Integration of equations in the Thirring model

S.E. Korenblit *– Full Professor of Theoretical Physics Department of Irkutsk State University. The basic fields of research are Schrödinger & Dirac equations in spaces of arbitrary dimension, off-energy-shell Jost function method, scattering problem for strongly singular potentials, self-adjoint extension theory, quantum three-body problem, potential quark models, operator expansions for exclusive processes, Nambu-Jona-Lasinio model, exactly solvable nonrelativistic & relativistic models, Berry phases for non-Hermitian Hamiltonians, dynamic mapping method (Haag expansion) in quantum field theory, bosonization in four-fermion models.*

Abstract: It is shown that the exact solvability of the massless Thirring model in the canonical quantization scheme is conditioned by the natural linearizability of its Heisenberg equations in the dynamic mapping method.

Интегрирование уравнений модели Тирринга

С.Э. Коренблит, В.В. Семёнов
Иркутский государственный университет, ИГУ, Карла Маркса 1, 664003
Иркутск, Россия, e−mail: korenb@ic.isu.ru

Аннотация

Показано, что точная решаемость безмассовой модели Тирринга в схеме канонического квантования обязана естественной линеаризуемости её гейзенберговских уравнений в методе динамических отображений.

1 Введение

Несмотря на почтенный возраст, двумерная модель Тирринга [1]–[3] остается важным полигоном для тестирования непертурбативных методов квантовой теории поля [4]–[7], обнаруживая все новые свойства как у известных [8]–[11], так и у вновь получаемых решений [12]. В тоже время, методы интегрирования таких двумерных моделей дают ключ к решению некоторых нелинейных теорий большей размерности [11]. В частности модель Тирринга является двумерным аналогом известной модели Намбу-Йона-Лазинио [11], [12] и вместе с моделью Швингера дает пример использования процедуры бозонизации (ПБ) [8], [13].

В настоящей работе ПБ в модели Тирринга рассматривается как частный случай динамического отображения (ДО) [14], что для модели Швингера было сделано ранее Гринбергом [15]. Метод ДО заключается в построении гейзенберговского поля (ГП) $\Psi(x)$, как решения гейзенберговских уравнений движения (ГУ) в виде разложения Хаага – по нормальным произведениям степеней свободных «физических полей» $\psi(x)$, пространство представления которых адекватно заранее неизвестным физическим состояниям данной теории поля [14]. Это ДО, будучи вообще говоря слабым (неоператорным) равенством, $\Psi(x) \stackrel{\text{w}}{=} \Upsilon[\psi(x)]$, предполагает выбор соответствующих начальных условий к ГУ. Например, при условии [13], что оба набора полей полны, неприводимы и асимптотически совпадают при $t \to -\infty$, ГП будет в слабом смысле [14] стремиться к соответствующему асимптотическому физическому полю $\psi_{in}(x)$: $\lim\limits_{t\to-\infty} \Psi(x^1, t) \stackrel{\text{w}}{=} \Upsilon[\psi_{in}(x^1, -\infty)]$. Однако условия (асимптотической) полноты и неприводимости не выполняются при наличии связанных состояний [14], [15]. В частности, для точно решаемых двумерных моделей Тирринга [11] и Швингера [13] наблюдаемые асимптотические состояния физических частиц не связаны с безмассовыми дираковскими асимптотическими полями (конфаймент).

Как показано в работах [16]–[18], в общем случае удобнее строить ДО на «шредингеровские» физические поля $\psi_s(x)$, как пределы ГП при $t \to 0$: $\lim\limits_{t\to 0} \Psi(x^1, t) \overset{\mathrm{w}}{=} \Upsilon[\psi_s(x^1, 0)]$, которые являются обобщением [17] хорошо известного представления взаимодействия и тесно связаны с процедурой канонического квантования [19]. В этом представлении зависящие от времени коэффициентные функции ДО [16], [17] содержат всю информацию о связанных состояниях и рассеянии, а точно решаемая модель Федербуша приводит к точно линеаризуемым ГУ [18].

В данной работе показано, что аналогичную линеаризацию допускают и ГУ модели Тирринга, а выбор свободных безмассовых (псевдо) скалярных полей в качестве физических вызван приводимостью безмассового поля Дирака [13] в пространстве этих полей. При этом проблема Швингеровских членов в коммутаторе токов, будучи также тесно связанна с ПБ [8], [13], находит естественное решение, заимствуемое по сути из КЭД [18], где также оказывается достаточно зафиксировать этот коммутатор только для свободных полей соответствующего «представленя взаимодействия» [20].

2 Модель Тирринга

Следуя процедуре канонического квантования [19] исходим из формального Гамильтониана модели Тирринга [1], задающего в двумерном пространстве-времени[1] взаимодействие Ферми с фиксированной безразмерной константой связи g для спинорного поля спина $1/2$ нулевой массы:

$$H[\Psi] = H_{0[\Psi]}(x^0) + H_{I[\Psi]}(x^0), \quad H_{I[\Psi]}(x^0) = \frac{g}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx^1 J_{(\Psi),\mu}(x) J^{\mu}_{(\Psi)}(x), \tag{1}$$

$$H_{0[\Psi]}(x^0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx^1 \Psi^{\dagger}(x) E(P^1) \Psi(x), \quad E(P^1) = \gamma^5 P^1, \tag{2}$$

подчиняющегося одновременным каноническим антикоммутационным соотношениям:

$$\left\{\Psi_{\xi}(x), \Psi_{\xi'}(y)\right\}\Big|_{x^0=y^0} = 0, \quad \left\{\Psi_{\xi}(x), \Psi^{\dagger}_{\xi'}(y)\right\}\Big|_{x^0=y^0} = \delta_{\xi,\xi'}\delta\left(x^1 - y^1\right), \tag{3}$$

$$\text{а также: } \left\{\Psi_{\xi}(x), \Psi^{\#}_{\xi'}(y)\right\}\Big|_{(x-y)^2<0} = 0, \tag{4}$$

[1]Здесь: $x^{\mu} = \left(x^0, x^1\right)$; $x^0 = t$; $\hbar = c = 1$; $\partial_{\mu} = (\partial_0, \partial_1)$; для $g^{\mu\nu}$: $g^{00} = -g^{11} = 1$; для $\epsilon^{\mu\nu}$: $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$; $\overline{\Psi}(x) = \Psi^{\dagger}(x)\gamma^0$; $\gamma^0 = \sigma_1$, $\gamma^1 = -i\sigma_2$, $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma_3$, $\gamma^{\mu}\gamma^5 = -\epsilon^{\mu\nu}\gamma_{\nu}$, где σ_i – матрицы Паули, и I – единичная матрица; $x^{\xi} = x^0 + \xi x^1$, $2\partial_{\xi} = 2\partial/\partial x^{\xi} = \partial_0 + \xi\partial_1$, $P^1 = -i\partial_1$; суммирование по ξ нигде не подразумевается.

где индексы $\xi, \xi' = \pm 1$ нумеруют компоненты ГП по правилу:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{+1}(x) \\ \Psi_{-1}(x) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Векторный ток $J^{\mu}_{(\Psi)}(x)$, наряду с аксиальным током $J^{5\mu}_{(\Psi)}(x)$, $\mu = 0, 1$, является пока их формальным локальным билинейным функционалом вида:

$$J^{\mu}_{(\Psi)}(x) \Longrightarrow \overline{\Psi}(x)\gamma^{\mu}\Psi(x), \quad J^{5\mu}_{(\Psi)}(x) \Longrightarrow \overline{\Psi}(x)\gamma^{\mu}\gamma^5\Psi(x) = -\epsilon^{\mu\nu}J_{(\Psi)\nu}(x), \tag{6}$$

который, в силу (1)–(5), формально возникает и в канонических уравнениях движения [3]-[6]:

$$i\partial_0\Psi(x) = [\Psi(x), H[\Psi]] \Longrightarrow \left(E(P^1) + g\gamma^0\gamma_{\nu}J^{\nu}_{(\Psi)}(x)\right)\Psi(x), \tag{7}$$

$$\text{или: } i\gamma^{\nu}\partial_{\nu}\Psi(x) = g\gamma_{\nu}J^{\nu}_{(\Psi)}(x)\Psi(x), \quad \text{и: } 2\partial_{\xi}\Psi_{\xi}(x) = -igJ^{-\xi}_{(\Psi)}(x)\Psi_{\xi}(x), \tag{8}$$

– для отдельных компонент поля (5), которые также формально связаны с соответствующими компонентами тока:

$$J^{\xi}_{(\Psi)}(x) = J^0_{(\Psi)}(x) + \xi J^1_{(\Psi)}(x) \Longrightarrow 2\Psi^{\dagger}_{\xi}(x)\Psi_{\xi}(x), \quad \xi = \pm 1. \tag{9}$$

Корректные определения всех формальных произведений операторов обсуждаются ниже.

3 Линеаризация ГУ

Немедленным следствием уравнений движения (7), (8) являются локальные законы сохранения [3]-[6] токов (6), (9):

$$\partial_{\mu}J^{\mu}_{(\Psi)}(x) = 0, \quad \partial_{\mu}J^{5\mu}_{(\Psi)}(x) = -\epsilon_{\mu\nu}\partial^{\mu}J^{\nu}_{(\Psi)}(x) = 0, \quad \partial_{\xi}J^{\xi}_{(\Psi)}(x) = 0, \quad \xi = \pm 1, \tag{10}$$

которые полностью фиксируют их динамику как свободную [4], [5]. Неудивительно поэтому, что, в силу тех же уравнений движения (7), (8), или соотношений антикоммутации для операторов ГП (3), (4), коммутатор с полным Гамильтонианом $H[\Psi]$ (1), (2) в каноническом уравнении движения для оператора «полного тока» из правой части уравнения (7), при:

$$i\partial_0\gamma^0\gamma_{\nu}J^{\nu}_{(\Psi)}(x) - \left[\gamma^0\gamma_{\nu}J^{\nu}_{(\Psi)}(x), H_{0[\Psi]}\left(x^0\right)\right] = iI\,\partial_{\mu}J^{\mu}_{(\Psi)}(x) + i\gamma^5\,\epsilon_{\mu\nu}\partial^{\mu}J^{\nu}_{(\Psi)}(x) = 0, \tag{11}$$

$$\text{дает: } i\partial_0\gamma^0\gamma_{\nu}J^{\nu}_{(\Psi)}(x) - \left[\gamma^0\gamma_{\nu}J^{\nu}_{(\Psi)}(x), H_{0[\Psi]}\left(x^0\right)\right] = \left[\gamma^0\gamma_{\nu}J^{\nu}_{(\Psi)}(x), H_{I[\Psi]}\left(x^0\right)\right] \Longrightarrow 0, \tag{12}$$

– и не содержит вклад коммутатора с Гамильтонианом взаимодействия $H_{I[\Psi]}\left(x^0\right)$ из (1). То есть учет в (12) возможного ненулевого вклада Швингеровских членов приводит к нарушению законов сохранения токов (10) и является преждевременным [18]. Обращение в нуль выражений (11)=(12) означает, что временная эволюция этого «полного тока» описывается некоторым свободным гамильтонианом $H_{0[\chi]}(x^0)$ вида (2), квадратичным уже по некоторым свободным пробным физическим полям Дирака $\chi(x)$, снабженным такими же антикоммутационными соотношениями (3), (4) и законами сохранения (10) для соответсвующих токов $J^{\nu}_{(\chi)}(x)$, $J^{5\nu}_{(\chi)}(x)$ (6), (9), то есть:

$$i\partial_0\gamma^0\gamma_\nu J^{\nu}_{(\chi)}(x) - \left[\gamma^0\gamma_\nu J^{\nu}_{(\chi)}(x), H_{0[\chi]}\left(x^0\right)\right] = iI\,\partial_\mu J^{\mu}_{(\chi)}(x) + i\gamma^5\,\epsilon_{\mu\nu}\partial^\mu J^{\nu}_{(\chi)}(x) = 0. \quad (13)$$

Заметим, что входящие в (11), (12) гейзенберговские операторы тока приобретают свой точный операторный смысл, – с отличным от нуля Швингеровским членом, – лишь после фиксации пространства представления антикоммутационных соотношений (3), (4) и последующего приведения в этом представлении к нормальной форме путем перенормировки, например, с помощью ε-раздвижки и вычитания вакуумного среднего [13]:

$$J^0_{(\Psi)}(x) \longmapsto \lim_{\tilde{\varepsilon}\to 0} \widehat{J}^0_{(\Psi)}(x;\tilde{\varepsilon}) = \widehat{J}^0_{(\Psi)}(x), \quad J^1_{(\Psi)}(x) \longmapsto \lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{J}^1_{(\Psi)}(x;\varepsilon) = \widehat{J}^1_{(\Psi)}(x), \quad (14)$$

$$\text{где сначала: } \tilde{\varepsilon}^0 = \varepsilon^1 \to 0, \ \text{ при: } \tilde{\varepsilon}^1 = \varepsilon^0, \ \varepsilon^2 > 0, \quad (15)$$

$$\text{для: } \widehat{J}^{\nu}_{(\Psi)}(x;a) = Z^{-1}_{(\Psi)}(a)\left[\overline{\Psi}(x+a)\gamma^\nu\Psi(x) - \langle 0|\overline{\Psi}(x+a)\gamma^\nu\Psi(x)|0\rangle\right], \quad (16)$$

и соответственно для компонент (9). «Константа» перенормировки $Z_{(\Psi)}(a)$ определена ниже в (42). Принятое здесь определение перенормированного тока (14)–(16) следует Швингеровскому рецепту [20], уточненному в работе [10] и, в отличие от Джонсоновского определения [2], вообще говоря зависит, как и само значение Швингеровского члена [4], [11], от выбора представления за счет вакуумного среднего [13] в (16). Можно показать [10], что в безмассовом случае эти различные определения тока приводят к совпадающим выражениям только для свободных полей Дирака.

С учетом сделанных замечаний, вытекающие из (10)–(13) соображения позволяют в слабом смысле идентифицировать в уравнении (7) гейзенберговский «полный ток» из (6), (11), (12) с оператором «полного тока» из (13), – для свободных (пробных) полей $\chi(x)$, – приведенного (перенормированного) к нормальной форме в смысле (14)–(16), вообще говоря [4], с точностью до неизвестной пока константы β:

$$\gamma_\nu J^{\nu}_{(\Psi)}(x) \stackrel{\mathrm{w}}{\Longrightarrow} \frac{\beta}{2\sqrt{\pi}}\gamma_\nu \widehat{J}^{\nu}_{(\chi)}(x), \quad (17)$$

$$\widehat{J}^{\nu}_{(\chi)}(x) = \lim_{\varepsilon,(\tilde{\varepsilon})\to 0} \widehat{J}^{\nu}_{(\chi)}(x;\varepsilon(\tilde{\varepsilon})) \equiv :J^{\nu}_{(\chi)}(x): . \quad (18)$$

Здесь при $Z_{(\chi)}(a) = 1$ символ :...: означает обычное нормальное упорядочение по полям $\chi(x)$. Это немедленно приводит к линеаризации обоих ГУ в (8) в представлении этих пробных полей $\chi(x)$. Разумеется, уравнение (7) линеаризуется по x^0, а второе уравнение из (8), – по x^ξ. Однако, последнее – это привилегия двумерия, и начальные условия к нему отнюдь не очевидны. Тогда как первое допускает указанные выше во Введении физически обоснованные начальные условия при $x^0 = 0$. В отличие от [4], [13], [18] эти начальные условия не фиксируют здесь константу β, которая определяется ниже динамически.

4 Скалярные поля

Как показано в работе [18], подобная линеаризация ГУ модели Федербуша непосредственно приводит к её решению в виде ДО $\Psi(x) = \Upsilon[\psi_{1,2}(x)]$ на свободные массивные дираковские поля $\psi_{1,2}(x)$, с различными массами $m_{1,2} \neq 0$. Однако, в отличие от массивного, компоненты $\chi_\xi(x)$ (5) двумерного безмассового поля Дирака полностью расщепляются, $\partial_\xi \chi_\xi(x) = 0$, а потому это поле оказывается определено неоднозначно и приводимо [13] в пространстве безмассового свободного (псевдо) скалярного поля ($\phi(x)$), $\varphi(x)$, обладая в нем множеством унитарно неэквивалентных представлений. Поскольку физический смысл имеет ДО только на неприводимые наборы полей $\Psi(x) = \Upsilon[\varphi(x), \phi(x)]$, или $\Psi(x) = \Upsilon[\psi_M(x)]$, – для фазы со спонтанно нарушенной киральной симметрией [11], [12], далее расмотрим здесь только первую возможность.

Соответствующая ПБ позволяет оперировать функционалами от бозонных полей вместо фермионных операторов и является мощным инструментом для получения непертурбативных решений в различных двумерных моделях [8], [11], [13], [18]. Как будет видно, её использование значительно упрощает интегрирование и линеаризованных ГУ (7). Будучи формально следствием лишь условий сохранения (10) токов (6), соотношения бозонизации имеют, вообще говоря, смысл слабых равенств и только для операторов тока в нормальной форме (14)–(16), что неявно уже предполагает выбор определенных представлений (анти-) коммутационных соотношений. Однако, для свободных безмассовых полей $\chi(x)$, $\varphi(x)$, $\phi(x)$ этот выбор осуществляется, по сути, автоматически, а в силу линеаризации (17), (18), его оказывается как раз достаточно для наших целей, поскольку для свободных полей эти соотношения имеют смысл операторных равенств [13]:

$$\widehat{J}^{\mu}_{(\chi)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial^\mu \varphi(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x), \quad \widehat{J}^{-\xi}_{(\chi)}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \partial_\xi \varphi^\xi \left(x^\xi\right) . \tag{19}$$

Здесь свободное безмассовое скалярное поле $\varphi(x)$ и псевдоскалярное поле $\phi(x)$, в отличие от [8], взаимно дуальны и связаны симметричными интегральными соотношениями:

$$\left.\begin{array}{c}\phi(x)\\ \varphi(x)\end{array}\right\} = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy^1 \varepsilon\left(x^1 - y^1\right)\partial_0 \left\{\begin{array}{l}\varphi\left(y^1, x^0\right),\\ \phi\left(y^1, x^0\right),\end{array}\right. \tag{20}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi(x) = 0, \quad \partial_\mu \partial^\mu \phi(x) = 0, \tag{21}$$

где $\varepsilon(x^1) = 1$, при $x^1 > 0$, и $\varepsilon(x^1) = -1$ при $x^1 < 0$, а соответствующие этими полями заряды имеют вид [11], [13]:

$$O = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy^1 \partial_0 \varphi(y^1, x^0) = \phi(-\infty, x^0) - \phi(\infty, x^0), \tag{22}$$

$$\overline{O} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy^1 \partial_0 \phi\left(y^1, x^0\right) = \varphi(-\infty, x^0) - \varphi(\infty, x^0).$$

Правое и левое поля $\varphi^\xi\left(x^\xi\right)$, и их заряды $\mathcal{Q}^\xi$, определяются линейными комбинациями [13]:

$$\varphi^\xi\left(x^\xi\right) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x) - \xi\phi(x)\right], \quad \mathcal{Q}^\xi = \frac{1}{2}\left[O - \xi\overline{O}\right] = \pm 2\varphi^\xi\left(x^0 \pm \infty\right), \tag{23}$$

при $\xi = \pm 1$. Коммутационные соотношения [8], [11], [13] для полей $\varphi(x)$, $\phi(x)$, $\varphi^\xi\left(x^\xi\right)$:

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = [\phi(x), \phi(y)] = -i\frac{\varepsilon(x^0 - y^0)}{2}\theta((x-y)^2), \tag{24}$$

$$\left[\varphi^\xi(s), \varphi^{\xi'}(\tau)\right] = -\frac{i}{4}\varepsilon(s-\tau)\delta_{\xi,\xi'}, \quad \left[\varphi^\xi(s), \mathcal{Q}^{\xi'}\right] = \frac{i}{2}\delta_{\xi,\xi'}, \tag{25}$$

воспроизводятся коммутаторами их частотных частей и соответствующих им зарядов [5], [11]:

$$\left[\varphi^{\xi(\pm)}(s), \varphi^{\xi'(\mp)}(\tau)\right] = \mp\frac{1}{4\pi}\ln\Big(i\kappa\Big(\pm\{s-\tau\} - i0\Big)\Big)\delta_{\xi,\xi'}, \tag{26}$$

$$\left[\varphi^{\xi(\pm)}(s), \mathcal{Q}^{\xi'(\mp)}\right] = \frac{i}{4}\delta_{\xi,\xi'}, \quad \left[\mathcal{Q}^{\xi(\pm)}, \mathcal{Q}^{\xi'(\mp)}\right] = \pm\frac{1}{4}\delta_{\xi,\xi'}. \tag{27}$$

Согласно [13], в пространстве бозонных полей (20)–(27) можно построить множество различных неэквивалентных представлений решений уравнения Дирака для безмассового свободного пробного поля, $\partial_\xi \chi_\xi(x) = 0$ в виде локальных нормальных экспонент от левых и правых бозонных полей $\varphi^\xi(x^\xi)$, и их зарядов $\mathcal{Q}^\xi$

(23)–(27). Выберем самое простое из них [13], – то которое приводит к соотношениям бозонизации (19) для токов (14)–(16) пробных полей $\chi(x)$ с $Z_{(\chi)}(a) = 1$:

$$\chi_\xi(x) = \chi_\xi\left(x^{-\xi}\right) = \mathcal{N}_\varphi \left\{ \exp\left(-i\sqrt{\pi}\left[2\varphi^{-\xi}\left(x^{-\xi}\right) + \frac{\xi}{2}\mathcal{Q}^\xi \right] \right) \right\} u_\xi, \tag{28}$$

$$u_\xi = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} e^{-\pi/32} e^{-i\pi\xi/4}.$$

Здесь κ – параметр инфракрасной регуляризации (26), который впоследствии стремится к нулю или остается фиксированным, $\kappa = M$, [11], в зависимости от фазы модели.

5 Интегрирование ГУ

В выбранном представлении правая часть ГУ (7), с учетом линеаризации (17), (18), естественно доопределяется в нормальной форме [13] по отношению к полям $\varphi^\xi(x^\xi)$:

$$\partial_0 \Psi_\xi(x) = \left(-\xi\partial_1 - i\frac{\beta g}{2\sqrt{\pi}} \widehat{J}^{-\xi(-)}_{(\chi)}(x) \right) \Psi_\xi(x) - \Psi_\xi(x) \left(i\frac{\beta g}{2\sqrt{\pi}} \widehat{J}^{-\xi(+)}_{(\chi)}(x) \right). \tag{29}$$

Очевидное выражение для производной функции $F(x^1)$ в терминах оператора P^1: $-i\partial_1 F(x^1) = [P^1, F(x^1)]$, и его конечный эквивалент: $e^{iaP^1} F(x^1) e^{-iaP^1} = F(x^1 + a)$, позволяют привести уравнение (29), для $\Psi_\xi(x) \leftrightarrow Y(t)$, к виду:

$$\frac{d}{dt} Y(t) = A(t)Y(t) - Y(t)B(t), \tag{30}$$

а его формальное решение в виде упорядоченных по времени экспонент:

$$Y(t) = T_A \left\{ \exp\left(\int\limits_0^t d\tau A(\tau) \right) \right\} Y(0) \left[T_B \left\{ \exp\left(\int\limits_0^t d\tau B(\tau) \right) \right\} \right]^{-1}, \tag{31}$$

которые в нашем случае немедленно заменяются обычными, – к виду:

$$\Psi_\xi(x) = e^{C^{\xi(-)}(x)} \Psi_\xi\left(x^1 - \xi x^0, 0\right) e^{C^{\xi(+)}(x)}, \tag{32}$$

где, используя операторную бозонизацию (19) векторного тока пробного поля $\chi(x)$ (28), имеем:

$$C^{\xi(\pm)}(x) = -i\frac{\beta g}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{x^0} dy^0 \widehat{J}^{-\xi(\pm)}_{(\chi)}\left(x^1 + \xi y^0 - \xi x^0, y^0\right) = \tag{33}$$

$$-i\frac{\beta g}{2\pi}\left[\varphi^{(\pm)}\left(x^1, x^0\right) - \varphi^{(\pm)}\left(x^1 - \xi x^0, 0\right)\right] = -i\frac{\beta g}{2\pi}\left[\varphi^{\xi(\pm)}\left(x^\xi\right) - \varphi^{\xi(\pm)}\left(-x^{-\xi}\right)\right].$$

Замечательно, что совершенно неизвестное нам начальное поле $\Psi_\xi(x^1-\xi x^0,0) \Longrightarrow \lambda_\xi(x^{-\xi})$, также возникает здесь как одно из решений свободного уравнения $\partial_\xi \lambda_\xi(x^{-\xi})=0$, но несомненно, унитарно неэквивалентное свободному полю $\chi(x)$ (28). Поэтому выберем его также в нормальной форме по $\varphi(x)$, но с параметрами $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, соответствующего «канонического преобразования» $U_\eta=\exp F_\eta$ этого поля $\varphi(x)$, $\overline{\alpha}^2-\overline{\beta}^2=4\pi$, генерируемого оператором F_η (при $y^0=x^0$) в виде:

$$\omega^\xi\left(x^\xi\right)=U_\eta^{-1}\varphi^\xi\left(x^\xi\right)U_\eta=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\overline{\alpha}\varphi^\xi\left(x^\xi\right)+\overline{\beta}\varphi^{-\xi}\left(-x^\xi\right)\right], \tag{34}$$

$$\mathcal{W}^\xi=U_\eta^{-1}\mathcal{Q}^\xi U_\eta=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\overline{\alpha}\mathcal{Q}^\xi-\overline{\beta}\mathcal{Q}^{-\xi}\right], \text{ где: } \overline{\alpha}=2\sqrt{\pi}\cosh\eta, \quad \overline{\beta}=2\sqrt{\pi}\sinh\eta, \tag{35}$$

$$F_\eta=2i\eta\int\limits_{-\infty}^{\infty}dy^1\varphi^\xi\left(y^\xi\right)\partial_0\varphi^{-\xi}\left(-y^\xi\right), \ \text{– не зависит от } \xi \text{ и } y^0, \tag{36}$$

$$\lambda_\xi\left(x^{-\xi}\right)=U_\eta^{-1}\chi_\xi\left(x^{-\xi}\right)U_\eta=\mathcal{N}_\varphi\left\{\exp\left(-i\sqrt{\pi}\left[2\omega^{-\xi}\left(x^{-\xi}\right)+\frac{\xi}{2}\mathcal{W}^\xi\right]\right)\right\}v_\xi, \tag{37}$$

$$v_\xi=\sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}}e^{-\pi/32}e^{-\overline{\beta}^2/64}e^{-i\pi\xi/4}. \tag{38}$$

Подставляя нормальную форму (37) в решение (32), получим нормальную экспоненту для поля Тирринга в виде, аналогичном [13]:

$$\Psi_\xi(x)=\mathcal{N}_\varphi\left\{\exp\left(-i\overline{\alpha}\varphi^{-\xi}\left(x^{-\xi}\right)-i\overline{\beta}\varphi^\xi\left(x^\xi\right)-\frac{i\xi}{4}\overline{\alpha}\mathcal{Q}^\xi+\frac{i\xi}{4}\overline{\beta}\mathcal{Q}^{-\xi}\right)\right\}v_\xi, \tag{39}$$

– с учтом условий на параметры, необходимых для выполнения правильных Лоренц - трансформационных свойств, отвечающих спину $1/2$, и канонических антикоммутационных соотношений (3), (4), соответственно:

$$\overline{\alpha}^2-\overline{\beta}^2=4\pi, \quad \overline{\beta}-\frac{\beta g}{2\pi}=0. \tag{40}$$

Непосредственное вычисление с этим решением операторов векторного тока (14)–(16), с учетом (40), и при условиях, что:

$$\overline{\alpha}=\left(\frac{2\pi}{\beta}+\frac{\beta}{2}\right), \quad \overline{\beta}=\left(\frac{2\pi}{\beta}-\frac{\beta}{2}\right), \ \text{ то есть: } \quad e^\eta=\frac{2\sqrt{\pi}}{\beta}=\sqrt{1+\frac{g}{\pi}}, \tag{41}$$

воспроизводит соотношения бозонизации (17), (18), (19) в виде:

$$\widehat{J}^\nu_{(\Psi)}(x)\overset{\mathrm{w}}{=}\frac{\beta}{2\sqrt{\pi}}\widehat{J}^\nu_{(\chi)}(x), \quad Z_{(\Psi)}(a)=(-\kappa^2a^2)^{-\overline{\beta}^2/4\pi}, \quad Z_{(\chi)}(a)=1, \tag{42}$$

демонстрируя самосогласованность приведенных вычислений. Слабый смысл соотношений бозонизации (42), (19) проявляется непосредственно в различии констант перенормировки $Z_{(\Psi)}(a)$ и $Z_{(\chi)}(a)$ для полей $\Psi(x)$ и $\chi(x)$. При этом для «джонсоновских» коммутаторов [2] гейзенберговских полей (39) и их токов (14)–(16) находим:

$$\left[\widehat{J}^0_{(\Psi)}(x), \Psi(y)\right]\big|_{x^0=y^0} = -\Psi(y)\delta\left(x^1-y^1\right), \tag{43}$$

$$\left[\widehat{J}^1_{(\Psi)}(x), \Psi(y)\right]\big|_{x^0=y^0} = -\frac{\beta^2}{4\pi}\gamma^5\Psi(y)\delta\left(x^1-y^1\right), \tag{44}$$

$$\left[\widehat{J}^0_{(\Psi)}(x), \widehat{J}^1_{(\Psi)}(y)\right]\big|_{x^0=y^0} = -i\frac{\beta^2}{4\pi^2}\delta'\left(x^1-y^1\right). \tag{45}$$

С учетом принятых выше определений, из (41)–(45), для:

$$a \equiv 1, \quad \overline{a} \equiv \frac{\beta^2}{4\pi}, \quad c \equiv \frac{\beta^2}{4\pi^2} > 0, \tag{46}$$

$$\text{имеем:}\;\; a\overline{a} = \pi c, \quad a - \overline{a} = gc, \tag{47}$$

в согласии с [3]-[5], а в соответствии с [18], [20], алгебра гейзенберговского оператора фермионного заряда, в силу (43), совпадает с алгеброй фермионного заряда $O/\sqrt{\pi}$ (22), (19), свободного пробного поля $\chi(x)$. Заметим, что непосредственное использование соотношений (43), (44) для вычисления коммутатора в (7) нарушает уравнения движения (7), (8), как и отмеченная выше попытка использовать коммутатор (45) в уравнении движения (12).

6 Заключение

В данной работе в рамках метода динамических отображений [14], [15] показано, что модель Тирринга [1], как и модель Федербуша [18], оказывается точно решаемой благодаря точной линеаризуемости её ГУ, а соотношения бозонизации могут иметь смысл операторных равенств только между операторами свободных полей и лишь в слабом смысле применимы к гейзенберговским операторам тока. Как и в модели Федербуша [18], линейное однородное ГУ (29) не фиксирует общую нормировку ГП (39)–(41), которая определяется коммутационными соотношениями (3) [11]. Решение ГУ в виде (32) должно описывать все возможные фазы модели.

Авторы благодарны А.Н. Валлу и В.М. Левианту за полезные обсуждения.

Литература

[1] Thirring W.E. // Ann. Phys. –1958.–V. 3.–P. 91.

[2] Johnson K., Nuovo Cimento, – 1961, v.20, N 4, P. 773

[3] Scarf F. L., Wess J., Nuovo Cimento, – 1962, v.26, N 1, P. 150.

[4] Leutwyler H., Helv. Phys. Acta., – 1965, V.38, P. 431.

[5] Dell'Antonio G.F., Frishman Y., Zwanziger D., Phys. Rev. D, – 1972, – V.6, – N4, – P.988.

[6] Вайтман А.С. Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей.– М.: Наука, 1968.

[7] Mandelstam S. // Phys. Rev. D, – 1975, – V. 11.–P. 3026.

[8] Nakanishi N, // Prog. Theor. Phys., – 1977, –V. 57, –P. 580.

[9] Alvarez-Estrada R.F., Gomez A.N. // Phys. Rev. D, –1998, – V. 57, P. 3618.

[10] Ogura A, Takahashi H, // Prog. Theor. Phys. – 2001,– V.105,– P. 495.

[11] Faber M., Ivanov A. N. // Eur. Phys.J. –2001.–V. 20C.–P. 723.

[12] Fujita T, Hiramoto M, Homma T, Takahashi H, // J. Phys. Soc. Jap. – 2005,–V. 74, P. 1143.

[13] Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.

[14] Умэдзава Х., Мацумото Х., Татики М., Термополевая динамика и конденсированные состояния. М.: Мир, 1984.

[15] Greenberg O W, Preprint UMD-PP-95-99, 1995; UMD-PP-00-020, 2000.

[16] Vall A.N., Korenblit S.E., Leviant V.M., Tanaev A.B. // J. Nonlin. Math. Phys.– 1997.–V. 4.–P. 492.

[17] Коренблит С.Э., Танаев А.Б. Препринт ИЯФ 2001-11, Новосибирск, 2001.

[18] Korenblit S.E., Semenov V.V. // J. Nonlin. Math. Phys. – 2006. – V. 13, – P. 271.

[19] Хепп К, Теория Перенормировок, М.: Наука, 1974.

[20] Соколов В.В., ЯФ, – 1968, – т.8, – с. 559.