que $H_{00\lambda} = 0$,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 B_{\lambda\rho})\partial(\partial_0 B_{\alpha\beta})} = \frac{1}{4} g^{\alpha i} g^{\beta j} (\delta^\lambda_i \delta^\rho_j - \delta^\lambda_j \delta^\rho_i) = \frac{1}{4}(g^{\alpha\lambda} g^{\beta\rho} - g^{\alpha\rho} g^{\beta\lambda}) \equiv W^{\alpha\beta\lambda\rho} \tag{5.3}$$

$(i, j = 1, 2, 3)$. La inspección de (5.3) conduce a que las entradas distintas de cero de $(W^{\alpha\beta\lambda\rho})$ son 3 (para $\alpha, \beta \neq 0$), lo que implica que su nulidad es $6 - 3 = 3$ (6 son las componetes independientes de $B_{\mu\nu}$). La matriz Hessiana tiene determinante cero, por lo que la teoría es singular, y además, se tiene que 3 son las restricciones primarias independientes que deben obtenerse.

5.2. Restricciones primarias y secundarias

De la expresión (5.2), además de los momentos canónicos, se obtienen las restricciones primarias; es decir, de la expresión (5.2) se tiene que

$$\Pi^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} H^{0\alpha\beta} \tag{5.4}$$

$$\Rightarrow \quad \Pi^{ij} = \frac{1}{2} H^{0ij}, \quad \Pi^{0i} = 0 \tag{5.5}$$

$$\Rightarrow \quad \phi^{0i} \equiv \Pi^{0i} \approx 0, \tag{5.6}$$

siendo, en efecto, 3 restricciones primarias independientes. Para obtener las restricciones secundarias aplicando la condición de consistencia a las restricciones (5.6), debe obtenerse el hamiltoniano asociado al lagrangiano (5.1). Con este fin, considerando que (5.1) es igual a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} H_{0ij} H^{0ij} + \frac{1}{2\times 3!} H_{ijk} H^{ijk}, \tag{5.7}$$

el hamiltoniano asociado está dado por

$$\begin{aligned} H_c &= \int d^3x\Big[\dot{B}_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} - \mathcal{L}\Big] \\ &= \int d^3x\Big[(H_{0ij} - \partial_i B_{j0} - \partial_j B_{0i})\Pi^{ij} - \Big(\Pi_{ij}\Pi^{ij} + \frac{1}{2\times 3!}H_{ijk}H^{ijk}\Big)\Big] \\ &= \int d^3x\Big[2B_{0i}\partial_j\Pi^{ij} + \Pi_{ij}\Pi^{ij} - \frac{1}{2\times 3!}H_{ijk}H^{ijk}\Big] \end{aligned} \tag{5.8}$$

Entonces, definiendo el hamiltoniano primario

$$H_1 = H_c + \int d^3x a_{0i}\phi^{0i}, \tag{5.9}$$

en donde a_{0i} son los multiplicadores de Lagrange que fuerzan las restricciones ϕ^{0i}, y usando los corchetes de Poisson fundamentales

$$\{B_{\alpha\beta}(x), \Pi^{\mu\nu}(y)\} = \frac{1}{2}(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha)\delta^3(x-y) \tag{5.10}$$

(tomadas al mismo tiempo), se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^{0i}(x) = \{\phi^{0i}(x), H_1(y)\} &= \int d^3y\{\Pi^{0i}(x), [2B_{0k}\partial_j\Pi^{kj}](y)\} \\ &= -\partial_j\Pi^{ij}(x) \\ \Rightarrow \quad \psi^{0i} &\equiv \partial_j\Pi^{ij} \approx 0, \end{aligned} \tag{5.11}$$

siendo 3 restricciones secundarias. Para hallar las posibles restricciones terciarias, se define el hamiltoniano secundario

$$H_2 = H_c + \int d^3x\big[a_{0i}\phi^{0i} + b_{0i}\psi^{0i}\big], \tag{5.12}$$

con b_{0i} los multiplicadores de Lagrange que fuerzan las restricciones secundarias ψ^{0i}. Así, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^{0l}(x) &= \{\psi^{0l}(x), H_2(y)\} = -\frac{1}{3!}\int d^3y H^{ijk}(y)\{\partial_n\Pi^{ln}(x), H_{ijk}(y)\} \\ &= \frac{1}{3!}\int d^3y\Big[\Big(H^{iln}(y)\partial_n\partial_i + H^{njl}(y)\partial_n\partial_j + H^{nlk}(y)\partial_n\partial_k\Big)\delta^3(x-y)\Big] = 0, \end{aligned} \tag{5.13}$$

por lo que no hay restricciones terciarias. Las restricciones encontradas (5.6) y (5.11), es fácil notar que son de primera clase, ya que en ellas solo aparecen momentos canónicos. De (5.11), sin embargo, se obtiene que $\partial_i\partial_j\Pi^{ij} \approx 0$, la cual no es independiente de (5.11), siendo, por tanto, una condición de reductibilidad.

5.3. Grados de libertad

Halladas todas las restricciones y, en este caso, las relaciones de reductibilidad, puede llevarse a cabo el conteo de los grados de libertad físicos como sigue:

Se tiene un total de 2(6) variables dinámicas (son 6 las componentes independientes de $B_{\mu\nu}$) y $(3+3-1)$ restricciones de primera clase independientes.

Entonces, los grados de libertad físicos para la teoría KB son

$$GL = \frac{1}{2}[2(6) - 2(5)] = \mathbf{1}. \tag{5.14}$$

(Los cuales, nótese, coinciden con los de una teoría de campo escalar.)

5.4. Las transformaciones de norma

Las restricciones de primera clase son generadoras de transformaciones de norma, y el generador está dado por

$$\mathcal{G} = \int d^3x[\epsilon_{0i}\phi^{0i} + \epsilon_i\psi^{0i}], \tag{5.15}$$

siendo las ϵ's los parámetros de las correspondientes transformaciones. Recordando que la transformación de norma para una variable dinámica F está dada por $\delta F = \{F, \mathcal{G}\}$, se tiene que

$$\delta B_{0i}(x) = \int d^3y\{B_{0i}(x), [\epsilon_{0j}\Pi^{0j}](y)\} = \frac{1}{2}\epsilon_{0i}(x) \equiv \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_i(x), \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned} \delta B_{kl}(x) &= \int d^3y\{B_{kl}(x), [\epsilon_i\partial_j\Pi^{ij}](y)\} = \frac{1}{2}\int d^3y\epsilon_i(y)\partial_j\delta^3(x-y)(\delta^i_k\delta^j_l - \delta^j_k\delta^i_l) \\ &= \frac{1}{2}[\partial_k\epsilon_l(x) - \partial_l\epsilon_k(x)], \end{aligned} \tag{5.17}$$

por lo que las transformaciones de norma están dadas por

$$\delta B_{0i} = \partial_0\epsilon_i, \quad \delta B_{ij} = \partial_i\epsilon_j - \partial_j\epsilon_i. \tag{5.18}$$

5.5. Los corchetes de Dirac

Para obtener los corchetes de Dirac en una teoría con restricciones de primera clase, lo que se hace es obtener un conjunto de restricciones de segunda clase irreducibles a partir de las de primera clase fijando la norma. Si las restricciones de primera clase no son independientes (como en el presente caso) se expande el espacio fase mediante la introducción de campos auxiliares.

Haciendo esto, uno obtienen las restricciones de segunda clase irreducibles[1]

$$\chi^1 \equiv \Pi^{0i}, \quad \chi^2 \equiv B_{0i}, \quad \chi^3 \equiv 2\partial_j \Pi^{ij} - \partial^i p, \quad \chi^4 \equiv \partial^j B_{ij} + \partial_i q, \tag{5.19}$$

con q, p campos auxiliares satisfaciendo

$$\{q(x), p(y)\} = \delta^3(x-y). \tag{5.20}$$

Así, los corchetes de Poisson distintos de cero entre estas restricciones son

$$\begin{aligned} \{\chi^1(x), \chi^2(y)\} &= \{\Pi^{0i}(x), B_{0j}(y)\} = -\frac{1}{2}\delta^i_j \delta^3(x-y), \\ \{\chi^3(x), \chi^4(y)\} &= \{2\partial_j \Pi^{ij}(x), \partial^l B_{kl}(y)\} - \{\partial^i p(x), \partial_k q(y)\} = -\delta^i_k \partial_j \partial^j \delta^3(x-y), \end{aligned} \tag{5.21}$$

los cuales definen la matriz

$$\left(C^{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\delta^i_j & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\delta^i_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta^i_j \nabla^2 \\ 0 & 0 & \delta^i_j \nabla^2 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y),$$

y cuya inversa es

$$(C_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 2\delta_{ij} & 0 & 0 \\ -2\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\delta^j_i}{\nabla^2} \\ 0 & 0 & -\frac{\delta^j_i}{\nabla^2} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y).$$

Entonces, los corchetes de Dirac no triviales distintos de cero

$$\begin{aligned} \{B_{ij}(x), \Pi^{kl}(y)\}_D &= \frac{1}{2}(\delta^k_i \delta^l_j - \delta^l_i \delta^k_j)\delta^3(x-y) \\ &\quad - \int d^3u d^3v \Big[\{B_{ij}(x), 2\partial_m \Pi^{rm}(u))\}[\frac{\delta^p_r}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial^q B_{pq}(v), \Pi^{kl}(y)\}\Big] \\ &= \frac{1}{2}(\delta^k_i \delta^l_j + \delta^l_i \delta^k_j) - \int d^3u d^3v \Big[(\delta^r_i \delta^m_j - \delta^m_i \delta^r_j)\partial_m \delta^3(x-u)\frac{\delta^p_r}{\nabla^2}\delta^3(u-v) \\ &\quad \times \frac{1}{2}(\delta^k_p \delta^l_q - \delta^l_p \delta^k_q)\partial^q \delta^3(v-y)\Big] \\ &= \frac{1}{2}[(\delta^k_i \delta^l_j + \delta^l_i \delta^k_j) + (\delta^r_i \delta^m_j - \delta^m_i \delta^r_j)\frac{\delta^p_r}{\nabla^2}\partial_m \partial^q \delta^3(x-y)(\delta^k_p \delta^l_q - \delta^l_p \delta^k_q)] \\ &= \frac{1}{2}[\delta^k_i \delta^l_j - \delta^l_i \delta^k_j + \frac{1}{\nabla^2}(\delta^k_i \partial_j \partial^l - \delta^l_i \partial_j \partial^k - \delta^k_j \partial_i \partial^l + \delta^l_j \partial_i \partial^k)]\delta^3(x-y). \end{aligned} \tag{5.22}$$

[1]En las ecuaciones (5.19), el factor 2 se ha introducido solo por conveniencia; para no multiplicar por 1/2 la ecuación fundamental (5.20)

Además, los corchetes de Dirac no triviales entre los campos auxiliares q y p con los campos restantes son

$$\begin{aligned}
\{q(x),p(y)\}_D &= \delta^3(x-y)-\int d^3ud^3v\Big[\{q(x),-\partial^i p(u))\}[\frac{\delta_i^j}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial_j q(v),p(y)\}\Big] \\
&= \delta^3(x-y)+\int d^3ud^3v\Big[\partial^i\delta^3(x-u)\frac{1}{\nabla^2}\delta^3(u-v)\partial_i\delta^3(v-y)\Big] \\
&= \delta^3(x-y)-\frac{1}{\nabla^2}\partial^i\partial_i\delta^3(x-y)=0, \qquad (5.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{q(x),\Pi^{ij}(y)\}_D &= -\int d^3ud^3v\Big[\{q(x),-\partial^k p(u))\}[\frac{\delta_k^l}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial^m B_{lm}(v),\Pi^{ij}(y)\}\Big] \\
&= \int d^3ud^3v\Big[\partial^k\delta^3(x-u)\frac{\delta_k^l}{\nabla^2}\delta^3(u-v)\frac{1}{2}(\delta_l^i\delta_m^j-\delta_l^j\delta_m^i)\partial^m\delta^3(v-y)\Big] \\
&= \frac{1}{2\nabla^2}[\partial^i\partial^j-\partial^j\partial^i]\delta^3(x-y)=0, \qquad (5.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{B_{kl}(x),p(y)\}_D &= -\int d^3ud^3v\Big[\{B_{kl}(x),2\partial_n\Pi^{mn}(u))\}[\frac{\delta_m^i}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial_i q(v),p(y)\}\Big] \\
&= -\int d^3ud^3v\Big[(\delta_k^m\delta_l^n-\delta_k^n\delta_l^m)\partial_n\delta^3(x-u)\frac{\delta_m^i}{\nabla^2}\delta^3(u-v)\partial_i\delta^3(v-y)\Big] \\
&= \frac{1}{\nabla^2}[\partial_l\partial_k-\partial_k\partial_l]\delta^3(x-y)=0, \qquad (5.25)
\end{aligned}$$

mientras que trivialmente

$$\{q(x),B_{ij}(y)\}_D=0, \quad \{\Pi_{ij}(x),p(y),\}_D=0, \qquad (5.26)$$

lo que muestra que los campos auxiliares q y p son *independientes* del corchete de Dirac. Esta es una condición necesaria, ya que como campos auxiliares no deben contribuir con resultados en la teoría.

En resumen, se ha mostrado que la teoría de KR tiene 5 restricciones de primera clase independientes de un total de 6. Esto la hace una teoría de norma reducible. Se encontró que el campo no masivo de KR $B_{\mu\nu}$ posee un solo grado de libertad. Además, debido a que la teoría solo presenta restricciones de primera clase, se usó el proceso de expansión del espacio fase a fin de poder calcular los corchetes de Dirac.

Capítulo 6

La acción de Kalb-Ramond en 5 dimensiones

Se ha visto que la teoría de Kalb-Ramond 4D es una teoría de norma reducible cuyo campo $B_{\mu\nu}$ posee un solo grado de libertad. Ahora se estudiará la dinámica hamiltoniana de la teoría de Kalb-Ramond con una dimensión extra compacta aplicando el formalismo de Dirac-Bergmann estricto. Este análisis estricto de la teoría constituye de hecho una *contribución* del presente trabajo, ya que este formalismo no se encuentra en la literatura. En este capítulo se encuentra, después de compactar la quinta dimesión sobre un orbifol $S^1/\mathbf{Z_2}$, que la teoría efectiva de Kalb-Ramond es una *teoría de norma reducible*. Se muestra que el modo cero corresponde consistentemente a la teoría de norma Kalb-Ramond 4D, mas una torre de excitaciones de Kaluza-Klein de campos masivos $B^{(n)}_{\mu\nu}$ contribuyendo cada modo con *tres* grados de libertad. Esto último, después de haber fijado la norma y haber identificado los campos $B^{(n)}_{\mu 5}$ como pseudo-bosones de Golstone. Además, debido a que hay condiciones de reductibilidad tanto para el modo cero como para los estados excitados, se expande el espacio fase para obtener los corchetes de Dirac de la teoría. Los resultados correspondientes a este capítulo son una aportación que también puede consultarse en [34].

6.1. El lagrangiano efectivo

La notación que se usará es la siguiente: índices latinos mayúsculos M, N toman los valores $0, 1, 2, 3, 5$, con 5 etiquetando la dimensión extra compacta, y pueden subirse o bajarse con la métrica plana $\eta = (1, -1, -1, -1, -1)$; y representa la coordenada en la dimensión compacta; los índices griegos μ, ν corren de 0 a 3, y x^μ denotan las coordenadas etiquetando puntos de la variedad cuadridimensional M_4. Considérese entonces el lagrangiano de Kalb-Ramond (KR) 5D,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2 \times 3!} H_{MNL} H^{MNL}, \tag{6.1}$$

en donde $H_{MNL} = \partial_M B_{NL} + \partial_N B_{LM} + \partial_L B_{MN}$ y B_{MN} son la intensidad del campo y el campo de KR 5D. La compactificación de la quinta dimension espacial en un orbifold $S^1/\mathbf{Z_2}$ de radio R impone sobre los campos B_{MN} las condiciones de paridad y periodicidad

$$\begin{aligned} B_{MN}(x, y) &= B_{MN}(x, y + 2\pi R), \\ B_{\mu\nu}(x, -y) &= B_{\mu\nu}(x, y), \\ B_{\mu 5}(x, -y) &= -B_{\mu 5}(x, y). \end{aligned}$$

Estas condiciones permiten expresar B_{MN} como el conjunto de armónicos sobre $M_4 \times S^1/\mathbf{Z_2}$,

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu}(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} B^{(0)}_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} B^{(n)}_{\mu\nu}(x) \cos\left(\frac{ny}{R}\right), \\ B_{\mu 5}(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} B^{(n)}_{\mu 5}(x) \sin\left(\frac{ny}{R}\right), \end{aligned} \tag{6.2}$$

siendo $B^{(n)}_{\mu\nu}$, $B^{(n)}_{\mu 5}$ los modos de Kaluza-Klein (KK) dependientes solo de las coordenadas de espacio-tiempo cuadridimensional, y a los cuales se les asocia con una torre infinita de partículas. Expresando (6.1) como

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{2 \times 3!} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} + \frac{1}{4} H_{5\mu\nu} H^{5\mu\nu}, \tag{6.3}$$

sustituyendo (6.2) en (6.1) e integrando sobre la quinta dimensión compacta y de 0 a $2\pi R$ se obtiene el lagrangiano efectivo (cuadridimensional)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e \;=\; & \frac{1}{2 \times 3!} H^{(0)}_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda}_{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2 \times 3!} H^{(n)}_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda}_{(n)} \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \left(\partial_\mu B^{(n)}_{\nu 5} + \partial_\nu B^{(n)}_{5\mu} - \frac{n}{R} B^{(n)}_{\mu\nu} \right) \left(\partial^\mu B^{\nu 5}_{(n)} + \partial^\nu B^{5\mu}_{(n)} - \frac{n}{R} B^{\mu\nu}_{(n)} \right) \right], \end{aligned} \tag{6.4}$$

en donde $H^{(0)}_{\mu\nu\lambda}$ y $H^{(n)}_{\mu\nu\lambda}$ están definidos de manera similar que en (5.1). Nótese que el modo cero en el lagrangiano efectivo (6.4) corresponde consistentemente a la teoría KR 4D, y que los modos KK están compuestos de un término tipo KR 4D mas un término que acopla los campos no masivos $B^{(n)}_{\mu 5}$ con los campos $B^{(n)}_{\mu\nu}$ con una masa (n/R) adquirida debido a la compactación. En adelante, a fin de hacer más claro el anális de los resultados, se trunca la torre de excitaciones KK hasta un número finito k, pudiéndose tomar el límite $k \to \infty$ al final de los cálculos, de modo que

$n = 1, 2, 3, ..., k-1$. El lagrangiano (6.4), es resultado no hallado antes en la literatura, y puede ahora encontrarse en [34].

Para mostrar que la teoría descrita por el lagrangiano efectivo (6.4) es singular y saber el número de restricciones primarias independientes que uno debe obtener, se obtiene la matriz Hessiana. A saber, por similitud con los resultados (5.2) y (5.3), para la matriz Hessiana asociada con $B^{(0)}_{\mu\nu}$ se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial(\partial_0 B^{(0)}_{\alpha\beta})} = \frac{1}{2}H^{0\alpha\beta}_{(0)} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}H^{(0)}_{0\gamma\delta}, \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_e}{\partial(\partial_0 B^{(0)}_{\lambda\rho})\partial(\partial_0 B^{(0)}_{\alpha\beta})} = \frac{1}{4}g^{\alpha i}g^{\beta j}(\delta^\lambda_i\delta^\rho_j - \delta^\lambda_j\delta^\rho_i) = \frac{1}{4}(g^{\alpha\lambda}g^{\beta\rho} - g^{\alpha\rho}g^{\beta\lambda}) \equiv (W)^{\alpha\beta\lambda\rho}_{(0)}. \tag{6.6}$$

Para obtener la matriz Hessiana asociada con $B^{(l)}_{LH}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial(\partial_0 B^{(h)}_{LH})} &= H^{\mu\nu\lambda}_{(h)}\frac{1}{3!}\delta^L_\alpha\delta^H_\beta\frac{\partial}{\partial(\partial_0 B^{(h)}_{\alpha\beta})}H^{(h)}_{\mu\nu\lambda} \\
&\quad +\frac{1}{2}\Big(\partial^\mu B^{\nu 5}_{(h)} + \partial^\nu B^{5\mu}_{(h)} - \frac{h}{R}B^{\mu\nu}_{(h)}\Big)\delta^L_\alpha\delta^H_5\frac{\partial}{\partial(\partial_0 B^{(h)}_{\alpha 5})}\Big(\partial_\mu B^{(n)}_{\nu 5} + \partial_\nu B^{(n)}_{5\mu} - \frac{h}{R}B^{(n)}_{\mu\nu}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\delta^L_\alpha\delta^H_\beta H^{0\alpha\beta}_{(h)} + \frac{1}{4}\delta^L_\alpha\delta^H_5\Big(\partial^\mu B^{\nu 5}_{(h)} + \partial^\nu B^{5\mu}_{(h)} - \frac{h}{R}B^{\mu\nu}_{(h)}\Big)\Big(\delta^0_\mu\delta^\alpha_\nu\delta^5_5 - \delta^0_\nu\delta^\alpha_\mu\delta^5_5\Big) \\
&= \frac{1}{2}\delta^L_\alpha\delta^H_\beta H^{0\alpha\beta}_{(h)} + \frac{1}{2}\delta^L_\alpha\delta^H_5\Big(\partial^0 B^{\alpha 5}_{(h)} + \partial^\alpha B^{50}_{(h)} - \frac{h}{R}B^{0\alpha}_{(h)}\Big),
\end{aligned} \tag{6.7}$$

luego, considerando que $H^{00\lambda}_{(h)} = 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathcal{L}_e}{\partial(\partial_0 B^{(m)}_{KM})\partial(\partial_0 B^{(h)}_{LH})} &= \frac{1}{2}\delta^L_i\delta^H_j g^{ik}g^{jm}\delta^K_l\delta^M_n\frac{\partial}{\partial(\partial_0 B^{(m)}_{ln})}H^{(m)}_{0km} \\
&\quad +\frac{1}{2}\delta^L_i\delta^H_5 g^{il}\delta^K_n\delta^M_5\frac{\partial}{\partial(\partial_0 B^{(m)}_{n5})}\Big(\partial_0 B^{(m)}_{l5} + \partial_l B^{(m)}_{50} - \frac{h}{R}B^{(m)}_{0l}\Big) \\
&= \frac{1}{4}\delta^L_i\delta^H_j g^{ik}g^{jm}\delta^K_l\delta^M_n(\delta^l_k\delta^n_m - \delta^l_m\delta^n_k) + \frac{1}{4}\delta^L_i\delta^H_5 g^{il}\delta^K_n\delta^M_5(\delta^n_l\delta^5_5) \\
&= \frac{1}{4}\delta^L_i\delta^H_j\delta^K_l\delta^M_n(g^{il}g^{jn} - g^{in}g^{jl}) + \frac{1}{4}\delta^L_i\delta^H_5\delta^K_n\delta^M_5 g^{in} \\
&= \frac{1}{4}(g^{LK}g^{HM} - g^{LM}g^{HK}) + \frac{1}{4}\delta^H_5\delta^M_5 g^{LK} \equiv W'^{LHKM}_{(m)},
\end{aligned} \tag{6.8}$$

en donde los índices latinos toman los valores $1, 2, 3$. Inspeccionando (6.6) se obtiene que las entradas distintas de cero de $(W^{\alpha\beta\lambda\rho}_{(0)})$ son 3 (aquellas con $\alpha, \beta \neq 0$), lo que implica que su nulidad es $6 - 3 = 3$ (6, son las componetes independientes de $B^{(0)}_{\mu\nu}$). Asimismo, de (6.8), se obtiene que las entradas distintas de cero de $(W^{LHKM}_{(m)})$ por parte del primer término son 3 (aquellas con $K, L, M, H \neq 0, 5$), y por parte del segundo término son 3 (aquellas con $H, M = 5$, y $L, K \neq 0, 5$), lo que implica que su nulidad es $10 - 6 = 4$ (10, son las componentes independientes de $B^{(n)}_{LM}$). Esto muestra que la matriz Hessiana total tiene determinante cero, por lo que la teoría descrita por (6.4) es singular, y además, que $3+4(k-1)=4k-1$ es el número de restricciones primarias independientes que uno debe obtener. (Ver también este resultado en [34].).

6.2. Restricciones primarias y secundarias

De las expresiones (6.5) y (6.7), además de los momentos canónicos se obtienen las restricciones primarias; es decir, de (6.5) se tiene que

$$\begin{aligned} & \Pi^{\mu\nu}_{(0)} = \frac{1}{2}H^{0\mu\nu}_{(0)} && (6.9)\\ \Rightarrow\quad & \Pi^{ij}_{(0)} = \frac{1}{2}H^{0ij}_{(0)}, \quad \Pi^{0i}_{(0)} = 0 && (6.10)\\ \Rightarrow\quad & \phi^{0i}_{(0)} \equiv \Pi^{0i}_{(0)} \approx 0, && (6.11)\end{aligned}$$

y de la expresión (6.7),

$$\begin{aligned} & \Pi^{LH}_{(n)} = \frac{1}{2}\delta^L_\alpha\delta^H_\beta H^{0\alpha\beta}_{(n)} + \frac{1}{2}\delta^L_\alpha\delta^H_5\Big(\partial^0 B^{\alpha 5}_{(n)} + \partial^\alpha B^{50}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{0\alpha}_{(n)}\Big) && (6.12)\\ \Rightarrow\quad & \Pi^{i5}_{(n)} = \frac{1}{2}\Big(\partial^0 B^{i5}_{(n)} + \partial^i B^{50}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{0i}_{(n)}\Big), \quad \Pi^{ij}_{(n)} = \frac{1}{2}H^{0ij}_{(n)}, \quad \Pi^{0i}_{(n)} = 0, \quad \Pi^{05}_{(n)} = 0 && (6.13)\\ \Rightarrow\quad & \phi^{0i}_{(n)} \equiv \Pi^{0i}_{(n)} \approx 0, \quad \phi^{05}_{(n)} \equiv \Pi^{05}_{(n)} \approx 0, && (6.14)\end{aligned}$$

siendo, en efecto, $4k-1$ restricciones primarias. Para hallar las restricciones secundarias debe obtenerse el hamiltoniano asociado con el lagrangiano efectivo (6.4). Por definición, el hamiltoniano 5D asociado con el lagrangiano 5D (6.1) es $\mathcal{H} = \dot{B}_{NL}\Pi^{NL} - \mathcal{L}$. Sustituyendo las series (6.2) en $\dot{B}_{NL}\Pi^{NL} = \dot{B}_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} + 2\dot{B}_{\mu 5}\Pi^{\mu 5}$ e integrando sobre y, se obtiene la expresion 4D, $\dot{B}^{(0)}_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}_{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\dot{B}^{(n)}_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}_{(n)} + 2\dot{B}^{(n)}_{i5}\Pi^{i5}_{(n)}\Big)$. Por tanto, el hamiltoniano asociado con el lagrangiano efectivo (6.4) está dado por

$$\begin{aligned} H_c &= \int d^3x\Big[\dot{B}^{(0)}_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}_{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\dot{B}^{(n)}_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}_{(n)} + +2\dot{B}^{(n)}_{i5}\Pi^{i5}_{(n)}\Big] - \mathcal{L}_e\Big]\\ &= \int d^3x\Big[(H^{(0)}_{0ij} - \partial_i B^{(0)}_{j0} - \partial_j B^{(0)}_{0i})\Pi^{ij}_{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[(H^{(n)}_{0ij} - \partial_i B^{(n)}_{j0} - \partial_j B^{(n)}_{0i})\Pi^{ij}_{(n)}\\ &\quad +2(2\Pi^{(n)}_{i5} - \partial_i B^{(n)}_{50} + \frac{n}{R}B^{(n)}_{0i})\Pi^{i5}_{(n)}\Big] - \mathcal{L}_e\Big]\\ &= \int d^3x\Big[B^{(0)}_{0i}(2\partial_j\Pi^{ij}_{(0)}) + 2\Pi^{(0)}_{ij}\Pi^{ij}_{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[B^{(n)}_{0i}(2\partial_j\Pi^{ij}_{(n)}) + 2\Pi^{(n)}_{ij}\Pi^{ij}_{(n)}\\ &\quad +4\Pi^{(n)}_{i5}\Pi^{i5}_{(n)} + B^{(n)}_{05}(2\partial_i\Pi^{5i}_{(n)}) + \frac{n}{R}(2B^{(n)}_{0i}\Pi^{i5}_{(n)})\Big] - \mathcal{L}_e\Big]. \qquad (6.15)\end{aligned}$$

En esta última expresion, usando que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_e &= \frac{1}{4}H^{(0)}_{0ij}H^{0ij}_{(0)} + \frac{1}{2\times 3!}H^{(0)}_{ijk}H^{ijk}_{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{4}H^{(n)}_{0ij}H^{0ij}_{(n)} + \frac{1}{2\times 3!}H^{(n)}_{ijk}H^{ijk}_{(n)}\right. \\
&+\frac{1}{2}\left(\partial_0 B^{(n)}_{i5} + \partial_i B^{(n)}_{50} - \frac{n}{R}B^{(n)}_{0i}\right)\left(\partial^0 B^{i5}_{(n)} + \partial^i B^{50}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{0i}_{(n)}\right) \\
&\left.+\frac{1}{4}\left(\partial_i B^{(n)}_{j5} + \partial_j B^{(n)}_{5i} - \frac{n}{R}B^{(n)}_{ij}\right)\left(\partial^i B^{j5}_{(n)} + \partial^i B^{5i}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{ij}_{(n)}\right)\right], \qquad (6.16)
\end{aligned}
$$

uno obtiene el hamiltoniano canónico

$$
\begin{aligned}
H_c &= \int d^3x\left[B^{(0)}_{0i}(2\partial_j\Pi^{ij}_{(0)}) + \Pi^{(0)}_{ij}\Pi^{ij}_{(0)} - \frac{1}{2\times 3!}H^{(0)}_{ijk}H^{ijk}_{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[B^{(n)}_{0i}(2\partial_j\Pi^{ij}_{(n)})\right.\right. \\
&+\Pi^{(n)}_{ij}\Pi^{ij}_{(n)} - \frac{1}{2\times 3!}H^{(n)}_{ijk}H^{ijk}_{(n)} + 2\Pi^{(n)}_{i5}\Pi^{i5}_{(n)} + B^{(n)}_{05}(2\partial_i\Pi^{5i}_{(n)}) + \frac{n}{R}(2B^{(n)}_{0i}\Pi^{i5}_{(n)}) \\
&\left.\left.-\frac{1}{4}\left(\partial_i B^{(n)}_{j5} + \partial_j B^{(n)}_{5i} - \frac{n}{R}B^{(n)}_{ij}\right)\left(\partial^i B^{j5}_{(n)} + \partial^j B^{5i}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{ij}_{(n)}\right)\right]\right]. \qquad (6.17)
\end{aligned}
$$

Este hamiltoniano es también un resultado que no se hallaba antes en la literatura, y que ahora puede encontrarse en [34]. Entonces, definiendo el hamiltoniano primario

$$
H_1 = H_c + \int d^3x\left[a^{(0)}_{0i}\phi^{0i}_{(0)} + \sum_{n=1}^{k-1}\left(a^{(n)}_{0i}\phi^{0i}_{(n)} + a^{(n)}_{05}\phi^{05}_{(n)}\right)\right] \qquad (6.18)
$$

en donde $a^{(0)}_{0i}$, $a^{(n)}_{0i}$ $a^{(n)}_{05}$ son los multiplicadores de Lagrange que fuerzan las restricciones primarias, y usando las relaciones fundamentales

$$
\begin{aligned}
\{B^{(0)}_{\alpha\beta}(x), \Pi^{\mu\nu}_{(0)}(z)\} &= \frac{1}{2}(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha)\delta^3(x-z), \\
\{B^{(l)}_{HL}(x), \Pi^{MN}_{(n)}(z)\} &= \frac{1}{2}\delta^l_n(\delta^M_H\delta^N_L - \delta^M_L\delta^N_H)\delta^3(x-z), \qquad (6.19)
\end{aligned}
$$

las restricciones secundarias para el **modo cero** están dadas de acuerdo a

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi}^{0i}_{(0)}(x) = \{\phi^{0i}_{(0)}(x), H_1(z)\} &= \int d^3z\{\Pi^{0i}_{(0)}(x), [B^{(0)}_{0k}(2\partial_j\Pi^{kj}_{(0)})(z)\} = -\partial_j\Pi^{ij}_{(0)}(x), \\
\Rightarrow \quad \psi^{0i}_{(0)} &\equiv \partial_j\Pi^{ij}_{(0)} \approx 0, \qquad (6.20)
\end{aligned}
$$

las cuales son 3, mientras que para los **modos KK**, las restricciones secundarias están dadas de acuerdo a

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi}^{0i}_{(n)}(x) = \{\phi^{0i}_{(n)}(x), H_1(z)\} &= \int d^3z\{\Pi^{0i}_{(n)}(x), [B^{(n)}_{0k}(2\partial_j\Pi^{kj}_{(n)}) + \frac{n}{R}2B^{(n)}_{0k}\Pi^{k5}_{(n)}](z)\} \\
&= -[\partial_j\Pi^{ij}_{(n)} + \frac{n}{R}\Pi^{i5}_{(n)}](x), \\
\Rightarrow \quad \psi^{0i}_{(n)} &\equiv \partial_j\Pi^{ij}_{(n)} + \frac{n}{R}\Pi^{i5}_{(n)} \approx 0, \qquad (6.21)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi}^{05}_{(n)}(x) = \{\phi^{05}_{(n)}(x), H_1(z)\} &= \int d^3z\{\Pi^{05}_{(n)}(x), [B^{(n)}_{05}(2\partial_j\Pi^{5j}_{(n)})](z)\} = -2\partial_j\Pi^{5j}_{(n)}(x), \\
\Rightarrow \quad \psi^{05}_{(n)} &\equiv \partial_j\Pi^{5j}_{(n)} \approx 0, \qquad (6.22)
\end{aligned}
$$

las cuales son $4(k-1)$. Para hallar las posibles restricciones terciarias, se define el hamiltoniano secundario

$$H_2 = H_c \ + \int d^3x \Big[a_{0i}^{(0)} \phi_{(0)}^{0i} + b_{0i}^{(0)} \psi_{(0)}^{0i} + \sum_{n=1}^{k-1} \Big(a_{0i}^{(n)} \phi_{(n)}^{0i} + a_{05}^{(n)} \phi_{(n)}^{05} + b_{0i}^{(n)} \psi_{(n)}^{0i} + b_{05}^{(n)} \psi_{(n)}^{05} \Big) \Big], \tag{6.23}$$

en donde $b_{0i}^{(0)}$, $b_{0i}^{(n)}$, $b_{05}^{(n)}$ son los multiplicadores de Lagrange que fuerzan las restricciones secundarias. Para las restricciones terciarias del **modo cero**, por similitud con el resultado (5.13), se tiene que

$$\dot{\psi}_{(0)}^{0l}(x) \ = \ \{\psi_{(0)}^{0l}(x), H_2(z)\} = -\frac{1}{2\times 3!} \int d^3z \{2\partial_k \Pi_{(0)}^{lk}(x), [H_{ijk}^{(0)} H_{(0)}^{ijk}](z)\} = 0. \tag{6.24}$$

Para las restricciones tercearias de los **modos KK**, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{(n)}^{0i}(x) \ &= \ \{\psi_{(n)}^{0i}(x), H_2(z)\} = \int d^3z \Big[\{2\partial_k \Pi_{(n)}^{lk}(x), -\frac{1}{2\times 3!}[H_{ijk}^{(n)} H_{(n)}^{ijk}](z) \\ &- \frac{1}{4}\Big(\partial_i B_{j5}^{(n)} + \partial_j B_{5i}^{(n)} - \frac{n}{R} B_{ij}^{(n)}\Big)\Big(\partial^i B_{(n)}^{j5} + \partial^j B_{(n)}^{5i} - \frac{n}{R} B_{(n)}^{ij}\Big)(z)\} \\ &+ \{\frac{n}{R} 2\Pi_{(n)}^{i5}(x), -\frac{1}{4}\Big(\partial_i B_{j5}^{(n)} + \partial_j B_{5i}^{(n)} - \frac{n}{R} B_{ij}^{(n)}\Big)\Big(\partial^i B_{(n)}^{j5} + \partial^j B_{(n)}^{5i} - \frac{n}{R} B_{(n)}^{ij}\Big)(z)\} \Big], \end{aligned}$$

en donde, por similitud con el resultado (5.13),

$$-\frac{1}{2\times 3!} \int d^3z \{2\partial_k \Pi_{(n)}^{lk}(x), [H_{ijk}^{(n)} H_{(n)}^{ijk}](z)\} = 0, \tag{6.25}$$

luego,

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{(n)}^{0i}(x) \ &= \ \int d^3z \Big[\{2\partial_k \Pi_{(n)}^{lk}(x), -\frac{1}{4}\Big(\partial_i B_{j5}^{(n)} + \partial_j B_{5i}^{(n)} - \frac{n}{R} B_{ij}^{(n)}\Big)\Big(\partial^i B_{(n)}^{j5} + \partial^j B_{(n)}^{5i} - \frac{n}{R} B_{(n)}^{ij}\Big)(z)\} \\ &+ \{\frac{n}{R} 2\Pi_{(n)}^{i5}(x), -\frac{1}{4}\Big(\partial_i B_{j5}^{(n)} + \partial_j B_{5i}^{(n)} - \frac{n}{R} B_{ij}^{(n)}\Big)\Big(\partial^i B_{(n)}^{j5} + \partial^j B_{(n)}^{5i} - \frac{n}{R} B_{(n)}^{ij}\Big)(z)\} \Big], \\ &= \ \frac{n}{R} \int d^3z \Big[\Big(\Big(\partial^l B_{(n)}^{j5} + \partial^j B_{(n)}^{5l} - B_{(n)}^{lj} \Big) - \Big(\partial^i B_{(n)}^{j5} + \partial^j B_{(n)}^{5i} - \frac{n}{R} B_{(n)}^{ij} \Big) \Big) \partial_j \delta^3(x-z) \Big] = 0. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Por último,

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{(n)}^{05}(x) \ &= \ \{\psi_{(n)}^{05}(x), H_2(z)\} \\ &= \ \int d^3z \Big[\{2\partial_k \Pi_{(n)}^{5k}(x), -\frac{1}{4}\Big(\partial_i B_{j5}^{(n)} + \partial_j B_{5i}^{(n)} - \frac{n}{R} B_{ij}^{(n)}\Big)\Big(\partial^i B_{(n)}^{j5} + \partial^j B_{(n)}^{5i} + \frac{n}{R} B_{(n)}^{ij}\Big)(z)\} \Big] \\ &= \ \int d^3z \Big[\Big(\partial^i B_{(n)}^{j5} + \partial^j B_{(n)}^{5i} + \frac{n}{R} B_{(n)}^{ij} \Big) [\partial_j \partial_i - \partial_i \partial_j] \delta^3(x-z) \Big] = 0, \end{aligned} \tag{6.27}$$

por lo que no hay restricciones terciarias en la teoría. Las restricciones encontradas,

$$\begin{aligned} &\phi_{(0)}^{0i} \equiv \Pi_{(0)}^{0i} \approx 0, \quad \psi_{(0)}^{0i} \equiv \partial_j \Pi_{(0)}^{ij} \approx 0, \\ &\phi_{(n)}^{0i} \equiv \Pi_{(n)}^{0i} \approx 0, \quad \phi_{(n)}^{05} \equiv \Pi_{(n)}^{05} \approx 0, \quad \psi_{(n)}^{0i} \equiv \partial_j \Pi_{(n)}^{ij} + \frac{n}{R} \Pi_{(n)}^{i5} \approx 0, \quad \psi_{(n)}^{05} \equiv \partial_j \Pi_{(n)}^{5j} \approx 0, \end{aligned} \tag{6.28}$$

es fácil notar que son de primera clase, ya que solo aparecen momentos canónicos. Estas restricciones, sin embargo, no son todas independientes, ya que se cumple que

$$\partial_i \psi^{0i}_{(0)} = 0, \quad \partial_i \psi^{0i}_{(n)} + \frac{n}{R}\psi^{05}_{(n)} = 0, \tag{6.29}$$

por lo que la teoría representa un sistema reducible. Las restricciones (6.28) son resultados que no se hallaban antes en la literatura, y ahora pueden hallarse en [34].

6.3. Grados de libertad

Habiendo obtenido todas las restricciones y, en este caso, las relaciones de reductibilidad de la teoría, puede hacerse el conteo de los grados de libertad físicos como sigue:

Para el modo cero se tiene un total de 2(6) variables dinámicas (6 por parte de $B^{(0)}_{\mu\nu}$), y 5 restricciones de primera clase independientes.

Para los modos KK se tienen, para cada k, un total de $2(10)(k-1)$ variables dinámicas ($10(k-1)$ por parte de $B^{(n)}_{LM}$), y $7(k-1)$ restricciones de primera clase independientes.

Entonces, el número de grados de libertad físicos para la teoría de KR 5D es

$$GL \quad = \quad \frac{1}{2}[12 + 20(k-1) - 2(5) - 2(7(k-1))] = \mathbf{3k - 2}. \tag{6.30}$$

En particular, para el modo cero (i.e., $k = 1$) se tiene que $GL = \mathbf{1}$, lo cual corresponde consistentemente al número de grados de libertad físicos para la teoría KR 4D. Además, de acuerdo con (6.30), cada valor de k contribuye con **3** grados de libertad. El conteo de los grados de libertad (6.30), es también un resultado que no se hallaba en la literatura, y puede ahora encontrarse en [34].

6.4. Las transformaciones de norma

Las restricciones de primera clase son generadoras de transformaciones de norma, y el generador está dado por

$$\mathcal{G} \quad = \quad \int d^3x \Big[\epsilon^{(0)}_{0i}\phi^{0i}_{(0)} + \epsilon^{(0)}_{i}\psi^{0i}_{(0)} + \epsilon^{(n)}_{0i}\phi^{0i}_{(n)} + \epsilon^{(n)}_{i}\psi^{0i}_{(n)} + \epsilon^{(n)}_{05}\phi^{05}_{(n)} + \epsilon^{(n)}_{5}\psi^{05}_{(n)}\Big], \tag{6.31}$$

en donde las ϵ's son los parámetros de las correspondientes transformaciones. Para los campos del **modo cero** y por similitud con los resultados (5.16) y (5.17), se tiene que

$$\delta B_{0i}^{(0)}(x) = \frac{1}{2}\epsilon_{0i}^{(0)}(x) \equiv \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_i^{(0)}(x), \qquad \delta B_{kl}^{(0)}(x) = \frac{1}{2}[\partial_k \epsilon_l^{(0)} - \partial_l \epsilon_k^{(0)}](x),$$

mientras que para los **modos KK**, por similitud con (5.16) y (5.17), se tiene

$$\delta B_{0i}^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\epsilon_{0i}^{(n)}(x) \equiv \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_i^{(n)}(x), \qquad \delta B_{kl}^{(n)}(x) = \frac{1}{2}[\partial_k \epsilon_l^{(n)} - \partial_l \epsilon_k^{(n)}](x),$$

y

$$\begin{aligned}\delta B_{05}^{(n)}(x) &= \int d^3z\{B_{05}^{(n)}(x), [\epsilon_{05}^{(n)}\Pi_{(n)}^{05}](z)\} = \frac{1}{2}\epsilon_{05}^{(n)}(x) \equiv \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_5^{(n)}(x),\\ \delta B_{l5}^{(n)}(x) &= \int d^3z\{B_{l5}^{(n)}(x), [\epsilon_i^{(n)}\frac{n}{R}\Pi_{(n)}^{i5} + \epsilon_5^{(n)}\partial_j \Pi_{(n)}^{5j}](z)\} = \frac{n}{2R}\epsilon_l^{(n)}(x)\\ &\quad -\frac{1}{2}\int d^3z \epsilon_5^{(n)}(z)\delta_l^j \partial_j \delta^3(x-z) = \frac{1}{2}[\frac{n}{R}\epsilon_l^{(n)} + \partial_l \epsilon_5^{(n)}](x).\end{aligned} \tag{6.32}$$

Entonces, las transformaciones de norma de los campos son

$$\begin{aligned}&\delta B_{0i}^{(0)} = \partial_0 \epsilon_i^{(0)}, \quad \delta B_{ij}^{(0)} = \partial_i \epsilon_j^{(0)} - \partial_j \epsilon_i^{(0)}, \quad \delta B_{0i}^{(n)} = \partial_0 \epsilon_i^{(n)},\\ &\delta B_{ij}^{(n)} = \partial_i \epsilon_j^{(n)} - \partial_j \epsilon_i^{(n)}, \quad \delta B_{05}^{(n)} = \partial_0 \epsilon_5^{(n)}, \quad \delta B_{i5}^{(n)} = \frac{n}{R}\epsilon_i^{(n)} + \partial_i \epsilon_5^{(n)},\end{aligned} \tag{6.33}$$

las cuales pueden escribirse en forma compacta como

$$\delta B_{\mu\nu}^{(0)} = \partial_\mu \epsilon_\nu^{(0)} - \partial_\nu \epsilon_\mu^{(0)}, \quad \delta B_{\mu\nu}^{(n)} = \partial_\mu \epsilon_\nu^{(n)} - \partial_\nu \epsilon_\mu^{(n)}, \quad \delta B_{\mu 5}^{(n)} = \frac{n}{R}\epsilon_\mu^{(n)} + \partial_\mu \epsilon_5^{(n)} \tag{6.34}$$

con $\epsilon_0^{(0)} = 0$, $\epsilon_0^{(n)} = 0$. Estas tranformaciones de norma son resultados nuevos, ya que estas no se hallaban en la literatura, y ahora también pueden consultarse en [34].

6.5. Pseudo-bosones de Goldstone

Los campos de norma no masivos $B_{\mu 5}^{(n)}$ *no* representan campos físicos en el sentido de que pueden ser eliminados de la teoría bajo una apropiada elección de la norma. A saber, bajo la elección de la norma

$$\epsilon_\mu^{(n)} = -\frac{R}{n}(\partial_\mu \epsilon_5^{(n)} + B_{\mu 5}^{(n)}), \tag{6.35}$$

los campos $B_{\mu\nu}^{(n)}$ se transforman como

$$\delta B_{\mu\nu}^{(n)} = -\partial_\mu B_{\nu 5}^{(n)} + \partial_\nu B_{\mu 5}^{(n)}, \tag{6.36}$$

y el lagrangiano efectivo (6.4) se vuelve

$$\mathcal{L}_e = \frac{1}{2\times 3!}H_{\mu\nu\lambda}^{(0)}H_{(0)}^{\mu\nu\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{2\times 3!}H_{\mu\nu\lambda}^{(n)}H_{(n)}^{\mu\nu\lambda} + \frac{1}{4}\Big(\frac{n}{R}\Big)^2 B_{\mu\nu}^{(n)}B_{(n)}^{\mu\nu}\Big]. \tag{6.37}$$

Aquí debe notarse lo siguiente. En el lagrangino *no normado* (6.4), se vió que el modo cero contribuye con un grado de libertad, mientras que cada exitación KK contribuye con tres. Uno de estos tres es debido a la parte tipo KR 4D, y los otros dos son debido a $B^{(n)}_{\mu 5}$. La eliminación de los campos no masivos $B^{(n)}_{\mu 5}$ en el lagrangiano *normado* (6.37) implica que los grados de libertad debidos a $B^{(n)}_{\mu 5}$ han sido otorgados a $B^{(n)}_{\mu\nu}$, de modo que cada $B^{(n)}_{\mu\nu}$ describe un campo con masa $M = (n/R)$ y tres grados de libertad. Estas características por parte de los campos no físicos $B^{(n)}_{\mu 5}$ los hace similares a los pseudo-bosones de Goldstone, encontrados en el mecanismo de Higgs. Estos pseudo-bosones de Goldstone son similares a los encontrados en la teoría Maxwell 5D y en teorías de Stüeckelberg 5D [26]-[29], lo cual sugiere una estrecha relación entre las teorías Maxwell y Kalb-Ramond. La identificación de estos pseudo-bosones de Goldston es un resultado nuevo, que ahora también puede consultarse en [34].

6.6. Los corchetes de Dirac

Para obtener los corchetes de Dirac en una teoría con restricciones de primera clase, lo que se hace (como en el caso KR 4D) es obtener un conjunto de restricciones de segunda clase irreducibles a partir de las de primera clase fijando la norma. Si las restricciones de primera clase no son independientes (como en el presente caso) se expande el espacio fase mediante la introducción de campos auxiliares. Las restricciones de segunda clase irreducibles que a continuación se dan, tanto para el modo cero como para los modos KK, se obtendrán de esta manera. Los corchetes de Dirac que a continuación se hallan son resultados que antes no se encontraban en la literatura, y pueden ahora también consultarse en [34].

Corchetes de Dirac del **modo cero.** De las restricciones de primera clase reducibles para el modo cero uno obtiene el conjunto de restricciones de segunda clase irreducibles[1]

$$\chi^1_{(0)} \equiv \Pi^{0i}_{(0)}, \quad \chi^2_{(0)} \equiv B^{(0)}_{0i}, \quad \chi^3_{(0)} \equiv 2\partial_j \Pi^{ij}_{(0)} - \partial^i p_{(0)}, \quad \chi^4_{(0)} \equiv \partial^j B^{(0)}_{ij} + \partial_i q^{(0)}, \tag{6.38}$$

con $q_{(0)}$, $p_{(0)}$ campos auxiliares cumpliendo

$$\{q^{(0)}(x), p_{(0)}(z)\} = \delta^3(x-z). \tag{6.39}$$

Los corchetes de Poisson distintos de cero son

$$\begin{aligned}
&\{\chi^1_{(0)}(x), \chi^2_{(0)}(z)\} = \{\Pi^{0i}_{(0)}(x), B^{(0)}_{0j}(z)\} = -\frac{1}{2}\delta^i_j \delta^3(x-z), \\
&\{\chi^3_{(0)}(x), \chi^4_{(0)}(z)\} = \{2\partial_j \Pi^{ij}_{(0)}(x), \partial^l B^{(0)}_{kl}(z)\} - \{\partial^i p_{(0)}(x), \partial_k q^{(0)}(z)\} = -\delta^i_k \partial_j \partial^j \delta^3(x-z),
\end{aligned} \tag{6.40}$$

[1] El factor de 2 en las expresiones (6.38), como en el caso KR 4D, se introduce por conveniencia; para no multiplicar las relaciones fundamentales (6.39) por 1/2.

de lo cual se define la matriz

$$\left(C^{\alpha\beta}_{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\delta^i_j & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\delta^i_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta^i_j\nabla^2 \\ 0 & 0 & \delta^i_j\nabla^2 & 0 \end{pmatrix}\delta^3(x-z), \tag{6.41}$$

y cuya inversa es

$$\left(C_{\alpha\beta}^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2\delta_{ij} & 0 & 0 \\ -2\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\delta^j_i}{\nabla^2} \\ 0 & 0 & -\frac{\delta^j_i}{\nabla^2} & 0 \end{pmatrix}\delta^3(x-z). \tag{6.42}$$

Entonces, los corchetes de Dirac diferentes de cero, por similitud con los resultados KR 4D, son

$$\begin{aligned}\{B^{(0)}_{ij}(x), \Pi^{kl}_{(0)}(z)\}_D &= \frac{1}{2}(\delta^k_i\delta^l_j - \delta^l_i\delta^k_j)\delta^3(x-z) \\ &\quad - \int d^3u d^3v \{B^{(0)}_{ij}(x), 2\partial_m\Pi^{rm}_{(0)}(u))\}[\frac{\delta^p_r}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial^q B^{(0)}_{pq}(v), \Pi^{kl}_{(0)}(z)\} \\ &= \frac{1}{2}[\delta^k_i\delta^l_j - \delta^l_i\delta^k_j + \frac{1}{\nabla^2}(\delta^k_i\partial_j\partial^l - \delta^l_i\partial_j\partial^k - \delta^k_j\partial_i\partial^l + \delta^l_j\partial_i\partial^k)]\delta^3(x-z) \end{aligned} \tag{6.43}$$

y, también por similitud con los resultados KR 4D, los corchetes de Dirac no triviales entre $q^{(0)}$ y $p_{(0)}$ con los campos son

$$\begin{aligned}\{q^{(0)}(x), p_{(0)}(z)\}_D &= \delta^3(x-z) - \int d^3u d^3v \{q^{(0)}(x), -\partial^i p_{(0)}(u))\}[\frac{\delta^j_i}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial_j q^{(0)}(v), p_{(0)}(z)\} \\ &= \delta^3(x-z) - \frac{1}{\nabla^2}\partial^i\partial_i\delta^3(x-z) = 0, \end{aligned} \tag{6.44}$$

$$\begin{aligned}\{q^{(0)}(x), \Pi^{ij}_{(0)}(z)\}_D &= -\int d^3u d^3v \{q^{(0)}(x), -\partial^k p_{(0)}(u))\}[\frac{\delta^l_k}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial^m B^{(0)}_{lm}(v), \Pi^{ij}_{(0)}(z)\} \\ &= \frac{1}{2\nabla^2}[\partial^i\partial^j - \partial^j\partial^i]\delta^3(x-z) = 0, \end{aligned} \tag{6.45}$$

$$\begin{aligned}\{B^{(0)}_{kl}(x), p_{(0)}(z)\}_D &= -\int d^3u d^3v \{B^{(0)}_{kl}(x), 2\partial_n\Pi^{mn}_{(0)}(u))\}[\frac{\delta^i_m}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial_i q^{(0)}(v), p_{(0)}(z)\} \\ &= \frac{1}{\nabla^2}[\partial_l\partial_k - \partial_k\partial_l]\delta^3(x-z) = 0, \end{aligned} \tag{6.46}$$

y trivialmente,

$$\{q^{(0)}(x), B^{(0)}_{ij}(z)\}_D = 0 \quad \{\Pi^{(0)}_{ij}(x), p_{(0)}(z),\}_D = 0. \tag{6.47}$$

Los corchetes de Dirac de los **modos KK.** De manera similar al modo cero, de las restricciones de primera clase para los modos KK uno obtiene las restricciones de segunda clase irreducibles[2]

$$\chi^1_{(n)} \equiv \Pi^{0i}_{(n)}, \quad \chi^2_{(n)} \equiv B^{(n)}_{0i}, \quad \chi^3_{(n)} \equiv \Pi^{05}_{(n)}, \quad \chi^4_{(n)} \equiv B^{(n)}_{05}, \quad \chi^5_{(n)} \equiv 2\partial_j \Pi^{ij}_{(n)} + \frac{n}{R} 2\Pi^{i5}_{(n)} - \partial^i p_{(n)},$$
$$\chi^6_{(n)} \equiv \partial^j B^{(n)}_{ij} + \partial_i q^{(n)} \quad \chi^7_{(n)} \equiv 2\partial_j \Pi^{5j}_{(n)}, \quad \chi^8_{(n)} \equiv \partial^j B^{(n)}_{5j}, \tag{6.48}$$

con $q_{(n)}$, $p_{(n)}$ campos auxiliares satisfaciendo

$$\{q^{(n)}(x), p_{(n)}(z)\} = \delta^3(x-z). \tag{6.49}$$

Los corchetes de Poisson no cero entre estas restricciones son

$$\begin{aligned}
\{\chi^1_{(n)}(x), \chi^2_{(n)}(z)\} &= \{\Pi^{0i}_{(n)}(x), B^{(n)}_{0j}(z)\} = -\frac{1}{2}\delta^i_j \delta^3(x-z), \\
\{\chi^3_{(n)}(x), \chi^4_{(n)}(z)\} &= \{\Pi^{05}_{(n)}(x), B^{(n)}_{05}(z)\} = -\frac{1}{2}\delta^3(x-z), \\
\{\chi^5_{(n)}(x), \chi^6_{(n)}(z)\} &= \{2\partial_j \Pi^{ij}_{(n)}(x), \partial^l B^{(n)}_{kl}(z)\} - \{\partial^i p_{(n)}(x), \partial_k q^{(n)}(z)\} = -\delta^i_k \partial_j \partial^j \delta^3(x-z), \\
\{\chi^5_{(n)}(x), \chi^8_{(n)}(z)\} &= \{\frac{n}{R} 2\Pi^{i5}_{(n)}(x), \partial^l B^{(n)}_{5l}(z)\} = \frac{n}{R}\partial^i \delta^3(x-z) \\
\{\chi^7_{(n)}(x), \chi^8_{(n)}(z)\} &= \{2\partial_j \Pi^{5j}_{(n)}(x), \partial^l B^{(n)}_{5l}(z)\} = -\partial_i \partial^i \delta^3(x-z),
\end{aligned} \tag{6.50}$$

de lo cual se obtiene la matriz

$$\left(C^{\alpha\beta}_{(n)}\right) = \begin{pmatrix}
0 & -\frac{1}{2}\delta^i_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2}\delta^i_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^i_j \nabla^2 & 0 & \frac{n}{R}\partial^i \\
0 & 0 & 0 & 0 & \delta^i_j \nabla^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nabla^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{n}{R}\partial^i & 0 & \nabla^2 & 0
\end{pmatrix} \delta^3(x-z).$$

y cuya inversa es

$$\left(C^{(n)}_{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix}
0 & 2\delta^j_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2\delta^j_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta^j_i}{\nabla^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\delta^j_i}{\nabla^2} & 0 & -\frac{n\partial^j}{R(\nabla^2)^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{n\partial^j}{R(\nabla^2)^2} & 0 & \frac{1}{\nabla^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\nabla^2} & 0
\end{pmatrix} \delta^3(x-z).$$

[2]El factor de 2 en las expresiones (6.48) se ha introducido por conveniencia; para no multiplicar la relación fundamental (6.49) por 1/2.

Entonces, los corchetes de Dirac distintos de cero modos KK, por similitud con los resultados del modo cero, son

$$\begin{aligned}\{B_{ij}^{(n)}(x), \Pi_{(n)}^{kl}(z)\}_D &= \frac{1}{2}(\delta_i^k \delta_j^l - \delta_i^l \delta_j^k)\delta^3(x-z) \\ &\quad - \int d^3u d^3v \{B_{ij}^{(n)}(x), 2\partial_m \Pi_{(n)}^{rm}(u))\}[\frac{\delta_r^p}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial^q B_{pq}^{(n)}(v), \Pi_{(n)}^{kl}(z)\} \\ &= \frac{1}{2}[\delta_i^k \delta_j^l - \delta_i^l \delta_j^k + \frac{1}{\nabla^2}(\delta_i^k \partial_j \partial^l - \delta_i^l \partial_j \partial^k - \delta_j^k \partial_i \partial^l + \delta_j^l \partial_i \partial^k)]\delta^3(x-z) \quad (6.51)\end{aligned}$$

y los corchetes de Dirac no triviales entre $q^{(n)}$ y $p_{(n)}$ con los campos,

$$\begin{aligned}\{q^{(n)}(x), p_{(n)}(z)\}_D &= \delta^3(x-z) - \int d^3u d^3v \{q^{(n)}(x), -\partial^i p_{(n)}(u))\}[\frac{\delta_i^j}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial_j q^{(n)}(v), p_{(n)}(z)\} \\ &= \delta^3(x-z) - \frac{1}{\nabla^2}\partial^i \partial_i \delta^3(x-z) = 0, \quad (6.52) \\ \{q^{(n)}(x), \Pi_{(n)}^{ij}(z)\}_D &= -\int d^3u d^3v \{q^{(n)}(x), -\partial^k p_{(n)}(u))\}[\frac{\delta_k^l}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial^m B_{lm}^{(n)}(v), \Pi_{(n)}^{ij}(z)\} \\ &= \frac{1}{2\nabla^2}[\partial^i \partial^j - \partial^j \partial^i]\delta^3(x-z) = 0, \quad (6.53) \\ \{B_{kl}^{(n)}(x), p_{(n)}(z)\}_D &= -\int d^3u d^3v \{B_{kl}^{(n)}(x), 2\partial_n \Pi_{(n)}^{mn}(u))\}[\frac{\delta_m^i}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial_i q^{(n)}(v), p_{(n)}(z)\} \\ &= \frac{1}{\nabla^2}[\partial_l \partial_k - \partial_k \partial_l]\delta^3(x-z) = 0, \quad (6.54)\end{aligned}$$

y trivialmente,

$$\{q^{(n)}(x), B_{ij}^{(n)}(z)\}_D = 0, \quad \{\Pi_{ij}^{(n)}(x), p_{(n)}(z), \}_D = 0. \quad (6.55)$$

de modo que los campos auxiliares ($q_{(0)}$, $p_{(0)}$) y ($q_{(n)}$, $p_{(n)}$) son *independientes* del corchete de Dirac. Condición que es necesaria, ya que como campos auxiliares no deben contribuir con resultados en la teoría. Nótese que ya no se consideran los corchetes de Dirac conteniendo los campos $B_{\mu 5}^{(n)}$ (no físicos), ya que éstos han sido eliminados de la teoría.

En resumen, la teoría KR 5D previamente estudiada es una teoría de norma reducible, cuyo modo cero corresponde consistentemente a la teoría KR 4D, mas una torre de excitaciones KK de campos masivos $B_{\mu\nu}^{(n)}$ contribuyendo cada modo con tres grados de libertad. Esto último, después de haber fijado la norma y haber identificado los campos $B_{\mu 5}^{(n)}$ como pseudo-bosones de Golstone. Además, debido a la reductibilidad tanto en el modo cero como en los modos excitados, se usó el proceso de expansión del espacio fase para calcular los corchetes de Dirac de la teoría.

Capítulo 7

La acción de Proca-Kalb-Ramond

Como es sabido, la adición al lagrangiano de Maxwell de un término masivo dado por

$$L_P = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + m^2 A_\mu A^\nu,$$

que es la teoría de Proca, *rompe* con la invariancia de norma de la teoría. Mientras en la teoría de Maxwell la condición de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ se obtiene de la libertad de norma, en la teoría de Proca tal condición es una restricción. En la teoría de Maxwell, el fotón no masivo posee dos grados de libertad físicos, obtenibles de quitarle dos componentes al potencial A^μ debido a la condición de Lorentz y a la invariancia de norma. En la teoría de Proca, el fotón es masivo con *tres* grados de libertad, obtenibles al quitarle (únicamente) una componente a A^μ debido la restricción de Lorentz. En este capítulo, de manera similar, se añade un término masivo a la teoría de norma de Kalb-Ramond, que será la teoría de Proca Kalb-Ramond, y se hace un análisis hamiltoniano aplicando el formalismo de Dirac-Bergmann estricto. Este análisis en sentido estricto de la teoría de Proca Kalb-Ramond es una *contribución* del presente trabajo, ya que no se encuentra en la literatura. Se muestra que la teoría Proca-Kalb-Ramond *no* es una teoría de norma, que no es reducible, y que el campo masivo que la describe, $B_{\mu\nu}$, posee *tres* grados de libertad, a diferencia del campo libre de Kalb-Ramond, que posee uno. Se obtienen, además, los corchetes de Dirac de la teoría.

7.1. La acción de Proca Kalb-Ramond

El lagrangiano de Proca Kalb-Ramond (PKR) está dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2 \times 3!} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} - \frac{m^2}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \tag{7.1}$$

en donde $H_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_\nu B_{\lambda\mu} + \partial_\lambda B_{\mu\nu}$ y $B_{\mu\nu}$ son la intesidad de campo y el campo (masivo) de Kalb-Ramond (KR). Se usará la métrica $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$. Para mostrar que la teoría descrita por el lagrangiano (7.1) es singular y saber el número de restricciones primarias que deberán obtenerse, se obtiene la matriz Hessiana. Por similitud con los resultados (5.2) y (5.3), se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 B_{\alpha\beta})} = \frac{1}{2} H^{0\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} H_{0\gamma\delta}, \tag{7.2}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 B_{\lambda\rho})\partial(\partial_0 B_{\alpha\beta})} = \frac{1}{4} g^{\alpha i} g^{\beta j} (\delta_i^\lambda \delta_j^\rho - \delta_j^\lambda \delta_i^\rho) = \frac{1}{4}(g^{\alpha\lambda} g^{\beta\rho} - g^{\alpha\rho} g^{\beta\lambda}) \equiv W^{\alpha\beta\lambda\rho}, \tag{7.3}$$

con $i, j = 1, 2, 3$. La inspección de (7.3) da 3 entradas distintas de cero para ($W^{\alpha\beta\lambda\rho}$) (aquellas con $\alpha, \beta \neq 0$), lo que implica que su nulidad es $6 - 3 = 3$ (6, son las componetes independientes de $B_{\mu\nu}$). Esto muestra que la matriz Hessiana tiene determinante igual a cero, por lo que la teoría descrita por (7.1) es singular, y además, que hay a un total de 3 restricciones primarias independientes que uno debe obtener.

7.2. Restricciones primarias y secundarias

De la expresión (7.2), además de los momentos canónicos, se obtienen las restricciones primarias; es decir, de la expresión (7.2) se tiene que

$$\Pi^{ij} = \frac{1}{2} H^{0ij}, \tag{7.4}$$

$$\Rightarrow \quad \Pi^{0i} = 0 \tag{7.5}$$

$$\Rightarrow \quad \phi^{0i} \equiv \Pi^{0i} \approx 0, \tag{7.6}$$

siendo en efecto 3 restricciones primarias. Para obtener las restricciones secundarias de la teoría aplicando la condición de consistencia a las restricciones (7.6), debe obtenerse el hamiltoniano asociado al lagrangiano (7.1). Con este fin, considerando que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} H_{0ij} H^{0ij} + \frac{1}{2 \times 3!} H_{ijk} H^{ijk} - \frac{1}{2} m^2 B_{0i} B^{0i} - \frac{1}{4} m^2 B_{ij} B^{ij} \tag{7.7}$$

el hamiltoniano canónico está dado por

$$\begin{aligned} H_c &= \int d^3x\Big[\dot{B}_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} - \mathcal{L}\Big] \\ &= \int d^3x\Big[(H_{0ij} - \partial_i B_{j0} - \partial_j B_{0i})\Pi^{ij} - \mathcal{L}\Big] \\ &= \int d^3x\Big[2B_{0i}\partial_j\Pi^{ij} + \Pi_{ij}\Pi^{ij} - \frac{1}{2\times 3!}H_{ijk}H^{ijk} + \frac{1}{2}m^2B_{0i}B^{0i} + \frac{1}{4}m^2B_{ij}B^{ij}\Big]. \quad (7.8) \end{aligned}$$

Entonces, definiendo el hamiltoniano primario

$$H_1 = H_c + \int d^3x\big[a_{0i}\phi^{0i}\big] \quad (7.9)$$

en donde a_{0i} son los multiplicadores de Lagrange que fuerzan las restricciones primarias, y usando los corchetes de Poisson fundamentales

$$\{B_{\alpha\beta}(x), \Pi^{\mu\nu}(y)\} = \frac{1}{2}(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha)\delta^3(x-y) \quad (7.10)$$

(tomadas a un mismo tiempo), se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^{0i}(x) = \{\phi^{0i}(x), H_1(y)\} &= \int d^3y\Big[\{\Pi^{0i}(x), [2B_{0k}\partial_j\Pi^{kj} + \frac{m^2}{2}B_{0k}B^{0k}](y)\}\Big] \\ &= -\frac{1}{2}\int d^3y\Big[2\partial_j\Pi^{ij}(y)\delta^3(y-x) + m^2B^{0i}\delta^3(y-x)\Big] \\ &= -\frac{1}{2}[2\partial_j\Pi^{ij} + m^2B^{0i}](x) \\ \Rightarrow \quad \psi^{0i} &\equiv 2\partial_j\Pi^{ij} + m^2B^{0i} \approx 0, \quad (7.11) \end{aligned}$$

las cuales son 3. Para hallar las posibles restricciones tercearias, se define el hamiltoniano secundario

$$H_2 = H_c + \int d^3x\Big[a_{0i}\phi^{0i} + b_{0i}\psi^{0i}\Big], \quad (7.12)$$

en donde b_{0i} son los multiplicadores de Lagrange que fuerzan las restricciones secundarias. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^{0l}(x) = \{\psi^{0l}(x), H_2(y)\} &= \int d^3y\Big[-\frac{1}{3!}H_{ijk}(y)\{2\partial_n\Pi^{ln}(x), H_{ijk}(y)\} \\ &\quad + \frac{m^2}{2}\{\partial_n\Pi^{ln}(x), B_{ij}B^{ij}(y)\} + \{m^2B^{0l}(x), [a_{0k}\Pi^{0k}](y)\}\Big]. \end{aligned}$$

Aquí, por similitud con el resultado (5.13),

$$-\frac{1}{3!}\int d^3y\Big[H_{ijk}(y)\{2\partial_n\Pi^{ln}(x), H_{ijk}(y)\}\Big] = 0. \quad (7.13)$$

y para las demás integrales,

$$\frac{m^2}{2}\int d^3y\{\partial_n\Pi^{ln}(x), B_{ij}B^{ij}(y)\} = -m^2\int d^3yB^{ln}(y)\partial_n\delta^3(x-y) = m^2\partial_nB^{ln}(x), \quad (7.14)$$

$$-\int d^3y\{m^2 B_{0l}(x), a_{0k}(y)\Pi^{0k}(y)\} = -\frac{1}{2}m^2 a_{0l}(x), \tag{7.15}$$

por lo que

$$\dot{\psi}^{0i}(x) = \{\psi^{0l}(x), H_2(y)\} = (\partial_j B^{ij} - \frac{1}{2}a_{0i})(x) \approx 0, \tag{7.16}$$

lo cual, resolviendo para a_{0i},

$$a_{0i}(x) = -2\partial^j B_{ij}(x), \tag{7.17}$$

de modo que ψ^{0i} no genera restricciones terciarias. Todas las restricciones encontradas,

$$\phi^{0i} \equiv \Pi^{0i} \approx 0, \quad \psi^{0i} \equiv 2\partial_j \Pi^{ij} + m^2 B^{0i} \approx 0, \tag{7.18}$$

es fácil ver que son de segunda clase, ya que el corchete de Poisson entre ellas no es cero, y que son independientes. Así, al ser todas las restricciones de segunda clase, la teoría PKR *no es una teoría de norma.*

7.3. Grados de libertad

Obtenidas todas las restricciones de la teoría junto con el hecho de no haber reductibilidad en las restricciones, pueden contarse los grados de libertad físicos como sigue:

Hay en total 2(6) variables dinámicas (6 debido a las componentes independientes de $B_{\mu\nu}$) y $3+3$ restricciones de segunda clase independientes.

Entonces, el número de grados de libertad físicos para la teoría PKR es

$$GL = \frac{1}{2}[2(6) - (3+3)] = \mathbf{3}. \tag{7.19}$$

Es decir, $B_{\mu\nu}$ es un campo masivo con tres grados de libertad.

7.4. Los corchetes de Dirac

Renombrando las restricciones de segunda clase (7.18) como

$$\chi^1 \equiv \Pi^{0i}, \quad \chi^2 \equiv 2\partial_j \Pi^{ij} + m^2 B^{0i}, \tag{7.20}$$

se tiene

$$\{\chi^1, \chi^2\} = \{\Pi^{0l}(x), m^2 B^{0i}(y)\} = \frac{1}{2} m^2 \delta^{li} \delta^3(x-y), \tag{7.21}$$

y entonces, la matriz formada por los corchetes de Poisson entre las restricciones secundarias y su inversa son

$$\left(C^{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} m^2 \delta^{ij} \delta^3(x-y), \qquad (C_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{2}{m^2} \delta_{ij} \delta^3(x-y).$$

Entonces, los corchetes de Dirac distintos de cero son

$$\begin{aligned} \{B_{0i}(x), B_{pq}(y)\}_D &= \frac{2}{m^2} \int d^3u d^3v \Big[\{B_{0i}(x), \Pi^{0k}(u)\}[\delta_{kl}\delta^3(u-v)]\{2\partial_j \Pi^{lj}(v), B_{pq}(y)\}\Big] \\ &= \frac{1}{m^2} \int d^3u d^3v \Big[\delta_{il}\delta^3(x-u)\delta^3(u-v)\partial_j \delta^3(v-y)(\delta^l_p \delta^j_q - \delta^l_p \delta^j_q)\Big] \\ &= \frac{1}{m^2} \delta_{il} \partial_j \delta^3(x-y)(\delta^l_p \delta^j_q - \delta^l_p \delta^j_q) \\ &= \frac{1}{m^2} (\delta_{ip}\delta^j_q - \delta_{iq}\delta^j_p)\partial_j \delta^3(x-y), \end{aligned} \tag{7.22}$$

con lo cual finaliza el análisis hamiltoniano.

En resumen, la teoría de PKR es una teoría con restricciones de segunda clase, unicamente. Esto la hace una teoría sin libertad de norma. Las restricciones de segunda clase son independientes, por lo que la teoría no es reducible. Se mostró que el campo masivo que la describe, $B_{\mu\nu}$, posee tres grados de libertad, a diferencia del campo libre de KR, que posee uno. Se obtuvieron, además, todos los corchetes de Dirac no triviales de la teoría.

Capítulo 8

La acción de Proca Kalb-Ramond en 5 dimensiones

Se ha visto que la teoría Kalb-Ramond 5D es una teoría de norma cuyo modo cero corresponde consistentemente a la teoría Kalb-Ramond 4D mas una torre de campos KK masivos. Se vió que el modo cero $B^{(0)}_{\mu\nu}$ contribuye consistentemente con un grado de libertad, mientras que los modos masivos KK $B^{(n)}_{\mu\nu}$ con tres, habiéndose absorbido los campos no masivos $B^{(n)}_{\mu 5}$ con características de pseudo-bosones de Golsdstone. Ahora se añade un término masivo a la teoría Kalb-Ramond 5D y se hace un anális hamiltoniano usando el formalismo de Dirac-Bergmann estricto. Este análisis estricto de la teoría representa de hecho una *contribución* del presente trabajo, ya que este formalismo no se encuentra en la literatura. En este capítulo se encuentra, después de compactar la quinta dimensión sobre un orbifold $S^1/\mathbf{Z_2}$, que la teoría efectiva de Proca Kalb-Ramond *no es una teoría de norma*, y que el modo cero corresponde consistentemente a la teoría de Proca Kalb-Ramond 4D, mas una torre de campos KK masivos. Se muestra que el modo cero $B^{(0)}_{\mu\nu}$ contribuye consistentemente con *tres* grados de libertad, mientras que los modos masivos KK contribuyen con *seis*; tres para $B^{(n)}_{\mu\nu}$ y tres para $B^{(n)}_{\mu 5}$. En esta teoría, no se encuentra la presencia de pseudo-bosones de Goldstone. Finalmente, se obtienen los corchetes de Dirac de la teoría. Los resultados correspondientes a este capítulo son una aportación que también puede consultarse en [34].

8.1. El lagrangiano efectivo

La notación que se usará es la siguiente: índices latinos mayúsculos M, N toman los valores $0, 1, 2, 3, 4, 5$, donde 5 etiqueta la dimensión extra compacta, y los índices se suben o bajan con la métrica $\eta = (1, -1, -1, -1, -1)$; y representará la coordenada en la dimensión compacta, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ son índices espaciales, x^μ las coordenadas que etiquetan puntos de la variedad cuadridimensional M_4; además, se supone que la variedad compacta es un $S^1/\mathbf{Z_2}$ orbifold cuyo radio es R. Se estudia entonces el lagrangiano Proca Kalb-Ramond 5D (PKR 5D),

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\times 3!}H_{MNL}H^{MNL} - \frac{1}{4}m^2 B_{MN}B^{MN}, \tag{8.1}$$

en donde $H_{MNL} = \partial_M B_{NL} + \partial_N B_{LM} + \partial_L B_{MN}$ y B_{MN} son la intensidad del campo y el campo (masivo) KR 5D. La compactación de la quinta dimensión sobre un orbifold $S^1/\mathbf{Z_2}$ impone sobre los campos B_{MN} las condiciones de paridad y periodicidad

$$\begin{aligned} B_{MN}(x,y) &= B_{MN}(x, y+2\pi R), \\ B_{\mu\nu}(x,-y) &= B_{\mu\nu}(x,y), \\ B_{\mu 5}(x,-y) &= -B_{\mu 5}(x,y), \end{aligned}$$

Estas condiciones permiten expresar los campos B_{MN} como el conjunto de armónicos sobre $M_4 \times S^1/\mathbf{Z_2}$,

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}B^{(0)}_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\sum_{n=1}^{\infty} B^{(n)}_{\mu\nu}(x)\cos\Big(\frac{ny}{R}\Big), \\ B_{\mu 5}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\sum_{n=1}^{\infty} B^{(n)}_{\mu 5}(x)\sin\Big(\frac{ny}{R}\Big), \end{aligned} \tag{8.2}$$

siendo $B^{(n)}_{\mu\nu}$, $B^{(n)}_{\mu 5}$ los modos de Kaluza-Klein (KK) dependientes de las coordenadas del espacio-tiempo cuadridimensional, a los cuales se les asocia con una torre infinita de partículas. Expresando el lagrangiano (8.1) como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\times 3!}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda} + \frac{1}{4}H_{5\mu\nu}H^{5\mu\nu} - \frac{1}{4}m^2 B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2 B_{\mu 5}B^{\mu 5}, \tag{8.3}$$

sustituyendo (8.2) en (8.1) e integrando sobre la quinta dimensión y de 0 a $2\pi R$ se obtiene el lagrangiano efectivo (cuadridimensional)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e = {} & \frac{1}{2\times 3!}H^{(0)}_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda}_{(0)} - \frac{1}{4}m^2 B^{(0)}_{\mu\nu}B^{\mu\nu}_{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\frac{1}{2\times 3!}H^{(n)}_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda}_{(n)} - \frac{1}{4}m^2 B^{(n)}_{\mu\nu}B^{\mu\nu}_{(n)} \\ & -\frac{1}{2}m^2 B^{(n)}_{\mu 5}B^{\mu 5}_{(n)} + \frac{1}{4}\Big(\partial_\mu B^{(n)}_{\nu 5} + \partial_\nu B^{(n)}_{5\mu} - \frac{n}{R}B^{(n)}_{\mu\nu}\Big)\Big(\partial^\mu B^{\nu 5}_{(n)} + \partial^\nu B^{5\mu}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{\mu\nu}_{(n)}\Big)\Bigg], \end{aligned} \tag{8.4}$$

con $H^{(0)}_{\mu\nu\lambda}$, $H^{(n)}_{\mu\nu\lambda}$ definidos de manera similar que en (5.1). En el lagrangiano efectivo (8.4), el modo cero corresponde consistentemente a la teoría PKR 4D. El primer par de términos de los modos KK son del tipo PKR 4D, y los dos últimos términos muestran un acoplamiento entre los campos $B^{(n)}_{\mu 5}$ con $B^{(n)}_{\mu\nu}$, con una masa m para el campo $B^{(n)}_{\mu 5}$ y una masa $m_n^2 = m^2 + (n/R)^2$ para $B^{(n)}_{\mu\nu}$ debido a la compactación. En adelante, por simplicidad de anális, se trunca la torre de estados KK hasta un número finito k, pudiéndose tomar el límite $k \to \infty$ al final de de cálculos, de modo que $n = 1, 2, 3, ..., k-1$. El lagrangiano (8.4), es un resultado que no se hallaba antes en la literatura, y puede ahora encontrarse en [34].

Para mostrar que la teoría descrita por (8.4) es singular, así como saber el número de restricciones primarias independientes que uno deberá obtener, se obtiene la matriz Hessiana. A saber, para la matriz Hessiana asociada con los campos $B^{(0)}_{\mu\nu}$, por similitud con los resultados (5.2) y (5.3), se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial(\partial_0 B^{(0)}_{\alpha\beta})} = \frac{1}{2} H^{0\alpha\beta}_{(0)} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} H^{(0)}_{0\gamma\delta}, \tag{8.5}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_e}{\partial(\partial_0 B^{(0)}_{\lambda\rho})\partial(\partial_0 B^{(0)}_{\alpha\beta})} = \frac{1}{4} g^{\alpha i} g^{\beta j} (\delta^\lambda_i \delta^\rho_j - \delta^\lambda_j \delta^\rho_i) = \frac{1}{4}(g^{\alpha\lambda} g^{\beta\rho} - g^{\alpha\rho} g^{\beta\lambda}) \equiv (W)^{\alpha\beta\lambda\rho}_{(0)}, \tag{8.6}$$

y para la matriz Hessiana asociada con $B^{(l)}_{LH}$, por similitud con los resultados (6.7) y (6.8),

$$\frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial(\partial_0 B^{(h)}_{LH})} = \frac{1}{2} \delta^L_\alpha \delta^H_\beta H^{0\alpha\beta}_{(h)} + \frac{1}{2} \delta^L_\alpha \delta^H_5 \Big(\partial^0 B^{\alpha 5}_{(h)} + \partial^\alpha B^{50}_{(h)} - \frac{h}{R} B^{0\alpha}_{(h)}\Big), \tag{8.7}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_e}{\partial(\partial_0 B^{(m)}_{KM})\partial(\partial_0 B^{(h)}_{LH})} = \frac{1}{4}(g^{LK} g^{HM} - g^{LM} g^{HK}) + \frac{1}{4} \delta^H_5 \delta^M_5 g^{LK} \equiv (W)'^{LHKM}_{(m)}. \tag{8.8}$$

La inspección de (8.6) conduce a que las entradas distintas de cero de ($W^{\alpha\beta\lambda\rho}_{(0)}$) son 3 (aquellas con $\alpha, \beta \neq 0$), lo que implica que su nulidad es $6 - 3 = 3$ (6, son las componetes independientes de $B^{(0)}_{\mu\nu}$). De la misma manera, de (8.8) se obtiene que las entradas distintas de cero de ($W^{LHKM}_{(m)}$) por parte del primer término son 3 (aquellas con $K, L, M, H \neq 0, 5$), y por el segundo termino son 3 (aquellas con $H, M = 5$, y $L, K \neq 0, 5$), lo que implica que su nulidad es $10 - 6 = 4$ (10, son las componentes independientes de $B^{(n)}_{LM}$). Lo anterior muestra que el determinante total es cero, lo que muestra que la teoría descrita por (8.4) es singular, y además, que $3 + 4(k-1) = 4k - 1$ es el número de restricciones primarias independientes que uno debe obtener. (Ver este resultado también en [34].)

8.2. Restricciones primarias y secundarias

De la expresión (8.5), además de los momentos canónicos para el modo cero, se obtienen las restricciones primarias para el modo cero; es decir, de (8.5) se que

$$\Pi^{\mu\nu}_{(0)} = \frac{1}{2}H^{0\mu\nu}_{(0)} \tag{8.9}$$

$$\Rightarrow \quad \Pi^{0i}_{(0)} = 0, \quad \Pi^{ij}_{(0)} = \frac{1}{2}H^{0ij}_{(0)} \tag{8.10}$$

$$\Rightarrow \quad \phi^{0i}_{(0)} \equiv \Pi^{0i}_{(0)} \approx 0, \tag{8.11}$$

y similarmente, de la expresión (8.7), que

$$\Pi^{LH}_{(n)} = \frac{1}{2}\delta^L_\alpha \delta^H_\beta H^{0\alpha\beta}_{(n)} + \frac{1}{2}\delta^L_\alpha \delta^H_5 \Big(\partial^0 B^{\alpha 5}_{(n)} + \partial^\alpha B^{50}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{0\alpha}_{(n)}\Big) \tag{8.12}$$

$$\Rightarrow \quad \Pi^{0i}_{(n)} = 0, \quad \Pi^{05}_{(n)} = 0, \quad \Pi^{ij}_{(n)} = \frac{1}{2}H^{0ij}_{(n)}, \quad \Pi^{i5}_{(n)} = \frac{1}{2}\Big(\partial^0 B^{i5}_{(n)} + \partial^i B^{50}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{0i}_{(n)}\Big) \tag{8.13}$$

$$\Rightarrow \quad \phi^{0i}_{(n)} \equiv \Pi^{0i}_{(n)} \approx 0, \quad \phi^{05}_{(n)} \equiv \Pi^{05}_{(n)} \approx 0, \tag{8.14}$$

siendo, en efecto, $4k-1$ restricciones primarias independientes. Para hallar las restricciones secundarias aplicando la condición de consistencia a las restricciones (8.11) y (8.14), se requiere el hamitoniano asociado con el lagrangiano efectivo (8.4). Por definición, el hamiltoniano 5D asociado con el lagrangiano en 5D (8.1) es $\mathcal{H} = \dot{B}_{NL}\Pi^{NL} - \mathcal{L}$, en donde $\dot{B}_{NL}\Pi^{NL} = \dot{B}_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} + 2\dot{B}_{\mu 5}\Pi^{\mu 5}$. Sustituyendo las series (8.2) en esta última expresión e ntegrando en y de 0 a $2\pi R$, uno obtiene la expresión 4D, $\dot{B}^{(0)}_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}_{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}[\dot{B}^{(n)}_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}_{(n)} + 2\dot{B}^{(n)}_{i5}\Pi^{i5}_{(n)}]$. Entonces, el hamiltoniano canónico asociado con el lagrangiano efectivo (8.4) está dado por

$$\begin{aligned}
H_c &= \int d^3x \Big[\dot{B}^{(0)}_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}_{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\dot{B}^{(n)}_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}_{(n)} + 2\dot{B}^{(n)}_{i5}\Pi^{i5}_{(n)}\Big] - \mathcal{L}_e\Big] \\
&= \int d^3x \Big[(H^{(0)}_{0ij} - \partial_i B^{(0)}_{j0} - \partial_j B^{(0)}_{0i})\Pi^{ij}_{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[(H^{(n)}_{0ij} - \partial_i B^{(n)}_{j0} - \partial_j B^{(n)}_{0i})\Pi^{ij}_{(n)} \\
&\quad +2(2\Pi^{(n)}_{i5} - \partial_i B^{(n)}_{50} + \frac{n}{R}B^{(n)}_{0i})\Pi^{i5}_{(n)}\Big] - \mathcal{L}_e\Big] \\
&= \int d^3x \Big[2B^{(0)}_{0i}\partial_j \Pi^{ij}_{(0)} + 2\Pi^{(0)}_{ij}\Pi^{ij}_{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[2B^{(n)}_{0i}\partial_j\Pi^{ij}_{(n)} + 2\Pi^{(n)}_{ij}\Pi^{ij}_{(n)} + 4\Pi^{(n)}_{i5}\Pi^{i5}_{(n)} \\
&\quad +2B^{(n)}_{05}\partial_i\Pi^{5i}_{(n)} + \frac{n}{R}2B^{(n)}_{0i}\Pi^{i5}_{(n)}\Big] - \mathcal{L}_e\Big].
\end{aligned} \tag{8.15}$$

En esta última expresión, usando que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_e &= \frac{1}{4}H^{(0)}_{0ij}H^{0ij}_{(0)} + \frac{1}{2\times 3!}H^{(0)}_{ijk}H^{ijk}_{(0)} - \frac{1}{2}m^2 B^{(0)}_{0i}B^{0i}_{(0)} \\
&-\frac{1}{4}m^2 B^{(0)}_{ij}B^{ij}_{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\frac{1}{4}H^{(n)}_{0ij}H^{0ij}_{(n)} + \frac{1}{2\times 3!}H^{(n)}_{ijk}H^{ijk}_{(n)} \\
&-\frac{1}{2}m^2 B^{(n)}_{0i}B^{0i}_{(n)} - \frac{1}{4}m^2 B^{(n)}_{ij}B^{ij}_{(n)} - \frac{1}{2}m^2 B^{(n)}_{05}B^{05}_{(n)} - \frac{1}{2}m^2 B^{(n)}_{i5}B^{i5}_{(n)} \\
&+\frac{1}{2}\Big(\partial_0 B^{(n)}_{i5} + \partial_i B^{(n)}_{50} - \frac{n}{R}B^{(n)}_{0i}\Big)\Big(\partial^0 B^{i5}_{(n)} + \partial^i B^{50}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{0i}_{(n)}\Big) \\
&+\frac{1}{4}\Big(\partial_i B^{(n)}_{j5} + \partial_j B^{(n)}_{5i} - \frac{n}{R}B^{(n)}_{ij}\Big)\Big(\partial^i B^{j5}_{(n)} + \partial^i B^{5i}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{ij}_{(n)}\Big)\Bigg],
\end{aligned} \tag{8.16}$$

uno obtiene el hamiltoniano canónico

$$\begin{aligned}
H_c &= \int d^3x\Bigg[2B^{(0)}_{0i}\partial_j\Pi^{ij}_{(0)} + \Pi^{(0)}_{ij}\Pi^{ij}_{(0)} - \frac{1}{2\times 3!}H^{(0)}_{ijk}H^{ijk}_{(0)} + \frac{1}{2}m^2 B^{(0)}_{0i}B^{0i}_{(0)} + \frac{1}{4}m^2 B^{(0)}_{ij}B^{ij}_{(0)} \\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[2B^{(n)}_{0i}\partial_j\Pi^{ij}_{(n)} + \Pi^{(n)}_{ij}\Pi^{ij}_{(n)} - \frac{1}{2\times 3!}H^{(n)}_{ijk}H^{ijk}_{(n)} + \frac{1}{2}m^2 B^{(0)}_{0i}B^{0i}_{(0)} + \frac{1}{4}m^2 B^{(n)}_{ij}B^{ij}_{(n)} \\
&+\frac{1}{2}m^2 B^{(n)}_{05}B^{05}_{(n)} + \frac{1}{2}m^2 B^{(n)}_{i5}B^{i5}_{(n)} + 2\Pi^{(n)}_{i5}\Pi^{i5}_{(n)} + 2B^{(n)}_{05}\partial_i\Pi^{5i}_{(n)} + \frac{n}{R}2B^{(n)}_{0i}\Pi^{i5}_{(n)} \\
&-\frac{1}{4}\Big(\partial_i B^{(n)}_{j5} + \partial_j B^{(n)}_{5i} - \frac{n}{R}B^{(n)}_{ij}\Big)\Big(\partial^i B^{j5}_{(n)} + \partial^j B^{5i}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{ij}_{(n)}\Big)\Bigg]\Bigg].
\end{aligned} \tag{8.17}$$

Este resultado es también nuevo, que ahora puede consultarse en [34]. Entonces, definiendo el hamiltoniano primario

$$H_1 = H_c + \int d^3x\Bigg[a^{(0)}_{0i}\phi^{0i}_{(0)} + \sum_{n=1}^{k-1}\Big(a^{(n)}_{0i}\phi^{0i}_{(n)} + a^{(n)}_{05}\phi^{05}_{(n)}\Big)\Bigg], \tag{8.18}$$

en donde $a^{(0)}_{0i}$, $a^{(n)}_{0i}$, $a^{(n)}_{05}$ son los multiplicadores de Lagrange que fuerzan las restricciones primarias, y usando los corchetes de Poisson fundamentales

$$\begin{aligned}
\{B^{(0)}_{\alpha\beta}(x), \Pi^{\mu\nu}_{(0)}(z)\} &= \frac{1}{2}(\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha})\delta^3(x-z), \\
\{B^{(l)}_{HL}(x), \Pi^{MN}_{(n)}(z)\} &= \frac{1}{2}\delta^{l}_{n}(\delta^{M}_{H}\delta^{N}_{L} - \delta^{M}_{L}\delta^{N}_{H})\delta^3(x-z)
\end{aligned} \tag{8.19}$$

(tomadas a un mismo tiempo), para el **modo cero** se tiene que

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}^{0i}_{(0)}(x) = \{\phi^{0i}_{(0)}(x), H_1(z)\} &= \int d^3z\{\Pi^{0i}_{(0)}(x), [2B^{(0)}_{0k}\partial_j\Pi^{kj}_{(0)} + \frac{m^2}{2}B^{(n)}_{0k}B^{0k}_{(0)}(z)\} \\
&= -\frac{1}{2}(2\partial_j\Pi^{ij}_{(0)} + m^2 B^{0k}_{(0)})(x), \\
\Rightarrow \quad \psi^{0i}_{(0)} &\equiv 2\partial_j\Pi^{ij}_{(0)} + m^2 B^{0i}_{(0)} \approx 0,
\end{aligned} \tag{8.20}$$

las cuales son 3, mientras que para los **modos KK**,

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}^{0i}_{(n)}(x) = \{\phi^{0i}_{(n)}(x), H_1(z)\} &= \int d^3z\{\Pi^{0i}_{(n)}(x), [2B^{(n)}_{0k}\partial_j\Pi^{kj}_{(n)} + \frac{m^2}{2}B^{(n)}_{0k}B^{0k}_{(n)} + \frac{n}{R}2B^{(n)}_{0k}\Pi^{k5}_{(n)}](z)\} \\
&= -\frac{1}{2}[2\partial_j\Pi^{ij}_{(n)} + m^2 B^{0i}_{(n)} + \frac{n}{R}2\Pi^{i5}_{(n)}](x), \\
\Rightarrow \quad \psi^{0i}_{(n)} &\equiv 2\partial_j\Pi^{ij}_{(n)} + m^2 B^{0i}_{(n)} + \frac{n}{R}2\Pi^{i5}_{(n)} \approx 0,
\end{aligned} \tag{8.21}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}^{05}_{(n)}(x) = \{\phi^{05}_{(n)}(x), H_1(z)\} &= \int d^3z\{\Pi^{05}_{(n)}(x), [B^{(n)}_{05} 2\partial_j \Pi^{5j}_{(n)} + \frac{1}{2}m^2 B^{(n)}_{05} B^{05}_{(n)}](z)\} \\
&= -\frac{1}{2}(2\partial_j \Pi^{5j}_{(n)} + m^2 B^{05}_{(n)})(x). \\
\Rightarrow \quad \psi^{05}_{(n)} &\equiv 2\partial_j \Pi^{5j}_{(n)} + m^2 B^{05}_{(n)} \approx 0,
\end{aligned} \tag{8.22}$$

las cuales son $4(k-1)$. Para obtener las posibles restricciones terciarias, se define el hamiltoniano secundario

$$H_2 = H_c + \int d^3x \left[a^{(0)}_{0i}\phi^{0i}_{(0)} + b^{(0)}_{0i}\psi^{0i}_{(0)} + \sum_{n=1}^{k-1} \left(a^{(n)}_{0i}\phi^{0i}_{(n)} + a^{(n)}_{05}\phi^{05}_{(n)} + b^{(n)}_{0i}\psi^{0i}_{(n)} + b^{(n)}_{05}\psi^{05}_{(n)} \right) \right], \tag{8.23}$$

en donde $b^{(0)}_{0i}$, $b^{(n)}_{0i}$, $b^{(n)}_{05}$ son los multiplicadores de Lagrange que fuerzan las restricciones secundarias. Entonces, para la relación de consistencia a las restricciones secundarias del **modo cero**, por similitud con los resultados (7.13)-(7.15), se tiene que

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}^{0l}_{(0)}(x) &= \{\psi^{0l}_{(0)}(x), H_2(z)\} = \{[2\partial_n \Pi^{ln}_{(0)} + m^2 B^{0l}_{(0)}](x), H_2(z)\} \\
&= \int d^3z \Big[\{2\partial_n \Pi^{ln}_{(0)}(x), [-\frac{1}{2\times 3!} H^{(0)}_{ijk} H^{ijk}_{(0)} + \frac{1}{4}m^2 B^{(0)}_{ij} B^{ij}_{(0)}](z)\} \\
&\quad + \{m^2 B^{0l}_{(0)}(x), [a^{(0)}_{0k}\Pi^{0k}_{(0)}](z)\} \Big] = m^2 \partial_n B^{ln}_{(0)}(x) - \frac{1}{2}m^2 a^{(0)}_{0l}(x),
\end{aligned} \tag{8.24}$$

es decir, que

$$\partial_j B^{ij}_{(0)} - \frac{1}{2}a^{(0)}_{0i} \approx 0, \quad \Rightarrow \quad a^{(0)}_{0i} = -2\partial^j B^{(0)}_{ij}. \tag{8.25}$$

Para la relación de consistencia a las restricciones secundarias de los **modos KK**,

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}^{0i}_{(n)}(x) &= \{\psi^{0i}_{(n)}(x), H_2(y)\} = \{[2\partial_k \Pi^{ik}_{(n)} + m^2 B^{0i}_{(n)} + \frac{n}{R}2\Pi^{i5}_{(n)}](x), H_2(z)\} \\
&= \int d^3z \Big[\{2\partial_k \Pi^{lk}_{(n)}(x), [-\frac{1}{2\times 3!} H^{(n)}_{ijk} H^{ijk}_{(n)} + \frac{1}{4}m^2 B^{(n)}_{ij} B^{ij}_{(n)}](z) \\
&\quad -\frac{1}{4}\Big(\partial_i B^{(n)}_{j5} + \partial_j B^{(n)}_{5i} - \frac{n}{R}B^{(n)}_{ij}\Big)\Big(\partial^i B^{j5}_{(n)} + \partial^j B^{5i}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{ij}_{(n)}\Big)(z)\} \\
&\quad + m^2\{B^{0i}_{(n)}, [a^{(0)}_{0k}\Pi^{0k}_{(0)}](z)\} + \{\frac{n}{R}2\Pi^{i5}_{(n)}(x), \frac{1}{2}m^2 B^{(n)}_{i5} B^{i5}_{(n)}(z) \\
&\quad -\frac{1}{4}\Big(\partial_i B^{(n)}_{j5} + \partial_j B^{(n)}_{5i} - \frac{n}{R}B^{(n)}_{ij}\Big)\Big(\partial^i B^{j5}_{(n)} + \partial^j B^{5i}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{ij}_{(n)}\Big)(z)\} \Big],
\end{aligned}$$

y por similitud con el resultado (5.13),

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}^{0l}_{(n)}(x) &= \int d^3z \Big[\{2\partial_k \Pi^{lk}_{(n)}(x), \frac{1}{4}m^2 B^{(n)}_{ij} B^{ij}_{(n)}(z) \\
&\quad -\frac{1}{4}\Big(\partial_i B^{(n)}_{j5} + \partial_j B^{(n)}_{5i} - \frac{n}{R}B^{(n)}_{ij}\Big)\Big(\partial^i B^{j5}_{(n)} + \partial^j B^{5i}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{ij}_{(n)}\Big)(z)\} \\
&\quad + m^2\{B^{0l}_{(n)}(x), [a^{(n)}_{0k}\Pi^{0k}_{(n)}](z)\} + \{\frac{n}{R}2\Pi^{l5}_{(n)}(x), \frac{1}{2}m^2 B^{(n)}_{i5} B^{i5}_{(n)}(z) \\
&\quad -\frac{1}{4}\Big(\partial_i B^{(n)}_{j5} + \partial_j B^{(n)}_{5i} - \frac{n}{R}B^{(n)}_{ij}\Big)\Big(\partial^i B^{j5}_{(n)} + \partial^j B^{5i}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{ij}_{(n)}\Big)(z)\}\Big], \\
&= \frac{1}{2}m^2 \partial_k B^{lk}_{(n)}(x) - \int d^3z \Big[\frac{n}{R}\Big(\partial^l B^{j5}_{(n)} + \partial^j B^{5l}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{lj}_{(n)}\Big)\partial_j \delta^3(x-z) \\
&\quad + \frac{n}{R}m^2 B^{l5}_{(n)}\delta^3(x-z) - \frac{n}{R}\Big(\partial^l B^{j5}_{(n)} + \partial^j B^{5l}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{lj}_{(n)}\Big)\partial_j\delta^3(x-z)\Big] - \frac{1}{2}m^2 a^{(n)}_{0l}(x) \\
&= \frac{1}{2}m^2\Big(\partial_k B^{lk}_{(n)} - \frac{n}{R}2B^{l5}_{(n)} - a^{(n)}_{0l}\Big)(x),
\end{aligned} \tag{8.26}$$

es decir,

$$\partial_k B^{ik}_{(n)} - \frac{n}{R}2B^{i5}_{(n)} - a^{(n)}_{0i} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad a^{(n)}_{0i} = -\partial^k B^{(n)}_{ik} + \frac{n}{R}2B^{(n)}_{i5}. \tag{8.27}$$

Por último,

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}^{05}_{(n)}(x) &= \{\psi^{05}_{(n)}(x), H_2(z)\} = \{[2\partial_k \Pi^{5k}_{(n)} + m^2 B^{05}_{(n)}](x), H_2(z)\} \\
&= \int d^3z \Big[\{2\partial_k \Pi^{5k}_{(n)}(x), \frac{1}{2}m^2 B^{(n)}_{i5} B^{i5}_{(n)}(z) - \frac{1}{4}\Big(\partial_i B^{(n)}_{j5} + \partial_j B^{(n)}_{5i} - \frac{n}{R}B^{(n)}_{ij}\Big) \\
&\quad \times\Big(\partial^i B^{j5}_{(n)} + \partial^j B^{5i}_{(n)} + \frac{n}{R}B^{ij}_{(n)}\Big)(z)\} + \{m^2 B^{05}_{(n)}(x), [a^{(n)}_{05}\Pi^{05}_{(n)}(z)]\}\Big] \\
&= -m^2 \int d^3z B^{i5}_{(n)} \partial_i \delta^3(x-z) - \frac{1}{2}m^2 a^{(n)}_{05}(x) \\
&= m^2 \partial_i B^{i5}_{(n)}(x) - \frac{1}{2}m^2 a^{(n)}_{05}(x),
\end{aligned} \tag{8.28}$$

es decir,

$$\partial_i B^{i5}_{(n)} - \frac{1}{2}a^{(n)}_{05} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad a^{(n)}_{05} = -2\partial^i B^{(n)}_{i5}, \tag{8.29}$$

de modo que no hay restricciones terciarias para la teoría. Las restricciones obtenidas,

$$\begin{aligned}
&\phi^{0i}_{(0)} \equiv \Pi^{0i}_{(0)} \approx 0, \quad \psi^{0i}_{(0)} \equiv 2\partial_j \Pi^{ij}_{(0)} + m^2 B^{0i}_{(0)} \approx 0, \\
&\phi^{0i}_{(n)} \equiv \Pi^{0i}_{(n)} \approx 0, \quad \psi^{0i}_{(n)} \equiv 2\partial_j \Pi^{ij}_{(n)} + m^2 B^{0i}_{(n)} + \frac{n}{R}2\Pi^{i5}_{(n)} \approx 0, \\
&\phi^{05}_{(n)} \equiv \Pi^{05}_{(n)} \approx 0, \quad \psi^{05}_{(n)} \equiv 2\partial_j \Pi^{5j}_{(n)} + m^2 B^{05}_{(n)} \approx 0
\end{aligned} \tag{8.30}$$

es fácil notar que son de segunda clase, ya que los corchetes de Poisson entre todas ellas no son nulos. Además, es fácil también observar que son independientes. Esto significa que la teoría PKR 5D *no* es una teoría con libertad de norma. Las restricciones obtenidas (8.30), cabe mencionar, son también un resultado que no se encuentraba en la literatura, que ahora puede hallarse en [34].

8.3. Grados de libertad

Habiendo hallado todas las restricciones de la teoría así como observado su no reductibilidad, pueden ahora contarse los grados de libertad físicos como sigue:

Para el modo cero, se tiene un total de 2(6) variables dinámicas (6, son las componentes independientes de $B^{(0)}_{\mu\nu}$), y 6 restricciones de segunda clase independientes.

Para los modos KK, se tienen se tiene un total de $2(10)(k-1)$ variables dinámicas ($10(k-1)$, son las componentes independientes de $B^{(n)}_{LM}$), y $8(k-1)$ restricciones de segunda clase independientes.

Entonces, los grados de libertad físicos para la teoría de PKR 5D son

$$GL = \frac{1}{2}[12 + 20(k-1) - 6 - 8(k-1)] = \mathbf{6k} - \mathbf{3}. \tag{8.31}$$

En particular, para el modo cero, i.e., $k = 1$, se tiene $GL = \mathbf{3}$, lo cual corresponde al número de grados de libertad físicos para la teoría PKR 4D. Además, de acuerdo con (8.31), cada valor de k contribuye con **6** grados de libertad. Entonces, en relación con el la grangiano efectivo (8.4), mientras el modo cero, que es la teoría PKR 4D, contribuye con 3 grados de libertad, los modos KK contribuyen con 6. En los modos KK, los dos primeros términos tipo PKR 4D contribuyen con 3 grados de libertad, mientras que los 3 restantes son debidos a $B^{(n)}_{\mu 5}$. Así, $B^{(0)}_{\mu\nu}$, $B^{(n)}_{\mu\nu}$ y $B^{(n)}_{\mu 5}$ son campos masivos con tres grados de libertad, en contraste con KR 5D, en donde $B^{(0)}_{\mu\nu}$ y $B^{(n)}_{\mu\nu}$ son no masivos con uno y tres grados de libertad, siendo absorbido el campo no masivo $B^{(n)}_{\mu 5}$. El conteo de los grados de libertad anterior son también un resultado nuevo no hallado antes la literatura, y puede ahora consultarse en [34].

8.4. Los corchetes de Dirac

Se renombran las restricciones (8.30) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
&\chi^1_{(0)} \equiv \Pi^{0i}_{(0)}, \quad \chi^2_{(0)} \equiv 2\partial_j \Pi^{ij}_{(0)} + m^2 B^{0i}_{(0)}, \quad \chi^1_{(n)} \equiv \Pi^{0i}_{(n)}, \\
&\chi^2_{(n)} \equiv 2\partial_j \Pi^{ij}_{(n)} + m^2 B^{0i}_{(n)} + \frac{n}{R} 2\Pi^{i5}_{(n)}, \quad \chi^3_{(n)} \equiv \Pi^{05}_{(n)}, \quad \chi^4_{(n)} \equiv 2\partial_j \Pi^{5j}_{(n)} + m^2 B^{05}_{(n)}.
\end{aligned}$$

Corchetes de Dirac para el **modo cero**. Para el modo cero, los corchetes de Poisson distintos de cero entre las restricciones son

$$\{\chi^1_{(0)}(x), \chi^2_{(0)}(z)\} = \{\Pi^{0l}_{(0)}(x), -m^2 B^{(0)}_{0i}(z)\} = \frac{1}{2} m^2 \delta^{li} \delta^3(x-z), \tag{8.32}$$

por lo que la matriz formada por los corchetes de Poisson, y su inversa, son

$$\left(C^{\alpha\beta}_{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2}m^2\delta^{ij}\delta^3(x-y), \qquad \left(C^{(0)}_{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{2}{m^2}\delta_{ij}\delta^3(x-y).$$

Entonces, los corchetes de Dirac distintos de cero para el modo cero, por similitud con los resultados (7.22), son

$$\begin{aligned} \{B^{(0)}_{0i}(x), B^{(0)}_{pq}(z)\}_D &= \frac{2}{m^2}\int d^3ud^3v\{B^{(0)}_{0i}(x), \Pi^{0k}_{(0)}(u))\}[\delta_{kl}\delta^3(u-v)]\{2\partial_j\Pi^{lj}_{(0)}(v), B^{(0)}_{pq}(z)\} \\ &= \frac{1}{m^2}(\delta_{ip}\delta^j_q - \delta_{iq}\delta^j_p)\partial_j\delta^3(x-z). \end{aligned} \tag{8.33}$$

Corchetes de Dirac para los **modos KK**. Para los modos KK, los corchetes de Poisson distintos de cero son

$$\begin{aligned} \{\chi^1_{(n)}, \chi^2_{(n)}\} = \{\Pi^{0l}_{(n)}, -m^2B^{(n)}_{0i}\} = \frac{1}{2}m^2\delta^{li}\delta^3(x-z), \\ \{\chi^3_{(n)}, \chi^4_{(n)}\} = \{\Pi^{05}_{(n)}, -m^2B^{(n)}_{05}\} = \frac{1}{2}m^2\delta^3(x-z), \end{aligned} \tag{8.34}$$

por lo que la matriz formada por los corchetes de Poisson está dada por

$$\left(C^{\alpha\beta}_{(n)}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \delta^{il} & 0 & 0 \\ -\delta^{il} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2}m^2\delta^3(x-z),$$

y cuya inversa es

$$\left(C^{(n)}_{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{il} & 0 & 0 \\ \delta_{il} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{2}{m^2}\delta^3(x-z).$$

Entonces, los corchetes de Dirac distintos de cero para los modos excitados, por similitud con los resultados (7.22), son

$$\begin{aligned} \{B^{(n)}_{0i}(x), B^{(n)}_{pq}(z)\}_D &= \frac{2}{m^2}\int d^3ud^3v\{B^{(n)}_{0i}(x), \Pi^{0k}_{(n)}(u))\}[\delta_{kl}\delta^3(u-v)]\{2\partial_j\Pi^{lj}_{(n)}(v), B^{(n)}_{pq}(z)\} \\ &= \frac{1}{m^2}(\delta_{ip}\delta^j_q - \delta_{iq}\delta^j_p)\partial_j\delta^3(x-z), \end{aligned} \tag{8.35}$$

$$\begin{aligned} \{B^{(n)}_{0i}(x), \Pi^{0q}_{(n)}(z)\}_D &= \frac{1}{2}\delta^q_i\delta^3(x-z) - \frac{2}{m^2}\int d^3ud^3v \\ &\quad \times\{B^{(n)}_{0i}(x), \Pi^{0k}_{(n)}(u))\}[\delta_{kl}\delta^3(u-v)]\{-m^2B^{(n)}_{0l}(v), \Pi^{0q}(z)\} \\ &= \delta^q_i\delta^3(x-z) \end{aligned} \tag{8.36}$$

y además,

$$\begin{aligned}
\{B_{0i}^{(n)}(x), B_{q5}^{(n)}(z)\}_D &= \frac{2}{m^2}\int d^3u d^3v \{B_{0i}^{(n)}(x), \Pi_{(n)}^{0k}(u))\}[\delta_{kl}\delta^3(u-v)]\{\frac{n}{R}2\Pi^{l5}(v), B_{q5}(z)\} \\
&= -\frac{n}{Rm^2}\int d^3u d^3v \delta_{il}\delta^3(x-u)\delta^3(u-v)\delta^3(v-z)\delta_q^l \\
&= -\frac{n}{Rm^2}\delta_{iq}\delta^3(x-z),
\end{aligned} \tag{8.37}$$

$$\begin{aligned}
\{B_{05}^{(n)}(x), B_{5l}^{(n)}(z)\}_D &= \frac{2}{m^2}\int d^3u d^3v \{B_{05}^{(n)}(x), \Pi_{(n)}^{05}(u))\}\delta^3(u-v)\{2\partial_j\Pi_{(n)}^{5j}(v), B_{5l}^{(n)}(z)\} \\
&= -\frac{1}{m^2}\partial_l\delta^3(x-z).
\end{aligned} \tag{8.38}$$

con lo cual finaliza el análisis hamiltoniano. Nótese en estos últimos corchetes la presencia del término masivo extra (n/R), adquirido por $B_{\mu\nu}^{(n)}$ como consecuencia de la compactación. Finalmente, se menciona que los corchetes de Dirac anteriores son resultados nuevos, que pueden también consultarse en [34].

En resumen, la teoría de PKR 5D previamente estudiada es una teoría con restricciones de segunda clase solamente, y no reducibles. Esto la hace una teoría sin libertad de norma. Se mostró que el modo cero corresponde consistentemente a la teoría de PKR 4D, mas una torre de campos KK masivos. Se encontró que el campo masivo del modo cero $B_{\mu\nu}^{(0)}$ contribuye consistentemente con tres grados de libertad, mientras que los campos masivos KK contribuyen con seis; tres para $B_{\mu\nu}^{(n)}$ y tres para $B_{\mu 5}^{(n)}$. En esta teoría, no se encuentró la presencia de pseudo-bosones de Goldstone. Finalmente, se obtuvieron los corchetes de Dirac de la teoría.

Capítulo 9

La acción de Stüeckelberg Kalb-Ramond

Como se ha visto, la adición al lagrangiano de Maxwell de un término masivo dado por

$$L_P = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + m^2 A_\mu A^\nu,$$

que es la teoría de Proca, rompe con la invariancia de norma de la teoría. En la teoría de Maxwell, la libertad de norma permite imponer la condición de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$, mientras que en la teoría de Proca esta condición es una restricción. En la teoría de Maxwell, el fotón posee dos grados de libertad físicos, los cuales se obtienen de quitarle a A^μ una componente debido a la condición de Lorentz, y otra debido y a la invariancia de norma. En la teoría de Proca, sin embargo, el fotón es masivo y con *tres* grados de libertad, ya que a A^μ se le quita solo una componente debido a la restricción de Lorentz. El mecanismo mediante el cual una teoría sin libertad de norma como la de Proca la vuelve una teoría de norma a pesar de un término masivo se llama el *mecanismo de Stüeckelberg*, en honor a quien lo introdujo: Ernst C. G. Stüeckelberg (en 1938). El mecanismo de Stüeckelberg aplicado a la teoría de Proca consiste en la introducción de un campo escalar B tal que

$$L_S = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(mA_\mu + \partial_\mu B)(mA^\mu + \partial^\mu B).$$

La adición del campo B hace que la teoría de Proca sea ahora invariante de norma. En esta teoría de Stüeckelberg-Proca, a los cinco grados de libertad debido a los campos A^μ y B se les resta uno debido a la condición $\partial_\mu A^\mu + mB = 0$ obtenible de la libertad de norma, y otro debido a la invariancia de norma, de modo que A^μ describe un fotón *masivo* con *dos* grados de libertad (o un boson masivo de norma), quedando asignado el otro grado de libertad a B, y resultando una teoría de *norma masiva* con *tres* grados de libertad. Así, además de la predicción de bosones masivos de norma, la implementación del mecanismo de Stüeckelberg a una teoría sin libertad de norma (como la de Proca) tiene la característica de que el número de grados de libertad físicos de la teoría antes y despúes de su aplicación es el mismo.[1]

El estudio de lagrangianos de Stüeckelberg ha sido de importancia relevante en varios contextos de la física teórica. El acoplamiento de Stüeckelberg predice bosones masivos de norma en teoría de cuerdas y supergravedad [31]. También ha sido esencial para la formulación del compañero antisimétrico del gravitón [15]. Además, el mecanismo de Stüeckelberg proveé una forma alternativa para el mecanismo de Higgs; el mecanismo de Stüeckelberg archiva lo que es rompimiento espontáneo de simetría sin afectar la renormalización [32].

Debido a lo explicado anteriormente, en este capítulo se aplica el mecanismo de Stüeckelberg a la teoría de Proca Kalb-Ramond y se hace un anális hamiltoniano usando el formalismo de Dirac-Bergmann estricto. Este análisis estricto de la teoría constituye de hecho una *contribución* del presente trabajo, ya que este formalismo no se encuentra en la literatura (cf. [18]). Se muestra que la teoría de Stüeckelberg Kalb-Ramon es una *teoría de norma masiva* reducible con *tres* grados de libertad, que es el mismo número de grados de libertad para Proca Kalb-Ramond. Se muestra que el campo de norma masivo $B_{\mu\nu}$ contribuye con *un* grado de libertad, a diferencia de la teoría Proca Kalb-Ramond, en donde posee tres, mientras que el campo vectorial de Stüeckelberg Φ_μ contribuye con *dos*. Además, debido a que se tienen condiciones de reductibilidad, se expande el espacio fase y se calculan los corchetes de Dirac de la teoría.

9.1. La acción de Stüeckelberg Kalb-Ramond

El lagrangiano de Stüeckelberg Kalb-Ramond (SKR) está dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\times 3!} H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{4}(mB_{\mu\nu} - \Phi_{\mu\nu})(mB^{\mu\nu} - \Phi^{\mu\nu}), \tag{9.1}$$

en donde $H_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu B_{\nu\lambda} + \partial_\nu B_{\lambda\mu} + \partial_\lambda B_{\mu\nu}$ y $B_{\mu\nu}$ son la intensidad del campo y el campo de KR, y $\Phi_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu$, con Φ_μ el campo vectorial de Stüeckelberg. En adelante, se usa la métrica

[1] En el mecanismo de Stüeckelberg aplicado a la teoría de Proca, el campo escalar B ha absorbido la polarización lineal del fotón masivo A^μ, haciendo que este quede con dos grados de libertad. Esto lo hace físicamente distinto al mecanismo de Higgs, en donde los bosones de norma adquieren masa y un grado de libertad vía la absorción de pseudo-bosones de Goldstone. Para similitudes y diferencias, ver [30].

$g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$. Para mostrar que el lagrangiano (9.1) describe una teoría singular, así como el número de restricciones primarias que deben obtenerse, se obtiene la matriz Hessiana. Para la matriz Hessiana asociada con el campo Φ_μ, se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi_\alpha)} = \frac{1}{2} g^{\mu\beta} g^{\nu\gamma} (mB_{\beta\gamma} - \Phi_{\beta\gamma})(\delta^0_\mu \delta^\alpha_\nu - \delta^0_\nu \delta^\alpha_\mu) = \frac{1}{2}(g^{0\beta} g^{\alpha\gamma} - g^{\alpha\beta} g^{0\gamma})(mB_{\beta\gamma} - \Phi_{\beta\gamma}), \tag{9.2}$$

luego,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi_\rho)\partial(\partial_0 \Phi_\alpha)} = -\frac{1}{2}(g^{0\beta} g^{\alpha\gamma} - g^{\alpha\beta} g^{0\gamma})(\delta^0_\beta \delta^\rho_\gamma - \delta^0_\gamma \delta^\rho_\beta) = (g^{0\rho} g^{\alpha 0} - g^{\alpha\rho}) \equiv W^{\rho\alpha}. \tag{9.3}$$

Para la matriz Hessiana asociada con $B_{\mu\nu}$, por similitud con los resultados (5.2) y (5.3), se tienen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 B_{\alpha\beta})} = \frac{1}{2} H^{0\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} H_{0\gamma\delta}, \tag{9.4}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 B_{\lambda\rho})\partial(\partial_0 B_{\alpha\beta})} = \frac{1}{4}(g^{\alpha\lambda} g^{\beta\rho} - g^{\alpha\rho} g^{\beta\lambda}) \equiv W'^{\alpha\beta\lambda\rho}. \tag{9.5}$$

La inspección de (9.3) lleva a que las entradas distintas de cero de $(W^{\rho\alpha})$ son 3 (aquellas con $\alpha, \rho \neq 0$), lo que implica que su nulidad es $4-3=1$ (son 4 las componentes independientes de Φ_μ). De la misma manera, (9.5) lleva a que las entradas distintas de cero de $(W^{\alpha\beta\lambda\rho})$ son 3 (aquellas con $\alpha, \beta \neq 0$), lo que implica que su nulidad es $6-3=3$ (6, son las componetes independientes de $B_{\mu\nu}$). Esto muestra que la matriz Hessiana total tiene determinante cero, por lo que la teoría descrita por (9.1) es singular, y además, que hay 4 restricciones primarias independientes que uno debe obtener.

9.2. Restricciones primarias y secundarias

De la expresión (9.2) que da los momentos canónicos, se obtienen las restricciones primarias; es decir, de (9.2) se tiene que

$$\Pi^\mu = (mB^{0\mu} - \Phi^{0\mu}) \tag{9.6}$$

$$\Rightarrow \quad \Pi^i = (mB^{0i} - \Phi^{0i}), \quad \Pi^0 = 0 \tag{9.7}$$

$$\Rightarrow \quad \phi^0 \equiv \Pi^0 \approx 0, \tag{9.8}$$

y de las expresiones (9.4), que

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{1}{2} H^{0\mu\nu}, \tag{9.9}$$

$$\Rightarrow \quad \Pi^{ij} = \frac{1}{2} H^{0ij}, \quad \Pi^{0i} = 0 \tag{9.10}$$

$$\Rightarrow \quad \phi^{0i} \equiv \Pi^{0i} \approx 0, \tag{9.11}$$

siendo, en efecto, 4 restricciones primarias. Para obtener las restricciones secundarias aplicando la condición de consistencia a las restricciones primarias, se requiere el hamiltoniano asociado con el lagrangiano (9.1). Con este fin, considerando que

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{4}H_{0ij}H^{0ij} + \frac{1}{2\times 3!}H_{ijk}H^{ijk} - \frac{1}{2}(mB_{0i} - \Phi_{0i})(mB^{0i} - \Phi^{0i}) \\ &\quad -\frac{1}{4}(mB_{ij} - \Phi_{ij})(mB^{ij} - \Phi^{ij}),\end{aligned} \tag{9.12}$$

el hamiltoniano asociado está dado por

$$\begin{aligned}H_c &= \int d^3x\Big[\dot{\Phi}_\mu\Pi^\mu + \dot{B}_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} - \mathcal{L}\Big] \\ &= \int d^3x\Big[(mB_{0i} - \Pi_i)\Pi^i - \Phi_0\partial_i\Pi^i + 2\Pi_{ij}\Pi^{ij} + 2B_{j0}\partial_i\Pi^{ij} - \Big(\Pi_{ij}\Pi^{ij} + \frac{1}{2\times 3!}H_{ijk}H^{ijk} \\ &\quad -\frac{1}{2}\Pi_i\Pi^i - \frac{1}{4}(mB_{ij} - \Phi_{ij})(mB^{ij} - \Phi^{ij})\Big)\Big] \\ &= \int d^3x\Big[B_{0i}(m\Pi^i + 2\partial_j\Pi^{ij}) - \Phi_0\partial_i\Pi^i - \frac{1}{2}\Pi_i\Pi^i + \Pi_{ij}\Pi^{ij} - \frac{1}{2\times 3!}H_{ijk}H^{ijk} \\ &\quad +\frac{1}{4}(mB_{ij} - \Phi_{ij})(mB^{ij} - \Phi^{ij})\Big]\end{aligned} \tag{9.13}$$

Entonces, definiendo el hamiltoniano primario

$$H_1 = H_c + \int d^3x[a_0\phi^0 + a_{0i}\phi^{0i}], \tag{9.14}$$

en donde a_0 , a_{0i} son los multiplicadores de Lagrange que fuerzan las restricciones primarias, y usando los corchetes de Poisson fundamentales

$$\{\Phi_\nu(x), \Pi^\mu(y)\} = \delta^\mu_\nu\delta^3(x-y), \quad \{B_{\alpha\beta}(x), \Pi^{\mu\nu}(y)\} = \frac{1}{2}(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha)\delta^3(x-y) \tag{9.15}$$

(tomadas a un mismo tiempo), se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{\phi}^0(x) = \{\phi^0(x), H_1(y)\} &= \int d^3y\{\Pi^0(x), -[\Phi_0\partial_i\Pi^i](y)\} = \partial_i\Pi^i(x) \\ \Rightarrow \quad \psi^0 &\equiv \partial_i\Pi^i \approx 0,\end{aligned} \tag{9.16}$$

$$\begin{aligned}\dot{\phi}^{0i}(x) = \{\phi^{0i}(x), H_1(y)\} &= \int d^3y\{\Pi^{0i}(x), [B_{0k}(m\Pi^k + 2\partial_j\Pi^{kj})](y)\} \\ &= -\frac{1}{2}[m\Pi^i + 2\partial_j\Pi^{ij}](x) \\ \Rightarrow \quad \psi^{0i} &\equiv m\Pi^i + 2\partial_j\Pi^{ij} \approx 0,\end{aligned} \tag{9.17}$$

siendo 4 restriciones secundarias. Para hallar las posibles restricciones terciarias, se define el hamiltoniano secundario

$$H_2 = H_c + \int d^3x\Big[a_0\phi^0 + a_{0i}\phi^{0i} + b_0\psi^0 + b_{0i}\psi^{0i}\Big]. \tag{9.18}$$

en donde b_0 , b_{0i} son los multiplicadores de Lagrange que fuerzan las restricciones secundarias. Entonces, aplicando la relación de consistencia a las restricciones secundarias se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{\psi}^0(x) &= \{\psi^0(x), H_2(y)\} \\ &= \int d^3y\{\partial_k\Pi^k(x), \frac{1}{4}[(mB_{ij}-\Phi_{ij})(mB^{ij}-\Phi^{ij})](y)\} \\ &= \frac{1}{2}\int d^3y\Big[[mB^{ij}-\Phi^{ij}](y)\Big(\partial_j\partial_i\delta^3(x-y)-\partial_i\partial_j\delta^3(x-y)\Big)\Big] = 0, \end{aligned} \tag{9.19}$$

$$\begin{aligned}\dot{\psi}^{0l}(x) &= \{\psi^{0l}(x), H_2(y)\} \\ &= \int d^3y\{m\Pi^l(x), \frac{1}{4}[(mB_{ij}-\Phi_{ij})(mB^{ij}-\Phi^{ij})](y)\} + \\ &\int d^3y\Big[\{2\partial_k\Pi^{lk}(x), [-\frac{1}{2\times 3!}H_{ijk}H^{ijk}+\frac{1}{4}(mB_{ij}-\Phi_{ij})(mB^{ij}-\Phi^{ij})](y)\}\Big]. \end{aligned} \tag{9.20}$$

Calculando separadamente estas integrales, se tiene que

$$\begin{aligned}&\int d^3y\{m\Pi^l(x), \frac{1}{4}[(mB_{ij}-\Phi_{ij})(mB^{ij}-\Phi^{ij})](y)\} \\ &= \frac{m^2}{2}\int d^3y[B^{ij}-\Phi^{ij}](y)\Big(\delta^l_j\partial_i\delta^3(x-y)-\delta^l_i\partial_j\delta^3(x-y)\Big) \\ &= m^2\int d^3y(B^{il}-\Phi^{il})(y)\partial_i\delta^3(y-x) = -m^2[\partial_iB^{il}-\partial_i\Phi^{il}](x), \end{aligned} \tag{9.21}$$

y por otro lado, por similitud con el resultado (5.13), que

$$\int d^3y\{2\partial_n\Pi^{ln}(x), -\frac{1}{2\times 3!}[H_{ijk}H^{ijk}](y)\} = 0, \tag{9.22}$$

y además,

$$\begin{aligned}&\int d^3y\{2\partial_k\Pi^{lk}(x), \frac{1}{4}[(mB_{ij}-\Phi_{ij})(mB^{ij}-\Phi^{ij})](y)\} \\ &= -m^2\int d^3y[B^{lk}-\Phi^{lk}](y)\partial_k\delta^3(x-y) = m^2[\partial_kB^{kl}-\partial_k\Phi^{kl}](x), \end{aligned} \tag{9.23}$$

por lo que

$$\dot{\psi}^{0i}(x) = 0, \tag{9.24}$$

de modo que la teoría no presenta restricciones terciarias. Las restricciones encontradas,

$$\phi^0 \equiv \Pi^0 \approx 0, \quad \phi^{0i} \equiv \Pi^{0i} \approx 0, \quad \psi^0 \equiv \partial_i\Pi^i \approx 0, \quad \psi^{0i} \equiv m\Pi^i + 2\partial_j\Pi^{ij} \approx 0, \tag{9.25}$$

es fácil ver que son de primera clase, ya que en ellas solo aparecen los momentos canónicos (i.e., su corchete de Poisson es cero). Estas, sin embargo, son reducibles o dependientes, ya que se cumple

$$\partial_i\psi^{0i} - m\psi^0 = 0, \tag{9.26}$$

de modo que las restricciones (9.25) describen un sistema reducible.

9.3. Grados de libertad

Habiendo encontrado las restricciones de la teoría y las relaciones de reductibilidad, pueden contarse los grados de libertad físicos como sigue:

Se tiene un total de $2(4+6)$ variables dinámicas (4 por parte de Φ_μ y 6 por parte de $B_{\mu\nu}$), y 7 restricciones de primera clase independientes.

Entonces, los grados de libertad físicos para la teoría de SKR son

$$GL = \frac{1}{2}[2(10) - 2(7)] = \mathbf{3}, \tag{9.27}$$

los cuales son *los mismos* que en la teoría PKR. Aquí, nótese que un grado de libertad es debido al término KR en el lagrangiano (9.1), mientras que los demás son debidos a Φ_μ. Así, $B_{\mu\nu}$ contribuye con *un* grado de libertad y Φ_μ con *dos*. (Esto es similar a la teoría de Stüeckelberg-Proca mencionada al inicio.)

9.4. Las transformaciones de norma

Las restricciones de primera clase son generadoras de transformaciones de norma, y el generador está dado por

$$\mathcal{G} \;=\; \int dx^3 \Big[\epsilon_0 \phi^0 + \epsilon_{0i}\phi^{0i} - \epsilon\psi^0 + \epsilon_i \psi^{0i} \Big], \tag{9.28}$$

siendo las ϵ's los parámetros de las correspondientes transformaciones. Para los campos Φ_0 y Φ_i, se tiene que

$$\delta\Phi_0(x) \;=\; \int d^3y \{\Phi_0(x), [\epsilon_0 \Pi^0](y)\} = \epsilon_0(x) \equiv \dot{\epsilon}(x), \tag{9.29}$$

$$\begin{aligned} \delta\Phi_i(x) \;&=\; \int d^3y \{\Phi_i(x), [-\epsilon\partial_j \Pi^j + m\epsilon_k \Pi^k](y)\} \\ &=\; \int d^3y \epsilon(y) \partial_j \delta^3(x-y)\delta_i^j + m\delta_i^k \epsilon_k(x) = \partial_i \epsilon(x) + m\epsilon_i(x), \end{aligned} \tag{9.30}$$

mientras que para B_{0i} y B_{ij}, por similitud con los resultados (5.16) y (5.17), que

$$\delta B_{0i}(x) = \frac{1}{2}\epsilon_{0i}(x) \equiv \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_i(x), \quad \delta B_{kl}(x) = \partial_k \epsilon_l(x) - \partial_l \epsilon_k(x);$$

es decir, se tienen las transformaciones de norma

$$\delta\Phi_0 = \partial_0\epsilon, \quad \delta\Phi_i = \partial_i\epsilon + m\epsilon_i, \quad \delta B_{0i} = \frac{1}{2}\partial_0\epsilon_i, \quad \delta B_{ij} = \partial_i\epsilon_j - \partial_j\epsilon_i, \tag{9.31}$$

las cuales pueden escribirse en forma compacta como

$$\delta\Phi_\mu = \partial_\mu \epsilon + m\epsilon_\mu, \quad \delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu, \tag{9.32}$$

con $\epsilon_0 = 0$.

9.5. Los corchetes de Dirac

Para obtener los corchetes de Dirac, debe obtenerse un conjunto de restricciones de segunda clase irreducibles a partir de las de primera clase fijando la norma. Además, debido a que las restricciones de primera clase no son independientes se expande el espacio fase mediante la introducción de campos auxiliares. Haciendo lo anterior, uno obtienen las restricciones de segunda clase irreducibles

$$\begin{aligned}
&\chi^1 \equiv \Pi^0, \quad \chi^2 \equiv \Phi_0, \qquad \chi^3 \equiv \Pi^{0i}, \quad \chi^4 \equiv B_{0i}, \qquad \chi^5 \equiv \partial_i \Pi^i, \quad \chi^6 \equiv \partial^i \Phi_i, \\
&\chi^7 \equiv m\Pi^i + 2\partial_j \Pi^{ij} - \partial^i p, \quad \chi^8 \equiv \partial^j B_{ij} + \partial_i q,
\end{aligned} \tag{9.33}$$

con q, p campos auxiliares cumpliendo

$$\{q(x), p(y)\} = \delta^3(x-y). \tag{9.34}$$

Los corchetes de Poisson distintos de cero entre estas restricciones son

$$\begin{aligned}
\{\chi^1(x), \chi^2(y)\} &= \{\Pi^0(x), \Phi_0(y)\} = -\delta^3(x-y), \\
\{\chi^3(x), \chi^4(y)\} &= \{\Pi^{0i}(x), B_{0j}(y)\} = -\frac{1}{2}\delta^i_j \delta^3(x-y), \\
\{\chi^5(x), \chi^6(y)\} &= \{\partial_i \Pi^i(x), \partial^j \Phi_j(y)\} = -\partial_i \partial^i \delta^3(x-y), \\
\{\chi^6(x), \chi^7(y)\} &= \{\partial^j \Phi_j(x), m\Pi^i(y)\} = m\partial^i \delta^3(x-y), \\
\{\chi^7(x), \chi^8(y)\} &= \{2\partial_j \Pi^{ij}(x), \partial^l B_{kl}(y)\} - \{\partial^i p(x), \partial_k q(y)\} = -\delta^i_k \partial_j \partial^j \delta^3(x-y),
\end{aligned} \tag{9.35}$$

obteniéndose entonces la matriz

$$\left(C^{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\delta^i_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2}\delta^i_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nabla^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \nabla^2 & 0 & m\partial^i & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m\partial^i & 0 & -\delta^i_j \nabla^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^i_j \nabla^2 & 0
\end{pmatrix} \delta^3(x-y),$$

y cuya inversa es

$$
(C_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\nabla^2} & 0 & -\frac{m\partial^j}{(\nabla^2)^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_i^j}{\nabla^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m\partial^j}{(\nabla^2)^2} & 0 & \frac{\delta_i^j}{\nabla^2} & 0
\end{pmatrix} \delta^3(x-y).
$$

Entonces, los corchetes de Dirac diferentes de cero son

$$
\begin{aligned}
\{\Phi_i(x), \Pi^j(y)\}_D &= \delta_i^j \delta^3(x-y) \\
&\quad - \int d^3u d^3v \Big[\{\Phi_i(x), \partial_k \Pi^k(u)\}\}[\frac{1}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial^l \Phi_l(v), \Pi^j(y)\}\Big] \\
&= \delta_i^j \delta^3(x-y) - \int d^3u d^3v \Big[\delta_i^k \partial_k \delta^3(x-u)\frac{1}{\nabla^2}\delta^3(u-v)\partial^l\delta^3(v-y)\delta_l^j\Big] \\
&= \delta_i^j \delta^3(x-y) + \frac{1}{\nabla^2}\delta_l^j \delta_i^k \partial_k \partial^l \delta^3(x-y) \\
&= [\delta_i^j + \frac{1}{\nabla^2}\partial_i\partial^j]\delta^3(x-y),
\end{aligned} \tag{9.36}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\Phi_i(x), \Pi^{jk}(y)\}_D &= -\int d^3u d^3v \Big[\{\Phi_i(x), \partial_l \Pi^l(u)\}\}[-\frac{m\partial^q}{(\nabla^2)^2}\delta^3(u-v)]\{\partial^p B_{qp}(v), \Pi^{jk}(y)\}\Big] \\
&\quad - \int d^3u d^3v \Big[\{\Phi_i(x), m\Pi^l(u)\}\}[\frac{\delta_l^q}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial^p B_{qp}(v), \Pi^{jk}(y)\}\Big] \\
&= \frac{m}{2}\int d^3u d^3v \Big[\partial_i \delta^3(x-u)\frac{1}{(\nabla^2)^2}\partial^q\delta^3(u-v)\partial^p\delta^3(v-y)(\delta_q^j\delta_p^k - \delta_q^k\delta_p^j)\Big] \\
&\quad - \int d^3u d^3v \Big[m\delta_i^l\delta^3(x-u)\frac{\delta_l^q}{\nabla^2}\delta^3(u-v)\frac{1}{2}(\delta_q^j\delta_p^k - \delta_q^k\delta_p^j)\partial^p\delta^3(v-y)\Big] \\
&= \frac{m}{2}\int d^3u d^3v \Big[\partial_i\delta^3(x-u)\frac{1}{(\nabla^2)^2}\Big(\partial^j\delta^3(u-v)\partial^k\delta^3(v-y) \\
&\quad -\partial^k\delta^3(u-v)\partial^j\delta^3(v-y)\Big)\Big] - m\delta_i^l\frac{\delta_l^q}{2\nabla^2}[\delta_q^j\delta_p^k - \delta_q^k\delta_p^j]\partial^p\delta^3(x-y) \\
&= \frac{m}{2\nabla^2}[\delta_i^k\partial^j - \delta_i^j\partial^k]\delta^3(x-y),
\end{aligned} \tag{9.37}
$$

y por similitud con los resultados (5.22),

$$
\begin{aligned}
\{B_{ij}(x), \Pi^{kl}(y)\}_D &= \frac{1}{2}(\delta_i^k\delta_j^l - \delta_i^l\delta_j^k)\delta^3(x-y) \\
&\quad - \int d^3u d^3v \{B_{ij}(x), 2\partial_m \Pi^{rm}(u)\}\}[\frac{\delta_r^p}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial^q B_{pq}(v), \Pi^{kl}(y)\} \\
&= \frac{1}{2}[\delta_i^k\delta_j^l - \delta_i^l\delta_j^k + \frac{1}{\nabla^2}(\delta_i^k\partial_j\partial^l - \delta_i^l\partial_j\partial^k - \delta_j^k\partial_i\partial^l + \delta_j^l\partial_i\partial^k)]\delta^3(x-y)
\end{aligned} \tag{9.38}
$$

Además, los corchetes de Dirac no triviales entre q y p con los campos, son

$$\begin{aligned}
\{\Phi_i(x), p(y)\}_D &= -\int d^3u d^3v \Big[\{\Phi_i(x), \partial_l \Pi^l(u))\}[\frac{-m\partial^k}{(\nabla^2)^2}\delta^3(u-v)]\{\partial_k q(v), p(y)\}\Big] \\
&\quad -\int d^3u d^3v \Big[\{\Phi_i(x), m\Pi^l(u))\}[\frac{\delta_l^k}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial_k q(v), p(y)\}\Big] \\
&= m\int d^3u d^3v \Big[\partial_i \delta^3(x-u)\frac{1}{(\nabla^2)^2}\partial^k \delta^3(u-v)\partial_k \delta^3(v-y)\Big] \\
&\quad -m\int d^3u d^3v \Big[\delta_i^l \delta^3(x-u)\frac{\delta_l^k}{\nabla^2}\delta^3(u-v)\partial_k \delta^3(v-y)\Big] \\
&= \frac{m}{\nabla^2}\partial_i \delta^3(x-y) - \frac{m}{\nabla^2}\partial_i \delta^3(x-y) = 0, \qquad (9.39)
\end{aligned}$$

y por similitud con los resultados (5.23)-(5.25),

$$\begin{aligned}
\{q(x), p(y)\}_D &= \delta^3(x-y) - \int d^3u d^3v \Big[\{q(x), -\partial^i p(u))\}[\frac{\delta_i^j}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial_j q(v), p(y)\}\Big] \\
&= \delta^3(x-y) - \frac{1}{\nabla^2}\partial^i \partial_i \delta^3(x-y) = 0, \qquad (9.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{q(x), \Pi^{ij}(y)\}_D &= -\int d^3u d^3v \Big[\{q(x), -\partial^k p(u))\}[\frac{\delta_k^l}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial^m B_{lm}(v), \Pi^{ij}(y)\}\Big] \\
&= \frac{1}{2\nabla^2}[\partial^i \partial^j - \partial^j \partial^i]\delta^3(x-y) = 0, \qquad (9.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{B_{kl}(x), p(y)\}_D &= -\int d^3u d^3v \{B_{kl}(x), 2\partial_n \Pi^{mn}(u))\}[\frac{\delta_m^i}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial_i q(v), p(y)\} \\
&= \frac{1}{\nabla^2}[\partial_l \partial_k - \partial_k \partial_l]\delta^3(x-y) = 0, \qquad (9.42)
\end{aligned}$$

y trivialmente,

$$\begin{aligned}
&\{q(x), \Phi_i(y)\}_D = 0, \quad \{q(x), B_{ij}(y)\}_D = 0, \quad \{q(x), \Pi_i(y)\}_D = 0, \\
&\{\Pi_i(x), p(y),\}_D = 0, \quad \{\Pi_{ij}(x), p(y),\}_D = 0, \qquad (9.43)
\end{aligned}$$

lo que muestra la *independencia* de los campos q y p del corchete de Dirac, condición que es necesaria, ya que como campos auxiliares no deben contribuir con resultados en la teoría. Con esto se concluye el análisis hamiltoniano.

En resumen, se ha mostrado que la teoría de SKR es una teoría de norma masiva reducible con tres grados de libertad, que es el mismo número de grados de libertad que en PKR. Se mostró que el campo de norma masivo $B_{\mu\nu}$ contribuye con un grado de libertad, a diferencia de la teoría de PKR, en donde este posee tres, y que el campo vectorial de Stüeckelberg Φ_μ contribuye con dos. Además, debido a que se tienen condiciones de reductibilidad, se usó el proceso de expansión del espacio fase y se calcularon los corchetes de Dirac de la teoría.

Capítulo 10

La acción de Stüeckelberg Kalb-Ramond en 5 dimensiones

Se ha visto que la teoría Proca Kalb-Ramond 5D no es una teoría de norma, y que el modo cero corresponde consistentemente a la teoría Proca Kalb-Ramond 4D mas una torre de campos KK masivos. Se vió que el modo cero $B^{(0)}_{\mu\nu}$ contribuye consistentemente con tres grados de libertad, mientras que los modos KK contribuyen con seis; tres debidos a $B^{(n)}_{\mu\nu}$ y tres debidos a $B^{(n)}_{\mu 5}$. Ahora se aplica el mecanismo de Stüeckelberg a la teoría Proca Kalb-Ramond 5D y se hace un anális hamiltoniano usando el formalismo de Dirac-Bergmann estricto. Este análisis estricto de la teoría constituye una *contribución* de este trabajo, ya que este formalismo no se encuentra en la literatura. En este capítulo se encuentra, después de compactar la quinta dimensión sobre un orbifold $S^1/\mathbf{Z_2}$, que la teoría efectiva de Stüeckelberg Kalb-Ramond es una *teoría de norma reducible* cuyo modo cero corresponde consistentemente a la teoría Stüeckelberg Kalb-Ramond 4D, mas una torre de campos masivos KK. Se muestra que el modo cero contribuye consistentemente con *tres* grados de libertad (igual que en PKR 4D); uno debido a $B^{(0)}_{\mu\nu}$ y dos debidos a $\Phi^{(0)}_{\mu}$, mientras que los modos KK contribuyen con *seis* (igual que en PKR 5D); tres debidos a $B^{(n)}_{\mu\nu}$ y tres debidos a $\Phi^{(n)}_{\mu}$, habiéndose absorbido los campos con características de pseudo-bosones de Goldstone $B^{(n)}_{\mu 5}$ y $\Phi^{(n)}_{5}$. Además, debido a que hay condiciones de reductibilidad en el modo cero y en los modos excitados, se extiende el espacio fase para obtener los corchetes de Dirac de la teoría. Los resultados correspondientes a este capítulo son una aportación que también puede consultarse en [34].

10.1. El lagrangiano efectivo

La notación que se usará es la siguiente: Índices latinos mayúsculos M, N toman los valores $0, 1, 2, 3, 5$, con 5 etiquetando la dimensión extra compacta, bajándose o subiéndose con la métrica plana $\eta = (1, -1, -1, -1, -1)$; y representa la coordenada en la dimensión compacta; los índices griegos μ, ν toman los valores $0, 1, 2, 3$, y x^μ denotan las coordenadas etiquetando puntos de la variedad cuadridimensional M_4. Considérese entonces el lagrangiano de Stüeckelberg Kalb-Ramond 5D (SKR 5D),

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2 \times 3!} H_{MNL} H^{MNL} - \frac{1}{4}(mB_{MN} - \Phi_{MN})(mB^{MN} - \Phi^{MN}), \tag{10.1}$$

en donde $H_{MNL} = \partial_M B_{NL} + \partial_N B_{LM} + \partial_L B_{MN}$ y $\Phi_{MN} = \partial_M \Phi_N - \partial_N \Phi_M$ son las intensidades de campo de Kalb-Ramond y Stüeckelberg 5D, y B_{MN} y Φ_N los campos de Kalb-Ramond y de Stüeckelberg 5D. La compactificación de la quinta dimensión sobre un orbifold $S^1/\mathbf{Z_2}$ impone sobre los campos Φ_N y B_{MN} las condiciones de paridad y periodicidad

$$\begin{aligned}
\Phi_M(x, y) &= \phi_M(x, y + 2\pi R), \\
\Phi_\mu(x, -y) &= \phi_\mu(x, y), \\
\Phi_5(x, -y) &= -\phi_5(x, y), \\
B_{MN}(x, y) &= B_{MN}(x, y + 2\pi R), \\
B_{\mu\nu}(x, -y) &= B_{\mu\nu}(x, y), \\
B_{\mu 5}(x, -y) &= -B_{\mu 5}(x, y).
\end{aligned}$$

Estas condiciones permiten expresar los campos Φ_N y B_{MN} como el conjunto de armónicos sobre $M_4 \times S^1/\mathbf{Z_2}$,

$$\begin{aligned}
\Phi_\mu(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \Phi_\mu^{(0)}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_\mu^{(n)}(x) \cos\left(\frac{ny}{R}\right), \\
\Phi_5(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_\mu^{(n)}(x) \sin\left(\frac{ny}{R}\right), \\
B_{\mu\nu}(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} B_{\mu\nu}^{(0)}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} B_{\mu\nu}^{(n)}(x) \cos\left(\frac{ny}{R}\right), \\
B_{\mu 5}(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} B_{\mu 5}^{(n)}(x) \sin\left(\frac{ny}{R}\right),
\end{aligned} \tag{10.2}$$

siendo $\Phi_\mu^{(n)}$, $B_{\mu\nu}^{(n)}$, $B_{\mu 5}^{(n)}$ los modos de Kaluza-Klein (KK) dependientes solo de las coordenadas del espaciotiempo cuadridimensional. Expresando el lagrangiano (10.1) como

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2\times 3!}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda}+\frac{1}{4}H_{5\mu\nu}H^{5\mu\nu}-\frac{1}{4}(mB_{\mu\nu}-\Phi_{\mu\nu})(mB^{\mu\nu}-\Phi^{\mu\nu})\\ &\quad -\frac{1}{2}(mB_{\mu 5}-\Phi_{\mu 5})(mB^{\mu 5}-\Phi^{\mu 5}),\end{aligned} \tag{10.3}$$

sustituyendo las series (10.2) en (10.1) e integrando sobre la quinta dimensión y de 0 a $2\pi R$, se obtiene el lagrangiano efectivo (cuadridimensional)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_e &= \frac{1}{2\times 3!}H^{(0)}_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda}_{(0)}-\frac{1}{4}(mB^{(0)}_{\mu\nu}-\Phi^{(0)}_{\mu\nu})(mB^{\mu\nu}_{(0)}-\Phi^{\mu\nu}_{(0)})\\ &\quad +\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\frac{1}{2\times 3!}H^{(n)}_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda}_{(n)}-\frac{1}{4}(mB^{(n)}_{\mu\nu}-\Phi^{(n)}_{\mu\nu})(mB^{\mu\nu}_{(n)}-\Phi^{\mu\nu}_{(n)})\\ &\quad -\frac{1}{2}\Big(mB^{(n)}_{\mu 5}-\partial_\mu\Phi^{(n)}_5-\frac{n}{R}\Phi^{(n)}_\mu\Big)\Big(mB^{\mu 5}_{(n)}-\partial^\mu\Phi^5_{(n)}-\frac{n}{R}\Phi^\mu_{(n)}\Big)\\ &\quad +\frac{1}{4}\Big(\partial_\mu B^{(n)}_{\nu 5}+\partial_\nu B^{(n)}_{5\mu}-\frac{n}{R}B^{(n)}_{\mu\nu}\Big)\Big(\partial^\mu B^{\nu 5}_{(n)}+\partial^\nu B^{5\mu}_{(n)}-\frac{n}{R}B^{\mu\nu}_{(n)}\Big)\Bigg],\end{aligned} \tag{10.4}$$

con $H^{(0)}_{\mu\nu\lambda}$, $H^{(n)}_{\mu\nu\lambda}$, $\Phi^{(0)}_{\mu\nu}$ y $\Phi^{(n)}_{\mu\nu}$ definidos de manera similar que en (5.1). Nótese que el modo cero corresponde consistentemente a la teoría SKR 4D, y que los modos KK están compuestos de un término tipo SKR 4D, mas un término que acopla $\Phi^{(n)}_\mu$ con $B^{(n)}_{\mu 5}$ y $\Phi^{(n)}_5$, y otro que acopla $B^{(n)}_{\mu\nu}$ con $B^{(n)}_{\mu 5}$. Nótese también que $B^{(n)}_{\mu\nu}$ y $\Phi^{(n)}_\mu$ tienen, respectivamente, masas $m_n^2 = m^2+(n/R)^2$ y $m'_n = (n/R)$ debido a la compactación, y que $B^{(n)}_{\mu 5}$ tiene masa m, mientras que $\Phi^{(n)}_5$ es no masivo. En adelante, a fin de hacer más claro el anális de los resultados, se trunca la torre de exitaciones KK hasta un número finito k, pudiéndose tomar el límite $k\to\infty$ al final de de cálculos, de modo que $n = 1, 2, 3, ..., k-1$. El lagrangiano efectivo (10.4) es un resultado que no se hallaba antes en la literatura, y que ahora puede consultarse en [34].

Para mostrar que la teoría descrita por (10.4) es singular, así como saber el número de restricciones primarias independientes que uno deberá obtener, se obtiene la matriz Hessiana de la teoría. A saber, para la matriz Hessiana asociada con $\Phi^{(0)}_\mu$, por similitud con (9.2) y (9.3), se tiene que

$$\frac{\partial\mathcal{L}_e}{\partial(\partial_0\Phi^{(0)}_\alpha)} = \frac{1}{2}(g^{0\beta}g^{\alpha\gamma}-g^{\alpha\beta}g^{0\gamma})(mB^{(0)}_{\beta\gamma}-\Phi^{(0)}_{\beta\gamma}), \tag{10.5}$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}_e}{\partial(\partial_0\Phi^{(0)}_\rho)\partial(\partial_0\Phi^{(0)}_\alpha)} = (g^{0\rho}g^{\alpha 0}-g^{\alpha\rho}) \equiv W^{\rho\alpha}_{(0)}. \tag{10.6}$$

Para la matriz Hessiana a sociada con $B^{(0)}_{\mu\nu}$, por similitud con (5.2) y (5.3), se tiene

$$\frac{\partial\mathcal{L}_e}{\partial(\partial_0 B^{(0)}_{\alpha\beta})} = \frac{1}{2}H^{0\alpha\beta}_{(0)} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}H^{(0)}_{0\gamma\delta}, \tag{10.7}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_e}{\partial(\partial_0 B^{(0)}_{\lambda\rho})\partial(\partial_0 B^{(0)}_{\alpha\beta})} = \frac{1}{4} g^{\alpha i} g^{\beta j}(\delta^\lambda_i \delta^\rho_j - \delta^\lambda_j \delta^\rho_i) = \frac{1}{4}(g^{\alpha\lambda} g^{\beta\rho} - g^{\alpha\rho} g^{\beta\lambda}) \equiv W^{\alpha\beta\lambda\rho}_{(0)}. \tag{10.8}$$

Ahora, para obtener la matriz Hessiana asociada con $\phi^{(n)}_L$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial(\partial_0 \Phi^{(l)}_L)} &= -\frac{1}{2}(mB^{\mu\nu}_{(l)} - \Phi^{\mu\nu}_{(l)})\delta^L_\alpha \frac{\partial}{\partial(\partial_0 \Phi^{(l)}_\alpha)}(mB^{(l)}_{\mu\nu} - \Phi^{(l)}_{\mu\nu}) \\ &\quad -\Big(mB^{\mu 5}_{(l)} - \partial^\mu \Phi^5_{(l)} - \frac{l}{R}\Phi^\mu_{(n)}\Big)\delta^0_\alpha \delta^L_5 \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha \Phi^{(l)}_5)}\Big(mB^{(l)}_{\mu 5} - \partial_\mu \Phi^{(l)}_5 - \frac{l}{R}\Phi^{(l)}_\mu\Big) \\ &= \frac{1}{2}\delta^L_\alpha g^{\mu\beta} g^{\nu\gamma}(mB^{(l)}_{\beta\gamma} - \Phi^{(l)}_{\beta\gamma})(\delta^0_\mu \delta^\alpha_\nu - \delta^0_\nu \delta^\alpha_\mu) + \delta^0_\alpha \delta^L_5\Big(mB^{\alpha 5}_{(l)} - \partial^\alpha \Phi^5_{(l)} - \frac{l}{R}\Phi^\alpha_{(n)}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\delta^L_\alpha(g^{0\beta} g^{\alpha\gamma} - g^{\alpha\beta} g^{0\gamma})(mB^{(l)}_{\beta\gamma} - \Phi^{(l)}_{\beta\gamma}) - \delta^0_\alpha \delta^L_5 g^{\alpha\mu}\Big(mB^{(l)}_{\mu 5} - \partial_\mu \Phi^{(l)}_5 + \frac{l}{R}\Phi^{(l)}_\mu\Big), \end{aligned} \tag{10.9}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_e}{\partial(\partial_0 \Phi^{(l)}_M)\partial(\partial_0 \Phi^{(l)}_L)} &= -\frac{1}{2}\delta^L_\alpha(g^{0\beta} g^{\alpha\gamma} - g^{\alpha\beta} g^{0\gamma})(\delta^0_\beta \delta^M_\gamma - \delta^0_\gamma \delta^M_\beta) + \delta^0_\alpha \delta^L_5 g^{\alpha\mu} \delta^0_\mu \delta^M_5 \\ &= \delta^L_\alpha(g^{\alpha M} - g^{\alpha 0} g^{0M}) + \delta^L_5 \delta^M_5 = (g^{L0} g^{0M} - g^{LM}) + \delta^M_5 \delta^L_5 \equiv W^{ML}_{(n)}. \end{aligned} \tag{10.10}$$

Por último, para la matriz Hessiana asociada con $B^{(l)}_{LH}$, usando los resultados (6.7) y (6.8),

$$\frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial(\partial_0 B^{(h)}_{LH})} = \frac{1}{2}\delta^L_\alpha \delta^H_\beta H^{0\alpha\beta}_{(h)} + \frac{1}{2}\delta^L_\alpha \delta^H_5\Big(\partial^0 B^{\alpha 5}_{(h)} + \partial^\alpha B^{50}_{(h)} - \frac{h}{R}B^{0\alpha}_{(h)}\Big), \tag{10.11}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_e}{\partial(\partial_0 B^{(m)}_{KM})\partial(\partial_0 B^{(h)}_{LH})} &= \frac{1}{4}\delta^L_i \delta^H_j \delta^K_l \delta^M_n(g^{il} g^{jn} - g^{in} g^{jl}) + \frac{1}{4}\delta^L_i \delta^H_5 \delta^K_n \delta^M_5 g^{in} \\ &= \frac{1}{4}(g^{LK} g^{HM} - g^{LM} g^{HK}) + \frac{1}{4}\delta^H_5 \delta^M_5 g^{LK} \equiv W^{LHKM}_{(m)}. \end{aligned} \tag{10.12}$$

La inspección de (10.6) lleva a que las entradas diferentes de cero de ($W^{\rho\alpha}_{(0)}$) son 3 (aquellas con $\alpha, \rho \neq 0$), lo que implica que su nulidad es $4 - 3 = 1$ (4, son las componentes independientes de $\Phi^{(0)}_\mu$). Asimismo, de (10.8) se obtiene que las entradas diferentes de cero de ($W^{\alpha\beta\lambda\rho}_{(0)}$) son 3 (aquellas con $\alpha, \beta \neq 0$), lo que implica que su nulidad es $6 - 3 = 3$ (6, son las componetes independientes de $B^{(0)}_{\mu\nu}$). De la misma manera, de (10.10) se obtiene que las entradas distintas de cero de ($W^{ML}_{(n)}$) son 4 (aquellas con $L, M, \neq 0$), lo que implica que su nulidad es $5 - 4 = 1$ (5, son las componentes independientes de $\Phi^{(n)}_L$). Finalmente, del resultado (10.12) se obtiene que las entradas distintas de cero de ($W^{LHKM}_{(m)}$) por parte del primer término son 3 (aquellas con $K, L, M, H \neq 0, 5$), y por el segundo término son 3 (aquellas con $H, M = 5$, y $L, K \neq 0, 5$), lo que implica que su nulidad es $10 - 6 = 4$ (10, son las componentes independientes de $B^{(n)}_{LM}$). Lo anterior muestra que la matriz Hessiana total tiene entradas cero, lo que significa que la teoría descrita por (10.4) es singular, y además, $4 + 5(k - 1) = 5k - 1$ es el número de restricciones primarias independientes que uno debe obtener. (Ver tambíen este resultado en [34].)

10.2. Restricciones primarias y secundarias

De las expresiones (10.5) y (10.7), además de los momentos canónicos, se obtienen restricciones primarias; es decir, de (10.5) y (10.7) se tiene que

$$\Pi^{\mu}_{(0)} = mB^{0\mu}_{(0)} - \Phi^{0\mu}_{(0)}, \quad \Pi^{\mu\nu}_{(0)} = \frac{1}{2}H^{0\mu\nu}_{(0)}, \tag{10.13}$$

$$\Rightarrow \quad \Pi^{0}_{(0)} = 0, \quad \Pi^{0i}_{(0)} = 0 \quad \Pi^{i}_{(0)} = mB^{0i}_{(0)} - \Phi^{0i}_{(0)}, \quad \Pi^{ij}_{(0)} = \frac{1}{2}H^{0ij}_{(0)} \tag{10.14}$$

$$\Rightarrow \quad \phi^{0}_{(0)} \equiv \Pi^{0}_{(0)} \approx 0, \quad \phi^{0i}_{(0)} \equiv \Pi^{0i}_{(0)} \approx 0. \tag{10.15}$$

Similarmente, de (10.9), se tiene

$$\Pi^{L}_{(n)} = \delta^{L}_{\mu}(mB^{0\mu}_{(n)} - \Phi^{0\mu}_{(n)}) + \delta^{L}_{5}(mB^{05}_{(n)} - \partial^{0}\Phi^{5}_{(n)} - \frac{n}{R}\Phi^{0}_{(n)}), \tag{10.16}$$

$$\Rightarrow \quad \Pi^{0}_{(n)} = 0, \quad \Pi^{i}_{(n)} = mB^{0i}_{(n)} - \Phi^{0i}_{(n)}, \quad \Pi^{5}_{(n)} = mB^{05}_{(n)} - \partial^{0}\Phi^{5}_{(n)} - \frac{n}{R}\Phi^{0}_{(n)} \tag{10.17}$$

$$\Rightarrow \quad \phi^{0}_{(n)} \equiv \Pi^{0}_{(n)} \approx 0, \tag{10.18}$$

y de (10.11), que

$$\Pi^{LH}_{(n)} = \frac{1}{2}\delta^{L}_{\alpha}\delta^{H}_{\beta}H^{0\alpha\beta}_{(n)} + \frac{1}{2}\delta^{L}_{\alpha}\delta^{H}_{5}\Big(\partial^{0}B^{\alpha 5}_{(n)} + \partial^{\alpha}B^{50}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{0\alpha}_{(n)}\Big), \tag{10.19}$$

$$\Rightarrow \quad \Pi^{0i}_{(n)} = 0, \quad \Pi^{05}_{(n)} = 0, \quad \Pi^{ij}_{(n)} = \frac{1}{2}H^{0ij}_{(n)}, \quad \Pi^{i5}_{(n)} = \frac{1}{2}\Big(\partial^{0}B^{i5}_{(n)} + \partial^{i}B^{50}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{0i}_{(n)}\Big) \tag{10.20}$$

$$\Rightarrow \quad \phi^{0i}_{(n)} \equiv \Pi^{0i}_{(n)} \approx 0, \quad \phi^{05}_{(n)} \equiv \Pi^{05}_{(n)} \approx 0, \tag{10.21}$$

siendo, en efecto, $5k-1$ restricciones primarias independientes. Para hallar las restricciones secundarias debe obtenerse el hamitoniano asociado con el lagrangiano efectivo (10.4). Por definición, el hamiltoniano asociado con el lagrangiano (10.1) es $\mathcal{H} = \dot{\Phi}_N\Pi^L + \dot{B}_{NL}\Pi^{NL} - \mathcal{L}$, en donde $\dot{\Phi}_N\Pi^L + \dot{B}_{NL}\Pi^{NL} = \dot{\Phi}_\mu\Pi^\mu + \dot{\Phi}_5\Pi^5 + \dot{B}_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} + 2\dot{B}_{\mu 5}\Pi^{\mu 5}$. Sustituyendo las series (10.2) en esta expresión e ntegrando en y de 0 a $2\pi R$, uno obtiene la expresión 4D $\dot{\Phi}^{(0)}_\mu\Pi^\mu_{(0)} + \dot{B}^{(0)}_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}_{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}[\dot{\Phi}^{(n)}_\mu\Pi^\mu_{(n)} + \dot{B}^{(n)}_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}_{(n)} + \dot{\Phi}^{(n)}_5\Pi^5_{(n)} + 2\dot{B}^{(n)}_{i5}\Pi^{i5}_{(n)}]$. Por tanto, el hamiltoniano asociado con el lagrangiano efectivo (10.4) está dado por

$$
\begin{aligned}
H_c &= \int d^3x \Big[\dot{\Phi}_{\mu}^{(0)} \Pi^{\mu}_{(0)} + \dot{B}^{(0)}_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}_{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\dot{\Phi}_{\mu}^{(n)} \Pi^{\mu}_{(n)} + \dot{B}^{(n)}_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}_{(n)} + \dot{\Phi}_5^{(n)}\Pi^5_{(n)} + 2\dot{B}^{(n)}_{i5}\Pi^{i5}_{(n)} \Big] - \mathcal{L}_e \Big] \\
&= \int d^3x \Big[(\Phi^{(0)}_{0i} + \partial_i \Phi^{(0)}_0)\Pi^i_{(0)} + (H^{(0)}_{0ij} - \partial_i B^{(0)}_{j0} - \partial_j B^{(0)}_{0i})\Pi^{ij}_{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[(\Phi^{(n)}_{0i} + \partial_i \Phi^{(n)}_0)\Pi^i_{(n)} \\
&\quad + (H^{(n)}_{0ij} - \partial_i B^{(n)}_{j0} - \partial_j B^{(n)}_{0i})\Pi^{ij}_{(n)} + (mB^{(n)}_{05} - \Pi^{(n)}_5 - \frac{n}{R}\Phi^{(n)}_0)\Pi^5_{(n)} \\
&\quad + 2(2\Pi^{(n)}_{i5} - \partial_i B^{(n)}_{50} + \frac{n}{R} B^{(n)}_{0i})\Pi^{i5}_{(n)} \Big] - \mathcal{L}_e \Big] \\
&= \int d^3x \Big[B^{(0)}_{0i}(m\Pi^i_{(0)} + 2\partial_j \Pi^{ij}_{(0)}) - \Phi^{(0)}_0 \partial_i \Pi^i_{(0)} - \Pi^{(0)}_i \Pi^i_{(0)} + 2\Pi^{(0)}_{ij}\Pi^{ij}_{(0)} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[B^{(n)}_{0i}(m\Pi^i_{(n)} + 2\partial_j \Pi^{ij}_{(n)}) - \Phi^{(n)}_0 \partial_i \Pi^i_{(n)} - \Pi^{(n)}_i \Pi^i_{(n)} + 2\Pi^{(n)}_{ij}\Pi^{ij}_{(n)} - \Pi^{(n)}_5 \Pi^5_{(n)} \\
&\quad + 4\Pi^{(n)}_{i5}\Pi^{i5}_{(n)} + B^{(n)}_{05}(m\Pi^5_{(n)} + 2\partial_i \Pi^{5i}_{(n)}) + \frac{n}{R}(2B^{(n)}_{0i}\Pi^{i5}_{(n)} - \Phi^{(n)}_0 \Pi^5_{(n)}) \Big] - \mathcal{L}_e \Big]. \qquad (10.22)
\end{aligned}
$$

En esta última expresión, usando que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_e &= \frac{1}{4} H^{(0)}_{0ij} H^{0ij}_{(0)} + \frac{1}{2\times 3!} H^{(0)}_{ijk} H^{ijk}_{(0)} - \frac{1}{2}(mB^{(0)}_{0i} - \Phi^{(0)}_{0i})(mB^{0i}_{(0)} - \Phi^{0i}_{(0)}) \\
&\quad - \frac{1}{4}(mB^{(0)}_{ij} - \Phi^{(0)}_{ij})(mB^{ij}_{(0)} - \Phi^{ij}_{(0)}) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{4} H^{(n)}_{0ij} H^{0ij}_{(n)} + \frac{1}{2\times 3!} H^{(n)}_{ijk} H^{ijk}_{(n)} \\
&\quad - \frac{1}{2}(mB^{(n)}_{0i} - \Phi^{(n)}_{0i})(mB^{0i}_{(n)} - \Phi^{0i}_{(n)}) - \frac{1}{4}(mB^{(n)}_{ij} - \Phi^{(n)}_{ij})(mB^{ij}_{(n)} - \Phi^{ij}_{(n)}) \\
&\quad - \frac{1}{2}\Big(mB^{(n)}_{05} - \partial_0 \Phi^{(n)}_5 - \frac{n}{R}\Phi^{(n)}_0 \Big)\Big(mB^{05}_{(n)} - \partial^0 \Phi^5_{(n)} - \frac{n}{R}\Phi^0_{(n)} \Big) \\
&\quad - \frac{1}{2}\Big(mB^{(n)}_{i5} - \partial_i \Phi^{(n)}_5 - \frac{n}{R}\Phi^{(n)}_i \Big)\Big(mB^{i5}_{(n)} - \partial^i \Phi^5_{(n)} - \frac{n}{R}\Phi^i_{(n)} \Big) \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(\partial_0 B^{(n)}_{i5} + \partial_i B^{(n)}_{50} - \frac{n}{R} B^{(n)}_{0i} \Big)\Big(\partial^0 B^{i5}_{(n)} + \partial^i B^{50}_{(n)} - \frac{n}{R} B^{0i}_{(n)} \Big) \\
&\quad + \frac{1}{4}\Big(\partial_i B^{(n)}_{j5} + \partial_j B^{(n)}_{5i} - \frac{n}{R} B^{(n)}_{ij} \Big)\Big(\partial^i B^{j5}_{(n)} + \partial^i B^{5i}_{(n)} - \frac{n}{R} B^{ij}_{(n)} \Big) \Big], \qquad (10.23)
\end{aligned}
$$

uno obtiene el hamiltoniano canónico

$$
\begin{aligned}
H_c &= \int d^3x \Big[B^{(0)}_{0i}(m\Pi^i_{(0)} + 2\partial_j \Pi^{ij}_{(0)}) - \Phi^{(0)}_0 \partial_i \Pi^i_{(0)} - \frac{1}{2}\Pi^{(0)}_i \Pi^i_{(0)} + \Pi^{(0)}_{ij}\Pi^{ij}_{(0)} - \frac{1}{2\times 3!} H^{(0)}_{ijk} H^{ijk}_{(0)} \\
&\quad + \frac{1}{4}(mB^{(0)}_{ij} - \Phi^{(0)}_{ij})(mB^{ij}_{(0)} - \Phi^{ij}_{(0)}) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[B^{(n)}_{0i}(m\Pi^i_{(n)} + 2\partial_j \Pi^{ij}_{(n)}) - \Phi^{(n)}_0 \partial_i \Pi^i_{(n)} \\
&\quad - \frac{1}{2}\Pi^{(n)}_i \Pi^i_{(n)} + \Pi^{(n)}_{ij}\Pi^{ij}_{(n)} - \frac{1}{2\times 3!} H^{(n)}_{ijk} H^{ijk}_{(n)} + \frac{1}{4}(mB^{(n)}_{ij} - \Phi^{(n)}_{ij})(mB^{ij}_{(n)} - \Phi^{ij}_{(n)}) \\
&\quad - \frac{1}{2}\Pi^{(n)}_5 \Pi^5_{(n)} + 2\Pi^{(n)}_{i5}\Pi^{i5}_{(n)} + B^{(n)}_{05}(m\Pi^5_{(n)} + 2\partial_i \Pi^{5i}_{(n)}) + \frac{n}{R}(2B^{(n)}_{0i}\Pi^{i5}_{(n)} - \Phi^{(n)}_0 \Pi^5_{(n)}) \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(mB^{(n)}_{i5} - \partial_i \Phi^{(n)}_5 - \frac{n}{R}\Phi^{(n)}_i \Big)\Big(mB^{i5}_{(n)} - \partial^i \Phi^5_{(n)} - \frac{n}{R}\Phi^i_{(n)} \Big) \\
&\quad - \frac{1}{4}\Big(\partial_i B^{(n)}_{j5} + \partial_j B^{(n)}_{5i} - \frac{n}{R} B^{(n)}_{ij} \Big)\Big(\partial^i B^{j5}_{(n)} + \partial^j B^{5i}_{(n)} - \frac{n}{R} B^{ij}_{(n)} \Big) \Big] \Big]. \qquad (10.24)
\end{aligned}
$$

El hamiltoniano anterior es un resultado nuevo, el cual puede ahora encontrarse en [34]. Entonces, definiendo el hamiltoniano primario

$$H_1 = H_c + \int d^3x \Big[a_0^{(0)}\phi^0_{(0)} + a_{0i}^{(0)}\phi^{0i}_{(0)} + \sum_{n=1}^{k-1}\Big(a_0^{(n)}\phi^0_{(n)} + a_{0i}^{(n)}\phi^{0i}_{(n)} + a_{05}^{(n)}\phi^{05}_{(n)} \Big)\Big], \tag{10.25}$$

en donde $a_0^{(0)}$, $a_{0i}^{(0)}$, $a_0^{(n)}$, $a_{0i}^{(n)}$, $a_{05}^{(n)}$ son los multiplicadores de Lagrange que fuerzan las restricciones primarias, y usando los corchetes de Poisson fundamentales

$$\begin{aligned} \{\Phi^{(0)}_\nu(x), \Pi^\mu_{(0)}(z)\} &= \delta^\mu_\nu \delta^3(x-z), \quad \{B^{(0)}_{\alpha\beta}(x), \Pi^{\mu\nu}_{(0)}(z)\} = \frac{1}{2}(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha)\delta^3(x-z), \\ \{\Phi^{(l)}_H(x), \Pi^L_{(n)}(z)\} &= \delta^l_n \delta^L_H \delta^3(x-z), \quad \{B^{(l)}_{HL}(x), \Pi^{MN}_{(n)}(z)\} = \frac{1}{2}\delta^l_n(\delta^M_H\delta^N_L - \delta^M_L\delta^N_H)\delta^3(x-z) \end{aligned} \tag{10.26}$$

(tomadas a un mismo tiempo), para las condiciones de consistencia sobre las restricciones del **modo cero** se tiene que

$$\begin{aligned} \dot\phi^0_{(0)}(x) = \{\phi^0_{(0)}(x), H_1(z)\} &= -\int d^3z \{\Pi^0_{(0)}(x), [\Phi^{(0)}_0 \partial_i \Pi^i_{(0)}](z)\} = \partial_i \Pi^i_{(0)}(x), \\ \Rightarrow \quad \psi^0_{(0)} &\equiv \partial_i \Pi^i_{(0)} \approx 0, \end{aligned} \tag{10.27}$$

$$\begin{aligned} \dot\phi^{0i}_{(0)}(x) = \{\phi^{0i}_{(0)}(x), H_1(z)\} &= \int d^3z \{\Pi^{0i}_{(0)}(x), [B^{(0)}_{0k}(m\Pi^k_{(0)} + 2\partial_j \Pi^{kj}_{(0)})](z)\} \\ &= -\frac{1}{2}[m\Pi^i_{(0)} + 2\partial_j \Pi^{ij}_{(0)}](x), \\ \Rightarrow \quad \psi^{0i}_{(0)} &\equiv m\Pi^i_{(0)} + 2\partial_j \Pi^{ij}_{(0)} \approx 0, \end{aligned} \tag{10.28}$$

las cuales son 4, mientras que para las restricciones de los **modos KK**,

$$\begin{aligned} \dot\phi^0_{(n)}(x) = \{\phi^0_{(n)}(x), H_1(z)\} &= -\int d^3z \{\Pi^0_{(n)}(x), [\Phi^{(n)}_0 (\partial_i \Pi^i_{(n)} + \frac{n}{R}\Pi^5_{(n)})](z)\} \\ &= [\partial_i \Pi^i_{(n)} + \frac{n}{R}\Pi^5_{(n)}](x) \\ \Rightarrow \quad \psi^0_{(n)} &\equiv \partial_i \Pi^i_{(n)} + \frac{n}{R}\Pi^5_{(n)} \approx 0 \end{aligned} \tag{10.29}$$

$$\begin{aligned} \dot\phi^{0i}_{(n)}(x) = \{\phi^{0i}_{(n)}(x), H_1(z)\} &= \int d^3z \Big[\{\Pi^{0i}_{(n)}(x), [B^{(n)}_{0k}(m\Pi^k_{(n)} + 2\partial_j \Pi^{kj}_{(n)}) + \frac{n}{R}2B^{(n)}_{0k}\Pi^{k5}_{(n)}](z)\} \Big] \\ &= -\frac{1}{2}[m\Pi^i_{(n)} + 2\partial_j \Pi^{ij}_{(n)} + \frac{n}{R}2\Pi^{i5}_{(n)}](x), \\ \Rightarrow \quad \psi^{0i}_{(n)} &\equiv m\Pi^i_{(n)} + 2\partial_j \Pi^{ij}_{(n)} + \frac{n}{R}2\Pi^{i5}_{(n)} \approx 0 \end{aligned} \tag{10.30}$$

$$\begin{aligned} \dot\phi^{05}_{(n)}(x) = \{\phi^{05}_{(n)}(x), H_1(z)\} &= \int d^3z \Big[\{\Pi^{05}_{(n)}(x), [B^{(n)}_{05}(m\Pi^5_{(n)} + 2\partial_j \Pi^{5j}_{(n)})](z)\} \Big] \\ &= -[m\Pi^5_{(n)} + 2\partial_j \Pi^{5j}_{(n)}](x), \\ \Rightarrow \quad \psi^{05}_{(n)} &\equiv m\Pi^5_{(n)} + 2\partial_j \Pi^{5j}_{(n)} \approx 0, \end{aligned} \tag{10.31}$$

las cuales son $5(k-1)$. Para hallar las posibles restricciones terciarias, se define el hamiltoniano secundario

$$\begin{aligned} H_2 &= H_c + \int d^3x \Big[a_0^{(0)}\phi_{(0)}^0 + a_{0i}^{(0)}\phi_{(0)}^{0i} + b_0^{(0)}\psi_{(0)}^0 + b_{0i}^{(0)}\psi_{(0)}^{0i} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{k-1}\Big(a_0^{(n)}\phi_{(n)}^0 + a_{0i}^{(n)}\phi_{(n)}^{0i} + a_{05}^{(n)}\phi_{(n)}^{05} + b_0^{(n)}\psi_{(n)}^0 + b_{0i}^{(n)}\psi_{(n)}^{0i} + b_{05}^{(n)}\psi_{(n)}^{05}\Big)\Big], \end{aligned} \tag{10.32}$$

en donde $b_0^{(0)}$, $b_{0i}^{(0)}$, $b_0^{(n)}$, $b_{0i}^{(n)}$, $b_{05}^{(n)}$ son los demás multiplicadores de Lagrange que fuerzan las restricciones secundarias. Entonces, por condición de consistencia a las restricciones secundarias del **modo cero**, y por similitud con los resultados (9.19) y (9.21)-(9.23), se tiene que

$$\dot{\psi}_{(0)}^0(x) = \{\psi_{(0)}^0(x), H_2(z)\} = \int d^3z \{\partial_k \Pi_{(0)}^k(x), \frac{1}{4}[(mB_{ij}^{(0)} - \Phi_{ij}^{(0)})(mB_{(0)}^{ij} - \Phi_{(0)}^{ij})](z)\} = 0, \tag{10.33}$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{(0)}^{0l}(x) &= \{\psi_{(0)}^{0l}(x), H_2(z)\} = \int d^3z \Big[\{m\Pi_{(0)}^l(x), \frac{1}{4}[(mB_{ij}^{(0)} - \Phi_{ij}^{(0)})(mB_{(0)}^{ij} - \Phi_{(0)}^{ij})](z)\} \\ &\quad + \{2\partial_k \Pi_{(0)}^{lk}(x), [-\frac{1}{2\times 3!}H_{ijk}^{(0)}H_{(0)}^{ijk} + \frac{1}{4}(mB_{ij}^{(0)} - \Phi_{ij}^{(0)})(mB_{(0)}^{ij} - \Phi_{(0)}^{ij})](z)\}\Big] = 0, \end{aligned} \tag{10.34}$$

mientras que para las restricciones secundarias de los **modos KK**,

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{(n)}^0(x) &= \{\psi_{(n)}^0(x), H_2(z)\} = \int d^3z \Big[\frac{1}{2}[mB_{(n)}^{ij} - \Phi_{(n)}^{ij}](z)\{\partial_k \Pi_{(n)}^k(x), -\Phi_{ij}^{(n)}(z)\} \\ &\quad + \frac{n}{R}\Big(mB_{(n)}^{i5} - \partial^i \Phi_{(n)}^5 - \frac{n}{R}\Phi_{(n)}^i\Big)(z)\{\partial_k \Pi_{(n)}^k(x), -\Phi_i^{(n)})(z)\} \\ &\quad + \frac{n}{R}\Big(mB_{(n)}^{i5} - \partial^i \Phi_{(n)}^5 - \frac{n}{R}\Phi_{(n)}^i\Big)(z)\{\Pi_{(n)}^5(x), -\partial_i \Phi_5^{(n)}(z)\}\Big] \\ &= \frac{1}{2}\int d^3z \Big[[mB_{(n)}^{ij} - \Phi_{(n)}^{ij}](z)[\partial_j\partial_i - \partial_i\partial_j]\delta^3(x-z)\Big] \\ &\quad + \frac{n}{R}\partial_i\Big(mB_{(n)}^{i5} - \partial^i \Phi_{(n)}^5 - \frac{n}{R}\Phi_{(n)}^i\Big)(x) - \frac{n}{R}\partial_i\Big(mB_{(n)}^{i5} - \partial^i \Phi_{(n)}^5 - \frac{n}{R}\Phi_{(n)}^i\Big)(x) = 0. \end{aligned} \tag{10.35}$$

En cuanto a la relación de consistencia

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}^{0i}_{(n)}(x) &= \{\psi^{0i}_{(n)}(x), H_2(z)\} \\
&= \int d^3z\Big[\{m\Pi^i_{(n)}(x), \frac{1}{4}[(mB^{(n)}_{ij} - \Phi^{(n)}_{ij})(mB^{ij}_{(n)} - \Phi^{ij}_{(n)})](z) \\
&+\frac{1}{2}\Big(mB^{(n)}_{i5} - \partial_i\Phi^{(n)}_5 - \frac{n}{R}\Phi^{(n)}_i\Big)\Big(mB^{i5}_{(n)} - \partial^i\Phi^5_{(n)} - \frac{n}{R}\Phi^i_{(n)}\Big)(z)\} \\
&+\{2\partial_k\Pi^{lk}_{(n)}(x), [-\frac{1}{2\times 3!}H^{(n)}_{ijk}H^{ijk}_{(n)} + \frac{1}{4}(mB^{(n)}_{ij} - \Phi^{(n)}_{ij})(mB^{ij}_{(n)} - \Phi^{ij}_{(n)})](z) \\
&-\frac{1}{4}\Big(\partial_iB^{(n)}_{j5} + \partial_jB^{(n)}_{5i} - \frac{n}{R}B^{(n)}_{ij}\Big)\Big(\partial^iB^{j5}_{(n)} + \partial^jB^{5i}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{ij}_{(n)}\Big)(z)\} \\
&+\{\frac{n}{R}2\Pi^{i5}_{(n)}(x), \frac{1}{2}\Big(mB^{(n)}_{i5} - \partial_i\Phi^{(n)}_5 - \frac{n}{R}\Phi^{(n)}_i\Big)\Big(mB^{i5}_{(l)} - \partial^i\Phi^5_{(n)} - \frac{n}{R}\Phi^i_{(n)}\Big)(z) \\
&-\frac{1}{4}\Big(\partial_iB^{(n)}_{j5} + \partial_jB^{(n)}_{5i} - \frac{n}{R}B^{(n)}_{ij}\Big)\Big(\partial^iB^{j5}_{(n)} + \partial^jB^{5i}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{ij}_{(n)}\Big)(z)\}\Big].
\end{aligned}$$

Para calcular esta integral, por similitud con (9.19) y los resultados (9.21)-(9.23), se tiene que

$$\begin{aligned}
&\int d^3z\Big[\{m\Pi^i_{(n)}(x), \frac{1}{4}[(mB^{(n)}_{ij} - \Phi^{(n)}_{ij})(mB^{ij}_{(n)} - \Phi^{ij}_{(n)})](z)\} \\
&+\{2\partial_k\Pi^{lk}_{(n)}(x), [-\frac{1}{2\times 3!}H^{(n)}_{ijk}H^{ijk}_{(n)} + \frac{1}{4}(mB^{(n)}_{ij} - \Phi^{(n)}_{ij})(mB^{ij}_{(n)} - \Phi^{ij}_{(n)})](z)\}\Big] = 0,
\end{aligned} \tag{10.36}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}^{0i}_{(n)}(x) &= \int d^3z\Big[\{m\Pi^i_{(n)}(x), \frac{1}{2}\Big(mB^{(n)}_{i5} - \partial_i\Phi^{(n)}_5 - \frac{n}{R}\Phi^{(n)}_i\Big)\Big(mB^{i5}_{(n)} - \partial^i\Phi^5_{(n)} - \frac{n}{R}\Phi^i_{(n)}\Big)(z)\} \\
&+\{2\partial_k\Pi^{lk}_{(n)}(x), -\frac{1}{4}\Big(\partial_iB^{(n)}_{j5} + \partial_jB^{(n)}_{5i} - \frac{n}{R}B^{(n)}_{ij}\Big)\Big(\partial^iB^{j5}_{(n)} + \partial^jB^{5i}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{ij}_{(n)}\Big)(z)\} \\
&+\{\frac{n}{R}2\Pi^{i5}_{(n)}(x), \frac{1}{2}\Big(mB^{(n)}_{i5} - \partial_i\Phi^{(n)}_5 - \frac{n}{R}\Phi^{(n)}_i\Big)\Big(mB^{i5}_{(l)} - \partial^i\Phi^5_{(n)} - \frac{n}{R}\Phi^i_{(n)}\Big)(z) \\
&-\frac{1}{4}\Big(\partial_iB^{(n)}_{j5} + \partial_jB^{(n)}_{5i} - \frac{n}{R}B^{(n)}_{ij}\Big)\Big(\partial^iB^{j5}_{(n)} + \partial^jB^{5i}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{ij}_{(n)}\Big)(z)\}\Big], \\
&= \int d^3z\Big[m\frac{n}{R}\Big(mB^{i5}_{(n)} - \partial^i\Phi^5_{(n)} - \frac{n}{R}\Phi^i_{(n)}\Big)\delta^3(x-z) \\
&+\frac{n}{R}\Big(\partial^lB^{j5}_{(n)} + \partial^jB^{5l}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{lj}_{(n)}\Big)\partial_j\delta^3(x-z) - m\frac{n}{R}\Big(mB^{i5}_{(n)} - \partial^i\Phi^5_{(n)} - \frac{n}{R}\Phi^i_{(n)}\Big) \\
&\times\delta^3(x-z) - \frac{n}{R}\Big(\partial^iB^{j5}_{(n)} + \partial^jB^{5i}_{(n)} - \frac{n}{R}B^{ij}_{(n)}\Big)\partial_j\delta^3(x-z)\Big] = 0.
\end{aligned} \tag{10.37}$$

Por último,

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}^{05}_{(n)}(x) &= \{\psi^{05}_{(n)}(x), H_2(z)\} = \{[m\Pi^5_{(n)} + 2\partial_k\Pi^{5k}_{(n)}](x), H_2(z)\} \\
&= \int d^3z \Big[\{m\Pi^5_{(n)}(x), \frac{1}{2}\Big(mB^{(n)}_{i5} - \partial_i\Phi^{(n)}_5 - \frac{n}{R}\Phi^{(n)}_i\Big)\Big(mB^{i5}_{(n)} - \partial^i\Phi^5_{(n)} + \frac{n}{R}\Phi^i_{(n)}\Big)(z)\} \\
&\quad + \{2\partial_k\Pi^{5k}_{(n)}(x), \frac{1}{2}\Big(mB^{(n)}_{i5} - \partial_i\Phi^{(n)}_5 - \frac{n}{R}\Phi^{(n)}_i\Big)\Big(mB^{i5}_{(n)} - \partial^i\Phi^5_{(n)} + \frac{n}{R}\Phi^i_{(n)}\Big)(z) \\
&\quad - \frac{1}{4}\Big(\partial_i B^{(n)}_{j5} + \partial_j B^{(n)}_{5i} - \frac{n}{R}B^{(n)}_{ij}\Big)\Big(\partial^i B^{j5}_{(n)} + \partial^j B^{5i}_{(n)} + \frac{n}{R}B^{ij}_{(n)}\Big)(z)\}(z)\Big] \\
&= \int d^3z \Big[m\Big(mB^{i5}_{(n)} - \partial^i\Phi^5_{(n)} + \frac{n}{R}\Phi^i_{(n)}\Big)(z)\partial_i\delta^3(x-z) \\
&\quad - m\Big(mB^{i5}_{(n)} - \partial^i\Phi^5_{(n)} + \frac{n}{R}\Phi^i_{(n)}\Big)(z)\partial_i\delta^3(x-z)\Big] = 0.
\end{aligned} \tag{10.38}$$

Por tanto, la teoría no presenta restricciones terciarias. Las restricciones halladas,

$$\phi^0_{(0)} \equiv \Pi^0_{(0)} \approx 0, \quad \phi^{0i}_{(0)} \equiv \Pi^{0i}_{(0)} \approx 0, \quad \psi^0_{(0)} \equiv \partial_i\Pi^i_{(0)} \approx 0, \quad \psi^{0i}_{(0)} \equiv m\Pi^i_{(0)} + 2\partial_j\Pi^{ij}_{(0)} \approx 0, \tag{10.39}$$

$$\begin{aligned}
&\phi^0_{(n)} \equiv \Pi^0_{(n)} \approx 0, \quad \phi^{0i}_{(n)} \equiv \Pi^{0i}_{(n)} \approx 0, \quad \phi^{05}_{(n)} \equiv \Pi^{05}_{(n)} \approx 0, \quad \psi^0_{(n)} \equiv \partial_i\Pi^i_{(n)} + \frac{n}{R}\Pi^5_{(n)} \approx 0, \\
&\psi^{0i}_{(n)} \equiv m\Pi^i_{(n)} + 2\partial_j\Pi^{ij}_{(n)} + \frac{n}{R}2\Pi^{i5}_{(n)} \approx 0, \quad \psi^{05}_{(n)} \equiv m\Pi^5_{(n)} + 2\partial_j\Pi^{5j}_{(n)} \approx 0,
\end{aligned} \tag{10.40}$$

es fácil ver que son de *primera clase*, ya que en ellas sólo aparecen los momentos canónicos (i.e., los corchetes de Poisson entre ellas son nulos). Estas restricciones, sin embargo, son reducibles o dependientes, ya que se cumple que

$$\partial_i\psi^{0i}_{(0)} - m\psi^0_{(0)} = 0, \quad \partial_i\psi^{0i}_{(n)} - m\psi^0_{(n)} + \frac{n}{R}\psi^{05}_{(n)} = 0, \tag{10.41}$$

por lo que las restricciones (10.39) y (10.40) describen un sistema reducible. La teoría SKR 5D es entonces una teoría de norma reducible. Las restricciones anteriores, debe mencionarse, son un resultado que no se hallaba antes en la literatura, y puede ahora consultarse en [34].

10.3. Grados de libertad

Habiendo encontrado todas las restricciones de la teoría y las relaciones de reductibilidad, pueden contarse los grados de libertad físicos como sigue:

Para el modo cero, se tiene un total de $2(4+6)$ variables dinámicas (4 por parte de $\Phi^{(0)}_\mu$ y 6 por parte de $B^{(0)}_{\mu\nu}$), y 7 restricciones de primera clase independientes.

Para los modos KK, se tiene un total de $2(5+10)(k-1)$ variables dinámicas $(5(k-1)$

por parte de $\Phi_L^{(n)}$ y $10(k-1)$ por parte de $B_{LM}^{(n)}$), y $9(k-1)$ restricciones de primera clase independientes.

Entonces, los grados de libertad físicos para la teoría de SKR 5D son

$$GL = \frac{1}{2}[8+12+(10+20)(k-1)-2(7)-2(9(k-1))] = \mathbf{6k}-\mathbf{3}. \tag{10.42}$$

En particular, para el modo cero, i.e., $k=1$, se tiene $GL=\mathbf{3}$, lo cual corresponde al número de grados de libertad físicos para SKR 4D. Además, de acuerdo con (10.42), cada valor de k contribuye con **6** grados de libertad. El anterior conteo de los grados de libertad, es también un resultado que no se halla en la literatura.

10.4. Las transformaciones de norma

Las restricciones de primera clase son generadoras de transfromaciones de norma, y el generador está dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= \int dx^3\Big[\epsilon_0^{(0)}\phi_{(0)}^0+\epsilon_{0i}^{(0)}\phi_{(0)}^{0i}-\epsilon^{(0)}\psi_{(0)}^0+\epsilon_i^{(0)}\psi_{(0)}^{0i}+\epsilon_0^{(n)}\phi_{(n)}^0\\ &\quad +\epsilon_{0i}^{(n)}\phi_{(n)}^{0i}-\epsilon^{(n)}\psi_{(n)}^0+\epsilon_i^{(n)}\psi_{(n)}^{0i}+\epsilon_{05}^{(n)}\phi_{(n)}^{05}+\epsilon_5^{(n)}\psi_{(n)}^{05}\Big],\end{aligned} \tag{10.43}$$

siendo las ϵ's los parámetros de las correspondientes transformaciones. Para los campos del **modo cero**, por similitud con los resultados (9.29), (9.30) y (5.16), (5.17), se tiene que

$$\delta\Phi_0^{(0)}(x)=\epsilon_0^{(0)}(x)\equiv\dot{\epsilon},^{(0)}(x), \quad \delta\Phi_i^{(0)}(x)=\partial_i\epsilon^{(0)}(x)+m\epsilon_i^{(0)}(x),$$

$$\delta B_{0i}^{(0)}(x)=\frac{1}{2}\epsilon_{0i}^{(0)}(x)\equiv\frac{1}{2}\dot{\epsilon}_i^{(0)}(x), \quad \delta B_{kl}^{(0)}(x)=\partial_k\epsilon_l^{(0)}(x)-\partial_l\epsilon_k^{(0)}(x),$$

y por procedimientos completamente similares a los anteriores, para los campos de los **modos KK** $\Phi_0^{(n)}$, $\Phi_i^{(n)}$, $B_{0i}^{(n)}$ y $B_{kl}^{(n)}$, se tiene

$$\delta\Phi_0^{(n)}(x)=\epsilon_0^{(n)}(x)\equiv\dot{\epsilon},^{(n)}(x), \quad \delta\Phi_i^{(n)}(x)=\partial_i\epsilon^{(n)}(x)+m\epsilon_i^{(n)}(x),$$

$$\delta B_{0i}^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\epsilon_{0i}^{(n)}(x)\equiv\frac{1}{2}\dot{\epsilon}_i^{(n)}(x), \quad \delta B_{kl}^{(n)}(x)=\partial_k\epsilon_l^{(n)}(x)-\partial_l\epsilon_k^{(n)}(x),$$

mientras que para $\Phi_5^{(n)}$, $B_{05}^{(n)}$ y $B_{l5}^{(n)}$,

$$\delta\Phi_5^{(n)}(x) = \int d^3z\{\Phi_5^{(n)}(x),[-\frac{n}{R}\epsilon^{(n)}\Pi_{(n)}^5+m\epsilon_5^{(n)}\Pi_{(n)}^5](z)\} = -\frac{n}{R}\epsilon^{(n)}(x)+m\epsilon_5^{(n)}(x),$$

$$\delta B^{(n)}_{05}(x) = \int d^3z\{B^{(n)}_{05}(x),[\epsilon^{(n)}_{05}\Pi^{05}_{(n)}](z)\} = \frac{1}{2}\epsilon^{(n)}_{05}(x) \equiv \frac{1}{2}\dot{\epsilon}^{(n)}_{5}(x),$$

$$\begin{aligned}\delta B^{(n)}_{l5}(x) &= \int d^3z\{B^{(n)}_{l5}(x),[\epsilon^{(n)}_{i}2\frac{n}{R}\Pi^{i5}_{(n)} + 2\partial_j\Pi^{5j}_{(n)}](z)\} \\ &= \frac{n}{R}\epsilon^{(n)}_{l}(x) - \int d^3z\epsilon^{(n)}_{5}(z)\partial_j\delta^3(x-z)\delta^j_l = \frac{n}{R}\epsilon^{(n)}_{l}(x) + \partial_l\epsilon^{(n)}_{5}(x);\end{aligned}$$

es decir, se tienen las transformaciones de norma

$$\delta\Phi^{(0)}_0 = \partial_0\epsilon^{(0)}, \quad \delta\Phi^{(0)}_i = \partial_i\epsilon^{(0)} + m\epsilon^{(0)}_i, \quad \delta B^{(0)}_{0i} = \partial_0\epsilon^{(0)}_i, \quad \delta B^{(0)}_{ij} = \partial_i\epsilon^{(0)}_j - \partial_j\epsilon^{(0)}_i, \tag{10.44}$$

$$\begin{aligned}&\delta\Phi^{(n)}_0 = \partial_0\epsilon^{(n)}, \quad \delta\Phi^{(n)}_i = \partial_i\epsilon^{(n)} + m\epsilon^{(n)}_i, \quad \delta\Phi^{(n)}_5 = -\frac{n}{R}\epsilon^{(n)} + m\epsilon^{(n)}_5, \\ &\delta B^{(n)}_{0i} = \partial_0\epsilon^{(n)}_i, \quad \delta B^{(n)}_{ij} = \partial_i\epsilon^{(n)}_j - \partial_j\epsilon^{(n)}_i, \quad \delta B^{(n)}_{05} = \partial_0\epsilon^{(n)}_5, \quad \delta B^{(n)}_{i5} = \frac{n}{R}\epsilon^{(n)}_i + \partial_i\epsilon^{(n)}_5,\end{aligned} \tag{10.45}$$

las cuales pueden escribirse en forma compacta como

$$\begin{aligned}&\delta\Phi^{(0)}_\mu = \partial_\mu\epsilon^{(0)} + m\epsilon^{(0)}_\mu, \quad \delta\Phi^{(n)}_\mu = \partial_\mu\epsilon^{(n)} + m\epsilon^{(n)}_\mu, \quad \delta\Phi^{(n)}_5 = -\frac{n}{R}\epsilon^{(n)} + m\epsilon^{(n)}_5, \\ &\delta B^{(0)}_{\mu\nu} = \partial_\mu\epsilon^{(0)}_\nu - \partial_\nu\epsilon^{(0)}_\mu, \quad \delta B^{(n)}_{\mu\nu} = \partial_\mu\epsilon^{(n)}_\nu - \partial_\nu\epsilon^{(n)}_\mu, \quad \delta B^{(n)}_{\mu5} = \frac{n}{R}\epsilon^{(n)}_\mu + \partial_\mu\epsilon^{(n)}_5,\end{aligned} \tag{10.46}$$

con $\epsilon^{(0)}_0 = 0$ y $\epsilon^{(n)}_0 = 0$. Estas transformaciones de norma son un resultado nuevo, que ahora también puede encontrarse en [34].

10.5. Pseudo-Bosones de Goldstone

Los campos de norma $\Phi^{(n)}_5$ y $B^{(n)}_{\mu5}$ *no* representan campos físicos en el sentido de estos pueden ser eliminados de la teoría fijando la norma apropiadamente. A saber, bajo la elección de la norma

$$\epsilon^{(n)} = \frac{R}{n}(m\epsilon^{(n)}_5 + \Phi^{(n)}_5), \quad \epsilon^{(n)}_\mu = -\frac{R}{n}(\partial_\mu\epsilon^{(n)}_5 + B^{(n)}_{\mu5}), \tag{10.47}$$

los campos $\delta\Phi^{(n)}_\mu$ y $B^{(n)}_{\mu\nu}$ se transforman como

$$\delta\Phi^{(n)}_\mu = \frac{R}{n}\partial_\mu\Phi_5 - mB^{(n)}_{\mu5}, \quad \delta B^{(n)}_{\mu\nu} = -\partial_\mu B^{(n)}_{\nu5} + \partial_\nu B^{(n)}_{\mu5}, \tag{10.48}$$

y el lagrangiano efectivo (10.4) se vuelve

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_e &= \frac{1}{2\times 3!}H^{(0)}_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda}_{(0)} - \frac{1}{4}(mB^{(0)}_{\mu\nu} - \Phi^{(0)}_{\mu\nu})(mB^{\mu\nu}_{(0)} - \Phi^{\mu\nu}_{(0)}) + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\frac{1}{2\times 3!}H^{(n)}_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda}_{(n)} \\ &-\frac{1}{4}(mB^{(n)}_{\mu\nu} - \Phi^{(n)}_{\mu\nu})(mB^{\mu\nu}_{(n)} - \Phi^{\mu\nu}_{(n)}) - \frac{1}{2}\Big(\frac{n}{R}\Big)^2\Phi^{(n)}_\mu\Phi^\mu_{(n)} + \frac{1}{4}\Big(\frac{n}{R}\Big)^2 B^{(n)}_{\mu\nu}B^{\mu\nu}_{(n)}\Bigg].\end{aligned} \tag{10.49}$$

Aquí se nota lo siguiente. En el lagrangino *no normado* (10.4), el modo cero contribuye con tres grados de libertad, mientras que cada excitación KK contribuye con seis. Tres de estos seis son debido a la parte tipo SKR 4D; uno para $B^{(n)}_{\mu\nu}$ y dos para $\Phi^{(n)}_{\mu}$ (capítulo anterior), y los otros tres son debidos a $B^{(n)}_{\mu 5}$ y $\Phi^{(n)}_{5}$, de modo que $B^{(n)}_{\mu 5}$ contribuye con dos, y $\Phi^{(n)}_{5}$ con uno. La eliminación de los campos $B^{(n)}_{\mu 5}$ y $\Phi^{(n)}_{5}$ en el lagrangiano *normado* (10.49) implica que sus grados de libertad han sido otorgados a $B^{(n)}_{\mu\nu}$ y $\Phi^{(n)}_{\mu}$, de modo que $B^{(n)}_{\mu\nu}$ y $\Phi^{(n)}_{\mu}$ son campos teniendo tres grados de libertad. Estas características por parte de los campos no físicos $B^{(n)}_{\mu 5}$ y $\Phi^{(n)}_{5}$ los hace similares a los pseudo-bosones de Goldstone, encontrados en el mecanismo de Higgs. La presencia de estos pseudo-bosones de Goldstone son similares a los encontrados en la teoría de Stüeckelberg 5D [29]. La identificación de estos pseudo-bosones de Goldstone constituyen un resultado nuevo, que ahora tambien puede consultarse en [34].

10.6. Los corchetes de Dirac

Para obtener los corchetes de Dirac, lo que se hace (como en el caso SKR 4D) es obtener un conjunto de restricciones de segunda clase irreducibles a partir de las de primera clase fijando la norma, y debido a que las restricciones de primera clase no son independientes se expande el espacio fase mediante la introducción de campos auxiliares. Las restricciones de segunda clase irreducibles que a continuación se dan, tanto para el modo cero como para los modos KK, se obtendrán de esta manera. Los siguientes corchetes de Dirac son un resultado no hallado antes en la literatura, y pueden también consultarse en [34].

Corchetes de Dirac del **modo cero.** De las restricciones de primera clase reducibles del modo cero uno obtiene el conjunto de restricciones de segunda clase irreducibles

$$\begin{aligned}
&\chi^1_{(0)} \equiv \Pi^0_{(0)}, \quad \chi^2_{(0)} \equiv \Phi^{(0)}_0, \qquad \chi^3_{(0)} \equiv \Pi^{0i}_{(0)}, \quad \chi^4_{(0)} \equiv B^{(0)}_{0i}, \qquad \chi^5_{(0)} \equiv \partial_i \Pi^i_{(0)}, \quad \chi^6_{(0)} \equiv \partial^i \Phi^{(0)}_i, \\
&\chi^7_{(0)} \equiv m\Pi^i_{(0)} + 2\partial_j \Pi^{ij}_{(0)} - \partial^i p_{(0)}, \quad \chi^8_{(0)} \equiv \partial^j B^{(0)}_{ij} + \partial_i q_{(0)},
\end{aligned} \tag{10.50}$$

con $q^{(0)}$, $p_{(0)}$ campos auxiliares cumpliendo

$$\{q^{(0)}(x), p_{(0)}(z)\} = \delta^3(x-z). \tag{10.51}$$

Los corchetes de Poisson no cero entre estas restricciones son

$$\begin{aligned}
\{\chi^1_{(0)}(x), \chi^2_{(0)}(z)\} &= \{\Pi^0_{(0)}(x), \Phi^{(0)}_0(z)\} = -\delta^3(x-z), \\
\{\chi^3_{(0)}(x), \chi^4_{(0)}(z)\} &= \{\Pi^{0i}_{(0)}(x), B^{(0)}_{0j}(z)\} = -\frac{1}{2}\delta^i_j \delta^3(x-z), \\
\{\chi^5_{(0)}(x), \chi^6_{(0)}(z)\} &= \{\partial_i \Pi^i_{(0)}(x), \partial^j \Phi^{(0)}_j(z)\} = -\partial_i \partial^i \delta^3(x-z), \\
\{\chi^6_{(0)}(x), \chi^7_{(0)}(z)\} &= \{\partial^j \Phi^{(0)}_j(x), m\Pi^i_{(0)}(z)\} = m\partial^i \delta^3(x-z), \\
\{\chi^7_{(0)}(x), \chi^8_{(0)}(z)\} &= \{2\partial_j \Pi^{ij}_{(0)}(x), \partial^l B^{(0)}_{kl}(z)\} - \{\partial^i p_{(0)}(x), \partial_k q^{(0)}(z)\} = -\delta^i_k \partial_j \partial^j \delta^3(x-z),
\end{aligned} \tag{10.52}$$

por lo que la matriz formada por los corchetes de Poisson entre las restricciones (10.50) es

$$\left(C^{\alpha\beta}_{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\delta^i_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\delta^i_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nabla^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla^2 & 0 & m\partial^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m\partial^i & 0 & -\delta^i_j\nabla^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^i_j\nabla^2 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-z),$$

siendo su inversa la matriz

$$\left(C_{\alpha\beta}^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\nabla^2} & 0 & -\frac{m\partial^j}{(\nabla^2)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta^j_i}{\nabla^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m\partial^j}{(\nabla^2)^2} & 0 & -\frac{\delta^j_i}{\nabla^2} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-z).$$

Entonces, los corchetes de Dirac diferentes de cero, por similitud con los resultados (9.38), son

$$\begin{aligned} \{\Phi^{(0)}_i(x), \Pi^j_{(0)}(z)\}_D &= \delta^j_i \delta^3(x-z) \\ &\quad - \int d^3u d^3v \{\Phi^{(0)}_i(x), \partial_k \Pi^k_{(0)}(u)\}[\frac{1}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial^l \Phi^{(0)}_l(v), \Pi^j_{(0)}(z)\} \\ &= [\delta^j_i + \frac{1}{\nabla^2}\partial_i\partial^j]\delta^3(x-z). \end{aligned} \tag{10.53}$$

$$\begin{aligned} \{\Phi^{(0)}_i(x), \Pi^{jk}_{(0)}(z)\}_D &= -\int d^3u d^3v \{\Phi^{(0)}_i(x), \partial_l \Pi^l_{(0)}(u)\}[\frac{-m\partial^q}{(\nabla^2)^2}\delta^3(u-v)]\{\partial^p B^{(0)}_{qp}(v), \Pi^{jk}_{(0)}(z)\} \\ &\quad - \int d^3u d^3v \{\Phi^{(0)}_i(x), m\Pi^l_{(0)}(u)\}[\frac{\delta^q_l}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial^p B^{(0)}_{qp}(v), \Pi^{jk}_{(0)}(z)\} \\ &= \frac{m}{2\nabla^2}[\delta^k_i\partial^j - \delta^j_i\partial^k]\delta^3(x-z). \end{aligned} \tag{10.54}$$

$$\begin{aligned} \{B^{(0)}_{ij}(x), \Pi^{kl}_{(0)}(z)\}_D &= \frac{1}{2}(\delta^k_i\delta^l_j - \delta^l_i\delta^k_j)\delta^3(x-z) \\ &\quad - \int d^3u d^3v \{B^{(0)}_{ij}(x), 2\partial_m \Pi^{rm}_{(0)}(u)\}[\frac{\delta^p_r}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial^q B^{(0)}_{pq}(v), \Pi^{kl}_{(0)}(z)\} \\ &= \frac{1}{2}[\delta^k_i\delta^l_j - \delta^l_i\delta^k_j + \frac{1}{\nabla^2}(\delta^k_i\partial_j\partial^l - \delta^l_i\partial_j\partial^k - \delta^k_j\partial_i\partial^l + \delta^l_j\partial_i\partial^k)]\delta^3(x-z) \end{aligned} \tag{10.55}$$

y los corchetes de Dirac no triviales entre $q^{(0)}$ y $p_{(0)}$ con los campos, por similitud con los resultados (9.39) y (5.23)-(5.25), son

$$\begin{aligned}\{q^{(0)}(x), p_{(0)}(z)\}_D &= \delta^3(x-z) - \int d^3ud^3v\{q^{(0)}(x), -\partial^i p_{(0)}(u))\}[\frac{\delta_i^j}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial_j q^{(0)}(v), p_{(0)}(z)\} \\ &= \delta^3(x-z) - \frac{1}{\nabla^2}\partial^i\partial_i\delta^3(x-z) = 0, \end{aligned} \tag{10.56}$$

$$\begin{aligned}\{\Phi_i^{(0)}(x), p_{(0)}(z)\}_D &= -\int d^3ud^3v\{\Phi_i^{(0)}(x), \partial_l\Pi^l_{(0)}(u))\}[\frac{-m\partial^k}{(\nabla^2)^2}\delta^3(u-v)]\{\partial_k q^{(0)}(v), p_{(0)}(z)\} \\ &+ \int d^3ud^3v\{\Phi_i^{(0)}(x), m\Pi^l_{(0)}(u))\}[\frac{\delta_l^k}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial_k q^{(0)}(v), p_{(0)}(z)\} \\ &= -\frac{m}{\nabla^2}\partial_i\delta^3(x-z) + \frac{m}{\nabla^2}\partial_i\delta^3(x-z) = 0, \end{aligned} \tag{10.57}$$

$$\begin{aligned}\{q^{(0)}(x), \Pi^{ij}_{(0)}(z)\}_D &= -\int d^3ud^3v\{q^{(0)}(x), -\partial^k p_{(0)}(u))\}[\frac{\delta_k^l}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial^m B^{(0)}_{lm}(v), \Pi^{ij}_{(0)}(z)\} \\ &= \frac{1}{2\nabla^2}[\partial^i\partial^j - \partial^j\partial^i]\delta^3(x-z) = 0. \end{aligned} \tag{10.58}$$

$$\begin{aligned}\{B^{(0)}_{kl}(x), p_{(0)}(z)\}_D &= -\int d^3ud^3v\{B^{(0)}_{kl}(x), 2\partial_n\Pi^{mn}_{(0)}(u))\}[\frac{\delta_m^i}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial_i q^{(0)}(v), p_{(0)}(z)\} \\ &= \frac{1}{\nabla^2}[\partial_l\partial_k - \partial_k\partial_l]\delta^3(x-z) = 0, \end{aligned} \tag{10.59}$$

y trivialmente,

$$\begin{aligned}&\{q^{(0)}(x), \Phi_i^{(0)}(z)\}_D = 0, \quad \{q^{(0)}(x), B_{ij}^{(0)}(z)\}_D = 0, \quad \{q^{(0)}(x), \Pi_i^{(0)}(z)\}_D = 0, \\ &\{\Pi_i^{(0)}(x), p_{(0)}(z)\}_D = 0, \quad \{\Pi_{ij}^{(0)}(x), p_{(0)}(z),\}_D = 0. \end{aligned} \tag{10.60}$$

lo que muestra que los campos auxilires $q^{(0)}$ y $p_{(0)}$ son independientes del corchete de Dirac.

Corchetes de Dirac de los **modos KK.** De las restricciones de primera clase reducibles para los modos KK uno obtiene las restricciones de segunda clase irreducibles

$$\begin{aligned}&\chi^1_{(n)} \equiv \Pi_0^{(n)}, \quad \chi^2_{(n)} \equiv \Phi^0_{(n)}, \quad \chi^3_{(n)} \equiv \Pi^{0i}_{(n)}, \quad \chi^4_{(n)} \equiv B^{(n)}_{0i}, \quad \chi^5_{(n)} \equiv \Pi^{05}_{(n)}, \quad \chi^6_{(n)} \equiv B^{(n)}_{05}, \\ &\chi^7_{(n)} \equiv \partial_i\Pi^i_{(n)} + \frac{n}{R}\Pi^5_{(n)}, \quad \chi^8_{(n)} \equiv \partial^i\Phi_i^{(n)}, \quad \chi^9_{(n)} \equiv m\Pi^i_{(n)} + 2\partial_j\Pi^{ij}_{(n)} + \frac{n}{R}2\Pi^{i5}_{(n)} - \partial^i p_{(n)}, \\ &\chi^{10}_{(n)} \equiv \partial^j B^{(n)}_{ij} + \partial_i q^{(n)}, \quad \chi^{11}_{(n)} \equiv m\Pi^5_{(n)} + 2\partial_j\Pi^{5j}_{(n)}, \quad \chi^{12}_{(n)} \equiv \partial^j B^{(n)}_{5j}, \end{aligned} \tag{10.61}$$

con $q^{(n)}$, $p_{(n)}$ campos auxiliares satisfaciendo

$$\{q^{(n)}(x), p_{(n)}(z)\} = \delta^3(x-z). \tag{10.62}$$

Los corchetes de Poisson distintos de cero entre estas restricciones son

$$\begin{aligned}
\{\chi^1_{(n)}(x), \chi^2_{(n)}(z)\} &\equiv \{\Pi^0_{(n)}(x), \Phi^{(n)}_0(z)\} = -\delta^3(x-z), \\
\{\chi^3_{(n)}(x), \chi^4_{(n)}(z)\} &\equiv \{\Pi^{0i}_{(n)}(x), B^{(n)}_{0j}(z)\} = -\frac{1}{2}\delta^i_j\delta^3(x-z), \\
\{\chi^5_{(n)}(x), \chi^6_{(n)}(z)\} &\equiv \{\Pi^{05}_{(n)}(x), B^{(n)}_{05}(z)\} = -\frac{1}{2}\delta^3(x-z), \\
\{\chi^7_{(n)}(x), \chi^8_{(n)}(z)\} &\equiv \{\partial_i\Pi^i_{(n)}(x), \partial^j\Phi^{(n)}_j(z)\} = -\partial_i\partial^i\delta^3(x-z), \\
\{\chi^8_{(n)}(x), \chi^9_{(n)}(z)\} &= \{\partial^j\Phi^{(n)}_j(x), m\Pi^i_{(n)}(z)\} = m\partial^i\delta^3(x-z), \\
\{\chi^9_{(n)}(x), \chi^{10}_{(n)}(z)\} &= \{2\partial_j\Pi^{ij}_{(n)}(x), \partial^l B^{(n)}_{kl}(z)\} - \{\partial^i p_{(n)}(x), \partial_k q^{(n)}(z)\} = -\delta^i_k\partial_j\partial^j\delta^3(x-z), \\
\{\chi^9_{(n)}(x), \chi^{12}_{(n)}(z)\} &= \{\frac{n}{R}2\Pi^{i5}_{(n)}(x), \partial^l B^{(n)}_{5l}(z)\} = \frac{n}{R}\partial^i\delta^3(x-z) \\
\{\chi^{11}_{(n)}(x), \chi^{12}_{(n)}(z)\} &= \{2\partial_j\Pi^{5j}_{(n)}(x), \partial^l B^{(n)}_{5l}(z)\} = -\delta^i_j\partial_i\partial^j\delta^3(x-z) = -\partial_i\partial^i\delta^3(x-z),
\end{aligned} \tag{10.63}$$

de lo cual se obtiene la matriz

$$\left(C^{\alpha\beta}_{(n)}\right) = \begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\delta^i_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2}\delta^i_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nabla^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla^2 & 0 & m\partial^i & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m\partial^i & 0 & -\delta^i_j\nabla^2 & 0 & \frac{n}{R}\partial^i \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta^i_j\nabla^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nabla^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{n}{R}\partial^i & 0 & \nabla^2 & 0
\end{pmatrix}\delta^3(x-z).$$

y cuya inversa es

$$
\left(C^{(n)}_{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2\delta_i^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2\delta_i^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\nabla^2} & 0 & -\frac{m\partial^j}{(\nabla^2)^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\nabla^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_i^j}{\nabla^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m\partial^j}{(\nabla^2)^2} & 0 & -\frac{\delta_i^j}{\nabla^2} & 0 & -\frac{n\partial^j}{R(\nabla^2)^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{n\partial^j}{R(\nabla^2)^2} & 0 & \frac{1}{\nabla^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\nabla^2} & 0
\end{pmatrix} \delta^3(x-z).
$$

Entonces, los corchetes de Dirac distintos de cero que no contienen a los campos $\Phi_5^{(n)}$ o $B_{\mu 5}^{(n)}$, por similitud con los resultados del modo cero, son

$$
\begin{aligned}
\{\Phi_i^{(n)}(x), \Pi^j_{(n)}(z)\}_D &= \delta_i^j \delta^3(x-z) \\
&\quad - \int d^3u d^3v \{\Phi_i^{(n)}(x), \partial_k \Pi^k_{(n)}(u)\}[\frac{1}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial^l \Phi_l^{(n)}(v), \Pi^j_{(n)}(z)\} \\
&= [\delta_i^j + \frac{1}{\nabla^2}\partial_i \partial^j]\delta^3(x-z), \qquad (10.64)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\Phi_i^{(n)}(x), \Pi^{jk}_{(n)}(z)\}_D &= -\int d^3u d^3v \{\Phi_i^{(n)}(x), \partial_l \Pi^l_{(n)}(u)\}[\frac{-m\partial^q}{(\nabla^2)^2}\delta^3(u-v)]\{\partial^p B^{(n)}_{qp}(v), \Pi^{jk}_{(n)}(z)\} \\
&\quad - \int d^3u d^3v \{\Phi_i^{(n)}(x), m\Pi^l_{(n)}(u)\}[\frac{\delta_l^q}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial^p B^{(n)}_{qp}(v), \Pi^{jk}_{(n)}(z)\} \\
&= \frac{m}{2\nabla^2}[\delta_i^k \partial^j - \delta_i^j \partial^k]\delta^3(x-z), \qquad (10.65)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{B^{(n)}_{ij}(x), \Pi^{kl}_{(n)}(z)\}_D &= \frac{1}{2}(\delta_i^k \delta_j^l - \delta_i^l \delta_j^k)\delta^3(x-z) \\
&\quad - \int d^3u d^3v \{B^{(n)}_{ij}(x), 2\partial_m \Pi^{rm}_{(n)}(u)\}[\frac{\delta_r^p}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial^q B^{(n)}_{pq}(v), \Pi^{kl}_{(n)}(z)\} \\
&= \frac{1}{2}[\delta_i^k \delta_j^l - \delta_i^l \delta_j^k + \frac{1}{\nabla^2}(\delta_i^k \partial_j \partial^l - \delta_i^l \partial_j \partial^k - \delta_j^k \partial_i \partial^l + \delta_j^l \partial_i \partial^k)]\delta^3(x-z), \\
&\qquad (10.66)
\end{aligned}
$$

y ademas, los corchetes de Dirac no triviales entre $q^{(n)}$ y $p_{(n)}$ con los campos son

$$
\begin{aligned}
\{q^{(n)}(x), p_{(n)}(z)\}_D &= \delta^3(x-z) - \int d^3u d^3v \{q^{(n)}(x), -\partial^i p_{(n)}(u)\}[\frac{\delta_i^j}{\nabla^2}\delta^3(u-v)] \\
&\quad \times \{\partial_j q^{(n)}(v), p_{(n)}(z)\} = \delta^3(x-z) - \frac{1}{\nabla^2}\partial^i \partial_i \delta^3(x-z) = 0, \qquad (10.67)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} \{q^{(n)}(x), \Pi^{ij}_{(n)}(z)\}_D &= -\int d^3u d^3v \{q^{(n)}(x), -\partial^k p_{(n)}(u))\}[\frac{\delta^l_k}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial^m B^{(n)}_{lm}(v), \Pi^{ij}_{(n)}(z)\} \\ &= \frac{1}{2\nabla^2}[\partial^i\partial^j - \partial^j\partial^i]\delta^3(x-z) = 0, \end{aligned} \tag{10.68}$$

$$\begin{aligned} \{\Phi^{(n)}_i(x), p_{(n)}(z)\}_D &= -\int d^3u d^3v \{\Phi^{(n)}_i(x), \partial_l \Pi^l_{(n)}(u))\}[\frac{-m\partial^k}{(\nabla^2)^2}\delta^3(u-v)]\{\partial_k q^{(n)}(v), p_{(n)}(z)\} \\ &\quad + \int d^3u d^3v \{\Phi^{(n)}_i(x), m\Pi^l_{(n)}(u))\}[\frac{\delta^k_l}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial_k q^{(n)}(v), p_{(n)}(z)\} \\ &= -\frac{m}{\nabla^2}\partial_i\delta^3(x-z) + \frac{m}{\nabla^2}\partial_i\delta^3(x-z) = 0, \end{aligned} \tag{10.69}$$

$$\begin{aligned} \{B^{(n)}_{kl}(x), p_{(n)}(z)\}_D &= -\int d^3u d^3v \{B^{(n)}_{kl}(x), 2\partial_n \Pi^{mn}_{(n)}(u))\}[\frac{\delta^i_m}{\nabla^2}\delta^3(u-v)]\{\partial_i q^{(n)}(v), p_{(n)}(z)\} \\ &= \frac{1}{\nabla^2}[\partial_l\partial_k - \partial_k\partial_l]\delta^3(x-z) = 0, \end{aligned} \tag{10.70}$$

y trivialmente,

$$\begin{aligned} &\{q^{(n)}(x), \Phi^{(n)}_i(z)\}_D = 0, \quad \{q^{(n)}(x), B^{(n)}_{ij}(z)\}_D = 0, \quad \{q^{(n)}(x), \Pi^{(n)}_i(z)\}_D = 0, \\ &\{\Pi^{(n)}_i(x), p_{(n)}(z),\}_D = 0, \quad \{\Pi^{(n)}_{ij}(x), p_{(n)}(z)\}_D = 0, \end{aligned} \tag{10.71}$$

por lo que $q^{(n)}$ y $p_{(n)}$ (al igual que $q^{(0)}$ y $p_{(0)}$) son independientes del corchete de Dirac. Finalmente, puede mostrarse que los corchetes de Dirac entre los campos auxiliares $q^{(n)}$ y $p_{(n)}$ con los campos *no* físicos $\Phi^{(n)}_5$ y $B^{(n)}_{\mu 5}$ también son cero. Por otro lado, uno puede obtener corchetes de Dirac distintos de cero en los cuales participe alguno de los campos $\Phi^{(n)}_5$ o $B^{(n)}_{\mu 5}$. Sin embargo, con la fijación de la norma (10.47), todos estos corchetes pueden eliminarse de los cálculos.

En resumen, se mostró que la teoría SKR 5D previamente estudiada es una teoría de norma reducible, cuyo modo cero corresponde consistentemente a la teoría SKR 4D, mas una torre de campos masivos KK. Se muestró que el modo cero contribuye consistentemente con tres grados de libertad (igual que en PKR 4D); uno debido a $B^{(0)}_{\mu\nu}$ y dos debidos a $\Phi^{(0)}_\mu$, mientras que los modos KK contribuyen con seis (igual que en PKR 5D); tres debidos a $B^{(n)}_{\mu\nu}$ y tres debidos a $\Phi^{(n)}_\mu$. Esto último, después de haberse absorbido los campos con características de pseudo-bosones de Goldstone $B^{(n)}_{\mu 5}$ y $\Phi^{(n)}_5$. Además, debido a que hubo condiciones de reductibilidad tanto en el modo cero como en los modos excitados, se usó el proceso de extensión del espacio fase para obtener los corchetes de Dirac de la teoría.

Capítulo 11

Conclusiones

En este trabajo, se hizo un análisis hamiltoniano de las teorías Kalb-Ramond, Proca-Kalb-Ramond y Süeckelberg Kalb-Ramond con una dimensión extra compacta. Previo al análisis de las teorías en cinco dimensiones, se estudiaron las correspondientes teorías en cuatro dimensiones. El análisis se hizo aplicando el algoritmo de Dirac-Bergmann estricto, el cual considera a todas las variables dinámicas que describen al sistema. Se mostró que la teoría Kalb-Ramond 4D es una teoría de norma reducible con un grado de libertad, además de obtenerse los corchetes de Dirac de la teoría. El análisis de Dirac estricto de esta teoría fue una contribución de este trabajo, ya que no se encuentra en la literatura. En la teoría de Kalb-Ramond 5D, después de compactar la quinta dimensión sobre un $S^1/\mathbf{Z_2}$ orbifold, se encontró que el modo cero de la teoría efectiva corresponde consistentemente a la teoría de Kalb-Ramond 4D mas una torre de excitaciones Kaluza-Klein. Se hallaron todas las restricciones de la teoría y se encontró que son de primera clase y reducibles, tanto para el modo cero como para los modos exitados de Kaluza-Klein. Mediante una apropiada elección de los parámetros de norma, se identificó una torre de campos masivos, mientras que los campos $B^{(n)}_{5\mu}$ fueron identificados como pseudo-bosones de Goldstone. Además, mediante el proceso de extensión del espacio fase, se obtuvo un conjunto de restricciones de segunda clase irreducibles y se obtuvieron los corchetes de Dirac, tanto para el modo cero como para los modos excitados de Kaluza-Klein. En esta teoría de Kalb-Ramond 5D, el análisis de Dirac estricto fue una contribución de este trabajo, así como los resultados encontrados, los cuales ahora se encuentran en [34].

Por otra parte, se mostró que la teoría Proca Kalb-Ramond 4D es una teoría que no es de norma, que es irreducible, y con tres grados de libertad, además de obtenerse los corchetes de Dirac de la teoría. El anális estricto de Dirac de esta teoría fue una contribución del presente trabajo, ya que no se encuentra en la literatura. En la teoría de Proca Kalb-Ramond 5D, después de compactar la quinta dimensión sobre un $S^1/\mathbf{Z_2}$ orbifold, se encontró que la teoría efectiva no es una teoría de norma. Se obtuvo que el modo cero de la teoría efectiva corresponde consistentemente a la teoría Proca Kalb-Ramond 4D mas una torre de excitaciones masivas de Kaluza-Klein. Se mostró, tanto para el modo cero como para las excitaciones masivas Kaluza-Klein, que esta teoría tiene solamente restricciones de segunda clase irreducibles, y que no hay presentes pseudo-bosones de Goldstone. Además, se obtuvieron los corchetes de Dirac, tanto para el modo cero como para las excitaciones de Kaluza-Klein. En esta teoría de Proca Kalb-Ramond 5D, el análisis de Dirac estricto fue una contribución de este trabajo, así como los resultados encontrados, los cuales ahora se hallan en [34].

En adición, se mostró que la teoría de Stüeckelberg Kalb-Ramond 4D es una teoría de norma (masiva) reducible con tres grados de libertad, además de obtenerse los corchetes de Dirac de la teoría. El análisis de Dirac de esta teoría fue una contribución de este trabajo, ya que no se encuentra en la literatura. En la teoría de Stüeckelberg Kalb-Ramond 5D, después de compactar la quinta dimensión sobre un $S^1/\mathbf{Z_2}$ orbifold, se encontró que el modo cero de la teoría efectiva corresponde consistentemente a la teoría Stüeckelberg Kalb-Ramond 4D mas una torre de excitaciones Kaluza-Klein. Se encontró que la teoría tiene solamente restricciones de primera clase y reducibles, tanto para el modo cero como para los modos excitados Kaluza-Klein. Mediante una apropiada fijación de los parámetros de norma, los campos $\Phi_5^{(n)}$ y $B_{\mu 5}^{(n)}$ fueron identificados como pseudo-bosones de Goldstone, de modo que la teoría describe un campo Stüeckelberg Kalb-Ramond 4D mas una torre de excitaciones masivas Kaluza-Klein. Además, mediante el proceso de extensión del espacio fase, se obtuvo un conjunto de restricciones de segunda clase irreducibles y se obtuvieron los corchetes de Dirac, tanto para el modo cero como para los modos excitados Kaluza-Klein. En esta teoría de Stüeckelberg Kalb-Ramond 5D, el análisis de Dirac estricto fue una contribución de este trabajo, y asimismo los resultados encontrados, los cuales pueden hallarse en [34].

De este modo, uno tiene todas las herramientas para poder cuantizar las teorías. De hecho, con los corchetes de Dirac obtenidos puede hacerse una completa identificación de observables, y pueden calcularse los propagadores de los campos físicos. Al mismo respecto, la cuantización de las teorías bajo estudio usando los resultados de este trabajo y el método simpléctico está ya en proceso, y todas estas ideas serán objeto de estudio en trabajos posteriores [33].

Bibliografía

[1] C. Mora y A. Pedraza, Lat. Am. Phys. Educ. Vol 2, No. 1 (2008)

[2] A. Perez-Lorenzana, J. Phys. Conf. Ser. 18, 224 (2005).

[3] Gogberashvili, A. Herrera Aguilar, D. Malagón Morejón an R. R. Mora Luna, Phys. Lett. B 725, 208-211 (2013).

[4] G. Weiglei et al. (Physics Interplay of the LHC and the ILC), arXiv:hep-ph/0410364.

[5] V. I. Ogievetsky and I. V. Polubarinov, Sov. J. Nucl. Phys. 4 (1967) 156.

[6] S. Deser, Phys. Rev. 187 (1969) 1931.

[7] Y. Nambu, Phys. Reports 23 (1976) 250.

[8] D. Z. Freedman and P. K. Townsend, Nucl. Phys. bf B177 (1981) 282.

[9] S. Deser and E. Witten, Nucl. Phys. B178 (1981) 491.

[10] S. Deser, P. K. Townsend and W. Siegel, Nucl. Phys. B184 (1981) 333

[11] W. Siegel, Phys. Lett. B, 85, (1979) 333.

[12] E. S. Fradkln and M. A. Vasillev, Phys. Lett. B, 85 (1979) 47.

[13] E. Cremmer and B. Julia, Nucl. Phys. B, 159 (1979) 141.

[14] J. Thierry-Mieg, Y. Ne'eman, Proc. Nat. Acad. Sc. USA 79 (1982) 7068

[15] M. Kalb and P. Ramond, Phys. Rev. D9 (1974) 2273.

[16] E. Bershoeff, M. de Roo, B. de Wit and P. van Nieuwenhuizen, Nucl. Phys. B (1982) 97; G. F Chapline and N. S. Manton, Phys. Lett. B 120 (1983) 105.

[17] B. Julia and G. Toulouse, J. de Phys. 16 (1979) 395.

[18] E. Harikumar, M. Sivakumar, Mod.Phys.Lett. A15 (2000) 121-132.

[19] Alberto Escalante Hernández, Leopoldo Carbajal *Hamiltonian study for Chern-Simons and Pontryagin theories*. Annals of Physics, volume 326, issue 2, 323-339, (2011).

[20] Alberto Escalante and Iraís Rubalcava, *A Pure Dirac's method for 4-dimensional BF theories*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, Vol. 9, No. 7, 1250053, (2012).

[21] Marc Henneaux and Claudio Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems.* Princeton University Press. 1992.

[22] Alberto Escalante Hernández. *Introducción a la Gravedad Canónica. Una perspectiva moderna.* Libro en desarrollo.

[23] Paul S. Wesson, *Space-Time-Matter. Modern Kaluza-Klein Theory.* University of Waterloo, Ontario, Canada, 1999.

[24] S. SenGupta and S. Sur, *Spherically symmetric solutions of gravitational field in Kalb-Ramond Background*, arXiv: gr-qc/0102095v1 22 Feb 2001.

[25] F. Barone, M De Moraes and J. Neto (2008), *Casimir effect for gauge scalars: the Kalb-Ramond case*, arXiv:hep-ph-th/0508182v2.

[26] A. Muck, A. Pilaftsis and R. Ruckl, Phys. Rev. D 65, 085037 (2002).

[27] H. Novales-Sanchez and J. J. Toscano, Phys. Rev. D, 82, 116012 (2010).

[28] E. Stueckelberg, Helv. Phys. Acta 11, 299-312. (1938).

[29] Alberto Escalante and Moisés Zárate, *Dirac and Faddeev-Jackiw quantization of a 5D Stüeckelberg theory with an extra compact dimension* submitted to Annals of Physics (2014).

[30] Henri Ruegg and Martí Ruíz Altaba, *The Stüeckelberg Field* (2013), arXiv:hep-ph-th/0304245v2.

[31] A. H. Chamseddine, Phys. Rev. D 24 3065 (1981); E. Witten, Phys. Lett. B 155, 15 (1985); C. Burgess, A. Font and F. Quevedo, Nucl. Phys. B 272, 661 (1986); S. Ferrara, C. Kounnas and M. Porrati, Phys. Leett. B 181, 263 (1986).

[32] T. J. Allen, M. J. Bowick an A. Lahiri, Mod. Phys. Lett. A 6, 559 (1991).

[33] Alberto Escalante, *Faddeev-Jackiw quantization of reducible gauge systems*, en preparación (2014).

[34] Alberto Escalante and Alberto López Villanueva, *Hamiltonian dynamics of 5D Kalb-Ramond theories with a compact dimension*, aceptado en International Journal of Geometric Methods in Modern Physics (2014).