

Paulo Michel Longo Tavares da Silva

COSMOLOGIA DE BRANAS E TEORIAS  
MODIFICADAS DA GRAVITAÇÃO EM  
DIMENSÕES ARBITRÁRIAS

Guaratinguetá

2017

**PAULO MICHEL LONGO TAVARES DA SILVA**

**COSMOLOGIA DE BRANAS E TEORIAS MODIFICADAS  
DA GRAVITAÇÃO EM DIMENSÕES ARBITRÁRIAS**

Tese apresentada à Faculdade De Engenharia do  
Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual  
Paulista, para obtenção do Título de Doutor em  
Física.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro de Souza Dutra  
Co-Orientador: Prof. Dr. Julio Marny Hoff da  
Silva

Guaratinguetá  
2017

## FICHA CATALOGRÁFICA

S586c

Silva, Paulo Michel Longo Tavares

Cosmologia de Branas e Teorias Modificadas da Gravitação

em Dimensões Arbitrárias/ Paulo Michel Longo Tavares da Silva - Guaratinguetá, 2017.

89f.: il.

Bibliografia: f. 79-82

Tese (Doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2017

Orientador: Prof. Dr. Alvaro de Souza Dutra

Co-orientador: Prof. Dr. Julio Marny Hoff da Silva

1. Cosmologia. 2. Gravitação 3. Dimensões. Título

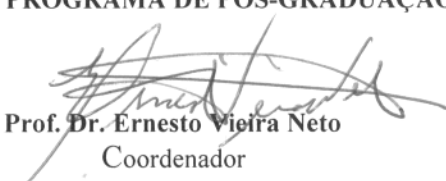
CDD 524.82

**PAULO MICHEL TAVARES LONGO DA SILVA**

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
“DOUTOR EM FÍSICA”**

**PROGRAMA: FÍSICA**

**APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**

  
**Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto**  
Coordenador

**BANCA EXAMINADORA:**

  
**Prof. Dr. ÁLVARO DE SOUZA DUTRA**  
Orientador / UNESP/FEG

  
**Prof. Dr. DENIS DALMAZI**  
UNESP/FEG

  
**Prof. Dr. SAULO HENRIQUE PEREIRA**  
UNESP/FEG

  
**Prof<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup>. MARIA EMÍLIA XAVIER GUIMARÃES**  
UFF

  
**Prof. Dr. ROLDÃO DA ROCHA JÚNIOR**  
UF ABC

*Março de 2017*

## DADOS CURRICULARES

**PAULO MICHEL LONGO TAVARES DA SILVA**

NASCIMENTO 10.06.1984 / BOTUCATU-SP

FILIAÇÃO Paulo Tavares da Silva  
Antonia Zilá Longo da Silva

## FORMAÇÃO

2006/2009      Licenciatura em Física  
Faculdade de Ciências de Bauru  
Universidade Estadual Paulista - UNESP.

2010/2012      Mestrado em Física  
Centro de Ciências Tecnológicas de Joinville  
Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC.

2013/2017      Doutorado em Física  
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá  
Universidade Estadual Paulista - UNESP.

# Agradecimentos

Aos meus pais Paulo Tavares e Zilá Longo, pelo apoio à esta Tese.

Ao Doutor Alvaro de Souza Dutra, pela orientação.

Ao Doutor Julio Marny Hoff da Silva, pela Co-orientação.

Ao Doutor Saulo Henrique Pereira, pelas discussões.

Aos servidores da Unesp, pela manutenção do campus.

## RESUMO

SILVA, P. MICHEL L. T. Cosmologia de Branas e Teorias Modificadas da Gravitação em Dimensões Arbitrárias. 90 f. Tese (Doutorado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2017.

Este trabalho contém duas abordagens concernentes às dimensões extras. Na primeira abordagem, investigamos duas teorias modificadas da gravitação em dimensões arbitrárias,  $f(\mathcal{R})$ -Einstein-Palatini e a teoria de Brans-Dicke. Mostramos que a consideração das condições de consistência de mundos brana dentro da estrutura da teoria de Brans-Dicke no bulk permite a existência de branas suaves no caso de cinco dimensões com uma dimensão extra compacta. Ao estudar as regras de soma na teoria de Brans-Dicke e  $f(\mathcal{R})$ -Einstein-Palatini, pudemos mostrar que a brana que gera o potencial de campo escalar é relevante para relaxar as restrições gravitacionais. Já para a segunda abordagem, estudamos a evolução cosmológica com branas não-singulares geradas por um campo escalar no bulk acoplado à gravidade. A configuração específica investigada leva à branas com um *warp factor* dependente do tempo. Calculamos o parâmetro efetivo de Hubble advindo do fator de escala efetivo para as soluções de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker obtidas. As soluções de branas espacialmente dependentes também foram encontradas.

**PALAVRAS-CHAVE:** Branas. Cosmologia. Dimensões Extras.

# ABSTRACT

SILVA, P. MICHEL L. T. Braneworld Cosmology and Modified Theories of Gravitation in Arbitrary Dimensions. 90f. Thesis (Ph.D. in Physics) - Faculty Engineering of Campus Guaratinguetá, São Paulo State University, Guaratinguetá, 2017.

This work contains two approaches concerning extra dimensions. In the first approach, we investigate two modified theories of gravitation in arbitrary dimensions,  $f(\mathcal{R})$ -Einstein-Palatini and the Brans-Dicke theory. We have shown that the consideration of the brane world consistency conditions within the structure of the Brans-Dicke theory in bulk allows the existence of soft branes in the case of five dimensions with an extra compact dimension. When studying the rules of addition in the Brans-Dicke and  $f(\mathcal{R})$ -Einstein-Palatini theory, we could show that the brane that generates scalar field potential is relevant to relax the gravitational constraints. For the second approach, we study the cosmological evolution with non-singular branes generated by a scalar field in the bulk coupled to gravity. The specific configuration investigated leads to branes with a warp dependent factor. We calculated the effective Hubble parameter and the effective scale factor for the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-solutions obtained. Spatially-dependent brane solutions have also been found.

**KEY WORDS:** Branes. Cosmology. Extra Dimensions.



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Relatividade Geral</b>	<b>4</b>
2.1	Tensor de Curvatura . . . . .	5
2.2	Formulação lagrangiana e equações de campo . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Cosmologia Relativística</b>	<b>12</b>
3.1	Radiação Cósmica de Fundo . . . . .	14
3.2	Parâmetro de Hubble e parâmetro de desaceleração . . . . .	15
3.3	Modelo de Friedmann-Robertson-Walker-Lemaître . . . . .	16
3.4	Equações de Friedmann . . . . .	17
3.5	Idade do Universo . . . . .	21
3.6	Oscilações Acústicas de Bárions . . . . .	22
3.7	Aceleração Cósmica . . . . .	24
3.8	Distância de Luminosidade . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Dimensões Extras</b>	<b>29</b>
4.1	Introdução . . . . .	29
4.2	Modelo de Randall-Sundrum (RS) . . . . .	31
4.3	Modelo Arkani-Dimopoulos-Dvali (ADD) . . . . .	33
4.4	Modelo Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP) . . . . .	35
4.5	Formulação de Shiromizu-Maeda-Sasaki . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Regras de soma para cenários de mundos brana</b>	<b>44</b>
5.1	Introdução . . . . .	44
5.2	Teoria de Brans-Dicke: Ação e equações de campo . . . . .	47

5.3	Regras de soma para mundo branas na teoria de Brans-Dicke . . . . .	49
5.4	Formalismo $f(\mathcal{R})$ -Einstein-Palatini em dimensões arbitrárias . . . . .	51
5.4.1	Regras de soma para mundo branas no formalismo $f(\mathcal{R})$ -Einstein-Palatini . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Cosmologia de Branas</b>	<b>57</b>
6.1	Introdução . . . . .	57
6.2	Soluções Cosmológicas de Branas não singulares . . . . .	58
6.2.1	Solução Temporal com $b(t, y) = 1$ e $\phi = \phi(y)$ . . . . .	61
6.2.2	Solução Espacial com $b(t, y) = 1$ e $\phi = \phi(y)$ . . . . .	66
6.3	Parâmetro de Hubble Efetivo . . . . .	70
6.4	Resultados . . . . .	72
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>77</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Sabemos que o cenário da teoria das supercordas exige um ambiente com dez dimensões. A partir dessas teorias de supercordas (1+9-dimensionais), relacionadas com a teoria de supergravidade (1+10-dimensionais), emerge uma conjectura, a qual foi desenvolvida por Horava e Witten [1, 2], popularmente conhecida como Teoria M. À luz da teoria M, também foram descobertas as  $p$ -branas, as quais são entendidas como objetos estendidos das cordas. Posteriormente, Dai, Leigh e Polchinski em (1989)[3, 4] reportaram que no cenário da teoria das supercordas, manifesta-se um caso particular das  $p$ -branas, as chamadas  $D$ -branas ( $D$  indica as condições de contorno de Dirichlet) com  $N$ -branas que possuem  $N$  dimensões espaciais.

Na teoria de Horava-Witten os campos de calibre estão confinados em duas  $(1 + 9)$ -branas localizadas nos pontos fixos de uma topologia dita ser do tipo *orbifold*, denotada por  $S^1/Z_2$ . Esse espaço-tempo é denotado por  $M_4 \times Y_6 \times S^1/Z_2$ , onde  $M_4$  é o espaço-tempo de Minkowski e  $Y_6$  é um espaço  $(6D)$  de Calabi-Yau.

A supressão do espaço de Calabi-Yau nos fornece um cenário de  $(1+3)$ -branas. Tal mecanismo nos dá uma teoria efetiva da conjectura de Horava-Witten. Deste modo, nosso Universo de quatro dimensões pode ser representado por tais branas e, essencialmente, podemos imaginar que o nosso Universo é descrito por um espaço-tempo 4D que está mergulhado em outro espaço-tempo 5D (*bulk*). Tal cenário é conhecido como modelo de mundos branas.

No final do século XX, Lisa Randall e Raman Sundrum propuseram um mecanismo para elucidar o problema da hierarquia, onde surge uma métrica não fatorizável, com uma dimensão extra. A existência de um *warp factor* exponencial que multiplica a porção

4-dimensional da métrica é responsável por um tipo de hierarquia exponencial. Nesse ambiente são consideradas duas (3+1)-branas com o raio do *orbifold* compacto (Modelo Randall-Sundrum I). Quando o raio de compactificação tende ao infinito, uma das (1+3)-branas é suprimida, temos o segundo modelo de Randall-Sundrum (RS-II), mais detalhes podem ser encontrados em [5, 6, 8].

Contrariamente aos modelos de Randall-Sundrum, onde as branas são ditas serem do tipo singulares, neste trabalho, investigamos duas teorias modificadas da gravitação, Brans-Dicke e  $f(\mathcal{R})$ -Einstein-Palatini para cenários de mundo branas suaves geradas por um campo escalar. Neste contexto, aplicamos as chamadas regras de soma para tais teorias. Estas regras foram formuladas na referência [7] para o caso de cinco dimensões na Relatividade Geral e estendida para um número de dimensões arbitrárias na referência [9]. O principal objetivo desta primeira parte de nosso trabalho é generalizar as regras de soma em mundo branas para teoria de Brans-Dicke e  $f(\mathcal{R})$ -Einstein-Palatini.

Este texto está organizado na seguinte ordem. No capítulo 2, exibimos os objetos matemáticos essenciais utilizados na Relatividade Geral e descrevemos a formulação Lagrangeana a partir do princípio variacional tradicional (métrico). No Capítulo 3 apresentamos algumas seções para a Cosmologia Relativística, expondo o cenário geral dos Universos de Friedmann. No Capítulo 4 descrevemos modelos que envolvem dimensões extras, tais como, modelo de Randall-Sundrum, modelo ADD (Modelo Arkani-Dimopoulos-Dvali) e o modelo DGP (Dvali-Gabadadze-Porrati). Também, neste capítulo, elaboramos detalhadamente o formalismo de Shiromizu-Maeda-Sasaki, no qual permite a projeção das equações de campo do *bulk* na brana (branas singulares). Nos Capítulos 5 e 6, os quais são o foco deste trabalho, apresentamos nossa contribuição original. No Capítulo 5 exibimos as regras de soma para cenários de mundo branas, apresentamos a ação e as equações de campo da teoria de Brans-Dicke e aplicamos as regras de soma à teoria de Brans-Dicke. Também derivamos as equações de campo no formalismo  $f(\mathcal{R})$ -Einstein-Palatini em dimensões arbitrárias, onde mostramos o mecanismo de cálculo das regras de soma para branas suaves quando aplicadas ao formalismo  $f(\mathcal{R})$ -Einstein-Palatini. O Capítulo 6 é dedicado à Cosmologia de Branas Suaves (versão distinta da Cosmologia de Branas singulares). A partir do Ansatz para a métrica no *bulk*, resolvemos as equações de campo dependentes do tempo e dependentes do espaço (dimensão extra) através do método de separação das variáveis da função *warp factor*. Diferentemente da maioria de alguns trabalhos, onde a função *warp factor* já é dada, nossa função warp factor foi

encontrada a partir do conjunto de equações da parte espacial. Investigamos os casos em que a constante de separação das variáveis, pode adquirir valor nulo e não nulo, ou seja,  $\Delta = 0$  e  $\Delta \neq 0$ . Os casos em que a curvatura espacial pode assumir valores nulo e não nulo, também foram tratados, isto é, para  $k = 0$  e  $k \neq 0$ . A partir das soluções advindas da parte temporal das equações de campo, nós calculamos o fator de escala efetivo e o parâmetro de Hubble efetivo. No Capítulo 7, são traçadas nossas conclusões.

# Capítulo 2

## Relatividade Geral

A teoria da relatividade formulada por Albert Einstein subdivide-se em duas teorias: Teoria da Relatividade Especial e a Teoria da Relatividade Geral. A relatividade especial tem sua simetria composta pelo grupo de Poincaré, o qual inclui translações no espaço-tempo, rotações e os *boosts*. Essencialmente, a teoria da relatividade especial é uma teoria de medida, ou seja, correlações observacionais entre observadores em referenciais inerciais. Tais correlações são implementadas através das transformações de Lorentz. O espaço vetorial que compõe os eventos relativísticos dessa teoria é o chamado espaço de Minkowski. Podemos dizer que tais eventos, como por exemplo contração do espaço, dilatação do tempo e relatividade da simultaneidade, mudaram drasticamente nosso senso comum com relação ao espaço e ao tempo.

Mais tarde, publicada em 1915, a teoria da relatividade geral trouxe algo ainda mais impactante, a manifestação da gravitação dever-se-ia dar sob a forma da curvatura do espaço-tempo. A geometria de fundo passa a ser modelada por uma variedade pseudo-Riemanniana livre de torção. Se a variedade em questão possui uma conexão com uma parte antissimétrica, a variedade é dita ser do tipo Riemann-Cartan e a teoria que descreve o campo gravitacional é chamada teoria de Einstein-Cartan.

Aqui há uma generalização no que diz respeito aos referenciais inerciais. Estes, agora, passam a ser considerados não inerciais. Tais impactos trouxeram previsões importantes concernentes aos fenômenos gravitacionais, dentre eles podemos citar as previsões de ondas gravitacionais, buracos negros, *redshift* gravitacional, etc.

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) é a generalização da Teoria da Relatividade Especial (TRE). O contexto Minkowskiano é ampliado para o contexto de espaços-tempo

curvos. Um dos fundamentos da TRG é o *Princípio de Equivalência*, o qual estabelece que localmente um referencial inercial não acelerado na presença de um campo gravitacional e um referencial acelerado, mas agora sem um campo gravitacional, são fisicamente equivalentes.

Dentre as consequências mais importantes da TRG, podemos citar a deflexão da luz em um campo gravitacional, o *redshift* gravitacional, a precessão do periélio de Mercúrio e a previsão de ondas gravitacionais. O *redshift* gravitacional faz com que o comprimento de onda dos fótons diminua nas proximidades de um campo gravitacional suficientemente forte. O fenômeno da precessão do periélio de Mercúrio, já era estudado pela mecânica clássica, a qual computava um valor discrepante ao observado [11]. As elipses que designam o movimento dos corpos celestes não são fechadas em virtude das perturbações de outros planetas, as quais alteram o ponto do periélio (ponto mais próximo do sol), fazendo assim o periélio precessionar. Mas a questão é que ainda restavam 43" por século nas previsões da Mecânica Clássica, o que foi interpretado por Einstein como modificações do espaço-tempo para tal situação. Conceitos mais avançados como singularidades e estrutura causal [12], também ocorrem como previsões da TRG.

Por volta de 1919, Arthur Stanley Eddington, teve a oportunidade de confirmar a teoria da relatividade geral de Einstein a partir de duas expedições, uma em São Tomé e Príncipe e outra na cidade de Sobral, no Brasil. Vamos nos endereçar agora aos objetos matemáticos básicos necessários ao estabelecimento da TRG.

## 2.1 Tensor de Curvatura

O tensor de curvatura, também chamado tensor de Riemann-Christoffel é de grande importância na TRG. Quando vetores são transportados paralelamente em um circuito fechado em uma variedade, eles geralmente sofrem transformações, estas, sendo relacionadas com a curvatura da variedade em questão. O mapeamento local da curvatura é feito pelo tensor de Riemann.

Seja a derivada covariante de um vetor contravariante

$$\nabla_\nu V^\rho = \partial_\nu V^\rho + \Gamma_{\nu\lambda}{}^\rho V^\lambda, \quad (2.1)$$

onde

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (2.2)$$

são os símbolos de Christoffel. Aplicando novamente a derivada covariante na equação (2.1), temos

$$\nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho = \partial_\mu (\partial_\nu V^\rho + \Gamma_{\nu\lambda}{}^\rho V^\lambda) + \Gamma_{\sigma\mu}{}^\rho (\partial_\nu V^\sigma + \Gamma_{\nu\lambda}{}^\sigma V^\lambda) - \Gamma_{\nu\mu}{}^\sigma (\partial_\sigma V^\rho + \Gamma_{\lambda\sigma}{}^\rho V^\lambda), \quad (2.3)$$

tal que efetuando-se uma permutação indicial  $\mu \rightleftharpoons \nu$  fornece como resultado

$$\nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho = \partial_\nu (\partial_\mu V^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}{}^\rho V^\lambda) + \Gamma_{\sigma\nu}{}^\rho (\partial_\mu V^\sigma + \Gamma_{\mu\lambda}{}^\sigma V^\lambda) - \Gamma_{\mu\nu}{}^\sigma (\partial_\sigma V^\rho + \Gamma_{\lambda\sigma}{}^\rho V^\lambda). \quad (2.4)$$

Subtraindo a equação (2.4) da equação (2.3), bem como efetuando as substituições indiciais necessárias e levando-se em consideração a comutatividade das derivadas parciais bem como a simetria dos índices inferiores dos símbolos de Christoffel, isto é,  $\Gamma_{\nu\mu}{}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda$ , a expressão rearranjada para o comutador torna-se

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = (\partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}{}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}{}^\rho + \Gamma_{\sigma\mu}{}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}{}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}{}^\rho \Gamma_{\mu\lambda}{}^\sigma) V^\lambda, \quad (2.5)$$

onde o termo entre parenteses é identificado como o tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu\lambda}{}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}{}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}{}^\rho + \Gamma_{\sigma\mu}{}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}{}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}{}^\rho \Gamma_{\mu\lambda}{}^\sigma. \quad (2.6)$$

Como podemos notar, o tensor de Riemann aparece como um tensor de quatro índices (rank-4) e, portanto, de 256 componentes. Mas, devido às propriedades de simetria e antissimetria, suas componentes se reduzem a 20. Vejamos algumas das propriedades algébricas do tensor de curvatura

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = R_{\mu\nu\lambda}{}^\rho g_{\rho\sigma} :$$

(A) Simetria:

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = R_{\lambda\sigma\mu\nu}. \quad (2.7)$$

(B) Antissimetria:

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = -R_{\nu\mu\lambda\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\lambda} = R_{\nu\mu\sigma\lambda}. \quad (2.8)$$

(C) Ciclicidade:

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} + R_{\mu\sigma\nu\lambda} + R_{\mu\lambda\sigma\nu} = 0. \quad (2.9)$$

Podemos agora, por uma contração do tensor de Riemann, obter um tensor de segunda ordem que porta um número de 10 componentes independentes no caso mais geral, chamado tensor de Ricci

$$R_{\mu\lambda} = R_{\mu\rho\lambda}{}^\rho. \quad (2.10)$$



A propriedade de simetria em (A) mostra que o tensor de Ricci é simétrico, isto é,

$$R_{\mu\lambda} = R_{\lambda\mu}, \quad (2.11)$$

tal que, em termos das componentes da conexão, temos

$$R_{\mu\lambda} = R_{\mu\rho\lambda}{}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\rho\lambda}{}^{\rho} - \partial_{\rho}\Gamma_{\mu\lambda}{}^{\rho} + \Gamma_{\sigma\mu}{}^{\rho}\Gamma_{\rho\lambda}{}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\rho}{}^{\rho}\Gamma_{\mu\lambda}{}^{\sigma}. \quad (2.12)$$

A propriedade de antissimetria em (B) assegura-nos que  $R_{\mu\lambda}$  é o único tensor de rank 2 que pode ser formado a partir do tensor de Riemann, a menos de um sinal arbitrário. Também, podemos contrair o tensor de Ricci  $R_{\sigma\nu}$  e construir o escalar de Ricci, também denominado escalar de curvatura, dado por

$$R = g^{\mu\lambda}R_{\mu\lambda}. \quad (2.13)$$

O escalar de Ricci especifica um número real em cada ponto da variedade sob consideração, determinando a curvatura intrínseca da variedade nesse ponto.

O tensor de curvatura também obedece algumas identidades diferenciais, a saber

$$\nabla_{\zeta}R_{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\zeta}}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}}\right). \quad (2.14)$$

Permutando-se  $\zeta, \mu$  e  $\nu$  ciclicamente, obtemos as *identidades de Bianchi*

$$\nabla_{\zeta}R_{\mu\nu\lambda\sigma} + \nabla_{\mu}R_{\nu\zeta\lambda\sigma} + \nabla_{\nu}R_{\zeta\mu\lambda\sigma} = 0. \quad (2.15)$$

Agora, posto que a conexão é compatível com a métrica, isto é,  $\nabla_{\nu}g^{\nu\sigma} = 0$ , e fazendo a contração de  $\nu$  com  $\sigma$  (2.15), chegamos a

$$\nabla_{\zeta}R_{\mu\lambda} - \nabla_{\mu}R_{\zeta\lambda} + \nabla_{\nu}R_{\zeta\mu\lambda}{}^{\nu} = 0. \quad (2.16)$$

Por fim, efetuando-se a contração de  $\mu$  com  $\lambda$ , temos

$$\nabla_{\zeta}R - \nabla_{\mu}R_{\zeta}{}^{\mu} - \nabla_{\nu}R_{\zeta}{}^{\nu} = 0, \quad (2.17)$$

de modo que, realizando substituições indiciais adequadas, e após simples manipulações obtemos as *identidades contraídas de Bianchi*

$$\nabla_{\mu}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) = 0. \quad (2.18)$$

Dada uma fenomenologia gravitacional com fontes, as equações de campo da TRG requerem um objeto matemático que carrega informações sobre matéria e energia englobadas em um determinado espaço-tempo. O fluxo de *quadrimento*  $P^\mu$  que atravessa uma superfície  $x^\nu$  constante é representado pelo tensor energia-momento (denotado por  $T^{\mu\nu}$ ). Outra definição do tensor energia-momento será dada em termos da derivada funcional da ação para a matéria com respeito a métrica, dada pela equação (2.36).

De um modo geral, o tensor energia-momento contém, por exemplo, componentes de um fluido que pode produzir pressão, entropia, viscosidade, etc. O fluido perfeito com densidade de energia  $\rho$ , pressão  $p$  e quadri vetor velocidade  $u^\mu = dx^\mu/d\tau$  que em um sistema de coordenadas comóveis é dado por  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , é representado por

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

onde a componente  $T^{00}$  é a densidade de energia,  $T^{0i}$  representa a densidade de momento e  $T^{ij}$  são as componentes do fluxo de momento. O tensor energia-momento é simétrico e obedece a seguinte lei de conservação:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.20)$$

## 2.2 Formulação lagrangiana e equações de campo

O desenvolvimento formal que leva às equações de campo de Einstein pode ser elaborado através de uma formulação lagrangiana. Daí, tradicionalmente, iniciam-se os procedimentos com uma ação apropriada a fim de extrair as equações de campo que descrevem a dinâmica da teoria em questão.

No caso da gravitação de Einstein, o funcional adotado é o de Einstein-Hilbert. Em adição à ação gravitacional, temos a ação para a matéria, de modo que a ação total é

$$S = S_{EH} + S_M. \quad (2.21)$$

Agora, consideramos uma região espaço-temporal 4-dimensional limitada  $\Omega$  onde os campos de interesse são definidos, e reescrevemos  $S$  em termos das densidades de lagrangianas individuais

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int_\Omega \sqrt{-g} R d^4x + \int_\Omega \mathcal{L}_m(\psi, g_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.22)$$

onde  $\kappa = 8\pi G$ ,  $c = 1$  e  $\sqrt{-g}d^4x$  é o elemento invariante de volume e  $\mathcal{L}_m$  é a densidade de lagrangiana da matéria. Segundo o princípio da mínima ação,  $S$  possui um extremo, isto é  $\delta S = 0$ .

Primeiramente, iremos efetuar as variações na ação de Einstein-Hilbert, ou seja no primeiro termo da expressão (2.22). Temos

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}d^4x\delta R_{\mu\nu} + d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + d^4xR\delta\sqrt{-g}). \quad (2.23)$$

A variação do tensor de Ricci  $\delta R_{\mu\nu}$  em termos das conexões é dada por

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_{\rho}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \partial_{\nu}\delta\Gamma_{\rho\mu}^{\rho} + \delta\Gamma_{\rho\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\rho\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\rho\mu}^{\lambda}. \quad (2.24)$$

Esta última expressão pode ser reescrita em termos de derivadas covariantes, pois a variação  $\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}$  é a diferença de duas conexões. Tal diferença possui um caráter tensorial, e podemos implementar sua derivada covariante como segue

$$\nabla_{\rho}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) = \partial_{\rho}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} + \Gamma_{k\rho}^{\rho}\delta\Gamma_{\nu\mu}^k - \Gamma_{\nu\rho}^k\delta\Gamma_{k\mu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^k\delta\Gamma_{\nu k}^{\rho}. \quad (2.25)$$

Assim, a variação  $\delta R_{\mu\nu}$  pode ser rearranjada como

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\rho}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\rho\mu}^{\rho}), \quad (2.26)$$

e a variação  $\delta\sqrt{-g}$  é obtida a partir da seguinte propriedade:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

Inserindo-se (2.26) e (2.27) na expressão (2.23), vem

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}d^4x[\nabla_{\rho}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\rho\mu}^{\rho})] + \int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right), \quad (2.28)$$

tal que rearranjando-se o primeiro termo de (2.28) e levando-se em conta que  $\nabla_{\rho}g_{\mu\nu} = 0$ , obtem-se

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} (\sqrt{-g}d^4x[\nabla_{\rho}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) - \nabla_{\nu}(g^{\mu\rho}\delta\Gamma_{\rho\mu}^{\rho})] + \int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right). \quad (2.29)$$

Após realizar-se uma troca indicial  $\rho \leftrightarrow \nu$  no segundo termo da primeira integral acima, obtemos

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} (\sqrt{-g}d^4x\nabla_{\rho}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - g^{\mu\rho}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\nu}) + \int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right). \quad (2.30)$$

A primeira integral de (2.30) pode ser calculada a partir do seguinte *teorema de Gauss covariante*:

$$\int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \nabla_{\xi} u^{\xi} = \oint_{\partial\Omega} d^3x_{\xi} \sqrt{-g} u^{\xi}, \quad (2.31)$$

onde  $\partial\Omega$  é a fronteira de  $\Omega$ , e  $\sqrt{-g} d^3x_{\xi}$  é um elemento de hipersuperfície covariante. Portanto,

$$\delta S_{EH} = \oint_{\partial\Omega} \frac{1}{2\kappa} \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}{}^{\rho} - g^{\mu\rho} \delta \Gamma_{\nu\mu}{}^{\nu}) d^3x_{\rho} + \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right). \quad (2.32)$$

Posto que a integral de superfície se anula na fronteira, a expressão (2.32) se reduz a

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.33)$$

Consideramos, a seguir, a variação da ação para a matéria

$$\delta S_M = \int_{\Omega} d^4x \delta (\mathcal{L}_m \sqrt{-g}), \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\Omega} d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} + \mathcal{L}_m \delta \sqrt{-g} \right), \\ &= \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_m g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Como usualmente, define-se o tensor energia-momento

$$T_{\mu\nu} \equiv 2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \mathcal{L}_m g_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.36)$$

tal que

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.37)$$

Então, aplicando agora o princípio da mínima ação para a ação total

$$\delta S = \delta S_{EH} + \delta S_M = 0, \quad (2.38)$$

escrevemos

$$\frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (2.39)$$

Para variações arbitrárias ( $\delta g^{\mu\nu}$ ), finalmente obtemos as equações de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.40)$$

onde  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento, como antes.

As equações dadas em (2.40) representam quantitativamente o efeito da gravitação. A geometria do espaço-tempo é determinada pela distribuição de matéria-energia. O tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , na sua forma mais geral, possui dez componentes independentes, o que proporciona um número de dez equações diferenciais parciais de segunda ordem (não-lineares e hiperbólicas) para a solução dos potenciais gravitacionais  $g_{\mu\nu}$ .

## Capítulo 3

# Cosmologia Relativística

O desenvolvimento da cosmologia é sem dúvida um dos maiores triunfos científicos do século XXI. Inicialmente, a cosmologia não era tratada cientificamente. Mais tarde, com o advento fervoroso da teoria do Big Bang, já tínhamos um cenário seguro para a descrição cósmica. Os telescópios ultra modernos, como o Telescópio Espacial Hubble, são capazes de medir a luz de galáxias distantes o suficiente a ponto de incluir a maior parte da vida do Universo. A radiação cósmica de fundo, entendida como nosso fóssil cósmico, quando o universo era quente, denso e aleatório, é exaustivamente detectada e suas propriedades são rigorosamente analisadas. Atualmente, nosso Universo encontra-se em uma fase de violenta expansão acelerada. Com a evolução da precisão do aparato observacional, conseguimos elaborar o Modelo Cosmológico Padrão, um consenso quase universal entre os cosmólogos.

No campos da cosmologia teórica e observacional, são estudadas as propriedades físicas do Universo, como por exemplo, luminosidade, densidade, temperatura, estrutura química de objetos cósmicos, tais como estrelas, galáxias, quasares e suas interações através do meio interestelar, abrangendo mecânica, mecânica estatística, termodinâmica, eletromagnetismo, relatividade, física de partículas, física de altas energias, física nuclear, etc, onde a relatividade geral possui em grande parte o *capital* matemático (tensorial) para descrever o Universo como um todo, ou seja, sua origem, passado, evolução, estrutura e, audaciosamente, seu futuro. Portanto, é esse arcabouço teórico que contém algumas respostas para elucidar-nos sobre os mistérios do Universo. Em grandes escalas, nosso universo é aproximadamente plano, essa vastidão do espaço e do tempo, nos permite desprezar interações eletromagnéticas e considerarmos apenas às interações gravitacionais,

daí o papel central da relatividade geral.

A formulação do estudo teórico e observacional do Universo desenvolvem-se sob um princípio que nos traz fortes impactos, eis o princípio: *Em escalas suficientemente grandes, as propriedades do universo são as mesmas para todos os observadores*, isto é, o universo é homogêneo e isotrópico. Basicamente, os três pilares em que a cosmologia está assentada são consubstanciados através do modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), no qual incluem-se os Universos de Friedmann, Equações de Friedmann e a Lei de Hubble-Lemaître.

Os gregos antigos, em um modelo desenvolvido por Ptolemeu de Alexandria, acreditavam que a localização da Terra poderia ocupar o centro do cosmos, a qual seria circundada pela Lua, o Sol e os planetas. As estrelas "fixas" estariam ainda mais longínquas. Uma complexa combinação de movimentos circulares, os chamados Epíclis de Ptolomeu, foi concebida para explicar os movimentos dos planetas. Esse modelo não foi até o início dos anos de 1500, quando Copérnico declarou vigorosamente a visão, iniciada há quase dois mil anos por Aristarco, na qual acreditava-se que a Terra e os outros planetas se moviam em torno do Sol. Embora Copérnico seja creditado por remover a visão antropocêntrica do Universo, que colocou a Terra no seu centro, ele de fato acreditava que o Sol estava no centro.

A teoria da gravidade de Newton colocou o que tinha sido uma ciência empírica sobre uma base sólida, tal base foi a descoberta de Kepler, onde os planetas moviam-se em órbitas elípticas. Acreditava que as estrelas também eram sóis muito parecidos aos nossos, distribuídos uniformemente por toda parte em um espaço infinito, em uma configuração estática.

Em 1785, tornou-se cada vez mais compreendido que as estrelas não são distribuídas uniformemente, mas estão localizadas em uma montagem em forma de disco, agora conhecida como a Via Láctea, nossa galáxia. Herschel foi capaz de identificar a estrutura do disco, [13], mas suas observações não eram perfeitas e ele erroneamente concluiu que o sistema solar estava no centro da via láctea. Somente no início dos anos 1900 foi este convincentemente refutado por Shapley, que percebeu que estamos a dois terços do raio longe do centro da galáxia. Mesmo assim, ele aparentemente ainda acreditava que nossa galáxia estava no centro do Universo [14].

Nas próximas seções vamos nos endereçar a diversos elementos introdutórios, e imprescindíveis, no estudo de cosmologia.

### 3.1 Radiação Cósmica de Fundo

Prevista inicialmente por Ralph Alpher, Robert Herman e George Gamow em 1948 e detectada pela primeira vez quase que por acidente em 1965 por Arno Penzias e Robert Woodrow Wilson do *Bell Telephone Laboratory* em New Jersey [15], a radiação cósmica de fundo em microondas (RCFM) teve papel fundamental na sustentação da teoria do Big Bang. Robert Dicke e Dave Wilkinson da equipe WMAP reportaram o significado cosmológico da (RCFM) [16].

A observação crucial que influenciou o debate conflituoso entre a teoria do Big Bang e o Universo Estacionário, foi a detecção da radiação cósmica de fundo de microondas, esta, manter-se-ia a favor da teoria do Big Bang. Esta radiação atinge a Terra em todas as direções, e agora é conhecida por assumir a forma de um corpo negro com temperatura

$$T_0 = 2.725 \pm 0.001 \text{ K}.$$

Embora essa radiação, apresente alto grau isotrópico no espaço, algumas anisotropias foram detectadas em temperaturas da ordem de  $10\mu K$  [17, 18, 19]. Combinando a Lei de Stefan-Boltzmann

$$\epsilon_{rad} \equiv \rho_{rad} c^2 = \frac{\pi^2 k_B^4 T^4}{15\hbar}, \quad (3.1)$$

com a equação  $\rho_{rad} \propto a^{-4}$ , obtemos

$$T \propto \frac{1}{a}. \quad (3.2)$$

Isto significa que o Universo esfria-se à medida que se expande. Hoje, ele possui uma temperatura de cerca de 3K, logo, em épocas anteriores, o Universo deve ter sido muito mais quente.

À medida que o Universo esfriava, os fótons já não portavam energia suficiente para ionizar os átomos. Assim, os primeiros átomos de hidrogênio foram se formando. Enquanto o universo se expandia, cessava-se a interação de fótons com a matéria, deste modo, os fótons passaram a se propagar livremente pelo espaço, processo que denomina-se desacoplamento. Recombinação refere-se à época em que os elétrons juntaram-se aos núcleos para a formação dos átomos.



## 3.2 Parâmetro de Hubble e parâmetro de desaceleração

Em uma notação comum, podemos escrever o presente momento cósmico, ou época atual, como  $t_0$ . Dessa forma, os fótons recebidos hoje de galáxias distantes são recebidos em  $t_0$ . Se a galáxia emissora é próxima e emite um fóton no tempo cósmico  $t$ , podemos escrever  $t = t_0 - \delta t$ , onde  $\delta t \ll t_0$ . Então, podemos expandir o fator de escala  $a(t)$  como uma série de potências em torno da época atual  $t_0$  e obter

$$\begin{aligned} a(t) &= a[t_0 - (t_0 - t)] \\ &= a(t_0) - (t_0 - t)\dot{a}(t_0) + \frac{1}{2}(t_0 - t)^2\ddot{a}(t_0) - \dots \\ &= a(t_0)[1 - (t_0 - t)H(t_0) - \frac{1}{2}(t_0 - t)^2q(t_0)H^2(t_0) - \dots], \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde  $H(t)$  é o parâmetro de Hubble e  $q(t)$  é o parâmetro de desaceleração e, são dados através das seguintes relações

$$\begin{aligned} H(t) &\equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \\ q(t) &\equiv \frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}^2(t)}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde o ponto corresponde a uma diferenciação com respeito ao tempo cósmico  $t$ . Deve-se notar que essas definições são válidas para qualquer tempo cósmico. Os valores para a época atual destes parâmetros são usualmente denotados por  $H_0 = H(t_0)$  e  $q_0 = q(t_0)$ .

Usando as definições dadas em (3.4), podemos escrever o *redshift* em termos de  $t - t_0$  (*lookback time*)<sup>1</sup> como

$$z = \frac{1}{a(t)} - 1 = \frac{1}{a(t_0) \left[ 1 - (t_0 - t)H_0 - \frac{1}{2}(t_0 - t)^2q_0H_0^2 - \dots \right]} - 1 \quad (3.5)$$

Vamos encontrar a série  $1/a(t)$  considerando que a série possui termos até segunda ordem

$$\frac{1}{a(t)} \approx C_1 + C_2(t_0 - t) + C_3(t_0 - t)^2, \quad (3.6)$$

desse modo

$$1 \approx a(t) [C_1 + C_2(t_0 - t) + C_3(t_0 - t)^2], \quad (3.7)$$

---

<sup>1</sup> “lookback time”, tempo que a luz viajou desde o momento que foi emitida até o momento da detecção.

e, substituindo  $a(t)$  na expressão (3.7), tem-se

$$1 \approx a(t_0)[1 - (t_0 - t)H(t_0) - \frac{1}{2}(t_0 - t)^2 q(t_0)H^2(t_0) - \dots] \\ \times [C_1 + C_2(t_0 - t) + C_3(t_0 - t)^2]. \quad (3.8)$$

Realizando as operações de multiplicação adequadas e desprezando os termos de ordem maior que  $(t_0 - t)^2$  obtemos

$$1 \approx a(t_0)[C_1 + (C_2 + C_1 H(t_0))(t - t_0) + \left(C_3 + C_2 H(t_0) - \frac{C_1}{2} q(t_0) H^2(t_0)\right) (t_0 - t)^2]. \quad (3.9)$$

Comparando os termos da equação (3.9)

$$C_1 = 1, \\ (C_2 + C_1 H(t_0)) = 0 \implies C_2 = -H(t_0), \\ C_3 + C_2 H(t_0) - \frac{C_1}{2} q(t_0) H^2(t_0) = 0 \implies C_3 = H^2(t_0) + \frac{q(t_0)}{2} H^2(t_0). \quad (3.10)$$

Daí, finalmente obtemos a expressão para  $1/a(t)$  :

$$\frac{1}{a(t)} \approx 1 - H(t_0)(t - t_0) + \left(1 + \frac{1}{2} q(t_0)\right) H^2(t_0)(t_0 - t)^2. \quad (3.11)$$

Inserindo a equação (3.11) em (3.5), chega-se a uma expressão para o *redshift*

$$z = (t_0 - t)H_0 + (t_0 - t)^2 \left(1 + \frac{1}{2} q_0\right) H_0^2 + \dots \quad (3.12)$$

No entanto, o *lookback time* não é uma quantidade observável, então é mais útil inverter a série de potência acima para obter o termo  $(t_0 - t)$ , já que o red shift é uma grandeza mensurável

$$t_0 - t = H_0^{-1} z - H_0^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} q_0\right) z^2 + \dots \quad (3.13)$$

### 3.3 Modelo de Friedmann-Robertson-Walker-Lemaître

Os dois princípios básicos utilizados para descrever a Cosmologia são: (i) a distribuição de matéria no Universo é homogênea e isotrópica em grande escala; (ii) em grande escala, a estrutura geométrica do universo é determinada por fenômenos gravitacionais, os quais são explicados pela teoria da gravitação Einsteiniana, segundo a qual,

o princípio cosmológico descrito em (i) descreve a cinemática do universo enquanto que, em (ii), determina a dinâmica.

No modelo de Friedmann-Robertson-Walker-Lemaître (FRWL) utiliza-se uma métrica que é uma solução exata das equações de Einstein (2.40), e que descreve um Universo homogêneo e isotrópico num estágio de expansão ou contração. Consideremos o elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.14)$$

A métrica mais geral que satisfaz as condições de um universo homogêneo e isotrópico é da forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (3.15)$$

a qual é escrita em um sistema de coordenadas comóveis (sistema de coordenadas que acompanha a expansão ou contração do universo). As componentes espaciais também dependem do tempo cósmico  $t$  devido ao fato de o fator de escala  $a(t)$  é uma função arbitrária de  $t$ . O parâmetro  $k$  pode assumir os valores  $k = 0, \pm 1$ . Se  $k = 0$ , a métrica representa um espaço plano, para  $k > 0$  o espaço é esférico e se  $k < 0$  o espaço é dito ser hiperbólico. Tal métrica, ainda pode ser escrita de uma maneira conveniente da seguinte forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + f_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)], \quad (3.16)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sin\chi, & k = +1, \\ f_k(\chi) = \chi, & k = 0, \\ \sinh\chi, & k = -1. \end{array} \right\}. \quad (3.17)$$

### 3.4 Equações de Friedmann

As componentes não-nulas do símbolo de Christoffel, computadas a partir de (2.2) e com auxílio de (3.15), são

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^t &= a\dot{a}/(1 - kr^2), & \Gamma_{\phi\phi}^t &= a\dot{a}r^2 \sin^2\theta, & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot\theta, \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{r\phi}^\phi = 1/r, & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin\theta \cos\theta, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r(1 - kr^2), \\ \Gamma_{rt}^r &= \Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{t\phi}^\phi = \dot{a}/a, & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r(1 - kr^2) \sin^2\theta, & \Gamma_{\theta\theta}^t &= a\dot{a}r^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

A computação dos objetos geométricos nos dá

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= 3\frac{\ddot{a}}{a}, \\
R_{rr} &= \frac{a\ddot{a}2\dot{a} + 2k}{1 - kr^2}, \\
R_{\theta\theta} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a} + 2k) \\
R_{\phi\phi} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a} + 2k)\sin^2\theta,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

com o correspondente escalar de Ricci sendo expresso por

$$R = 6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right). \tag{3.20}$$

Iremos considerar um fluido perfeito como fonte nas equações de campo. Tal consideração é sustentada pelo princípio cosmológico mencionado em (i). Neste caso, o tensor energia-momento tem a seguinte representação:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

com o traço dado por

$$T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = T^\mu{}_\mu = -\rho + 3p, \tag{3.22}$$

onde  $\rho$  e  $p$  são a densidade de energia e pressão do fluido, respectivamente. Então, reescrevendo a equação de Einstein como

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \tag{3.23}$$

a equação  $\mu\nu = 00$  fornece

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\rho - 3p) \tag{3.24}$$

enquanto que as equações  $\mu\nu = ij$  leva a

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2\frac{k}{a^2} = 4\pi G(\rho - p). \tag{3.25}$$

Podemos utilizar a equação (3.24) para eliminar a derivada segunda em (3.25). Desse modo,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \tag{3.26}$$

e

$$H^2 \equiv \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (3.27)$$

que são conhecidas como equações de Friedmann, onde  $H = \dot{a}/a$  é o parâmetro de Hubble. O valor atual de  $H$  [20] é dado por

$$H_0 = 100 \, h \, Km \, sec^{-1} \, Mpc^{-1} = 2,1332 \, h \times 10^{-42} GeV, \quad (3.28)$$

sendo  $h = 0,72 \pm 0,08$  a medida da incerteza de  $H_0$ .

O tensor energia-momento é conservado devido às identidades de Bianchi, o que nos leva à equação da continuidade

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.29)$$

Eliminando o termo  $k/a^2$  das equações (3.27) e (3.26) e, com auxílio de (3.29), obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p).$$

Podemos notar que a expansão acelerada ocorre para  $\rho + 3p < 0$ . Reescrevemos a equação (3.27) na forma

$$\Omega(t) - 1 = \frac{k}{(aH_0)^2}, \quad (3.30)$$

onde  $\Omega(t)$  é o parâmetro de densidade, dado por

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c^0}, \quad (3.31)$$

e  $\rho_c$  é a densidade crítica ( $k = 0$ ), a qual é expressa pela seguinte equação:

$$\rho_c^0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (3.32)$$

A distribuição de matéria determina a geometria espacial de nosso Universo. Portanto, podemos estabelecer as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \Omega > 1 \text{ ou } \rho > \rho_c &\rightarrow k = +1, \\ \Omega = 1 \text{ ou } \rho = \rho_c &\rightarrow k = 0, \\ \Omega < 1 \text{ ou } \rho < \rho_c &\rightarrow k = -1. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Algumas observações tem mostrado que em grande escala, o Universo possui uma geometria espacialmente plana ( $\Omega \simeq 1$ ) [21].

Outro parâmetro importante em cosmologia é o chamado parâmetro de desaceleração  $q(t)$ , definido por

$$q(t) = -\frac{1}{H^2} \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \quad (3.34)$$

Um valor negativo de  $q$  era previsto devido a expansão desacelerada do Universo, dominada apenas pela matéria. Atualmente o valor de  $q$  é positivo, indicando uma expansão acelerada do Universo.

Pela conservação do tensor energia-momento

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 = -\partial_0 \rho - 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p), \quad (3.35)$$

e considerando uma equação de estado do tipo barotrópica

$$p = w\rho, \quad (3.36)$$

na qual  $w$  é uma constante, podemos encontrar facilmente a *equação do fluido*

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.37)$$

que é uma equação diferencial ordinária para  $\rho$  a qual, por integração, resulta em

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (3.38)$$

Exemplos tradicionais para o fluido cósmico são matéria, radiação e energia escura. Para  $w = 0$  a era do Universo é dominada por matéria. De acordo com a equação (3.38), a densidade de energia da matéria é

$$\rho_{mat} \propto a^{-3}. \quad (3.39)$$

Para o caso  $w = 1/3$  e, a densidade de energia da radiação é expressa por

$$\rho_{rad} \propto a^{-4}. \quad (3.40)$$

O caso  $w = -1$  representa a fase atual acelerada de nosso Universo, dominada pela energia escura. Logo, têm-se  $\rho_{vac} = cte$ .

### 3.5 Idade do Universo

As equações cosmológicas permitem derivar uma expressão muito útil para estimar a idade  $t_0$  de nosso Universo com o parâmetro de Hubble  $H_0$  e os parâmetros de densidade  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$ .

Primeiramente, vamos reescrever a equação de componente 00 da solução de FRWL

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} - \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\Lambda}{3}. \quad (3.41)$$

Multiplicando a equação acima de ambos os lados por  $(a/a_0)^2$  ficamos com

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = -\frac{k}{a_0^2} - \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r) \frac{a^2}{a_0^2} - \frac{\Lambda}{3} \frac{a^2}{a_0^2}, \quad (3.42)$$

onde  $\rho_m = \rho_{m0} (a_0/a)^3$  e  $\rho_r = \rho_{r0} (a_0/a)^4$ . Também podemos reescrever os termos do lado direito da equação da seguinte maneira

$$-\frac{8\pi G}{3}\rho_{m0} = H_0^2\Omega_m, \quad -\frac{8\pi G}{3}\rho_{r0} = H_0^2\Omega_r, \quad \frac{\Lambda}{3} = H_0^2\Omega_\Lambda, \quad -\frac{k}{a_0^2} = H_0^2\Omega_k, \quad (3.43)$$

lembrando que o parâmetro de densidade dos constituintes é expresso pela relação

$$\Omega_i(t) = \frac{\rho_i(t)}{\rho_c} \quad (3.44)$$

com  $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$  sendo a densidade crítica do Universo. Desse modo a equação (3.42) torna-se

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0^2\Omega_k + H_0^2\Omega_m \frac{a_0}{a} + H_0^2\Omega_r \frac{a_0^2}{a^2} + H_0^2\Omega_\Lambda \frac{a^2}{a_0^2} \quad (3.45)$$

e ainda usando as relações

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1}{z+1} \quad \text{e} \quad \frac{\dot{a}}{a_0} = -\frac{\dot{z}}{(z+1)^2}, \quad (3.46)$$

vem

$$-\frac{dz}{dt} = (z+1)^2 H_0 [\Omega_k + (z+1)\Omega_m + (z+1)^2\Omega_r + (z+1)^{-2}\Omega_\Lambda]^{-1/2}. \quad (3.47)$$

Nós resolvemos a equação (3.47) para  $dt$  e depois integramos, logo

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)^2 [\Omega_k + (1+z)^3\Omega_m + (1+z)^4\Omega_r + \Omega_\Lambda]^{1/2}}. \quad (3.48)$$

No caso de um universo crítico com  $\Omega_\Lambda = 0$  e  $\Omega_r \ll \Omega_m = 1$ , temos

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)^{5/2}} = \left[ \frac{1}{H_0} \frac{2}{3} (1+z)^{-3/2} \right]_0^\infty = \frac{2}{3H_0}. \quad (3.49)$$

Outra maneira de levar a cabo tal cálculo sobre a idade do Universo é calcular a integral com auxílio dos dados observacionais. Note que  $\Omega_k + \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1$  e  $\Omega_r \sim 10^{-5}$  é muito pequeno para influenciar o resultado. Uma boa aproximação consiste na seguinte expressão

$$H_0 t_0 = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)[(1+z)(1-\Omega_m-\Omega_\Lambda) + (1+z)^3\Omega_m + \Omega_\Lambda]^{1/2}}. \quad (3.50)$$

Com os valores experimentais do WMAP [22] para  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$  em 3.48, obtemos

$$H_0 t_0 = 0,995 \pm 0,15, \quad (3.51)$$

com  $H_0 = h/(0,97776 \times 10^{10} \text{anos})$ , o qual fornece uma idade para nosso Universo de  $t_0 = 1,37 \pm 10^{10}$  anos, isto é,  $\simeq 13,7$  bilhões de anos.

### 3.6 Oscilações Acústicas de Bárions

Antes da recombinação e desacoplamento, nosso Universo era constituído de um plasma quente composto basicamente por fótons e bárions, os quais estavam fortemente acoplados em um único fluido. Se considerarmos uma única densidade de perturbação esférica ao longo da direção radial desse acoplamento, ela irá se propagar como uma onda acústica com uma velocidade dada por

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3 \left( 1 + \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma} \right)}}, \quad (3.52)$$

onde  $\rho_b$  é a densidade de bárions e  $\rho_\gamma$  é a densidade de fótons.

Na recombinação o cosmo se torna neutro. Deste modo, os fótons não possuem mais energia suficiente para ionizar os átomos e, portanto, a pressão de radiação nos bárions é removida. A onda bariônica é estacionária, enquanto os fótons propagam-se livremente representando o que hoje conhecemos por radiação cósmica de fundo. O raio característico da casca esférica formado quando a onda bariônica é congelada é dado na distribuição dos bárions como um excesso de densidade (sobredensidade). Os bárions e



matéria escura interagem através da gravidade e então a matéria escura também irá se aglomerar nesta escala. Portanto, existe um aumento da probabilidade de uma galáxia se formar em algum ponto de alta densidade da onda bariônica congelada para ambos os lados da casca esférica.

A Figura 1 [23] mostra o perfil de massa radial em função do raio comóvel, as perturbações na matéria escura (curva preta), bárions (curva azul), fótons (curva vermelha) e neutrinos (curva verde) evoluem a partir do início dos tempos ( $z = 6824$ ) até um longo período após o desacoplamento ( $z = 10$ ).

Inicialmente a perturbação de densidade se propaga através dos fótons e bárions como um pulso único, conforme a expansão e resfriamento do Universo, os neutrinos são os primeiros a se desacoplarem devido a sua baixa interação gravitacional bem como sua baixa seção de choque.

Como sabemos, a matéria escura interage apenas gravitacionalmente e, portanto sua perturbação fica atrás do plasma fortemente acoplado. Dizemos então que o perfil de matéria escura é congelado. Nesse processo, mais matéria escura se agrega ao centro da perturbação aumentando o perfil de massa da matéria escura. Com a diminuição da temperatura, a pressão de radiação que existia sobre os bárions é suprimida. Deste modo, a perturbação sobre os bárions é estacionada. Após certo tempo, restam duas sobredensidades, matéria escura e matéria barionica, uma ao redor do centro da perturbação inicial e outra a um raio de  $\sim 150 \text{ Mpc}$  (1 parsec  $\sim 3,08 \times 10^{13} \text{ km}$ ), respectivamente.

Depois de um longo tempo as duas regiões de sobredensidade tendem a se misturar devido a interação do setor gravitacional. Podemos ver como essa interação afeta o pico, isto é, enquanto a matéria escura arrasta os bárions próximo ao pico de origem, os bárions continuam puxando a matéria escura próximo ao pico endereçado em  $150 \text{ Mpc}$ . Esta distância também é chamada de horizonte acústico.

A escala  $s$  é geralmente próxima do horizonte acústico, a distância comóvel que uma onda sonora poderia ter viajado no fluido fóton-bariônico até o desacoplamento, depende da densidade de bárions e fótons via

$$s = \int_0^\infty \frac{c_s}{H(z)} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_m H_0^2}} \frac{2c}{\sqrt{3z_{rec} R_{rec}}} \ln \left[ \frac{\sqrt{1 + R_{rec}} + \sqrt{R_{rec} + R_{eq}}}{1 + \sqrt{R_{rec}}} \right], \quad (3.53)$$

onde  $R = \rho_b/\rho_\gamma \propto \Omega_b^2 h(1+z)$ ,  $z_{rec} = \Omega_m/\Omega_{rad}$  é o *redshift* da equipartição matéria-radiação e "rec" refere-se à recombinação. Os fortes vínculos das medidas de radiação cósmica de fundo entre as densidades de bárions e fótons no desacoplamento nos possibilita

calcular o horizonte acústico,  $146.8 \pm 1.8 Mpc$  [24]. Por conseguinte, esta escala é, em si mesma, uma excelente régua padronizável, desde que se possa medir  $\Omega_b$  com alta precisão bem como os componentes de radiação exótica no início do Universo, ou seja, o redshift de equipartição.

Naturalmente, o universo primitivo foi permeado por muitas dessas ondas acústicas esféricas e, portanto, a distribuição de densidade é uma superposição linear das ondas sonoras de pequena amplitude.

### 3.7 Aceleração Cósmica

Uma componente de energia escura é provavelmente responsável pela atual fase de aceleração do nosso Universo [25, 26]. A candidata mais simples para a energia escura é a chamada constante cosmológica  $\Lambda$  cuja equação de estado é  $w_{DE} = -1$ . Se a constante cosmológica origina-se de uma energia do vácuo da física de partículas, a sua escala de energia é significativamente maior do que a densidade de energia escura atualmente, ou seja,  $\rho_{DE}^0 \simeq 10^{-47} GeV$ . Deste modo, devemos encontrar algum mecanismo para obter um valor pequeno para  $\Lambda$  que seja coerente com as observações. Possivelmente, um outro candidato mais atraente do que a constante cosmológica para a energia escura, é um campo escalar (quintessência), que pode ser uma partícula fundamental ou uma partícula composta. Dentro do contexto da teoria de campos e física de partículas é interessante interpretar a energia escura como algum tipo de partícula que interage com as partículas do modelo padrão muito fracamente. A fraqueza da interação é necessária, uma vez que as partículas de energia escura não foram produzidas nos aceleradores e também, porque a energia escura não se decompõe em campos mais leves, por exemplo campos sem massa, tais como o fóton.

Dentre outros modelos que envolvem campo escalar para descrever energia escura, são considerados a K-essência [27, 28], campos taquiônicos [29, 30, 31, 32], campos fantasmas (campo escalar com sinal negativo no termo cinético) [33, 34, 35], gás de Chaplyng [36, 37] ou a combinação de quintessência com um campo fantasma em um modelo unificado chamado quintom [38, 39, 40, 41].

A *dark energy* (energia escura), como foi denominada, revela uma nova física exótica. A energia escura distingue-se da matéria ordinária, no que diz respeito a uma pressão negativa que emerge em tal cenário, cuja equação de estado obedece  $w_{DE} = -1$ .

Dados observacionais independentes como, SN IA, CMB (Cosmic Microwave Background) e oscilações acústicas de Bárions têm confirmado que cerca de 70 % da densidade de energia atual do Universo consiste de energia escura.

### 3.8 Distância de Luminosidade

Para investigar o comportamento de supernovas, utilizamos um parametro importante em cosmologia, chamado *redshift* (desvio para o vermelho). A emissão de luz de um objeto estelar é desviada para o vermelho, devido a expansão do Universo. O comprimento de onda  $\lambda$  aumenta proporcionalmente ao fator de escala  $a$ , cujo efeito pode ser relacionado com o *redshift*

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{a_0}{a}, \quad (3.54)$$

onde  $z = (\lambda_0 - \lambda) / \lambda$  e os subscritos zero denota as quantidades dadas na época atual.

Outro conceito importante relacionado com as ferramentas observacionais é a definição de distâncias cosmológicas. Existem muitas maneiras de se medir distâncias em um Universo em expansão, por exemplo, distância comóvel, a qual se mantém inalterada com a evolução do Universo.

Uma forma alternativa para se definir uma distância é através da luminosidade de um objeto estelar, a distância  $d_L$ , conhecida como uma distância luminosidade. Tal quantidade desempenha um papel crucial nas observação de supernovas.

Em um espaço-tempo de Minkowski, a luminosidade absoluta  $L_f$  da fonte e o fluxo de energia  $\mathcal{F}$  a uma distância  $d$  da fonte, estão relacionados através da seguinte expressão:

$$\mathcal{F} = \frac{L_f}{4\pi d^2}, \quad (3.55)$$

a qual podemos generalizar para um Universo em expansão, obtendo a distância de luminosidade expressa por

$$d_L^2 = \frac{L_f}{4\pi\mathcal{F}}. \quad (3.56)$$

As fontes são conhecidas como Velas Padronizáveis, cujos exemplos mais conhecidos destas são as chamadas Cefeidas e Supernovas tipo IA, com luminosidades de alta magnitude.

Vamos considerar um objeto com luminosidade absoluta  $L_f$  localizado em uma distância de coordenada  $\chi_f$  de um observador em  $\chi_0$ . A energia da luz emitida de um objeto com o intervalo de tempo  $\Delta t_1$  é denotado como  $\Delta E_1$ , enquanto que a energia que chega para a esfera com raio  $\chi_s$  é escrita como  $\Delta E_0$ . Podemos notar que  $\Delta E_1$  e  $\Delta E_0$  são proporcionais às frequências da luz em  $\chi = \chi_f$  e  $\chi = 0$ , respectivamente, isto é,  $\Delta E_1 \propto \nu_1$  e  $\Delta E_0 \propto \nu_0$ . Deste modo, as luminosidades  $L_f$  e  $L_0$  são dadas por

$$L_f = \frac{\Delta E_1}{\Delta t_1}, \quad L_0 = \frac{\Delta E_0}{\Delta t_0}. \quad (3.57)$$

A velocidade da luz é dada por  $c = \nu_1 \lambda_1 = \nu_0 \lambda_0$ , onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_0$  são os comprimentos de onda em  $\chi = \chi_f$  e  $\chi = 0$ . Então a partir da equação (3.54), temos

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} = \frac{\Delta E_1}{\Delta E_0} = 1 + z, \quad (3.58)$$

onde usamos  $\nu_0 \Delta t_0 = \nu_1 \Delta t_1$ . Combinando a equação (3.57) e (3.58), obtemos

$$L_f = L_0(1 + z)^2. \quad (3.59)$$

Os fótons viajam sobre geodésicas radiais nulas ( $ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\chi^2 = 0$ ). Então

$$\chi_f = \int_0^{\chi_f} d\chi = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.60)$$

Por outro lado, a partir da equação (3.54) vemos que

$$\frac{dz}{dt} = -H(1 + z). \quad (3.61)$$

Então, substituindo  $dt = -dz/H(1 + z)$  da equação (3.61) na equação (3.60) chegamos a

$$\chi_f = \frac{1}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz}{h(z)}, \quad (3.62)$$

onde  $h(z) = H(z)/H_0$ .

A partir da métrica dada em (3.15) podemos encontrar que a área da esfera em  $t = t_0$  é dada por  $S = 4\pi(a_0 f_K(\chi_f))^2$ . Daí, o fluxo de energia observado é

$$\mathcal{F} = \frac{L_0}{4\pi(a_0 f_K(\chi_f))^2}. \quad (3.63)$$

Utilizando as equações (3.55), (3.59) e (3.63) na equação (3.56)

$$d_L = a_0 f_K(\chi_f)(1 + z) \quad (3.64)$$

em uma solução de FRWL espacialmente plana com  $f_K(\chi) = \chi$ , e fazendo uso da equação (3.62) fica-se com

$$d_L = \frac{1 + z}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{h(z)}. \quad (3.65)$$

Então a taxa de Hubble  $H(z)$  pode ser expressa em termos de  $d_L(z)$ :

$$H(z) = \left\{ \frac{d}{dz} \left( \frac{d_L(z)}{1 + z} \right) \right\}^{-1}. \quad (3.66)$$

Portanto, se medirmos a distância luminosidade observacionalmente, podemos estimar a taxa de expansão do Universo.

A densidade de energia  $\rho$  no lado direito da equação (3.27) inclui todos os componentes presentes no Universo, a saber, partículas não relativísticas, partículas relativísticas, constante cosmológica, etc.

$$\rho = \sum_i \rho_i^{(0)} (a/a_0)^{-3(1+w_i)} = \sum_i \rho_i^{(0)} (1+z)^{3(1+w_i)}, \quad (3.67)$$

onde  $w_i$  e  $\rho_i$  denotam o parâmetro da equação de estado e a densidade de energia para cada constituinte, respectivamente. Da equação (3.27), o parâmetro de Hubble tem a seguinte forma:

$$H^2 = H_0^2 \sum_i \Omega_i^0 (1+z)^{3(1+w_i)}, \quad (3.68)$$

onde  $\Omega_i^0 \equiv 8\pi G \rho_i / 3H_0^2 = \rho_i^{(0)} / \rho_c^{(0)}$  é o parâmetro de densidade para algum constituinte individual na época atual. Então a distância luminosidade em uma geometria plana é dada por

$$d_L = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\sum_i \Omega_i^0 (1+z)^{3(1+w_i)}}}. \quad (3.69)$$

# Capítulo 4

## Dimensões Extras

### 4.1 Introdução

A idéia de dimensões extras foi proposta no início do século XX por Nordström [42] e alguns anos mais tarde por Kaluza [43] e Klein [44, 45]. Em meados da década de 1920 Theodor Kaluza e Oskar Klein com o propósito de unificar os campos eletromagnéticos e gravitacionais, introduziram uma dimensão extra para unificar tais campos em único campo de maior dimensão, isto é, uma teoria  $5D$ -dimensional, com uma dimensão extra periódica. Este procedimento é chamado de compactificação toroidal [46]. O espaço obtido é o produto do espaço  $4D$  tradicional de Minkowski com um círculo, denotado por  $M^4 \otimes S^1$ , o qual pode se pensar como um cilindro de  $5D$  de raio  $R$ . Desenvolvimentos recentes na teoria das supercordas e sua extensão (Teoria M) sugeriram uma outra abordagem para compactificar dimensões extras. Existem cinco teorias distintas das supercordas em  $1+9$ -dimensional, todas elas descrevem teorias quânticas da gravitação.

Descobertas em meados dos anos 1990, as transformações de dualidade que se relacionam com essas teorias de supercordas e a teoria de supergravidade em  $1+10$ -dimensões, levaram para uma conjectura de que todas estas teorias surgem como diferentes limites de uma única teoria, conhecida como teoria  $M$ . A  $11^{\text{a}}$  dimensão na teoria  $M$  está relacionada com a força de acoplamento das cordas, onde o tamanho desta dimensão cresce à medida que o acoplamento se torna forte. Em baixas energias, a teoria  $M$  pode ser aproximada pela teoria de supergravidade em  $1+10$ -dimensões.

Na solução de Horava-Witten [47], os campos de gauge do modelo padrão estão confinados em uma hipersuperfície  $(1+9)$ -branas, as quais estão localizadas nos pontos

fixos de um *orbifold*  $S^1/Z_2$ , onde  $S^1$  é uma esfera de dimensão 1, isto é, um círculo, e  $Z_2$  é o grupo de simetria (simetria de espelho). A topologia de tal cenário pode ser denotada por  $M^{11} = M^4 \otimes S^1/Z_2 \otimes Y^6$ . As duas variedades de  $(1 + 9)$ -branas estão mergulhadas em um espaço-tempo de maior dimensão, chamado *bulk*. As seis dimensões extras nas branas são compactificadas em uma escala muito pequena sendo próxima a escala fundamental. Logo depois, Witten descobriu que 6 das 11 dimensões podem ser consistentemente compactificadas em uma variedade do tipo Calabi-Yau, cujo tamanho da variedade pode ser menor do que a distância de tais branas [48].

Também foram descobertos objetos estendidos de maior dimensão que a das cordas (1-brana), as chamadas  $p$ -branas. Um caso particular das  $p$ -branas, são  $D$ -branas. De uma maneira sucinta, pode-se dizer que cordas abertas, as quais descrevem o setor de gauge, possuem suas extremidades fixas na brana, enquanto que as cordas fechadas, que representam o setor gravitacional, podem se mover livremente no *bulk*.

Diante deste cenário, emergiram alguns modelos de mundo branas de tal modo que podemos considerar a conjectura de Horava-Witten como uma teoria efetiva em 5 dimensões. Nas próximas seções iremos discutir alguns modelos.



## 4.2 Modelo de Randall-Sundrum (RS)

O primeiro modelo de Randall-Sundrum (RS1) foi desenvolvido com o propósito de solucionar o problema da hierarquia. Tal problema surge com a diferença entre os valores da escala de energia do setor eletrofraco e o setor gravitacional. O modelo RS1 implementa uma dimensão extra compacta entre duas branas localizadas nos pontos fixos do orbifold  $S^1/Z_2$ . O domínio da dimensão extra está no intervalo  $0 < y < \pi r_c$ , sendo  $r_c$  chamado de raio de compactificação da dimensão extra. Nesse cenário, nossa brana, ou seja, nosso universo, estaria localizada em  $y = \pi r_c$  e a segunda brana isto é, um universo o qual não temos acesso, estaria localizado em  $y = 0$ .

A ação para o modelo é dada por

$$S = S_{bulk} + S_{visivel} + S_{oculta}, \quad (4.1)$$

explicitamente

$$\begin{aligned} S_{bulk} &= \int d^4x \int dy \left[ \sqrt{-g^{(5)}} \left( {}^{(5)}R - 2\Lambda_5 \right) \right] M_5^3, \\ S_{visivel} &= \int d^4x \sqrt{-g_{vis}} (\mathcal{L}_{vis} - \lambda_{vis}), \\ S_{oculta} &= \int d^4x \sqrt{-g_{ocu}} (\mathcal{L}_{ocu} - \lambda_{ocu}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Onde  $M_5^3$  é a massa 5-dimensional,  $\lambda_{vis}$  é a tensão na brana visível e  $\lambda_{ocu}$  é a tensão na brana oculta. As branas são 4-superfícies singulares segundo o formalismo de Israel, deste modo, podemos escrever as densidades de lagrangianas da matéria nas branas em termos da distribuição delta de Dirac

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{vis} - \lambda_{vis} &= \sqrt{-g_{vis}} \lambda_{vis} \delta(y - \pi r_c) \\ \mathcal{L}_{ocu} - \lambda_{ocu} &= \sqrt{-g_{ocu}} \lambda_{ocu} \delta(y) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Aplicando-se o cálculo variacional na ação total (4.2) tem-se

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \int dy \delta \left( \sqrt{-g^{(5)}} \right) \left( {}^{(5)}R - 2\Lambda_5 \right) M_5^3 + \sqrt{-g^{(5)}} M_5^3 \delta \left( {}^{(5)}R \right) \\ &+ \int d^4x \left[ \delta \left( \sqrt{-g_{ocu}} \lambda_{ocu} \delta(y) \right) \right] + \int d^4x \left[ \delta \left( \sqrt{-g_{vis}} \lambda_{vis} \delta(y - \pi r_c) \right) \right], \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde

$$\begin{aligned}
\delta\sqrt{-g^{(5)}} &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g^{(5)}}g_{ab}\delta g^{ab}, \\
\delta\sqrt{-g_{vis}} &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g_{vis}}g_{\mu\nu}^{vis}\delta g_{vis}^{\mu\nu}, \\
\delta\sqrt{-g_{ocu}} &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g_{ocu}}g_{\mu\nu}^{ocu}\delta g_{ocu}^{\mu\nu}, \\
\delta R &= -R^{ab}\delta g_{ab} - g^{ab}\delta R_{ab},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

tal que, utilizando as propriedades dadas em (4.5) e a equação de Palatini

$$\delta R_{ab} = \nabla_c(\delta\Gamma_{ab}^c) - \nabla_b(\delta\Gamma_{ac}^c), \tag{4.6}$$

temos

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \int dy -\frac{1}{2}\sqrt{-g^{(5)}}g_{ab}\delta g^{ab} \left( {}^{(5)}R - 2\Lambda_5 \right) M_5^3 + \sqrt{-g^{(5)}}M_5^3\delta \left( -{}^{(5)}R\delta g_{ab} \right) \\
&+ \int d^4x \left[ -\frac{1}{2}\delta g_{ocu}^{\mu\nu}g_{\mu\nu}^{ocu}\sqrt{-g_{ocu}}\lambda_{ocu}\delta(y) \right] + \int d^4x \left[ -\frac{1}{2}\delta g_{vis}^{\mu\nu}g_{\mu\nu}^{vis}\sqrt{-g_{vis}}\lambda_{vis}\delta(y - \pi r_c) \right].
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Para variações arbitrárias de  $g_{ab}$ ,  $g_{vis}^{\mu\nu}$  e  $g_{ocu}^{\mu\nu}$ , obtemos as equações de Einstein 5D

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g^{(5)}}\left(R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R\right) &= \frac{1}{4M_5^3}\left(\Lambda_5\sqrt{-g^{(5)}}g_{ab} + \lambda_{vis}\sqrt{-g_{vis}}g_{\mu\nu}^{vis}\delta_a^\mu\delta_b^\nu\delta(y - \pi r_c) \right. \\
&\left. + \lambda_{ocu}\sqrt{-g_{ocu}}g_{\mu\nu}^{ocu}\delta_a^\mu\delta_b^\nu\delta(y) \right).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

O Ansatz de Randall-Sundrum para a solução da equação acima é a métrica 5-dimensional da forma

$$ds^2 = e^{-2A(y)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + r_c^2 dy^2. \tag{4.9}$$

A partir deste Ansatz, as equações de Einstein tornam-se

$$\frac{6A'}{r_c^2} = -\frac{\Lambda}{4M_5^3} \tag{4.10}$$

e

$$\frac{3A''}{r_c^2} = \frac{\lambda_{ocu}}{4M_5^3 r_c^2}\delta(y) + \frac{\lambda_{vis}}{4M_5^3 r_c^2}\delta(y - \pi r_c). \tag{4.11}$$

Integrando diretamente a equação (4.10), a solução consistente com a simetria do orbifold  $y \rightarrow -y$  é

$$A(y) = \pm r_c |y| \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M_5^3}}. \tag{4.12}$$

Note que o espaço-tempo entre as duas branas é simplesmente uma porção de uma geometria  $AdS_5$  (anti de Sitter), deste modo,  $\Lambda < 0$ .

Considerando que a métrica é uma função periódica em  $y$ , a equação (4.11) pode ser escrita como

$$A'' = 2r_c \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M_5^3}} [\delta(y) - \delta(y - \pi r_c)]. \quad (4.13)$$

A partir deste resultado podemos observar que a única solução para a equação (4.11) é se  $\lambda_{vis}$ ,  $\lambda_{ocu}$  e  $\Lambda$  são relacionadas através da seguinte relação

$$\lambda_{vis} = -\lambda_{ocu} = 24M_5^3 k, \quad \Lambda = -24M_5^3 k. \quad (4.14)$$

A solução final para métrica no bulk é então

$$ds^2 = e^{-2kr_c|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 dy^2. \quad (4.15)$$

onde  $k$  é uma grandeza de escala.

Já no modelo de RS-II, utiliza-se a mesma geometria  $AdS_5$ , mas com única brana com tensão positiva onde a dimensão extra já não é mais compacta, portanto, o raio de compactificação  $r_c \rightarrow \infty$ .

### 4.3 Modelo Arkani-Dimopoulos-Dvali (ADD)

Essencialmente, a idéia do modelo proposto por Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali (ADD) é fazer com que a escala de Planck  $M_P \equiv M_4$  diminua. Considerando que a gravitação se dilua em um volume da dimensão extra compacta.

Considera-se uma geometria do bulk *flat* em  $(4+d)$ -dimensões, em que as  $d$  dimensões são compactas com raio  $R$  (topologia toroidal). A massa de Planck  $M_P$  4-dimensional, a massa fundamental de Planck  $M_F$   $(4+d)$ -dimensional e a escala gravitacional da teoria dimensional extra estão relacionadas via relação abaixo

$$M_P^2 = M_F^2 R^d \quad (4.16)$$

A ação de Einstein-Hilbert em  $(4+d)$ -dimensões para o modelo ADD é dada por

$$S = \frac{1}{2\kappa_{(4+d)}^2} \int d^4x d^d y \sqrt{-g^{(4+d)}} \left[ {}^{(4+d)}R - 2\Lambda_{(4+d)} \right], \quad (4.17)$$

e as equação de campo dadas por

$${}^{(4+d)}G_{AB} \equiv {}^{(4+d)}R_{AB} - \frac{1}{2} {}^{(4+d)}R {}^{(4+d)}g_{AB} = -\Lambda_{(4+d)} {}^{(4+d)}g_{AB} + \kappa_{(4+d)}^2 {}^{(4+d)}T_{AB}, \quad (4.18)$$

onde  $X^A = (x^\mu, y^1, \dots, y^d)$  e  $\kappa_{(4+d)}^2$  é a constante de acoplamento gravitacional

$$\kappa_{(4+d)}^2 = 8\pi G_{(4+d)} = \frac{8\pi}{M_{4+d}^{2+d}}. \quad (4.19)$$

O limite de campo fraco da equação (4.18) leva à equação de Poisson  $(4 + d)$ -dimensional cuja solução é o potencial gravitacional

$$V(r) = \frac{\kappa_{(4+d)}^2}{r^{1+d}}. \quad (4.20)$$

Vamos analisar a influência do tamanho das dimensões extras no potencial acima; se o comprimento da escala da dimensão extra é  $L$ , então em escalas  $r \gtrsim L$  o potencial é  $(4 + d)$ -dimensional,  $V \sim r^{-(1+d)}$ . Em contrapartida, com  $r \gg L$ , ou seja onde as dimensões extras não contribuem para variações no potencial,  $V$  comporta-se como um potencial 4-dimensional. No caso  $r \sim L$  nas  $d$  dimensões extras emerge um potencial do tipo  $V \sim L^{-d}r^{-1}$ . Isso nos fornece um quadro onde a escala usual de Planck torna-se uma constante de acoplamento efetiva, a qual descreve a gravitação em escalas muito maiores do que as dimensões extras. Desse modo sua relação com a escala fundamental e com o volume das dimensões extras é dada por

$$M_P^2 = M_{4+d}^{2+d} L^d \quad (4.21)$$

onde foram utilizadas as equações (4.19) e (4.20).

Se o volume da dimensão extra é próximo da escala de Planck, isto é,  $L \sim M_P^{-1}$ , então  $M_P = M_{4+d}$ , mas se o volume da dimensão extra é maior que a escala de Planck, então a escala fundamental  $M_{4+d}$  deve ser suficientemente menor que a escala efetiva  $M_P = 10^{19} GeV$ . Com isto, podemos estimar o comprimento  $L$  da dimensão extra, fazendo de  $M_{4+d}$  um valor da ordem do setor da escala eletrofraca  $M_{4+d} = 10^3 GeV$ . Da relação (4.21) temos

$$L = \frac{M_P^{2/d}}{M_{4+d}^{2/d+1}} = \frac{10^{38/d} GeV}{10^{6/d} GeV} 10^{-3} (GeV)^{-1} = 10^{32/d} (TeV)^{-1} = 10^{32/d-17} cm \quad (4.22)$$

onde  $10^{17} (TeV)^{-1} = 1 cm$ .

Caso  $d = 1$ , ocorre uma violação da gravitação Newtoniana; já para  $d = 2$  temos um valor de  $L = 1 mm$  [50].

## 4.4 Modelo Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP)

No modelo DGP [49] os autores sugeriram um mecanismo pelo qual a gravidade newtoniana de quatro dimensões em uma 3-brana está mergulhada no espaço 5D de Minkowski com uma dimensão extra de tamanho infinito. A ação adotada no modelo é dada por

$$S = -\frac{M_5^3}{2} \int d^5x \sqrt{-g} R_5 - \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-h} R_4 + \int d^4x \sqrt{-h} \mathcal{L}_m + S_{GH}, \quad (4.23)$$

onde  $g_{\mu\nu}$  é a métrica no bulk,  $h_{\mu\nu}$  é a métrica induzida na brana e  $\mathcal{L}_m$  é a densidade de lagrangiana de matéria confinada na brana. O segundo termo contendo o escalar de Ricci 4-dimensional na brana é o termo adicional que aparece no modelo DGP, em contraste com o cenário de Randall-Sundrum. Tal termo pode ser induzido através de efeitos quânticos no setor de matéria na brana. O último termo  $S_{GH}$  é o termo de fronteira de Gibbons-Hawking, necessário para a consistência do procedimento do princípio variacional e levar às condições de junção de Israel.

A razão entre as duas escalas a saber, a massa de Planck  $M_{Pl}$  4-dimensional e a massa  $M_5$  no *bulk* 5-dimensional, define uma escala de distância

$$r_d = \frac{M_{Pl}^2}{M_5^3}. \quad (4.24)$$

Para escalas de comprimento muito menores que  $r_d$  a gravidade se manifesta como uma teoria de quatro dimensões, enquanto que para grandes distâncias a gravidade escapa para o bulk levando efeitos importantes em altas dimensões. Através da escala de distância  $r_d$ , o potencial gravitacional de campo fraco comporta-se como

$$\Phi \sim \begin{cases} r^{-1} & \text{para } r < r_d, \\ r^{-2} & \text{para } r > r_d. \end{cases} \quad (4.25)$$

Vamos considerar uma situação cosmológica para o modelo DGP de tal sorte que poderemos relacionar a escala  $r_d$  com a taxa atual de Hubble  $H_0^{-1}$ , a qual corresponde a uma escolha  $M_5 = 10 - 100 MeV$ .

No modelo de brana-FRLW obtemos a seguinte equação de Friedmann modificada

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \left( \sqrt{\frac{\rho}{3M_{Pl}^2} + \frac{1}{4r_d^2}} + \epsilon \frac{1}{2r_d} \right)^2, \quad (4.26)$$

onde  $\rho$  é a densidade do fluido cósmico total na brana satisfazendo a equação de conservação usual. Para uma geometria plana, isto é,  $k = 0$ , após a extração das raízes de ambos os lados da equação (4.26), temos

$$H^2 - \frac{\epsilon}{r_d} H = \frac{\rho}{3M_{Pl}^2}, \quad (4.27)$$

onde  $\epsilon = \pm 1$ . Quando o comprimento de Hubble  $H^{-1}$  é muito menor do que a escala de distância  $r_d$ , ou seja,  $H^{-1} \ll r_d$ , o segundo termo do lado esquerdo da equação (4.27) torna-se insignificante em relação ao primeiro termo. Deste modo a equação de Friedmann é exibida da seguinte maneira

$$H^2 = \frac{\rho}{3M_{Pl}^2}. \quad (4.28)$$

O segundo termo na equação (4.27) torna-se importante quando comparado com a distância de escala ( $H^{-1} \gtrsim r_d$ ). O sinal de  $\epsilon$  contribui para dois regimes no modelo DGP. Quando  $\epsilon = 1$  a equação (4.27) mostra que no modelo *Cold Dark Matter*, caracterizado por uma situação em que  $\rho \propto a^{-3}$ , o Universo aproxima-se da solução do tipo de Sitter

$$H \rightarrow H_\infty = \frac{1}{r_d}. \quad (4.29)$$

Portanto, podemos ter uma expansão acelerada nos últimos tempos sem envolver a energia escura. Para explicar a aceleração precisamos que  $H_0$  seja da ordem  $H_\infty$ , o que significa que a escala de distância corresponde aproximadamente ao valor atual de Hubble ( $r_d \sim H_0^{-1}$ ). Pode-se dizer que é devido ao enfraquecimento da gravidade na brana e não devido a presença de um fluido com pressão negativa. Quando  $\epsilon = -1$  e  $H^{-1} \gg r_d$ , o segundo termo da equação (4.27) domina o primeiro termo, o que nos fornece

$$H^2 = \frac{\rho^2}{36M_5^6}. \quad (4.30)$$

Isto é semelhante às equações modificadas de FLRW na cosmologia de Randall-Sundrum em altas energias.

A equação de Friedmann (4.26) pode ser reescrita em termos do *red-shift* do seguinte modo

$$H^2(z) = H_0^2 \left\{ \Omega_k(1+z)^2 + \left( \sqrt{\Omega_{r_d}} + \sqrt{\sqrt{\Omega_{r_d}} + \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha}(1+z)^{3(1+w_{\alpha})}} \right)^2 \right\}, \quad (4.31)$$

onde a soma é sobre todas as componentes do fluido cósmico. Na equação (4.31),  $\Omega_\alpha$  é definido como

$$\Omega_\alpha \equiv \frac{\rho_\alpha^0}{3M_{Pl}^2 H_0^2 a_0^{3(1+w_\alpha)}}, \quad (4.32)$$

enquanto  $\Omega_k$  é dado por

$$\Omega_k \equiv \frac{-k}{H_0^2 a_0^2}, \quad (4.33)$$

e

$$\Omega_{r_d} \equiv \frac{1}{4r_d^2 H_0^2}. \quad (4.34)$$

## 4.5 Formulação de Shiromizu-Maeda-Sasaki

Para se deduzir as equações de campo na brana, iniciamos com a equação de Gauss

$${}^{(4)}R_{\mu\beta\nu}^\alpha = {}^{(5)}R_{\delta\rho\sigma}^\lambda h^\alpha{}_\lambda h^\delta{}_\mu h^\rho{}_\beta h^\sigma{}_\nu + K_\beta^\alpha K_{\mu\nu} - K_\nu^\alpha K_{\mu\beta}, \quad (4.35)$$

e a equação de Codazzi

$$D_\beta K_\alpha^\beta - D_\alpha K = {}^{(5)}R_{\rho\sigma} n^\sigma h_\alpha^\rho, \quad (4.36)$$

onde a curvatura extrínseca de  $M$  é denotada por  $K_{\mu\nu} = h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu \nabla_\alpha n_\beta$ ,  $K = K^\mu{}_\mu$  é seu traço,  $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta$  é a métrica na brana e  $D_\mu$  é a derivada covariante com relação a  $h_{\mu\nu}$ . Contraindo a equação de Gauss com  $\alpha$  e  $\beta$  temos

$${}^{(4)}R_{\mu\nu} = {}^{(5)}R_{\delta\rho\sigma}^\lambda h^\alpha{}_\lambda h^\delta{}_\mu h^\rho{}_\alpha h^\sigma{}_\nu + K_\alpha^\alpha K_{\mu\nu} - K_\nu^\alpha K_{\mu\alpha}, \quad (4.37)$$

logo

$${}^{(4)}R_{\mu\nu} = {}^{(5)}R_{\delta\rho\sigma}^\lambda h^\alpha{}_\lambda h^\delta{}_\mu h^\rho{}_\alpha h^\sigma{}_\nu + K K_{\mu\nu} - K_\nu^\alpha K_{\mu\alpha}. \quad (4.38)$$

Como

$$h^\alpha{}_\lambda = g^\alpha{}_\lambda - n_\lambda n^\alpha \quad \text{e} \quad h^\rho{}_\alpha = g^\rho{}_\alpha - n_\alpha n^\rho \quad (4.39)$$

podemos escrever a equação (4.38) da seguinte maneira

$${}^{(4)}R_{\mu\nu} = {}^{(5)}R_{\delta\rho\sigma}^\lambda (g^\alpha{}_\lambda - n_\lambda n^\alpha)(g^\rho{}_\alpha - n_\alpha n^\rho) h^\delta{}_\mu h^\sigma{}_\nu + K K_{\mu\nu} - K_\nu^\alpha K_{\mu\alpha}. \quad (4.40)$$

Manipulando os termos entre parênteses, obtemos

$$\begin{aligned} {}^{(4)}R_{\mu\nu} = & {}^{(5)}R_{\delta\rho\sigma}^\lambda [g^\alpha{}_\lambda g^\rho{}_\alpha - (h^\alpha{}_\lambda + n_\lambda n^\alpha) n_\alpha n^\rho - (h^\alpha{}_\lambda + n_\lambda n^\alpha) n_\lambda n^\alpha + n_\lambda n^\alpha n_\alpha n^\rho (h^\delta{}_\mu h^\sigma{}_\nu)] \\ & + K K_{\mu\nu} - K_\nu^\alpha K_{\mu\alpha} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Fazendo válidas as identidades abaixo

$$\begin{aligned} n_\mu n^\mu &= 1, \\ h_{\mu\nu} n^\mu &= 0, \\ g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu &= 1, \end{aligned} \tag{4.42}$$

finalmente obtemos o tensor de Ricci projetado na brana

$${}^{(4)}R_{\mu\nu} = {}^{(5)}R_{\rho\sigma} h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu - {}^{(5)}R^\alpha_{\beta\gamma\delta} n_\alpha h^\beta{}_\mu n^\gamma h^\delta{}_\nu + K K_{\mu\nu} - K^\alpha{}_\mu K_{\alpha\nu}. \tag{4.43}$$

Contraindo o tensor de Ricci acima com a métrica  $h^{\mu\nu}$ , isto é

$${}^{(4)}R = {}^{(4)}R_{\mu\nu} h^{\mu\nu}, \tag{4.44}$$

obtemos o escalar de Ricci projetado na brana

$${}^{(4)}R = {}^{(5)}R_{\rho\sigma} h^{\rho\sigma} - {}^{(5)}R^\lambda_{\delta\rho\sigma} n_\lambda h^\delta{}_\mu n^\rho h^\sigma{}_\nu h^{\mu\nu} + K^2 - K^{\mu\alpha} K_{\mu\alpha}. \tag{4.45}$$

Note que os objetos geométricos rotulados pelo superescrito (5), ou seja, objetos no espaço do bulk, são manipulados indicialmente pela métrica induzida  $g_{\mu\nu}$ , enquanto que os objetos rotulados pelo superescrito (4), estão sob a responsabilidade exclusiva da métrica  $h_{\mu\nu}$ .

Uma vez que o tensor de Einstein é dado por

$${}^{(4)}G_{\mu\nu} = {}^{(4)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} {}^{(4)}R, \tag{4.46}$$

a expressão nos leva ao tensor de Einstein na brana

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G_{\mu\nu} &= {}^{(5)}R_{\rho\sigma} h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu - {}^{(5)}R^\alpha_{\beta\gamma\delta} n_\alpha h^\beta{}_\mu n^\gamma h^\delta{}_\nu + K K_{\mu\nu} - K^\alpha{}_\mu K_{\alpha\nu} \\ &\quad - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} [{}^{(5)}R_{\rho\sigma} h^{\rho\sigma} - {}^{(5)}R^\lambda_{\delta\rho\sigma} n_\lambda h^\delta{}_\mu n^\rho h^\sigma{}_\nu h^{\mu\nu} + K^2 - K^{\mu\alpha} K_{\mu\alpha}]. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Após alguma simples manipulação, ainda temos

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G_{\mu\nu} &= {}^{(5)}R_{\rho\sigma} h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu - {}^{(5)}R_{\rho\sigma} h^{\rho\sigma} \frac{1}{2} h_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - K^\alpha{}_\mu K_{\alpha\nu} \\ &\quad - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} [- {}^{(5)}R^\lambda_{\delta\rho\sigma} n_\lambda h^\delta{}_\mu n^\rho h^\sigma{}_\nu h^{\mu\nu} + K^2 - K^{\mu\alpha} K_{\mu\alpha}], \end{aligned} \tag{4.48}$$

onde

$$E_{\mu\nu} \equiv {}^{(5)}R^\alpha_{\beta\gamma\delta} n_\alpha h^\beta{}_\mu n^\gamma h^\delta{}_\nu. \tag{4.49}$$



Agora iremos manipular o segundo termo do lado direito da equação (4.48)

$$\begin{aligned}
-^{(5)}R_{\rho\sigma} h^{\rho\sigma} \frac{1}{2} h_{\mu\nu} &= - \left( \frac{1}{2} {}^{(5)}R_{\rho\sigma} h^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} \right) h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu \\
&= - \left[ \frac{1}{2} {}^{(5)}R_{\rho\sigma} (g_{\rho\sigma} - n_\rho n_\sigma) (g^{\rho\sigma} - n^\rho n^\sigma) h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu \right] \\
&= - \frac{1}{2} {}^{(5)}R_{\rho\sigma} g_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu + \frac{1}{2} {}^{(5)}R_{\rho\sigma} g_{\rho\sigma} n^\rho n^\sigma h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu \\
&\quad + \frac{1}{2} {}^{(5)}R h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu n_\rho n_\sigma - \frac{1}{2} {}^{(5)}R_{\rho\sigma} n_\rho n_\sigma n^\rho n^\sigma h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu. \quad (4.50)
\end{aligned}$$

O segundo e o quarto termo da equação acima podem ser acoplados em um termo do tipo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} {}^{(5)}R_{\rho\sigma} g_{\rho\sigma} n^\rho n^\sigma h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu - \frac{1}{2} {}^{(5)}R_{\rho\sigma} n_\rho n_\sigma n^\rho n^\sigma h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu \\
&= \frac{1}{2} {}^{(5)}R_{\rho\sigma} h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu n^\rho n^\sigma (g_{\rho\sigma} - n_\rho n_\sigma) \\
&= \frac{1}{2} {}^{(5)}R_{\rho\sigma} h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu h_{\rho\sigma} n^\rho n^\sigma = \frac{1}{2} {}^{(5)}R_{\rho\sigma} n^\rho n^\sigma h_{\mu\nu}. \quad (4.51)
\end{aligned}$$

Já o terceiro termo,  $\frac{1}{2} {}^{(5)}R h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu n_\rho n_\sigma$ , é aniquilado, pois  $h^\rho{}_\mu n_\rho = 0$ . Logo

$$-^{(5)}R_{\rho\sigma} h^{\rho\sigma} \frac{1}{2} h_{\mu\nu} = \frac{1}{2} {}^{(5)}R_{\rho\sigma} n^\rho n^\sigma h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} {}^{(5)}R g_{\rho\sigma} h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu. \quad (4.52)$$

Portanto, substituindo o termo acima na expressão (4.48), obtemos o seguinte tensor de Einstein  $4D$

$$\begin{aligned}
{}^{(4)}G_{\mu\nu} &= {}^{(5)}R_{\rho\sigma} h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu - \frac{1}{2} {}^{(5)}R g_{\rho\sigma} h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu + \frac{1}{2} {}^{(5)}R_{\rho\sigma} n^\rho n^\sigma h_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} \\
&+ K K_{\mu\nu} - K^\alpha{}_\mu K_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left[ - {}^{(5)}R^\lambda{}_{\delta\rho\sigma} n_\lambda h^\delta{}_\mu n^\rho h^\sigma{}_\nu h^{\mu\nu} + K^2 - K^{\mu\alpha} K_{\mu\alpha} \right], \quad (4.53)
\end{aligned}$$

após alguma manipulação algébrica fica

$$\begin{aligned}
{}^{(4)}G_{\mu\nu} &= \left( {}^{(5)}R_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} {}^{(5)}R g_{\rho\sigma} \right) h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu - E_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - K^\alpha{}_\mu K_{\alpha\nu} \\
&- \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left[ - {}^{(5)}R_{\rho\sigma} n^\rho n^\sigma - {}^{(5)}R^\lambda{}_{\delta\rho\sigma} n_\lambda h^\delta{}_\mu n^\rho h^\sigma{}_\nu h^{\mu\nu} + K^2 - K^{\mu\alpha} K_{\mu\alpha} \right]. \quad (4.54)
\end{aligned}$$

O termo entre parenteses é o tensor de Einstein  $5D$ ,  ${}^{(5)}G_{\rho\sigma}$ , isto é

$${}^{(5)}G_{\rho\sigma} = {}^{(5)}R_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} {}^{(5)}R g_{\rho\sigma}, \quad (4.55)$$

portanto

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G_{\mu\nu} = & {}^{(5)}G_{\rho\sigma}h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu - E_{\mu\nu} + KK_{\mu\nu} - K^\alpha{}_\mu K_{\alpha\nu} \\ & - \frac{1}{2}h_{\mu\nu} \left[ - {}^{(5)}R_{\rho\sigma}n^\rho n^\sigma - {}^{(5)}R^\lambda{}_{\delta\rho\sigma}n_\lambda n^\rho h^{\delta\sigma} + K^2 - K^{\mu\alpha}K_{\mu\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Desmembrando o segundo termo entre colchetes da equação acima temos

$$\begin{aligned} {}^{(5)}R^\lambda{}_{\delta\rho\sigma}n_\lambda n^\rho h^{\delta\sigma} &= {}^{(5)}R^\lambda{}_{\delta\rho\sigma}n_\lambda n^\rho (g^{\delta\sigma} - n^\delta n^\sigma) \\ &= {}^{(5)}R^\lambda{}_{\delta\rho\sigma}g^{\delta\sigma}n_\lambda n^\rho - {}^{(5)}R^\lambda{}_{\delta\rho\sigma}n_\lambda n^\rho n^\delta n^\sigma \\ &= {}^{(5)}R^\lambda{}_\rho n_\lambda n^\rho, \end{aligned} \quad (4.57)$$

pois

$${}^{(5)}R^\lambda{}_{\delta[\rho\sigma]}n^{(\rho}n^{\sigma)}n^\delta n_\lambda = 0 \quad (4.58)$$

Portanto

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G_{\mu\nu} = & {}^{(5)}G_{\rho\sigma}h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu - E_{\mu\nu} + KK_{\mu\nu} - K^\alpha{}_\mu K_{\alpha\nu} \\ & - \frac{1}{2}h_{\mu\nu} \left[ - {}^{(5)}R_{\rho\sigma}n^\rho n^\sigma + {}^{(5)}R^\lambda{}_\rho n_\lambda n^\rho + K^2 - K^{\mu\alpha}K_{\mu\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Rearranjando a equação acima, finalmente o tensor de Einstein fica expresso por

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G_{\mu\nu} = & {}^{(5)}G_{\rho\sigma}h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu + {}^{(5)}R_{\rho\sigma}n^\rho n^\sigma h_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} + KK_{\mu\nu} \\ & - K^\alpha{}_\mu K_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu} \left[ K^2 - K^{\mu\alpha}K_{\mu\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (4.60)$$

O próximo passo é obter uma relação entre o tensor  ${}^{(4)}G_{\mu\nu}$  e o tensor energia-momento na brana. Para isso, precisaremos da equação de campo em  $5D$

$${}^{(5)}G_{\rho\sigma} = {}^{(5)}R_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}R g_{\rho\sigma} = \kappa_5^2 {}^{(5)}T_{\rho\sigma}. \quad (4.61)$$

A decomposição do tensor de Riemann em termos dos objetos de Ricci e no tensor de curvatura de Weyl,  $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ , fornece

$${}^{(5)}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{(D-2)} (g_{\mu[\nu} {}^{(5)}R_{\beta]\alpha} - g_{\alpha[\nu} {}^{(5)}R_{\beta]\mu}) - \frac{1}{(D-1)(D-2)} g_{\mu[\nu} g_{\beta]\alpha} {}^{(5)}R + {}^{(5)}C_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (4.62)$$

Reescrevendo  $E_{\mu\nu}$  com auxílio de (4.62), temos

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu} = & \frac{1}{3} [g_{\alpha\gamma} {}^{(5)}R_{\gamma\beta} - g_{\alpha\delta} {}^{(5)}R_{\gamma\beta} - g_{\beta\gamma} {}^{(5)}R_{\delta\alpha} + g_{\beta\delta} {}^{(5)}R_{\gamma\alpha}] n^\alpha n^\gamma h^\beta{}_\mu h^\delta{}_\nu \\ & - \frac{1}{12} [g_{\alpha\gamma} g_{\delta\beta} - g_{\alpha\delta} g_{\gamma\beta}] {}^{(5)}R n^\alpha n^\gamma h^\beta{}_\mu h^\delta{}_\nu + {}^{(5)}C_{\alpha\beta\gamma\delta} n^\alpha n^\gamma h^\beta{}_\mu h^\delta{}_\nu. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Note que, o segundo, o terceiro e o sexto termos da equação acima produzem elementos do tipo  $n_\delta h^\delta{}_\nu = n_\beta h^\beta{}_\mu = 0$ , portanto

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu} = & \frac{1}{3} [{}^{(5)}R_{\delta\beta} h^\beta{}_\mu h^\delta{}_\nu + g_{\beta\delta} {}^{(5)}R_{\gamma\alpha} n^\alpha n^\gamma h^\beta{}_\mu h^\delta{}_\nu] \\ & - \frac{1}{12} {}^{(5)}R g_{\delta\beta} h^\beta{}_\mu h^\delta{}_\nu + {}^{(5)}C_{\alpha\beta\gamma\delta} n^\alpha n^\gamma h^\beta{}_\mu h^\delta{}_\nu. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Tomando o traço da equação de Einstein 5D (4.61)

$${}^{(5)}R = -\frac{2}{3} {}^{(5)}T \kappa_5^2 \quad \text{e} \quad {}^{(5)}R_{\rho\sigma} = \frac{\kappa_5^2}{3} (3 {}^{(5)}T_{\rho\sigma} - {}^{(5)}T g_{\rho\sigma}). \quad (4.65)$$

Definindo

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} \equiv {}^{(5)}C_{\alpha\beta\gamma\delta} n^\alpha n^\gamma h^\beta{}_\mu h^\delta{}_\nu, \quad (4.66)$$

e substituindo as expressões (4.65) e (4.66) para  $E_{\mu\nu}$  chegamos a

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu} = & \frac{1}{3} \left[ \frac{\kappa_5^2}{3} (3 {}^{(5)}T_{\delta\beta} - {}^{(5)}T g_{\delta\beta}) h^\beta{}_\mu h^\delta{}_\nu + g_{\beta\delta} \frac{\kappa_5^2}{3} (3 {}^{(5)}T_{\gamma\alpha} - {}^{(5)}T g_{\gamma\alpha}) n^\alpha n^\gamma h^\beta{}_\mu h^\delta{}_\nu \right] \\ & + \frac{1}{18} {}^{(5)}T \kappa_5^2 g_{\delta\beta} h^\beta{}_\mu h^\delta{}_\nu + \mathcal{E}_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.67)$$

que após alguma manipulação leva a

$$E_{\mu\nu} = \frac{\kappa_5^2}{3} {}^{(5)}T_{\delta\beta} h^\beta{}_\mu h^\delta{}_\nu - \frac{\kappa_5^2}{6} h_{\mu\nu} {}^{(5)}T + \frac{\kappa_5^2}{3} {}^{(5)}T_{\gamma\alpha} n^\alpha n^\gamma h_{\mu\nu} + \mathcal{E}_{\mu\nu}. \quad (4.68)$$

Substituindo este resultado na expressão para o tensor de Einstein 4D obtemos

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G_{\mu\nu} = & \kappa_5^2 {}^{(5)}T_{\rho\sigma} h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu - \frac{\kappa_5^2}{3} {}^{(5)}T g_{\rho\sigma} n^\rho n^\sigma h_{\mu\nu} \\ & + \kappa_5^2 {}^{(5)}T_{\rho\sigma} n^\rho n^\sigma h_{\mu\nu} - \frac{\kappa_5^2}{3} {}^{(5)}T_{\delta\beta} h^\beta{}_\mu h^\delta{}_\nu + \frac{\kappa_5^2}{6} h_{\mu\nu} {}^{(5)}T \\ & - \frac{\kappa_5^2}{3} {}^{(5)}T_{\gamma\alpha} n^\alpha n^\gamma h_{\mu\nu} - \mathcal{E}_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - K^\alpha{}_\mu K_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} [K^2 - K^{\mu\alpha} K_{\mu\alpha}]. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Efetuada-se uma substituição indicial e agrupando os termos adequadamente temos

$$\begin{aligned} {}^{(4)}G_{\mu\nu} = & \frac{2}{3} \kappa_5^2 \left[ {}^{(5)}T_{\rho\sigma} h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu + h_{\mu\nu} \left( {}^{(5)}T_{\rho\sigma} n^\rho n^\sigma - \frac{1}{4} {}^{(5)}T \right) \right] \\ & + K K_{\mu\nu} - K^\alpha{}_\mu K_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} (K^2 - K^{\mu\alpha} K_{\mu\alpha}) - \mathcal{E}_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

onde,

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} \equiv {}^{(5)}C_{\alpha\beta\gamma\delta} n^\alpha n^\gamma h^\beta{}_\mu h^\delta{}_\nu \quad (4.71)$$

é a chamada "parte elétrica" do tensor de Weyl.

Agora, utilizando a equação de Codazzi juntamente com (4.65) chegamos a

$$D_\beta K_\alpha^\beta - D_\alpha K = \kappa_5^2 {}^{(5)}T_{\rho\sigma} n^\sigma h_\alpha^\rho \quad (4.72)$$

O tensor energia-momento no *bulk* é dado por

$$T_{\mu\nu} = -\Lambda_5 g_{\mu\nu} + \delta(y) S_{\mu\nu}, \quad (4.73)$$

onde

$$S_{\mu\nu} = -\lambda h_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}, \quad (4.74)$$

com  $\tau_{\mu\nu} n^\nu = 0$ , pois não há fluxo de matéria-energia na dimensão extra.  $\Lambda_5$  é a constante cosmológica no espaço-tempo do bulk,  $\lambda$  a tensão na brana e  $\tau_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento na brana, o qual carrega informações dos campos confinados na mesma. O comportamento singular no tensor energia-momento devido a uma descontinuidade entre o bulk e a brana pode ser contornado através das condições de junção de Israel

$$\begin{aligned} [h_{\mu\nu}] &= 0, \\ [K_{\mu\nu}] &= -\kappa_5^2 \left( S_{\mu\nu} - \frac{1}{3} S h_{\mu\nu} \right), \end{aligned} \quad (4.75)$$

onde  $[Y] = \lim_{y \rightarrow +0} Y - \lim_{y \rightarrow -0} Y = Y^+ - Y^-$ . Impondo a simetria  $Z_2$  ao longo da dimensão extra, com a brana em um ponto fixo dessa dimensão, podemos quantificar objetos em ambos os lados da brana. Deste modo, a curvatura extrínseca em termos do tensor energia-momento é dada por

$$K_{\mu\nu} = K_{\mu\nu}^+ = -K_{\mu\nu}^- = -\frac{1}{2} \kappa_5^2 \left( S_{\mu\nu} - \frac{1}{3} S h_{\mu\nu} \right), \quad (4.76)$$

Tomando o traço de  $S_{\mu\nu}$  e substituindo-o na equação acima, obtemos

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \kappa_5^2 \left[ \tau_{\mu\nu} + \frac{1}{3} (\lambda - \tau) h_{\mu\nu} \right] \quad (4.77)$$

Esta expressão tem por finalidade nos auxiliar para encontrar os seguintes objetos dados em (4.60):

$$K K_{\mu\nu} = \frac{1}{12} \kappa_5^4 \left[ 4\lambda \tau_{\mu\nu} + \frac{4}{3} \lambda^2 h_{\mu\nu} - \frac{5}{3} \lambda \tau h_{\mu\nu} - \tau \tau_{\mu\nu} + \frac{1}{3} \tau^2 h_{\mu\nu} \right], \quad (4.78)$$

$$K^\alpha{}_\mu K_{\alpha\nu} = \frac{1}{4}\kappa_5^4 \left[ \tau^\alpha{}_\mu \tau_{\alpha\nu} + \frac{2}{3}(\lambda - \tau)\tau_{\mu\nu} + \frac{1}{9}(\lambda^2 + \tau^2 - 2\lambda\tau)h_{\mu\nu} \right], \quad (4.79)$$

$$K^2 = \frac{1}{36}\kappa_5^2 [16\lambda^2 + \tau^2 - 8\lambda\tau], \quad (4.80)$$

$$K^{\mu\alpha} K_{\mu\alpha} = \frac{1}{4}\kappa_5^2 \left[ \tau_{\mu\alpha} \tau^{\mu\alpha} + \frac{2}{3}(\lambda - \tau)\tau + \frac{4}{9}(\lambda^2 + \tau^2 - 2\lambda\tau) \right]. \quad (4.81)$$

Por outro lado, as fontes podem ser vinculadas da seguinte maneira

$$\begin{aligned} {}^{(5)}T_{\rho\sigma} h^\rho{}_\mu h^\sigma{}_\nu &= -\Lambda_5 h_{\mu\nu}, \\ {}^{(5)}T_{\rho\sigma} n^\rho n^\sigma - \frac{1}{4} {}^{(5)}T &= \frac{1}{4}\Lambda_5. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Substituindo as expressões (4.76)-(4.82) em (4.70), obtemos as equações gravitacionais efetivas

$${}^{(4)}G_{\mu\nu} = -\Lambda_4 h_{\mu\nu} + 8\pi G_N \tau_{\mu\nu} + \kappa_5^4 \pi_{\mu\nu} - \mathcal{E}_{\mu\nu}, \quad (4.83)$$

onde

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2}\kappa_5^2 \left( \Lambda_5 + \frac{1}{6}\kappa_5^2 \lambda^2 \right), \quad (4.84)$$

$$G_N = \frac{\kappa_5^4 \lambda}{48\pi}, \quad (4.85)$$

$$\pi_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\tau_{\mu\alpha} \tau^\alpha{}_\nu + \frac{1}{12}\tau \tau_{\mu\nu} + \frac{1}{8}h_{\mu\nu} \tau_{\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta} - \frac{1}{24}h_{\mu\nu} \tau^2. \quad (4.86)$$

# Capítulo 5

## Regras de soma para cenários de mundos brana

### 5.1 Introdução

Como dito anteriormente, partindo do ponto de vista que o nosso universo pode ser representado por uma brana mergulhada em um espaço-tempo de maior dimensão, muitas vezes torna-se difícil fazer uma análise precisa dos modelos de mundos brana. Deste modo, seria vantajoso obter um conjunto de regras gerais, as quais nos permitam testar novos modelos. Gibbons, Kallosh e Linde, derivaram um conjunto de condições de consistência [7], chamado regras de soma. Eles encontraram um resultado importante, um tipo de teorema no-go que diz respeito à possibilidade da construção de cenários mundos brana suaves com espaços internos compactos. Essencialmente, o teorema no-go nos diz que, “*generalizações suaves do cenário de Randall-Sundrum, sem fontes singulares, são incompatíveis com dimensões extras compactas*”, isto é

$$\oint \Phi' \cdot \Phi' = 0. \quad (5.1)$$

onde  $\Phi$  é o campo escalar que gera a brana. A integral é tomada no espaço interno e a "linha" representa a derivada do campo escalar com relação às coordenadas do espaço interno.

Vamos analisar o espaço-tempo  $D$ -dimensional no *bulk* com uma métrica dada por

$$ds^2 = g_{AB}dX^A dX^B = W^2(r)g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + g_{ab}(r)dr^a dr^b, \quad (5.2)$$

onde  $W^2(r)$  é o *warp factor*,  $X^A$  denota as coordenadas do espaço-tempo  $D$ -dimensional,  $x^\mu$  são as coordenadas do espaço-tempo não compacto de dimensão  $(p+1)$  e  $r^a$  denota as coordenadas do espaço interno compacto com dimensões  $(D-p-1)$ .

As expressões para o tensor energia-momento do espaço-tempo não compacto e para o espaço compacto são as seguintes, respectivamente

$$T_{\mu\nu} = -W^2 g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + V(\Phi) \right), \quad (5.3)$$

e

$$T_{ab} = \nabla_a \Phi \nabla_b \Phi - g_{ab} \left( \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + V(\Phi) \right). \quad (5.4)$$

Podemos relacionar o tensor de Ricci do espaço-tempo  $D$ -dimensional com o tensor de Ricci na brana bem como com o tensor de Ricci no espaço interno através das equações

$${}^{(D)}R_{\mu\nu} = {}^{(p+1)}\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{(p+1)W^{p+1}} \nabla^2 W^{p+1} \quad (5.5)$$

e

$${}^{(D)}R_{ab} = {}^{(D-p-1)}\tilde{R}_{ab} - \frac{(p+1)}{W} \nabla_a \nabla_b W, \quad (5.6)$$

onde  $\tilde{R}_{ab}$ ,  $\nabla_a$  e  $\nabla^2$  são respectivamente o tensor de Ricci, a derivada covariante e operador Laplaciano construído com a métrica  $g_{ab}$  do espaço interno.  $\bar{R}_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci oriundo de  $g_{\mu\nu}$ . Denotando os três escalares de curvatura por  $R = g^{AB} R_{AB}$ ,  $\bar{R} = g^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu}$  e  $\tilde{R} = g^{ab} \tilde{R}_{ab}$ , e ainda tomando os traços das equações (5.5) e (5.6) tem-se

$$W^{-2} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - W^{-2} g^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu} = -\frac{W^{-2} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}}{(p+1)W^{p-1}} \nabla^2 W^{p+1}. \quad (5.7)$$

Desenvolvendo a derivada  $\nabla^2 W^{p+1}$ , temos

$$W^{-2} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - W^{-2} g^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu} = -W^{-p+1} W^{-2} (p+1) [pW \nabla W \cdot \nabla W + W^p \nabla^2 W], \quad (5.8)$$

portanto

$$\frac{1}{p+1} \left( W^{-2} \bar{R} - R^\mu_\mu \right) = pW^{-2} \nabla W \cdot \nabla W + W^{-1} \nabla^2 W. \quad (5.9)$$

Agora, tomando o traço da equação (5.6)

$$g^{ab} R_{ab} = \tilde{R}_{ab} g^{ab} - \frac{(p+1)}{W} \nabla^a \nabla_a W, \quad (5.10)$$

vem que

$$\frac{1}{(p+1)} \tilde{R} - R^a_a = W^{-1} \nabla^2 W, \quad (5.11)$$

onde  $R^\mu_\mu \equiv W^{-2}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$  e  $R^a_a \equiv g^{ab}R_{ab}$  com  $R = R^\mu_\mu + R^a_a$ . Agora, seja a derivada total com  $\alpha$  sendo uma constante arbitrária, temos

$$\nabla \cdot (W^\alpha \nabla W) = W^{\alpha+1} [\alpha W^{-2} \nabla W \cdot \nabla W + W^{-1} \nabla^2 W]. \quad (5.12)$$

Combinando as equações (5.9), (5.11) e (5.12), chegamos a

$$\nabla \cdot (W^\alpha \nabla W) = \frac{W^{\alpha+1}}{p(p+1)} \left[ (\alpha W^{-2} \bar{R} - R^\mu_\mu) + (p - \alpha)(\tilde{R} - R^a_a) \right]. \quad (5.13)$$

Essa última equação engendra um caminho para se buscar condições de consistência. O lado esquerdo da equação (5.13) se anula sobre uma integração no espaço interno compacto e periódico, enquanto que o seu lado direito propõe algumas possibilidades para investigar algumas teorias. Tal procedimento pode ser feito expressando as quantidades geométricas dadas em (5.13) em termos das parcelas do tensor energia-momento.

As equações de Einstein no *bulk*  $D$ -dimensional podem ser escritas da seguinte forma

$$R_{AB} = 8\pi G_D \left( T_{AB} - \frac{1}{(D-2)} g_{AB} T^M_M \right), \quad (5.14)$$

onde  $G_D$  é a constante de acoplamento gravitacional  $D$ -dimensional. Os traços parciais das componentes do tensor de Ricci são dados por

$$R^\mu_\mu = \frac{8\pi G_D}{D-2} [(D-p-3)T^\mu_\mu - (p+1)T^a_a], \quad (5.15)$$

onde  $T^\mu_\mu \equiv W^{-2}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$  e

$$R^a_a = \frac{8\pi G_D}{D-2} [(D-p-3)T^\mu_\mu - (p+1)T^a_a]. \quad (5.16)$$

Substituindo (5.15) e (5.16) na equação (5.13), obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (W^\alpha \nabla W) &= \frac{W^{\alpha+1}}{p(p+1)} \left[ \frac{8\pi G_D}{D-2} \left( [(p-2\alpha)(D-p-1) + 2\alpha] T^\mu_\mu + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + p(2\alpha - p + 1)T^a_a \right) + (p - \alpha)\tilde{R} + \alpha W^{-2}\bar{R} \right]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Se o espaço interno é compacto e periódico, a relação  $\oint \nabla \cdot (W^\alpha \nabla W) = 0$  deve ser satisfeita. Deste modo, o parâmetro  $\alpha$  pode nos trazer uma família de condições de consistência, onde para cada escolha de  $\alpha$  emerge uma condição de consistência para o



esquema de compactificação:

$$\oint W^{\alpha+1} \left[ \left( (p-2\alpha)(D-p-1) + 2\alpha \right) T_\mu^\mu + p(2\alpha-p+1)T_a^a + \frac{D-2}{8\pi G_D} \left( (p-\alpha)\tilde{R} + \alpha W^{-2}\bar{R} \right) \right] = 0. \quad (5.18)$$

Vamos considerar o caso  $D = 5$  e  $p = 3$ , deste modo que leva a

$$\oint W^{\alpha+1} \left[ T_\mu^\mu + 2(\alpha-1)T_4^4 + \frac{\alpha}{8\pi G_5} W^{-2}\bar{R} \right] = 0, \quad (5.19)$$

neste caso  $\tilde{R} = 0$ , pois esse escalar de curvatura do espaço interno possui uma única dimensão. Usando as equações (5.3) e (5.4) encontramos

$$T_\mu^\mu = -4 \left( \frac{1}{2} \Phi' \cdot \Phi' + V(\Phi) \right) \quad \text{e} \quad T_4^4 = \frac{1}{2} \Phi' \cdot \Phi' - V(\Phi). \quad (5.20)$$

Inserindo o resultado acima na expressão (5.19), obtemos

$$\oint W^{\alpha+1} \left( (\alpha-3)\Phi' \cdot \Phi' - 2(\alpha+1)V(\Phi) + \frac{\alpha}{8\pi G_5} W^{-2}\bar{R} \right) = 0. \quad (5.21)$$

Escolhendo  $\alpha = -1$ , o potencial  $V(\Phi)$  é exaurido na equação acima, restando apenas

$$\oint \Phi' \cdot \Phi' = -\frac{\bar{R}}{32\pi G_5} \oint W^{-2}. \quad (5.22)$$

Se queremos uma descrição do nosso Universo, então  $\bar{R} = 0$  com uma precisão de  $10^{-120} M_{Pl}^2$ . Portanto

$$\oint \Phi' \cdot \Phi' = 0,$$

o qual é o resultado obtido através da equação (5.1).

Nas próximas sub-seções, iremos aplicar a expressão (5.13) na teoria de Brans-Dicke e na teoria de  $f(\mathcal{R})$ -Einstein-Palatini. Outros trabalhos abordando a teoria geral escalar-tensorial e a teoria de Brans-Dicke para mundo branas singulares, podem ser encontrados em [51, 52, 53], enquanto que uma abordagem na teoria  $f(R)$ -Einstein-métrica para branas suaves, pode ser vista em [55].

## 5.2 Teoria de Brans-Dicke: Ação e equações de campo

As teorias escalares-tensoriais da gravidade são algumas das teorias alternativas mais bem estabelecidas e estudadas na literatura. A densidade de lagrangiana que responde

por uma teoria escalar-tensorial geral apresenta-se da seguinte forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa} \sqrt{-g} [f(\phi)R - g(\phi)\nabla_A\phi\nabla^A\phi - 2\Lambda(\phi)] + \mathcal{L}_m(\psi, h(\phi)g_{MN}) \quad (5.23)$$

onde  $f, g$  e  $h$  são funções arbitrárias do campo escalar e  $\mathcal{L}_m$  a densidade de lagrangiana dos campos de matéria. A função  $h(\phi)$  pode ser absorvida na métrica por uma transformação conforme da seguinte forma

$$h(\phi)g_{MN} \rightarrow g_{MN}. \quad (5.24)$$

Podemos redefinir o campo escalar, escolhendo  $f(\phi) \rightarrow \phi$ . Então, a densidade de lagrangiana (5.23) pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa} \sqrt{-g} \left[ \phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \nabla_A\phi\nabla^A\phi - 2\Lambda(\phi) \right] + \mathcal{L}_m(\psi, g_{MN}), \quad (5.25)$$

onde  $\omega(\phi)$  é uma função arbitrária, também chamada de parâmetro de acoplamento e  $\Lambda(\phi)$  é uma generalização da constante cosmológica. A teoria descrita em (5.25), se reduz à bem conhecida teoria de Brans-Dicke quando adotado o limite de  $\omega = \text{constante}$  e  $\Lambda \rightarrow 0$ . Por outro lado, no limite de  $\omega \rightarrow \infty$  ( $\phi \rightarrow 1/G_N$ ) e  $\Lambda = \text{constante}$ , recupera-se o cenário da relatividade geral.

Seja a ação de Brans-Dicke no *bulk*

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} \left[ \phi R - \frac{\omega}{\phi} (\nabla_M\phi\nabla_N\phi) \right] + S_M(\psi_M, g_{MN}), \quad (5.26)$$

a variação da ação com respeito a  $g_{MN}$  nos dá as equações de campo

$$\begin{aligned} R_{MN} - \frac{1}{2}g_{MN}R &= \frac{8\pi}{\phi}T_{MN} + \frac{\omega}{\phi^2} \left( \nabla_M\phi\nabla_N\phi - \frac{1}{2}\nabla_A\phi\nabla^A\phi g_{MN} \right) \\ &+ \frac{1}{\phi} \left( \nabla_M\nabla_N\phi - \frac{8\pi}{(D-1) + (D-2)\omega} T g_{MN} \right), \end{aligned} \quad (5.27)$$

enquanto que a variação da ação com respeito ao incremento variacional  $\delta\phi$ , nos fornece a equação de movimento do campo escalar

$$\square\phi = -\frac{\phi}{2\omega}R - \frac{1}{2\phi}\nabla^M\phi\nabla_M\phi, \quad (5.28)$$

O termo  $\frac{8\pi}{(D-1) + (D-2)\omega}T$ , substituiu o termo  $\square\phi$  a partir do traço da equação (5.28).

### 5.3 Regras de soma para mundo branas na teoria de Brans-Dicke

A partir da equação (5.27), o escalar de Ricci pode ser escrito da seguinte maneira

$$R = \frac{2}{2-D} \left[ \frac{8\pi\omega}{\phi} \frac{(D-2)T}{(D-1) + (D-2)\omega} + \frac{(2-D)}{2} \frac{\omega}{\phi^2} \nabla_A \phi \nabla^A \phi \right]. \quad (5.29)$$

Substituindo a Eq. (5.29) em (5.27),

$$\begin{aligned} R_{MN} = & \frac{8\pi}{\phi} \left[ T_{MN} - g_{MN} \frac{(1+\omega)}{(D-1) + (D-2)\omega} T_\mu^\mu - g_{MN} \frac{(1+\omega)}{(D-1) + (D-2)\omega} T_m^m \right] \\ & + \frac{\omega}{\phi^2} \nabla_M \phi \nabla_N \phi + \frac{1}{\phi} \nabla_M \nabla_N \phi \end{aligned} \quad (5.30)$$

Aplicando os traços parciais em (5.30), e chamando  $T_\mu^\mu \equiv W^{-2} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$  ( $T = T_\mu^\mu + T_m^m$ ), é possível expressar  $R_\mu^\mu$  e  $R_m^m$ , respectivamente, por

$$\begin{aligned} R_\mu^\mu = & \frac{8\pi}{\phi} \frac{1}{[(D-1) + (D-2)\omega]} \left( [(D-p-2) + (D-p-3)\omega] T_\mu^\mu - (p+1)(1+\omega) T_m^m \right) \\ & + \frac{\omega W^{-2}}{\phi^2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + \frac{W^{-2}}{\phi} \nabla_\mu \nabla^\mu \phi \end{aligned} \quad (5.31)$$

e

$$\begin{aligned} R_m^m = & \frac{8\pi}{\phi} \frac{1}{[(D-1) + (D-2)\omega]} \left( [\omega(p-1) + (p+1)] T_m^m + [-(D-p-2) - (D-p-1)\omega] T_\mu^\mu \right) \\ & + \frac{\omega}{\phi^2} \nabla^m \phi \nabla_m \phi - \frac{1}{\phi} W^{-2} \nabla_\mu \nabla^\mu \phi. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Substituindo as equações (5.31) e (5.32) em (5.13) tem-se o análogo de (5.17) para o caso em questão

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (W^\alpha \nabla W) = & \frac{W^{\alpha+1}}{p(p+1)} \left\{ \alpha W^{-2} \bar{R} + (p-\alpha) \tilde{R} + \frac{8\pi}{\phi} \frac{1}{[(D-1) + (D-2)\omega]} \right. \\ & \times (T_\mu^\mu [-\alpha(D-p-2) - \alpha(D-p-3)\omega + (p-\alpha)(D-p-2) \\ & + (p-\alpha)(D-p-1)\omega] + T_m^m [\alpha(p+1) + \alpha(p+1)\omega] \\ & - (p-\alpha)(p-1)\omega - (p-\alpha)(p+1)] \\ & \left. - \frac{\omega}{\phi^2} [\alpha W^{-2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + (p-\alpha) \nabla^m \phi \nabla_m \phi] - \frac{2\alpha-p}{\phi} W^{-2} \nabla^\mu \nabla_\mu \phi \right\}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Agora, inserindo os traços parciais do tensor energia-momento fornecidos pelas expressões (5.3) e (5.4) e integrando sobre o espaço interno, temos

$$\oint W^{\alpha+1} \left\{ \alpha W^{-2} \bar{R} + (p - \alpha) \tilde{R} + \frac{8\pi}{\phi} \frac{1}{[(D-1) + (D-2)\omega]} \left( -\frac{1}{2} W^{-2} \nabla^\mu \Phi \nabla_\mu \Phi \right. \right. \\ \times [A(p-1) + B(D-p-1)] - \frac{1}{2} \nabla^a \Phi \nabla_a \Phi [A(p+1) + B(D-p-3)] \\ \left. \left. - V(\Phi) [A(p+1) + B(D-p-1)] \right) \right. \\ \left. - \frac{\omega}{\phi^2} [\alpha W^{-2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi + (p - \alpha) \nabla^m \phi \nabla_m \phi] - \frac{2\alpha - p}{\phi} W^{-2} \nabla^\mu \nabla_\mu \phi \right\} = 0 \quad (5.34)$$

onde

$$\begin{aligned} A &\equiv (D - p - 2)(p - 2\alpha) - \alpha(D - p - 3)\omega + (p - \alpha)(D - p - 1)\omega, \\ B &\equiv (p + 1)(\omega + 1)(2\alpha - p), \end{aligned} \quad (5.35)$$

são parâmetros constantes. Impondo um caso padrão  $D = 5$  e  $p = 3$ , encontramos

$$\oint W^{\alpha+1} \left\{ -\frac{8\pi}{\phi} \frac{1}{4 + 3\omega} \left( \frac{1}{2} \Phi' \cdot \Phi' [12(1 + \omega) - 8\alpha - 6\omega(\alpha - 1)] + V(\Phi) [12(-1 + \omega) \right. \right. \\ \left. \left. + 8\alpha + 6\omega(\alpha - 1)] \right) - \frac{\omega}{\phi^2} (3 - \alpha) \phi' \cdot \phi' \right\} = 0. \quad (5.36)$$

Existem duas escolhas importantes para o parâmetro  $\alpha$ . Note que, para  $\alpha = -1$ , nós temos

$$\frac{(5 + 6\omega)}{4 + 3\omega} \oint \frac{1}{\phi} \Phi' \cdot \Phi' = \frac{10}{4 + 3\omega} \oint \frac{1}{\phi} V(\Phi) + \frac{\omega}{4\pi} \oint \frac{1}{\phi^2} \phi' \cdot \phi', \quad (5.37)$$

A partir da expressão (5.1) dada na Seção 2, notavelmente, encontramos uma relaxação do teorema no-go na expressão (5.37). Em teorias  $f(R)$ -métrica e relatividade geral, quando submetidas à escolha de  $\alpha = -1$  nas condições de consistência, o potencial do campo escalar é sempre suprimido, no entanto, aqui no presente caso, o potencial do campo escalar se manifesta com tal escolha feita para o parâmetro  $\alpha$ . O resultado que encontramos traz algo novo no cenário de mundo branas quando consideramos a teoria de Brans-Dicke. Dentre inúmeros modelos de branas mundo encontrados na literatura, sabemos que a principal dificuldade é obter soluções através das equações de campo quando acoplados campos escalares, vetoriais, etc. Por exemplo, em um contexto cosmológico, onde uma função *warp factor* possui uma dependência temporal, as equações tornam-se ainda mais

extensas em seu número de variáveis. Um modelo de branas mundo suaves, o qual implementa a teoria de Brans-Dicke com uma métrica contendo a parte de FLRW poder-se-ia amenizar tal dificuldade através da equação (5.37). Note que a expressão (5.37) restringe a faixa de potenciais a serem escolhidos. O potencial escalar de Brans-Dicke  $\phi$ , também está sujeito a tal restrição.

Perceba que, quando  $\omega \rightarrow \infty$  ( $\phi \rightarrow \text{constante}$ ) na expressão (5.37), recupera-se o resultado do modelo de Randall-Sundrum quando é adotada a Relatividade Geral apresentado na referência [7].

Também podemos notar que, quando é posta a escolha  $\alpha = 3$ , o potencial ainda se manifesta, mas sem a contribuição do termo  $\phi' \cdot \phi'$ , deste modo,

$$\oint \frac{W^4}{\phi} \Phi' \cdot \Phi' = (4\omega + 2) \oint V(\Phi). \quad (5.38)$$

## 5.4 Formalismo $f(\mathcal{R})$ -Einstein-Palatini em dimensões arbitrárias

No formalismo de Palatini, as equações de campo são obtidas a partir da variação da ação de Einstein-Hilbert com relação a métrica e a conexão, mas levando-se em conta a independência destes objetos. Lembramos que agora o tensor de Ricci e o tensor de Riemann são objetos construídos a partir de uma conexão afim geral, porém, sem torção

A ação total em teorias de gravidade no formalismo de Palatini é dada por

$$S_{\text{Palatini}} = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D x \sqrt{-g} f(\mathcal{R}) + \int d^D x \mathcal{L}_M(g_{AB}, \psi_M). \quad (5.39)$$

Como já é sabido, a definição  $T_{AB} \equiv 2/\sqrt{-g} \delta S_M / \delta g^{AB}$ , quando implementada em conjunção com o princípio de mínima ação para (5.39), faz com que as equações de campo no formalismo de Palatini em gravidade  $f(\mathcal{R})$ , tornem-se

$$f'(\mathcal{R}) \mathcal{R}_{AB} - \frac{1}{2} f(\mathcal{R}) g_{AB} = 8\pi G_D T_{AB}, \quad (5.40)$$

$$-\bar{\nabla}_C (\sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) g^{AB}) + \bar{\nabla}_D (\sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) g^{D(A} \delta^{B)}) = 0. \quad (5.41)$$

Analogamente ao formalismo métrico, temos que, se  $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ , o formalismo de Palatini reestabelece as equações da relatividade geral.

Reescrevendo a equação (5.41), temos

$$-\bar{\nabla}_C(\sqrt{-g}f'(\mathcal{R})g^{AB}) + \frac{1}{2} \left[ \bar{\nabla}_D(\sqrt{-g}f'(\mathcal{R})g^{DA})\delta_C^B + \bar{\nabla}_D(\sqrt{-g}f'(\mathcal{R})g^{DB})\delta_C^A \right] = 0 \quad (5.42)$$

e contraindo os índices  $C$  e  $B$  da equação acima temos simplesmente

$$\bar{\nabla}_C(\sqrt{-g}f'(\mathcal{R})g^{AB}) = 0. \quad (5.43)$$

Assim, definindo uma métrica conforme

$$h_{AB} \equiv f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} g_{AB}, \quad h^{AB} \equiv f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{2-D}} g^{AB}, \quad (5.44)$$

onde

$$g_{AB} = \frac{h_{AB}}{f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}} \rightarrow g = \frac{h}{f'(\mathcal{R})^{\frac{2D}{D-2}}} \quad \text{e} \quad g^{AB} = \frac{h^{AB}}{f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{2-D}}}, \quad (5.45)$$

e, substituindo (5.45) em (5.43), chega-se a

$$\bar{\nabla}_C \left( \sqrt{-h} h^{AB} \right) = 0. \quad (5.46)$$

que é a equação da conexão escrita formalmente. Deste modo, a conexão independente torna-se-á expressa como

$$\bar{\Gamma}_{AB}{}^C = \frac{1}{2} h^{CD} (\partial_A h_{BD} + \partial_B h_{AD} - \partial_D h_{AB}). \quad (5.47)$$

Escrevendo a expressão (5.47) em termos de  $g_{AB}$  tem-se

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{AB}{}^C &= \frac{1}{2} \frac{1}{f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}} g^{CD} \left\{ \partial_A (f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} g_{BD}) + \partial_B (f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} g_{AD}) \right. \\ &\quad \left. - \partial_D (f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} g_{AB}) \right\}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

De onde finalmente, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{AB}{}^C &= \{_{AB}^C\} + \frac{1}{2f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}} \left\{ \delta_B^C \partial_A f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} + \delta_A^C \partial_B f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \right. \\ &\quad \left. - g_{AB} g^{CD} \partial_D f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \right\}, \end{aligned} \quad (5.49)$$

onde  $\{_{AB}^C\}$  são os símbolos de Christoffel. Chamando o segundo termo da expressão (5.49) de  $\Delta_{AB}{}^C$  e após algumas manipulações algébricas, chegamos a

$$\bar{\Gamma}_{AB}{}^C = \{_{AB}^C\} + \frac{1}{2f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}} \Delta_{AB}{}^C. \quad (5.50)$$

O tensor de Ricci generalizado é dado por

$$\mathcal{R}_{AB} = \partial_C \bar{\Gamma}_{AB}^C - \partial_B \bar{\Gamma}_{AC}^C + \bar{\Gamma}_{CE}^C \bar{\Gamma}_{AB}^E - \bar{\Gamma}_{BE}^C \bar{\Gamma}_{AC}^E. \quad (5.51)$$

Deste modo, o tensor de Ricci generalizado descrito explicitamente sob uma transformação conforme, isto é, via relações (5.44) e (5.51), é dado por

$$\mathcal{R}_{AB} = R_{AB} + \frac{[D-1]}{2} \frac{\left(\nabla_A f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}\right) \left(\nabla_B f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}\right)}{f'(\mathcal{R})^{\frac{4}{D-2}}} - \frac{1}{f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}} \left(\nabla_A \nabla_B + \frac{1}{2} g_{AB} \square\right) f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}. \quad (5.52)$$

Agora, tomando o traço da expressão acima, obtém-se

$$\mathcal{R} = R + \frac{[D-1]}{2} \frac{1}{f'(\mathcal{R})^{\frac{4}{D-2}}} \left(\nabla_A f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}\right) \left(\nabla^A f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}\right) - \frac{1}{f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}} \left(\frac{D}{2} + 1\right) \square f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}. \quad (5.53)$$

No formalismo de Palatini, as equações de campo são dadas por

$$\mathcal{R}_{AB} - \frac{f(\mathcal{R})}{2f'(\mathcal{R})} g_{AB} = \frac{8\pi G_D T_{AB}}{f'(\mathcal{R})}. \quad (5.54)$$

Inserindo a equação (5.52) na equação (5.54) e, adicionando em ambos os lados o termo  $-g_{AB}R/2$ , obtemos

$$\begin{aligned} R_{AB} - \frac{R}{2} g_{AB} &= \frac{8\pi G_D T_{AB}}{f'(\mathcal{R})} - \frac{f}{2f'(\mathcal{R})} g_{AB} - \frac{[D-1]}{2} \frac{\left(\nabla_A f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}\right) \left(\nabla_B f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}\right)}{f'(\mathcal{R})^{\frac{4}{D-2}}} + \\ &\quad \frac{1}{f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}} \left[ \left(\nabla_A \nabla_B + \frac{1}{2} g_{AB} \square\right) f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \right] - \frac{g_{AB}}{2} \left[ \mathcal{R} - \frac{[D-1]}{2} \frac{1}{f'(\mathcal{R})^{\frac{4}{D-2}}} \right. \\ &\quad \times \left. \left(\nabla_C f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}\right) \left(\nabla^C f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}\right) + \frac{1}{f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}} \left(\frac{D}{2} + 1\right) \square f'(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \right]. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Após algumas manipulações na equação acima, finalmente encontramos as equações de campo no formalismo  $f(\mathcal{R})$ -Einstein-Palatini em dimensões arbitrárias

$$\begin{aligned} R_{AB} - \frac{1}{2} R g_{AB} &= \frac{8\pi G_D T_{AB}}{F(\mathcal{R})} - \frac{g_{AB}}{2} \left( f'(\mathcal{R}) - \frac{f(\mathcal{R})}{F(\mathcal{R})} \right) + \frac{1}{F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}} (\nabla_A \nabla_B - g_{AB} \square) F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \\ &\quad - \frac{[D-1]}{2F(\mathcal{R})^{\frac{4}{D-2}}} \left[ \left(\nabla_A F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}\right) \left(\nabla_B F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}\right) - \frac{g_{AB}}{2} \nabla_C F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \nabla^C F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \right], \end{aligned} \quad (5.56)$$

onde  $F(\mathcal{R}) = df(\mathcal{R})/d\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}$  é o escalar de Ricci construído a partir de  $\mathcal{R}_{AB}$ .

### 5.4.1 Regras de soma para mundo branas no formalismo $f(\mathcal{R})$ -Einstein-Palatini

Tomando o traço da equação (5.56), podemos ver que o escalar Ricci é dado por

$$R = \frac{2}{(2-D)} \left\{ \frac{8\pi G_D}{F(\mathcal{R})} T - \frac{D}{2} \left( \mathcal{R} - \frac{f(\mathcal{R})}{F(\mathcal{R})} \right) - (D-1) \frac{1}{F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}} \square F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \right. \\ \left. - \frac{[D-1]}{2F(\mathcal{R})^{\frac{4}{D-2}}} \left[ \left( \nabla_A F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \right) \left( \nabla^A F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \right) - \frac{D}{2} \nabla_C F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \nabla^C F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \right] \right\}. \quad (5.57)$$

Inserindo (5.57) em (5.56), nós obtemos

$$R_{AB} = \frac{1}{F(\mathcal{R})} \left[ 8\pi G_D \left( T_{AB} - \frac{g_{AB}}{(D-2)} T \right) \right] + \frac{\nabla_A \nabla_B F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}}{F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}} + \frac{g_{AB}}{(D-2)} \left\{ \left( \mathcal{R} - \frac{f(\mathcal{R})}{F(\mathcal{R})} \right) \right. \\ \left. + \frac{\square F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}}{F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}} - \frac{\nabla_C F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \nabla^C F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}}{2F(\mathcal{R})^{\frac{4}{D-2}}} \right\} - \frac{(D-1)(D-3)}{2(D-2)F(\mathcal{R})^{\frac{4}{D-2}}} \left( \nabla_A F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \right) \\ \times \left( \nabla_B F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \right) \quad (5.58)$$

Tomando o traço parcial da equação (5.58) com relação ao espaço-tempo não compacto e com relação ao espaço compacto, encontramos os respectivos escalares de Ricci,

$$R^\mu_\mu = \frac{1}{(D-2)F(\mathcal{R})} \left[ 8\pi G_D \left( (D-p-3)T^\mu_\mu - (p+1)T^a_a \right) \right] + \frac{(D+p-1)}{(D-2)F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}} \\ (W^{-2} \nabla_\mu \nabla^\mu F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}) + \frac{(p+1)}{(D-2)} \left[ \left( \mathcal{R} - \frac{f(\mathcal{R})}{F(\mathcal{R})} \right) + \frac{\nabla_a \nabla^a F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}}{F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}} \right] \\ - \frac{1}{2F(\mathcal{R})^{\frac{4}{D-2}}} \left( (W^{-2} \nabla_\lambda F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \nabla^\lambda F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} + \nabla_c F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \nabla^c F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}) \right) \\ - \frac{(D-1)(D-3)}{2(D-2)F(\mathcal{R})^{\frac{4}{D-2}}} W^{-2} \left( \nabla_\mu F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \right) \left( \nabla^\mu F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \right) \quad (5.59)$$

e

$$R^a_a = \frac{1}{(D-2)F(\mathcal{R})} \left[ 8\pi G_D \left( (p-1)T^a_a - (D-p-1)T^\mu_\mu \right) \right] + \frac{(2D-p-3)}{F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}(D-2)} \\ \times (W^{-2} \nabla_\mu \nabla^\mu F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}) + \frac{(D-p-1)}{(D-2)} \left[ \left( \mathcal{R} - \frac{f(\mathcal{R})}{F(\mathcal{R})} \right) + \frac{(\nabla_a \nabla^a F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}})}{F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}} \right] \\ - \frac{1}{2F(\mathcal{R})^{\frac{4}{D-2}}} (W^{-2} \nabla_\lambda F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \nabla^\lambda F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} + \nabla_c F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \nabla^c F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}) \\ - \frac{(D-1)(D-3)}{2(D-2)F(\mathcal{R})^{\frac{4}{D-2}}} \left( \nabla_a F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \right) \left( \nabla^a F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \right). \quad (5.60)$$



Agora, substituindo as equações (5.59) e (5.60) na equação (5.13), chega-se a

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (W^\alpha \nabla W) = & \frac{W^{\alpha+1}}{p(p+1)(D-2)F(\mathcal{R})} \left\{ 8\pi G_D \left( (p-\alpha)(D-p-1) - \alpha(D-p-3) \right) T_\mu^\mu + \right. \\
& + 8\pi G_D \left( \alpha(p+1) - (p-\alpha)(p-1) \right) T_a^a + (D-2) \left( \alpha W^{-2} \bar{R} \right. \\
& \left. \left. + (p-\alpha) \tilde{R} \right) F(\mathcal{R}) \right\} - \frac{W^{\alpha+1}}{p(p+1)(D-2)} \left\{ \left[ \frac{W^{-2} \nabla_\mu \nabla^\mu F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}}{F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}} \right] \right. \\
& \times [\alpha(D+p-1) + (p-\alpha)(2D-p-3)] - [\alpha(p+1) + (p-\alpha)(D-p-1)] \\
& \times \left( \mathcal{R} - \frac{f(\mathcal{R})}{F(\mathcal{R})} \right) + \frac{(\nabla_a \nabla^a F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}})}{F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}} - \frac{1}{F(\mathcal{R})^{\frac{4}{D-2}}} (W^{-2} \nabla_\lambda F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \nabla^\lambda F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \\
& + \nabla_c F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \nabla^c F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}) + \left[ \frac{(D-1)(D-3)}{2F(\mathcal{R})^{\frac{4}{D-2}}} \right] \alpha (W^{-2} \nabla_\lambda F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \nabla^\lambda F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}) \\
& \left. \left. + (p-\alpha) \left( \nabla_a F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \right) \left( \nabla^a F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \right) \right\}. \tag{5.61}
\end{aligned}$$

Novamente, sendo o espaço interno compacto, obrigatoriamente temos que  $\oint \nabla \cdot (W^\alpha \nabla W) = 0$  e deste modo

$$\begin{aligned}
\alpha \quad (D-2) \bar{R} \oint W^{\alpha-1} + (p-\alpha)(D-2) \oint W^{\alpha+1} \tilde{R} = & 8\pi G_D \oint \frac{W^{\alpha+1}}{F(\mathcal{R})} \left\{ \left( \alpha(D-p-3) - \right. \right. \\
& - (p-\alpha)(D-p-1) \Big) T_\mu^\mu + \left( (p-\alpha)(p-1) - \alpha(p+1) \right) T_a^a \Big\} \\
& + [\alpha(D+p-1) + (p-\alpha)(2D-p-3)] \oint \frac{W^{\alpha-1} \nabla_\mu \nabla^\mu F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}}{F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}} \\
& + \left( [\alpha(p+1) + (p-\alpha)(D-p-1)] \right) \oint W^{\alpha+1} \left[ \left( \mathcal{R} - \frac{f(\mathcal{R})}{F(\mathcal{R})} \right) + \frac{(\nabla_a \nabla^a F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}})}{F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}}} \right] \\
& \left[ -\frac{1}{2} \oint \frac{W^{\alpha-1}}{F(\mathcal{R})^{\frac{4}{D-2}}} \nabla_\mu F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \nabla^\mu F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} - \frac{1}{2} \oint \frac{W^{\alpha-1}}{F(\mathcal{R})^{\frac{4}{D-2}}} \nabla_a F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \nabla^a F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \right] \\
& + \left[ \frac{(D-1)(D-3)}{2} \right] \left[ \alpha \oint \frac{W^{\alpha-1}}{F(\mathcal{R})^{\frac{4}{D-2}}} \nabla_\mu F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \nabla^\mu F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \right. \\
& \left. + (p-\alpha) \oint \frac{W^{\alpha+1}}{F(\mathcal{R})^{\frac{4}{D-2}}} \left( \nabla_a F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \right) \left( \nabla^a F(\mathcal{R})^{\frac{2}{D-2}} \right) \right]. \tag{5.62}
\end{aligned}$$

Para extrairmos informação relevante com respeito a cenários envolvendo branas quadridimensionais, recorreremos novamente à  $D = 5$  e  $p = 3$ . Adotando o referido *bulk* com uma única dimensão extra ( $\tilde{R} = 0$ ) e, considerando um vínculo físico para o nosso

Universo,  $\bar{R}$  é aproximadamente nulo em grandes escalas. Após essas considerações e, utilizando as expressões (5.3) e (5.4) para as fontes, chegamos à seguinte condição geral

$$\begin{aligned}
0 = & 8\pi G_5 \oint \frac{W^{\alpha+1}}{F(\mathcal{R})} \left\{ (3-\alpha)\Phi' \cdot \Phi' + 2(\alpha+1)V(\Phi) \right\} \\
& + (\alpha+1) \left\{ 4 \oint \frac{W^{\alpha-1} \nabla_\mu \nabla^\mu F(\mathcal{R})^{2/3}}{F(\mathcal{R})^{2/3}} + \oint W^{\alpha+1} \left[ \left( \mathcal{R} - \frac{f(\mathcal{R})}{F(\mathcal{R})} \right) + \frac{(\nabla_a \nabla^a F(\mathcal{R})^{2/3})}{F(\mathcal{R})^{2/3}} \right] \right. \\
& \left. - \frac{1}{6} \oint \frac{W^{\alpha-1}}{F(\mathcal{R})^{4/3}} \nabla_\mu F(\mathcal{R})^{2/3} \nabla^\mu F(\mathcal{R})^{2/3} + \frac{1}{6} \oint \frac{W^{\alpha-1}}{F(\mathcal{R})^{4/3}} \nabla_a F(\mathcal{R})^{2/3} \nabla^a F(\mathcal{R})^{2/3} \right\} \\
& + \frac{4}{3} \alpha \oint \frac{W^{\alpha-1}}{F(\mathcal{R})^{4/3}} \nabla_\mu F(\mathcal{R})^{2/3} \nabla^\mu F(\mathcal{R})^{2/3} + \frac{4}{3} (3-\alpha) \oint \frac{W^{\alpha+1}}{F(\mathcal{R})^{4/3}} \nabla_a F(\mathcal{R})^{2/3} \nabla^a F(\mathcal{R})^{2/3}.
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Uma escolha interessante para investigar a possibilidade de branas suaves é fazendo  $\alpha = -1$ , isso traz como consequência a eliminação do *warp factor* na expressão acima, deste modo, temos

$$\oint \frac{\Phi' \cdot \Phi'}{F(\mathcal{R})} + \frac{1}{6\pi G_5} \oint \frac{\nabla_a F(\mathcal{R})^{2/3} \nabla^a F(\mathcal{R})^{2/3}}{F(\mathcal{R})^{4/3}} = 0, \tag{5.64}$$

onde consideramos  $\nabla_\mu F(\mathcal{R})^{2/3} = 0$ . Reescrevendo a expressão (5.64) de uma maneira mais apropriada, obtemos

$$\oint \frac{\Phi' \cdot \Phi'}{F(\mathcal{R})} + \frac{1}{27\pi G_5} \oint (\ln |F(\mathcal{R})|)' \cdot (\ln |F(\mathcal{R})|)' = 0. \tag{5.65}$$

Note que, se  $F(\mathcal{R})$  é positiva, torna-se impossível encontrar uma generalização para mundo branas suaves, no entanto, se  $F(\mathcal{R}) < 0$ , é possível uma generalização suave do cenário de Randall-Sundrum com uma dimensão extra compacta no contexto do formalismo  $f(\mathcal{R})$ -Einstein-Palatini.

# Capítulo 6

## Cosmologia de Branas

### 6.1 Introdução

Neste capítulo faremos uma descrição da contribuição original de nosso trabalho no contexto cosmológico. Vários autores tentaram construir modelos compatíveis com a cosmologia Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). De fato, a modelagem de cenários braneworld realistas do ponto de vista da física em larga escala deve incluir, pelo menos em algum nível, a geometria de fundo do modelo padrão cosmológico. As tentativas apresentadas para este programa podem ser divididas em duas categorias: uma que trata de branas infinitamente finas, nas quais os efeitos extra dimensionais entram como correções das equações de Einstein através da presença do tensor de Weyl e contribuições quadráticas para o tensor energia-momento, e outra, cuja modelagem chega às branas espessas descritas por um ou mais campos escalares no bulk. Na primeira abordagem, as correções das equações gravitacionais vêm a partir das equações de Gauss e Codazzi via formalismo Shiromizu-Maeda-Sasaki, como descrevemos no Capítulo 4, e, potencialmente, todos os aspectos relevantes da cosmologia de quatro dimensões são revisitados. Acontece, no entanto, que uma brana infinitamente fina parece ser apenas uma aproximação do caso mais realista, na melhor das hipóteses.

Infelizmente, no contexto de brana espessa, não é possível, aplicar o formalismo de Gauss-Codazzi. A razão é que, as condições de junção de Israel-Darmois em um contexto de brana espessa não estão bem estabelecidas. As condições de junção estão no centro do procedimento de projeção e sua ausência faz com que todo o programa se desintegre. Nesse sentido, a investigação de uma configuração de mundos brana de cinco

dimensões, cuja parte de quatro dimensões descreve um universo é, de fato, relevante. A principal característica em mundo branas reside na manipulação do warp factor, o qual é implementado nas soluções. Como um procedimento geral, usaremos uma função *warp factor* separável. Parte das soluções obtidas através de um dado Ansatz nas obras de [56, 57] são aqui recuperados como casos particulares.

## 6.2 Soluções Cosmológicas de Branas não singulares

Vamos propor uma métrica no bulk 5D, dada por

$$ds^2 = a^2(t, y) \left\{ -dt^2 + u^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\chi^2) \right] \right\} + b^2(t, y) dy^2, \quad (6.1)$$

com a métrica de fundo 4D de Friedmann-Robertson-Walker-Lemaître, onde  $k = 0, \pm 1$  denota a curvatura espacial do espaço-tempo 4D homogêneo e isotrópico para o espaço de Minkowski, de Sitter e anti-de Sitter respectivamente. A assinatura métrica é dada por  $(- + + + +)$ . A função  $a(t, y)$  é um *warp factor* com dependência do tempo  $t$  e da dimensão extra  $y^1$ , enquanto que  $u(t)$  é o fator de escala usual para um universo homogêneo e isotrópico. A função  $b(t, y)$  nos mostra a dinâmica da dimensão extra em diferentes tempos e em diferentes posições no *bulk*.

A ação 5D com um campo escalar minimamente acoplado ao setor gravitacional tem a seguinte forma

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \left[ 2M^3 R - \frac{1}{2} g^{MN} \nabla_M \phi \nabla_N \phi - V(\phi) \right], \quad (6.2)$$

onde  $M$  representa a massa de Planck da teoria fundamental 5D e  $R$  é o escalar 5D de Ricci. O campo escalar  $\phi$  depende do tempo e da dimensão extra  $y$ .

Seja a equação de Einstein oriunda da ação (6.2)

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = \frac{1}{4M^3} T_{MN}, \quad (6.3)$$

e o tensor energia-momento  $T_{MN}$  para o campo escalar  $\phi(t, y)$

$$T_{MN}^\phi = \nabla_M \phi \nabla_N \phi - g_{MN} \left( \frac{1}{2} g^{AB} \nabla_A \phi \nabla_B \phi + V(\phi) \right). \quad (6.4)$$

---

<sup>1</sup>Os índices romanos se referem a objetos 5D, ou seja,  $M, N, \dots = 0, 1, 2, 3, 5$  e os índices gregos representam objetos 4D, ou seja,  $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ , ao passo que os índices romanos em minúsculas  $i, j, \dots = 1, 2, 3$  representam as coordenadas espaciais em 3D.

As equações de campo, em componentes, são

$$3 \left[ \frac{1}{a^2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{1}{b^2} \left( \frac{a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2} \right) + \frac{1}{b^2} \frac{a' b'}{a b} + \frac{1}{a^2} \left( 2 \frac{\dot{a} \dot{u}}{a u} + \frac{\dot{a} \dot{b}}{a b} + \frac{\dot{u}^2}{u^2} + \frac{\dot{b} \dot{u}}{b u} + \frac{k}{u^2} \right) \right] \\ = \frac{1}{2b^2} \phi'^2 + \frac{1}{2a^2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (6.5)$$

$$\frac{1}{a^2} \left[ 2 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a} \dot{b}}{a b} + 4 \frac{\dot{a} \dot{u}}{a u} + 2 \frac{\dot{b} \dot{u}}{b u} + \frac{\ddot{b}}{b} + 2 \frac{\ddot{u}}{u} + \frac{\dot{u}^2}{u^2} + \frac{k}{u^2} \right] \\ - \frac{3}{b^2} \left[ \frac{a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2} - \frac{a' b'}{a b} \right] = \frac{1}{2b^2} \phi'^2 - \frac{1}{2a^2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (6.6)$$

$$\left[ \frac{a' \dot{a}}{a a} + \frac{a' \dot{b}}{a b} - \frac{\dot{a}'}{a} \right] = \frac{1}{3} \dot{\phi} \phi' \quad (6.7)$$

$$3 \left[ 2 \frac{a'^2}{a^2} \frac{1}{b^2} - \frac{\ddot{a}}{a} \frac{1}{a^2} - 3 \frac{\dot{a} \dot{u}}{a u} \frac{1}{a^2} - \frac{\dot{u}^2}{u^2} \frac{1}{a^2} - \frac{\ddot{u}}{u} \frac{1}{a^2} - \frac{k}{a^2 u^2} \right] \\ = \frac{1}{2a^2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2b^2} \phi'^2 - V(\phi) \quad (6.8)$$

Subtraindo a equação (6.6) de (6.5) temos

$$\dot{\phi}^2 = 2 \left[ 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a} \dot{b}}{a b} + \frac{\dot{a} \dot{u}}{a u} + \frac{1}{2} \frac{\dot{b} \dot{u}}{b u} - \frac{1}{2} \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\ddot{u}}{u} + \frac{\dot{u}^2}{u^2} + \frac{k}{u^2} \right]. \quad (6.9)$$

Por outro lado, somando-se as equações (6.5) e (6.6) obtemos

$$\frac{1}{2b^2} \phi'^2 + V(\phi) = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} + 5 \frac{\dot{a} \dot{u}}{a u} + 2 \frac{\dot{a} \dot{b}}{a b} + 2 \frac{\dot{u}^2}{u^2} \right. \\ \left. + \frac{5}{2} \frac{\dot{b} \dot{u}}{b u} + \frac{2k}{u^2} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{u}}{u} \right\} - \frac{3}{b^2} \left( \frac{a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2} \right) + \frac{3}{b^2} \frac{a' b'}{a b}. \quad (6.10)$$

Ainda, usando (6.10) na equação (6.8) temos

$$\frac{1}{2b^2} \phi'^2 - V(\phi) = 6 \frac{a'^2}{a^2} \frac{1}{b^2} - 2 \left( \frac{\ddot{a}}{a} \frac{1}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{1}{a^2} \right) - 10 \frac{\dot{a} \dot{u}}{a u} \frac{1}{a^2} \\ - 4 \frac{\dot{u}^2}{u^2} \frac{1}{a^2} - 2 \frac{\ddot{u}}{u} \frac{1}{a^2} - \frac{4k}{a^2 u^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\dot{a} \dot{b}}{a b} - \frac{1}{2a^2} \frac{\dot{b} \dot{u}}{b u} + \frac{1}{2a^2} \frac{\ddot{b}}{b}. \quad (6.11)$$

Somando as equações (6.10) e (6.11) chega-se a

$$\begin{aligned} \phi'^2 = b^2 & \left[ \frac{1}{a^2} \left( -\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2k}{u^2} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + 2\frac{\dot{b}\dot{u}}{bu} - 5\frac{\dot{a}\dot{u}}{au} - 2\frac{\dot{u}^2}{u^2} - \frac{\ddot{u}}{u} + \frac{\ddot{b}}{b} \right) \right] \\ & - 3 \left( -\frac{a'^2}{a^2} + \frac{a''}{a} + \frac{a'b'}{ab} \right) \end{aligned} \quad (6.12)$$

enquanto subtraindo a eq. (6.11) de (6.10) somos levados a

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}V(\phi) = & \frac{1}{a^2} \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2k}{u^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 5\frac{\dot{a}\dot{u}}{au} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + 2\frac{\dot{u}^2}{u^2} + \frac{\ddot{u}}{u} + \frac{\dot{b}\dot{u}}{bu} \right) \\ & - \frac{3}{b^2} \frac{a'^2}{a^2} - \frac{1}{b^2} \frac{a''}{a} + \frac{1}{b^2} \frac{a'b'}{ab}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Dada a densidade de lagrangiana do campo escalar

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{MN} \nabla_M \phi \nabla_N \phi - V(\phi) \right], \quad (6.14)$$

e utilizando a equação de Euler–Lagrange

$$\partial_C \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_C \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (6.15)$$

obtemos

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_C [\sqrt{-g} g^{CD} \partial_D \phi(t, y)] - \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0. \quad (6.16)$$

Efetuando a soma indicial na equação acima, obtemos

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}} \left\{ \partial_0 [\sqrt{-g} g^{00} \partial_0 \phi(t, y)] + \partial_5 [\sqrt{-g} g^{55} \partial_5 \phi(t, y)] \right\} - \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0$$

onde  $\sqrt{-g} = a^4(t, y)b(t, y)u^3(t)r^2 \sin \theta / \sqrt{(1 - kr^2)}$ . Finalmente, temos a equação de movimento do campo escalar:

$$\frac{1}{b^2} \phi'' - \frac{1}{a^2} \ddot{\phi} + \frac{4}{b^2} \frac{a'}{a} \phi' - \frac{2}{a^2} \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} - \frac{1}{a^2} \frac{\dot{b}}{b} \dot{\phi} - \frac{3}{a^2} \frac{\dot{u}}{u} \dot{\phi} - \frac{1}{b^2} \frac{b'}{b} \phi' - \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (6.17)$$

onde o ponto denota uma derivada com a relação a  $t$ , enquanto que a linha representa uma derivação com respeito a dimensão extra  $y$ .

### 6.2.1 Solução Temporal com $b(t, y) = 1$ e $\phi = \phi(y)$

Da equação (6.7) temos

$$\frac{a'}{a} \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{a}'}{a} = 0. \quad (6.18)$$

Assumiremos a função  $a(t, y)$  como separável, isto é  $a(y, t) \equiv \alpha(y)\beta(t)$ . Utilizando essa solução, podemos ver que a equação (6.18) torna-se uma identidade.

$$\left(\frac{\alpha'\beta}{\alpha\beta}\right) \left(\frac{\alpha\dot{\beta}}{\alpha\beta}\right) - \frac{\alpha'\dot{\beta}}{\alpha\beta} = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right) \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right) - \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right) \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right) = 0. \quad (6.19)$$

Assumindo as considerações acima, a equação (6.9) torna-se

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} = \left[ 2 \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2 - \left(\frac{\ddot{\beta}}{\beta}\right) + \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right) \left(\frac{\dot{u}}{u}\right) - \left(\frac{\ddot{u}}{u}\right) + \left(\frac{\dot{u}}{u}\right)^2 + \left(\frac{k}{u^2}\right) \right] \equiv 0, \quad (6.20)$$

enquanto que para a equação (6.12) tem-se

$$\begin{aligned} \phi'^2 &= \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \left[ - \left(\frac{\ddot{\beta}}{\beta}\right) - \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2 - 5 \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right) \left(\frac{\dot{u}}{u}\right) - 2 \left(\frac{\dot{u}}{u}\right)^2 - \left(\frac{\ddot{u}}{u}\right) - \left(\frac{2k}{u^2}\right) \right] \\ &- 3 \left[ \left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right) - \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 \right] = -\frac{\Delta}{\alpha^2} - 3 \left[ \left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right) - \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Ainda, para a equação (6.13) temos

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}V(\phi) &= \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \left[ \left(\frac{\ddot{\beta}}{\beta}\right) + \frac{2k}{u^2} + \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2 + 5 \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right) \left(\frac{\dot{u}}{u}\right) + 2 \left(\frac{\dot{u}}{u}\right)^2 + \left(\frac{\ddot{u}}{u}\right) \right] \\ &- 3 \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right) = \frac{\Sigma}{\alpha^2} - 3 \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\alpha''}{\alpha}\right). \end{aligned} \quad (6.22)$$

enquanto a equação de movimento para o campo escalar tem a seguinte forma

$$\phi'' + 4 \frac{a'}{a} \phi' - \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (6.23)$$

**Caso  $\Delta \equiv \Sigma \equiv 0$  e  $k = 0$ :**

Diante das equações (6.21) e (6.22) e, se  $\Delta \equiv \Sigma \equiv 0$ , temos o seguinte conjunto de equações para (6.20), (6.21) e (6.22)

$$\left(\frac{\ddot{\beta}}{\beta}\right) - 2\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2 - \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)\left(\frac{\dot{u}}{u}\right) + \left(\frac{\ddot{u}}{u}\right) - \left(\frac{\dot{u}}{u}\right)^2 - \left(\frac{k}{u^2}\right) = 0, \quad (6.24)$$

$$\left(\frac{\ddot{\beta}}{\beta}\right) + \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2 + 5\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)\left(\frac{\dot{u}}{u}\right) + 2\left(\frac{\dot{u}}{u}\right)^2 + \left(\frac{\ddot{u}}{u}\right) + \left(\frac{2k}{u^2}\right) = -\Delta\beta^2 = 0, \quad (6.25)$$

$$\left(\frac{\ddot{\beta}}{\beta}\right) + \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2 + 5\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)\left(\frac{\dot{u}}{u}\right) + 2\left(\frac{\dot{u}}{u}\right)^2 + \left(\frac{\ddot{u}}{u}\right) + \left(\frac{2k}{u^2}\right) = \Sigma\beta^2 = 0. \quad (6.26)$$

Podemos observar que a equação (6.26) se torna redundante com a relação à equação (6.25). Somando e subtraindo as equações (6.24) e (6.25), tem-se respectivamente

$$2\left(\frac{\ddot{\beta}}{\beta}\right) - \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2 + 4\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)\left(\frac{\dot{u}}{u}\right) + 2\left(\frac{\ddot{u}}{u}\right) + \left(\frac{\dot{u}}{u}\right)^2 + \left(\frac{k}{u^2}\right) = 0 \quad (6.27)$$

e

$$\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2 + 2\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)\left(\frac{\dot{u}}{u}\right) + \left(\frac{\dot{u}}{u}\right)^2 + \left(\frac{k}{u^2}\right) = \left[\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right) + \left(\frac{\dot{u}}{u}\right)\right]^2 + \left(\frac{k}{u^2}\right) = 0. \quad (6.28)$$

A equação (6.27) juntamente com a equação (6.28) leva a

$$\left[\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right) + \left(\frac{\dot{u}}{u}\right)\right]^2 + \left(\frac{k}{u^2}\right) = 0 \quad (6.29)$$

e temos um conjunto de duas equações para resolver.

Primeiramente, iremos checar se das equações (6.27) e (6.29), emerge alguma identidade. Para isso, partindo da equação (6.29) temos

$$\frac{\dot{\beta}}{\beta} = -\left(\frac{\dot{u}}{u}\right) \pm \frac{\sqrt{-k}}{u}. \quad (6.30)$$

Derivando a expressão acima com relação ao tempo chega-se a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right) = \frac{\ddot{\beta}}{\beta} - \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2 = \left(\frac{\ddot{u}}{u}\right) + \left(\frac{\dot{u}}{u}\right)^2 \mp \frac{\sqrt{-k}}{u^2}\dot{u}. \quad (6.31)$$



Inserindo a expressão (6.30) para  $\dot{\beta}/\beta$  em (6.31) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{\beta}}{\beta} &= \left[ -\left(\frac{\dot{u}}{u}\right) \pm \frac{\sqrt{-k}}{u} \right]^2 - \frac{\ddot{u}}{u} + \left(\frac{\dot{u}}{u}\right)^2 \mp \frac{\sqrt{-k}}{u^2} \dot{u} \\ &= 2 \left(\frac{\dot{u}}{u}\right)^2 \mp \frac{3\sqrt{-k}}{u^2} \dot{u} - \frac{k}{u^2} - \left(\frac{\ddot{u}}{u}\right)\end{aligned}\quad (6.32)$$

e substituindo (6.32) em (6.27) ficamos com

$$\begin{aligned}2 \left(\frac{\dot{u}}{u}\right)^2 \mp \frac{3\sqrt{-k}}{u^2} \dot{u} - \frac{k}{u^2} - \left(\frac{\ddot{u}}{u}\right) + 2 \left[ -\left(\frac{\dot{u}}{u}\right) \pm \frac{\sqrt{-k}}{u} \right] \left(\frac{\dot{u}}{u}\right) \\ - \frac{1}{2} \left[ \mp 2\sqrt{-k} \frac{\dot{u}}{u^2} - \frac{k}{u^2} \right] + \left(\frac{\ddot{u}}{u}\right) + \frac{k}{2u^2} = 0\end{aligned}\quad (6.33)$$

que após uma simples manipulação, nos traz uma identidade

$$\mp \frac{3\sqrt{-k}}{u^2} \dot{u} \pm \frac{3\sqrt{-k}}{u^2} \dot{u} = 0. \quad (6.34)$$

Desse modo, a solução geral do conjunto das equações (6.27) e (6.29) para  $k = 0$  ao tratamento de (6.30), cuja solução é dada por

$$\beta(t) = \frac{C}{u(t)} \quad , \quad k = 0, \quad (6.35)$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária de integração. Considerando agora a equação (6.30) para o caso em que  $k \neq 0$  e  $u = 1$ , recuperamos o resultado obtido por na referência [57], cuja solução é

$$\beta(t) = \beta_0 e^{\pm \sqrt{-k}t}. \quad (6.36)$$

Por outro lado, para o caso em que  $k \neq 0$  e  $u \neq 1$ , e usando a redefinição abaixo na equação (6.30)

$$u(t) = f(t)\beta(t) \Rightarrow \dot{u}(t) = \dot{f}\beta + f\dot{\beta}, \quad (6.37)$$

$$\frac{\dot{u}}{u} = \frac{\dot{f}}{f} + \frac{\dot{\beta}}{\beta}, \quad (6.38)$$

chegamos a

$$\dot{\beta} + \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{f}}{f} \right) \beta \mp \frac{\sqrt{-k}}{2f} = 0, \quad (6.39)$$

com a seguinte solução

$$\beta(t) = \frac{C}{\sqrt{f(t)}} \pm \frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{f(t)}} \int_0^t \frac{dt'}{\sqrt{f(t')}} \quad , \quad k \neq 0. \quad (6.40)$$

**Caso  $\Delta = -\Sigma \neq 0$  para  $k = 0$ :**

Nesse caso as equações de campo podem ser escritas na forma

$$\left(\frac{\ddot{\beta}}{\beta}\right) - 2\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2 - \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)\left(\frac{\dot{u}}{u}\right) + \left(\frac{\ddot{u}}{u}\right) - \left(\frac{\dot{u}}{u}\right)^2 - \left(\frac{k}{u^2}\right) = 0, \quad (6.41)$$

$$\left(\frac{\ddot{\beta}}{\beta}\right) + \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2 + 5\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)\left(\frac{\dot{u}}{u}\right) + 2\left(\frac{\dot{u}}{u}\right)^2 + \left(\frac{\ddot{u}}{u}\right) + \left(\frac{2k}{u^2}\right) = -\Delta\beta^2, \quad (6.42)$$

$$\left(\frac{\ddot{\beta}}{\beta}\right) + \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2 + 5\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)\left(\frac{\dot{u}}{u}\right) + 2\left(\frac{\dot{u}}{u}\right)^2 + \left(\frac{\ddot{u}}{u}\right) + \left(\frac{2k}{u^2}\right) = \Sigma\beta^2, \quad (6.43)$$

o que implica  $\Delta = -\Sigma$ .

Subtraindo a equação (6.41) da equação (6.43) temos

$$3\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2 + 6\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)\left(\frac{\dot{u}}{u}\right) + 3\left(\frac{\dot{u}}{u}\right)^2 = \Sigma\beta^2, \quad (6.44)$$

a qual pode escrita como

$$\left[\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right) + \left(\frac{\dot{u}}{u}\right)\right]^2 = \frac{\Sigma}{3}\beta^2, \quad (6.45)$$

de onde

$$\frac{\dot{u}}{u} = \pm\beta\sqrt{\frac{\Sigma}{3}} - \frac{\dot{\beta}}{\beta}. \quad (6.46)$$

Derivando a expressão acima com relação ao tempo, temos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{u}}{u}\right) = \frac{\ddot{u}}{u} - \left(\frac{\dot{u}}{u}\right)^2 = \pm\dot{\beta}\sqrt{\frac{\Sigma}{3}} - \left[\frac{\ddot{\beta}}{\beta} - \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2\right], \quad (6.47)$$

deste modo,

$$\frac{\ddot{u}}{u} = \left(\frac{\dot{u}}{u}\right)^2 \pm \dot{\beta}\sqrt{\frac{\Sigma}{3}} - \frac{\ddot{\beta}}{\beta} + \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2, \quad (6.48)$$

e ainda substituindo a equação (6.46) na equação (6.48), vem

$$\frac{\ddot{u}}{u} = \left[\pm\beta\sqrt{\frac{\Sigma}{3}} - \frac{\dot{\beta}}{\beta}\right]^2 \pm \dot{\beta}\sqrt{\frac{\Sigma}{3}} - \frac{\ddot{\beta}}{\beta} + \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^2. \quad (6.49)$$

Inserindo as equações (6.46) e (6.49) em (6.41), (6.42) e (6.43), obtemos uma identidade para cada uma das equações. Portanto, resta-nos apenas uma equação para ser resolvida:

$$\left[ \left( \frac{\dot{\beta}}{\beta} \right) + \left( \frac{\dot{u}}{u} \right) \right]^2 = \frac{\Sigma}{3} \beta^2. \quad (6.50)$$

Fazendo

$$\beta(t) = 1/\sigma(t) \implies \dot{\beta} = -\frac{\dot{\sigma}}{\sigma^2} \text{ e } \frac{\dot{\beta}}{\beta} = -\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}, \quad (6.51)$$

temos

$$\dot{\sigma} - \frac{\dot{u}}{u} \sigma = \pm \sqrt{\frac{\Sigma}{3}}, \quad (6.52)$$

cujas soluções são dadas por

$$\sigma(t) = u(t) \left[ C_1 \pm \sqrt{\frac{\Sigma}{3}} \int_0^t \frac{dt'}{u(t')} \right]. \quad (6.53)$$

Como  $\sigma(t) = 1/\beta(t)$ , a solução para  $\beta(t)$  torna-se

$$\beta(t) = \left[ u(t) \left( C_1 \pm \sqrt{\frac{\Sigma}{3}} \int_0^t \frac{dt'}{u(t')} \right) \right]^{-1}, \quad k = 0. \quad (6.54)$$

**Caso  $\Delta = -\Sigma \neq 0$  para  $k \neq 0$ :**

Subtraindo a equação (6.41) da equação (6.43) temos

$$3 \left( \frac{\dot{\beta}}{\beta} \right)^2 + 6 \left( \frac{\dot{\beta}}{\beta} \right) \left( \frac{\dot{u}}{u} \right) + 3 \left( \frac{\dot{u}}{u} \right)^2 + \left( \frac{3k}{u^2} \right) = \Sigma \beta^2, \quad (6.55)$$

a qual pode ser escrita como

$$\left[ \left( \frac{\dot{\beta}}{\beta} \right) + \left( \frac{\dot{u}}{u} \right) \right]^2 + \frac{k}{u^2} = \frac{\Sigma}{3} \beta^2. \quad (6.56)$$

Deste modo, a equação acima, juntamente com

$$\left( \frac{\ddot{\beta}}{\beta} \right) + \left( \frac{\dot{\beta}}{\beta} \right)^2 + 5 \left( \frac{\dot{\beta}}{\beta} \right) \left( \frac{\dot{u}}{u} \right) + 2 \left( \frac{\dot{u}}{u} \right)^2 + \left( \frac{\ddot{u}}{u} \right) + \left( \frac{2k}{u^2} \right) = \Sigma \beta^2, \quad (6.57)$$

produz a seguinte solução

$$\beta(t) = -\frac{1}{u(t)} \sqrt{\frac{3}{\Sigma}} \cot \left[ C_1 \sqrt{3k} - \sqrt{k} \int_0^t \frac{dt'}{u(t')} \right] \sqrt{k + k \tan^2 \left[ C_1 \sqrt{3k} - \sqrt{k} \int_0^t \frac{dt'}{u(t')} \right]}. \quad (6.58)$$

É simples ver que

$$\beta(t) = -\frac{1}{u(t)} \sqrt{\frac{3}{\Sigma}} \cot \left[ C_1 \sqrt{3k} - \sqrt{k} \int_0^t \frac{dt'}{u(t')} \right] \sqrt{k \sec^2 \left[ C_1 \sqrt{3k} - \sqrt{k} \int_0^t \frac{dt'}{u(t')} \right]}, \quad (6.59)$$

logo

$$\beta(t) = -\frac{1}{u(t)} \sqrt{\frac{3k}{\Sigma}} \frac{1}{\sin \left( C_1 \sqrt{3k} - \sqrt{k} \int_0^t \frac{dt'}{u(t')} \right)}, \quad (6.60)$$

que após algumas simplificações, leva a

$$\beta(t) = -\frac{1}{u(t)} \sqrt{\frac{3k}{\Sigma}} \sec \left( \sqrt{k} \int_0^t \frac{dt'}{u(t')} \right), \quad (6.61)$$

onde utilizamos

$$\pm \sin x = \pm \cos(\pi/2 - x) \quad (6.62)$$

com  $x = -\sqrt{k} \int_0^t \frac{dt'}{u(t')}$  e  $C_1 \sqrt{3k} = \pi/2$ .

### 6.2.2 Solução Espacial com $b(t, y) = 1$ e $\phi = \phi(y)$

Seja agora para a parte espacial das equações (6.21), (6.22) e (6.23)

$$\phi'^2 = -\frac{\Delta}{\alpha^2} - 3 \left[ \left( \frac{\alpha''}{\alpha} \right) - \left( \frac{\alpha'}{\alpha} \right)^2 \right], \quad (6.63)$$

$$\frac{2}{3} V(\phi) = \frac{\Sigma}{\alpha^2} - 3 \left( \frac{\alpha'}{\alpha} \right)^2 - \left( \frac{\alpha''}{\alpha} \right), \quad (6.64)$$

$$\phi'' + 4 \left( \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \phi' - \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (6.65)$$

Definindo

$$\alpha(y) = e^{A(y)}, \quad (6.66)$$

suas derivadas são

$$\alpha'(y) = A' \alpha(y), \quad (6.67)$$

$$\alpha''(y) = \left[ A'' + (A')^2 \right] \alpha(y). \quad (6.68)$$

**Caso  $\Delta = \Sigma = 0$  :**

Neste caso, as equações (6.63), (6.64) e (6.65) tornam-se

$$\frac{1}{3}\phi'^2 = -A'', \quad (6.69)$$

$$\frac{2}{3}V(\phi) = -A'' - 4(A')^2, \quad (6.70)$$

$$\phi'' + 4A'\phi' = \frac{dV}{d\phi}. \quad (6.71)$$

Supondo que

$$\begin{aligned} \phi' &= rW_\phi(\phi) \\ A' &= sW(\phi). \end{aligned} \quad (6.72)$$

O conjunto de equações de (6.72) em (6.69), (6.70) e (6.71) temos

$$s = -\frac{1}{3}, \quad (6.73)$$

e o potencial tem a forma

$$V(\phi) = r^2 \left[ \frac{1}{2} (W_\phi)^2 - \frac{2}{3} W(\phi)^2 \right]. \quad (6.74)$$

Derivando (6.74) com respeito a  $\phi$ , temos

$$\begin{aligned} V_\phi &= r^2 \left[ W_{\phi\phi} W_\phi - \frac{4}{3} W_\phi W(\phi) \right] \\ &= r^2 \left[ \frac{d}{d\phi} \left( \frac{W_\phi^2}{2} \right) - \frac{4}{3} \frac{d}{d\phi} \left( \frac{W(\phi)^2}{2} \right) \right] \\ &= \frac{d}{d\phi} \left[ r^2 \left( \frac{W_\phi^2}{2} - \frac{2}{3} W(\phi)^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (6.75)$$

considerando que

$$V(\phi) = \frac{W_\phi^2}{2} - \frac{2}{3} W(\phi)^2, \quad (6.76)$$

para  $r = 1$ .

Resta apenas resolver as equações de (6.72), isto é,

$$\phi' = W_\phi(\phi), \quad (6.77)$$

$$A' = -\frac{1}{3}W(\phi), \quad (6.78)$$

com

$$A(y) = -\frac{1}{3} \int W[\phi(y)] dy. \quad (6.79)$$

**Caso  $\Delta = -\Sigma \neq 0$ :**

Inserindo as expressões (6.66), (6.67) e (6.68) nas equações (6.63), (6.64) e (6.65), temos

$$\phi'^2 = \Sigma e^{-2A} - 3A'', \quad (6.80)$$

$$\frac{2}{3}V(\phi) = \Sigma e^{-2A} - 4(A')^2 - A'', \quad (6.81)$$

$$\phi'' + 4A'\phi' = \frac{dV}{d\phi}. \quad (6.82)$$

Subtraindo a equação (6.81) de (6.80)

$$V(\phi) = 3[A'' - 2(A')^2] + \frac{3}{2}\phi'^2 \quad (6.83)$$

e impondo

$$\phi' = aW_{1\phi}(\phi), \quad \phi'' = a^2W_{1\phi\phi}W_{1\phi}, \quad (6.84)$$

$$A' = bW_2(\phi), \quad A'' = abW_{2\phi}W_{1\phi}, \quad (6.85)$$

e inserindo em (6.83), a expressão para o potencial torna-se

$$V(\phi) = 3[abW_{2\phi}W_{1\phi} - 2b^2W_2] + \frac{3}{2}a^2W_{1\phi}^2. \quad (6.86)$$

Derivando com relação ao campo  $\phi$  esta última expressão dada em (6.86), temos

$$\frac{dV}{d\phi} = 3[abW_{2\phi\phi}W_{1\phi} + abW_{1\phi\phi}W_{2\phi} - 4b^2W_2W_{2\phi}] + 3a^2W_{1\phi}W_{1\phi\phi}, \quad (6.87)$$

portanto, utilizando (6.87) com o auxílio de (6.84) e (6.85), chega-se a

$$a[4bW_2 - 3bW_{2\phi\phi} - 2aW_{1\phi\phi}]W_{1\phi} = 3b[aW_{1\phi\phi} - 4bW_2]W_{2\phi}. \quad (6.88)$$

Se agora definirmos

$$W_1 = W + \lambda Z \quad \text{e} \quad W_2 = W + \sigma Z, \quad (6.89)$$

e agruparmos os termos que se adequam a uma derivada total, a equação (6.88) toma a forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi} \left[ \frac{2}{3}W^2 + \frac{1}{2}W_\phi^2 - \frac{2}{3}\lambda\sigma Z^2 + \frac{\lambda}{2}(2\sigma - \lambda)Z_\phi^2 + \frac{4}{3}\sigma^2 Z^2 + \sigma W_\phi Z_\phi + \frac{4}{3}\sigma W Z \right] \\ + \frac{4}{3}(\sigma - \lambda)W Z_\phi = 0. \end{aligned} \quad (6.90)$$

Supondo que

$$W = C_1 + C_2 Z + C_3 Z_{\phi\phi}, \quad (6.91)$$

onde  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são constantes arbitrárias, e substituindo na equação (6.90), temos

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}C_1^2 - C_4 + \frac{4}{3}C_1C_3Z_{\phi\phi} + \frac{2}{3}C_3Z_{\phi\phi}^2 + \frac{1}{2}C_3^2Z_{\phi\phi\phi}^2 + Z_\phi Z_{\phi\phi\phi}(C_2C_3 + C_3\beta) \\ + Z_\phi^2 \left( \frac{C_2^2}{2} - \frac{2C_3\lambda}{3} - \frac{\lambda^2}{2} + C_2\sigma + \frac{2}{3}C_3\sigma + \lambda\sigma \right) \\ + Z^2 \left( \frac{2C_2^2}{3} - \frac{2C_2\lambda}{3} + 2C_2\sigma - \frac{2\lambda\sigma}{3} + \frac{4\sigma^2}{3} \right) \\ + Z \left[ \frac{4C_1C_2}{3} - \frac{4C_1\lambda}{3} + \frac{8C_1\sigma}{3} + Z_{\phi\phi} \left( \frac{4C_2C_3}{3} + \frac{4C_3\sigma}{3} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.92)$$

## Modelo a la Gremm

Tomando como solução

$$Z(\phi) = Z_0 \cos(v\phi + s), \quad (6.93)$$

para a equação (6.92) e, agrupando os termos em  $Z$ ,  $Z\phi^2$  e  $Z_\phi^2$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}C_1 - C_4 + Z \left( \frac{4C_1C_2}{3} - \frac{4C_1C_3}{3}v^2 - \frac{4C_1\lambda}{3} + \frac{8C_1\sigma}{3} \right) + Z_\phi^2 \left[ \frac{C_2^2}{3} + \frac{C_3v^4}{2} \right. \\ \left. - \frac{2C_3\lambda}{3} - \frac{\lambda^2}{2} + C_2\sigma + \frac{2C_3\sigma}{3} + \lambda\sigma - v^2(C_2C_3 + C_3\sigma) \right] + Z^2 \left[ \frac{2C_2^2}{3} + \frac{2C_3v^4}{3} \right. \\ \left. - \frac{2C_2\lambda}{3} + 2C_2\sigma - \frac{2\lambda\sigma}{3} + \frac{4\sigma^2}{3} - v^2 \left( \frac{4C_2C_3}{3} + \frac{4C_3\sigma}{3} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.94)$$

Zerando o coeficiente de  $Z$ , temos

$$\frac{4C_1C_2}{3} - \frac{4C_1C_3}{3}v^2 - \frac{4C_1\lambda}{3} + \frac{8C_1\sigma}{3} = 0. \quad (6.95)$$

A solução para  $v$  fica dada por

$$v = \sqrt{\frac{C_2 - \lambda + 2\sigma}{C_3}}, \quad (6.96)$$

onde  $C_1 = \pm 3C_4/2$ , com  $C_2 = \pm C_3 + \lambda - 2\sigma$  se  $v = 1$ . Deste modo, a expressão para  $W$  torna-se

$$W = C_1 + (\lambda - 2\sigma) \cos \phi, \quad (6.97)$$

com a escolha  $Z_0 = 1$  e  $s = 0$  na equação (6.93). Utilizando (6.97) em (6.84) e (6.85), obtemos

$$\phi' = (\sigma - \lambda) \sin \phi. \quad (6.98)$$

e

$$A' = -\frac{1}{3}[C_1 + (\lambda - \sigma) \cos \phi] \quad (6.99)$$

Portanto, as soluções para  $\phi$  e  $A$ , são respectivamente dadas por

$$\phi(y) = 2 \operatorname{arccot}[e^{2y(\lambda-\sigma)}], \quad (6.100)$$

e

$$A(y) = \frac{1}{3}y(C_1 - \lambda + \sigma) + \frac{1}{6} \ln(1 + e^{4y(\lambda-\sigma)}). \quad (6.101)$$

Usando as equações (6.100) e (6.101) para a expressão (6.83), obtemos o seguinte potencial

$$V(\phi) = \frac{2(\lambda - \sigma)^2(1 - G(\phi)[14 + G(\phi)])}{3(1 + G(\phi))^2}, \quad (6.102)$$

onde,  $G(\phi) \equiv [\arctan(\phi/2)]^{2(\lambda-\sigma)^2}$ .

Nas figuras (2)-(4) da seção 6.7 descrevemos os perfis de  $\phi(y)$ ,  $A(y)$  e  $V(\phi)$  na faixa relevante onde o campo escalar também está variando. Apesar da forma funcional não trivial das soluções obtidas, o espaço-tempo resultante é bem comportado. De fato, todos os escalares de Kretschmann associados às soluções são finitos. O comportamento dos escalares de Kretschmann é mostrado nas figuras (11)-(13).

## 6.3 Parâmetro de Hubble Efetivo

Seja a nossa métrica dada por

$$ds^2 = \alpha^2(y)\beta^2(t) \left\{ dt^2 - u^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\chi^2) \right] \right\} - b^2(t, y)dy^2, \quad (6.103)$$



onde  $dt^2$  é o tempo conforme, de tal forma que o tempo próprio seja dado pela relação

$$d\tau^2 = \beta^2(t)dt^2. \quad (6.104)$$

Logo

$$d\tau = \beta(t)dt \rightarrow \tau = \int \beta(t)dt \quad (6.105)$$

Utilizando a regra da cadeia para  $d/d\tau$ , temos

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} = \frac{1}{\beta(t)} \frac{d}{dt}, \quad (6.106)$$

onde em (6.106) utilizamos a relação dada em (6.105). A parte espacial da distância  $ds^2$  e a distância própria  $d\bar{s}^2$ , é dada por

$$d\bar{s}^2 = \beta^2(t)u^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} \right], \text{ considerando apenas a parte radial.} \quad (6.107)$$

Logo

$$d\bar{s} = \beta(t)u(t) \left[ \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \right]. \quad (6.108)$$

Integrando a expressão acima, chegamos a

$$\bar{s} = \beta(t)u(t) \int \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (6.109)$$

onde  $\beta(t)u(t) = a_{eff}(t)$  é o fator de escala da cosmologia convencional, portanto

$$\bar{s} = a_{eff}(t) \int \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (6.110)$$

cujo resultado da integral acima é então

$$\bar{s} = a_{eff}(t) \frac{1}{\text{sen}(\sqrt{kr})\sqrt{k}}. \quad (6.111)$$

Agora utilizando (6.103) e (6.108), temos

$$\frac{d\bar{s}}{d\tau} = \frac{1}{\beta(t)} \frac{d}{dt} [\beta(t)u(t)] \frac{1}{\text{sen}(\sqrt{kr})\sqrt{k}}. \quad (6.112)$$

Desenvolvendo a expressão acima somos levados a

$$\frac{1}{\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{d\tau} = \frac{1}{\beta^2(t)} \frac{d\beta}{dt} + \frac{1}{\beta(t)u(t)} \frac{du}{dt} = \frac{1}{\beta(t)} \left[ \frac{1}{\beta(t)} \frac{d\beta}{dt} + \frac{1}{u(t)} \frac{du}{dt} \right]. \quad (6.113)$$

A velocidade de afastamento entre as galáxias é dada por  $v = Hd$ , por outro lado, a nossa velocidade  $\bar{v}$  é dada por

$$\bar{v} = \frac{d\bar{s}}{d\tau} = \frac{1}{\beta(t)} \left[ \frac{1}{\beta(t)} \frac{d\beta}{dt} + \frac{1}{u(t)} \frac{du}{dt} \right] \bar{s}. \quad (6.114)$$

Podemos reescrever a expressão (6.114) da seguinte maneira

$$\bar{v} = \frac{1}{\beta(t)} \frac{d}{dt} [\ln(\beta(t)u(t))] \bar{s}, \quad (6.115)$$

onde usamos

$$\left[ \frac{1}{\beta(t)} \frac{d\beta}{dt} + \frac{1}{u(t)} \frac{du}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \ln(\beta(t)) + \frac{d}{dt} \ln(u(t)) = \frac{d}{dt} [\ln(\beta(t)u(t))]. \quad (6.116)$$

Comparando a expressão (6.115) com a lei de Hubble dada por  $v = Hd$ , nosso  $H_{eff}$  é dado por

$$H_{efe} = \frac{1}{\beta(t)} \frac{d}{dt} [\ln(\beta(t)u(t))] = \frac{1}{a_{efe}} \frac{da_{efe}}{d\tau} = \frac{\dot{a}_{efe}}{a_{efe}}. \quad (6.117)$$

## 6.4 Resultados

Nesta seção, a partir das soluções encontradas para  $\beta(t)$  e com auxílio da equação (6.117), iremos encontrar o parâmetro de Hubble efetivo bem como o fator de escala efetivo. Seja o caso em que  $k = 0$  e  $\Delta = \Sigma = 0$ :

$$\beta(t) = \frac{C}{u(t)}; \quad (6.118)$$

aqui obtemos

$$H_{efe}(\tau) = 0 \quad \text{e} \quad a_{efe} = 0, \quad (6.119)$$

ou seja, temos um parâmetro de Hubble que descreve um Universo estático (universo de Einstein). Ainda para o caso em que  $\Delta = \Sigma = 0$ , mas agora com  $k \neq 0$ , a solução é dada por

$$\beta(t) = \frac{1}{\sqrt{f(t)}} \left[ C \pm \frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{f(t)}} \int_0^t \frac{dt'}{\sqrt{f(t')}} \right], \quad (6.120)$$

e

$$d\tau = \beta(t)dt = \frac{dt}{\sqrt{f(t)}} \left[ C \pm \frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{f(t)}} \int_0^t \frac{dt'}{\sqrt{f(t')}} \right] = dz[C \pm \sqrt{-k}z], \quad (6.121)$$

com  $dz = dt/\sqrt{f(t)}$ . Encontramos assim uma expressão para o tempo cósmico  $\tau$

$$\tau = Cz \pm z^2 \sqrt{-k}/2. \quad (6.122)$$

se  $C = 0$  e, escolhendo  $f(t) \equiv e^{-2at}$ , temos  $z = (1/a) e^{at}$ , então

$$\tau = \pm \frac{\sqrt{-k}}{2} \frac{1}{a^2} e^{2at}, \quad (6.123)$$

portanto

$$t = \frac{1}{2a} \ln \left( \pm \frac{2a^2 \tau}{\sqrt{-k}} \right). \quad (6.124)$$

Retomando a expressão para  $\beta(t)$

$$\beta(t) = \pm \frac{\sqrt{-k}}{a} e^{2at}, \quad (6.125)$$

substituindo as expressões (6.125) e (6.124) em (6.117), temos

$$H_{eff}(\tau) = \frac{1}{\tau}. \quad (6.126)$$

Já para  $a_{efe}(t) = \beta(t)u(t)$ , temos

$$a_{efe}(\tau) = 2\sqrt{-k}\tau, \quad (6.127)$$

onde, também, foram utilizadas as expressões (6.125) e (6.124).

Agora, sejam os casos em que  $\Delta = -\Sigma \neq 0$  para  $k = 0$  e  $k \neq 0$ . Primeiramente, vamos analisar a curvatura  $k = 0$ . Temos

$$\beta(t) = \frac{1}{u(t)} \frac{1}{C_1 \pm \sqrt{\frac{\Sigma}{3}} \int_0^t \frac{dt'}{u(t')}} \quad (6.128)$$

Da equação (6.105)

$$d\tau = \beta(t)dt = \frac{dt}{u(t)(C_1 \pm bz)} \rightarrow \tau = \mp \frac{1}{b} \ln(C_1 \pm bz) \quad (6.129)$$

onde  $b = \sqrt{\Sigma/3}$  e  $z = \int_1^t dt'/u(t')$ . Inserindo as equações (6.128) e (6.129) na expressão (6.117), temos

$$\begin{aligned} H_{eff}(t) &= u(t)(C_1 \pm bz) \frac{d}{dt} \left[ \ln \left( \frac{1}{(C_1 \pm bz)} \right) \right] = \\ &= u(t)(C_1 \pm bz) \frac{d}{dt} (\pm b\tau) = u(t)(C_1 \pm bz) \pm b \frac{1}{u(t)(C_1 \pm bz)} \\ &= \pm b \end{aligned} \quad (6.130)$$

Então

$$H_{eff}(\tau) = \pm \sqrt{\frac{\Sigma}{3}}. \quad (6.131)$$

Por outro lado, o fator de escala efetivo é relacionado com  $H_{eff}(\tau)$  pela seguinte relação

$$H_{eff}(\tau) = \frac{\dot{a}_{efe}}{a_{efe}} = \pm \sqrt{\frac{\Sigma}{3}}. \quad (6.132)$$

Deste modo chegamos a

$$a_{efe}(\tau) \propto \exp \left( \pm \sqrt{\frac{\Sigma}{3}} \tau \right). \quad (6.133)$$

Podemos notar, que a solução acima para  $a_{efe}$  com  $k = 0$ , é similar a solução encontrada para um Universo sem brana, dominado pela energia de vácuo e com  $k = 0$ , ou seja

$$a(t) \propto \exp \left( \pm \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right), \quad (6.134)$$

onde  $\Lambda > 0$  é a constante cosmológica. Logo, podemos concluir que  $\Sigma = \Lambda$ . A solução dada em (6.133) representa a fase atual da expansão acelerada de nosso Universo.

Finalmente, temos para o caso em que  $k \neq 0$  e lembrando que

$$\beta(t) = -\frac{1}{u(t)} \sqrt{\frac{3k}{\Sigma}} \sec \left( \sqrt{k} z \right), \quad (6.135)$$

onde  $z \equiv \int_0^t \frac{dt'}{u(t')}$ . Seja

$$d\tau = \beta(t) dt = -\sqrt{\frac{3k}{\Sigma}} \sec \left( \sqrt{k} z \right) dz, \quad (6.136)$$

onde  $dz = dt/u(t)$ . Integrando a expressão acima, obtemos

$$\tau = -\sqrt{\frac{3k}{\Sigma}} \ln \left| \sec \left( \sqrt{k} z \right) + \tan \left( \sqrt{k} z \right) \right|. \quad (6.137)$$

Invertendo (6.137) para  $z$  em função do tempo  $\tau$ , obtemos

$$z = \frac{2}{\sqrt{k}} \arccos \left\{ \frac{\left[ 1 + \exp(\tau \sqrt{\Sigma/3}) \right]^{1/2}}{\sqrt{2}} \right\}. \quad (6.138)$$

Já para  $H_{efe}$ , temos

$$H_{efe} = \frac{1}{\beta(t)} \frac{d}{dt} [\ln(\beta(t)u(t))] = \frac{d}{d\tau} \left[ \ln \left( -\sqrt{\frac{3k}{\Sigma}} \sec \left( \sqrt{k} z \right) \right) \right] \quad (6.139)$$

onde na primeira igualdade substituímos  $d\tau = \beta(t)dt$ . Substituindo (6.138) em (6.139) ficamos com

$$H_{efe}(\tau) = \frac{d}{d\tau} \left[ \ln \left( -\sqrt{\frac{3k}{\Sigma}} \sec \left( \sqrt{k} \frac{2}{\sqrt{k}} \arccos \left\{ \frac{[1 + \exp(\tau \sqrt{\Sigma/3})]^{1/2}}{\sqrt{2}} \right\} \right) \right) \right], \quad (6.140)$$

e temos que

$$H_{efe}(\tau) = \sqrt{\frac{\Sigma}{3}} \tanh \left[ \sqrt{\frac{\Sigma}{3}} \tau \right]. \quad (6.141)$$

Usando a definição para a função de Hubble

$$H_{efe}(\tau) = \frac{\dot{a}_{efe}}{a_{efe}} = \sqrt{\frac{\Sigma}{3}} \tanh \left[ \sqrt{\frac{\Sigma}{3}} \tau \right], \quad (6.142)$$

e integrando a expressão (6.142), o fator de escala efetivo é dado por

$$a_{efe}(\tau) = \ln \left[ \cosh \sqrt{\frac{\Sigma}{3}} \tau \right]. \quad (6.143)$$

A seguir é mostrada a tabela com os resultados para o fator de escala efetivo bem como para o parâmetro de Hubble efetivo:

Curvatura	Caso	$\mathbf{H}_{efe}(\tau)$	$\mathbf{a}_{efe}(\tau)$	
$k = 0$	$\Delta \equiv \Sigma \equiv 0$	0	0	
$k \neq 0$	$\Delta \equiv \Sigma \equiv 0$	$\frac{1}{\tau}$	$2\sqrt{-k}\tau$	
$k = 0$	$\Delta \equiv -\Sigma$	$\pm \sqrt{\frac{\Sigma}{3}}$	$\exp \left( \pm \sqrt{\frac{\Sigma}{3}} \tau \right), \Sigma \equiv \Lambda$	(6.144)
$k \neq 0$	$\Delta \equiv -\Sigma$	$\sqrt{\frac{\Sigma}{3}} \tanh \left[ \sqrt{\frac{\Sigma}{3}} \tau \right]$	$\ln \left[ \cosh \sqrt{\frac{\Sigma}{3}} \tau \right]$	

A partir dos dados estabelecidos na tabela acima, podemos ver que, para o caso em que  $k = 0$  e  $\Delta \equiv \Sigma \equiv 0$  os valores de  $\mathbf{H}_{efe}(\tau)$  e  $\mathbf{a}_{efe}(\tau)$  são nulos, ou seja, uma solução que descreve um Universo estático. No caso em que  $k \neq 0$  e  $\Delta \equiv \Sigma \equiv 0$  e, naturalmente para  $k = -1$ , torna-se impossível haver um regime de aceleração de nosso Universo, pois  $\ddot{\mathbf{a}}_{efe}(\tau) = \mathbf{0}$ , no entanto tem-se um regime de expansão do Universo. O caso em que  $k = 0$  e  $\Delta \equiv -\Sigma$ , nos fornece uma solução para fase atual de nosso universo (tipo exponencial). Nossa constante de separação  $\Sigma$  foi identificada com a constante cosmológica, neste caso obtivemos uma solução que descreve um Universo em expansão

acelerada, pois  $\ddot{\mathbf{a}}_{efe}(\tau) \propto \mathbf{e}^{\mathbf{H}_{efe} t}$ . Já para o caso em que  $k \neq 0$  e  $\Delta \equiv -\Sigma$  a solução para  $\ddot{\mathbf{a}}_{efe}(\tau)$  nos fornece fases de desaceleração cósmica.  $\ddot{\mathbf{a}}_{efe} < 0$

O comportamento da função Hubble e do fator de escala efetivo são mostrados nas figuras (5)-(10).

# Capítulo 7

## Conclusões

Na primeira parte da contribuição original deste trabalho, derivamos as equações de campo no formalismo  $f(\mathcal{R})$ -Einstein-Palatini em dimensões arbitrárias e apresentamos o estudo das condições de consistência aplicados aos modelos de branas.

Revisitando as regras de soma para duas teorias modificadas da gravitação, Brans-Dicke e  $f(\mathcal{R})$ -Einstein-Palatini, verificamos que para ambos os casos é possível relaxar as condições de consistência e branas suaves a la Randall-Sundrum (não singulares) tornam-se possíveis em tais teorias. Em particular, para o caso de Brans-Dicke, nota-se um resultado interessante, o qual engloba a presença do potencial do campo escalar contribuindo para as regras de soma. Isso é exclusivo para a formulação da teoria de Brans-Dicke em cenários 5D, pois, sempre que a escolha do parâmetro  $\alpha = -1$  é feita, o potencial é eliminado dessa condição de consistência quando estamos no palco da Relatividade Geral, teoria  $f(R)$  e  $f(\mathcal{R})$ -Einstein-Palatini.

Concernente à Cosmologia de Branas, contida na segunda parte deste trabalho, nós encontramos soluções dependentes do tempo para o modelo FLRW-branas, isto é, a parte temporal das equações para  $\dot{\phi}$ ,  $\phi'$  and  $V(\phi)$ . Neste caso, consideramos duas possibilidades para o mecanismo de separação de variáveis, ou seja,  $\Delta = \Sigma = 0$  e  $\Delta = -\Sigma \neq 0$ . Para cada possibilidade de  $\Delta$  e  $\Sigma$ , resolvemos as equações de campo no que se refere à curvatura espacial da brana (Universo), ou seja,  $k = 0$  e  $k \neq 0$ . Considerando o mesmo conjunto de equações governadas por  $\dot{\phi}$ ,  $\phi'$  e  $V(\phi)$ , resolvemos a parte espacial do nosso problema, a qual envolve soluções com uma dimensão extra. Obtivemos solução para o campo escalar, potencial do campo escalar e *warp factor*. Os casos em que  $\Delta = \Sigma = 0$  e  $\Delta = -\Sigma \neq 0$  também foram considerados. Para efeitos de aplicação cosmológica, apresentamos nossos

resultados a partir das soluções encontradas para  $\beta(t)$ , e calculamos o parâmetro de Hubble efetivo bem como o fator de escala efetivo para todas as possibilidades de  $\Delta$ ,  $\Sigma$  e  $k$ , discutidas na Seção 6.2. Especificamente, emerge um resultado interessante para o caso em que  $k = 0$  e  $\Delta \neq -\Sigma$ . A constante de separação  $\Sigma$  faz o papel de  $\Lambda$  (constante cosmológica) para a solução do tipo de-Sitter, cuja solução engloba o parâmetro de Hubble.

Na primeira investigação deste trabalho, a qual pode ser entendida como uma parte mais formal no tratamento de modelos de mundos brana suaves, verificamos quais possibilidades permitem tal cenário. Na teoria de Brans-Dicke é interessante notarmos que o potencial do campo escalar não é suprimido quando aplicadas as regras de soma. Isso abre novas possibilidades para a modelagem de branas com uma dimensão extra compacta no contexto da teoria de Brans-Dicke, ao contrário da Relatividade Geral, a qual não permite branas suaves em cinco dimensões com a presença do potencial do campo escalar. Para o formalismo  $f(\mathcal{R})$ -Einstein-Palatini, também apresentamos um forte vínculo a partir das regras de soma; Em nosso resultado, a função  $f(\mathcal{R})$  sofre uma restrição, sua primeira derivada deve ser negativa, isto é,  $df(\mathcal{R})/d\mathcal{R} < 0$ . O formalismo de Palatini nos dá a vantagem de possuir derivadas de segunda ordem na métrica, enquanto no que formalismo métrico, as equações são de quarta ordem na métrica, devido às derivadas superiores no escalar de Ricci nas equações de campo. Algumas extensões das regras de soma podem ser tratadas, por exemplo; considerar o *warp factor* com uma dependência temporal, isto seria de grande interesse para uma aplicação cosmológica. Também poderíamos investigar as regras de soma no formalismo métrico-afim, onde estão presentes os objetos de torção do espaço-tempo. Essas são algumas de nossas perspectivas quanto à essa primeira parte do trabalho.

Já para a segunda investigação, nossas perspectivas incluem os casos em que podemos utilizar dois campos escalares; um campo dependente do tempo e um campo dependente da dimensão extra com seus respectivos potenciais. Atualmente estamos na fase inicial da construção das equações de campo para este problema. Em uma outra abordagem notamos interessante incluir uma constante cosmológica no *bulk* a partir da ação de Einstein-Hilbert  $5D$ . Talvez, isso nos forneceria um análogo à relação entre essas constantes cosmológicas  $4D$  e  $5D$  no cenário de branas finas. Estas abordagens se fazem presentes em nossas perspectivas.



# Bibliografia

- [1] Horava, P. and Witten, E., Nucl. Phys. B **460**, 506, (1996a).
- [2] Horava, P. and Witten, E., Nucl. Phys. B **475**, 9,4 (1996b).
- [3] Dai, J., Leigh, R. G. e Polchinski, J. Mod. Phys. Lett. A, **4**, 2073, (1989).
- [4] Polchinski, J. Phys. Rev. Lett. **75**, 4724, (1995).
- [5] Randall, L. and Sundrum, R., Phys. Rev. Lett. **83**, 4690, (1999a).
- [6] Randall, L. and Sundrum, R., Phys. Rev. Lett. **83**, 3370, (1999b).
- [7] G.W. Gibbons, R. Kallosh and A.D. Linde, J. High Energy Phys. **01**, 022, (2001).
- [8] Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S. and Dvali, G., Phys. Lett. B **429**, 263, (1998).
- [9] F. Leblond, R. C. Myers, and D. J. Winters, JHEP **0101**, 022, (2001).
- [10] Komatsu, E., Dunkley, J., Nolte, M. R. et. al. Astrophys. J.Suppl. **180**, 330, (2009)
- [11] Clemence, G. M., Rev. Mod. Phys. **19**, 361, (1947).
- [12] S.W. Hawking e G.F.R. Ellis, The Large Scale Structure of Space-Time , Cambridge University Press (Cambridge, 1973).
- [13] W. Herschel, “On the Construction of the Heavens”, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **75**, 213, (1785).
- [14] Shapley, Harlow . Descriptions and Positions of 2,829 New Nebulae, Harvard College Observatory. Annals, v. **85**, N°.6, (1924).
- [15] A. A. Penzias and R. W. Wilson, Astrophys. J. **142**, 419, (1965).

- [16] R. H. Dick, P. J. E. Peebles, P. G. Roll and D. T. Wilkinson, *Astrophys. J.* **142**, 414, (1965).
- [17] E. Martinez-Gonzalez, P. Vielva, arXiv:astro-ph/0510003v1, (2005).
- [18] Yamamoto Kazuhiro; Sasaki, Misao; Tanaka, Takahiro; *Astrophys J.* **455**, 412 (1995).
- [19] Hao Liu and Ti-Pei Li, *Astrophys J.* **732**, 6 (2011).
- [20] E. Komatsu et al. *Ap J. S.* **192**, 18, (2011).
- [21] D. N. Spergel et al. [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175, (2003).
- [22] D. Spergel et al., *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175, (2003).
- [23] Bassett B. A. and Hlozek R., arXiv:0910.5224, (2009).
- [24] Komatsu, E., Dunkley, J., Nolta, M. R. et al. *Astrophys. J. Suppl.* **180**, 330, (2009).
- [25] S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* **517**, 565, (1999).
- [26] A. G. Riess et al. [Supernova Search Team Collaboration], *Astron. J.* **116**, 1009, (1998).
- [27] C. Armendáriz-Picón, V. Mukhanov, and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4438 (2000).
- [28] C. Armendáriz-Picón, V. Mukhanov, and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. D* **63**, 103510, (2001).
- [29] T. Padmanabhan, *Phys. Rev. D* **66**, 021301(R), (2002).
- [30] Jie Ren, Xin-He Meng *Int. J. Mod. Phys. D* **17**, 2325, (2008).
- [31] J. S. Bagla, H. K. Jassal and T. Padmanabhan *Phys. Rev. D* **67**, 063504, (2003).
- [32] Gianluca Calcagni and Andrew R. Liddle *Phys. Rev. D* **74**, 043528, (2006).
- [33] R. R. Caldwell, *Phys. Lett. B* **545**, 23, (2002).
- [34] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Lett. B* **562**, 147, (2003).

- [35] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski and N. N. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **91**, 071301, (2003).
- [36] A. Y. Kamenshchik, U. Moschella and V. Pasquier, Phys. Lett. B **511**, 265, (2001).
- [37] M. Heydari-Fard and H. R. Sepangi Phys. Rev. D **76**, 104009, (2007).
- [38] Z. K. Guo, et al., Phys. Lett. B **608**, 177, (2005).
- [39] J. Q. Xia, B. Feng and X. Zhang, Mod. Phys. Lett. A **20**, 2409, (2005).
- [40] M. R. Setare, Phys. Lett. B **641**, 130, (2006).
- [41] M. R. Setare and E. N. Saridakis, JCAP **09**, 026 (2008).
- [42] G. Nordstrom, Phys. Zeit. **13**, 1126, (1912).
- [43] T. Kaluza, Sitzungsber. d. Berl. Akad., 966 (1921).
- [44] Klein, O., Zeit. Phys. **37**, 895, (1926a).
- [45] Klein, O., Nature **118**, 516, (1926b).
- [46] J. Polchinski, String Theory, Cambridge, **Vol. I**, chap. 8: Toroidal compactification and T-duality, (1995).
- [47] Horava, P., and Witten, E., Nucl. Phys. B, **460**, 506, (1996).
- [48] Witten, E. Nucl. Phys. B **471**, 135, (1996).
- [49] G. R. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, Phys. Lett. B **485**, 208, (2000).
- [50] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, Phys. Lett. B **429**, 263, (1998).
- [51] J.M. Hoff da Silva and M. Dias, Phys. Rev. D **84**, 066011 (2011).
- [52] M.C.B. Abdalla, M.E.X. Guimarães and J.M. Hoff da Silva, J. High Energy Phys. **09**, 051 (2010).
- [53] M.C.B. Abdalla, M.E.X. Guimarães and J.M. Hoff da Silva, PoS(ISFTG) **041**, (2009).

- [54] M. Dias, J. M. Hoff da Silva and Roldão da Rocha, Europhysics Letters, **110**, 2 (2015).
- [55] Brito, G.P, J. M. Hoff da Silva, P. Michel L. T. da Silva and A. S. Dutra, Int. J. Mod. Phys. D **24**, 11 (2015).
- [56] A. E. Bernardini, R. T. Cavalcanti, and R. da Rocha, Gen. Relat. Grav. **47**, 1840 (2015).
- [57] Agell Ahmed, Bohdan Grzadkowski, Jose Wudka, Journal of High Energy Physics, **1404**, 61, (2014).

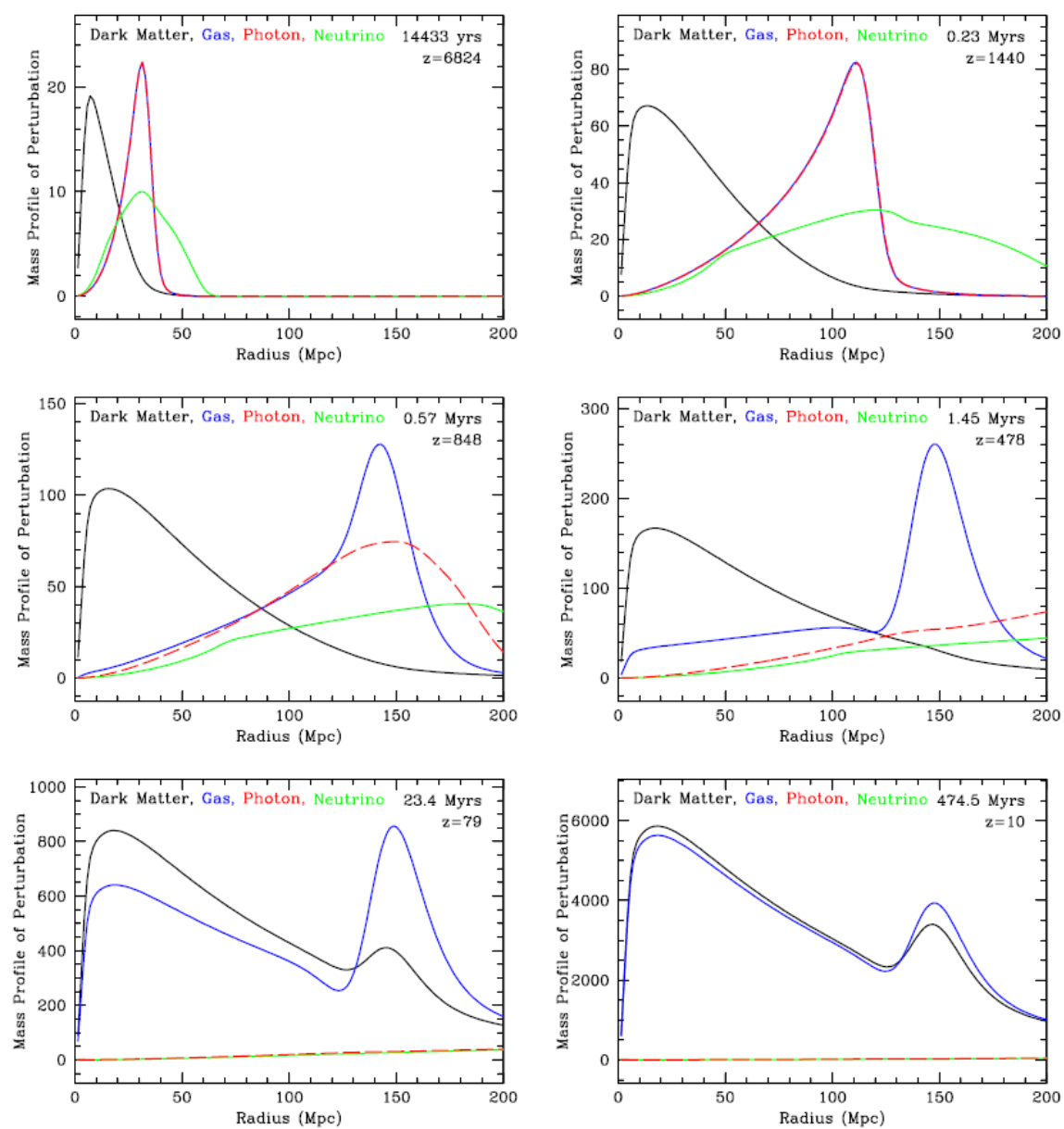


Figura 1. Perfil de massa como uma função do raio comóvel para uma sobredensidade localizada na origem.

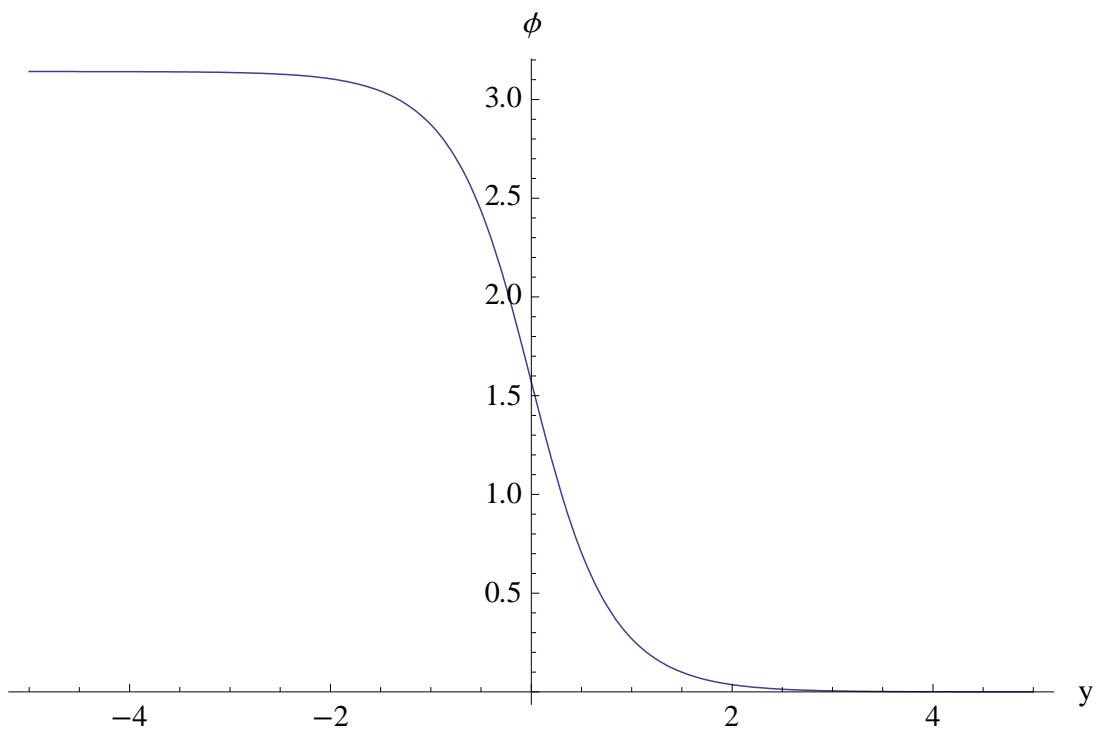


Figura 2. Campo escalar como função da dimensão extra  $y$ .

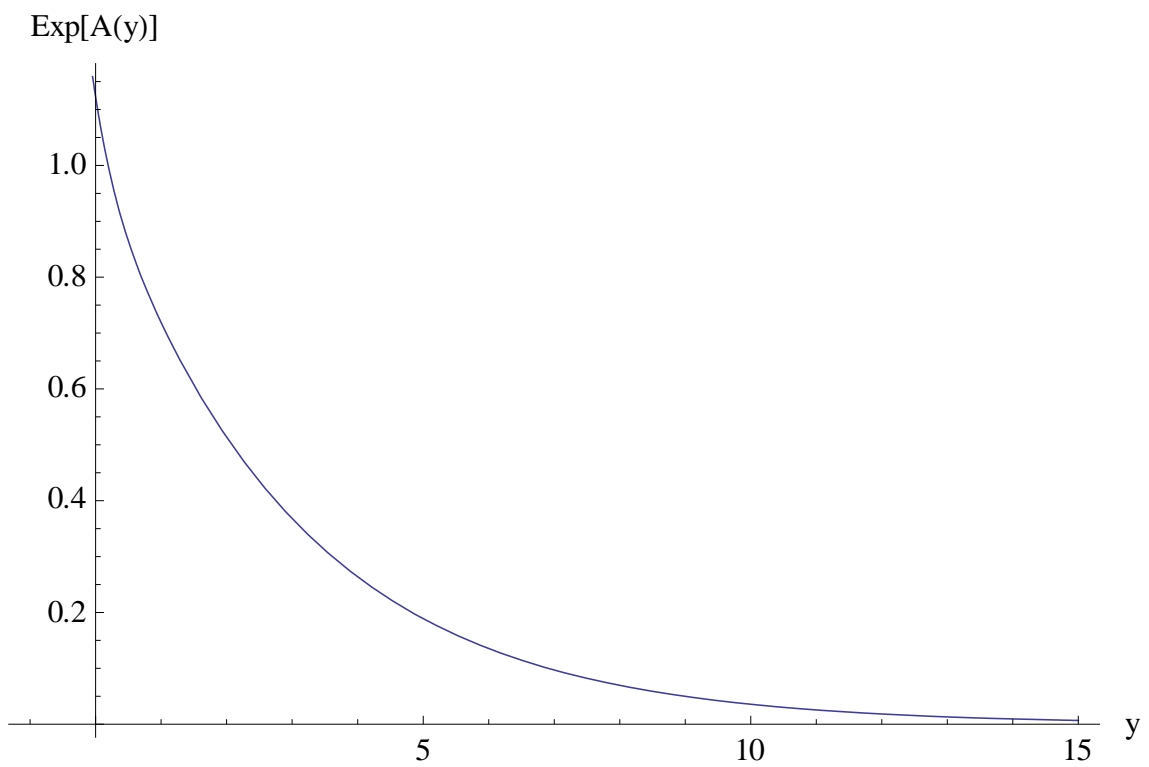


Figura 3. Exponencial da função warp factor como função da dimensão extra  $y$ .

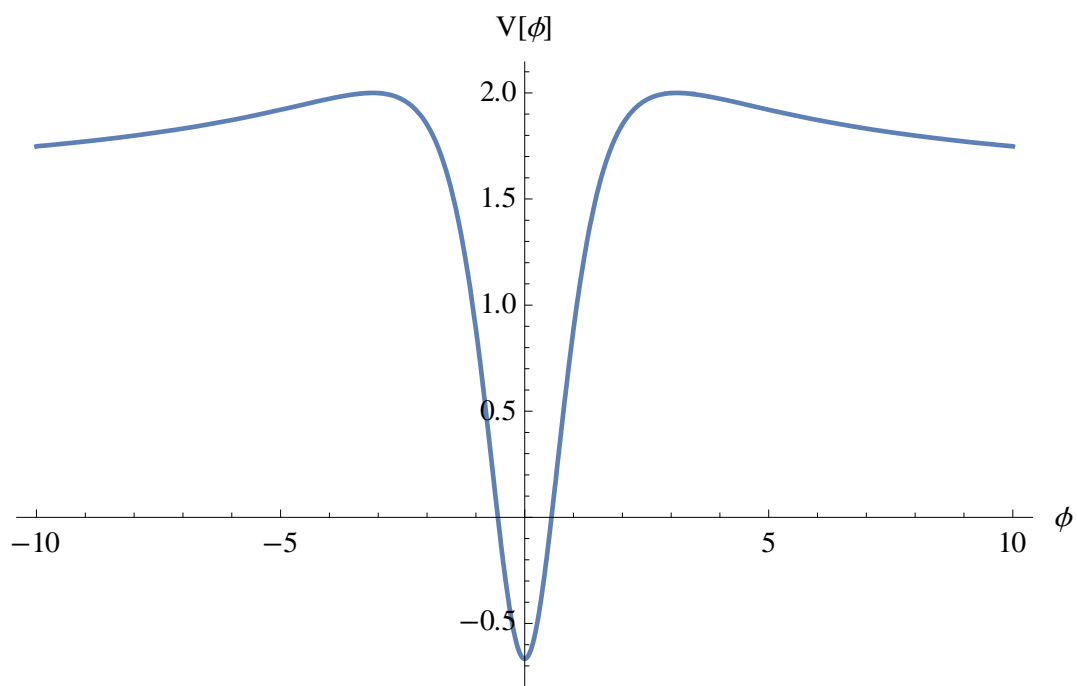


Figura 4. Potencial do campo escalar como uma função do campo escalar.

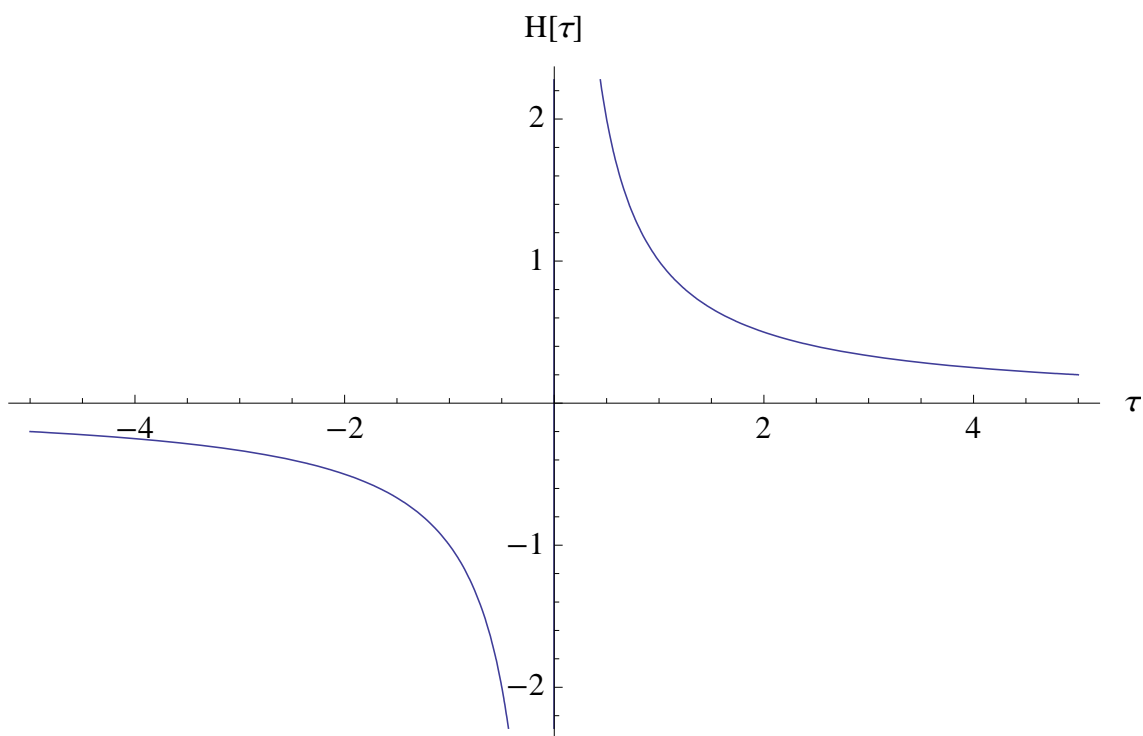


Figura 5. Parâmetro de Hubble efetivo como uma função do tempo cósmico para o caso  $\Delta = \Sigma = 0$  e  $k \neq 0$ .

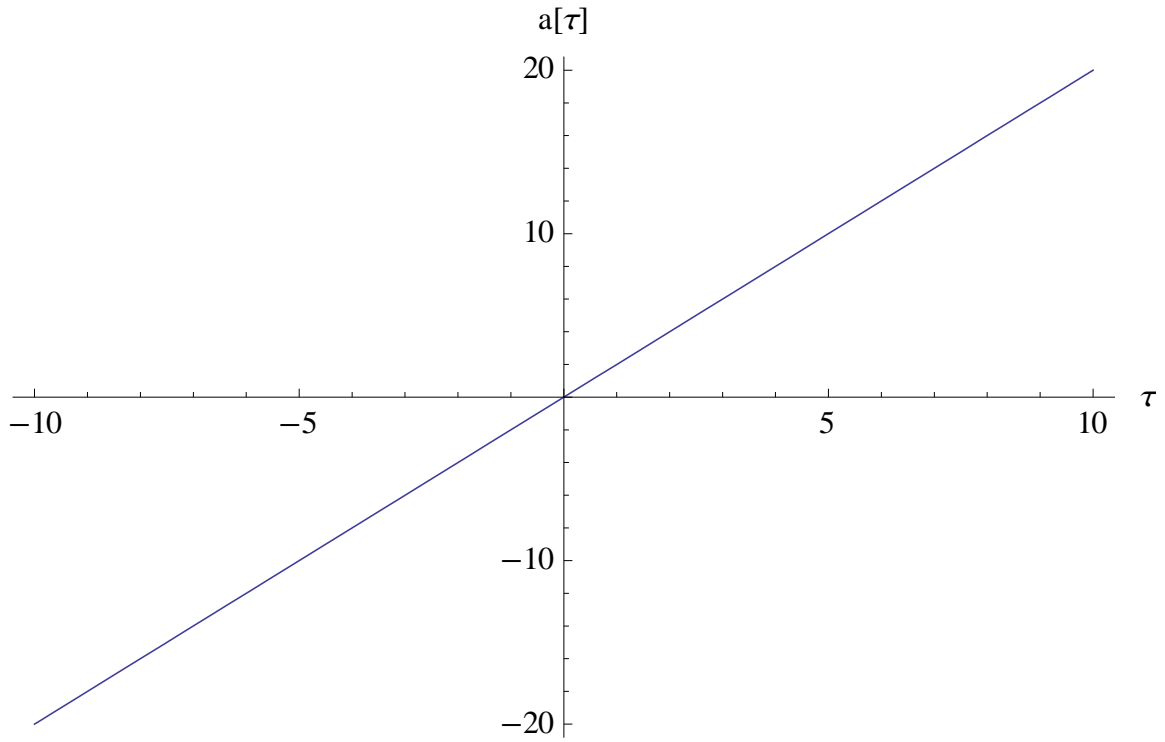


Figura 6. Fator de escala efetivo com uma função do tempo cósmico para o caso  $\Delta = \Sigma = 0$  e  $k \neq 0$ .

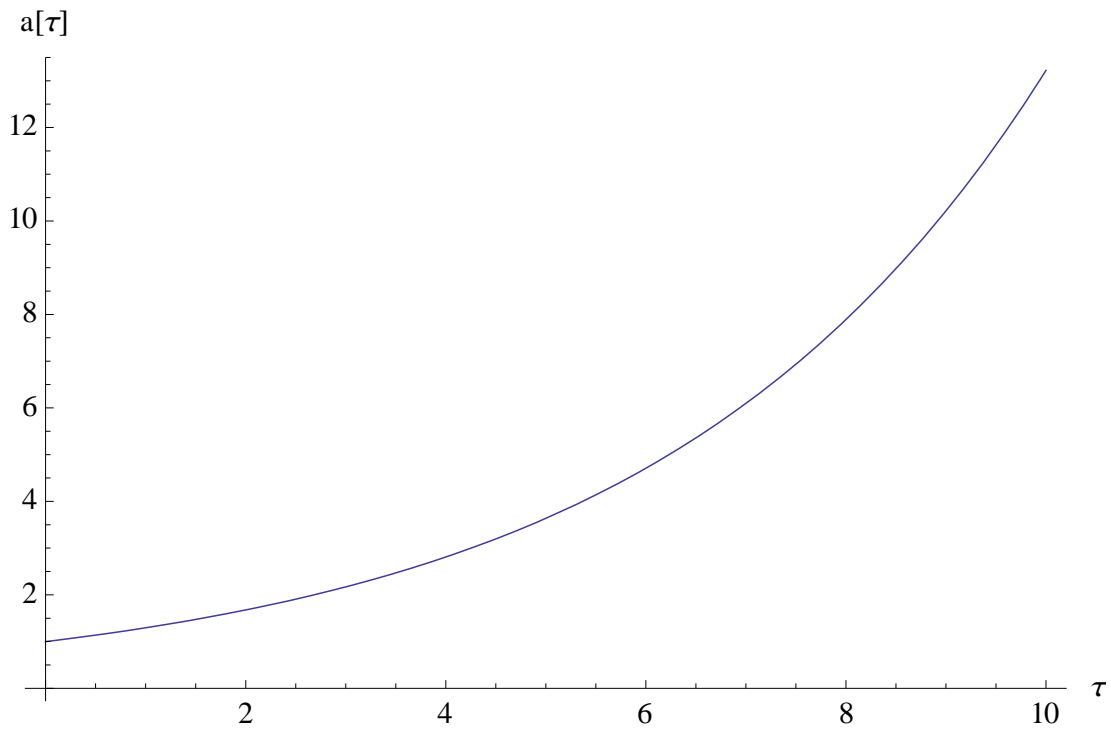


Figura 7. Fator de escala efetivo como uma função do tempo cósmico para o caso  $\Delta \neq \Sigma \neq 0$  e  $k = 0$ .



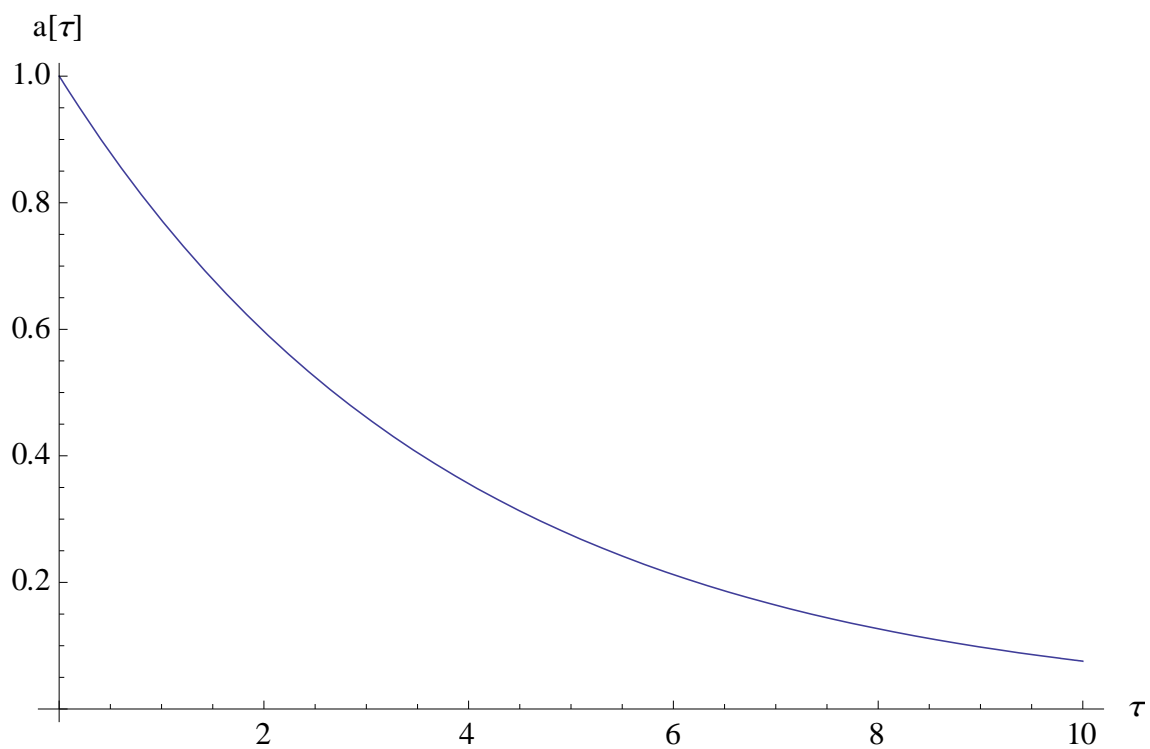


Figura. 8. Fator de escala efetivo como uma função do tempo cósmico para o caso  $\Delta \neq \Sigma \neq 0$  e  $k = 0$ .

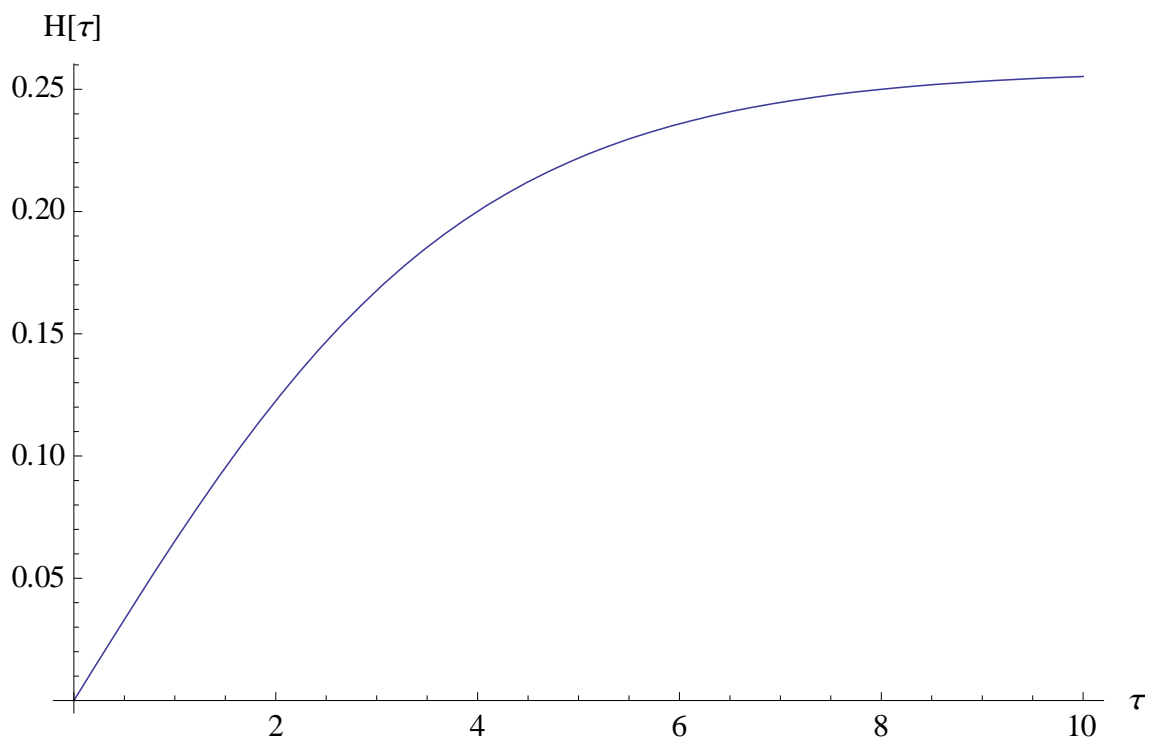


Figura 9. Parâmetro de Hubble efetivo como uma função do tempo cósmico para o caso  $\Delta \neq \Sigma \neq 0$  e  $k \neq 0$ .

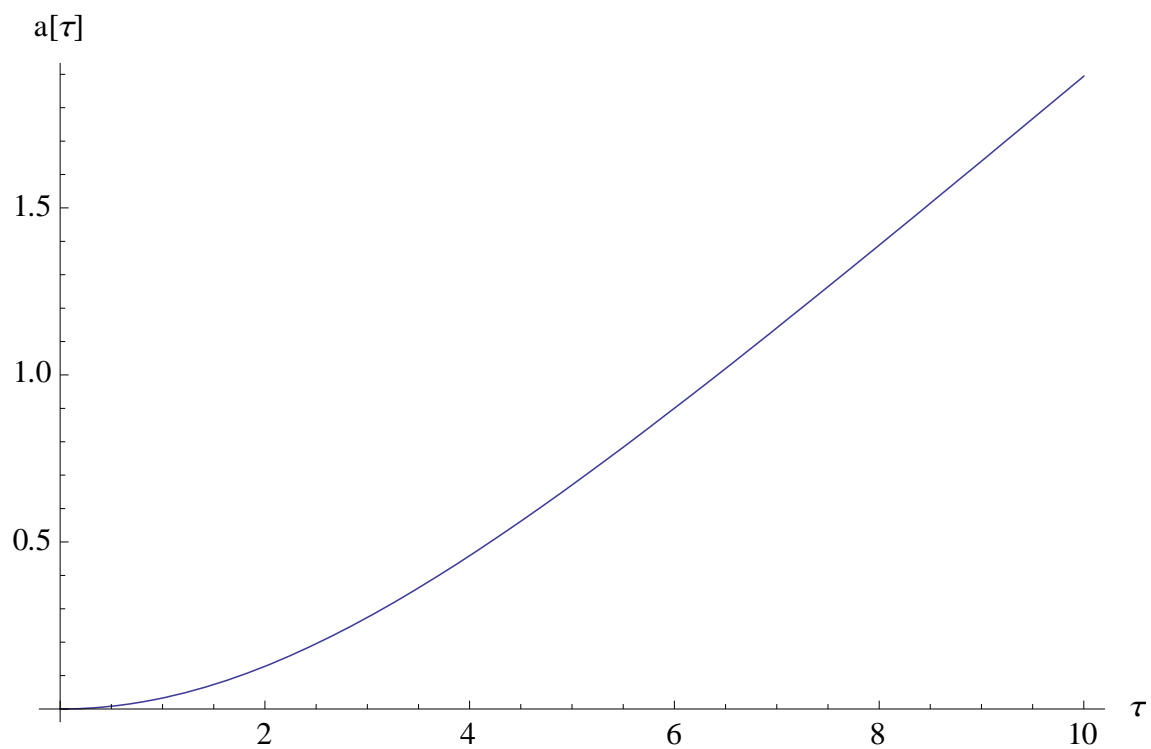


Figura 10. Fator de escala efetivo como uma função do tempo cósmico para o caso  $\Delta \neq \Sigma \neq 0$  e  $k \neq 0$ .

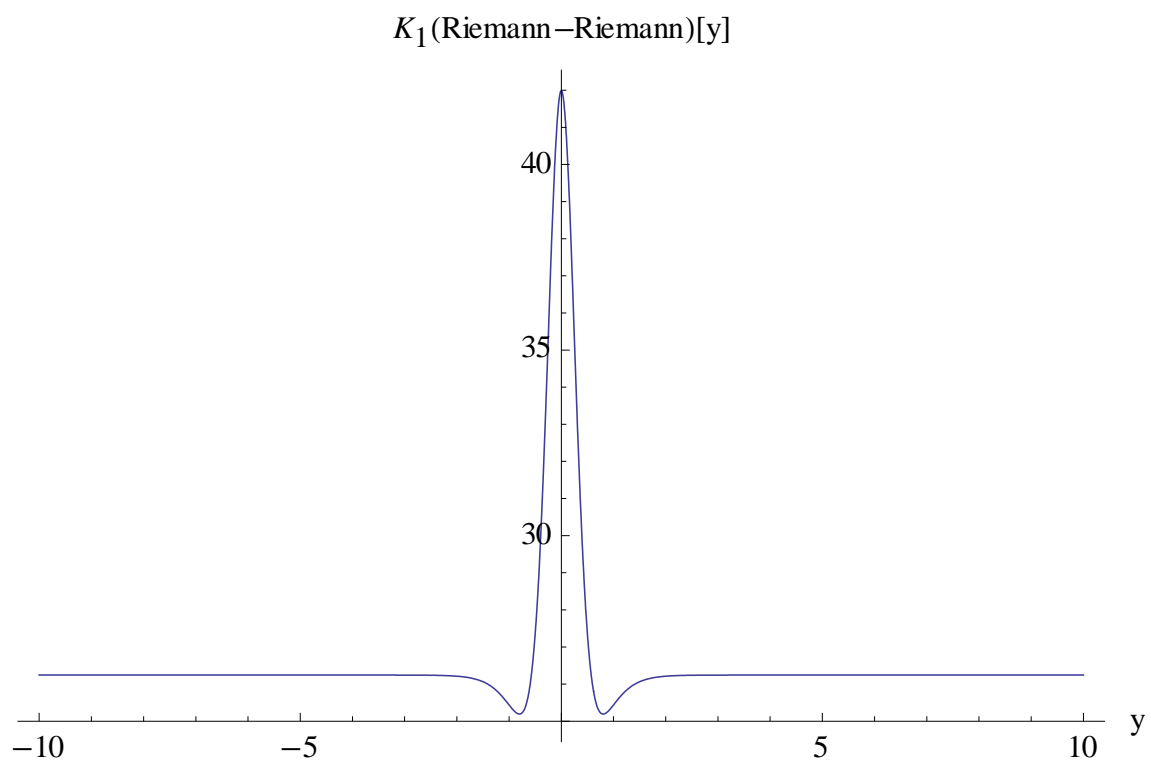


Figura 11. Escalar de Kretschmann ( $K_1$ ) como função da dimensão extra  $y$ .

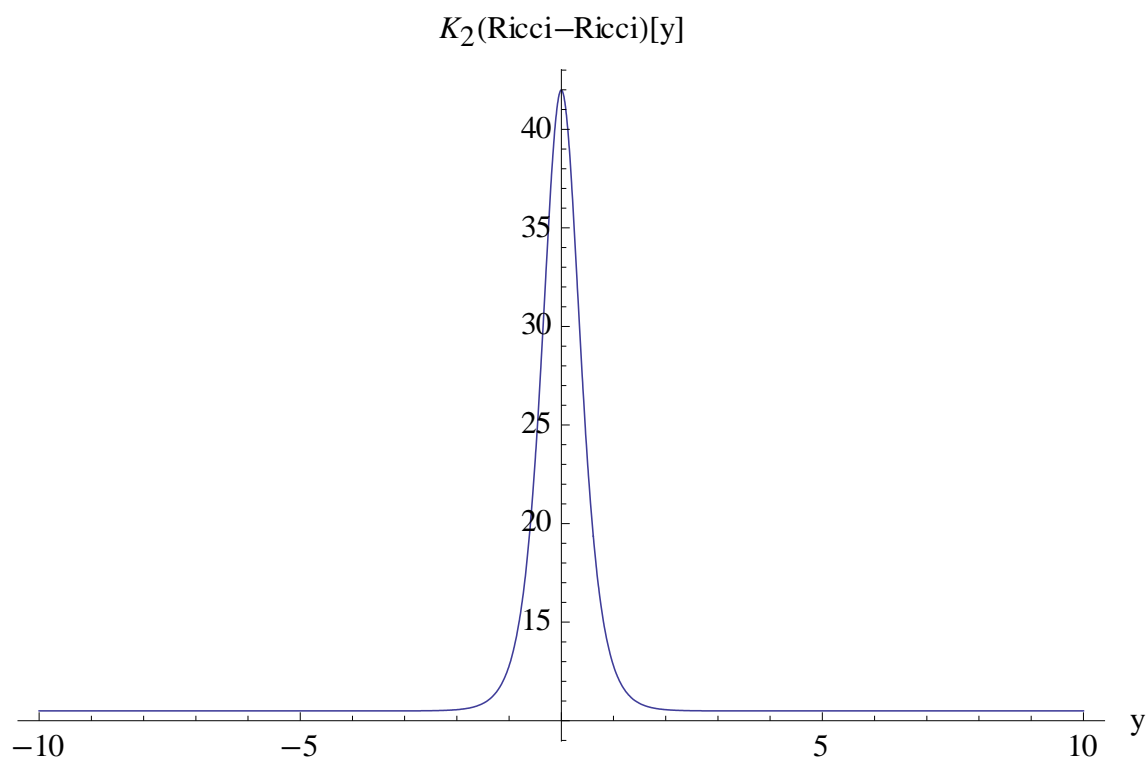


Figura 12. Escalar de Kretschmann ( $K_2$ ) como função da dimensão extra  $y$ .

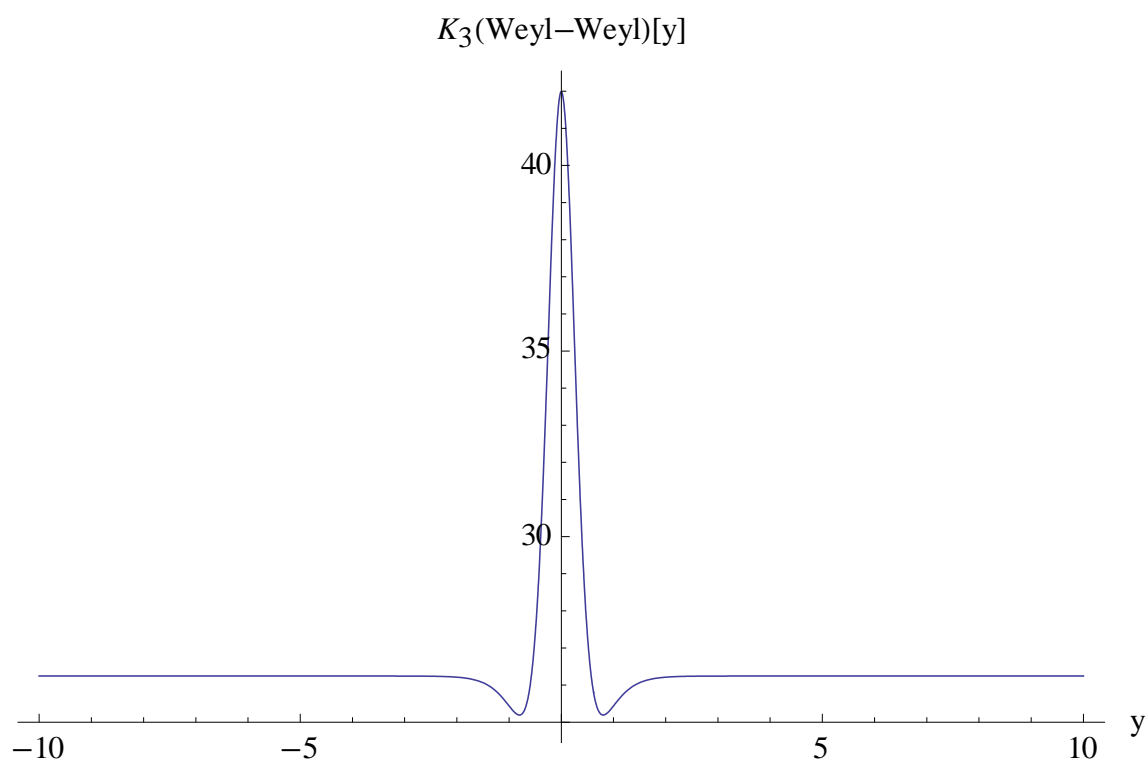


Figura 13. Escalar de Kretschmann ( $K_2$ ) como função da dimensão extra  $y$