



Facteurs de forme hadronique en Chromodynamique Quantique sur réseau pour la physique du B & renormalisation non perturbative

Pierre-Henri Cahue

► To cite this version:

Pierre-Henri Cahue. Facteurs de forme hadronique en Chromodynamique Quantique sur réseau pour la physique du B & renormalisation non perturbative. Physique des Hautes Energies - Réseau [hep-lat]. Université Grenoble Alpes [2020-..], 2021. Français. NNT : 2021GRALY077 . tel-03624394

HAL Id: tel-03624394

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03624394>

Submitted on 30 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Physique Théorique**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Pierre Henri CAHUE

Thèse dirigée par **Mariane MANGIN-BRINET**, Directrice de
Recherche CNRS
et codirigée par **Benoît BLOSSIER**, Chargé de recherche CNRS
et **Savvas ZAFEIROPOULOS**, Chargé de recherche CNRS

préparée au sein du **Laboratoire de Physique Subatomique et
de Cosmologie**
dans l'**École Doctorale Physique de Grenoble**

**Facteurs de forme hadronique en
Chromodynamique Quantique sur réseau
pour la physique du B & renormalisation
non perturbative**

**Hadronic form factors in lattice Quantum
Chromodynamics for B physics & non
perturbative renormalization**

Thèse soutenue publiquement le **25 novembre 2021**,
devant le jury composé de :

Pr. Johann COLLOT

Professeur Des Universités, Université Grenoble Alpes, Président

Dr. Emi KOU

Directrice de Recherche CNRS, Laboratoire de physique des 2 infinis -
Irène Joliot-Curie, Orsay, Rapporteur

Pr. Vincent MORÉNAS

Professeur Des Universités, Université de Clermont-Ferrand, Rapporteur

Dr. Jérôme CHARLES

Chargé de recherche CNRS, Centre de Physique Théorique, Marseille,
Examineur



Résumé

Les travaux présentés dans ce document portent sur l'utilisation de la QCD sur réseau comme moyen de régularisation de la QCD, dans le but de calculer certaines observables de la matière hadronique appartenant au domaine de basse énergie de la QCD. La régularisation sur réseau consiste en une discrétisation de l'espace-temps qui permet le calcul d'un nombre fini de configurations de champs quantiques. Pour que certaines grandeurs atteignent leur valeur physique, cette régularisation doit s'accompagner d'une renormalisation. Nous décrivons et discutons dans un premier temps les avantages et difficultés d'implémentation du schéma RI-SMOM — dans des simulations d'ensembles dits $N_f = 2+1+1$, à la masse physique et avec l'action de fermions twistés — pour le calcul des constantes de renormalisation sur réseau. La plus grande partie de mon travail de thèse est cependant en lien avec la physique des désintégrations $B_s \rightarrow D_s^{(*)} \ell \bar{\nu}_\ell$. Mon travail repose sur une simulation réalisée sur des ensembles $N_f = 2$ avec des fermions de Wilson-clover, via la génération additionnelle de cinq quarks lourds (dont la masse est intermédiaire entre celle du c et du b). Notre approche, alternative à la simulation directe du quark *bottom*, qui reste une prouesse aujourd'hui, permet l'extrapolation des résultats à la masse du quark b . Nous détaillerons en particulier les procédures d'adoucissement des champs avec le *smearing*, ainsi que l'isolement des états à l'aide du GEVP. Notre chaîne d'analyse permet de prouver la validité des divers choix et techniques de simulations employés ici. Elle me permet finalement d'obtenir les éléments de matrice hadronique pour la transition étudiée et les facteurs de forme hadroniques $\mathcal{G}(1)$ et $\mathcal{F}(1)$. Soulignons que ces facteurs sont cruciaux pour la recherche de physique BSM, via l'amélioration de la précision sur l'élément V_{cb} de la matrice CKM et la recherche sur les anomalies comme $R(D)$.

Abstract

This work relies on the use of lattice QCD as a means for regularization, in order to compute several hadronic matter observables in the QCD low-energy scale limit. Lattice QCD regularization is a space-time discretization. It allows for the computation of a finite number of quantum field configurations. However, for some quantities to reach their physical values, this regularization must be associated with a renormalization. We start by discussing the computation of the renormalization constants in $N_f = 2 + 1 + 1$ ensembles at the physical mass (with the twisted action for the fermions) in the RI-SMOM scheme. We also emphasize the benefits and difficulties of such an implementation. Most of my thesis work is linked to B physics through the disintegration $B_s \rightarrow D_s^{(*)} \ell \bar{\nu}_\ell$, and relies on a simulation made at $N_f = 2$ with Wilson-clover fermions. In order to extrapolate our results at the b quark mass, five extra heavy quarks (whose masses range from the *charm* to the *bottom* quark mass) are generated; providing a way to get around the challenges of simulating directly the b quark. In the analysis of these simulations, I highlight two important procedures, namely the smearing of the fields to reduce the noise of the correlation functions, and the GEVP algorithm to isolate specific quantum states. Our analysis chain gives an opportunity to test and validate various choices and simulation techniques used in this thesis. It also allows to extract the hadronic matrix elements for the studied transition as well as the hadronic form factors $\mathcal{G}(1)$ and $\mathcal{F}(1)$. We underline that the precision on these quantities has a strong impact on BSM physics, *via* the improvement of the V_{cb} element accuracy and the study of B anomalies such as $R(D)$.

Remerciement

Je tiens tout d'abord à remercier Arnaud Lucotte, directeur du Laboratoire de Physique Subatomique et Cosmologique de Grenoble, qui m'a permis de réaliser, d'abord, mon stage de M2, puis ma thèse dans de très bonnes conditions.

Je voudrais également remercier les membres de mon jury de thèse. Merci à Emi Kou et à Vincent Morénas qui ont accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Merci également à Jérôme Charles et à Johann Collot. Vous avez consacré beaucoup de votre temps pour me permettre d'améliorer la qualité de ce manuscrit. Je vous remercie également pour les échanges scientifiques enrichissants que nous avons pu avoir.

J'ai eu la chance d'avoir trois directeurs de thèse qui m'ont chacun beaucoup apporté. Merci d'abord à toi Mariane pour la confiance que tu m'as accordée, ça a été un réel plaisir d'apprendre toutes ces nouvelles connaissances à tes côtés. Merci à toi Benoît, de m'avoir permis d'intégrer ton projet et poursuivre la direction de ma thèse, tu as su me laisser libre d'explorer les voies que je souhaitais essayer tout en m'aidant lorsque j'en avais besoin. Je te remercie Savvas, pour tous nos échanges, tes propositions et tes conseils qu'ils soient liés à nos sujets de recherche ou non.

Je tiens à remercier tout particulièrement David Maurin, responsable de mon comité de suivi de thèse. Tu t'es énormément impliqué dans ma thèse, que ce soit pour me demander des nouvelles pendant que nous étions tous en télétravail, pour me donner ton regard extérieur sur mes travaux, ou bien simplement pour discuter et me remotiver. Merci également d'avoir relu ma thèse, et de m'avoir aidé à rendre ce manuscrit plus compréhensible.

J'ai beaucoup aimé travailler dans le groupe de physique théorique du LPSC. Car si il y a autant (voire plus) de sujet de recherche que de personne, les interactions et les échanges que nous avons pu avoir m'ont permis de mieux comprendre la physique autour de mes travaux et donc de mieux comprendre mon sujet. Les diverses conférences organisées par l'équipe théorie, m'ont aussi permis de me tenir informé des recherches et des avancés en physique des particules. Je remercie particulièrement Christopher pour l'aide que tu m'as apportée en physique de la saveur.

S'il m'a été aussi agréable de travailler au laboratoire c'est grâce à l'ambiance et l'entraide qui existent entre les doctorants. Toutes les pauses café et les discussions qui permettent autant de se détendre que de retrouver sa motivation.

La QCD sur réseau nécessite de grands moyens de calcul, et sans les personnes du service informatique, de l'IDRIS, du CINES et du CC de l'IN2P3, il est clair que je n'aurais pas pu effectuer mes travaux. Je tiens donc à remercier ici les personnes qui contribuent plus discrètement aux recherches présentées dans ce manuscrit.

À titre plus personnelle, je voudrais remercier les membres de ma famille. En particulier, mes parents qui m'ont toujours poussé et encouragé à étudier et qui m'ont transmis leur envie d'apprendre. Je tiens également à remercier ma femme qui a toujours été là pour me soutenir et m'aider au cours de ces trois années.

Finalement je tiens à remercier mes amis, pour leur soutien (même à distance), leurs encouragements et leur bienveillance. Mais surtout pour tous les bons moments passés avec eux. Ces moments si importants qui m'ont permis de penser à autre chose que la thèse, et de recharger les batteries.

Sommaire

Sommaire	I
Introduction	1
I QCD sur réseau, champs et observables	5
I. 1 Motivations pour la QCD sur réseau	6
I. 1.1 Le problème de la QCD à basse énergie	6
I. 1.2 De la QCD standard à son homologue sur réseau	10
I. 2 Action de QCD et discrétisation	14
I. 2.1 Discrétisation de l'action	15
I. 2.2 Le problème des doublons dans l'action fermionique	18
I. 2.3 Erreur de discrétisation : terme de <i>clover</i>	20
I. 2.4 Adoucissement des fluctuations numériques sur les courtes distances	22
I. 3 De l'action aux observables physiques	26
I. 3.1 Intégrales de chemin et nombre de Grassmann	26
I. 3.2 Corrélateurs à deux points pour les mésons	29
I. 3.3 Corrélateur à trois points et courants faibles	33
I. 3.4 Calcul à impulsion non-nulle	37
I. 4 Problèmes ouverts en LQCD et bref état des lieux	38
I. 4.1 Le problème de la symétrie chirale sur réseau	38
I. 4.2 Résultats modernes de LQCD	39
I. 4.3 Organisation de la recherche	42
II Renormalisation en LQCD à l'aide du schéma RI-SMOM	45
II. 1 Principe de renormalisation en LQCD	45
II. 1.1 Le schéma de renormalisation RI-MOM	46
II. 1.2 Les nouveautés apportées par RI-SMOM	50
II. 1.3 Détails du réseau utilisé pour l'étude	52
II. 2 Artefacts engendrés par la symétrie hyper-cubique $\mathcal{H}_4$	55
II. 2.1 Origine des artefacts	55
II. 2.2 Suppression des artefacts	57
II. 3 Perspective et poursuite d'étude du schéma RI-SMOM	60
II. 3.1 Problème de la dimensionnalité	60
II. 3.2 Solutions alternatives	61

II. 3.3	Conclusion	62
III	Les enjeux de la physique de la saveur accessibles par la LQCD	63
III. 1	De la physique du méson B_s aux modèles BSM	64
III. 1.1	Cadre théorique des désintégrations	64
III. 1.2	Résultats expérimentaux	66
III. 2	La matrice de mélange CKM	67
III. 2.1	Définition de la matrice CKM	67
III. 2.2	Importance de l'élément V_{cb}	68
III. 2.3	Contraintes au Modèle Standard	71
III. 3	Anomalies dans les désintégrations de mésons B_s	74
III. 3.1	Rapports de désintégration semi-leptonique	74
III. 3.2	Mesures et recherche de nouvelle physique	75
III. 3.3	Intérêt de la désintégration leptonique	77
III. 4	Recherche directe de nouvelle physique en LQCD	77
III. 5	Résumé et enjeux pour cette thèse	78
IV	Détails et résultats de l'analyse des désintégrations du méson B_s sur réseau	81
IV. 1	Simulations avec un pseudo-quark lourd : configurations et statistique	82
IV. 1.1	Construction des ensembles	82
IV. 1.2	Ajout de l'impulsion sur réseau	86
IV. 1.3	Ajout et simulation du quark b	87
IV. 1.4	Présentation des corrélateurs	89
IV. 1.5	Statistique sur les configurations	90
IV. 2	Étude sur la masse des mésons	92
IV. 2.1	Fonction de corrélation à deux points et masse effective	94
IV. 2.2	La procédure d'isolement de l'état fondamental	98
IV. 2.3	Sélection du domaine de validité pour l'état fondamental	103
IV. 2.4	Résultats : m_{D_s} , $m_{D_s^*}$, m_{H_s} et énergie des mésons	105
IV. 3	Éléments de matrice hadronique	108
IV. 3.1	GEVP pour les corrélateurs à trois points	113
IV. 3.2	Amélioration de Symanzik appliquée aux champs interpolants	115
IV. 3.3	Résultats pour les éléments de matrice	121
IV. 4	Obtention des facteurs de forme hadroniques	126
IV. 4.1	Facteurs de forme de la LQCD	127
IV. 4.2	Désintégration à recul nul ($w = 1$)	133
IV. 4.3	Limite du continu	136
IV. 4.4	Retour au quark <i>bottom</i> physique	139
IV. 5	Discussions des résultats et perspectives	142
IV. 5.1	Résumé et contextualisation des travaux	142
IV. 5.2	Perspectives	146
	Conclusion générale	149

Résumé et enjeux des travaux de cette thèse	149
Perspectives de la LQCD à moyen et long terme	151
Bibliographie	153
Annexe	163
Annexe A : Résultats complémentaire de la physique du B	163
A.1 Fonctions de corrélation à trois points	164
A.2 Résultats pour chaque ensemble des éléments de matrice	165
A.3 Facteurs de forme hadroniques	172
A.4 Extrapolations $h_{A_1}(1)$ élastique et rapports $\sigma_{\mathcal{G}}^h$ et $\sigma_{h_{A_1}}^h$	179
Liste des figures	185
Liste des tableaux	187

Introduction

Pour l'heure, le *Modèle Standard (SM)* n'a pas révélé d'indice certain sur une théorie plus générale pour prendre sa place. Avec la découverte en 2012 du boson de Higgs, la physique des particules se retrouve avec un modèle dont l'essentiel des prédictions a été validé par l'expérience. Pour autant, nous savons que le SM n'est pas la fin de l'histoire. En effet, l'un des enjeux majeurs de la physique des particules est aujourd'hui la recherche d'une théorie décrivant les interactions intervenant au-delà de l'échelle électrofaible¹. En outre, certaines questions restent en suspens, comme la composition de la matière noire, la violation de symétrie CP-fort ou encore le problème de hiérarchie sur la masse du boson de Higgs. C'est pourquoi, pour tenter de trouver une théorie plus générale, nous cherchons à montrer une inconsistance parmi l'ensemble des prédictions du SM avec les données expérimentales. Si l'un des points forts des théories de jauge est d'avoir un nombre restreint de paramètres ainsi qu'une grande inter-connectivité entre ces derniers, elles aiguillent également la manière dont la recherche de nouvelle physique est faite. En effet, dans le cas où, dans le SM, un même paramètre fondamental peut être déduit de deux grandeurs expérimentales différentes, la consistance de ces résultats doit être montrée. Toute tension entre ces deux extractions peut être le signal d'une physique au-delà du SM (*Beyond the Standard Model (BSM)*). Néanmoins, si les grandeurs expérimentales ou les paramètres du modèle qui entrent dans la détermination phénoménologique des paramètres fondamentaux du SM sont entachés d'une trop grande incertitude, alors l'inconsistance du modèle ne pourra pas être démontrée en deçà du niveau de confiance exigé. Il est alors facile de comprendre pourquoi, pour mettre en défaut le SM, il est nécessaire d'augmenter simultanément la précision sur les calculs théoriques et celle des résultats expérimentaux. Alors que la théorie quantique des champs est parvenue à donner une valeur extrêmement précise de certaines observables comme le moment magnétique de l'électron, certaines autres quantités sont encore aujourd'hui mal connues, soit parce que les observations expérimentales restent complexes, ce qui peut être le cas pour un processus rare, soit parce qu'elles demeurent difficilement calculables théoriquement et nécessitent de recourir, par exemple, aux modèles *ad hoc*. C'est pourquoi, étudier ces grandeurs mal connues théoriquement avec de nouvelles méthodes, représente l'une des meilleures chances pour la découverte de physique BSM.

L'un des sous-domaines du modèle standard qui concentre un grand nombre de recherches de nouvelle physique est l'interaction faible dans le secteur des quarks. Le modèle standard est

1. L'échelle électrofaible est caractérisée par la *Vacuum Expectation Value (vev)* du champ de Higgs : $v = (G_F\sqrt{2})^{-1/2} = 246 \text{ GeV}$.

composé de trois familles de quarks, et celles-ci s’organisent naturellement par leurs masses. Ainsi la troisième famille sera composée des quarks *bottom* et *top* qui sont les plus massifs. Leur masse est trois à cinq ordres de grandeurs plus élevée que celle de leur homologue de la première famille, les quarks *up* et *down*. Au total, six saveurs de quarks sont présentes dans le SM. Les mécanismes qui permettent une désintégration d’un quark de saveur lourde en un autre quark plus léger sont des processus véhiculés par des courants faibles. Ils sont présents directement à l’ordre des arbres — nous parlons alors de *Flavour Changing Charged Current (FCCC)* — ou via une boucle quantique — auquel cas les désintégrations sont dénommées *Flavour Changing Neutral Current (FCNC)*. Les bosons médiateurs de ces courants permettant les transitions entre saveurs de quark sont les bosons $W^\pm$. Finalement, l’amplitude de probabilité qu’un quark d’une saveur donnée se désintègre en un quark d’une autre saveur est paramétrée par la matrice de *Cabibbo–Kobayashi–Maskawa (CKM)*. Les éléments de cette matrice comptent parmi les paramètres fondamentaux du SM. Pour déterminer leur valeur sur les deux premières lignes, il faut étudier les transitions FCCC. Or, le quark b est significativement plus massif que les quarks u, d, s et c. Il a fallu des collisionneurs d’énergie suffisamment grande pour examiner les processus impliquant le quark b, ouvrant de nombreux canaux de désintégration et offrant une physique riche. Par exemple, si la première violation indirecte de la symétrie CP dans le système des mésons $\{K^0, \bar{K}^0\}$ (composés de quark et antiquark de saveurs s et d) a été observée en 1964 [1] et la première violation directe de CP (dans le même système) en 1999 [2], il a fallu attendre quarante ans pour observer son analogue direct en physique du B, notamment dans les transitions $B^0 \rightarrow K^\pm \pi^\mp$ [3; 4]. Les expériences modernes (telles que LHCb, Belle2 ou, un peu auparavant, BaBar) mettent l’accent sur les observables mal connues, en particulier celles liées à la saveur b. Ces expériences fournissent un taux de données tout à fait considérable. Cela suscite une sorte de compétition pour rendre équivalentes, du point de vue de leur ordre de grandeur, les incertitudes théoriques et expérimentales. L’état de l’art en la matière pourrait d’ores et déjà aboutir à une inconsistance du SM (voir la section 6 de [5] pour les anomalies dans le secteur du B).

Du point de vue plus théorique de la physique du B, la masse élevée du quark b ($m_b \sim 4$ GeV) semblerait être un atout puisqu’elle permet de réaliser un développement perturbatif en α_s , où $\alpha_s(\overline{m}_b) \sim 0.22$. Cependant, que ce soit pour la théorie des perturbations ou pour les théories effectives à basse énergie, la preuve formelle de la justesse de ces méthodes n’est pas fournie. Ainsi, si nous souhaitons calculer théoriquement un paramètre fondamental du SM en utilisant une mesure expérimentale, il sera le plus souvent impossible de quantifier le biais systématique (si celui-ci existe), à cause de l’utilisation de ces cadres de travail. De plus, il pourrait être argumenté que l’incompatibilité entre les prédictions de deux modèles n’implique pas la remise en cause de la théorie sous-jacente. Une méthode de résolution *ab initio* de la *Chromodynamique Quantique (QCD)* dans son domaine de basse énergie a été formulée en 1974 par Wilson [6]. Cette méthode consiste à résoudre les équations hautement non-linéaires de la théorie de jauge responsable de l’interaction forte, et ce dans un espace Euclidien discrétisé ; c’est ce qui est nommé la *Chromodynamique Quantique sur réseaux (LQCD)*. L’exactitude des calculs théoriques par cette approche numérique est fortement corrélée à la puissance de calcul des ordinateurs. Ainsi, au cours du développement exponentiel de la puissance de calcul numérique ces 60 dernières années, les prédictions de la LQCD sont devenues comparables avec celles des modèles de QCD perturbative traditionnelle, et finale-

ment meilleures dans certains cas, en particulier dans le régime de basse énergie, marqué par le confinement des quarks dans les hadrons et la brisure spontanée de la symétrie chirale, de nature essentiellement non-perturbative. L'entrée des supercalculateurs dans le domaine *Exascale*² promet ainsi une montée en puissance de l'importance des travaux menés en LQCD pour la recherche de physique BSM.

Le travail exposé dans ce mémoire de thèse présentera ma contribution en LQCD à la phénoménologie du quark bottom, qui s'inscrit dans le contexte plus large de la recherche de physique au-delà du modèle standard. Nous verrons en premier lieu une introduction succincte aux calculs sur réseaux (chapitre I), et en particulier, comment et pourquoi ces calculs numériques nous permettent de passer outre les difficultés usuelles de la QCD à basse énergie. Spécifiquement, lors de l'étude des états liés de l'interaction forte, nous nous évertuerons dans ce premier chapitre à détailler l'action de Wilson-clover qui a été utilisée ici pour simuler le Lagrangien de la QCD. Nous présenterons en outre les objets clés de la QCD sur réseau, que sont les corrélateurs, et qui nous serviront tout au long de ce manuscrit.

La LQCD, comme toutes les autres méthodes de régularisation d'une théorie des champs, a besoin d'être renormalisée. Sans renormalisation adéquate, il est impossible de faire correspondre les grandeurs expérimentales avec les paramètres fondamentaux déterminés après un calcul théorique. Je discuterai donc dans le chapitre II d'un travail préliminaire que j'ai effectué pendant ma première année de thèse sur le schéma de renormalisation *RI-SMOM*³. Cette méthode n'a longtemps été étudiée qu'en la couplant à une sélection démocratique des impulsions fixant la cinématique des fonctions de Green des quarks. Bien que prometteuse, cette méthode de renormalisation n'a pas pu aboutir à des résultats publiables, pour des raisons que nous évoquerons également dans ce chapitre. De fait, nous verrons dans cette partie les difficultés soulevées par ce schéma de renormalisation par rapport aux autres usuellement utilisés. Je présenterai également quelques pistes pour surmonter les difficultés que j'ai rencontrées pour la suppression des invariants hyper-cubiques $\mathcal{H}_4$. Ces travaux, discutés dans le cadre d'un groupe de travail sur les méthodes de renormalisation pour la LQCD, m'ont permis d'être invité à participer à une publication (en préparation) de ce groupe.

J'ai, dans une troisième partie (III), porté mon attention sur la phénoménologie du quark b. Nous verrons alors quels éléments de cette physique relativement riche sont à la portée des calculs sur réseaux. Nous consacrerons ce chapitre à expliquer (i) les enjeux et les moyens pour augmenter la précision de certaines quantités comme $|V_{ub}|$ et $|V_{cb}|$, deux des éléments de la matrice CKM, ou encore (ii) les rapports d'embranchements qui conduisent aux anomalies dans le secteur du B, qui restent encore aujourd'hui l'une des pistes la plus sérieuse pour mettre en exergue l'inconsistance éventuelle du SM. Cela sera fait à l'aide des quantités de la physique hadronique $\mathcal{G}(w)$ et $\mathcal{F}(w)$, facteurs de forme hadroniques associés aux transitions $B \rightarrow D$ et $B \rightarrow D^*$.

L'objectif du dernier chapitre (IV) sera de faire le lien entre les quantités calculées sur réseaux (vues dans le chapitre I) et les facteurs de formes hadroniques (vus dans le chapitre III). Si le coût principal du calcul sur réseaux revient avant tout à la simulation des champs gluoniques et fermio-

2. 10^{18} opérations sur nombres flottants à la seconde.

3. Par ailleurs, la renormalisation de certaines des quantités calculées pendant ma thèse sera présentée au chapitre IV, et cela illustrera *a posteriori* l'utilité de la discussion de ce chapitre pour la LQCD.

niques, c'est bien ce lien entre quantités natives du réseau et quantités physiques qui demande le plus de compréhension et d'analyse des données. Et c'est à ce lien que j'ai consacré les deux dernières années de ma thèse. Les données étant, comme nous le verrons, quelques peu bruyantes ou imparfaites, nous avons utilisé des méthodes d'amélioration et d'adoucissement comme la résolution du *Problème aux Valeurs Propres Généralisées (GEVP)*, ou encore l'amélioration de Symanzik de l'action et des courants de quark, que nous utiliserons alors. En outre, il faudra établir un lien entre les grandeurs physiques dans des espaces finis et discrets et les grandeurs de notre Univers qui, au moins dans le référentiel du laboratoire, semble un espace bel et bien infini et continu. Ce chapitre présentera l'ensemble des résultats obtenus durant cette thèse, et discutera aussi de leur validité. En effet, même si la LQCD ne comporte pas d'hypothèse incontrôlée, quelques biais restent présents. C'est typiquement le cas lors du choix des intervalles de validité des formules décrivant les corrélateurs en fonction du temps (formules détaillées au chapitre I). Néanmoins, il sera possible de mesurer ces biais et de les encadrer dans des erreurs systématiques. Nous ferons également la preuve de la validité de notre extrapolation à la limite du continu. Ces deux dernières étapes doivent être menées rigoureusement pour que des résultats issus de calculs sur réseaux puissent passer les critères du *Flavour Lattice Averaging Group (FLAG)*, qui permettent aux résultats d'être pris comme référence par la communauté de physique des particules. Nous concluons ce chapitre en discutant des implications de ces résultats sur la phénoménologie du B, et sur la recherche d'une nouvelle physique.

Pour finir ce manuscrit, un dernier chapitre (**Conclusion générale**) proposera un bref récapitulatif et une synthèse des résultats obtenus au cours de ces trois années de thèse. Si mes travaux ont porté principalement sur un canal précis de désintégration pour la phénoménologie du B, mes analyses pourraient se prolonger dans un autre secteur de saveur de quark ou bien dans l'amélioration des résultats via notamment la simulation de réseaux plus grands et plus fins. Les résultats que j'ai obtenus pourraient en effet justifier l'accès aux grands centres de calculs Européens, en dépit d'un coût en temps de calcul élevé. En outre, mes travaux sur le calcul des constantes de renormalisation pourraient être poursuivis, de manière à obtenir une meilleure précision sur ces grandeurs (qui impactent de nombreuses autres quantités).

Chapitre I

QCD sur réseau, champs et observables

Grâce à la QCD sur réseau, il est possible d'étudier des observables de l'interaction forte de nature extrêmement vaste, allant de l'étude de la masse du nucléon à l'étude du diagramme de phase de la QCD [7] (par exemple pour l'étude de la transition du plasma quark-gluon), en passant par les *Parton Distribution Functions (PDF)* [8], qui rendent compte de la distribution en énergie des quarks et des gluons dans les hadrons. La LQCD est aussi un champ de la physique des particules très vaste, et ce, par au moins trois aspects. Premièrement, pour tenter de contourner le problème posé par la constante de couplage de l'interaction forte qui croît à basse énergie, la QCD sur réseau va discrétiser l'espace-temps pour calculer non-perturbativement (et avec un nombre fini de degrés de liberté) les amplitudes hadroniques. Ainsi, toute la théorie des champs sur laquelle repose la QCD standard doit être reformulée ; il y aura donc une base théorique très importante à établir. Deuxièmement, la manière de discrétiser la *Théorie Quantique des Champs (TQC)* n'étant pas unique, il existe aussi un large champ d'étude empirique sur les différences entre les méthodes de discrétisation utilisées. Troisièmement, il est possible de se rendre compte, en visualisant les données produites dans cette discipline, qu'un large éventail de techniques existe pour traiter ces données. Tout cela fait appel à des domaines de compétence plus ou moins éloignés de la physique, comme le *Big Data*, la *Programmation Parallèle* ou encore la statistique. Ainsi, il est à la fois difficile de maîtriser l'ensemble de ces connaissances et facile de se perdre dans tous ces champs d'investigation. C'est pourquoi je me focaliserai ici uniquement sur les quelques grandeurs, techniques et travaux relatifs à mon travail.

Dans ce qui suit (I. 1), je commence par rappeler le problème posé par la QCD à basse énergie, et comment l'approche moderne de la QCD sur réseau (basée sur le formalisme des intégrales de chemin) permet de résoudre ce problème. Je discute ensuite (I. 2) la question de la discrétisation de l'action de la QCD. Nous verrons comment la discrétisation de l'espace-temps modifie la TQC et comment les gluons et les fermions sont simulés sur le réseau en pratique. Nous discuterons également les procédures d'adoucissement pour la réduction du bruit dans les champs simulés numériquement. Je présente ensuite (I. 3) le calcul des fonctions de corrélations à deux et à trois points, utilisées dans mes travaux. Je reviens à cette occasion sur le formalisme des intégrales

de chemin pour expliquer comment le lien est établi entre les champs de la QCD, les grandeurs physiques et certaines observables expérimentales. Ces deux sections introduisent de fait les principaux concepts clés et techniques spécifiques utilisées dans le cadre de mes travaux. Je conclus ce chapitre (I. 4) par un rapide panorama des grands champs de recherche en QCD sur réseau et des équipes dans le monde.

Notons que la manière de définir les objets et les notations utilisées dans ce chapitre sont grandement inspirées du livre de Gattringer et Lang [9], livre que j’ai utilisé tout au long de ma thèse.

I. 1 Motivations pour la QCD sur réseau

I. 1.1 Le problème de la QCD à basse énergie

Densité lagrangienne

La QCD, comme nous l’avons dit, est la théorie de jauge qui tente de mettre en équation l’interaction forte. Cette théorie est considérée comme l’une des théories les plus élégantes qui soient établies aujourd’hui. En effet, si de très nombreuses quantités peuvent être déduites de la QCD (par exemple, les masses de plusieurs centaines de mésons et de baryons avec leurs états excités), le nombre de paramètres fondamentaux du Lagrangien de la QCD est de sept¹ : les six masses de quarks et la constante de couplage de l’interaction forte. Cette théorie élégante est résumée dans l’expression de sa densité lagrangienne,

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \bar{\psi}_{\alpha,A}^f(x) \left[i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} D_\mu(x)_{AB} - m_f \delta_{\alpha\beta} \delta_{AB} \right] \psi_{\beta,B}^f(x), \quad (\text{I.1})$$

où $F_{\mu\nu}^a$ est le tenseur de force de la QCD, l’indice a est sommé et est itéré sur les huit générateurs du groupe $SU(3)_C$, dans sa représentation fondamentale formée par les matrices de Gell-Mann λ^a . Les champs ψ_f représentent les fermions (ici les quarks pour une saveur f donnée) ; pour ces derniers, il y a sommation implicite sur les six saveurs f qui possèdent chacune leur masse m_f . Les indices α et β sont les indices de Dirac, A et B sont, pour leur part, ceux de couleur. Le terme D_μ est la dérivée covariante qui assure l’invariance locale de jauge du Lagrangien sous la symétrie $SU(3)$ de couleur et qui s’écrit

$$D_\mu(x)_{AB} = \partial_\mu \delta_{AB} - ig_s \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a(x)_{AB}. \quad (\text{I.2})$$

1. Si nous supposons nul le terme de violation CP dans le secteur hadronique, qui n’a pour l’heure pas été mis en évidence.

Dans cette équation, les champs A_μ^a , représentent les huit bosons vecteurs de la QCD, c'est-à-dire les gluons. Enfin, le dernier paramètre de la théorie est la constante de couplage de l'interaction forte g_s , sur laquelle nous allons revenir après avoir discuté les symétries de cette théorie.

Symétries de l'action

Comme toutes les théories de jauge, la QCD doit répondre à la contrainte que les propriétés physiques ne doivent pas dépendre de la jauge utilisée. L'action de la QCD doit être invariante sous la transformation de jauge qui s'écrit comme une transformation locale sur les indices de couleur. Cela signifie que nous aurons la même action après la multiplication en chaque point de l'espace-temps du champ de quarks par une matrice $\Omega \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{C})$. Ces matrices étant, par ailleurs, unitaires et de déterminant +1, nous imposons donc que l'action de la QCD soit invariante selon les transformations du groupe SU(3), dont les matrices Ω sont des éléments de ce groupe. Ces transformations s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = \Omega(x)\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)\Omega^\dagger(x), \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x),\end{aligned}\tag{I.3}$$

où la transformation du champ gluonique A_μ est imposée par l'invariance de l'action $S[\bar{\psi}', \psi', A'] = S[\bar{\psi}, \psi, A]$. Pour le champ gluonique, la dérivée covariante et le tenseur de force, ces transformations conduisent respectivement à

$$\begin{aligned}A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = \Omega(x)A_\mu(x)\Omega^\dagger(x) + i(\partial_\mu\Omega(x))\Omega^\dagger(x), \\ D_\mu(x) &\rightarrow D'_\mu(x) = \partial_\mu + ig_s A'_\mu = \Omega(x)D_\mu(x)\Omega^\dagger(x), \\ F_{\mu\nu}(x) &\rightarrow F'_{\mu\nu}(x) = \Omega(x)F_{\mu\nu}(x)\Omega^\dagger(x).\end{aligned}\tag{I.4}$$

Constante de couplage et renormalisation

La constante de couplage de l'interaction forte g_s , ou constante « nue », n'est cependant pas celle utilisée en phénoménologie. En effet, le calcul de l'amplitude d'un processus en QCD perturbative fait appel à un développement en série en puissances de g_s où chaque terme sera vu comme une perturbation. Dans le langage des graphes de Feynman, le premier terme de la série est dit à l'ordre des arbres, tandis que les termes suivants sont dits à l'ordre d'une boucle, deux boucles, etc. Les états initiaux et finaux s'échangent des particules virtuelles et les boucles correspondent à un calcul d'intégrales généralisées dans l'espace des impulsions. Malheureusement, ces intégrales sont le plus souvent divergentes, et donc, sans un traitement mathématique adéquat, leur calcul ne permet pas de retranscrire la physique de l'interaction ; en effet, les résultats expérimentaux sont des nombres

finis ! Il est à noter que les divergences engendrées terme à terme ne peuvent pas se compenser dès lors qu'un nombre fini de termes est calculé dans une suite infinie.

La suppression de ces divergences est traitée par un schéma de renormalisation, dont le plus utilisé est le schéma $\overline{\text{MS}}$ (*Modified Minimal Subtraction*). Ce schéma, en supprimant les divergences, va également faire apparaître une dépendance d'échelle dans les constantes du Lagrangien de QCD. En particulier, pour la discussion qui nous intéresse ici, g_s devient une fonction de l'échelle d'énergie, μ , à laquelle a été faite la renormalisation ; où nous allons lui préférer la définition $\alpha_s(\mu) = \frac{g_s^2(\mu)}{4\pi}$. La dépendance en l'échelle μ est régie par l'équation du groupe de renormalisation

$$\mu \frac{d\alpha_s}{d\mu} = \beta[\alpha_s(\mu)] , \quad (\text{I.5})$$

où β , peut être calculée perturbativement à l'aide de

$$\begin{aligned} \beta(\alpha_s) &= -\beta_0 \frac{\alpha_s^2}{2\pi} - \beta_1 \frac{\alpha_s^3}{(2\pi)^2} + \dots , \\ \text{avec } \beta_0 &= 11 - \frac{2}{3}N_f \text{ et } \beta_1 = 51 - \frac{19}{3}N_f , \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

où N_f est le nombre de saveurs, de plus, les deux termes suivants sont présentés dans la référence [10]. Plusieurs méthodes de détermination du couplage α_s existent, par exemple grâce à la mesure du rapport de section efficace $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})/\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ à une certaine énergie. Cependant, la dépendance de ce rapport en α_s n'est connue que perturbativement. Toujours dans le domaine perturbatif de QCD, il est possible de déduire α_s à une échelle μ_2 à partir de la connaissance d' α_s à une échelle μ_1 , via

$$\frac{1}{\alpha_s(\mu_2)} = \frac{1}{\alpha_s(\mu_1)} + \frac{\beta_0}{2\pi} \ln \frac{\mu_1}{\mu_2} , \quad (\text{I.7})$$

Ainsi, dans le domaine perturbatif de QCD, il est possible de déterminer la forme du couplage de QCD, comme nous pouvons le voir dans la [Figure I.1](#). Si, à haute énergie, la constante de couplage tend vers zéro (ce qui est appelé la liberté asymptotique), *a contrario*, la forme ascendante de ce couplage dans le domaine de basse énergie est ce qui va nous intéresser, puisqu'à l'origine du développement de la QCD sur réseau. En effet, à mesure que l'échelle d'énergie diminue, la valeur d' α_s va augmenter, et ainsi, tous les développements perturbatifs (qui sont faits en fonction du couplage) deviennent de moins en moins précis, jusqu'à devenir simplement non valables. De plus, la détermination même de la constante de couplage devient impossible en deçà d'une certaine énergie, puisque sa détermination est également faite à l'aide d'un développement perturbatif. Pour finir, notons également que cette augmentation de α_s donne lieu au confinement des quarks et des gluons dans des états liés, blancs de couleur, que sont les hadrons. Par ailleurs, de nombreuses subtilités sur la renormalisation de QCD et sur la détermination théorique d' α_s , que nous n'avons pas développées ici, peuvent être trouvées dans la référence [11].

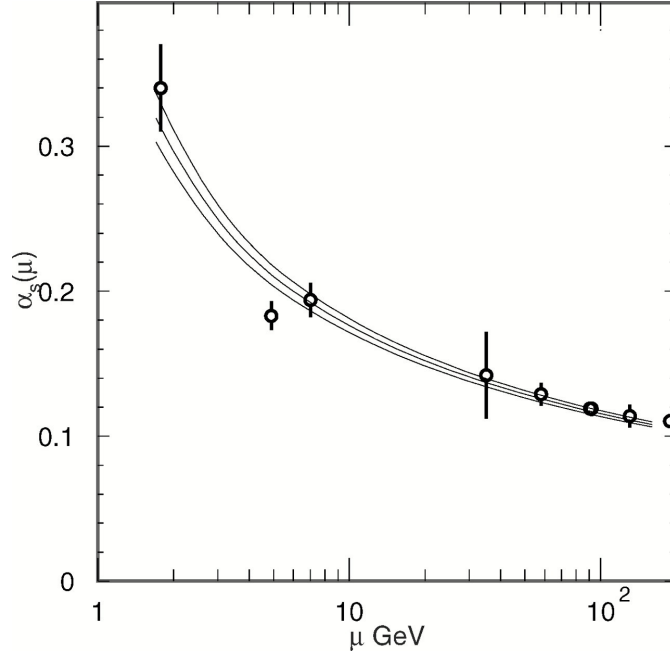


FIGURE I.1 – Moyenne des mesures expérimentales lors de collisions e^+e^- , et ajustements de α_s réalisés par [11].

L'échelle d'énergie qui caractérise le passage du domaine de basse énergie, non-perturbatif, au domaine perturbatif est noté Λ_{QCD} et il vaut environ 200 MeV (dans le schéma $\overline{\text{MS}}$ et avec $N_f = 5$). Nous pouvons voir dans la **Figure I.1** qu'à l'énergie $\mu \sim \Lambda_{\text{QCD}}$, nous avons α_s qui est à environ 20% de l'unité, traduisant ainsi cette transition vers le domaine non-perturbatif.

Limitations pour le calcul des quantités physiques

Comme nous l'avons dit, à basse énergie, si nous faisons un calcul perturbatif, alors la convergence est au mieux lente, et au pire non assurée. Dès lors, l'étude de certaines grandeurs physiques comme la masse des hadrons, ou toute autre grandeur appartenant à ce domaine non-perturbatif d'énergie, est assujettie à de nombreuses incertitudes et controverses sur leur déduction purement perturbative. En effet, les états liés que sont les hadrons sont nécessairement gouvernés par la dynamique de QCD à basse énergie. C'est pourquoi la compréhension théorique « rigoureuse » de la masse du proton est restée une énigme pendant plusieurs dizaines d'années : alors que celle-ci est d'environ 1 GeV, la masse moyenne pour les quarks *up* et *down* est seulement de 5 MeV [12], et donc $\sim 99\%$ de la masse du proton est due à l'énergie des interactions fortes qui ont lieu en son sein ; dit autrement, tronquer les interactions des quarks et des gluons qui composent le proton revient à faire une erreur sur la plus grande partie de sa masse.

C'est pour répondre à cette difficulté théorique qu'un nouveau moyen de régularisation des divergences dans les diagrammes à boucle a été introduit par Wilson en 1974. Nous allons donc

voir dans la partie suivante les avantages que confère cette théorie dans le domaine de basse énergie.

I. 1.2 De la QCD standard à son homologue sur réseau

Nous avons vu précédemment que le problème des calculs à basse énergie était dû aux divergences des boucles de particules virtuelles et, en particulier, leurs intégrales sur l'ensemble des impulsions possibles. Si nous pouvions rendre cet ensemble des possibles fini, donc dénombrable, et résoudre une à une chaque interaction analytiquement, il n'y aurait plus de divergences et donc plus de nécessité de redéfinir la constante de couplage de l'interaction forte. Ce faisant, réduire le champ des possibles nous ferait perdre une quantité d'information sur l'interaction, amenant ainsi un biais sur le calcul des grandeurs déduites. En outre, il faudrait acquérir la certitude que l'information perdue représente une part non significative de l'information totale. En plus de la perte d'information, il faudrait également que celle-ci diminue à mesure que la taille de l'échantillon de l'espace des possibles augmente.

Espace fini et discret

Afin d'intuiter ce nouveau procédé de régularisation, nous allons raisonner dans l'espace des positions et non plus dans celui des impulsions. Le concept de boucle, qui apparaît dans les diagrammes d'ordre supérieur, est dû à la probabilité qu'à une paire particule-antiparticule d'émerger spontanément du vide de QCD, d'interagir avec les particules réelles (ou d'autres particules virtuelles), puis d'être réabsorbée par ce même vide. L'émergence de telles particules virtuelles sera limitée en des lieux précis dans un espace discret. De plus, l'interaction forte ayant une portée d'interaction finie et relativement courte, il sera également possible de se restreindre à un sous-espace borné et centré autour du point d'interaction considéré. Ces deux considérations nous donnent donc un nombre fini de sites où les particules virtuelles peuvent apparaître.

La LQCD, comme moyen de régularisation, fait le choix de prendre un univers discrétisé et qui possède une distance fixe entre deux points consécutifs. Cette distance séparant deux points est appelée la maille du réseau et est notée a . Contrairement à ce qui peut être fait dans d'autres simulations numériques, la maille du réseau n'est pas fixée comme un paramètre du réseau : ce qui est fixé en LQCD est le paramètre $\beta = 6/g_s^2$, avec g_s la constante de couplage de l'interaction forte. Ensuite, la maille peut être déterminée soit à l'aide du potentiel de l'interaction forte (qui est calculé avec le champ de jauge simulé) et du paramètre dit de *Sommer* [13], soit en comparant une quantité physique calculée sur réseau avec sa valeur expérimentale : en effet, les quantités calculées sur réseau sont sans dimension et exprimées en fonction de la maille et si nous simulons un pion, la masse que nous trouverons pour ce méson sera $am_\pi^{\text{réseau}}$; pour déterminer a à l'aide de la masse du pion, nous cherchons donc la valeur de a qui conduise à $m_\pi^{\text{réseau}} = m_\pi^{\text{expérimental}}$. La taille du réseau, quant à elle, est fixée en prenant un certain nombre de points dans chaque dimension d'espace-temps. Certains réseaux utilisent le même nombre de points dans toutes les dimensions,

mais le plus souvent, ce nombre n'est pas le même pour les dimensions spatiales (N_L selon chaque axe) et la dimension temporelle (N_T). Il est en particulier très courant de trouver des réseaux avec $N_T = 2N_L$ dans la littérature ; ce choix se comprendra mieux lorsque nous parlerons plus loin des corrélateurs.

Un réseau est donc défini par son nombre de points dans chaque dimension, N_L et N_T , et la maille de son réseau a , ainsi que des conditions aux limites (en général, périodiques). Il en découle que le nombre total de points Λ de ce réseau, sa longueur L , son extension temporelle T et son volume V sont donnés respectivement par

$$\Lambda = N_L^3 \times N_T, \quad L = aN_L, \quad T = aN_T, \quad V = a^4(N_L^3 \times N_T) = a^4\Lambda. \quad (\text{I.8})$$

Nous expliquerons dans la suite de ce chapitre, comment les objets physiques sont mis sur réseau et comment ils interagissent entre eux. Mais pour l'instant, terminons notre discussion sur le comportement de la limite basse énergie (discutée plus haut) dans le contexte d'un réseau. Dans l'univers discret qu'est le réseau, deux particules ne peuvent être plus proches que la maille du réseau a . Dans l'espace dual des impulsions, cela revient à avoir une interaction d'une certaine intensité entre ces deux particules. Si nous pouvions rapprocher ces deux particules, ceci reviendrait (dans l'espace dual) à avoir une interaction de plus faible intensité : en effet, une plus faible distance implique une plus grande échelle d'énergie (la quantité de mouvement est inversement proportionnelle à la distance), et au vu de notre discussion sur α_s , nous avons établi qu'augmenter l'énergie à laquelle a lieu l'interaction correspondait à une intensité diminuée de cette dernière. Autrement dit, en rapprochant les particules, donc en diminuant la maille du réseau, nous allons prendre en compte des perturbations de plus en plus fines. Ceci signifie que discrétiser l'espace-temps avec une maille a , pour la QCD, revient à décrire des quantités dont l'échelle des longueurs mise en jeu pour cette énergie est plus grande que cette maille.

L'augmentation de la puissance de calcul ces dernières décennies a permis d'augmenter le nombre de points Λ d'un réseau, donc de diminuer la valeur de a tout en gardant des valeurs L et T suffisamment grandes pour contenir les processus physiques. Typiquement, le nombre de points N_L et N_T (suivant les dimensions spatiales et temporelles) varie d'une vingtaine à presque deux cents, conduisant à des tailles de réseau de l'ordre de quelques fermis. C'est la diminution de a qui explique la confiance grandissante dans les résultats issus de la LQCD. En effet, cette diminution réduit les erreurs de discrétisation, et donc l'incertitude sur les grandeurs physiques déduites du réseau. Ainsi, dans les cas perturbatifs où il est possible de comparer la LQCD et des méthodes perturbatives (telles que les analyses globales de QCD), les incertitudes obtenues par les calculs LQCD rivalisent avec celles de QCD perturbative, et sont même parfois plus faibles ; une illustration est donnée par le calcul des *Diffusions Inélastiques Profondes (DIS)* via le calcul des PDF [14]. Cependant, même si la diminution de la maille donne une meilleure confiance dans les résultats issus de la LQCD, certains processus ne peuvent avoir lieu qu'en deçà d'une valeur de la maille caractéristique. De manière générale, si nous souhaitons étudier, par exemple, la désintégration d'un méson sur le réseau, il faudra que la maille soit très petite devant la constante

de désintégration de ce méson, i.e. $a \ll c\tau$. Les réseaux actuels, hors quelques cas particuliers, possèdent tous des mailles inférieures à 0.1 fm. Ceci correspond à des $\tau \sim 10^{-25}$ s, alors que la demi-vie des hadrons est très variable, avec par exemple $\sim 1 \times 10^{-8}$ s pour le K^+ et $\sim 8.5 \times 10^{-17}$ s pour le π^0 . Ceci explique bien pourquoi la LQCD donne d'excellents résultats sur la spectroscopie des hadrons. Ainsi, combiné à notre discussion sur les interactions avec les particules virtuelles, ceci montre pourquoi la diminution de la maille des réseaux n'est plus aujourd'hui qu'un raffinement de la précision des résultats pour la spectroscopie des hadrons. Néanmoins, nous pouvons donner un exemple où la maille n'est pas suffisante pour calculer certaines grandeurs, tel le quark b qui reste très difficile à simuler à cause de sa masse. En effet, dans le schéma de renormalisation $\overline{\text{MS}}$, nous avons $m_b \simeq 4.2$ GeV, ce qui conduit pour une maille typique (dans notre étude en physique du B) de 0.06 fm à $am_b \simeq 1.2$, alors que les erreurs de discrétisation (pour l'action que nous avons utilisée et que nous détaillerons en I. 2) comportent des termes du type $\mathcal{O}((am_b)^n)$, où n dépend de la méthode de discrétisation. Nous voyons alors qu'avec une telle maille, la simulation du quark b et le calcul des quantités liées à ce quark donne des erreurs de discrétisation divergentes ; nous verrons dans la section IV. 1.3 comment contourner ce problème, malgré la complication posée par la maille.

LQCD via le formalisme des intégrales de chemin

Les intégrales de chemin conduisent à la formulation diagrammatique de la TQC. Nous expliquons ci-après comment ces dernières permettent à la LQCD d'être à même de résoudre les problèmes de la QCD non-perturbative.

L'idée des intégrales de chemin est souvent attribuée à R. Feynman, puisqu'en 1948 il va synthétiser les connaissances sur ces dernières et formaliser leur utilisation en physique des particules [15]. Afin d'expliquer ce qu'est une intégrale de chemin, nous allons partir de la *Mécanique Quantique* (MQ) et en particulier, de son équation fondamentale, l'équation de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle. \quad (\text{I.9})$$

Cette équation différentielle régit l'évolution du champ ψ sous l'action d'un opérateur Hamiltonien $\hat{H}$, qui ne dépend pas explicitement du temps. En la résolvant, nous pouvons obtenir l'amplitude de probabilité que le champ ψ passe d'un état initial $|I\rangle$ au temps t_i vers un état final $|F\rangle$ au temps t_f , comme suit (avec $T = t_f - t_i$) :

$$\langle F|I\rangle = \langle F| \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} T\right) |I\rangle. \quad (\text{I.10})$$

En découpant l'exponentielle sur des intervalles temporels très courts et en introduisant les états intermédiaires entre $|I\rangle$ et $|F\rangle$, il est possible de récrire l'amplitude de la transition comme

$$\langle F|I\rangle = \int d\vec{x} \exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\psi(\vec{x})]\right). \quad (\text{I.11})$$

Dans cette nouvelle formulation, S est l'action de la particule libre obtenue à partir de l'Hamiltonien $\hat{H}$, et $d\vec{x}$ représente l'ensemble des positions pouvant être prises par le champ ψ entre les deux états. Cette réécriture met en exergue une intégrale sur l'ensemble des chemins pouvant être pris par la particule, d'où le nom donné à ce formalisme. Néanmoins, en TQC, nous avons à réaliser la seconde quantification. C'est sur ce point qu'ont notamment porté les travaux de Feynman (dans ce domaine), afin d'utiliser ces intégrales en physique des particules ; une démonstration complète et la généralisation à la TQC peuvent être trouvées dans [15]. Ces démonstrations aboutissent à la formulation fonctionnelle des intégrales de chemin suivante :

$$\langle F|I\rangle = \int \mathcal{D}\psi \exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\psi]\right). \quad (\text{I.12})$$

Dans un univers discret, $\mathcal{D}\psi$ est le produit $\prod_n d\psi(n)$, avec n les points de cet espace. Dans le continu, $\mathcal{D}\psi$ est la limite du cas discret avec un nombre de points qui tend vers l'infini et une distance entre les points qui tend vers zéro.

Nous pouvons maintenant introduire un opérateur O entre les états I et F . Cet opérateur ne dépendra que du champ ψ et sera introduit au temps t_o . Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} \langle F|O|I\rangle &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\psi O[\psi] \exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\psi]\right), \\ \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\psi \exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\psi]\right), \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

où la fonction de partition $\mathcal{Z}$ a pour but de normaliser les états pour obtenir une amplitude de probabilité. Soulignons que cette formule se généralise à n'importe quel nombre d'opérateurs entre les deux états, du moment que ces opérateurs sont ordonnés en temps.

Voyons maintenant pourquoi ce formalisme est bien adapté pour la LQCD. Pour rappel, en TQC, l'intégrale sur les chemins possibles de la particule est remplacée par une intégrale fonctionnelle sur les valeurs prises par les champs représentant les particules. L'intégrale devrait être faite avec un nombre infini de champs, ce qui n'est bien évidemment pas possible en pratique. Pour contourner ce problème, la TQC perturbative réalise une expansion en série de l'intégrale en fonction de l'intensité de l'interaction. L'utilisation du théorème et des contractions de Wick permettent de résoudre ces intégrales terme à terme, via les diagrammes de Feynman. En QCD non-perturbative, comme la convergence de l'expansion n'est pas assurée, cette approche n'est pas possible. Nous avons vu que la LQCD permettait de résoudre ce problème, et par ailleurs, le cadre de l'espace-temps fini et discret assure que le nombre de champs à calculer est fini. Quoique encore très grand, il serait théoriquement possible de calculer l'ensemble des chemins numériquement ; toutefois, au regard du temps de calcul, ceci est impossible en pratique. Comme tous les chemins n'ont pas la même contribution, l'astuce consiste à ne calculer que ceux qui auront le plus grand impact sur l'amplitude souhaitée.

Approche numérique : chaîne de Markov et espace Euclidien

Pour réaliser la sélection des chemins importants, il est nécessaire d'appliquer une pondération de ces divers chemins. Ceci peut être réalisé en interprétant l'exponentielle de l'action comme un poids de Boltzman. Cependant, comme nous pouvons le voir, l'exponentielle est imaginaire pure, ce qui signifie que le facteur pondérateur serait oscillant. Le seul moyen de contourner ce problème numérique est de faire la rotation de Wick de l'espace de Minkowski vers l'espace Euclidien. Pour cela, nous redéfinissons notre temps réel τ comme un temps imaginaire $t = i\tau$, ce qui rend l'exponentielle réelle, et change la métrique de Minkowski en une matrice unitaire 4×4 ; c'est la métrique Euclidienne. Dans le même temps, sur le réseau, tout se passera comme si le temps Euclidien choisi était réel. En effet, tous les objets établis sur réseau (sur la base des intégrales de chemin) sont définis, de fait, dans cette nouvelle formulation. Ainsi, la consistance de la théorie est préservée.

Une fois cette rotation effectuée, nous pouvons utiliser une *chaîne de Markov* qui s'appuiera sur l'exponentielle de l'action S [16]². Avoir recours au temps Euclidien permettra, contrairement au temps imaginaire, la convergence du processus Markovien de sélection de l'action représentant un système physique. En pratique, un chemin (une combinaison de champs possibles) va être simulé aléatoirement et l'action de ce système va être calculée. Cette première action va ensuite être utilisée pour simuler, aléatoirement, un nouveau chemin, qui aura, et c'est là l'intérêt des processus Markoviens, une action généralement plus faible (une minimisation systématique convergerait vers le cas classique, mais avec les fluctuations quantiques, l'algorithme accepte parfois une action plus élevée). Cette procédure est répétée un certain nombre de fois et l'ensemble des itérations constitue la chaîne de Markov. Après un certain nombre d'itérations, l'action des chemins simulés converge vers un minimum local, pour lequel les champs sont alors supposés représenter un état physiquement acceptable, car plus probable : l'ensemble des valeurs de ces champs en chaque point du réseau est appelé une *configuration*.

Ayant maintenant présenté la motivation et le formalisme générique utilisé pour la LQCD, la section suivante entre dans le détail de la discrétisation de l'action (de la QCD standard).

I. 2 Action de QCD et discrétisation

Dans cette partie nous allons reprendre les définitions de la partie I. 1.1 du Lagrangien de QCD et de ses symétries. Puis, nous allons voir comment discrétiser ces définitions pour former le paradigme de la LQCD. Nous discrétisons l'action de la QCD (Eq. I.1) en deux temps, avec d'abord la partie fermionique, puis la partie gluonique.

2. De nombreux algorithmes, en premier lieu l'algorithme de Metropolis [17], puis d'autres plus performants, par exemple [18; 19], ont permis de simuler des réseaux plus réalistes.

I. 2.1 Discrétisation de l'action

Dans ce qui suit, nous dénotons la partie fermionique de l'action S_F et sa contrepartie gluonique S_G . La variable continue x est remplacée par une variable discrète n , qui pourra occuper tous les sites du réseau (que nous avons notés Λ en introduction). L'intégrale sur x de la densité lagrangienne, [Eq. I.1](#), devient une somme sur n ,

$$\int d^4x \rightarrow a^4 \sum_{n \in \Lambda} . \quad (\text{I.14})$$

Dans cette réécriture, le facteur a^4 permet de garder la dimensionnalité de l'opérateur.

Discrétisation de l'action fermionique

L'action fermionique discrétisée s'écrit

$$\begin{aligned} S_F &= a^4 \sum_{n \in \Lambda} \bar{\psi}(n) i \gamma_\mu [\partial_\mu + ie A_\mu(n) + m] \psi(n) \\ &= a^4 \sum_{n \in \Lambda} \bar{\psi}(n) i \left(\sum_\mu \gamma_\mu \frac{\psi(n + \hat{\mu}) - \psi(n - \hat{\mu})}{2a} + m \psi(n) \right) - \bar{\psi}(n) \gamma_\mu e A_\mu(n) \psi(n) . \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

Dans cette équation, $\hat{\mu}$ représente la distance entre deux points voisins dans la direction μ séparés de la distance a ; cette dernière est pour rappel la maille du réseau qui caractérise la finesse de la discrétisation (il s'agit du régulateur ultraviolet de la théorie). Ainsi, il est possible de noter $\hat{\mu} = a \vec{e}_\mu$ où $\vec{e}_\mu$ est le vecteur de base dans la direction μ de l'espace-temps orthonormé. Cette discrétisation n'utilise qu'un développement à l'ordre un de la dérivée du champ ψ autour du point n . Ceci implique qu'il y aura une erreur systématique de l'ordre $\mathcal{O}(a)$ sur toutes les quantités physiques déduites de cette action.

Ces erreurs ne sont pas les seules, et certaines posent des problèmes théoriques (dans cette construction de l'action discrétisée de la QCD). De fait, la première conséquence de cette discrétisation est une brisure de la symétrie $SU(3)$ de couleur. Pour montrer cela, reprenons l'invariance de l'action pour un fermion libre. Nous aurons dans ce cas des produits de champs du type

$$\bar{\psi}(n) \psi(n + \hat{\mu}) \longrightarrow \bar{\psi}'(n) \psi'(n + \hat{\mu}) = \bar{\psi}(n) \Omega^\dagger(n) \Omega(n + \hat{\mu}) \psi(n + \hat{\mu}) . \quad (\text{I.16})$$

Il est aisé de voir que ces produits ne sont plus invariants de jauge. La proposition faite par Wilson [\[6\]](#) pour résoudre ce problème est de connecter les champs fermioniques de la théorie discrétisée entre eux par un champ $U_\mu(n) \in SU(3)$. Pour rétablir l'invariance de l'action, ces nouveaux champs doivent se transformer de la manière suivante :

$$U_{\pm\mu}(n) \rightarrow U'_{\pm\mu}(n) = \Omega(n) U_{\pm\mu}(n) \Omega^\dagger(n \pm \hat{\mu}) . \quad (\text{I.17})$$

La matrice $U_{\pm\mu}(n)$ connecte le champ ψ au point n à son voisin dans la direction $\pm\mu$, donc au point $n \pm \hat{\mu}$. Pour simplifier la notation, le signe ‘+’ sera, lorsque cela ne prête pas à confusion, omis. Du fait que ces nouveaux champs connectent entre eux les fermions, ils portent le nom de *Variables Liens* ou simplement liens.

L’ajout de ces liens entre les champs fermioniques conduit à la nouvelle action fermionique

$$S_F [\bar{\psi}, \psi, U] = a^4 \sum_{n \in \Lambda} \bar{\psi}(n) \left(\sum_{\mu} \gamma_{\mu} \frac{U_{\mu}(n) \psi(n + \hat{\mu}) - U_{-\mu}(n) \psi(n - \hat{\mu})}{2a} + m \psi(n) \right) . \quad (\text{I.18})$$

Le fait que la maille du réseau apparaisse avec une puissance quatre est dû à la discrétisation de l’intégrale ; ce terme permet de plus d’adimensionner l’action. Au regard de la théorie dans le continu, les variables liens $U_{\mu}(n)$ sont assimilées à des transporteurs du champ de jauge. Ceci conduit à définir leurs algèbres selon le champ de jauge A_{μ} comme suit :

$$U_{\pm\mu}(n) = \exp(\pm i a A_{\mu}(n)) = 1 \pm i a A_{\mu}(n) + \mathcal{O}(a^2) . \quad (\text{I.19})$$

Notons que si nous utilisons ce développement dans la formule de l’action discrétisée, [Eq. I.18](#), nous retrouvons les termes correspondants à l’interaction entre le champ fermionique et le champ gluonique du continu :

$$\begin{aligned} \frac{U_{\mu}(n) \psi(n + \hat{\mu}) - U_{-\mu}(n) \psi(n - \hat{\mu})}{2a} &\sim \frac{1 + i a A_{\mu}(n) \psi(n + \hat{\mu}) - 1 + i a A_{\mu}(n) \psi(n - \hat{\mu})}{2a} \\ &\sim \frac{i A_{\mu}(n) \psi(n + \hat{\mu}) + i A_{\mu}(n) \psi(n - \hat{\mu})}{2} \\ &\xrightarrow{a \rightarrow 0} i A_{\mu}(n) \psi(n) . \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

Ainsi, bien que nous ayons introduit ces variables liens dans le but primaire de restaurer l’invariance de jauge de l’action en espace discret, il est évident que ces liens ont un sens plus fort ; c’est ce que nous discutons dans ce qui suit.

Discrétisation de l’action gluonique

Nous avons montré qu’une variable lien U pouvait se retranscrire en un champ A en prenant la limite du continu de U . Pour former une quantité invariante de jauge, il est possible de choisir la trace d’un chemin refermé de k variables U . Pour montrer cela, nous allons prendre un chemin

quelconque de liens P , puis, ce chemin se refermera sur lui-même pour former une boucle L , de telle sorte que :

$$\begin{aligned} \text{Tr} [P [U]] &= \text{Tr} \left[U_{\mu_0}(n_0) U_{\mu_1}(n_0 + \hat{\mu}_0) \cdots U_{\mu_{k-1}}(n_0 + \sum_i^{k-2} \hat{\mu}_i) \right], \\ P \rightarrow L &\Rightarrow n_0 + \sum_i^{k-2} \hat{\mu}_i = n_0. \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

Il est alors possible de vérifier l'invariance de jauge de la boucle L , avec

$$\begin{aligned} \text{Tr} [L [U']] &= \text{Tr} \left[\Omega(n_0) U_{\mu_0}(n_0) \Omega^\dagger(n_0 + \hat{\mu}_0) \Omega(n_0 + \hat{\mu}_0) U_{\mu_1}(n_0 + \hat{\mu}_0) \right. \\ &\quad \left. \cdots U_{\mu_{k-1}}(n_0 + \sum_i^{k-2} \hat{\mu}_i) \Omega^\dagger(n_0 + \sum_i^{k-1} \hat{\mu}_i) \right] \\ &= \text{Tr} [\Omega(n_0) L [U] \Omega^\dagger(n_0)] = \text{Tr} [L [U]]. \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

Ce résultat est vrai quelle que soit la boucle que nous choisissons.

Historiquement, et pour des raisons de temps de calcul, le choix s'est porté naturellement sur la boucle la plus simple possible, appelée *Plaquette* [6], qui correspond au parcours le long d'un carré de coté a , comme représenté en [Figure I.2](#). Cette plaquette se note $U_{\mu\nu}$ et est définie de la manière suivante :

$$U_{\mu\nu}(n) = U_\mu(n) U_\nu(n + \hat{\mu}) U_{-\mu}(n + \hat{\mu} + \hat{\nu}) U_{-\nu}(n + \hat{\nu}). \quad (\text{I.23})$$

La partie gluonique de l'action S_G sera alors définie avec l'invariant construit sur la base de la plaquette,

$$S_G [U] = \frac{2}{g^2} \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\mu < \nu} \text{Re Tr} [\mathbb{1} - U_{\mu\nu}(n)]. \quad (\text{I.24})$$

A posteriori, il est possible de retrouver la définition de l'action de la QCD dans un espace-temps continu en insérant l'[Eq. I.19](#) dans l'[Eq. I.24](#), ce qui nous donne

$$S_G [U] = \frac{2}{g^2} \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\mu < \nu} \text{Re Tr} [\mathbb{1} - U_{\mu\nu}(n)] = \frac{a^4}{2g^2} \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\mu < \nu} \text{Tr} [F_{\mu\nu}^2(n)] + \mathcal{O}(a^2). \quad (\text{I.25})$$

En prenant ensuite la limite du continu de cette action, nous retrouvons la partie gluonique de l'action de la QCD, ce qui justifie bien le choix de l'[Eq. I.24](#) pour $S_G [U]$. Finalement, l'action de QCD discrétisée s'écrit simplement comme la somme de la partie gluonique et de la partie fermionique :

$$S_{QCD}[\psi, \bar{\psi}, U] = S_G [U] + S_F[\psi, \bar{\psi}, U]. \quad (\text{I.26})$$

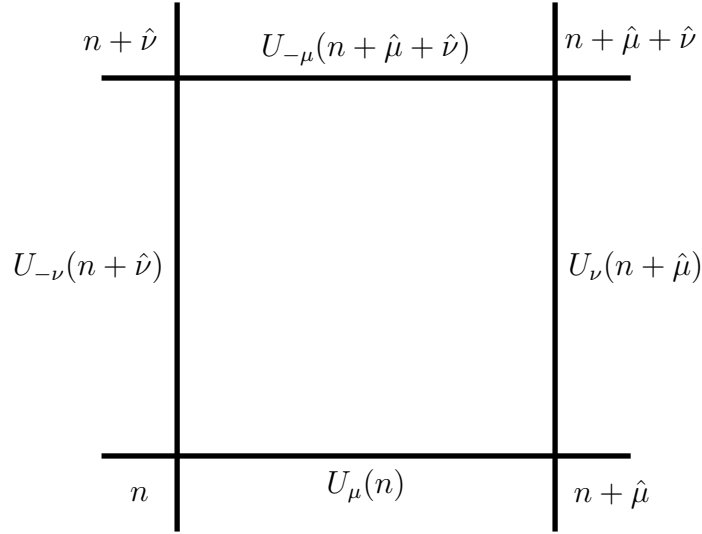


FIGURE I.2 – Illustration de la plaquette (Eq. I.23), quantité fondamentale de la LQCD permettant la construction de l’action gluonique.

Action utilisée dans cette thèse et alternatives

L’action de QCD discrétisée (Eq. I.26), est à la base de l’action que j’ai utilisée en physique du B (IV). Cependant, cette action n’est pas la seule utilisée en LQCD. Il faut noter que certaines actions (comme l’action de Lüscher-Weisz [20]) utilisent des combinaisons de boucles, comme des rectangles (somme de deux plaquettes), pour améliorer les résultats obtenus et, en particulier, diminuer les effets de discrétisation $\mathcal{O}(a^2)$ de l’action gluonique. Je n’ai pas exploré cette voie au cours de ma thèse, du fait que les données que j’ai eues à ma disposition étaient déjà simulées avec une action uniquement constituée de plaquettes. Par ailleurs, comme nous allons le voir ci-après, avant de penser à raffiner S_G , il faut d’abord rectifier son homologue fermionique S_F . Effectivement, si la partie fermionique de l’action semble être discrétisée correctement, il reste en réalité un problème intrinsèque dans le passage au continu de l’opérateur de Dirac, $D(n|m)$, défini ci-après (Eq. I.27).

I. 2.2 Le problème des doublons dans l’action fermionique

Tout d’abord, précisons l’action fermionique S_F , qui fait intervenir l’opérateur de Dirac discrétisé $D(n|m)$,

$$\begin{aligned}
S_F [\bar{\psi}, \psi, U] &= a^4 \sum_{n \in \Lambda} \bar{\psi}(n) D(n|m) \psi(m), \\
D(n|m) &= \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \frac{U_{\mu}(n) \delta_{n+\hat{\mu},m} - U_{-\mu}(n) \delta_{n-\hat{\mu},m}}{2a} + m \delta_{n,m}.
\end{aligned} \tag{I.27}$$

L'inverse de l'opérateur de Dirac, D^{-1} , nous donne le propagateur d'un fermion entre deux points n et m , ce fermion étant ici un quark. Dans l'espace des impulsions, sur réseau, puis à la limite du continu, ce propagateur s'écrit

$$D^{-1}(p) = \frac{m \mathbb{1} - i a^{-1} \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \sin(p_{\mu} a)}{m^2 + \sum_{\mu} \sin(p_{\mu} a)^2} \xrightarrow[m \rightarrow 0]{a \rightarrow 0} \frac{-i \gamma_{\mu} p_{\mu}}{p^2}. \tag{I.28}$$

Dans le cas continu, cette fonction n'admet qu'un seul pôle à la masse du quark, c'est-à-dire à $p = (0, 0, 0, 0)$ pour un quark de masse nulle. Cependant, dans le cas discret, il y a 16 pôles obtenus pour chaque combinaison de composantes valant 0 ou π/a . Ces quinze pôles supplémentaires sont appelés *doublons* (*doublers* en anglais), et pour rendre compte de la physique à la limite du continu, il convient de les supprimer. Leur suppression se fait au moyen de l'ajout d'un terme dans l'action qui ne modifie pas la physique à la limite du continu, car ce terme introduit une masse infinie aux doublons dans cette limite (ces derniers se découplent du reste du spectre). En outre, les effets de discrétisation introduits par ce terme seront également supprimé à la limite du continu. L'opérateur obtenu porte le nom d'opérateur de *Dirac-Wilson* (Wilson l'ayant défini en [21]) et s'écrit

$$D^{(f)}(n|m) = \left(m + \frac{4}{a}\right) \delta_{n,m} - \frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} (\mathbb{1} - \gamma_{\mu}) U_{\mu}(n) \delta_{n+\hat{\mu},m}, \quad \gamma_{-\mu} = -\gamma_{\mu}. \tag{I.29}$$

Ce qui conduit à la nouvelle action fermionique suivante

$$\begin{aligned}
S_F [\bar{\psi}, \psi, U] &= a^4 \sum_{n \in \Lambda} \bar{\psi}(n) D(n|m) \psi(m), \\
D^{(f)}(n|m) &= \left(m + \frac{4}{a}\right) \delta_{n,m} - \frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} (\mathbb{1} - \gamma_{\mu}) U_{\mu}(n) \delta_{n+\hat{\mu},m}.
\end{aligned} \tag{I.30}$$

Afin d'avoir des erreurs de discrétisation équivalentes entre les actions S_F et S_G , dans la prochaine section, nous allons diminuer l'erreur de discrétisation de S_F en ajoutant un nouveau terme à cette action.

I. 2.3 Erreur de discrétisation : terme de *clover*

Dans l'état actuel de notre discrétisation de l'action, il est d'ores et déjà possible de faire des calculs sur réseau. Toutefois, l'action utilisée est entachée d'erreurs de discrétisation qui sont englobées dans le terme $\mathcal{O}(a^2)$ pour la partie gluonique (Eq. I.24) et dans le terme $\mathcal{O}(a)$ pour la partie fermionique (Eq. I.30). Bien sûr, il ne sert à rien d'avoir une erreur d'ordre deux dans l'un des termes de l'action si, dans une autre partie de l'action, l'erreur est, cette fois, d'ordre un, puisque l'erreur prépondérante sera celle d'ordre le plus bas des deux termes. Ces erreurs de discrétisation sont ici liées au développement limité que nous avons fait de l'opérateur de dérivée. Ainsi, dans cette partie, nous allons une nouvelle fois reprendre l'action fermionique et ajouter un terme qui ne modifie pas la limite du continu, et qui permettra de faire passer son erreur à $\mathcal{O}(a^2)$, donc de même ordre que la partie gluonique. La méthode que nous allons utiliser ici s'appelle la *procédure d'amélioration de Symanzik*³ [22].

L'idée de cette amélioration est de créer une action effective en a , en ajoutant des contre-termes à l'action de départ ; à la limite du continu, ces contre-termes supprimeront les erreurs de discrétisations à un ordre donné. En notant $L^{(0)}$ la densité lagrangienne obtenu dans la partie précédente, notre action effective dans le continu peut se réécrire

$$S_{eff} = \int d^4x \left(L^{(0)}(x) + aL^{(1)}(x) + a^2L^{(2)}(x) + \dots \right). \quad (\text{I.31})$$

Les termes $L^{(k)}$, avec $k \geq 1$, sont les opérateurs de dimension $4 + k$. Comme nous souhaitons ici supprimer $\mathcal{O}(a)$, nous n'avons besoin que de $L^{(1)}$. Cet opérateur est lui même constitué de l'ensemble des opérateurs (de dimension $4 + 1$) qui respectent les symétries de la QCD. Nous pouvons ici en donner la liste complète :

$$\begin{aligned} L_1^{(1)}(x) &= \bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \psi(x), \\ L_2^{(1)}(x) &= \bar{\psi}(x) \vec{D}_\mu(x) \vec{D}_\mu(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \overleftarrow{D}_\mu(x) \overleftarrow{D}_\mu(x) \psi(x), \\ L_3^{(1)}(x) &= m \text{Tr} [F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x)], \\ L_4^{(1)}(x) &= m \left(\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \vec{D}_\mu(x) \psi(x) - \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \overleftarrow{D}_\mu(x) \psi(x) \right), \\ L_5^{(1)}(x) &= m^2 \bar{\psi}(x) \psi(x). \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$

À l'aide de l'équation du mouvement, $(\gamma_\mu D_\mu + m) \psi = 0$, nous pouvons montrer que les opérateurs $L_2^{(1)}$ et $L_4^{(1)}$ sont redondants avec $L_1^{(1)}$. De plus, les opérateurs $L_3^{(1)}$ et $L_5^{(1)}$ peuvent être absorbés dans une redéfinition de la masse m et de la constante de couplage g . Dès lors, le seul opérateur restant et qu'il suffit d'ajouter pour améliorer notre action est le premier terme $L_1^{(1)}$.

3. L'amélioration de Symanzik est très générale et cette idée s'applique également aux fonctions de corrélation discutées en IV.

Nous pouvons donc construire, grâce à l'opérateur $L^{(1)}$, une action S_I qui, à maille finie, ne comportera qu'une erreur d'ordre $\mathcal{O}(a^2)$:

$$S_I = S_0 + c_{SW} a^5 \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\mu < \nu} \bar{\psi}(n) \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu}(n) \psi(n). \quad (\text{I.33})$$

Dans cette nouvelle action, c_{SW} est le *coefficient de Sheikholeslami–Wohlert*⁴ (ces auteurs étant les premiers à avoir dérivé l'action améliorée précédente [23]) et $\hat{F}$ est une version discrétisée du tenseur de force F (voir ci-après). Soulignons tout d'abord que l'opérateur $L^{(1)}$, qui contenait des termes gluoniques et fermioniques, n'a amélioré en réalité que la partie fermionique de l'action ; le seul terme qui aurait pu améliorer la partie gluonique, $L_3^{(1)}$, a pu être en effet absorbé dans des redéfinitions (voir ci-dessus). Ceci est cohérent avec le fait que la correction au continu de l'action bosonique était déjà d'ordre $\mathcal{O}(a^2)$, et donc ne se trouve pas dans $L^{(1)}$. Si toutefois nous nous étions intéressés à $L^{(2)}$, nous aurions vu des contributions d'ordre $\mathcal{O}(a^2)$ pour S_F ainsi que pour S_G ; les travaux présentés en [24] montrent comment aller plus loin dans cette amélioration si nécessaire, comme par exemple avec le calcul de m_{π^0} . Précisons maintenant la forme du tenseur de force $\hat{F}$, écrit ici comme

$$\begin{aligned} \hat{F}_{\mu\nu}(n) &= -\frac{i}{8a} (Q_{\mu\nu}(n) - Q_{\nu\mu}(n)) , \\ Q_{\mu\nu}(n) &= U_{\mu\nu}(n) + U_{\nu-\mu}(n) + U_{-\mu-\nu}(n) + U_{-\nu-\mu}(n) . \end{aligned} \quad (\text{I.34})$$

Dans cette dernière expression, $U_{\mu\nu}(n)$ est la plaquette au point n dans le plan (μ, ν) , détaillée dans le paragraphe précédent. Comme pour la plaquette (voir Figure I.2), une représentation graphique du terme $Q_{\mu\nu}(n)$ est donnée en Figure I.3. C'est la forme en trèfle de cet opérateur qui lui donne le nom de terme de *clover*.

Quand nous dirons, dans la suite de ce manuscrit, que nous avons utilisé dans nos travaux l'action de *Wilson-clover*, nous nous référerons à l'action Eq. I.33 où la partie fermionique est améliorée du terme de *clover*, caractérisé par l'Eq. I.34.

Faut-il aller au-delà du terme de *clover* ?

L'action S_I est une action qui ne contient plus aucun terme d'ordre $\mathcal{O}(a)$, du moins si le coefficient c_{SW} est calculé correctement, c'est-à-dire non perturbativement [25]. Cette seule modification nous permet de calculer la masse des hadrons avec un meilleur contrôle des erreurs systématiques de discrétisation. En fait, cette première amélioration est suffisante pour toutes les quantités *on-shell*. Cependant, cela n'est pas encore suffisant pour, par exemple, les éléments de matrice hadroniques, qui sont des quantités d'intérêt pour notre étude des désintégrations $B_s \rightarrow D_s^{(*)}$ (III). Nous y

4. Le coefficient c_{SW} est calculé numériquement via un calcul perturbatif ou bien un calcul non-perturbatif.

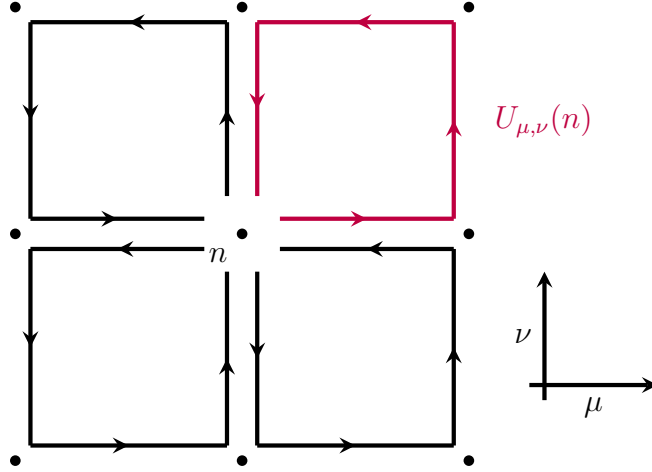


FIGURE I.3 – Représentation graphique du terme de *clover*, comme la somme de quatre plaquettes pareillement orientées. Ce terme permet, à maille finie, de passer d’une erreur de discrétisation $\mathcal{O}(a)$ à $\mathcal{O}(a^2)$ dans l’action fermionique.

reviendrons dans la section IV. 3.2, où nous présenterons brièvement l’amélioration de Symanzik, mais cette fois-ci dans le contexte des fonctions de corrélation à trois points.

I. 2.4 Adoucissement des fluctuations numériques sur les courtes distances

Dans l’état actuel de notre dérivation de l’action de jauge (Eq. I.24 et la discussion I. 2.1), le calcul numérique des matrices U_μ peut encore être bruyant, du moins, pour certaines quantités physiques dérivées. Ainsi, même si le processus de thermalisation de l’action (minimisation par méthode Monte Carlo, voir plus haut) nous garantit que, globalement, les matrices U_μ représentent un champ physique cohérent — c’est-à-dire qu’à longue distance, le chemin sur les champs de jauge nous donne la bonne interaction —, ces matrices peuvent avoir des sauts brutaux à courte distance (de proche en proche). Ce problème devient critique par exemple dans le cas de notre étude de la matrice de transition $B_s \rightarrow D_s$, où nous cherchons à extraire l’état fondamental. En effet, ces fluctuations de courte distance peuvent induire des contaminations de l’état fondamental par les états excités. Une procédure de lissage (ou *smearing*), diminue cette contamination en diminuant le couplage au vide de ces états excités. Bien sûr, ceci est vrai pour tout calcul sur réseau, mais selon l’étude et la quantité d’intérêt, l’incertitude due à ces sauts brutaux peut être négligée ou non.

Pour l’étude présentée au chapitre IV, nous illustrerons à quel point il serait difficile de se passer de cette procédure d’adoucissement avec les configurations actuelles (voir IV. 2.2 et Eq. IV.22). Pour le moment, notons simplement que les fonctions de corrélation développées dans la section I. 3 seraient, dans certains cas, trop bruyantes pour pouvoir être correctement ajustées analytiquement.

Smearing sur le champ de jauge

La manière la plus simple pour lisser les fluctuations (à courte distance) est de réaliser une moyenne locale sur le champ de jauge, et ce sur l'ensemble des points du réseau. Cependant, réaliser cette moyenne peut entraîner d'autres problèmes, comme une perte de la localité du champ de jauge ou encore la suppression des interactions de courte distance. Nous allons donc remplacer notre champ de jauge initial $U_\mu(n)$ — qui connecte les points n et $n + \mu$ — par une moyenne de chemins. Mais, afin de garder la localité des gluons, ces chemins se devront de connecter le point de départ n et d'arrivée $n + \mu$ de la matrice initiale (non moyennée) $U_\mu(n)$. Afin de ne pas supprimer complètement les interactions de courte distance, il faudra utiliser des chemins de lien $P[U]$ suffisamment courts. Il sera également possible d'utiliser des facteurs de pondération ajustables pour donner une importance différente au champ initial ou au champ moyenné. Du fait du large nombre de paramètres ajustables et de chemins possibles, la mise en pratique de cette technique et les tests de convergence associés ne sont pas standardisés et restent grandement empiriques. Nonobstant ce caractère empirique, il sera néanmoins possible, lors de la simulation du réseau, de s'assurer de la validité de cet adoucissement en mesurant certaines grandeurs qui y sont sensibles ; dans cette thèse, cette validation sera faite sur les fonctions de corrélations pour les mésons (définies en I. 3). L'impact du *smearing* sur ces quantités est contrôlé au cours de l'adoucissement et est stoppé à une certaine itération, dès lors que le bruit sur les fonctions de corrélation (I. 3.2) augmente trop fortement. Cette manière d'adoucir les fluctuations du champ de gluon est dénommée dans la littérature *smoothing* ou *smearing* [26] ; c'est ce dernier nom que nous utiliserons dans ce manuscrit.

Avec les seules conditions que nous venons de voir, le *smearing* sur le champ U peut être appliqué de diverses manières. Dès lors qu'une méthode de *smearing* préserve au mieux les propriétés physiques de la QCD, il est difficile de dire si celle-ci est clairement meilleure qu'une autre, hormis sur des critères quantifiables, comme le temps de calcul. Plusieurs algorithmes de *smearing* comme *HYP* [27], *Stout* [28], *APE* [26] ou encore *Cooling* [29] donnent de bons résultats. Ces méthodes sont assez similaires — seuls le chemin considéré ou la manière de pondérer la moyenne (comme *Stout*) varient — et nous détaillons ci-après l'algorithme *APE*. Il existe également une autre méthode un peu différente, le *Gradient Flow* [30], qui est de plus en plus utilisée, car elle présente plusieurs avantages : (i) elle adoucit le champs de jauge de manière continue et non discrète (comme le font les autres méthodes), (ii) elle fournit un schéma de renormalisation (nous expliquerons au détour du chapitre II en quoi consiste un tel schéma), (iii) elle permet de mieux rendre compte des effets dus à la taille du réseau [31].

La méthode que nous avons choisie d'utiliser ici est l'*APE-smearing* qui a été introduite pour la première fois par la collaboration *APE*. Cette méthode est suffisante ici car les objets que nous avons étudiés n'ont pas de problème avec l'itération discrète (les changements de champs ne sont pas continus mais sont itérés un certain nombre de fois). Cette méthode *APE* utilise les chemins $C_{\mu\nu}$ appelés *staples* (agrafes en français) qui sont, pour une matrice U_μ donnée, les chemins constitués par les trois arêtes restantes du carré, et ce pour les six carrés environnants la matrice (donc l'arête considérée). Une représentation graphique de ces agrafes est montrée dans la Figure I.4. Dans les

calculs, les valeurs de la matrice U_μ sont remplacées par celles de ses valeurs moyennées V_μ comme suit :

$$\begin{aligned}
U_\mu(n) &\rightarrow V_\mu(n), \\
V_\mu(n) &= (1 - \alpha)U_\mu(n) + \frac{\gamma}{6} \sum_{\nu \neq \mu} C_{\mu\nu}(n), \\
C_{\mu\nu}(n) &= U_\nu(n) U_\mu(n + \nu) U_\nu^\dagger(n + \mu) + U_\nu^\dagger(n - \nu) U_\mu(n - \nu) U_\nu(n - \nu + \mu).
\end{aligned} \tag{I.35}$$

Dans l'équation pour $V_\mu(n)$, les paramètres α et γ sont des paramètres ajustables, que nous avons évoqués dans notre discussion précédente. Ces paramètres ont pour but de donner plus ou moins d'importance au champ initial ou à la moyenne des agrafes. Le facteur 6 au dénominateur fait, quant à lui, référence au nombre d'agrafes. Malheureusement, avec cette procédure, la matrice $V_\mu(n)$, qui est le résultat de la moyenne des champs, n'appartient pas au groupe $SU(3)$. C'est pourquoi la dernière étape est de trouver une matrice X qui maximise $\text{Re Tr} [X V_\mu^\dagger(n)]$; la matrice X ainsi obtenue appartient à $SU(3)$ et elle sera alors prise comme notre nouveau champ de jauge adouci.

Généralement, cette procédure est répétée plusieurs fois (c'est ce à quoi nous faisons référence en parlant d' « itération discrète ») pour obtenir un champ adéquat pour le calcul des quantités souhaitées. Il est à noter que nous pouvons très bien choisir de sommer les agrafes uniquement dans les dimensions spatiales. Dans ce cas, cette méthode est plutôt désignée par *smearing* APE spatial⁵ ; c'est celle que nous avons utilisée pour adoucir notre champ de jauge.

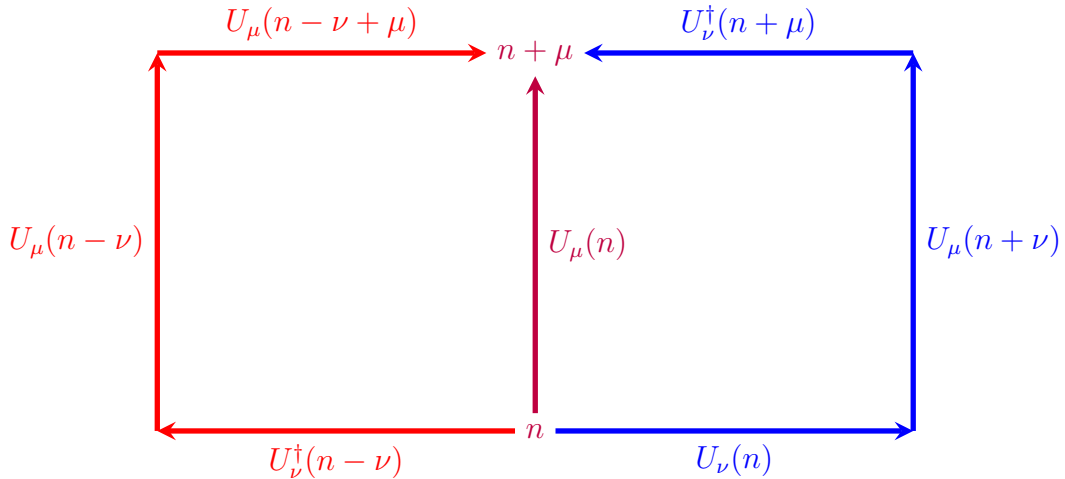


FIGURE I.4 – Représentation des *staples* $C_{\mu\nu}$ de l'APE *smearing* dans une dimension. Dans cette illustration, il est facile de voir que les points de départ et d'arrivée sont les mêmes.

5. Dans ce cas, le facteur $\gamma/6$ de l'Eq. I.35 devient $\gamma/4$.

Smearing pour les champs fermioniques

Les raisons qui nous poussent à utiliser un adoucissement des champs fermioniques sont les mêmes que pour le champ de jauge. Si ces améliorations ne sont pas systématiquement requises, elles le sont pour notre étude. En effet, les quarks dont nous avons besoin sont des quarks lourds. À cause de leur masse qui leur confère une longueur d'interaction très courte, les champs ψ sont sensibles aux variations, même petites, de courte distance. Nous avons réalisé dans la partie précédente le *smearing* sur les champs de gluon (U), et une procédure conceptuellement identique doit être appliquée ici aux champs fermioniques ψ . La méthode que nous avons employée pour ces derniers est appelée le *smearing Gaussien* [32]. Ce *smearing* consiste, comme tous les *smearings*, à remplacer le champ fermionique en un point par une moyenne des champs fermioniques autour de ce point. Ce *smearing* d'ordre k est défini pour un champ $\psi(n)$ comme

$$\psi^{(k)}(n) = (1 + \kappa_G \Delta)^k \psi(n). \quad (\text{I.36})$$

Cette équation est paramétrée par κ_G qui est un paramètre ajustable, comme l'étaient α et γ pour l'APE *smearing*. Ce paramètre permet d'adoucir plus ou moins rapidement le champs $\psi(n)$, avec Δ l'opérateur du Laplacien covariant défini par

$$\Delta\psi(n) = \sum_{\mu=1}^4 (U_\mu(n)\psi(n + \hat{\mu}) - 2\psi(n) + U_\mu(n - \hat{\mu})^\dagger\psi(n - \hat{\mu})) . \quad (\text{I.37})$$

Cet opérateur fait apparaître des variables liens du champ de jauge, de manière identique à ce que nous avons pour l'opérateur de dérivée dans l'action. Les champs ψ en deux points différents doivent être connectés entre eux par un « chemin de champs de jauge », afin de ne pas briser l'invariance de jauge de l'action. Le problème de cette procédure est qu'elle brise la localité de notre opérateur fermionique. Nous verrons dans le chapitre IV, comment différents niveaux de *smearing* (plusieurs valeurs de k) ont été utilisés afin de s'affranchir de ce problème de brisure de localité. Dans la suite, nous parlerons parfois de corrélateur « local-local » pour faire référence aux fonctions de corrélation sans aucun niveau de *smearing* et, ainsi, ne brisant pas la localité des corrélateurs.

Bien sûr, d'autres méthodes d'adoucissement des fermions existent, telles les méthodes dites de *Wuppertal-smearing* [33] et de *Jacobi-smearing* [34]. Ces méthodes sont relativement similaires à celle présentée ci-dessus et l'utilisation d'une méthode plutôt que d'une autre est un choix qui relève également de l'empirisme.

I. 3 De l'action aux observables physiques

Dans la section précédente, nous avons établi la formulation discrétisée de l'action de la QCD que j'ai utilisée dans mes travaux de thèse. Voici, en combinant les [Eq. I.24](#), [Eq. I.30](#) et [Eq. I.33](#) l'action ainsi obtenue :

$$\begin{aligned}
S_{WC} = & \underbrace{a^4 \sum_{n \in \Lambda} \bar{\psi}(n) D(n|m) \psi(m) + c_{sw} a^5 \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\mu < \nu} \bar{\psi}(n) \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu}(n) \psi(n)}_{S_F[\bar{\psi}, \psi, U]} \quad \text{clover} \\
& + \underbrace{\frac{2}{g^2} \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\mu < \nu} \text{Re Tr} [\mathbb{1} - U_{\mu\nu}(n)]}_{S_G[U]} .
\end{aligned} \tag{I.38}$$

La QCD sur réseau, comme nous l'avons vu en section [I. 1.2](#), repose sur le formalisme des intégrales de chemin. Ainsi, nous allons dans un premier temps montrer comment obtenir ces intégrales à partir de l'action [Eq. I.38](#). Dans un second temps, nous verrons comment obtenir à partir de ce formalisme les fonctions de corrélation (ou corrélateurs), puis comment obtenir les grandeurs physiques à partir des corrélateurs.

I. 3.1 Intégrales de chemin et nombre de Grassmann

Afin de définir les équations clés des intégrales de chemin en QCD sur réseau, nous allons nous munir d'un opérateur O , auquel nous donnerons un sens physique plus tard. La valeur moyenne dans le vide de cet opérateur (notée $\langle \cdot \rangle$), dans le formalisme des intégrales de chemin, est donnée par

$$\begin{aligned}
\langle O \rangle &= \langle \langle O \rangle_F \rangle_G = \frac{1}{\mathcal{Z}[U]} \int \mathcal{D}[U] e^{-S_G[U]} \mathcal{Z}_F[U] \langle O \rangle_F , \\
\mathcal{Z}[U] &= \int \mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}] \mathcal{D}[U] e^{-S_G[U]} e^{-S_F[\psi, \bar{\psi}, U]} , \\
\mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}] &= \prod_{n \in \Lambda} d\psi(n) d\bar{\psi}(n) \quad , \quad \mathcal{D}[U] = \prod_{n \in \Lambda} \prod_{\mu=1}^4 dU_\mu(n) .
\end{aligned} \tag{I.39}$$

Dans ces définitions, nous avons omis les indices de couleur, de spin et de saveur pour des raisons de simplicité d'écriture, mais ces indices doivent impérativement être pris en compte dans le calcul. Aussi, l'égalité $\langle O \rangle = \langle \langle O \rangle_F \rangle_G$ montre le fait que les opérateurs peuvent être intégrés

séquentiellement suivant les variables fermioniques (la moyenne est alors indicée $\langle \cdot \rangle_F$), puis bosoniques ($\langle \cdot \rangle_G$). Il est à noter que la fonction $\mathcal{Z}$ est assimilable, du point de vue de la physique statistique, à la fonction de partition du réseau. Les variables d'intégrations contenues dans $\mathcal{D}$ montrent bien ce que nous avons évoqué en introduction de ce chapitre, à savoir que nous prenons en compte l'ensemble des possibles des champs (c'est-à-dire toutes les valeurs pouvant être prises par l'ensemble des champs). Ceci s'applique aux champs fermioniques ψ et $\bar{\psi}$, mais aussi aux champs gluoniques représentés par les plaquettes U en chaque point du réseau. Pour les intégrales sur les champs fermioniques, nous avons en particulier

$$\begin{aligned}\langle O \rangle_F &= \frac{1}{\mathcal{Z}_F[U]} \int \mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}] e^{-S_F[\psi, \bar{\psi}, U]} O[\psi, \bar{\psi}, U] , \\ \mathcal{Z}_F[U] &= \int \mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}] e^{-S_F[\psi, \bar{\psi}, U]} .\end{aligned}\tag{I.40}$$

Le fait que nous puissions intégrer sur les deux champs séparément va nous aider, puisque nous allons ici encore pouvoir dériver partie par partie les résultats. Les champs ψ et $\bar{\psi}$ étant des fermions, il doivent s'astreindre à la distribution de Fermi-Dirac. Pour rappel, ceci interdit la superposition de deux particules aux mêmes nombres quantiques en un point identique, ce qui implique que les champs ψ et $\bar{\psi}$ associés aux fermions devront respecter les propriétés d'anti-commutation suivantes :

$$\left\{ \psi_{c,\alpha}^{(f)}(n); \psi_{c',\alpha'}^{(f')}(n') \right\} = \left\{ \bar{\psi}_{c,\alpha}^{(f)}(n); \bar{\psi}_{c',\alpha'}^{(f')}(n') \right\} = \left\{ \psi_{c,\alpha}^{(f)}(n); \bar{\psi}_{c',\alpha'}^{(f')}(n') \right\} = 0 ,\tag{I.41}$$

où f , α et c sont respectivement les indices de saveurs, de spins et de couleurs, et où n est la position du champ fermionique. Pour respecter cette propriété, les champs fermioniques seront représentés par des *variables de Grassmann*. Nous n'allons pas ici détailler l'ensemble de leurs algèbres ou leurs propriétés, nous nous contenterons d'utiliser ces dernières pour simplifier les intégrales de chemin de la partie fermionique. Le premier résultat qui découle des variables de Grassmann est *l'intégrale de Matthews–Salam* [35], qui est une intégrale Gaussienne, et qui simplifie la fonction de partition fermionique en un déterminant de l'opérateur de Dirac :

$$\mathcal{Z}_F[U] = \det[D] .\tag{I.42}$$

Afin de ne pas surcharger le nombre d'équations et d'explications sur des démonstrations qui peuvent être trouvées au chapitre V de [9], nous allons simplement mentionner ici que les propriétés des variables de Grassmann, appliquées à l'intégrale sur les variables fermioniques de l'opérateur O , nous donnent la fonction génératrice des fermions. Ensuite, l'application du *théorème de Wick* sur cette fonction génératrice nous permet d'écrire la valeur moyenne dans le vide de tout opérateur en fonction d'une somme de traces de produits de propagateurs de quarks, ces derniers étant obtenus en inversant l'opérateur de Dirac. Ceci peut être écrit de manière générique, pour k fermions, comme

$$\langle \psi_{i_1} \bar{\psi}_{j_1} \cdots \psi_{i_k} \bar{\psi}_{j_k} \rangle_F = \frac{(-1)^k}{a^4} \sum_{P(1, \dots, k)} \text{sign}(P) D_{i_1 j_{P_1}}^{-1} \cdots D_{i_k j_{P_k}}^{-1}. \quad (\text{I.43})$$

Dans cette application du théorème de Wick, la somme se fait sur les permutations possibles des fermions et le signe de la permutation rend compte de la statistique de Fermi-Dirac à laquelle sont astreints les fermions. De plus, les indices i et j sont des indices qui englobent l'ensemble des nombres quantiques de chaque fermion. Ainsi, à ce stade, nous avons expliqué, sans le démontrer formellement, en quoi la seule connaissance du champ de jauge U ainsi que celle de l'opérateur de Dirac D , nous permet de calculer toutes les fonctions de corrélation de quarks $\langle \cdot \rangle_F$.

Détour sur le calcul numérique des intégrales de chemin

La première étape du calcul sur réseau consiste à générer un échantillon statistique des matrices $U_\mu(n)$ selon une loi de probabilité de type Boltzmann. Seuls les champs bosoniques sont concernés, une fois l'action intégrée formellement sur les champs de fermion. Le poids de Boltzmann contient donc l'action de jauge et le déterminant de l'opérateur de Dirac. L'échantillon, construit par un processus markovien (comme vu en [I. 1.2](#)) en partant d'une configuration particulière (« froide » ou « chaude »), tend vers l'équilibre thermique. Il correspond alors à des configurations qui sont distribuées selon le poids de Boltzmann $\exp(-S)$. Bien sûr, ceci n'est ni trivial ni rapide ; la production de ces champs constitue en fait une prouesse algorithmique.

Le déterminant fermionique est lui aussi très coûteux à calculer, tout comme le propagateur du quark, l'inverse de l'opérateur de Dirac. Ceci est dû à la taille de cette matrice carrée de dimension $color \otimes spin \otimes espace = 12\Lambda$ (soit environ 4×10^8 pour les plus grands réseaux que nous avons utilisés en physique du B, voir le [Tableau IV.3](#)). En outre, le calcul doit être fait pour chaque saveur de quark considérée sur le réseau. C'est pourquoi ce déterminant a été, au début de la LQCD, approximé par $\det[D] = 1$; c'est l'approximation *quenched*. Cette approximation de champ moyen revient à négliger les effets des quarks dits « de la mer »⁶. Les réseaux que nous avons utilisés pour les travaux présentés dans ce mémoire, comme la plupart des réseaux modernes, sont *unquenched*. Pour rendre compte des effets des quarks de la mer u/d, souvent s, voire c, la valeur de $\det[D]$ est calculée et la simulation est dite à 2, 2+1, ou 2+1+1 saveurs de quarks dynamiques. Ces progrès dans les simulations proviennent des améliorations algorithmiques sur l'algèbre matricielle et de la puissance de calcul qui augmente depuis plusieurs décennies. Dans notre travail, le déterminant fermionique a été pris en compte pour 2 saveurs dynamiques (voir [IV. 1.1](#)).

Le temps de calcul nécessaire à la simulation des quarks évolue à deux niveaux. Premièrement, plus la masse des quarks augmente, plus il est nécessaire de discrétiser finement l'espace-temps

6. Ces quarks, aussi appelés quarks dynamiques, peuvent se coupler avec le champ de jauge et ainsi former des boucles de fermions.

(cela à cause d’erreurs de discrétisation dont nous reparlerons en [IV. 1.3](#) pour le quark b). C’est pourquoi les calculs sur réseau ont progressivement étendus leur nombre de quarks par masse croissante. Deuxièmement, pour que les premières saveurs de quark (up et $down$) correspondent à leurs valeurs théoriques, il faut augmenter le temps de calcul, puisqu’il faut alors générer des volumes plus grands. En effet, les erreurs de volume fini sont proportionnelles à $\exp(-m_\pi L)$ et m_π diminue avec la diminution de la masse des quarks u et d sur réseau. Finalement, si deux types de quark sont distingués — les quarks dynamiques (ou de la mer) et les quarks de valence qui sont eux statiques (*quenched*) —, la simulation des quarks dynamiques est la plus complexe et la plus coûteuse, du fait du calcul du déterminant fermionique. Il reste néanmoins possible d’avoir les deux, et ainsi d’avoir des configurations à $N_f = 2$ et d’avoir par exemple un quark *strange* statique.

Dans ce qui suit, nous allons utiliser les résultats de cette section pour dériver les fonctions de corrélation à deux points (que nous utiliserons dans le chapitre [IV](#)). Le cas des fonctions de corrélation à trois points sera lui discuté dans la section [I. 3.3](#).

I. 3.2 Corrélateurs à deux points pour les mésons

À partir de l’[Eq. I.43](#), nous pouvons déduire la formulation d’un opérateur donnant l’interaction entre deux quarks. Pour cela il suffit de fixer $k = 1$ dans l’[Eq. I.43](#), ce qui donne

$$\langle \psi(n) \bar{\psi}(m) \rangle_F = a^{-4} D^{-1}(n|m) . \quad (\text{I.44})$$

À l’aide de cette formule, nous pouvons déterminer complètement le corrélateur qui permet d’extraire les caractéristiques d’un méson, à commencer par sa masse. Prenons en effet un méson constitué d’un quark $\psi^{(f_1)}$ et d’un antiquark $\bar{\psi}^{(f_2)}$, où f_1 et f_2 représentent les saveurs des deux quarks. Les différents mésons peuvent être répertoriés selon leurs nombres quantiques (spin, charge électrique et autres « charges », comme la parité). L’ensemble de ces nombres quantiques peut être englobé dans une matrice de spin-couleur mise entre les deux spineurs des quarks. Cela définit un *champ interpolant* du méson auquel nous nous intéressons, avec les bonnes symétries associées aux nombres quantiques de la particule. Le champ interpolant de ce méson s’écrit $O = \bar{\psi}^{(f_1)} \Gamma \psi^{(f_2)}$, où la matrice Γ dans l’espace de spin-couleur est indéterminée à ce stade du propos. Finalement, nous avons également besoin du champ interpolant $\bar{O}$ qui est le pendant de l’opérateur $\hat{O}^\dagger$, qui lui est dans l’espace de Hilbert. Pour trouver la forme de $\bar{O}$ nous utilisons le fait que $O^\dagger$ est l’adjoint de l’opérateur O .

Nous pouvons alors écrire la fonction de corrélation à 2 points d’un méson, qui correspond à

l'intégrale de chemin entre le point d'espace-temps de sa création et celui de son annihilation, soit

$$\begin{aligned}
\langle O(n)\overline{O}(m) \rangle_F &= \langle \overline{\psi}^{(f_1)}(n) \Gamma \psi^{(f_2)}(n) \overline{\psi}^{(f_2)}(m) \Gamma \psi^{(f_1)}(m) \rangle_F \\
&= \Gamma_{\mu_1 \nu_1} \Gamma_{\mu_2 \nu_2} \langle \overline{\psi}_{\mu_1}^{(f_1)}(n) \psi_{\nu_1}^{(f_2)}(n) \overline{\psi}_{\mu_2}^{(f_2)}(m) \psi_{\nu_2}^{(f_1)}(m) \rangle_F \\
&= -\Gamma_{\mu_1 \nu_1} \Gamma_{\mu_2 \nu_2} \langle \psi_{\nu_2}^{(f_1)}(m) \overline{\psi}_{\mu_1}^{(f_1)}(n) \psi_{\nu_1}^{(f_2)}(n) \overline{\psi}_{\mu_2}^{(f_2)}(m) \rangle_F \\
&= -\Gamma_{\mu_1 \nu_1} \Gamma_{\mu_2 \nu_2} \langle \psi_{\nu_2}^{(f_1)}(m) \overline{\psi}_{\mu_1}^{(f_1)}(n) \rangle_{f_1} \langle \psi_{\nu_1}^{(f_2)}(n) \overline{\psi}_{\mu_2}^{(f_2)}(m) \rangle_{f_2} \\
&= -\Gamma_{\mu_1 \nu_1} \Gamma_{\mu_2 \nu_2} D_{f_1}^{-1}(n|m)_{\nu_2 \mu_1} D_{f_2}^{-1}(m|n)_{\nu_1 \mu_2} \\
&= -\text{Tr} [\Gamma D_{f_1}^{-1}(n|m) \Gamma D_{f_2}^{-1}(m|n)] .
\end{aligned} \tag{I.45}$$

Dans le formalisme des intégrales de chemin (Eq. I.39), nous avons vu que l'intégration devait également se faire sur le champ gluonique. Pour cela, nous allons intégrer l'Eq. I.45 sur le champ de jauge comme suit :

$$\begin{aligned}
\langle O(n)\overline{O}(m) \rangle &= -\frac{1}{\mathcal{Z}[U]} \int \mathcal{D}[U] e^{-S_G[U]} \det[D_{f_1}] \det[D_{f_2}] \text{Tr} [\Gamma D_{f_1}^{-1}(n|m) \Gamma D_{f_2}^{-1}(m|n)] , \\
\mathcal{Z}[U] &= \int \mathcal{D}[U] e^{-S_G[U]} \det[D_{f_1}] \det[D_{f_2}] .
\end{aligned} \tag{I.46}$$

Notons enfin que les déterminants fermioniques n'apparaîtrons plus dans les fonctions de corrélation. Le fait est qu'ils sont pris en compte lors de la génération des configurations via le poids de Boltzmann.

Intégration des fonctions de corrélation

Il n'est bien sûr pas possible de résoudre analytiquement l'équation précédente. Le choix est fait en LQCD de calculer un ensemble dénombrable (et indexé par la lettre c) de champs de jauge $U_c = \{U_\mu\}$; chaque U_c est appelé une configuration. Ainsi nos intégrales gluoniques, Eq. I.46, sont estimées par une moyenne arithmétique sur un ensemble fini de configurations, à savoir l'échantillon statistique construit préalablement. Nous aurons alors

$$\langle O \rangle_G = \frac{1}{N_c} \sum_{c \in \text{conf}} O[U_c] , \tag{I.47}$$

où N_c est le nombre de configurations de l'échantillon, et où chaque U_c aura eu la probabilité $\det(S_F) e^{-S_G[U_c]} / \mathcal{Z}$ d'être obtenue. Il en résulte la formule suivante pour notre fonction de corrélation à 2 points d'un méson quelconque :

$$\langle O(n)\overline{O}(m) \rangle = -\frac{1}{N_c} \sum_{c \in \text{conf}} \text{Tr} [\Gamma D_{f_1}^{-1}(n|m) \Gamma D_{f_2}^{-1}(m|n)] . \tag{I.48}$$

Rappelons que si le champ de jauge n'apparaît pas explicitement dans l'Eq. I.48, l'inverse de l'opérateur de Dirac en dépend bel et bien. Il sera donc différent pour chaque configuration U_c . À l'aide de l'Eq. I.48, nous sommes à présent en mesure de calculer les fonctions de corrélation à deux points pour un méson.

Quantités physiques

Nous pouvons maintenant extraire les grandeurs physiques des expressions précédentes. La fonction de corrélation temporelle en espace Euclidien est donnée par

$$C_{OO'}(t, 0) = \langle O(t)O'(0) \rangle_T = \frac{\text{Tr} \left[e^{-(T-t)\hat{H}} \hat{O} e^{-t\hat{H}} \hat{O}' \right]}{\text{Tr} \left[e^{-T\hat{H}} \right]}, \quad (\text{I.49})$$

où nous avons des opérateurs dans l'espace des impulsions aux temps t et $t' = 0$. La variable T représente, quant à elle, l'expansion maximale du temps, qui peut être $T = \infty$ dans un espace-temps infini. De plus, nous pouvons retrouver la fonction de corrélation du méson Eq. I.45 en prenant $O' = \bar{O}$. L'Hamiltonien du système est désigné par $\hat{H}$ ⁷. En utilisant la relation de fermeture sur les états propres de l'Hamiltonien, l'expansion en série de l'exponentielle matricielle, ainsi que la définition de la trace d'un opérateur, il vient :

$$\begin{aligned} \langle O(t)O'(0) \rangle_T &= \frac{\sum_m \langle m | \hat{O}(t) \hat{O}'(0) | m \rangle}{\sum_m \langle m | e^{-T\hat{H}} | m \rangle} = \frac{\sum_m \langle m | e^{t\hat{H}} \hat{O} e^{-t\hat{H}} \hat{O}' | m \rangle}{\sum_m \langle m | e^{-T\hat{H}} | m \rangle} \\ &= \frac{\sum_m \langle m | e^{-(T-t)\hat{H}} \hat{O} e^{-t\hat{H}} \hat{O}' | m \rangle}{\sum_m \langle m | e^{-T\hat{H}} | m \rangle} \\ &= \frac{\sum_{m,n} \frac{1}{E_n} \langle m | e^{-(T-t)\hat{H}} \hat{O} | n \rangle \langle n | e^{-t\hat{H}} \hat{O}' | m \rangle}{\sum_m e^{-TE_m}} \\ &= \frac{\sum_{m,n} \frac{1}{E_n} e^{-(T-t)E_m} \langle m | \hat{O} | n \rangle e^{-tE_n} \langle n | \hat{O}' | m \rangle}{e^{TE_0} (1 + e^{-T(E_1-E_0)} + e^{-T(E_2-E_0)} + \dots)} \\ &= \frac{\sum_{m,n} \frac{1}{E_n} e^{-(T-t)(E_m-E_0)} \langle m | \hat{O} | n \rangle e^{-t(E_n-E_0)} \langle n | \hat{O}' | m \rangle}{1 + e^{-T(E_1-E_0)} + e^{-T(E_2-E_0)} + \dots} \\ &\stackrel{T \rightarrow \infty}{=} \sum_n \frac{1}{E_n} \langle 0 | \hat{O} | n \rangle \langle n | \hat{O}' | 0 \rangle e^{-t\Delta E_n}. \end{aligned} \quad (\text{I.50})$$

Dans cette séquence d'égalités, la première ligne est une simple réécriture des opérateurs dans la représentation de Heisenberg et la seconde ligne utilise les conditions aux limites periodiques

7. Pour rappel, l'Hamiltonien peut être obtenu par transformée de Legendre du Lagrangien.

temporelles du réseau. Pour la troisième ligne, nous avons inséré une relation de fermeture avec son facteur de normalisation E_n^{-1} , où E_n correspond à l'énergie du n -ième état excité. Enfin, pour passer à la dernière ligne, nous avons négligé tous les termes d'ordre supérieur à un (c'est-à-dire $m \neq 0$), car leur exponentielle décroît plus vite que celle de l'état fondamental, lorsque T tend vers l'infini. Le besoin de la limite $T \rightarrow \infty$ pour isoler l'état fondamental justifie ce que nous avons dit en introduction quant au fait qu'en LQCD les réseaux avaient le plus souvent une extension temporelle deux fois supérieure à l'extension spatiale. Soulignons que dans la dernière ligne, la définition de $\Delta E_n = E_n - E_0$ correspond à une normalisation de l'énergie de l'état n par rapport à l'énergie de l'état fondamental, c'est-à-dire l'énergie portée par le vide de la QCD. Dans la suite, nous omettrons le Δ , en gardant à l'esprit cette soustraction de l'énergie du vide dans la définition de nos états, les rendant ainsi directement comparables aux mesures d'énergies et de masses des états hadroniques. Finalement, si nous prenons $O' = \bar{O}$ (et donc $\hat{O}' \rightarrow \hat{O}^\dagger$) pour décrire par exemple le corrélateur d'un méson, alors le terme

$$\langle 0 | \hat{O} | n \rangle \langle n | \hat{O}^\dagger | 0 \rangle = |Z_n|^2, \quad (\text{I.51})$$

correspondra au module carré de la constante de couplage au vide du n -ième état excité de notre méson par l'opérateur O .

La dernière étape consiste à faire le lien entre la fonction de corrélation dans l'espace des positions (Eq. I.48) à celle dans l'espace des impulsions (Eq. I.50). Nous allons donc, ici, reprendre notre fonction de corrélation pour un méson dans l'espace des positions. Cette fois, notre méson sera créé au point zéro, qui s'appelle la source. Ce point source n'est pas le réel point $(0, \vec{0})$ du réseau, mais un point choisi aléatoirement, et qui sera, par invariance spatio-temporelle, ramené au point zéro. Ce méson s'annihilera ensuite en un point $n = (n_t, \vec{n})$. Dans la simulation, le propagateur de quark entre le point source et un point n , nommé aussi le puits, est calculé pour tous les points du réseau. Ce propagateur « *point to all* » revient à ne calculer qu'une seule colonne $D^{-1}(0|n)$. Cette limitation n'est que d'origine numérique, et s'il était possible de calculer le propagateur de toutes les sources vers tous les puits (un propagateur dit *all-to-all*), alors les erreurs statistiques du calcul sur réseau s'en verraient améliorées. Le seul pré-requis pour identifier nos deux formules d'intérêt est de prendre la transformée de Fourier spatiale de l'Eq. I.48. Pour un champ interpolant O , en notant Λ_3 l'ensemble des points dans les trois dimensions spatiales, sa transformée de Fourier (notée $\tilde{O}$) sera donnée par

$$\tilde{O}(n_t, \vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_3}} \sum_{n \in \Lambda_3} O(n_t, \vec{n}) e^{-ia\vec{n}\vec{p}}. \quad (\text{I.52})$$

Nous ne réalisons la transformée de Fourier que sur le champs interpolant associé au puits, car les champs interpolants avec une impulsion différente sont orthogonaux entre eux. Ainsi, la

fonction de corrélation se réécrit :

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{O}(n_t, \vec{p}) \overline{O}(0, \vec{0}) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda_3}} \sum_{n \in \Lambda_3} \langle O(n_t, \vec{n}) \overline{O}(0, \vec{0}) \rangle e^{-ia\vec{n}\vec{p}} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\Lambda_3}} \sum_{n \in \Lambda_3} \langle O(n_t, \vec{n}) \overline{O}(0, \vec{0}) \rangle e^{-ia\vec{n}\vec{p}} \stackrel{T \rightarrow \infty}{=} \sum_n \frac{1}{E_n} \langle 0 | \hat{O} | n \rangle \langle n | \hat{O}^\dagger | 0 \rangle e^{-tE_n} \\
&\stackrel{t \gg 0}{=} \frac{|Z_1|^2}{E_1} e^{-tE_1} .
\end{aligned} \tag{I.53}$$

Dans cette équation, l'indice 1 désigne l'état fondamental, mais je l'omettrai lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible. Finalement, en choisissant une impulsion nulle (l'énergie devient alors la masse du méson considéré, $E_1 \rightarrow m_1$) et en gardant les limites sur T et t définies précédemment, nous obtenons pour un méson au repos la formule suivante :

$$C_{\Gamma\Gamma}^{2pts}(t) = -\frac{1}{\sqrt{\Lambda_3}} \frac{1}{N_c} \sum_{n \in \Lambda_3} \sum_{c \in \text{conf}} \text{Tr} [\Gamma D_{f_1}^{-1}(n|0) \Gamma D_{f_2}^{-1}(0|n)] = \frac{|Z_1|^2}{m_1} e^{-tam_1} . \tag{I.54}$$

Soulignons que dans cette équation, nous avons moyenné la fonction de corrélation sur les N_c configurations générées.

Au cours de cette section portant sur la dérivation des équations des fonctions de corrélation à deux points, nous nous sommes concentrés sur celles concernant les mésons. Il sera facile de préciser ces formules pour les mésons $D_s^{(*)}$ et B_s sur lesquels porteront les chapitres [III](#) et [IV](#). Il faut bien garder à l'esprit que les corrélateurs à 2 points sont définis pour différents états liés de la QCD : mésons et baryons, bien sûr, mais aussi noyaux, et même « glueballs », ces états gluoniques autorisés par la théorie. Dans le cas des noyaux, les études sont limitées, pour le moment, à de petites structures comme le deutérium [\[36\]](#), du fait de la puissance de calcul disponible. De plus, certains mésons, comme le méson η étudié en [\[37\]](#), ont des termes supplémentaires par rapport au calcul des corrélateurs de mésons non-singlet de saveur, ce qui rend leurs études sur réseau plus complexes ; cet effet est lié à l'apparition de diagrammes non connexes, très bruyants, dans les contractions de Wick.

I. 3.3 Corrélateur à trois points et courants faibles

Pour finir la présentation des observables indispensables à notre étude des désintégrations $B_s \rightarrow D_s^{(*)} l \nu$, nous présentons ici les corrélateurs à trois points. Dans le Modèle Standard, la désintégration d'un méson B_s en un méson D_s se fait par changement de saveur $b \rightarrow c + W^-$ (voir [Figure I.5](#)). Le quark b interagit alors avec un champ d'un courant faible chargé qui va transformer ce quark en une autre saveur de type haut (u, c, t). Les probabilités de ce changement sont, pour rappel, pondérées par les éléments de la matrice CKM (voir [III. 2](#)). En LQCD, les bosons de l'interaction faible ($W^\pm, Z^0$) ne sont pas directement simulés. Nous nous placerons dans le cadre

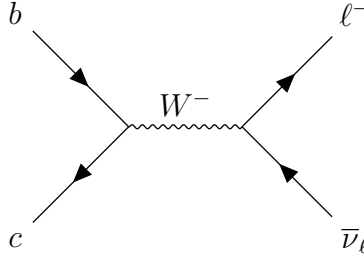


FIGURE I.5 – Diagramme de Feynman de la transition $b \rightarrow c$.

de travail d'un Hamiltonien effectif où ces degrés de liberté ont été intégrés⁸, et donc seule la dynamique longue-distance de l'interaction forte sera considérée. Il s'agira alors, pour étudier la transition $B_s \rightarrow D_s$, d'insérer dans les fonctions de corrélation un opérateur (Eq. I.55) assurant la transition de saveur telle qu'elle apparaît dans l'Hamiltonien effectif.

Corrélateur pour un courant vectoriel

Les courants faibles chargés ont, dans le Modèle Standard, une structure « V-A », c'est à dire qu'il y a une contribution vectorielle V_μ et une contribution axiale A_μ . Par argument de symétrie CPT , nous pouvons écrire que les éléments de matrice hadronique $\langle P_1 | V_\mu | P_2 \rangle$ et $\langle P_1 | A_\mu | V_2 \rangle$ sont non nuls, où $P_{1,2}$ sont des mésons pseudo-scalaires et V_2 un méson vecteur. Ces opérateurs prennent la forme

$$\begin{aligned} V_\mu(t, \vec{x}) &= \bar{\psi}_U(t, \vec{x}) \gamma_\mu \psi_D(t, \vec{x}), \\ A_\mu(t, \vec{x}) &= \bar{\psi}_U(t, \vec{x}) \gamma_\mu \gamma_5 \psi_D(t, \vec{x}), \end{aligned} \tag{I.55}$$

où les indices D et U peuvent prendre, respectivement, les valeurs (d, s, b) et (u, c, t) (voir la Figure I.6 pour une représentation graphique du cas $B_s \rightarrow D_s$). Ainsi, le corrélateur à trois points formé avec un de ces opérateurs (qui nous intéressera dans la suite) représentera un méson au point source, avec un quark de type bas (D), qui interagira au point d'interaction $(t_i, \vec{y})$ avec un courant vectoriel ou axial écrit précédemment, et un méson, avec un quark lourd de type haut (U), s'annihilant au point puits $(t, \vec{x})$.

Ici, et pour le reste de cette section, nous allons nous contenter d'établir les fonctions de corrélation pour le courant vectoriel uniquement ; la dérivation et les formules restent très similaires pour le cas axial. En dénotant les opérateurs des mésons pseudo-scalaires par P et les opérateurs vectoriels par V , nous obtenons les fonctions de corrélation à trois points suivantes :

8. Dans le SM, l'Hamiltonien effectif de la désintégration $b \rightarrow c \ell \nu$ s'écrira sous la forme $\mathcal{H}^{\text{eff}} = \sqrt{2} G_F V_{cb} [(\bar{c} \gamma_\mu b) (\bar{\ell} \gamma^\mu \nu) - (\bar{c} \gamma_\mu \gamma_5 b) (\bar{\ell} \gamma^\mu \nu)] + \text{h.c.}$; voir [38] pour un Hamiltonien avec des courants de nouvelle physique.

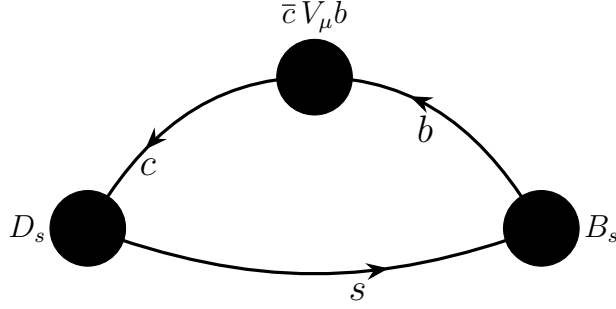


FIGURE I.6 – Représentation d’une fonction de corrélation à trois points pour la transition $B_s \rightarrow D_s$.

$$C_\mu(\vec{q}, t_i) = \sum_{\vec{x}, \vec{y}} \langle P_{f_{fD}}(0, \vec{0}) V_\mu(t_i, \vec{y}) \bar{P}_{f_{fU}}(t, \vec{x}) e^{-i\vec{q}(\vec{x}-\vec{y})} \rangle. \quad (\text{I.56})$$

Comme pour les corrélateurs à deux points, la dérivation de cette équation fait appel à la transformée de Fourier du corrélateur dans l’espace des impulsions. C’est pourquoi nous retrouvons, dans cette équation, l’impulsion échangée q , qui est la différence des impulsions portées par les deux mésons. À la différence des corrélateurs à deux points, nous n’allons pas faire varier le temps t où le méson final s’annihile, mais nous allons plutôt varier le temps d’insertion t_i du courant vectoriel. Ce choix est dû, une fois de plus, au coût de calcul. En effet, ajouter un troisième opérateur dans le corrélateur implique de multiplier le nombre de configurations cinématiques par un facteur N_T , puisque t peut être choisi n’importe où entre 0 et $N_T - 1$.

En utilisant à nouveau le formalisme des intégrales de chemins, il est possible de montrer que notre corrélateur à trois points s’exprime en fonction des grandeurs physiques comme

$$\begin{aligned} \langle P_i(0) V_\mu(t_i) \bar{P}_f(t) \rangle_T &= \frac{\sum_n \langle n | \hat{P}_i e^{t_i \hat{H}} \hat{V}_\mu e^{-t_i \hat{H}} e^{t \hat{H}} \hat{P}_f^\dagger e^{-t \hat{H}} | n \rangle}{\sum_n e^{-TE_n}} \\ &= \frac{\sum_{n,m,j} \frac{1}{E_m E_j} \langle n | \hat{P}_i e^{t_i \hat{H}} | m \rangle \langle m | \hat{V}_\mu e^{-t_i \hat{H}} | j \rangle \langle j | e^{t \hat{H}} \hat{P}_f^\dagger e^{-t \hat{H}} | n \rangle}{\sum_n e^{-TE_n}}. \end{aligned} \quad (\text{I.57})$$

Pour simplifier cette équation et donner sa formulation pour les états fondamentaux, nous allons avoir besoin de la même limite que dans le cas du corrélateur à deux points ($T, t \rightarrow \infty$), mais nous allons également devoir satisfaire $t_i \gg 0, t_i \ll t$ ainsi que $t \ll T$. Afin de satisfaire au mieux ces critères, nous allons fixer $t = T/2$, et calculer tous les corrélateurs quelle que soit la valeur de $t_i \in [0 ; t]$; l’élément de matrice entre états fondamentaux ne sera en fait correctement isolé que dans une certaine plage de valeurs qui satisfera au mieux les conditions définies précédemment. Nous reviendrons sur ce point dans la section [IV. 2.3](#) qui concerne l’analyse de nos données. En appliquant toutes ces limites, nous aboutissons à la formulation suivante :

$$\langle P_i(0)V_\mu(t_i)\bar{P}_f(t)\rangle_T = \sum_{n,m} \frac{\langle 0|\hat{P}_i|n\rangle\langle n|\hat{V}_\mu|m\rangle\langle m|\hat{P}_f^\dagger|0\rangle}{E_n E_m} e^{-(t-t_i)E_n} e^{-t_i E_m}. \quad (\text{I.58})$$

La quantité physique qui nous intéresse dans ce corrélateur est la matrice d'interaction $\langle n|\hat{V}_\mu|m\rangle$. La physique de la désintégration du méson est entièrement contenue dans cette matrice, et nous verrons dans le chapitre [IV](#) comment relier cette matrice à des grandeurs mesurées expérimentalement.

Application à $B_s \rightarrow D_s^{(*)}$: matrice d'interaction et corrélateurs $C_{D_s^{(*)}V_\mu B_s}^{3pts}$

Nous terminons cette partie par l'extraction de la matrice d'interaction de ces corrélateurs en supposant que nous avons isolé correctement les contributions venant des états fondamentaux. Les formules des corrélateurs à deux et à trois points se synthétisent alors comme suit :

$$\begin{aligned} C^{2pts}(t) : \langle P_i(0)\bar{P}_i(t)\rangle &= \frac{|Z_i|^2}{E_i} e^{-tE_i}, \quad \langle P_f(0)\bar{P}_f(t)\rangle = \frac{|Z_f|^2}{E_f} e^{-tE_f}, \\ C^{3pts}(t_i) : \langle P_i(0)V_\mu(t_i)\bar{P}_f(t)\rangle_T &= \frac{\langle 0|\hat{V}_\mu|0\rangle|Z_i||Z_f|}{E_i E_f} e^{-(t-t_i)E_i} e^{-t_i E_f}. \end{aligned} \quad (\text{I.59})$$

Il suffit alors d'inverser l'équation du corrélateur à trois points (et de remarquer les termes déjà présents dans les fonctions de corrélation à deux points) pour obtenir l'élément de matrice hadronique :

$$\langle 0|\hat{V}_\mu|0\rangle = \frac{C^{3pts}(t_i)|Z_i||Z_f|}{C_{P_i P_i}^{2pts}(t)C_{P_f P_f}^{2pts}(t-t_i)}. \quad (\text{I.60})$$

Nous pouvons appliquer ce résultat aux fonctions de corrélation à trois points que nous étudierons dans le chapitre [IV](#), en particulier le cas des désintégrations $B_s \rightarrow D_s$ et $B_s \rightarrow D_s^*$ avec un méson initial au repos :

$$\begin{aligned} C_{D_s V_\mu B_s}^{3pts}(t_i) &= \text{Tr} [\gamma_5 D_s^{-1}(m|0) \gamma_5 D_c^{-1}(n|m) \gamma_\mu D_b^{-1}(0|n)] + \text{permutations Wick}, \\ C_{D_s^* A_\mu B_s}^{3pts}(t_i) &= \text{Tr} [\gamma_5 D_s^{-1}(m|0) \gamma_5 D_c^{-1}(n|m) \gamma_5 \gamma_\mu D_b^{-1}(0|n)] + \text{permutations Wick}. \end{aligned} \quad (\text{I.61})$$

Les corrélateurs précédents sont exprimés en fonction des propagateurs de quark (pour les quarks qui composent nos objets d'études). Ceci permet de se rendre compte des champs que nous avons eu besoin de calculer, et également de pouvoir faire la comparaison avec la formule pour les corrélateurs à deux points ([Eq. I.54](#)). Comme nous l'avons démontré dans les sections précédentes, ces fonctions (à trois points) se récrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} C_{D_s V_\mu B_s}^{3pts}(t_i) &= \langle B_s(0)V_\mu(t_i)\bar{D}_s(t)\rangle_T = \frac{\langle D_s|\hat{V}_\mu|B_s\rangle|Z_{B_s}||Z_{D_s}|}{m_{B_s} E_{D_s}} e^{-(t-t_i)E_{D_s}} e^{-t_i m_{B_s}}, \\ C_{D_s^* A_\mu B_s}^{3pts}(t_i) &= \langle B_s(0)A_\mu(t_i)\bar{D}_s^*(t)\rangle_T = \frac{\langle D_s^*|\hat{A}_\mu|B_s\rangle|Z_{B_s}||Z_{D_s^*}|}{m_{B_s} E_{D_s}^*} e^{-(t-t_i)E_{D_s^*}} e^{-t_i m_{B_s}}. \end{aligned} \quad (\text{I.62})$$

Nous pouvons alors substituer ces corrélateurs dans l'Eq. I.60 pour obtenir les éléments de matrice de la désintégration de B_s ($|0\rangle$) en D_s ou D_s^* ($\langle 0|$).

Nous reviendrons dans la section IV. 1.1 sur l'ensemble des données utilisées pour effectuer ce calcul. Nous avons en tout cas, à ce stade, fourni l'ensemble des éléments théoriques (pour ces corrélateurs) nécessaires à la compréhension de mes travaux de thèse.

I. 3.4 Calcul à impulsion non-nulle

Comme nous l'avons vu en I. 3.2, il est possible d'obtenir des grandeurs physiques comme la masse d'un méson à partir d'un corrélateur à deux points. Nous avons même été plus général en parlant de l'énergie du méson, dans le cas où il possède une impulsion. Par la suite, lorsque nous nous intéresserons à la désintégration des mésons B_s , nous verrons que même si nous choisissons un méson B_s initialement au repos, le méson D_s résultant de cette désintégration aura une impulsion qui peut être non-nulle. En effet, le processus qui nous intéresse ici est une désintégration à trois corps. Nous pouvons en calculer la cinématique et affirmer que l'énergie portée par les trois particules sortantes est égale à la différence de masse entre le méson initial et le méson final. Il résulte de cette cinématique une distribution en impulsion non-nulle pour le méson D_s . Ainsi, pour notre étude, il nous faudra nécessairement simuler des mésons D_s avec une impulsion, or nous n'avons à notre disposition que les champs de quarks ; pour un méson D_s , le quark plus lourd est un *charm* et son quark léger est le *strange*. Pour donner au méson son impulsion, nous allons devoir faire une approximation cinématique, qui consiste à dire que l'intégralité de l'impulsion du méson est portée par son quark lourd. La raison pour laquelle nous avons besoin de faire cette approximation est que nous ne pouvons pas considérer directement des fonctions de corrélation à des impulsions continues : les modes de Fourier des corrélateurs sont discrets à cause du volume fini dans lesquels les calculs sont effectués. Notre approche a le mérite de la simplicité sans contrevenir aux attentes de la théorie quantique des champs.

Entrons un peu dans les détails concrets de la procédure. Tout d'abord, définissons le paramètre θ_μ qui quantifie l'impulsion sur réseau. Nous choisissons une impulsion isotrope $\theta_\mu = (0, \vec{\theta})$ avec $\vec{\theta} = (\theta_0, \theta_0, \theta_0)$, ce qui correspond dans le continu à avoir un quark possédant une impulsion $\vec{p} = \vec{\theta}\pi/L$ (pour rappel, L est l'extension spatiale du réseau) ; cela signifie que les conditions au bord imposées sont $\psi(x + L\vec{e}_i) = e^{-i\theta_i\pi}\psi(x)$. En employant la transformation des champs $\tilde{\psi}(x) = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{x}}\psi(x)$, $\tilde{\bar{\psi}}(x) = e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{x}}\bar{\psi}(x)$, il est aisé de voir que $\tilde{\bar{\psi}}$ obéit à des conditions périodiques et, surtout, que l'action de Wilson-clover prend la forme habituelle avec ces champs, mis à part que le champ de jauge doit être réécrit de la manière suivante :

$$U_\mu(n) \rightarrow U_\mu^\theta(n) = e^{i\theta_\mu\pi/L}U_\mu(n). \quad (\text{I.63})$$

Le propagateur du quark *charm*, obtenu à partir de l'action Wilson-clover avec le champ U_μ^θ sera alors redéfini de la manière suivante :

$$D_c^{-1}(n, U, \vec{\theta}) = e^{i\vec{\theta}\vec{n}\pi/L} D_c^{-1}(n, U^\theta, \vec{0}). \quad (\text{I.64})$$

Il sera ensuite simple de remplacer, dans les fonctions à deux points (Eq. I.54) et trois points (Eq. I.61), le propagateur du quark *charm* au repos par ce nouveau propagateur. Ce calcul n'est au final pas excessivement coûteux en temps, car il revient simplement à multiplier les champs simulés sur réseau par une simple phase.

Nous avons montré ici comment obtenir les propagateurs de quarks à impulsion non nulle et donc, dans un même temps, comment former les fonctions de corrélation à deux et trois points avec une certaine quantité de mouvement. Et nous avons également précisé les approximations qui ont dû être faites pour réussir la simulation sur réseau de telles quantités. Cette dernière étape nous donne toutes les clés pour étudier la désintégration $B_s \rightarrow D_s^{(*)} l \nu$, qui sera discutée dans le chapitre IV.

I. 4 Problèmes ouverts en LQCD et bref état des lieux

Dans ce chapitre, j'ai présenté les bases de la discrétisation de l'action de la QCD, dont le but est de donner une alternative à la régularisation traditionnellement utilisée en QCD perturbative. Comme il a été vu dans la section I. 2, la discrétisation de l'action entraîne de nombreux problèmes, comme les doublons ou encore les erreurs de discrétisation. Dans certains cas, les travaux menés en LQCD portent sur des objets très peu soumis à ces erreurs, comme c'est le cas par exemple pour le calcul de la masse du pion. Mais, comme toute science, la LQCD, après avoir exploré les champs comportant le moins de difficultés, pousse désormais ses recherches dans des domaines qui conduisent à devoir améliorer la discrétisation que nous avons présentée au long de ce chapitre. Pour compléter cette discussion, nous allons donc voir quelques cas où cette discrétisation n'est pas suffisante et comment l'améliorer. Afin de conclure cette partie, je présenterai aussi quelques recherches qui tentent d'aller plus loin dans la compréhension de la matière hadronique et dans la recherche de physique BSM.

I. 4.1 Le problème de la symétrie chirale sur réseau

La symétrie chirale, et en particulier la manière dont elle se brise, est une symétrie extrêmement importante pour la QCD. En effet, cette brisure de symétrie permet d'expliquer de nombreuses observations et elle explique par exemple la masse très faible des pions. En se brisant spontanément, la symétrie chirale acquiert des bosons de Goldstone ; les pions sont les bosons de Goldstone de l'interaction nucléaire forte. Néanmoins les pions n'ont pas une masse nulle, et l'origine de leur masse est due à une seconde brisure de la symétrie chirale, qui est cette fois une brisure explicite et induite par le fait que les quarks acquièrent des masses différentes selon leurs saveurs. La masse des pions est donc proportionnelle à la brisure spontanée de cette symétrie, or les masses des quarks

up et *down* sont presque égales ($\simeq 5$ MeV dans $\overline{\text{MS}}$). Donc, pour les deux premières saveurs, la symétrie n'est que faiblement brisée. Comme les pions chargés et neutre ne sont constitués que de ces deux premières saveurs, leurs masses respectives sont très proches (moins de 5% de différence relative). La différence $m_u - m_d$, liée à la brisure d'isospin forte, est une des sources de cette levée de dégénérescence. La brisure d'isospin électromagnétique, provenant des charges électriques différentes entre les quarks u et d , en est la seconde.

Pour en revenir à la LQCD, le terme de Wilson, que nous avons introduit à la section I. 2.2, brise spontanément la symétrie chirale, et ce même dans une théorie avec des quarks de masse nulle. Le théorème de Nielsen et Ninomiya [39] stipule qu'avec une telle formulation (celle que nous avons donnée), nous ne pouvons à la fois avoir une discrétisation exempte de doublons et dans le même temps qui possède une brisure adoucie de la symétrie chirale. Pour contourner ce problème, une reformulation de la symétrie chirale dans le continu a été proposée et cette solution porte le nom d'équation de Ginsparg-Wilson [40]. Sur réseau, cette solution implique de simuler des fermions dits *overlap* ou d'autres dits *domain wall* [41]. Bien sûr, ces nouveaux fermions sont plus coûteux à simuler et c'est pourquoi ils ne sont utilisés qu'à la condition que le sujet de recherche soit fortement lié à la symétrie chirale. En guise d'exemples, les collaborations χQCD (fermions *overlap*) et RBC-UKQCD (fermions *domain wall*) ont réalisé des travaux respectivement pour le calcul du facteur de forme du pion [42] et pour la désintégration $K \rightarrow \pi\pi$ [43].

I. 4.2 Résultats modernes de LQCD

Calcul des paramètres fondamentaux Nous avons vu, au cours de l'introduction de ce chapitre, que le Lagrangien de la QCD contenait sept paramètres. Nous avons aussi vu comment la constante α_s était déduite des expériences, du moins dans le domaine de haute énergie. Dans le domaine non-perturbatif de QCD, α_s peut être calculée sur réseau, qui est d'ailleurs le seul moyen *ab initio* de calculer cette grandeur dans le régime non-perturbatif. De plus, concernant la masse des quarks, il n'est pas possible d'accéder expérimentalement à leurs valeurs⁹ du fait que les quarks sont confinés dans des états liés de couleur (hadrons). Cependant, de même que pour α_s , à l'aide d'autres observables physiques et de modèles théoriques, il est possible de déduire la masse des quarks. Mais là encore, le calcul sur réseau reste la seule méthode *ab initio* pour leur détermination. En regardant l'évolution du *Particle Data Group*, qui compile les résultats de physique des particules, il est aisé de voir la place de plus en plus prépondérante des calculs sur réseau pour la détermination des paramètres fondamentaux de la QCD. Un exemple parmi beaucoup d'autres, mais qui sert à présenter une autre discrétisation, est le calcul de la collaboration PACS-CS [44]. Le point fort de leurs simulations est la réalisation d'un ensemble de réseaux avec $2 + 1$ saveurs de quarks. Commenant avec uniquement l'action de la QCD, ils réussissent ensuite à inclure l'action de l'*Électrodynamique Quantique (QED)* ainsi que la brisure d'isospin forte, et de ce fait à obtenir $1 + 1 + 1$ saveurs de quarks, via une technique dite de *reweighting*. Ceci va ainsi leur permettre de donner précisément les masses des quarks u , d et s . Cette technique de *reweighting* (décrite en

9. À l'exception du quark *top*, qui se désintègre avant de s'hadroniser, et dont la masse peut ainsi être mesurée.

[45]) consiste tout d'abord à calculer deux opérateurs de Dirac, l'un comme nous l'avons décrit (Eq. I.29) et l'autre en ajoutant l'interaction du quark avec le photon. Ensuite, le rapport de ces deux opérateurs est mis dans les intégrales de chemin, comme un facteur pondérateur de l'intégrale de chemin en QCD pure. Notons qu'il existe un grand nombre de résultats similaires qui tendent à diminuer l'incertitude globale sur ces paramètres extrêmement importants pour le SM.

La détermination du moment magnétique du muon Les fermions, comme l'électron ou le muon, possèdent un *moment magnétique* qui fait intervenir le *facteur de Landé* (noté g). Cette propriété intrinsèque, comme l'est la masse, est une conséquence directe de l'équation de Dirac et du spin demi-entier de ces particules. Le calcul à l'arbre (d'ordre le plus bas) donne $g = 2$, mais les expériences donnent des moments magnétiques pour les particules très différents de 2 et variables d'une particule à une autre. La raison est que $g = 2(1 + a)$, où a est une quantité sans dimension, issu de la contribution des diagrammes à boucle, est appelé *moment magnétique anomal*. L'un des intérêts de ce terme a est qu'il prend en compte les contributions de toutes les particules et inclut les trois interactions du modèle standard ; le calcul de a permet donc un test complet du modèle standard.

Nous allons nous concentrer ici sur a_μ , le moment du muon. Il faut noter que l'écrasante contribution à a_μ provient de la QED, la théorie qui traite des interactions électromagnétiques. Pour rendre compte du moment magnétique mesuré expérimentalement, les calculs à boucles de QED ont été portés jusqu'au sixième ordre (5 boucles), avec évidemment des contributions toujours plus faibles. À cette précision théorique, les corrections dominantes deviennent alors celles provenant de l'interaction faible (jusqu'à deux boucles) et finalement celles dues aux contributions venant de QCD ; le problème de ces dernières est qu'elles sont non-perturbatives. Ces contributions sont réunies en deux types, dites des *interactions Hadron-Lumière* (*HLbL*)¹⁰, déjà calculées (mais avec une large incertitude), et des *Polarisations Hadroniques du Vide* (*HVP*). En 2020, une compilation des résultats [46] donnait une incompatibilité entre théorie et expérience allant de 3 à 4σ , avec une incertitude théorique gouvernée par les HVP. En 2021, l'expérience $g - 2$ de Brookhaven a présenté ses derniers résultats [47] sur la mesure de a_μ . La combinaison de tous les résultats expérimentaux donne alors une inconsistance à 4.2σ entre théorie et expérience. Cependant, la même année, après de longues années de calculs sur réseau, la collaboration BMW a présenté ses résultats de la contribution HVP pour le moment magnétique anomal du muon [48], résultats qui tendent à diminuer significativement l'inconsistance sur a_μ . Notons que ce qui a permis à la collaboration BMW de donner la mesure réseau des HVP la plus précise est la simulation de nombreux réseaux avec une très large statistique sur des configurations à $2+1+1$ saveurs de quarks à la masse physique (les mésons simulés ont les masses physiques à la limite du continu). En outre, ils utilisent des quarks dit *staggered*, qui sont issus d'une autre méthode pour contourner le problème des doublons. Néanmoins, la convergence de ces fermions *staggered* vers les fermions physiques à la limite du continu n'est pas établie théoriquement. Il est vrai que la collaboration BMW emploie une action de leur conception, composée de quarks *staggered* et de *stout smearing* qui, empiriquement, semble donner d'excellents résultats. L'autre point fort de leur analyse est l'utilisation de nombreuses

10. *Hadronic Light-by-Light*.

techniques pour vérifier, quantifier et minimiser les erreurs systématiques de leur discrétisation, tels les effets de volume fini ou la convergence des fermions *staggered*.

Pour conclure sur le moment magnétique du muon, si le désaccord, encore non significatif ($< 5\sigma$), entre théorie et expérience est si attrayant, c'est qu'il pourrait révéler l'existence d'une ou plusieurs particules, non observées à ce jour, qui apporteraient une contribution à a_μ . L'expérience ($g - 2$) va continuer à améliorer sa statistique et les résultats de la collaboration BMW pourront être complétés par d'autres travaux avec d'autres discrétisations de fermions. L'incertitude sur la contribution HLBL fait également l'objet de beaucoup d'efforts pour la réduire.

Autres recherches notables Beaucoup d'autres quantités physiques sont au cœur de la recherche en LQCD, mais il serait toutefois difficile de les présenter avec autant de détails sans s'éloigner de notre propos principal. Avant de se recentrer sur les travaux que j'ai effectués, terminons la présente discussion en évoquant quelques-unes de ces quantités.

- Étude des états liés de l'interaction forte : avec le calcul des paramètres fondamentaux de la QCD, c'est l'autre grande promesse initiale de la LQCD. Cette étude de la spectroscopie des hadrons constitue à la fois un test de la LQCD (les masses des hadrons étant pour la plupart connues expérimentalement) et une confirmation théorique avec la prédiction des largeurs de désintégration des hadrons. Pour se rendre compte des résultats de la LQCD dans ce domaine, nous pouvons comparer les résultats expérimentaux du PDG [12] (sur les propriétés des particules) aux différentes publications en spectroscopie sur réseau, comme [49] dans le domaine des baryons lourds.
- Calcul des PDF : nous avons déjà évoqué les PDF, dont l'utilité pour la physique de précision dans les collisionneurs hadroniques est indéniable. Pourtant, leur calcul non-perturbatif en LQCD était demeuré inexploré à cause de l'espace Euclidien utilisé en LQCD. La communauté se contentait d'évaluer les premiers moments de ces PDF. Néanmoins, depuis quelques années, une classe de méthodes a été mise au point pour leur calcul direct, par l'intermédiaire de pseudo-PDF ; pour plus d'explications, voir [50]. L'aboutissement de ces recherches promet l'amélioration des mesures expérimentales dans les collisionneurs hadroniques, sans réduction de statistique par rapport aux autres méthodes de détermination des PDF utilisées actuellement, ainsi qu'une détermination *ab initio* de ces fonctions de distributions.
- Désintégration des hadrons : sans en parler davantage ici, puisque ces recherches constitueront le cœur du chapitre III de cette thèse, l'étude des désintégrations de hadrons est un des autres atouts majeurs de la LQCD. En effet, celle-ci rend possible l'insertion de n'importe quel courant — et pas seulement des courants faibles du SM — pour la désintégration des hadrons. Ceci permet de tester les courants prédits dans des théories BSM ou bien de confirmer les mesures expérimentales des courants SM.
- *Moment Dipolaire Électrique du neutron (nEDM)* : terminons cette liste non-exhaustive en citant les recherches sur le nEDM. Ce dernier, dans le SM, doit valoir zéro, et sa non nullité impliquerait une brisure de la symétrie CP-fort. Ceci se traduirait par un huitième paramètre

dans le Lagrangien de QCD, généralement noté θ . Cela rend intéressante la recherche de nEDM sur réseau, en prenant en quelque sorte le problème à l'envers : il est en effet possible d'introduire un paramètre de brisure de symétrie dans l'action de QCD afin de mesurer son impact sur nEDM (voir [51]).

I. 4.3 Organisation de la recherche

Comme nous avons pu le pressentir au cours des divers discussions de ce chapitre, le domaine de la LQCD, comme beaucoup d'autres, s'organise en collaborations et en équipes de recherche. La raison est assez simple, la LQCD est un domaine relativement coûteux en temps de calcul comparé à de nombreux autres domaines de la physique théorique. En effet, nous avons évoqué plusieurs fois la puissance de calcul nécessaire à la simulation des champs de jauge et à l'inversion de l'opérateur de Dirac (U et D). Ainsi, le regroupement des chercheurs au sein de collaborations permet de mutualiser les ressources des membres de la collaboration. Le temps de calcul nécessaire aux différents projets varie en effet de plusieurs millions d'heures CPU (pour les preuves de concepts) au milliard d'heures (pour les calculs les plus fins). Même si les super-calculateurs se répandent, ils restent encore précieux et leur accès reste soumis à l'acceptation de projets « concrets ». Là encore, être regroupé en collaboration est un atout puisqu'il permet de faire de plus gros projets avec une meilleure visibilité dans la communauté scientifique. En effet, si le coût de calcul est contenu dans la fabrication des ensembles statistiques de champs de jauge, ces ensembles, une fois constitués, permettent à chaque membre de la collaboration de faire une analyse plus ou moins personnelle des quantités qu'il souhaite étudier. Il n'existera donc pas, en général, de collaboration qui fait des calculs que d'autres ne peuvent faire (au-delà des moyens de calcul requis) ; par exemple, la détermination des masses des quarks, que nous avons vue, est un des calculs réalisés quasiment systématiquement par chaque collaboration. Comme nous le verrons dans le chapitre IV, les collaborations ALPHA et ETMC ont mené des travaux similaires en physique de la saveur. Un des avantages de cette redondance est de mieux comprendre les erreurs systématiques dues aux différentes méthodes de discrétisations et leur impact sur la précision des résultats. Si n'importe quelle collaboration peut calculer les observables de la QCD, certaines quantités restent néanmoins la « chasse gardée » de quelques groupes, du fait de l'expertise gagnée par ces collaborations au cours des années ou de l'avantage que représente leur discrétisation. Une synthèse des réseaux récemment simulés par les différentes collaborations et leurs discrétisations variées peut être trouvée dans l'annexe de la revue [52] ; voir aussi la Figure I.7.

Du fait des difficultés que représente le travail sur des ressources mutualisées, les collaborations sont souvent rattachées à une zone géographique, avec une dominance de chercheurs travaillant dans cette zone. Ces zones sont souvent celles-là mêmes qui regroupent les grands centres de calcul¹¹. Ainsi, nous trouverons un grand nombre de collaborations états-uniennes ou anglo-saxonnes,

11. Pour avoir une idée des ressources accessibles dans le monde par ces collaborations, voir le site [top500](#) qui compile les plus grands super-calculateurs au monde. Il faut cependant garder à l'esprit que tous ces centres de calcul ne sont pas dédiés à la recherche publique. En effet, bien que la première machine française pour la recherche

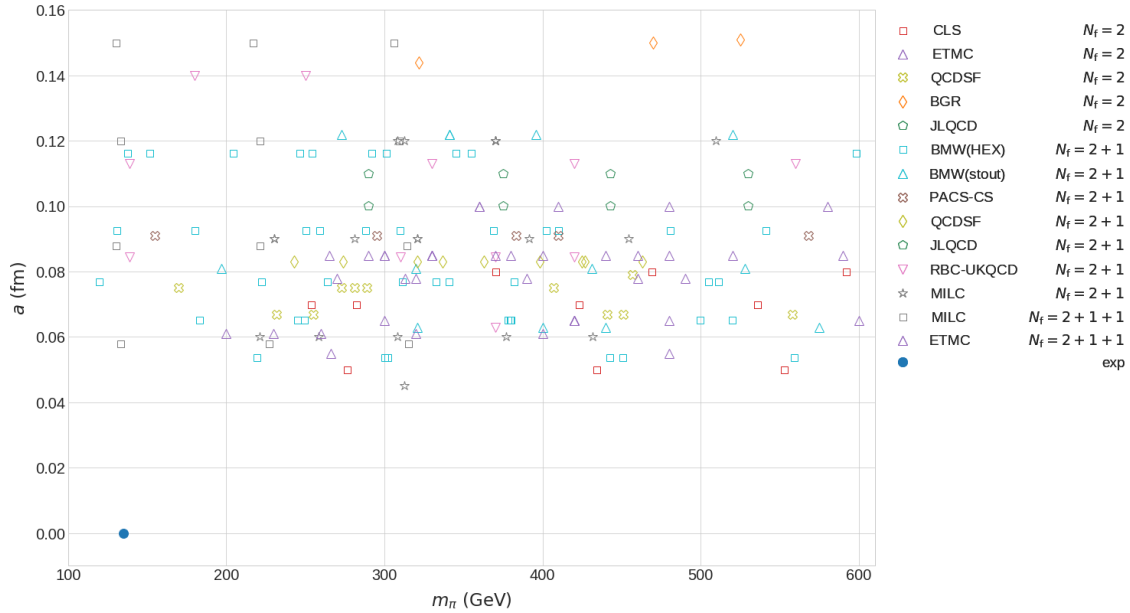


FIGURE I.7 – Positionnement des acteurs majeurs de la LQCD (non exhaustif) en termes d'évolution de la maille des réseaux a et de leur convergence vers la masse physique du pion m_π dans le continu (cercle bleu). L'évolution vers le point physique n'est pas évidente, en deux dimensions, puisque de nombreux autres paramètres des réseaux sont améliorés dans le même temps (par exemple, le volume Λ , voir Eq. I.8). Les générations d'ensembles de réseaux simulés par ces collaborations sont réalisées sur un large spectre de paramètres, afin d'étudier les erreurs systématiques dues à ces paramètres (telle la maille du réseau). Ce graphique a été initialement réalisé par G. Herdoiza et mis à jour par B. Blossier (voir [52] pour une liste complète).

comme MILC, RBC-UKQCD ainsi que par exemple HPQCD. Nous trouvons aussi des collaborations japonaises ou asiatiques, et nouvellement chinoises, parmi lesquelles JLQCD ou TWQCD. Nous avons également des collaborations européennes, que nous avons déjà citées, comme ETMC, ALPHA ou encore BMW.

Les travaux que j'ai menés durant cette thèse s'insèrent dans le cadre des collaborations ETMC pour le calcul des constantes de renormalisation — via les *Identités de Ward (WI)* et via le schéma de renormalisation RI-SMOM (voir II) — et de ALPHA pour mes calculs en physique du B (voir III et IV).

fondamentale (*Jean Zay*) ne se classe qu'en quatre-vingt-douzième position mondiale (en juin 2021) alors que le centre de calcul privé de l'entreprise *Total (Pangea III)* occupe la vingt-et-unième place, la France se classe cinquième mondiale en ce qui concerne la puissance totale des super-calculateurs (alors que les ressources pour la recherche publique restent faibles).

Chapitre II

Renormalisation en LQCD à l'aide du schéma RI-SMOM

La théorie des champs à laquelle appartiennent la QCD ainsi que son homologue discrétisé, la LQCD, est une théorie qui doit être régularisée, comme toute théorie des champs. Effectivement, nous l'avons vu dans le cas de la constante de couplage α_s (I. 1.1), le calcul complet d'une grandeur ne peut être fait sans régularisation, et une coupure ou *Cutoff* doit être fixée. Pour rappel, la LQCD régularise la QCD en introduisant à la fois une coupure *Ultra-Violette (UV)* à haute énergie (en discrétisant l'espace-temps) et une coupure *Infra-Rouge (IR)* à basse énergie (en fixant un volume fini). En introduisant ces régularisations, certaines des grandeurs théoriques (comme α_s) obtiennent une dépendance en l'échelle de l'interaction. Or, une grandeur physique se doit d'être invariante d'échelle. Ainsi, l'idée de la renormalisation est d'absorber cette dépendance dans une *Constante de Renormalisation (RC)*; ensuite, la combinaison de la RC avec la grandeur calculée donnera la valeur physique de cette quantité.

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord voir dans la section II. 1 certaines des méthodes utilisées en LQCD pour obtenir ces RC. Nous verrons en particulier la méthode RI-SMOM et ce qu'elle apporte comparativement aux autres. Nous discuterons ensuite en section II. 2 du problème des artefacts hyper-cubiques qui contaminent la déduction des RC dans certaines méthodes comme dans RI-SMOM, et nous verrons comment les supprimer. Finalement, je donnerai dans la partie II. 3 mes hypothèses quant à la poursuite de ces travaux.

II. 1 Principe de renormalisation en LQCD

La manière de produire les RC n'est pas unique et nous parlerons de schéma de renormalisation comme une manière de déterminer ces constantes. En physique des particules, le schéma traditionnellement utilisé est le schéma $\overline{\text{MS}}$. En LQCD, les schémas principalement utilisés sont

les schémas RI-MOM, RI'-MOM (tous deux définis en [53]) et la fonctionnelle de Schrödinger. Nous présenterons les deux premiers dans la partie suivante et, pour la troisième, nous renvoyons le lecteur intéressé à [54]. Finalement, de manière à pouvoir comparer les grandeurs calculées sur réseau et les autres, une correspondance sera faite entre les schémas utilisés en LQCD et $\overline{\text{MS}}$. La méthode pour établir cette correspondance peut être trouvée en [55].

II. 1.1 Le schéma de renormalisation RI-MOM

Les quantités calculées en QCD perturbative possèdent une dépendance en l'échelle de l'interaction μ et le but du schéma $\overline{\text{MS}}$ est de supprimer la dépendance des quantités en μ . En LQCD, certaines des quantités calculées sur réseau, comme la masse des quarks, possèdent une dépendance en la maille du réseau a , et le schéma RI-MOM a pour but de transformer la dépendance en a (sur réseau) en dépendance en μ dans le continu ; dans ce sigle, RI signifie « indépendant de la régularisation » et MOM est le diminutif de *momentum* (impulsion). La suppression de la dépendance est faite de la manière suivante

$$O(\mu) = Z_O(a\mu, g(a))O(a), \quad (\text{II.1})$$

où O est un opérateur bilinéaire quelconque ($O = \bar{\psi}_1 \Gamma \psi_2$, avec 1 et 2 les saveurs des quarks)¹ et Z_O est la RC qui y est associée ; cette dernière dépend de la maille ainsi que de l'échelle d'énergie, la constante de couplage de l'interaction forte, g , ne dépendant que de a .

Nous ne l'avons pas clairement expliqué dans le chapitre précédent, mais à l'aide de la transformée de Fourier, il est possible de calculer le propagateur d'un quark dans l'espace des impulsions, et donc de donner la valeur moyenne d'un opérateur à une impulsion donnée. Ceci va permettre d'associer l'échelle d'énergie à la valeur moyenne de l'opérateur

$$\langle p|O|p \rangle \Big|_{p^2=\mu^2}. \quad (\text{II.2})$$

La détermination de la RC Z_O va alors se faire en imposant une condition de renormalisation

$$Z_O(a\mu, g(a))Z_\psi^{-1}(a\mu, g(a))\Gamma_O(p) \Big|_{p^2=\mu^2} = 1. \quad (\text{II.3})$$

Dans cette condition, nous avons introduit la constante de renormalisation du champ fermionique Z_ψ (dont la définition sera donnée par l'Eq. II.14), ainsi que la fonction de Green projetée Γ_O (Eq. II.12) associée à l'élément de matrice $\langle p|O|p \rangle$. Le calcul d'une fonction de Green ne pourra donner des valeurs non-nulles qu'à la condition de fixer la jauge, par exemple à l'aide de la jauge de Landau dans le cas continu

$$\partial_\nu A_\nu(x) = 0. \quad (\text{II.4})$$

Nous pourrions, au chapitre III de [9], trouver une explication quant à l'application de cette jauge sur les liens U_μ en LQCD.

1. Nous supposons que la dépendance en a de cet opérateur diverge logarithmiquement lorsque $a \rightarrow 0$, voir [53] pour une généralisation aux autres divergences.

Fonction de Green G_O , fonction de Green tronquée Λ_O et projecteur Γ_O

Une fois les champs de jauge simulés en fixant la jauge (selon la procédure décrite en [9]), il est possible de calculer la fonction de Green G_O (toujours associée au même opérateur bilinéaire O) à l'aide de

$$\begin{aligned} G_O(p) &= \frac{1}{\Lambda} \sum_{x,y} e^{-ip(x-y)} \left\langle \psi_1(x) \sum_z O(z) \bar{\psi}_2(y) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\Lambda} \sum_{x,y,z} e^{-ip(x-y)} \langle \psi_1(x) \bar{\psi}_1(z) \rangle \Gamma \langle \psi_2(z) \bar{\psi}_2(y) \rangle , \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

où nous avons utilisé la factorisation de l'intégrale fermionique $\langle \cdot \rangle_F = \langle \cdot \rangle_{f_1} \langle \cdot \rangle_{f_2}$. Pour rappel, Λ (à ne pas confondre avec la fonction de Green amputée que nous verrons ci-dessous) dénombre l'ensemble des points du réseau. Nous voyons, de plus, apparaître dans cette équation, la définition du propagateur de quark

$$D^{(f)-1}(n|m) = \langle \psi_f(n) \bar{\psi}_f(m) \rangle , \quad (\text{II.6})$$

ce qui conduit, en moyennant sur les N_c configurations indicées c , à

$$\begin{aligned} G_O(p) &= \frac{1}{N_c \Lambda} \sum_c \sum_{x,y,z} e^{-ip(x-y)} D_c^{(1)-1}(x|z) \Gamma D_c^{(2)-1}(z|y) \\ &= \frac{1}{N_c \Lambda} \sum_c \sum_{x,y,z} e^{-ip(x-y)} \gamma_5 D_c^{(1)-1\dagger}(z|x) \gamma_5 \Gamma D_c^{(2)-1}(z|y) , \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

et où, pour le passage à la deuxième ligne, nous avons utilisé l'hermiticité- γ_5 du propagateur de quark². En reprenant la réécriture du propagateur de quark dans l'espace des impulsions,

$$D_c^{-1}(x|p) = \sum_y e^{ipy} D_c^{-1}(x|y) , \quad (\text{II.8})$$

il vient finalement

$$G_O(p) = \frac{1}{N_c \Lambda} \sum_{c,z} \gamma_5 D_c^{(1)-1\dagger}(z|p) \gamma_5 \Gamma D_c^{(2)-1}(z|p) . \quad (\text{II.9})$$

Nous définissons alors la fonction de Green dite « amputée » comme la fonction de Green multipliée de part et d'autre par l'opérateur de Dirac :

$$\Lambda_O(p) = D^{(1)}(p) G_O(p) D^{(2)}(p) , \quad (\text{II.10})$$

où nous avons pris la valeur moyenne du propagateur de quark (définie similairement) que nous avons inversée pour retrouver l'opérateur de Dirac

$$D^{-1}(p) = \frac{1}{N_c \Lambda} \sum_{c,z} e^{-ipx} D_c^{-1}(x|p) . \quad (\text{II.11})$$

2. Dans le cas de l'action *Twisted Mass*, que nous utiliserons dans la suite (II. 1.3), cette relation s'accompagne d'un changement de saveur, c'est-à-dire $D^{(1)-1} = \gamma_5 D^{(2)-1\dagger} \gamma_5$.

À l'aide de ces grandeurs maintenant définies, nous pouvons définir Γ_O comme une projection

$$\Gamma_O(p) = \frac{1}{12} \text{Tr} [\Lambda_O(p) P_\Gamma] , \quad (\text{II.12})$$

avec P un projecteur, dont le but est de projeter la fonction de Green amputée sur la bonne structure de Dirac. Ainsi, Γ_O correspondra au vertex associé au courant que nous cherchons à renormaliser. Ces projecteurs sont, au niveau de l'arbre, égaux à

$$P_S = \mathbb{1} , \quad P_P = \gamma_5 , \quad P_T = \frac{1}{12} \gamma_\mu \gamma_\nu , \quad P_V = \frac{1}{4} \gamma_\mu , \quad P_A = \frac{1}{4} \gamma_5 \gamma_\mu , \quad (\text{II.13})$$

respectivement pour les courants (c'est-à-dire Γ) scalaire, pseudoscalaire, tensoriel, vectoriel et axial. Dans la partie [II. 1.1](#), nous préciserons l'[Eq. II.12](#) pour les cas vectoriel et axial.

Constante de renormalisation Z_ψ

Finalement nous allons voir la dernière quantité intervenant dans l'[Eq. II.3](#), à savoir la constante de renormalisation du champ fermionique Z_ψ . Il existe plusieurs manières de définir cette constante, dont les différentes définitions caractérisent les schémas RI-MOM et RI'-MOM :

$$\begin{aligned} \text{RI-MOM : } \quad Z_\psi &= \frac{-i}{48} \text{Tr} \left[\gamma_\mu \frac{\partial D(p)}{\partial p_\mu} \right]_{\mu^2=p^2} ; \\ \text{RI'-MOM : } \quad Z_\psi &= \frac{-i}{12} \text{Tr} \left[\frac{\not{p} D(p)}{p^2} \right]_{\mu^2=p^2} . \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

Cette constante peut être calculée pour chaque saveur de quark selon l'opérateur de Dirac utilisé.

Cette méthode de renormalisation peut être rapprochée de ce qui est fait en QCD perturbative, où une RC est cherchée de manière à établir la correspondance entre un élément de matrice libre (ou « nue ») $\langle p|O|p \rangle_0$ et l'élément de matrice complet

$$Z_O \langle p|O|p \rangle \Big|_{p^2=\mu^2} = \langle p|O|p \rangle_0 \Big|_{p^2=\mu^2} . \quad (\text{II.15})$$

Or, nous avons par définition

$$\langle p|O|p \rangle \Big|_{p^2=\mu^2} = \frac{1}{Z_\psi} \Lambda_O(p) , \quad \langle p|O|p \rangle_0 \Big|_{p^2=\mu^2} = P_\Gamma^{-1} . \quad (\text{II.16})$$

En prenant la trace sur les indices de couleur et de Dirac de la condition de renormalisation, nous obtenons

$$\begin{aligned} Z_O \frac{1}{Z_\psi} \frac{1}{12} \text{Tr} [\Lambda_O(p) P_\Gamma] &= 1 \\ \Leftrightarrow Z_O Z_\psi^{-1} \Gamma_O(p) &= 1 , \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

ce qui est bien identique à notre condition de renormalisation ([Eq. II.3](#)).

Cas des courants vectoriel et axial

La structure de Dirac des vertex vectoriel et axial est respectivement donnée par

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu^V &= \Sigma_1^V \gamma_\mu + \Sigma_2^V \frac{p_\mu}{p^2} \not{p}, \\ \Lambda_\mu^A &= \Sigma_1^A \gamma_5 \gamma_\mu + \Sigma_2^A \gamma_5 \frac{p_\mu}{p^2} \not{p}.\end{aligned}\tag{II.18}$$

Ce que nous voulons ici, à l'aide du projecteur, est que le vertex $\Gamma_\mu^{V/A}$ soit égal à $\Sigma_1^{V/A}$. Pour ce faire, nous avons modifié les projecteurs, et nous avons choisi

$$P_\mu^V = \gamma_\mu - \frac{p_\mu}{p^2} \not{p}, \quad P_\mu^A = \gamma_5 \gamma_\mu - \gamma_5 \frac{p_\mu}{p^2} \not{p}.\tag{II.19}$$

Ainsi, nous obtenons pour le cas vectoriel (dans l'espace Euclidien)

$$\begin{aligned}\text{Tr} [P_\mu^V \Lambda_\mu^V] &= \text{Tr} \left[\left(\gamma_\mu - \frac{p_\mu}{p^2} \not{p} \right) \left(\Sigma_1^V \gamma_\mu + \Sigma_2^V \frac{p_\mu}{p^2} \not{p} \right) \right] \\ &= \text{Tr} \left[\Sigma_1^V \left(\mathbb{1} - \frac{p_\mu p_\rho \gamma_\mu \gamma_\rho}{p^2} \right) + \Sigma_2^V \left(\frac{p_\mu p_\rho \gamma_\mu \gamma_\rho}{p^2} - \frac{p_\mu^2 \not{p} \not{p}}{p^4} \right) \right] \\ &= \text{Tr} \left[\Sigma_1^V \left(\mathbb{1} - \frac{p_\mu p_\rho g_{\mu\rho}}{p^2} \right) + \Sigma_2^V \left(\frac{p_\mu p_\rho g_{\mu\rho}}{p^2} - \frac{p_\mu \mathbb{1}}{p^2} \right) \right] \\ &= \text{Tr} \left[\Sigma_1^V \left(1 - \frac{p_\mu^2}{p^2} \right) \mathbb{1} + \Sigma_2^V \left(\frac{p_\mu^2}{p^2} - \frac{p_\mu}{p^2} \right) \mathbb{1} \right] \\ &= 12 \Sigma_1^V \left(1 - \frac{p_\mu^2}{p^2} \right) = 12 \Sigma_1^V \left(\frac{p^2 - p_\mu^2}{p^2} \right).\end{aligned}\tag{II.20}$$

De manière à obtenir une projection correcte pour les courants vectoriel et axial, nous devons premièrement choisir les projecteurs (Eq. II.19), et deuxièmement nous devons modifier l'Eq. II.12 pour ces deux courants de la manière suivante :

$$\Gamma_\mu^{V/A} = \frac{1}{12} \frac{p^2}{p^2 - p_\mu^2} \text{Tr} [P_\nu^{V/A} \Lambda_\nu^{V/A}] .\tag{II.21}$$

Ainsi, à l'aide de ces schémas de renormalisation, il est possible de calculer la valeur des RC à une impulsion donnée, c'est-à-dire celle qui apparaît dans la matrice de l'opérateur O . Cependant, ce n'est pas encore ce que nous cherchons, car nous voulons obtenir la valeur scalaire de la RC dans un réseau à une maille a donnée. Nous verrons donc dans la partie (II. 2) comment poursuivre le calcul et les difficultés engendrées par les symétries du réseau. Pour l'heure, nous allons détailler le schéma de renormalisation RI-SMOM, puisque c'est le schéma sur lequel j'ai travaillé pendant ma thèse.

II. 1.2 Les nouveautés apportées par RI-SMOM

Impulsion et conditions de renormalisation

Le schéma de renormalisation RI-SMOM, introduit par [56; 57], diffère des deux premiers (RI-MOM and RI'-MOM) car il relâche la condition forte sur l'impulsion. En effet, dans le schéma RI-MOM, l'opérateur O est pris entre deux états sans transfert d'impulsion, alors que dans RI-SMOM, les deux états pourront avoir une impulsion différente. Ces deux impulsions seront néanmoins reliées par une symétrie, c'est ce qui donne son nom à ce schéma : régularisation indépendante avec impulsion symétrique. L'élément de matrice lié à l'opérateur O devient alors $\langle p_1 | O | p_2 \rangle$. Cependant, nous n'avons pas une égalité stricte $p_1 = p_2$ mais une égalité en module, et en notant $q = p_1 - p_2$, la condition sur les impulsions dans le schéma RI-SMOM devient $p_1^2 = p_2^2 = q^2 = \mu^2$.

En permettant que le vertex puisse avoir un transfert d'impulsion, la structure de Dirac pour les courants vectoriel et axial, en notant $r = p_1 + p_2$, deviennent

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu^V &= \Sigma_1^V \gamma_\mu + \Sigma_2^V \frac{q_\mu}{q^2} \not{q} + \Sigma_3^V \frac{r_\mu}{r^2} \not{r} + \Sigma_4^V \frac{r_\mu}{r^2} \not{r} + \Sigma_5^V \frac{r_\mu}{r^2}, \\ \Lambda_\mu^A &= \Sigma_1^A \gamma_5 \gamma_\mu + \Sigma_2^A \gamma_5 \frac{q_\mu}{q^2} \not{q} + \Sigma_3^A \gamma_5 \frac{r_\mu}{r^2} \not{r} + \Sigma_4^A \gamma_5 \frac{r_\mu}{r^2} \not{r} + \Sigma_5^A \gamma_5 \frac{r_\mu}{r^2} \not{r}.\end{aligned}\tag{II.22}$$

Comme pour RI-MOM, nous voulons projeter $\Lambda_\mu^{V/A}$ sur sa composante vectorielle/axiale. Pour cela nous allons utiliser les nouveaux projecteurs

$$\begin{aligned}P_\mu^V &= \gamma_\mu - \frac{q_\mu}{q^2} \not{q} - \frac{r_\mu}{r^2} \not{r}, \\ P_\mu^A &= \gamma_5 \gamma_\mu - \gamma_5 \frac{q_\mu}{q^2} \not{q} - \gamma_5 \frac{r_\mu}{r^2} \not{r},\end{aligned}\tag{II.23}$$

ce qui nous permet d'obtenir (toujours en espace Euclidien) pour le cas vectoriel

$$\begin{aligned}
\text{Tr} [P_\mu^V \Lambda_\mu^V] &= \text{Tr} \left[\left(\gamma_\mu - \frac{q_\mu}{q^2} \not{q} - \frac{r_\mu}{r^2} \not{r} \right) \left(\Sigma_1^V \gamma_\mu + \Sigma_2^V \frac{q_\mu}{q^2} \not{q} + \Sigma_3^V \frac{q_\mu}{q^2} \not{r} + \Sigma_4^V \frac{r_\mu}{r^2} \not{q} + \Sigma_5^V \frac{r_\mu}{r^2} \not{r} \right) \right] \\
&= \text{Tr} \left[\Sigma_1^V \left(1 - \frac{q_\mu^2}{q^2} - \frac{r_\mu^2}{r^2} \right) \mathbb{1} + \Sigma_2^V \left(\frac{q_\mu^2}{q^2} - \frac{q_\mu^2 q^2}{q^4} - \frac{q_\mu r_\mu \not{q} \not{r}}{q^2 r^2} \right) \mathbb{1} \right. \\
&\quad + \Sigma_3^V \left(\frac{q_\mu r_\mu}{q^2} - \frac{q_\mu^2 \not{q} \not{r}}{q^4} - \frac{q_\mu r_\mu r^2}{q^2 r^2} \right) \mathbb{1} + \Sigma_4^V \left(\frac{q_\mu r_\mu}{q^2} - \frac{r_\mu^2 \not{q} \not{r}}{r^4} - \frac{q_\mu r_\mu q^2}{q^2 r^2} \right) \mathbb{1} \\
&\quad \left. + \Sigma_5^V \left(\frac{r_\mu^2}{r^2} - \frac{r_\mu^2 r^2}{r^4} - \frac{q_\mu r_\mu \not{q} \not{r}}{q^2 r^2} \right) \mathbb{1} \right] \tag{II.24} \\
&= \text{Tr} \left[\Sigma_1^V \left(1 - \frac{q_\mu^2}{q^2} - \frac{r_\mu^2}{r^2} \right) \mathbb{1} + \Sigma_2^V \left(\frac{q_\mu^2}{q^2} - \frac{q_\mu^2}{q^2} \right) \mathbb{1} + \Sigma_3^V \left(\frac{q_\mu r_\mu}{q^2} - \frac{q_\mu r_\mu}{q^2} \right) \mathbb{1} \right. \\
&\quad \left. + \Sigma_4^V \left(\frac{q_\mu r_\mu}{q^2} - \frac{q_\mu r_\mu}{r^2} \right) \mathbb{1} + \Sigma_5^V \left(\frac{r_\mu^2}{r^2} - \frac{r_\mu^2}{r^2} \right) \mathbb{1} \right] \\
&= 12 \Sigma_1^V \left(1 - \frac{q_\mu^2}{q^2} - \frac{r_\mu^2}{r^2} \right) .
\end{aligned}$$

Ceci conduit, pour les courants vectoriel et axial, dans le cas de RI-SMOM, à la reformulation de l'Eq. II.12 comme

$$\Gamma_\mu^{V/A} = \frac{1}{12} \frac{q^2 r^2}{q^2 r^2 - q_\mu^2 r^2 - r_\mu^2 q^2} \text{Tr} [P_\nu^V \Lambda_\nu^V] . \tag{II.25}$$

Soulignons néanmoins que pour les courants scalaire, pseudoscalaire et tensoriel, la définition du vertex ne change pas.

Finalement, la condition de renormalisation pour la constante du champ fermionique reste identique à RI'-MOM (Eq. II.14), à la différence près que l'opérateur de Dirac possède un transfert d'impulsion ; nous remplaçons donc l'impulsion p par q .

Intérêt de la méthode RI-SMOM

Les deux schémas présentés dans la section II. 1.1 ne sont correctement définis qu'à la condition

$$\Lambda_{\text{QCD}} \ll \mu \ll 1/a , \tag{II.26}$$

où, pour rappel, Λ_{QCD} est l'échelle de l'interaction forte. Malheureusement, à cause de mailles insuffisamment fines, la seconde partie de cette condition est souvent poussée dans ses limites, voire même n'est pas satisfaite. En outre, la condition de renormalisation (Eq. II.3) est prise à la limite chirale, c'est-à-dire que la masse des quarks tend vers zéro, et cela soulève deux problèmes :

1. Dans les schémas RI-MOM et RI'-MOM, il n'y a pas d'impulsion transférée, donc $\vec{q} = 0$, et comme nous sommes à la limite chirale, nous avons $q^2 = 0$. Ceci implique que nous ayons

$\mu^2 = p^2 \neq q^2$, et donc que nous ayons deux échelles d'énergie pour le corrélateur, dont l'une (q^2) brise complètement la condition [Eq. II.26](#). Cela donne lieu à des erreurs systématiques non contrôlées à haute impulsion, et c'est pourquoi les études publiées avec ces schémas de renormalisation se restreignent à une impulsion maximale. Dans le cas de RI-SMOM, nous avons l'avantage de n'avoir qu'une seule échelle d'énergie, et nous ne souffrirons pas de ces contaminations UV (à haute impulsion).

2. Le deuxième problème est également posé par la condition sur les impulsions. Une fonction de corrélation qui possède un transfert d'impulsion nul, $q = p_1 - p_2 = 0$, est dite comme possédant une impulsion exceptionnelle. Alors des singularités IR apparaissent ; elles sont nommées pôles de Goldstone. Nous voyons bien que les deux premiers schémas que nous avons vus souffrent maximalement de ces contaminations. Or, avec RI-SMOM, les corrélateurs seront nécessairement exempts de ces contaminations pour satisfaire $p_1^2 = p_2^2 = q^2 = \mu^2$. Cela constitue l'autre amélioration majeure de ce schéma.

Finalement, la condition sur les impulsions étant moins forte pour RI-SMOM, il en résulte que le nombre d'impulsions satisfaisant cette condition est bien plus grand (et est même de plus en plus grand) lorsque la taille du réseau augmente. Ainsi, pour conclure sur l'amélioration que représente ce schéma, nous pouvons dire que le domaine en impulsion où nous pourrions effectuer une régression, tout en satisfaisant les diverses conditions, sera plus étendu (et donc avec un plus grand nombre de points disponibles pour les ajustements).

Néanmoins il reste un problème qui n'est pas résolu avec ce schéma : il s'agit de la suppression des invariants hyper-cubiques, que nous verrons dans la section [II. 2](#). En attendant, nous allons donner brièvement les détails de la simulation que nous avons utilisée pour tester le nouveau schéma RI-SMOM.

II. 1.3 Détails du réseau utilisé pour l'étude

L'ensemble de réseaux que nous avons utilisé pour cette étude sur les RC est un ensemble produit par la collaboration ETMC (voir [I. 4.3](#)). La collaboration ETMC a généré un ensemble $N_f = 2 + 1 + 1$ avec des quarks de Wilson-clover et à la masse physique des quarks [\[58\]](#). L'action utilisée est celle qu'utilise toujours cette collaboration, à savoir l'action *Twisted Mass (TM)*, aussi notée TW.

Principe de l'action TW

La simulation des champs fermioniques peut poser un nouveau problème (en plus de ceux vus au chapitre précédent) dû à des configurations dites exceptionnelles. En effet, si nous reprenons l'opérateur de Dirac-Wilson ([Eq. I.29](#)) et que nous scindons cet opérateur en une partie constante

de masse et le reste, alors les valeurs propres s'écrivent

$$m + \lambda_i[U], \quad (\text{II.27})$$

avec λ_i les valeurs propres de l'opérateur de Dirac-Wilson sans masse et U le champ de jauge. Les valeurs propres λ fluctuent d'une génération à l'autre et peuvent être réelles, négatives et proches (en valeur absolue) de m ; cette dernière propriété est accentuée lorsque la masse des quark, m , est faible. Si toutes ces conditions sont réunies, nous nous retrouvons alors avec les valeurs propres (Eq. II.27) très proches de zéro, et nous parlons de configurations exceptionnelles. Le véritable problème est, qu'alors, l'inversion de l'opérateur Eq. I.29 devient très coûteux en temps de calcul. Comme le nombre de configurations exceptionnelles devient de plus en plus important à mesure que la masse des quark diminue, ceci représente une autre difficulté pour simuler la QCD au point physique.

L'idée originelle de l'action TW a été de modifier le terme de masse pour résoudre le problème des configurations exceptionnelles, avec l'action fermionique TW pour deux saveurs dynamiques qui s'écrit

$$S_F[\bar{\psi}, \psi, U] = a^4 \sum_{n \in \Lambda} \bar{\psi}(n) D(n|m) \delta_{n,m} \psi(m), \quad (\text{II.28})$$

$$D^{(f)}(n|m) = \left(\left(m + \frac{4}{a} \right) \mathbb{1}_2 + i\mu\gamma_5\tau^3 \right) \delta_{n,m} - \frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} (\mathbb{1} - \gamma_\mu) U_\mu(n) \mathbb{1}_2 \delta_{n+\hat{\mu},m}.$$

Dans cette formulation de l'action, les matrices $\mathbb{1}_2$ et τ^3 (troisième matrice de Pauli) agissent dans l'espace des saveurs, et γ_5 agit dans l'espace de Dirac. Le terme réel μ est ce qui est appelé la masse « twistée ». Il est alors possible de montrer que le déterminant

$$\det [D(n|m)\mathbb{1}_2 + m\mathbb{1}_2 + i\mu\gamma_5\tau^3] \quad (\text{II.29})$$

est réel et strictement positif pour $\mu \neq 0$, ce qui implique que les valeurs propres de l'opérateur de Dirac-Wilson augmenté de la masse twistée seront toutes strictement positives, ce qui supprime le problème des configurations exceptionnelles.

Il est alors possible – et plus pratique – de redéfinir m et μ en terme d'une masse M et d'un angle α comme

$$M = \sqrt{m^2 + \mu^2}, \quad \alpha = \arctan(\mu/m), \quad (\text{II.30})$$

ce qui conduit à

$$m\mathbb{1}_2 + i\mu\gamma_5\tau^3 = Me^{i\alpha\gamma_5\tau^3}, \quad m = M \cos(\alpha), \quad \mu = M \sin(\alpha). \quad (\text{II.31})$$

Finalement, si $\alpha = 0$, nous nous retrouvons avec la formulation sans masse twistée, et si $\alpha = \pi/2$, nous parlons alors d'un twist maximal. Dans ce dernier cas, il est possible de montrer qu'une partie des observables physiques du réseau est améliorée; les termes $\mathcal{O}(a)$ auront été supprimés lors de ce twist maximal. Pour une suppression complète des termes $\mathcal{O}(a)$, la procédure de Symanzik (I. 2.3) pourra également être appliquée. De nombreux détails et explications sur cette action peuvent être trouvés en [59].

Ensembles sélectionnés

Pour notre étude préliminaire, nous avons pris les ensembles A.d.XX.24 (voir [60] pour une présentation plus complète de ces ensembles), où le « XX » représente la masse des quarks légers. En effet, nous avons vu que les RC devaient être déterminées à la limite chirale : il faut donc évaluer ces RC pour plusieurs masses et les extrapoler à la limite chirale. Finalement, précisons que ces ensembles ont également été calculés en fixant la jauge à celle de Landau, ce qui rend possible le calcul des RC.

La collaboration ETMC mène un effort important depuis environ cinq ans pour le calcul des RC de ces nouveaux réseaux. Ces travaux ont principalement consisté à déterminer les RC dans le schéma RI-MOM à l'aide de nombreuses méthodes, puis à comparer ces méthodes pour vérifier la cohérence de ces dernières et estimer les erreurs systématiques des RC calculées. Parmi ces méthodes, nous pouvons avoir différentes définitions de l'impulsion sur réseau :

$$\bar{p}_\mu = \frac{1}{a} \sin(ap_\mu) , \quad \tilde{p}_\mu = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{ap_\mu}{2}\right) , \quad (\text{II.32})$$

où p_μ représente l'impulsion physique. Nous rappelons que ces deux définitions (avec le sinus) sont des conséquences du problème des doublons (I. 2.2). De plus, RI-MOM souffre de certaines contaminations UV et IR, ainsi plusieurs domaines de validité ont été essayés. Finalement comme nous le verrons dans la prochaine partie, la méthode de suppression des invariants hyper-cubiques n'est pas unique, là encore différentes méthodes ont permis d'estimer les erreurs systématiques sur les RC.

RC via les identités de Ward

Il existe une méthode, dont nous n'avons pas encore parlé, qui permet de calculer certaines RC, sans utiliser de schéma de renormalisation. Cette méthode dite des *Identités de Ward (WI)* [61] permet, en utilisant l'identité PCVC des WI, de calculer la RC Z_V du courant vectoriel. Cette identité s'écrit

$$\partial_\mu V_\mu^a = -2\mu_q \epsilon^{3ab} P^b , \quad (\text{II.33})$$

où les indices a et b sont des indices de spin, μ_q est la masse des quarks légers dans la formulation TW, et V et P sont les courants vectoriel et pseudoscalaire. Dans la formulation TW, cette relation se réécrit

$$Z_V \partial_\mu C_{VP}(t) = -2\mu_q C_{PP}(t) , \quad (\text{II.34})$$

avec cette fois $C_{VP}(t)$ et $C_{PP}(t)$ les fonctions de corrélation respectivement associées au courant V et P . Ainsi, nous obtenons la constante Z_V de manière précise et sans systématique non-contrôlée (autre que les erreurs de discrétisations inhérentes à la LQCD) via

$$Z_V = -2\mu_q \frac{C_{PP}(t)}{C_{VP}(t+1) - C_{VP}(t-1)} . \quad (\text{II.35})$$

Il est également possible de calculer la constante Z_A et les rapports Z_A/Z_V et Z_P/Z_S , en utilisant d'autres équations de conservation et en combinant les actions TM et l'action *Osterwalder–Seiler* (OS) [62]; la description de ces autres calculs peut être trouvée en [63]. Par ailleurs, au fil des années, si la connaissance des RC et la maîtrise des sources d'erreurs systématiques au sein de la collaboration ETMC se sont grandement améliorées, des raffinements sont toujours nécessaires et très motivés.

Travaux réalisés et publication en cours

J'ai, au début de ma thèse, calculé les constantes Z_V et Z_A et les rapports Z_A/Z_V et Z_P/Z_S afin de donner des valeurs de référence pour guider les différentes méthodes utilisées dans le schéma RI-MOM par ETMC. Forts de notre expérience dans le schéma RI-MOM, nous souhaitions initialement étendre nos calculs des RC au schéma RI-SMOM, pour explorer les avantages *a priori* de ce schéma de renormalisation, et pour déterminer s'il représentait – ou pas – un schéma plus satisfaisant que RI-MOM; une autre motivation pour cette étude se trouvait dans la nécessité d'estimer les erreurs systématiques dans les résultats fournis par des schémas différents (diversifier ces schémas procure ainsi une vérification de ces erreurs systématiques).

Malgré tout, mes contributions initiales, sur les WI, m'ont permis de participer à un article en préparation [64] qui compile tous les résultats pour le calcul des RC dans le schéma RI-MOM. Si nous avions initialement prévu d'inclure à cet article les résultats du schéma RI-SMOM, des difficultés (que nous détaillons dans la prochaine section) nous ont empêché d'atteindre cet objectif.

II. 2 Artefacts engendrés par la symétrie hyper-cubique $\mathcal{H}_4$

II. 2.1 Origine des artefacts

Dans l'espace-temps continu et infini, nous savons qu'une invariance par rotation des phénomènes physiques existe. C'est-à-dire que, dans l'espace de Minkowski, nous avons l'invariance

$$\bar{\psi}(p)\psi(p) \rightarrow \bar{\psi}(p')\psi(p') = \bar{\psi}(\Omega p)\psi(\Omega^\dagger p), \quad (\text{II.36})$$

où Ω est un élément du groupe $\text{SO}(4)$, groupe des rotations dans l'espace de Minkowski. Visuellement, donc en trois dimensions, nous pouvons voir cette rotation comme le déplacement d'un point sur une sphère. Ainsi, p^2 que nous pouvons associer au rayon de la sphère, reste invariant par cette rotation.

À présent, si nous discrétisons l'espace-temps, cette même rotation ne peut plus être parfaite. Si certains points du réseau appartiennent à la sphère, d'autres n'y appartiendront pas, donc certaines rotations vont briser l'invariance de l'impulsion, et donc la symétrie $\text{SO}(4)$ se brisera en

une symétrie dite hyper-cubique $\mathcal{H}_4$. Dans cette symétrie, de nouveaux invariants $(p^{[4]}, p^{[6]}, \dots)$ vont intervenir, et la combinaison de ces invariants sera quant à elle le réel invariant de la symétrie $\text{SO}(4)$ par reconstruction ; ces nouveaux invariants sont définis comme

$$p^{[n]} = (p_0^n, p_1^n, p_2^n, p_3^n), \quad n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}^*. \quad (\text{II.37})$$

Rappelons par ailleurs l'expression des impulsions pour le calcul de ces invariants : dans la partie précédente nous avons expliqué qu'au vu des problèmes posés par les doublons, l'impulsion sur réseau devait être réécrite sous l'une des deux formes suivantes

$$\bar{p}_\mu = \frac{1}{a} \sin(ap_\mu), \quad \tilde{p}_\mu = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{ap_\mu}{2}\right). \quad (\text{II.38})$$

Si nous prenons le développement limité par exemple de $\bar{p}_\mu$, en utilisant la notation $\partial_{p_\mu}^n = \partial^n / \partial^n p_\mu$ et toujours dans l'espace Euclidien, nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \bar{p}_\mu^2 &= \sum_n \frac{(p_\mu - 0)^n}{n!} \partial_{p_\mu}^n \frac{1}{a^2} \sin^2(ap_\mu) \Big|_{p_\mu=0} \\ &= \sum_n \left\{ \frac{p_\mu^{2n}}{(2n)!} \partial_{p_\mu}^{2n} \frac{1}{a^2} \sin^2(ap_\mu) \Big|_{p_\mu=0} + \underbrace{\frac{p_\mu^{2n+1}}{(2n+1)!} \partial_{p_\mu}^{2n+1} \frac{1}{a^2} \sin^2(ap_\mu) \Big|_{p_\mu=0}}_{=0} \right\} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-4)^{n-1} a^{2n-2} \times 2p_\mu^{2n}}{(2n)!} \\ \Rightarrow \bar{p}^2 &= p^2 - \frac{1}{3} a^2 p^{[4]} + \frac{2}{45} a^4 p^{[6]} - \frac{1}{315} a^6 p^{[8]} + \mathcal{O}(a^8 p^{[10]}). \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

Au final et de manière générique, une fonction de Green dans le cadre de la symétrie hyper-cubique sera définie sur réseau comme

$$G(\bar{p}^2; \mathcal{H}_4) = G(p^2; \text{SO}(4)) + c_1(p^2) p^{[4]} + c_2(p^2) (p^{[4]})^2 + c_3(p^2) p^{[6]} + \mathcal{O}(p^{[8]}). \quad (\text{II.40})$$

Or, ce que nous voulons extraire est la fonction de Green dans le groupe physique $\text{SO}(4)$, en somme une fonction de Green dont l'unique dépendance est p^2 . Il nous faut donc supprimer toutes les contributions $c_n(p^2) p^{[m]}$ qui englobent les coefficients et les dérivées de la fonction de Green. C'est l'ensemble de ces contributions qui sont nommées « artefacts » ou « invariants hyper-cubiques », et dont il faut s'affranchir.

II. 2.2 Suppression des artefacts

Méthode des impulsions démocratiques

Il existe un moyen très simple de supprimer les invariants hyper-cubiques qui consiste à prendre des impulsions spécifiques dite démocratiques. Nous allons, pour illustrer le propos, prendre deux impulsions $p_1 = (2, 2, 2, 2)$ et $p_2 = (2, 1, 0, 1)$ et calculer leurs invariants associés :

	p^2	$p^{[4]}$	$p^{[6]}$
p_1	$(4, 4, 4, 4)$	$(16, 16, 16, 16)$	$(64, 64, 64, 64)$
p_2	$(4, 1, 0, 1)$	$(16, 1, 0, 1)$	$(64, 1, 0, 1)$

S'il est évident que nous pouvons écrire $p_1^{[4]} = (p_1^2)^2$, et de même pour les autres invariants, il n'en est rien pour p_2 qui souffre toujours des contaminations des artefacts.

De fait, si nous prenons des impulsions où toutes les composantes sont égales (ce qui est entendu par « démocratique »), alors nous nous retrouvons dans le cas de l'Eq. II.40, à savoir n'avoir que la dépendance dans l'unique invariant souhaité p^2 . Pour reprendre l'analogie des points sur la sphère, c'est comme si nous avions choisi un des rares points à la fois sur la maille du réseau et sur la sphère. Cette solution est cependant peu satisfaisante à cause du nombre très restreint de points qui satisfont cette démocratie.

Un compromis existe cependant : il consiste à prendre également les points autour de l'impulsion où toutes les composantes sont identiques. Ainsi pour une impulsion au point $(4, 4, 4, 4)$ (qui est démocratique), nous pourrions également considérer $(3, 4, 4, 4)$, $(5, 4, 4, 4)$ (et de même pour les autres composantes) comme presque démocratiques³. Ceci aurait l'avantage d'augmenter considérablement le nombre d'impulsions sélectionnées. En contrepartie, ces impulsions semi-démocratiques souffriraient de légers artefacts par rapport à l'impulsion démocratique. Cette contrepartie donne lieu à des erreurs systématiques non-contrôlées qui résultent du fait qu'avec cette méthode nous ne traitons pas les artefacts hyper-cubiques, nous regardons seulement un sous-domaine où elles sont minimisées.

Suppression globale des artefacts

Ne voulant pas nous satisfaire de la méthode démocratique, qui devient par ailleurs encore plus incontrôlée dans le cas RI-SMOM, nous allons décrire ici une méthode alternative pour supprimer ces artefacts. Pour cela, nous allons décrire la méthode avec le cas RI-MOM et nous verrons les modifications apportées par le schéma RI-SMOM à la fin de cette partie.

3. Cette démocratie est mesurée par le rapport $p^{[4]}/(p^2)^2$, voir figure 1 de [65].

Dans la formulation de la fonction de Green dans $\mathcal{H}_4$ (Eq. II.40), nous pouvons montrer que la série n'est pas infinie car, à une taille de réseau donnée, le nombre de points (et donc d'impulsions) est fixé. Par ailleurs, toutes les impulsions p qui donnent des $p^{[n+2]}$ différents avaient déjà des $p^{[n]}$ différents, et inversement la suppression des invariants $p^{[n]}$ donne également la suppression des invariants de l'ordre suivant. Par exemple, pour un réseau de taille $24^3 \times 48$, il n'y aura pas de sous-groupe d'invariants $p^{[8]}$ dans chaque groupe $p^{[6]}$, mais les invariants $p^{[6]}$ seront peu nombreux (par rapport à $p^{[4]}$) et par conséquent ils seront difficiles à supprimer, car difficile à ajuster. Cependant, la contamination induite par ces invariants pourra être négligée au regard du développement limité de l'impulsion (Eq. II.39).

Au final, dans l'Eq. II.40, nous cherchons à isoler une fonction de l'impulsion p^2 en supprimant la dépendance en $p^{[n]}$ de $G(\bar{p}^2; \mathcal{H}_4)$: nous cherchons donc à passer d'une fonction à plusieurs dimensions à une fonction à une seule dimension. Or plus nous chercherons à supprimer ces dimensions supplémentaires sur un large spectre d'impulsions p^2 , plus nous devrons aller loin dans la série, mais aussi plus les régressions de la fonction $G(\bar{p}^2; \mathcal{H}_4)$ seront instables. C'est pourquoi deux méthodes sont souvent utilisées en parallèle, les méthodes *Sliding Window Fit* (SWF) et *One Window Fit* (OWF), toutes deux décrites en [65] :

SWF : cette méthode consiste à réaliser la régression sur une fenêtre d'impulsion p^2 , autour d'une valeur centrale p_{centrale}^2 . L'opération est alors répétée de proche en proche et une valeur de la fonction de Green est trouvée pour chaque p_{centrale}^2 . Cette méthode peut être sensible aux fluctuations numériques des fonctions de Green, mais ces fluctuations disparaissent en général dans la statistique. Ici, en faisant le choix d'étudier des sous-groupe d'impulsions, certaines évaluations de la fonction de Green pourraient donc être affectées par ces fluctuations.

OWF : cette méthode peut être vue comme un cas limite de la méthode SWF, où la fenêtre est agrandie de manière à englober l'ensemble des impulsions. Le problème de cette méthode est qu'il est plus difficile de s'assurer de la non-contamination de certaines impulsions par des artefacts non pris en compte dans la série.

La combinaison de ces deux méthodes donne une très bonne estimation des incertitudes systématiques, et nous renseigne sur la qualité de la suppression des invariants.

Avec ces méthodes, les fonctions de Green sont obtenues en fonction de l'impulsion p^2 , et une dernière régression (appelée *running* en anglais) est faite pour passer de la RC sur réseau à son pendant continu à une énergie donnée (méthode également décrite en [65]).

Les difficultés rencontrées dans le cas RI-SMOM

La complication principale du schéma RI-SMOM vient du fait que nous avons maintenant deux impulsions différentes à considérer : la fonction de Green, analogue à l'Eq. II.40, se complexifie légèrement. À l'aide du développement limité de la fonction $f(p_1, p_2)$ et en utilisant les définitions

Eq. II.39, la fonction de Green pour RI-SMOM devient ⁴ :

$$\begin{aligned}
G(\bar{p}_1, \bar{p}_2; \mathcal{H}_4) = & G(p_1, p_2; \text{SO}(4)) + c_{21}^{40} \frac{p_1^{[4]}}{q^2} + c_{21}^{31} \frac{p_1^{[3]} p_2}{q^2} + c_{21}^{22} \frac{p_1^{[2]} p_2^{[2]}}{q^2} + c_{21}^{13} \frac{p_1 p_2^{[3]}}{q^2} + c_{21}^{04} \frac{p_2^{[4]}}{q^2} \\
& + c_{20}^{40} p_1^{[4]} + c_{20}^{31} p_1^{[3]} p_2 + c_{20}^{22} p_1^{[2]} p_2^{[2]} + c_{20}^{13} p_1 p_2^{[3]} + c_{20}^{04} p_2^{[4]} \\
& + c_{42}^{40} \left(\frac{p_1^{[4]}}{q^2} \right)^2 + c_{42}^{31} \left(\frac{p_1^{[3]} p_2}{q^2} \right)^2 + c_{42}^{22} \left(\frac{p_1^{[2]} p_2^{[2]}}{q^2} \right)^2 + c_{42}^{13} \left(\frac{p_1 p_2^{[3]}}{q^2} \right)^2 + c_{42}^{04} \left(\frac{p_2^{[4]}}{q^2} \right)^2 \\
& + c_{31}^{60} \frac{p_1^{[6]}}{q^2} + c_{31}^{51} \frac{p_1^{[5]} p_2}{q^2} + c_{31}^{42} \frac{p_1^{[4]} p_2^{[2]}}{q^2} + c_{31}^{33} \frac{p_1^{[3]} p_2^{[3]}}{q^2} + c_{31}^{24} \frac{p_1^{[2]} p_2^{[4]}}{q^2} + c_{31}^{15} \frac{p_1 p_2^{[5]}}{q^2} + c_{31}^{06} \frac{p_2^{[6]}}{q^2} \\
& + \mathcal{O}(q^{[6]}).
\end{aligned} \tag{II.41}$$

Dans les coefficients c_{mn}^{ij} , les exposants ij et les indices mn sont respectivement associés à la puissance de p_1 pour i et la puissance de p_2 pour j , et la puissance globale du numérateur divisée par deux pour m et la puissance globale du dénominateur divisée par deux pour n . Comme dans l'Eq. II.40, les coefficients c_{mn}^{ij} englobent les coefficients du développement limité, les dérivées de la fonction de Green, ainsi que la maille à la puissance $2(m - n - 1)$.

En utilisant la condition sur les impulsions de RI-SMOM, $p_1^2 = p_2^2 = q^2$, nous obtenons les relations

$$\frac{p_1^{[2]} p_2^{[2]}}{q^2} \longrightarrow q^2, \quad p_1^{[2]} p_2^{[2]} \longrightarrow (q^2)^2 \neq q^{[4]} \quad \text{et} \quad \frac{p_1^{[4]} p_2^{[2]}}{q^2}, \frac{p_1^{[2]} p_2^{[4]}}{q^2} \longrightarrow p_1^{[4]}, p_2^{[4]}, \tag{II.42}$$

ce qui permet de simplifier l'Eq. II.41 en

$$\begin{aligned}
G(\bar{p}_1, \bar{p}_2; \mathcal{H}_4) = & G(p_1, p_2; \text{SO}(4)) + c_{21}^{40} \frac{p_1^{[4]}}{q^2} + c_{21}^{31} \frac{p_1^{[3]} p_2}{q^2} + c_{21}^{13} \frac{p_1 p_2^{[3]}}{q^2} + c_{21}^{04} \frac{p_2^{[4]}}{q^2} \\
& + c_{20}^{40} p_1^{[4]} + c_{20}^{31} p_1^{[3]} p_2 + c_{20}^{13} p_1 p_2^{[3]} + c_{20}^{04} p_2^{[4]} \\
& + c_{42}^{40} \left(\frac{p_1^{[4]}}{q^2} \right)^2 + c_{42}^{31} \left(\frac{p_1^{[3]} p_2}{q^2} \right)^2 + c_{42}^{13} \left(\frac{p_1 p_2^{[3]}}{q^2} \right)^2 + c_{42}^{04} \left(\frac{p_2^{[4]}}{q^2} \right)^2 \\
& + c_{31}^{60} \frac{p_1^{[6]}}{q^2} + c_{31}^{51} \frac{p_1^{[5]} p_2}{q^2} + c_{31}^{33} \frac{p_1^{[3]} p_2^{[3]}}{q^2} + c_{31}^{15} \frac{p_1 p_2^{[5]}}{q^2} + c_{31}^{06} \frac{p_2^{[6]}}{q^2} \\
& + \mathcal{O}(q^{[6]}).
\end{aligned} \tag{II.43}$$

Dans cette simplification, nous avons absorbé les termes en $(q^2)^n$ dans $G(p_1, p_2; \text{SO}(4))$ et nous avons redéfini les coefficients pour absorber les termes redondants comme $c_{20}^{40} + c_{31}^{60} \rightarrow c_{20}^{40}$. Notons

4. La série est tronquée ici de manière à ne garder que les termes d'ordre $\mathcal{O}(a^2)$ ou, de manière équivalente, $\mathcal{O}(q^{[4]})$.

également qu'il est possible de définir entièrement la fonction $G(\bar{p}_1, \bar{p}_2; \mathcal{H}_4)$ à l'aide des impulsions q et r , plutôt qu'à l'aide des impulsions p_1 , p_2 et q .

Nous voyons que le problème de cette fonction est qu'elle possède dix dimensions. Il y en a en effet une pour chaque exposant différent des coefficients c , qui traduit le fait que les $p_1^{[n]} p_2^{[m]}$ sont différents, plus une dimension due à q^2 . L'ajustement par des méthodes telles que SWF et OWF devra alors porter sur les dix-sept paramètres de cette fonction, sans compter que la réduction dans chaque dimension à des régressions polynomiales n'est pas toujours possible à cause du mélange de la dimension q avec les autres. Or, réaliser une régression dans un espace à dix dimensions est assez complexe, surtout si nous rajoutons à cela les erreurs de discrétisation ainsi que les fluctuations numériques. J'ai essayé pendant trois mois de résoudre ce problème, malheureusement sans succès, et j'ai dû arrêter ce projet pour me focaliser sur un autre projet en physique du B (III et IV). Je donne néanmoins les pistes que j'aurais aimé explorer dans la partie suivante.

II. 3 Perspective et poursuite d'étude du schéma RI-SMOM

II. 3.1 Problème de la dimensionnalité

Comme nous l'avons vu, la suppression des artefacts dans le schéma RI-SMOM revient à une régression d'une fonction à dix dimensions. De plus, dans certaines dimensions, seuls quelques dizaines de points sont présents. Lorsque j'ai réalisé ce travail en début de thèse, je ne maîtrisais pas autant que maintenant les outils d'analyse de données, et j'ai utilisé les fonctions de minimisation proposées par ROOT, et en particulier l'algorithme MINUIT2. Si cet algorithme converge très facilement pour les problèmes simples, il demande une plus grande maîtrise et des ajustements pour converger sur des minimisations plus complexes comme celle du traitement des artefacts hyper-cubiques. L'observation que j'ai faite des résultats des régressions (c'est-à-dire des fonctions à une dimension des RC $Z_O(p^2)$) est, qu'à la place d'une courbe continue, sans fluctuation, en impulsion, j'obtenais une fonction erratique, parfois continue par partie. Ceci traduit selon moi une convergence dans un minimum local du modèle de régression. En effet, ce dernier minimise la distance entre les points du modèle et les points de « données ». Ceux-ci sont pondérés par leur incertitude et dans certaines dimensions où les puissances des impulsions sont élevées, les valeurs sont très dispersées et avec des incertitudes faibles : ainsi, le modèle a pu privilégier dans ce contexte l'ajustement de certains points au détriment d'autres. Pour faciliter la convergence de ces algorithmes, il est presque systématique de normaliser les données entre zéro et un, et cette normalisation pourrait certainement aider pour cette analyse. Nous savons également que lorsque la dimension du problème grandit et lorsque les fonctions sont plus complexes qu'une fonction entièrement convexe ou concave, ces algorithmes se bloquent dans des minima locaux. Une autre piste d'amélioration serait d'utiliser des algorithmes de minimisation Monte Carlo pour éviter de rester bloquer dans ces minima.

L'autre difficulté principale est qu'il n'est pas possible de sélectionner p_1 , p_2 et q démocratiquement tout en satisfaisant la condition RI-SMOM sur les impulsions. Or, ceci aurait permis d'avoir une base de travail et d'ajouter progressivement des impulsions avec des contaminations croissantes et d'augmenter progressivement la complexité de la régression. Tout d'abord, si dans le schéma RI-MOM nous avons une relation d'ordre évidente entre les termes de la série, cet ordre est plus complexe dans RI-SMOM. En effet, à un ordre (de a ou de q) donné, plusieurs termes sont présents, et il faut tous les prendre en compte. Ainsi, si j'ai essayé de réduire le nombre de termes dans l'Eq. II.43, la fonction résultante ($G(p_1, p_2; \text{SO}(4))$) comportait toujours des artefacts. L'augmentation progressive des termes m'a continuellement donné ce résultat incomplet jusqu'à revenir aux problèmes de convergence (décrits ci-dessus) lorsque le nombre de termes redevenait trop important. Par ailleurs, j'ai également essayé d'appliquer la technique SWF : si, dans le schéma RI-MOM, nous pouvons faire cela en rangeant les fonctions de Green par p^2 croissant puis par $p^{[4]}/p^2$ croissant et ainsi de suite, comme nous venons de le dire, un tel ordre n'est pas possible dans le schéma RI-SMOM, car nous avons trois (ou deux, avec q et r) impulsions. Ainsi, à un q^2 très faible associé à une fonction de Green, cette dernière pourra posséder un grand $p_1^{[4]}$ par exemple. Et si nous ne pouvons ordonner nos fonctions de Green, il n'est pas possible de construire des fenêtres (entendons échantillons) à invariants similaires.

II. 3.2 Solutions alternatives

Une solution, qui simplifierait tous les problèmes précédents, serait de réaliser deux fois l'analyse, en fixant pour chacune d'elle deux des trois impulsions (p_1 et q ou p_2 et q). En effet, si nous reprenons l'Eq. II.43 en fixant p_2 et q , nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
G(\bar{p}_1, \bar{p}_2; \mathcal{H}_4) = & G(p_1, p_2, q; \text{SO}(4)) + c_{21}^{40} \frac{p_1^{[4]}}{q^2} + c_{21}^{31} \frac{p_1^{[3]} p_2}{q^2} + c_{21}^{13} \frac{p_1 p_2^{[3]}}{q^2} \\
& + c_{20}^{40} p_1^{[4]} + c_{20}^{31} p_1^{[3]} p_2 + c_{20}^{13} p_1 p_2^{[3]} \\
& + c_{42}^{40} \left(\frac{p_1^{[4]}}{q^2} \right)^2 + c_{42}^{31} \left(\frac{p_1^{[3]} p_2}{q^2} \right)^2 + c_{42}^{13} \left(\frac{p_1 p_2^{[3]}}{q^2} \right)^2 \\
& + c_{31}^{60} \frac{p_1^{[6]}}{q^2} + c_{31}^{51} \frac{p_1^{[5]} p_2}{q^2} + c_{31}^{33} \frac{p_1^{[3]} p_2^{[3]}}{q^2} + c_{31}^{15} \frac{p_1 p_2^{[5]}}{q^2} \\
& + \mathcal{O}(q^{[6]}).
\end{aligned} \tag{II.44}$$

Si la simplification ne semble pas évidente ici, au regard du peu de termes supprimés, en se rappelant que p_2 et q sont constants, nous voyons qu'il n'y a plus en réalité que cinq dimensions. Ensuite, même si certaines régressions souffriraient toujours de n'avoir que trop peu de points, le fait que nous réalisions plusieurs régressions permettrait de diminuer le poids des minimisations qui n'auraient pas convergé. Il serait par ailleurs possible de composer les deux analyses pour voir si elles convergent vers la même solution, permettant un meilleur contrôle des systématiques. En outre, cette solution permettrait aussi de classer les fonctions de Green selon les invariants non-

constants restants, et ceci permettrait d'utiliser la technique SWF. Il serait alors peut-être possible de n'utiliser que les termes $p_1^{[4]}/q^2$, $p_1^{[3]}p_2/q^2$ et $p_1p_2^{[3]}/q^2$ pour l'analyse d'une fenêtre.

Finalement, ces travaux ont été menés sur les ensembles **A.d.XX.24** d'ETMC, qui sont des ensembles de taille $24^3 \times 48$. Il est possible qu'en utilisant les ensembles **C.d.XX.32**, de taille $32^3 \times 64$, plus d'impulsions soient présentes (dans chacune des dimensions de la suppression des artefacts), et dans le même temps, que les invariants à l'ordre suivant, en $\mathcal{O}(a^4)$, puissent être négligeables.

II. 3.3 Conclusion

S'il est clair que la renormalisation est une étape indispensable à la LQCD, nous avons vu au cours de ce chapitre que diverses méthodes pouvaient être utilisées pour réaliser cette renormalisation sur réseau (**II. 1**). Il apparaît que les méthodes RI-MOM et RI'-MOM souffrent d'erreurs de discrétisation, de surcroît difficiles à traiter. Nous avons alors introduit la méthode de renormalisation RI-SMOM, qui tend à réduire fortement ces erreurs, mais qui introduit des problèmes supplémentaires pour la suppression des invariants hyper-cubiques (**II. 2**). Si j'ai présenté ici les difficultés que nous avons rencontrées pour réaliser cette suppression (**II. 3**), le plus important à noter est que ces difficultés sont d'ordre numérique et non théoriques. Ceci implique qu'il sera possible d'implémenter correctement ce schéma de renormalisation. Comparer ce schéma avec les autres permettra d'atteindre une plus grande précision (dans les systématiques) sur les RC, avec comme objectif final, l'amélioration de la précision sur les grandeurs qui nécessitent d'être renormalisées.

Chapitre III

Les enjeux de la physique de la saveur accessibles par la LQCD

Lorsque nous parlons de physique du B, nous parlons de tout processus ou toute quantité physique liée de près ou de loin au quark *bottom*. Ainsi, la physique du B peut tout aussi bien se référer au secteur baryonique qu’au secteur mésonique. Dans ce manuscrit de thèse, nous nous focalisons sur un sous-domaine de cette physique, le méson B_s . Cette seule particule cristallise de nombreuses attentes pour la recherche BSM, et l’objectif de ce chapitre est de présenter ces pistes de recherche. L’analyse que nous avons menée sur les désintégrations du méson B_s peut être étendue à d’autres mésons B , et nous étendrons çà et là, dans ce chapitre, le champ des applications à quelques mésons.

Dans une courte section introductive, je présente d’abord les processus de désintégration du méson B_s , les grandeurs auxquelles ces processus nous donnent accès et les expériences étudiant ces désintégrations (III. 1). L’une des grandeurs qui régit ces désintégrations est la matrice CKM, dont la seule connaissance permet l’une des contraintes les plus fortes sur le SM. Nous verrons alors comment améliorer la précision sur les éléments de cette matrice pour contraindre le SM et rechercher la physique BSM (III. 2). Nous nous focaliserons en particulier sur trois canaux de désintégration qui montrent une différence, bien que non-significative pour l’instant, entre les expériences et les attentes du Modèle Standard (III. 3). Nous verrons ensuite un exemple accessible en LQCD quant à la mesure de processus BSM (III. 4). Finalement, si dans ce chapitre, nous parlons des quantités dont la précision théorique doit être améliorée (en particulier les facteurs de forme hadronique), la section III. 5 fera le lien avec le chapitre IV, en montrant comment la LQCD peut apporter ces améliorations.

III. 1 De la physique du méson B_s aux modèles BSM

Les mésons constitués d'un quark b sont nombreux. Nous trouvons dans le [Tableau III.1](#) la liste de ces mésons pour les cas pseudo-scalaire et vectoriel ; nous ne considérons pas ici les *bottomoniums* (constitués de deux quark b). Ces mésons, comme la plupart des hadrons, se désintègrent via l'une des trois interactions du SM : interaction faible, forte et électromagnétique. La rapidité de la désintégration du hadron dépendra de l'intensité de l'interaction via laquelle la particule se désintègre. Les désintégrations via interaction forte sont les plus rapides, suivies de celles via l'interaction électromagnétique, puis faible. Ensuite, certaines de ces interactions peuvent donner lieu à des processus largement supprimés dans le SM. Il existera alors une large différence entre une particule se désintégrant majoritairement par interaction forte et une autre via l'interaction faible. Le méson K^* , par exemple, se désintégrant presque exclusivement par interaction forte, n'est jamais observé, et les produits $K + \pi$ sont observés à la place, dans presque 100% des cas. Les mésons K et π , se désintégrant exclusivement par interaction faible, ils ont quant à eux une longue durée de vie et peuvent donc être observés directement. Notons finalement que les désintégrations sont regroupées en classes que nous appelons leptonique, hadronique ou semi-leptonique, selon que la désintégration donne lieu, respectivement, uniquement à des leptons, à des hadrons ou bien à un mélange des deux.

	d	u	s	c
$J = 0$	$B^0 = d\bar{b}, \bar{B}^0 = \bar{d}b$	$B^+ = u\bar{b}, B^- = \bar{u}b$	$B_s^0 = s\bar{b}, \bar{B}_s^0 = \bar{s}b$	$B_c^+ = c\bar{b}, B_c^- = \bar{c}b$
$J = 1$	$B^{*0} = d\bar{b}, \bar{B}^{*0} = \bar{d}b$	$B^{*+} = u\bar{b}, B^{*-} = \bar{u}b$	$B_s^{*0} = s\bar{b}, \bar{B}_s^{*0} = \bar{s}b$	$B_c^{*+} = c\bar{b}, B_c^{*-} = \bar{c}b$

TABLEAU III.1 – Liste des mésons formés d'un quark lourd *bottom* et d'un quark léger (d, u, s ou c), ayant pour moment angulaire total $J = 0$ ou $J = 1$. Pour rappel, $J = L + S$, avec L le moment angulaire orbital et S le spin des deux fermions.

Dans le cas du méson B_s^0 (simplement écrit B_s dans la suite), les désintégrations se produisent très majoritairement dans le canal semi-leptonique ou bien dans le canal hadronique. Nous allons nous concentrer sur la désintégration semi-leptonique $B_s \rightarrow D_s \ell \nu$ et $B_s \rightarrow D_s^* \ell \nu$ car, comme nous allons le voir, de nombreuses conséquences physiques peuvent être déduites de ces désintégrations. Un autres avantages est que leur rapport d'embranchement est assez élevé comparé à d'autres processus ; ce ne sont donc pas des processus rares. En guise d'exemple, dans [\[12\]](#), nous pouvons trouver les rapports d'embranchement de $(2.52 \pm 0.24)\%$ pour $B_s \rightarrow D_s^- \mu^+ \nu_\mu$ et $(5.4 \pm 0.5)\%$ pour $B_s \rightarrow D_s^{*-} \mu^+ \nu_\mu$.

III. 1.1 Cadre théorique des désintégrations

Les taux de désintégration différentiels de ces deux processus peuvent être calculés théoriquement (voir la section 5 de [\[66\]](#) pour plus de détails sur la paramétrisation de ces équations), en

négligeant la masse des leptons, via

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma}{dw}(B_s \rightarrow D_s \ell \nu_\ell) &= \frac{G_F^2 m_{D_s}^3}{48\pi^3} (m_{B_s} + m_{D_s})^2 (w^2 - 1)^{3/2} |\eta_{EW}|^2 |V_{cb}|^2 |\mathcal{G}(w)|^2, \\ \frac{d\Gamma}{dw}(B_s \rightarrow D_s^* \ell \nu_\ell) &= \frac{G_F^2 m_{D_s^*}^3}{4\pi^3} (m_{B_s} - m_{D_s^*})^2 (w^2 - 1)^{1/2} |\eta_{EW}|^2 |V_{cb}|^2 \chi(w) |\mathcal{F}(w)|^2.\end{aligned}\tag{III.1}$$

Dans ces deux équations, nous avons évidemment les masses des différents mésons et la constante de Fermi G_F ; nous avons ensuite le paramètre de recul w , qui est égal au produit des vitesses des deux mésons,

$$w = v_{B_s} v_{D_s^{(*)}} = \frac{p_{B_s} p_{D_s^{(*)}}}{m_{B_s} m_{D_s^{(*)}}} ;\tag{III.2}$$

puis vient le terme η_{EW} , qui est une correction à une boucle pour les processus par courant chargé ($W^\pm$) et qui vaut $\eta_{EW} = 1.0066$ [67] ; le terme $\chi(w)$, quant à lui, est un pré-facteur fonction des masses des mésons et de l'énergie de recul, et qui vaut 1 à recul nul, c'est-à-dire $\chi(w = 1) = 1$.

Les trois derniers termes, V_{cb} , $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, sont ceux qui vont nous intéresser dans la suite de ce manuscrit. Commençons par V_{cb} , qui est l'un des neuf éléments de la matrice CKM – cette dernière est la matrice de mélange entre les états propres de l'interaction faible et les états propres de masse (voir III. 2). Notons simplement ici, qu'à l'instar de tous les paramètres fondamentaux, V_{cb} est déduit expérimentalement. Ensuite, viennent les facteurs de forme $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, qui contiennent l'information de la dynamique de l'interaction forte. Ces facteurs de forme peuvent être calculés théoriquement de manière non-perturbative. Il s'ensuit que si $d\Gamma/dw$ est mesuré expérimentalement et que nous voulons déduire de cette mesure la valeur de V_{cb} , il nous faut une connaissance très précise de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ¹. En outre, si nous voulons comparer les prédictions théoriques et les mesures expérimentales pour ces désintégrations, nous devons à la fois utiliser les facteurs de forme et cet élément de la matrice CKM.

Cette imbrication entre ces valeurs conduit à plusieurs problématiques qui seront discutées plus en détails dans la suite du chapitre :

- *Précision sur le SM* : comme donnée dans les Eq. III.12 et Eq. III.13, la valeur de V_{cb} calculée avec la désintégration $B \rightarrow D$ est à environ 1.5σ de celle obtenue par la méthode inclusive (qui n'utilise pas directement les sections efficaces, voir III. 2.2). Ces deux méthodes comportent des biais (III. 2.2), et ne pouvant exclure ni une méthode ni l'autre, l'incertitude sur V_{cb} reste grande et insatisfaisante pour la recherche de précision dans le SM.
- *Tensions du SM* : certains rapports de sections efficaces dans les désintégrations semi-leptoniques présentent des différences entre théorie et expérience. C'est le cas par exemple de

$$R_{D^{(*)}} = \frac{\Gamma(B \rightarrow D^{(*)} \tau \nu_\tau)}{\Gamma(B \rightarrow D \ell \nu_\ell)_{\ell=e,\mu}}.\tag{III.3}$$

Cependant, il n'est pas évident de conclure sur l'origine de cette différence, à cause d'incertitudes théoriques importantes sur les facteurs de forme (l'espace des phases sur lequel

1. Cette méthode de détermination de V_{cb} est appelée méthode exclusive. Nous reviendrons sur les méthodes inclusive et exclusive en III. 2.2.

est effectué l'intégrale n'est pas le même au numérateur et au dénominateur, d'où une dépendance de $R_{D^{(*)}}$ dans le comportement des facteurs de forme).

- *Recherche BSM* : les désintégrations semi-leptoniques en τ pourraient contenir des signaux de nouvelle physique (ce qui expliquerait les anomalies des rapports du point précédent). Néanmoins, tous les signaux de nouvelle physique dans ce secteur restent incertains et requièrent une précision expérimentale accrue.

Il semble que la découverte de nouvelle physique se fera vraisemblablement dans la précision plutôt que dans les hautes énergies, tout au moins si la nouvelle physique est au-delà des énergies du LHC. C'est pourquoi les processus mentionnés ici sont des pistes sérieuses à étudier.

III. 1.2 Résultats expérimentaux

Comme nous l'avons vu, la détermination des taux de désintégration est liée à la fois aux mesures expérimentales mais aussi aux calculs théoriques. Nous précisons ici les acteurs des mesures expérimentales des derniers résultats en date ; l'approche théorique sera traitée dans les sections suivantes.

Les deux expériences contemporaines qui tentent d'améliorer la précision sur les sections efficaces de désintégration $B_{(s)} \rightarrow D_{(s)}^{(*)} \ell \nu_\ell$ sont LHCb [68] et Belle 2 [69]. Nous pouvons aussi citer BaBar [70], une expérience plus ancienne, mais dont les résultats impactent encore largement les moyennes faites sur ces quantités. Belle 2 et BaBar utilisent les particules émises dans des collisionneurs de particules qui diffèrent du LHC dans leur principe de fonctionnement. En effet, dans ces collisionneurs leptoniques, l'énergie du centre de masse de la collision peut être ajustée de manière à réaliser la collision sur une résonance. Dit autrement, statistiquement, la particule qui sera majoritairement émise sera celle dont la masse correspond à l'énergie du centre de masse. En pratique, pour étudier la physique du B dans les collisionneurs Belle 2 et BaBar, l'énergie du centre de masse est fixée à la résonance $\Upsilon(4S)$, quatrième état excité du *bottomonium* ($J^{PC} = 1^{--}$). Cette particule a été choisie pour ses canaux de désintégration. En effet, $\Upsilon(4S)$ va se désintégrer dans plus de 96% des cas en une paire de méson anti-méson contenant un quark b . Il est alors possible d'étudier la désintégration de ces mésons secondaires. Bien évidemment, la reconstruction des événements se produisant dans ces collisionneurs reste une tâche difficile et qui comporte de nombreuses sources d'erreur. Cela est d'autant plus vrai dans les collisionneurs hadroniques comme le LHC (sur lequel se trouve LHCb) où l'énergie du vertex d'interaction n'est pas contrôlée. Néanmoins, la statistique forte de ces expériences permet de contrebalancer la difficulté de reconstruction de ces vertex d'interaction.

III. 2 La matrice de mélange CKM

Dans cette section, nous allons présenter successivement la matrice de Cabibbo–Kobayashi–Maskawa (ou matrice CKM) que nous noterons V_{CKM} ou, plus simplement, V . Puis, nous allons nous concentrer sur l’un de ses neuf éléments, l’élément V_{cb} , et dans une moindre mesure, à l’élément V_{ub} , qui joue un rôle très similaire dans les problématiques discutées. Finalement, nous aborderons les contraintes que la détermination de V impose au SM.

III. 2.1 Définition de la matrice CKM

Dans le SM, les champs de quark sont définis de la manière suivante :

$$Q_{iL} \equiv \begin{pmatrix} Q_i^U \\ Q_i^D \end{pmatrix}_L \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L, \quad Q_{iR}^U \equiv u_R, c_R, t_R, \quad Q_{iR}^D \equiv d_R, s_R, b_R. \quad (\text{III.4})$$

De plus, la symétrie de l’interaction électrofaible (interaction faible plus interaction électromagnétique) est la symétrie $\text{SU}(2) \times \text{U}(1)$. De manière à respecter cette symétrie, les termes de masse pour les quarks dans le Lagrangien s’écrivent

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = \overline{Q}_{iL}^U M_{ij}^U Q_{jR}^U + \overline{Q}_{iL}^D M_{ij}^D Q_{jR}^D. \quad (\text{III.5})$$

Les matrices M^U et M^D (de taille 3×3) sont les matrices de masse reliées au couplage de Yukawa, respectivement pour les deux singlets de quarks de charge $2/3$ (type haut) et le doublet de quarks de charge $-1/3$ (type bas). Or, ces matrices ne sont pas diagonales ; en d’autres termes, les champs de quark Q ne sont pas états propres de masse. Cependant, comme pour toute matrice, nous pouvons diagonaliser les matrices $M^{U,D}$ en utilisant deux matrices unitaires 3×3 , $X_R^{U,D}$ et $X_L^{U,D}$, de la manière suivante

$$X_R^{\dagger U,D} M^{U,D} X_L^{U,D} = \text{diag} \left(m_1^{U,D}, m_2^{U,D}, m_3^{U,D} \right). \quad (\text{III.6})$$

Puis, nous pouvons redéfinir les champs de quark en réabsorbant ces matrices X de diagonalisation comme suit

$$Q_L^{U,D} \rightarrow X_L^{U,D} Q_L'^{U,D}, \quad Q_R^{U,D} \rightarrow X_R^{U,D} Q_R'^{U,D}. \quad (\text{III.7})$$

De ce fait, les champs ne présentant pas de prime sont les états propres de l’interaction électrofaible, tandis que ceux avec un prime sont les états propres de masse. Nous pouvons alors écrire le terme de masse du Lagrangien comme

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = \sum_{i=1}^3 m_i^U \overline{Q}_{iL}^U Q_{jR}^U + m_i^D \overline{Q}_{iL}^D Q_{jR}^D, \quad (\text{III.8})$$

où $m_i^{U,D}$ sont respectivement les masses des quarks de type haut et de type bas pour la i -ème famille de quarks.

À présent, nous pouvons donner le terme d'interaction par courants chargé (CC) de nos champs de quark

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int} &= -\frac{g_1}{\sqrt{2}} [W_\mu^+ \bar{Q}_{iL}^U \gamma^\mu Q_{jL}^D + W_\mu^- \bar{Q}_{iL}^D \gamma^\mu Q_{jL}^U] \\
&= -\frac{g_1}{\sqrt{2}} [W_\mu^+ \bar{Q}_{iL}'^U \gamma^\mu X_{iL}^{\dagger U} X_{jL}^D Q_{jL}'^D + W_\mu^- \bar{Q}_{iL}'^D \gamma^\mu X_{iL}^{\dagger D} X_{jL}^U Q_{jL}'^U] \\
&= -\frac{g_1}{\sqrt{2}} [W_\mu^+ \bar{Q}_{iL}'^U \gamma^\mu (V_{\text{CKM}})_{ij} Q_{jL}'^D + W_\mu^- \bar{Q}_{iL}'^D \gamma^\mu (V_{\text{CKM}}^\dagger)_{ij} Q_{jL}'^U] ,
\end{aligned} \tag{III.9}$$

où nous avons g_1 la constante de couplage de la partie SU(2) de l'interaction électrofaible, et où les champs $W_\mu^\pm$ sont ceux des bosons $W^\pm$ de cette interaction. Nous avons, à la dernière ligne, défini la matrice CKM comme $V_{\text{CKM}} = X_L^{\dagger U} X_L^D$ [71; 72], et qui s'écrit

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} . \tag{III.10}$$

III. 2.2 Importance de l'élément V_{cb}

Comme nous l'avons vu dans la partie introductive de ce chapitre, les éléments de cette matrice interviennent dans le calcul des sections efficaces ou largeurs de désintégration. Ces éléments, déduits de la mesure expérimentale de certaines sections efficaces, sont donc entachés d'incertitudes expérimentales (liées à ces mesures expérimentales) ainsi qu'à la propagation des incertitudes théoriques des grandeurs liant les sections efficaces aux éléments de la matrice CKM (comme les grandeurs $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{G}$ que nous avons déjà mentionnées).

Erreur sur les éléments de matrice

Dans l'équation qui suit, nous donnons les valeurs et les incertitudes de ces éléments, puis nous donnons, pour comparaison, les erreurs relatives de chacun de ces éléments (ces résultats sont référencés dans [12]) :

$$\begin{aligned}
|V_{\text{CKM}}| &= \begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.97370(14) & 0.2245(8) & 0.00382(24) \\ 0.221(4) & 0.987(11) & 0.0410(14) \\ 0.0080(3) & 0.0388(11) & 1.013(30) \end{pmatrix} , \\
\frac{\Delta|V_{\text{CKM}}|}{|V_{\text{CKM}}|} &= \mathcal{O} \begin{pmatrix} 0.1 & 3.5 & 63 \\ 18 & 11 & 34 \\ 38 & 28 & 30 \end{pmatrix} \% .
\end{aligned} \tag{III.11}$$

À la deuxième ligne, nous voyons que, globalement, les erreurs relatives augmentent lorsque nous augmentons l'ordre de la famille que nous étudions². Premièrement, nous pouvons dire que la sous-matrice 2×2 en haut à gauche (matrice de Cabibbo) intervient dans des processus qui sont étudiés depuis plus longtemps que ne le sont ceux avec des quarks *bottom* ou *top*. Les erreurs plus importantes des autres éléments (V_{ub} , V_{cb} , V_{td} , V_{ts} et V_{tb}) proviennent de difficultés spécifiques à chacun d'entre eux :

- Pour V_{ub} , l'étude par la méthode inclusive de la désintégration $B \rightarrow X_u \ell \nu_\ell$ pourra être contaminée par la combinaison de désintégration $B \rightarrow X_c \ell \nu_\ell$ puis $X_c \rightarrow X_u \ell \nu_\ell$. En effet, les neutrinos n'étant pas observables dans les détecteurs comme LHCb, si l'un des deux leptons chargés émis est assimilé à une autre réaction, alors l'interaction sera mal reconstruite et un biais apparaît sur les grandeurs déduites comme V_{ub} .
- Concernant V_{cb} , il n'y a pas de contamination comme ci-dessus, mais la mauvaise identification d'un méson D_s ou D_s^* à la place d'un méson D_s^{**} (ou toute autre combinaison) fausse la masse invariante de l'interaction et donc la détermination de V_{cb} .
- La détermination, exclusive cette fois, de V_{ub} et V_{cb} est perturbée par la connaissance imparfaite des facteurs de forme $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ (nous détaillerons les méthodes inclusive et exclusive dans la partie suivante).
- Rappelons que le quark *top* n'hadronise pas, c'est-à-dire qu'il se désintègre avant d'avoir pu former un état lié. Ce faisant, les éléments V_{td} et V_{ts} sont mesurés dans l'oscillation $B - \bar{B}$, où nous pouvons trouver, à une boucle, des quarks *top* virtuels qui contribuent à cette oscillation.
- Enfin, l'élément V_{tb} peut être, comme tout élément de matrice CKM, déterminé grâce aux propriétés de cette matrice (son unitarité). Mais si le but est de vérifier les propriétés de cette matrice, alors, nous devons notamment, mesurer cet élément dans un collisionneur hadronique via l'annihilation d'une paire $q\bar{q}$ en boson W , qui se désintègrera lui-même en une paire $b\bar{t}$ ou $t\bar{b}$. Là encore, la difficulté de la reconstruction de l'interaction et toutes les réactions parasites seront responsables de l'incertitude sur la détermination de cet élément.

Comme nous nous focalisons sur l'élément V_{cb} , nous n'allons détailler que le deuxième et troisième point dans la partie suivante. Notons néanmoins, à titre informatif, que la LQCD est aujourd'hui capable de simuler les oscillations $B - \bar{B}$ et qu'elle est ainsi également capable d'améliorer la précision sur V_{td} et V_{ts} [73].

Résultats pour les méthodes inclusive et exclusive

Nous l'avons dit, les éléments V_{ub} et V_{cb} peuvent être calculés de deux manières différentes. La méthode exclusive utilise la mesure expérimentale des sections efficaces (voir Eq. III.1). Ensuite, en utilisant les valeurs théoriques des grandeurs intervenant dans ces sections efficaces, nous pouvons déterminer la valeur de l'élément de matrice. L'avantage de cette méthode est qu'elle est d'une

2. Les valeurs présentées ici sont les résultats indépendants pour chaque élément de matrice. L'ajustement de tous les paramètres du SM donne des valeurs légèrement différentes ; voir le PDG pour ces valeurs et les détails du *global fit*.

part simple à réaliser (si nous possédons les valeurs théoriques) et, de plus, elle ne souffre pas d’hypothèses incontrôlées que peuvent apporter certains modèles *ad hoc*. Son problème réside dans le fait que les facteurs de forme souffrent d’une grande incertitude théorique. Mais heureusement, la LQCD permet de réduire ces erreurs, comme nous le verrons dans le chapitre IV. Avec cette méthode, les valeurs pour ces éléments de matrice sont [12] :

$$\begin{aligned} V_{cb}^{\text{excl}} &= (39.5 \pm 0.9) \times 10^{-3}, \\ V_{ub}^{\text{excl}} &= \begin{cases} (3.70 \pm 0.10 \pm 0.12) \times 10^{-3} & \text{pour LQCD,} \\ (3.67 \pm 0.09 \pm 0.12) \times 10^{-3} & \text{pour QCD sum rules.} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

La première incertitude est statistique et la deuxième est systématique. Pour V_{ub} , une troisième source d’incertitude provient du calcul des facteurs de forme, qui peut être soit réalisé en LQCD (IV. 4), soit via une méthode appelée *QCD sum rules* [74]. Nous pouvons noter qu’il existe un très bon accord entre ces deux techniques.

La seconde méthode, dite inclusive (englobe plusieurs états finaux), consiste à réaliser une expansion en série du taux de désintégration semi-leptonique $B \rightarrow X_{u,c} \ell \nu_\ell$, selon les grandeurs Λ_{QCD}/m_b et $\alpha(m_b)$, qui sont respectivement l’échelle d’énergie de QCD sur la masse du quark *bottom* et la constante de couplage de QCD (définie en I. 1.1). Cette méthode est décrite en [75–77]. Les résultats obtenus via cette méthode de détermination, également donnés dans [12], sont :

$$\begin{aligned} V_{cb}^{\text{incl}} &= (42.2 \pm 0.8) \times 10^{-3}, \\ V_{ub}^{\text{incl}} &= (4.25 \pm 0.12^{+0.15}_{-0.14} \pm 0.23) \times 10^{-3}. \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

La première incertitude est statistique, et les autres sont des erreurs systématiques détaillées dans le PDG.

La combinaison de ces deux méthodes (inclusive et exclusive) redonne les erreurs présentées dans l’Eq. III.11. Nous voyons cependant qu’il y a une tension d’environ 1.5σ entre elles, et pour chacun des deux éléments de matrice. Cet écart est responsable en grande partie de l’incertitude sur les éléments V_{ub} et V_{cb} de la matrice CKM.

Finalement, pour « justifier » l’intérêt que nous avons porté à V_{cb} dans notre travail, alors que ces deux éléments sont aussi importants, précisons que V_{cb} est déterminé par un calcul à recul nul, donc par $\mathcal{G}(w = 1) = 1$. Les données expérimentales (qui ne sont pas à recul nul) sont extrapolées vers ce point particulier, ce qui simplifie grandement les calculs théoriques. Néanmoins, comme il existe plus de points expérimentaux pour V_{ub} , l’extrapolation est meilleure dans le cas de V_{ub} que dans celui de V_{cb} . Ainsi, si à l’avenir la LQCD pouvait prédire des valeurs pour les facteurs de forme à recul non-nul et que ces résultats devenaient compétitifs avec les valeurs du facteur de forme extrapolé à recul non-nul, l’unique biais dans la détermination de V_{cb}^{excl} disparaîtrait.

III. 2.3 Contraintes au Modèle Standard

La matrice CKM est un formidable moyen de montrer la cohérence du SM. En effet, nous avons dans cette matrice de mélange quatre paramètres fondamentaux du SM³. Or, ces quatre paramètres (voir aussi I. 1.1) et d'autres exemples dans le secteur électrofaible (que nous n'avons pas traités dans ce manuscrit) sont interconnectés. De plus, la matrice CKM est, comme nous l'avons dit, une matrice unitaire ; et ceci donne également un test du SM. Afin de mieux comprendre les liens entre ces éléments, nous donnons ci-après deux paramétrisations usuelles de la matrice CKM.

Paramétrisation standard [78]

La matrice CKM peut être paramétrée par trois angles de mélange (θ_{12} , θ_{13} et θ_{23}), ainsi qu'une phase (δ_{13}) qui englobe la brisure de la symétrie CP :

$$V_{\text{CKM}} \equiv \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{-i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{-i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{-i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{-i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}. \quad (\text{III.14})$$

Dans cette paramétrisation, les abréviations s et c utilisées dénotent respectivement les sinus et les cosinus. Cette paramétrisation (voir la thèse de M.Atoui [79] pour plus de détails) ne va pas nous servir directement pour les contraintes au SM, mais va nous permettre d'expliquer la paramétrisation qui suit.

Paramétrisation de Wolfenstein [80]

La paramétrisation de Wolfenstein utilise une relation d'ordre sur les angles, connue expérimentalement, qui est $s_{13} \ll s_{23} \ll s_{12} \ll 1$. Ainsi, en prenant le cas limite $s_{13} \approx s_{23} \approx 0$, la paramétrisation standard (Eq. III.14) nous donne

$$V_{\text{CKM}} \approx \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{III.15})$$

Ceci revient à la matrice initiale de Cabibbo, avec une troisième famille qui ne se couple pas aux autres familles. Nous pouvons même aller plus loin dans ce cas limite et prendre $s_{12} \approx 0$, ce qui nous donnerait la matrice identité. Ainsi, pour rendre compte de l'observation d'un couplage entre les différentes familles, nous allons prendre $s_{12} = V_{us} = \lambda$, et un simple développement du cosinus conduit alors à

$$V_{\text{CKM}} \approx \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & 0 \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{III.16})$$

3. Les neuf éléments de matrices ne sont pas tous indépendants, ils sont reliés par des propriétés d'unitarité de la matrice CKM. Le nombre de paramètres indépendants se réduit donc à quatre.

Nous voyons que ce cas limite ne peut pas être physique, puisque les valeurs nulles dans la matrice interdisent certaines transitions comme $b \rightarrow c$. Il faut donc aussi donner un angle s_{23} non-nul, et nous allons pour cela choisir

$$s_{23} \approx A\lambda^2 = \lambda \left| \frac{V_{cb}}{V_{us}} \right| = V_{cb} . \quad (\text{III.17})$$

Finalement, le troisième ordre (dans le développement en λ) nous donne la phase de violation de CP avec

$$s_{13}e^{-i\delta_{13}} \approx A\lambda^3(\rho - i\eta) , \quad (\text{III.18})$$

où ρ et η sont les parties réelle et imaginaire de l'exponentielle de δ_{13} . Ceci conduit au final à la paramétrisation de Wolfenstein de la matrice CKM :

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} . \quad (\text{III.19})$$

Test sur l'unitarité de la matrice CKM

Le fait que la matrice CKM soit unitaire ($VV^\dagger = \mathbb{1}$) conduit aux conditions d'orthogonalités

$$\sum_k V_{ik}V_{kj}^\dagger = \sum_k V_{ik}V_{jk}^\star = \delta_{ij} . \quad (\text{III.20})$$

Il y a ainsi six conditions qui doivent être nulles, ces conditions pouvant être représentées sous la forme d'un triangle. Parmi ces six triangles, le triangle (b, d) est le plus utilisé en phénoménologie. Il est représenté dans la [Figure III.1](#) et il correspond à la relation

$$V_{ud}V_{ub}^\star + V_{cd}V_{cb}^\star + V_{td}V_{tb}^\star = 0 . \quad (\text{III.21})$$

Notons que les paramètres $\bar{\eta}$ et $\bar{\rho}$ de la [Figure III.1](#) sont reliés aux paramètres η et ρ apparaissant

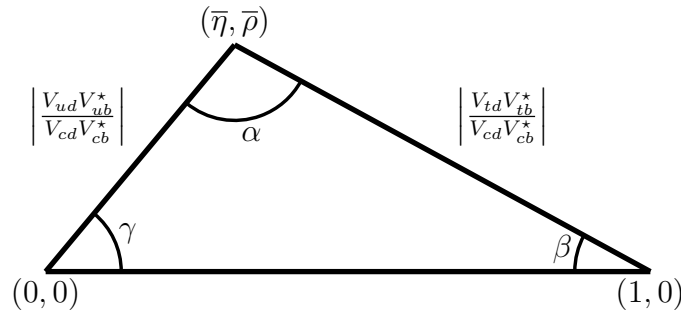


FIGURE III.1 – Triangle d'unitarité de la matrice CKM, où les angles et les longueurs sont paramétrés par les valeurs des éléments de la matrice CKM (voir [Eq. III.11](#) et [Eq. III.24](#)).

dans l'Eq. III.18 par

$$\begin{aligned}\bar{\eta} &= \eta \left(1 - \lambda^2/2 + \dots\right), \\ \bar{\rho} &= \rho \left(1 - \lambda^2/2 + \dots\right).\end{aligned}\tag{III.22}$$

En outre, l'aire du triangle est appelée invariant de Jarlskog [81] (noté J) qui est indépendant de la convention sur la phase de brisure de la symétrie CP. Il est défini par

$$\text{Im} [V_{ij}V_{kl}V_{il}^*V_{kj}^*] = J \sum_{m,n} \epsilon_{ikm}\epsilon_{jln} \approx A^2\lambda^6\eta.\tag{III.23}$$

Cet invariant n'est pas nul et peut être relié à la brisure de symétrie CP (via η). Finalement, les valeurs des angles de ce triangle sont données par

$$\alpha = \arg \left(\frac{V_{cd}V_{cb}^*}{V_{td}V_{tb}^*} \right), \quad \beta = \arg \left(\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{ud}V_{ub}^*} \right), \quad \gamma = \arg \left(\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} \right).\tag{III.24}$$

Ces grandeurs, par exemple l'angle β et l'angle α , peuvent être mesurées et toutes deux auront une incidence sur le point $(\bar{\eta}, \bar{\rho})$ du triangle. Dans la Figure III.2, nous pouvons voir l'ensemble des contraintes qui existe sur ce point dans le SM. Ainsi, l'unitarité de CKM est un test de cohérence du SM.

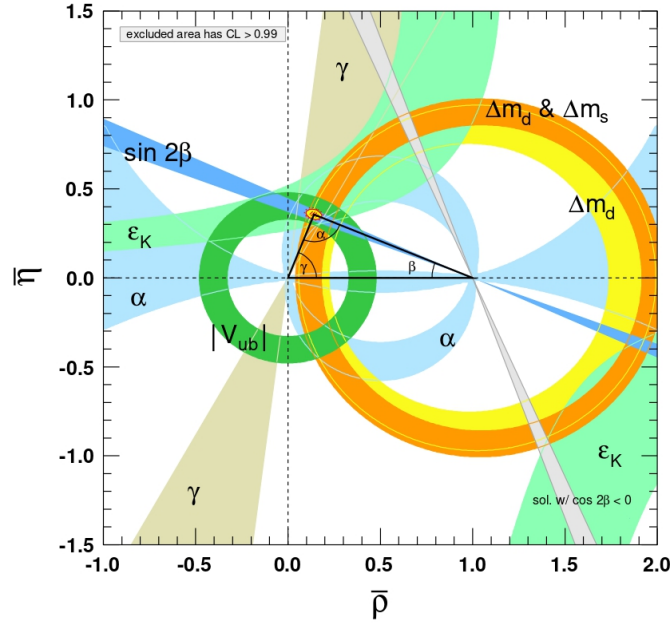


FIGURE III.2 – Représentation graphique des différentes mesures permettant de donner des valeurs aux angles et/ou aux longueurs du triangle d'unitarité de la matrice CKM. Ce graphique est issu du PDG [12].

Finalement, connaître les éléments de la matrice CKM permet aussi de faire une recherche directe de physique BSM. Par exemple, dans le SM, les changements de saveur par courant neutre (NC) sont improbables comparés à ceux par CC, car ils font intervenir des boucles. Ils vont donc

plus loin dans la série des perturbations, et sont encore davantage supprimés par le mécanisme de Glashow-Iliopoulos-Maiani (mécanisme de GIM), qui est conditionné par l’unitarité de la matrice CKM. Nous savons que dans le SM la désintégration $B \rightarrow \pi \ell^+ \ell^-$ est proportionnelle à $|V_{td} V_{tb}|^2$. Or, les théories BSM qui ont été construites montrent souvent de nouvelles contributions à ces désintégrations. En outre, la nouvelle physique n’a *a priori* pas de raison de subir la suppression des désintégrations par NC due au mécanisme GIM. Ainsi, une mesure précise de $B \rightarrow \pi \ell^+ \ell^-$, couplée à une bonne connaissance de CKM, pourrait permettre de montrer un excès par rapport au SM, ou bien de contraindre une théorie BSM et de voir si elle reste cohérente avec des contraintes plus fortes sur les valeurs prises par ces paramètres. Par ailleurs, certaines théories BSM comme la *super-symétrie* (*SUSY*) possèdent d’autres sources de brisure de la symétrie CP. La mesure de l’invariant de Jarlskog permet, de la même manière, de contraindre ces théories.

III. 3 Anomalies dans les désintégrations de mésons B_s

Nous avons vu que la matrice CKM servait de test au SM : ces tests permettent de rechercher la physique BSM à un moment où nous ne disposons pas de signes évidents d’incohérence entre SM et expérience⁴. Pour autant, toutes les mesures et les prédictions théoriques ne sont jamais en parfait accord (au sens de la valeur centrale). En physique des particules, la limite pour signifier que deux valeurs sont en désaccord est fixée à 5σ ; au sens du *théorème central limite* (*CLT*), ceci implique que les deux valeurs ont moins d’une chance sur un million d’être identiques. À titre de comparaison, les « anomalies » dont nous allons parler dans la suite ont vu leurs différences (théorie vs expérience) augmenter ces dernières années, pour s’établir à un peu moins de 3σ (pour les plus grandes). Ces chiffres varient à mesure de l’exploitation des nouvelles données des expériences Belle, BaBar ou encore LHCb, soit par la réduction de l’incertitude de mesure, soit par une nouvelle valeur centrale plus éloignée de la valeur théorique. En outre, il ne faut pas penser que le désaccord entre théorie et expérience soit voué à augmenter. En effet, une différence de 3σ signifie qu’il y a environ une chance sur cent pour que cet écart soit dû à une fluctuation statistique ; pour ce cas, la différence se réduira à mesure que l’accumulation de données continue. Dans l’autre cas ($\sim 99\%$), la différence s’accroîtra.

III. 3.1 Rapports de désintégration semi-leptonique

Rappelons tout d’abord la formule de la largeur de désintégration pour le processus semi-leptonique $B_s \rightarrow D_s \ell \nu_\ell$ (voir [III. 1.1](#)) :

4. Bien sûr, la matière noire et l’oscillation des neutrinos représentent déjà des différences, mais celles-ci ne tendent pas à donner un unique modèle BSM.

$$\frac{d\Gamma}{dw}(B_s \rightarrow D_s \ell \nu_\ell) = \frac{G_F^2 m_{D_s}^3}{48\pi^3} (m_{B_s} + m_{D_s})^2 (w^2 - 1)^{3/2} |\eta_{EW}|^2 |V_{cb}|^2 |\mathcal{G}(w)|^2. \quad (\text{III.25})$$

Contrairement à la section précédente, la démarche ici est de prédire théoriquement les largeurs de désintégration en considérant V_{cb} connu, et non l'inverse. Nous avons dit en introduction que cette largeur de désintégration était difficile à prédire théoriquement (difficile au sens des incertitudes non compétitives avec l'expérience), du fait des incertitudes sur les facteurs de forme et sur les éléments de la matrice CKM. Pour contourner ce problème, et si l'expérience donne des résultats précis (et ce pour chaque type de lepton), nous pourrions considérer le rapport $\Gamma(B_s \rightarrow D_s \ell_1 \nu_{\ell_1}) / \Gamma(B_s \rightarrow D_s \ell_2 \nu_{\ell_2})$. Ce faisant, V_{cb} étant constant, il sortirait de l'intégrale et disparaîtrait du rapport.

Néanmoins, les formules que nous avons données étaient des approximations où nous supposons la masse des leptons nulle. Sans approximation, cette formule devient [82]

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dw}(B \rightarrow D \ell \nu_\ell) = & \frac{G_F^2 |V_{cb}|^2 m_B^5}{48\pi^3} \left[\left(1 + \frac{m_D}{m_B}\right)^2 \left(\frac{m_D}{m_B}\right)^3 (w^2 - 1)^{3/2} \left(1 - \frac{m_\ell^2}{t(w)}\right)^2 \left(1 + \frac{m_\ell^2}{2t(w)}\right) \right] \\ & \times |\eta_{EW}|^2 \mathcal{G}^2(w), \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

avec

$$t(w) = m_D^2 + m_B^2 - 2wm_D m_B. \quad (\text{III.27})$$

Dès lors, il est possible d'intégrer sur w , puis de prendre le rapport pour deux canaux de désintégration souhaités. Les deux canaux d'intérêt sont la désintégration semi-leptonique en électron ou en muon et la désintégration semi-leptonique en tau. Ainsi, pour la désintégration du méson B , nous aurons

$$R(D) = \frac{\Gamma(B \rightarrow D \tau \nu_\tau)}{\Gamma(B \rightarrow D \ell \nu_\ell)_{\ell=e,\mu}}. \quad (\text{III.28})$$

De manière analogue, les autres rapports en tension avec le SM dans le secteur du B , appelés *anomalies*, sont

$$R(D^*) = \frac{\Gamma(B \rightarrow D^* \tau \nu_\tau)}{\Gamma(B \rightarrow D^* \ell \nu_\ell)_{\ell=e,\mu}} \quad \text{et} \quad R(J/\psi) = \frac{\Gamma(B_c^+ \rightarrow J/\psi \tau^+ \nu_\tau)}{\Gamma(B_c^+ \rightarrow J/\psi \mu^+ \nu_\mu)}. \quad (\text{III.29})$$

III. 3.2 Mesures et recherche de nouvelle physique

Les derniers résultats des rapports $R(D)$, $R(D^*)$ et $R(J/\psi)$ sont donnés dans le [Tableau III.2](#). Nous pouvons y voir une différence certaine entre théorie et expérience, même si le fameux seuil de 5σ n'est pas atteint ; ces différences restent donc à confirmer.

Rapport	Théorie	Expérience	Excès
$R(D)$	0.297(3)	0.340(27)(13)	1.4σ
$R(D^*)$	0.252(3)	0.295(11)(08)	2.5σ
$R(J/\psi)$	0.2582(38)	0.71(0.17)(0.18)	$\sim 2\sigma$

TABLEAU III.2 – Derniers résultats des anomalies dans le secteur du B . La première erreur est statistique et dans le cas des résultats expérimentaux, la seconde est systématique. Les deux premiers résultats sont issus du PDG [12], le résultat théorique de la troisième ligne vient de la collaboration HPQCD [83] et le résultat expérimental provient de l’expérience LHCb [68].

Les résultats du [Tableau III.2](#) changent régulièrement, puisqu’ils sont soumis à de nombreuses incertitudes, dont la principale, sur le plan théorique, est le calcul des facteurs de forme. Depuis une dizaine d’années, la LQCD joue un rôle de plus en plus important dans la détermination de ces derniers. Nous l’avons vu, il y a un besoin de connaître la dépendance de ces facteurs de forme avec le recul pour pouvoir intégrer la largeur de désintégration selon celui-ci. Néanmoins, il est plus facile de déterminer la valeur de ces facteurs de forme à recul nul, puis d’extrapoler la dépendance de w à partir du facteur de forme à $w = 1$; cette méthode a été proposée en [84]. Par exemple, pour $\mathcal{G}$, nous utilisons

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(w) &= \mathcal{G}(1) [1 - 8\rho^2 z(w) + (51\rho^2 - 10)z(w)^2 - (252\rho^2 - 84)z(w)^3] + \mathcal{O}(z(w)^4), \\ z(w) &= (\sqrt{w+1} - \sqrt{2})/(\sqrt{w+1} + \sqrt{2}). \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

Dans cette formulation, les paramètres sont $\mathcal{G}(1)$ et ρ^2 (pente à recul nul, $w = 1$), qui sont déterminés soit expérimentalement, soit en LQCD. Aujourd’hui, les résultats de la LQCD semblent être ceux donnant le plus fin ajustement, mais souffrent encore d’une ignorance des facteurs de forme à haut w comparé à l’expérience.

Dans le SM, seuls les courants axial et vectoriel contribuent aux désintégrations précédentes par l’intermédiaire de boson $W^\pm$. Mais certains modèles BSM ajoutent d’autres courants comme un courant scalaire via des modèles avec des doublets de Higgs supplémentaires [85], ou un courant tensoriel via des leptiquarks (particules de spin entier portant une charge de couleur et une charge électrofaible) [86]. Ce qui rend ces rapports intéressants pour l’étude de ces modèles est que la désintégration en τ serait sensible à ces nouveaux courants. Ainsi, l’écart entre théorie et expérience pour ces rapports pourrait être expliqué par un écart dans le canal du τ , qui pourrait être dû à une contribution supplémentaire provenant de ces modèles. Cependant, pour trancher ces questions ou pour mettre de fortes contraintes sur les modèles BSM, seule une amélioration à la fois des éléments V_{ub} et V_{cb} et des facteurs de forme $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ permettra d’y arriver. La recherche de précision pour ces grandeurs se confronte toutefois à la corrélation qui existe entre elles.

III. 3.3 Intérêt de la désintégration leptonique

Un autre canal de désintégration des mésons B correspond à une désintégration purement leptonique. Ce canal est très intéressant, puisque l'expression de son amplitude fait intervenir les éléments de matrice CKM, mais pas les facteurs de forme mentionnés plus haut. À la place, elle fait intervenir des constantes de désintégration. Ceci apparaît plus clairement dans la formulation de la largeur de désintégration qui, pour les mésons pseudo-scalaire (notés P), est donnée par

$$\Gamma(P \rightarrow \ell \nu_\ell) = \frac{G_F^2}{8\pi} f_P^2 m_\ell^2 m_P \left(1 - \frac{m_\ell^2}{m_P^2}\right) |V_{q_1 q_2}|^2. \quad (\text{III.31})$$

La constante de désintégration du méson pseudo-scalaire P est notée f_P et m_P est sa masse, q_1 et q_2 sont les saveurs qui composent P , et finalement la masse du lepton chargé est notée m_ℓ .

Si ce canal de désintégration est si intéressant, c'est parce qu'aujourd'hui la LQCD est capable de calculer avec précision les diverses constantes de désintégration f_P . Si la précision expérimentale sur ces processus s'améliore en parallèle avec la précision de la LQCD, nous pourrions contraindre la matrice CKM via les désintégrations leptoniques. Ce faisant, les canaux de désintégrations semi-leptoniques pourraient être presque exclusivement dédiés à la recherche BSM et à la détermination des facteurs de forme.

III. 4 Recherche directe de nouvelle physique en LQCD

Il est possible d'imaginer que d'autres courants que ceux autorisés par le SM contribuent à la désintégration du B par courant chargé. Il est possible de mesurer expérimentalement les valeurs des largeurs de désintégration, puis de calculer théoriquement la valeur de ces largeurs sans nouveau courant, et enfin de comparer les deux pour obtenir une estimation du nouveau courant BSM. Une autre possibilité, offerte par la flexibilité des simulations numériques, est que nous pouvons introduire dans la simulation certains de ces nouveaux courants, et ainsi directement donner une estimation de l'impact de ces courants BSM sur la largeur de désintégration (et comparer à l'expérience). De plus, il n'y a pas besoin pour réaliser cela de modifier le Lagrangien de QCD qui est mis sur réseau. En effet, les fonctions à trois points (vues en I. 3.3) peuvent être calculées avec n'importe quel courant, et il suffit d'associer un courant, par exemple scalaire, à une théorie avec des doublets de Higgs.

Ainsi, dans le SM, le seul courant permettant la désintégration du méson pseudo-scalaire B_s en méson pseudo-scalaire D_s est un courant vectoriel donné par

$$\langle D(k) | \bar{c} \gamma_\mu b | \overline{B}(p) \rangle = \left[(p+k)_\mu - \frac{m_B^2 - m_D^2}{q^2} q_\mu \right] f^+(q^2) + q_\mu \frac{m_B^2 - m_D^2}{q^2} f_0(q^2). \quad (\text{III.32})$$

Dans cet élément de matrice, k et p sont les quadri-impulsions des mésons, q est la différence $p - k$, et finalement f^+ et f_0 sont d'autres facteurs de forme donnés dans une autre paramétrisation.

Nous reviendrons sur cette formulation et ferons le lien entre ces facteurs de forme et $\mathcal{G}$ dans la section [IV. 4.1](#).

Sur réseau, il peut être envisagé de calculer les courants suivants :

$$\begin{aligned}\langle D(k) | \bar{c} b | \bar{B}(p) \rangle &= \frac{m_B^2 - m_D^2}{m_b - m_c} f_0(q^2), \\ \langle D(k) | \bar{c} \sigma_{\mu\nu} b | \bar{B}(p) \rangle &= i(p_\mu k_\nu + k_\mu p_\nu) \frac{2f_T(q^2)}{m_B + m_D}, \\ \langle D(k) | \bar{c} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 b | \bar{B}(p) \rangle &= -\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha k^\beta \frac{2f_T(q^2)}{m_B + m_D}.\end{aligned}\tag{III.33}$$

Le premier de ces courants est un courant scalaire et les deuxième et troisième sont des courants tensoriels. Cette fois, f_T est l'analogie pour les courants tensoriels des facteurs de forme f^+ et f_0 . Ainsi, sur réseau, il est possible de calculer ces facteurs de forme BSM ; par exemple le rapport f_T/f^+ a été calculé pour la première fois en [\[87\]](#). Ces facteurs de forme peuvent ensuite être utilisés pour voir l'impact que ces courants auraient sur des quantités mesurables, comme la distribution angulaire des désintégrations du méson B , qui a été étudiée en [\[38\]](#).

III. 5 Résumé et enjeux pour cette thèse

Ce chapitre a servi à comprendre quelles étaient les observables physiques étudiées en physique du B . Il nous a ainsi permis de montrer l'impact que la mesure de certaines largeurs de désintégration avait sur les paramètres du SM, à savoir les éléments de la matrice CKM. Outre ces éléments, il a été vu que la compréhension de la dynamique des états liés de QCD (encodée dans les facteurs de forme ainsi que dans les constantes de désintégration) jouait un rôle significatif dans le lien fait entre expérience (largeurs de désintégration) et théorie (matrice CKM). Nous avons ensuite pu voir que ce lien, dans certains cas (appelés anomalies), était sujet à des tensions pouvant être imputées à plusieurs facteurs, que nous récapitulons ici :

1. Des fluctuations statistiques dans les expériences, qui se réduisent à mesure que les données s'accumulent.
2. Une connaissance insuffisante des facteurs de forme (et leurs dépendances dans le recul) et des constantes de désintégration.
3. Des signes de nouvelle physique dans les canaux de désintégration semi-leptonique en τ (ce que nous espérons).

L'idée principale de ce chapitre était, après avoir présenté ces quantités et ces problèmes, de montrer que l'objectif de la recherche de nouvelle physique (troisième point) ne pouvait réellement être atteint qu'après avoir amélioré les autres points. Partant du principe que le premier point se résorbe avec le temps, c'est-à-dire par l'accumulation de données et l'utilisation de modèles théoriques comportant des incertitudes plus faibles, il semble que l'enjeu soit aujourd'hui de résoudre les

points deux et trois. Cela renforce l'intérêt de la LQCD, puisqu'elle fournit un moyen *ab initio* de calcul des facteurs de forme et des constantes de désintégration.

Nous allons ainsi voir dans le chapitre suivant, comment utiliser le formalisme présenté dans le chapitre [I](#), afin de calculer les facteurs de forme hadronique du méson B , et ce à recul nul et non-nul. Nous montrerons également que la méthode que nous avons utilisée peut, si elle est soigneusement appliquée, être exempte de tout biais incontrôlé.

Chapitre IV

Détails et résultats de l'analyse des désintégrations du méson B_s sur réseau

Le but de ce chapitre est de présenter la méthode que nous avons utilisée pour l'obtention des facteurs de forme hadroniques à recul nul, $\mathcal{F}(1)$ et $\mathcal{G}(1)$, dont nous avons vu l'intérêt dans le chapitre III. Pour cela, nous allons détailler, dans les différentes parties de ce chapitre, les grandeurs intermédiaires qui ont dû être calculées avec précision. Ainsi, je décrirai dans la section IV. 1, successivement, (i) les paramètres de notre simulation pour la génération des ensembles et des corrélateurs de mésons, (ii) la manière dont nous avons simulé le quark *bottom* sur nos réseaux, puis (iii) la statistique à disposition pour chaque ensemble de données. Dans la section IV. 2, nous verrons comment la masse, l'énergie et le couplage au vide des mésons sont obtenus en pratique, à partir des fonctions de corrélation à deux points. Du fait des particularités de notre analyse, nous discuterons comment nous avons amélioré la précision sur la détermination de ces grandeurs. Dans la section IV. 3, nous mènerons une discussion similaire pour les corrélateurs à trois points, où nous reviendrons sur l'amélioration de Symanzik (qui avait été introduite en I. 2.3) et sur notre technique d'isolation de la contribution des états fondamentaux aux corrélateurs, avant de finalement donner les éléments de matrice des mésons étudiés. Nous regrouperons alors dans la section IV. 4 ces divers éléments, afin d'obtenir les facteurs de forme hadroniques pour des amplitudes de désintégration de mésons lourd-étrange ; ces amplitudes seront ensuite extrapolées vers l'amplitude de désintégration du méson B_s qui nous intéresse ici. Ces résultats, obtenus sur le réseau (univers fini et discret) seront alors extrapolés dans notre univers physique. Dans la dernière section IV. 5, nous discuterons des limites de ce travail, qui se positionne comme une preuve de concept : nous verrons pourquoi ces résultats sont encourageants et sous quelles conditions d'amélioration (de la simulation) ils pourraient donner lieu à de nouvelles perspectives en physique de la saveur.

IV. 1 Simulations avec un pseudo-quark lourd : configurations et statistique

Comme nous l'avons présenté dans le chapitre I (dérivation de l'action de la LQCD), le point de départ de la simulation est une action gluonique, composée exclusivement de la plaquette (Eq. I.24), ainsi qu'une action fermionique de Wilson (Eq. I.30) améliorée du terme de *clover* (Eq. I.33) ; pour rappel (voir I. 2.3), cette discrétisation donne lieu à une erreur en $\mathcal{O}(a^2)$ à la limite du continu. Dans notre analyse, nous avons calculé, dans un premier temps, uniquement les deux premières saveurs de quark dynamiquement. Nous avons ajouté, par la suite, les autres saveurs cette fois-ci dans le secteur de la valence¹. Mais commençons cette section en détaillant ces étapes et en précisant les auteurs à leur origine.

IV. 1.1 Construction des ensembles

La construction des ensembles se décompose en plusieurs étapes, chacune de ces étapes impliquant de nombreuses grandeurs physiques ou paramètres.

1. Le point de départ est la génération des champs de jauge, réalisée par le groupe CLS [88]. Ces simulations sont caractérisées par les paramètres suivants :
 - la maille du réseau a et le volume associé Λ (voir Eq. I.8) ;
 - la valeur de $\beta = 6/g_0^2$, l'inverse de la constante de couplage forte (discutée dans I. 1.1).
2. Sur ces mêmes réseaux, il faut aussi simuler les champs fermioniques avec des masses adéquates pour les quarks s et c . Ceci a été fait par la collaboration ALPHA et l'estimation de ces masses a déjà fait l'objet de publications (par exemple [89; 90]) sur lesquelles s'appuient nos travaux. Les paramètres associés à cette étape sont les paramètres dits de *hopping* κ (voir plus bas), qui correspondent à
 - κ_{cr} (dont l'indice signifie critique) ainsi que $\kappa_{\text{sea}} = \kappa_u = \kappa_d$ pour les quarks dynamiques associés aux saveurs *up* and *down*,
 - κ_s et κ_c pour les quarks de valence associés aux saveurs *strange* et *charm*.
3. Puis, notre groupe de recherche a ajouté à ces ensembles les grandeurs physiques qui nous seront utiles par la suite, à savoir :
 - une impulsion sur réseau identifiée par le paramètre θ (discuté en IV. 1.2) ;
 - la simulation d'un quark lourd de paramètre κ_i tendant vers le quark *bottom*, que nous détaillerons en IV. 1.3.
4. C'est à la suite de toutes ces itérations qu'à commencé mon travail d'analyse de ces simulations, qui sera présenté à partir de la section IV. 2.

1. Leur contribution aux effets de la mer de quarks sera approximée par un champ moyen, c'est-à-dire que leur déterminant fermionique (voir Eq. I.42) sera supposé constant.

Paramétrisation du secteur gluonique

Nous utilisons ici des simulations de champs de jauge à deux saveurs de quark dynamique (ou quarks de la mer, voir I. 3.1). Ces simulations ont été réalisées par le groupe CLS [88], qui partage notamment leurs configurations avec la collaboration ALPHA ; de fait, les travaux que nous avons menés en physique du B s’inscrivent et s’appuient sur les ensembles statistiques et certains résultats déjà obtenus par cette collaboration ALPHA. Les ensembles obtenus par le groupe CLS sont présentés dans le **Tableau IV.1**. Chaque ensemble (qui peut contenir plusieurs sous-ensembles, voir plus loin) est identifié par une lettre et est associé à un couple de valeurs (Λ, β) correspondant au volume de la simulation et à l’inverse du couplage de l’interaction forte. Dans cette étude, nous nous sommes restreints aux trois premières valeurs de β (ensembles P et Q exclus, les simulations associées n’ayant pas convergé de manière satisfaisante). Nous avons, de plus, exclu les volumes physiques (valeurs de $a^4 \times \Lambda$) que nous avons jugés trop petits pour accueillir un quark *bottom*, c’est-à-dire les ensembles D et M (voir IV. 1.3).

Λ	β			
	5.2	5.3	5.5	5.7
48×24^3		D		
64×32^3	A	E	M	
96×48^3	B	F	N	P
128×64^3		G	O	Q

TABLEAU IV.1 – Liste des simulations réalisées par CLS [88] selon le volume Λ et l’inverse du couplage de l’interaction forte β . Dans cette thèse, les ensembles D, M, P, et Q sont exclus de l’analyse (voir texte). Le détail des ensembles utilisés est donné dans le **Tableau IV.3**.

Afin de déterminer la valeur de la maille a (qui n’est pas fixée dans la simulation) pour chaque ensemble du **Tableau IV.1**, ces ensembles sont simulés à différentes valeurs de masse de quark de la mer. Ceci permet de calculer les valeurs de la maille pour chaque valeur de β , via une extrapolation dans le domaine chirale qui a été réalisée en [91]. Cette extrapolation signifie que pour chaque valeur de β , une quantité physique (ici f_π , la constante de désintégration du pion) va être calculée pour des masses de quark de la mer différentes. Puis, à l’aide de la *Théorie des Perturbations chirales* (χPT), qui donne indirectement la dépendance de f_π en fonction des masses des quarks, une régression va être réalisée à β fixé pour toutes les masses de quark. Cette régression donne la valeur de $a(\beta)f_\pi^{\text{phy}}$, et il suffit alors de prendre le rapport de ce résultat avec la valeur expérimentale (de la constante de désintégration du pion) pour exhiber la valeur de la maille pour chaque valeur de β (nous montrerons ces valeurs plus loin).

β	κ_{cr}
5.2	0.1360546(25)(30)
5.3	0.1364572(11)(30)
5.5	0.1367749(06)(04)

TABLEAU IV.2 – Présentation des valeurs de κ_{cr} calculées en [89]. Ces valeurs servent au calcul de la masse « nue » des quarks avec l’Eq. IV.2. La première incertitude est statistique et la deuxième est l’incertitude systématique associée au choix des paramètres de l’ajustement pour trouver κ_{cr} .

Paramétrisation de la masse des quarks

Nos quarks sont des fermions de Wilson-clover et il est courant de définir leur masse via le *hopping parameter* κ . Ce paramètre apparaît explicitement dans l’opérateur de Dirac-Wilson $D(n|m)$ (Eq. I.29) lorsqu’il est réécrit sous la forme $D(n|m) = C(\mathbb{1} - \kappa H(n|m))$, avec

$$C = m + \frac{4}{a}, \quad \kappa = \frac{1}{2(am + 4)}, \quad H(n|m) = \sum_{\mu=\pm 1}^{\mu=\pm 4} (\mathbb{1} - \gamma_\mu) U_\mu(n) \delta_{n+\hat{\mu}, m}. \quad (\text{IV.1})$$

Cette formulation est très utile pour réaliser une expansion en série de l’opérateur de Wilson-Dirac. Par ailleurs, la masse « nue »² d’un quark de saveur f peut être calculée à partir de son paramètre $\kappa^{(f)}$ (dans la simulation) via la relation

$$m^{(f)} = \frac{1}{2\kappa^{(f)}} - \frac{1}{2\kappa_{cr}}. \quad (\text{IV.2})$$

Dans cette relation, le paramètre κ_{cr} est défini comme le paramètre associé aux deux premières saveurs *up* et *down* de la mer, κ_{sea} ³, pour lequel nous obtenons une masse du pion m_π nulle : c’est cette limite qui est soulignée par l’indice « critique ». Ce paramètre κ_{cr} ne dépend que de la valeur du couplage (ou de son inverse β) choisie pour le réseau. En pratique, il est obtenu en générant plusieurs réseaux avec des κ_{sea} différents, puis en calculant la masse du pion dans chaque ensemble et en extrapolant à la limite $m_\pi \rightarrow 0$ (soulignons que ce calcul se fait sans avoir à simuler les quark s et c). Pour nos ensembles, qui comportent trois valeurs de couplage différentes, nous avons logiquement trois valeurs de κ_{cr} qui sont présentées dans le Tableau IV.2 ; ces valeurs ont été calculées dans [89]. Bien évidemment, κ_{cr} sera différent de κ_{sea} , qui lui, donne une masse non nulle et la plus proche de la masse physique du pion.

Pour chacun de ces ensembles, il faut à présent déterminer la valeur de la masse des quarks de valence afin de générer, plus tard, les fonctions de corrélation dans l’approximation *quenched* (pour

2. Cette masse devra être renormalisée à l’aide de constantes de renormalisation déduites dans un schéma comme RI-SMOM (voir le chapitre II).

3. Pour rappel, $\kappa_{sea} = \kappa_u = \kappa_d$, les saveurs étant dégénérées dans nos simulations.

les quarks de valence, voir la discussion [I. 3.1](#)) ; soulignons que tous les quarks de valence sont, à l’instar des quarks de la mer, des quarks de Wilson-clover. Par ailleurs, les saveurs de valence dans le secteur léger sont elles aussi dégénérées ($\kappa_u = \kappa_d$). Ces dernières ont été choisies identiques à leur analogue de la mer, donc égales à κ_{sea} : c’est pour ces valeurs que nous trouvons les masses de pion les plus proches de leur valeur physique. Pour les saveurs de valence s et c , ces masses ont été ajustées pour chaque ensemble à l’aide des rapports m_K^2/f_K^2 et m_π^2/f_K^2 (où K est le kaon) pour le *strange* [89], et avec m_{D_s} pour le *charm* [90]. Lorsque que nous parlons d’ajustement, cela signifie que plusieurs sous-ensembles ont été simulés avec des masses de valence pour s et c (différentes des quantités précédentes). Puis, à l’aide d’une régression, la masse de valence qui redonne la valeur physique de la quantité a été déterminée, et enfin simulée et sélectionnée dans notre analyse.

Liste des ensembles

id	β	$(L/a)^3 \times (T/a)$	κ_{sea}	a (fm)	m_π (MeV)	conf	κ_s	κ_c
A5	5.2	$32^3 \times 64$	0.13594	0.0751	333	198	0.135267	0.12531
B6		$48^3 \times 96$	0.13597		282	118	0.135257	0.12529
E5	5.3	$32^3 \times 64$	0.13625	0.0653	439	200	0.135777	0.12724
F6		$48^3 \times 96$	0.13635		313	120	0.135741	0.12713
F7		$48^3 \times 96$	0.13638		268	200	0.135730	0.12713
G8		$64^3 \times 128$	0.13642		194	100	0.135705	0.12710
N6	5.5	$48^3 \times 96$	0.13667	0.0483	341	192	0.136250	0.13026
O7		$64^3 \times 128$	0.13671		269	60	0.136243	0.13022

TABLEAU IV.3 – Présentation des propriétés de chaque ensemble utilisé dans notre analyse. De gauche à droite : identifiant, inverse du couplage $\beta = 6/g_0^2$, dimensions du réseau, paramètre de *hopping* pour la masse des deux saveurs légères de la mer, maille du réseau, masse du pion, nombre de configurations utilisées, et paramètres de *hopping* pour les masses du quark *strange* et *charm*. Nous rappelons qu’une configuration correspond à une simulation des champs de gluons et de quarks. Les incertitudes sur les paramètres a , m_π et κ peuvent être trouvées dans les publications présentant leur détermination, mais ne sont pas reportées ici car elles ne sont pas directement prises en compte dans cette étude.

Le [Tableau IV.3](#) présente les paramètres les plus importants des huit ensembles utilisés dans notre étude. Nous disposons de trois mailles différentes, et pour chacune d’elles nous possédons au moins deux masses différentes de quark de la mer (κ_{sea}). La statistique produite pour ces ensembles n’est pas toujours optimale, en particulier pour les ensembles de grande taille ($48^3 \times 96$ et $64^3 \times 128$). Initialement, les ensembles générés par CLS contenaient plus de configurations, mais nous avons choisi de n’en garder qu’une sur quatre (ou sur cinq) pour augmenter la distance (en temps Monte Carlo) et diminuer l’auto-corrélation entre deux configurations. En outre, nous n’aurions pas eu

le temps de calcul nécessaire pour la génération des fonctions de corrélation à trois points avec d’avantage de configurations. En effet, le calcul des corrélateurs à trois points demandent une méthode de génération particulière d’un corrélateur « *all-to-all* » estimé stochastiquement [92; 93]; la seule génération des soixante corrélateurs d’O7 a ainsi demandé environ vingt millions d’heures CPU. Nous reviendrons brièvement sur ce point dans la discussion sur le ré-échantillonnage (voir IV. 1.5), mais il faudra garder à l’esprit que ce temps est relié aux statistiques particulières des ensembles B6, F6, G8 et O7.

IV. 1.2 Ajout de l’impulsion sur réseau

Pour donner une certaine quantité de mouvement à nos mésons, nous avons simulé des réseaux avec des conditions au bord twistées pour les fermions, et ce, de manière isotrope. Cela revient à considérer des transformations de champs (voir I. 3.4)

$$\psi(x + L\hat{n}) = e^{i\theta_n}\psi(x), \quad \theta_n = \theta \forall n \in \{1, 2, 3\}, \quad \theta_0 = 0, \quad (\text{IV.3})$$

où n est la direction de l’espace. Nous avons, de plus, choisi treize valeurs pour θ . Dans le [Tableau IV.4](#), nous pouvons voir les différentes valeurs données au paramètre θ pour le cas du quark c . Hormis pour l’ensemble A5, où nous avons voulu explorer une région plus vaste en impulsion, les valeurs de θ multipliées par $a\pi/L$ redonnent des valeurs similaires d’un ensemble à l’autre. Ceci a pour but de simplifier les divers limites qui seront prises en extrapolant les quantités sur tous les ensembles. Nous verrons plus loin que les valeurs différentes pour A5 ne se révèlent pas problématiques dans l’extrapolation des facteurs de forme à recul nul. En outre, les valeurs prises par θ sont symétriques : comme nous le verrons en section IV. 2.4, nous prendrons une moyenne sur les θ positifs et négatifs.

id	$\theta[a\pi/L]$						
A5	0.000000	± 0.150000	± 0.300000	± 0.525000	± 0.750000	± 1.050000	± 1.275000
B6	0.000000	± 0.163000	± 0.326000	± 0.570500	± 0.815000	± 1.140950	± 1.385450
E5	0.000000	± 0.125000	± 0.250000	± 0.437500	± 0.625000	± 0.875000	± 1.062500
F6	0.000000	± 0.187500	± 0.375000	± 0.656250	± 0.937500	± 1.312500	± 1.593750
F7	0.000000	± 0.187500	± 0.375000	± 0.656250	± 0.937500	± 1.312500	± 1.593750
G8	0.000000	± 0.250000	± 0.500000	± 0.875000	± 1.250000	± 1.750000	± 2.125000
N6	0.000000	± 0.253500	± 0.507000	± 0.887000	± 1.262500	± 1.774000	± 2.154500
O7	0.000000	± 0.338000	± 0.676000	± 1.183000	± 1.683000	± 2.365000	± 2.873000

TABLEAU IV.4 – Pour chaque ensemble, liste des valeurs de θ (en unité de $a\pi/L$) utilisées pour donner l’impulsion au produit de la désintégration $B_s \rightarrow D_s^{(*)}$, donc au quark *charm* ici.

Les valeurs choisies pour θ permettent, en reliant θ à l’énergie de recul w , d’explorer les régions proches du recul nul pour la désintégration $B_s \rightarrow D_s^{(*)}$. Comme nous l’avons vu dans la section

III. 3, il est aussi très important d'étudier la dépendance énergétique des facteurs de forme. C'est pourquoi nous avons choisi ces valeurs non-nulles pour θ . L'autre raison de ce choix est qu'il nous permettra un meilleur contrôle des erreurs systématiques des grandeurs à recul nul ($w = 1$ ou $\theta = 0$). Nous pouvons voir, dans le **Tableau IV.15**, les valeurs de w déduites de θ dans l'ensemble E5.

IV. 1.3 Ajout et simulation du quark b

Comme nous l'avions exposé en **I. 1.2**, le quark b est très difficile à simuler en LQCD, même statiquement, à cause de sa masse. Cependant, l'attrait porté à la physique du B a poussé la LQCD à ne pas attendre que la puissance de calcul devienne suffisante pour simuler le quark b , mais plutôt à trouver des moyens détournés pour mettre ce quark sur réseau en réduisant l'impact des erreurs de discrétisation, comme nous allons le voir.

Description par une théorie effective

Dans la littérature, nous pourrions trouver certains ensembles présentant trois actions fermioniques différentes : une pour les premières saveurs dynamiques, une pour les autres saveurs de valence légères et enfin une spécifique pour le b (et éventuellement c) qui est suffisamment lourd pour appliquer une action effective. Dans cette dernière action (pour les quarks lourds), nous trouvons les actions dites *Heavy Quarks Effective Theory (HQET)* [94] et *Non-Relativistic QCD (NRQCD)* [95]. Le principe de l'action HQET (qui est similaire pour NRQCD), comme son nom l'indique, est d'obtenir un Lagrangien effectif en réalisant un développement en $1/m_h$ du Lagrangien initial. À l'ordre le plus bas, le quark lourd est simulé statiquement avec l'action

$$S^{\text{stat}} = \sum_{n \in \Lambda} \bar{\psi}_h(n) (\delta m_h + \partial_0^*) \psi_h(n), \quad (\text{IV.4})$$

où $\partial_0^* f(n) = f(n) - U_0(n - \hat{0}) f(n - \hat{0})$ est la dérivée temporelle (indice 0) en arrière, δm_h est une masse résiduelle qui sera déterminée en comparant la masse d'un méson sur réseau avec la masse expérimentale, et où les champs ψ_h et $\bar{\psi}_h$ ne sont plus les spineurs relativistes mais deviennent des spineurs non-relativistes qui respectent

$$P_+ \psi_h = \psi_h, \quad \bar{\psi}_h P_+ = \bar{\psi}_h, \quad P_+ = \frac{1}{2}(1 + \gamma_0). \quad (\text{IV.5})$$

En prenant en compte l'ordre suivant (en $1/m_h$)⁴, il est possible de montrer que la dépendance en la masse de l'erreur systématique sur le spectre devient proportionnelle à $1/m_h^2$. Les valeurs moyennes d'opérateurs, elles, dépendent soit de la méthode effective utilisée, soit du fait que

4. Pour la description du calcul des ordres supérieurs, voir le chapitre X de [9].

l'opérateur mélange des quarks légers et lourds ou seulement des quarks lourds ; une description de ces erreurs peut être trouvée en appendice A de [52].

Le problème de cette théorie effective est qu'elle est source de systématiques incontrôlées. En effet, divers paramètres sont introduits, comme δm_h , ces paramètres peuvent être déterminés non-perturbativement, mais à chaque fois avec une certaine erreur de « *matching* » introduite.

Simulations de quarks de masse intermédiaire

Une stratégie alternative à la précédente (pour étudier le quark *bottom* sur réseau) consiste à considérer des masses intermédiaires entre celles des quark *c* et *b*, de manière à garder sous contrôle les effets de discrétisation. L'idée est de simuler, dans chaque ensemble, en plus des quatre saveurs de valence les plus légères, $N = 5$ ⁵ quarks *h*. Les masses de ces quarks, croissantes, sont données par

$$m_{h_i} = m_c \lambda^{i+1}, \quad \lambda = \left(\frac{\overline{m}_b}{\overline{m}_c} \right)^{\frac{1}{N+1}}, \quad i \in [0, N], \quad (\text{IV.6})$$

avec $i = 0$ qui correspond au quark *charm*, dont la masse a été fixée en imposant la correspondance entre $m_{D_s}^{\text{lat}}$ et $m_{D_s}^{\text{exp}}$. La barre horizontale au-dessus des masses signifie que ce sont les masses de quark « nues » dans le schéma $\overline{\text{MS}}$. Ce pas en masse avait été proposé dans [87], basé sur l'action « Twisted-Mass QCD ». Nous avons ici légèrement modifié la stratégie pour notre action basée sur la régularisation de Wilson-clover : suivant [96], la masse du quark lourd m_h est ajustée de façon à satisfaire la contrainte

$$M_{H_s} = m_{D_s}^{\text{exp}} \lambda^{i+1}, \quad \lambda = \left(\frac{m_{B_s}^{\text{exp}}}{m_{D_s}^{\text{exp}}} \right)^{\frac{1}{N+1}}, \quad i \in [0, N], \quad (\text{IV.7})$$

où H_s est le méson composé du quark h_i et du quark *s*. Cette modification nous permet de minimiser les erreurs de correspondance qu'il pourrait y avoir dans la première méthode entre $m_{D_s}^{\text{exp}}$ et $m_{D_s}^{\text{lat}}$.

Dans le [Tableau IV.5](#), nous avons représenté l'ensemble des valeurs κ_h pour chaque ensemble. Nous avons aussi reporté l'ordre de l'erreur pour la masse la plus lourde, c'est-à-dire la valeur de κ la plus faible. Nous verrons que le quark h_5 entraînera de grandes erreurs de discrétisation (pouvant être divergentes) dans les réseaux ayant les deux plus petites valeurs de β . Une fois que nous aurons calculé les quantités d'intérêt pour chaque quark *h*, nous pourrons réaliser une extrapolation de nos résultats à toutes nos m_h vers celui à la masse du quark physique m_b ; nous détaillerons dans la section [IV.4.4](#) comment est réalisée cette extrapolation. Soulignons que l'étude de l'erreur en m_h de nos quantités sera explicite (nous pouvons l'estimer avec la limite du continu, [IV.4.3](#)), contrairement aux études HQET (voir ci-dessus) où cette erreur est paramétrique (l'erreur provient de la troncature du développement en Λ/m_h et de l'ajustement des nouveaux paramètres).

5. Ce choix est un compromis entre le temps de calcul nécessaire à la simulation et un nombre de points suffisants pour l'extrapolation à la masse du quark *bottom*.

id	κ_0	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	κ_5	am_{h_5}	m_{h_5} GeV
A5	0.125310	0.121340	0.116040	0.109307	0.100407	0.089289	1.924799	5.057
B6	0.125290	0.121313	0.116044	0.109127	0.100172	0.088935	1.947088	5.116
E5	0.127240	0.123874	0.119457	0.113638	0.106031	0.096555	1.514243	4.576
F6	0.127130	0.123700	0.119241	0.113382	0.105793	0.096211	1.532758	4.632
F7	0.127130	0.123649	0.119196	0.113350	0.105786	0.096689	1.507066	4.554
G8	0.127100	0.123719	0.119260	0.113447	0.105836	0.096143	1.536434	4.643
N6	0.130260	0.127737	0.124958	0.121051	0.115915	0.109399	0.914784	3.737
O7	0.130220	0.127900	0.124944	0.120910	0.115890	0.109400	0.914742	3.737

TABLEAU IV.5 – Liste des valeurs de κ_h et masse du quark h le plus massif obtenu pour chaque ensemble simulé.

Nuançons cependant ces avantages, en rappelant que notre action fermionique Wilson-clover pour le quark h (comme pour les autres quarks) garde une erreur de discrétisation $\mathcal{O}((am_h)^2)$, là où pour HQET, correctement ajustée à l'ordre $1/m_h$, nous aurions des erreurs de discrétisation et de troncature $\mathcal{O}(a^2\Lambda_{\text{QCD}}^2, (\Lambda_{\text{QCD}}/m_h)^2)$.

IV. 1.4 Présentation des corrélateurs

Après avoir détaillé nos ensembles et notre méthode de simulation du quark b sur réseau, nous allons donner ici les fonctions de corrélation utilisées pour notre analyse ; celles-ci sont basées sur les fonctions de corrélation introduites dans la section I. 3. Dans notre étude des désintégrations du méson B_s au repos en méson D_s ou en méson D_s^* , et en remplaçant le méson B_s par un ensemble de mésons $H_s(\kappa_i)$, le groupe des fonctions de corrélation à deux points utilisées peuvent être regroupées de la manière suivante

$$\begin{aligned}
C_{ij}^{\theta, D_s}(t) &= \sum_{\vec{x}} \langle P_{i,cs}^\theta(t) | P_{j,cs}^{\dagger\theta}(0) \rangle, \\
C_{ij}^{H_s}(t) &= \sum_{\vec{x}} \langle P_{i,hs}(t) | P_{j,hs}^{\dagger}(0) \rangle, \\
C_{ij}^{\theta, D_s^*}(t) &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \sum_{\vec{x}} \langle V_{i,k,cs}^\theta(t) | V_{j,k,cs}^{\dagger\theta}(0) \rangle.
\end{aligned} \tag{IV.8}$$

Dans ces fonctions, si θ est omis, cela signifie que le corrélateur est défini à impulsion nulle. En outre, les champs interpolants (défini en I. 3.2) sont $P_{i,hs} = \bar{\psi}_h \gamma_5 \psi_s$, $P_{i,cs}^\theta = \bar{\psi}_c^\theta \gamma_5 \psi_s$ et enfin $V_{i,k,cs}^\theta = \bar{\psi}_c^\theta \gamma_k \psi_s$. L'indice k est un indice spatial sur lequel nous réalisons une moyenne sur les

composantes du corrélateur $C^{D_s^*}$. Finalement, les indices i et j représentent les niveaux de *smearing* Gaussien (voir la section I. 2.4) appliqués aux deux champs interpolants. Dans notre étude, nous avons utilisé quatre niveaux de *smearing*, c'est-à-dire quatre nombres d'itérations différentes de cette procédure, identifiés par $\{00, 30, 50, 80\}$: le niveau 00 signifie qu'aucune itération n'a été effectuée, et nous parlerons alors d'un champ « local » par opposition aux champs résultants d'une moyenne de proche en proche (due aux itérations de cette procédure).

En ce qui concerne les fonctions de corrélation à trois points (I. 3.3), la liste de celles que nous avons analysées est :

$$\begin{aligned} C_{ij}^{\theta, PV_\mu P}(t, t_i) &= \sum_{\vec{x}, \vec{y}} \langle P_{i,hs}(t) | V_{\mu,hs}(t_i) | P_{j,cs}^{\dagger\theta}(0) \rangle, \\ C_{ij}^{\theta, PA_k V_l}(t, t_i) &= \sum_{\vec{x}, \vec{y}} \langle P_{i,hs}(t) | A_{k,hs}(t_i) | V_{j,l,cs}^{\dagger\theta}(0) \rangle, \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

où les indices k et l sont des indices de Lorentz dans la partie spatiale de l'espace Euclidien, et seul μ est dans l'espace Euclidien complet. Nous reviendrons plus en détails dans la section IV. 3 sur ces corrélateurs. Nous allons pour le moment nous intéresser au ré-échantillonnage des configurations.

IV. 1.5 Statistique sur les configurations

Lorsque nous avons établi le lien entre les champs simulés sur réseau et les quantités déduites, nous avons omis un détail statistique qui relève de la nature quantique de ces champs. Pour un ensemble donné, si nous prenons une seule configuration de ces champs (telle que définie en I. 1.2), disons la i -ème, nous pouvons calculer par exemple $m_{D_s}^{(i)}$. Pour obtenir la masse réelle, il nous faudra prendre la moyenne sur les N_c configurations des $m_{D_s}^{(i)}$ qui nous donnera, au vu du théorème central limite, la valeur physique m_{D_s} . Cependant, si nous faisons une telle application rigoureuse de ce théorème sur les quantités primaire directement déduites des configurations (tel le corrélateur à deux point d'un méson), alors l'erreur sur des quantités secondaires (déduites des premières, comme les masses ou les facteurs de forme hadroniques) devraient être calculées en propageant les incertitudes sur les quantités primaires. Ce faisant, nous sous-estimerions les incertitudes sur ces grandeurs secondaires. Une façon de contourner cette difficulté est de procéder à un ré-échantillonnage des configurations. Ce ré-échantillonnage est réalisé en pré-analyse, c'est-à-dire sur les grandeurs primaires, donc les fonctions de corrélation. Il existe plusieurs façons de procéder, mais l'idée forte est que toutes les quantités calculées (primaires ou secondaires) et leurs erreurs découlent de moyennes et de variance d'ensembles sur ces configurations ré-échantillonnées (appelés *bins* par la suite). Bien évidemment, selon le ré-échantillonnage choisi, les estimateurs de moyenne et de variance seront plus ou moins biaisés avec une convergence vers la valeur attendue plus ou moins rapide [97]. Tous les résultats que je présente dans ce chapitre sont issus de la méthode Jackknife. J'ai néanmoins vérifié sur l'ensemble E5 que les résultats restaient inchangés si la méthode Bootstrap était utilisée. Je présente brièvement ces deux méthodes, et par souci de

complétude, je présente aussi une méthode alternative de propagation d’erreur, la méthode Γ [98], qui a été utilisée dans l’article issu de cette étude.

Jackknife et Bootstrap [97]

Soit θ la valeur d’une quantité (par exemple un corrélateur) que nous voulons estimer, θ_i la valeur de cette quantité obtenue sur la i -ème configuration et $\hat{\theta}$ l’estimateur de la moyenne de cette quantité sur toutes les configurations. Enfin, $\hat{\theta}_b$ est la moyenne des valeurs θ_i sélectionnées pour former le b -ième *bin*. Dans la méthode Jackknife, les échantillons (ou bins) sont construits en prenant l’ensemble des configurations le long de la chaîne de Markov, à l’exclusion de N_{ex} configurations consécutives ; d’un bin à l’autre, l’ensemble de configurations à exclure ne se recouvre donc pas. Ainsi, si nous avons $N_c = 200$ configurations et que nous choisissons d’exclure $N_{ex} = 2$ configurations, nous pourrions construire $N_{bin} = 100$ échantillons Jackknife et nous aurons

$$\hat{\theta}_b = \frac{1}{N_c - N_{ex}} \left(\sum_{i=0}^{b \times N_{ex}} \theta_i + \sum_{i=(b+1) \times N_{ex}}^{N_c} \theta_i \right). \quad (\text{IV.10})$$

En pratique, il existe un nombre minimal de configurations à exclure pour limiter la corrélation entre les bins, de manière à ne pas sous-estimer les erreurs statistiques. Avec cette méthode, le nombre de bins (échantillons) est fixe (N_{ex}/N_c). Le **Tableau IV.6** compile nos choix faits pour le ré-échantillonnage de chaque ensemble : le nombre de configurations exclues N_{ex} varie, de manière à trouver un compromis entre la corrélation des bins la plus faible possible (grandes valeurs de N_{ex}) et la statistique maximale qu’il est possible d’obtenir (grandes valeurs de N_{bin}).

id	N_c	N_{ex}	N_{bin}
A5	198	9	22
B6	118	11	10
E5	200	10	20
F6	120	6	20
F7	200	10	20
G8	100	10	10
N6	192	12	16
O7	60	4	15

TABLEAU IV.6 – Nombre de bins Jackknife par ensemble, pour le ré-échantillonnage en pré-analyse. Pour chaque ensemble, nous reportons le nombre de configurations disponibles, le nombre de configurations exclues choisies et le nombre de bins (échantillons) résultant.

Concernant le Bootstrap, pour construire un échantillon, il suffit de tirer aléatoirement et avec remise un nombre N_{tirage} de configurations, et de répéter l'opération pour le nombre de bins voulu. Dans le contexte de notre étude, il faudra faire attention à garder la même séquence de nombres aléatoires pour le choix des configurations pour toutes les quantités à ré-échantillonner. Bien que cette technique présente l'avantage sur celle du Jackknife d'avoir des échantillons plus stochastiques et de pouvoir simuler un nombre quelconque de bins, il faut garder à l'esprit qu'une taille de bin (N_{tirage}) trop grande ou un trop grand nombre de bin N_{bin} peuvent malgré tout biaiser la distribution des $\hat{\theta}_b$ par rapport à celle des θ_i .

Méthode Γ [98]

Cette méthode consiste à construire la fonction d'auto-corrélation des champs simulés via les chaînes de Markov, puis à propager les moments des distributions de ces champs sur les variables primaires puis secondaires, à l'aide de cette fonction d'auto-corrélation, qui est donnée par

$$\Gamma_{\alpha\beta}(n) = \langle (\theta_{\alpha}^i - \hat{\theta}_{\alpha})(\theta_{\beta}^{i+n} - \hat{\theta}_{\beta}) \rangle. \quad (\text{IV.11})$$

Dans cette équation, α et β désignent deux observables qui peuvent être différentes, n représente le nombre d'itérations (dans la chaîne de Markov) qui sépare les deux observables et $\langle \cdot \rangle$ est un estimateur de la moyenne sur le temps Markovien i . Précisons que c'est la fonction d'auto-corrélation qui permet de s'affranchir du biais qu'aurait introduit une « simple » propagation des incertitudes. C'est pourquoi la méthode Γ , qui n'est pas une méthode de ré-échantillonnage, peut tout de même être utilisée en LQCD. Pour une présentation rigoureuse et complète de cette méthode, voir [98].

IV. 2 Étude sur la masse des mésons

Dans cette partie, nous allons donner les résultats obtenus avec les fonctions de corrélation à deux points. Nous allons détailler la méthode utilisée pour extraire les masses des mésons, en nous appuyant sur une symétrie temporelle dans les fonctions à deux points. Puis, nous verrons comment estimer l'erreur sur ces masses à un instant t , et comment la réduire. Finalement, nous discuterons le domaine de validité temporel dans lequel nous pouvons extraire les quantités physiques, ce qui est appelé le *Plateau*. Cela nous permettra de présenter les valeurs des masses et des énergies calculées dans notre analyse pour les différents mésons.

Symétrie en temps des corrélateurs à deux points

Sur réseau, il existe une symétrie temporelle pour les fonctions de corrélation. Par exemple, pour des corrélateurs à deux points pseudoscalaire-pseudoscalaire ou vecteur-vecteur, nous avons

$C(t) = C(T - t)$, où T désigne l'extension temporelle du réseau. Ainsi, la formulation que nous avons vue pour le corrélateur à deux points (Eq. I.50), sous l'effet de cette symétrie, devient

$$\begin{aligned}
C(t) &= \sum_n \frac{|Z_n|^2}{2E_n} (e^{-E_n t} + e^{-E_n(T-t)}) \\
&= \sum_n \frac{|Z_n|^2}{2E_n} e^{-E_n T/2} (e^{-E_n(t-T/2)} + e^{-E_n(T/2-t)}) \\
&= \sum_n \frac{|Z_n|^2}{E_n} e^{-E_n T/2} \cosh(E_n(t - T/2)) ,
\end{aligned} \tag{IV.12}$$

où le facteur 2 apparaissant au dénominateur provient d'une convention de définitions de Z_n . Pour prendre en compte cette symétrie, il existe trois méthodes simples que j'ai examinées :

1. Nous pouvons simplement prendre l'ensemble des points du réseau et utiliser cette nouvelle définition de la fonction de corrélation pour réaliser une régression et extraire les grandeurs physiques. Cependant, la fonction étant plus complexe à ajuster (la symétrie temporelle restant imparfaite pour le nombre de *bin* à notre disposition), j'ai observé une instabilité de la régression qui m'a incité à abandonner cette méthode.
2. Il est également possible de réaliser une symétrisation des fonctions de corrélation par rapport à $T/2$, c'est-à-dire $C^{\text{sym}}(t) = (C(t) + C(T-t))/2$, puis de ne considérer que les points symétrisés (appartenant à $[0, T/2]$). Dans ce cas nous retrouvons la première définition de la fonction de corrélation ($\cosh \rightarrow \exp$). Le facteur limitant de cette méthode est que l'erreur statistique pour le corrélateur à grand temps ($t \simeq T/2$) masque la contribution des états excités, extraite d'une régression, et il faudra réduire la borne supérieure de la région de validité de cette dernière (voir IV. 2.3).
3. La dernière méthode est identique à la deuxième, si ce n'est que cette fois nous ne prendrons pas la moyenne des points symétriques, et nous excluons simplement les points $t > T/2$ de notre analyse. À première vue, cela paraît mauvais, car nous nous privons alors d'une réduction de l'erreur statistique d'un facteur $\sqrt{2}$. Mais, en réalité, cette amélioration de l'erreur ne se produit que si les deux points symétriques (p et p_{sym}) ont des valeurs proches, à savoir $p_{\text{sym}} \in [p - \sigma, p + \sigma]$, avec σ la déviation standard de p . En effet, pour des valeurs différentes, plusieurs points symétrisés consécutifs pourraient avoir, au contraire, un comportement plus erratique.

Ainsi, après avoir essayé et abandonné la première méthode, j'ai alternativement utilisé les deux autres. Je peux affirmer qu'après avoir trouvé les bons paramètres pour les régressions (voir IV. 2.3), la dernière méthode m'a donné des régressions sensiblement aussi stables que celles de la méthode deux. Cependant au regard d'une légère amélioration de l'incertitude statistique des grandeurs calculées (expliquée ci-dessus), j'ai opté pour la seconde méthode. Dans la suite, les résultats donnés seront ainsi issus d'une moyenne en temps comme nous l'avons décrit. C'est pourquoi, l'échelle temporelle des résultats présentés dans ce chapitre sera dans le domaine $[0, T/2]$ et non $[0, T]$.

Précision sur les méthodes employées : stabilité vs erreurs systématiques

Dans tout ce chapitre, à quelques étapes clés, j’ai dû utiliser différentes méthodes pour réduire le bruit ou pour augmenter la stabilité des régressions. Il faut comprendre que ces raffinements sont nécessaires pour réussir à extraire les grandeurs que nous calculons. Par exemple, la première méthode décrite ci-dessus, combinée aux étapes suivantes (décrites ci-après), ne permet pas d’aboutir, dans certains cas, à un résultat. Ces différentes méthodes ne sont cependant pas utilisées ici pour estimer les erreurs systématiques. Si nous souhaitions le faire, il faudrait faire varier, à chaque étape, les paramètres des différentes méthodes utilisées, comme par exemple le choix du plateau (IV. 2.3), t_0 ou encore t_{fix} pour le GEVP (IV. 2.2). Dans notre étude, nous n’avons pas étudié ces systématiques et nous nous sommes restreints au calcul des erreurs statistiques (nous justifierons ce choix dans nos conclusions).

IV. 2.1 Fonction de corrélation à deux points et masse effective

Avec la formulation du corrélateur (Eq. I.50), il est possible de réaliser une régression avec les données pour les corrélateurs à deux points et ainsi déterminer m (ou E) et Z , soit respectivement la masse (ou l’énergie) et la constante de couplage au vide de l’état fondamental (voir Eq. I.50). Dans la Figure IV.1, nous pouvons voir les valeurs prises par la fonction de corrélation du méson D_s au repos dans l’ensemble E5 en fonction du temps. Comme tous les autres graphiques de corrélateur (en fonction du temps) qui suivront dans ce chapitre, le temps t (a) est écrit en unité réseau a : ce temps divisé par a donne une valeur dimensionnée en fermi. En outre, les barres d’erreurs, bien que présentes dans ce graphique, sont trop petites pour être vues. Comme je l’ai déjà évoqué, cette régression peut être instable, à cause des données parfois bruyantes à notre disposition. Pour augmenter la précision, la stabilité ou encore la convergence de cette régression, j’ai effectué une succession de deux régressions : en premier lieu, une régression sur une fonction modifiée, qui ne déterminera que la masse ; la seconde régression est alors effectuée sur la courbe pour déterminer Z , en fixant m (ou, indifféremment, E) à la valeur trouvée par la première régression. Les deux régressions sont faites dans un domaine temporel où nous supposons que l’état fondamental est parfaitement isolé (nous reviendrons dans IV. 2.2 sur cette supposition).

Pour faire une régression à une dimension, il faut modifier notre fonction $C(t; m, Z)$ qui est la projection sur l’état fondamental de la fonction de corrélation (Eq. I.50). À cette fin, il suffit de prendre le logarithme du rapport de deux corrélateurs consécutifs en temps :

$$\begin{aligned} \frac{C(t_1)}{C(t_2)} &= \exp(m(t_2 - t_1)) , \\ \Leftrightarrow m &= \ln \left(\frac{C(t)}{C(t+1)} \right) . \end{aligned} \tag{IV.13}$$

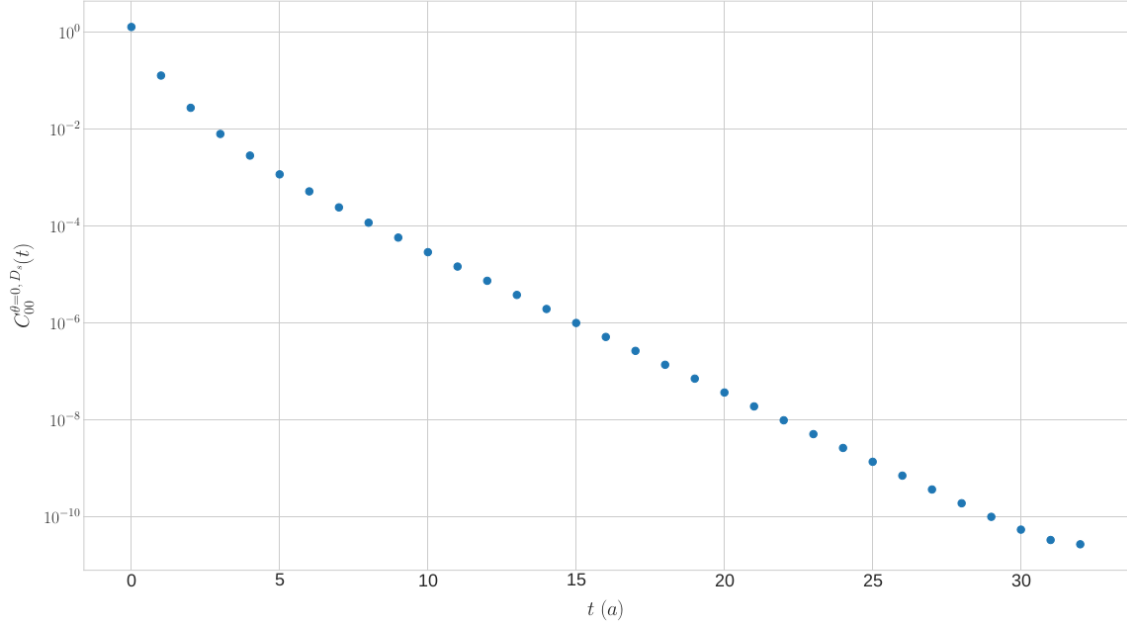


FIGURE IV.1 – Fonction de corrélation à deux points pour le méson D_s au repos en fonction du temps en unité réseau t (a). Ce résultat est tiré de l'ensemble E5.

Nous pouvons répéter cette opération pour chaque $t \in [0, T/2 - 1]$, ce qui nous donne la **Courbe IV.2**. Comme pour le graphique précédent, les incertitudes restent trop petites pour être visibles sur ce second graphique. Comme nous pouvons le voir, cette courbe n'est pas constante et évolue en fonction du temps. Naturellement, ceci est dû à notre supposition selon laquelle les états excités ne contribuaient plus à la fonction de corrélation. Si cette supposition semble vérifiée au centre de la courbe, elle paraît être fausse aux extrémités. Ainsi, la masse issue du logarithme de ce rapport sera plutôt désignée comme étant une masse effective qui a une dépendance en temps venant des contaminations des états excités. Nous réécrivons donc la masse effective sous la forme

$$m^{\text{eff}}(t) = \ln \left(\frac{C(t)}{C(t+1)} \right) = m + \text{contaminations}(t). \quad (\text{IV.14})$$

Le terme $\text{contaminations}(t)$ est supposé s'annuler pour $t \gg 0$ et $t \ll T/2$ (voir la discussion **IV. 2.3** pour la validité de ces hypothèses).

Corrélateur du méson vectoriel

Si nous avons établi toute la formulation nécessaire à l'étude du méson pseudo-scalaire, il nous reste un détail à voir pour le cas du méson vectoriel. Ce méson possède, à l'instar des autres particules de spin un, une polarisation, c'est-à-dire que sa fonction d'onde peut être polarisée selon les trois directions d'espace-temps (3 polarisations λ sont possibles). Cette polarisation est en général notée $\epsilon^{\mu(\lambda)}$ où μ est la direction quadridimensionnelle du courant. La fonction de corrélation

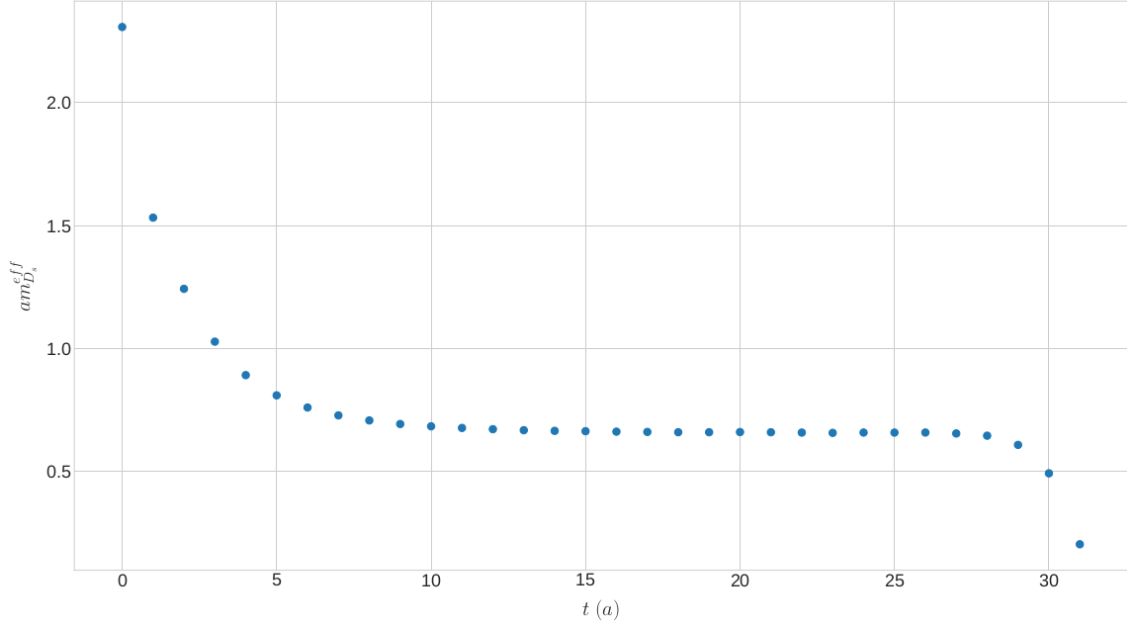


FIGURE IV.2 – Masse effective du méson D_s au repos dans l'ensemble E5. Cette masse est calculée à l'aide de l'Eq. IV.14 et de la fonction de corrélation à deux points de ce méson.

à deux points va ainsi posséder un nombre quantique supplémentaire

$$\langle O_{D_s^*}(\mu, p_{D_s^*}, t) O_{D_s^*}^\dagger(\nu, p_{D_s^*}, 0) \rangle \propto \sum_{\lambda} \epsilon^{*\mu(\lambda)} \epsilon^{\nu(\lambda)}. \quad (\text{IV.15})$$

Nous avons repris la quadri-impulsion p pour présenter le résultat et nous reviendrons à θ dans quelques lignes. En utilisant la normalisation de la polarisation, nous avons

$$\sum_{\lambda} \epsilon^{*\mu(\lambda)} \epsilon^{\nu(\lambda)} = g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{m_V^2}, \quad (\text{IV.16})$$

avec m_V la masse de la particule vectorielle et $g^{\mu\nu} = \mathbb{1}_4$ la métrique de l'espace-temps égale à l'unité (par définition de la métrique Euclidienne utilisée en LQCD). Notons que l'équation est sans dimension puisque la masse est en unité réseau. De plus, comme l'impulsion est choisie isotrope et vaut θ , nous avons

$$\sum_{\lambda} \epsilon^{*i(\lambda)} \epsilon^{i(\lambda)} = 1 - \frac{\theta^2}{m_{D_s^*}^2}, \quad (\text{IV.17})$$

ce qui conduit pour la fonction de corrélation du méson vectoriel à

$$\langle O_{D_s^*}(i, p_{D_s^*}, t) O_{D_s^*}^\dagger(i, p_{D_s^*}, 0) \rangle \xrightarrow{t \gg 0} \frac{|Z_{D_s^*}|^2}{E_{D_s^*}} \left(1 - \frac{\theta^2}{m_{D_s^*}^2} \right) e^{-E_{D_s^*} T/2} \cosh(E_{D_s^*}(t - T/2)). \quad (\text{IV.18})$$

Notons simplement que nous avons directement utilisé ce résultat sur l'état fondamental avec la limite $t \gg 0$. D'après la discussion en IV. 2, nous allons préférer à cette dernière équation la

formulation

$$\langle O_{D_s^*}(i, p_{D_s^*}, t) O_{D_s^*}^\dagger(i, p_{D_s^*}, 0) \rangle \xrightarrow{t \gg 0} \frac{|Z_{D_s^*}|^2}{E_{D_s^*}} \left(1 - \frac{\theta^2}{m_{D_s^*}^2} \right) e^{-E_{D_s^*} t}. \quad (\text{IV.19})$$

Si la polarisation d'une particule vectorielle est une propriété physique importante, nous voyons dans l'Eq. IV.19 que cette polarisation aurait pu ne pas être dérivée et simplement oubliée, absorbée dans le couplage au vide. Néanmoins, comme nous le verrons dans la partie IV.3, cette polarisation ne pourra pas être réabsorbée pour les fonctions à trois points. De plus, l'utilisation des couplages au vide pour l'extraction des éléments de matrice hadronique nécessite une cohérence de la définition de la polarisation des fonctions à trois points avec celles à deux points. C'est pourquoi cette étape était indispensable.

Estimation de l'erreur sur m^{eff}

Afin d'établir une estimation de l'erreur sur la masse effective d'un méson quelconque, nous allons prendre la fonction de corrélation de ce méson et considérer les contributions de l'état fondamental et du premier état excité, ce qui donne

$$C(t) = \frac{|Z_1|^2}{2m_1} e^{-tm_1} + \frac{|Z_2|^2}{2m_2} e^{-tm_2} + \mathcal{O}(e^{-t\Delta m_{2,3}}). \quad (\text{IV.20})$$

Ainsi en effectuant l'opération pour déterminer la masse effective sur les deux premiers états, 1 et 2, à partir de la fonction de corrélation précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{C(t)}{C(t+1)} &\simeq \frac{\frac{|Z_1|^2}{2m_1} e^{-tm_1}}{\frac{|Z_1|^2}{2m_1} e^{-(t+1)m_1} + \frac{|Z_2|^2}{2m_2} e^{-(t+1)m_2}} + \frac{\frac{|Z_2|^2}{2m_2} e^{-tm_2}}{\frac{|Z_1|^2}{2m_1} e^{-(t+1)m_1} + \frac{|Z_2|^2}{2m_2} e^{-(t+1)m_2}}, \\ &\simeq \frac{e^{m_1}}{1 + \frac{m_1}{m_2} \frac{|Z_2|^2}{|Z_1|^2} e^{-(t+1)\Delta m_{1,2}}} + \frac{e^{m_2}}{\frac{m_2}{m_1} \frac{|Z_1|^2}{|Z_2|^2} e^{(t+1)\Delta m_{1,2}} + 1}, \\ e^{t+1} \gg 0 &\Rightarrow \frac{C(t)}{C(t+1)} \simeq \frac{e^{m_1}}{1 + \frac{m_1}{m_2} \frac{|Z_2|^2}{|Z_1|^2} e^{-(t+1)\Delta m_{1,2}}}, \\ e^{-(t+1)} \rightarrow 0 &\Rightarrow \frac{C(t)}{C(t+1)} \simeq e^{m_1} \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \frac{|Z_2|^2}{|Z_1|^2} e^{-(t+1)\Delta m_{1,2}} \right), \\ \ln \left(\frac{C(t)}{C(t+1)} \right) &\simeq m_1 + \mathcal{O} \left(\frac{m_1}{m_2} \frac{|Z_{D_s'}|^2}{|Z_{D_s}|^2} e^{-(t+1)\Delta m_{1,2}} \right). \end{aligned} \quad (\text{IV.21})$$

À la ligne deux, le deuxième terme se simplifie à cause de l'argument qui croît avec le temps dans l'exponentielle au dénominateur. Puis, aux lignes trois et quatre, nous utilisons le développement limité pour l'exponentielle tendant vers zéro à large t . Ainsi, pour la masse effective du méson D_s , nous obtenons la formulation suivante, où le méson D_s peut être remplacé par n'importe quel autre méson de notre étude :

$$m_{D_s}^{\text{eff}} = m_{D_s} + \mathcal{O}\left(\frac{m_{D_s}}{m_{D'_s}} \frac{|\mathcal{Z}_{D'_s}|^2}{|\mathcal{Z}_{D_s}|^2} e^{-(t+1)\Delta m_{D_s, D'_s}}\right) \quad (\text{IV.22})$$

Ici, D'_s représente le premier état excité du méson D_s . Évidemment, notre discussion sur m^{eff} s'applique indifféremment à l'énergie si notre fonction de corrélation est pourvue d'une impulsion. Dans la partie suivante, nous allons voir comment nous pouvons diminuer l'incertitude sur la masse effective grâce au *smearing* et au GEVP.

IV. 2.2 La procédure d'isolement de l'état fondamental

En introduction de ce chapitre, nous avons présenté les fonctions de corrélation utiles à notre étude (Eq. IV.8). Comme nous l'avons vu, ces fonctions sont générées avec des niveaux de *smearing* différents, en l'occurrence quatre pour chacun des champs interpolants. Or nous avons, dans ces fonctions, deux champs interpolants, l'un à la source et l'autre au puits (voir section I. 2.4). Cela signifie qu'en calculant l'ensemble des possibilités de *smearing*, nous obtenons une matrice de seize corrélateurs dans l'espace du *smearing*.

Impact du smearing sur la masse effective

Nous avons expliqué dans la partie I. 2.4 qu'ajouter du *smearing* à un champ local avait pour effet de supprimer les interactions de courte distance. Ce faisant, les fonctions de corrélation avec *smearing* voient leur couplage au vide s'amoinrir. Or, si nous nous référons à l'Eq. IV.22, nous pouvons voir qu'en diminuant la valeur du rapport Z_1/Z_n , nous réduisons la contamination due à l'état excité numéro n . Finalement, comme il est admis empiriquement que le couplage au vide des états excités diminue plus fortement que celui de l'état fondamental, globalement, la contamination s'amoinrit lorsque nous augmentons le nombre d'étapes d'adoucissement des champs fermioniques.

C'est ce que nous observons dans la Figure IV.3, où j'ai représenté la masse effective pour les quatre corrélateurs diagonaux de la matrice de *smearing* (symboles identifiés par les valeurs de *smearing* {00, 30, 50, 80}). Les éléments non-diagonaux ne sont pas représentés pour plus de clarté, mais leurs courbes sont intermédiaires à celles des éléments diagonaux. Dans le Tableau IV.7, une illustration de l'évolution du couplage au vide du méson D_s est aussi donnée en fonction du niveau

de *smearing*. Pour des fonctions de corrélation à deux points avec *smearing*, l'isolement de l'état fondamental semble être meilleur, du fait que les contaminations des états excités en $|Z_{D_s}|^2/|Z_{D_s}|^2$ diminuent. En d'autres termes, la limite en temps à partir duquel cet état est isolé, se produit à un temps plus faible. Nous pouvons nous assurer de cet effet dans les [Figure IV.3](#), où nous pouvons voir que les fonctions « smearées » atteignent un plateau avant la fonction local-local (cas 00_00 sans smearing).

id	$a Z_{D_s} _{00\ 00}^2$	$a Z_{D_s} _{30\ 30}^2$	$a Z_{D_s} _{50\ 50}^2$	$a Z_{D_s} _{80\ 80}^2$	$a Z_{D_s} _{gevp}^2$	plt
A5	0.05117(6)	0.001267(2)	0.0003822(7)	$8.13(2) \times 10^{-5}$	$2.2(1) \times 10^{-5}$	[8, 24]
B6	0.0446(1)	0.001230(2)	0.0003754(8)	$8.05(2) \times 10^{-5}$	$2.5(2) \times 10^{-5}$	[11, 37]
E5	0.03037(8)	0.002232(6)	0.000994(3)	0.000358(1)	$1.59(5) \times 10^{-5}$	[9, 25]
F6	0.02540(6)	0.002100(6)	0.000958(3)	0.000351(1)	$1.35(3) \times 10^{-5}$	[12, 39]
F7	0.02432(4)	0.001010(2)	0.0003486(6)	$8.71(2) \times 10^{-5}$	$8.8(2) \times 10^{-6}$	[13, 37]
G8	0.0229(1)	0.001009(5)	0.000352(2)	$8.85(5) \times 10^{-5}$	$9.4(9) \times 10^{-6}$	[19, 45]
N6	0.00768(2)	0.001030(3)	0.000553(2)	0.000246(1)	0.000246(1)	[17, 40]
O7	0.00734(2)	0.00069(1)	0.0002448(8)	$7.78(2) \times 10^{-5}$	$7.78(2) \times 10^{-5}$	[18, 46]

TABLEAU IV.7 – Valeurs obtenues par ensemble pour $|Z_{D_s}|^2$, pour les élément diagonaux de la matrice de *smearing* (colonnes 2 à 5) et pour le couplage obtenu avec le GEVP (colonne 6). Les calculs ont été faits pour des plateaux (colonne 7) identiques pour les différents *smearing* et pour le GEVP. Les erreurs sont celles issues de l'écart type des bins, comptées comme erreurs statistiques.

Isolation physique à l'aide du GEVP

Bien que l'isolement de l'état fondamental puisse être satisfaisant avec le *smearing* comme dans le cas présenté en [Figure IV.3](#), nous verrons que le seul *smearing* ne sera pas suffisant pour les fonctions de corrélation à trois points. C'est pourquoi nous avons utilisé la résolution du *Problème aux Valeurs Propres Généralisées (GEVP)* appliquée à notre matrice de corrélateurs dans l'espace de smearing. Cette résolution permet d'isoler les contributions de n'importe quel état n d'une fonction de corrélation, et ce de manière plus formelle et plus précise que ne le fait le *smearing*. Bien que cette méthode ne montre son intérêt que pour les fonctions à trois points, elle s'établit grâce aux corrélateurs à deux points ; nous nous proposons donc de la décrire ici.

Méthode du GEVP Pour une matrice M de valeurs propres λ et vecteurs propres $\vec{v}$, l'équation aux valeurs propres est donnée par $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$, alors que l'équation aux valeurs propres généralisée est elle donnée par

$$M\vec{v} = \lambda X\vec{v}. \quad (\text{IV.23})$$

Dans cette équation, X est une autre matrice et les vecteurs et valeurs propres seront cette fois ceux de la matrice $X^{-1}M$. Nous allons à présent noter la matrice des corrélateurs dans l'espace de

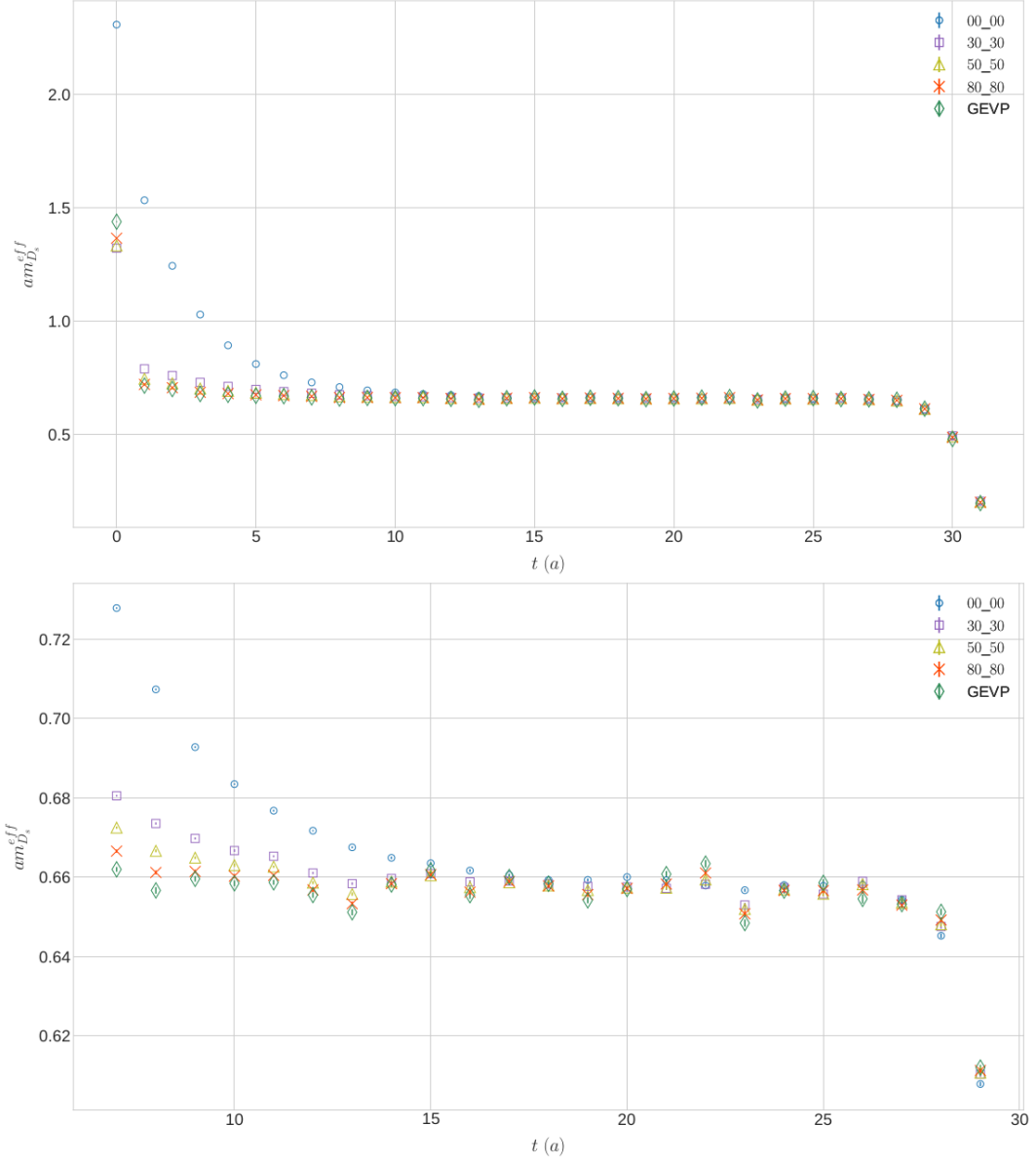


FIGURE IV.3 – Évolution des masses effectives pour l'ensemble E5 en fonction de t (a) obtenues pour des niveaux de *smearing* différents (précisés en légende) ou après application du GEVP. Le panneau du bas présente un zoom dans la région $[7, 29]$ autour du « plateau », c'est-à-dire la région où l'état fondamental est correctement isolé des états excités. Les barres d'erreurs restent très petites, surtout comparées aux fluctuations des points.

smearing comme les fonctions de corrélation, mais en oubliant les indices de niveau de *smearing*

afin de clarifier les explications. Avec nos niveaux de *smearing*, cette matrice s'écrit

$$C(t) = \begin{pmatrix} C_{00,00}(t) & C_{00,30}(t) & C_{00,50}(t) & C_{00,80}(t) \\ C_{30,00}(t) & C_{30,30}(t) & C_{30,50}(t) & C_{30,80}(t) \\ C_{50,00}(t) & C_{50,30}(t) & C_{50,50}(t) & C_{50,80}(t) \\ C_{80,00}(t) & C_{80,30}(t) & C_{80,50}(t) & C_{80,80}(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.24})$$

Ainsi, nous aurons, par exemple, pour le méson D_s au repos, la matrice $C^{D_s}(t)$. Dans la procédure du GEVP décrite en [99], il conviendra tout d'abord de définir un temps de référence, noté t_0 , supposé comme étant le temps où seuls les quatre premiers états contribuent à la fonction de corrélation (la valeur quatre correspond à la dimension de la matrice de corrélateurs). En effet, si nous avons choisi une matrice de dimension quatre, c'est parce que nous pensons que jusqu'à trois états excités peuvent contaminer, parfois de manière significative, l'état fondamental ; les contaminations des états excités supérieurs ou égales à quatre sont jugées négligeables. Nous souhaitons donc supprimer ces contaminations. Pour cela, nous allons résoudre le GEVP pour une matrice quelconque de corrélateurs $C(t)$ à partir de la matrice au temps de référence $C(t_0)$, soit

$$C(t)\vec{v}(t, t_0) = \lambda(t, t_0)C(t_0)\vec{v}(t, t_0). \quad (\text{IV.25})$$

Les vecteurs et valeurs propres sont calculés à chaque instant t et ils dépendent de notre choix pour t_0 . Avec la résolution du GEVP et donc l'obtention des λ et $\vec{v}$, nous pouvons directement obtenir l'énergie de l'état n avec la valeur propre de l'état n , via

$$\lambda_n(t, t_0) = \exp(-E_n(t - t_0)). \quad (\text{IV.26})$$

Cela ne nous permet cependant pas d'extraire le couplage au vide dont nous aurons besoin pour l'extraction des éléments de matrice hadronique (comme nous l'avons vu en I.3.3). C'est pourquoi nous allons choisir d'utiliser les vecteurs propres déterminés avec le GEVP pour projeter la matrice de *smearing* sur l'état n , ce qui revient à

$$\tilde{C}_n(t) = \sum_{i,j} \vec{v}_{n,i}(t, t_0) C_{ij}(t) \vec{v}_{n,j}(t, t_0). \quad (\text{IV.27})$$

La procédure du GEVP décrite ci-dessus reste néanmoins sensible aux fluctuations des corrélateurs, et résoudre le GEVP à chaque instant pour faire une projection « temps par temps » ne donne pas des résultats satisfaisants, notamment du point de vue statistique. Une alternative consiste à choisir un second temps de référence, noté t_{fix} , pour lequel nous allons résoudre le GEVP. Ainsi, le corrélateur projeté va s'écrire

$$\tilde{C}_n(t) = \sum_{i,j} \vec{v}_{n,i}(t_{\text{fix}}, t_0) C_{ij}(t) \vec{v}_{n,j}(t_{\text{fix}}, t_0), \quad (\text{IV.28})$$

à partir duquel nous pouvons alors extraire la masse et la constante de couplage au vide (comme expliqué ci-dessus). Notons que si le GEVP n'est résolu qu'au temps t_{fix} , le résultat de ce GEVP ($\vec{v}_{n,i}(t_{\text{fix}}, t_0)$) est ensuite appliqué à tous les instants t pour reconstruire une fonction du temps (projetée sur l'état n).

Application à l'état fondamental Pour notre étude, nous nous sommes restreints à la projection sur l'état fondamental, puisque c'est le seul dont nous avons besoin. De plus, l'erreur associée aux contaminations avec cette méthode est plus petite que l'erreur obtenue via le corrélateur local-local, et est, de plus, optimale pour l'état fondamental. En notant $\Delta E_{m,n} = E_m - E_n$ et $N = 4$ la taille de la matrice de corrélateurs, ces erreurs, pour l'état n , sont données par

$$\begin{aligned} E_n^{\text{eff}} &= E_n + \mathcal{O}(e^{-\Delta E_{N+1,n}t}), \\ \langle O_1(t)O_2(0) \rangle_{n \neq 1}^{\text{eff}} &= \langle O_1(t)O_2(0) \rangle_{n \neq 1} + \mathcal{O}(e^{-\Delta E_{N+1,n}t_0}), \\ \langle O_1(t)O_2(0) \rangle_{n=1}^{\text{eff}} &= \langle O_1(t)O_2(0) \rangle_{n=1} + \mathcal{O}(e^{-\Delta E_{N+1,1}t_0} e^{-\Delta E_{2,1}(t-t_0)}) + \mathcal{O}(e^{-\Delta E_{N+1,1}t}). \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

Une démonstration de ces résultats est présentée dans l'article explicatif de la méthode du GEVP, toujours en [99].

Après avoir détaillé notre procédure d'isolement de la contribution de l'état fondamental dans les corrélateurs à deux points, les résultats dans la suite, que ce soit pour E , m ou Z , seront extraits des corrélateurs projetés suivants :

$$\begin{aligned} \tilde{C}^{\theta, D_s}(t) &= \sum_{ij} \vec{v}_i^{\theta, D_s}(t_{\text{fix}}, t_0) C_{ij}^{\theta, D_s}(t) \vec{v}_j^{\theta, D_s}(t_{\text{fix}}, t_0); \\ \tilde{C}^{H_s}(t) &= \sum_{ij} \vec{v}_i^{H_s}(t_{\text{fix}}, t_0) C_{ij}^{H_s}(t) \vec{v}_j^{H_s}(t_{\text{fix}}, t_0); \\ \tilde{C}^{\theta, D_s^*}(t) &= \sum_{ij} \vec{v}_i^{\theta, D_s^*}(t_{\text{fix}}, t_0) C_{ij}^{\theta, D_s^*}(t) \vec{v}_i^{\theta, D_s^*}(t_{\text{fix}}, t_0). \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

Dans mon analyse, j'ai utilisé $t_0 = 5$ pour les ensembles avec $\beta = 5.5$ et $t_0 = 3$ pour les autres ensembles. J'ai aussi choisi $t_{\text{fix}} = t_0 + 3$, pour m'éloigner suffisamment de l'instant t_0 après lequel les états peuvent être extraits, et pour garder le plus grand nombre de points valables pour l'analyse (après t_{fix}). Gardons cependant à l'esprit que ces fonctions projetées restent dépendantes du choix de l'hyper-paramètre t_0 et qu'une erreur systématique liée à ce choix restera présente dans ces fonctions sans toutefois pouvoir être estimée complètement, mais en la supposant faible. Pour estimer l'erreur sur t_0 , il faut faire varier ce paramètre et mesurer son impact sur les valeurs finales. Si je n'ai pas pu estimer complètement cette erreur sur t_0 , c'est qu'en faisant varier ce paramètre uniquement, certaines régressions ne convergeaient plus. Il est en effet nécessaire de déterminer de nouvelles valeurs pour les plateaux, ce qui revient alors à analyser l'erreur systématique du couple de paramètres $(t_0, \text{plateaux})$. Néanmoins, pour les régressions qui convergeaient sans changement de plateau, j'ai pu observer que les modifications sur les valeurs finales restaient incluses dans les incertitudes statistiques, et c'est ce à quoi nous faisons référence lorsque nous disons supposer l'erreur sur le choix de t_0 faible.

Dans le [Tableau IV.7](#), nous pouvons voir que le couplage au vide de l'opérateur projeté avec les mésons est encore plus faible après le GEVP que pour celui de l'opérateur avec le plus haut niveau de *smearing*. Cela est dû au fait que les vecteurs propres issus du GEVP combinent des composantes

positives et négatives. Ainsi, en projetant le corrélateur sur l'état fondamental, le couplage au vide sera une résultante d'une combinaison linéaire de contributions positives et négatives. Ce couplage n'est plus alors qu'un artefact numérique. Néanmoins cet artefact aura la même valeur dans les fonctions à trois points, et ainsi, même si nous ne pouvons pas donner un sens physique à ce couplage effectif, nous pourrions extraire correctement les éléments de matrice hadronique des rapports entre fonctions de corrélation à trois points et à deux points (comme vu en [Eq. I.60](#)).

IV. 2.3 Sélection du domaine de validité pour l'état fondamental

Dans la section [I. 3.2](#), nous avons établi le lien entre la fonction de corrélation à deux points d'un méson et les propriétés physiques qui peuvent être extraites de cette dernière. Pour rappel, l'énergie et le couplage au vide du méson sont donnés par

$$C_{\Gamma\Gamma}^{2pts}(t) = \sum_n |Z_n|^2 e^{-atE_n}. \quad (\text{IV.31})$$

Rappelons que dans cette équation, la somme sur n est une somme sur l'ensemble des états excités. Ainsi, lorsque le temps t augmente, et comme l'énergie des états excités est croissante, la contribution des états excités à la fonction de corrélation devient marginale. Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, le smearing et le GEVP contribuent également à cette suppression de la contribution des états excités ([Eq. IV.29](#)). Il reste à déterminer le temps minimal pour lequel nous pouvons considérer un isolement correct de l'état fondamental. Pour l'estimer, j'ai utilisé la méthode présentée en [\[100\]](#) et qui va être discutée ci-dessous. Après cela, nous verrons comment nous avons choisi le temps maximum en dessous duquel nous pouvons considérer que l'état fondamental n'est pas contaminé par des fluctuations numériques.

Estimateur pour la contamination du fondamental

Tous d'abord, même s'il y a une infinité d'états excités qui contribue aux corrélateurs, notre procédure de GEVP nous empêche de voir plus loin que le quatrième état. Mais, si nous supposons être à un temps où les contributions du quatrième état sont négligeables, alors *a fortiori* les contributions des états suivants le sont également. Ainsi, d'après l'[Eq. IV.22](#), nous avons créé un estimateur de la contamination associée à E_4 qui est donné par

$$4 \exp(-at\Delta E_{4,1}), \quad (\text{IV.32})$$

avec $\Delta E_{4,1} = E_4 - E_1 \simeq 2 \text{ GeV}$ (estimation empirique déduite de [\[101\]](#)). Ensuite, lorsque nous calculons la masse effective d'un corrélateur, cette dernière est entachée d'une incertitude statistique. Nous pouvons voir dans la [Figure IV.4](#) l'évolution de l'erreur statistique sur la masse du méson D_s en fonction du temps réseau ; nous pouvons observer que cette erreur varie peu. Ceci implique, qu'à un temps donné, les contributions du quatrième état excité seront contenues dans

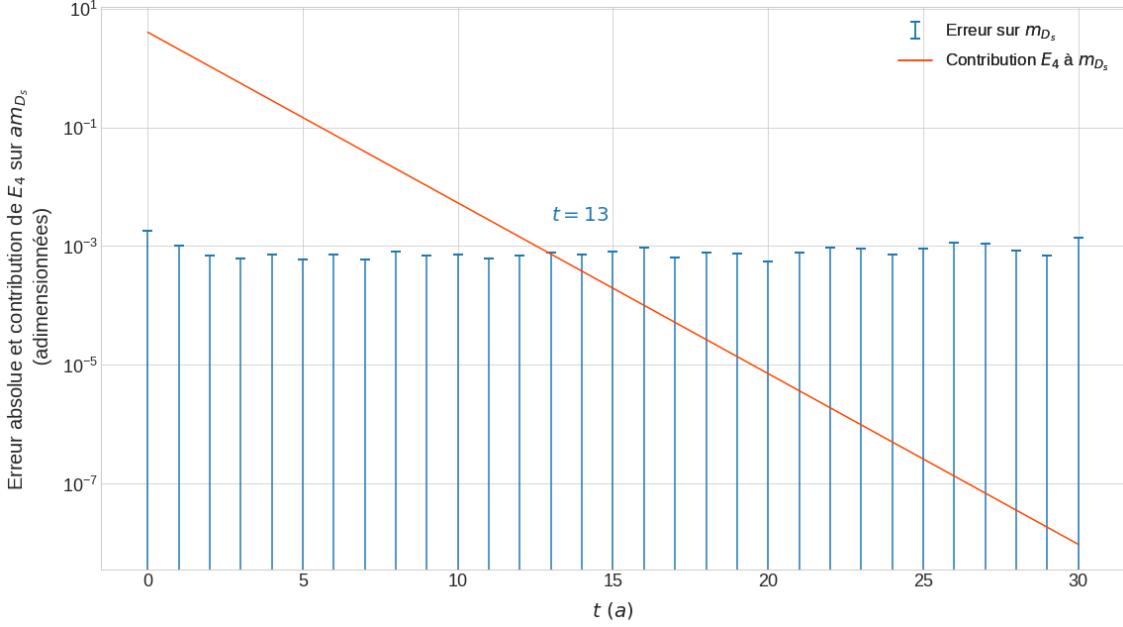


FIGURE IV.4 – Détermination du début du plateau dans le cas de l’ensemble E5 pour le corrélateur du D_s . Pour cela, nous comparons la contribution (contamination) du quatrième état excité (estimation théorique basée sur $\Delta E_{4,1} = 2$ GeV) à la masse de l’état fondamental (courbe orange) avec l’erreur statistique obtenue sur m_{D_s} après le GEVP (barres d’erreurs bleues). Le point $t = 13$ est obtenu lorsque la contribution de E_4 devient inférieure aux erreurs sur m_{D_s} au cours du temps.

l’erreur statistique. Dès lors, en traitant correctement les incertitudes sur la masse, nous englobons les contaminations, ce qui n’aurait pas été le cas à un temps antérieur où la contamination de E_4 aurait été plus importante.

Même si nous sommes satisfaits de corrélateurs exempts des contaminations du quatrième état, nous pouvons nous demander pourquoi ce critère ne pourrait pas être fixé avec le troisième ou même le deuxième état excité. Graphiquement, toujours à l’aide de la figure [Figure IV.4](#), il est facile de voir qu’une différence de masse plus faible aurait impliqué une décroissance plus lente, et ainsi un $t_{\min}$ plus grand. Or, comme la finalité est de déterminer une région où il sera possible de réaliser une régression de la masse effective par une constante, il nous faut déterminer une région la plus étendue possible pour ne pas biaiser la détermination de cette constante. C’est pourquoi nous préférons avoir une possible contamination (minime grâce au GEVP) de notre masse effective et obtenir une meilleure stabilité de la régression. Finalement, cette méthode n’étant qu’indicative, nous avons parfois pris un temps légèrement différent de celui donné par l’estimateur [Eq. IV.32](#) pour lisser quelques fluctuations numériques.

Temps élevé et contaminations numériques

Dans la formulation de l'extraction de l'état fondamental, la seule limitation théorique qui apparaît est une borne inférieure pour le temps. Néanmoins, il existe également une borne supérieure au plateau. À chaque instant, les fonctions de corrélation sont contaminées par des bruits numériques qui sont liés à la génération pseudo-aléatoire des différents champs de configuration. Même si, en moyenne, ces bruits doivent se compenser et s'annuler, le fait de ne pas avoir une statistique infinie fait qu'il subsiste toujours un peu de ce biais dans nos fonctions de corrélation. Il est difficile d'estimer précisément ce biais, même si nous pouvons voir des premiers effets de l'ordre de 10^{-10} (en valeur absolue des fonctions de corrélation) selon les simulations et les objets considérés. Or, les fonctions de corrélation ont, comme nous l'avons vu, une décroissance exponentielle, et si à petits temps ce bruit est dérisoire, il arrive un instant t où ces contaminations représentent une part non négligeable de la valeur totale du corrélateur. C'est d'ailleurs ce que nous voyons à large temps dans la figure [Figure IV.1](#) : les points s'éloignent d'une droite parce qu'ils ont reçu une contribution supplémentaire à celle de l'exponentielle (que nous avons dérivée dans la section [I. 3.2](#)) ; ce changement de domaine est encore plus visible dans la [Figure IV.2](#). De plus, la procédure du GEVP ou celle du smearing ne peuvent pas réduire ce problème, de telle sorte que ces contaminations sont propagées tout au long de l'analyse.

La seule manière de contourner ce problème est de ne pas tenir compte de ces données au-delà d'un certain temps. Si nous avons un critère empirique pour choisir le début du plateau, sa fin est estimée graphiquement et de manière itérative : nous essayons un plateau, nous l'ajustons et nous recommençons jusqu'à obtenir un résultat satisfaisant. En fait, nous souhaitons avoir le plateau le plus grand et le plus stable possible : si dans la région $[t_{\min}, t_{\max}]$, nous obtenons par exemple une valeur $m_{D_s}^{\text{eff}}$, alors en modifiant $t_{\max} \rightarrow t_{\max} \pm 1$, la masse effective ne doit pas être trop modifiée. Dit en terme plus mathématique, pour une métrique donnée, nous voulons que le minimum local de cette fonction soit stable. Pour estimer ce plateau, j'ai utilisé le χ^2 de la régression de la masse du méson, voire, dans certain cas, le test de Kolmogorov-Smirnov, qui teste la similitude entre la distribution des points dans la région du plateau et la distribution des masses données par la régression pour chaque bin. Pour terminer, il n'y a pas de raison théorique qui pourrait justifier le décalage en temps du domaine de validité selon l'énergie. C'est pourquoi, si nous pouvons choisir des plateaux différents pour chaque ensemble et pour chaque méson simulé (i.e. différentes valeurs de κ_h), nous souhaitons avoir les mêmes plateaux pour toutes les valeurs prises par θ . Ceci augmente quelque peu l'instabilité des plateaux, mais si nous ajustons tous les plateaux de manière à obtenir le « meilleur » résultat pour chaque corrélateur, nous risquerions alors de biaiser nos résultats.

IV. 2.4 Résultats : m_{D_s} , $m_{D_s^*}$, m_{H_s} et énergie des mésons

La procédure décrite plus haut est appliquée à tous les ensembles étudiés pour déterminer, à partir des corrélateurs à deux points, les masses effectives de plusieurs mésons. Nous présentons dans le [Tableau IV.8](#) les résultats des masses du méson pseudo-scalaire et du méson vectoriel D_s et

D_s^* . Notons que les données impliquant le méson vectoriel D_s^* sont absentes pour les ensembles B6 et G8 pour cause de données défectueuses ou trop bruyantes. Malgré cela, nous conservons trois mailles distinctes. En convertissant ces résultats en GeV, nous retrouvons des masses très proches de la valeur expérimentale. Soulignons que pour le D_s , ceci était attendu puisque, pour rappel, la masse du méson D_s a servi pour déterminer la valeur de κ_c . En revanche, pour le méson D_s^* , ceci constitue un résultat encourageant pour la validité de la simulation du secteur charmé.

id	am_{D_s}	m_{D_s} (GeV)	plateau	$am_{D_s^*}$	$m_{D_s^*}$ (GeV)	plateau
A5	0.7496(2)	1.9696(4)	[8, 24]	0.8079(2)	2.1227(6)	[8, 24]
B6	0.7481(2)	1.9658(6)	[11, 37]			
E5	0.6574(2)	1.9865(6)	[9, 25]	0.7074(5)	2.138(2)	[9, 25]
F6	0.6578(2)	1.9878(6)	[12, 39]	0.7072(7)	2.137(2)	[12, 39]
F7	0.6547(1)	1.9783(3)	[13, 37]	0.6997(1)	2.1145(4)	[13, 37]
G8	0.6564(3)	1.9835(9)	[19, 45]			
N6	0.4837(1)	1.9761(6)	[17, 40]	0.5189(4)	2.120(2)	[17, 40]
O7	0.4834(2)	1.9750(6)	[18, 46]	0.5191(4)	2.121(2)	[10, 50]

TABLEAU IV.8 – Liste des masses (en unité réseau) calculées pour chaque ensemble pour les mésons D_s et D_s^* . Les choix de plateau sont indiqués dans les colonnes 4 et 7. Pour comparaison, les valeurs expérimentales des masses des mésons m_{D_s} et $m_{D_s^*}$ sont respectivement de 1.968 34(7) GeV et 2.1122(4) GeV [12].

Dans le [Tableau IV.9](#), ce sont cette fois les masses des mésons H_s (mésons obtenus par simulations des quarks h pour différent κ_h , voir le [Tableau IV.5](#)) qui sont présentées. Bien évidemment, il n’y a pas de comparaison possible avec la masse mesurée expérimentalement pour le méson B_s . Toutefois, ces masses sont données dans un souci de complétude. Elles illustrent aussi le fait qu’à mesure que m_h tend vers m_b , la simulation devenant plus bruyante, les plateaux utilisés doivent globalement être réduits pour maintenir la stabilité des régressions.

Calculs de l’énergie du méson $D_s^{(*)}(\theta)$

Comme écrit dans la section [I. 3.4](#), sur réseau, une impulsion θ peut être donnée au corrélateur lors de la simulation des champs gluoniques et fermioniques. Comme cette étape est réalisée en début de simulation, il est important de vérifier dans l’analyse que cette méthode a eu les effets souhaités ; si tel n’est pas le cas, il faut estimer le biais induit.

Nous cherchons ici à voir si l’énergie acquise par les mésons est correcte ou non. Pour cela, nous utilisons la relation de dispersion pour un boson libre sur réseau ⁶ (donc vérifiée pour les mésons),

6. Cette relation, est la version discrétisée de $E(p) = \sqrt{m^2 + p^2}$.

id	$am_{H_s^1}$	plt	$am_{H_s^2}$	plt	$am_{H_s^3}$	plt	$am_{H_s^4}$	plt	$am_{H_s^5}$	plt
A5	0.8856(2)	[8, 22]	1.0489(2)	[6, 20]	1.2329(2)	[7, 25]	1.4572(2)	[8, 20]	1.7184(2)	[6, 17]
B6	0.8843(3)	[11, 37]	1.0216(4)	[12, 34]	1.2379(3)	[8, 27]	1.4629(3)	[7, 23]	1.7266(5)	[8, 20]
E5	0.7764(3)	[8, 27]	0.9164(3)	[9, 27]	1.0831(3)	[7, 27]	1.2804(4)	[7, 22]	1.5077(4)	[8, 17]
F6	0.7789(2)	[10, 35]	0.9198(3)	[10, 34]	1.0857(2)	[7, 27]	1.2822(2)	[8, 22]	1.5153(2)	[5, 18]
F7	0.7772(1)	[14, 32]	0.9181(1)	[11, 35]	1.0851(1)	[10, 29]	1.2814(1)	[8, 25]	1.5002(1)	[7, 23]
G8	0.7756(3)	[13, 39]	0.9163(4)	[13, 32]	1.0820(5)	[12, 33]	1.2793(3)	[8, 26]	1.5126(3)	[5, 24]
N6	0.5795(2)	[16, 38]	0.6757(2)	[13, 37]	0.7981(2)	[15, 35]	0.9455(2)	[15, 29]	1.1212(3)	[10, 23]
O7	0.5721(2)	[15, 43]	0.6741(2)	[18, 45]	0.8018(2)	[13, 39]	0.9483(2)	[8, 30]	1.1190(2)	[8, 28]

TABLEAU IV.9 – Liste des masses des mésons H_s (en unité réseau) calculées pour chaque ensemble et pour toutes les valeurs de $\kappa \neq \kappa_c$. Pour chaque masse, les plateaux sont donnés à droite des valeurs.

qui pour D_s est donnée par (le seul paramètre est la masse du méson)

$$\sinh^2\left(\frac{E_{D_s}}{2}\right) = 3 \sin^2\left(\frac{\theta\pi}{2L}\right) + \sinh^2\left(\frac{m_{D_s}}{2}\right). \quad (\text{IV.33})$$

Dans les [Figures IV.5](#) (voir [Tableau IV.10](#) pour les valeurs), cette relation de dispersion est représentée par une bande pour rendre compte de l'incertitude statistique (calculée sur réseau) sur la masse des mésons D_s (haut) et D_s^* (bas). La première observation est que cette relation n'est pas parfaitement respectée. Plus précisément, plus θ augmente en valeur absolue, plus cette différence devient marquante. Néanmoins, un retour à la limite du continu de ces énergies (comme elle sera détaillée en [IV. 4.3](#)) devrait faire disparaître cette différence à haut θ . Nous pouvons également remarquer une certaine asymétrie en énergie en fonction de θ . Ceci tend à montrer que les simulations stochastiques des propagateurs de quarks pour deux valeurs opposées de θ n'ont pas convergé vers la même valeur, à cause d'une statistique un peu trop faible, ou des effets de discrétisation. Cependant, l'énergie est reliée au carré de θ , ce qui implique que nous pouvons traiter sans distinction les résultats pour deux valeurs opposées en impulsion réseau ; cette asymétrie nous motive à prendre une moyenne sur θ positif et négatif, et virtuellement multiplier la statistique par deux. De plus, la relation de dispersion semble davantage respectée dans les ensembles avec une maille plus fine, ce qui suggère une diminution des effets de discrétisation sur l'énergie dans ces ensembles (N6 et O7).

Cette discussion sur l'impulsion sur réseau conclut les résultats sur les corrélateurs à deux points. Nous allons à présent nous concentrer sur les résultats des fonctions de corrélation à trois points.

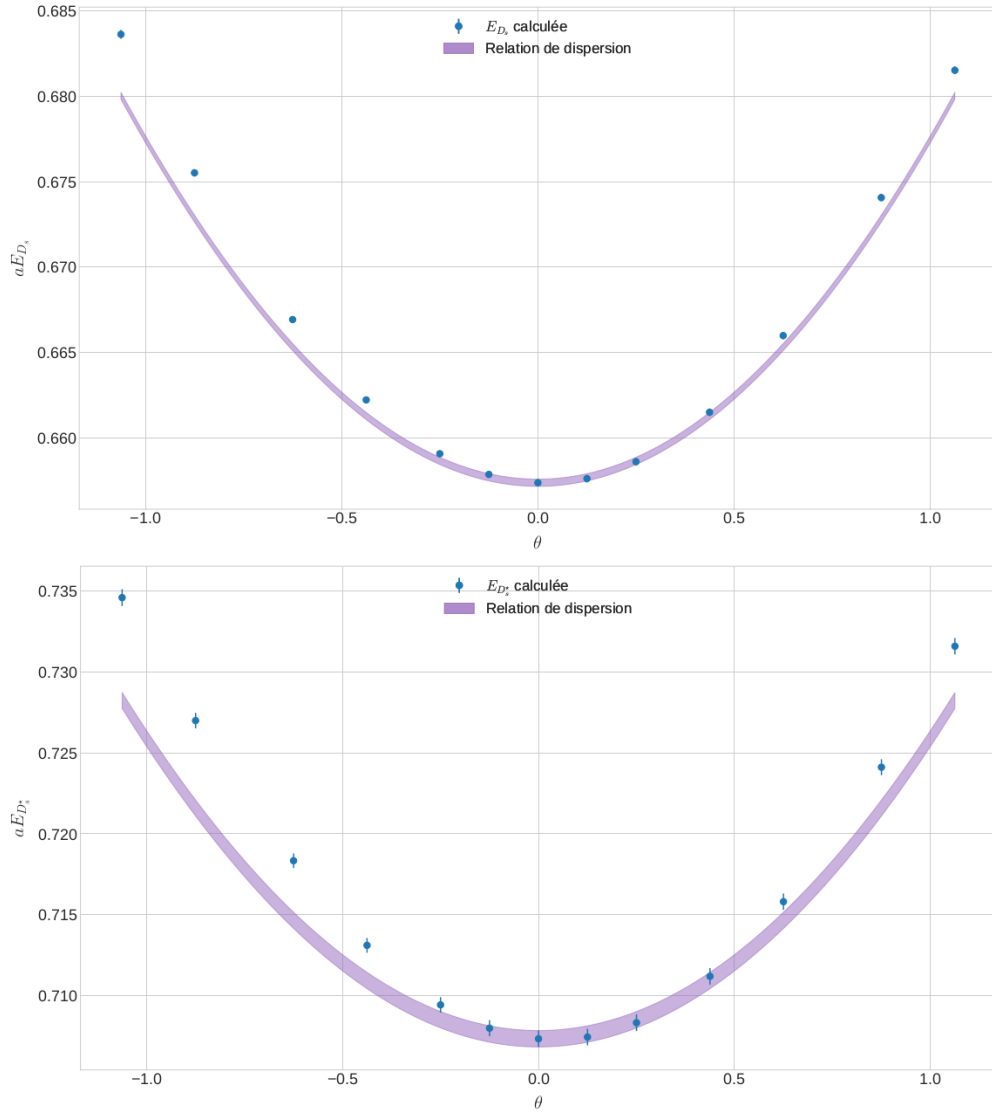


FIGURE IV.5 – Évolution de l'énergie des mésons D_s (haut) et D_s^* (bas) en fonction de l'impulsion θ , pour les points tirés de l'ensemble E5 (symboles) et pour la relation de dispersion Eq. IV.33 (bande mauve). Les barres d'erreurs statistiques sont bien présentes pour tous les points, mais peuvent être inférieures à la taille de ces points dans certains cas.

IV. 3 Éléments de matrice hadronique

Dans cette section, nous présentons les résultats pour les éléments de matrice hadronique $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_i$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, que nous allons définir ci-dessous, et qui permettront de calculer les facteurs de forme hadroniques. Nous calculons également un cinquième élément de matrice, $\mathcal{M}_{0i}^T$, qui nous servira à réaliser l'amélioration de Symanzik pour les deux premiers éléments de matrice. Nous présenterons ensuite l'application du GEVP aux fonctions à trois points et qui prouvera ici son

θ	E_{D_s}		$E_{D_s}^*$	
-1.062500	0.6836(3)	0.005269	0.7346(5)	0.008643
-0.875000	0.6755(2)	0.003973	0.7270(5)	0.007422
-0.625000	0.6669(2)	0.002418	0.7183(5)	0.005123
-0.437500	0.6622(2)	0.001427	0.7131(5)	0.003047
-0.250000	0.6591(2)	0.000638	0.7094(5)	0.001292
-0.125000	0.6579(2)	0.000255	0.7080(5)	0.000507
0.000000	0.6574(2)	0.000000	0.7074(5)	0.000000
0.125000	0.6576(2)	0.000117	0.7075(5)	0.000267
0.250000	0.6586(2)	0.000068	0.7083(5)	0.000262
0.437500	0.6615(2)	0.000337	0.7112(5)	0.000366
0.625000	0.6660(2)	0.001011	0.7158(5)	0.001608
0.875000	0.6741(2)	0.001829	0.7241(5)	0.003480
1.062500	0.6815(2)	0.002198	0.7316(5)	0.004576

TABLEAU IV.10 – Énergies associées aux impulsions réseau θ pour les mésons D_s et D_s^* dans l'ensemble E5. Ces résultats correspondent à ceux représentés dans les [Figures IV.5](#) : pour chaque méson, nous donnons l'énergie calculée (colonnes 2 et 4) et la différence (colonnes 3 et 5) entre cette énergie et la relation de dispersion (courbe mauve des [Figures IV.5](#)).

efficacité. Finalement, nous verrons comment incorporer l'amélioration de Symanzik et comment renormaliser les éléments de matrice, pour obtenir les résultats physiques finaux.

Définitions des éléments de matrice

Reprenons tout d'abord la liste des corrélateurs à trois points donnée en début de chapitre ([Eq. IV.9](#)) :

$$\begin{aligned}
C_{ij}^{\theta, PV_\mu P}(t, t_i) &= \sum_{\vec{x}, \vec{y}} \langle P_{i,hs}(t) | V_{\mu,hs}(t_i) | P_{j,cs}^{\dagger\theta}(0) \rangle, \\
C_{ij}^{\theta, PA_k V_l}(t, t_i) &= \sum_{\vec{x}, \vec{y}} \langle P_{i,hs}(t) | A_{k,hs}(t_i) | V_{j,l,cs}^{\dagger\theta}(0) \rangle.
\end{aligned}
\tag{IV.34}$$

Nous avons donc pour une combinaison de *smearing* donnée (indices i et j), à la première ligne, quatre corrélateurs (indice μ , coordonnées d'espace-temps), et à la deuxième neuf corrélateurs (indices k et l pour les coordonnées d'espace uniquement). Cependant, avec les conditions d'isotropie en espace que possède le réseau, nous allons pouvoir regrouper certains corrélateurs sans changer la physique, tout en diminuant les incertitudes statistiques. Ainsi nous aurons :

$$\begin{aligned}
C_{ij}^{\theta, PV_0 P}(t, t_i) &\equiv C_{ij}^{\theta, PV_0 P}(t, t_i), & C_{ij}^{\theta, PVP}(t, t_i) &\equiv \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 C_{ij}^{\theta, PV_k P}(t, t_i), \\
C_{ij}^{\theta, PAVA}(t, t_i) &\equiv \frac{i}{3} \sum_{k=1}^3 C_{ij}^{\theta, PA_k V_k}(t, t_i), & C_{ij}^{\theta, PAVB}(t, t_i) &\equiv \frac{i}{6} \sum_{\substack{k=1, \\ l \neq k}}^3 C_{ij}^{\theta, PA_k V_l}(t, t_i).
\end{aligned} \tag{IV.35}$$

Nous pouvons noter que, dans le cas axial spatial, la contribution non nulle du corrélateur calculé sur réseau est la partie imaginaire, c'est pourquoi nous multiplions par i ici. Nous nous plaçons ensuite à la limite $0 \ll t_i \ll (t - t_i)$, limite notée « $\xrightarrow{\ell}$ » ou simplement « ℓ » dans la suite, pour laquelle la contribution au corrélateur des états fondamentaux du hadron initial et du hadron final est correctement isolée. En extrayant l'élément de matrice comme nous l'avons vu dans la partie I. 3.3, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{C_{ij}^{\theta, PV_0 P}(t, t_i) \sqrt{Z^{\theta, D_s} Z^{H_s}}}{C^{\theta, D_s}(t_i) C^{H_s}(t - t_i)} &\xrightarrow{\ell} \mathcal{M}_0, & \frac{C_{ij}^{\theta, PAVA}(t, t_i) \sqrt{Z^{\theta, D_s^*} Z^{H_s}}}{C^{\theta, D_s^*}(t_i) C^{H_s}(t - t_i)} \left(1 + \frac{\theta^2}{m_{D_s^*}^2}\right) &\xrightarrow{\ell} \mathcal{A}, \\
\frac{C_{ij}^{\theta, PVP}(t, t_i) \sqrt{Z^{\theta, D_s} Z^{H_s}}}{C^{\theta, D_s}(t_i) C^{H_s}(t - t_i)} &\xrightarrow{\ell} \mathcal{M}_i, & \frac{C_{ij}^{\theta, PAVB}(t, t_i) \sqrt{Z^{\theta, D_s^*} Z^{H_s}}}{C^{\theta, D_s^*}(t_i) C^{H_s}(t - t_i)} \left(1 + \frac{\theta^2}{m_{D_s^*}^2}\right) &\xrightarrow{\ell} \mathcal{B},
\end{aligned} \tag{IV.36}$$

où $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_i$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont les éléments de matrice hadronique qui seront utilisés pour le calcul des facteurs de forme dans la section IV. 4.1. Pour les éléments de matrice $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, le facteur $1 + \theta^2/m_{D_s^*}^2$ provient, comme nous l'avons vu dans la partie IV. 2.1, de la polarisation du méson D_s^* de spin un ; ce terme ne peut être absorbé sans changer la valeur physique. De plus, du fait de la racine carrée sur le couplage au vide du méson vectoriel, même avec la redéfinition du couplage dans les fonctions à deux points, ce terme aurait tout de même été présent.

Nous représentons dans la Figure IV.6 la fonction de corrélation à trois points (en haut) pour l'élément $\langle D_s(0) | V_0 | D_s \rangle$, ainsi que de l'élément de matrice correspondant (en bas). Cette configuration est bien évidemment non physique, mais elle illustre l'analyse dans un cas simple qui souffre de peu de contaminations et de bruits numériques. De plus, nous verrons dans la section IV. 3.3, que cet élément possède une propriété qui nous permettra une première estimation de la justesse de notre analyse. Dans la section IV. 4.4, nous verrons aussi que notre extrapolation à la masse du quark b fait intervenir les facteurs de forme élastiques qui sont liés à cet élément. L'annexe A.1 présente un corrélateur et un élément de matrice non-élastique.

Sélection du plateau

L'intervalle temporel à notre disposition pour l'étude des fonctions à trois points est réduit à $T/2$, puisque c'est à ce temps que nous avons fixé l'opérateur d'annihilation du méson (voir

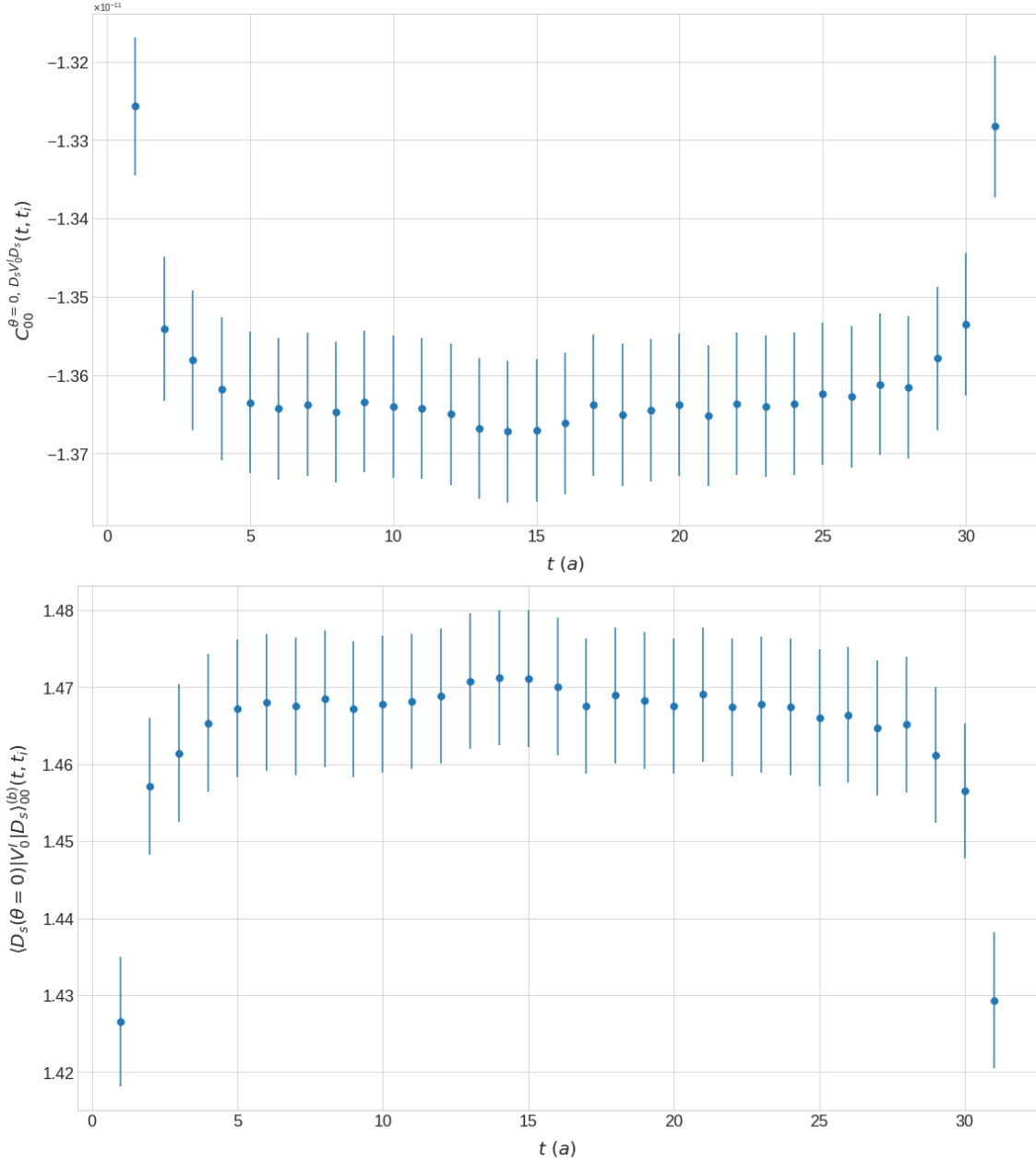


FIGURE IV.6 – Fonction de corrélation à trois points pour un méson D_s se désintégrant en méson D_s , au repos, dans l'ensemble E5(en haut), avec son élément de matrice $\mathcal{M}_0 \equiv \langle D_s(\theta = 0)|V_0^I|D_s \rangle_{00}(t, t_i)$ correspondant (en bas). Le signe négatif de la fonction à trois points est dû aux conventions utilisées par les algorithmes de notre simulation. L'exposant I du courant signifie que ce courant est amélioré tel que décrit dans la section IV. 3.2.

discussion I. 3.3). Maintenant, de manière à satisfaire au mieux la limite d'isolation de l'état fondamental ℓ , nous comprenons que ce sont les points au milieu de l'intervalle $[0, T/2]$, c'est-à-dire $T/4$, qui satisfont au mieux ℓ . Dans la Figure IV.6 (bas), nous voyons que dans une zone

autour de $T/4$, les éléments de matrice semblent avoir un comportement constant, ce qui est bien là une preuve de l'isolement correct de l'état fondamental (des éléments de matrice).

Cette zone est le domaine où nous souhaitons réaliser une régression à l'aide d'une fonction constante pour extraire la valeur des éléments de matrice (constants en fonction du temps). Comme pour les fonctions de corrélation à deux points, la sélection du plateau induit un biais dans les résultats, puisqu'un changement de plateau entraîne un changement du paramètre de la régression qui peut être supérieur à son erreur statistique (voir [IV. 2.3](#)). Nous devons donc, ici aussi (c'est-à-dire pour les fonctions à trois points), chercher un domaine de validité qui donne une régression avec un χ^2 correct, sans que le résultat ne soit trop sensible à une légère modification du choix de plateau. Si une recherche systématique d'un ensemble de plateaux satisfaisant au mieux ces conditions est possible, elle risque de sur-interpréter les fluctuations numériques de notre simulation. Par ailleurs, une analyse visuelle des fonctions de corrélation serait à la fois fastidieuse et surtout serait très approximative. Afin d'avoir une méthode générique, j'ai dans un premier temps tenté de réutiliser les plateaux des fonctions à deux points. Comme nous isolons l'élément de matrice dans les fonctions à trois points avec les corrélateurs à deux points, nous pouvons affirmer qu'à un temps donné, si la contribution de l'état fondamental à la fonction à deux points n'est pas correctement isolée, ce ne sera pas non plus le cas pour l'élément de matrice issu du corrélateur à trois points. Par ailleurs, en reprenant la formule du corrélateur à trois points simplifiée

$$\frac{C^{A\Gamma B}(t, t_i)}{C^A(t_i)C^B(t - t_i)} \xrightarrow{\ell} \propto \langle A|\Gamma|B \rangle, \quad (\text{IV.37})$$

et en donnant les plateaux généraux des corrélateurs à deux points A et B suivant

$$plt_A = [A_{min}, A_{max}] , \quad plt_B = [B_{min}, B_{max}] , \quad (\text{IV.38})$$

nous concluons que l'élément de matrice n'est correctement défini au temps t_i que si $t_i \in plt_A$ et $t - t_i \in plt_B$; cela revient à l'intervalle de validité maximum

$$[\max\{A_{min}, t - B_{max}\} , \min\{A_{max}, t - B_{min}\}] . \quad (\text{IV.39})$$

Malheureusement, les corrélateurs à trois points ont également des fluctuations statistiques, et prendre l'ensemble de ce domaine comme plateau n'aboutit pas, dans la majorité des cas, à une convergence des régressions. La procédure finale que j'ai retenue a été de prendre le milieu de l'intervalle de séparation entre la source et le puits, et de l'étendre symétriquement de quelques unités temporelles de manière itérative. Cependant, pour de nombreux cas, cette solution s'est heurtée à des instabilités et j'ai donc dû choisir, pour ces cas, de ne pas respecter cet estimateur de centre de plateau. Comme pour les fonctions à deux points, les corrélateurs avec différentes valeurs d'impulsion auront les mêmes intervalles de plateau; j'ai donc vérifié que les régressions convergeaient pour toutes les valeurs d'impulsion pour un plateau donné. Pour un calcul complet des erreurs systématiques, la variation de l'extension de ce plateau, comme celle de la variation des plateaux des fonctions à deux points, devrait être prise en compte.

IV. 3.1 GEVP pour les corrélateurs à trois points

Dans la partie [IV. 2.2](#), nous avons vu en quoi consistait la méthode de résolution du GEVP : calcul des valeurs et vecteurs propres (respectivement $\lambda(t, t_0)$ et $\vec{v}(t, t_0)$) et projection de la matrice de *smearing* sur l'état fondamental (représenté par l'indice 1) via

$$\tilde{C}_1(t) = \sum_{i,j} \vec{v}_{1,i}(t, t_0) C_{ij}(t) \vec{v}_{1,j}(t, t_0). \quad (\text{IV.40})$$

L'extension de l'application du GEVP aux fonctions à trois points se fait très simplement et de manière similaire à celle des fonctions à deux points. En effet, un corrélateur à trois points est « relié » à deux corrélateurs à deux points. Ainsi, nous multiplions la fonction à trois points à gauche par le vecteur propre du corrélateur à deux points de l'état final du corrélateur à trois points et à droite par celui correspondant à l'état initial. En projetant le long des vecteurs propres associés à chacun des deux états fondamentaux, nous obtenons

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1^{A\Gamma B}(t, t_i) &= \sum_{i,j} \vec{v}_{1,i}^A(t_{\text{fix}}, t_0) C_{ij}^{A\Gamma B}(t, t_i) \vec{v}_{1,j}^B(t_{\text{fix}}, t_0), \\ C^A(t_{\text{fix}}) \vec{v}^A(t_{\text{fix}}, t_0) &= \lambda^A(t_{\text{fix}}, t_0) C^A(t_0) \vec{v}^A(t_{\text{fix}}, t_0), \\ C^B(t_{\text{fix}}) \vec{v}^B(t_{\text{fix}}, t_0) &= \lambda^B(t_{\text{fix}}, t_0) C^B(t_0) \vec{v}^B(t_{\text{fix}}, t_0), \end{aligned} \quad (\text{IV.41})$$

où t_0 et t_{fix} sont des temps caractéristiques définis plus en détails dans la section [IV. 2.2](#). Pour extraire l'élément de matrice, nous pouvons reprendre l'[Eq. I.62](#), mais en remplaçant par les corrélateurs projetés

$$\frac{\tilde{C}_{ij}^{A\Gamma B}(t, t_i) \sqrt{Z^A Z^B}}{C^A(t_i) C^B(t - t_i)} \xrightarrow{\ell} \langle A | \Gamma | B \rangle. \quad (\text{IV.42})$$

Dans cette équation, les couplages au vide sont bien ceux des fonctions à deux points projetées. À l'inverse de la masse, ils n'ont pas de signification physique particulière et dépendent du *smearing* (rappel de notre discussion en [IV. 2.2](#)).

Réduction accrue des contaminations grâce au GEVP

La [Figure IV.7](#) montre l'évolution du plateau de l'élément de matrice, [Eq. IV.42](#) avec $\Gamma = V$, en fonction des niveaux de *smearing* (identiques à la source et au puits) et pour les corrélateurs projetés. La première remarque à faire est que l'élément de matrice local-local est très contaminé par les états excités⁷. Il ne serait pas possible d'obtenir une valeur physique sans *smearing*, même avec un plateau extrêmement resserré (comme c'était le cas avec les corrélateurs à deux points). Nous pouvons montrer, en effectuant la décomposition spectrale des corrélateurs à deux points et à trois points, que les contaminations des éléments de matrice ne sont pas nécessairement exponentiellement supprimées en temps. Il est ainsi impossible de trouver un domaine où ces

7. Ceci ne se voit qu'à la comparaison avec les corrélateurs non-locaux et les corrélateurs projetés.

contaminations ne seraient plus présentes. C’est pourquoi il faut supprimer ces contaminations avant d’extraire l’élément de matrice, et c’est ce qui est traduit par l’évolution des courbes avec les niveaux croissants de *smearing*.

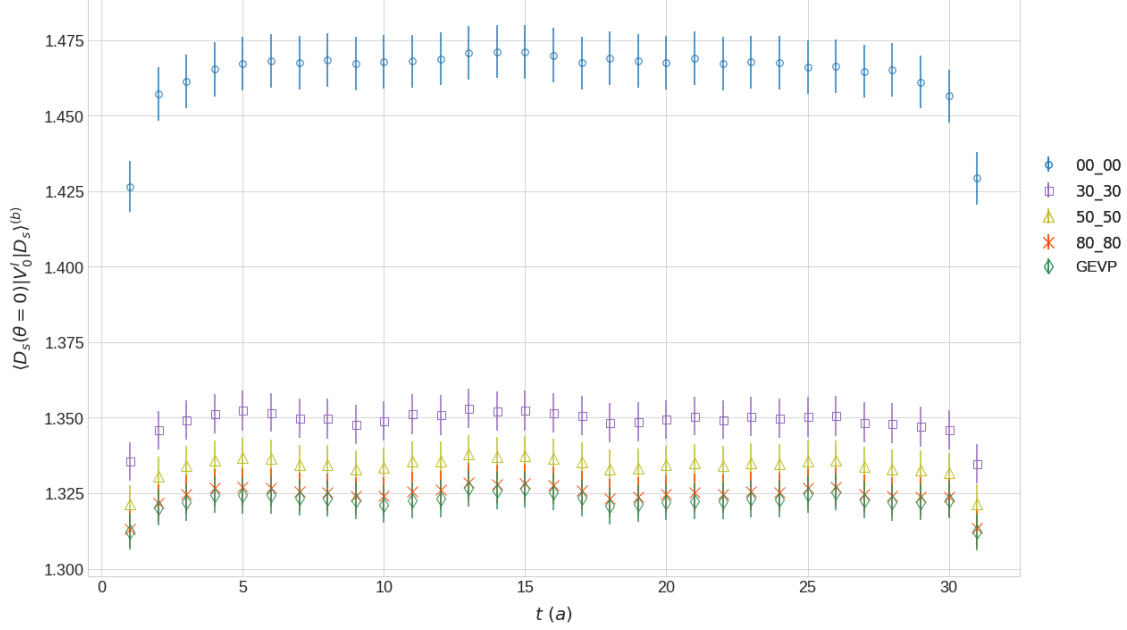


FIGURE IV.7 – Représentation des éléments de matrice $\langle D_s(\theta = 0) | V_0^I | D_s \rangle^{(b)}$ pour des niveaux de *smearing* croissants (des cercles bleus aux croix rouges) ainsi que pour le GEVP (diamants verts). La valeur du plateau de ces élément diminue avec l’augmentation du *smearing* et l’utilisation du GEVP, ce qui montre l’utilité du GEVP pour la suppression des contaminations des états excités.

Contrairement au cas présenté dans la section IV. 2.2, nous observons l’amélioration substantielle qu’apporte le GEVP à la suppression des contaminations. Néanmoins, là où il semble que le seul calcul des corrélateurs 80_80 aurait donné déjà de bons résultats, l’amélioration pourrait être jugée trop faible au regard (i) de l’apport de deux nouveaux hyper-paramètres (t_0 et t_{fix}), (ii) de la sensibilité du GEVP aux fluctuations statistiques et (iii) du coût en temps de calcul de la simulation complète de cette matrice de *smearing*. Mais gardons à l’esprit que ce corrélateur maximallement « smearé » n’isole pas toujours parfaitement la contribution des états fondamentaux. De plus, si nous n’avions que cet élément, il serait difficile de s’assurer, sans référence (00_00 et GEVP), que les contaminations soient suffisamment réduites. Finalement, le GEVP nous donne une indication précieuse sur les contaminations encore présentes dans les fonctions de corrélation à trois points projetées.

Les contaminations des états excités sont estimées de manière analogue à ce que nous avons vu pour les corrélateurs à deux points (IV. 2.2). Ainsi, l’erreur sur l’élément de matrice $\langle A | \Gamma | B \rangle$ déduite du corrélateur $C^{A\Gamma B}(t, t_i)$ est donnée par

$$\langle A | \Gamma | B \rangle = \langle A | \Gamma | B \rangle^{eff} + \mathcal{O} \left(\exp \left(-\Delta E_{N,1}^A t_i \right), \exp \left(-\Delta E_{N,1}^B (t - t_i) \right) \right) ; \quad (\text{IV.43})$$

cette formule est issue de [102] qui utilise une partie des démonstrations établies dans [99]. Comme précédemment, $N = 4$ représente la taille de la matrice de *smearing* et l'indice 1 représente l'état fondamental. Notons que nous pourrions aussi étudier l'élément de matrice de la transition d'un état n vers un état n' , mais soulignons que c'est l'élément fondamental-fondamental qui connaît la suppression la plus forte des contaminations. En outre, si nous avons marqué la différence entre éléments de matrice effectif et théorique, il est clair qu'à l'instar de la masse, nous ne ferons plus la distinction dans la suite, puisque seul l'élément effectif peut être obtenu sur réseau.

Pour résumer, le GEVP est une méthode efficace de suppression des contaminations des états excités. Elle permet de mener une analyse plus soignée (que l'emploi de corrélateurs *smearés* ou local-local) dans l'extraction des éléments de matrice hadronique. Ceci n'est cependant vrai qu'à la condition où les fonctions de corrélation *smearées* sont suffisamment lisses. Pour les ensembles N6 et O7, ce critère n'a pas été jugé satisfaisant et les résultats issus de ces deux ensembles sont donc pris pour le corrélateur 80_80. Nous allons voir, à présent, la suite de la méthode d'amélioration de Symanzik, pour continuer de réduire l'incertitude systématique sur ces éléments de matrice et donc ainsi sur les facteurs de forme hadroniques.

IV. 3.2 Amélioration de Symanzik appliquée aux champs interpolants

Nous reprenons à présent la discussion de la section I. 2.3, dans laquelle nous avons vu comment l'ajout d'un terme dit de *clover* permettait d'améliorer l'erreur de discrétisation dans l'action fermionique en $\mathcal{O}(a^2)$. Nous avons noté en effet que cette amélioration, suffisante pour les quantités *on-shell* comme la masses des mésons, ne suffisait pas pour les quantités comme les éléments de matrice hadronique. Nous profitons également de cette discussion pour voir comment ces éléments de matrice sont renormalisés pour être interprétables physiquement.

Pour rappel, la liste des courants utiles à notre analyse (vectoriel, axial, pseudoscalaire et tensoriel) est

$$\begin{aligned} V_\mu(n) &= \bar{\psi}(n)\gamma_\mu\psi(n), & A_\mu(n) &= \bar{\psi}(n)\gamma_\mu\gamma_5\psi(n), \\ P(n) &= \bar{\psi}(n)\gamma_5\psi(n), & T_{\mu\nu}(n) &= \bar{\psi}(n)\sigma_{\mu\nu}\psi(n), \end{aligned} \tag{IV.44}$$

avec $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ et où nous avons omis l'impulsion réseau θ et les indices de saveur pour simplifier la discussion (voir les Eq. IV.8 et Eq. IV.9 pour plus de détails). Le courant tensoriel $T_{\mu\nu}$ n'a pas encore été discuté jusqu'à maintenant, car il ne fait pas partie de la liste des courants dont nous avons directement besoin pour les calculs des facteurs de forme hadroniques (qui nous intéressent dans notre étude). Il va cependant nous servir ci-dessous pour l'amélioration des autres courants (il en va de même pour P).

Amélioration des courants V et A

La procédure de Symanzik consiste à se donner, pour un opérateur à améliorer, une base d'opérateurs de dimension supérieure qui satisfont les symétries de l'opérateur original. Puis, ces opérateurs d'ordre supérieur vont être ajoutés à l'opérateur initial, pondérés par des coefficients déterminés de manière à supprimer les erreurs de discrétisation à un ordre donné. Ainsi, pour le courant axial, la liste des opérateurs de dimension quatre qui permettent de supprimer les erreurs $\mathcal{O}(a)$ sont

$$\begin{aligned}(A_1)_\mu(n) &= \frac{1}{2}\bar{\psi}(n)\gamma_5\sigma_{\mu\nu}\left(\vec{D}_\nu(x) - \overleftarrow{D}_\nu(x)\right)\psi(n), \\(A_2)_\mu(n) &= \frac{1}{2}\partial_\mu\left(\bar{\psi}(n)\gamma_5\psi(n)\right), \\(A_3)_\mu(n) &= \frac{m}{2}\bar{\psi}(n)\gamma_\mu\gamma_5\psi(n).\end{aligned}\tag{IV.45}$$

Cette série, comme pour l'amélioration de l'action, peut être réduite en réécrivant A_1 en fonction de A_2 et A_3 et en réabsorbant A_3 dans la définition de la constante de renormalisation axiale (que nous verrons dans la suite). Ainsi, le seul terme restant est $A_2 = \partial_\mu P(n)/2$.

En ce qui concerne le courant vectoriel, nous avons la même liste d'opérateurs que dans le cas axial, à l'exception de la matrice γ_5 (caractéristique du cas axial), soit

$$\begin{aligned}(V_1)_\mu(n) &= \frac{1}{2}\bar{\psi}(n)\sigma_{\mu\nu}\left(\vec{D}_\nu(x) - \overleftarrow{D}_\nu(x)\right)\psi(n), \\(V_2)_\mu(n) &= \frac{1}{2}\partial_\mu\left(\bar{\psi}(n)\psi(n)\right), \\(V_3)_\mu(n) &= \frac{m}{2}\bar{\psi}(n)\gamma_\mu\psi(n).\end{aligned}\tag{IV.46}$$

Comme précédemment, l'opérateur V_3 va être réabsorbé dans la constante de renormalisation vectorielle.

La combinaison des opérateurs V_1 et V_2 , à l'aide de l'équation du mouvement, nous donne l'opérateur $\partial_\nu T_{\mu\nu}$ et, au final, pour les deux courants d'intérêt, nous avons

$$\begin{aligned}V_\mu^I(n) &= V_\mu(n) + ac_V\hat{\partial}_\nu T_{\mu\nu}(n), \\A_\mu^I(n) &= A_\mu(n) + ac_A\hat{\partial}_\mu P(n),\end{aligned}\tag{IV.47}$$

où la dérivée discrétisée symétrique $\hat{\partial}_\mu$ est définie par :

$$\hat{\partial}_\mu f(n) = \frac{1}{2}(\partial_\mu^* + \partial_\mu)f(n) = (f(n + \hat{\mu}) - f(n - \hat{\mu}))/2a.\tag{IV.48}$$

Les coefficients c_V et c_A sont des analogues à c_{sw} (voir [I. 2.3](#)) et doivent être ajustés de manière à supprimer correctement les erreurs $\mathcal{O}(a)$. La détermination non-perturbative du coefficient c_A

peut être trouvée en [103], la détermination perturbative de c_V ⁸ en [104], et ces coefficients valent

$$\begin{aligned} c_V &= -C_F \times 0.01225 \times g_0^2 + \mathcal{O}(g_0^4), \\ c_A &= -C_F \times 0.00567 \times g_0^2 \times \frac{1 - 0.4485g_0^2}{1 - 0.8098g_0^2} + \mathcal{O}(g_0^4), \\ \text{avec } C_F &= \frac{N^2 - 1}{2N} = \frac{4}{3} \quad \text{dans } SU(N = 3). \end{aligned} \tag{IV.49}$$

Renormalisation des éléments de matrice hadronique

Comme vu dans le chapitre II, la renormalisation des éléments de matrice (calculés dans cette partie) est une étape indispensable pour supprimer les contributions et les dépendances non physiques de ces quantités (dans les *cut-off* de la régularisation qu'est la LQCD).

La renormalisation des courants vectoriel et axial se fait grâce à la procédure de renormalisation suivante, qui utilise une constante de renormalisation multiplicative :

$$\begin{aligned} V_\mu^{I(r)} &= Z_V (1 + b_V am) V_\mu^I, \\ A_\mu^{I(r)} &= Z_A (1 + b_A am) A_\mu^I. \end{aligned} \tag{IV.50}$$

L'exposant r indique ici que la quantité est renormalisée, mais le plus souvent nous l'omettrons pour éviter d'alourdir les notations. La ressemblance de ces deux équations vient de la généralité de la méthode de renormalisation, qui tronque les erreurs de discrétisation supérieures à $\mathcal{O}(a)$, et dont notre courant amélioré est exempt. Si la renormalisation est simple à appliquer dans notre analyse, le calcul des constantes intervenants dans ces équations reste complexe. Les constantes b_V et b_A ont été calculées perturbativement en [104] et valent

$$\begin{aligned} b_V &= 1 + C_F \times 0.11492 \times g_0^2, \\ b_A &= 1 + C_F \times 0.11414 \times g_0^2. \end{aligned} \tag{IV.51}$$

Les constantes de renormalisation Z_V et Z_A , quant à elles, ont toutes deux été calculées non perturbativement en [105], avec la précision sur Z_A améliorée de deux termes en [106] :

$$\begin{aligned} Z_V &= \frac{1 - 0.6715 \times g_0^2 + 0.0388 \times g_0^4}{1 - 0.5421 \times g_0^2}, \\ Z_A &= 1 - 0.116 \times g_0^2 + 0.011 \times g_0^4 - 0.072 \times g_0^6. \end{aligned} \tag{IV.52}$$

8. Un développement non-perturbatif n'a pas pu être trouvé pour c_V .

Masses invariantes

La masse m , entrant dans l'amélioration de nos courants, est la masse⁹ (introduite en [IV. 1.1](#)) :

$$m = \frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{2\kappa_{\text{cr}}}. \quad (\text{IV.53})$$

En pratique, le calcul de κ_{cr} peut parfois donner lieu à des incertitudes systématiques incontrôlées pour le calcul de la masse m . Par conséquent, nous avons préféré calculer la masse m^{AWI} (ou m^{PCAC}) qui provient de l'*Identité de Ward Axiale* (AWI) aussi notée *Partially Conserved Axial Current* (PCAC). Ces masses sont reliées par

$$\begin{aligned} m^{\text{PCAC}} &= Zm, \\ \text{avec } Z(g_0^2) &= \frac{Z_m Z_P}{Z_A} = 1 + 0.090514 \times g_0^2, \end{aligned} \quad (\text{IV.54})$$

où cette deuxième équation est tirée de [\[107\]](#), avec Z_P et Z_m les constantes de renormalisation respectivement du courant pseudo-scalaire et de la masse des quarks.

Pour obtenir cette masse PCAC, il faut partir de l'identité de Ward axiale

$$\langle (\partial_\mu A_\mu) O \rangle = 2m \langle P(x) O \rangle \quad \forall O \mid \langle P(x) O \rangle \neq 0, \quad (\text{IV.55})$$

où l'indice μ , ici, n'est pas sommé, mais fixé. La version discrétisée de cette équation nécessite les courants A^I et P dérivés précédemment. Une solution non triviale de l'[Eq. IV.55](#) est obtenue en faisant le choix $O = P$ et $\mu = 0$, conduisant à

$$\begin{aligned} m_{12}^{\text{AWI}} &= \frac{\langle (\partial_0 A_0^I(n)) P(0) \rangle}{2 \langle P(n) P(0) \rangle} = \frac{\langle (\hat{\partial}_0 A_0(n) + c_A a \hat{\Delta}_{0,0} P(n)) P(0) \rangle}{2 \langle P(n) P(0) \rangle} \\ &= \frac{\hat{\partial}_0 C_{A_0 P}(t) + c_A a \partial_0^* C_{PP}(t)}{2 C_{PP}(t)}. \end{aligned} \quad (\text{IV.56})$$

Les indices 1 et 2 de la masse PCAC sont les deux saveurs qui peuvent être identiques et qui composent les courants A et P .

Le [Tableau IV.11](#) rassemble toutes les valeurs des masses PCAC que nous avons calculées directement. Cependant, si nous voulons calculer l'amélioration du courant dans $\langle D_s(\theta) | V_0 | H_s \rangle$, voir [Eq. IV.50](#), nous avons besoin de la masse PCAC m_{hc}^{PCAC} pour les saveurs charmées et lourdes (quarks h_i dans notre simulation). Pour cela, il suffit d'utiliser la relation

$$m_{chi}^{\text{PCAC}} = m_{shi}^{\text{PCAC}} + m_{sc}^{\text{PCAC}} - m_{ss}^{\text{PCAC}}. \quad (\text{IV.57})$$

Cette relation, qui peut être démontrée avec $m_{ij}^{\text{PCAC}} = (m_i^{\text{PCAC}} + m_j^{\text{PCAC}})/2$, conduit aux valeurs présentées dans le [Tableau IV.12](#).

9. Si nous souhaitions obtenir la masse des quarks renormalisée, nous aurions à utiliser les constantes de renormalisation (Z_A et Z_P) dans le schéma de renormalisation adéquat (probablement $\overline{\text{MS}}$). Cette masse renormalisée serait alors donnée par $m^{(r)} = (Z_A Z)/(Z_P) \times m$, où Z est une constante de correspondance (voir ci-après).

id	m^{PCAC}						
	m_{ss}	m_{sc}	m_{sh1}	m_{sh2}	m_{sh3}	m_{sh4}	m_{sh5}
A5	0.02040(6)	0.1530(1)	0.2095(2)	0.2910(2)	0.4046(2)	0.5783(3)	0.8484(4)
B6	0.02031(3)	0.1533(1)	0.2104(1)	0.2783(2)	0.4082(2)	0.5868(3)	0.8689(3)
E5	0.01970(8)	0.1357(2)	0.1833(3)	0.2484(3)	0.3403(4)	0.4744(5)	0.6713(6)
F6	0.01877(8)	0.1354(2)	0.1837(2)	0.2495(3)	0.3405(4)	0.4824(2)	0.6870(3)
F7	0.01944(6)	0.1362(2)	0.1847(2)	0.2491(2)	0.3391(3)	0.4686(3)	0.6505(4)
G8	0.02000(6)	0.1374(1)	0.13(5)	0.1851(1)	0.19(7)	0.2502(1)	0.3(1)
N6	0.01550(6)	0.0986(2)	0.1336(2)	0.1726(3)	0.2288(3)	0.3060(4)	0.4117(4)
O7	0.01529(4)	0.09934(9)	0.1316(1)	0.1730(1)	0.2310(2)	0.3065(2)	0.4118(3)

TABLEAU IV.11 – Liste des valeurs calculées de m^{PCAC} via l’Eq. IV.56. Les deux premières colonnes correspondent aux masses calculées pour les couples de saveurs ss et sc . Les colonnes indicées sh_i correspondent aux masses pour les différentes valeurs de quark h_i simulées (voir [Tableau IV.5](#)). Les incertitudes données ici sont statistiques et déduites de nos configurations.

Courants améliorés en pratique

Le coût de production des données utilisées dans notre étude est largement dominé par la simulation des corrélateurs à trois points. De plus, le courant tensoriel a un total de seize composantes, soit trois composantes de plus que pour le reste de nos éléments de matrice. En fait, nous pouvons réduire le nombre de composantes à calculer, en distinguant les composantes temporelles et spatiales, pour ré-écrire l’amélioration du courant vectoriel comme :

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} V_0^{I,(r)} = Z_V (1 + (b_V/Z)am_{12}^{PCAC}) \left(V_0 + ac_V \sum_{\mu} \hat{\partial}_{\mu} T^{0\mu} \right) \\ V^{I,(r)} = Z_V (1 + (b_V/Z)am_{12}^{PCAC}) \left(V + ac_V \frac{1}{3} \sum_{i,\mu} \hat{\partial}_{\mu} T^{i\mu} \right) \end{cases} , \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} V_0^{I,(r)} = Z_V (1 + (b_V/Z)am_{12}^{PCAC}) \left(V_0 + ac_V \sum_i \hat{\partial}_i T^{0i} \right) \\ V^{I,(r)} = Z_V (1 + (b_V/Z)am_{12}^{PCAC}) \left(V + ac_V \frac{1}{3} \left(\sum_i \hat{\partial}_0 T^{i0} + \sum_{i,j \neq i} \hat{\partial}_j T^{ij} \right) \right) \end{cases} , \quad (IV.58) \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} V_0^{I,(r)} = Z_V (1 + (b_V/Z)am_{12}^{PCAC}) (V_0 - ac_V \sum_i i \hat{\partial}_i T^{i0}) \\ V^{I,(r)} = Z_V (1 + (b_V/Z)am_{12}^{PCAC}) \left(V + ac_V \frac{1}{3} \hat{\partial}_0 T^{i0} \right) \end{cases} , \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} V_0^{I,(r)} = Z_V (1 + (b_V/Z)am_{12}^{PCAC}) (V_0 - iac_V 3\theta T^0) \\ V^{I,(r)} = Z_V (1 + (b_V/Z)am_{12}^{PCAC}) \left(V + ac_V \hat{\partial}_0 T^0 \right) \end{cases} .
\end{aligned}$$

Dans cette série d’égalités, la première simplification est liée au caractère totalement antisymétrique du courant tensoriel. En effet, le réseau et la configuration cinématique de l’échange d’impulsion au niveau du courant obéissent à la symétrie $H(3)$. Cela signifie qu’une moyenne sur les indices spatiaux du courant tensoriel est possible. De plus, en utilisant la définition de $\sigma_{\mu\nu}$ (qui compose

id	m^{PCAC}					
	m_{cc}	m_{ch_1}	m_{ch_2}	m_{ch_3}	m_{ch_4}	m_{ch_5}
A5	0.2652(2)	0.3217(2)	0.4032(3)	0.5168(3)	0.6905(3)	0.9606(4)
B6	0.2660(2)	0.3230(2)	0.3910(3)	0.5209(3)	0.6995(3)	0.9816(4)
E5	0.2319(3)	0.2795(4)	0.3446(4)	0.4366(5)	0.5707(5)	0.7676(6)
F6	0.2332(3)	0.2815(3)	0.3474(4)	0.4384(4)	0.5802(3)	0.7848(4)
F7	0.2335(2)	0.2820(3)	0.3464(3)	0.4364(3)	0.5659(4)	0.7478(4)
G8	0.2347(2)	0.23(5)	0.2824(2)	0.28(7)	0.3475(2)	0.4(1)
N6	0.1663(3)	0.2012(3)	0.2402(3)	0.2964(4)	0.3737(4)	0.4793(5)
O7	0.1681(1)	0.2003(2)	0.2418(2)	0.2997(2)	0.3752(3)	0.4806(3)

TABLEAU IV.12 – Liste des valeurs pour m^{PCAC} pour les couples de saveurs charmée-lourde cc et ch_i obtenues à partir du [Tableau IV.11](#) et de l'[Eq. IV.57](#). Les erreurs sont statistiques et sont calculées sur la dispersion des bins.

$T_{\mu\nu}$: [Eq. IV.44](#)) nous utilisons $T^{\mu\mu} = 0$ et $T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}$ pour simplifier nos équations. À la deuxième ligne, nous avons simplement supprimé les composantes nulles des sommes. À la troisième ligne, la somme sur i et j , nulle par symétrie, a été retirée, et l'application de la dérivée spatiale sur le tenseur fait apparaître l'impulsion imaginaire $i\theta$ (le point de départ est la transformée de Fourier du corrélateur à trois points). L'inversion des indices fait apparaître le signe moins pour la composante zéro. Finalement, à la dernière ligne, nous réécrivons ces équations en utilisant la moyenne sur les composantes spatiales, soit $(1/3) \times \sum_i T^{i0} = T^0$. Cette réécriture de l'amélioration du courant vectoriel permet ainsi de ne calculer que trois des seize composantes du courant tensoriel.

Pour l'amélioration du courant axial, nous avons besoin, en principe, du courant $P(n)$ comme vu dans l'[Eq. IV.47](#), ou plus précisément, de ses dérivées partielles. Cependant, du fait que nous n'avons considéré dans nos analyses que le courant axial dans les directions d'espace sans échange d'impulsion, les éléments de matrice $\mathcal{A}(\theta = 0)$ et $\mathcal{B}(\theta = 0)$ ne souffrent pas, en réalité, d'erreurs d'ordre $\mathcal{O}(a)$ (un terme θ venant avec la dérivée de la correction d'ordre un). Néanmoins, si nous n'avons pas amélioré le courant axial, celui-ci a tout de même été correctement renormalisé d'après la procédure décrite ci-dessus, soit $A^{(r)} = Z_A (1 + (b_A/Z) am_{12}^{PCAC} A)$. L'amélioration du courant axial serait par contre nécessaire pour $\theta \neq 0$. À terme, l'amélioration complète de Symanzik de ce courant constitue l'une des améliorations possibles de notre analyse, sous réserve que nous puissions obtenir des signaux (à recul non nul) moins bruyants qu'ils ne le sont dans nos données.

Un dernier point qu'il nous faut prendre en compte est que Z et $b_{V/A}$, ainsi combinés, ne sont pas à l'ordre g_0^2 . Il nous faut donc prendre les formulations suivantes pour leurs utilisations :

$$\begin{aligned} b_A/Z &= 1 + (0.11414 \times C_F - 0.090514) \times g_0^2, \\ b_V/Z &= 1 + (0.11492 \times C_F - 0.090514) \times g_0^2. \end{aligned} \tag{IV.59}$$

Pour conclure, cette suppression des erreurs de discrétisation linéaire nous permet de réaliser une régression plus complète sur l'ensemble de nos réseaux. Nous aboutirons donc aux résultats physiques qui nous intéressent avec un plus grand contrôle des erreurs systématiques.

IV. 3.3 Résultats pour les éléments de matrice

Nous présentons ici les principaux résultats obtenus avec l'ensemble E5. Par souci de complétude, les résultats pour les autres ensembles sont compilés en A.2.

Pour commencer, le [Tableau IV.13](#) présente les résultats obtenus pour les quatre éléments de matrice renormalisées (voir [Eq. IV.50](#)) d'intérêt, à savoir $\mathcal{M}_0^{I,(r)}$, $\mathcal{M}_i^{I,(r)}$, $\mathcal{A}^{(r)}$ et $\mathcal{B}^{(r)}$ (définis en [Eq. IV.36](#)). Soulignons que seuls les deux premiers éléments de matrice (ceux avec l'exposant I) ont été améliorés en $\mathcal{O}(a^2)$, comme mentionné en fin de discussion [IV. 3.2](#). Dans ce tableau, les deux premiers éléments de matrice dépendent des mêmes corrélateurs, ce qui implique que les centres des plateaux (à trois points) sont les mêmes. Cependant, l'extension symétrique du plateau (ou son centre) à pu être choisi différemment pour les éléments $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_i$ ¹⁰. La première remarque est qu'à une masse de quark lourd donnée, la dépendance en θ semble être polynomiale croissante (nous y reviendrons dans la section [IV. 4.2](#)). En deuxième lieu, nous pouvons voir une dépendance, également croissante, en la masse du quark lourd, i.e. κ_h décroissant. Nous pouvons remarquer que les éléments $\mathcal{M}_i^{I,(r)}$ et $\mathcal{B}^{(r)}$ sont très faibles, car pour certains courants, lors du moyennage sur les composantes de spin, les éléments se compensent partiellement ; malheureusement, si les valeurs centrales se compensent, les incertitudes s'additionnent. Le facteur cinématique explique cette difficulté à extraire certains éléments de matrice hadronique, qui doivent être égaux à zéro à recul nul, et qui entraînent évidemment une incertitude relative très élevée.

10. Si je n'ai pas exclu de mon analyse la possibilité que les choix de plateau des fonctions $\langle PP \rangle$ diffèrent de ceux des fonctions $\langle VV \rangle$, ces plateaux restent le plus souvent identiques. Ainsi, pour les éléments $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, nous avons, le plus souvent, le même centre pour les plateaux et une extension identique pour ces deux éléments, mais qui diffèrent des deux premiers.

κ_h	θ	$\mathcal{M}_0^{I,(r)}$	plt	$\mathcal{M}_t^{I,(r)}$	plt	$\mathcal{A}^{(r)}$	plt	$\mathcal{B}^{(r)}$	plt
$\kappa_c = 0.127240$	0.000000	1.260(6)	[10, 18]	0.003(1)	[13, 27]	1.172(9)	[7, 15]	0.004(3)	[7, 19]
	0.125000	1.262(6)	[10, 18]	0.01153(7)	[13, 27]	1.174(9)	[7, 15]	0.004(3)	[7, 19]
	0.250000	1.268(6)	[10, 18]	0.0232(1)	[13, 27]	1.181(9)	[7, 15]	0.004(3)	[7, 19]
	0.437500	1.284(5)	[10, 18]	0.0411(3)	[13, 27]	1.200(9)	[7, 15]	0.005(3)	[7, 19]
	0.625000	1.307(6)	[10, 18]	0.0598(4)	[13, 27]	1.229(9)	[7, 15]	0.006(4)	[7, 19]
	0.875000	1.345(6)	[10, 18]	0.0863(6)	[13, 27]	1.28(1)	[7, 15]	0.009(5)	[7, 19]
	1.062500	1.375(7)	[10, 18]	0.1073(7)	[13, 27]	1.31(1)	[7, 15]	0.013(5)	[7, 19]
$\kappa_{h_1} = 0.123874$	0.000000	1.354(6)	[12, 21]	-0.002(1)	[12, 21]	1.26(1)	[8, 15]	-0.001(3)	[7, 18]
	0.125000	1.356(6)	[12, 21]	0.01280(9)	[12, 21]	1.26(1)	[8, 15]	-0.000(3)	[7, 18]
	0.250000	1.363(6)	[12, 21]	0.0257(2)	[12, 21]	1.27(1)	[8, 15]	-0.000(4)	[7, 18]
	0.437500	1.381(6)	[12, 21]	0.0456(3)	[12, 21]	1.29(1)	[8, 15]	-0.000(4)	[7, 18]
	0.625000	1.408(6)	[12, 21]	0.0663(4)	[12, 21]	1.33(1)	[8, 15]	0.001(5)	[7, 18]
	0.875000	1.452(7)	[12, 21]	0.0955(6)	[12, 21]	1.38(1)	[8, 15]	0.003(6)	[7, 18]
	1.062500	1.485(8)	[12, 21]	0.1186(8)	[12, 21]	1.42(1)	[8, 15]	0.006(7)	[7, 18]
$\kappa_{h_2} = 0.119457$	0.000000	1.455(7)	[12, 24]	0.003(1)	[12, 24]	1.37(2)	[8, 16]	-0.005(4)	[7, 19]
	0.125000	1.457(7)	[12, 24]	0.0141(1)	[12, 24]	1.37(2)	[8, 16]	-0.005(4)	[7, 19]
	0.250000	1.465(7)	[12, 24]	0.0284(2)	[12, 24]	1.38(1)	[8, 16]	-0.005(5)	[7, 19]
	0.437500	1.486(7)	[12, 24]	0.0503(4)	[12, 24]	1.40(1)	[8, 16]	-0.005(5)	[7, 19]
	0.625000	1.516(7)	[12, 24]	0.0733(5)	[12, 24]	1.44(2)	[8, 16]	-0.005(6)	[7, 19]
	0.875000	1.565(9)	[12, 24]	0.1059(7)	[12, 24]	1.50(2)	[8, 16]	-0.004(8)	[7, 19]
	1.062500	1.60(1)	[12, 24]	0.1318(9)	[12, 24]	1.55(2)	[8, 16]	-0.002(9)	[7, 19]
$\kappa_{h_3} = 0.113638$	0.000000	1.575(9)	[13, 23]	0.005(1)	[13, 23]	1.50(2)	[9, 17]	-0.006(6)	[6, 20]
	0.125000	1.578(9)	[13, 23]	0.0158(1)	[13, 23]	1.51(2)	[9, 17]	-0.006(6)	[6, 20]
	0.250000	1.586(8)	[13, 23]	0.0318(2)	[13, 23]	1.52(2)	[9, 17]	-0.006(6)	[6, 20]
	0.437500	1.609(9)	[13, 23]	0.0564(4)	[13, 23]	1.54(2)	[9, 17]	-0.006(7)	[6, 20]
	0.625000	1.642(9)	[13, 23]	0.0822(6)	[13, 23]	1.59(2)	[9, 17]	-0.006(8)	[6, 20]
	0.875000	1.69(1)	[13, 23]	0.1190(9)	[13, 23]	1.66(2)	[9, 17]	-0.01(1)	[6, 20]
	1.062500	1.73(1)	[13, 23]	0.148(1)	[13, 23]	1.71(2)	[9, 17]	-0.01(1)	[6, 20]
$\kappa_{h_4} = 0.106031$	0.000000	1.71(1)	[13, 22]	-0.005(2)	[13, 22]	1.66(3)	[12, 19]	-0.009(8)	[7, 20]
	0.125000	1.72(1)	[13, 22]	0.0178(2)	[13, 22]	1.66(3)	[12, 19]	-0.009(8)	[7, 20]
	0.250000	1.72(1)	[13, 22]	0.0358(3)	[13, 22]	1.68(3)	[12, 19]	-0.010(8)	[7, 20]
	0.437500	1.75(1)	[13, 22]	0.0636(5)	[13, 22]	1.72(3)	[12, 19]	-0.011(9)	[7, 20]
	0.625000	1.78(1)	[13, 22]	0.0928(8)	[13, 22]	1.77(3)	[12, 19]	-0.01(1)	[7, 20]
	0.875000	1.84(1)	[13, 22]	0.134(1)	[13, 22]	1.86(3)	[12, 19]	-0.01(1)	[7, 20]
	1.062500	1.89(2)	[13, 22]	0.168(1)	[13, 22]	1.94(3)	[12, 19]	-0.02(2)	[7, 20]
$\kappa_{h_5} = 0.096555$	0.000000	1.86(1)	[17, 24]	-0.003(2)	[17, 24]	1.84(3)	[14, 21]	-0.000(9)	[7, 20]
	0.125000	1.86(1)	[17, 24]	0.0196(2)	[17, 24]	1.85(3)	[14, 21]	-0.000(9)	[7, 20]
	0.250000	1.87(1)	[17, 24]	0.0395(3)	[17, 24]	1.86(3)	[14, 21]	-0.00(1)	[7, 20]
	0.437500	1.90(1)	[17, 24]	0.0701(6)	[17, 24]	1.91(3)	[14, 21]	-0.00(1)	[7, 20]
	0.625000	1.94(1)	[17, 24]	0.1025(9)	[17, 24]	1.99(3)	[14, 21]	-0.00(1)	[7, 20]
	0.875000	2.00(2)	[17, 24]	0.149(1)	[17, 24]	2.11(3)	[14, 21]	-0.00(2)	[7, 20]
	1.062500	2.05(2)	[17, 24]	0.186(2)	[17, 24]	2.20(4)	[14, 21]	-0.01(2)	[7, 20]

TABLEAU IV.13 – Liste des valeurs des éléments de matrice calculés dans l'ensemble E5, après moyennage sur les valeurs positives et négatives de θ (voir plus loin). Ces éléments sont renormalisés, avec les éléments $\mathcal{M}$ améliorés. Les plateaux sont indiqués entre crochets, et les erreurs statistiques proviennent de l'écart sur les bins.

Moyenne sur les valeurs positives et négatives de θ

Nous avons décidé, pour réduire l'incertitude, mais également parce que nous n'avons besoin que du carré de θ , d'effectuer la moyenne des résultats sur les valeurs de θ positives et négatives. En effet, pour rejoindre le formalisme utilisé en physique expérimentale et en QCD perturbative, nous exprimons nos quantités (sections efficaces et facteurs de forme définies en III. 1) en fonction de w , c'est-à-dire du recul associé à l'impulsion θ . Le recul est défini comme un produit des vitesses des mésons initial ($v_{H_s} = (m_{H_s}, \vec{0})/m_{H_s}$) et final ($v_{D_s^{(*)}} = (E_{D_s^{(*)}}, \vec{p}_{D_s^{(*)}})/m_{D_s^{(*)}}$), soit $w = E_{D_s^{(*)}}/m_{D_s^{(*)}}$. Nous pouvons réécrire w en utilisant la relation de dispersion $E_{D_s^{(*)}}^2 = m_{D_s^{(*)}}^2 + \vec{p}_{D_s^{(*)}}^2$, ce qui conduit à

$$E_{D_s^{(*)}}^2 = m_{D_s^{(*)}}^2 + 3 \left(\frac{\theta\pi}{L} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{E_{D_s^{(*)}}^2}{m_{D_s^{(*)}}^2} = 1 + \frac{3\theta^2\pi^2}{m_{D_s^{(*)}}^2 L^2}. \quad (\text{IV.60})$$

Soit finalement, pour le méson D_s

$$w = \sqrt{1 + \frac{3\theta^2\pi^2}{m_{D_s}^2 L^2}}. \quad (\text{IV.61})$$

Trois choix sont possibles pour effectuer cette moyenne.

1. Nous pouvons effectuer la moyenne sur les corrélateurs projetés $\tilde{C}(t)$: cette moyenne est alors réalisée à chaque temps, avec les régressions faites sur les corrélateurs moyennés.
2. À l'inverse de la première méthode, nous pouvons d'abord réaliser nos différentes régressions, puis prendre la moyenne sur θ de nos différentes quantités extraites.
3. Cette troisième méthode est identique à la précédente pour les énergies et les couplages au vide, mais elle diffère pour les facteurs de forme : au lieu de moyenner sur les quantités extraites des corrélateurs puis de déduire les facteurs de forme, la moyenne est repoussée ici le plus loin possible, soit (i) au niveau de l'extraction des facteurs de forme, soit (ii) au niveau de leur extrapolation à recul nul, ou encore (iii) au niveau de l'extrapolation à la masse du quark b (ces différentes étapes seront clarifiées dans la section IV. 4).

J'ai effectué une comparaison systématique de ces trois méthodes, ainsi que des sous-méthodes de la troisième. J'ai constaté que la troisième méthode donnait des incertitudes plus grandes que celles des autres méthodes et que ses résultats étaient par ailleurs plus dispersés autour des fonctions d'extrapolation : ceci est imputable à la non-linéarité des équations qui définissent les facteurs de forme. Entre les méthodes une et deux, j'ai finalement opté pour la première. En effet, si nous regardons plus en détails la nuance entre les deux manières de moyenner sur θ , nous pouvons voir (Figure IV.8, en haut) que lorsque les valeurs positives et négatives de θ évoluent différemment, les plateaux ne semblent plus coïncider (entre valeurs positives et négatives) et la moyenne des plateaux peut ainsi être biaisée. Avec une moyenne sur θ faite avant l'ajustement des plateaux (Figure IV.8, en bas), les courbes évoluent avec une meilleure régularité et un plateau optimal peut être trouvé. Le domaine du plateau a tendance à s'allonger dans les $t > T/4$, ce qui est en contradiction avec notre discussion de la section IV. 3. Graphiquement, nous pourrions dire qu'à θ donné le biais de sous-estimation du plateau dans le cas θ positif doit être similaire au biais de sur-estimation dans le cas négatif et, ainsi, disparaître dans la moyenne de la méthode deux. Une

inspection systématique de cette hypothèse montre qu'elle ne se vérifie pas pour les cas où, outre le biais, la stabilité de la régression diminue plus fortement pour un signe de θ que pour l'autre (le biais devient asymétrique). Ainsi, si la méthode numéro deux reste tout à fait correcte, au regard de nos données et de leur traitement (qui dépend des algorithmes utilisés pour les régressions ou le GEVP), la méthode une reste le meilleur choix dans mon analyse. C'est cette dernière qui a donc été utilisée pour les résultats du [Tableau IV.13](#), ainsi que pour tous les résultats qui suivent : il n'y aura donc plus de résultats présentés pour des valeurs négatives de θ .

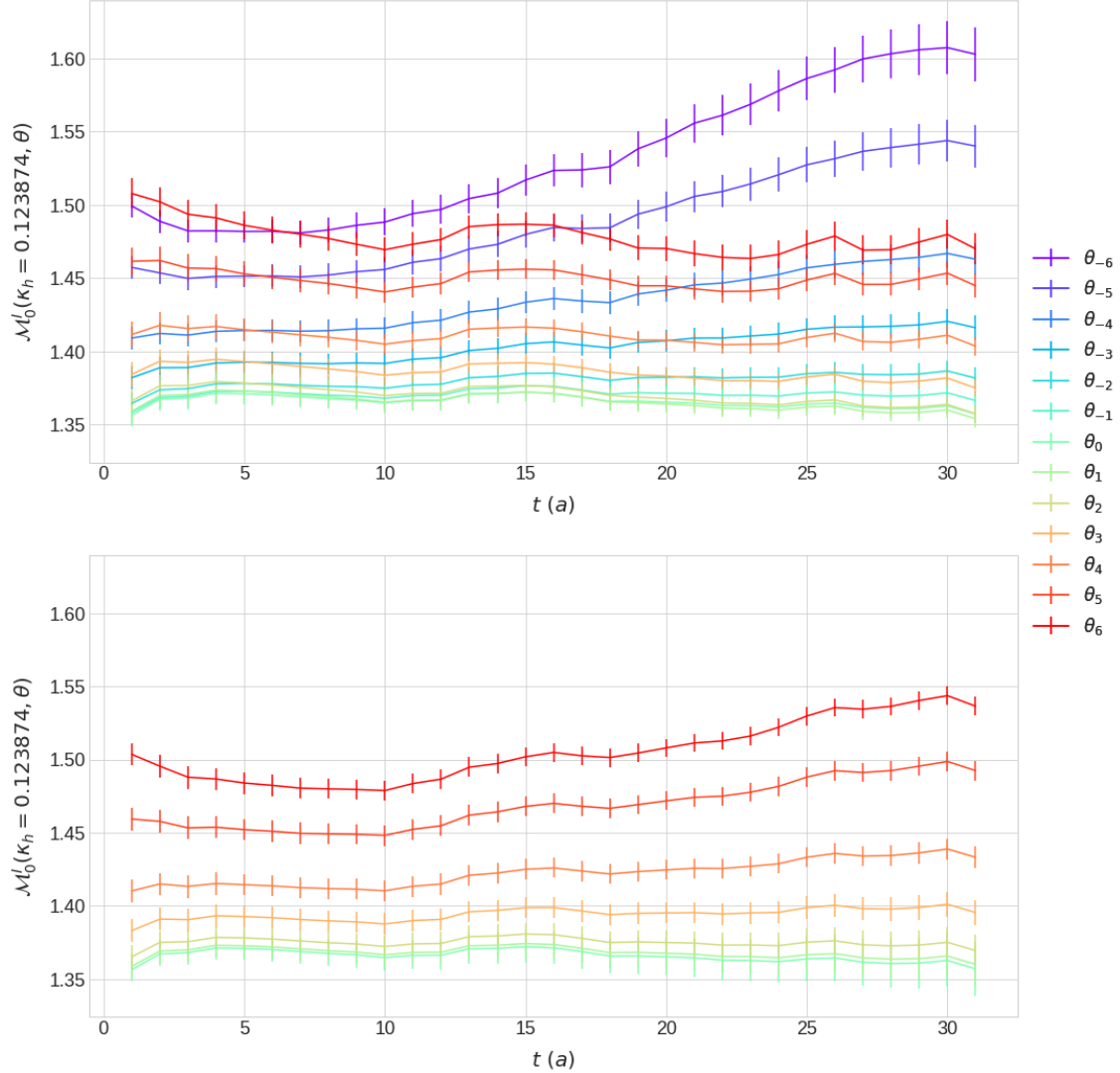


FIGURE IV.8 – Élément de matrice $\mathcal{M}_0$ en fonction du temps pour le quark lourd κ_4 dans l'ensemble E5. En haut : valeurs positives et négatives de θ qui montrent une asymétrie (comportement différent des fonctions selon le signe de θ). En bas : moyenne sur les valeurs positives et négatives de θ . Pour rappel, les valeurs numériques de θ sont données dans le [Tableau IV.4](#), et nous avons $\theta_{-i} = -\theta_i$.

Validation supplémentaire : élément vectoriel symétrique dans le continu

La symétrie de saveur nous indique que l'élément de matrice (normalisé) $M_0^{I,(r)}(\theta = 0, \kappa = \kappa_c) = \mathcal{M}_0^{I,(r)}(\theta = 0, \kappa = \kappa_c)/2m_{D_s}$, dans le continu, doit être égal à l'unité¹¹. Nous utilisons ici cette propriété pour vérifier la justesse de notre analyse (les détails de l'extrapolation à la limite du continu sont donnés à la section [IV. 4.3](#)).

Prenons les valeurs de $M_0^{I,(r)}(\theta = 0, \kappa = \kappa_c)$ dans chaque bin de chaque réseau que nous noterons ω pour cette discussion (par exemple, ω pourra être le quatrième bin de l'ensemble E5). Nous réalisons alors 100 ajustements de ces points par un plan, qui aura pour équation

$$M_0^{I,(r)}(\theta = 0, \kappa = \kappa_c, \omega) = \alpha + \beta (a_\omega/a_{\beta=5.3})^2 + \gamma (m_\pi^\omega/m_\pi^{\text{physique}})^2 \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (\text{IV.62})$$

avec Ω représentant l'ensemble de nos réseaux et bins. L'idée de cette extrapolation est de voir notre grandeur comme une constante α , plus une contribution liée à la discrétisation de l'espace-temps β et une autre contribution associée à la masse non-physique du pion sur réseau γ . Une fois en possession du jeu (α, β, γ) , nous pouvons regarder ce que serait la valeur de notre élément sur un réseau avec la masse physique du pion, soit $m_\pi^\omega/m_\pi^{\text{physique}} = 1$, mais également dans un réseau de maille nulle donc $a_\omega/a_{\beta=5.3} = 0$. Nous obtenons alors, pour le résultat extrapolé à la limite du continu et au pion physique

$$M_0^{I,(r)}(\theta = 0, \kappa = \kappa_c, \text{continu}) = \alpha + \gamma = 0.961(8). \quad (\text{IV.63})$$

L'erreur sur cet élément extrapolé vient d'une propagation quadratique des erreurs sur les paramètres α , β et γ au point physique, c'est-à-dire le point pour lequel le facteur devant β vaut zéro, ce dernier ne contribuant alors ni à la valeur ni à l'incertitude.

α	β	γ	$\chi^2/\text{d.o.f}$
0.952(8)	-0.089(6)	0.0089(9)	87.969166

TABLEAU IV.14 – Résultats de l'extrapolation à la limite du continu de l'élément de matrice hadronique $M_0^{I,(r)}(\theta = 0, \kappa = \kappa_c)$. Les paramètres (trois premières colonnes) sont ceux de l'[Eq. IV.62](#) moyennés sur 100 régressions. La dernière colonne représente la valeur du χ^2 (par degré de liberté) pour l'ajustement réalisé avec les valeurs centrales du jeu (α, β, γ) .

Les valeurs des paramètres de la régression que nous trouvons sont données dans le [Tableau IV.14](#). Le résultat final dans le continu est, lui, donné par l'[Eq. IV.63](#). Finalement, la représentation graphique de cette extrapolation est illustrée dans la [Figure IV.9](#), où nous avons projeté la fonction 2D de l'[Eq. IV.62](#) sur la dimension de la masse du pion, pour une meilleure visualisation. Si ce résultat n'est pas compatible avec l'unité, c'est que dans le [Tableau IV.13](#), seules les

11. Dans ce cas limite, $\theta = 0$ et $\kappa = \kappa_c$, $\mathcal{M}_0^{I,(r)} = \mathcal{G}(1)$ qui est par définition égal à un dans le continu, voir [Eq. IV.64](#), [Eq. IV.74](#) et [Eq. IV.75](#) pour le lien entre ces quantités.

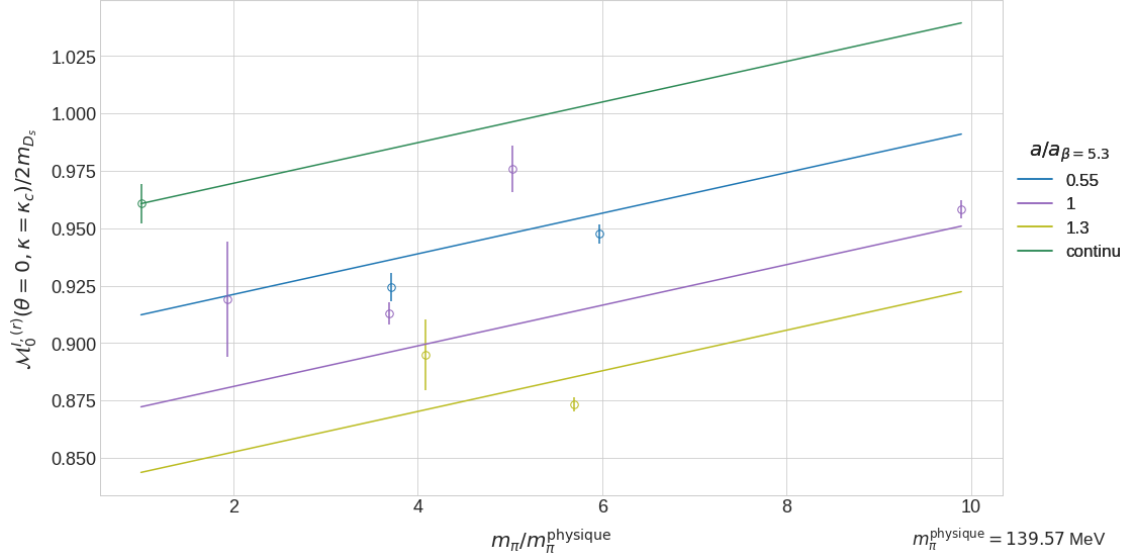


FIGURE IV.9 – Extrapolations (droites) à la limite du continu de l’élément de matrice $M_0^{I,(r)}$ élastique, pour différentes valeurs de $m_\pi/m_\pi^{\text{physique}}$ (symboles). Cette fonction à deux dimensions a été projetée sur la dimension de la masse du pion, pour faciliter la visualisation. Les droites sont donc un plan qui minimise les distances entre ce plan et les huit points (ensembles). La valeur pour cette quantité dans le continu est donnée au point d’abscisse $m_\pi/m_\pi^{\text{physique}} = 1$, pour la droite de maille nulle $a_\omega/a_{\beta=5.3} = 0$, appelée « continu ».

incertitudes statistiques sont données, alors que plusieurs systématiques existent. Pour n’en citer qu’une, parlons du biais sur le choix du plateau : augmenter ou diminuer sa taille d’une unité entraîne un changement des valeurs centrales extraites (par exemple M_0). Si l’erreur systématique n’a pas été ajoutée, c’est parce que nous n’avons pas pu la déterminer avec robustesse, à cause de l’instabilité des régressions avec la variation de nos paramètres (variation, qui est le moyen d’estimer ces systématiques). Nous voyons de plus un χ^2 extrêmement mauvais, qui traduit là encore la sous-estimation de nos erreurs. Un tel χ^2 se retrouvera également dans les autres extrapolations à la limite du continu, et ce pour les mêmes raisons. Pour aller plus loin et s’assurer que nos résultats soient compatibles avec l’unité (dans les barres d’erreurs), des raffinements sont donc nécessaires. Nous citerons quelques pistes possibles pour aller plus loin dans la section IV. 5.

Ce résultat conclut la partie sur les fonctions de corrélation à trois points. Nous allons à présent discuter des résultats pour les facteurs de forme, déduits de ces corrélateurs.

IV. 4 Obtention des facteurs de forme hadroniques

Dans cette section, nous allons enfin pouvoir utiliser l’ensemble des résultats dérivés jusqu’ici (IV. 2.4 pour les masses et les énergies, et IV. 3.3 pour les éléments de matrice) pour obtenir

les facteurs de forme hadroniques. Nous commencerons par expliciter les formules donnant ces grandeurs (IV. 4.1), puis nous verrons comment extrapoler ces facteurs vers le point dit de recul nul (IV. 4.2). Nous pourrons alors, pour ces quantités à recul nul, établir leur valeur à la limite du continu (IV. 4.3). Finalement, nous pourrons appliquer notre stratégie particulière de simulation des quarks lourds pour obtenir les résultats à la masse du quark *bottom* (IV. 4.4).

IV. 4.1 Facteurs de forme de la LQCD

Nous établissons ici les équations des facteurs de forme tout d'abord pour le courant vectoriel, puis pour le courant axial.

Facteurs de forme f^+ et f^- pour l'élément $\mathcal{M}$

Nous avons donné dans la section IV. 3 une définition des éléments de matrice. Prenons un élément de matrice vectoriel général $\mathcal{M}^\mu = \langle D_s(p_{D_s}) | V^\mu | H_s(p_{H_s}) \rangle$, avec une impulsion nulle pour le méson lourd-étrange. En écrivant la différence d'impulsion entre les deux mésons $q = p_{H_s} - p_{D_s}$, nous pouvons établir la correspondance entre l'élément de matrice et les facteurs de forme f^+ et f^- qui régissent cette désintégration, dans une structure covariante symétrisée, soit

$$\mathcal{M}^\mu = f^+(q^2) (p_{H_s} + p_{D_s})^\mu + f^-(q^2) q^\mu. \quad (\text{IV.64})$$

Il existe une autre manière de définir cet élément de matrice à l'aide du facteur de forme scalaire f_0 comme

$$\mathcal{M}^\mu = f^+(q^2) \left[(p_{H_s} + p_{D_s})^\mu - \frac{m_{H_s}^2 - m_{D_s}^2}{q^2} q^\mu \right] + f_0(q^2) \frac{m_{H_s}^2 - m_{D_s}^2}{q^2} q^\mu. \quad (\text{IV.65})$$

Cette autre écriture est traditionnellement préférée en phénoménologie, mais nous nous sommes portés sur la première formulation, les résultats étant meilleurs pour f^+ que pour f_0 . En effet, avec la définition de f_0 suivante

$$f_0(q^2) = f^+(q^2) + f^-(q^2) \frac{q^2}{m_{H_s}^2 - m_{D_s}^2}, \quad (\text{IV.66})$$

nous voyons que f_0 possède un pôle en $m_{H_s} = m_{D_s}$. Ce facteur de forme ne pourra donc pas être calculé à cette masse. Or nous avons besoin des facteurs de forme à cette masse pour notre étude (voir la discussion IV. 4.4).

Nous souhaitons inverser l'Eq. IV.64 pour déterminer les deux facteurs de forme f^+ et f^- à partir de la seule connaissance de nos éléments de matrice. Comme nous n'avons pas une, mais quatre équations (pour les différentes composantes), cela est possible. Grâce à la symétrie H(3)

dans le réseau, nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle D_s(p_{D_s})|V^0|H_s(p_{H_s})\rangle &= f^+(q^2)(E_{D_s} + E_{H_s}) + f^-(q^2)(E_{H_s} - E_{D_s}) , \\ \langle D_s(p_{D_s})|V^i|H_s(p_{H_s})\rangle &= -q^i(f^+(q^2) - f^-(q^2)) ,\end{aligned}\tag{IV.67}$$

où p est l'impulsion, q est la différence d'impulsion. Dans la suite nous allons remplacer la dépendance en q par le recul w qui est, pour rappel, donné par

$$w = \frac{p_{D_s} \cdot p_{H_s}}{m_{D_s} m_{H_s}} \equiv v_{D_s} \cdot v_{H_s} ,\tag{IV.68}$$

avec v la vitesse des mésons. Comme nous nous restreignons à la désintégration d'un méson lourd-étrange au repos, nous avons les trois relations suivantes : $p_{H_s} = (m_{H_s}, \vec{0})$, $q^i = -p_{D_s}^i = -\theta\pi/L$ et $w = E_{D_s}/m_{D_s}$ (voir le [Tableau IV.15](#) pour les valeurs calculées de w). La paire d'[Eq. IV.67](#) se réécrit sous la forme

$$\begin{aligned}\langle D_s(\theta)|V^0|H_s\rangle &= f^+(w)(E_{D_s} + m_{H_s}) + f^-(w)(m_{H_s} - E_{D_s}) , \\ \langle D_s(\theta)|V^i|H_s\rangle &= -\frac{\theta\pi}{L}(f^+(w) - f^-(w)) ,\end{aligned}\tag{IV.69}$$

qui devient par inversion, et en utilisant l'isotropie spatiale

$$\begin{aligned}f^+(w) &= \frac{1}{2m_{H_s}} \left[\langle D_s(\theta)|V^0|H_s\rangle + \frac{L(m_{H_s} - E_{D_s})}{3\theta\pi} \sum_i \langle D_s(\theta)|V^i|H_s\rangle \right] , \\ f^-(w) &= \frac{1}{2m_{H_s}} \left[\langle D_s(\theta)|V^0|H_s\rangle - \frac{L(m_{H_s} + E_{D_s})}{3\theta\pi} \sum_i \langle D_s(\theta)|V^i|H_s\rangle \right] .\end{aligned}\tag{IV.70}$$

Si nous reprenons la notation définie en [IV. 3](#), nous pouvons réécrire d'une manière plus compacte la formulation de ces deux facteurs de forme comme

$$\begin{aligned}f^+(w) &= \frac{1}{2m_{H_s}} \left[\mathcal{M}_0 + \frac{L(m_{H_s} - E_{D_s})}{\theta\pi} \mathcal{M}_i \right] , \\ f^-(w) &= \frac{1}{2m_{H_s}} \left[\mathcal{M}_0 - \frac{L(m_{H_s} + E_{D_s})}{\theta\pi} \mathcal{M}_i \right] .\end{aligned}\tag{IV.71}$$

Facteurs de forme $\mathcal{G}(w)$ dans HQET

Comme vu au chapitre [III](#), le facteur de forme le plus utile sur le plan expérimental pour la désintégration $B_s \rightarrow D_s \ell \nu$ est le facteur $\mathcal{G}(w)$. Nous pouvons le calculer à l'aide de la formule trouvée dans [\[108\]](#)

$$\mathcal{G}^2(w) = 4r \frac{f_+^2(w)}{(1+r)^2} , \quad \text{avec} \quad r = \frac{m_{D_s}}{m_{B_s}} .\tag{IV.72}$$

θ	w
0.000000	1.0(0)
0.125000	1.00056(1)
0.250000	1.00223(5)
0.437500	1.0068(1)
0.625000	1.0138(2)
0.875000	1.0265(3)
1.062500	1.0384(4)

TABLEAU IV.15 – Valeurs des $w(\theta)$ dans l'ensemble E5, calculées avec $w = E_{D_s}/m_{D_s}$. Comme pour tous les calculs présentés ici, la masse des mésons est prise sur la moyenne des θ positifs et négatifs.

Une écriture alternative de l'élément de matrice s'inspirant de la symétrie des quarks lourds HQET [109] donne, à l'aide des facteurs de forme h^+ et h^- ,

$$\frac{\langle D_s(p_{D_s}) | V^\mu | H_s(p_{H_s}) \rangle}{\sqrt{m_{D_s} m_{H_s}}} = h^+(w)(v_{D_s} + v_{H_s})^\mu + h^-(w)(v_{H_s} - v_{D_s})^\mu. \quad (\text{IV.73})$$

Nous relierons cette formulation de l'élément de matrice à celle obtenue avec f^+ et f^- :

$$\begin{aligned} h^+(w) &= \frac{1}{2\sqrt{m_{D_s} m_{H_s}}} [(m_{H_s} + m_{D_s})f^+(w) + (m_{H_s} - m_{D_s})f^-(w)] , \\ h^-(w) &= \frac{1}{2\sqrt{m_{D_s} m_{H_s}}} [(m_{H_s} - m_{D_s})f^+(w) + (m_{H_s} + m_{D_s})f^-(w)] . \end{aligned} \quad (\text{IV.74})$$

Ceci permet de ré-exprimer $\mathcal{G}$ en fonction de h^+ et h^- comme

$$\mathcal{G}(w) = h^+(w) \left[1 - \frac{m_{H_s} - m_{D_s}}{m_{H_s} + m_{D_s}} \frac{h^-(w)}{h^+(w)} \right]. \quad (\text{IV.75})$$

Facteurs de forme h_{A_1} et h_{A_3} pour le cas axial

Comme dans la section IV. 4.1, nous allons partir de l'élément de matrice général et voir comment il s'écrit en terme des facteurs de forme. Puis nous verrons, selon les simplifications de notre analyse, comment ceux-ci se redéfinissent avec les éléments de matrice $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, pour plus de détails sur la paramétrisation de ces facteurs de forme voir [66].

En fonction des facteurs de forme h_{A_1} , h_{A_2} et h_{A_3} , nous avons

$$\frac{\langle D_s^*(p_{D_s^*}, \epsilon^{(\lambda)}) | A^\mu | H_s(p_{H_s}) \rangle}{2\sqrt{m_{H_s} m_{D_s^*}}} = \frac{i}{2} \epsilon_\nu^{*(\lambda)} [g^{\mu\nu}(w+1)h_{A_1}(w) - v_{H_s}^\mu (v_{H_s}^\nu h_{A_2}(w) + v_{D_s^*}^\nu h_{A_3}(w))] . \quad (\text{IV.76})$$

En introduisant

$$R^{\mu\rho} = \sum_{\lambda} \epsilon^{\rho(\lambda)} \langle D_s^*(p_{D_s^*}, \epsilon^{(\lambda)}) | A^\mu | H_s(p_{H_s}) \rangle, \quad (\text{IV.77})$$

et en utilisant la normalisation de la polarisation (déjà vue)

$$\sum_{\lambda} \epsilon^{\mu(\lambda)} \epsilon^{\nu(\lambda)} = g^{\mu\nu} - \frac{p_{D_s^*}^\mu p_{D_s^*}^\nu}{m_{D_s^*}^2}, \quad (\text{IV.78})$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{R^{\mu\rho}}{2\sqrt{m_{H_s} m_{D_s^*}}} &= \frac{i}{2} \left[\left(g^{\mu\rho} - \frac{p_{D_s^*}^\mu p_{D_s^*}^\rho}{m_{D_s^*}^2} \right) (1+w) h_{A_1}(w) \right. \\ &\quad \left. - \left(g^{\rho\nu} - \frac{p_{D_s^*}^\rho p_{D_s^*}^\nu}{m_{D_s^*}^2} \right) \left(v_{\nu B_s} v_{B_s}^\mu h_{A_2}(w) + v_{\nu B_s} v_{D_s^*}^\mu h_{A_3}(w) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.79})$$

En ne prenant que les indices spatiaux (et sachant que le méson H_s est au repos), nous obtenons

$$\frac{R^{ij}}{2\sqrt{m_{H_s} m_{D_s^*}}} = \frac{i}{2} \left[\left(g^{ij} - \frac{p_{D_s^*}^i p_{D_s^*}^j}{m_{D_s^*}^2} \right) (w+1) h_{A_1}(w) + \frac{E_{D_s^*} p_{D_s^*}^i p_{D_s^*}^j}{m_{D_s^*}^3} h_{A_3}(w) \right]. \quad (\text{IV.80})$$

En réalisant la même technique qu'avec le cas vectoriel, c'est-à-dire en regroupant les composantes ayant la même forme entre elles de manière à obtenir deux équations, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \sqrt{m_{H_s} m_{D_s^*}} \left[\left(1 + \frac{\theta^2}{m_{D_s^*}^2} \right) (w+1) h_{A_1}(w) - \frac{E_{D_s^*} \theta^2}{m_{D_s^*}^3} h_{A_3}(w) \right], \\ \mathcal{B} &= \sqrt{m_{H_s} m_{D_s^*}} \left(\frac{\theta^2}{m_{D_s^*}^2} (w+1) h_{A_1}(w) - \frac{E_{D_s^*} \theta^2}{m_{D_s^*}^3} h_{A_3}(w) \right), \end{aligned} \quad (\text{IV.81})$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont les éléments de matrice définis en [IV. 3](#).

Pour simplifier ces équations, nous pouvons absorber le facteur $2\sqrt{m_{H_s} m_{D_s^*}}$ dans les éléments de matrice (nous omettons alors le style calligraphique). Le système d'[Eq. IV.81](#) va alors se réécrire comme

$$\begin{aligned} h_{A_1} &= \frac{2}{w+1} (A - B), \\ h_{A_3} &= \frac{m_{D_s^*}^3}{E_{D_s^*} \theta^2} \left[(w+1) \frac{\theta^2}{m_{D_s^*}^2} h_{A_1} - 2B \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.82})$$

Malheureusement, tant que le calcul sera limité à un quark b au repos dans la définition de l'[Eq. IV.79](#), le terme h_{A_2} sera systématiquement supprimé. Sans la connaissance de ces trois facteurs de forme, il n'est pas possible de déterminer complètement $\mathcal{F}(w)$, quel que soit le recul du

méson D_s^* . Néanmoins, dans le cas limite qui nous intéresse le plus, c'est-à-dire le recul nul, nous avons une équivalence très simple pour obtenir ce facteur de forme, avec

$$\mathcal{F}(1) = h_{A_1}(1). \quad (\text{IV.83})$$

Nous utiliserons donc ce résultat pour l'obtention de ce facteur de forme. Certes, avec cette limite du recul nul, le facteur de forme h_{A_3} , n'est plus directement utile. Mais nous voulions néanmoins en avoir une première estimation, afin de déterminer si son calcul comportait certaines difficultés ; ceci sera utile pour le jour où une simulation avec une impulsion donnée au quark b sera faite. Nous avons aussi pu voir que h_{A_3} faisait intervenir des éléments de matrice très bruyants et qu'il faudrait améliorer la finesse de la simulation pour obtenir une bonne détermination de $\mathcal{F}(w)$; voir le [Tableau IV.16](#) pour l'incertitude sur ce facteur de forme.

Compilation des résultats

Dans le [Tableau IV.16](#), nous donnons les valeurs pour tous les facteurs de forme détaillés dans cette section (à savoir f^- , f^+ , f_0 , h^- , h^+ , $\mathcal{G}$, h_{A_1} et h_{A_3}) en fonction de l'impulsion θ , et ce pour l'ensemble E5. Dans ce qui suit, nous discutons de la dépendance en θ de ces quantités. Les résultats pour les autres ensembles sont donnés dans l'annexe [A.3](#). Finalement, le premier groupe de résultats correspond au quark *charm*, ce cas particulier, dit élastique (sur lequel nous reviendrons en [IV. 4.4](#)), correspond à la transition particulière d'un méson D_s en un méson $D_s^{(*)}$, et est essentielle à notre analyse, comme nous le verrons également en [IV. 4.4](#).

κ_h	θ	f^-	f^+	f_0	h^-	h^+	$\mathcal{G}$	h_{A_1}	h_{A_3}
$\kappa_c = 0.127240$	0.000000							0.857(7)	
	0.125000	0.020(5)	0.959(4)		0.020(5)	0.959(4)	0.959(4)	0.858(7)	$-2(1) \times 10^1$
	0.250000	0.019(5)	0.963(4)		0.019(5)	0.963(4)	0.963(4)	0.862(7)	$-3(3)$
	0.437500	0.017(6)	0.973(4)		0.017(6)	0.973(4)	0.973(4)	0.874(7)	$-0(1)$
	0.625000	0.013(6)	0.987(4)		0.013(6)	0.987(4)	0.987(4)	0.891(7)	0.6(7)
	0.875000	0.005(7)	1.010(5)		0.005(7)	1.010(5)	1.010(5)	0.917(7)	0.9(5)
	1.062500	-0.002(7)	1.026(5)		-0.002(7)	1.026(5)	1.026(5)	0.936(8)	1.0(4)
$\kappa_{h_1} = 0.123874$	0.000000							0.852(8)	
	0.125000	-0.090(6)	0.953(4)	0.946(4)	-0.011(6)	0.949(4)	0.950(4)	0.853(8)	$0(2) \times 10^1$
	0.250000	-0.091(6)	0.957(4)	0.951(4)	-0.012(7)	0.953(4)	0.954(4)	0.858(8)	2(4)
	0.437500	-0.093(7)	0.968(4)	0.964(4)	-0.013(7)	0.963(4)	0.965(4)	0.870(7)	2(1)
	0.625000	-0.097(7)	0.983(4)	0.983(4)	-0.015(7)	0.979(4)	0.980(4)	0.888(8)	1.6(8)
	0.875000	-0.104(8)	1.008(5)	1.015(5)	-0.020(8)	1.003(5)	1.004(5)	0.917(8)	1.6(5)
	1.062500	-0.111(8)	1.025(5)	1.041(5)	-0.026(9)	1.020(6)	1.022(5)	0.937(9)	1.5(4)
$\kappa_{h_2} = 0.119457$	0.000000							0.852(9)	
	0.125000	-0.192(6)	0.957(4)	0.926(4)	-0.035(6)	0.939(4)	0.944(4)	0.853(9)	$2(2) \times 10^1$
	0.250000	-0.194(6)	0.962(4)	0.931(4)	-0.036(6)	0.943(4)	0.948(4)	0.858(9)	7(5)
	0.437500	-0.198(7)	0.973(4)	0.945(4)	-0.038(7)	0.954(4)	0.960(4)	0.871(9)	3(2)
	0.625000	-0.204(7)	0.990(4)	0.965(5)	-0.041(7)	0.970(5)	0.977(4)	0.891(9)	3(1)
	0.875000	-0.216(8)	1.016(5)	0.997(5)	-0.050(8)	0.994(6)	1.002(5)	0.92(1)	2.2(7)
	1.062500	-0.229(9)	1.035(6)	1.023(6)	-0.059(9)	1.011(7)	1.021(6)	0.94(1)	2.0(5)
$\kappa_{h_3} = 0.113638$	0.000000							0.86(1)	
	0.125000	-0.307(7)	0.982(5)	0.907(5)	-0.069(7)	0.935(5)	0.952(5)	0.86(1)	$2(2) \times 10^1$
	0.250000	-0.309(7)	0.986(5)	0.912(5)	-0.070(7)	0.939(5)	0.956(5)	0.87(1)	7(6)
	0.437500	-0.315(7)	0.998(5)	0.925(5)	-0.073(7)	0.950(5)	0.968(5)	0.88(1)	4(2)
	0.625000	-0.325(8)	1.016(5)	0.945(5)	-0.079(8)	0.966(5)	0.985(5)	0.90(1)	3(1)
	0.875000	-0.342(9)	1.043(6)	0.977(6)	-0.090(9)	0.990(6)	1.012(6)	0.94(1)	2.3(8)
	1.062500	-0.36(1)	1.064(6)	1.002(7)	-0.10(1)	1.007(8)	1.032(6)	0.96(1)	2.1(6)
$\kappa_{h_4} = 0.106031$	0.000000							0.88(1)	
	0.125000	-0.429(8)	1.023(7)	0.886(6)	-0.106(8)	0.935(6)	0.969(6)	0.88(1)	$3(3) \times 10^1$
	0.250000	-0.432(8)	1.028(7)	0.890(6)	-0.107(8)	0.939(6)	0.973(6)	0.89(1)	10(7)
	0.437500	-0.440(9)	1.041(7)	0.903(6)	-0.111(8)	0.950(6)	0.986(6)	0.90(1)	5(3)
	0.625000	-0.452(9)	1.059(7)	0.922(6)	-0.118(9)	0.965(7)	1.003(6)	0.93(1)	3(2)
	0.875000	-0.47(1)	1.089(7)	0.954(8)	-0.13(1)	0.989(8)	1.031(7)	0.97(2)	3(1)
	1.062500	-0.50(1)	1.111(8)	0.978(9)	-0.15(1)	1.005(9)	1.052(8)	1.01(2)	2.7(8)
$\kappa_{h_5} = 0.096555$	0.000000							0.89(1)	
	0.125000	-0.532(8)	1.068(7)	0.859(5)	-0.122(7)	0.934(6)	0.982(6)	0.89(1)	$0(3) \times 10^1$
	0.250000	-0.535(8)	1.073(7)	0.864(5)	-0.124(7)	0.938(6)	0.987(6)	0.90(1)	2(8)
	0.437500	-0.546(9)	1.088(7)	0.877(5)	-0.129(8)	0.950(6)	1.000(6)	0.92(1)	2(3)
	0.625000	-0.561(9)	1.109(7)	0.897(6)	-0.137(8)	0.966(6)	1.020(7)	0.96(1)	2(2)
	0.875000	-0.59(1)	1.143(8)	0.928(7)	-0.15(1)	0.991(8)	1.051(7)	1.01(2)	2(1)
	1.062500	-0.62(1)	1.168(9)	0.951(8)	-0.17(1)	1.007(9)	1.074(8)	1.05(2)	2.3(9)

TABLEAU IV.16 – Liste des valeurs de tous les facteurs de forme discuté en IV. 4.1 selon la masse du quark h (κ_h) et l'énergie de recul sur réseau θ du méson D émis, et ce pour l'ensemble E5. Les erreurs présentées sont statistiques.

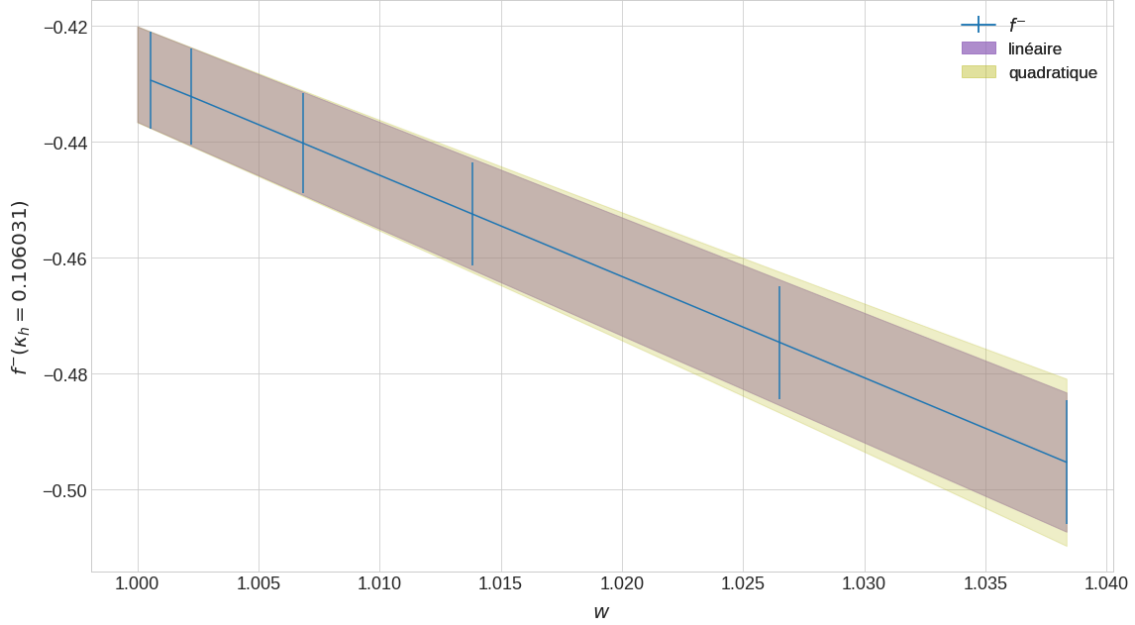


FIGURE IV.10 – Facteur de forme $f^-(w)$ pour κ_{h_4} dans l'ensemble E5 (symboles), ainsi que ses extrapolations linéaire (bande mauve) ou quadratique (bande jaune) à la limite du recul nul ($w = 1$). La zone recouverte par les deux modèles est d'une couleur intermédiaire entre le mauve et le jaune.

IV. 4.2 Désintégration à recul nul ($w = 1$)

Étant désormais en possession des facteurs de forme (Tableau IV.16), nous pouvons examiner la dépendance de chacun d'entre eux en fonction du recul w du méson D (pour rappel, w est relié à θ par l'Eq. IV.61). Nous avons déjà évoqué cette dépendance dans la section IV. 3.3, sans toutefois en donner une forme algébrique.

Pour chacun des paramètres, nous avons choisi de réaliser une extrapolation polynomiale en fonction de $(w - 1)$, du fait du peu de points à notre disposition, mais aussi parce que le modèle explicatif doit être le plus simple possible. Nous nous sommes cantonnés au choix de la régression soit linéaire soit quadratique. Nous avons donc, pour notre extrapolation,

$$\mathcal{Q}(w) = \alpha + \beta(w - 1) + \gamma(w - 1)^2, \quad (\text{IV.84})$$

où $\mathcal{Q}$ représente la quantité à extrapoler à recul nul, et où le paramètre γ peut être fixé à zéro pour une extrapolation linéaire. Dans les deux cas, la constante α correspondra au facteur de forme à recul nul $\mathcal{Q}(w = 1)$. Nous illustrons cette extrapolation au cas du facteur de forme f^- dans la Figure IV.10, à la fois pour le cas linéaire (paramètres α_l et β_l) et le cas quadratique (paramètres α_q , β_q et γ_q). Les valeurs obtenues pour ces régressions (sur 6 points) ainsi que le $\chi^2/\text{d.o.f}$ sont donnés dans le Tableau IV.17.

Nous pouvons remarquer dans ce tableau (qui est un exemple représentatif des autres régres-

κ_h	α_l	β_l	$\chi_l^2/\text{d.o.f}$	α_q	β_q	γ_q	$\chi_q^2/\text{d.o.f}$
0.127240	0.021(5)	-0.58(7)	0.009461	0.020(5)	-0.5(1)	-1.5(9)	0.001139
0.123874	-0.090(6)	-0.55(7)	0.025155	-0.090(6)	-0.43(7)	-3.5(4)	0.000170
0.119457	-0.191(6)	-0.95(8)	0.022714	-0.192(6)	-0.83(8)	-3.4(5)	0.000031
0.113638	-0.306(7)	-1.38(9)	0.006899	-0.306(7)	-1.31(9)	-1.9(8)	0.000078
0.106031	-0.428(8)	-1.7(1)	0.002530	-0.428(8)	-1.7(1)	-0(1)	0.000834
0.096555	-0.530(8)	-2.2(1)	0.004377	-0.530(8)	-2.2(1)	1(2)	0.000354

TABLEAU IV.17 – Paramètres et $\chi^2/\text{d.o.f}$ pour l’extrapolation du facteur de forme f^- à recul nul dans l’ensemble E5. Les résultats pour les deux extrapolations, linéaire ou quadratique (voir Eq. IV.84), sont indicées par l et q respectivement.

sions), que (i) le $\chi^2/\text{d.o.f}$ de la régression linéaire est assez bon, mais surtout que (ii) le paramètre γ_q est souvent compatible avec zéro (à moins de deux sigmas), et enfin que (iii) les paramètres $\alpha_{(l/q)}$ sont très similaires. Pour ces trois raisons, nous avons choisi de garder le modèle de complexité minimale, et donc de choisir pour le reste de notre analyse l’ajustement linéaire pour l’extrapolation à recul nul. Cette extrapolation est utilisée pour tous nos calculs de facteurs de forme à recul nul. Une nuance toutefois : deux méthodes différentes ont été employées pour le calcul de $\mathcal{G}(1)$. En effet nos données étant bruyantes, nous voulions obtenir ce facteur par deux méthodes pour inclure la différence dans une erreur systématique. Ainsi, dans la première méthode, nous avons calculé $\mathcal{G}(w)$ comme montré en Eq. IV.75, puis nous avons réalisé son extrapolation. Dans la seconde méthode, nous avons utilisé les extrapolations de $h^+(1)$ et $h^-(1)$ pour obtenir directement $\mathcal{G}(1)$, toujours à l’aide de l’Eq. IV.75 ; le facteur de forme obtenu par cette méthode est dénoté $\mathcal{G}^\dagger$.

Dans le [Tableau IV.18](#), nous compilons l’ensemble des résultats finaux pour les facteurs de forme à recul nul et ce pour tous les ensembles. Premièrement, nous pouvons voir le bon accord existant entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^\dagger$. Concernant le facteur de forme h_{A_3} , les valeurs ont été trop difficiles à ajuster, et les résultats présentés ici sont donnés à titre indicatif ; nous trouverons dans la section [IV. 5.2](#) des possibilités d’amélioration qui pourraient permettre de rendre le calcul de h_{A_3} possible dans de prochaines analyses. Nous allons ainsi, dans la suite, omettre h_{A_3} , pour se focaliser sur $\mathcal{G}(1)$ et $h_{A_1}(1)$ (donc $\mathcal{F}(1)$).

id	κ_h	f^-	f^+	f_0	h^-	h^+	$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}^\dagger$	h_{A_1}	h_{A_3}
A5	$c : 0.125310$	0.101(4)	0.875(3)		0.101(4)	0.875(3)	0.875(3)	0.875(3)	0.776(7)	-13(1)
	$h_1 : 0.121340$	0.013(5)	0.857(3)	0.857(3)	0.085(5)	0.862(3)	0.854(3)	0.855(3)	0.761(7)	-10(1)
	$h_2 : 0.116040$	-0.059(5)	0.849(4)	0.838(3)	0.084(5)	0.851(3)	0.837(4)	0.838(4)	0.756(8)	-11(2)
	$h_3 : 0.109307$	-0.169(7)	0.888(5)	0.844(5)	0.049(7)	0.870(5)	0.861(5)	0.858(5)	0.855(9)	-4(3)
	$h_4 : 0.100407$	-0.263(9)	0.914(6)	0.828(5)	0.031(9)	0.873(5)	0.865(5)	0.863(6)	0.88(1)	-4(4)
	$h_5 : 0.089289$	-0.299(8)	0.925(6)	0.806(5)	0.069(7)	0.877(5)	0.850(5)	0.850(5)	0.84(1)	-8(3)
B6	$c : 0.125290$	0.13(2)	0.89(2)		0.13(2)	0.89(2)	0.89(2)	0.89(2)		
	$h_1 : 0.121313$	0.07(2)	0.88(2)	0.88(2)	0.14(2)	0.88(2)	0.88(2)	0.87(2)		
	$h_2 : 0.116044$	0.11(2)	0.89(2)	0.86(2)	0.23(2)	0.87(2)	0.87(2)	0.84(2)		
	$h_3 : 0.109127$	-0.31(4)	0.90(2)	0.80(2)	-0.11(4)	0.82(2)	0.87(2)	0.85(2)		
	$h_4 : 0.100172$	-0.45(5)	0.93(2)	0.78(1)	-0.16(5)	0.82(2)	0.88(2)	0.87(2)		
	$h_5 : 0.088935$	-0.52(5)	1.00(3)	0.80(2)	-0.13(4)	0.87(2)	0.92(3)	0.92(3)		
E5	$c : 0.127240$	0.021(5)	0.960(4)		0.021(5)	0.960(4)	0.960(4)	0.960(4)	0.858(7)	-1(2)
	$h_1 : 0.123874$	-0.090(6)	0.954(4)	0.946(4)	-0.010(6)	0.950(4)	0.950(4)	0.950(4)	0.854(8)	2(2)
	$h_2 : 0.119457$	-0.191(6)	0.958(4)	0.926(4)	-0.034(6)	0.939(4)	0.945(4)	0.945(4)	0.854(9)	5(3)
	$h_3 : 0.113638$	-0.306(7)	0.982(5)	0.907(5)	-0.068(7)	0.935(5)	0.952(5)	0.952(5)	0.86(1)	5(3)
	$h_4 : 0.106031$	-0.428(8)	1.024(7)	0.886(6)	-0.105(8)	0.936(6)	0.970(6)	0.969(6)	0.88(1)	6(4)
	$h_5 : 0.096555$	-0.530(8)	1.068(7)	0.859(5)	-0.121(7)	0.935(6)	0.982(6)	0.982(6)	0.89(1)	2(4)
F6	$c : 0.127130$	-0.052(9)	0.98(1)		-0.052(9)	0.98(1)	0.98(1)	0.98(1)	0.88(3)	$-5(1) \times 10^1$
	$h_1 : 0.123700$	-0.16(1)	0.98(1)	0.96(1)	-0.08(1)	0.97(1)	0.97(1)	0.97(1)	0.87(4)	$-6(1) \times 10^1$
	$h_2 : 0.119241$	-0.26(1)	0.98(1)	0.94(1)	-0.10(1)	0.95(1)	0.97(1)	0.97(1)	0.85(4)	$-8(1) \times 10^1$
	$h_3 : 0.113382$	-0.33(1)	0.98(1)	0.90(1)	-0.10(1)	0.93(1)	0.95(1)	0.95(1)	0.82(4)	$-9(2) \times 10^1$
	$h_4 : 0.105793$	-0.44(2)	1.07(1)	0.93(1)	-0.10(2)	0.98(1)	1.01(1)	1.01(1)	0.83(5)	$-1.3(2) \times 10^2$
	$h_5 : 0.096211$	-0.53(2)	1.09(1)	0.88(1)	-0.11(2)	0.96(1)	1.00(1)	1.00(1)	0.83(5)	$-1.3(2) \times 10^2$
F7	$c : 0.127130$	0.124(7)	0.913(5)		0.124(7)	0.913(5)	0.913(5)	0.913(5)	0.847(9)	11(3)
	$h_1 : 0.123649$	0.019(6)	0.892(5)	0.897(5)	0.095(7)	0.898(5)	0.888(5)	0.890(5)	0.80(1)	5(4)
	$h_2 : 0.119196$	-0.063(6)	0.880(5)	0.872(5)	0.086(7)	0.884(5)	0.868(5)	0.870(5)	0.80(1)	9(4)
	$h_3 : 0.113350$	-0.129(8)	0.859(6)	0.827(5)	0.087(7)	0.853(5)	0.832(6)	0.832(6)	0.78(2)	-13(5)
	$h_4 : 0.105786$	-0.230(8)	0.877(6)	0.803(5)	0.058(7)	0.848(5)	0.830(6)	0.829(6)	0.79(2)	-11(6)
	$h_5 : 0.096689$	-0.44(1)	0.989(8)	0.818(5)	-0.06(1)	0.890(6)	0.910(7)	0.913(7)	0.73(2)	-31(8)
G8	$c : 0.127100$	0.05(2)	0.92(3)		0.05(2)	0.92(3)	0.92(3)	0.92(3)		
	$h_1 : 0.123719$	-0.24(4)	0.87(4)	0.85(4)	-0.16(4)	0.85(4)	0.87(4)	0.86(4)		
	$h_2 : 0.119260$	-0.35(5)	0.87(4)	0.80(4)	-0.21(5)	0.81(4)	0.86(4)	0.85(4)		
	$h_3 : 0.113447$	-0.34(4)	0.84(6)	0.75(6)	-0.13(4)	0.78(6)	0.81(6)	0.81(6)		
	$h_4 : 0.105836$	-0.47(5)	0.85(3)	0.70(3)	-0.21(5)	0.74(3)	0.81(3)	0.80(3)		
	$h_5 : 0.096143$	-0.7(1)	0.91(7)	0.62(5)	-0.35(9)	0.67(5)	0.84(7)	0.81(6)		
N6	$c : 0.130260$	-0.001(4)	0.943(5)		-0.001(4)	0.943(5)	0.943(5)	0.943(5)	0.84(1)	8(2)
	$h_1 : 0.127737$	-0.095(4)	0.933(4)	0.924(4)	-0.011(4)	0.929(4)	0.930(4)	0.929(4)	0.82(1)	10(2)
	$h_2 : 0.124958$	-0.172(4)	0.935(5)	0.906(4)	-0.017(4)	0.919(4)	0.922(4)	0.922(4)	0.82(1)	11(2)
	$h_3 : 0.121051$	-0.257(5)	0.944(5)	0.880(4)	-0.026(5)	0.909(4)	0.915(5)	0.915(5)	0.81(2)	13(2)
	$h_4 : 0.115915$	-0.342(6)	0.965(5)	0.855(5)	-0.031(5)	0.904(5)	0.914(5)	0.914(5)	0.81(2)	15(2)
	$h_5 : 0.109399$	-0.444(8)	1.029(6)	0.853(5)	-0.037(7)	0.930(5)	0.945(6)	0.945(6)	0.84(2)	19(2)
O7	$c : 0.130220$	0.13(2)	0.928(7)		0.13(2)	0.928(7)	0.928(7)	0.928(7)	0.80(2)	5(3)
	$h_1 : 0.127900$	0.11(2)	0.918(7)	0.919(7)	0.18(2)	0.925(8)	0.915(7)	0.910(7)	0.83(2)	6(4)
	$h_2 : 0.124944$	0.02(2)	0.908(8)	0.903(8)	0.17(2)	0.917(9)	0.896(8)	0.889(8)	0.87(2)	9(5)
	$h_3 : 0.120910$	-0.09(2)	0.91(1)	0.887(9)	0.14(2)	0.91(1)	0.88(1)	0.88(1)	0.95(3)	10(6)
	$h_4 : 0.115890$	-0.22(3)	0.96(2)	0.89(1)	0.10(3)	0.94(1)	0.91(1)	0.91(1)	1.02(4)	12(9)
	$h_5 : 0.109400$	-0.30(3)	0.96(2)	0.85(1)	0.09(3)	0.93(1)	0.88(2)	0.89(2)	1.11(4)	$2(1) \times 10^1$

TABLEAU IV.18 – Résultats des extrapolations linéaires à recul nul ($w = 1$) pour tous les facteurs de forme et dans chacun des ensembles, en fonction de la masse (κ_h) du quark lourd h . Rappelons qu'il n'y a pas de donnée pour la désintégration $B_s \rightarrow D_s^*$ pour les ensembles B6 et G8 (comme mentionné en IV. 2.4). Enfin, les erreurs présentées ici sont, comme précédemment, de nature statistiques.

IV. 4.3 Limite du continu

Après toutes ces étapes, nous avons enfin réussi à reconstituer les objets physiques d'intérêt sur réseau. Nous pouvons maintenant déterminer leur valeur dans l'univers physique. Cette discussion fait donc suite à celle de la section IV. 3.3 (pour les corrélateurs à trois points).

Paramétrisation de l'extrapolation

Pour effectuer une extrapolation à la limite du continu, il nous faut prendre en compte tout ce qui rend nos réseaux non-physiques ; l'exemple le plus marquant étant la discrétisation de l'espace temps. De plus, du fait du nombre limité de réseaux à notre disposition, nous devons nous focaliser sur les deux paramètres (de nos réseaux) qui engendrent les plus grandes erreurs systématiques. Nous avons évoqué, pour rappel, la masse du pion et la maille du réseau comme candidats pour évaluer nos erreurs de discrétisation. L'impact qu'ont les bornes d'un univers fini peut également se retrouver dans la masse du pion, mais il est très faible sur des éléments de matrice hadronique entre saveurs lourdes¹². Ainsi, notre extrapolation à la limite du continu s'écrit, comme pour l'élément de matrice de la section IV. 3.3,

$$\mathcal{Q}^{\text{physique}}(\omega) = \alpha + \beta (a_\omega/a_{\beta=5.3})^2 + \gamma (m_\pi^\omega/m_\pi^{\text{physique}})^2 \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (\text{IV.85})$$

La dénomination « $\mathcal{Q}$ » symbolise n'importe laquelle de nos quantités d'intérêts, mais plus précisément, nos facteurs de forme.

Nous aurions aimé pouvoir inclure une autre source d'erreur, qui est la différence de masse entre nos mésons lourd-étrange sur réseau et leur équivalent « physique ». Certes, il n'existe pas de quarks lourds situés entre le *charm* et le *bottom*, mais si nous utilisons l'Eq. IV.7, nous pouvons tout à fait inclure dans notre extrapolation (Eq. IV.85) un terme supplémentaire de type

$$\delta \left(1 - \sum_i \frac{m_{H_s}^\omega(\kappa_i)}{\lambda^i m_{D_s}^{\text{physique}}} \right). \quad (\text{IV.86})$$

Cependant nous ne possédons pas suffisamment d'ensembles pour nous permettre d'inclure une troisième dimension à nos extrapolations. Ainsi, bien que nous ayons tenté d'inclure cette systématique, les résultats des extrapolations étaient trop dispersés et de mauvaise qualité (au sens du χ^2) pour être acceptables. Nous omettons donc cette systématique au profit d'une extrapolation de meilleure qualité, mais avec un biais associé à la masse des mésons H_s .

12. De plus, étudier les effets de volume fini serait complexe ici, car nous ne disposons pas d'un jeu de réseaux où seul le volume varie.

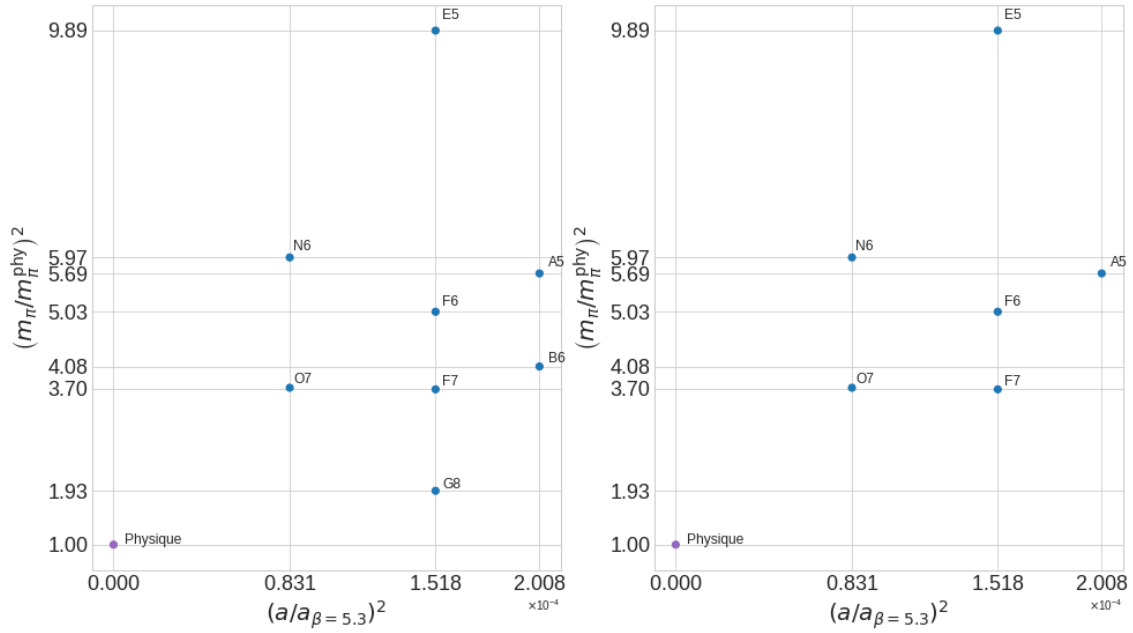


FIGURE IV.11 – Paramètres d’extrapolation à la limite du continu (voir Eq. IV.85) engendrés par nos ensembles. Dans la partie de gauche sont représentés les ensembles pour la désintégration en méson D_s et à droite ceux pour la désintégration en méson D_s^* .

Couverture des ensembles

Dans l’espace des erreurs systématique de discrétisation et chirale, la Figure IV.11 présente nos points (maille en abscisse et masse du pion en ordonnée) pour l’extrapolation des courants V (à gauche) et A (à droite) ; pour ce dernier, nous avons exclu les ensembles B6 et G8 dans le cas de la désintégration en méson D_s^* . Nous observons que nos ensembles quadrillent relativement bien cet espace, c’est-à-dire que les paramètres β et γ ont plusieurs points dans chaque dimension pour être ajustés ; ceci représente un gage de bonne extrapolation et donc, *a priori*, une bonne maîtrise des incertitudes systématiques liées au passage de la limite du continu.

Résultats pour les rapports $\sigma_{\mathcal{G}}^h(1)$ et $\sigma_{h_{A_1}}^h(1)$

Étant donné que les facteurs de forme $\mathcal{G}(1)$ et $h_{A_1}(1)$ ne correspondent pas à un processus de désintégration d’un méson physique (car ils contiennent un quark h différent du quark *bottom*), nous n’allons pas tenter directement de leur donner une valeur physique. Nous allons plutôt utiliser un intermédiaire de calcul. Nous construisons des rapports de ces facteurs de forme pour deux masses

lourdes successives, qui seront utilisés plus bas pour l'obtention des quantités finales. Ainsi, nous aurons, pour la masse lourde numéro h

$$\Sigma_{\mathcal{G}}^h(1) = \frac{\mathcal{G}(1, h)}{\mathcal{G}(1, h+1)} \quad \text{et} \quad \Sigma_{h_{A_1}}^h(1) = \frac{h_{A_1}(1, h)}{h_{A_1}(1, h+1)}. \quad (\text{IV.87})$$

Le [Tableau IV.19](#) donne le résultat des extrapolations à la limite du continu pour ces quantités. Soulignons que pour discuter sans risque de confusion des quantités extrapolées et non-extrapolées, nous notons ici Σ les grandeurs obtenues pour un réseau, et σ leur équivalent dans le continu.

h	α	β	γ	$\chi^2/\text{d.o.f}$	$\sigma_{\mathcal{G}}^h(1)$
0	0.978(1)	-0.010(1)	0.0023(2)	106.20	0.981(1)
1	0.986(1)	-0.015(1)	0.0024(2)	64.70	0.988(1)
2	0.967(2)	0.003(3)	0.0038(5)	61.16	0.971(2)
3	0.976(3)	0.015(2)	0.0028(4)	429.13	0.978(3)
4	1.038(5)	-0.048(5)	0.0028(8)	317.47	1.041(5)

h	α	β	γ	$\chi^2/\text{d.o.f}$	$\sigma_{h_{A_1}}^h(1)$
0	0.983(5)	-0.014(3)	0.0025(6)	116.75	0.986(5)
1	0.991(4)	0.004(3)	0.0001(5)	89.47	0.991(5)
2	0.972(6)	0.03(1)	0.001(1)	179.03	0.973(6)
3	0.977(7)	0.038(5)	0.000(1)	10.54	0.977(7)
4	1.074(9)	-0.09(1)	0.004(2)	8.21	1.078(9)

TABLEAU IV.19 – Pour les différentes masses (κ_h) de quark lourd, valeurs des paramètres α , β et γ utilisés pour l'extrapolation vers le continu ([Eq. IV.85](#)), $\chi^2/\text{d.o.f}$ associés indiquant une bonne convergence de l'extrapolation, et valeur des rapports $\Sigma_{\mathcal{G}}^h(1)$ en haut et $\Sigma_{h_{A_1}}^h(1)$ en bas (voir [Eq. IV.87](#)) extrapolés vers le continu ($\Sigma \rightarrow \sigma$). Les erreurs représentées dans ce tableau sont les erreurs statistiques sur les extrapolations.

Dans le [Tableau IV.20](#), nous donnons les résultats des extrapolations pour les quantités particulières que sont les facteurs de forme pour les désintégrations $D_s \rightarrow D_s$ et $D_s \rightarrow D_s^*$ à recul nul ; nous désignons ces quantités comme « élastique ». La [Figure IV.12](#) est la représentation graphique de cette extrapolation dans le continu pour $\mathcal{G}$ élastique. Comme nous le verrons, le retour à la masse physique du quark *bottom* nécessite de connaître ces deux quantités pour chacun des deux facteurs de forme ([Eq. IV.88](#)). Nous pourrions également trouver en annexe [A.4](#) les autres extrapolations à la limite du continu, notamment celle pour $h_{A_1}^{D_s \rightarrow D_s^*}(1)$, ainsi que celles pour les rapports $\Sigma(1)$.

$\mathcal{Q}$	α	β	γ	$\chi^2/\text{d.o.f}$	continu
$\mathcal{G}^{D_s \rightarrow D_s}(1)$	0.949(9)	-0.086(6)	0.0090(8)	90.22	0.958(9)
$h_{A_1}^{D_s \rightarrow D_s^*}(1)$	0.86(2)	-0.08(2)	0.007(2)	40.68	0.87(2)

TABLEAU IV.20 – Résultats des extrapolations à la limite du continu des facteurs de forme élastiques (pour $H_s = D_s$). Les paramètres de la régression sont ceux de l’Eq. IV.85 et le test de validité est donné par le $\chi^2/\text{d.o.f}$. La dernière colonne correspond aux résultats dans le continu. Les erreurs données ici sont les erreurs statistiques.

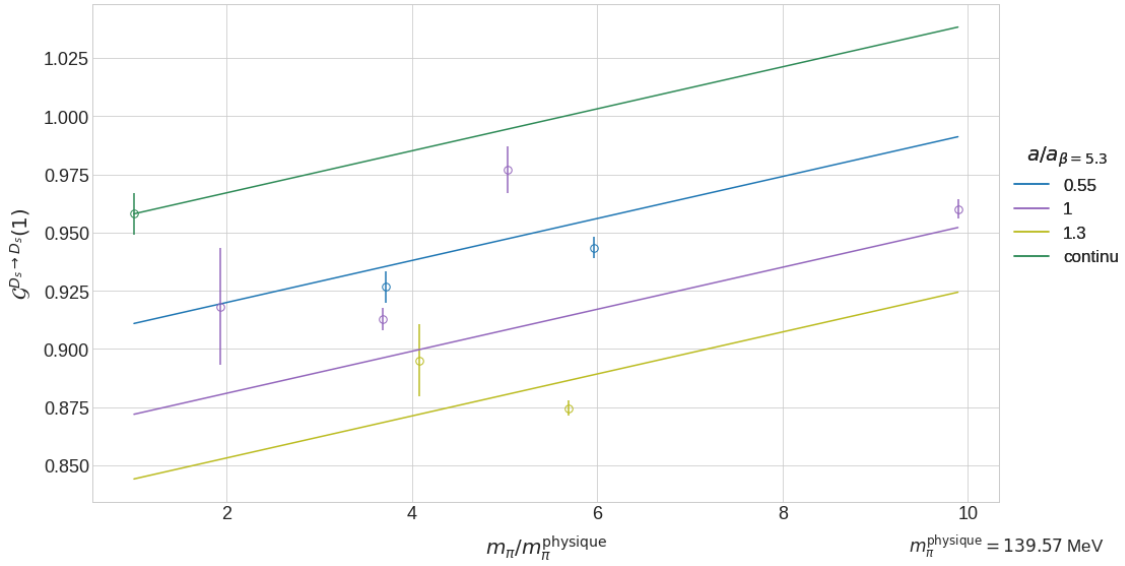


FIGURE IV.12 – Extrapolation à la limite du continu du facteur de forme élastique $\mathcal{G}^{D_s \rightarrow D_s}(1)$.

IV. 4.4 Retour au quark *bottom* physique

Nous arrivons ici à la dernière étape de notre analyse, à savoir le retour à la masse physique du quark *bottom*. Dans la partie précédente, nous avons construit et extrapolé dans le continu des rapports de facteurs de forme σ . Ces derniers ont été réalisés pour appliquer la méthode dite du *step-scaling* : individuellement, les quantités $\mathcal{G}$ et h_{A_1} pour des quarks lourds k_h ne correspondent pas physiquement aux valeurs des facteurs de forme attendus pour les transitions $B_s \rightarrow D_s$ et $B_s \rightarrow D_s^*$. Toutefois, si nous prenons, par exemple pour $\mathcal{G}$, la quantité $\mathcal{G}^{D_s \rightarrow D_s}(1)$ et que nous la multiplions de proche en proche par les rapports $\sigma_{\mathcal{G}}(1)$, nous allons obtenir des facteurs de forme pour une masse de quark lourd de plus en plus proche de la masse réelle du quark b , et ainsi obtenir le facteur de forme de la transition $\mathcal{G}^{B_s \rightarrow D_s}(1)$. Ceci revient donc à appliquer la procédure

suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{B_s \rightarrow D_s}(1) &= \mathcal{G}^{D_s \rightarrow D_s}(1) \prod_h \sigma_{\mathcal{G}}^h(1), \\ h_{A_1}^{B_s \rightarrow D_s^*}(1) &= h_{A_1}^{D_s \rightarrow D_s^*}(1) \prod_h \sigma_{h_{A_1}}^h(1).\end{aligned}\tag{IV.88}$$

Cependant, comme nos données nous fournissent des valeurs fluctuantes pour les rapports σ , nous passons par une dernière astuce de calcul qui consiste à réaliser un ajustement des facteurs σ à l'aide d'une fonction constante. Ceci revient à réaliser une sorte de « moyenne » sur nos rapports que nous notons $\bar{\sigma}$. Nous donnons les résultats de cette régression dans le [Tableau IV.21](#) et la [Figure IV.13](#). Les formules de l'[Eq. IV.88](#) deviennent alors simplement

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{B_s \rightarrow D_s}(1) &= \mathcal{G}^{D_s \rightarrow D_s}(1) \bar{\sigma}_{\mathcal{G}}^K(1), \\ h_{A_1}^{B_s \rightarrow D_s^*}(1) &= h_{A_1}^{D_s \rightarrow D_s^*}(1) \bar{\sigma}_{h_{A_1}}^K(1),\end{aligned}\tag{IV.89}$$

avec K le nombre de rapports calculés plus un, soit $K = 6$. Cette astuce n'est cependant valide que grâce à l'observation d'une non-dépendance de la masse κ_h dans nos rapports σ (relativement aux incertitudes). Une précision accrue de ces rapports pourrait cependant nous montrer une telle dépendance, et une régression avec un paramètre de masse lourde deviendrait alors nécessaire.

Les résultats des diverses limites du continu sont entachés par des points qui biaisent notre analyse. Les points les plus flagrants sont ceux de l'ensemble G8 pour lequel une incertitude et un décalage avec les autres points est à noter ; supprimer le GVEP comme pour N6 ou O7 n'a pas donné de meilleurs résultats. Nous pouvons aussi remarquer dans les extrapolations que les droites à maille fixée sont souvent très éloignées les unes des autres. Il semble ici, au vu des erreurs de discrétisation de nos ensembles, que seul un plus grand nombre d'ensembles aurait pu aider à obtenir de meilleures régressions. Le dernier point à remarquer est que les rapports de facteurs de forme semblent beaux et bien décrire une constante, sauf pour la masse la plus lourde ; j'ai constaté ce biais dans toutes mes analyses, même pour des choix de plateau différents. Nous pouvons supposer que cette dernière masse donne trop de volatilité à nos fonctions de corrélation, pour la statistique et la méthode de rééchantillonnage prise pour cette étude.

$\mathcal{Q}$	$\bar{\sigma}_{\mathcal{Q}}(1)$	$\chi^2/\text{d.o.f}$
$\mathcal{G}$	0.984(5)	0.98
h_{A_1}	0.99(1)	0.99

TABLEAU IV.21 – Résultats de l'extrapolation par fonction constante $\bar{\sigma}$ des rapports de facteurs de forme $\mathcal{G}$ et h_{A_1} dans le continu. L'incertitude est calculée par la régression et le χ^2 réduit est donné comme indicateur de la justesse de la régression.

Dans le [Tableau IV.22](#), nous présentons les résultats finaux de notre étude en physique du B pour les facteurs de forme $\mathcal{G}^{B_s \rightarrow D_s}(1)$ et $\mathcal{F}^{B_s \rightarrow D_s^*}(1)$. Le facteur de forme $\mathcal{G}$ est obtenu via deux

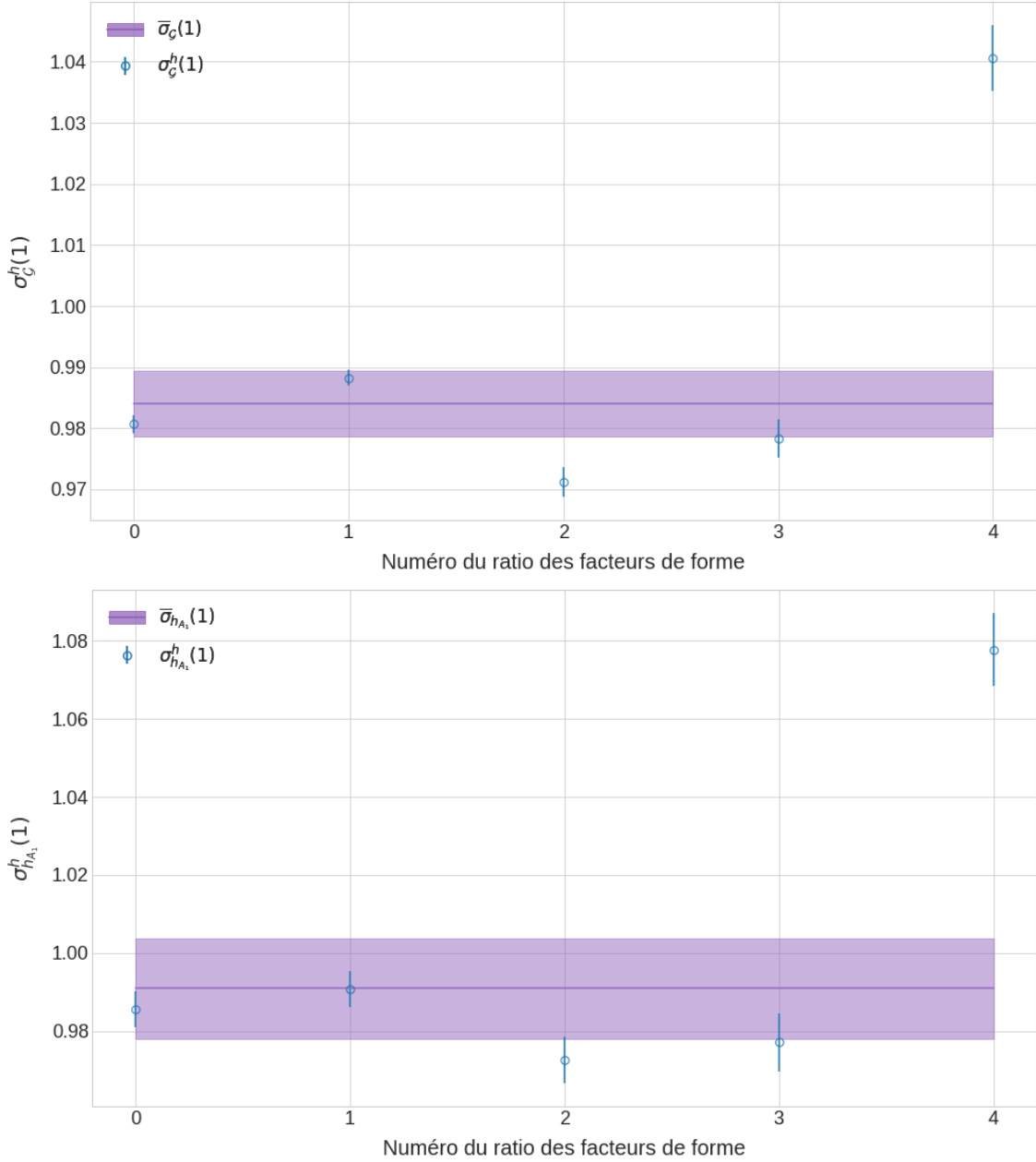


FIGURE IV.13 – Détermination des valeurs moyennes $\bar{\sigma}_{\mathcal{G}}(1)$ (en haut) et $\bar{\sigma}_{h_{A_1}}(1)$ (en bas). L'incertitude donnée par la bande mauve est déterminée par la régression, dont les paramètres peuvent être trouvés dans le [Tableau IV.21](#).

méthodes différentes : la première, dite à élément élastique fixé, fixe à sa valeur théorique sans incertitude $\mathcal{G}^{D_s \rightarrow D_s}(1) = 1$; dans la seconde, nous utilisons simplement nos résultats présentés dans le [Tableau IV.20](#) via l'[Eq. IV.89](#). Comme résultat final pour $\mathcal{G}$, nous prendrons celui de la première méthode. En effet, notre calcul de $\mathcal{G}^{D_s \rightarrow D_s}(1)$ ne sert en réalité qu'à confirmer que nous

$\mathcal{Q}$	élastique fixé à 1	élastique via Tableau IV.20
$\mathcal{G}^{B_s \rightarrow D_s}(1)$	0.91(3)	0.87(3)
$\mathcal{F}^{B_s \rightarrow D_s^*}(1)$		0.82(7)

TABLEAU IV.22 – Résultats finaux de l’analyse de la désintégration $B_s \rightarrow D_s^*$ avec les valeurs pour les facteurs de forme hadroniques $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$, tous deux à recul nul. Les incertitudes données sont le résultat de la propagation quadratique des incertitudes sur les valeurs données en [Tableau IV.21](#) et éventuellement [Tableau IV.20](#) pour la colonne deux. La méthode de la première colonne utilise la valeur théorique du facteurs de forme $\mathcal{G}$ élastique qui vaut un. Pour la deuxième colonne, nous utilisons la valeur que nous avons calculée pour les facteurs de forme élastiques.

retrouvons la valeur théorique connu sans biais¹³. Notons qu’une telle approche n’est pas possible pour $\mathcal{F}$ et rappelons que ce dernier ne peut être obtenu qu’à la limite de recul nul, où nous avons l’équivalence $\mathcal{F}(1) = h_{A_1}(1)$. Le [Tableau IV.22](#) souligne que les résultats pour $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ souffrent d’une grande incertitude. Nous discuterons dans la section [IV. 5.2](#) des perspectives d’amélioration pour réduire ces erreurs dans de prochaines analyses. De plus, dans l’état actuel de ces incertitudes, il ne nous a pas été possible d’estimer de manière compétitive la dépendance des facteurs de forme en l’énergie de recul du méson D_s . Pour rappel, la dépendance énergétique des facteurs de forme peut être obtenue sur réseau en extrapolant le paramètre ρ^2 (utilisé pour connaître un facteur de forme à recul non-nul) à partir de la connaissance de cette même quantité à recul nul, comme nous l’avons vu en [Eq. III.30](#) pour $\mathcal{G}$.

IV. 5 Discussions des résultats et perspectives

IV. 5.1 Résumé et contextualisation des travaux

Dans ce chapitre, nous avons pu voir le long processus de calcul qui rend l’analyse de la désintégration du méson B_s en méson $D_s^{(*)}$ possible. Comme nous l’avons vu dans la partie [IV. 1](#), il a d’abord fallu plusieurs études pour déterminer la valeur de la maille, la masse des quarks de la mer, ainsi que celle des quarks *strange* et *charm*, et cela dans chacun des ensembles à notre disposition. Il a également fallu déterminer la valeur de quantités comme les constantes de renormalisation ou la masse PCAC. Toutes ces étapes préliminaires correspondent à des travaux publiés. Notre étude, arrivant en « bout de chaîne », n’aurait pu avoir lieu sans ces résultats et sans les données fournies par le groupe CLS. C’est d’ailleurs pour cette raison que notre analyse a porté sur des ensembles à $N_f = 2$, car le calcul de toutes ces quantité préliminaires (à notre étude)

13. Si nous avons une statistique infinie et aucune erreur de discrétisation, nous devrions retrouver ce résultat. De ce fait, prendre la valeur théorique nous permet de nous affranchir des erreurs statistiques et systématiques sur $\mathcal{G}^{D_s \rightarrow D_s}(1)$.

avait déjà pris plusieurs années, et le travail n’est pas encore fini pour des ensembles plus récents.

Afin de réaliser notre étude via la méthode des quarks de masses intermédiaires, nous avons du fournir un effort de simulation supplémentaire pour construire les fonctions de corrélation des mésons formés par ces quarks. Nous avons, de plus, opté pour une étude de la dépendance dans l’énergie de recul $w(\theta)$ du méson issu de la simulation, ce qui nous a obligé à simuler un ensemble de fonctions de corrélation supplémentaires pour chaque valeur de θ . Comme nous l’avons dit en introduction de ce chapitre, c’est le calcul des fonctions de corrélation à trois points qui, au vu du temps de calcul à notre disposition, a été le facteur limitant pour acquérir une statistique plus importante. Par la suite, c’est cette statistique restreinte — ainsi que les erreurs de discrétisation conséquentes pour les masses de quarks h les plus lourdes — qui nous ont poussés à utiliser des méthodes robustes d’analyse de nos données, comme le GEVP. Utiliser la méthode du GEVP a rendu obligatoire, dans le même temps, la génération de nouvelles fonctions de corrélation avec *smearing*, dont nous avons caractérisé l’efficacité dans les discussions de la partie [IV. 3](#).

Finalement, le manque de statistique dans certains ensembles, ainsi que la possession de seulement huit ensembles, nous ont contraints à ne pas pouvoir faire une étude plus poussée des erreurs systématiques qui entachent nos résultats. Nous avons seulement vérifié que faire varier les paramètres comme le plateau, t_0 et t_{fix} pour le GEVP, nous redonnent des résultats proches de ceux présentés (proche signifie ici compatible avec les erreurs statistiques). Malgré cela, les résultats qui ont pu être obtenus sont gageurs du succès de la méthode et de la promesse d’une amélioration future de certains de ces résultats, sous quelques conditions que nous allons maintenant discuter.

Les points forts de notre méthode

Dans la littérature, seulement trois équipes différentes ont investigué les facteurs de forme liés aux désintégrations que nous avons vues dans ce chapitre. La collaboration HPQCD, a déterminé $\mathcal{G}^{B_s \rightarrow D_s}(1)$ [[110](#); [111](#)] et $\mathcal{F}^{B_s \rightarrow D_s}(1)$ [[112–114](#)] avec des fermions *Highly Improved Staggered Quark* (HISQ) pour les quarks u , d , s et c . La collaboration MILC a également donné une valeur pour le facteur $\mathcal{F}^{B_s \rightarrow D_s}(1)$ [[115](#)]. La méthode de la collaboration HPQCD est une amélioration des fermions *staggered* dont nous avons brièvement parlé dans la conclusion du chapitre [I](#). Cette équipe utilise également une action de quark non-relativiste pour simuler directement le quarks b . Comme nous l’avons expliqué, cette action non-relativiste, bien que correcte, introduit de nouvelles systématiques et complexités qui peuvent entacher les résultats. Par ailleurs, ces auteurs ont directement déterminé $\mathcal{F}$ à recul nul et n’ont pas réalisé d’étude sur l’énergie de recul. Nous pensons que, même avec des données qui deviennent plus bruyantes quand $|\theta|$ et κ_h augmentent, nos extrapolations permettent un calcul plus précis et un meilleur contrôle des erreurs systématiques que ce calcul direct (à la masse du b). En outre, comme nous l’avons vu en [III. 3](#), il est aussi souhaitable pour certaines applications de connaître la dépendance énergétique des facteurs de forme. Dans notre étude, nous nous sommes cantonnés à une région très proche du recul nul. Cependant, avec l’expérience gagnée dans ces travaux (et avec plus de temps de calcul), il serait envisageable d’explorer les régions de plus fort recul pour une détermination non-perturbative de la dépendance dans l’énergie

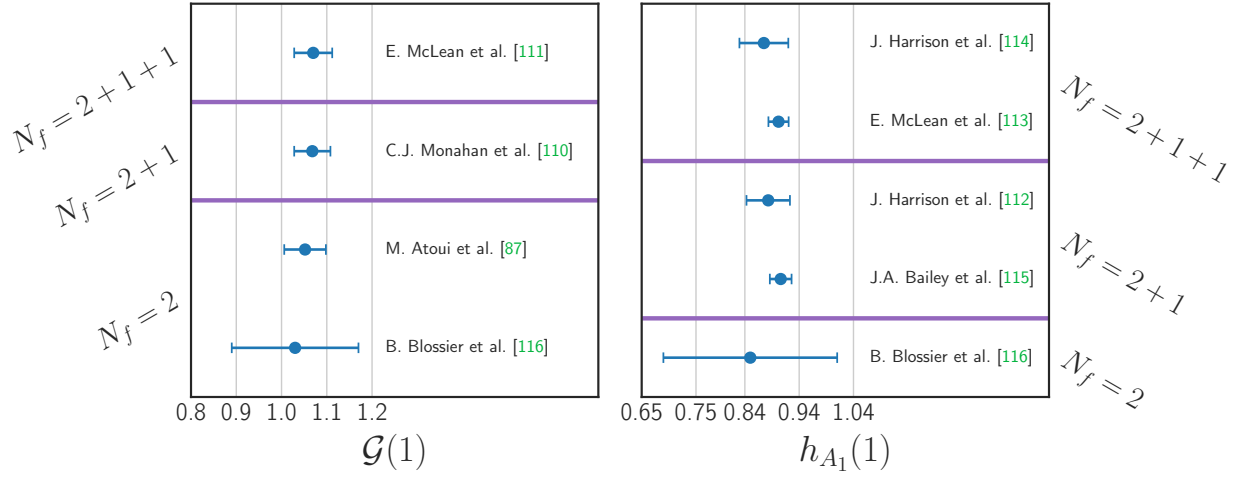


FIGURE IV.14 – Comparaison des différents résultats publiés avec ceux de notre étude (également publiés) pour $\mathcal{G}(1)$ (à gauche) et $h_{A_1}(1)$ (à droite).

de recul des facteurs de forme.

Le troisième travail réalisé par un groupe de la collaboration ETMC [87], quant à lui, est de loin le plus similaire à ce que nous avons réalisé ici. La première amélioration que nous apportons est le calcul de $\mathcal{F}(1)$, ce qui, d’après les Eq. III.1, permet une détermination plus précise de $|V_{cb}|$. La seconde amélioration notable est un plus large panel d’ensembles : bien que cette collaboration ait en pratique treize ensembles à disposition, ils n’ont utilisé en réalité que six couples de valeurs a et Λ , leurs réseaux étant dégénérés en masse des quarks de la mer. Nous avons pu néanmoins nous appuyer sur certaines de leurs conclusions. Leur étude a en effet conclu que leurs résultats ne montraient pas de dépendance notable en κ_{sea} , ce qui nous a conduit à ne pas investiguer cette dépendance. Ceci nous a donc permis de nous concentrer sur un plus grand nombre de réseaux. Nous avons aussi montré l’importance de résoudre le GEVP pour isoler correctement les états fondamentaux de nos fonctions de corrélation, ce qui constitue une amélioration substantielle. Finalement, nous pouvons dire simplement que les mailles utilisées dans nos ensembles sont plus fines et que nos réseaux sont eux plus volumineux.

L’ensemble des résultats de la littérature pour $\mathcal{G}(1)$ et $h_{A_1}(1)$, ainsi que ceux issus de notre article (voir ci-après), sont montrés dans la Figure IV.14. Si, dans notre approche, l’ajout du GEVP et la méthode des masses intermédiaires semblent théoriquement pouvoir donner des résultats aux incertitudes plus contrôlées, la faible statistique (qui a induit des biais supplémentaires dans notre analyse) nous donne malheureusement des résultats finaux non compétitifs avec les résultats précédents.

Article issu de ces travaux

En LQCD, il n'est pas rare de mener les recherches à plusieurs et en double aveugle. À cet égard, les résultats que j'ai donnés dans ce chapitre ont également été produits par B. Blossier et J. Neuendorf (doctorant de B. Blossier), et nous avons vérifié la concordance de nos résultats seulement à certaines étapes clés. Si nous faisons cela, c'est que ces études requièrent de développer des programmes assez complexes pour étudier les réseaux, et il n'est pas rare de trouver des erreurs de programmation. De plus, certains des algorithmes utilisés dans nos programmes peuvent ne pas être optimaux pour résoudre un problème donné. Ainsi, en produisant trois fois cette étude avec des algorithmes différents pour chaque personne¹⁴, nous nous sommes assurés que tous nos programmes convergeaient vers les mêmes résultats et étaient donc dépourvus d'erreurs impactant les résultats.

Les travaux que nous avons présentés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication [116]. Les résultats de cette publication se basent sur l'ensemble des méthodes détaillées dans ce chapitre, à l'exception de la méthode de ré-échantillonnage, où la méthode Γ a été utilisée. Celle-ci nous a semblé être la plus pertinente à présenter. En effet, cette méthode conduit à des longueurs de plateau plus grandes qu'avec le Jackknife, ce qui permet, au vu de notre faible statistique, d'obtenir de meilleures régressions (en termes de χ^2), et probablement de ne pas sous-estimer les erreurs statistiques. Je donne dans le **Tableau IV.23** les résultats finaux pour les facteurs de forme $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ à recul nul, correspondant à mon analyse ou à celle utilisée dans la publication.

	Résultats de mon analyse	Résultats de l'article [116]
$\mathcal{G}(1)$	0.91(3)	1.03(14)
$\mathcal{F}(1)$	0.82(7)	0.85(16)

TABLEAU IV.23 – Présentation et comparaison des facteurs de forme $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ (à recul nul) obtenus dans mon analyse (méthode de ré-échantillonnage Jackknife, ce chapitre) et dans l'article que nous publions (méthode Γ). Nous rappelons que seule l'erreur statistique est incluse dans ces résultats.

La différence entre les résultats obtenus pour la méthode Γ et ceux obtenus par la méthode Jackknife s'explique, selon moi, par la statistique initiale sur les configurations. En effet, nous avons, dans certains ensembles, trop peu de configurations pour atteindre une distribution gaussienne sur certaines quantités. Ainsi, si ces deux méthodes doivent théoriquement converger vers les mêmes valeurs centrales et incertitudes, dans le cas limite d'une trop faible statistique, elles peuvent différer. Nous avons ainsi trouvé des grandeurs intermédiaires (telles les fonctions de corrélations) ayant des valeurs différentes, et comme les systématiques ne sont pas non plus les mêmes (dans les deux analyses), ceci a pu conduire à des différences de valeurs centrales importantes sur les quantités finales.

14. Par exemple, j'ai utilisé le solveur de GEVP proposé par la librairie **Eigen** quand B. Blossier a utilisé celui de la librairie **Lapack**. Nous avons aussi utilisé des méthodes de ré-échantillonnage différentes (Jackknife pour moi, méthode Γ pour J. Neuendorf).

L'ensemble des réseaux (Tableau IV.3) que nous avons utilisés permet une estimation correcte des valeurs des facteurs de forme. Nos résultats pourraient donc *a priori* être comptabilisés dans les moyennes mondiales réalisées par le groupe FLAG. Cependant, le fait que nous n'ayons pas discuté les erreurs systématiques et que nous ayons des erreurs statistiques importantes font que nos résultats sont discutables et n'influenceront que faiblement les moyennes des grandeurs $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Néanmoins, ceci est déjà très satisfaisant pour un travail préliminaire, et permet d'espérer le succès des perspectives de recherches futures que nous discutons ci-après.

IV. 5.2 Perspectives

Partant de notre expertise acquise au cours de ces travaux, nous tentons de présenter ici quelques idées d'améliorations pour des recherches futures en physique du B sur réseau. Afin d'ordonner ces idées, nous commençons avec les possibles améliorations numériques, partant de la moins complexe/coûteuse à celles qui représentent les plus grands défis. Nous parlerons aussi brièvement d'autres observables de la physique du B accessibles par la LQCD, dans un contexte BSM, avant de clore enfin ce chapitre.

Propositions d'améliorations numériques

Nous avons expliqué au cours de la section IV. 2.4 que nos ensembles B6 et G8 avaient souffert d'une erreur de simulation basique. Celle-ci nous avait obligé à exclure ces ensembles des résultats pour la désintégration $B_s \rightarrow D_s^*$. Une première amélioration simple, mais toutefois conséquente, consisterait à simuler à nouveau, pour ces ensembles, les fonctions de corrélation pour la désintégration en méson vectoriel. Si la simulation de ces corrélateurs est triviale (nous avons tous les paramètres de la simulation et les programmes d'analyse prêts), son coût reste malheureusement important, de l'ordre de plusieurs dizaines de millions d'heures CPU. N'ayant pas à disposition ces heures de calcul, il semble donc plus raisonnable d'aller de l'avant et de préparer les programmes de simulation pour de nouvelles analyses, en les rendant plus robustes à ce type d'erreur.

Dans le même ordre de coût et de complexité, avec plus de temps de calcul, nous aurions aussi pu simuler les fonctions de corrélation $\langle H_s | P | D_s^* \rangle$ qui sont, comme nous l'avons vu en IV. 3.2, indispensables à l'amélioration de Symanzik sur les fonctions à trois points pseudo-scalaire en vecteur. Cela nous permettrait de soustraire les erreurs de discrétisation d'ordre $\mathcal{O}(a)$ de toutes les quantités, y compris à recul non-nul, que nous avons calculées dans la désintégration par courant axial. Au vu des erreurs pour les masses de quark h les plus lourdes, ceci constituerait une amélioration conséquente des résultats.

Ces deux premiers points sont deux améliorations qui se font au moment où nous débutons notre analyse, et ils restent donc dépendants des résultats des étapes précédentes, c'est-à-dire la détermination des grandeurs et des paramètres des ensembles CLS. Une amélioration qui affecterait

au niveau le plus fondamental ces ensembles, serait donc de simuler plus de configurations de champs de jauge à ces étapes antérieures. Le but serait in fine de réduire l'erreur statistique, mais aussi, puisque nous avons des quantités bruyantes, de réduire certains biais sur la détermination des grandeurs sensibles à ces biais. Une possibilité, autre que l'ajout de configurations gluoniques dans nos ensembles, serait de simuler d'autres ensembles, idéalement, avec une discrétisation plus fine. Ceci obligerait malgré tout à reproduire les différentes étapes des études de la collaboration CLS sur ces nouveaux ensembles. Que ce soit pour doubler le nombre de configuration ou bien pour ajouter deux ensembles à une maille¹⁵ inférieure à 0.0483 fm, le coût serait de l'ordre de la centaine de millions d'heures CPU. Pour autant, des ensembles à maille plus fine pourraient être l'une des clés pour la recherche de précision dans nos résultats sur les facteurs de forme, puisque ces ensembles réduiraient considérablement les erreurs pour les κ_h les plus lourds.

Nous avons dans notre étude pu vérifier la stabilité des différentes régressions sur les énergies, les constantes de couplage, ainsi que sur les éléments de matrice des fonctions à deux et trois points (selon les variations des paramètres t_0 et t_{fix} pour le GEVP, et dans certains cas pour les domaines du plateau). Une étude plus précise des erreurs systématiques sur les facteurs de forme n'a cependant pas pu aboutir à cause des fluctuations de nos données. Les études futures devront nécessairement amener une plus grande robustesse des ensembles statistiques face à ces fluctuations, afin de pouvoir estimer de manière complète et rigoureuse l'ensemble des incertitudes sur les grandeurs. Ces dernières, rappelons-le, ont pour but de trancher les questions fondamentales relatives à la recherche de nouvelle physique.

Une autre amélioration, qui vient systématiquement à l'esprit en LQCD, consiste à simuler de nouveaux réseaux avec *a minima* une troisième, voire une quatrième, saveur de quark simulée dynamiquement. Là encore, cela impliquerait de reprendre à zéro la paramétrisation des réseaux, et parfois aussi, de développer de nouveaux programmes d'analyse. Le temps de calcul devant être utilisé serait alors bien supérieur à ceux que nous avons évoqués jusque là dans cette discussion. Néanmoins, réaliser de telles analyses serait une amélioration considérable, en particulier pour les quantités que nous avons calculées. En effet, ces quantités reposent sur les structures de la QCD que sont les mésons B_s et D_s , pour lesquels une partie de la physique est contenue dans les boucles formées de quarks *charm* et *strange*, boucles qui sont exclues dans l'approximation *quenched*.

Finalement, comme nous l'évoquions ci-dessus, simuler des réseaux avec des mailles plus fine est une des clés pour l'étude du quarks b et des quarks intermédiaires h . Mais cela implique également de simuler des réseaux de plus grande taille pour garder des effets de volume finis négligeables. Or, c'est peut-être sur ce dernier point qu'une rupture technologique reste à faire. En effet, le coût en calcul des fonctions à trois points augmente drastiquement avec le volume, ainsi que la mémoire vive devant être utilisée pour un calcul. Ces augmentations sont au point où de nouveaux algorithmes de simulation des fonctions de corrélation à trois points doivent être élaborés. De plus, si les centres de calcul continuent leur mutation vers le « tout GPU », cela rendra plus complexe l'obtention du nombre d'heures de calcul pour les corrélateurs à trois points pour des ensembles d'une taille de l'ordre de 200×100^3 , qui ne peuvent, à l'heure actuelle, être calculés sur GPU.

15. Voir le [Tableau IV.3](#) pour rappel de notre paramétrisation des ensembles.

Des facteurs de forme aux autres observables

Les résultats pour $\mathcal{F}(1)$ et $\mathcal{G}(1)$, que nous avons donnés au cours de ce chapitre, sont essentiels pour la recherche en physique du B. Nous n'avons pas donné d'estimation pour V_{cb}^{excl} du fait que notre travail est, comme nous l'avons dit, une preuve de concept. Cependant, le simple fait de pouvoir donner une valeur plus précise à V_{cb}^{excl} constituerait un grand pas en avant et répondrait à certaines questions majeures pour la physique BSM. Comme vu dans le chapitre III, une valeur plus précise permettrait de trancher sur le désaccord entre les méthodes exclusives et inclusives du calcul de V_{cb} . Ce faisant, la divergence résolue, cela conduirait à une estimation plus précise de toutes les quantités déduites de cet élément de matrice (que nous avons vu en III. 2). Ceci pourrait alors donner des pistes plus précises pour la recherche de modèles BSM.

En outre, les données et les méthodes que nous avons employées pour aboutir aux deux facteurs de forme hadroniques s'utilisent de manière très similaire pour le calcul des constantes de désintégration leptoniques relatives au mésons B_s et B_s^* . Nous pouvons citer à nouveau les travaux effectués en [96] avec les mêmes données et la même stratégie de simulation du quark *bottom* à l'aide de quarks intermédiaires h . Rappelons qu'il existe des désaccords, encore non-significatifs, entre théorie et expérience dans certains rapports de section efficace (voir III. 3). Étudier des rapports fait que ces derniers ne sont pas impactés par les incertitude de V_{cb} . Néanmoins, les constantes de désintégration entrent dans l'estimation théorique de ces rapports. Ces constantes de désintégration, ainsi déterminées sur réseau, donneraient une clé pour trancher sur les anomalies trouvées dans le secteur du B.

Finalement, si comme nous l'avons dit dans la partie précédente, nous étions en mesure d'étudier un plus large spectre d'impulsion, il semble plausible que nous puissions, à l'aide de notre méthode, chercher à estimer des facteurs de forme tel f_T (voir III. 4), qui trouvent leur origine dans des interactions de type BSM.

Conclusion générale

Résumé et enjeux des travaux de cette thèse

LQCD, une théorie de plus en plus prégnante

La LQCD est aujourd’hui le seul moyen de résolution *ab initio* de la QCD dans son domaine de basse énergie. En effet, à ces énergies, l’utilisation pourtant si courante de la théorie des perturbations est rendue difficile, voire impossible, sur le plan théorique. Si ce premier argument fort en faveur de la LQCD suffit à motiver son utilisation et son développement, il est également pris pour acquis que la LQCD, dans sa formulation telle que vue au chapitre **I**, ne souffre d’aucun problème théorique. En réalité, si la LQCD reste imparfaite, cela est entièrement imputable aux problèmes numériques que nous avons montrés, dans les grandes lignes, aux chapitres **I** et **IV** : la discrétisation d’un espace-temps fini entache les résultats issus de cette discipline d’erreurs systématiques difficiles à estimer. D’aucuns penseront, du fait de ces erreurs, que la LQCD n’est alors pas plus compétitive que les modèles *ad hoc* de description de la matière hadronique à basse énergie. Pourtant, c’est bien là le second point fort de ce formalisme. En effet, ces erreurs sont liées à la puissance de calcul, ce qui nous donne la certitude qu’avec un temps de calcul plus important, ces erreurs s’amenuiseront : dans un futur proche, elles devraient devenir plus petites que les erreurs des autres modèles et de l’expérience.

Renormalisation, une étape clé en quête d’amélioration

Il pourrait sembler frustrant de devoir simplement attendre la construction de nouveaux super-calculateurs pour voir le champ des possibles s’ouvrir ou pour améliorer les résultats de sa discipline. Fort heureusement, de nombreux aspects restent à creuser. Premièrement, il est possible de chercher de nouvelles formulations de l’action ou de nouveaux algorithmes qui, à temps de calcul égaux, donnent de meilleures discrétisations ; ceci a été illustré il y a plusieurs années par l’ajout du terme de *clover* dans l’action de Wilson. Deuxièmement, il est également possible de chercher de nouvelles formulations, cette fois au niveau des quantités étudiées. C’est à ce deuxième point que nous nous sommes essayés dans nos travaux sur le schéma de renormalisation RI-SMOM (voir le chapitre **II**).

En effet, les schémas traditionnellement utilisés en LQCD (RI-MOM et RI'MOM) comportent leur lot d'erreurs systématiques (que nous avons détaillées) qui sont par ailleurs difficiles à réduire. La méthode de la fonctionnelle de Schrödinger (que nous n'avons pas détaillée) ne souffre pas de ces erreurs, mais est quant à elle extrêmement difficile et coûteuse à implémenter. C'est pour réduire les erreurs des schémas RI-MOM et RI'MOM que nous avons essayé d'implémenter le nouveau schéma RI-SMOM. Comme nous l'avons vu, nos travaux sur la suppression des artefacts hypercubiques n'ont pas encore abouti. Mais de nombreuses pistes restent à explorer pour finaliser cette implémentation. Nous avons l'espoir que ces travaux permettent, à terme, un calcul plus précis des constantes de renormalisation (RC). Finalement, pour étudier les erreurs systématiques de ces schémas, j'ai calculé des valeurs de référence pour les constantes Z_V et Z_A , ainsi que pour les rapports Z_A/Z_V et Z_P/Z_S . Cette contribution m'a permis de participer à la publication (à venir) [64] des résultats des RC de la collaboration ETMC (pour ses nouveaux ensembles à $N_f = 2+1+1$). Si le calcul des RC et la minimisation de leurs erreurs sont si importants, c'est bien parce que nous avons besoin de la valeur de ces constantes pour la détermination de grandeurs physiques qui ont besoin d'être renormalisées. Il s'en suit que l'erreur des RC va se propager sur ces autres grandeurs physiques. Notre calcul s'inscrit donc bien dans la démarche plus globale d'augmentation de la précision sur les grandeurs calculées sur réseau, sans autres simulations plus coûteuses.

Physique de la saveur pour la recherche BSM

Si la LQCD s'est initialement restreinte aux calculs de grandeurs peu impactées par les erreurs de discrétisation (comme la masse de certains hadrons), la diminution des erreurs de discrétisation a permis à la LQCD d'approcher des grandeurs plus complexes et dont l'importance pour la recherche de nouvelle physique est plus essentielle. S'il est bien un secteur dont les chances de découverte de nouvelle physique sont grandes, c'est celui de la physique de la saveur du B. Dans le chapitre III, nous avons montré les enjeux de la recherche de précision pour des quantités, comme l'élément de la matrice CKM V_{cb} ou les facteurs de forme $\mathcal{G}(w)$ et $\mathcal{F}(w)$. Si ces quantités ne sont pas les seules intéressantes, nous nous sommes focalisés sur leur cas, puisque ce sont sur ces quantités que nos travaux ont porté. Nous avons ainsi montré l'importance des calculs sur réseau pour la détermination de V_{cb} . Ces calculs devraient permettre, dans un futur proche, de résoudre la tension entre les méthodes inclusive et exclusive, réduisant ainsi l'erreur totale sur V_{cb} et sur toutes les grandeurs qui font intervenir cet élément. Nous avons également pu voir qu'une tension entre théorie et expérience existait dans certains rapports de désintégration appelés anomalies. Ces anomalies pourraient soit se résorber ou confirmer un signe de nouvelle physique ; ceci serait fait grâce, notamment, aux calculs sur réseau des quantités citées ci-dessus. Finalement, nous avons évoqué la grande flexibilité des simulations numériques LQCD, qui permettent un calcul direct de courant BSM sur certaines grandeurs, comme les anomalies.

Preuve de concept pour la recherche de précisions en physique du B

Le reste de mon travail de thèse, qui porte sur une application du calcul (sur réseau) des facteurs de forme hadronique $\mathcal{G}(w)$ et $\mathcal{F}(w)$, a été synthétisé dans le chapitre [IV](#). Nous y avons d’abord décrit les détails de notre simulation, ainsi que les particularités soulevées par la simulation du *bottom*. Dans la suite, nous avons mis à profit les explications données dans le chapitre [I](#), pour mettre en contexte nos travaux, via le calcul des fonctions de corrélation à deux et à trois points. Nous avons alors détaillé différentes techniques de calcul qui ont permis de contourner les difficultés induites par la simulation du quark b sur réseau. Comme nous l’avons évoqué, ces difficultés se traduisent par des fonctions de corrélation (en particulier celles à trois points) très bruyantes. Malgré tout, la preuve faite par l’obtention de résultats comparables aux autres déterminations de ces grandeurs, permet de justifier la demande de temps de calcul important pour (i) une simulation avec d’autres saveurs dynamiques ($N_f = 2 + 1$, voire $N_f = 2 + 1 + 1$), (ii) une maille plus fine et surtout (iii) une statistique plus large (de manière à réduire le bruit dans les données). Nous avons également montré l’utilité du GEVP pour réduire les fluctuations induites par les quarks lourds h (représentant le quark b à des masses différentes), ce qui constitue une amélioration de la méthode des masses de quark lourd croissantes. La discussion sur la renormalisation de nos éléments de matrice (extraits des corrélateurs à trois points) a illustré l’importance des travaux menés dans la renormalisation en LQCD (lien avec mes travaux réalisés dans le [II](#)). L’ensemble de ces travaux a donné lieu à la publication d’un article [\[116\]](#). Précisons, qu’à l’instar de la démarche sur RI-SMOM, notre but a été d’essayer une méthode alternative qui réduit considérablement les systématiques incontrôlées de nos estimations de $\mathcal{G}(w)$ et $\mathcal{F}(w)$, en tout cas par rapport à celles faites en HQET. Nos ensembles statistiques, quoiqu’assez peu concurrentiels au regard des réseaux les plus modernes, ont permis de réaliser une preuve de concept, quant à la possibilité de calculer les facteurs de forme hadronique en physique du B sans introduction de méthodes *ad hoc*. Comme tout démonstrateur, le but est de motiver un projet plus ambitieux, qui permettrait d’évaluer, sans équivoque possible, les quantités en tension – que sont $|V_{cb}|$ et l’anomalie $R(D_s)$ – dans ce domaine de la saveur. Nous avons donc montré qu’il y a, à l’heure actuelle, en LQCD et en physique du B, les motivations et les premiers éléments de réponse pour les recherches de précision dans ce secteur de la physique des particules, et qui, nous l’espérons, mènera à la découverte de nouvelle physique.

Perspectives de la LQCD à moyen et long terme

Les travaux que j’ai menés pendant ma thèse, d’une part sur le calcul des constantes de renormalisation et d’autre part sur les grandeurs $\mathcal{G}(w)$ et $\mathcal{F}(w)$, s’inscrivent dans un cadre plus grand de recherche de précision pour la compréhension de la matière hadronique. En effet, après bientôt cinquante ans d’existence, le SM reste entièrement compatible avec l’expérience. Pourtant, la précision expérimentale n’a fait qu’augmenter, jusqu’à devenir meilleure que la précision théorique ; c’est donc aujourd’hui à cette précision théorique d’augmenter. Comme nous l’avons illustré avec la différence entre $V_{cb}^{\text{inclusive}}$ et $V_{cb}^{\text{exclusive}}$, les modèles *ad hoc* de description de la matière hadronique

à basse énergie commencent à trouver leur limite. Avec toute la puissance de calcul aujourd’hui disponible, la LQCD semble donc pouvoir devenir la voie royale pour les calculs de précision des grandeurs théoriques. Nous avons aussi essayé de montrer que les travaux sur la renormalisation et sur les calculs des facteurs de forme sont nécessaires et nourrissent la recherche de nouvelle physique. Force est de constater que les promesses et les attentes de la LQCD sont très grandes, et ce même à moyen terme, puisque nous parlons de la prochaine décennie.

Nous avons beaucoup parlé des erreurs de discrétisation comme problème majeur de la LQCD, et du fait que la LQCD est une théorie *ab initio*. Néanmoins, ce qui fait que la LQCD apparaît encore comme peu fiable à certains, ce sont les approximations présentes dans cette théorie. En effet, certaines saveurs de quark sont encore absentes ou ne sont générées que statiquement (approximation *quenched*). Par ailleurs, les simulations numériques restent insuffisamment fines (au sens de la maille) et volumineuses pour redonner la masse physique du pion. D’autre part, la symétrie chirale n’est pas correctement brisée sur réseau et doit être réécrite (fermions de Ginsparg-Wilson). Nous pouvons aussi citer à un horizon plus lointain le problème de la QED, qui parfois donne une contribution à certaines observables de la matière hadronique ; ces contributions, au fur et à mesure de la diminution des incertitudes, deviendront de moins en moins négligeables. Ces quatre grandes *limitations* théoriques ont en fait toutes déjà été résolues individuellement sur réseau, voire en couplant deux (voir la discussion en I. 4). Cependant, il n’est pas toujours garanti que restaurer la symétrie chirale seule ne donne une meilleure valeur pour une certaine quantité, car ajouter la QED pourrait donner des effets qui compensent les premiers. C’est justement ce dernier point qui rend les attentes de la LQCD encore plus grandes. En effet, la prochaine décennie devrait voir l’avènement des réseaux qui lèveront toutes ces approximations ; nous verrons aussi très certainement apparaître les premières simulations à cinq saveurs dynamiques. Quant au quark *top*, nous pouvons régler la question en nous disant qu’il n’intervient de manière importante que dans des phénomènes de haute énergie (donc qui peuvent être traités perturbativement).

Finalement, revenons aux perspectives pour la nouvelle physique. Si un lot de théories venait à émerger comme remplaçant au SM, il serait possible de réaliser des simulations avec ces Lagrangiens BSM. Ceci permettrait d’estimer les propriétés des nouvelles particules, afin de les rechercher plus précisément dans les accélérateurs ou dans le cosmos.

Bibliographie

- [1] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, and R. Turlay, *Evidence for the 2π Decay of the K_2^0 Meson*, *Phys. Rev. Lett.* **13** (Jul, 1964) 138–140. Cité    la page 2
- [2] **KTeV** Collaboration, A. Alavi-Harati, I. F. Albuquerque, T. Alexopoulos, et al., *Observation of Direct CP Violation in $K_{S,L} \rightarrow \pi\pi$ Decays*, *Phys. Rev. Lett.* **83** (Jul, 1999) 22–27, [[hep-ex/9905060](#)]. Cité    la page 2
- [3] **BaBar** Collaboration, B. Aubert, M. Bona, D. Boutigny, et al., *Observation of CP Violation in $B_0 \rightarrow K^+\pi^-$ and $B_0 \rightarrow \pi^+\pi^-$* , *Phys. Rev. Lett.* **99** (Jul, 2007) [[hep-ex/0703016](#)]. Cité    la page 2
- [4] **BaBar** Collaboration, B. Aubert, D. Boutigny, J.-M. Gaillard, et al., *Observation of CP Violation in the B^0 Meson System*, *Phys. Rev. Lett.* **87** (Aug, 2001) 091801, [[hep-ex/0107013](#)]. Cité    la page 2
- [5] **HFLAV** Collaboration, Y. Amhis, S. Banerjee, E. Ben-Haim, et al., *Averages of b -hadron, c -hadron, and τ -lepton properties as of 2018*, *Eur. Phys. J. C* **81** (Mar, 2021) 226, [[1909.12524](#)]. Cité    la page 2
- [6] K. G. Wilson, *Confinement of quarks*, *Phys. Rev. D* **10** (Oct, 1974) 2445–2459. Cité aux pages 2, 15, et 17
- [7] J. N. Guenther, *Overview of the QCD phase diagram – Recent progress from the lattice*, 2021. Cité    la page 5
- [8] L. Del Debbio, T. Giani, J. Karpie, et al., *Neural-network analysis of Parton Distribution Functions from Ioffe-time pseudodistributions*, *JHEP* **2021** (Feb, 2021) 138, [[2010.03996](#)]. Cité    la page 5
- [9] C. Gattringer and C. B. Lang, *Quantum chromodynamics on the lattice : an introductory presentation*. No. 788 in Lecture notes in physics. Springer, Heidelberg ; New York, 2010. Cité aux pages 6, 27, 46, 47, et 87
- [10] T. van Ritbergen, J. A. M. Vermaseren, and S. A. Larin, *The Four loop beta function in quantum chromodynamics*, *Phys. Lett. B* **400** (1997) 379–384, [[hep-ph/9701390](#)]. Cité    la page 8

- [11] I. Hinchliffe and A. Manohar, *The QCD Coupling Constant*, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci* **50** (2000) 643–678, [[hep-ph/0004186](#)]. Cité aux pages 8 et 9
- [12] **Particle Data Group** Collaboration, P. Zyla, R. Barnett, J. Beringer, et al., *Review of Particle Physics*, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2020** (Aug, 2020). 083C01. Cité aux pages 9, 41, 64, 68, 70, 73, 76, et 106
- [13] R. Sommer, *A new way to set the energy scale in lattice gauge theories and its application to the static force and α_s in $SU(2)$ Yang-Mills theory*, *Nucl. Phys. B* **411** (1994) 839–854, [[hep-lat/9310022](#)]. Cité à la page 10
- [14] L. A. Harland-Lang, A. D. Martin, P. Motylinski, and R. S. Thorne, *Uncertainties on α_S in the MMHT2014 global PDF analysis and implications for SM predictions*, *Eur. Phys. J. C* **75** (Sep, 2015) 435, [[1506.05682](#)]. Cité à la page 11
- [15] R. Feynman, A. Hibbs, and D. Styer, *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill College, 1965. Cité aux pages 12 et 13
- [16] M. Creutz, *Monte Carlo study of quantized $SU(2)$ gauge theory*, *Phys. Rev. D* **21** (Apr, 1980) 2308–2315. Cité à la page 14
- [17] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, et al., *Equation of State Calculations by Fast Computing Machines*, *J. Chem. Phys.* **21** (1953) 1087–1092. Cité à la page 14
- [18] S. Duane, A. Kennedy, B. J. Pendleton, and D. Roweth, *Hybrid Monte Carlo*, *Phys. Lett. B* **195** (1987) 216–222. Cité à la page 14
- [19] M. A. Clark and A. D. Kennedy, *Accelerating Dynamical-Fermion Computations Using the Rational Hybrid Monte Carlo Algorithm with Multiple Pseudofermion Fields*, *Phys. Rev. Lett.* **98** (Jan, 2007) 051601, [[hep-lat/0608015](#)]. Cité à la page 14
- [20] M. Lüscher and P. Weisz, *On-shell improved lattice gauge theories*, *Commun. Math. Phys.* **97** (1985) 59. [Erratum : *Commun.Math.Phys.* 98, 433 (1985)]. Cité à la page 18
- [21] K. G. Wilson, *Quarks and Strings on a Lattice*, in *New Phenomena in Subnuclear Physics : Part A* (A. Zichichi, ed.), pp. 69–142. Springer US, Boston, MA, 1977. Cité à la page 19
- [22] K. Symanzik, *Continuum limit and improved action in lattice theories : (I). Principles and φ^4 theory*, *Nucl. Phys. B* **226** (1983) 187–204. Cité à la page 20
- [23] B. Sheikholeslami and R. Wohlert, *Improved continuum limit lattice action for QCD with wilson fermions*, *Nucl. Phys. B* **259** (1985) 572–596. Cité à la page 21
- [24] P. Dimopoulos, R. Frezzotti, C. Michael, et al., *$O(a^2)$ cutoff effects in lattice Wilson fermion simulations*, *Phys. Rev. D* **81** (Feb, 2010) 034509, [[0908.0451](#)]. Cité à la page 21
- [25] M. Lüscher, S. Sint, R. Sommer, et al., *Non-perturbative $O(a)$ improvement of lattice QCD*, *Nucl. Phys. B* **491** (Apr., 1997) 323–343, [[hep-lat/9609035](#)]. Cité à la page 21

- [26] **APE** Collaboration, M. Albanese, F. Costantini, G. Fiorentini, et al., *Glueball masses and string tension in lattice qcd*, *Phys. Lett. B* **192** (1987) 163–169. Cité    la page 23
- [27] A. Hasenfratz and F. Knechtli, *Flavor symmetry and the static potential with hypercubic blocking*, *Phys. Rev. D* **64** (Jul, 2001) 034504, [[hep-lat/0103029](#)]. Cité    la page 23
- [28] C. Morningstar and M. Peardon, *Analytic smearing of SU(3) link variables in lattice QCD*, *Phys. Rev. D* **69** (Mar, 2004) 054501, [[hep-lat/0311018](#)]. Cité    la page 23
- [29] M. Teper, *Cooling and confinement in lattice gauge theory*, *Nucl. Phys. B* **411** (1994) 855–874. Cité    la page 23
- [30] M. Lüscher, *Future applications of the Yang-Mills gradient flow in lattice QCD*, *PoS LATTICE2013* (2014) 016, [[1308.5598](#)]. Cité    la page 23
- [31] R. Sommer, *Scale setting in lattice QCD*, *PoS LATTICE2013* (2014) 015, [[1401.3270](#)]. Cité    la page 23
- [32] S. Gusken, *A Study of smearing techniques for hadron correlation functions*, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **17** (1990) 361–364. Cité    la page 25
- [33] **Hadron Spectrum** Collaboration, J. J. Dudek, R. G. Edwards, M. J. Peardon, et al., *Toward the excited meson spectrum of dynamical QCD*, *Phys. Rev. D* **88** (2013) 094505, [[1309.2608](#)]. Cité    la page 25
- [34] **UKQCD** Collaboration, C. R. Allton, C. T. Sachrajda, R. M. Baxter, et al., *Gauge invariant smearing and matrix correlators using Wilson fermions at Beta = 6.2*, *Phys. Rev. D* **47** (1993) 5128–5137, [[hep-lat/9303009](#)]. Cité    la page 25
- [35] P. T. Matthews and A. Salam, *The Green’s functions of quantised fields*, *Nuovo Cim.* **12** (Oct, 1954) 563–565. Cité    la page 27
- [36] W. Detmold and K. Orginos, *Nuclear correlation functions in lattice QCD*, *Phys. Rev. D* **87** (Jun, 2013) 114512, [[1207.1452](#)]. Cité    la page 33
- [37] C. Michael, K. Ottnad, and C. Urbach, *η and η' masses and decay constants from lattice QCD with 2+1+1 quark flavours*, *PoS LATTICE2013* (2014) 253, [[1311.5490](#)]. Cité    la page 33
- [38] D. Becirevic, M. Fedele, I. Nisandzic, and A. Tayduganov, *Lepton Flavor Universality tests through angular observables of $\bar{B} \rightarrow D^{(*)} \ell \bar{\nu}$ decay modes*, [1907.02257](#). Cité aux pages 34 et 78
- [39] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, *No Go Theorem for Regularizing Chiral Fermions*, *Phys. Lett. B* **105** (1981) 219–223. Cité    la page 39
- [40] P. H. Ginsparg and K. G. Wilson, *A Remnant of Chiral Symmetry on the Lattice*, *Phys. Rev. D* **25** (1982) 2649. Cité    la page 39

- [41] D. B. Kaplan, *A method for simulating chiral fermions on the lattice*, *Phys. Lett. B* **288** (Aug, 1992) 342–347, [[hep-lat/9206013](#)]. Cité à la page 39
- [42] χ QCD Collaboration, G. Wang, J. Liang, T. Draper, et al., *Lattice Calculation of Pion Form Factor with Overlap Fermions*, [2006.05431](#). Cité à la page 39
- [43] **RBC, UKQCD** Collaboration, Z. Bai, T. Blum, P. Boyle, et al., *Standard Model Prediction for Direct CP Violation in $K \rightarrow \pi\pi$ Decay*, *Phys. Rev. Lett.* **115** (Nov, 2015) 212001, [[1505.07863](#)]. Cité à la page 39
- [44] S. Aoki, K.-I. Ishikawa, N. Ishizuka, et al., *1 + 1 + 1 flavor QCD+QED simulation at the physical point*, *Phys. Rev. D* **86** (Aug, 2012) 034507, [[1205.2961](#)]. Cité à la page 39
- [45] A. Duncan, E. Eichten, and R. Sedgewick, *Computing electromagnetic effects in fully unquenched qcd*, *Phys. Rev. D* **71** (May, 2005) 094509, [[hep-lat/0405014](#)]. Cité à la page 40
- [46] T. Aoyama, N. Asmussen, M. Benayoun, et al., *The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model*, *Phys. Rept.* **887** (2020) 1–166, [[2006.04822](#)]. Cité à la page 40
- [47] **Muon g-2** Collaboration, B. Abi, T. Albahri, S. Al-Kilani, et al., *Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm*, *Phys. Rev. Lett.* **126** (Apr, 2021) 141801, [[2104.03281](#)]. Cité à la page 40
- [48] S. Borsanyi, Z. Fodor, J. N. Guenther, et al., *Leading hadronic contribution to the muon magnetic moment from lattice QCD*, *Nature* **593** (Apr, 2021) 51–55, [[2002.12347](#)]. Cité à la page 40
- [49] M. Padmanath, *Heavy baryon spectroscopy from lattice QCD*, [1905.10168](#). Cité à la page 41
- [50] M. Constantinou, A. Courtoy, M. A. Ebert, et al., *Parton distributions and lattice QCD calculations : toward 3D structure*, [2006.08636](#). Cité à la page 41
- [51] T. Izubuchi, H. Ohki, and S. Syritsyn, *Computing Nucleon Electric Dipole Moment from lattice QCD*, 2020. Cité à la page 42
- [52] **Flavour Lattice Averaging Group** Collaboration, S. Aoki, Y. Aoki, D. Bečirević, et al., *FLAG Review 2019*, *Eur. Phys. J. C* **80** (Feb, 2020) 113. Cité aux pages 42, 43, et 88
- [53] G. Martinelli, C. Pittori, C. Sachrajda, et al., *A general method for non-perturbative renormalization of lattice operators*, *Nucl. Phys. B* **445** (Jul, 1995) 81–105, [[hep-lat/9411010](#)]. Cité à la page 46
- [54] K. Jansen, C. Liu, M. Lüscher, et al., *Non-perturbative renormalization of lattice QCD at all scales*, *Phys. Lett. B* **372** (Apr, 1996) 275–282, [[hep-lat/9512009](#)]. Cité à la page 46
- [55] E. Franco and V. Lubicz, *Quark mass renormalization in the $\overline{MS}$ and RI schemes up to the NNLO order*, *Nucl. Phys. B* **531** (Oct, 1998) 641–651, [[hep-ph/9803491](#)]. Cité à la page 46

- [56] Y. Aoki, P. A. Boyle, N. H. Christ, et al., *Nonperturbative renormalization of quark bilinear operators and BK using domain wall fermions*, *Phys. Rev. D* **78** (Sep, 2008) 054510, [[0712.1061](#)]. Cit    la page [50](#)
- [57] C. Sturm, Y. Aoki, N. H. Christ, et al., *Renormalization of quark bilinear operators in a momentum-subtraction scheme with a nonexceptional subtraction point*, *Phys. Rev. D* **80** (Jul, 2009) 014501, [[0901.2599](#)]. Cit    la page [50](#)
- [58] C. Alexandrou, S. Bacchio, P. Charalambous, et al., *Simulating twisted mass fermions at physical light, strange, and charm quark masses*, *Phys. Rev. D* **98** (Sep, 2018) 054518, [[1807.00495](#)]. Cit    la page [52](#)
- [59] A. Shindler, *Twisted mass lattice QCD*, *Phys. Rept.* **461** (May, 2008) 37–110, [[0707.4093](#)]. Cit    la page [53](#)
- [60] C. Alexandrou, S. Bacchio, G. Bergner, et al., *Ratio of kaon and pion leptonic decay constants with $N_f = 2 + 1 + 1$ Wilson-clover twisted-mass fermions*, [2104.06747](#). Cit    la page [54](#)
- [61] **ALPHA** Collaboration, R. Frezzotti, P. A. Grassi, S. Sint, and P. Weisz, *Lattice QCD with a chirally twisted mass term*, *JHEP* **08** (2001) 058, [[hep-lat/0101001](#)]. Cit    la page [54](#)
- [62] K. Osterwalder and E. Seiler, *Gauge Field Theories on the Lattice*, *Annals Phys.* **110** (1978) 440. Cit    la page [55](#)
- [63] **ETM** Collaboration, M. Constantinou, P. Dimopoulos, R. Frezzotti, et al., *Non-perturbative renormalization of quark bilinear operators with $N_f = 2$ (tmQCD) Wilson fermions and the tree-level improved gauge action*, *JHEP* **08** (Aug, 2010) 068, [[1004.1115](#)]. Cit    la page [55](#)
- [64] **ETMC** Collaboration, na, *Non-perturbative renormalisation of quark bilinear operators with $N_f = 2 + 1 + 1$ Wilson-clover twisted mass fermions*, *   para  tre* (na). Cit    aux pages [55](#) et [150](#)
- [65] B. Blossier, P. Boucaud, M. Brinet, et al., *Renormalization of quark propagators from twisted-mass lattice QCD at $N_f = 2$* , *Phys. Rev. D* **83** (Apr, 2011) 074506, [[1011.2414](#)]. Cit    aux pages [57](#) et [58](#)
- [66] M. Antonelli, D. Asner, D. Bauer, et al., *Flavor physics in the quark sector*, *Phys. Rept.* **494** (Sep, 2010) 197–414, [[0907.5386](#)]. Cit    aux pages [64](#) et [129](#)
- [67] A. Sirlin, *Large m_W , m_Z behaviour of the $O(\alpha)$ corrections to semileptonic processes mediated by W* , *Nucl. Phys. B* **196** (1982) 83–92. Cit    la page [65](#)
- [68] R. Aaij, B. Adeva, M. Adinolfi, et al., *Measurement of the Ratio of the $B^0 \rightarrow D^{*-} \tau^+ \nu_\tau$ and $B^0 \rightarrow D^{*-} \mu^+ \nu_\mu$ Branching Fractions Using Three-Prong τ -Lepton Decays*, *Phys. Rev. Lett.* **120** (Apr, 2018) 171802, [[1708.08856](#)]. Cit    aux pages [66](#) et [76](#)

- [69] S. Hirose, T. Iijima, I. Adachi, et al., *Measurement of the τ lepton polarization and $R(D^*)$ in the decay $\bar{B} \rightarrow D^* \tau^- \bar{\nu}_\tau$ with one-prong hadronic τ decays at Belle*, *Phys. Rev. D* **97** (Jan, 2018) 012004, [[1709.00129](#)]. Cité à la page 66
- [70] J. P. Lees, V. Poireau, V. Tisserand, et al., *Measurement of an excess of $\bar{B} \rightarrow D^{(*)} \tau^- \bar{\nu}_\tau$ decays and implications for charged Higgs bosons*, *Phys. Rev. D* **88** (Oct, 2013) 072012, [[1303.0571](#)]. Cité à la page 66
- [71] N. Cabibbo, *Unitary Symmetry and Leptonic Decays*, *Phys. Rev. Lett.* **10** (1963) 531–533. Cité à la page 68
- [72] M. Kobayashi and T. Maskawa, *CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction*, *Prog. Theor. Phys.* **49** (1973) 652–657. Cité à la page 68
- [73] A. Bazavov, C. Bernard, C. Bouchard, et al., *$B_{(s)}^0$ -mixing matrix elements from lattice QCD for the Standard Model and beyond*, *Phys. Rev. D* **93** (Jun, 2016) 113016, [[1602.03560](#)]. Cité à la page 69
- [74] P. Ball and R. Zwicky, *New results on $B \rightarrow \pi, K, \eta$ decay form factors from light-cone sum rules*, *Phys. Rev. D* **71** (Jan, 2005) 014015, [[hep-ph/0406232](#)]. Cité à la page 70
- [75] I. I. Bigi, M. Shifman, N. G. Uraltsev, and A. Vainshtein, *QCD predictions for lepton spectra in inclusive heavy flavor decays*, *Phys. Rev. Lett.* **71** (Jul, 1993) 496–499, [[hep-ph/9304225](#)]. Cité à la page 70
- [76] J. Chay, H. Georgi, and B. Grinstein, *Lepton energy distributions in heavy meson decays from QCD*, *Phys. Lett. B* **247** (1990) 399–405. pas de citations
- [77] A. V. Manohar and M. B. Wise, *Inclusive semileptonic and polarized Λ_b decays from QCD*, *Phys. Rev. D* **49** (Feb, 1994) 1310–1329, [[hep-ph/9308246](#)]. Cité à la page 70
- [78] L.-L. Chau and W.-Y. Keung, *Comments on the Parametrization of the Kobayashi-Maskawa Matrix*, *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984) 1802. Cité à la page 71
- [79] M. Atoui, *Semileptonic B decays into charmed $D^{(*)}$ mesons from Lattice QCD*. Theses, Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, Dec., 2013. N° DU : 2413 N°EDSF : 776. Cité à la page 71
- [80] L. Wolfenstein, *Parametrization of the Kobayashi-Maskawa Matrix*, *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 1945. Cité à la page 71
- [81] C. Jarlskog, *Commutator of the Quark Mass Matrices in the Standard Electroweak Model and a Measure of Maximal CP Violation*, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 1039. Cité à la page 73
- [82] K. Kiers and A. Soni, *Improving constraints on $\tan \beta/m_H$ using $B \rightarrow D \tau \bar{\nu}$* , *Phys. Rev. D* **56** (Nov, 1997) 5786–5793, [[hep-ph/9706337](#)]. Cité à la page 75

- [83] **HPQCD** Collaboration, J. Harrison, C. T. Davies, and A. Lytle, $R(J/\psi)$ and $B_c^- \rightarrow J/\psi \ell^- \bar{\nu}_\ell$ Lepton Flavor Universality Violating Observables from Lattice QCD, *Phys. Rev. Lett.* **125** (Nov, 2020) 222003, [[2007.06956](#)]. Cité à la page 76
- [84] I. Caprini, L. Lellouch, and M. Neubert, *Dispersive bounds on the shape of form factors*, *Nucl. Phys. B* **530** (Oct, 1998) 153–181, [[hep-ph/9712417](#)]. Cité à la page 76
- [85] S. Fajfer, J. F. Kamenik, and I. Nišandžić, *On the $B \rightarrow D^* \tau \bar{\nu}_\tau$ sensitivity to new physics*, *Phys. Rev. D* **85** (May, 2012) 094025, [[1203.2654](#)]. Cité à la page 76
- [86] L. Di Luzio, A. Greljo, and M. Nardecchia, *Gauge leptoquark as the origin of B-physics anomalies*, *Phys. Rev. D* **96** (Dec, 2017) 115011, [[1708.08450](#)]. Cité à la page 76
- [87] M. Atoui, V. Morénas, D. Bečirević, and F. Sanfilippo, $B_s \rightarrow D_s \ell \nu_\ell$ near zero recoil in and beyond the Standard Model, *Eur. Phys. J. C* **74** (May, 2014) 2861, [[1310.5238](#)]. Cité aux pages 78, 88, et 144
- [88] **CLS** Collaboration, “Coordinated Lattice Simulations.” Cité aux pages 82, 83, et 187
- [89] P. Fritzsch, F. Knechtli, B. Leder, et al., *The strange quark mass and Lambda parameter of two flavor QCD*, *Nucl. Phys. B* **865** (Dec, 2012) 397–429, [[1205.5380](#)]. Cité aux pages 82, 84, et 85
- [90] J. Heitger, G. M. von Hippel, S. Schaefer, and F. Virotta, *Charm quark mass and D-meson decay constants from two-flavour lattice QCD*, *PoS LATTICE2013* (2014) 475, [[1312.7693](#)]. Cité aux pages 82 et 85
- [91] **ALPHA** Collaboration, S. Lottini, *Chiral behaviour of the pion decay constant in $N_f = 2$ QCD*, *PoS LATTICE2013* (2014) 315, [[1311.3081](#)]. Cité à la page 83
- [92] **UKQCD** Collaboration, M. Foster and C. Michael, *Hadrons with a heavy color-adjoint particle*, *Phys. Rev. D* **59** (Apr, 1999) 094509, [[hep-lat/9811010](#)]. Cité à la page 86
- [93] **UKQCD** Collaboration, C. McNeile and C. Michael, *Decay width of light quark hybrid meson from the lattice*, *Phys. Rev. D* **73** (Apr, 2006) 074506, [[hep-lat/0603007](#)]. Cité à la page 86
- [94] **ALPHA** Collaboration, J. Heitger and R. Sommer, *Non-perturbative Heavy Quark Effective Theory*, *JHEP* **02** (Feb, 2004) 022, [[hep-lat/0310035](#)]. Cité à la page 87
- [95] G. P. Lepage, L. Magnea, C. Nakhleh, et al., *Improved nonrelativistic QCD for heavy-quark physics*, *Phys. Rev. D* **46** (Nov, 1992) 4052–4067, [[hep-lat/9205007](#)]. Cité à la page 87
- [96] R. Balasubramanian and B. Blossier, *Decay constant of B_s and B_s^* mesons from $N_f = 2$ lattice QCD*, 2020. Cité aux pages 88 et 148
- [97] B. Efron, *The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1982. Cité aux pages 90 et 91

- [98] **ALPHA** Collaboration, U. Wolff, *Monte Carlo errors with less errors*, *Comput. Phys. Commun.* **156** (2004) 143–153, [[hep-lat/0306017](#)]. [Erratum : *Comput. Phys. Commun.* 176, 383 (2007)]. Cité aux pages 91 et 92
- [99] B. Blossier, G. von Hippel, T. Mendes, et al., *Efficient use of the Generalized Eigenvalue Problem*, *PoS LATTICE2008* (2008) 135, [[0808.1017](#)]. Cité aux pages 101, 102, et 115
- [100] B. Blossier, J. Heitger, and M. Post, *Leptonic D_s decays in two-flavor lattice QCD*, *Phys. Rev. D* **98** (Sep, 2018) 054506, [[1803.03065](#)]. Cité    la page 103
- [101] T. Burch, C. Hagen, C. B. Lang, et al., *Excitations of single-beauty hadrons*, *Phys. Rev. D* **79** (Jan, 2009) 014504, [[0809.1103](#)]. Cité    la page 103
- [102] J. Bulava, M. Donnellan, and R. Sommer, *On the computation of hadron-to-hadron transition matrix elements in lattice qcd*, *JHEP* **01** (Jan, 2012) 140, [[1108.3774](#)]. Cité    la page 115
- [103] M. D. Morte, R. Hoffmann, and R. Sommer, *Non-perturbative improvement of the axial current for dynamical wilson fermions*, *JHEP* **03** (Mar, 2005) 029, [[hep-lat/0503003](#)]. Cité    la page 117
- [104] S. Sint and P. Weisz, *Further results on $O(a)$ improved lattice QCD to one-loop order of perturbation theory*, *Nucl. Phys. B* **502** (Sep, 1997) 251–268, [[hep-lat/9704001](#)]. Cité    la page 117
- [105] M. D. Morte, R. Hoffmann, F. Knechtli, et al., *Non-perturbative renormalization of the axial current with dynamical Wilson fermions*, *JHEP* **2005** (Jul, 2005) 007, [[hep-lat/0505026](#)]. Cité    la page 117
- [106] M. Della Morte, R. Sommer, and S. Takeda, *On cutoff effects in lattice QCD from short to long distances*, *Phys. Lett. B* **672** (Mar, 2009) 407–412, [[0807.1120](#)]. Cité    la page 117
- [107] **ALPHA** Collaboration, M. Guagnelli, R. Petronzio, J. Rolf, et al., *Non-perturbative results for the coefficients b and $b-b$ in $O(a)$ improved lattice QCD*, *Nucl. Phys. B* **595** (Feb, 2001) 44–62, [[hep-lat/0009021](#)]. Cité    la page 118
- [108] J. A. Bailey, A. Bazavov, C. Bernard, et al., *$B \rightarrow D\ell\nu$ form factors at nonzero recoil and $|V_{cb}|$ from 2+1-flavor lattice QCD*, *Phys. Rev. D* **92** (Aug, 2015). Cité    la page 128
- [109] M. Neubert, *Heavy hadron weak decay form factors to next-to-leading order in*, *Nucl. Phys. B* **416** (Apr, 1994) 786–800, [[hep-ph/9307216](#)]. Cité    la page 129
- [110] C. J. Monahan, H. Na, C. M. Bouchard, et al., *$B_s \rightarrow D_s\ell\nu$ form factors and the fragmentation fraction ratio f_s/f_d* , *Phys. Rev. D* **95** (Jun, 2017) 114506, [[1703.09728](#)]. Cité aux pages 143 et 144

- [111] E. McLean, C. T. H. Davies, J. Koponen, and A. T. Lytle, *$B_s \rightarrow D_s \ell \nu$ Form Factors for the full q^2 range from Lattice QCD with non-perturbatively normalized currents*, *Phys. Rev. D* **101** (2020) 074513, [[1906.00701](#)]. Cité aux pages [143](#) et [144](#)
- [112] J. Harrison, C. T. Davies, and M. Wingate, *Lattice QCD calculation of the $B_{(s)} \rightarrow D_{(s)}^* \ell \nu$ form factors at zero recoil and implications for $|V_{cb}|$* , *Phys. Rev. D* **97** (Mar, 2018) 054502, [[1711.11013](#)]. Cité aux pages [143](#) et [144](#)
- [113] E. McLean, C. T. H. Davies, A. T. Lytle, and J. Koponen, *Lattice QCD form factor for $B_s \rightarrow D_s^* \ell \nu$ at zero recoil with non-perturbative current renormalisation*, *Phys. Rev. D* **99** (2019) 114512, [[1904.02046](#)]. Cité à la page [144](#)
- [114] **HPQCD** Collaboration, J. Harrison and C. T. H. Davies, *$B_s \rightarrow D_s^*$ Form Factors for the full q^2 range from Lattice QCD*, [2105.11433](#). Cité aux pages [143](#) et [144](#)
- [115] **MILC** Collaboration, J. A. Bailey, A. Bazavov, C. M. Bernard, et al., *Update of $|V_{cb}|$ from the $\bar{B} \rightarrow D^* \ell \bar{\nu}$ form factor at zero recoil with three-flavor lattice QCD*, *Phys. Rev. D* **89** (2014) 114504, [[1403.0635](#)]. Cité aux pages [143](#) et [144](#)
- [116] B. Blossier, P.-H. Cahue, J. Heitger, et al., *On the extraction of $B_s \rightarrow D_s^{(*)}$ form factors from $N_f = 2$ lattice QCD*, [2110.10061](#). Cité aux pages [144](#), [145](#), et [151](#)

Annexe

Annexe A : Résultats complémentaire de la physique du B

Dans cette annexe, nous donnons un complément d'information et de résultats concernant la physique de la saveur. Ainsi nous trouverons, dans un premier temps (A.1), la Figure A.1 pour un élément de matrice dans l'ensemble E5, plus complexe à ajuster par une régression que l'élément élastique présenté au chapitre IV. Nous donnons ensuite les résultats pour les ensembles non présentés dans le chapitre IV, tout d'abord pour les éléments de matrice $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_i$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ (A.2), puis pour les facteurs de forme $f^\pm$, f_0 , $h^\pm$, $\mathcal{G}$ et $h_{A_{1,3}}$ (A.3). Finalement, nous donnons les représentations graphiques (A.4), à la limite du continu, des quantités détaillées en IV. 4 (et dont les résultats numériques ont été présentés dans les Tableau IV.19 et Tableau IV.20).

Notons d'abord que les facteurs de forme $h_{A_{1,3}}$ ne sont pas donnés pour B6 ainsi que pour G8, pour cause de données défectueuses. De plus, l'extrapolation relative à la quantité h_{A_3} n'est pas donnée ici, car elle a été jugée trop bruyante (voir IV. 4.2). Enfin, comme nous l'avons déjà mentionné, les résultats issus de N6 et O7 ont été obtenus sans GEVP et directement avec l'élément le plus *smearé* 80_80 (instabilité des corrélateurs dans le cas du GEVP).

A.1 Fonctions de corrélation à trois points

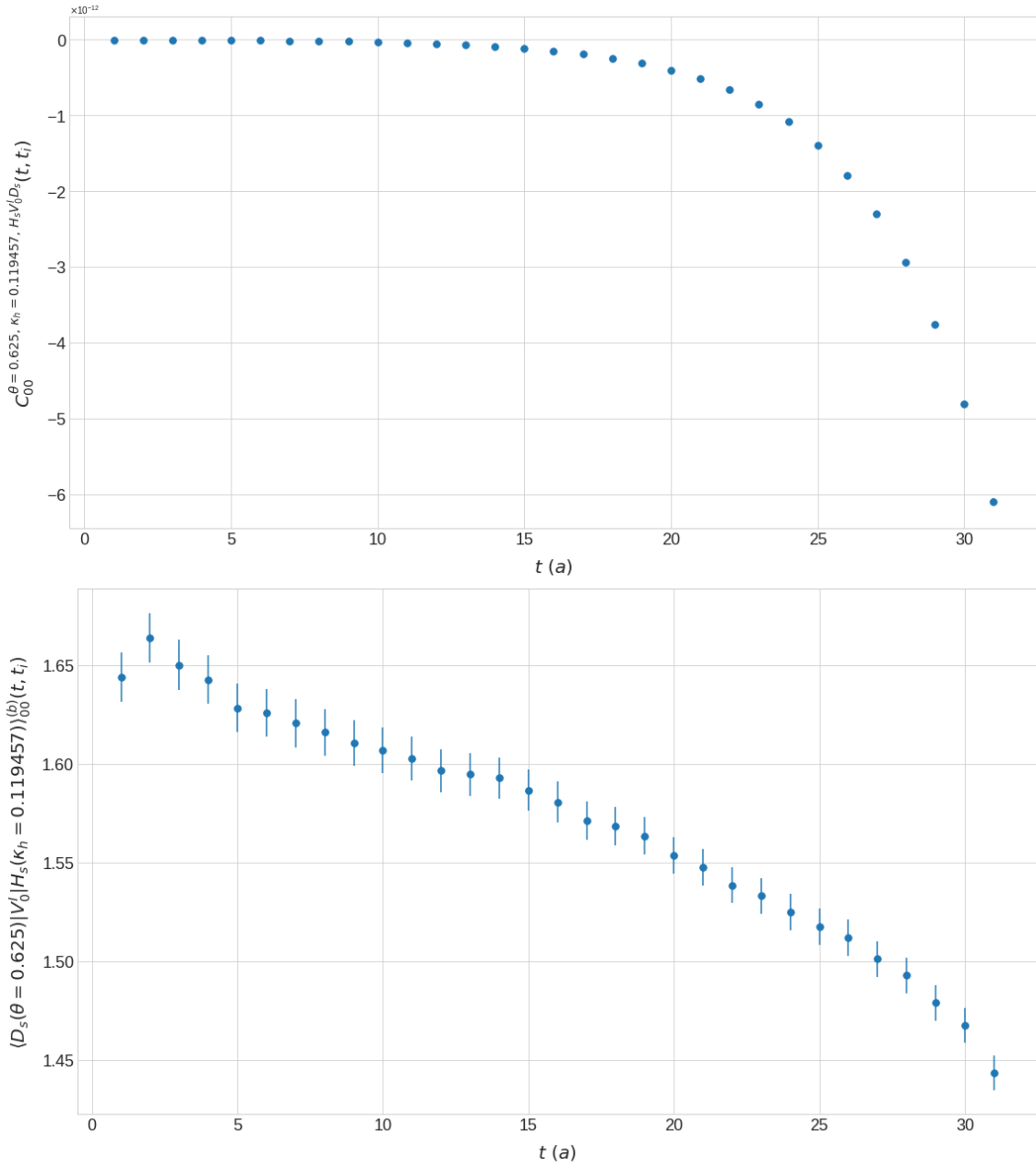


FIGURE A.1 – Représentation identique à celle de la [Figure IV.6](#), pour un élément non élastique dans l'ensemble E5.

A.2 Résultats pour chaque ensemble des éléments de matrice

κ_h	θ	$\mathcal{M}_0^{I,(r)}$	$\mathcal{M}_i^{I,(r)}$	plt	$\mathcal{A}^{(r)}$	plt	$\mathcal{B}^{(r)}$	plt
$\kappa_c = 0.125310$	0.000000	1.309(5)	0.0034(5)	[9, 29]	1.24(1)	[18, 28]	0.010(2)	[6, 18]
	0.150000	1.309(5)	0.01157(8)	[9, 29]	1.24(1)	[18, 28]	0.020(2)	[6, 18]
	0.300000	1.307(5)	0.0229(2)	[9, 29]	1.24(1)	[18, 28]	0.021(2)	[6, 18]
	0.525000	1.306(5)	0.0389(4)	[9, 29]	1.24(1)	[18, 28]	0.023(3)	[6, 18]
	0.750000	1.304(5)	0.0553(5)	[9, 29]	1.24(1)	[18, 28]	0.027(4)	[6, 18]
	1.050000	1.287(5)	0.0805(8)	[9, 29]	1.26(1)	[18, 28]	-0.014(5)	[6, 18]
	1.275000	1.276(5)	0.0972(9)	[9, 29]	1.27(1)	[18, 28]	-0.013(5)	[6, 18]
$\kappa_{h_1} = 0.121340$	0.000000	1.403(5)	0.0060(7)	[8, 24]	1.32(1)	[14, 28]	0.010(2)	[4, 16]
	0.150000	1.402(5)	0.0130(1)	[8, 24]	1.32(1)	[14, 28]	0.023(2)	[4, 16]
	0.300000	1.400(5)	0.0255(3)	[8, 24]	1.31(1)	[14, 28]	0.025(3)	[4, 16]
	0.525000	1.400(5)	0.0410(4)	[8, 24]	1.32(1)	[14, 28]	0.018(4)	[4, 16]
	0.750000	1.396(5)	0.0583(6)	[8, 24]	1.32(1)	[14, 28]	0.021(4)	[4, 16]
	1.050000	1.380(6)	0.089(1)	[8, 24]	1.33(1)	[14, 28]	-0.006(5)	[4, 16]
	1.275000	1.369(6)	0.107(1)	[8, 24]	1.34(1)	[14, 28]	-0.004(6)	[4, 16]
$\kappa_{h_2} = 0.116040$	0.000000	1.506(6)	0.0036(6)	[11, 27]	1.43(1)	[18, 28]	0.015(2)	[5, 13]
	0.150000	1.505(6)	0.0137(1)	[11, 27]	1.43(1)	[18, 28]	0.035(4)	[5, 13]
	0.300000	1.503(6)	0.0271(3)	[11, 27]	1.43(1)	[18, 28]	0.037(4)	[5, 13]
	0.525000	1.504(6)	0.0456(5)	[11, 27]	1.44(1)	[18, 28]	0.020(5)	[5, 13]
	0.750000	1.501(6)	0.0650(7)	[11, 27]	1.44(1)	[18, 28]	0.024(6)	[5, 13]
	1.050000	1.475(6)	0.099(1)	[11, 27]	1.47(1)	[18, 28]	-0.003(8)	[5, 13]
	1.275000	1.459(7)	0.119(1)	[11, 27]	1.48(1)	[18, 28]	0.002(9)	[5, 13]
$\kappa_{h_3} = 0.109307$	0.000000	1.670(9)	0.001(2)	[11, 25]	1.71(2)	[11, 27]	0.008(5)	[8, 18]
	0.150000	1.670(9)	0.0162(3)	[11, 25]	1.71(2)	[11, 27]	0.004(9)	[8, 18]
	0.300000	1.668(9)	0.0314(4)	[11, 25]	1.72(2)	[11, 27]	0.004(9)	[8, 18]
	0.525000	1.665(9)	0.0524(6)	[11, 25]	1.71(2)	[11, 27]	0.02(1)	[8, 18]
	0.750000	1.66(1)	0.0738(9)	[11, 25]	1.70(2)	[11, 27]	0.03(1)	[8, 18]
	1.050000	1.63(1)	0.098(1)	[11, 25]	1.69(2)	[11, 27]	0.029(9)	[8, 18]
	1.275000	1.62(1)	0.117(1)	[11, 25]	1.69(2)	[11, 27]	0.04(1)	[8, 18]
$\kappa_{h_4} = 0.100407$	0.000000	1.82(1)	-0.000(2)	[14, 24]	1.93(2)	[14, 22]	0.005(8)	[10, 18]
	0.150000	1.82(1)	0.0176(4)	[14, 24]	1.93(2)	[14, 22]	0.01(1)	[10, 18]
	0.300000	1.82(1)	0.0349(5)	[14, 24]	1.93(2)	[14, 22]	0.01(1)	[10, 18]
	0.525000	1.82(1)	0.0577(8)	[14, 24]	1.92(2)	[14, 22]	0.02(2)	[10, 18]
	0.750000	1.81(1)	0.081(1)	[14, 24]	1.91(2)	[14, 22]	0.03(2)	[10, 18]
	1.050000	1.79(1)	0.102(2)	[14, 24]	1.91(3)	[14, 22]	0.02(1)	[10, 18]
	1.275000	1.77(1)	0.121(2)	[14, 24]	1.90(3)	[14, 22]	0.04(2)	[10, 18]
$\kappa_{h_5} = 0.089289$	0.000000	1.98(1)	0.005(1)	[17, 26]	1.89(3)	[15, 24]	-0.02(1)	[12, 25]
	0.150000	1.98(1)	0.0177(2)	[17, 26]	1.89(3)	[15, 24]	-0.16(1)	[12, 25]
	0.300000	1.98(1)	0.0357(4)	[17, 26]	1.89(3)	[15, 24]	-0.17(2)	[12, 25]
	0.525000	1.98(1)	0.067(1)	[17, 26]	1.88(3)	[15, 24]	0.11(2)	[12, 25]
	0.750000	1.98(1)	0.095(1)	[17, 26]	1.87(3)	[15, 24]	0.13(2)	[12, 25]
	1.050000	1.93(1)	0.138(2)	[17, 26]	1.80(4)	[15, 24]	0.07(3)	[12, 25]
	1.275000	1.90(2)	0.164(2)	[17, 26]	1.75(5)	[15, 24]	0.09(3)	[12, 25]

TABLEAU A.1 – Résultats pour les éléments de matrice dans l'ensemble A5. Les plateaux sont indiqués entre crochets et les erreurs statistiques proviennent de l'écart sur les bins. L'exposant I signifie que l'élément a été amélioré et l'exposant r qu'il a été renormalisé.

κ_h	θ	$\mathcal{M}_0^{I,(r)}$	plt	$\mathcal{M}_i^{I,(r)}$	plt
$\kappa_c = 0.125290$	0.000000	1.33(2)	[14, 40]	-0.003(3)	[23, 41]
	0.163000	1.33(2)	[14, 40]	0.0114(8)	[23, 41]
	0.326000	1.33(2)	[14, 40]	0.0199(6)	[23, 41]
	0.570500	1.33(2)	[14, 40]	0.0248(8)	[23, 41]
	0.815000	1.33(2)	[14, 40]	0.035(1)	[23, 41]
	1.140950	1.33(3)	[14, 40]	0.0578(8)	[23, 41]
	1.385450	1.32(3)	[14, 40]	0.070(1)	[23, 41]
$\kappa_{h_1} = 0.121313$	0.000000	1.43(3)	[23, 41]	-0.002(3)	[23, 41]
	0.163000	1.43(3)	[23, 41]	0.0122(5)	[23, 41]
	0.326000	1.43(3)	[23, 41]	0.0224(7)	[23, 41]
	0.570500	1.43(3)	[23, 41]	0.0263(7)	[23, 41]
	0.815000	1.43(3)	[23, 41]	0.037(1)	[23, 41]
	1.140950	1.42(3)	[23, 41]	0.062(1)	[23, 41]
	1.385450	1.42(3)	[23, 41]	0.075(2)	[23, 41]
$\kappa_{h_2} = 0.116044$	0.000000	1.53(3)	[24, 38]	-0.000(4)	[24, 38]
	0.163000	1.53(3)	[24, 38]	0.015(1)	[24, 38]
	0.326000	1.53(3)	[24, 38]	0.026(1)	[24, 38]
	0.570500	1.53(3)	[24, 38]	0.0274(7)	[24, 38]
	0.815000	1.53(3)	[24, 38]	0.039(1)	[24, 38]
	1.140950	1.52(4)	[24, 38]	0.072(2)	[24, 38]
	1.385450	1.51(4)	[24, 38]	0.088(3)	[24, 38]
$\kappa_{h_3} = 0.109127$	0.000000	1.58(3)	[22, 36]	-0.006(3)	[25, 39]
	0.163000	1.58(3)	[22, 36]	0.033(4)	[25, 39]
	0.326000	1.58(3)	[22, 36]	0.034(3)	[25, 39]
	0.570500	1.58(3)	[22, 36]	0.042(1)	[25, 39]
	0.815000	1.57(3)	[22, 36]	0.058(2)	[25, 39]
	1.140950	1.55(4)	[22, 36]	0.077(3)	[25, 39]
	1.385450	1.54(4)	[22, 36]	0.093(4)	[25, 39]
$\kappa_{h_4} = 0.100172$	0.000000	1.72(3)	[28, 40]	-0.000(4)	[28, 40]
	0.163000	1.72(3)	[28, 40]	0.036(6)	[28, 40]
	0.326000	1.72(3)	[28, 40]	0.039(4)	[28, 40]
	0.570500	1.71(3)	[28, 40]	0.049(2)	[28, 40]
	0.815000	1.71(3)	[28, 40]	0.067(3)	[28, 40]
	1.140950	1.69(4)	[28, 40]	0.089(4)	[28, 40]
	1.385450	1.67(4)	[28, 40]	0.109(5)	[28, 40]
$\kappa_{h_5} = 0.088935$	0.000000	1.97(4)	[32, 41]	0.011(4)	[32, 41]
	0.163000	1.97(4)	[32, 41]	0.019(4)	[32, 41]
	0.326000	1.97(4)	[32, 41]	0.025(3)	[32, 41]
	0.570500	1.96(4)	[32, 41]	0.060(4)	[32, 41]
	0.815000	1.96(4)	[32, 41]	0.083(5)	[32, 41]
	1.140950	1.90(6)	[32, 41]	0.098(6)	[32, 41]
	1.385450	1.87(7)	[32, 41]	0.117(7)	[32, 41]

TABLEAU A.2 – Résultats pour les éléments de matrice dans l'ensemble B6. Les plateaux sont indiqués entre crochets et les erreurs statistiques proviennent de l'écart sur les bins. L'exposant I signifie que l'élément a été amélioré et l'exposant r qu'il a été renormalisé.

κ_h	θ	$\mathcal{M}_0^{I,(r)}$	$\mathcal{M}_i^{I,(r)}$	plt	$\mathcal{A}^{(r)}$	plt	$\mathcal{B}^{(r)}$	plt
$\kappa_c = 0.127130$	0.000000	1.29(1)	0.001(1)	[21, 35]	1.29(4)	[19, 35]	0.09(2)	[30, 40]
	0.187500	1.29(1)	0.0127(1)	[21, 35]	1.29(4)	[19, 35]	0.09(2)	[30, 40]
	0.375000	1.29(1)	0.0254(3)	[21, 35]	1.29(4)	[19, 35]	0.11(3)	[30, 40]
	0.656250	1.30(1)	0.0448(5)	[21, 35]	1.28(4)	[19, 35]	0.14(3)	[30, 40]
	0.937500	1.31(1)	0.0648(7)	[21, 35]	1.28(4)	[19, 35]	0.20(4)	[30, 40]
	1.312500	1.33(1)	0.093(1)	[21, 35]	1.31(4)	[19, 35]	0.34(5)	[30, 40]
	1.593750	1.35(2)	0.115(1)	[21, 35]	1.35(3)	[19, 35]	0.51(7)	[30, 40]
$\kappa_{h_1} = 0.123700$	0.000000	1.38(2)	0.000(1)	[22, 37]	1.41(5)	[18, 39]	0.12(3)	[31, 38]
	0.187500	1.38(2)	0.0139(2)	[22, 37]	1.41(4)	[18, 39]	0.12(3)	[31, 38]
	0.375000	1.38(2)	0.0280(4)	[22, 37]	1.41(4)	[18, 39]	0.14(3)	[31, 38]
	0.656250	1.39(2)	0.0492(6)	[22, 37]	1.40(4)	[18, 39]	0.19(4)	[31, 38]
	0.937500	1.41(2)	0.0711(9)	[22, 37]	1.40(4)	[18, 39]	0.26(4)	[31, 38]
	1.312500	1.43(2)	0.102(1)	[22, 37]	1.43(4)	[18, 39]	0.44(6)	[31, 38]
	1.593750	1.44(2)	0.125(2)	[22, 37]	1.48(4)	[18, 39]	0.65(8)	[31, 38]
$\kappa_{h_2} = 0.119241$	0.000000	1.48(2)	-0.002(2)	[23, 37]	1.53(5)	[19, 39]	0.16(3)	[28, 40]
	0.187500	1.48(2)	0.0152(2)	[23, 37]	1.53(5)	[19, 39]	0.16(3)	[28, 40]
	0.375000	1.48(2)	0.0305(4)	[23, 37]	1.53(5)	[19, 39]	0.18(3)	[28, 40]
	0.656250	1.49(2)	0.0537(8)	[23, 37]	1.52(5)	[19, 39]	0.24(4)	[28, 40]
	0.937500	1.50(2)	0.077(1)	[23, 37]	1.52(5)	[19, 39]	0.33(5)	[28, 40]
	1.312500	1.53(2)	0.110(2)	[23, 37]	1.56(5)	[19, 39]	0.53(7)	[28, 40]
	1.593750	1.54(2)	0.135(3)	[23, 37]	1.61(5)	[19, 39]	0.77(9)	[28, 40]
$\kappa_{h_3} = 0.113382$	0.000000	1.57(2)	0.000(2)	[26, 38]	1.65(6)	[19, 39]	0.21(4)	[26, 40]
	0.187500	1.57(2)	0.0161(3)	[26, 38]	1.65(6)	[19, 39]	0.21(4)	[26, 40]
	0.375000	1.57(2)	0.0323(5)	[26, 38]	1.65(6)	[19, 39]	0.24(4)	[26, 40]
	0.656250	1.58(2)	0.057(1)	[26, 38]	1.64(6)	[19, 39]	0.31(5)	[26, 40]
	0.937500	1.59(2)	0.081(2)	[26, 38]	1.64(6)	[19, 39]	0.42(6)	[26, 40]
	1.312500	1.61(2)	0.115(2)	[26, 38]	1.68(6)	[19, 39]	0.65(8)	[26, 40]
	1.593750	1.62(3)	0.139(3)	[26, 38]	1.75(6)	[19, 39]	0.9(1)	[26, 40]
$\kappa_{h_4} = 0.105793$	0.000000	1.80(2)	0.008(2)	[30, 39]	1.91(8)	[25, 42]	0.32(5)	[17, 40]
	0.187500	1.80(2)	0.0186(3)	[30, 39]	1.91(8)	[25, 42]	0.33(5)	[17, 40]
	0.375000	1.80(2)	0.0366(7)	[30, 39]	1.91(7)	[25, 42]	0.37(5)	[17, 40]
	0.656250	1.81(2)	0.064(1)	[30, 39]	1.91(7)	[25, 42]	0.46(6)	[17, 40]
	0.937500	1.82(3)	0.092(2)	[30, 39]	1.91(7)	[25, 42]	0.60(8)	[17, 40]
	1.312500	1.84(3)	0.128(3)	[30, 39]	1.99(7)	[25, 42]	0.9(1)	[17, 40]
	1.593750	1.84(3)	0.154(5)	[30, 39]	2.12(7)	[25, 42]	1.1(1)	[17, 40]
$\kappa_{h_5} = 0.096211$	0.000000	1.92(2)	0.009(2)	[32, 41]	2.11(9)	[26, 47]	0.36(5)	[21, 40]
	0.187500	1.92(2)	0.0200(3)	[32, 41]	2.11(9)	[26, 47]	0.37(6)	[21, 40]
	0.375000	1.92(2)	0.0396(6)	[32, 41]	2.12(8)	[26, 47]	0.41(6)	[21, 40]
	0.656250	1.93(2)	0.069(1)	[32, 41]	2.12(8)	[26, 47]	0.52(7)	[21, 40]
	0.937500	1.94(3)	0.099(2)	[32, 41]	2.13(8)	[26, 47]	0.66(9)	[21, 40]
	1.312500	1.96(3)	0.138(3)	[32, 41]	2.23(8)	[26, 47]	0.9(1)	[21, 40]
	1.593750	1.97(3)	0.165(5)	[32, 41]	2.40(9)	[26, 47]	1.2(2)	[21, 40]

TABLEAU A.3 – Résultats pour les éléments de matrice dans l'ensemble F6. Les plateaux sont indiqués entre crochets et les erreurs statistiques proviennent de l'écart sur les bins. L'exposant I signifie que l'élément a été amélioré et l'exposant r qu'il a été renormalisé.

κ_h	θ	$\mathcal{M}_0^{I,(r)}$	plt	$\mathcal{M}_i^{I,(r)}$	plt	$\mathcal{A}^{(r)}$	plt	$\mathcal{B}^{(r)}$	plt
$\kappa_c = 0.127130$	0.000000	1.196(7)	[19, 39]	0.0031(5)	[31, 45]	1.15(1)	[30, 38]	0.004(2)	[13, 25]
	0.187500	1.195(7)	[19, 39]	0.0092(1)	[31, 45]	1.15(1)	[30, 38]	0.031(4)	[13, 25]
	0.375000	1.195(7)	[19, 39]	0.0184(2)	[31, 45]	1.15(1)	[30, 38]	0.034(4)	[13, 25]
	0.656250	1.191(7)	[19, 39]	0.0343(3)	[31, 45]	1.13(1)	[30, 38]	-0.058(7)	[13, 25]
	0.937500	1.187(7)	[19, 39]	0.0489(5)	[31, 45]	1.11(1)	[30, 38]	-0.070(9)	[13, 25]
	1.312500	1.180(7)	[19, 39]	0.0599(9)	[31, 45]	1.20(2)	[30, 38]	0.044(6)	[13, 25]
	1.593750	1.173(8)	[19, 39]	0.071(1)	[31, 45]	1.23(2)	[30, 38]	0.057(8)	[13, 25]
$\kappa_{h_1} = 0.123649$	0.000000	1.282(8)	[20, 40]	0.003(1)	[29, 45]	1.23(1)	[29, 39]	0.011(6)	[24, 36]
	0.187500	1.282(8)	[20, 40]	0.0102(1)	[29, 45]	1.23(1)	[29, 39]	0.063(9)	[24, 36]
	0.375000	1.282(8)	[20, 40]	0.0203(2)	[29, 45]	1.23(1)	[29, 39]	0.07(1)	[24, 36]
	0.656250	1.277(8)	[20, 40]	0.0379(3)	[29, 45]	1.20(1)	[29, 39]	-0.05(2)	[24, 36]
	0.937500	1.271(8)	[20, 40]	0.0540(5)	[29, 45]	1.18(2)	[29, 39]	-0.07(2)	[24, 36]
	1.312500	1.268(9)	[20, 40]	0.0674(9)	[29, 45]	1.29(2)	[29, 39]	0.00(2)	[24, 36]
	1.593750	1.26(1)	[20, 40]	0.080(1)	[29, 45]	1.32(2)	[29, 39]	0.00(2)	[24, 36]
$\kappa_{h_2} = 0.119196$	0.000000	1.372(8)	[32, 46]	-0.0040(5)	[29, 43]	1.32(2)	[22, 38]	0.009(7)	[24, 36]
	0.187500	1.372(8)	[32, 46]	0.0111(1)	[29, 43]	1.32(2)	[22, 38]	0.06(1)	[24, 36]
	0.375000	1.372(8)	[32, 46]	0.0223(2)	[29, 43]	1.32(1)	[22, 38]	0.07(1)	[24, 36]
	0.656250	1.366(8)	[32, 46]	0.0410(4)	[29, 43]	1.30(2)	[22, 38]	-0.07(2)	[24, 36]
	0.937500	1.361(9)	[32, 46]	0.0585(6)	[29, 43]	1.28(2)	[22, 38]	-0.09(2)	[24, 36]
	1.312500	1.36(1)	[32, 46]	0.074(1)	[29, 43]	1.37(2)	[22, 38]	0.01(2)	[24, 36]
	1.593750	1.35(1)	[32, 46]	0.088(1)	[29, 43]	1.39(2)	[22, 38]	0.01(3)	[24, 36]
$\kappa_{h_3} = 0.113350$	0.000000	1.439(9)	[26, 44]	-0.0034(8)	[29, 43]	1.35(3)	[23, 37]	-0.007(8)	[22, 34]
	0.187500	1.439(9)	[26, 44]	0.0118(2)	[29, 43]	1.35(3)	[23, 37]	-0.05(1)	[22, 34]
	0.375000	1.438(9)	[26, 44]	0.0230(3)	[29, 43]	1.35(3)	[23, 37]	-0.06(1)	[22, 34]
	0.656250	1.434(9)	[26, 44]	0.0443(6)	[29, 43]	1.35(3)	[23, 37]	0.14(3)	[22, 34]
	0.937500	1.43(1)	[26, 44]	0.0629(8)	[29, 43]	1.35(3)	[23, 37]	0.19(3)	[22, 34]
	1.312500	1.42(1)	[26, 44]	0.080(1)	[29, 43]	1.34(3)	[23, 37]	-0.09(3)	[22, 34]
	1.593750	1.42(1)	[26, 44]	0.095(2)	[29, 43]	1.35(3)	[23, 37]	-0.10(3)	[22, 34]
$\kappa_{h_4} = 0.105786$	0.000000	1.55(1)	[32, 44]	-0.0041(9)	[27, 43]	1.47(3)	[23, 37]	-0.020(9)	[24, 36]
	0.187500	1.55(1)	[32, 44]	0.0134(2)	[27, 43]	1.47(3)	[23, 37]	-0.08(2)	[24, 36]
	0.375000	1.55(1)	[32, 44]	0.0260(4)	[27, 43]	1.47(3)	[23, 37]	-0.08(2)	[24, 36]
	0.656250	1.55(1)	[32, 44]	0.0489(6)	[27, 43]	1.46(3)	[23, 37]	0.20(4)	[24, 36]
	0.937500	1.54(1)	[32, 44]	0.0695(9)	[27, 43]	1.45(4)	[23, 37]	0.26(5)	[24, 36]
	1.312500	1.54(1)	[32, 44]	0.090(2)	[27, 43]	1.46(4)	[23, 37]	-0.14(3)	[24, 36]
	1.593750	1.53(1)	[32, 44]	0.106(2)	[27, 43]	1.46(4)	[23, 37]	-0.18(5)	[24, 36]
$\kappa_{h_5} = 0.096689$	0.000000	1.76(1)	[32, 44]	-0.012(1)	[27, 41]	1.59(3)	[23, 43]	0.07(1)	[22, 38]
	0.187500	1.76(1)	[32, 44]	0.0190(3)	[27, 41]	1.59(3)	[23, 43]	0.10(2)	[22, 38]
	0.375000	1.75(1)	[32, 44]	0.0376(6)	[27, 41]	1.58(3)	[23, 43]	0.11(2)	[22, 38]
	0.656250	1.76(1)	[32, 44]	0.0564(7)	[27, 41]	1.60(3)	[23, 43]	0.10(5)	[22, 38]
	0.937500	1.76(1)	[32, 44]	0.080(1)	[27, 41]	1.62(3)	[23, 43]	0.14(6)	[22, 38]
	1.312500	1.72(1)	[32, 44]	0.120(2)	[27, 41]	1.52(4)	[23, 43]	0.17(6)	[22, 38]
	1.593750	1.70(2)	[32, 44]	0.145(2)	[27, 41]	1.49(4)	[23, 43]	0.23(7)	[22, 38]

TABLEAU A.4 – Résultats pour les éléments de matrice dans l'ensemble F7. Les plateaux sont indiqués entre crochets et les erreurs statistiques proviennent de l'écart sur les bins. L'exposant I signifie que l'élément a été amélioré et l'exposant r qu'il a été renormalisé.

κ_h	θ	$\mathcal{M}_0^{I,(r)}$	plt	$\mathcal{M}_i^{I,(r)}$	plt
$\kappa_c = 0.127100$	0.000000	1.21(3)	[7, 53]	0.007(3)	[7, 53]
	0.250000	1.21(3)	[7, 53]	0.014(3)	[7, 53]
	0.500000	1.21(3)	[7, 53]	0.0217(6)	[7, 53]
	0.875000	1.20(3)	[7, 53]	0.036(1)	[7, 53]
	1.250000	1.20(3)	[7, 53]	0.051(1)	[7, 53]
	1.750000	1.19(3)	[7, 53]	0.069(2)	[7, 53]
	2.125000	1.18(3)	[7, 53]	0.082(2)	[7, 53]
$\kappa_{h_1} = 0.123719$	0.000000	1.21(6)	[22, 56]	-0.009(4)	[21, 49]
	0.250000	1.21(6)	[22, 56]	0.018(4)	[21, 49]
	0.500000	1.21(6)	[22, 56]	0.027(1)	[21, 49]
	0.875000	1.20(6)	[22, 56]	0.046(2)	[21, 49]
	1.250000	1.20(6)	[22, 56]	0.063(4)	[21, 49]
	1.750000	1.18(6)	[22, 56]	0.087(5)	[21, 49]
	2.125000	1.17(6)	[22, 56]	0.103(6)	[21, 49]
$\kappa_{h_2} = 0.119260$	0.000000	1.26(6)	[24, 55]	-0.016(4)	[28, 51]
	0.250000	1.26(6)	[24, 55]	0.022(5)	[28, 51]
	0.500000	1.26(6)	[24, 55]	0.031(2)	[28, 51]
	0.875000	1.25(6)	[24, 55]	0.050(3)	[28, 51]
	1.250000	1.24(5)	[24, 55]	0.067(5)	[28, 51]
	1.750000	1.22(6)	[24, 55]	0.091(7)	[28, 51]
	2.125000	1.21(6)	[24, 55]	0.106(9)	[28, 51]
$\kappa_{h_3} = 0.113447$	0.000000	1.3(1)	[31, 57]	-0.012(4)	[36, 54]
	0.250000	1.3(1)	[31, 57]	0.0152(9)	[36, 54]
	0.500000	1.3(1)	[31, 57]	0.028(2)	[36, 54]
	0.875000	1.3(1)	[31, 57]	0.046(3)	[36, 54]
	1.250000	1.3(1)	[31, 57]	0.063(5)	[36, 54]
	1.750000	1.3(1)	[31, 57]	0.082(7)	[36, 54]
	2.125000	1.2(1)	[31, 57]	0.089(9)	[36, 54]
$\kappa_{h_4} = 0.105836$	0.000000	1.34(6)	[36, 59]	-0.017(4)	[35, 52]
	0.250000	1.35(6)	[36, 59]	0.0166(8)	[35, 52]
	0.500000	1.34(6)	[36, 59]	0.032(2)	[35, 52]
	0.875000	1.34(6)	[36, 59]	0.051(4)	[35, 52]
	1.250000	1.32(6)	[36, 59]	0.068(5)	[35, 52]
	1.750000	1.27(7)	[36, 59]	0.083(8)	[35, 52]
	2.125000	1.25(8)	[36, 59]	0.09(1)	[35, 52]
$\kappa_{h_5} = 0.096143$	0.000000	1.3(1)	[40, 61]	-0.04(1)	[43, 50]
	0.250000	1.3(1)	[40, 61]	0.034(6)	[43, 50]
	0.500000	1.3(1)	[40, 61]	0.041(5)	[43, 50]
	0.875000	1.3(1)	[40, 61]	0.058(6)	[43, 50]
	1.250000	1.3(1)	[40, 61]	0.073(8)	[43, 50]
	1.750000	1.2(1)	[40, 61]	0.09(1)	[43, 50]
	2.125000	1.2(1)	[40, 61]	0.09(1)	[43, 50]

TABLEAU A.5 – Résultats pour les éléments de matrice dans l'ensemble G8. Les plateaux sont indiqués entre crochets et les erreurs statistiques proviennent de l'écart sur les bins. L'exposant I signifie que l'élément a été amélioré et l'exposant r qu'il a été renormalisé.

κ_h	θ	$\mathcal{M}_0^{I,(r)}$	$\mathcal{M}_i^{I,(r)}$	plt	$\mathcal{A}^{(r)}$	plt	$\mathcal{B}^{(r)}$	plt
$\kappa_c =$ 0.130260	0.000000	0.916(4)	0.0026(4)	[20, 38]	0.84(1)	[20, 36]	-0.012(4)	[26, 34]
	0.253500	0.916(4)	0.01570(9)	[20, 38]	0.84(1)	[20, 36]	-0.014(4)	[26, 34]
	0.507000	0.921(4)	0.0315(2)	[20, 38]	0.84(1)	[20, 36]	-0.020(6)	[26, 34]
	0.887000	0.944(5)	0.0564(4)	[20, 38]	0.86(1)	[20, 36]	-0.036(9)	[26, 34]
	1.262500	0.981(7)	0.0834(7)	[20, 38]	0.89(2)	[20, 36]	-0.07(2)	[26, 34]
	1.774000	1.047(8)	0.122(1)	[20, 38]	0.98(2)	[20, 36]	-0.17(4)	[26, 34]
	2.154500	1.11(1)	0.155(2)	[20, 38]	1.10(2)	[20, 36]	-0.35(7)	[26, 34]
$\kappa_{h_1} =$ 0.127737	0.000000	0.988(5)	0.0028(5)	[23, 38]	0.90(1)	[21, 36]	-0.019(4)	[21, 34]
	0.253500	0.989(5)	0.0171(1)	[23, 38]	0.90(1)	[21, 36]	-0.021(5)	[21, 34]
	0.507000	0.994(5)	0.0344(2)	[23, 38]	0.90(1)	[21, 36]	-0.029(6)	[21, 34]
	0.887000	1.020(5)	0.0616(5)	[23, 38]	0.92(2)	[21, 36]	-0.05(1)	[21, 34]
	1.262500	1.063(7)	0.0913(8)	[23, 38]	0.96(2)	[21, 36]	-0.09(2)	[21, 34]
	1.774000	1.141(9)	0.135(1)	[23, 38]	1.07(2)	[21, 36]	-0.18(4)	[21, 34]
	2.154500	1.22(1)	0.172(3)	[23, 38]	1.21(3)	[21, 36]	-0.34(7)	[21, 34]
$\kappa_{h_2} =$ 0.124958	0.000000	1.057(5)	0.0031(6)	[24, 38]	0.96(1)	[22, 36]	-0.022(5)	[22, 34]
	0.253500	1.058(5)	0.0185(1)	[24, 38]	0.96(2)	[22, 36]	-0.026(5)	[22, 34]
	0.507000	1.063(5)	0.0371(2)	[24, 38]	0.97(2)	[22, 36]	-0.035(7)	[22, 34]
	0.887000	1.092(6)	0.0663(5)	[24, 38]	0.99(2)	[22, 36]	-0.06(1)	[22, 34]
	1.262500	1.140(7)	0.0983(8)	[24, 38]	1.03(2)	[22, 36]	-0.11(2)	[22, 34]
	1.774000	1.23(1)	0.145(1)	[24, 38]	1.15(3)	[22, 36]	-0.24(4)	[22, 34]
	2.154500	1.32(1)	0.186(3)	[24, 38]	1.33(4)	[22, 36]	-0.45(9)	[22, 34]
$\kappa_{h_3} =$ 0.121051	0.000000	1.136(6)	0.0039(8)	[25, 37]	1.03(2)	[22, 36]	-0.029(5)	[22, 34]
	0.253500	1.137(6)	0.0200(1)	[25, 37]	1.03(2)	[22, 36]	-0.033(6)	[22, 34]
	0.507000	1.143(6)	0.0402(3)	[25, 37]	1.04(2)	[22, 36]	-0.045(8)	[22, 34]
	0.887000	1.175(6)	0.0718(5)	[25, 37]	1.06(2)	[22, 36]	-0.08(1)	[22, 34]
	1.262500	1.227(8)	0.1063(9)	[25, 37]	1.11(3)	[22, 36]	-0.14(2)	[22, 34]
	1.774000	1.33(1)	0.157(2)	[25, 37]	1.25(3)	[22, 36]	-0.31(5)	[22, 34]
	2.154500	1.44(2)	0.201(2)	[25, 37]	1.44(4)	[22, 36]	-0.6(1)	[22, 34]
$\kappa_{h_4} =$ 0.115915	0.000000	1.230(7)	0.005(1)	[25, 37]	1.12(2)	[22, 36]	-0.038(6)	[21, 35]
	0.253500	1.231(6)	0.0218(2)	[25, 37]	1.12(2)	[22, 36]	-0.044(7)	[21, 35]
	0.507000	1.238(6)	0.0437(3)	[25, 37]	1.12(2)	[22, 36]	-0.060(9)	[21, 35]
	0.887000	1.273(7)	0.0782(6)	[25, 37]	1.15(2)	[22, 36]	-0.11(2)	[21, 35]
	1.262500	1.332(9)	0.116(1)	[25, 37]	1.21(3)	[22, 36]	-0.19(3)	[21, 35]
	1.774000	1.44(1)	0.171(2)	[25, 37]	1.37(4)	[22, 36]	-0.41(6)	[21, 35]
	2.154500	1.57(2)	0.218(3)	[25, 37]	1.59(5)	[22, 36]	-0.7(1)	[21, 35]
$\kappa_{h_5} =$ 0.109399	0.000000	1.380(7)	0.006(1)	[27, 36]	1.26(2)	[22, 35]	-0.050(7)	[20, 37]
	0.253500	1.381(7)	0.0246(2)	[27, 36]	1.27(2)	[22, 35]	-0.057(8)	[20, 37]
	0.507000	1.390(7)	0.0493(4)	[27, 36]	1.28(2)	[22, 35]	-0.08(1)	[20, 37]
	0.887000	1.434(8)	0.0882(8)	[27, 36]	1.31(3)	[22, 35]	-0.14(2)	[20, 37]
	1.262500	1.51(1)	0.130(1)	[27, 36]	1.38(3)	[22, 35]	-0.26(3)	[20, 37]
	1.774000	1.65(2)	0.194(2)	[27, 36]	1.57(4)	[22, 35]	-0.57(8)	[20, 37]
	2.154500	1.81(3)	0.249(3)	[27, 36]	1.84(7)	[22, 35]	-1.0(1)	[20, 37]

TABLEAU A.6 – Résultats pour les éléments de matrice dans l'ensemble N6. Les plateaux sont indiqués entre crochets et les erreurs statistiques proviennent de l'écart sur les bins. L'exposant I signifie que l'élément a été amélioré et l'exposant r qu'il a été renormalisé.

κ_h	θ	$\mathcal{M}_0^{I,(r)}$	$\mathcal{M}_i^{I,(r)}$	plt	$\mathcal{A}^{(r)}$	plt	$\mathcal{B}^{(r)}$	plt
$\kappa_c = 0.130220$	0.000000	0.894(6)	0.002(1)	[18, 46]	0.80(1)	[6, 28]	-0.019(6)	[16, 36]
	0.338000	0.892(6)	0.0154(4)	[18, 46]	0.80(1)	[6, 28]	-0.01(1)	[16, 36]
	0.676000	0.889(6)	0.0269(6)	[18, 46]	0.80(1)	[6, 28]	-0.01(1)	[16, 36]
	1.183000	0.898(8)	0.038(1)	[18, 46]	0.80(1)	[6, 28]	0.03(2)	[16, 36]
	1.683000	0.88(1)	0.064(1)	[18, 46]	0.78(1)	[6, 28]	-0.05(2)	[16, 36]
	2.365000	0.82(2)	0.093(1)	[18, 46]	0.75(1)	[6, 28]	-0.07(4)	[16, 36]
	2.873000	0.84(2)	0.112(2)	[18, 46]	0.76(1)	[6, 28]	-0.02(6)	[16, 36]
$\kappa_{h_1} = 0.127900$	0.000000	0.970(8)	0.003(1)	[29, 46]	0.90(1)	[5, 21]	-0.028(8)	[17, 35]
	0.338000	0.968(8)	0.0157(7)	[29, 46]	0.89(1)	[5, 21]	-0.02(1)	[17, 35]
	0.676000	0.965(8)	0.0268(7)	[29, 46]	0.89(1)	[5, 21]	-0.02(2)	[17, 35]
	1.183000	0.98(1)	0.040(1)	[29, 46]	0.90(1)	[5, 21]	0.02(3)	[17, 35]
	1.683000	0.95(1)	0.071(2)	[29, 46]	0.87(1)	[5, 21]	-0.07(3)	[17, 35]
	2.365000	0.90(3)	0.089(3)	[29, 46]	0.83(1)	[5, 21]	-0.09(5)	[17, 35]
	2.873000	0.90(3)	0.112(5)	[29, 46]	0.85(2)	[5, 21]	-0.06(9)	[17, 35]
$\kappa_{h_2} = 0.124944$	0.000000	1.044(9)	0.003(2)	[29, 46]	1.01(2)	[10, 23]	-0.04(1)	[18, 35]
	0.338000	1.042(9)	0.0171(8)	[29, 46]	1.01(2)	[10, 23]	-0.03(2)	[18, 35]
	0.676000	1.04(1)	0.0291(8)	[29, 46]	1.00(2)	[10, 23]	-0.03(2)	[18, 35]
	1.183000	1.06(1)	0.045(2)	[29, 46]	1.02(2)	[10, 23]	0.02(4)	[18, 35]
	1.683000	1.03(2)	0.079(3)	[29, 46]	0.97(2)	[10, 23]	-0.10(4)	[18, 35]
	2.365000	0.97(3)	0.097(3)	[29, 46]	0.92(2)	[10, 23]	-0.12(8)	[18, 35]
	2.873000	0.99(4)	0.121(6)	[29, 46]	0.95(2)	[10, 23]	-0.1(1)	[18, 35]
$\kappa_{h_3} = 0.120910$	0.000000	1.14(1)	0.006(2)	[34, 45]	1.21(3)	[16, 27]	-0.05(1)	[15, 32]
	0.338000	1.14(1)	0.019(1)	[34, 45]	1.20(3)	[16, 27]	-0.03(2)	[15, 32]
	0.676000	1.13(1)	0.032(1)	[34, 45]	1.21(3)	[16, 27]	-0.02(2)	[15, 32]
	1.183000	1.15(1)	0.048(2)	[34, 45]	1.23(3)	[16, 27]	0.05(5)	[15, 32]
	1.683000	1.12(2)	0.091(4)	[34, 45]	1.15(3)	[16, 27]	-0.16(6)	[15, 32]
	2.365000	1.08(4)	0.102(5)	[34, 45]	1.15(4)	[16, 27]	-0.23(8)	[15, 32]
	2.873000	1.14(5)	0.12(1)	[34, 45]	1.15(5)	[16, 27]	-0.1(2)	[15, 32]
$\kappa_{h_4} = 0.115890$	0.000000	1.27(1)	0.008(3)	[36, 44]	1.40(5)	[36, 42]	-0.11(2)	[21, 35]
	0.338000	1.27(1)	0.022(1)	[36, 44]	1.39(5)	[36, 42]	-0.07(4)	[21, 35]
	0.676000	1.27(1)	0.038(2)	[36, 44]	1.45(4)	[36, 42]	-0.05(4)	[21, 35]
	1.183000	1.29(2)	0.054(3)	[36, 44]	1.44(5)	[36, 42]	0.02(9)	[21, 35]
	1.683000	1.26(2)	0.106(5)	[36, 44]	1.68(7)	[36, 42]	-0.14(9)	[21, 35]
	2.365000	1.24(5)	0.111(7)	[36, 44]	2.4(1)	[36, 42]	-0.2(2)	[21, 35]
	2.873000	1.36(6)	0.13(2)	[36, 44]	1.6(3)	[36, 42]	-0.2(3)	[21, 35]
$\kappa_{h_5} = 0.109400$	0.000000	1.37(2)	0.001(3)	[37, 47]	1.58(5)	[38, 44]	-0.11(3)	[29, 35]
	0.338000	1.36(2)	0.024(1)	[37, 47]	1.57(4)	[38, 44]	-0.08(6)	[29, 35]
	0.676000	1.37(2)	0.041(2)	[37, 47]	1.65(4)	[38, 44]	-0.09(6)	[29, 35]
	1.183000	1.40(2)	0.060(3)	[37, 47]	1.63(5)	[38, 44]	-0.0(2)	[29, 35]
	1.683000	1.36(2)	0.115(6)	[37, 47]	2.02(8)	[38, 44]	-0.1(1)	[29, 35]
	2.365000	1.39(5)	0.135(8)	[37, 47]	2.6(2)	[38, 44]	0.6(3)	[29, 35]
	2.873000	1.59(8)	0.16(1)	[37, 47]	2.6(3)	[38, 44]	1.0(5)	[29, 35]

TABLEAU A.7 – Résultats pour les éléments de matrice dans l'ensemble O7. Les plateaux sont indiqués entre crochets et les erreurs statistiques proviennent de l'écart sur les bins. L'exposant I signifie que l'élément a été amélioré et l'exposant r qu'il a été renormalisé.

A.3 Facteurs de forme hadroniques

κ_h	θ	f^-	f^+	f_0	h^-	h^+	$\mathcal{G}$	h_{A_1}	h_{A_3}
$\kappa_c = 0.125310$	0.000000							0.792(7)	
	0.150000	0.087(5)	0.873(3)		0.087(5)	0.873(3)	0.873(3)	0.784(7)	-77(8)
	0.300000	0.094(5)	0.871(3)		0.094(5)	0.871(3)	0.871(3)	0.781(7)	-19(2)
	0.525000	0.115(7)	0.869(3)		0.115(7)	0.869(3)	0.869(3)	0.780(7)	-6(1)
	0.750000	0.114(7)	0.865(3)		0.114(7)	0.865(3)	0.865(3)	0.775(7)	-2.6(6)
	1.050000	0.068(7)	0.849(3)		0.068(7)	0.849(3)	0.849(3)	0.812(7)	2.7(4)
	1.275000	0.061(7)	0.838(3)		0.061(7)	0.838(3)	0.838(3)	0.813(7)	2.3(3)
$\kappa_{h_1} = 0.121340$	0.000000							0.773(7)	
	0.150000	-0.022(7)	0.859(3)	0.858(3)	0.050(7)	0.860(3)	0.856(3)	0.764(7)	-82(9)
	0.300000	-0.009(7)	0.856(3)	0.856(3)	0.062(7)	0.859(3)	0.853(3)	0.761(7)	-20(2)
	0.525000	0.053(7)	0.849(3)	0.852(3)	0.125(7)	0.857(3)	0.846(3)	0.766(7)	-4(1)
	0.750000	0.053(8)	0.845(3)	0.845(3)	0.124(8)	0.853(3)	0.842(3)	0.761(7)	-1.5(6)
	1.050000	-0.024(8)	0.837(3)	0.839(4)	0.046(8)	0.838(3)	0.834(3)	0.783(6)	2.0(4)
	1.275000	-0.031(9)	0.826(4)	0.831(4)	0.038(9)	0.827(4)	0.823(4)	0.781(6)	1.7(3)
$\kappa_{h_2} = 0.116040$	0.000000							0.769(8)	
	0.150000	-0.080(7)	0.850(4)	0.837(3)	0.063(7)	0.849(3)	0.838(4)	0.758(8)	-1.1(1) $\times 10^2$
	0.300000	-0.073(7)	0.847(4)	0.836(3)	0.069(7)	0.847(3)	0.835(4)	0.754(8)	-28(4)
	0.525000	-0.044(8)	0.841(4)	0.835(3)	0.097(8)	0.846(3)	0.830(4)	0.766(7)	-4(1)
	0.750000	-0.045(8)	0.838(4)	0.832(3)	0.096(8)	0.842(3)	0.826(4)	0.764(7)	-1.6(8)
	1.050000	-0.124(9)	0.831(4)	0.820(4)	0.014(8)	0.822(4)	0.820(4)	0.788(8)	1.7(5)
	1.275000	-0.133(9)	0.820(4)	0.813(4)	0.004(9)	0.809(4)	0.808(4)	0.791(8)	1.5(4)
$\kappa_{h_3} = 0.109307$	0.000000							0.854(9)	
	0.150000	-0.20(2)	0.892(6)	0.842(5)	0.01(2)	0.868(5)	0.865(6)	0.857(9)	-1(3) $\times 10^1$
	0.300000	-0.18(1)	0.885(5)	0.842(5)	0.04(1)	0.867(5)	0.858(5)	0.857(9)	-1(7)
	0.525000	-0.144(8)	0.873(5)	0.840(5)	0.071(8)	0.864(5)	0.847(5)	0.84(1)	-4(3)
	0.750000	-0.136(8)	0.866(5)	0.837(5)	0.077(8)	0.859(5)	0.840(5)	0.83(1)	-2(2)
	1.050000	-0.11(1)	0.843(5)	0.822(5)	0.10(1)	0.842(6)	0.817(5)	0.83(1)	-0.1(6)
	1.275000	-0.11(1)	0.829(5)	0.811(6)	0.10(1)	0.829(6)	0.804(5)	0.81(1)	-0.1(4)
$\kappa_{h_4} = 0.100407$	0.000000							0.88(1)	
	0.150000	-0.28(2)	0.916(7)	0.826(5)	0.01(2)	0.872(5)	0.868(7)	0.88(1)	-2(4) $\times 10^1$
	0.300000	-0.27(1)	0.912(6)	0.825(5)	0.02(1)	0.870(5)	0.864(5)	0.88(1)	-4(9)
	0.525000	-0.23(1)	0.894(6)	0.823(5)	0.064(9)	0.867(5)	0.846(6)	0.87(1)	-3(4)
	0.750000	-0.21(1)	0.885(7)	0.820(5)	0.074(9)	0.862(5)	0.838(6)	0.86(1)	-2(2)
	1.050000	-0.14(1)	0.849(5)	0.808(5)	0.14(1)	0.847(6)	0.804(5)	0.86(1)	0.4(8)
	1.275000	-0.13(1)	0.834(6)	0.799(6)	0.14(1)	0.836(6)	0.790(5)	0.84(2)	0.2(6)
$\kappa_{h_5} = 0.089289$	0.000000							0.81(1)	
	0.150000	-0.288(8)	0.915(6)	0.802(5)	0.077(8)	0.872(5)	0.841(6)	0.87(1)	4.0(4) $\times 10^2$
	0.300000	-0.29(1)	0.916(6)	0.802(5)	0.071(9)	0.871(5)	0.843(6)	0.87(1)	1.1(1) $\times 10^2$
	0.525000	-0.36(1)	0.941(7)	0.803(5)	0.01(1)	0.870(5)	0.865(7)	0.75(2)	-21(4)
	0.750000	-0.35(1)	0.938(7)	0.804(5)	0.02(1)	0.869(5)	0.863(7)	0.74(2)	-11(2)
	1.050000	-0.40(1)	0.931(7)	0.783(6)	-0.04(1)	0.840(6)	0.856(6)	0.72(2)	-2(1)
	1.275000	-0.40(1)	0.913(8)	0.774(7)	-0.04(1)	0.824(7)	0.840(7)	0.69(2)	-2(1)

TABLEAU A.8 – Résultats pour les facteurs de forme dans l'ensemble A5 en fonction de la masse du quark lourd κ_h et de l'impulsion θ . Les incertitudes sont calculées via la dispersion sur les bins.

κ_h	θ	f^-	f^+	f_0	h^-	h^+	$\mathcal{G}$
$\kappa_c =$ 0.125290	0.163000	-0.18(7)	0.89(2)		-0.18(7)	0.89(2)	0.89(2)
	0.326000	-0.04(3)	0.89(2)		-0.04(3)	0.89(2)	0.89(2)
	0.570500	0.23(2)	0.89(2)		0.23(2)	0.89(2)	0.89(2)
	0.815000	0.23(2)	0.89(2)		0.23(2)	0.89(2)	0.89(2)
	1.140950	0.11(2)	0.88(2)		0.11(2)	0.88(2)	0.88(2)
	1.385450	0.11(2)	0.88(2)		0.11(2)	0.88(2)	0.88(2)
$\kappa_{h_1} =$ 0.121313	0.163000	-0.25(5)	0.90(2)	0.88(2)	-0.17(5)	0.88(2)	0.89(2)
	0.326000	-0.16(3)	0.89(2)	0.88(2)	-0.09(3)	0.88(2)	0.89(2)
	0.570500	0.16(2)	0.86(2)	0.87(2)	0.23(2)	0.88(2)	0.86(2)
	0.815000	0.16(2)	0.86(2)	0.87(2)	0.23(2)	0.88(2)	0.86(2)
	1.140950	0.03(2)	0.86(2)	0.86(2)	0.10(2)	0.87(2)	0.86(2)
	1.385450	0.03(2)	0.86(2)	0.86(2)	0.10(2)	0.86(2)	0.86(2)
$\kappa_{h_2} =$ 0.116044	0.163000	-0.4(1)	0.93(3)	0.86(2)	-0.3(1)	0.87(2)	0.92(2)
	0.326000	-0.30(4)	0.91(2)	0.86(2)	-0.16(4)	0.87(2)	0.90(2)
	0.570500	0.11(1)	0.85(2)	0.86(2)	0.24(2)	0.87(2)	0.84(2)
	0.815000	0.12(2)	0.84(2)	0.86(2)	0.25(2)	0.87(2)	0.83(2)
	1.140950	-0.10(2)	0.87(2)	0.86(2)	0.04(2)	0.86(2)	0.86(2)
	1.385450	-0.11(3)	0.86(2)	0.85(2)	0.03(3)	0.86(2)	0.85(2)
$\kappa_{h_3} =$ 0.109127	0.163000	-1.8(3)	1.25(8)	0.80(2)	-1.6(3)	0.82(2)	1.21(8)
	0.326000	-0.7(1)	0.96(3)	0.80(2)	-0.43(9)	0.82(2)	0.93(3)
	0.570500	-0.26(3)	0.86(2)	0.79(2)	-0.05(3)	0.82(2)	0.83(2)
	0.815000	-0.24(3)	0.85(2)	0.79(2)	-0.03(3)	0.81(2)	0.82(2)
	1.140950	-0.21(4)	0.83(2)	0.78(2)	-0.00(4)	0.80(2)	0.80(2)
	1.385450	-0.21(4)	0.82(2)	0.78(2)	-0.00(4)	0.80(2)	0.80(2)
$\kappa_{h_4} =$ 0.100172	0.163000	-2.0(4)	1.4(1)	0.78(2)	-1.6(4)	0.82(2)	1.3(1)
	0.326000	-0.8(1)	1.03(5)	0.78(2)	-0.5(1)	0.82(2)	0.97(5)
	0.570500	-0.40(3)	0.90(2)	0.78(2)	-0.12(3)	0.82(2)	0.86(2)
	0.815000	-0.37(4)	0.89(2)	0.77(2)	-0.08(4)	0.81(2)	0.84(2)
	1.140950	-0.33(4)	0.86(2)	0.76(2)	-0.05(4)	0.80(2)	0.82(2)
	1.385450	-0.34(5)	0.86(2)	0.76(2)	-0.06(5)	0.79(2)	0.81(2)
$\kappa_{h_5} =$ 0.088935	0.163000	-0.7(2)	1.1(1)	0.79(2)	-0.3(2)	0.87(2)	0.98(9)
	0.326000	-0.26(9)	0.90(4)	0.79(2)	0.10(8)	0.86(2)	0.82(4)
	0.570500	-0.59(6)	1.03(3)	0.79(2)	-0.20(6)	0.86(2)	0.94(3)
	0.815000	-0.55(6)	1.01(3)	0.79(2)	-0.16(5)	0.86(2)	0.92(3)
	1.140950	-0.39(6)	0.92(2)	0.77(2)	-0.03(6)	0.83(3)	0.84(2)
	1.385450	-0.39(6)	0.90(3)	0.76(3)	-0.04(6)	0.82(3)	0.83(2)

TABLEAU A.9 – Résultats pour les facteurs de forme dans l'ensemble B6 en fonction de la masse du quark lourd κ_h et de l'impulsion θ . Les incertitudes sont calculées via la dispersion sur les bins.

κ_h	θ	f^-	f^+	f_0	h^-	h^+	$\mathcal{G}$	h_{A_1}	h_{A_3}
$\kappa_c =$ 0.127130	0.000000							0.88(3)	
	0.187500	-0.054(9)	0.98(1)		-0.054(9)	0.98(1)	0.98(1)	0.87(3)	$-5(1) \times 10^2$
	0.375000	-0.055(9)	0.98(1)		-0.055(9)	0.98(1)	0.98(1)	0.86(3)	$-1.3(3) \times 10^2$
	0.656250	-0.059(9)	0.98(1)		-0.059(9)	0.98(1)	0.98(1)	0.83(4)	$-6(1) \times 10^1$
	0.937500	-0.065(9)	0.99(1)		-0.065(9)	0.99(1)	0.99(1)	0.79(4)	-38(7)
	1.312500	-0.08(1)	1.00(1)		-0.08(1)	1.00(1)	1.00(1)	0.70(5)	-32(5)
	1.593750	-0.10(1)	1.01(1)		-0.10(1)	1.01(1)	1.01(1)	0.60(6)	-33(5)
$\kappa_{h_1} =$ 0.123700	0.000000							0.87(4)	
	0.187500	-0.16(1)	0.98(1)	0.96(1)	-0.08(1)	0.97(1)	0.97(1)	0.86(4)	$-5(1) \times 10^2$
	0.375000	-0.16(1)	0.98(1)	0.96(1)	-0.08(1)	0.97(1)	0.97(1)	0.85(4)	$-1.5(3) \times 10^2$
	0.656250	-0.17(1)	0.98(1)	0.97(1)	-0.08(1)	0.97(1)	0.98(1)	0.82(4)	$-7(1) \times 10^1$
	0.937500	-0.17(1)	0.99(1)	0.99(1)	-0.09(1)	0.98(1)	0.98(1)	0.76(5)	-45(8)
	1.312500	-0.18(1)	1.00(1)	1.01(1)	-0.10(1)	0.99(1)	0.99(1)	0.66(5)	-38(6)
	1.593750	-0.20(1)	1.00(1)	1.03(1)	-0.11(1)	0.99(1)	1.00(1)	0.55(6)	-38(5)
$\kappa_{h_2} =$ 0.119241	0.000000							0.85(4)	
	0.187500	-0.26(1)	0.98(1)	0.94(1)	-0.09(1)	0.95(1)	0.97(1)	0.85(4)	$-7(1) \times 10^2$
	0.375000	-0.26(1)	0.98(1)	0.94(1)	-0.10(1)	0.95(1)	0.97(1)	0.83(4)	$-1.9(4) \times 10^2$
	0.656250	-0.26(1)	0.99(1)	0.95(1)	-0.10(1)	0.96(1)	0.97(1)	0.79(4)	$-8(1) \times 10^1$
	0.937500	-0.27(1)	0.99(1)	0.96(1)	-0.11(1)	0.96(1)	0.98(1)	0.73(5)	-53(9)
	1.312500	-0.28(1)	1.00(1)	0.98(1)	-0.12(1)	0.97(1)	0.99(1)	0.63(6)	-43(6)
	1.593750	-0.29(2)	1.00(1)	0.99(1)	-0.12(2)	0.97(1)	0.99(1)	0.52(7)	-42(5)
$\kappa_{h_3} =$ 0.113382	0.000000							0.82(4)	
	0.187500	-0.33(1)	0.98(1)	0.90(1)	-0.10(1)	0.93(1)	0.95(1)	0.82(4)	$-8(1) \times 10^2$
	0.375000	-0.33(1)	0.98(1)	0.90(1)	-0.10(1)	0.93(1)	0.95(1)	0.80(4)	$-2.3(4) \times 10^2$
	0.656250	-0.34(2)	0.98(1)	0.91(1)	-0.10(2)	0.93(1)	0.95(1)	0.76(5)	$-9(2) \times 10^1$
	0.937500	-0.34(2)	0.99(1)	0.91(1)	-0.10(2)	0.94(1)	0.96(1)	0.70(5)	-61(9)
	1.312500	-0.34(2)	1.00(1)	0.93(1)	-0.10(2)	0.94(1)	0.97(1)	0.59(6)	-48(7)
	1.593750	-0.34(2)	0.99(2)	0.93(2)	-0.10(2)	0.94(2)	0.96(2)	0.47(8)	-46(6)
$\kappa_{h_4} =$ 0.105793	0.000000							0.84(5)	
	0.187500	-0.45(2)	1.07(1)	0.93(1)	-0.11(2)	0.98(1)	1.01(1)	0.83(5)	$-1.1(2) \times 10^3$
	0.375000	-0.43(2)	1.06(1)	0.93(1)	-0.09(2)	0.98(1)	1.01(1)	0.81(5)	$-3.2(5) \times 10^2$
	0.656250	-0.43(2)	1.07(1)	0.93(1)	-0.09(2)	0.98(1)	1.01(1)	0.76(6)	$-1.3(2) \times 10^2$
	0.937500	-0.43(2)	1.07(1)	0.94(1)	-0.09(2)	0.98(1)	1.01(1)	0.69(6)	$-8(1) \times 10^1$
	1.312500	-0.42(3)	1.07(2)	0.95(1)	-0.08(2)	0.99(2)	1.01(2)	0.59(8)	-59(8)
	1.593750	-0.41(3)	1.06(2)	0.95(2)	-0.07(3)	0.99(2)	1.01(2)	0.50(9)	-53(7)
$\kappa_{h_5} =$ 0.096211	0.000000							0.85(5)	
	0.187500	-0.54(2)	1.10(1)	0.88(1)	-0.11(2)	0.96(1)	1.01(1)	0.84(5)	$-1.2(2) \times 10^3$
	0.375000	-0.52(2)	1.09(1)	0.89(1)	-0.10(2)	0.96(1)	1.00(1)	0.82(5)	$-3.3(5) \times 10^2$
	0.656250	-0.52(2)	1.09(1)	0.89(1)	-0.10(2)	0.96(1)	1.00(1)	0.77(6)	$-1.3(2) \times 10^2$
	0.937500	-0.52(2)	1.09(1)	0.90(1)	-0.10(2)	0.97(1)	1.00(1)	0.70(7)	$-8(1) \times 10^1$
	1.312500	-0.51(3)	1.09(2)	0.91(1)	-0.09(2)	0.97(1)	1.01(2)	0.62(8)	-59(8)
	1.593750	-0.50(3)	1.08(2)	0.91(2)	-0.08(3)	0.97(2)	1.00(2)	0.6(1)	-52(7)

TABLEAU A.10 – Résultats pour les facteurs de forme dans l'ensemble F6 en fonction de la masse du quark lourd κ_h et de l'impulsion θ . Les incertitudes sont calculées via la dispersion sur les bins.

κ_h	θ	f^-	f^+	f_0	h^-	h^+	$\mathcal{G}$	h_{A_1}	h_{A_3}
$\kappa_c = 0.127130$	0.000000							0.848(9)	
	0.187500	0.16(1)	0.913(5)		0.16(1)	0.913(5)	0.913(5)	0.83(1)	$-1.5(2) \times 10^2$
	0.375000	0.16(1)	0.912(5)		0.16(1)	0.912(5)	0.912(5)	0.83(1)	$-39(5)$
	0.656250	0.108(8)	0.908(5)		0.108(8)	0.908(5)	0.908(5)	0.877(9)	24(3)
	0.937500	0.105(8)	0.902(5)		0.105(8)	0.902(5)	0.902(5)	0.87(1)	15(2)
	1.312500	0.196(8)	0.894(5)		0.196(8)	0.894(5)	0.894(5)	0.84(1)	$-2.6(6)$
	1.593750	0.202(9)	0.885(6)		0.202(9)	0.885(6)	0.885(6)	0.85(2)	$-2.0(5)$
$\kappa_{h_1} = 0.123649$	0.000000							0.82(1)	
	0.187500	0.058(9)	0.890(5)	0.895(5)	0.135(9)	0.898(5)	0.887(5)	0.79(1)	$-2.7(4) \times 10^2$
	0.375000	0.062(9)	0.889(5)	0.894(5)	0.139(9)	0.898(5)	0.886(5)	0.79(1)	$-7(1) \times 10^1$
	0.656250	0.007(6)	0.889(5)	0.889(5)	0.083(7)	0.893(5)	0.886(5)	0.85(1)	20(6)
	0.937500	0.003(7)	0.883(5)	0.884(5)	0.079(7)	0.887(6)	0.880(5)	0.84(2)	14(3)
	1.312500	0.086(8)	0.871(6)	0.866(6)	0.161(8)	0.881(6)	0.867(6)	0.86(2)	2(2)
	1.593750	0.092(9)	0.863(7)	0.851(7)	0.166(9)	0.874(7)	0.859(7)	0.88(2)	2(1)
$\kappa_{h_2} = 0.119196$	0.000000							0.82(1)	
	0.187500	-0.031(9)	0.877(5)	0.872(5)	0.117(9)	0.885(5)	0.865(5)	0.78(1)	$-2.6(5) \times 10^2$
	0.375000	-0.030(9)	0.877(5)	0.872(5)	0.118(9)	0.884(5)	0.864(5)	0.78(1)	$-7(1) \times 10^1$
	0.656250	-0.075(7)	0.879(5)	0.868(5)	0.073(7)	0.879(5)	0.867(5)	0.85(1)	23(6)
	0.937500	-0.079(7)	0.874(5)	0.864(5)	0.069(8)	0.874(5)	0.862(5)	0.85(2)	16(4)
	1.312500	-0.002(9)	0.858(6)	0.858(6)	0.143(9)	0.870(6)	0.846(6)	0.84(2)	1(2)
	1.593750	0.00(1)	0.850(7)	0.850(7)	0.15(1)	0.863(7)	0.838(7)	0.85(2)	1(2)
$\kappa_{h_3} = 0.113350$	0.000000							0.78(2)	
	0.187500	-0.111(9)	0.854(6)	0.827(5)	0.104(9)	0.854(5)	0.828(6)	0.80(2)	$1.9(5) \times 10^2$
	0.375000	-0.089(9)	0.848(6)	0.826(5)	0.125(9)	0.853(5)	0.822(6)	0.81(2)	$5(1) \times 10^1$
	0.656250	-0.167(9)	0.864(6)	0.824(5)	0.048(9)	0.849(5)	0.837(6)	0.69(3)	-43(8)
	0.937500	-0.167(9)	0.859(6)	0.821(6)	0.047(9)	0.843(6)	0.832(6)	0.66(3)	-27(5)
	1.312500	-0.10(1)	0.836(6)	0.816(6)	0.11(2)	0.838(6)	0.810(5)	0.81(2)	8(2)
	1.593750	-0.09(2)	0.827(6)	0.811(6)	0.12(2)	0.831(7)	0.801(6)	0.82(3)	7(2)
$\kappa_{h_4} = 0.105786$	0.000000							0.79(2)	
	0.187500	-0.22(1)	0.872(7)	0.803(5)	0.070(9)	0.848(5)	0.825(6)	0.82(2)	$2.6(6) \times 10^2$
	0.375000	-0.19(1)	0.865(7)	0.802(5)	0.090(9)	0.847(5)	0.818(6)	0.82(2)	$7(2) \times 10^1$
	0.656250	-0.256(9)	0.881(6)	0.800(5)	0.030(9)	0.843(6)	0.834(6)	0.67(3)	$-5(1) \times 10^1$
	0.937500	-0.26(1)	0.876(7)	0.798(6)	0.029(9)	0.839(6)	0.829(6)	0.63(4)	-33(7)
	1.312500	-0.19(1)	0.850(6)	0.794(6)	0.09(1)	0.832(6)	0.804(6)	0.83(3)	11(2)
	1.593750	-0.18(2)	0.839(7)	0.790(7)	0.10(2)	0.825(7)	0.794(7)	0.85(3)	10(2)
$\kappa_{h_5} = 0.096689$	0.000000							0.74(2)	
	0.187500	-0.53(2)	1.022(9)	0.815(5)	-0.14(1)	0.886(6)	0.940(8)	0.73(2)	$-3.1(7) \times 10^2$
	0.375000	-0.52(1)	1.016(9)	0.814(5)	-0.13(1)	0.884(6)	0.934(8)	0.72(2)	$-8(2) \times 10^1$
	0.656250	-0.36(1)	0.955(7)	0.816(5)	0.02(1)	0.885(6)	0.878(6)	0.73(3)	$-3(1) \times 10^1$
	0.937500	-0.35(1)	0.950(7)	0.817(5)	0.02(1)	0.884(5)	0.874(6)	0.72(3)	-16(8)
	1.312500	-0.44(1)	0.962(7)	0.802(6)	-0.06(1)	0.860(7)	0.885(7)	0.65(3)	-9(4)
	1.593750	-0.44(1)	0.949(8)	0.793(7)	-0.07(1)	0.845(8)	0.873(7)	0.61(4)	-9(3)

TABLEAU A.11 – Résultats pour les facteurs de forme dans l'ensemble F7 en fonction de la masse du quark lourd κ_h et de l'impulsion θ . Les incertitudes sont calculées via la dispersion sur les bins.

κ_h	θ	f^-	f^+	f_0	h^-	h^+	$\mathcal{G}$
$\kappa_c =$ 0.127100	0.250000	-0.2(2)	0.92(3)		-0.2(2)	0.92(3)	0.92(3)
	0.500000	0.04(3)	0.92(3)		0.04(3)	0.92(3)	0.92(3)
	0.875000	0.07(2)	0.91(2)		0.07(2)	0.91(2)	0.91(2)
	1.250000	0.09(2)	0.91(2)		0.09(2)	0.91(2)	0.91(2)
	1.750000	0.09(2)	0.90(2)		0.09(2)	0.90(2)	0.90(2)
	2.125000	0.10(2)	0.89(2)		0.10(2)	0.89(2)	0.89(2)
$\kappa_{h_1} =$ 0.123719	0.250000	-0.5(3)	0.89(5)	0.85(4)	-0.5(3)	0.85(4)	0.89(5)
	0.500000	-0.24(5)	0.86(4)	0.85(4)	-0.17(5)	0.85(4)	0.86(4)
	0.875000	-0.22(5)	0.85(4)	0.84(4)	-0.15(5)	0.84(4)	0.85(4)
	1.250000	-0.19(5)	0.85(4)	0.85(4)	-0.12(5)	0.83(4)	0.84(4)
	1.750000	-0.18(5)	0.83(4)	0.84(4)	-0.11(6)	0.82(4)	0.83(4)
	2.125000	-0.17(6)	0.82(4)	0.84(4)	-0.11(6)	0.80(4)	0.81(4)
$\kappa_{h_2} =$ 0.119260	0.250000	-0.8(4)	0.94(7)	0.80(4)	-0.7(4)	0.81(4)	0.93(7)
	0.500000	-0.38(6)	0.86(4)	0.80(3)	-0.24(6)	0.81(4)	0.85(4)
	0.875000	-0.31(6)	0.84(4)	0.80(3)	-0.18(6)	0.80(4)	0.83(4)
	1.250000	-0.26(5)	0.83(4)	0.80(3)	-0.12(5)	0.80(3)	0.82(4)
	1.750000	-0.25(6)	0.81(4)	0.79(4)	-0.12(6)	0.78(4)	0.80(4)
	2.125000	-0.23(7)	0.79(4)	0.78(4)	-0.10(7)	0.76(4)	0.78(4)
$\kappa_{h_3} =$ 0.113447	0.250000	-0.39(4)	0.85(6)	0.75(6)	-0.19(5)	0.78(6)	0.82(6)
	0.500000	-0.32(4)	0.83(6)	0.75(6)	-0.12(4)	0.77(6)	0.80(6)
	0.875000	-0.27(4)	0.81(6)	0.75(6)	-0.07(4)	0.77(6)	0.78(6)
	1.250000	-0.23(4)	0.79(6)	0.74(6)	-0.04(4)	0.76(6)	0.77(6)
	1.750000	-0.19(5)	0.76(6)	0.72(6)	-0.01(5)	0.74(6)	0.74(6)
	2.125000	-0.12(6)	0.73(6)	0.71(6)	0.06(6)	0.72(6)	0.71(6)
$\kappa_{h_4} =$ 0.105836	0.250000	-0.50(5)	0.85(3)	0.70(3)	-0.23(5)	0.73(3)	0.81(3)
	0.500000	-0.47(6)	0.84(3)	0.70(3)	-0.21(6)	0.73(3)	0.80(3)
	0.875000	-0.39(6)	0.81(4)	0.69(3)	-0.13(6)	0.73(3)	0.77(3)
	1.250000	-0.32(6)	0.78(4)	0.69(3)	-0.07(6)	0.72(3)	0.74(4)
	1.750000	-0.24(7)	0.73(4)	0.66(3)	-0.01(7)	0.69(4)	0.69(4)
	2.125000	-0.16(8)	0.69(5)	0.65(4)	0.07(8)	0.67(4)	0.65(4)
$\kappa_{h_5} =$ 0.096143	0.250000	-1.5(4)	1.2(1)	0.61(5)	-1.1(3)	0.66(5)	1.1(1)
	0.500000	-0.8(1)	0.91(8)	0.61(5)	-0.4(1)	0.67(5)	0.84(7)
	0.875000	-0.53(9)	0.81(7)	0.61(5)	-0.23(8)	0.66(5)	0.75(6)
	1.250000	-0.42(8)	0.77(6)	0.61(5)	-0.13(8)	0.65(5)	0.70(6)
	1.750000	-0.34(9)	0.69(6)	0.57(4)	-0.07(8)	0.61(5)	0.63(5)
	2.125000	-0.2(1)	0.64(6)	0.56(5)	0.0(1)	0.60(6)	0.59(5)

TABLEAU A.12 – Résultats pour les facteurs de forme dans l'ensemble G8 en fonction de la masse du quark lourd κ_h et de l'impulsion θ . Les incertitudes sont calculées via la dispersion sur les bins.

κ_h	θ	f^-	f^+	f_0	h^-	h^+	$\mathcal{G}$	h_{A_1}	h_{A_3}
$\kappa_c = 0.130260$	0.000000							0.85(1)	
	0.253500	0.000(4)	0.946(4)		0.000(4)	0.946(4)	0.946(4)	0.85(1)	30(9)
	0.507000	-0.002(4)	0.949(4)		-0.002(4)	0.949(4)	0.949(4)	0.86(1)	11(3)
	0.887000	-0.007(5)	0.965(5)		-0.007(5)	0.965(5)	0.965(5)	0.88(2)	7(1)
	1.262500	-0.017(6)	0.992(7)		-0.017(6)	0.992(7)	0.992(7)	0.94(2)	7(1)
	1.774000	-0.016(9)	1.037(8)		-0.016(9)	1.037(8)	1.037(8)	1.10(4)	8(1)
	2.154500	-0.02(1)	1.08(1)		-0.02(1)	1.08(1)	1.08(1)	1.36(8)	11(2)
$\kappa_{h_1} = 0.127737$	0.000000							0.84(1)	
	0.253500	-0.095(4)	0.938(4)	0.930(4)	-0.010(4)	0.933(4)	0.934(4)	0.84(1)	40(8)
	0.507000	-0.096(4)	0.940(4)	0.935(4)	-0.012(4)	0.935(4)	0.937(4)	0.85(2)	14(3)
	0.887000	-0.103(5)	0.958(5)	0.961(5)	-0.017(5)	0.953(5)	0.954(5)	0.88(2)	9(1)
	1.262500	-0.117(7)	0.988(6)	1.005(7)	-0.028(7)	0.981(7)	0.984(6)	0.93(2)	8(1)
	1.774000	-0.12(1)	1.038(8)	1.083(9)	-0.03(1)	1.032(8)	1.034(8)	1.10(4)	8(1)
	2.154500	-0.13(2)	1.09(1)	1.16(1)	-0.03(2)	1.08(1)	1.09(1)	1.34(7)	10(2)
$\kappa_{h_2} = 0.124958$	0.000000							0.83(1)	
	0.253500	-0.172(4)	0.940(4)	0.912(4)	-0.017(4)	0.924(4)	0.927(4)	0.83(1)	44(9)
	0.507000	-0.174(5)	0.943(4)	0.918(4)	-0.018(4)	0.927(4)	0.930(4)	0.84(2)	16(3)
	0.887000	-0.181(5)	0.962(5)	0.943(5)	-0.022(5)	0.945(5)	0.948(5)	0.88(2)	10(2)
	1.262500	-0.196(7)	0.994(6)	0.986(6)	-0.032(7)	0.975(6)	0.980(6)	0.94(3)	9(1)
	1.774000	-0.20(1)	1.048(8)	1.064(8)	-0.03(1)	1.028(8)	1.033(8)	1.12(5)	10(1)
	2.154500	-0.21(2)	1.11(1)	1.15(1)	-0.03(2)	1.09(1)	1.09(1)	1.41(8)	12(2)
$\kappa_{h_3} = 0.121051$	0.000000							0.82(1)	
	0.253500	-0.257(5)	0.949(5)	0.887(4)	-0.025(5)	0.914(4)	0.920(4)	0.83(1)	52(9)
	0.507000	-0.258(5)	0.952(5)	0.892(4)	-0.025(5)	0.917(4)	0.923(4)	0.84(2)	19(3)
	0.887000	-0.266(6)	0.972(5)	0.917(5)	-0.029(6)	0.935(5)	0.942(5)	0.88(2)	11(2)
	1.262500	-0.282(7)	1.005(6)	0.959(6)	-0.036(7)	0.965(6)	0.974(6)	0.95(3)	10(1)
	1.774000	-0.29(1)	1.063(8)	1.038(8)	-0.03(1)	1.023(9)	1.030(8)	1.16(5)	11(2)
	2.154500	-0.30(2)	1.13(1)	1.12(1)	-0.02(2)	1.09(1)	1.09(1)	1.48(8)	14(2)
$\kappa_{h_4} = 0.115915$	0.000000							0.82(1)	
	0.253500	-0.342(6)	0.971(5)	0.861(4)	-0.030(5)	0.909(5)	0.919(5)	0.83(1)	$6(1) \times 10^1$
	0.507000	-0.343(6)	0.974(5)	0.867(4)	-0.030(5)	0.912(5)	0.922(5)	0.84(2)	23(3)
	0.887000	-0.352(7)	0.995(6)	0.892(5)	-0.032(6)	0.931(5)	0.941(5)	0.89(2)	14(2)
	1.262500	-0.369(8)	1.030(6)	0.933(6)	-0.038(8)	0.962(6)	0.975(6)	0.98(3)	12(1)
	1.774000	-0.38(1)	1.091(8)	1.013(8)	-0.03(1)	1.023(9)	1.032(8)	1.22(5)	13(2)
	2.154500	-0.39(2)	1.16(1)	1.10(1)	-0.02(2)	1.09(2)	1.10(1)	1.57(8)	16(2)
$\kappa_{h_5} = 0.109399$	0.000000							0.86(1)	
	0.253500	-0.444(8)	1.036(6)	0.861(5)	-0.036(7)	0.937(5)	0.951(5)	0.87(2)	$7(1) \times 10^1$
	0.507000	-0.446(8)	1.040(6)	0.866(4)	-0.035(7)	0.941(5)	0.955(5)	0.89(2)	27(4)
	0.887000	-0.454(9)	1.064(6)	0.894(5)	-0.034(8)	0.963(5)	0.977(6)	0.94(2)	17(2)
	1.262500	-0.47(1)	1.106(7)	0.940(6)	-0.04(1)	1.000(7)	1.015(7)	1.06(3)	15(2)
	1.774000	-0.49(1)	1.178(9)	1.027(9)	-0.02(1)	1.07(1)	1.081(8)	1.34(6)	16(2)
	2.154500	-0.51(2)	1.26(2)	1.12(2)	-0.01(2)	1.15(2)	1.16(1)	1.76(9)	19(2)

TABLEAU A.13 – Résultats pour les facteurs de forme dans l'ensemble N6 en fonction de la masse du quark lourd κ_h et de l'impulsion θ . Les incertitudes sont calculées via la dispersion sur les bins.

κ_h	θ	f^-	f^+	f_0	h^-	h^+	$\mathcal{G}$	h_{A_1}	h_{A_3}
$\kappa_c = 0.130220$	0.000000							0.82(1)	
	0.338000	-0.01(3)	0.922(6)		-0.01(3)	0.922(6)	0.922(6)	0.80(2)	$2(2) \times 10^1$
	0.676000	0.11(2)	0.917(7)		0.11(2)	0.917(7)	0.917(7)	0.80(2)	7(6)
	1.183000	0.27(2)	0.923(8)		0.27(2)	0.923(8)	0.923(8)	0.76(3)	-3(4)
	1.683000	0.12(2)	0.89(1)		0.12(2)	0.89(1)	0.89(1)	0.81(3)	5(2)
	2.365000	0.02(2)	0.82(2)		0.02(2)	0.82(2)	0.82(2)	0.78(4)	4(1)
	2.873000	0.03(2)	0.82(2)		0.03(2)	0.82(2)	0.82(2)	0.74(6)	2(1)
$\kappa_{h_1} = 0.127900$	0.000000							0.85(2)	
	0.338000	-0.03(4)	0.919(6)	0.917(7)	0.05(4)	0.920(7)	0.916(6)	0.83(2)	$3(2) \times 10^1$
	0.676000	0.10(2)	0.904(7)	0.908(7)	0.17(2)	0.915(7)	0.900(7)	0.83(2)	10(7)
	1.183000	0.21(3)	0.905(8)	0.897(8)	0.29(3)	0.93(1)	0.902(8)	0.79(3)	-2(5)
	1.683000	0.02(3)	0.89(1)	0.88(1)	0.10(3)	0.89(1)	0.88(1)	0.85(3)	7(2)
	2.365000	0.05(3)	0.82(2)	0.80(2)	0.12(3)	0.83(2)	0.82(2)	0.81(5)	5(2)
	2.873000	0.02(4)	0.81(3)	0.80(3)	0.09(4)	0.82(3)	0.81(3)	0.79(9)	3(2)
$\kappa_{h_2} = 0.124944$	0.000000							0.89(2)	
	0.338000	-0.11(4)	0.918(9)	0.900(8)	0.04(4)	0.912(8)	0.905(9)	0.87(2)	$4(3) \times 10^1$
	0.676000	0.02(2)	0.892(9)	0.895(8)	0.16(2)	0.907(8)	0.880(9)	0.87(3)	12(9)
	1.183000	0.12(3)	0.887(8)	0.90(1)	0.27(3)	0.92(1)	0.875(8)	0.84(4)	-1(5)
	1.683000	-0.07(3)	0.88(1)	0.88(1)	0.08(3)	0.88(1)	0.87(1)	0.89(4)	8(3)
	2.365000	-0.02(3)	0.82(2)	0.82(2)	0.12(3)	0.83(3)	0.81(2)	0.84(7)	5(3)
	2.873000	-0.03(4)	0.83(3)	0.83(3)	0.11(4)	0.83(3)	0.81(3)	0.8(1)	3(3)
$\kappa_{h_3} = 0.120910$	0.000000							0.97(2)	
	0.338000	-0.21(5)	0.94(1)	0.884(9)	0.02(5)	0.912(9)	0.91(1)	0.95(3)	$4(4) \times 10^1$
	0.676000	-0.08(2)	0.90(1)	0.880(9)	0.15(2)	0.908(9)	0.87(1)	0.95(3)	11(9)
	1.183000	0.06(3)	0.88(1)	0.89(1)	0.28(3)	0.92(1)	0.85(1)	0.91(4)	-4(7)
	1.683000	-0.20(4)	0.91(2)	0.87(1)	0.03(4)	0.88(2)	0.88(1)	1.00(4)	11(3)
	2.365000	-0.05(4)	0.83(3)	0.83(3)	0.16(4)	0.84(3)	0.80(3)	1.04(6)	9(2)
	2.873000	-0.01(6)	0.85(3)	0.85(3)	0.21(6)	0.88(4)	0.83(3)	0.9(1)	4(3)
$\kappa_{h_4} = 0.115890$	0.000000							1.08(3)	
	0.338000	-0.33(5)	1.00(2)	0.89(1)	-0.01(5)	0.94(1)	0.94(2)	1.04(4)	$1.0(5) \times 10^2$
	0.676000	-0.21(3)	0.95(2)	0.89(1)	0.11(3)	0.93(1)	0.90(2)	1.07(4)	$2(1) \times 10^1$
	1.183000	-0.02(4)	0.91(1)	0.90(1)	0.29(4)	0.95(1)	0.86(1)	1.00(7)	$-0(1) \times 10^1$
	1.683000	-0.31(5)	0.97(2)	0.88(2)	-0.00(5)	0.91(2)	0.91(2)	1.27(7)	10(5)
	2.365000	-0.09(5)	0.87(3)	0.85(3)	0.20(6)	0.89(3)	0.82(3)	1.8(1)	8(5)
	2.873000	-0.02(8)	0.92(4)	0.92(4)	0.29(9)	0.97(4)	0.87(4)	1.2(2)	5(5)
$\kappa_{h_5} = 0.109400$	0.000000							1.11(3)	
	0.338000	-0.44(6)	1.03(3)	0.85(1)	-0.04(6)	0.93(1)	0.94(2)	1.09(4)	$1.1(8) \times 10^2$
	0.676000	-0.27(3)	0.96(2)	0.85(1)	0.12(3)	0.93(1)	0.88(2)	1.14(4)	$3(2) \times 10^1$
	1.183000	-0.12(5)	0.91(2)	0.87(1)	0.27(4)	0.94(1)	0.84(2)	1.1(1)	$0(2) \times 10^1$
	1.683000	-0.40(5)	0.99(2)	0.85(1)	-0.01(5)	0.91(2)	0.91(2)	1.35(9)	6(7)
	2.365000	-0.23(5)	0.93(3)	0.86(3)	0.15(6)	0.92(4)	0.86(3)	1.3(2)	-11(8)
	2.873000	-0.11(7)	1.00(4)	0.97(5)	0.31(8)	1.04(5)	0.92(4)	1.0(3)	-15(8)

TABLEAU A.14 – Résultats pour les facteurs de forme dans l'ensemble O7 en fonction de la masse du quark lourd κ_h et de l'impulsion θ . Les incertitudes sont calculées via la dispersion sur les bins.

A.4 Extrapolations $h_{A_1}(1)$ élastique et rapports $\sigma_{\mathcal{G}}^h$ et $\sigma_{h_{A_1}}^h$

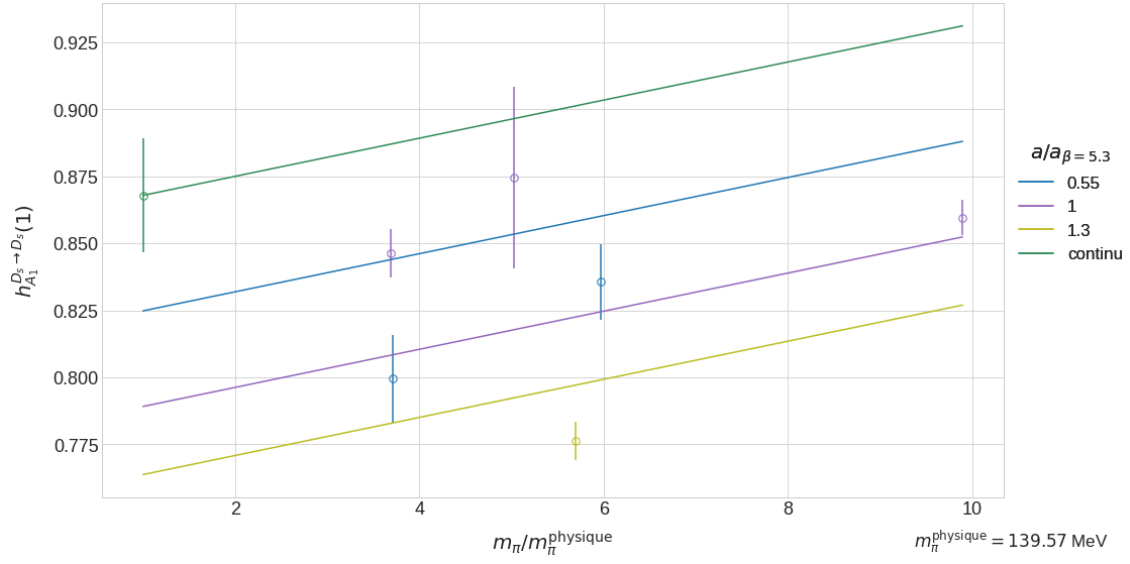
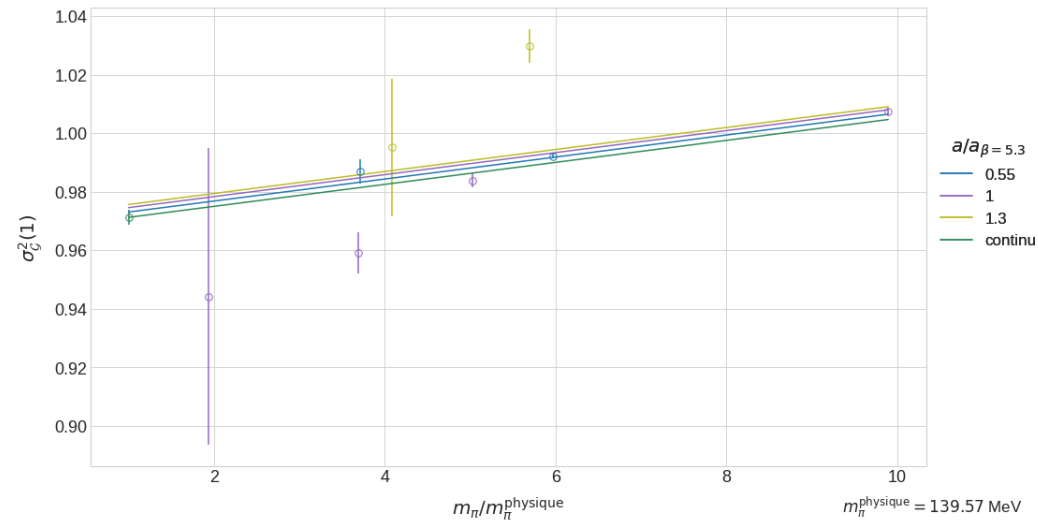
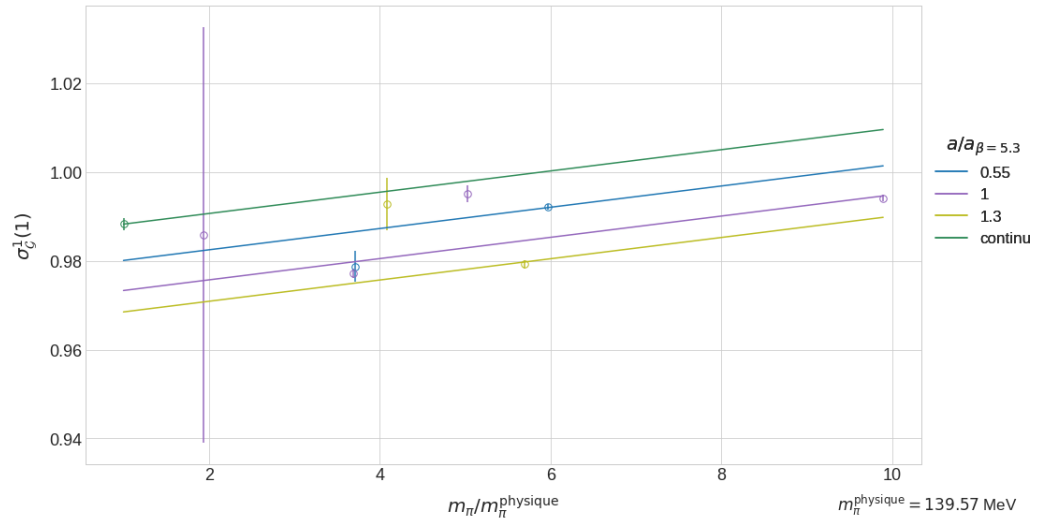
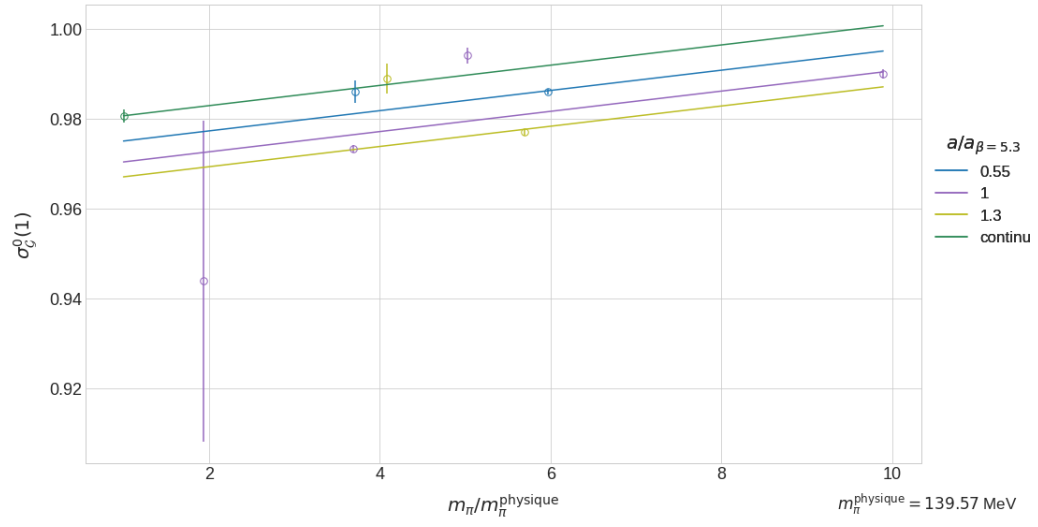


FIGURE A.2 – Extrapolation à la limite du continu du facteur de forme élastique $h_{A_1}^{D_s \rightarrow D_s}(1)$.



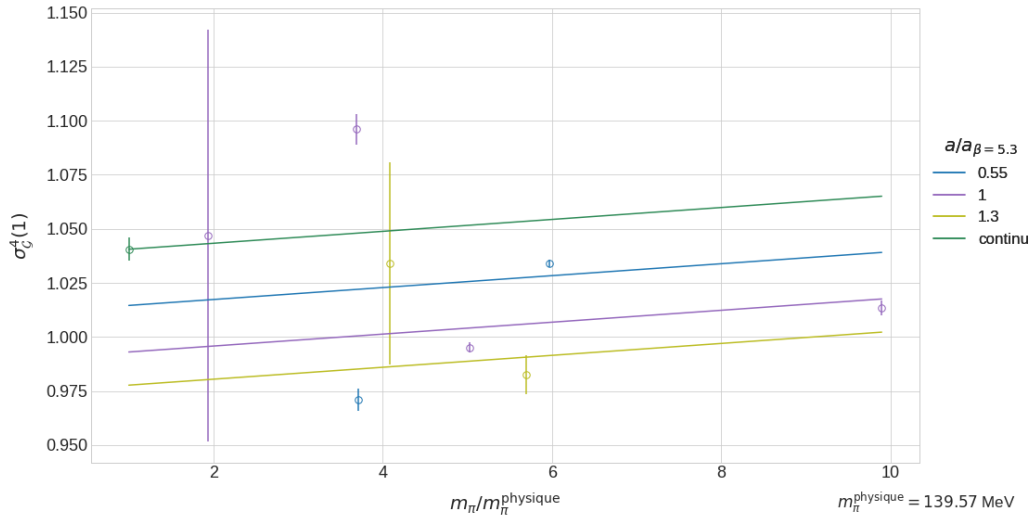
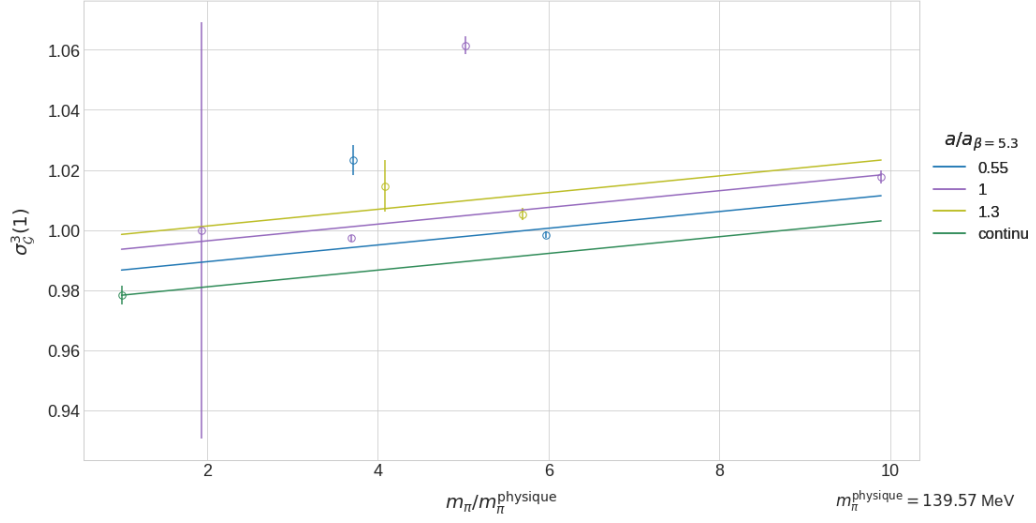
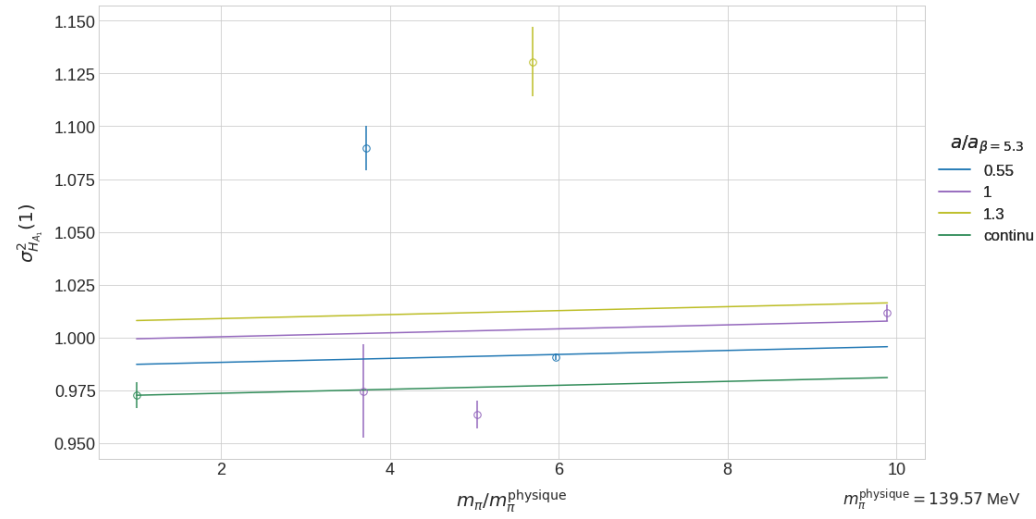
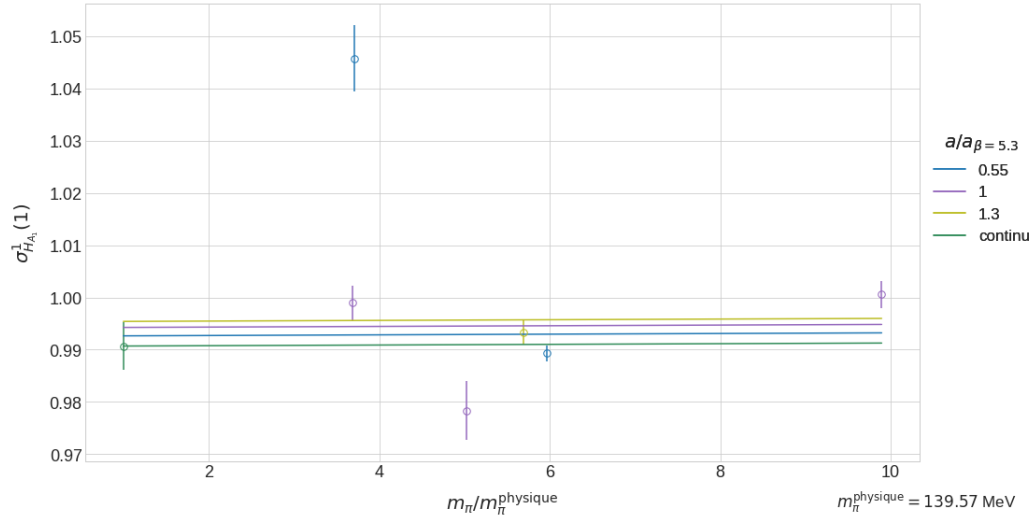
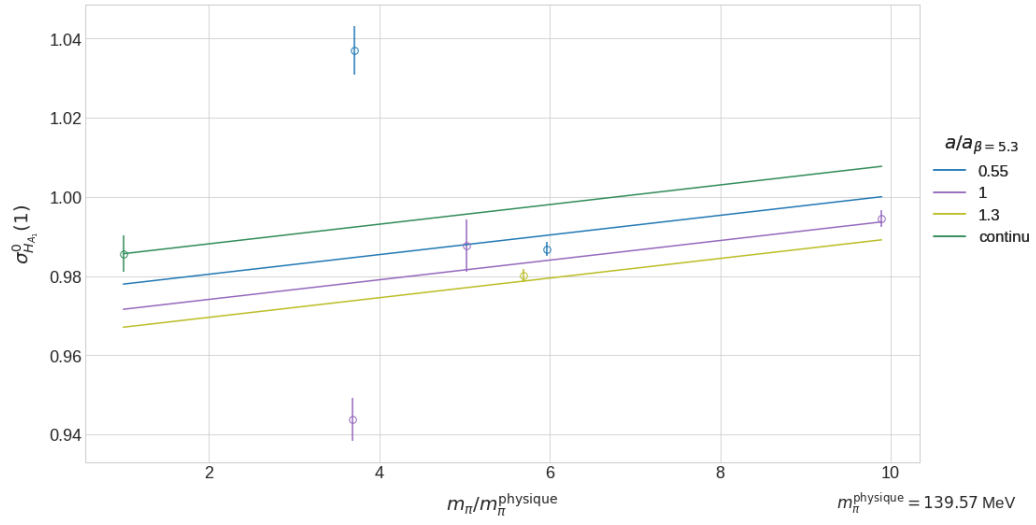


FIGURE A.3 – Extrapolations dans le continu des rapports $\Sigma_G(1)$ vers $\sigma_G(1)$ pour tous les rapports de facteur de forme.



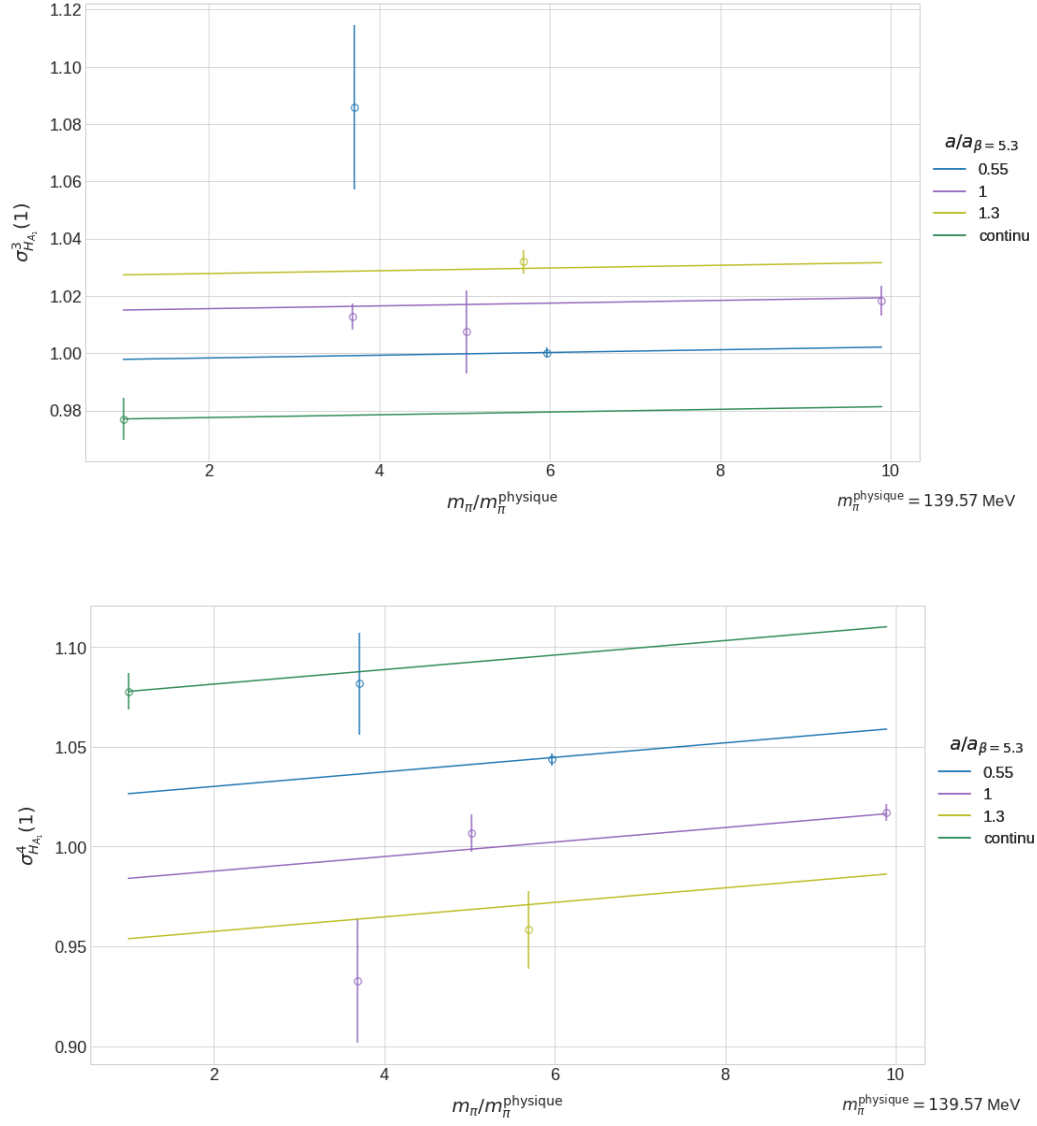


FIGURE A.4 – Extrapolations dans le continu des rapports $\Sigma_{h_{A_1}}(1)$ vers $\sigma_{h_{A_1}}(1)$ pour tous les rapports de facteur de forme.

Liste des figures

I.1	Valeurs expérimentales et ajustement de $\alpha_s(\mu)$	9
I.2	Schéma d'une plaquette (pour l'action gluonique)	18
I.3	Représentation du terme de <i>clover</i> (pour l'action fermionique)	22
I.4	Représentation d'une agrafe (<i>staple</i>) pour le <i>smearing</i> APE	24
I.5	Diagramme de Feynman $b \rightarrow c$	34
I.6	Corrélateurs à 3-pts	35
I.7	Simulations majeures de LQCD dans le plan $m_\pi - a$	43
III.1	Triangle d'unitarité de CKM	72
III.2	Test de l'unitarité de la matrice CKM	73
IV.1	Corrélateur à deux points pour le méson D_s (ensemble E5)	95
IV.2	Masse effective du méson D_s au repos (ensemble E5)	96
IV.3	Masse effective du méson D_s avec <i>smearing</i> et GEVP (ensemble E5)	100
IV.4	Illustration de la détermination du début d'un plateau (ensemble E5)	104
IV.5	Énergie de D_s et D_s^* en fonction de l'impulsion θ (ensemble E5)	108
IV.6	Fonction de corrélation à trois points et élément de matrice $\langle D_s V_0 D_s \rangle$	111
IV.7	Éléments de matrice $\langle D_s V_0 D_s \rangle$ avec <i>smearing</i> et GEVP	114
IV.8	Illustration de l'asymétrie en θ pour le calcul de $\mathcal{M}_0$ (ensemble E5)	124
IV.9	$M_0^{I,(r)}$ extrapolée à la limite du continu	126
IV.10	Extrapolation du facteur de forme $f^-(w)$ à recul nul (ensemble E5)	133
IV.11	Quadrillage des ensembles utilisés pour l'extrapolation du continu	137
IV.12	Extrapolation à la limite du continu de $\mathcal{G}^{D_s \rightarrow D_s}(1)$	139
IV.13	Régression pour moyennes $\bar{\sigma}_{\mathcal{G}}(1)$ et $\bar{\sigma}_{h_{A_1}}(1)$	141
IV.14	Résultats pour $\mathcal{G}$ et h_{A_1} dans la littérature	144
A.1	Élément de matrice non-élastique	164
A.2	Extrapolation à la limite du continu de $h_{A_1}^{D_s \rightarrow D_s}(1)$	179
A.3	Extrapolations dans le continu des rapports $\Sigma_{\mathcal{G}}(1)$	181
A.4	Extrapolations dans le continu des rapports $\Sigma_{h_{A_1}}(1)$	183

Liste des tableaux

III.1	Liste des mésons b de spin $J = 0$ et $J = 1$	64
III.2	Derniers résultats des anomalies	76
IV.1	Liste des ensembles simulés par la collaboration CLS [88]	83
IV.2	Valeur de κ_{cr} pour les ensembles utilisés	84
IV.3	Propriétés (κ_{sea} , a , m_π , κ_s , etc.) des ensembles utilisés	85
IV.4	Valeur des impulsions θ pour $B_s \rightarrow D_s^{(*)}$ (par ensemble)	86
IV.5	Valeur des quarks lourds κ_h simulés (par ensemble)	89
IV.6	Configurations Jackknife sélectionnées (par ensemble)	91
IV.7	Valeur de $ Z_{D_s} ^2$ avec <i>smearing</i> et GEVP (par ensemble)	99
IV.8	Masse des mésons D_s et D_s^* en unité réseau (par ensemble)	106
IV.9	Masse des mésons H_s en unité réseau (par ensemble)	107
IV.10	Énergie de D_s et $D_s^{(*)}$ en fonction de l'impulsion θ (ensemble E5)	109
IV.11	Valeur des masses m^{PCAC} pour les quarks ss , sc et sh_i (par ensemble)	119
IV.12	Valeur des masses m^{PCAC} pour les quarks cc et ch_i (par ensemble)	120
IV.13	Éléments de matrice $\mathcal{M}_0^{I,(r)}$, $\mathcal{M}_i^{I,(r)}$, $\mathcal{A}^{(r)}$ et $\mathcal{B}^{(r)}$ (ensemble E5)	122
IV.14	Paramètres α et γ pour l'extrapolation de $M_0^{I,(r)}$ à la limite du continu	125
IV.15	Valeurs de recul $w(\theta)$ correspondant aux impulsions θ	129
IV.16	Récapitulatif des facteurs de forme $f^\pm$, f_0 , $h^\pm$, $\mathcal{G}$ et $h_{A_{1,3}}$ (ensemble E5)	132
IV.17	Paramètres pour l'extrapolation de f^- à recul nul (ensemble E5)	134
IV.18	Facteurs de forme $f^\pm$, f_0 , $h^\pm$, $\mathcal{G}$ et $h_{A_{1,3}}$ à recul nul (par ensemble)	135
IV.19	Paramètres d'extrapolation dans le continu de $\sigma_{\mathcal{G}}^h(1)$ et $\sigma_{h_{A_1}}^h(1)$	138
IV.20	Extrapolation à la limite du continu des facteurs de forme élastiques	139
IV.21	Résultats des moyennes $\bar{\sigma}_{\mathcal{G}}(1)$ et $\bar{\sigma}_{h_{A_1}}(1)$	140
IV.22	Résultats finaux des facteurs de forme $\mathcal{G}(1)$ et $\mathcal{F}(1)$	142
IV.23	Résultats finaux pour les facteurs de forme $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ à recul nul	145
A.1	Résultats des éléments de matrice dans l'ensemble A5	165
A.2	Résultats des éléments de matrice dans l'ensemble B6	166
A.3	Résultats des éléments de matrice dans l'ensemble F6	167
A.4	Résultats des éléments de matrice dans l'ensemble F7	168
A.5	Résultats des éléments de matrice dans l'ensemble G8	169
A.6	Résultats des éléments de matrice dans l'ensemble N6	170
A.7	Résultats des éléments de matrice dans l'ensemble O7	171

A.8	Résultats pour les facteurs de forme dans l'ensemble A5	172
A.9	Résultats pour les facteurs de forme dans l'ensemble B6	173
A.10	Résultats pour les facteurs de forme dans l'ensemble F6	174
A.11	Résultats pour les facteurs de forme dans l'ensemble F7	175
A.12	Résultats pour les facteurs de forme dans l'ensemble G8	176
A.13	Résultats pour les facteurs de forme dans l'ensemble N6	177
A.14	Résultats pour les facteurs de forme dans l'ensemble O7	178