Verallgemeinerte Krichever - Novikov Algebren und deren Darstellungen

Inauguraldissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Universität Mannheim

vorgelegt von

Martin Schlichenmaier

aus Backnang

Mannheim 1990

Dekan:	Prof. Dr. H. Popp, Universität Mannheim
Referent:	Prof. Dr. R. Weissauer, Universität Mannheim
Korreferent:	Prof. Dr. R. Kiehl, Universität Mannheim
Tag der mündlichen Prüfung:	28. Juni 1990

Inhaltsverzeichnis

Summary.

In the context of Conformal Field Theory in Theoretical Physics the Virasoro Algebra and its representations play a fundamental role. The Virasoro Algebra can be given as the Lie algebra of meromorphic vector fields on $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$. In view of the generalization of Conformal Field Theory to higher genus Riemann Surfaces (for example, appearing in String Theory) Krichever and Novikov generalized the setting to higher genus allowing for the vector fields poles at two arbitrary but fixed points. The natural modules over the algebra of such vector fields (now usually called Krichever - Novikov algebra) are the vector spaces of meromorphic forms of weight λ with the same restrictions on the set of poles. For the construction of the semi-infinite wedge representations of the Krichever - Novikov algebra (yielding analogs of Verma modules, resp. heighest weight modules) it is necessary to exhibit a bases in the algebra and the modules in such a way that with respect to a grading induced by the indexing of the basis the module structure is 'generalized graded'.
In the setting of String Theory the two points where poles are allowed correspond to an incoming free string, resp. an outgoing free string. The Riemann surface correspond to the interaction. To incorporate more strings which are in interaction it is necessary to allow poles at more than two points.

In this work the whole (mathematical) situation is generalized to the case where more than two poles are present. The set of poles is divided into two nonempty subsets, the 'in' and 'out'- points. With respect to this partition, bases of the algebra of vector fields and the modules of forms of integer weight λ are introduced in such a way, that they induce a generalized grading. The existence and uniqueness of such a bases is shown by Riemann-Roch type arguments. Explicit expressions in terms of rational functions, resp. $\sigma-$functions, resp. theta functions and prime forms are given. This setting contains the Virasoro case and the Krichever - Novikov case as special examples. The bases obey an important duality relation. It is obtained by integrating forms of weight λ against forms of weight $1-\lambda$ over the level lines of a suitable generalized proper time function.

The whole procedure is extended to the algebra of meromorphic differential operators (containing beside the algebra of vector fields also the algebra of functions), again with the above restriction on the set of poles. 'Local' central extensions of the involved algebras are introduced using geometrically defined cocycles. The term 'local' depends again on the grading, hence on the partition. For example, generalized Heisenberg algebras are obtained as central extensions of the abelian Lie algebra of functions.

Central extensions inevitably appear in the construction of semi-infinite wedge representation (starting with the modules of forms of weight λ) as analogs of heighest weight representations. By requiring, that the defining cocycle for the extensions of the vector field algebra is independent of λ, the central element operates by multiplication with central charge $c = -2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1)$. The value of the cocycle for the extension of the differential operator algebra for certain index combinations of the bases elements is given, supplying confidence to a conjectured form of the cocycle.

Finally the semi-infinite wedge space also provides a representation of the Clifford algebra given by (again generalized) $b - c$ systems of weight $\lambda, (1-\lambda)$. Interesting commutator relations between the b resp. c operators and the operators corresponding to differential operators are given.

§ 1. Einleitung

Im Rahmen der “konformen Feldtheorie” in der theoretischen Physik hat die Virasoro Algebra nebst ihren Darstellungen eine fundamentale Bedeutung. Die Virasoro Algebra kann beschrieben werden als die universelle zentrale Erweiterung einer dichten Teilalgebra der komplexifizierten Liealgebra der analytischen Vektorfelder auf der Kreissphäre S^1. Diese Algebra ist jedoch isomorph zur Liealgebra der meromorphen Vektorfelder auf $\mathbb{P}^1$ (der Riemannschen Zahlenkugel), welche holomorph auf $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$ sind. Diese zweite Betrachtungsweise hat sich als sehr nützlich für die konforme Feldtheorie erwiesen. Im Zuge der Erweiterung der konformen Feldtheorie auf Riemannsche Flächen höheren Geschlechtes, wie sie etwa in der Stringtheorie auftreten, stellt sich die Frage der Verallgemeinerungen der Virasoro Algebra und ihrer Darstellungen. Diese Verallgemeinerungen wurden von Krichever und Novikov [KN1][KN2] 1987 eingeführt und deren Struktur untersucht. Kurz gesagt handelt es sich bei der entsprechenden Algebra ebenfalls um eine zentrale Erweiterung der Algebra der meromorphen Vektorfelder auf der kompakten Riemannschen Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$, welche holomorph sind außerhalb zweier “generischer” Punkte (welche festgehalten werden). Es ist heute allgemein üblich diese Algebra Krichever - Novikov Algebra zu nennen (mit oder ohne zentrale Erweiterung). Im folgenden bezeichne ich sie auch kurz mit KN Algebra. Dieser Verallgemeinerungsschritt mag naheliegend erscheinen. Es darf jedoch nicht vergessen werden, daß nicht nur die Algebra sondern auch ihre Darstellungen (speziell die “wedge”-Darstellung) wichtig sind. Zur Konstruktion der “wedge”-Darstellung benutzt man im Virasoro Falle die Graduierung der Algebra und der beteiligten Module, welche durch die Nullstellenordnung am Punkt $z = 0$ induziert ist. Die KN Algebra ist nun keine graduierte Algebra im üblichen Sinne mehr. Durch Einführung spezieller Basen kann man jedoch eine verallgemeinerte Graduierung einführen, die es erlaubt die wesentlichen Schritte auch im Falle höheren Geschlechtes durchzuführen. Physiker nahmen diese Konstruktionen auf und benutzten sie zur Beschreibung der konformen Feldtheorie. [PA] enthält eine exemplarische Liste von Arbeiten von Physikern welche sich mit diesen Anwendungen befassen.

Um eine Hinführung zu den Problemstellungen dieser Arbeit zu geben, möchte ich im folgenden erläutern wie die Virasoro Algebra in der Stringtheorie auftaucht. Der nicht an der physikalischen Motivation interessierte Mathematiker mag die folgenden Seiten überschlagen. Im Hauptteil der Arbeit wird keine Referenz mehr zu diesen gemacht.

Stringtheorie ist ein Beispiel einer zweidimensionalen konformen Feldtheorie. Konforme Feldtheorien auf zweidimensionalen orientierbaren Flächen sind dadurch gekennzeichnet, daß alle beteiligten Felder, bzw. Operatoren, bei geeignet gewählter komplexer Struktur, vollständig in holomorphe und antiholomorphe Anteile faktorisieren. So sind beispielsweise die globalen (primären) Felder Φ wie folgt gegeben: Φ ist ein Schnitt in ein Bündel über der (Riemannschen) Fläche M. Es kann dargestellt werden als lokaler Ausdruck in den lokalen Koordinaten z. Sei weiter $w = w(z)$ ein holomorpher Koordinatenwechsel. Φ heißt ein (primäres) Feld vom konformen Gewicht (α, β) falls für seine lokalen Repräsentanten $\Phi(z)$, bzw. $\tilde{\Phi}(w)$ gilt[1]

$$\tilde{\Phi}(w) = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-\alpha} \left(\overline{\frac{\partial w}{\partial z}}\right)^{-\beta} \cdot \Phi(z) \ . \tag{1-1}$$

Zur genaueren Einführung in die konforme Feldtheorie sei auf [BPZ] verwiesen.[2] Zur Vereinfachung möchte ich im folgenden lediglich die $(\alpha, 0)$, bzw. holomorphen Anteile der Felder betrachten.

Die Stringtheorie war in den letzten Jahren die Hoffnung der theoretischen Physiker alle fundamentalen Kräfte (elektromagnetische, schwache, starke und gravitative) als verschiedene “Aspekte” einer einzigen, universellen Kraft zu beschreiben. Auch wenn dies (noch?) nicht gelungen ist, so hat sie jedoch wesentliche Impulse sowohl in der theoretischen Physik (Quantenfeldtheorie) als auch in der Mathematik (Modulraum der Kurven, unendlichdimensionale Liealgebren, Monstergruppe,...) gegeben. Um die wesentlichen Aspekte darzustellen, sei die Situation vereinfacht. Ich betrachte nur die geschlossene, bosonische Stringtheorie. Realistischere Modelle sind supersymmetrische Stringtheorien. Ein String im flachen euklidschen Raum[3] ist in der anschaulichen klassischen Betrachtungsweise ein eingebetteter Kreis (mit Orientierung) im $\mathbb{R}^D$. Hierbei ist die Dimension D des Einbettungsraum nicht a priori festgelegt. Insbesondere ist D nicht 4, bzw. 3. Dieser Kreis bewegt sich mit seiner Eigenzeit im $\mathbb{R}^D$. Anfangsbedingung ist eine feste Position A für den String, Endbedingung eine feste Position B. Die klassische Bewegungsgleichung des Stringes, formuliert als Variationsproblem für die Energie, lautet: Bewege dich von A

[1] Physiker verwenden gerne $\Phi(z, \bar{z})$ statt $\Phi(z)$.

[2] Es treten z.Bsp. durch die Operatorproduktentwicklung in Bezug auf benachbarte Punkte auch lokale (sekundäre) Felder auf.

[3] Auch hier sind realistischere Modelle Strings im Minkowski Raum, bzw. Strings in beliebig gekrümmten Räumen.

nach B in einer Weise, daß eine Fläche minimalen Inhaltes ausgeschöpft wird. Dabei soll sich die Orientierung des Kreises nicht ändern. Die ausgeschöpfte Fläche ist eine orientierte Fläche mit 2 Randkurven, kann also als (berandete) Riemannsche Fläche aufgefaßt werden. Diese Fläche heißt "world sheet" des Strings (in Anlehnung an die bekannte Weltlinie eines Teilchens in der Relativitätstheorie).

Eine Möglichkeit des Überganges von der klassischen Theorie zur Quantentheorie ist die Pfadintegralmethode. In diesem Modell geht man davon aus, daß alle Möglichkeiten der Bewegung von A nach B mit gewissen Wahrscheinlichkeiten realisiert werden. Diese Wahrscheinlichkeit ist jedoch umso kleiner, je größer die Energie, d.h. der Inhalt der ausgeschöpften Fläche, ist. Dabei ist in diesem Modell auch erlaubt, daß sich ein String in zwei Strings teilt, bzw. zwei Strings sich zu einem vereinigen. Dies heißt, die Wechselwirkung mehrerer Strings ist automatisch berücksichtigt. Ein einzelner world sheet ist nun eine (berandete) Riemannsche Fläche beliebigen Geschlechtes. Aufgrund postulierter Invarianzen des Wahrscheinlichkeitsmaßes (Unabhängigkeit von der speziellen lokalen Koordinatenwahl, Invarianz unter Multiplikation der Metrik mit einer positiven reellen Funktion, Invarianz unter Translation im Einbettungsraum) reduzieren sich die verschiedenen Möglichkeiten (alle Einbettungen des world sheets in $\mathbb{R}^D$ und alle Metriken auf dem world sheet) auf die analytischen Isomorphieklassen von Riemannschen Flächen. Zur ausführlicheren Information konsultiere man den Bourbaki Exposé von Bost [Bos], die Einleitung von I. McArthur in [Schl1], das Standardwerk über Stringtheorie [GSW], ...

Auf dem world sheet sind nun alle Felder, bzw. alle Operatoren definiert. Dies ist in vollkommener Analogie zum "Teilchen im Raum" zu sehen. In diesem Fall ist etwa der Ort des Teilchens, der Impuls und die Energie des Teilchens eine Funktion auf der Bahnkurve. Aufgrund der Postulate der Stringtheorie ist die zu studierende Feldtheorie auf dem world sheet eine konforme Feldtheorie. Der Fall Geschlecht $g = 0$ für das world sheet ist gut untersucht und soll als Einstiegsbeispiel betrachtet werden. Allerdings ist die Darstellungsweise etwas anders als üblicherweise in der Physikliteratur anzutreffen. Ich habe sie gewählt unter dem Gesichtspunkt der Verallgemeinerung auf beliebiges Geschlecht. Insbesondere werden Objekte und Notationen wie im Hauptteil der Arbeit verwendet. Im Fall $g = 0$ ist der world sheet ein Zylinder. Dieser kann konform auf $\mathbb{P}^1 \setminus \{I, O\}$ abgebildet werden. Auf der komplex projektiven Gerade sei eine globale Koordinate z gewählt, derart daß I dem Punkt $z = 0$ und O dem Punkt $z = \infty$ entspricht. Es sei $X = \mathbb{P}^1$ und $X_0 = \mathbb{P}^1 \setminus \{I, O\}$. Aufgrund (1-1) sind die interessanten Objekte meromorphe Schnitte in die Tensorpotenzen des kanonischen Bündels K von X. Sie sollen auf X_0 holomorph sein. Sei $\mathcal{F}^\lambda$ der Raum solcher Schnitte in K^λ. λ heißt das Gewicht. Der Schnitt wird auch Form vom Gewicht λ genannt. Ich fixiere eine Basis von $\mathcal{F}^\lambda$ wie folgt

$$\{\ f_n(\lambda) \mid\ f_n(\lambda)(z) := z^{n-1}(dz)^\lambda, \quad n \in \mathbb{Z}\ \}\ . \tag{1-2}$$

Damit ist eine Graduierung von $\mathcal{F}^\lambda$ aufgrund der Numerierung der Basis gegeben. Diese entspricht einer Graduierung in Bezug auf die Nullstellenordnung am Punkt I. Übliche Bezeichnungen für Formen von speziellem Gewicht sind

$$e_n := f_n(-1), \quad \omega_n := f_n(1), \quad A_n := f_n(0), \quad \Omega_n := f_n(2)\ .$$

Die Virasoro Algebra mit zentraler Ladung c ist die Liealgebra erzeugt (als Vektorraum) von $\{\ L_n, \quad n \in \mathbb{Z};\ \}$ und einem zentralen Element t mit den Kommutatorregeln[4]

$$\begin{aligned} &[\ L_n, t\ ] = 0, \\ &[\ L_n, L_m\ ] = (m-n)\, L_{n+m-2} + \frac{c}{12}((n-2)^3 - (n-2))\, \delta_{m,4-n} \cdot t\ . \end{aligned} \tag{1-3}$$

Offensichtlich ist die Virasoro Algebra eine graduierte Algebra. Die Vektorfelder (d.h. die Formen vom Gewicht -1) bilden ebenfalls eine Algebra unter dem üblichen Kommutator. Es gilt

$$[e_n, e_m] = (m-n)\, e_{n+m-2}\ , \tag{1-4}$$

d.h. die Algebra der Vektorfelder $\mathcal{F}^{-1}$ ist isomorph eingebettet in die Virasoro Algebra mit zentraler Ladung $c = 0$. Für $c \neq 0$ sind obige Algebren jeweils isomorphe, nichttriviale zentrale Erweiterungen der Algebra der Vektorfelder. Wenn wir die abstrakte Virasoro Algebra betrachten, so setzten wir deshalb $c = 1$. Für $c = 0$ splitted die zentrale Erweiterung. Sei nun eine Darstellung der abstrakten Virasoro Algebra gegeben, bei der das zentrale Element wie ein Vielfaches der Identität id operiert. Für die zugeordneten Operatoren gilt dann die Gleichung (1-3) wobei t durch id zu ersetzen ist. Das nun auftretende c nennt man auch die zentrale Ladung der Darstellung. Eine Darstellung mit zentraler Ladung 0 definiert eine Darstellung der Algebra der Vektorfelder.

Sei weiter $\rho = \dfrac{1}{z}\, dz$ ein meromorphes Differential. Es hat Pole 1.ter Ordnung bei I und O mit den Residuen $+1$, bzw. -1.

$$u(z) = \mathsf{Re} \int_1^z \rho = \log |z| \tag{1-5}$$

[4]Üblicherweise wird die Virasoro Algebra mit einer anderen Indizierung angegeben: $L'_n = L_{n+2}$. Um in Kohärenz mit dem Hauptteil der Arbeit zu bleiben, habe ich dies nicht übernommen.

ist eine wohldefinierte harmonische Funktion auf X_0.

$$C_\tau = \{ \ z \in X_0 \mid u(z) = \tau \ \} \tag{1-6}$$

seien ihre Levellinien auf X_0. Es sind offensichtlich Kreise um $z = 0$. Für $\tau \to -\infty$ sind es Kreise um I, für $\tau \to +\infty$ Kreise um O. Diese Situation kann stringtheoretisch interpretiert werden: Die Levellinie C_τ stellt den String dar, τ ist die Eigenzeit des Stringes, "$\tau = -\infty$" entspricht dem Eintritt des freien Stringes, "$\tau = +\infty$" dem Austritt des freien Stringes.
Multipliziert man $v \in \mathcal{F}^\lambda$ mit $w \in \mathcal{F}^{1-\lambda}$, so erhält man eine Differentialform welche über C_τ integriert werden kann. Da Pole nur bei I und O vorliegen, ist der Wert des Integrales unabhängig von τ. Die Basis (1-2) erfüllt die folgende Dualitätsbeziehung

$$\frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} f_n(\lambda) \cdot f_{1-m}(1-\lambda) = \delta_{n,m} \ . \tag{1-7}$$

Ist $F(z)$ irgendein Feld, definiert auf X_0 vom Gewicht λ, d.h. ein Schnitt in K^λ, von dem wir wissen, daß es sich schreiben läßt als

$$F = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f_n(\lambda), \tag{1-8}$$

so gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} F \cdot f_{1-n}(1-\lambda) \ . \tag{1-9}$$

Diese Entwicklung in der konformen Feldtheorie ist das Analogon der üblichen Fourierentwicklung. Für das Folgende postuliert man nun, daß alle beteiligten Felder und Operatoren solch eine Entwicklung besitzen. In der Darstellung lehne ich mich an [KN2] an.

Sei M der world sheet und definiere $X : M \to \mathbb{R}^D$ die Einbettung. Die Komponenten X^μ, $\mu = 1, \ldots, D$ sind die Ortsvariablen des Stringes. Für jeden Punkt $P \in M$, der kein singulärer Punkt von C_τ ist, hat man eine Variable σ entlang des Stringes und die oben eingeführte Variable τ in Richtung der Stringbewegung. Der konjugierte Impuls P^μ der Ortvariablen X^μ ist $\dfrac{\partial X^\mu}{\partial \tau}\, d\tau$.[5] Aufgefaßt als Objekte auf M (unter Benutzung der Bewegungsgleichung der Stringes) ergibt sich : X^μ ist ein Feld vom Gewicht 0 und P^μ ein Feld vom Gewicht 1. Wir erhalten folgende (beidseitig unendliche) Entwicklung

$$X^\mu(Q) = \sum_n X_n^\mu A_n(Q), \quad P^\mu(Q) = \sum_n P_n^\mu \, \omega_n(Q) \ . \tag{1-10}$$

[5] Ich vernachläßige hier und auch weiterhin Faktoren von π.

Hierbei sind X_n^μ und P_n^μ skalare Koeffizienten. Die Quantisierung im Operatorformalismus[6] besteht darin alle Felder als operatorwertige Felder aufzufassen. Die Poissonklammer der Felder wird als Kommutatorrelation der Operatoren, welche auf einem, üblicherweise nicht näher spezifizierten, linearen Raum operieren, interpretiert. Dies ergibt hier für $Q, Q' \in C_\tau$

$$\begin{aligned} [X^\mu(Q), P^\nu(Q')] &= \Delta_\tau(Q,Q')\,\delta_{\mu,\nu}, \\ [X^\mu(Q), X^\nu(Q')] &= [P^\mu(Q), P^\nu(Q')] = 0 \ . \end{aligned} \tag{1-11}$$

$\Delta_\tau(Q,Q')$ ist die "$\delta-$Funktion " auf C_τ. Genauer handelt es sich hierbei um eine Funktion in der Variablen Q und ein Differential in der Variablen Q'. Sie ist charakterisiert durch

$$f(Q) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C_\tau} f(Q')\Delta_\tau(Q,Q') \tag{1-12}$$

für Funktionen f auf C_τ. Mit (1-9) ergibt sich die Darstellung

$$\Delta_\tau(Q,Q') = \sum_n A_n(Q)\,\omega_{1-n}(Q') \ . \tag{1-13}$$

Zur Notationsvereinfachung werde ich im folgenden nur eine Komponente von X und P betrachten und den Index weglassen. In den Darstellungen (1-10) werden, aufgrund der Quantisierung, die X_n und P_n operatorwertige Koeffizienten. Mit Hilfe von (1-11) rechnet sich aus[7]

$$[\ X_n, P_{1-m}\ ] = \delta_{m,n}, \quad [\ X_n, X_{1-m}\ ] = [\ P_n, P_{1-m}\ ] = 0 \ .$$

Der Impulstrom (genauer sein $(1,0)-$Anteil) ist gegeben als das Differential

$$J(Q) = \frac{\partial X}{\partial \sigma}(Q)d\sigma + P(Q)$$

Als Objekt auf dem world sheet kann J entwickelt werden

$$J(Q) = \sum_n \big(X_n dA_n(Q) + P_n\omega_n(Q)\big) = \sum_n a_{1-n}\omega_n(Q) \ . \tag{1-14}$$

---

[6] Diese Quantisierung wird 2.Quantisierung genannt, da Felder quantisiert werden.

[7] Die Frage der Berechtigung von unendlichen Summen von Operatoren möchte ich hier nicht diskutieren. Sie werden noch ein paar mal im physikalischen Teil auftreten. Der skeptische Leser möge diese als heuristische Konzepte auffassen. Durch eine "Regularisierungsprozedur" (Normalordnung) ist sicherzustellen, daß die Aktion für die relevanten Operatorsummen wohldefiniert ist. Siehe hierzu auch § 8.(b).

Das Differential dA_n kann mit der Dualität (1-9) berechnet werden

$$dA_n = \sum_m \gamma_{n,1-m}\,\omega_m \quad \text{mit} \quad \gamma_{n,m} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C_\tau} dA_n \cdot A_m \ . \tag{1-15}$$

Aufgrund der einfachen Gestalt bleibt für $g = 0$ nur ein einziger Summand

$$dA_n = (n-1)\,\omega_{n-1}, \quad \text{bzw.} \quad \gamma_{n,m} = (n-1)\,\delta_{m,2-n} \ .$$

Für die Koeffizienten

$$a_{1-n} = P_n + \sum_m \gamma_{m,1-n} X_m$$

ergibt sich die Kommutatorrelation

$$[a_n, a_m] = -2\gamma_{n,m} \tag{1-16}$$

bzw. für $g = 0$

$$[a_n, a_m] = 2(1-n)\delta_{m,2-n} \ . \tag{1-17}$$

Die operatorwertigen Koeffizienten des Stromes J bilden somit eine Oszillatoralgebra mit unendlich vielen Freiheitsgraden. Diese wird auch Heisenbergalgebra genannt. In § 6. werde ich ausführen wie man sie als zentrale Erweiterung der abelschen Liealgebra $L\mathcal{F}^0$, der Funktionenalgebra, gewinnen kann.

Der nächste Schritt ist die Behandlung des Energie-Impulstensors T . Der Energie-Impulstensor ergibt sich als "Variation des Energiefunktionals (gleich Flächeninhalt) des world sheets nach der Metrik des world sheets" (siehe [GSW]). Im klassischen Bild ist er das Quadrat des Stromes (Sugawaraform), somit eine Form vom Gewicht 2 (ein quadratisches Differential)

$$T(Q) = -\frac{1}{2}(J(Q))^2 = -\frac{1}{2}\left(\sum_n a_{1-n}\omega_n(Q)\right)^2 = \sum_n L_n \Omega_{1-n}(Q) \ . \tag{1-18}$$

Will man eine Beziehung zwischen den operatorwertigen Fourierkoeffizienten a_n und L_n erhalten, um festzustellen wie diese operieren, so steht man vor dem Problem daß die Form (1-18) unter der Annahme, daß alle Koeffizienten Zahlen sind, gebildet wurde. Nun ist im allgemeinen $a_n \cdot a_m \neq a_m \cdot a_n$. Es ist also nicht klar, welche Reihenfolge im Quadrat angenommen werden sollte. Die Vorschrift einer gewissen Reihenfolge nennt man Normalordnung

$: a_n a_m :$. Diese ist bestimmt durch gewisse Vorgaben. Für die Darstellung der Quantentheorie wird gefordert, daß $J(Q)$ angewendet auf den Grundzustand (das "Vakuum") $|0\rangle$ holomorph bei $z = 0$ ist ("Regularität des Vakuums"). Dies bedeutet, es muß $a_n|0\rangle = 0$ für $n \geq 1$ gelten. Diese a_n heißen deshalb Vernichtungsoperatoren. Die Normalordnung besteht darin im Fall des Nichtvertauschens von a_n und a_m, und falls einer der beiden ein Vernichtungsoperator ist, diesen rechts aufzuführen. In unserem Fall ($g = 0$) vertauscht nur dann a_n und a_m nicht, falls $m = (2 - n)$ ist. Insbesondere ist die Normalordnungsvorschrift eindeutig. Sie ergibt

$$: a_n a_m : \ := \begin{cases} a_n a_m, & m \geq n \\ a_m a_n, & m < n \ . \end{cases}$$

Der quantenmechanische Operator T ist definiert als

$$T(Q) = -\frac{1}{2} : J(Q)^2 := -\frac{1}{2} \sum_{n,m} : a_n a_m : \omega_{1-n}(Q) \omega_{1-m}(Q) \ . \tag{1-19}$$

Wiederum mit der Dualitätsformel gilt

$$L_k = -\frac{1}{2} \sum_{n,m} l^k_{n,m} : a_n a_m : \quad \text{mit} \quad l^k_{n,m} = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} e_k \omega_{1-n} \omega_{1-m} \ . \tag{1-20}$$

Im Fall $g = 0$ verschwindet der Koeffizient $l^k_{n,m}$ falls $(n + m - k) \neq 0$ ist und für $n + m - k = 0$ ist er 1. Somit

$$L_k = -\frac{1}{2} \sum_{n} : a_n a_{(k-n)} : \ . \tag{1-21}$$

Durch direktes Nachrechnen auf den Darstellungen verifiziert man [KN2], daß die Operatoren L_k eine Darstellung der Virasoro Algebra mit zentraler Ladung $c = 1$ bilden. Führen wir alle Komponenten mit, so ist T die Summe von D Termen, d.h. als gesamte zentrale Ladung tritt $c_X = D$ auf.

Der nächste Schritt der Quantentheorie besteht darin, die Kommutatorrelationen der Operatoren auf entsprechenden Räumen zu realisieren.[8] Die Komponenten L_k von T haben allerdings noch eine andere Bedeutung. Da sie den meromorphen Vektorfeldern auf X entsprechen, die holomorph auf X_0 sind,

[8] Weitere Schritte sind: Einführung eines Skalarproduktes, Berechnung von Eigenwerte der Operatoren, usw. . Darauf werde ich hier jedoch nicht eingehen.

sind sie “infinitesimale” Erzeugende von konformen Transformationen, d.h. L_k ist “zugeordnet” dem (lokalen) konformen Fluß

$$\Phi_k(t,z) \; : \; (z \mapsto z + t \cdot z^{k-1}), \quad t \in \mathbb{R} \; .$$

Eine konforme Feldtheorie sollte abgeschlossen unter konformen Umparametrisierungen sein. Mit einem Feld Φ, oder mit einem Zustand $|w\rangle$ muß deshalb auch das entsprechend “abgeleitete” Feld $L_k\Phi$, bzw. der Zustand $L_k|w\rangle$ in der Theorie vorhanden sein. Gesucht sind also Darstellungen der Virasoro Algebra, die gewisse, für die Physik wichtige, Eigenschaften haben. Dies sind etwa Unitarität, positive Eigenwerte des Energieoperators und die Existenz eines Grundzustandes $|0\rangle$ mit

$$L_n|0\rangle = 0, \quad n \geq 3, \qquad L_2|0\rangle = h|0\rangle, \quad h \in \mathbb{C} \; .$$

Solche Darstellungen wurden unter dem Namen Verma Darstellung, bzw. Höchstgewichtsdarstellungen ausführlich von Mathematikern und Physikern (siehe Literaturhinweise in [KaR]) studiert.[9] Eine Möglichkeit explizite Realisierungen zu erhalten besteht darin, von der Aktion der Vektorfelder auf den Formen (via Lieableitung) auszugehen. Es gilt

$$L_{e_n}(f_m(\lambda)) = e_n \,.\, f_m(\lambda) = ((m-1) + \lambda(n-1))\, f_{n+m-2} \; . \tag{1-22}$$

Dies ergibt ebenfalls eine Aktion der L_k auf $\mathcal{F}^\lambda$. Leider hat diese Darstellung nicht die gewünschten Eigenschaften. Um solche zu konstruieren, kann man ausgehend von $\mathcal{F}^\lambda(A)$ den semi-infiniten Wedgeraum (siehe § 7.) benutzen. Dieser besitzt als Basis die (formalen) Wedgeformen

$$\psi = f_{i_1} \wedge f_{i_2} \wedge \ldots f_m \wedge f_{m+1} \wedge \ldots \tag{1-23}$$

mit $i_1 < i_2 < \ldots < m < \ldots$, wobei, beginnend von einem Index m der von ψ abhängt, alle Indices auftreten müssen. Auf diesen Formen operieren die Vektorfelder durch die Leibnizregel. D.h. das Vektorfeld e operiert auf einem einzelnen Faktor, die anderen Faktoren bleiben unverändert und es wird über alle Möglichkeiten summiert (siehe (7-2) zur genaueren Definition). Das $\wedge$ Zeichen deutet an, wie das Ergebnis in Standardform zu überführen ist. Für e_n, mit $n \neq 2$, bleiben bei der Aktion nur endlich viele Terme übrig. Für e_2 ist diese Aktion nicht wohldefiniert, da sich in jedem Term das Ausgangsbasiselement mit einem Faktor versehen reproduziert. Um eine wohldefinierten Aktion

[9] Tatsächlich treten Untermodule von Tensorprodukten verschiedener Vermadarstellungen auf.

zu erhalten, muß man “Regularisieren”. Allerdings definiert die regularisierte Aktion nur noch eine Lieaktion einer zentralen Erweiterung der Algebra der Vektorfelder, d.h. eine Lieaktion der Virasoro Algebra.

Diese semi-infiniten Wedgeprodukte spielen auch eine wichtige Rolle in einem anderen Baustein der quantisierten Stringtheorie, den sogenannten $b-c$ Systemen [Bo1]. Diese Felder (auch “ghost”-Felder genannt) haben keine klassische Entsprechung. Es sind Operatorenfelder vom Gewicht 2, bzw. -1. Sie haben somit eine Entwicklung

$$b(Q) = \sum_n b_{1-n}\Omega_n(Q), \quad c(Q) = \sum_n c_{1-n}e_n(Q)\ . \tag{1-24}$$

Weiter gilt für $Q, Q' \in C_\tau$ (d.h. zur selben “Zeit”)

$$\begin{aligned} \{b(Q), c(Q')\} = b(Q)\cdot c(Q') + c(Q')\cdot b(Q) = \Delta_\tau(Q,Q') \\ \{b(Q), b(Q')\} = \{c(Q), c(Q')\} = 0\ . \end{aligned} \tag{1-25}$$

Δ_τ ist die “Delta-Funktion” für $b-c$ Systeme.
In der geschlossenen bosonischen Stringtheorie führt man sie ein, um die Invarianz des Pfadintegrales unter der Reparametrisierungsgruppe (das sind die Diffeomorphismen welche isotop zur Identität sind) bequem handhaben zu können. Wie bereits erwähnt, wird über alle Einbettungen und alle Metriken “integriert”. Aufgrund der Reparametrisierungsinvarianz kann die Metrik g lokal auf Diagonalform $g = \mathbf{e}^\varphi \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gebracht werden (φ eine reelle Funktion). (In Physikerterminologie: Man wählt eine Eichung). Es kann dann das “Volumen” der Reparametrisierungsgruppe abdividiert werden, indem transversal zu den Orbits (d.h. über ein “gauge slice”) integriert wird. Vorher muß allerdings das Integrationsmaß transformiert werden. Dies erfolgt entweder durch Einführung von Zetafunktions-regularisierten Determinanten für den Laplaceoperator auf den quadratischen Differentialen [Bos] oder, hierzu äquivalent, durch Einführung solcher $b-c$ Systeme (Geister) und Ausführung einer Integration über antikommutierende Variable (Berezin-Integral). Dieses Verfahren wird auch Faddeev-Popov-Prozedur genannt. (Siehe [GSW,p.122] zur näheren Information.)
Mittlerweile haben die $b-c$ Systeme als eine Klasse einfach zu behandelnder feldtheoretischer Modelle eine eigenständige Bedeutung erfahren.

Zurück zur Formel (1-25). Analog zu den Ableitungen bei den klassischen Feldern ergibt sich hier für die operatorwertigen Koeffizienten

$$\{b_n, c_m\} = \delta_{m,1-n}, \quad \{b_n, b_m\} = \{c_n, c_m\} = 0\ . \tag{1-26}$$

Eine Darstellung solcher Systeme kann ausgehend von der semi-infiniten Form

$$|0\rangle = \Omega_1 \wedge \Omega_2 \wedge \Omega_3 \wedge \dots \tag{1-27}$$

erhalten werden. Die Aktion von c_n besteht im "Einhängen" von Ω_n, die Aktion von b_n im "Aushängen" von Ω_{1-n}. Für eine semi-infinite Form w gilt also

$$c_n.w = \Omega_n \wedge w, \quad b_n.w = i_{e_n}(w) \ .$$

Hierbei ist i_{e_n} definiert als die Kontraktion auf jedem Faktor

$$i_{e_n}(\Omega_k) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C_\tau} e_n \Omega_k \tag{1-28}$$

und die Fortsetzung dieser Aktion mit der (modifizierten) Leibnizregel

$$i_{e_n}(\Omega_{j_1} \wedge \Omega_{j_2} \wedge \Omega_{j_3} \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (i_{e_n} \Omega_{j_k}) \wedge \Omega_{j_1} \wedge \dots \check{\Omega}_{j_k} \dots \tag{1-29}$$

($\check{\Omega}_{j_k}$ bdeutet, daß dieser Term ausgelassen wird). Dies definiert eine Darstellung der von den b_n und c_n mit (1-26) erzeugten Cliffordalgebra. Die Wahl des Vakuumvektors (1-27) bedeutet

$$b_n|0\rangle = c_n|0\rangle = 0 \quad \text{für} \quad n \geq 1 \ .$$

Also sind $b(Q)|0\rangle$ und $c(Q)|0\rangle$ holomorph am Punkt $z = 0$.

Der $(2,0)$ Anteil des Energie-Impulstensors T ist in der lokalen Darstellung gegeben als

$$T(z) = -L_c(b)(z) = -c(z)\frac{\partial b}{\partial z}(z) - 2\frac{\partial c}{\partial z}(z) b(z) = \sum_n L_{1-k} \Omega_k(z) \ . \tag{1-30}$$

Um die L_k in den b_n bzw. c_n auszudrücken muß wieder normalgeordnet werden. Hier bedeutet dies, daß, falls die Operatoren nicht antikommutieren, derjenige Operator am weitesten rechts aufgeführt wird, der das Vakuum (1-27) annulliert.

$$: c_n b_m : := \begin{cases} c_n b_m, & m > 0 \\ -b_m c_n, & m \leq 0 \ . \end{cases} \tag{1-31}$$

Die operatorwertigen Koeffizienten in (1-30) können gegeben werden als

$$L_k = \sum_n (k-n) : c_{1-n} b_{n+k-2} :$$

Sie bilden ebenfalls eine Darstellung der Virasoro Algebra, nun allerdings mit zentraler Ladung $c_{gh} = -26$ (siehe § 8.(b)). Die gesamte quantisierte bosonische Stringtheorie besteht in den X^μ−Feldern und den ghost-Feldern. Der Gesamtdarstellungsraum der Virasoro Algebra ist das Tensorprodukt der einzelnen Darstellungen mit der Aktion

$$L(v \otimes w) = L(v) \otimes w + v \otimes L(w)\ .$$

Hierbei addieren sich die zentralen Ladungen. Diese ist ja der multiplikative Faktor mit denen das zentrale Element operiert. Falls die gesamte zentrale Ladung verschwindet, bedeutet dies, daß die Algebra der Vektorfelder auf den Zuständen operiert. Dies heißt die quantisierte Theorie ist, wie die klassische, "konform invariant". Falls nicht, sprechen die Physiker von der "konformen Anomalie" (hervorgerufen durch die Quantisierung). Fordert man das Verschwinden der konformen Anomalie so bedeuted dies $c_{gh} = -c_X$, also $D = 26$. Man erhält somit eine Fixierung der Einbettungsdimension.[10]

Soweit die wichtigsten Aspekte der Geschlecht $g = 0$ Betrachtung. Sie wurden jedoch schon so formuliert, daß sie auf höheres Geschlecht übertragbar sind. Die meist übliche Darstellung der physikalischen Theorie arbeitet vollständig in der lokalen Koordinate z und mit lokaler Trivialisierung aller Bündel. Krichever und Novikov [KN1], [KN2] haben die entsprechenden Konstruktionen bei höherem Geschlecht ausgeführt. Die Virasoro Algebra wurde ersetzt durch ihre Verallgemeinerung, die Krichever - Novikov Algebra. Wie bereits erwähnt wurden diese Konstruktionen von Physikern aufgegriffen um einen globalen Operatorformalismus auf Riemannsche Flächen von höherem Geschlecht zu formulieren. Krichever und Novikov haben sich allerdings auch nur auf 2 Polpunkte beschränkt. In der obigen Interpretation in der Stringtheorie liegt es nahe statt zweier Polpunkte, die dem Eintritts- und Austrittspunkt eines freien Stringes entsprechen, mehrere einkommende und mehrere ausgehende Strings zu erlauben. Aufgrund des Impulserhaltungssatzes muß allerdings, falls ein String eintritt, auch mindestens einer austreten und umgekehrt. Die notwendigen algebraisch-geometrischen Grundkonstruktionen durchzuführen, ist der Inhalt dieser Arbeit. Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß im folgenden kein Bezug mehr zur physikalischen Anwendung gemacht wird (Ausnahme § 8.(b)). Insbesondere wird auch nicht der Versuch unternommen, einen globalen Operatorformalismus der konformen Feldtheorie auf Riemannschen Flächen von höherem Geschlecht zu konstruieren. Untersucht wird auch nicht die zweifellos sehr interessante Frage

[10] Um auf Dimension 4 der Raumzeit zu kommen, werden 22 Dimensionen als interne Dimensionen "kompaktifiziert".

des mathematischen Zusammenhanges eines solchen globalen Formalismus mit dem lokalen Operatorformalismus, dessen mathematische Grundlagen etwa in [BS],[KNTY],[TUY],[Wi1] dargestellt werden. (Im lokalen Formalismus wird an jedem Punkt des world sheets eine Virasoro Algebra "angeheftet".)

Ich möchte nun eine Kurzfassung des **Inhaltes** geben. In § 2. wird der allgemeine Rahmen erläutert. Gegeben sei eine Riemannsche Fläche X von beliebigem Geschlecht (diese entspricht in der Stringtheorie dem world sheet). A sei eine Menge von Punkten aus X aufgeteilt in 2 nichtleere Teilmengen I und O. Die Punkte in I entsprechen den Eintrittsstellen freier Strings, die Punkte in O den Austrittsstellen freier Strings. I und O können unterschiedliche Mächtigkeit haben. Die Punkte in A seien generisch gewählt. Sei ρ ein meromorphes Differential, das genau Pole 1.ter Ordnung an den Punkten aus A hat, mit positiven Residuen an den Punkten aus I und negativen Residuen an den Punkten aus O und rein imaginären Perioden. Analog zu (1-6) werden die Levellinien C_τ definiert. Allerdings können sie nun mehrere Komponenten haben, bzw. sie können Singularitäten haben (an den Nullstellen von ρ). Die C_τ bilden in der Interpretation der Stringtheorie die Stringkonfiguration zur Eigenzeit τ. Insbesondere ist die Levellinie C_τ für $\tau \ll 0$ eine Kollektion von Kreislinien um die Punkte aus I und für $\tau \gg 0$ eine Kollektion von Kreislinien um die Punkte aus O. $\mathcal{F}^\lambda(A)$ sind die meromorphen $\lambda-$Formen (Schnitte in K^λ), die holomorph auf $X \setminus A$ sind. $\mathcal{F}^{-1}(A)$ sind die Vektorfelder. Sie bilden unter dem üblichen Kommutator der Vektorfelder eine Liealgebra. Diese nenne ich (verallgemeinerte) Krichever - Novikov Algebra $\mathcal{KN}(A)$. Durch Lieableitung operiert $\mathcal{KN}(A)$ auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$ und macht diesen zu einem Liemodul. Daneben operiert auch $\mathcal{F}^0(A)$ auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$ durch Multiplikation mit den Funktionen. $\mathcal{KN}(A)$ zusammen mit $\mathcal{F}^0(A)$ (aufgefaßt als abelsche Liealgebra) bilden die Liealgebra der Differentialoperatoren vom Grad ≤ 1 auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$. Der Virasorofall ist als Spezialfall enthalten. Hierzu nehme man $X = \mathbb{P}^1$ mit der Parametrisierung z, $I = \{z = 0\}$ und $O = \{z = \infty\}$. Ebenso ist der von Krichever und Novikov behandelte Fall enthalten. Hierbei enthält I und O jeweils nur einen Punkt.

In § 3. wird mit Hilfe von Riemann-Roch ein Erzeugendensystem für $\mathcal{F}^\lambda(A)$ angegeben. Jedes Element dieses Systemes wird durch vorgeschriebene Ordnungen an den Punkten aus A fixiert (bis auf Multiplikation mit einer Konstanten). Hierbei wird benutzt, daß die Punkte in allgemeiner Lage sind.

Nur in diesem Fall ist man in der Lage zu schließen, daß die Forderung nach einer zusätzlichen Nullstelle der zu betrachtenden Schnitte von K^λ an einem Punkt aus A die Dimension des entsprechenden Schnittraumes um 1 erniedrigt (falls sie nicht schon 0 war). Durch schrittweises Erhöhen der Ordnungsvorgaben, erhält man die Eindeutigkeit der erzeugenden Elemente. Da K und 0 spezielle Divisoren sind, sind für $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ einige Sonderbetrachtungen notwendig. Insbesondere sind die Ordnungsvorschriften nicht immer ausreichend zur Fixierung der Erzeugenden.

In § 4. gebe ich explizite Formen dieser Erzeugenden an. Im Fall $g = 0$ ist dies trivialerweise durch rationale Ausdrücke analog zu (1-2) machbar. Im Fall $g = 1$ genügt wegen $K = 0$ die Konstruktion von Funktionen. Dies erfolgt mit Hilfe der Weierstraßchen $\sigma-$Funktion. Im Fall $g \geq 1$ benutze ich die Jacobiabbildung um die Riemannsche Fläche X in ihre Jacobivarität $\operatorname{Jac}(X)$ einzubetten. Mit Hilfe der "prime"-Formen (dies sind mehrwertige Formen auf $X \times X$ vom Gewicht $-1/2$ in jedem Argument) und Thetafunktionen können entsprechende Erzeugende konkret angegeben werden. Hierbei bezieht sich "konkret" auf die eingebettete Riemannnsche Fläche in $\operatorname{Jac}(X)$. Solche explizite Formen sind in zweifacher Weise nützlich. Zum einem werden sie von den Physikern benutzt um "Übergangswahrscheinlichkeiten" zu berechnen [Bo1]. Zum anderen kann der Effekt der Variation der Punkte aus A und der Variation der komplexen Struktur von X studiert werden.

In § 5. erfolgt die Auszeichnung einer Basis. In § 3. und § 4. war die Zerlegung $A = I \cup O$ ohne Belang. Die Basis wird nun von der Zerlegung abhängen. Die Punkte in I seien von 1 bis k numeriert. Es werden aus dem Erzeugendensystem von $\mathcal{F}^\lambda(A)$ Elemente

$$f_{n,p}(\lambda), \quad n \in \mathbb{Z},\ p = 1, \dots, k$$

ausgewählt. Der Index n steht im Zusammenhang mit der Ordnung von $f_{n,p}(\lambda)$ an den Punkten aus I. Genauer gilt

$$\operatorname{ord}_{P_i}(f_{n,p}(\lambda)) = n - \delta_{i,p}, \quad P_i \in I\ .$$

Die Ordnungen an den Punkten aus O sind gewählt, um Eindeutigkeit (bis auf skalare Vielfache) zu erzwingen. Allerdings sollen ebenfalls noch gewisse Eigenschaften gelten, die im folgenden aufgeführt werden. Die Wahlen sind so gemacht, daß wiederum Dualität in Analogie zu (1-7) gilt

$$\frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} f_{n,p}(\lambda) f_{1-m,r}(1-\lambda) = \delta_{n,m} \cdot \delta_{p,r}\ . \tag{1-32}$$

Die Methode, dies zu berechnen, besteht darin je nach Situation die Residuen an den Punkten aus I, bzw. aus O zu berechnen. Die Dualität (1-32) ist fundamental. Jedes $v \in \mathcal{F}^\lambda(A)$ ist Linearkombination der $f_{n,p}(\lambda)$. Die Dualität erlaubt es die Koeffizienten in der Linearkombination als Integral, bzw. Residuum auszudrücken. Insbesondere kann man wiederum Entwicklungssummen, wie in (1-8), in Bezug auf diese Basis hinschreiben.

Es gilt aber noch mehr. Führt man auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$ eine Graduierung ein, derart daß die Linearkombinationen der Elemente $f_{n,p}$ die homogenen Elemente vom Grad n sind, dann ist $\mathcal{F}^\lambda(A)$ i.Allg. kein graduierter Modul über $\mathcal{KN}(A)$ mehr, wie er er es im Virasoro Falle (1-22) war. Allerdings liegt eine verallgemeinert graduierte Struktur vor. Genauer gilt

$$e_{n,p} \,.\, f_{m,r}(\lambda) = \sum_{h=n+m-2}^{n+m+L} \quad \sum_{s=1}^{k} C_{(n,p),(m,r)}^{(h,s)}(\lambda) \cdot f_{h,s}(\lambda) \ . \tag{1-33}$$

Hierbei ist $e_{n,p} = f_{n,p}(-1)$ und $e \,.\, f = L_e(f)$ die Lieableitung von f in Richtung des Vektorfeldes e. Weiter ist L eine Konstante die weder von n noch von m abhängt. Falls $\#I = \#O$ (und für $g = 0$ noch zusätzlich $\#I = 1$), so gilt $L = 3g - 2$ für $\lambda \neq 0, 1$. Eine verallgemeinert graduierte Struktur ergibt sich auch, wenn man $\mathcal{F}^\lambda(A)$ als Modul über der (assoziativen) Algebra $\mathcal{F}^0(A)$ auffaßt. Die Gleichung (1-33) ist, wie sich in § 7. zeigen wird, genau das was man braucht um die Wedgeproduktdarstellung zu konstruieren. Natürlich ist die Festlegung von $\mathcal{F}^\lambda(A)$ nicht gekoppelt mit der Aufspaltung von A in I und O. Unterschiedliche Aufspaltungen induzieren auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$ unterschiedliche verallgemeinerte Graduierungen. Die Graduierung bleibt invariant unter Umnumerierung der Punkte aus I. Werden die Punkte aus O umnumeriert, so ändert sich zwar die Graduierung, nicht jedoch die Filtrierung. Im Gegensatz dazu induziert eine andere Aufspaltung der Menge A eine nichtäquivalente Filtrierung.

Neben der Darstellung obiger Ideen besteht der zweite Teil von § 5. darin, Regeln für die Festlegung der Ordnungen an den Punkten aus O für alle Möglichkeiten von $\#I$ und $\#O$ und alle λ zu geben, derart daß die oben genannten Eigenschaften (Basiseigenschaft, Dualität, verallgemeinert graduierte Struktur) Gültigkeit haben. Insbesondere sind aufgrund der Dualitätsforderungen die Basiselemente auch für $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ eindeutig fixiert.

Wie man im Virasoro Fall gesehen hat, benötigt man zentrale Erweiterungen der Algebra der Vektorfelder. Diese werden in § 6. studiert. Zentrale Erweiterungen einer Liealgebra $\mathcal{G}$ werden durch antisymmetrische Bilinearformen

χ auf $\mathcal{G}$ (mit Werten in $\mathbb{C}$) gegeben, welche den Kozykelbedingungen

$$\chi([f,g],h) + \chi([g,h],f) + \chi([h,f],g) = 0$$

genügen. Um zentrale Erweiterungen $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$ von $\mathcal{KN}(A)$ zu erhalten, kann ich auch hier die von Krichever und Novikov verallgemeinerte Form des Virasoro Kozykels benutzen. Sie funktioniert auch bei mehreren Polstellen. Es gilt

$$\chi(e,h) = \frac{1}{24\pi\mathbf{i}} \oint_{C_\tau} \left(\frac{1}{2}(f'''t - ft''') - R \cdot (f't - ft') \right) dz \tag{1-34}$$

Hierbei sind $e = f\frac{\partial}{\partial z}$, bzw. $h = t\frac{\partial}{\partial z}$ die lokalen Formen der Vektorfelder und R ein holomorpher, projektiver Zusammenhang. R kompensiert gerade die Tatsache, daß die erste Hälfte des Integranden unter Koordinatenwechsel sich nicht wie ein Differential transformiert. R verschwindet für projektive Transformationen. Deshalb wird er auch für $g = 0$ nicht benötigt.

Der Kozykel (1-34) erfüllt in Bezug auf die spezielle Basis von § 5. eine wichtige Lokalitätseigenschaft. Es gilt nämlich

$$\chi(e_{n,p}, e_{m,r}) = 0 \quad \text{für} \quad (n+m) \geq 5 \quad \text{oder} \quad (n+m) \leq M \leq 3 \ .$$

Hier ist M wiederum eine, weder von m noch von n abhängige, Konstante. Für die n und m Werte an der oberen Grenze des Bereiches, an dem der Kozykel nicht verschwindet, kann ich den Kozykel explizit berechnen. Es ergibt sich

$$\chi(e_{2+i,p}, e_{2-i,r}) = \left(\frac{1}{12}(i^3 - i) \right) \delta_{p,r} \tag{1-35}$$

in Analogie zum Virasoro Fall. Im Virasoro Fall läßt sich leicht zeigen, daß (bis auf kohomologe Abänderung und Multiplikation mit einem Skalar) dieser Kozykel der einzige Kozykel ist. Im Fall zweier Punkte und beliebigem g wird dies in [KN1] mit entsprechendem Aufwand gezeigt. Vermutlich wird es auch für eine beliebige Anzahl von Punkten gelten. Ich gebe eine Skizze eines möglichen Beweises, führe ihn jedoch nicht aus, da er ganz anders geartete Methoden, als in der vorliegende Arbeit entwickelt, erfordern würde.

Neben der Krichever - Novikov Algebra studiere ich noch zentrale Erweiterungen der (abelschen) Liealgebra $L\mathcal{F}^0(A)$ der Funktionen. Hier ist ein nichttrivialer Kozykel gegeben durch

$$\gamma(f,g) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C_\tau} f\, dg \ . \tag{1-36}$$

Die durch diesen Kozykel definierte zentrale Erweiterung von $L\mathcal{F}^0(A)$ nenne ich verallgemeinerte Heisenberg Algebra. Sie spezialisiert sich im Virasoro Fall zu der schon angesprochenen Oszillatoralgebra (1-17). Der Vektorraum $\mathcal{D}^1(A) = \mathcal{KN}(A) \oplus \mathcal{F}^0(A)$ kann zu einer Liealgebra gemacht werden. Auf jedem Summanden ist die Lieoperation wie vorgegeben . Durch

$$[e,h] = -[h,e] = L_e(h), \quad e \in \mathcal{KN}(A),\ h \in \mathcal{F}^0(A)$$

wird $\mathcal{D}^1(A)$ zu einer Liealgebra. Es ist die Liealgebra der Differentialoperatoren vom Grad ≤ 1. $\mathcal{F}^\lambda(A)$ wird durch die Operation Lieableitung nach einem Vektorfeld, bzw. Multiplikation mit einer Funktion zu einem Liemodul über $\mathcal{D}^1(A)$. Die obigen Kozykel (1-34) und (1-36) definieren auch Kozykel auf $\mathcal{D}^1(A)$. Daneben gibt es noch einen 3. linear unabhängigen Kozykel der $\mathcal{KN}(A)$ mit $\mathcal{F}^0(A)$ vertwisted. Dieser ist gegeben durch (f ist die lokale Darstellung von e)

$$\beta(e,h) = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} (fh'' + T \cdot fh')dz \ . \tag{1-37}$$

T ist ein "affiner Zusammenhang" der allerdings nicht holomorph auf X ist. Er kann so gewählt, daß er lediglich einen Pol 1.Ordnung an einem Punkt aus O besitzt. Sowohl für den Kozykel (1-36) als auch (1-37) gelten wiederum gewisse Lokalitätsaussagen. Im Virasoro Fall ist $H^2(\mathcal{D}^1(\{0,\infty\}))$ von diesen 3 Kozykeln erzeugt (siehe [ACKP]). Ich führe die Algebra der kohärenten Differentialoperatoren $\mathcal{D}(A)$ über die universelle einhüllende Algebra von $\mathcal{D}^1(A)$ ein (triviale Relationen werden aus dieser herausdividiert). Diese Namensgebung wähle ich deshalb, da ihre Elemente als Differentialoperatoren auf allen $\mathcal{F}^\lambda(A)$ simultan operieren.

In § 7. studiere ich Wedgeproduktdarstellungen der eingeführten Algebren. Hierbei wird der Fall $\mathcal{KN}(A)$ ausführlich behandelt. Statt der Elemente $f_n(\lambda)$ werden nun die Elemente $f_{n,p}(\lambda)$ in (1-23) zur Definition benutzt. $\mathcal{H}^\lambda(A)$ bezeichne den Raum der semi-infiniten Formen. Die Anordnung bezieht sich immer auf die lexikographische Ordnung der Doppelindices. Auch hier ist die Aktion nicht für alle $e_{n,p}$ wohldefiniert. Anders wie im Virasorofall sind es nun mehrere, die Probleme bereiten. Aufgrund der verallgemeinert graduierten Struktur sind es allerdings immer noch endlich viele. Genauer gilt: Die Aktion der Unteralgebren

$$\mathcal{KN}^+(A) = \langle e_{n,p} \mid n \geq 3,\ p = 1, \ldots, k\rangle$$
$$\mathcal{KN}^-(A) = \langle e_{n,p} \mid n \leq -1-L,\ p = 1, \ldots, k\rangle$$

ist wohldefiniert. Für die Elemente "dazwischen" muß die Aktion abgeändert werden. Diese abgeänderte Aktion ist nur noch eine projektive Aktion. Erst beim Übergang zu einer zentralen Erweiterung $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$ wird die Aktion wieder zu einer Lieaktion. Den Beweis der "Fortsetzung" dieser Aktion führe ich zuerst mit einer Methode, welche eine Verallgemeinerung der im Virasorofall angewandten ist, wie sie in [KaR] dargestellt wurde. Aufgrund der Basiswahlen definiert die Aktion von $\mathcal{KN}(A)$ auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$ eine Einbettung in den Vektorraum der beidseitig unendlichen quadratischen Matrizen. Wegen der verallgemeinert graduierten Struktur liegt $\mathcal{KN}(A)$ in $\overline{gl}(\infty)$, der Algebra der Matrizen mit nur endlich vielen Diagonalen. Diese Einbettung ist natürlich verträglich mit der Aktion auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$ (und $\mathcal{H}^\lambda(A)$ falls definiert). Für $\overline{gl}(\infty)$ existiert über eine wohldefinierte Abänderung der Aktion und einen wohldefinierten 2-Kozyklus eine Aktion von $\widehat{gl}(\infty)$ auf $\mathcal{H}^\lambda(A)$. Aufgrund der Einbettung von $\mathcal{KN}(A)$ existiert eine zentrale Erweiterung $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$, die auf $\mathcal{H}^\lambda(A)$ operiert. Der definierende Kozykel ist der Pullback (unter der Einbettung) des Kozykels auf $\overline{gl}(\infty)$. Dieser Pullback erfüllt wiederum die Lokalitätseigenschaft.

Eine zweite Methode dies alles zu zeigen, beruht auf einem Vorschlag von R.Weissauer. Sie ist im wesentlichen äquivalent und führt zu einer isomorphen zentralen Erweiterung. Die Operation von $e_{n,p}$ auf den Formen wird modifiziert durch die Vorschrift

$$e_{n,p} \underset{w}{\cdot} f_{m,r} = w^m \cdot (e_{n,p} \cdot f_{m,r}) \ .$$

Hierbei ist w eine komplexe Variable. Ist ψ ein Basisvektor von $\mathcal{H}^\lambda(A)$, dann ist die entsprechende Aktion $op_w(e_{n,p})(\psi)$ für $w < 1$ immer eine wohldefinierte lineare Aktion. Allerdings liegt auch hier keine Lieaktion mehr vor. Für $w = 1$ geht sie in die üblich Aktion über, falls diese wohldefiniert ist. Schwierigkeiten machen jedoch Vielfache von ψ im Ergebnis. Diese tauchen bei $op_w(e_{n,p})$ mit einer Potenzreihe in w auf, welche im Falle der Nichtwohldefiniertheit bei $w = 1$ einen Pol hat. Die Regularisierung besteht in der Subtraktion des Poles. Diese regularisierte Aktion ist eine projektive Aktion. Erst nach Übergang zu einer zentralen Erweiterung erhält man wieder eine Lieaktion. Dies gilt alles unter der Voraussetzung der Konvergenz einer gewissen Potenzreihe, in der die Strukturkonstanten als Koeffizienten auftreten. Im Fall $g = 0$ (N beliebig) ist diese Voraussetzung erfüllt. Für beliebiges g habe ich dies noch nicht näher untersuchen können.
In Prop. 7.2 werden die wesentlichen Eigenschaften dieser beiden Methoden gesammelt.

Für gewisse Basiselemente kann der Kozykel wieder explizit berechnet werden. Der (aufgrund beider Methoden) gefundene Kozykel hängt vom Gewicht λ ab. Will man diese Abhängigkeit beseitigen, so bedeutet dies einen Basiswechsel in der Algebra $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$, bzw. die Wahl anderer Lifts für die Elemente in

$\mathcal{KN}(A)$. Führt man dies aus, so erhält man wieder einen Kozykel der die Form (1-35) für diese speziellen Basiselemente besitzt. Das zentrale Element t operiert durch Multiplikation mit dem Faktor

$$c_\lambda = -2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1) \ .$$

Ausgehend von

$$\Phi_T = f_{T,1} \wedge f_{T,2} \cdots \wedge f_{T+1,1} \cdots$$

erhält man als Erzeugnis über $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$ Untermodule von $\mathcal{H}^\lambda(A)$. Für die Darstellung auf den Untermodulen gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{KN}^+(A) \,.\, \Phi_T &= 0 \\ E_{2,p} \,.\, \Phi_T &= -\frac{1}{2}(T-1)(T-2+2\lambda)\,\Phi_T \\ t \,.\, \Phi_T &= -2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1)\,\Phi_T \ . \end{aligned}$$

Hier ist $E_{n,p}$ ein geeigneter Lift von $e_{n,p}$, t ein zentrales erzeugendes Element und $\mathcal{KN}^+(A)$ wird als Untermodul von $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$ aufgefaßt. Solche Darstellungen sind das Analogon der Höchstgewichtsdarstellungen im Virasoro Fall. Dies sind Quotienten von Verma Darstellungen. Ich definiere deren Analogon und zeige deren Existenz. Paarungen zwischen rechts und links semi-infinite Formen werden angesprochen. Es wird gezeigt, daß in Bezug auf eine natürliche Paarung, die $E_{n,p}$ selbstadjungiert sind.

Mit den gleichen Methoden erhält man auch eine Darstellung einer zentralen Erweiterung von $\mathcal{D}^1(A)$ und sogar einer zentralen Erweiterung der Algebra der kohärenten Differentialoperatoren $\mathcal{D}(A)$ auf $\mathcal{H}^\lambda(A)$. Für gewisse Paare von Basiselemente ist der definierende Kozykel für die Erweiterung identisch zu einer festen Kombination der in § 6. eingeführten Kozykel. Im Virasoro Fall enthalten diese Paare bereits alle, für die der Kozykel nicht verschwindet. Somit ist der definierende Kozykel durch diese Kombination gegeben.
Vermutungsweise gilt dies auch allgemein.

In § 8. werden $b-c$ Systeme behandelt. Hierbei ist b eine Form vom Gewicht λ und c eine Form vom Gewicht $1-\lambda$. (Im einführenden Beispiel $g=0$ war b ein quadratisches Differential und c ein Vektorfeld.) Wie dort sei

$$b = \sum_{n,p} b_{1-n,p} f_{n,p}(\lambda), \quad c = \sum_{n,p} c_{1-n,p} f_{n,p}(1-\lambda) \ .$$

Das entscheidende Objekt, vom mathematischen Standpunkt, ist die von den $b_{n,p}$ und $c_{n,p}$ erzeugte Clifford Algebra mit der Antikommutatorrelation

$$\{b_{n,p}, c_{m,r}\} = \delta_{m,1-n}\delta_{p,r}, \quad \{b_{n,p}, b_{m,r}\} = \{c_{n,p}, c_{m,r}\} = 0 \ .$$

Eine Darstellung dieser Algebra kann erhalten werden durch Operation auf $\mathcal{H}^\lambda(A)$. Hierbei operiere $c_{n,p}$ durch "Einhängen" der Form $f_{n,p}(\lambda)$ und $b_{n,p}$ durch "Aushängen" von $f_{1-n,p}(\lambda)$ (bzw. Kontraktion) mit Hilfe der Dualitätsbeziehung (1-32). Es gelten interessante Kommutatorrelationen mit der ebenfalls auf $\mathcal{H}^\lambda(A)$ operierenden Algebra $\widehat{\mathcal{D}}^1(A)$.

In § 9. wird eine andere Teilmenge des Erzeugendensystemes als Basis ausgewählt. Hierbei wird als Referenzpunkt ein fest gewählter Punkt P_N in A gewählt. Dies war die erste Basis, die ich im Verlauf dieser Untersuchungen gewählt hatte [Schl2]. Leider besitzt die Algebra keine verallgemeinert graduierte Struktur, in der diese Basiselemente homogene Elemente sind. Sie ist also nicht geeignet zur Konstruktion der Wedgedarstellung. Sie besitzt allerdings einige andere Vorzüge. So haben die Elemente jeweils höchstens 2 Polstellen. Desweiteren gibt es eine Teilmenge der Basis, die eine Basis der globalen holomorphen $\lambda-$Formen ist. Globale holomorphe Formen (von Physikern "zero modes" genannt), spielen in der physikalischen Theorie eine wichtige Rolle. Sie repräsentieren globale Symmetrien. Aufgrund der Konstruktion der Basis (schrittweise mit steigendem $\#A$) ist die Einbettung von $\mathcal{KN}(B)$ in $\mathcal{KN}(A)$, falls $P_N \in B$ leicht sichtbar. Unter anderem werden in diesem Paragraphen im Fall $g = 0$ die Strukturkonstanten von $\mathcal{KN}(A)$ explizit berechnet.

Zu Anfang von § 9. findet sich auch eine Aufführung der Arbeiten anderer Mathematiker und Physiker die sich mit der Krichever- Novikov Algebra mit mehreren Polstellen beschäftigt haben. In diesen Arbeiten werden im wesentlichen aber nur Basen entsprechend denen in § 9. behandelt.

Danken möchte ich J. Wess dafür, daß er mein Interesse an der Krichever - Novikov Algebra angeregt hatte. Ganz besonderen Dank gilt auch R. Weissauer, der sich bereit erklärte die Arbeit zu betreuen und für wertvolle Diskussionen und Anregungen zur Verfügung stand. Desweiteren gilt mein Dank auch L. Bonora für Diskussionen und die Einladung zu einem einwöchigen Aufenthalt bei SISSA, sowie R. Dick für Diskussionen im Anfangsstadium der Arbeit. R. Kiehl sei herzlich gedankt für seine Unterstützung. Anerkannt wird außerdem eine teilweise Unterstützung durch Mittel der Leibniz - Stiftung. Danken möchte ich auch den Mitgliedern der Arbeitsgruppe Algebraische Geometrie - Geometrie - Theoretische Physik an der Fakultät für Mathematik und Informatik der Universität Mannheim und am Institut für Theoretische Physik, Universität Karlsruhe für anregende Diskussionen.

§ 2. Die grundlegenden Definitionen

Im folgenden sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, die ich, falls es günstiger ist, auch als nichtsinguläre projektive komplexe Kurve auffassen werde. Ihr Geschlecht g ist beliebig. Allerdings werde ich oft die üblichen Fallunterscheidungen $g = 0, g = 1$ oder $g \geq 2$ machen müssen. Es seien N verschiedene Punkte auf X $(N \geq 2)$ gewählt, die in generischer Position sind. In welchen Sinn dieses "generisch" zu verstehen ist, wird in § 3. offensichtlich werden. A sei die Menge dieser Punkte. Diese Punkte werde ich auch manchmal als Ausnahmepunkte bezeichne. A sei zerlegt in zwei disjunkte, nichtleere Teilmengen

$$I = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}, \qquad O = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_l\}, \quad N = k + l \ . \tag{2-1}$$

Die Punkte seien in einer beliebigen, aber dann festgehaltenen, Reihenfolge numeriert. Die Punkte in I nenne ich die "in" Punkte, die Punkte in O die "out" Punkte.[11] Desweiteren fixiere ich lokale Koordinaten

$$z_i\,, \quad i = 1, \ldots, k, \quad \text{und} \quad w_i\,, \quad i = 1, \ldots, l \tag{2-2}$$

um die Punkte $P_i \in I$, bzw. $Q_i \in O$ (insbesondere gilt $z_i(P_i) = 0$, bzw. $w_i(Q_i) = 0$). Alle diesen Daten seien gewählt und dann festgehalten. Bei der Angabe eines Erzeugendensystemes spielt nur A eine Rolle. In die Konstruktion der Basen wird die Aufteilung

$$A = I \cup O$$

wesentlich eingehen. Die Numerierung der Punkte (speziell der in O) wird einen Einfluß auf die Festlegung einer Basis haben (allerdings ohne die zentralen Resultate zu beeinflussen) Die Festlegung der Koordinaten dient nur der skalaren Normierung der Basiselemente, hat also keine wesentliche Bedeutung.

Definition. *Die verallgemeinerte Krichever - Novikov Algebra zur Riemannsche Fläche X vom Geschlecht g und den Ausnahmepunkten in A ist die Liealgebra der meromorphen Vektorfelder auf X, welche holomorph auf $X \setminus A$ sind. Sie wird im folgenden mit $\mathcal{KN}(A)$ bezeichnet.*

Wenn keine Unklarheiten auftreten können, werde ich die Angabe von A unterlassen. Desweiteren werde ich den Zusatz "verallgemeinert" meist weglassen.

[11] Bei entsprechender physikalischer Interpretation entsprechen die Punkte in I den Eintrittsstellen der freien Strings, die Punkte in O den Austrittsstellen.

Die Liealgebrenstruktur ist das Lieprodukt der differenzierbaren Vektorfelder auf $X \setminus A$. Seien $v, w \in \mathcal{KN}(A)$, dann gilt lokal an jedem Punkt in einer holomorphen Koordinate z

$$v_{|}(z) = f(z)\frac{\partial}{\partial z}\ , \qquad w_{|}(z) = g(z)\frac{\partial}{\partial z}\ .$$

f und g sind lokale meromorphe Funktionen, welche Pole höchstens an den Punkten aus A haben. Das Lieprodukt berechnet sich lokal zu

$$\begin{aligned} [v,w]_{|}(z) &= \left(f(z)\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(g(z)\frac{\partial}{\partial z}\right) - \left(g(z)\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(f(z)\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= \left(f(z)\frac{\partial g}{\partial z}(z) - g(z)\frac{\partial f}{\partial z}(z)\right)\frac{\partial}{\partial z}\ . \end{aligned} \tag{2-3}$$

Diese lokale Beschreibung zeigt, daß $[v, w]$ wieder ein globales meromorphes Vektorfeld ist. An den Punkten an denen v und w holomorph sind, ist das Lieprodukt holomorph. Damit ist

$$[v, w] \in \mathcal{KN}(A)\ .$$

Ein weiterer Baustein in der physikalischen Theorie sind die “Formen vom konformen Gewicht λ”. Vom mathematischen Standpunkt sind dies gerade die meromorphen Schnitte in das Bündel $K^\lambda := K^{\otimes\lambda}$. Hierbei ist K das kanonische Geradenbündel (d.h. das holomorphe Kotangentialbündel). Aufgrund der bekannten Äquivalenzen werde ich denselben Buchstaben K auch zur Bezeichnung der Garbe der holomorphen Differentiale, der kanonischen Divisorenklasse und eines einzigen kanonischen Divisor benutzen. Ich beschränke mich in dieser Arbeit auf ganzzahlige Tensorpotenzen λ. Es ist allerdings auch möglich halbzahlige λ (nach Wahl einer Thetacharakteristik, d.h. eines Bündels L mit $L^{\otimes 2} = K$) und sogar rationalzahlige λ (nach Übergang auf eine endliche Überlagerung) zu betrachten. Statt “Schnitte in das Bündel K^λ” werde ich im folgenden auch die Bezeichnung “Formen vom Gewicht λ ” verwenden.

Definition. *$\mathcal{F}^\lambda(A)$ bezeichne den Vektorraum der meromorphen Formen vom Gewicht $\lambda \in \mathbb{Z}$ auf X, welche holomorph auf $X \setminus A$ sind. $\mathcal{F}^\lambda(A)$ heißt (verallgemeinerter) Krichever - Novikov Modul vom Gewicht λ.*

Für $\lambda = -1$ ist dies wiederum $\mathcal{KN}(A)$, aufgefaßt als Vektorraum.

Proposition 2.1. *Die Elemente der Krichever - Novikov Algebra $\mathcal{KN}(A)$ operieren auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$ durch die Lieableitung. Diese Operation macht $\mathcal{F}^\lambda(A)$ zu einem Liealgebrenmodul über $\mathcal{KN}(A)$.*

Beweis. Sei e ein meromorphes Vektorfeld und f eine meromorphe Form vom Gewicht λ, so sind diese lokal gegeben durch

$$e_{|}(z) = \alpha(z)\frac{\partial}{\partial z}\ , \qquad f_{|}(z) = \beta(z)\, dz^{\lambda}$$

mit lokalen meromorphen Funktionen α und β. Die Lieableitung ist in lokalen Termen gegeben durch

$$L_e(f)_{|}(z) = \left[\alpha(z)\frac{\partial \beta}{\partial z}(z) + \lambda \cdot \beta(z)\frac{\partial \alpha}{\partial z}(z)\right]\, dz^{\lambda}\ . \tag{2-4}$$

Mit Hilfe von [Be,p.22] ist leicht zu sehen, daß die Lieableitung für den Fall holomorpher Tensoren durch (2-4) ausgedrückt wird. Auf der rechten Seite steht wiederum eine wohldefinierte meromorphe $\lambda-$Form. $L_e(f)$ ist holomorph an den Punkten an denen e und f holomorph sind. D.h. für $e \in \mathcal{KN}(A)$ und $f \in \mathcal{F}^{\lambda}(A)$ ist $L_e(f) \in \mathcal{F}^{\lambda}(A)$. Zum Nachweis der Liealgebrenmoduleigenschaft ist zu zeigen

$$[L_d, L_e] = L_{[d,e]}, \qquad (d, e \in \mathcal{KN}(A))\ .$$

Durch einfaches Nachrechnen in den lokalen Darstellungen verifiziert man jedoch

$$L_{[d,e]}(f) = L_d(L_e(f)) - L_e(L_d(f)) = [L_d, L_e](f)\ . \quad \square$$

Statt $L_e(f)$ werde ich im folgenden meist $e\,.\,f$ verwenden. Für $\lambda = -1$ ist (2-4) natürlich das Lieprodukt der Vektorfelder (2-3).

Durch das Tensorprodukt der Formen (d.h. durch Multiplikation der lokalen Repräsentanten) erhält man eine Abbildung

$$\mathcal{F}^{\mu}(A) \times \mathcal{F}^{\lambda}(A) \ \to\ \mathcal{F}^{\mu+\lambda}(A), \quad (s,t) \mapsto s \otimes t\ .$$

Ist $\mu = \lambda = 0$, so ist dies die Multiplikation der meromorphen Funktionen. Offensichtlich bildet $\mathcal{F}^0(A)$ eine kommutative und assoziative Algebra. Ist $\mu = 0$ und λ beliebig, so wird $\mathcal{F}^{\lambda}(A)$ ein Modul über $\mathcal{F}^0(A)$.
Ist R eine assoziative Algebra, so wird R mit dem Kommutator $[f,g] = f \cdot g - g \cdot f$ eine Liealgebra. Diese Liealgebra, bestehend aus denselben Elementen wie R, wird auch mit $L\,R$ bezeichnet. Ist aus dem Zusammenhang klar, welche Struktur gemeint ist, werde ich auch statt $L\,R$ einfach R verwenden. Ist R kommutativ, so ist $L\,R$ offensichtlich eine abelsche Liealgebra, da der Kommutator verschwindet.

Neben der Algebra der Vektorfelder spielt die Liealgebra der Funktionen $L\mathcal{F}^0(A)$ eine wichtige Rolle. In § 6.(b) werde ich verallgemeinerte “Heisenberg Algebren” als gewisse zentrale Erweiterungen dieser Liealgebra einführen. Die Liealgebra der Funktionen und die Liealgebra der Vektorfelder bilden zusammen die Liealgebra der Differentialoperatoren vom Grad ≤ 1. Diese werde ich in § 6.(c) ausführlicher diskutieren.

Ich fixiere folgende Bezeichnungsweise (für $g \ge 1$). Es seien

$$\alpha_i, \quad \beta_i, \qquad i = 1, \dots, g \tag{2-5}$$

reelle Kurven auf der Riemannsche Fläche X die keine Punkte aus A enthalten und eine kanonische Homologiebasis bilden, d.h.

$$\begin{gathered} H_1(X, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=1}^{g} \mathbb{Z} \cdot [\alpha_i] \oplus \bigoplus_{i=1}^{g} \mathbb{Z} \cdot [\beta_i] \\ \text{mit} \quad [\alpha_i] \,.\, [\alpha_j] = [\beta_i] \,.\, [\beta_j] = 0 \quad \text{und} \quad [\alpha_i] \,.\, [\beta_j] = \delta_{i,j} \ . \end{gathered} \tag{2-6}$$

Der Homologiebasis zugeordnet ist eine Basis der holomorphen Differentiale $\omega_i, \ i = 1, \dots, g$. D.h. es gilt

$$\int_{\alpha_i} \omega_j = \delta_{i,j} \quad \text{und} \quad \int_{\beta_i} \omega_j = \pi_{ij} \quad \text{mit} \quad \Pi = (\pi_{ij}) \tag{2-7}$$

einer (komplexen) $g \times g$ Matrix, der Periodenmatrix. $\mathrm{Im}\,\Pi$ ist positiv definit. (Als Referenz für diese wohlbekannten Tatsachen siehe etwa [FaKr].)

Im folgenden werde ich eine Familie von reellen Kurven auf der Riemannsche Fläche $X \setminus A$ betrachten, welche diese ausschöpfen. Hierzu benutze ich

Proposition 2.2. *Sei X eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht g, $P_i \in X, \ i = 1, \dots, N$ paarweise verschiedene Punkte und $c_i \in \mathbb{C}$ für $i = 1, \dots, N$ mit $\sum_{i=1}^{N} c_i = 0$ gegeben. Dann gibt es genau eine meromorphe (1-)Differentialform ρ für die gilt:*

(1) *ρ ist holomorph auf $X \setminus \{P_1, \dots, P_N\}$,*
(2) *$res_{P_i}(\rho) = c_i, \quad i = 1, \dots, N$,*
(3) *ρ hat rein imaginäre Perioden.*

Beweis. Der Beweis ist eine einfache Verallgemeinerung von [Schl1,p.116].
1. Eindeutigkeit: Erfülle ρ und ρ' die Voraussetzungen, so ist $\gamma = \rho - \rho'$ ein holomorphes Differential mit rein imaginären Perioden. Damit ist aber $\gamma = 0$. Dies kann man z.Bsp. unter Zuhilfenahme der Riemannschen Bilinearrelation [FaKr,III.3.3] zeigen. Sie besagt u.a. daß für ein holomorphes nichttriviales Differential γ

$$\mathsf{Im}\left(\sum_{i=1}^{g} \overline{\int_{a_i} \gamma} \cdot \int_{b_i} \gamma\right) > 0 \ . \tag{2-8}$$

gilt.
2. Existenz: Wir wählen $Q \in X$ mit $Q \neq P_i$ für $i = 1, \ldots, N$. Sei σ_i ein meromorphes Differential [Fakr,II.5], holomorph auf $X \setminus \{P_i, Q\}$ mit Polen 1.ter Ordung an P_i und Q und den Residuen

$$\operatorname{res}_{P_i}(\sigma_i) = 1, \qquad \operatorname{res}_Q(\sigma_i) = -1 \ .$$

Wir setzen

$$\rho' := \sum_{i=1}^{N} c_i\, \sigma_i.$$

Dann gilt

$$\operatorname{res}_{P_i}(\rho') = c_i, \quad i = 1, \ldots, N \qquad \operatorname{res}_Q(\rho') = \sum_{i=1}^{N} c_i = 0 \ .$$

Insbesondere ist ρ' holomorph bei Q und erfüllt somit die Bedingungen (1) und (2). Durch Addition eines holomorphen Differentials ω (nur notwendig im Fall $g \geq 1$) erhalten wir ein ρ welches auch (3) erfüllt. ω bestimmen wir in folgender Weise: Sei

$$\int_{a_i} \rho' = a_i + \mathbf{i}\, b_i, \qquad \int_{b_i} \rho' = e_i + \mathbf{i}\, d_i$$

mit $a_i, b_i, e_i, d_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, g$. Wir fassen zusammen

$$a = {}^t(a_1, a_2, \ldots, a_g), \qquad e = {}^t(e_1, e_2, \ldots, e_g) \ .$$

$\mathsf{Im}\,\Pi$ ist positiv definit, also insbesondere regulär. D.h. es gibt ein

$$f = {}^t(f_1, f_2, \ldots, f_g) \in \mathbb{R}^g \quad \text{mit} \quad (\mathsf{Im}\,\Pi) \cdot f = -e + (\mathsf{Re}\,\Pi) \cdot a \ .$$

Setzen wir

$$\omega = -\sum_{i=1}^{g} (a_i + \mathbf{i}\, f_i)\, \omega_i, \qquad \rho = \rho' + \omega$$

so berechnet sich

$$\mathsf{Re}\int_{a_i}\rho = a_i + \mathsf{Re}\int_{a_i}\omega = a_i - \sum_{j=1}^{g} a_j\delta_{i,j} = 0$$

und

$$\mathsf{Re}\int_{b_i}\rho = e_i - \sum_{j=1}^{g} a_j(\mathsf{Re}\,\pi_{ij}) + \sum_{j=1}^{g} f_j(\mathsf{Im}\,\pi_{ij}) = 0\ ,$$

wie behaupted wurde. □

Sei nun A die Menge der Polstellen.

$$A = I \cup O, \qquad k = \#I, \quad l = \#O \tag{2-9}$$

die Zerlegung in “in” und “out” Punkte. ρ sei das nach Proposition 2.2 eindeutig fixierte Differential, holomorph auf $X \setminus A$, mit Polen 1.ter Ordung an den Punkten von A und den Residuen

$$\mathrm{res}\,_P(\rho) = +\frac{1}{k}, \quad P \in I\ , \qquad \mathrm{res}\,_Q(\rho) = -\frac{1}{l}, \quad Q \in O \tag{2-10}$$

welches nur rein imaginäre Perioden hat. Wir fixieren einen Punkt $B \in X \setminus A$ und setzen

$$u(P) := \mathsf{Re}\int_B^P \rho\ . \tag{2-11}$$

Da ρ nur imaginäre Perioden hat, ist $u(P)$ eine wohldefinierte (harmonische) Funktion auf $X \setminus A$. Die Wahl eines anderen Basispunktes B resultiert lediglich in der Addition einer Konstante.

Proposition 2.3. *Die Funktion $u(P)$ verhält sich bei Annäherung an die Punkte von A in folgender Weise:*

$$\lim_{R\to P} u(R) = -\infty, \quad P \in I \qquad \textit{und} \qquad \lim_{R\to Q} u(R) = \infty, \quad Q \in O\ . \tag{2-12}$$

Beweis. Sei z lokale Koordinate bei $P \in A$, d.h. es gilt in einer Umgebung von P

$$\rho = \frac{c}{z}dz + f(z)\,dz, \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R} \tag{2-13}$$

und f einer lokalen holomorphe Funktion. Sei S ein Punkt in einer Kreisscheibenumgebung von P, dann gilt

$$\lim_{R\to P}\mathsf{Re}\int_B^R \rho = \lim_{R\to P}\mathsf{Re}\int_S^R \rho + \mathsf{Re}\int_B^S \rho\ .$$

Der zweite Term ist endlich, interessiert also nicht. Desweiteren bleibt auch $\mathsf{Re}\int\limits_S^R f(z)\,dz$ endlich. Zu untersuchen ist

$$\lim_{R\to P} \mathsf{Re} \int_S^R \frac{c}{z}\,dz = c\cdot \lim_{R\to P} (\log|z(R)| - \log|z(S)|) = (-\mathrm{sign}(c))\cdot\infty\ . \quad \square$$

Mit Hilfe dieser Funktion können wir nun die Niveaulinien definieren

$$C_\tau := \{\ P \in X\setminus A\ \mid\ u(P) = \tau\ \} \tag{2-14}$$

für $\tau \in \mathbb{R}$. Variieren wir τ, so ergibt sich eine (reelle) Faserung der Riemannsche Fläche $X \setminus A$, d.h.

$$X\setminus A = \bigcup_{\tau\in\mathbb{R}} C_\tau \quad \text{und} \quad C_\tau \cap C_{\tau'} = \emptyset \quad \text{falls} \quad \tau \neq \tau'\ .$$

Die Wahl eines anderen Basispunktes B ändert lediglich den Wert der Funktion u auf den Niveaulinien, nicht jedoch die Faserung. Die Niveaulinien sind nicht notwendig zusammenhängend. Sie zerfallen in disjunkte reelle Kurven. Dabei können singuläre Punkte (Selbstüberschneidungen, Berührungen) nur an den Punkten auftreten an denen ρ Nullstellen hat. Für $\tau \to -\infty$ zerfällt C_τ in k verschiedene Komponenten $D_1,\ldots,D_k$. Jedes D_i ist eine Kreislinie in einer entsprechenden Koordinatenumgebung um den Punkt $P_i \in I$. Dies folgt aus der lokalen Gestalt (2-13) wie sie auch schon im Beweis von Proposition 2.3 benützt wurde. Für $\tau \to +\infty$ erhalten wir die analoge Situation (also auch wieder Kreislinien) um die Punkte $Q_i \in M$.

In der Interpretation in der Stringtheorie (siehe etwa [KN2]) bekommt τ die Bedeutung der Eigenzeit auf dem "string world sheet". In diesem Modell können die Punkte $P_i \in I$ als einlaufende freie Strings ($\tau \ll 0$) und die Punkte $Q_j \in O$ als auslaufende freie Strings ($\tau \gg 0$) gedeutet werden. Das Aufsplitten und das Vereinigen der Niveaulinien entspricht dem Aufsplitten, bzw. dem Vereinigen der Strings die in Wechselwirkung stehen.

Für uns werden die Niveaulinien C_τ die Möglichkeit einer Paarung zwischen den Formen vom Gewicht λ und den Formen vom Gewicht $(1-\lambda)$ bieten. Multiplizieren wir nämlich beide, so erhalten wir eine Form vom Gewicht 1, d.h. ein (1-)Differential, welches wir entlang Kurven integrieren können.

Proposition 2.4. *Integrieren wir $v \in \mathcal{F}^1(A)$ entlang einer nichtsingulären Niveaulinie C_τ (disjunkte Vereinigung nichtsingulärer Kurven), so ist der Wert des Integrals unabhängig von $\tau \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Seien C_τ und C_σ $(\tau < \sigma)$ zwei nichtsinguläre Niveaulinien. $C_\tau - C_\sigma$ der orientierte, glatte Rand der Untermannigfaltikeit $Y = \bigcup_{\tau \leq \lambda \leq \sigma} C_\lambda$ von $X \setminus A$. Nach dem Satz von Stokes also

$$\int_{C_\tau} v - \int_{C_\sigma} v = \iint_Y dv = 0 \ . \quad \square$$

Bei der Definition (2-8) habe ich an jedem "in"-Punkt (bzw. "out"-Punkt) dasselbe Residuum $\frac{1}{k}$ (bzw.$-\frac{1}{l}$) vorgeschrieben. Diese Vorschrift kann abgeschwächt werden. Wir können beliebige reelle Residuen vorschreiben, welche positiv an den "in"-Punkten sind, negativ an den "out"-Punkten sind und die Summenbedingung "Gesamtresiduum = 0" erfüllen. Dabei wird das Differential ρ durch ein anderes ersetzt. Die Niveaulinien werden sich ändern (man erhält eine andere Faserung (2-14) von $X \setminus A$). Allerdings wird der Wert des Integrals aus Prop. 2.4 wieder unabhängig davon sein, ob die Niveaulinie, über die integriert wird, zur neuen Faserung oder zur alten gewählt wurde.

Da der Satz von Riemann-Roch in den nächsten Paragraphen eine wichtige Rolle spielt, sei er aus Referenzgründen hier zitiert (siehe [FaKr],[Fo],[Schl1] für die Details). Sei D ein Divisor, bzw. L ein Geradenbündel X, dann gilt

$$\dim H^0(X,D) - \dim H^0(X,K-D) = \deg D - g + 1, \tag{2-15}$$

bzw.

$$\dim H^0(X,L) - \dim H^0(X,K\otimes L^*) = \deg L - g + 1 \ . \tag{2-16}$$

Wie schon vermerkt bezeichnet K sowohl einen kanonischen Divisor als auch das kanonische Bündel. Weitere nützliche Tatsachen sind die folgenden: Ist $\deg D < 0$, bzw. $\deg L < 0$, so gilt

$$\dim H^0(X,D) = 0, \quad \text{bzw.} \quad \dim H^0(X,L) = 0 \ . \tag{2-17}$$

Für den kanonischen Divisor gilt

$$\deg K = 2g - 2 \quad \text{und} \quad \dim H^0(X,K) = g \ . \tag{2-18}$$

Wir nennen einen Divisor D speziell, falls $\dim H^0(X,K-D) \neq 0$ gilt, d.h. falls

$$\dim H^0(X,D) > \deg D - g + 1$$

gilt. Insbesondere ist K immer ein spezieller Divisor. Aus (2-17) sieht man, daß Divisoren vom Grad $\geq 2g-1$ immer nicht speziell sind. Für sie gilt

$$\dim H^0(X,D) = \deg D - g + 1 \ . \tag{2-19}$$

Für $g \geq 2$ und $\lambda > 0$ (wie immer $\lambda \in \mathbb{Z}$) berechnet sich

$$\dim H^0(X,\lambda\cdot K) = (2\lambda - 1)(g-1) \ . \tag{2-20}$$

§ 3. Ein Erzeugendensystem für den Raum der Formen

(a) Ein einfaches, aber fundamentales Lemma

Proposition 3.1. *Sei L ein Geradenbündel, $P \in X$ ein generisch gewählter Punkt, L_P das dem Divisor $[P]$ zugeordnete Bündel, (d.h. $c_1(L_P) = [P]$) und L_P^* das duale Bündel. Sei*

$$\dim H^0(X, L) = l \ ,$$

dann gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\dim H^0(X, L \otimes (L_P^*)^n) = \max(\, l - n \ , \ 0) \ .$$

Hierbei bedeutet "generisch gewählter Punkt", daß die Aussage für eine nichtleere Zariski offene Teilmenge von X gilt (d.h. sie gilt für alle Punkte bis auf eine endliche Anzahl von Punkten). Die Ausnahmemenge darf von L abhängen.

Beweis. Sei $m \in \mathbb{Z}$. Die globalen holomorphen Schnitte des Bündels $L \otimes (L_P^*)^m$ stehen in Bijektion zu den globalen meromorphen Schnitten des Bündels L welche holomorph sind auf $X \setminus \{P\}$ und am Punkt P eine Nullstelle von Vielfachheit $\geq m$ haben [Schl1,p.107]. Wie üblich entsprechen negative Nullstellenordnungen Polstellen. Um die Bezeichnung zu vereinfachen verwende ich Divisorenschreibweise. Dem Bündel L entspreche der Divisor D (bzw. dessen Klasse). Ist D' ein beliebiger Divisor und gelte

$$\dim H^0(X, D') = r \ ,$$

dann gilt

$$r - 1 \leq \dim H^0(X, D' - P) \leq r \ . \tag{3-1}$$

Sei nämlich $f, g \in H^0(X, D')$, jedoch beide nicht in $H^0(X, D' - P)$, so bedeutet dies $f(P) \neq 0$ und $g(P) \neq 0$. Wir setzen $\mu = f(P)/g(P) \in \mathbb{C}$ (der Quotient ist eine wohldefinierte Zahl). Nun ist

$$h = (f - \mu \cdot g) \in H^0(X, D' - P),$$

da $h(P) = 0$ nach Konstruktion. Somit ist $H^0(X, D')/H^0(X, D' - P)$ höchstens eindimensional. Dies zeigt die Relation (3-1). Iterierte Anwendung liefert

$$l - n \leq \dim H^0(D - nP) \leq l \; . \tag{3-2}$$

Die Behauptung des Lemmas ist wegen (3-1) und (3-2) genau dann erfüllt wenn

$$\dim H^0(D - lP) = 0. \tag{3-3}$$

Denn in diesem Fall muß die Dimension beim Übergang von $D - rP$ auf $D-(r+1)P$ für $(l-1) \geq r \geq 0$ jeweils um 1 fallen. Es genügt also (3-3) für alle bis auf endlich viele Punkte P zu zeigen. Dies zeige ich mit denselben Methoden, die man verwendet um zu beweisen, daß die Anzahl Weierstraßpunkte endlich ist. (Dieser Fall ergibt sich als Spezialfall der Proposition) [FaKr,II.5], [Fo,18.4] .
Sei $\mathcal{U} = (U_i)_i$ eine endliche, offene Überdeckung von X durch trivialisierende Koordinatenumgebungen für das Bündel L. Dies bedeutet U_i besitzt die globale Koordinate z_i und $L_{|U_i}$ ist trivial. Die Überdeckung sei derart, daß eine Schrumpfung $\mathcal{V} = (V_i)_i$ mit V_i offen und $\overline{V_i} \subset U_i$ immer noch X überdeckt. Sei $s_1, s_2, \ldots, s_l$ eine Basis des Raumes $H^0(X, D)$. Wir wählen ein U_i und können die Schnitte als lokale holomorphe Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_l$ in der Variablen z_i repräsentieren. Da die Schnitte linear unabhängig sind, sind das auch die Funktionen. Sei

$$s \in H^0(X, D), \quad s \neq 0, \; s = \sum_{j=1}^{l} c_j s_j$$

dann entspricht dem Schnitt s die holomorphe Funktion $f = \sum_{j=1}^{l} c_j f_j$. $P \in U_i$ ist mindestens $k-$fache Nullstelle von s falls gilt

$$f^{(m)}(z_i(P)) = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, k-1 \; .$$

Die Wronskideterminante ist definiert als

$$W = W(f_1, f_2, \ldots, f_l) = \det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_l \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_l' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(l-1)} & f_2^{(l-1)} & \ldots & f_l^{(l-1)} \end{pmatrix} .$$

W ist eine lokale holomorphe Funktion, die nicht identisch verschwindet [Fo,18.4], da die f_i linear unabhängig sind. Damit ist aber $W(z_i(Q)) = 0$ genau dann, falls es nichttriviale $c_j \in \mathbb{C}, \; j = 1, \ldots, l$ gibt mit

$$0 = \sum_{j=1}^{l} c_j f_j^{(m)}(z_i(Q)), \quad m = 0, 1, \ldots, l-1 \; .$$

Ist nun $W(z_i(Q)) = 0$, dann ist mit diesen Koeffizienten $s = \sum_{j=1}^{l} c_j s_j$ ein nichtverschwindender globaler Schnitt, der eine $l-$fache Nullstelle bei Q besitzt. Umgekehrt bedeutet die Existenz eines Schnittes mit einer $l-$fachen Nullstelle bei $Q \in U_i$, daß die Wronskideterminante W dort eine Nullstelle hat. Die Nullstellenmenge von W ist aber eine diskrete Menge auf U_i, insbesondere eine endliche Menge auf V_i. Da aber endlich viele V_i bereits X überdecken, gibt es nur endlich viele Punkte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$ (hängen ab vom Bündel L), derart daß ein nichttrivialer globaler Schnitt von L existiert, der an einem dieser Punkte eine Nullstelle von mindestens der Ordung l besitzt. Bei der Wahl von P gilt es diese zu vermeiden. $\square$

(b) Der generische Fall

Im folgenden werde ich ein Erzeugendensystem für $\mathcal{F}^\lambda(A)$ angeben. Hierbei ist die Aufspaltung der Menge A ohne Belang. Ich setze

$$A = \{P_1, P_2, \ldots, P_N\} \ .$$

Die Angabe des Erzeugendensystemes wird implizit mit Hilfe der Riemann-Roch Formel und Prop. 3.1 erfolgen. In § 4. werde ich “explizite” Ausdrücke geben. Das angebene Erzeugendensystem wird für $N > 2$ linear abhängig sein. In § 5. werde ich in Abhängigkeit von der Aufspaltung $A = I \cup O$ als Basis eine Teilmenge auswählen, die für das weitere besonders interessante Eigenschaften hat. In § 9. werde ich noch eine weitere Möglichkeit zur Basiswahl beschreiben.

In diesem Abschnitt betrachte ich nur den generischen Fall, also daß entweder das Geschlecht $g \geq 2$ ist und das Gewicht λ der Formen ungleich 0 oder 1 ist, oder daß $g = 0$ ist. Stillschweigend sei im weiteren immer $\lambda \in \mathbb{Z}$ angenommen. Der Grund für diese Aufspaltung ist, daß in den anderen Fällen λK spezielle Divisoren sind. Ich setze

$$M(\lambda) := (2\lambda - 1)g - 2\lambda = (2\lambda - 1)(g - 1) - 1 \ . \tag{3-4}$$

Proposition 3.2. *Sei $g \geq 2, \lambda \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$ oder $g = 0$ und $\lambda \in \mathbb{Z}$ beliebig und seien $P_1, P_2, \ldots, P_N$ generische Punkte auf X. Seien weiter gegeben $n_1, \ldots, n_N \in \mathbb{Z}$ mit $\sum_{i=1}^N n_i = M(\lambda)$, dann gilt*

(a) $\dim H^0(X, \lambda \cdot K - \sum_{i=1}^N n_i P_i) = 1$

(b) $\dim H^0(X, \lambda \cdot K - \sum_{i=1}^N n_i P_i - aP_j) = 0$ *für $a \in \mathbb{N}$ und $j = 1, \ldots, N$.*

Bevor ich zum Beweis komme, will ich die Aussage der Proposition interpretieren. Aufgrund (a) gibt es eine nichttriviale meromorphe Form w vom Gewicht λ, die holomorph außerhalb A ist und an den Punkten P_i aus A die Ordung $\operatorname{ord}_{P_i}(w) \geq n_i$ hat. Es gilt sogar Gleichheit. Wäre nämlich die Ordnung größer als n_j an irgendeinem dieser P_j so läge w auch im unter (b) angegebenen Vektorraum. Dieser verschwindet aber. Also wäre w trivial. Widerspruch! Aufgrund von (a) wiederum sind alle solche w skalare Vielfache eines einmal fixierten Elementes. Um w eindeutig festzulegen kann man nach Wahl eines (einzigen) Punktes $P_i \in A$ und einer lokalen Koordinate z_i bei P_i (d.h. $z_i(P_i) = 0$) fordern

$$w_| = z_i^{n_i}(1 + O(z_i))(dz_i)^\lambda \ . \tag{3-5}$$

In diesem Paragraphen nehme ich als Referenzpunkt P_N. In § 5. erfolgt eine andere Normierung.

Definition. *$f^\lambda(n_1, n_2, \ldots, n_N)$ mit $\sum_{i=1}^N n_i = M(\lambda)$ sei die eindeutig festgelegte Form vom Gewicht λ mit*

$$\operatorname{ord}_{P_i}(f^\lambda(n_1, n_2, \ldots, n_N)) = n_i, \quad i = 1, \ldots, N$$

und

$$f^\lambda(n_1, n_2, \ldots, n_N)_| = z_N^{n_N}(1 + O(z_N))(dz_N)^\lambda \ .$$

Prop. 3.2 folgt offensichtlich aus der etwas allgemeineren Proposition, die ich gleich beweisen werden.

Proposition 3.3. *Sei $g \geq 2, \lambda \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$ oder $g = 0$ und $\lambda \in \mathbb{Z}$ beliebig und seien $P_1, P_2, \ldots, P_N$ generische Punkte auf X. Seien weiter gegeben $n_1, \ldots, n_N \in \mathbb{Z}$ dann gilt*

$$\dim H^0(X, \lambda \cdot K - \sum_{i=1}^N n_i P_i) = \max(\, M(\lambda) - \sum_{i=1}^N n_i + 1 \ , \ 0\,) \ . \tag{3-6}$$

Beweis. Seien $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{Z}$ beliebig. Es gilt

$$d := \deg(\lambda \cdot K - \sum_{i=1}^{N} n_i P_i) = \lambda \cdot (2g-2) - \sum_{i=1}^{N} n_i \ .$$

Setzen wir $h^0(D) = \dim H^0(X, D)$, so erhalten wir nach dem Satz von Riemann-Roch (2-15)

$$h^0\big(\lambda \cdot K - \sum_{i=1}^{N} n_i P_i\big) - h^0\big((1-\lambda) \cdot K + \sum_{i=1}^{N} n_i P_i\big) = M(\lambda) - \sum_{i=1}^{N} n_i + 1 \ .$$

Fall 1: $g \geq 2, \lambda \geq 2$. In diesem Fall ist $\lambda \cdot K$ nicht speziell, insbesondere gilt $h^0(\lambda \cdot K) = (2\lambda - 1)(g-1)$. Addieren wir zuerst die Punkte P_l mit $n_l < 0$, so bleiben wir im Bereich der nichtspeziellen Divisoren. Nach Voraussetzung sind alle Punkte in generischer Lage. Wir können für jeden Punkte P_l mit $n_l > 0$ die Prop. 3.1 anwenden und erhalten

$$h^0\big(\lambda \cdot K - \sum_{i=1}^{N} n_i P_i\big) = \max\big((2\lambda-1)(g-1) - \sum_{i=1}^{N} n_i \ , \ 0\big)$$

.
Fall 2: $g \geq 2, \lambda \leq -1$. In diesem Fall ist $(1-\lambda) \cdot K$ nicht speziell, d.h. analog zu Fall 1

$$h^0\big((1-\lambda) \cdot K + \sum_{i=1}^{N} n_i P_i\big) = \max\big((1-2\lambda)(g-1) + \sum_{i=1}^{N} n_i \ , \ 0\big).$$

Also

$$h^0\big(\lambda \cdot K - \sum_{i=1}^{N} n_i P_i\big) = (2\lambda-1)(g-1) - \sum_{i=1}^{N} n_i + \max\big((1-2\lambda)(g-1) + \sum_{i=1}^{N} n_i \ , \ 0\big).$$

Durch Einsetzen erhält man das gewünschte Ergebnis.
Fall 3: $g = 0, \lambda \in \mathbb{Z}$. In diesem Fall ist $M(\lambda) = -2\lambda$, d.h.

$$\deg(\lambda \cdot K - \sum_{i=1}^{N} n_i P_i) = M(\lambda) - \sum_{i=1}^{N} n_i \ .$$

Somit folgt die Aussage direkt aus Riemann- Roch ohne Annahmen über die Lage der Punkte. $\square$

Proposition 3.4. *Sei $g \geq 2, \lambda \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$ oder $g = 0$ und $\lambda \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann gilt (a) Die Menge*

$$\{\, f^{\lambda}(n_1, n_2, \ldots, n_N) \mid n_i \in \mathbb{Z},\ \sum_{i=1}^{N} n_i = M(\lambda)\,\}$$

bildet ein Erzeugendensystem für $\mathcal{F}^{\lambda}(A)$.

(b) Im Fall $N = 2$, d.h. $A = \{P_1, P_2\}$, ist diese Menge eine Basis.

Beweis. Ich betrachte zuerst den Fall $N = 2$. Dies ist der Fall der auch in [KN1] behandelt wurde. Obige Menge stimmt mit der dort angegebenen Menge überein. Der Beweis von Prop. 3.4(b) wurde in [Schl1] ausgeführt. Aus Gründen der Vollständigkeit sei er wiederholt. Sei $v \in \mathcal{F}^{\lambda}(P_1, P_2)$ mit $v \neq 0$. Sei weiter $\operatorname{ord}_{P_1}(v) = m_1$ und $\operatorname{ord}_{P_2}(v) = m_2$. Setze $n^{(0)} = M(\lambda) - m_1$, dann ist $n^{(0)} \geq m_2$. Ansonsten wäre

$$v \in H^0(X, \lambda \cdot K - m_1 P_1 - (M(\lambda) - m_1 + a) P_2)$$

mit $a = m_2 - n^{(0)} > 0$. Nach Prop. 3.2(b) ist dieser Vektorraum trivial. Dies ist ein Widerspruch. Subtrahieren wir von v ein geeignetes Vielfaches von $f^{\lambda}(m_1, M(\lambda) - m_1)$ um die Ordnung bei P_1 zu erhöhen, so erhalten wir v_1 mit

$$\operatorname{ord}_{P_1}(v_1) = m_1^{(1)} \geq m_1 + 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{ord}_{P_2}(v_1) = m_2^{(1)} \geq m_2 \ .$$

Ist $v_1 = 0$, so ist die Behauptung (Erzeugendeneigenschaft) gezeigt. Ansonsten gilt

$$n^{(1)} = M(\lambda) - m_1^{(1)} \leq M(\lambda) - (m_1 + 1) < n^{(0)}, \qquad m_2^{(1)} \geq m_2 \ .$$

Dasselbe Argument wie oben auf v_1 angewendet ergibt

$$n^{(0)} > n^{(1)} \geq m_2^{(1)} \geq m_2 \ .$$

Durch fortwährende Ausführung erhalten wir eine Folge von v_i mit $n^{(i)}$ eine strikt fallende Folge ganzer Zahlen, die nach unten durch m_2 beschränkt ist. Damit muß das Verfahren abbrechen, d.h. irgendein v_i ist identisch 0. Also ist v Linearkombination der Elemente in (a). Im Fall $N = 2$ haben die Elemente in (a) alle unterschiedliche Polordnung bei P_1, damit sind sie linear unabhängig. Dies beweist (b).
Sei nun $N > 2$ beliebig. Die Vektorräume $F_i = \mathcal{F}^{\lambda}(P_i, P_N)$ für $i = 1, \ldots, N-1$

sind Untervektorräume von $\mathcal{F}^\lambda(A)$. Eine Basis von F_i ist nach dem 1.ten Teil des Beweises gegeben durch

$$f^\lambda(0,\dots,0,n_i,0,\dots,M(\lambda)-n_i), \quad n_i \in \mathbb{Z} \ .$$

Diese Elemente sind in der Menge unter (a) enthalten. Sei $v \in \mathcal{F}^\lambda(A)$. Durch Subtraktion von Linearkombinationen aus Basiselementen aus $F_i, i = 2,\dots,N-1$ erhält man ein v' das keine Pole mehr an $P_2,\dots,P_{N-1}$ hat, d.h. $v' \in F_1$. Damit ist aber v' Linearkombination der Basiselemente von F_1. Insgesamt ist also v Linearkombination der Elemente unter (a) . $\square$

Wie man aus obigem Beweis sieht, ist für $N > 2$ das Erzeugendensystem nicht linear unabhängig. So ist eine Form die nur Pole bei P_N hat Element in allen F_i, d.h. sie läßt sich in mehreren Weisen darstellen. Andererseits sieht man auch wie man ein minimales Erzeugendensystem wählen kann: Aus F_1 nimmt man alle Basiselemente, aus den $F_i, i = 2,\dots,N-1$ nimmt man nur die mit negativer Ordung an den Punkten P_i. Offensichtlich sind diese erzeugend (nur diese wurden beim obigen Beweis benutzt) und wegen der unterschiedlichen Polordnungen an verschiedenen Punkten auch linear unabhängig. Diese naheliegende Basis ist für das folgende allerdings nicht optimal geeignet, sie induziert z.Bsp. keine verallgemeinert graduierte Struktur (siehe 5-19). Deshalb wird in § 5. eine andere gewählt. Die obige werde ich im § 9. wieder aufgreifen.

Wegen der Wichtigkeit spezieller Gewichte übernehme ich folgende Standardbezeichnungen aus der Quantenfeldtheorie

$$e(...) = f^{-1}(...), \quad \Omega(...) = f^2(...), \quad A(...) = f^0(...), \quad \omega(...) = f^1(...) \ .$$

(c) Die Sonderfälle

I. Die Bezeichnungen seien wie in § 3. (b). Ich betrachte zuerst $\lambda = 1$ und $g \geq 2$. Es gilt $M(1) = g - 2$.

Proposition 3.5. *Seien $P_1, P_2, \ldots, P_N$ generische Punkte auf X, $n_1, \ldots, n_N \in \mathbb{Z}$. (a) Ist ein $n_i < 0$, dann gilt*

$$h^0\bigl(K - \sum_{i=1}^{N} n_i P_i\bigr) = \max\bigl(g - \sum_{i=1}^{N} n_i - 1\ ,\ 0\bigr)\ .$$

(b) Sind alle $n_i \geq 0$, dann gilt

$$h^0\bigl(K - \sum_{i=1}^{N} n_i P_i\bigr) = \max\bigl(g - \sum_{i=1}^{N} n_i\ ,\ 0\bigr)\ .$$

Beweis. Fall (a): O.B.d.A. sei $n_1 < 0$. Damit ist wegen

$$\deg(K - n_1 P_1) = (2g-2) + |n_1| \geq 2g - 1$$

$(K - n_1 P_1)$ ein nichtspezieller Divisor, d.h.

$$h^0(K - n_1 P_1) = g - 1 - n_1\ .$$

Nun kann auf die Punkte $P_2, \ldots, P_N$ die Prop. 3.1 angewendet werden. Dies ergibt das Resultat unter (a). Im Fall (b) müssen wir von K ausgehen. K ist ein spezieller Divisor und es gilt $h^0(K) = g$. Prop. 3.1 liefert auch hier das Ergebnis unter (b). □

Dem Fall (a) entspricht die generelle Situation.

Proposition 3.6. *Ein Erzeugendensystem für $\mathcal{F}^1(A)$ ist gegeben durch die Elemente*
(a) $\omega(n_1, n_2, \ldots, n_N)$ *mit* $\sum_{i=1}^{N} n_i = g - 2 = M(1)$ *und mindestens ein* $n_i \leq -2$ *oder mindestens zwei* $n_i, n_j \leq -1$.
(b) $\omega(n_1, n_2, \ldots, n_N)$ *mit* $\sum_{i=1}^{N} n_i = g - 1$ *und alle* $n_i \geq 0$.
(c)

$$\omega(-1,-1,0,\ldots,0),\quad \omega(-1,0,-1,\ldots,0),\quad \ldots\quad \omega(0,0,\ldots,0,-1,-1)\ .$$

Dabei sind die Elemente unter (a) und (b) bis auf Multiplikation mit einem Skalar eindeutig. Die Elemente unter (c) seien fixiert durch die Vorschrift $res_{P_i}(\omega) = -1$ *an der Polstelle* P_i *und* $res_{P_j}(\omega) = +1$ *an der Polstelle* P_j *für* $i < j$ *und durch die Bedingung, daß sie rein imaginäre Perioden haben.*
Im Fall $N > 2$ *werden die Elemente in (c) nicht benötigt.*

Beweis. Zuerst zeigen wir die Existenz und Eindeutigkeit solcher Elemente. (c) gewinnt man durch Anwendung von Prop. 2.2.
(a) Aufgrund der Bedingungen gilt nach Prop. 3.5(a) $h^0(K - \sum_{i=1}^N n_i P_i) = 1$, d.h. es gibt ein Element f das "besser" oder gleich der vorgegebenen Ordnung ist. Nehmen wir an, daß eine höhere Ordnung an irgendeinem der Punkte P_j vorliegt. Damit ist $f \in H^0(X, K - \sum_{i=1}^N n_i P_i - P_j)$. Aufgrund der Voraussetzungen sind wir aber immer noch im Bereich von Prop. 3.5(a) also ist dieser Vektorraum wieder trivial. Dies zeigt wie im Beweis von Prop. 3.4 die Existenz und Eindeutigkeit.
(b) Mit Prop. 3.5(b) ergibt sich $h^0(K - \sum_{i=1}^N n_i P_i) = 1$. Auch hier kann keine höhere Ordnung auftreten, da immer noch Prop. 3.5(b) zuständig ist. Also folgt auch hier Existenz und Eindeutigkeit.
Erzeugend: Sei $v \in \mathcal{F}^1(A)$, so können durch Subtraktion von Vielfachen von

$$\omega(0, \dots, n_i, 0, \dots, g - 2 - n_i), \quad n_i \leq -2$$

(Typ (a)) alle Pole von Ordnung ≥ 2 an den Punkten $P_1, \dots, P_{N-1}$ beseitigt werden. Durch Subtraktion von Vielfachen von

$$\omega(g, 0, \dots, -1, 0, \dots, -1)$$

(ebenfalls Typ(a)) werden alle Pole an den Punkten $P_2, \dots, P_{N-1}$ beseitigt. Durch Subtraktion von Vielfachen von (Typ (a))

$$\omega(n_1, 0, \dots, 0, g - 2 - n_1), \quad \omega(g - 2 - n_N, 0, \dots, 0, n_N)$$

erhält man eine Differentialform mit höchstens Polen erster Ordnung bei P_1 und P_N. Falls $N > 2$ kann der Pol bei P_1 durch Subtraktion von Vielfachen von (Typ (a))

$$\omega(-1, g, 0, \dots, 0, -1)$$

beseitigt werden. Im Fall $N = 2$ durch Subtraktion von Vielfachen von (Typ (c))

$$\omega(-1, 0, \dots, 0, -1)\ .$$

Da eine Differentialform wegen des Residuensatzes nicht die globale Polordnung 1 haben kann verschwindet gleichzeitig auch der Pol bei P_N. Übrig bleibt eine globale holomorphe Differentialform v'. Die

$$\omega(n_1, 0, \dots, g-1-n_1), \qquad 0 \le n_1 \le g-1$$

sind g linear unabhängige holomorphe Differentiale. Sie sind somit eine Basis der holomorphen Differentiale. D.h. v' ist eine Linearkombination von Typ (b) Elementen. Dies zeigt alles. Insbesondere sieht man auch, daß man für $N > 2$ ohne Typ (c) auskommt. □

Proposition 3.7. *Sei $N = 2$. Dann bilden die Elemente*

$$\omega(n, g-2-n), \qquad n \le -2 \quad \textit{oder} \quad n \ge g \ ,$$
$$\omega(n, g-1-n), \qquad 0 \le n \le g-1 \ ,$$
$$\omega(-1, -1)$$

eine Basis von $\mathcal{F}^1(P_1, P_2)$.

Beweis. (Dies ist die von Krichever - Novikov[KN1] angegebene Basis.) Nach Prop. 3.6 sind die obigen Elemente erzeugend. Da jedes Element eine andere Polordnung bei P_1 hat, sind sie auch linear unabhängig. □

II. Sei nun $g \ge 2$ und $\lambda = 0$ oder $g = 1$ und $\lambda \in \mathbb{Z}$ beliebig. In letzterem Fall ist wegen $K \cong \mathcal{O}$ ($\mathcal{O}$ sei das triviale Bündel)

$$f^\lambda(n_1, n_2, \dots, n_N) = A(n_1, n_2, \dots, n_N)\, dz^\lambda \ . \tag{3-7}$$

Hierbei sei z die Variable, die von der Quotientenbildung aus $\mathbb{C}$ herkommt. Aus (3-7) folgt aber, daß die Angabe eines Erzeugendensystemes für $\lambda = 0$ auch ein solches für beliebiges λ ergibt. Achtung: Die Lieableitung hängt sehr wohl von λ ab.

Es gelten weiterhin die Bezeichnungen aus § 3.(b). Wir erhalten $M(0) = -g$, bzw. $M(\lambda) = -1$ für $g = 1$.

Proposition 3.8. *Seien $P_1, P_2, \dots, P_N$ generische Punkte auf X, $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{Z}$. (a) Ist ein $n_i > 0$, dann gilt*

$$h^0\Big(-\sum_{i=1}^{N} n_i P_i\Big) = \max\Big(-g - \sum_{i=1}^{N} n_i + 1 \ , \ 0\Big) \ .$$

(b) Sind alle $n_i \le 0$, *dann gilt*

$$h^0\big(-\sum_{i=1}^N n_i P_i\big) = \max\big(-g - \sum_{i=1}^N n_i + 1\ ,\ 1\big)\ .$$

Beweis. (Dies ist eine Dualisierung von Prop. 3.5.) Mit Riemann-Roch berechnen wir

$$h^0\big(-\sum_{i=1}^N n_i P_i\big) - h^0\big(K + \sum_{i=1}^N n_i P_i\big) = -\sum_{i=1}^N n_i - g + 1\ .$$

Ist nun ein $n_i > 0$, so gilt nach Prop. 3.5(a)

$$h^0\big(-\sum_{i=1}^N n_i P_i\big) = -\sum_{i=1}^N n_i - g + 1 + \max\big(g + \sum_{i=1}^N n_i - 1\ ,\ 0\big)\ ,$$

also (a). Sind alle $n_i \le 0$, so folgt mit Prop. 3.5(b)

$$h^0\big(-\sum_{i=1}^N n_i P_i\big) = -\sum_{i=1}^N n_i - g + 1 + \max\big(g + \sum_{i=1}^N n_i\ ,\ 0\big)\ ,$$

also (b). □

Proposition 3.9. *Ein Erzeugendensystem für* $\mathcal{F}^0(A)$ *ist gegeben durch die Elemente*
(a) $A(n_1, n_2, \ldots, n_N)$ *mit* $\sum_{i=1}^N n_i = -g = M(0)$ *und mindestens ein* $n_i > 0$, *(b)* $A(n_1, n_2, \ldots, n_N)$ *mit* $\sum_{i=1}^N n_i = -g - 1$ *und alle* $n_i \le 0$.
(c) $A(0, 0, \ldots, 0) := 1$
Dabei sind die Elemente unter (a) eindeutig bis auf Multiplikation mit einem Skalar. Die Elemente unter (b) sind eindeutig bis auf Multiplikation mit einem Skalar und Addition einer generischen Konstanten.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Existenz und die Eindeutigkeit im angegebenem Umfange. Im Fall (a) berechnet sich nach Prop. 3.8

$$h^0\big(-\sum_{i=1}^N n_i P_i\big) = 1, \quad \text{und} \quad h^0\big(-\sum_{i=1}^N n_i P_i - P_j\big) = 0\ .$$

Also gilt hier nach denselben Schlußweisen wie in den anderen Fällen Existenz und Eindeutigkeit (bis auf Multiplikation mit Skalar). Im Fall (b) berechnet

sich $h^0(-\sum_{i=1}^N n_iP_i) = 2$. In dem Raum der Schnitte liegen die konstanten Funktionen. Sei $\{1, f'\}$ eine Basis. Für die Punkte P_j mit $n_j < 0$ hat f' genau die angegebene Ordnung. Ansonsten wäre $f \in H^0(X, -\sum_{i=1}^N n_iP_i - P_j)$. In diesem Bereich ist immer noch Prop. 3.8(b) zuständig, d.h. der Raum ist 1-dimensional. Er enthält die Konstanten, also $f' = const$. Widerspruch! An den anderen Punkten aus A kann f' sehr wohl Nullstellen haben. Durch Addition einer generischen Konstanten c besitzt $f = f' + c$ dort genau die Ordnung 0. Damit folgt die Existenz und Eindeutigkeit im angegebenem Rahmen.
Für die Erzeugendeneigenschaft gehen wir wiederum nach obigem Schema vor. Durch Subtraktion von Linearkombination von Elementen (a) und (b) können alle Pole bei $P_1 \ldots, P_{N-1}$ beseitigt werden. Durch Subtraktion von Linearkombination von

$$A(-g-n, 0, \ldots, n), \quad n \leq -g-1$$

erhalten wir eine Funktion holomorph auf $X \setminus \{P_N\}$ mit Polordnung $\leq g$ bei P_N. Aufgrund der generischen Wahl der Punkte, kann dies nur eine Konstante sein, da sonst P_N ein Weierstraß-Punkt wäre. $\square$

Wie oben erhalten wir

Proposition 3.10. *Sei $N = 2$. Dann bilden die Elemente*

$$A(n, -g-n), \qquad n \leq -g-1 \quad \text{oder} \quad n \geq 1\ ,$$
$$A(n, -g-1-n), \qquad -g \leq n \leq -1\ ,$$
$$A(0,0)$$

eine Basis von $\mathcal{F}^0(P_1, P_2)$.

§ 4. "Explizite" Konstruktion der Erzeugenden

(a) Konstruktion mit Hilfe von Thetafunktionen im Fall $g \geq 1$

In diesem Abschnitt mache ich eine Verallgemeinerung der im Fall $N = 2$ von Bonora und Mitarbeitern durchgeführten Konstruktion [Bo1].

Sei X eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$. Ich möchte zuerst die für uns wichtigen Fakten der Bausteine der Konstruktion zusammenstellen. Details sind in [Mum],[Fay] oder [Schl1] zu finden. Es sei eine kanonische Homologiebasis und die zugeordnete Basis der holomorphen Differentiale $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_g$, wie in (2-5) – (2-7) beschrieben, gewählt. Π sei die Periodenmatrix. Die Jacobivarität ist definiert als der $g-$dimensionale Torus

$$\mathrm{Jac}\,(X) := \mathbb{C}^g/L, \qquad L = \mathbb{Z}^g \oplus \Pi \cdot \mathbb{Z}^g \ .$$

Die Thetafunktion auf $\mathrm{Jac}\,(X)$ ist definiert als $(z \in \mathbb{C}^g)$

$$\vartheta(z, \Pi) := \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi \mathbf{i}\, {}^t n \cdot \Pi \cdot n + 2\pi \mathbf{i}\, {}^t n \cdot z) \ . \tag{4-1}$$

Wir brauchen auch die Thetafunktionen mit Charakteristiken $a, b \in \mathbb{R}^g$.

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z, \Pi) := \exp\left(\pi \mathbf{i}\, {}^t a \cdot \Pi \cdot a + 2\pi \mathbf{i}\, {}^t a \cdot (z + b)\right) \cdot \vartheta\,(z + \Pi \cdot a + b, \Pi) \ . \tag{4-2}$$

Dies sind holomorphe Funktionen in z. Sie haben das folgende quasiperiodische Verhalten [Mum,I,p.123]

$$\begin{aligned} \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z + m, \Pi) &= \exp(2\pi \mathbf{i}\, {}^t a \cdot m) \cdot \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z, \Pi) \ , \\ \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z + \Pi \cdot m, \Pi) &= \exp(-2\pi \mathbf{i}\, {}^t b \cdot m) \cdot \exp(-\pi \mathbf{i}\, {}^t m \cdot \Pi \cdot m - 2\pi \mathbf{i}\, {}^t m \cdot z) \\ &\quad \cdot \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z, \Pi) \end{aligned} \tag{4-3}$$

unter der Translationen von z mit Gittervektoren $(m \in \mathbb{Z}^g)$. Es ist

$$\vartheta(z, \Pi) = \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (z, \Pi) \ .$$

Für diese wird der erste Exponentialterm in (4-3) immer zu 1 . Ich schließe mich dem oft verwendeten Sprachgebrauch an und nenne $\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ eine mehrwertige Funktion auf X. Diese Sprechweise ist am besten für die Fragestellungen geeignet, welche ich untersuchen will. Diese mehrwertigen Funktionen können auch aufgefaßt werden als einwertige Funktionen auf der Überlagerung $\mathbb{C}^g$, bzw. als Schnitt eines geigneten Geradenbündels über $\operatorname{Jac}(X)$. Da X fixiert ist, werde ich im folgenden die Periodenmatix nicht mehr explizit in die Bezeichnung aufnehmen.

X ist eingebettet durch die Jacobi-Abbildung

$$X \to \operatorname{Jac}(X), \quad P \mapsto J(P) := (\int_B^P \omega_1, \int_B^P \omega_2, \dots, \int_B^P \omega_g) \mod L \quad (4\text{-}4)$$

in $\operatorname{Jac}(X)$. Hierbei ist B ein festgewählter Basispunkt mit $B \notin A$. Der Pullback der Thetafunktion $\vartheta\ :\ P \mapsto \vartheta(J(P))$ ist eine mehrwertige Funktion auf X. Der Mehrwertigkeit entspricht die Wahl eines anderen Integrationsweges. Dies kann beschrieben werden als "Bewegung des Punktes P um einen Homologiezyklus"

$$P \mapsto P' = P + \sum_{i=1}^{g} n_i a_i + \sum_{i=1}^{g} m_i b_i \ (\text{“} = P\text{”})\ . \quad (4\text{-}5)$$

Ich werde weiterhin mit $J(P) \in \mathbb{C}^g$ auch einen beliebigen Repräsentanten von $J(P) \in \operatorname{Jac}(X)$ bezeichnen. Für die Punkte $P_1, P_2, \dots, P_N \in A$ sei dieser Repräsentant $J(P_i)$ jeweils gewählt und dann festgehalten.

Für uns wichtig ist die folgende

Proposition 4.1. *(Satz von Riemann* [Mum,I,p.149]*)*
Es gibt einen Vektor $\Delta \in \mathbb{C}^g$, so daß für alle $w \in \mathbb{C}^g$ gilt: Die Funktion $\vartheta(w+J(P))$, aufgefaßt als mehrwertige Funktion im Argument P, verschwindet entweder identisch auf X, oder sie hat genau g Nullstellen, welche gegeben sind durch die Punkte $Q_1, Q_2, \dots, Q_g$ (mit Mehrfachnennungen) für die gilt

$$\sum_{i=1}^{g} J(Q_i) = -w + \Delta \mod L\ . \quad (4\text{-}6)$$

Im folgenden werden wir als Vektor w bestimmte Werte wählen, die von unseren Punkten $P_1, P_2, \dots, P_N$ abhängen. Da wir diese generisch gewählt haben, wird der erste Fall in Prop. 4.1 nie auftreten [FaKr,Theorem VI,3.3].

Proposition 4.2. *Die (mehrwertige) Funktion*

$$P \mapsto \vartheta\left(J(P) - gJ(P_N) + \Delta\right)$$

hat genau eine $g-$fache Nullstelle bei P_N und sonst keine weiteren.

Beweis. Mit den Bezeichnungen von Prop. 4.1 setzen wir $w = -gJ(P_N) + \Delta$ also ist

$$-w + \Delta = gJ(P_N) \mod L \; .$$

Damit ist aber P_N $g-$fache Nullstelle nach Prop. 4.1 . □

Der nächste Baustein ist die "prime form" [Mum,II,p.3.210]. Zur Definition fixiert man eine Thetareihe mit halbzahliger Charakteristik $c = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, so daß gilt

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (0) = 0 \quad \text{und} \quad d_z \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (0) \neq 0 \; .$$

Die Charakteristik c bestimmt ein Geradenbündel L mit

$$L^{\otimes 2} = K, \quad \text{und} \quad h^0(X, L) = 1 \; .$$

Sei h_c nichttrivialer Schnitt von L, dann ist h_c^2 ein Differential und es gilt sogar

$$h_c^2(P) = \sum_{i=1}^{g} \frac{\partial \vartheta[c]}{\partial z_i}(0)\, \omega_i(P)$$

nach entsprechender skalaren Normierung. h_c ist eine $\left(\frac{1}{2}\right)$ − Form auf X. Die "prime form" ist definiert als

$$E(P, R) := \frac{\vartheta[c]\left(J(P) - J(R)\right)}{h_c(P) \cdot h_c(R)} \; . \tag{4-7}$$

Da der Zähler noch vom Integrationsweg B nach P, bzw. B nach R abhängt ist $E(P, R)$ eine mehrwertige holomorphe Form auf $X \times X$ vom Gewicht $\left(-\frac{1}{2}\right)$ in jedem Argument. Natürlich kann $E(P, R)$ ebenfalls wieder beschrieben werden als einwertige Form auf $\widetilde{X} \times \widetilde{X}$ ($\widetilde{X}$ die universelle Überlagerung von X), oder als Schnitt in ein passendes Geradenbündel über $X \times X$.

Wir haben die folgenden Eigenschaften:

Proposition 4.3. [Mum,II,p.3.210]

(1) $E(P,R) = -E(R,P)$

(2) $E(P,R) = 0 \Longleftrightarrow P = R$

(3) Die Nullstelle entlang der Diagonale ist einfach.

(4) Falls P um einen Homologiezyklus (4-5) bewegt wird, erhalten wir

$$E(P',R) = \epsilon \cdot \exp\left(-\pi \mathbf{i}\, {}^t m \cdot \Pi \cdot m + 2\pi \mathbf{i}\, {}^t m \cdot (J(R) - J(P)\right) \cdot E(P,R) \ . \tag{4-8}$$

ϵ ist ein Vorzeichenfaktor der abhängt vom Zyklus und der Charakteristik. Genauer gilt:

$$\epsilon = (-1)^{2({}^t a \cdot n - {}^t b \cdot m)} \ .$$

(5) Falls R um einen Homologiezyklus (analog zu (4-5)) bewegt wird, erhalten wir

$$E(P,R') = \epsilon \cdot \exp\left(-\pi \mathbf{i}\, {}^t m \cdot \Pi \cdot m - 2\pi \mathbf{i}\, {}^t m \cdot (J(R) - J(P)\right) \cdot E(P,R) \ . \tag{4-9}$$

mit

$$\epsilon = (-1)^{2({}^t b \cdot m - {}^t a \cdot n)} \ .$$

Der dritte Baustein ist das $\sigma-$Differential. Für meine Zwecke ist die folgende Definition sinnvoll

$$\sigma(P) = \vartheta(J(P) - gJ(P_N) + \Delta) \cdot E(P,P_N)^{-g} \tag{4-10}$$

Wieder handelt es sich um eine mehrwertige Form. Sie ist vom Gewicht $\left(\frac{g}{2}\right)$. Die Pole der "prime form" Terme werden von den Nullstellen der Thetafunktion (Prop.4.2) annulliert. Deshalb ist σ eine holomorphe Form ohne Nullstellen. Durch unmittelbares Nachrechnen unter Benutzung von (4-8) und (4-9) sieht man sofort

Proposition 4.4. *$\sigma(P)$ transformiert sich bei Bewegung um einen Homologiezykel (4-5) wie folgt*

$$\sigma(P') = \epsilon^g \cdot \exp\left(\mathbf{i}\pi(g-1){}^t m \cdot \Pi \cdot m - \mathbf{i}\, 2\pi\, {}^t m \cdot \left(\Delta - (g-1)J(P)\right)\right) \cdot \sigma(P) \ . \tag{4-11}$$

Ist nun σ' eine andere $\left(\frac{g}{2}\right)$ Form mit demselben Transformationsverhalten dann ist σ'/σ eine Funktion auf X, also eine Konstante. Damit stimmen die in [Fay,p.31], bzw. [Bo1] gegebene Definition des $\sigma-$ Differentials bis auf Multiplikation mit einer Konstante mit der meinigen überein. Dasselbe gilt, falls ein anderer Lift für $J(P_N)$ gewählt wurde.

Mit diesen Bausteinen sind wir nun in der Lage die Erzeugenden $f^\lambda(n_1, n_2, \ldots, n_N)$ aus § 3. zu beschreiben.

Proposition 4.5. *Sei $g \geq 2$ und $\lambda \neq 0, 1$ und*

$$n_1, n_2, \ldots, n_N \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{i=1}^{N} n_i = M(\lambda) = (2\lambda - 1)(g-1) - 1$$

dann gibt es eine Konstante $D \neq 0$, derart daß

$$\begin{aligned} f^\lambda(n_1, n_2, \ldots, n_N)(P) = D \cdot \prod_{i=1}^{N} E(P, P_i)^{n_i} \cdot \sigma(P)^{(2\lambda-1)} \times \\ \times \vartheta\big(J(P) + \sum_{i=1}^{N} n_i J(P_i) - (2\lambda - 1)\Delta\big) \ . \end{aligned} \tag{4-12}$$

Beweis. Zu zeigen ist daß die rechte Seite in (4-12) eine wohldefinierte Form vom Gewicht λ ist und genau die angegebenen Nullstellenordnungen an den Punkten von A besitzt.
(a) Berechnung des Gewichtes: Jeder Faktor $E(P, P_i)$ hat das Gewicht $(-\frac{1}{2})$ in der Variablen P. σ das Gewicht $(\frac{g}{2})$, ϑ das Gewicht 0. Zusammen also

$$\sum_{i=1}^{N} n_i \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + (2\lambda - 1) \cdot \frac{g}{2} = \lambda \ .$$

(b) Wohldefiniertheit: Hierzu ist zu zeigen, daß die rechte Seite bei Bewegung von P um einen Homologiezyklus (4-5) invariant bleibt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die angegebenen Automorphiefaktoren (4-3), (4-8) und (4-11) sich zu 1 aufmultiplizieren. Die Rechnung ergibt

$$\prod_{i=1}^{N} \left(\epsilon^{n_i} \cdot \exp\Big(\big(-\pi\mathbf{i}\,{}^t m \cdot \Pi \cdot m + 2\pi\mathbf{i}\,{}^t m \cdot (J(P_i) - J(P))\big) \cdot n_i\Big)\right) \cdot$$

$$\epsilon^{g\cdot(2\lambda-1)} \cdot \exp\Big(\big(\pi\mathbf{i}(g-1)\,{}^t m \cdot \Pi \cdot m - 2\pi\mathbf{i}\,{}^t m \cdot (\Delta - (g-1)J(P))\big) \cdot (2\lambda - 1)\Big) \cdot$$

$$\exp\Big(-\pi\mathbf{i}\,{}^t m \cdot \Pi \cdot m - 2\pi\mathbf{i}\,{}^t m \cdot (J(P) + \sum_{i=1}^{N} n_i J(P_i) - (2\lambda - 1)\Delta)\Big) \ = \ 1 \ .$$

(c) Nullstellenordnungen: Aufgrund der $E(P,P_i)^{n_i}$ Faktoren hat die rechte Seite mindestens die angegebenen Ordnungen n_i an den Punkten $P_i \in A$. Durch den $\vartheta-$Funktionsfaktor treten an diesen Punkten jedoch keine weiteren Nullstellen auf. Wäre nämlich die Nullstellenordung grösser als n_i an irgendeinem der Punkte P_i, so wäre sie aufgrund von Prop. 3.2 identisch 0[12]. Somit ist aber die rechte Seite bis auf Multiplikation mit einer Konstanten $D \in \mathbb{C}$, $D \neq 0$ gleich dem links stehenden erzeugenden Elementes. Hierbei ist Eindeutigkeit, bis auf Multiplikation mit einem Skalar, gemeint. $\square$

Bemerkung 1: Die g weiteren Nullstellen, welche die Form $f^\lambda(\dots)$ als Schnitt in das Bündel K^λ haben muß, sind die g Nullstellen des Thetafunktionsfaktors.

Bemerkung 2: Natürlich kann man in obiger Konstruktion das $\sigma-$Differential durch seine Definition (4-10) ersetzen

$$f^\lambda(n_1,n_2,\dots,n_N)(P) = D \cdot \prod_{i=1}^{N-1} E(P,P_i)^{n_i} \cdot E(P,P_N)^{n_N-(2\lambda-1)g} \times$$
$$\times\, \vartheta\big(J(P) - gJ(P_N) + \Delta\big)^{(2\lambda-1)} \cdot \vartheta\big(J(P) + \sum_{i=1}^{N} n_i J(P_i) - (2\lambda-1)\Delta\big),$$

verliert dadurch aber das symmetrische Erscheinungsbild der Punkte.

Bemerkung 3: Die angegebenen Formen sind im Fall $N=2$ identisch zu den von Bonora und Mitarbeitern gegebenen Formen [Bo1].

Bemerkung 4: Die Konstante D hängt auch von den gewählten Lifts $J(P_i) \in \mathbb{C}^g$ ab, da alle Bausteine von diesen abhängen. Dies ist für meine Zwecke unerheblich, da die P_i fixiert sind. Möchte man allerdings die Möglichkeit einbeziehen die Punkte P_i zu variieren, so wird sich dies bei einer globalen Variation störend auswirken. Bewegt man einen Punkt P_i um einen Homologiezyklus, so wird man i.Allg. nicht mehr zur selben Konstante zurückkommen. Durch Hinzufügen geeigneter Kompensationskonstanten $C(J(P_1),\dots,J(P_N))$ kann man allerdings erreichen

$$D \;=\; D_1 \cdot C(J(P_1), J(P_2), \dots, J(P_N))\ . \tag{4-13}$$

D_1 ist nun eine Konstante , die nur noch von den Punkten P_i, den Multiplizitäten n_i und dem Gewicht λ abhängt, falls man etwa die Laurententwicklung an einem Punkt zur Normierung wählt. Zur Bestimmung einer solchen Konstante C wähle ich einen generischen Punkt $Q \in X$, der nicht mit den

[12] Dies kann man auch mit Hilfe des Satzes von Riemann (Prop. 4.1) zeigen.

Punkten P_i, den g weiteren Nullstellen von (4-12) und den Nullstellen des zur Konstruktion der prime form benutzten Schnittes h_c zusammenfällt. Ich setze

$$C = \frac{h_c^{2\lambda}(Q)}{f^\lambda(n_1, n_2, \ldots, n_N)(Q)} \ . \tag{4-14}$$

Hierbei sei $f^\lambda(\ldots)$, der durch die rechte Seite in (4-12) gegebene Ausdruck. C ist eine wohldefinierte Zahl, die abhängt von den Lifts $J(P_i)$.

Proposition 4.6. *Das Produkt aus der rechten Seite von (4-12) (ohne die Konstante D) und der Konstante (4-14) ist unabhängig von der Wahl verschiedener Lifts für* $J(P_i)$, $i = 1, \ldots, N$.

Beweis. Ich berechne zuerst das Verhalten von (4-12) unter der Bewegung von P_j mit einem Homologiezyklus (4-5). Im folgenden seien nur die Automorphiefaktoren aufgeschrieben. Ich betrachte die rechte Seite von (4-12). Es sei zuerst $j \neq N$, dann lautet dieser (Achtung: n_j ist hier nicht der Zykelkoeffizient sondern die Nullstellenordnung.)

$$\begin{aligned}
&\epsilon^{n_j} \cdot \exp\Big(\big(-\pi \mathbf{i}\, {}^t m \cdot \Pi \cdot m - 2\pi \mathbf{i}\, {}^t m \cdot (J(P_j) - J(P)\big) n_j\Big) \times \\
&\times \exp\Big(-\pi n_j^2 \mathbf{i}\, {}^t m \cdot \Pi \cdot m - 2\pi n_j \mathbf{i}\, {}^t m \cdot (J(P) + \sum_i n_i J(P_i) - (2\lambda - 1)\Delta)\Big) \ .
\end{aligned}$$

Für $j = N$ tritt noch zusätzlich auf

$$\begin{aligned}
&\epsilon^{-g} \cdot \exp\Big(\big(-\pi \mathbf{i}\, {}^t m \cdot \Pi \cdot m - 2\pi \mathbf{i}\, {}^t m \cdot (J(P_N) - J(P)\big)(-g)\Big) \times \\
&\qquad \times \exp\Big(-\pi g^2 \mathbf{i}\, {}^t m \cdot \Pi \cdot m + 2\pi g \mathbf{i}\, {}^t m \cdot (J(P) - gJ(P_N) + \Delta)\Big) \ .
\end{aligned}$$

In beiden Fällen verschwindet jegliche $J(P)$ Abhängigkeit. Somit transformiert sich der Faktor (4-14) nach Definition gerade entgegengesetzt, und das Produkt ist invariant. □

Es bleiben die Sonderfälle aus § 3. zu behandeln.

$\boxed{g \geq 2, \lambda = 1}$ Wir haben 3 verschiedene Typen von Erzeugenden. Typ (a) ist derjenige, der durch direkte Spezialisierung aus beliebigem λ entsteht.

Proposition 4.7. *Sei $g \geq 2$ und $n_1, n_2, \ldots, n_N \in \mathbb{Z}$ mit $\sum_{i=1}^{N} n_i = M(\lambda) = g-2$, derart daß mindestens ein $n_i \leq -2$ oder mindestens zwei $n_i, n_j \leq -1$ ist, dann gibt es eine Konstante $D \neq 0$, derart daß*

$$\omega(n_1, n_2, \ldots, n_N)(P) = D \cdot \prod_{i=1}^{N} E(P, P_i)^{n_i} \cdot \sigma(P) \times \\ \times \vartheta\big(J(P) + \sum_{i=1}^{N} n_i J(P_i) - \Delta\big) \ . \quad (4\text{-}15)$$

Der Beweis von Prop. 4.5 gilt auch für Prop. 4.7.

Typ (b) ist gegeben durch

$$\omega(n_1, n_2, \ldots, n_N), \qquad \text{alle } n_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{N} n_i = (g-1) \ . \qquad (4\text{-}16)$$

Wir wählen einen zusätzlichen Punkt $R \in X \setminus A$ (etwa den Basispunkt B der Jacobiabbildung). Er wird fixiert.

Proposition 4.8. *Sei $g \geq 2$ und $n_1, n_2, \ldots, n_N \in \mathbb{Z}$, welche die Bedingung in Formel (4-16) erfüllen, dann gibt es eine Konstante D, derart daß gilt*

$$\begin{aligned} \omega(n_1, n_2, \ldots, n_N)(P) = D \cdot \prod_{i=1}^{N} E(P, P_i)^{n_i} \cdot \sigma(P) \cdot E(P, R)^{-1} \times \\ \times \vartheta\big(J(P) + \sum_{i=1}^{N} n_i J(P_i) - J(R) - \Delta\big) \ . \end{aligned} \qquad (4\text{-}17)$$

Beweis. Da die angegebene Form der Situation im Beweis von Prop. 4.5 für den Fall $P_1, \ldots, P_N, R$ ($\sum_{i=1}^{N} n_i + n_r = g-2$) im Beweisteil (a) und (b) entspricht, ist die rechte Seite eine wohldefinierte Form vom Gewicht 1, d.h. ein Differential. Der Pol am Punkt R, hervorgerufen durch den Faktor $E(P, R)^{-1}$ wird durch den Thetafunktionsfaktor wieder annuliert, da die rechte Seite sonst eine Differentialform mit nur einem Pol 1.ter Ordung wäre. Wegen Prop. 3.5 kann die Thetafunktion die Nullstellenvielfachheit an den Punkten P_i nicht erhöhen. □

Die Wahl des Punktes R geht nur in die Festlegung der Konstante ein. Auch in diesem Fall gelten die Bemerkungen 1–4 , welche ich nach Prop. 4.5 gemacht habe. Insbesondere kann man auch entsprechende Korrekturkonstanten analog zu (4-14) wählen. Übrig bleibt der Typ (c) (der im Fall $N > 2$ gar nicht benötigt wird).

Proposition 4.9. *Sei*

$$\omega_{i,j} := d\left(\log\frac{E(P,P_j)}{E(P,P_i)}\right) \qquad 1 \le i < j \le N$$

und $\omega_1, \dots, \omega_g$ *die Basis der holomorphen Differentiale nach (2-7), dann gilt*

$$\omega(0,\dots,-1,0,\dots,-1,\dots,0) = \omega_{i,j} + \mathbf{i}\sum_r\left(\sum_s((\operatorname{Im}\Pi)^{-1})_{rs}\cdot(\operatorname{Re}\oint_{b_s}\omega_{i,j})\right)\omega_r\ . \tag{4-18}$$

Hierbei bezeichne i *und* j *die Indices* l *mit* $n_l = -1$.

Beweis. $\omega_{i,j}$ ist ein meromorphes Differential das holomorph auf $X \setminus \{P_i, P_j\}$ ist. An P_i und P_j hat es die Polordnung 1 und das Residuum -1, bzw. $+1$. Bei der Integration um die Homologiezyklen welche nur aus den a_i bestehen, ergibt sich die Periode 0 [Mum,II,3.212]. Wie in Prop. 2.2 können wir durch Addition von holomorphen Differentialen erreichen, daß alle Perioden rein imaginär werden. In der vorgegebenen Situation spezialisiert sich die Formel dort zu (4-18). Da ein derartiges Differential eindeutig fixiert ist (ebenfalls Prop. 2.2) ist die rechte Seite identisch mit dem erzeugenden Element. □

$\boxed{g \ge 2, \lambda = 0 \text{ oder } g = 1, \lambda \in \mathbb{Z}}$ Wie in § 3. ausgeführt, genügt es im Fall $g = 1$ den Wert $\lambda = 0$ zu betrachten. Es gilt $M(0) = -g$. Typ(a) entspricht wiederum dem allgemeinen Typ, und wir erhalten durch Spezialisierung

Proposition 4.10. *Seien* $n_1, n_2, \dots n_N \in \mathbb{Z}$*, mindestens ein* $n_i > 0$ *und* $\sum_{i=1}^N n_i = -g$*, dann gibt es eine Konstante* D *mit*

$$\begin{aligned} A(n_1,n_2,\dots,n_N)(P) = D\cdot\prod_{i=1}^N E(P,P_i)^{n_i}\cdot\sigma(P)^{-1}\ \times \\ \times\vartheta\big(J(P)+\sum_{i=1}^N n_iJ(P_i)+\Delta\big)\ . \end{aligned} \tag{4-19}$$

Für den Typ (b) führen wir wiederum einen weiteren Punkt $R \in X \setminus A$ ein.

Proposition 4.11. *Seien* $n_1, n_2, \dots n_N \in \mathbb{Z}$*, alle* $n_i \le 0$ *und* $\sum_{i=1}^N n_i = -(g+1)$*, dann gibt es eine Konstante* D *mit*

$$\begin{aligned} A(n_1,n_2,\dots,n_N)(P) = D\cdot\prod_{i=1}^N E(P,P_i)^{n_i}\cdot\sigma(P)^{-1}\cdot E(P,R)\ \times \\ \times\vartheta\big(J(P)+\sum_{i=1}^N n_iJ(P_i)+J(R)+\Delta\big)\ . \end{aligned} \tag{4-20}$$

Hierbei ist $A(\dots)$ ein erzeugendes Element mit den vorgeschriebenen Nullstellenordnungen.

Beweis. Auch hier ist durch die Einführung eines zusätzlichen Punktes die Gültigkeit der Aussage über das Gewicht und über die Wohldefiniertheit wieder gesichert. Desweiteren folgt ebenso mit Prop. 3.8, daß die vorgeschriebene Ordnung an den Punkten P_i genau ereicht wird. Allerdings wird nun von den g zusätzlichen Nullstellen eine auf den Punkt R gelegt. Bei Variation von R erhalten wir verschiedene rechte Seiten. Das stimmt mit unserer Erkenntnis aus § 3. überein, daß die linke Seite in diesem Fall nur bis auf Addition einer generischen Konstante und Multiplikation mit einem Skalar $\neq 0$ fixiert ist. Deshalb dieser zusätzliche Freiheitsgrad. □

Der fehlende Erzeuger ist die konstante Funktion $A(0,\dots,0) \equiv 1$. Die Bemerkungen 1–4 (einschließlich der entsprechenden Korrekturkonstanten) nach Prop. 4.5 gelten auch in diesem Fall.

(b) Der Fall $g = 1$ (Weierstraßsche σ–Funktion)

Für den Fall $g = 1$ wurde für $N = 2$ in [KN1] die Erzeugenden mit Hilfe der σ–Funktion angegeben. Dies möchte ich für beliebiges N verallgemeinern. Sei T ein komplexer Torus (d.h. eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht 1), die gegeben ist als $T = \mathbb{C}/L$ mit einem Gitter L in $\mathbb{C}$. Natürlich können wir uns, falls bequem, auf Gitter L beschränken mit

$$L = \mathbb{Z} \oplus \tau \cdot \mathbb{Z}, \quad \tau \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}\,\tau > 0 \tag{4-21}$$

da ein beliebiger Torus komplex-analytisch isomorph zu einem derart gegebenem ist. Die Weierstraßsche σ–Funktion ist definiert als

$$\sigma(z) := z \cdot \prod_{w \in L \setminus \{0\}} \left((1 - \frac{z}{w}) \exp\left(\frac{z}{w} + \frac{1}{2}(\frac{z}{w})^2 \right) \right) . \tag{4-22}$$

Als Referenz für die folgenden Eigenschaften siehe etwa [HuCo].

Proposition 4.12.

(a) σ *ist eine holomorphe Funktion auf* $\mathbb{C}$.

(b) σ hat an jedem Gitterpunkt eine Nullstelle 1.ter Ordung und sonst keine weiteren Nullstellen.

(c) σ besitzt das folgende automorphe Verhalten: Sei $w \in L$, so gilt

$$\sigma(z+w) = v(w) \exp\Big(\eta(w) \cdot (z + \frac{w}{2})\Big) \cdot \sigma(z) \tag{4-23}$$

mit $v(w) = \pm 1$ und $\eta(w) = \zeta(z+w) - \zeta(z)$. Hierbei ist ζ die Weierstraßsche $\zeta-$funktion. Es gilt

$$\eta(m \cdot w) = m \cdot \eta(w), \quad m \in \mathbb{Z},\ w \in L\ . \tag{4-24}$$

(d) Seien $a_i \in \mathbb{C}$ und $n_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, \dots, m)$ gegeben. Dann definiert die Funktion

$$f(z) = \prod_{i=1}^{m} (\sigma(z - a_i))^{n_i} \tag{4-25}$$

genau dann eine doppelperiodische Funktion unter dem Gitter L (d.h. eine meromorphe Funktion auf dem Torus T), falls gilt

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{m} n_i = 0 \quad \text{und} \quad (2) \quad \sum_{i=1}^{m} n_i a_i \in L\ . \tag{4-26}$$

In diesem Fall hat f eine Nullstelle von der Ordnung n_i am Punkt a_i mod *L.*

Wir wählen nun $a_i \in \mathbb{C}$ mit $a_i \bmod L = P_i, \quad i = 1, \dots, N$ und fixieren diese. Es sei

$$b = -\left(\sum_{i=1}^{N} n_i a_i\right)\ . \tag{4-27}$$

Wiederum haben wir die 3 Typen von Erzeugenden wie in Prop. 3.9 ausgeführt. Wir betrachten zuerst Typ (a).

Proposition 4.13. *Seien $n_1, n_2, \dots, n_N \in \mathbb{Z}$, mindestens ein $n_i > 0$ und $\sum_{i=1}^{N} n_i = -1$, dann gibt es ein $E \in \mathbb{C}$ mit*

$$A(n_1, n_2, \dots, n_N)(z) = E \cdot \prod_{i=1}^{N} (\sigma(z - a_i))^{n_i} \cdot \sigma(z - b)\ . \tag{4-28}$$

Beweis. Offensichtlich ist mit diesen Wahlen (4-26) erfüllt, d.h. die rechte Seite ist eine wohldefinierte meromorphe Funktion auf dem Torus. Sind die P_i in allgemeiner Position gewählt, so kann b mod L niemals mit einem der P_i zusammenfallen, da sich sonst die Nullstellenordnung an einem dieser Punkte erhöhen würde. Dies ist im Widerspruch zu Prop. 3.8. D.h. die rechte Seite ist bis auf Multiplikation mit einer Konstanten der gesuchte Erzeuger. □

Die Konstante E hängt von den Lifts $a_i \in \mathbb{C}$ der Punkte P_i ab, da der Ausdruck in den $\sigma-$Termen davon abhängt. Um die Polstellen selbst global variieren zu können, ist allerdings die Unabhängigkeit vom Lift notwendig. Dies erreiche ich, indem ich entsprechend normiere. Hierzu sei $c \in \mathbb{C}$ gewählt, derart daß

$$c \bmod L \neq P_i, \quad i = 1, \dots, N \quad \text{und} \quad c \bmod L \neq b \bmod L \ .$$

Proposition 4.14. *Die modifizierte Funktion $A(n_1, n_2, \dots, n_N)$ gegeben durch*

$$A(n_1, n_2, \dots, n_N)(z) = C^{-1} \cdot \prod_{i=1}^{N} (\sigma(z - a_i))^{n_i} \cdot \sigma(z - b) \tag{4-29}$$

mit

$$C = \prod_{i=1}^{N} \sigma(c - a_i)^{n_i} \cdot \sigma(c - b) \tag{4-30}$$

ist unabhängig von den gewählten Lifts a_i für die Punkte P_i.

Beweis. (Offensichtlich hängt (4-30) nur von $c \bmod L$ ab.) Ich berechne das Verhalten von (4-28) und (4-30) unter der Translation $a_j \to a_j + w$ mit $w \in L$. Mit Hilfe von Prop. 4.12(c) erhalten wir

$$\begin{aligned} E \cdot \prod_{i \neq j} (\dots) \sigma(z - a_j - w)^{n_j} \cdot \sigma(z + \sum_i n_i a_i + n_j w) = \\ = A(\dots)(z) \cdot v(-w)^{n_j} \exp\Big(\eta(-w)(z - a_j - \frac{w}{2}) \cdot n_j\Big) \times \\ \times v(n_j w) \exp\bigg(\eta(n_j w)(z + \sum_i n_i a_i + \frac{n_j w}{2})\bigg) \ . \end{aligned}$$

Wegen (4-24) folgt

$$\big(\eta(-w) \cdot n_j + \eta(n_j w)\big) \cdot z = 0 \ ,$$

also verschwindet die z Abhängigkeit des Faktors. Den Faktor für (4-30) gewinnt man durch Ersetzung von z durch c in obiger Berechnung. In der Definition des modifizierten Elementes wird aber der Quotient beider gebildet. Somit kürzen sich die Faktoren gerade. Dies bedeutet die modifizierte Funktion ist unabhängig von der Wahl der Lifts. □

Typ (b) reduziert sich in diesem Fall durch die Bedingung “alle $n_i \leq 0$ und $\sum_{i=1}^{N} n_i = -2$” auf die beiden Fälle

$$A(0, \dots, 0, -2, 0, \dots, 0) \quad \text{und} \quad A(0, \dots, -1, 0, \dots, -1, 0, \dots, 0) \ .$$

Seien die Punkte mit $n_i \neq 0$ repräsentiert durch a_i, bzw. a_i und a_j mit $i < j$. Wir bestimmen w_1 und w_2 derart, daß

$$w_1 + w_2 = 2a_i \quad \text{bzw.} \quad w_1 + w_2 = (a_i + a_j) \ .$$

und

$$w_1, w_2 \neq a_j \bmod L \quad \text{für} \quad j = 1, \dots, N \ .$$

Hierzu kann z.Bsp. w_2 generisch gewählt werden, und ω_1 liegt dann fest. Per Konstruktion gilt dann folgende

Proposition 4.15. *Erzeugende für den Typ (b) sind gegeben durch*

$$A(0, \dots, 0, -2, 0, \dots, 0) = C\sigma(z - a_i)^{-2} \cdot \sigma(z - w_1) \cdot \sigma(z - w_2) \quad (4\text{-}31)$$
$$A(0, \dots, -1, 0, \dots, -1, 0, \dots, 0) = C\sigma(z - a_i)^{-1} \cdot \sigma(z - a_j)^{-1} \cdot \quad (4\text{-}32)$$
$$\sigma(z - w_1) \cdot \sigma(z - w_2)$$

mit einer Konstanten C.

Wir können den Ausdruck wiederum unabhängig von den Lifts a_i machen, indem wir die gegebenen Ausdrücke durch

$$\sigma(c - a_i)^{-2} \cdot \sigma(c - w_1) \cdot \sigma(c - w_2)$$

bzw.

$$\sigma(c - a_i)^{-1} \cdot \sigma(c - a_j)^{-1} \sigma(c - w_1) \cdot \sigma(c - w_2)$$

dividieren, wobei c entsprechend oben gewählt wurde (insbesondere $c \not\equiv w_1, w_2 \bmod L$). Der Beweis ist identisch zum Beweis von Prop. 4.14. Zu beachten ist noch, daß zu den Elementen vom Typ (b) generische Konstanten addiert werden dürfen. Dies entspricht der Nichteindeutigkeit der Wahlen von w_1 und w_2.

Der Erzeuger vom Typ (c) ist die konstante Funktion.

(c) Der Fall $g = 0$ (rationale Funktionen)

Der Fall ist einfach und er sei nur aus Gründen der Vollständigkeit aufgeführt. Ich wähle eine Parametrisierung z von $\mathbb{P}^1$, derart daß "$z = \infty$" dem Punkt P_N entspricht. Die anderen Punkte seien gegeben durch

$$P_i \longleftrightarrow z = a_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \ldots, N-1 \ .$$

Zur Fixierung der Parametrisierung kann man etwa noch zusätzlich fordern $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$ (falls $N > 2$ ist).

Proposition 4.16. *Seien $n_1, n_2, \ldots, n_N \in \mathbb{Z}$ mit $\sum_{i=1}^N n_i = M(\lambda) = -2\lambda$ dann gilt*

$$f^\lambda(n_1, n_2, \ldots, n_N)(z)_| = B \cdot \prod_{i=1}^{N-1} (z - a_i)^{n_i} \ dz^\lambda \tag{4-33}$$

mit einer Konstanten $B \in \mathbb{C}$.

Beweis. Die rechte Seite definiert eine meromorphe Form vom Gewicht λ die auf $\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ von der gewünschten Gestalt ist. Zu berechnen ist lediglich, ob die Nullstellenordnung bei $z = \infty$ tatsächlich n_N beträgt. Hierzu rechnen wir die Darstellung in der lokalen Koordinate $w = 1/z$ bei P_N aus.

$$dz = -\frac{1}{w^2}\, dw, \quad \text{also} \quad dz^\lambda = (-1)^\lambda \cdot w^{-2\lambda}\, dw^\lambda \ .$$

Somit

$$f^\lambda(n_1, n_2, \ldots, n_N)(w)_| = B(-1)^\lambda \left(w^{-\sum_{i=1}^{N-1} n_i} \right) \prod_{i=1}^{N-1} (1 - a_i w)^{n_i} w^{-2\lambda}\, dw^\lambda \ .$$

Also $\operatorname{ord}_{P_N}(\ldots) = -\sum_{i=1}^{N-1} n_i - 2\lambda = n_N$. $\square$

Selbstverständlich kann man auch von beliebigen Parametrisierungen z ausgehen bei denen keiner der Punkte "$z = \infty$" entspricht. Dann gilt

$$f^\lambda(n_1, n_2, \ldots, n_N)(z)_| = B \cdot \prod_{i=1}^{N} (z - a_i)^{n_i} \ dz^\lambda \ .$$

In diesem Fall zeigt man wie oben $\operatorname{ord}_{z=\infty}(...) = 0$.

§ 5. Verallgemeinerte Graduierung induziert durch eine Basiswahl

(a) Das grundlegende Theorem und die Struktur der Basis

In diesem Paragraphen ist die Aufteilung der Ausnahmemenge A in $A = I \cup O$ von Bedeutung. Es sei also wie in § 2. angegeben

$$I = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}, \qquad O = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_l\}, \quad N = k + l\ .$$

Im folgenden werde ich eine Teilmenge der Erzeugenden aus § 3. für $\mathcal{F}^\lambda(A)$ angeben, die eine Basis bildet. Deren Elemente sind

$$f_{n,p}(\lambda), \quad n \in \mathbb{Z},\ p = 1, \dots, k\ , \tag{5-1}$$

werden also durch einen Doppelindex bezeichnet. Zur eindeutigen Festlegung der $f_{n,p}(\lambda)$ sind Fallunterscheidungen, abhängig von k, l, λ und dem Geschlecht g, notwendig. In diesem Abschnitt will ich nur den für alle gleichbleibenden Teil beschreiben. Es ist $f_{n,p}(\lambda) \in \mathcal{F}^\lambda(A)$, d.h. es ist eine Form vom Gewicht λ, holomorph auf $X \setminus A$. Die Ordnung an den Punkten aus I ist vorgegeben als

$$\operatorname{ord}_{P_i}(f_{n,p}(\lambda)) = n - \delta_{i,p}, \quad P_i \in I\ . \tag{5-2}$$

Lokal gelte an dem Punkt P_p

$$f_{n,p}(\lambda)_{|}(z) = z_p^{n-1}(1 + O(z_p))\,(dz_p)^\lambda\ . \tag{5-3}$$

Zur Illustration, welcher Natur die weiteren Forderungen sind, seien diese für $k = l, g \geq 2$ und $\lambda \neq 0, 1$ bzw. für $g = 0$ angegeben

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_{Q_i}(f_{n,p}(\lambda)) &= -n, \quad Q_i \in O \setminus \{Q_k\} \\ \operatorname{ord}_{Q_k}(f_{n,p}(\lambda)) &= -n + M(\lambda) + 1 \end{aligned} \tag{5-4}$$

(Mit $M(\lambda) = (2\lambda - 1)(g - 1) - 1$ nach (3-4).) Damit ist nach Prop.3.2 dies ein wohldefiniertes Element aus der Menge der Erzeugenden.

Theorem 5.1. *Für beliebiges $\lambda \in \mathbb{Z}$ und beliebige Zerlegungen von A in $A = I \cup O$ mit nichtleeren Mengen I und O gelten die folgenden Aussagen ($k = \#I$):*

(a) Die Elemente

$$f_{n,p}(\lambda), \quad n \in \mathbb{Z},\ p = 1, \dots, k\ , \tag{5-5}$$

bilden eine Basis von $\mathcal{F}^\lambda(A)$ (, bzw. eine Basis von $\mathcal{KN}(A)$ für $\lambda = -1$).

(b) Die Basiselemente erfüllen die Dualitätsbeziehungen

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C_\tau} f_{n,p}(\lambda) f_{1-m,r}(1-\lambda) = \delta_{n,m} \cdot \delta_{p,r} \ . \tag{5-6}$$

(c) Jedes $v \in \mathcal{F}^\lambda(A)$ kann beschrieben werden als endliche Linearkombination

$$v = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{p=1}^{k} C_{n,p} f_{n,p}(\lambda), \quad C_{n,p} \in \mathbb{C} \tag{5-7}$$

mit

$$C_{n,p} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C_\tau} v \cdot f_{1-n,p}(1-\lambda) \ . \tag{5-8}$$

(d) Die Struktur des Moduls $\mathcal{F}^\lambda(A)$ über der Algebra $\mathcal{KN}(A)$ ist gegeben durch die Strukturgleichung

$$e_{n,p} \cdot f_{m,r}(\lambda) = \sum_{h=n+m-2}^{n+m+L} \quad \sum_{s=1}^{k} C_{(n,p),(m,r)}^{(h,s)}(\lambda) \cdot f_{h,s}(\lambda) \tag{5-9}$$

mit $C_{\dots}^{\dots} \in \mathbb{C}$. Hierbei ist L eine Konstante die nur vom Geschlecht g, von den Werten k und l und vom Gewicht λ abhängt.

(e) Die Koeffizienten am unteren Ende der Summe (5-9) sind

$$C_{(n,p),(m,r)}^{(n+m-2,s)}(\lambda) = \delta_{p,r}\delta_{p,s}((m-1) + \lambda(n-1)) \ . \tag{5-10}$$

Beweis. (1.ter Teil) Natürlich bin ich nicht in der Lage ohne genaue Fixierung der $f_{n,p}(\lambda)$ das Theorem vollständig zu beweisen. In diesem Abschnitt werden nur die gemeinsamen Teile abgehandelt. Seien solche $f_{n,p}(\lambda)$ definiert welche der Dualitätsbeziehung (5-6) genügen. Damit sind sie aber linear unabhängig. Sei nämlich

$$0 = \sum_{n,p} C_{n,p} f_{n,p}(\lambda) \ ,$$

so erhalten wir

$$0 = \sum_{n,p} C_{n,p} \left(\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C_\tau} f_{n,p}(\lambda) \cdot f_{1-m,r}(1-\lambda) \right) \ .$$

Also gilt $C_{m,r} = 0$ für alle m, r. Zu zeigen bleibt (im Teil 2), daß die Elemente erzeugend sind. Nehmen wir also (a) an, so kann jedes v als Linearkombination der $f_{n,p}$ geschrieben werden (5-7) und wegen der Dualität können die Koeffizienten, wie in (5-8) angegeben, durch Integration gewonnen werden. Dies beweist (c). Um zur Strukturgleichung zu kommen benutze ich wiederum die Dualitätsbeziehung. Seien $e_{n,p}$ und $f_{m,r}$ fixiert, so können wir auf $e_{n,p} \,.\, f_{m,r}(\lambda)$ Teil (c) anwenden. Insbesondere treten nur solche $f_{h,s}$ auf für die

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C_\tau} (e_{n,p} \,.\, f_{m,r}(\lambda)) \cdot f_{1-h,s}(1-\lambda) \neq 0 \tag{5-11}$$

ist. Durch Berechnung der Residuen an den Punkten P_i (bzw. Q_i im 2. Teil) erhalten wir Schranken für h. Aufgrund der lokalen Gestalt gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_{P_i}((e_{n,p} \,.\, f_{m,r}) \cdot f_{1-h,s}) &\geq (n - \delta_{i,p} + m - \delta_{i,r} - 1) + \\ +(1-h) - \delta_{i,s} &= (n+m-h) - \delta_{i,p} - \delta_{i,r} - \delta_{i,s} \ . \end{aligned} \tag{5-12}$$

Damit sind für $h \leq (n+m) - 3$ alle Ordnungen ≥ 0. Somit gibt es an den Punkten P_i keine Residuen, also verschwinden alle Koeffizienten $C_{h,s}$. Dies zeigt die untere Schranke im Teil (d). Wir sind auch in der Lage die genauen Werte an der Schranke anzugeben. Falls nicht $r = s = p$ ist, verschwindet der Koeffizient auch für $h = (n+m-2)$. Sei also $r = s = p$ und $h = n+m-2$. Die Residuen an den Punkten P_i für $i \neq p$ verschwinden. Wir rechnen lokal bei P_p

$$\begin{gathered} \left(\left(z_p^{n-1}(1+O(z_p))\frac{\partial}{\partial z_p}\right) \,.\, \left(\left(z_p^{m-1}(1+O(z_p))\,(dz_p)^{\lambda}\right)\right) \cdot \\ \left(\left(z_p^{-n-m+2}(1+O(z_p))\,(dz_p)^{1-\lambda}\right) = \right. \\ z_p^{-1}\left((m-1) + \lambda\cdot(n-1)\right)(1+O(z_p))\,dz =: \omega \ . \end{gathered}$$

Also gilt $\operatorname{res}_{P_p}(\omega) = (m-1) + \lambda \cdot (n-1)$. Dies zeigt Teil (e) des Theorems. Wir haben bei der Berechnung der Konstante die skalare Normierung (5-3) benützt. ($\square$)

In den nächsten Abschnitten werde ich die fehlenden Glieder des Beweises nachholen. Dies sind 1. die Existenz und Eindeutigkeit solcher $f_{n,p}$, 2. die Dualitätseigenschaft, 3. die Erzeugendeneigenschaft und 4. der Beweis der Existenz einer oberen Schranke in der Strukturgleichung (5-9).

Mit denselben Methoden wie im Beweis, kann man noch weitere Koeffizienten berechnen. Hierzu muß man lediglich (5-12) etwas genauer anschauen und entsprechende Fallunterscheidungen machen. Für ω wie oben, erhält man für $s \neq p$

$$C^{(n+m-1,s)}_{(n,p),(m,p)}(\lambda) = \operatorname{res}_{P_p}(\omega) = (m-1) + \lambda(n-1)\ . \tag{5-13}$$

Für $s = p$ kann keine Aussage gemacht werden (bis auf die triviale Fälle $g = 0$, $N = 2$). Weiter gilt

$$\begin{aligned} C^{(n+m-1,p)}_{(n,p),(m,r)}(\lambda) &= m + \lambda(n-1), \qquad p \neq r \\ C^{(n+m-1,r)}_{(n,p),(m,r)}(\lambda) &= m - 1 + \lambda n, \qquad p \neq r \\ C^{(n+m-1,s)}_{(n,p),(m,r)}(\lambda) &= 0 \qquad p, r, s \text{ paarweise verschieden.} \end{aligned} \tag{5-14}$$

Sind p, r und s paarweise verschieden, so kann man noch eine Stufe tiefer gehen

$$C^{(n+m,s)}_{(n,p),(m,r)}(\lambda) = (3m + 3\lambda n - (\lambda + 1))\ . \tag{5-15}$$

Im Virasoro Fall ist (5-10) der einzige auftretende Koeffizient.
Im Prinzip kann man alle Strukturkonstanten mit Hilfe der expliziten Darstellungen aus § 4. und unter Benutzung der Formel (5-8) bestimmen. Für $N = 2$ und $g = 1$ wurde in [KN1] entsprechendes getan. Wie man dort sehen kann, wird die Situation sehr unübersichtlich. Im Fall $g = 0$ ist dies jedoch mit Hilfe entsprechender Binomialentwicklungen machbar. (Siehe auch § 9. für analoge Berechnungen.) Für das spätere wichtig (§ 7.(c)) ist folgende interessante

Proposition 5.1. *Sei das Geschlecht von X gleich Null. Dann gilt für $k \geq l$*

$$C^{(m+d,s)}_{(n,p),(m,r)} = \alpha + \beta \cdot m \tag{5-16}$$

mit α und β Zahlen, welche von $(n,p), r, d$ und s abhängen, jedoch nicht von m. Für $k < l$ gibt (5-16) ebenfalls. In diesem Fall hängen die α und β zusätzlich noch von den Restklassen von m modulo $b = (l-k)+1$ ab.

Der Beweis dieser Proposition wird ganz am Ende des Paragraphens geführt werden.

Zur besseren Referenz seien noch die Werte für die Schranke L in (5-9) vorweggenommen: Es sei $a = (k-l)+1$ und $b = (l-k)+1$ gesetzt. Für $\lambda = 0$ oder 1, bzw. $g = 1$ handelt es sich hierbei um die generische Schranke. Es ergibt sich für L

$$
\begin{array}{llll}
\boxed{k \geq l} & -2 & \text{falls} \quad g = 0 & k = l = 1 \\
 & 1 & \text{falls} \quad g = 0 & l > 1 \\
 & 1 + \left[\dfrac{1}{a}(3g-3)\right] & \text{sonst} & \\
\boxed{k < l} & -2 + 3b & \text{falls} \quad g = 0 & \\
 & -2 + (3g)b & \text{falls} \quad g \geq 1 \ . &
\end{array}
\tag{5-17}
$$

Mit Hilfe dieser Basis will ich nun eine Graduierung auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$ einführen. Ich setze $\deg(f_{n,p}) := n$ und bezeichne die Elemente von

$$
\begin{aligned}
\mathcal{KN}_n(A) &:= \langle e_{n,1}, e_{n,2}, \ldots , e_{n,k} \rangle \\
\mathcal{F}^\lambda_n(A) &:= \langle f_{n,1}(\lambda), f_{n,2}(\lambda), \ldots , f_{n,k}(\lambda) \rangle \ .
\end{aligned}
\tag{5-18}
$$

als homogene Elemente vom Grad n. Wegen der Basiseigenschaft gilt

$$
\mathcal{KN}(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{KN}_n(A), \quad \mathcal{F}^\lambda(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}^\lambda_n(A) \ .
$$

Theorem 5.1(d) (angewendet sowohl auf $\lambda = -1$ als auch auf beliebiges λ) besagt

$$
\begin{aligned}
[\,\mathcal{KN}_n(A), \mathcal{KN}_m(A)\,] &\subset \bigoplus_{h=(n+m)-K_0}^{(n+m)+K_1} \mathcal{KN}_h(A) \\
\mathcal{KN}_n(A) \,.\, \mathcal{F}^\lambda_m(A) &\subset \bigoplus_{h=(n+m)-L_0}^{(n+m)+L_1} \mathcal{F}^\lambda_h(A) \ .
\end{aligned}
\tag{5-19}
$$

Hierbei sind K_0, K_1, L_0, L_1 ganze Zahlen die nicht von n und m abhängen. Bei uns gilt sogar $K_0 = L_0 = 2$. Gleichung (5-19) besagt nun, daß hier eine verallgemeinert graduierte Struktur vorliegt [KN1]. Ich fasse zusammen

Proposition 5.2. *$\mathcal{F}^\lambda(A)$ ist ein verallgemeinert graduierter Modul über $\mathcal{KN}(A)$ mit der Graduierung induziert durch*

$$
\deg f_{n,p}(\lambda) := n, \qquad \deg e_{n,p} := n \ .
$$

Die Bedeutung dieser Struktur wird erst in § 7. beim Studium der semi-infiniten Formen vollständig klar werden.

Betrachte ich $\mathcal{F}^\lambda(A)$ als Modul über der assoziativen Algebra $\mathcal{F}^0(A)$, dann zeigt die entsprechende Berechnung wie im Beweis zu Theorem 5.1 (wiederum unter Benutzung der Dualität (5-6)), daß die Graduierung (5-18) ebenfalls eine verallgemeinert graduierte Struktur von $\mathcal{F}^\lambda(A)$ über $\mathcal{F}^0(A)$ definiert. Darauf werde ich nochmals in § 6.(b) eingehen.

Die Festlegung der Basis $\{f_{n,p}\}$ hängt nicht nur von der Zerlegung der Menge A in $A = I \cup O$, sondern auch von der Numerierung der Punkte in O ab. So war es im Falle $k = l$ notwendig einen der Punkte in O auszuzeichnen und an diesen Punkt die geforderte Ordnung der Formen um $M(\lambda) + 1$ zu erhöhen, um das Element eindeutig zu fixieren. Wird ein anderer Punkt aus O als Referenzpunkt gewählt, so erhält man andere Basiselemente. Insbesondere ändert sich somit auch die Graduierung für $\mathcal{F}^\lambda$. Ich zeige nun, daß die, von der Graduierung induzierte Filtrierung, invariant unter diesen Wahlen ist. Hierzu setze ich

$$\mathcal{F}^\lambda_{(n)}(A) = \bigoplus_{m \geq n} \mathcal{F}^\lambda_m(A) = \langle f_{m,p} \mid m \in \mathbb{Z}, m \geq n,\ p = 1, \dots, k \rangle \tag{5-20}$$

und erhalte eine (absteigende) Filtrierung von $\mathcal{F}^\lambda(A)$

$$\mathcal{F}^\lambda_{(n)}(A) \subseteq \mathcal{F}^\lambda_{(n')}(A) \qquad n \geq n' \ .$$

(Diese Filtrierung ist eine aufsteigende Filtrierung im Sinne der Polordungen.)

Proposition 5.3.

$$\mathcal{F}^\lambda_{(n)}(A) = \{\, f \in \mathcal{F}^\lambda(A) \mid \operatorname{ord}_P(f) \geq n - 1,\ \forall P \in I \,\} \ . \tag{5-21}$$

Beweis. Per Konstruktion gilt "$\subseteq$". Zu zeigen bleibt "$\supseteq$". Sei f ein Element der Menge auf der rechten Seite. Nach Theorem 5.1 gilt

$$f = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{p=1}^{k} A_{m,p} f_{m,p}(\lambda)$$

mit

$$A_{m,p} = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} f \cdot f_{1-m,p}(1-\lambda) \ . \tag{5-22}$$

Es berechnet sich für $P \in I$

$$\operatorname{ord}_P(f \cdot f_{1-m,p}(1-\lambda)) \geq (n-1) + (1-m) - 1 = (n-m) - 1 \ .$$

D.h. für $m < n$ sind alle Ordnungen an den Punkten $P \in I$ positiv. Somit verschwindet (5-22) für $m < n$. Also liegt f in $\mathcal{F}^\lambda_{(n)}(A)$. $\square$

Die Filtrierung (5-20) ist die Filtrierung, die durch die Graduierung

$$\deg(f_{n,p}(\lambda)) = n \tag{5-23}$$

induziert wird. Prop. 5.3 liefert nun eine invariante Beschreibung der Filtrierung aufgrund der Ordnungen an den Punkten aus I. Damit folgt unmittelbar

Proposition 5.4. *Die durch (5-23) induzierte Filtrierung ist unabhängig von der Numerierung der Punkte $Q_i \in O$, $i = 1, \ldots, l$. Insbesondere ist sie unabhängig von der Wahl des Referenzpunktes $Q_l \in O$.*

Die Situation sei nochmals zusammengefaßt. Die Module $\mathcal{F}^\lambda(A)$ sind durch die Menge der Punkte A festgelegt. Es sind Untermodule der meromorphen Formen vom Gewicht λ auf X. Die Zerlegung der Menge A in nichtleere Teilmengen I und O und die Numerierung der Punkte in O fixiert eine Graduierung der Module $\mathcal{F}^\lambda(A)$. In Bezug auf diese Graduierung bilden sie einen verallgemeinert graduierten Liemodul über $\mathcal{KN}(A)$ (mit der entsprechenden Graduierung). Umnumerierung der Punkte aus O ändert lediglich die Graduierung, nicht jedoch die induzierte Filtrierung. In der Tat sind alle Größen, die ich im folgenden berechnen werde, invariant unter der Umnumerierung der Punkte.

Eine andere Zerlegung von A in $A = I^* \cup O^*$ liefert ebenfalls eine Filtrierung. Bezeichne * die Filtrierung, herkommend von dieser Zerlegung. Aufgrund Prop. 5.3 gilt

$$I^* \supseteq I \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F}^\lambda_{(n)}(A)^* \ \subseteq \ \mathcal{F}^\lambda_{(n)}(A) \ . \tag{5-24}$$

Die Filtrierungen sind nicht äquivalent. Sei $P \in I^*$, jedoch $P \notin I$, dann gibt es Funktionen mit beliebig hoher Polordnung bei P, welche in $\mathcal{F}^\lambda_{(n)}(A)$ liegen, jedoch nicht in einem festen $\mathcal{F}^\lambda_{(n')}(A)^*$. Deshalb kann es kein $\mathcal{F}^\lambda_{(n')}(A)^*$ geben mit

$$\mathcal{F}^\lambda_{(n)}(A) \ \subseteq \ \mathcal{F}^\lambda_{(n')}(A)^* \ .$$

Der Rest des Paragraphen § 5. besteht lediglich in der Angabe von Basiselementen für jede mögliche Kombination von k, l und λ, derart daß Theorem 5.1 gilt.

(b) Beweis im Fall $k = l$

Diesen Fall möchte ich in aller Ausführlichkeit diskutieren, da unbehindert von allzu vielen technischen Details die Grundprinzipien klar hervortreten. Es sei vorerst $g \geq 2$ und $\lambda \neq 0, 1$, bzw. $g = 0$ und $\lambda \in \mathbb{Z}$ beliebig. Zusätzlich zu den Forderungen (5-2) und (5-3) sei

$$\begin{aligned} &\mathrm{ord}_{Q_i}(f_{n,p}(\lambda)) = -n, \quad Q_i \in O \setminus \{Q_l\} \\ &\mathrm{ord}_{Q_l}(f_{n,p}(\lambda)) = -n + M(\lambda) + 1 \ . \end{aligned} \tag{5-25}$$

Es gilt

$$\sum_{Q \in A} \mathrm{ord}_Q(f_{n,p}(\lambda)) = M(\lambda) \ .$$

Nach Prop.3.2 existiert genau eine Form mit den vorgegebenen Ordnungen. (Die skalare Fixierung wird durch (5-3) ereicht.) Ich zeige zuerst, daß die Dualität (5-6) gilt. Hierzu berechne ich für das Produkt

$$\omega := f_{n,p}(\lambda) \cdot f_{1-m,r}(1-\lambda) \tag{5-26}$$

die Ordnungen an den Punkten von A.

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_{P_i}(\omega) &= (n-m) + 1 - \delta_{i,r} - \delta_{i,p}, \qquad P_i \in I \\ \mathrm{ord}_{Q_i}(\omega) &= -(n-m) - 1, \qquad\qquad Q_i \in O \setminus \{Q_l\} \\ \mathrm{ord}_{Q_l}(\omega) &= -(n-m) - 1 + M(\lambda) + M(1-\lambda) + 2 \\ &= -(n-m) - 1 \ . \end{aligned}$$

In der letzten Zeile habe ich benutzt

$$M(\lambda) + M(1-\lambda) = (2\lambda - 1)(g-1) - 1 + ((2(1-\lambda) - 1)(g-1) - 1) = -2 \ .$$

Für $n \geq m + 1$ verschwinden die Residuen an den Punkten $P_i \in I$. Somit verschwindet ebenfalls das Kurvenintegral. Für $n = m$ verschwinden alle Residuen (und somit das Kurvenintegral) falls $r \neq p$ ist. Im Fall $r = p$ gilt $\mathrm{ord}_{P_p}(\omega) = -1$ und $\mathrm{ord}_{P_i}(\omega) = 0$ für $i \neq p$. Somit gilt hier aufgrund der Normierung

$$\frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} f_{n,p}(\lambda) f_{1-m,r}(1-\lambda) = \mathrm{res}_{P_p}(\omega) = 1 \ .$$

Diese Ergebnisse gelten natürlich auch für beliebige k, l und λ, da nur das Verhalten an den Punkten $P_i \in I$ von Bedeutung war. Für $n \leq m-1$ ist die Ordnung an den Punkten $Q_i \in O$ nichtnegativ. Somit verschwindet auch hier das Kurvenintegral über jeder glatten Niveaulinie C_τ. Dies zeigt Theorem 5.1(b) . Um zu zeigen, daß die $f_{n,p}(\lambda)$ erzeugend sind, setzen wir für $n \in \mathbb{N}$

$$V(n) := H^0(X, \lambda \cdot K + D(n)) \tag{5-27}$$

mit

$$D(n) := \sum_{i=1}^{k} (n+1)P_i + \sum_{i=1}^{l-1} nQ_i + (n-1-M(\lambda)) \cdot Q_l \ .$$

In $V(n)$ sind die Formen vom Gewicht λ die maximal den Polstellendivisor $D(n)$ haben. Insbesondere sind die Elemente

$$f_{m,p} \ , \qquad -n \leq m \leq n, \quad p = 1, \ldots, k$$

in $V(n)$. Da die Punkte in generischer Lage sind, berechnet sich nach Prop.3.3

$$\begin{aligned} \dim V(n) &= \dim H^0(X, \lambda \cdot K - M(\lambda) \cdot Q_k) + \deg (D(n) + M(\lambda) \cdot Q_k) \\ &= 1 + \deg D(n) + M(\lambda) = k(2n+1) \ . \end{aligned}$$

Genauso viele Elemente $f_{m,p}(\lambda)$ sind in $V(n)$. Da diese aufgrund der Dualität linear unabhängig sind, erzeugen sie $V(n)$. Jedes $v \in \mathcal{F}^\lambda(A)$ liegt aber ab einem gewissen n in den $V(n)$. Dies zeigt die Basiseigenschaft. Für die obere Schranke in (5-9) ist die Ordnung von $\omega = (e_{n,p} \, . \, f_{m,r}(\lambda)) \cdot f_{1-h,s}(1-\lambda)$ an den Punkten $Q_i \in O$ analog zu (5-12) zu berechnen. Es gilt (mit $M(-1) = -3g+2$)

$$\begin{aligned} &\text{ord}_{\,Q_i}(\omega) \geq -(n+m+2) + h, \quad Q_i \in O \setminus \{Q_l\} \\ &\text{ord}_{\,Q_l}(\omega) \geq -(n+m) - 3g + 1 + h \ . \end{aligned} \tag{5-28}$$

Die Koeffizienten $C_{h,s}$ verschwinden auf jeden Fall, falls diese Ordnungen alle ≥ 0 sind. Bezeichne h_{max} den maximalen Wert für h, für den $C_{h,s} \neq 0$ möglich ist, so berechnet sich dieser wie folgt. Für $k = l = 1$, d.h. $N = 2$ tritt der 1.te Term nicht auf, also ergibt sich $h_{max} = (n+m-2+3g)$. Für $k = l \geq 2$ gilt

$$h_{max} = \max(n+m-2+3g, n+m+1) \ .$$

Die Konstante L in Formel (5-9) beträgt somit

$$L = \begin{cases} 1 & , g = 0 \text{ und } k > 1 \\ 3g-2 & , \text{ sonst } . \end{cases}$$

Insbesondere liegt die behauptete Unabhänigkeit von n und m vor. Im Fall $k = l = 1$ erhalten wir genau die Basis die für $N = 2$ auch von Krichever und Novikov [KN1] angegeben wurde (bis auf eine Verschiebung des Index) und die dort berechnete Strukturgleichung. Diese spezialisiert sich für $g = 0$ auf die Virasoro Algebra.

Wir kommen nun zu den Ausnahmewerten von λ. Für diese berechnet sich $M(0) = -g$ und $M(1) = g - 2$. Zuerst betrachten wir den Fall $N = 2$.

$\boxed{\lambda = 1, g \geq 2, k = 1}$

Für $n < 0$ oder $n > g$ sei $\omega_n := \omega_{n,1}$ wie im allgemeinen Fall oben festgelegt durch

$$\text{ord}_{P_1}(\omega_n) = n - 1, \quad \text{ord}_{Q_1}(\omega_n) = g - 1 - n$$

und die Normierungsbedingung (5-3). ω_n ist eindeutig nach Prop.3.6 . Für die Werte $1 \leq n \leq g$ verwenden wir ω_n mit

$$\text{ord}_{P_1}(\omega_n) = n - 1, \quad \text{ord}_{Q_1}(\omega_n) = g - n$$

und der Normierungsbedingung (5-3). Auch hier ist ω_n eindeutig nach Prop.3.6 . Als ω_0 verwenden wir das Differential ρ definiert in (2-10). Insbesondere gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$ $\text{ord}_{P_1}(\omega_n) = n - 1$.

$\boxed{\lambda = 0, g \geq 1, k = 1}$

Hier sind neben der Normierungsbedingung (5-3) die entsprechenden Festlegungen für $A_n := A_{n,1}$

$$\text{ord}_{P_1}(A_n) = n - 1, \quad \text{ord}_{Q_1}(A_n) = -g + 1 - n$$

im Bereich $n \geq 2$ oder $n \leq -g$, bzw

$$\text{ord}_{P_1}(A_n) = n - 1, \quad \text{ord}_{Q_1}(A_n) = -g - n \tag{5-29}$$

im Bereich $-g < n \leq 0$. Desweiteren sei $A_1 = 1$. Aufgrund Prop.3.8 sind die Erzeugenden vom ersten Typ eindeutig fixiert. Für den zweiten Typ haben wir noch einen Freiheitsgrad, die Addition einer Konstante. Diese wollen wir festlegen, derart daß die Dualitätsrelationen erfüllt sind. Sei A'_n eine Funktion die (5-29) erfüllt. Ich setze für $g \geq 2$

$$A_n = A'_n - \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} A'_n \cdot \omega_0$$

und für $g = 1$

$$A_0 = A'_0 - \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} A'_0 \cdot A'_0 \, dz \; .$$

Damit gilt weiterhin für alle n ord $_{P_1}(A_n) = n - 1$. Die Dualitätsrelation

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} A_n \omega_{1-m} = \delta_{n,m} \tag{5-30}$$

ist nach obigem sicherlich erfüllt, falls weder n noch $1 - m$ etwas mit den entsprechenden Ausnahmewerten zu tun haben. Nach den allgemeinen Berechnungen ist nur $n \leq m - 1$ zu untersuchen und in diesem Bereich zu zeigen daß (5-30) Null wird. Hierbei sei C_τ ein Kreis um Q_1. Es genügt zu zeigen, daß ord $_{Q_1}(A_n\omega_{1-m}) \geq 0$. Sei zuerst $n \neq 1$ und $(1 - m) \neq 0$. Für die Ordungen berechnet sich $(m - n) - 2$,$m - n$ und $(m - n) - 1$ aufgeteilt in die Fälle: n ist Ausnahmefall, $1 - m$ ist Ausnahmefall und beide sind Ausnahmefälle. Im Bereich $n - m \leq -1$ könnte nur der erste Schwierigkeiten machen. Dies kann aber nur in der Kombination $1 - m = -n$ auftreten. Dann ist aber auch $1 - m$ ein Ausnahmefall, d.h. die 3.te Formel ist zuständig. Somit treten keine Schwierigkeiten auf. Nun zu den restlichen Fällen.

$$\text{ord}_{\,Q_1}(A_1\omega_{1-m}) = \text{ord}_{\,Q_1}(\omega_{1-m}) \geq a \in \{g - 2 + m, g - 1 + m\}$$

(nur für $m \geq 2$). In diesem Bereich sind aber alle Ordungen positiv.

$$\text{ord}_{\,Q_1}(A_n\omega_0) = a \in \{-g - n, -g - n - 1\}$$

(nur $n \leq -1$). Somit treten negative Ordnungen nur im Bereich $-g < n < 0$ auf . (Beachte für $n = -g$ ist das 1.te Element der Wertemenge zuständig.) In diesem Bereich können wir aber das Kurvenintegral direkt ausrechnen. Für $g \geq 2$:

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} A_n\omega_0 = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} A'_n\omega_0 - \left(\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} A'_n\omega_0\right) \cdot \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} \omega_0 = 0,$$

da

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} \omega_0 = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} A_1\omega_0 = 1$$

gilt. Für $g = 1$ liegt nur $n = 0$ im kritischen Bereich. Es ist allerdings auch $\omega_0 = A_0 \, dz$. Ich setze

$$c = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} A'_0 \cdot A'_0 \, dz$$

und erhalte

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} A_0 A_0\, dz = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} (A_0' - \frac{c}{2})^2\, dz =$$
$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} {A_0'}^2\, dz - c\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} A_0'\, dz + \frac{c^2}{4}\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} dz =$$
$$c - c\cdot 1 + 0 = 0\ .$$

Damit ist die Dualitätsrelation (5-30) erfüllt. Die Erzeugendeneigenschaft ist genauso beweisbar wie im Fall $\lambda \neq 0, 1$. Man wähle n bei der Definition von $V(n)$ (5-27) nur entsprechend groß, so daß sich keine Spezialfälle aufgrund der modifizierten Ordnungen bei den $Q_i \in O$ ergeben (sind nur endlich viele Ausnahmen). Es bleibt die Strukturgleichung (5-9). Hat weder der Index m des Elementes $f_m(\lambda)$ (noch der Index n des Elementes e_n im Falle $g = 1$) noch der Bereich $n+m-2$ bis $n+m-2+3g$ etwas mit den modifizierten Basiselementen zu tun, so gilt der Struktursatz wie bewiesen. Anderenfalls ergeben sich bei gewissen Kombinationen von n und m Änderungen an der Obergrenze. D.h. die Konstante $3g-2$ muß entsprechend vergrößert werden um eine globale Konstante L zu erhalten. Mit den obigen Berechnungsvorschriften ist es ohne Probleme möglich durch entsprechende Fallunterscheidungen die jeweilige Konstante für n und m zu berechnen. Dies wurde z.Bsp. in [KN1] gemacht.

Sei nun $k \geq 2$. Auch hier nehme ich als $\omega_{n,p}$, bzw. $A_{n,p}$ genau die Elemente wie im Falle $\lambda \neq 0, 1$, außer in den Fällen, in denen dies zu Konflikten nach § 3. führen würde. In diesen Fällen sind diese gegeben durch die folgenden Vorschriften.

$\boxed{\lambda = 1, n = 0, g \geq 2, k \geq 2}$

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_{P_i}(\omega_{0,p}) &= -\delta_{i,p}, \quad P_i \in I,\\ \operatorname{ord}_{Q_1}(\omega_{0,p}) &= -1,\\ \operatorname{ord}_{Q_i}(\omega_{0,p}) &= 0, \quad Q_i \in O \setminus \{Q_1, Q_l\}\\ \operatorname{ord}_{Q_l}(\omega_{0,p}) &= g\ . \end{aligned} \tag{5-31}$$

$\boxed{\lambda = 1, n = 1, g \geq 2, k = 2}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_{P_i}(\omega_{1,p}) &= 1 - \delta_{i,p}, \quad i = 1, 2\\ \operatorname{ord}_{Q_1}(\omega_{1,p}) &= 0,\\ \operatorname{ord}_{Q_2}(\omega_{1,p}) &= g - 2\ . \end{aligned} \tag{5-32}$$

Durch die Normierungsvorschrift (5-3) sind die $\omega_{n,p}$ eindeutig fixiert.

$\boxed{\lambda = 0, n = 0, g \geq 1, k \geq 2}$.

Hier wähle ich zuerst beliebige $A'_{0,p}$ welche

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_{P_i}(A'_{0,p}) &= -\delta_{i,p}, \quad P_i \in I, \\ \operatorname{ord}_{Q_i}(A'_{0,p}) &= 0, \quad Q_i \in O \setminus \{Q_l\}, \\ \operatorname{ord}_{Q_l}(A'_{0,p}) &= -g \ . \end{aligned} \tag{5-33}$$

und die Normierungsbedingung (5-3) erfüllen. Damit sind diese aber noch nicht eindeutig fixiert. Wir berechnen zuerst

$$\gamma_{p,r} := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi \mathbf{i}} \displaystyle\oint_{C_\tau} A'_{0,p}\omega_{0,r} & , g \geq 2 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2\pi \mathbf{i}} \displaystyle\oint_{C_\tau} A'_{0,p}A'_{0,r}\, dz & , g = 1 \end{cases}$$

und setzen

$$A_{0,p} := A'_{0,p} - \sum_{r=1}^{k} \gamma_{p,r} A_{1,r} \ . \tag{5-34}$$

Mit diesen derart modifizierten Elementen ist die Dualitätsrelation wieder eindeutig erfüllt. Dies kann man direkt Nachrechnen. Da ich aber in § 5.(e) eine Ersetzungsvorschrift definiere, die obiges gerade als Spezialfall enthält, möchte ich stattdessen auf diesen Abschnitt verweisen. Der Beweis der Erzeugendeneigenschaft verläuft wie oben. Auch für die Strukturgleichung (und eine eventuelle Berechnung von L) gilt dasselbe wie für $N = 2$ gesagt.

(c) Beweis im Fall $k > l$

Sei $k > l$. Ich setze $a = (k-l)+1 > 1$. In diesem Abschnitt betrachte ich nur $g \ge 2, \lambda \ne 0,1$ oder $g = 0$. Bei den anderen Werten sind endlich viele Definitionen zu modifizieren. Die entsprechende Vorschrift gebe ich in § 5.(e). Sei $f_{n,p}(\lambda)$ das eindeutig fixierte Element in $\mathcal{F}^\lambda(A)$ mit

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_{P_i}(f_{n,p}(\lambda)) &= n - \delta_{i,p}, \quad P_i \in I, \\ \operatorname{ord}_{Q_i}(f_{n,p}(\lambda)) &= -n, \quad Q_i \in O \setminus \{Q_l\}, \\ \operatorname{ord}_{Q_l}(f_{n,p}(\lambda)) &= -a \cdot n + M(\lambda) + 1 \end{aligned} \tag{5-35}$$

welches die Normierungsvorschrift (5-3) erfüllt. Für

$$\omega = f_{n,p}(\lambda) \cdot f_{1-m,r}(1-\lambda) \tag{5-36}$$

berechne ich die Ordungen

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_{P_i}(\omega) &= (n-m) + 1 - \delta_{i,r} - \delta_{i,p}, \quad P_i \in I \\ \operatorname{ord}_{Q_i}(\omega) &= -(n-m) - 1, \quad Q_i \in O \setminus \{Q_l\} \\ \operatorname{ord}_{Q_l}(\omega) &= -a(n-m+1) \ . \end{aligned}$$

Für $n \ge m$ sind die Dualitätsrelationen richtig, da hier der Beweis von § 5 (b) auch zutrifft. Es bleibt $n - m \le -1$ und die Untersuchung an den Punkten $Q_i \in O$. Für diese Punkte und in diesem Bereich sind jedoch alle Ordnungen positiv. Somit verschwinden alle Kurvenintegralem, d.h. die Dualitätsrelationen sind gültig. Um die Erzeugendeneigenschaften zu sehen führen wir wiederum

$$V(n) := H^0(X, \lambda \cdot K + D(n)) \tag{5-37}$$

mit

$$D(n) := \sum_{i=1}^{k} (n+1) P_i + \sum_{i=1}^{l-1} n Q_i + (a \cdot n - 1 - M(\lambda)) \cdot Q_l$$

ein. Genau wie in § 5 (b) berechnet sich auch hier

$$\dim V(n) = 1 + k(n+1) + (l-1)n + an - 1 = k(2n+1) \ .$$

Wiederum entspricht diese Dimension der Anzahl $f_{m,p}(\lambda)$ die in $V(n)$ liegen. Und mit demselben Argument wie oben erhalten wir, daß diese ein Basis von

$\mathcal{F}^\lambda(A)$ bilden. Zum Beweis der Strukturgleichung und Berechnung der Konstante verfährt man wie oben (5-28). Mit den Bezeichnungen dort gilt

$$\begin{aligned} &\text{ord}_{Q_i}(\omega) \geq -(n+m+2)+h, \quad Q_i \in O \setminus \{Q_l\} \\ &\text{ord}_{Q_l}(\omega) \geq -a(n+m-h)-3g+2-a \ . \end{aligned} \tag{5-38}$$

Für $l=1$ gilt somit $h_{max} = n+m+1+[\frac{3g-3}{a}]$ und für $l \geq 2$

$$h_{max} = \max(n+m+1+[\frac{3g-3}{a}], n+m+1) \ .$$

$[x]$ bezeichne die größte ganze Zahl $\leq x$. Für die Konstante ergeben sich die folgenden Werte

$$L = \begin{cases} 1 & , g=0, l \geq 2 \\ 1+[\dfrac{3g-3}{a}] & , \text{sonst} \end{cases} \tag{5-39}$$

Dies zeigt für diese λ das Theorem 5.1. Der Fall $k=l$ und $k>l$ hätte zusammengefaßt werden können ($a=1!$).

(d) Beweis im Fall $k<l$

Auch hier betrachte ich in diesem Abschnitt nur die generischen Werte, d.h. $g \geq 2$ und $\lambda \neq 0,1$ oder $g=0$. Ich setze

$$b = (l-k)+1 > 1 \tag{5-40}$$

und führe die Restklassen $\epsilon_n, \overline{\epsilon_n} \in \mathbb{Z}$ ein, mit

$$\begin{aligned} &\epsilon_n \equiv n \mod b, \quad \epsilon_n \in \{0,1,\ldots,b-1\} \\ &\overline{\epsilon_n} \equiv n \mod b, \quad \overline{\epsilon_n} \in \{-b+1,\ldots,-1,0\} \end{aligned} \tag{5-41}$$

Das Element $f_{n,p}(\lambda)$ für $n \in \mathbb{Z}$ und $p=1,\ldots,k$ ist eindeutig fixiert durch die Forderungen

$$\begin{aligned} &\text{ord}_{P_i}(f_{n,p}(\lambda)) = n-\delta_{i,p}, \quad P_i \in I, \\ &\text{ord}_{Q_i}(f_{n,p}(\lambda)) = -n, \quad i=1,\ldots,k-1 \ , \end{aligned} \tag{5-42}$$

und für $n \geq 0$ den weiteren Forderungen

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ord}_{Q_i}(f_{n,p}(\lambda)) &= \frac{1}{b}(-n+\epsilon_n) \quad i = k, \dots, k+|\overline{\epsilon_n}|-1 \\
\operatorname{ord}_{Q_i}(f_{n,p}(\lambda)) &= \frac{1}{b}(-n+\overline{\epsilon_n}) \quad i = k+|\overline{\epsilon_n}|, \dots, l-1 \\
\operatorname{ord}_{Q_l}(f_{n,p}(\lambda)) &= \frac{1}{b}(-n+\overline{\epsilon_n}) + M(\lambda) + 1 \;.
\end{aligned}
\tag{5-43}
$$

und der Normierungsbedingung (5-3). Für $n < 0$ werden gerade die Rollen von ϵ_n und $\overline{\epsilon_n}$ vertauscht in (5-43).

Wir berechnen für $n \geq 0$

$$
\sum_{P \in A} \operatorname{ord}_P(f_{n,r}) = kn - 1 - (k-1)n + \frac{1}{b}(-n+\epsilon_n)|\overline{\epsilon_n}| + \frac{1}{b}(-n+\overline{\epsilon_n})(b-|\overline{\epsilon_n}|)
$$

$$
+M(\lambda) + 1 = M(\lambda) + \frac{1}{b}(\epsilon_n|\overline{\epsilon_n}| - \overline{\epsilon_n}|\overline{\epsilon_n}|) + \overline{\epsilon_n} \;.
$$

Für $n \equiv 0 \bmod b$ ergibt sich sofort $M(\lambda)$ als Summe der Ordnungen. Für $n \not\equiv 0 \bmod b$ berechnet sich der zusätzliche Term zu

$$
\frac{1}{b}(\epsilon_n|\overline{\epsilon_n}| - (\epsilon_n - b)|\overline{\epsilon_n}|) + \overline{\epsilon_n} = |\overline{\epsilon_n}| + \overline{\epsilon_n} = 0 \;.
$$

Also haben wir auch hier $M(\lambda)$ als Summe der Ordungen. Dasselbe Ergebnis erhalten wir auch für $n < 0$. Damit ist das Element aufgrund Prop. 3.2 eindeutig fixiert.

Proposition 5.5. *Die Dualitätsrelationen (5-6) sind erfüllt.*

Beweis. Sei $w = f_{n,p}(\lambda) \cdot f_{m,r}(1-\lambda)$. Der Fall $n+m > 0$ wurde schon im Beweis in § 5.(b) erledigt. Es bleibt $(n+m) \leq 0$ zu untersuchen und zu zeigen, daß alle Residuen an den Punkten $Q_i \in O$ verschwinden. An den Punkten Q_i aus (5-42) liegt die Situation wie für $k = l$ vor, d.h. diese machen keine Probleme. Es sind also nur die Q_i aus (5-43) zu untersuchen.
Fall 1: $n, m \leq 0$: Klar ist, daß die kleinste Ordnung für w

$$
\frac{1}{b}\big(-(n+m) + \overline{\epsilon_n} + \overline{\epsilon_m}\big) \tag{5-44}
$$

beträgt. Nun gilt aber $n \leq \overline{\epsilon_n}$ und $m \leq \overline{\epsilon_n}$, somit ist (5-44) ≥ 0.
Fall 2: O.B.d.A. sei $n > 0$, also $m < 0$. Ich betrachte zuerst die Kombination

$$
v := \frac{1}{b}\big(-(n+m) + \epsilon_n + \overline{\epsilon_m}\big) \;. \tag{5-45}
$$

Dies ist eine ganze Zahl. Es ist

$$\frac{1}{b}(-(n+m)) \geq 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{b}(\epsilon_n + \overline{\epsilon_m}) > -1 \ .$$

Somit ist $v > -1$, also $v \geq 0$. Dasselbe gilt auch für die Kombination $(\overline{\epsilon_n} + \epsilon_m)$ und $(\epsilon_n + \epsilon_m)$. Es bleibt

$$v := \frac{1}{b}\big(- (n+m) + \overline{\epsilon_n} + \overline{\epsilon_m}\big) \ . \tag{5-46}$$

In dieser Kombination könnte in der Tat $v < 0$ sein. Allerdings tritt sie nicht immer auf. Ist $n \equiv 0 \bmod b$ oder $m \equiv 0 \bmod b$, so ist $(\overline{\epsilon_n} + \overline{\epsilon_m})/b > -1$, also treten in diesem Fall keine Probleme auf. Sei also im folgenden keine der Kongruenzen erfüllt. Die Kombination tritt dann nur auf falls $\epsilon_m > |\overline{\epsilon_n}|$ ist. In der Definition hatte ich nämlich festgelegt, daß die ersten $|\overline{\epsilon_n}|$ Punkte Q_i im uns interessierenden Bereich für $f_{n,p}(\lambda)$ als Zusatzterm ϵ_n haben sollen $(n > 0)$. Für $f_{m,r}(1-\lambda)$ haben die ersten ϵ_m Punkte den Zusatzterm $\overline{\epsilon_m}$ $(m < 0)$. Damit (5-46) auftritt, muß gelten $\epsilon_m = b + \overline{\epsilon_m} > |\overline{\epsilon_n}|$, d.h. $\overline{\epsilon_m} + \overline{\epsilon_n} > -b$. Damit gilt $(\overline{\epsilon_m} + \overline{\epsilon_n})/b > -1$ und wir erhalten ebenso $v \geq 0$. □

Proposition 5.6. *Die angegebenen Elemente sind erzeugend.*

Beweis. Dies zeige ich analog zu den anderen Fällen.
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \equiv 0 \bmod b$ und

$$V(n) := H^0(X, \lambda \cdot K + D(n))$$

mit

$$D(n) := \sum_{i=1}^{k}(n+1)\, P_i + \sum_{i=1}^{k-1} n\, Q_i + \sum_{i=k}^{l-1} \frac{n}{b}\, Q_i + (\frac{n}{b} - 1 - M(\lambda)) \cdot Q_k \ .$$

Wir berechnen auch hier

$$\dim V(n) = 1 + k(n+1) + (k-1)n + (l-k+1)\frac{n}{b} - 1 = k(2n+1) \ .$$

Mit derselben Schlußweise wie in § 5.(b) sieht man, daß die $f_{m,p}$ eine Basis von $\mathcal{F}^\lambda(A)$ bilden. □

Zum Beweis der Strukturgleichung und zur Berechnung der Konstante L verfährt man wie in den anderen Fällen. Wir benötigen

(Bezeichnung wie bei (5-28))

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ord}_{\,Q_i}(w) \geq -(n+m+2)+h, \quad i=1,\dots,k-1\\
&\mathrm{ord}_{\,Q_i}(w) \geq \frac{1}{b}\big(-(n+m)+h+{\epsilon_n}^*+{\epsilon_m}^*+{\epsilon_{1-h}}^*-1\big)-1,\ i=k,\dots,l-1\\
&\mathrm{ord}_{\,Q_l}(w) \geq \frac{1}{b}\big(-(n+m)+h+{\epsilon_n}^*+{\epsilon_m}^*+{\epsilon_{1-h}}^*-1\big)-3g+2\ .
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichne ${\epsilon_n}^*$ entweder ϵ_n oder $\overline{\epsilon_n}$, usw. . h_{max} kann man bei vorgegebenem n und m exakt berechnen, indem man die obigen Ordnungen gleich -1 setzt und h aus den 3 Gleichungen bestimmt. h_{max} ist dann das Maximum dieser 3 Werte (bzw. 2 falls $k=1$ ist). Da wir uns nur für den "schlechtesten" Fall interessieren, nehmen wir

$$ {\epsilon_n}^* = {\epsilon_m}^* = {\epsilon_{1-h}}^* = -b+1 $$

an und berechnen h_i, $i=1,2,3$ wie angegeben. Dies ergibt

$$ h_1=(n+m+1), \quad h_2=(n+m-2)+3b, \quad h_3=(n+m-2)+3gb\ . $$

Da allerdings $b\geq 1$ ist, gilt immer $h_2 \geq h_1$. Die Konstante L berechnet sich zu

$$ L=\begin{cases} -2+3b, & g=0\\ -2+3gb, & g\geq 1\ . \end{cases} \tag{5-47} $$

Damit ist alles gezeigt.

(e) Die Ausnahmedefinitionen

In den Ausnahmefällen $g\geq 2, \lambda\neq 0,1$, bzw. $g=1, \lambda\in\mathbb{Z}$ müssen aufgrund der Ergebnisse aus § 3.(c) endlich viele der Basiselemente modifiziert werden. Hierzu seien zuerst die Ordnungen, nach dem Schema wie in § 5.(b)–(d) gegeben, hingeschrieben. Diese Vorgaben haben ebenfalls in diesem Fall Gültigkeit, falls nicht durch die folgende Vorschriften, bzw. Operationen Änderungen vorgenommen werden. Diese Operationen ändern nicht die Ordnung an den Punkten $P_i\in I$. Die Vorschriften lauten wie folgt: Sei zuerst $\lambda=1$, d.h. wir wollen $\omega_{n,p}$ fixieren.

(1) Tritt nur eine negative Ordnung auf und diese sei -1 an einem Punkt

$P_i \in I$, so ist notwendigerweise $n = 0$. Abhängig von $l = \#O$ haben wir die Alternativen:
(1.a) Ist $l > 1$, so ersetzen wir $\operatorname{ord}_{Q_1} = 0$ durch $\operatorname{ord}_{Q_1} = -1$ und erhöhen die Ordnung bei Q_l um 1.
(1.b) Ist $l = 1$, so setzen wir die Ordnung bei Q_l auf -1 und nehmen noch die Bedingung "Realteil aller Perioden = 0" zur Fixierung.
(2) Tritt nur eine negative Ordnung auf und diese sei -1 an irgendeinem der Punkte $Q_i \in O$, so ersetzen wir diese durch die Ordnung 0.
(3) Sind alle Ordnungen ≥ 0, so erhöhen wir die Ordnung bei Q_l um 1.
Für $\lambda = 0$, d.h. $A_{m,r}$ haben wir die Vorschriften:
(4) Sind alle Ordnungen $= 0$, nur die Ordnung bei Q_l beträgt $-g$, so ersetzen wir dieses Element durch die Konstante 1. Diese Möglickeit kann nur bei $m = 1$ und $k = 1$ auftreten. Insbesondere wird in diesem Fall die Ordnung bei Q_l ebenfalls erhöht.
(5) Es seien alle Ordnungen ≤ 0 und es sei nicht die Bedingung unter (4) erfüllt. Insbesondere muß dann auch $m \leq 0$ gelten. In diesem Fall erniedrigen wir die Ordnung bei Q_l um 1.

Da die Summen der Ausgangsordnungen durch $M(\lambda)$ festgeschrieben sind, folgt daß jeweils nur endlich viele Modifikationen vorzunehmen sind. Zu modifizieren sind immer die Elemente $\omega_{0,p}$ und $A_{0,r}$. Je nach den Parametern k und l auch noch weitere. Durch diese Modifikation habe ich erreicht, daß die $\omega_{n,p}$ eindeutig und die $A_{m,r}$ bis auf Addition einer Konstanten eindeutig fixiert sind (jeweils immer bis auf Multiplikation mit einem Skalar). Offensichtlich sind diese wieder linear unabhängig falls die Dualitätsrelation (5-8) erfüllt bleibt. Wählt man im Beweis der Erzeugendeneigenschaft die Zahl n in (5-27) groß genug, so gilt für diese Ausnahmewerte für λ der Beweis genau wie für die generischen λ. Die Obergrenze L in der Strukturgleichung (5-9) kann ebenfalls nach dem allgemeinen Schema berechnet werden, indem man für die Ausnahmewerte von m (und von $n = 1$ im Fall $g = 1$) die modifizierten lokalen Formen ansetzt und mit den Dualitätsrelationen die obere Schranke berechnet. (Die untere ist ja unabhängig von k, l und λ). Da nur endlich viele Ausnahmewerte vorkommen, kann man das Maximum dieser Möglichkeiten und des generischen L, wie in es in § 5.(b)–(d) angegeben wurde, bestimmen. Dieses gibt dann die Schranke L in (5-9).

Es bleiben somit lediglich die Dualitätsrelationen zu verifizieren. Die unveränderten Elemente erfüllen natürlich auch hier die Dualitätsrelation (5-8). Ich möchte nun zeigen, daß für die modifizierten Elemente diese ebenfalls gilt. Hierzu werden allerdings weitere Modifikationen bei den $A_{m,p}$ notwendig sein.

Ich betrachte zuerst $\lambda = 1$. Sei $w = \omega_{n,p} \cdot A_{m,r}$. Da bei P_i nichts verändert wurde, gelten die Aussagen für $m > -n$. Damit ist zu zeigen, daß

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C_\tau} w = 0 \tag{5-48}$$

auch in den restlichen Fällen gilt. Sei $\omega_{n,p}$ ein modifiziertes Element und erfülle $A_{m,r}$ das Standardschema der Ordnungen. Die Operationen (2) und (3) erhöhen lediglich die Ordnung an den Punkten Q_i, d.h. (5-48) gilt auch. Die Operation (1.a) ist nur notwendig für $n = 0$, und die Ordnung macht deshalb nur Schwierigkeiten, falls $\operatorname{ord}_{Q_1}(A_{m,r}) \leq 0$ gilt. Da nur $m \leq 0$ zu untersuchen ist, bedeutet dies $m = 0$. Somit gehört $A_{m,r}$ zu den Ausnahmewerten. Die Operation (1.b) entspricht $l = 1$. Das Schema $(-1, 0, \ldots | g - 1)$ wurde ersetzt durch $(-1, 0, \ldots | -1)$. Das Standardschema der $A_{m,r}$ lautet $(m - 1, m, \ldots | -k \cdot m - g + 1)$. Somit ist $\operatorname{ord}_{Q_l}(w) = -k \cdot m - g$. Es interessiert nur $m \leq 0$. Es bestehen nur Schwierigkeiten falls $(-k \cdot m - g) < 0$ gilt. In diesem Fall hat das Schema von $A_{m,r}$ jedoch nur Ordnungen ≤ 0. D.h. diese Werte sind zu modifizieren, bleiben somit außer Betracht.

Seien nun die modifizierten $A_{m,r}$ gegeben. Wir berechnen die Dualität gegenüber den $\omega_{n,p}, n \neq 0$. Die Operation (4) macht keine Probleme. Bei der Operation (5) wird die Ordnung bei Q_l um 1 erniedrigt. Es gilt $m \leq 0$ und es genügt $n \leq -m$ zu untersuchen. Für $n < -m$ wird die Ordnungserniedrigung durch die Ordnung von $\omega_{n,p}$ kompensiert. Es bleibt $n = -m$. Da bei den $A_{m,r}$ jedoch alle Ordnungen ≤ 0 sind, sind für bei den $w_{n,p}$ alle Ordnungen ≥ 0 (beachte $n \neq 0$). Somit werden die Ordnungen von $w_{n,p}$ bei Q_l um 1 erhöht. Somit kompensieren sich die Korrekturen.

Damit sind alle Relationen erfüllt bis auf die Paarung

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C_\tau} \omega_{0,p} \cdot A_{m,r} = 0 \tag{5-49}$$

für die Ausnahmeelemente $A_{m,r}$ mit $m \leq 0$. Sei $g \geq 2$. Zuerst wähle ich $A'_{m,r}$ wie durch die Ordnungen gegeben. Ich setze für die Ausnahmewerte

$$\gamma^m_{r,p} := \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C_\tau} A'_{m,r}\omega_{0,p} \tag{5-50}$$

und

$$A_{m,r} := A'_{m,r} - \sum_{s=1}^{k} \gamma^m_{r,s} \, A_{1,s} \ . \tag{5-51}$$

Per Konstruktion gilt sodann auch für $m \leq 0$

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C_\tau} A_{m,r} \cdot \omega_{0,p} = 0 \ .$$

Die anderen Dualitätsrelationen werden nicht gestört.

Für $g = 1$ müssen wir ein wenig anders vorgehen, da die ω mit den A zusammenfallen. Wir setzen zuerst (siehe auch § 5.(b))

$$\gamma^0_{r,p} := \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C_\tau} A'_{0,r} \cdot A'_{0,p}\, dz \ = \ \gamma^0_{p,r} \tag{5-52}$$

und

$$A_{0,r} := A'_{0,r} - \sum_{s=1}^{k} \gamma^0_{r,s}\, A_{1,s} \ . \tag{5-53}$$

Damit ist $\omega_{0,p} = A_{0,p}\, dz$ fixiert. Gibt es noch weitere Ausnahmewerte m, so setzen wir für diese $\gamma^m_{p,r}$ wie in (5-50) und machen ebenfalls die Korrektur (5-51). Dies zeigt die entsprechende Dualität.

Für gegebenes k und l sind die Ordnungen der modifizierten Elemente ohne Probleme angebbar. Da ich im weiteren jedoch nicht an deren konkreter Form interessiert bin, verzichte ich hier darauf. Die in § 5.(b) angegebenen Elemente sind Beispiele dafür.

Zum Abschluß des Paragraphens steht noch aus:

Beweis der Prop. 5.1. Sei $g = 0$ und (vorerst) $k \geq l$. Ich benutze die Darstellung der Basisvektoren gegeben in § 4.(c). Die Parametrisierung sei so gewählt, daß der Punkt Q_l dem Wert $z = \infty$, die Punkte $P_i \in I$ $z = a_i$ und die restlichen Punkte $Q_i \in O$ $z = b_i$ entsprechen. Die Formen werden mit ihren Funktionen in der Standardkoordinate z identifiziert. Die Angabe des $\lambda-$Wertes erübrigt sich, da dieser nur in die Ordnung am Punkt Q_l eingeht. z identifiziert. Die Angabe des $\lambda-$Wertes erübrigt sich. Der Koeffizient (5-16) berechnet sich wegen der Dualität als

$$C_{(n,p),(m,r)}^{(m+d,s)} = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} (e_{n,p} \cdot f_{m,r}) \cdot f_{1-(m+d),s} \ .$$

Die Entwicklung der relevanten Terme lautet

$$f_{m,r} = \prod_{i=1}^{k} (z - a_i)^{m-\delta_{i,r}} \cdot \prod_{i=1}^{l-1} (z - b_i)^{-m} \ .$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} e_{n,p} \cdot f_{m,r} = & \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{m - \delta_{i,p}}{z - a_i} + \sum_{i=1}^{l-1} \frac{-m}{z - b_i} + \lambda \cdot \frac{\partial e_{n,p}}{\partial z} \right) \cdot f_{m,r} \\ & = (m \cdot g(z) + h(z)) \cdot f_{m,r} \end{aligned}$$

mit $g(z)$ und $h(z)$ meromorphe Funktionen, welche nicht von m abhängen. Multiplizieren wir diesen Ausdruck mit $f_{1-(m+d),s}$, so erhalten wir als Integranden

$$(m \cdot g(z) + h(z)) \cdot \prod_{i=1}^{k} (z - a_i)^{1-d-\delta_{i,p}-\delta_{i,r}} \cdot \prod_{i=1}^{l-1} (z - b_i)^{d-1} \ . \tag{5-54}$$

Die beiden letzten Faktoren hängen nicht von m ab. Durch Integration erhalten wir die Formel (5-16). Für $k < l$ sind die entsprechenden Modifikationen an den Punkten $z = b_i$ nach § 5.(d) vorzunehmen. Es zeigt sich, daß (5-54) in Abhängigkeit von der Restklasse $m \bmod b$ verschiedene Terme $z - b_i$ enthält. Somit besteht genau die behauptete Abhängigkeit. $\square$

§ 6. Zentrale Erweiterungen der Algebren

(a) Die Krichever - Novikov Algebra

Ausgehend von $\mathcal{KN}(A)$ will ich in diesem Paragraphen zentrale Erweiterungen

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\varphi} \widehat{\mathcal{KN}}(A) \xrightarrow{\psi} \mathcal{KN}(A) \longrightarrow 0 \tag{6-1}$$

studieren.Im nächsten Paragraphen werde ich versuchen die Aktion von $\mathcal{KN}(A)$ auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$ zu einer Aktion auf den semi-infiniten Formen von $\mathcal{F}^\lambda(A)$ zu transferieren. Es wird sich zeigen, daß dies nicht für $\mathcal{KN}(A)$ sondern nur für eine zentrale Erweiterung $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$ möglich ist.

Sei $e_{n,p}$ ein Basiselement von $\mathcal{KN}(A)$ wie in § 5. bestimmt. Ich wähle einen beliebigen Lift $E_{n,p}$ dieses Elementes, d.h. es gelte $\psi(E_{n,p}) = e_{n,p}$. Dieser sei für das folgende festgehalten. Desweiteren sei ein zentrales Element $t = \varphi(a)$ mit $a \in \mathbb{C}^*$ in $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$ fixiert.

Proposition 6.1. $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$ *ist erzeugt durch die Basis*

$$\{\ E_{n,p} \mid n \in \mathbb{Z},\ p = 1, \dots k\ \} \cup \{t\}\ .$$

Seine Liealgebrenstruktur ist gegeben durch die Strukturgleichungen

$$[E_{n,p}, t] = 0$$

$$[E_{n,p}, E_{m,r}] = \sum_{h=n+m-2}^{n+m+L} \quad \sum_{s=1}^{k} C^{(h,s)}_{(n,p),(m,r)}(-1) \cdot E_{h,s} + \chi(e_{n,p}, e_{m,r}) \cdot t\ . \tag{6-2}$$

Hierbei sind $C^{(\dots)}_{(\dots),(\dots)}(-1)$ *die Strukturkonstanten (5-9) von* $\mathcal{KN}(A)$ *und* $\chi : \mathcal{KN} \times \mathcal{KN} \to \mathbb{C}$ *ist ein 2-Kozyklel.*

Beweis. Die Basiseigenschaft ist klar aufgrund (6-1). Ebenso die 1.te Formel der Strukturgleichungen. $[E_{n,p}, E_{m,r}]$ kann als Linearkombination

$$[E_{n,p}, E_{m,r}] = \sum_{h,s} D^{(h,s)}_{(h,s),(m,r)} E_{h,s} + F \cdot t$$

geschrieben werden. Da allerdings ψ in (6-1) ein Homomorphismus von Liealgebren ist, muß gelten

$$\psi([E_{n,p}, E_{m,r}]) = [\psi(E_{n,p}), \psi(E_{m,r})] = [e_{n,p}, e_{m,r}]\ .$$

Als Bild der Linearkombination ergibt sich

$$\sum_{h,s} D^{(h,s)}_{(n,p),(m,r)} e_{h,s} + F \cdot 0 \ .$$

Der Vergleich beider Ausdrücke liefert, daß die Konstanten $D^{(\dots)}_{(\dots),(\dots)}$ gleich den Strukturkonstanten von $\mathcal{KN}(A)$ sein müssen. F ist eine Konstante, die von $E_{n,p}$ und $E_{m,r}$, bei festem Lift also nur von $e_{n,p}$ und $e_{m,r}$, abhängt. Sie ändert das Vorzeichen bei Vertauschung der Rolle dieser zwei Elemente. Wir benennen sie mit $\chi(e_{n,p}, e_{m,r})$. Sie kann zu einer bilinearen Abbildung

$$\chi : \mathcal{KN}(A) \times \mathcal{KN}(A) \to \mathbb{C}$$

fortgesetzt werden, da wir wissen was auf der Basis geschieht. Da $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$ eine Liealgebra ist, kann man aus der Jacobi-Identität berechnen, daß die Kozykelbedingungen

$$\chi(f,g) = -\chi(f,g) \tag{6-3}$$

$$\chi([f,g],h) + \chi([g,h],f) + \chi([h,f],g) = 0 \ . \tag{6-4}$$

erfüllt sein müssen ($f, g, h \in \mathcal{KN}(A)$). □

Umgekehrt definiert jeder solcher Kozykel eine Liealgebrenstruktur auf dem Vektorraum $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$. Dies ergibt sich mit Hilfe der Liealgebrenkohomologie, siehe etwa [Fu1] oder ein sonstiges Standardwerk der homologischen Algebra. Obwohl dies wohlbekannte Tatsachen sind, möchte ich wegen ihrer Wichtigkeit im folgenden, etwas ausführlicher darauf eingehen. Die Klassen zentraler Erweiterungen einer Liealgebra $\mathcal{G}$ sind in natürlicher Korrespondenz mit der 2. Kohomologiegruppe $H^2(\mathcal{G}, \mathbb{C})$. Zur Definition dieser Gruppen kann man folgende Konstruktion benutzen [Fu1]. Sei M ein Modul über $\mathcal{G}$. Es sei $C^q(\mathcal{G}, M)$ der Vektorraum der antisymmetrischen $q-$Linearformen mit Werten in M. Der Korandoperator

$$d = d_q \ : \ C^q(\mathcal{G}, M) \to C^{q+1}(\mathcal{G}, M)$$

ist definiert wie folgt. Sei $c \in C^q(\mathcal{G}, M)$, so setzen wir

$$\begin{aligned} d_q c(g_1, g_2, \dots, g_{q+1}) = \\ \sum_{1 \le s < t \le q+1} (-1)^{s+t-1} c([g_s, g_t], g_1, \dots, \check{g}_s, \dots, \check{g}_t, \dots, g_{q+1}) + \\ + \sum_{1 \le s \le q+1} (-1)^s g_s \cdot c(g_1, \dots, \check{g}_s, \dots, g_{q+1}) \ . \end{aligned} \tag{6-5}$$

Hierbei sind $g_1, g_2, \ldots, g_{q+1} \in \mathcal{G}$ und $\check{g}$ bezeichne wie üblich die Auslassung des Elementes g in der Auflistung. Direktes Nachrechnen liefert $d \circ d = 0$. Die $q-$te Kohomologiegruppe mit Werten in M ist definiert als

$$H^q(\mathcal{G}, M) = \frac{\text{Kern } d_q}{\text{Bild } d_{q-1}} \ ,$$

mit der Verabredung

$$C^0(\mathcal{G}, M) = M \quad \text{und} \quad d_q = 0, \ q < 0 \ .$$

Die Elemente des Kernes heißen auch Kozykel, die Elemente des Bildes Koränder. Uns interessiert hier nur $M = \mathbb{C}$ aufgefaßt als trivialer Modul, d.h. $\mathcal{G} \cdot \mathbb{C} = 0$. Somit verschwindet die 2. Summe in (6-5). Schreiben wir (6-5) für $q = 2$ aus, so erhalten wir

$$d_2 c(f, g, h) = c([f, g], h) - c([f, h], g) + c([g, h], f) \ .$$

Aus $d_2 c(f, g, h) = 0$ folgt mit der Antisymmetrie (6-4). Ist ein 2-Kozykel ein Korand, so läßt er sich schreiben als

$$c(f, g) = \kappa([f, g]) \tag{6-6}$$

mit einer Linearform κ auf $\mathcal{G}$. Mit Hilfe eines $2-$Kozykels kann man die zugehörige zentrale Erweiterung $\widehat{\mathcal{G}}$ in folgender Weise konstruieren [Fu1]. Als Vektorraum ist $\widehat{\mathcal{G}}$ die direkte Summe $\mathbb{C} \oplus \mathcal{G}$. Das Lieprodukt ist gegeben durch

$$[(\mu, g), (\nu, f)] = (c(g, f), [g, f]) \ .$$

Ich wähle die (lineare) Splittingabbildung

$$\Phi : \mathcal{G} \to \widehat{\mathcal{G}}, \quad f \mapsto \Phi(f) = (0, f)$$

und bezeichne mit t das Element $(1, 0)$. Damit kann obiges auch geschrieben werden als

$$[\Phi(g), \Phi(f)] = \Phi([g, f]) + c(g, f) \cdot t \quad \text{und} \quad [\Phi(g), t] = 0 \ ,$$

womit wir bei der Darstellung (6-2) wären. Die Wahl einer anderen Splittingabbildung Φ' , d.h. die Wahl eines anderen Liftes für die Elemente aus $\mathcal{G}$, entspricht der Wahl einer Linearform ϕ auf $\mathcal{G}$ durch

$$\Phi'(g) = (\phi(g), g), \quad \text{bzw.} \quad \Phi'(g) = \Phi(g) + \phi(g) \cdot t \ .$$

Ich berechne

$$[\Phi'(g), \Phi'(f)] = [\Phi(g), \Phi(f)] = \Phi([g,f]) + c(g,f) \cdot t =$$
$$\Phi'([g,f]) - \phi([g,f]) \cdot t + c(g,f) \cdot t = \Phi'([g,f]) + c'(g,f) \cdot t \ .$$

Es gilt somit
$$c'(g,f) = c(g,f) + d_1(-\phi)(g,f),$$
d.h. unterschiedliche Lifts bestimmen kohomologe Kozykel. Durch die Umkehrung der obigen Vorgehensweise kann man die kohomologe Abänderung eines Kozykels auch als Wahl eines anderen Liftes beschreiben.

Um Kozykeln für die Algebra $\mathcal{KN}(A)$ zu erhalten, verallgemeinere ich die Methode in [KN2].

Definition. *Sei (U_α, z_a) eine Überdeckung von X durch Koordinatenumgebungen und seien $z_\beta = f_{\alpha\beta}(z_\alpha)$ die Übergangsfunktionen für nichtleeres $U_\alpha \cap U_\beta$. Ein holomorpher (meromorpher) projektiver Zusammenhang ist eine Kollektion lokaler holomorpher (meromorpher) Funktionen $R_\alpha(z_a)$ die auf nichtleerem $U_\alpha \cap U_\beta$ in folgender Weise in Beziehung stehen*

$$R_\beta(z_\beta)\left(\frac{\partial z_\beta}{\partial z_\alpha}\right)^2 = R_\alpha(z_\alpha) + S(f_{\alpha\beta}) \ . \tag{6-7}$$

Hierbei ist $S(h)$ die Schwartzsche Ableitung. Sie ist definiert als

$$S(h) = \frac{h'''}{h'} - \frac{3}{2}\left(\frac{h''}{h'}\right)^2 \ . \tag{6-8}$$

($'$ bezeichne die Ableitung nach der lokalen Variablen z_α.)

Nach [HaS][Gu] existiert immer ein holomorpher projektiver Zusammenhang R_0. Im Fall $g=0$ und $g=1$ und bei Wahl der Standardkoordinaten $z, 1/z$ bzw. $z-a$ kann $R_0 = 0$ gewählt werden. Für diese Kartenwechsel gilt nämlich $S(h) = 0$. Dies ist im Fall $g=1$ klar und kann im Fall $g=0$ explizit nachgerechnet werden. (6-7) besagt, daß die Differenz zweier projektiver Zusammenhänge ein Differential vom Gewicht 2 (ein quadratisches Differential) ist. Somit erhält man alle Zusammenhänge, indem man zu R_0 (holomorphe oder meromorphe) quadratische Differentiale hinzuaddiert.
Seien nun e und h Vektorfelder die lokal dargestellt werden als

$$e_|(z) = f(z)\frac{\partial}{\partial z}, \quad h_|(z) = t(z)\frac{\partial}{\partial z}$$

Proposition 6.2.

$$\bar{\chi}(e,h) := \left(\frac{1}{2}(f'''t - ft''') - R\cdot(f't - ft')\right)dz \tag{6-9}$$

ist eine wohldefinierte (meromorphe) 1-form.

Beweis. Seien (U_α, z_α) und (U_β, z_β) Koordinatenumgebungen mit nichtleerem Durchschnitt. Zu zeigen ist, daß (6-9), sowohl in z_α als auch in z_β ausgedrückt, dasselbe ergibt. Sei $z_\beta = h(z_\alpha)$ der Koordinatenwechsel, f_α und f_β, bzw. t_α und t_β die lokalen Repräsentanten der Vektorfelder in den lokalen Koordinaten. Wir erhalten folgende Transformationsregeln

$$f_\beta(z_\alpha) = \frac{\partial h}{\partial z_\alpha}(z_\alpha)\cdot f_\alpha(z_a)\ ,$$

entsprechend für t_β, weiter gilt

$$\begin{aligned} dz_\beta &= \frac{\partial h}{\partial z_\alpha}(z_\alpha)dz_\alpha \\ R_\beta(z_\alpha) &= \left(\frac{\partial h}{\partial z_\alpha}(z_\alpha)\right)^{-2}(R_\alpha(z_\alpha) + S(h))\ . \end{aligned}$$

Wir schreiben nun (6-9) in Bezug auf die Variable z_β und setzen die obigen Größen ein. Hierzu müssen wir entsprechend oft die Kettenregel anwenden, da $'$ die Ableitung nach z_β bedeutet. Nach längerer, aber unkomplizierter Rechnung folgt die Behauptung. Hier sei nur ein Zwischenschritt notiert. $f'''t - ft'''$ in Bezug auf z_β, erhält nach Umrechnung in Bezug auf die Variable z_α die Form

$$\frac{1}{h'}(f'''t - t'''f) + \left(\frac{2h'''}{(h')^2} - \frac{3(h'')^2}{(h')^3}\right)(f't - t'f)\ . \tag{6-10}$$

Hier bezeichne nun $'$ die Ableitung nach z_α. Der zweite Term wird genau durch die Schwarzsche Ableitung kompensiert. □

Aus (6-10) sieht man auch sofort, daß der zu kompensierende Term verschwindet, falls etwa gilt $h' = const$, wie dies im Fall des Torus mit den Standardkoordinaten der Fall ist, bzw. falls allgemeiner gilt $S(h) = 0$. Wählt man nur Koordinaten die $S(h)$ erfüllen, so kommt man mit dem 1.ten Teil von (6-9) aus, siehe [KN1].

Proposition 6.3. *Sei* $c \in \mathbb{C}$ *eine beliebige Konstante , C eine beliebige nichtsinguläre (nicht notwendigerweise zusammenhängende) Kurve auf X, dann definiert*

$$\chi(e,h) = \frac{c}{24\pi\mathbf{i}} \oint_C \bar{\chi}(e,h) \tag{6-11}$$

ein 2-Kozykel.

Beweis. Aus der Definition (6-9) von $\bar{\chi}(e,h)$ ersieht man sofort, daß $\chi(..,..)$ eine antisymmetrische Biliniearform ist. Insbesondere gilt $\chi(e,h) = -\chi(h,e)$, also (6-3). Sei P ein Punkt im (nicht notwendigerweise zusammenhängenden) Gebiet welches von C umschlossen wird. Ich identifiziere die Vektorfelder f, g, h mit ihren lokalen Funktionen am Punkt P. Sei

$$\psi := \bar{\chi}([f,g],h) + \bar{\chi}([g,h],f) + \bar{\chi}([h,f],g) \ . \tag{6-12}$$

Ich zeige, daß $\operatorname{res}_P(\psi) = 0$ gilt. Damit ist das Kurvenintegral über ψ identisch 0, was (6-4) zeigt. Um $\operatorname{res}_P(\psi) = 0$ zu zeigen, zeige ich, daß sich ψ schrieben läßt als $\psi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\, dz$ mit einer lokalen meromorphen Funktion φ. Aus

$$\varphi(z) = \sum_{n\geq m}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n\geq m}^{-1} c_n z^n + \sum_{n\geq 0}^{\infty} c_n z^n$$

folgt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z)\, dz = \Big(\sum_{n\geq m-1}^{-2} c_{n+1}(n+1)z^n + \sum_{n\geq 0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)z^n \Big)\, dz \ .$$

Also verschwindet das Residuum.
Aufgrund der Identifikationen Vektorfelder mit lokalen Funktionen gilt
$[f,g] = fg' - f'g$ ($\frac{\partial}{\partial z}$ wird unterdrückt). Es ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \bar{\chi}([f,g],h) = \frac{1}{2} \Big[(fg' - f'g)^{(3)} h - h^{(3)}(fg' - f'g) \Big] \\ -R \cdot [(fg'' - f''g)h + (f'g - g'f)h'] \ . \end{aligned} \tag{6-13}$$

Die anderen Terme ergeben sich durch zyklische Vertauschung. Der Faktor bei R verschwindet bei der Aufsummation über alle zyklischen Vertauschungen. Übrig bleibt der erste Term F, wobei der Faktor $\frac{1}{2}$ ohne Bedeutung ist. Es gilt

$$F = ((fg' - f'g)h)^{(3)} - 3\,((fg' - f'g)'h')' - 2\left(h^{(3)}(fg' - f'g)\right)$$

wie man durch direktes Ausrechnen verifiziert. Da die ersten beiden Terme Ableitungen sind, verschwindet deren Residuen. Den letzten Term forme ich um

$$h^{(3)}(fg' - f'g) = \Big(h^{(2)}(fg' - gf')\Big)' - h^{(2)}(fg' - gf')' \; .$$

Auch hier ist der erste Term eine Ableitung, trägt also nichts zum Residuum bei. Es bleibt nach Aufsummation über alle zyklischen Vertauschungen

$$h^{(2)}(fg' - gf')' + f^{(2)}(gh' - hg')' + g^{(2)}(hf' - fh')' = 0 \; . \quad \square$$

Eigentlich müßte man sowohl die Konstante c, als auch den projektiven Zusammenhang R in die Notation aufnehmen, da der Kozykel von beiden anhängt. Die Abhängigkeit von c spielt keine Rolle. Sie bedeutet lediglich einen Automorphismus des zentralen Anteiles. Deshalb wird er im folgenden immer zu 1 normiert werden. Die Abhängigkeit von R ist allerdings auch problemlos wegen

Proposition 6.4. *Seien χ_R und χ_{R^*} Kozykel gebildet nach der Vorschrift (6-9) und (6-11) mit derselben Konstante c und den meromorphen projektiven Zusammenhängen R, bzw. R^*, dann sind beide kohomolog.*

Beweis. Sei $S = R - R^*$, dann ist $\Omega_{|} = S(z)dz$ ein globales meromorphes quadratisches Differential. Mit den Notationen in obigem Beweis gilt

$$\chi_R(f,g) - \chi_{R^*}(f,g) = \frac{c}{24\pi i}\oint_C S(fg' - f'g)dz = \frac{c}{24\pi i}\oint_C \Omega \cdot ([f,g]) \; .$$

Die Abbildung

$$\gamma : \mathcal{KN}(A) \to \mathbb{C}, \qquad e \to \gamma(e) = \frac{c}{24\pi i}\oint_C \Omega \cdot e$$

definiert eine Linearform auf $\mathcal{KN}(A)$. Somit gilt

$$\chi_R(f,g) - \chi_{R^*}(f,g) = \gamma([f,g])$$

und die beiden Kozykel sind nach (6-6) kohomolog. $\square$

Im folgenden interessieren uns speziell diejenigen Kozykel, die durch Integration über die Levellinien C_τ zustande kommen.

Proposition 6.5. *Sei die zentrale Erweiterung $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$ gegeben durch den Kozykel*

$$\chi(e,h) = \frac{c}{24\pi\mathbf{i}} \oint_{C_\tau} \left(\frac{1}{2}(f'''t - ft''') - R \cdot (f't - ft') \right) dz \tag{6-14}$$

mit einem meromorphen projektiven Zusammenhang R, der holomorph auf $X \setminus A$ ist und höchstens Pole 2. Ordnung an den Punkten von A hat. Dann gilt

$$\chi(e_{n,p}, e_{m,r}) = 0 \quad \textit{für} \quad (n+m) \geq 5 \quad \textit{oder} \quad (n+m) \leq T \leq 3 \ . \tag{6-15}$$

Hierbei besitzt die Konstante $T \in \mathbb{Z}$ für $g \neq 1$ die in der Tabelle aufgeführten Werte ($a = (k-l)+1, b = (l-k)+1$)

$\boxed{k = l}$	$k = 1$	g *beliebig*	$T = -6g + 3$
	$k > 1$	$g = 0$	$T = -3$
		$g > 0$	$T = -6g + 3$
$\boxed{k > l}$	$l = 1$	g *beliebig*	$T = [\frac{-6g+3}{a}]$
	$l > 1$	$0 \leq g \leq \frac{1}{2}(a+1)$	$T = -3$
		$g \geq \frac{1}{2}(a+1)$	$T = -6g + 3$
$\boxed{k < l}$		$g = 0$	$T = -5b + 2$
		$g > 0$	$T = -6gb + b + 2$.

Für $g = 1$ gilt diese Schranke für generische n und m.

Beweis. Sei $e_{n,p}$ lokal repräsentiert durch die meromorphe Funktion f und $e_{m,r}$ durch die meromorphe Funktion t. Ich betrachte zuerst die Ordnungen an den Punkten $P_i \in I$.

$$\text{ord}_{P_i}(f) = n - \delta_{i,p}, \quad \text{ord}_{P_i}(f') \geq n - 1 - \delta_{i,p}, \quad \text{ord}_{P_i}(f''') = n - 3 - \delta_{i,p},$$

Analoge Ausdrücke erhalten wir auch für t. Unmittelbar aus der Definition folgt

$$\begin{aligned} &\text{ord}_{P_i}(\bar{\chi}(e_{n,p}, e_{m,r})) \geq \\ &\max(n + m - 3 - \delta_{i,p} - \delta_{i,r}\ ,\ n + m - 1 - \delta_{i,p} - \delta_{i,r} + \text{ord}_{P_i}(R)) \\ &= n + m - 3 - \delta_{i,p} - \delta_{i,r}\ . \end{aligned} \tag{6-16}$$

Ist $n+m \geq 5$, so sind alle Ordnungen positiv, d.h. das Kurvenintegral über C_τ verschwindet. Dies zeigt den ersten Teil von (6-15). Für den zweiten Teil müssen wir die Abschätzungen an den Punkten Q_i studieren. Die Berechnung ist einfach aber es sind wiederum abhängig von k und l verschiedene Fälle zu studieren. (Zur Definition von $a, b, \epsilon_n{}^*, \epsilon_m{}^*$ siehe § 5.) Es sei $g \neq 1$.
1.) $\operatorname{ord}_{Q_i}(f) = -n$, $\operatorname{ord}_{Q_i}(t) = -m$, dann gilt
$\operatorname{ord}_{Q_i}(\bar{\chi}(e_{n,p}, e_{m,r}) \geq -n-m-3$
2.) $\operatorname{ord}_{Q_l}(f) = -n-3g+3$, $\operatorname{ord}_{Q_l}(t) = -m-3g+3$, dann gilt
$\operatorname{ord}_{Q_l}(....) \geq -n-m-6g+3$
3.) $\operatorname{ord}_{Q_l}(f) = -an-3g+3$, $\operatorname{ord}_{Q_l}(t) = -am-3g+3$, dann gilt
$\operatorname{ord}_{Q_l}(....) \geq a(-n-m)-6g+3$
4.) $\operatorname{ord}_{Q_i}(f) = \frac{1}{b}(-n+\epsilon_n{}^*)$, $\operatorname{ord}_{Q_i}(t) = \frac{1}{b}(-m+\epsilon_m{}^*)$, dann gilt
$\operatorname{ord}_{Q_i}(....) \geq \frac{1}{b}(-n-m+\epsilon_n{}^*+\epsilon_m{}^*)-3$
5.) $\operatorname{ord}_{Q_l}(f) = \frac{1}{b}(-n+\epsilon_n{}^*)-3g+3$, $\operatorname{ord}_{Q_l}(t) = \frac{1}{b}(-m+\epsilon_m{}^*)-3g+3$
$\operatorname{ord}_{Q_l}(....) \geq \frac{1}{b}(-n-m+\epsilon_n{}^*+\epsilon_m{}^*)-6g+3$.
Hierbei wurde überall benutzt daß $\operatorname{ord}_{Q_i}(R) \geq -2$ ist. Ist $n+m$ sehr stark negativ, so sind alle diese Ordnungen positiv., d.h. das Kurvenintegral verschwindet. Die genaue Schranke ist durch Einzelinspektion festzustellen. Ist $k=l=1$, so tritt nur Typ 2.) auf, also $\bar{\chi}(e_{n,p}, e_{m,r}) = 0$ für $n+m \leq -6g+3$. Für $k=l>1$ tritt Typ 1.) und 2.) auf. Für das Verschwinden des Kurvenintegrales muß $n+m$ so klein gewählt werden, daß beide Ordnungen ≥ 0 sind. Dies liefert genau die Ergebnisse in der Tabelle. Für $k>l$ und $l=1$ tritt 3.) auf, falls $l>1$ tritt 1.) und 3.) auf. Für $k<l$ betrachten wir nur den schlechtesten Fall für $\epsilon_n{}^*$ und $\epsilon_m{}^*$. Auf jeden Fall gilt jedoch $\epsilon_n{}^*+\epsilon_m{}^* \geq -2b+2$. Für $k=1$ ist 4.) und 5.) zu betrachten, für $k>1$ zusätzlich 1.) (tatsächlich spielt diese neue Möglichkeit keine Rolle). Für $g=1$ gibt es noch endlich viele Möglichkeiten für n und m, an denen Abweichungen von obigem Schema auftreten. In diesem Fall sind diese einzeln zu untersuchen und für T das Maximum aus diesen endlich vielen Schranken und der obigen generischen Schranke zu nehmen. An der Existenz einer solchen Schranke ändert sich nichts. □

Hätte ich statt R mit erlaubten Polen von Ordnung 2 an den Punkten von A ein holomorphes R gefordert, so hätten sich die Grenzen in (6-15) nicht geändert. In Anlehnung an [KN2] nenne ich einen beliebigen 2-Kozykel einen lokalen Kozykel falls er der Bedingung (6-15) mit $T = -2L-3+\left[\frac{2}{k}\right]$ genügt. Durch Vergleich der Tabelle (5-17) mit den angegebenen T Werten in Prop. 6.5 sieht man sofort, daß (6-14) einen lokalen Kozykel definiert. Ich nenne eine Kozykel lokal im weiteren Sinne, falls er den Bedingungen (6-15), nun allerdings mit eventuell weiteren Schranken (anstatt 5, bzw. T) genügt. Solche entstehen typischerweise bei Verwendung eines meromorphen projektiven Zusammenhanges mit Polen höherer als zweiter Ordnung an den Punkten aus A.

Es ist zu beachten, daß der Begriff "lokal" von der Aufspaltung $A = I \cup O$ abhängt. Im folgenden möchte ich berechnen, wie der Kozykel an der oberen Grenze des Bereiches, in dem er nicht verschwindet, aussieht.

Proposition 6.6. *Sei χ ein Kozykel gegeben wie in (6-14) mit $c = 1$. Der projektive Zusammenhang R habe in einer Umgebung der Punkte $P_p \in I$ die lokale Gestalt ($\alpha_p \in \mathbb{C}$)*

$$R_{|}(z_p) = \alpha_p z_p^{-2} + z_p^{-1}(O(1)), \tag{6-17}$$

dann gilt

$$\chi(e_{2+i,p}, e_{2-i,r}) = \left(\frac{1}{12}(i^3 - i - 2\alpha_p i)\right)\delta_{p,r} \ . \tag{6-18}$$

Beweis. In diesem Fall ist $n = 2 - i$ und $m = 2 + i$, also $n + m = 4$. Wir sind somit gerade an der oberen Schranke von Prop.6.4 des Bereiches an dem ein nichtverschwindender Kozyklel möglich ist. Für $p \neq r$ folgt aus den Ordnungsbetrachtungen (6-16), daß diese ≥ 0 ist, d.h. der Kozykel verschwindet. Sei also $p = r$. (6-16) zeigt in diesem Fall, daß eine negative Ordnung nur am Punkt P_p auftritt, d.h. nur das Residuum dort kann zum Wert des Kurvenintegrales beitragen. Es gilt

$$\begin{aligned} e_{2-i,p|}(z) &= z_p^{1-i}(1 + O(z_p))\frac{\partial}{\partial z} \\ e_{2+i,p|}(z) &= z_p^{1+i}(1 + O(z_p))\frac{\partial}{\partial z} \ . \end{aligned}$$

Damit berechnet sich

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(e_{2-i,p}, e_{2+i,p}) &= \frac{1}{2}((1-i)(-i)(-1-i) - (1+i)(i)(-1+i) \\ &\quad - 2\alpha_p[(1-i) - (1+i)])z_p^{-1}(1 + O(z_p))\, dz \\ &= -(i^3 - i - 2\alpha_p i)z_p^{-1}(1 + O(z_p))\, dz \ . \end{aligned}$$

Nach Integration erhalten wir Formel (6-18) . $\square$

Selbstverständlich kann der Term $-2\alpha_p i$, der von den Polen des projektiven Zusammenhanges herkommt, durch kohomologe Abänderung des Kozykels beseitigt werden. Diese Abänderung können wir auch über einen Basiswechsel ausdrücken. Benutzen wir die Strukturgleichung (5-9), so erhalten wir

$$[E_{2-i,p}, E_{2+i,p}] = 2iE_{2,p} + \sum_{n\geq 3}\sum_{r} C_{..}^{..} E_{n,r} + \chi(e_{2-i,p}, e_{2+i,p}) \cdot t \ .$$

Machen wir nun einen Basiswechsel, indem wir $E'_{2,p} = E_{2,p} + \frac{1}{12}\alpha_p t$ setzen, so ändert sich auf der linken Seite nichts. Rechts steht

$$2iE'_{2,p} + \sum_{n\geq 3}\sum_r C_{\cdot\cdot}^{\cdot\cdot} E_{n,r} + \left(\chi(e_{2-i,p}, e_{2+i,p}) - \frac{2i}{12}\cdot\alpha_P\right)\cdot t\ .$$

Als neuer Kozykel ergibt sich

$$\chi(e_{2+i,p}, e_{2-i,r}) = \left(\frac{1}{12}(i^3 - i)\right)\delta_{p,r}\ . \tag{6-19}$$

Natürlich hätte ich noch $-i$ "beseitigen" können. Bei der Virasoro Algebra ist es allerdings üblich den Kozykel in dieser Form zu schreiben. Deshalb habe ich mich auch hierzu entschieden. Der Grund dieser Normierung ist, daß im Virasoro Fall der Kozykel auf der Unteralgebra der globalen holomorphen Vektorfelder

$$\langle e_1, e_2, e_3\rangle \cong sl(2,\mathbb{C})$$

bereits identisch verschwindet und nicht erst nach kohomologer Abänderung. (Nach den Sätzen von Whitehead [HiSt] muß er kohomologisch trivial sein.)

Für $p \neq r$ kann der Kozykel $\chi(e_{n,p}, e_{m,r})$ auch für $n + m = 3$ ausgerechnet werden. Hierzu geht man entsprechend des Beweises von Prop.6.6 vor. Das Residuum ist an den Punkten P_p und P_r zu bilden und zu addieren. Dies ergibt

$$\chi(e_{n,p}, e_{3-n,r}) = \frac{1}{12}\big((n-1)(n-2)(2n-3) - 2\alpha_p(n-2) - 2\alpha_r(n-1)\big)\ . \tag{6-20}$$

Der obige Basiswechsel beseitigt auch hier die Terme, welche von den Polen des projektiven Zusammenhanges herkommen (siehe die Strukturkonstanten (5-14)).

Proposition 6.7. *Der Kozykel (6-14) definiert eine nichttriviale zentrale Erweiterung.*

Beweis. Ich wähle je einen Punkt P aus I und einen Punkt Q aus O. $\mathcal{KN}(\{P,Q\})$ liegt als Unteralgebra in $\mathcal{KN}(A)$. Der Kozykel (6-14) ist genau der von Krichever und Novikov angegebene, falls er auf diese Unteralgebra eingeschränkt wird. Insbesondere ist er nach [KN2] eine nichttriviale Kohomologieklasse auf der Unteralgebra und somit auf $\mathcal{KN}(A)$ selbst. $\square$

Vermutung 6.1. *Jeder lokale (im weiteren Sinne) Kozykel von $\mathcal{KN}(A)$ läßt sich nach kohomologer Abänderung wie in (6-14) mit einem passenden meromorphen Zusammenhang R schreiben. Insbesondere gibt es nur eine solche Kohomologieklasse.*

Im folgenden werde ich eine “Beweisskizze” für die Vermutung geben. Ich verwende hierzu Methoden und Techniken welche für $N = 2$ in [KN1], [KN2] benutzt wurden, um das entsprechende Resultat zu zeigen. Da ich nicht in der Lage war, deren Gültigkeit verifizieren zu können, bzw. ich noch nicht die Verallgemeinerungen der Techniken in allen Details ausgeführt habe, verwende ich die Bezeichnung Vermutung. Darüberhinaus werden Methoden herangezogen, die den Bereich der Algebraischen Geometrie, bzw. Funktionentheorie verlassen (Fourierentwicklung auf S^1, Liealgebra der C^∞-Vektorfelder auf S^1). Nach meiner Meinung wäre es ein gutes Ziel die Vermutung/Proposition durch rein algebraische, bzw. algebraisch-geometrische Methoden zu zeigen. Im folgenden werde ich keinen Gebrauch von der Vermutung machen.

“Beweisskizze”. Zuerst verändere man die Residuenvorschrift für das, die Levellinien definierende Differential ρ, derart daß es ein C_τ gibt, welches diffeomorph zu S^1 ist. Sodann zeige man wie in [KN1] daß sich jedes C^∞-Vektorfeld E schreiben läßt als ($Q \in C_\tau$)

$$E(Q) = \sum_{n,p} e_{n,p}(Q) \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} E(Q')\Omega_{1-n,p}(Q') \ . \tag{6-21}$$

Die Methode dies zu zeigen, ist vollkommen analog zum $N = 2$ Falle in [KN1],[KN2] und benutzt “diskrete Baker - Akhiezer - Funktionen” [KN3]. Die Gültigkeit von (6-21) wird in [KN1] im wesentlich auf das dortige Lemma 2 zurückgeführt. Dieses ist ebenfalls in diesem allgemeinen Rahmen gültig. Die dort auftauchenden Funktionen ψ_n und ψ_n^+ sind hier natürlich durch entsprechende $\psi_{n,p}$, $\psi_{n,p}^+$ zu ersetzen mit den entsprechenden modifizierten Ordnungen. So ist etwa für $k = l$ zu setzen

$$\operatorname{ord}_{P_i}(\psi_{n,p}) = n - \delta_{i,p}, \quad P_i \in I, \qquad \operatorname{ord}_{Q_i}(\psi_{n,p}) = -n + \delta_{i,l}, \quad Q_i \in O,$$

und für die duale Kollektion

$$\operatorname{ord}_{P_i}(\psi_{n,p}^+) = -n + \delta_{i,p}, \quad P_i \in I, \qquad \operatorname{ord}_{Q_i}(\psi_{n,p}^+) = n - \delta_{i,l}, \quad Q_i \in O \ .$$

Für $k \neq l$, sind die § 5. entsprechenden Ordnungsverteilungen vorzunehmen. Ebenso sind mehrere Funktionen λ_p statt einer einzigen Funktion λ in den Formalismus aufzunehmen (Das Theorem 3. in [Kri]) erlaubt dies. Nun kann mit

[KN2,nach Formel 1.21], bzw. [KN1,Lemma 6] das Problem auf den Gelfand-Fuks Kozykel der Algebra $\mathcal{L}$ der C^∞-Vektorfelder zurückgeführt werden. Hierbei ist die Grundidee, daß ein lokaler Kozykel für $\mathcal{KN}(A)$, bei Wahl von C_τ diffeomorph zu S^1, einen stetigen Kozykel für $\mathcal{L}$ definiert. Von Gelfand und Fuks [GF] wurde gezeigt daß $H^2(\mathcal{L}, \mathbb{C}) \equiv \mathbb{C}$ gilt und daß die Kozykel wie behauptet gegeben werden können.

Unter der einschränkenden Bemerkung, daß die Details noch nicht ausgeführt wurden, gilt natürlich auch, daß sich jede $C^\infty-$Form F vom Gewicht λ auf C_τ entwickeln läßt als

$$F(Q) = \sum_{n,p} f_{n,p}(\lambda)(Q) \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} F(Q') f_{1-n,p}(1-\lambda)(Q') \ . \tag{6-22}$$

Dies ist eine entsprechende Aussage zum Entwicklungssatz (5-7).

(b) Die Heisenberg Algebra

Die Vektorräume $\mathcal{F}^\lambda(A)$ bilden Module über der Algebra $\mathcal{F}^0(A)$. Diese besteht aus den globalen meromorphen Funktionen die Polstellen nur an den Punkten von A haben. Die Modulstruktur ist gegeben durch die Multiplikation der Formen mit den Funktionen (siehe § 2.). Zur Erinnerung: In § 5. hatte ich

$$\mathcal{F}_n^\lambda(A) := \langle f_{n,1}(\lambda), f_{n,2}(\lambda), \dots , f_{n,k}(\lambda)\rangle$$

eingeführt als die homogenen Formen von Grad n und gezeigt, daß in Bezug auf diese Graduierung die $\mathcal{F}^\lambda(A)$ verallgemeinert graduierte Liealgebrenmodule über $\mathcal{KN}(A)$ sind. Ich zeige zuerst, daß mit derselben Graduierung die $\mathcal{F}^\lambda(A)$ auch verallgemeinert graduierte Module über $\mathcal{F}^0(A)$ sind. Hierbei sei $\mathcal{F}^0(A)$ aufgefaßt als assoziative (und kommutative) Algebra. Wie üblich verwende ich $A_{m,p} := f_{m,p}(0)$.

Proposition 6.8. *(a) Es gibt eine Konstante M, derart daß für alle (n,p) und (m,r) gilt*

$$A_{n,p} \cdot f_{m,r}(\lambda) = \sum_{h=n+m-1}^{n+m+M} \sum_{s=1}^{k} D_{(n,p)(m,r)}^{(h,s)} f_{h,s}(\lambda) \ . \qquad (6\text{-}23)$$

Die Konstante M hängt ab vom Geschlecht g, Gewicht λ und von $k = \#I$ und $l = \#O$, jedoch nicht von n und m.

(b) Die Koeffizienten an der unteren Grenze lauten

$$D_{(n,p)(m,r)}^{(n+m-1,s)} = \delta_{p,r} \cdot \delta_{p,s} \ . \qquad (6\text{-}24)$$

(c) Es gilt

$$\mathcal{F}_n^0(A) \cdot \mathcal{F}_m^\lambda(A) \subseteq \bigoplus_{h=n+m-1}^{n+m+M} \mathcal{F}_h^\lambda(A), \qquad (6\text{-}25)$$

d.h. $\mathcal{F}^\lambda(A)$ ist ein verallgemeinert graduierter Modul über $\mathcal{F}^0(A)$,

Beweis. (c) Da die homogenen Teile von den $f_{m,r}$, bzw. $A_{n,p}$ erzeugt werden, folgt (6-25) sofort aus (6-23). Nun ist (6-25) angewendet sowohl auf $\mathcal{F}^0(A)$ als auch auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$ genau die Definition von einer verallgemeinert graduierten Struktur (siehe 5-19). D.h. aus (a) folgt sofort (c).

(a) und (b): $w = A_{n,p} \cdot f_{m,r}(\lambda)$ ist ein $\lambda-$Form. Somit existiert eine Darstellung wie in (6-23) mit einer endlichen Summation über den ganzen Indexbereich (h,s). Zu bestimmen sind die Grenzen. Nach dem Entwicklungssatz (Theorem 5.1) gilt

$$D_{(n,p)(m,r)}^{(h,s)} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C_\tau} w \cdot f_{1-h,s}(1-\lambda) \ . \tag{6-26}$$

Dieses Integral kann man mit Hilfe von Ordnungs- und Residuenbetrachtung auswerten. Diese Technik hatte ich schon mehrfach vorgeführt, so daß ich mich hier kurz fassen kann. Es gilt

$$\operatorname{ord}_{P_i}(w) = n + m - h + 1 - \delta_{i,r} - \delta_{i,p} - \delta_{i,s}, \quad P_i \in I \ .$$

Für $h \le (n+m-2)$ ist diese Ordnung ≥ 0. Dies zeigt die untere Grenze. Für $h = n+m-2$ ist sie negativ nur falls $i = p = r$. Aufgrund der lokalen Normierung berechnet sich $\operatorname{res}_{P_p}(w) = 1$. Damit folgt die Aussage über die Koeffizienten an der unteren Grenze (6-24). Zur Berechnung der oberen Grenze sind die Punkte $Q_i \in O$ zu betrachten. Es sind analog zum Beweis von Prop. 6.5 die dortigen Alternativen zu untersuchen. Da uns jedoch nicht die konkrete Schranke interessiert, sondern nur deren Existenz, genügen die folgenden Betrachtungen. Als Ordnungen an den Punkten Q_i ergeben sich Ausdrücke der Art

$$c \cdot (-(n+m) + h) + b \tag{6-27}$$

mit b und c Konstanten und $c > 0$. Ist nun $h \ge (n+m) - b/c$, dann ist obige Ordnung positiv. Die Konstante M ist nun so zu wählen, daß $M \ge -b/c - 1$ für alle Kombinationen die auftreten können, gilt. Damit sind auch die endlich vielen Sonderfälle, die für gewisse λ (insbesondere auch für $\lambda = 0$) auftreten, erfaßt. Entscheidend ist hierbei natürlich, daß nur endlich viele Ausdrücke der Form (6-27) zu betrachten sind. $\square$

Die Berechnung der konkreten Obergrenze ist einfach. Durch entsprechende Fallunterscheidungen kann man Tabellen aufstellen. Hier möchte ich nur an einem Beispiel die Vorgehensweise demonstrieren. Hierzu sei $k = l$. Für die Nichtausnahmeelemente erhalten wir für w wie oben

$$\operatorname{ord}_{Q_i}(w) = h - (n+m) - 1, \ i \ne l, \quad \operatorname{ord}_{Q_l}(w) = h - (n+m) - g \ . \tag{6-28}$$

Für $k = 1$ tritt nur der zweite Term auf, d.h. die Ordnung ist ≥ 0, falls gilt $h \ge (n+m) + g$. Ist $k > 1$, so sind alle Ordnungen ≥ 0, falls gilt

$$h \ \ge \ \max\bigl(n+m+1 \ , \ n+m+g\bigr) \ .$$

Ist $g = 0$, so gibt es keine Ausnahmewerte. Im anderen Fall beschänken wir uns auf $g \geq 2$ und $\lambda \neq 0, 1$. Es bleiben die Ausnahmewerte für die $A_{n,p}$. Für diese berechnet sich

$$\operatorname{ord}_{Q_i}(w) = h - (n+m) - 1,\ i \neq l, \quad \operatorname{ord}_{Q_l}(w) = h - (n+m) - g - 1\ . \tag{6-29}$$

Als Ausnahmewerte treten für $k \geq 2$ nur $n = 0$ auf. Für $k = 1$ sind es $-g \leq n \leq 0$ (siehe (5-29)). Beim ebenfalls auftretenden Ausnahmewert A_1 für $k = 1$ treten keine negativen Ordnungen auf. Damit erhalten wir als Obergrenze die folgenden Werte.

$$M = \begin{cases} -1, & g = 0, k = 1 \\ 0, & g = 0, k > 1 \\ g, & g \geq 2, \lambda \neq 0, 1\ . \end{cases} \tag{6-30}$$

Versehen wir die Algebra $\mathcal{F}^0(A)$ mit dem Kommutator $[f, g] = f \cdot g - g \cdot f$, so erhalten wir die abelsche Liealgebra $L\mathcal{F}^0(A)$.

Proposition 6.9. *Die Abbildung* $\mathcal{F}^0(A) \times \mathcal{F}^0(A) \to \mathbb{C}$ *gegeben durch*

$$\gamma(f, g) = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} f\, dg \tag{6-31}$$

definiert einen nichttrivialen $2-$*Kozykel (d.h. er ist nicht kohomolog zu 0) für die Liealgebra* $L\mathcal{F}^0(A)$.

Beweis. Die Bilinearität ist klar. Antisymmetrie: Es gilt

$$\operatorname{res}_P(d(f \cdot g)) = \operatorname{res}_P(g \cdot df) + \operatorname{res}_P(f \cdot dg)\ .$$

Das Residuum des Differentials einer Funktion verschwindet. Somit gilt $\operatorname{res}_P(g \cdot df) = -\operatorname{res}_P(f \cdot dg)$. Wird über den geschlossenen Weg C_τ integriert folgt

$$\gamma(f, g) = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} f\, dg = -\frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} g\, df = -\gamma(g, f)\ .$$

Da $L\mathcal{F}^0(A)$ eine abelsche Liealgebra ist, ist (6-4) trivialerweise erfüllt. Somit ist $\gamma(..,..)$ ein $2-$Kozykel. Ein nichtverschwindender Kozykel einer abelschen Liealgebra kann nicht Korand sein. Wäre er Korand, so müßte er sich schreiben lassen als $\gamma(f, g) = \kappa([f, g])$ mit einer Linearform κ (6-6). Da aber $[f, g] = 0$, gilt $\gamma(f, g) = 0$, also verschwindet der Kozykel selbst. Da die Funktionen f und g Pole besitzen können, wird $\gamma(.., ..)$ nicht identisch verschwinden (siehe (6-34)). $\square$

Dieser $2-$Kozykel ergibt eine nichttriviale zentrale Erweiterung. In Verallgemeinerung von [KN2] definiere ich

Definition. *Die (verallgemeinerte) Heisenberg Algebra $\mathcal{H}$ ist die zentrale Erweiterung der Liealgebra $L\mathcal{F}^0(A)$ erzeugt von den Elementen*

$$\alpha_{n,p}, \quad n \in \mathbb{Z},\ p = 1, \dots, k, \quad \textit{und} \quad t;$$

mit dem Lieprodukt

$$[\alpha_{n,p}, \alpha_{m,r}] = \gamma(A_{n,p}, A_{m,r}) \cdot t \quad \textit{und} \quad [\alpha_{n,p}, t] = 0 \ . \tag{6-32}$$

Die $\alpha_{n,p}$ sind Lifts der $A_{n,p}$. In Bezug auf diese Basis erfüllte der Kozykel $\gamma(..,..)$ wiederum eine Lokalitätseigenschaft:

Proposition 6.10. *Es gibt eine Konstante S, so daß für alle (n, p) und (m, r) gilt*

$$\gamma(A_{n,p}, A_{m,r}) = 0, \quad \textit{für } n + m \geq 3 \quad \textit{oder} \quad n + m \leq S \leq 1 \ . \tag{6-33}$$

Die Konstante S hängt nur von k und l und vom Geschlecht g ab. An der oberen Grenze gilt

$$\gamma(A_{n,p}, A_{2-n,r}) = (1 - n) \cdot \delta_{p,r} \ . \tag{6-34}$$

Beweis. Sei $w = A_{n,p} \cdot d(A_{m,r})$, dann gilt an den Punkten $P_i \in I$

$$\text{ord}\ _{P_i}(w) = n + m - \delta_{i,p} - \delta_{i,r} - 1 \ . \tag{6-35}$$

Ist $n + m \geq 3$, sind alle Ordnungen ≥ 0, also verschwindet das Kurvenintegral. Im Fall $n{+}m = 2$ tritt nur ein Residuum auf, falls $i = p = r$ gilt. Als Residuum ergibt sich $(1{-}n)$ aufgrund der lokalen Berechnung. Um die Existenz von S zu zeigen, sind die Ordnungen von w an den Punkten $Q_i \in O$ zu untersuchen. Der entsprechende Beweisteil von Prop. 6.8, gilt modifiziert auch hier. Daß $S \leq 1$ sein muß, ergibt sich aufgrund des nichtverschwindenden Wertes (6-34). $\square$

Für $p \neq r$ kann man eine Stufe tiefer gehen und berechnen

$$\gamma(A_{n,p}, A_{1-n,r}) = (1 - 2n) \ . \tag{6-35a}$$

Die Schranke S in obiger Proposition kann bei Bedarf für alle Fälle konkret berechnet werden. Ich möchte wiederum nur ein Beispiel geben. Sei $k = l$ und entweder $g = 0$ oder $g \geq 1$ und weder n noch m seien Ausnahmewerten. Es berechnet sich

$$\text{ord}\ _{Q_i}(w) = -(n + m) - 1,\ i \neq l \qquad \text{ord}\ _{Q_l}(w) = -(n + m) + 1 - 2g \ .$$

Ist $k = 1$, so verschwindet der Kozykel für $n+m \leq -2g+1$. Für $k > 1$ muß gelten $n+m \leq \min(-1, -2g+1)$. Will man noch die Ausnahmewerte einbeziehen, so kann man dies wie folgt: Der "schlechteste" Fall ist der, wenn n und m beides Ausnahmewerte sind. In diesem Fall verschwindet der Kozykel erst für $n+m \leq -2g-1$. Somit ergibt sich

$$S = \begin{cases} 1, & g = 0, k = 1 \\ -1, & g = 0, k > 1 \\ -2g-1, & g \geq 1\ . \end{cases}$$

Für $k = l = 1$ wurden diese Schranken auch von Krichever und Novikov in [KN2,Formel 1.4] angegegeben (mit einem entsprechenden Indexshift).

Im Virasorofalle, d.h. $k = l = 1$ und $g = 0$ tritt nur ein nichtverschwindender Term auf

$$\gamma(A_n, A_{2-n}) = 1 - n.$$

Die einzigen nichtverschwindenden Kommutatoren lauten somit

$$[\alpha_n, \alpha_{2-n}] = (1-n) \cdot t\ .$$

Setze ich für $k > 0$

$$q_k = \alpha_{k+1}, \qquad p_k = \alpha_{-k+1} \quad \text{und} \quad p_0 = q_0 = \alpha_1, \tag{6-36}$$

so ergibt sich für $k, l \geq 0$

$$[q_k, q_l] = [p_k, p_l] = 0, \quad [q_k, p_k] = -k \cdot t, \quad [q_k, t] = [p_k, t] = 0\ . \tag{6-37}$$

Somit spezialisiert sich alles in diesem Fall auf die "übliche" Heisenberg Algebra, d.h. auf die Oszillatoralgebra mit unendlich vielen Freiheitsgraden.

(c) Die Algebra der Differentialoperatoren vom Grad ≤ 1

Es sei
$$\mathcal{D}^1(A) = \mathcal{KN}(A) \oplus L\mathcal{F}^0(A) \tag{6-38}$$
die direkte Summe der Vektorräume. Ich führe auf $\mathcal{D}^1(A)$ eine Liestruktur ein durch
$$[(e,g),(f,h)] = \big([e,f], L_e(h) - L_f(g)\big) \tag{6-39}$$
für $e, f \in \mathcal{KN}(A)$, $g, h \in \mathcal{F}^0(A)$ (semidirektes Produkt). Es ist $L_e(h)$ die Lieableitung (2-4) für Funktionen. Dies ist wegen $\lambda = 0$ das Anwenden der Derivation e auf h. Mit der lokalen Form $e(z)_| = a(z)\frac{\partial}{\partial z}$ somit
$$L_e(h)_|(z) = a(z)\frac{\partial h}{\partial z}\ .$$

Proposition 6.11. *$\mathcal{D}^1(A)$ ist eine Liealgebra, die $\mathcal{KN}(A)$ und $L\mathcal{F}^0(A)$ als Unteralgebren enthält. $L\mathcal{F}^0(A)$ ist ein Ideal und es gilt die kurze exakte Sequenz von Liealgebren*
$$0 \ \to \ L\mathcal{F}^0(A) \ \to \ \mathcal{D}^1(A) \ \to \ \mathcal{KN}(A) \ \to \ 0\ . \tag{6-40}$$

Beweis. Nachzuprüfen ist die Jacobi-Identität. Seien 3 Elemente (e_1,h_1), (e_2,h_2) und (e_3,h_3) gegeben, so berechnet sich
$$[[(e_1,h_1),(e_2,h_2)],(e_3,h_3)] = \\ \big([[e_1,e_2],e_3], L_{[e_1,e_2]}(h_3) - L_{e_3}(L_{e_1}(h_2) - L_{e_2}(h_1))\big)\ .$$
Die Jacobi-Identität auf der ersten Komponente ist erfüllt, da sie für $\mathcal{KN}(A)$ gilt. Mit
$$L_{[e_1,e_2]}(h_3) = L_{e_1}L_{e_2}(h_3) - L_{e_2}L_{e_1}(h_3),$$
ergibt sich für die zweite Komponente
$$L_{e_1}L_{e_2}(h_3) - L_{e_2}L_{e_1}(h_3) - L_{e_3}L_{e_1}(h_2) + L_{e_3}L_{e_2}(h_1)\ .$$
Summiert über alle zyklischen Vertauschungen ergibt sich 0. Somit ist $\mathcal{D}^1(A)$ eine Liealgebra. $\mathcal{KN}(A)$ und $L\mathcal{F}^0(A)$ sind offensichtlich Unteralgebren. Wegen (6-39) ist $L\mathcal{F}^0(A)$ sogar ein Ideal. Die kurze exakte Sequenz (6-40) ist somit klar. $\square$

Proposition 6.12. *$\mathcal{F}^\lambda(A)$ ist ein $\mathcal{D}^1(A)$ Liemodul mit der Operation*

$$(e,h)\,.\,f = L_e(f) + h\cdot f, \quad (e,h)\in\mathcal{D}^1(A),\ f\in\mathcal{F}^\lambda(A)\ . \tag{6-41}$$

($h\cdot f$ ist die Multiplikation der Form f mit der Funktion h.)

Beweis. Dies verifiziert man durch Nachrechnen. Es ist

$$[(e_1,h_1),(e_2,h_2)]\,.\,f = L_{[e_1,e_2]}(f) + L_{e_1}(h_2)\cdot f - L_{e_2}(h_1)\cdot f\ . \tag{6-42}$$

Andererseits

$$\begin{aligned}(e_1,h_1)\,.\,((e_2,h_2)\,.\,f) = (e_1,h_1)\,.\,(L_{e_2}(f)+h_2\cdot f) = \\ L_{e_1}L_{e_2}(f) + L_{e_1}(h_2\cdot f) + h_1\cdot L_{e_2}(f) + h_1h_2\cdot f\end{aligned} \tag{6-43}$$

Vertauscht man die Indices 1 und 2, so erhält man einen entsprechenden Ausdruck (6-43'). Für (6-42) – (6-43) +(6-43') ergibt sich

$$L_{e_1}(h_2)\cdot f - L_{e_2}(h_1)\cdot f - L_{e_1}(h_2\cdot f) - h_1\cdot L_{e_2}(f) + L_{e_2}(h_1\cdot f) + h_2\cdot L_{e_1}(f)\ . \tag{6-44}$$

Benutze ich nun das untenstehende Lemma 6.1 über die Derivationseigenschaft der Lieableitung, so folgt daß (6-44) verschwindet. Also gilt die Behauptung. □

Lemma 6.1. *Sei $f\in\mathcal{F}^\lambda(A)$, $h\in\mathcal{F}^\mu(A)$, $e\in\mathcal{KN}(A)$, so gilt*

$$L_e(f\otimes h) = L_e(f)\otimes h + f\otimes L_e(h)\ , \tag{6-45}$$

d.h. L_e ist eine Derivation in $\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}^\lambda(A)$, (aufgefaßt als Ring mit dem Tensorprodukt der Formen als Operation).

Beweis. Seien e,h,f identifiziert mit ihren lokalen Repräsentanten. Mit (2-4) gilt

$$\begin{aligned}L_e(f\cdot h) &= e\frac{\partial(f\cdot h)}{\partial z} + (\lambda+\mu)\,f\cdot h\frac{\partial e}{\partial z} \\ &= (e\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\,f\frac{\partial e}{\partial z})\cdot h + f\cdot(e\frac{\partial h}{\partial z} + \mu\,h\frac{\partial e}{\partial z})\ . \quad \Box\end{aligned}$$

Ich führe auf $\mathcal{D}^1(A)$ eine $\mathbb{Z}-$Graduierung ein. Die Elemente des Vektorraumes

$$\mathcal{D}^1{}_n(A) = \langle\ e_{n,p},\ p=1,\dots,k\ \rangle \oplus \langle\ A_{n-1,p},\ p=1,\dots,k\ \rangle \tag{6-46}$$

seien die homogenen Elemente vom Grad n. Auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$ hatte ich in (5-18) bereits eine Graduierung eingeführt.

Proposition 6.13. *Es gilt*

$$\mathcal{D}^1{}_n(A)\,.\,\mathcal{F}^\lambda_m(A) = \bigoplus_{h=n+m-2}^{n+m+P} \mathcal{F}^\lambda_h(A) \tag{6-47}$$

mit $P = \max(L, M-1)$. *Hierbei ist* L *die Konstante aus der Strukturgleichung (5-9) und* M *die Konstante aus der Strukturgleichung (6-23). Somit ist* $\mathcal{F}^\lambda(A)$ *ein verallgemeinert graduierter Modul über* $\mathcal{D}^1(A)$.

Der Beweis ergibt sich sofort aus den Aussagen in Theorem 5.1 bzw. Prop. 6.8 über die Erzeugenden.

Um "höhere Ableitungen " der Formen $\mathcal{F}^\lambda(A)$ zu bilden, mache ich folgende Konstruktion. Es sei $W := U\mathcal{D}^1(A)$ die universelle Einhüllende von $\mathcal{D}^1(A)$ [HiSt],[Hu]. Aufgrund deren Eigenschaften operiert W auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$. Nach dem Poincaré - Birkhoff - Witt Theorem wird sie von den aufsteigenden Ketten der Basiselemente von $\mathcal{D}^1(A)$ (nach einer beliebig vorgegebenen Ordnung) gebildet. Insbesondere ist in dieser Algebra das mehrmalige Anwenden der Lieableitung definiert. Diese Algebra enhält viele Elemente, die, aufgrund ihrer Aktion auf allen $\mathcal{F}^\lambda(A)$, nicht unterschieden werden können. So hat etwa $A_{n,p} \odot A_{m,r}$ ($\odot$ in W) nichts mit $A_{n,p} \cdot A_{m,r}$ ($\cdot$ in $\mathcal{F}^0(A)$) zu tun. Trotzdem operieren beide Elemente gleich auf allen $\mathcal{F}^\lambda(A)$. Ich bilde das (beidseitige) Ideal J in W erzeugt von den Elementen

$$a \odot b - a \cdot b, \quad \mathbb{1} - 1 \tag{6-48}$$

mit $1, a, b, \in \mathcal{F}^0(A)$ und $\mathbb{1}$ das Einselement in W. Ich setze

$$\mathcal{D}(A) = U\mathcal{D}^1(A)/J \tag{6-49}$$

und nenne $\mathcal{D}(A)$ die Algebra der kohärenten Differentialoperatoren auf X.

Proposition 6.14. $\mathcal{F}^\lambda(A)$ *ist ein Modul über der assoziativen Algebra* $\mathcal{D}(A)$

Beweis. Es ist zu zeigen, daß die Elemente

$$w \odot (a \odot b) \odot v - w \odot (a \cdot b) \odot v, \quad w \odot v - w \odot 1 \odot v$$

trivial auf $f \in \mathcal{F}^\lambda(A)$ operieren. Es sei $g = v\,.\,f \in \mathcal{F}^\lambda(A)$. Es ist

$$(a \odot b)\,.\,g = a \odot (b\,.\,g) = a\,.\,(b\,.\,g) = (a \cdot b)\,.\,g$$

und $1 \,.\, f = 1$. Damit folgt die Behauptung. $\square$

Es ist zu beachten, daß $a \odot e$ für e ein Vektorfeld, nicht durch $a \cdot e$ ersetzt werden kann, da (mit der Notation des Beweises) gilt

$$(a \odot e) \,.\, g = a \odot (L_e(g)) = a \cdot L_e(g) \ .$$

Andererseits jedoch

$$(a \cdot e) \,.\, g = L_{a \cdot e}(g) \neq a \cdot L_e(g) \ .$$

Wie man leicht durch lokales Nachrechnen verifiziert gilt nämlich

$$L_{a \cdot e}(g) = a \cdot L_e(g) + \lambda(L_e(a)) \cdot g \ . \tag{6-50}$$

Gleichheit herrscht lediglich für $\lambda = 0$.

Die üblichen (algebraischen) Differentialoperatoren $\mathcal{F}^\lambda(A) \to \mathcal{F}^\lambda(A)$ werden wie folgt definiert:

Definition. *Eine $\mathbb{C}-$lineare Abbildung $D : \mathcal{F}^\lambda(A) \to \mathcal{F}^\lambda(A)$ heißt Differentialoperator vom Grad $\leq n$ mit $n \geq 0$, falls gilt*
(a) ist $n = 0$, so ist $D = b$, die Multiplikation mit einer Funktion $b \in \mathcal{F}^0(A)$.
(b) ist $n > 0$, so gilt

$$[D, a] : \mathcal{F}^\lambda(A) \to \mathcal{F}^\lambda(A) \tag{6-51}$$

ist ein Differentialoperator vom Grad $\leq (n-1)$. Hierbei ist $a \in \mathcal{F}^0(A)$ und a ist aufzufassen als Multiplikationsoperator. $[..,..]$ ist der Kommutator der linearen Abbildungen.

Siehe [EGA, IV,16.8,16.11] und [BGG] zur Definition. Die Menge der Differentialoperatoren beliebigen Grades bilden eine Unteralgebra der Algebra $End\,\mathcal{F}^\lambda(A)$.

Sei $D \in \mathcal{D}(A)$. Dann besitzt D die Darstellung (in der universellen Algebra)

$$D = a_0 \odot e_1 \odot a_1 \odot e_2 \cdots a_{n-1} \odot e_n \odot a_n \tag{6-52}$$

mit $a_i \in \mathcal{F}^0(A)$ und $e_i \in \mathcal{KN}(A)$

Proposition 6.15. *Sei D wie in (6-52) gegeben. Dann operiert D in natürlicherweise durch die Lieableitung und Multiplikation mit Funktionen als Differentialoperator vom Grad $\leq n$ auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$.*

Beweis. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach der Anzahl Vektorfelder in der Darstellung von D. Ist $n = 0$, so gilt $D = a_0$. Somit ist D per Definition ein Differentialoperator vom Grad 0. Besitze nun D eine Darstellung mit n auftauchenden Termen wie in (6-52). $a \in \mathcal{F}^0(A)$ und
$f \in \mathcal{F}^\lambda(A)$ seien gegeben. Ich setze $g = a_n \cdot f$.

$$[a, D](f) = a \cdot a_0 \cdot L_{e_1} \cdots L_{e_n}(g) - a_0 \cdot L_{e_1} \cdots L_{e_n}(a \cdot g) \ . \tag{6-53}$$

Ich forme nun den 2. Term um. Es gilt

$$L_{e_n}(a \cdot g) = L_{e_n}(a) \cdot g + a \cdot L_{e_n}(g) \ .$$

$L_{e_n}(a)$ ist eine Funktion, d.h. der entsprechende Term im 2. Ausdruck (6-53) ist per Induktion ein Differentialoperator vom Grad $\leq (n-1)$. Den zweiten Term kann man nun durch sukzessives Anwenden obigen Schrittes und unter Abspalten von Operatoren vom Grad $\leq (n-1)$ in genau die Form des ersten Ausdruckes bringen. Somit heben sie sich auf. □

Natürlich enthält $\mathcal{D}(A)$ sehr viele verschiedene Elemente, welche identisch auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$ (bei festem λ) operieren. Da jede nichtvollständige Kurve (also auch $X \setminus A$) affin ist [Ha,p.297], gilt allerdings, daß $\mathcal{D}(A)$, aufgefaßt als Operatoren auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$ alle Differentialoperatoren darstellt [EGA],[BGG,p.27]. Da wir dies im folgenden nicht benützen, soll darauf nicht weiter eingegangen werden.

Statt $\mathcal{D}(A)$ kann man durch Quotientenbildung (in Abhängigkeit von λ) eine etwas kleinere Algebra erhalten. Hierzu dividiere ich durch das Ideal J_λ erzeugt von den Elementen (6-48) und

$$a \odot e - a \cdot e + \lambda L_e(a), \quad a \in \mathcal{F}^0(A),\ e \in \mathcal{KN}(A) \ . \tag{6-54}$$

Ich setze

$$\mathcal{D}_\lambda(A) = U\mathcal{D}^1(A)/J_\lambda \ . \tag{6-55}$$

Proposition 6.16. *$\mathcal{F}^\lambda(A)$ ist ein Modul über der assoziativen Algebra $\mathcal{D}_\lambda(A)$.*

Beweis. Die Notation sei dieselbe wie im Beweis von Prop. 6.14. Es gilt

$$(a \odot e) \,.\, g = a \cdot L_e(g) \ .$$

Andererseits

$$(a \cdot e) \,.\, g = L_{a \cdot e}(g) = a \cdot L_e(g) + \lambda L_e(a) \cdot g.$$

Somit operiert auch das erzeugende Element (6-54) trivial auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$. □

Selbstverständlich faktorisiert die Abbildung $\mathcal{D}(A)$ nach den Differentialoperatoren auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$ über $\mathcal{D}_\lambda(A)$.

Ich komme nun zu den zentralen Erweiterungen von $\mathcal{D}^1(A)$. Der Kozykel χ von $\mathcal{KN}(A)$ (6-9),(6-11) definiert einen Kozykel χ^* auf $\mathcal{D}^1(A)$ durch die Festsetzung

$$\chi^*\big((e_1,h_1),(e_2,h_2)\big) = \chi(e_1,e_2)\ . \tag{6-56}$$

Da nur die erste Komponente beteiligt ist, gilt die Kozykeleigenschaft trivialerweise. (χ^* ist der Pullback von χ unter (6-40).)

Proposition 6.17. *Die Festsetzung*

$$\gamma^*\big((e_1,h_1),(e_2,h_2)\big) = \gamma(h_1,h_2) \tag{6-57}$$

mit dem Kozykel γ der Algebra $\mathcal{F}^0(A)$ gegegen in (6-31) definiert einen Kozykel von $\mathcal{D}^1(A)$.

Beweis. Die Antisymmetrie ist klar. Zu zeigen ist lediglich die Kozykeleigenschaft. Zur Vereinfachung der Notation identifiziere ich $(e,0)$ mit e und $(0,h)$ mit h. Aufgrund der Linearität genügt es die Kozykeleigenschaft

$$\gamma^*([a,b],c) + \gamma^*([b,c],a) + \gamma^*([c,a],b) = 0 \tag{6-58}$$

mit Elementen vom "reinem Typ" Vektorfeld bzw. Funktion zu zeigen. Sind alle 3 Elemente Vektorfelder, so verschwindet jeder Term in (6-58). Sind alle 3 Elemente Funktionen, so gilt (6-58) wegen der Kozykeleigenschaft von γ. Sind a und b Vektorfelder , c eine Funktion, so ist $[a,b]$ ein Vektorfeld, d.h. die Terme in (6-58) verschwinden einzeln. Zu untersuchen bleibt lediglich der Fall a ein Vektorfeld und b und c Funktionen. Die linke Seite von (6-58) ergibt

$$\gamma(L_a(b),c) + \gamma(-L_a(c),b)\ .$$

Die Behauptung ist also gezeigt, falls gilt

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} L_a(b)\,dc = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} L_a(c)\,db\ .$$

Nun ist

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} L_a(b)\,dc = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} L_a(b\,dc) - \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} b\,L_a(dc)$$

Wegen des untenstehenden Lemma 6.2(a) verschwindet das erste Integral auf der rechten Seite. Die Lieableitung vertauscht mit der äußeren Ableitung (Lemma 6.2(c)) und es folgt mit der Antisymmetrie des Kozykels

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} L_a(b)dc = -\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} b\,d\,L_a(c) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} L_a(c)db\ . \quad \square$$

Lemma 6.2. *(a) Sei $w \in \mathcal{F}^1(A)$, $e \in \mathcal{KN}(A)$, dann gilt für alle $P \in X$*

$$res_P(L_e(w)) = 0; \quad \textit{also auch} \quad \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C_\tau} L_e(w) = 0 \ . \tag{6-59}$$

(b) Sei $f \in \mathcal{F}^\lambda(A)$, $h \in \mathcal{F}^{1-\lambda}(A)$, $e \in \mathcal{KN}(A)$, dann gilt

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C_\tau} h \cdot L_e(f) = -\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C_\tau} L_e(h) \cdot f \ . \tag{6-60}$$

(c) Sei $f \in \mathcal{F}^0(A)$, $e \in \mathcal{KN}(A)$, d die äußere Ableitung, dann gilt

$$L_e(df) = d(L_e(f)) \ . \tag{6-61}$$

Beweis. Es gilt [AM]

$$L_e(w) = i_e(dw) + d(i_e w) \ . \tag{6-62}$$

Hierbei ist i_e das innere Produkt, also $i_e\alpha(..,....) = \alpha(e,....)$. Für holomorphe Formen gilt $dw = 0$. Somit ist $L_e(w) = d(w(e))$, also das Differential einer meromorphen Funktion, besitzt somit kein Residuum. Will man (6-62) nicht benutzen, kann man (6-59 auch in lokalen Koordinaten ausrechnen.
Die Form $h \cdot f$ ist eine $1-$Form. Mit Lemma 6.1 gilt

$$L_e(h \cdot f) = L_e(h) \cdot f + h \cdot L_e(f) \ .$$

Nach (a) verschwindet bei der Integration über C_τ das Integral. Es folgt (b).
(c) ist ebenfalls eine wohlbekannte Tatsache über die Lieableitung von Differentialformen [AM]. Auch hier kann man (6-61) einfach durch eine lokale Rechnung verifizieren. □

Damit haben obige Kozykel auf $\mathcal{KN}(A)$, bzw. auf $\mathcal{F}^0(A)$ eine Fortsetzung. Natürlich sind sie linear unabhängig. Statt χ^*, bzw. γ^* werde ich im folgenden einfach auch χ, bzw. γ für die fortgesetzten Kozykel benutzen. Daneben gibt es aber noch einen weiteren linear unabhängigen Kozykel. Dieser verbindet $\mathcal{KN}(A)$ mit $\mathcal{F}^0(A)$. Hierzu verallgemeinere ich den im Virasoro Fall in [ACKP] angegebenen Kozykel. Um die dortige lokale Definition koordinatenunabhängig zu machen muß ich zuerst das folgende Objekt einführen. Sei (z_α) ein System von Koordinaten für X, $z_\beta = h(z_\alpha)$ ein Koordinatenwechsel. Desweiteren sei $T_\alpha(z_\alpha)$ ein System von lokalen meromorphen Funktionen. T nenne ich einen affinen Zusammenhang, falls gilt

$$T_\beta(z_\beta) = T_\alpha(z_\alpha) \cdot (h')^{-1} + \frac{h''}{(h')^2} \ . \tag{6-63}$$

Hierbei bedeutet $'$ die Ableitung nach z_α. Falls $h''=0$ ist, d.h. falls ein affiner Koordinatenwechsel vorliegt, transformiert sich T wie ein Differential. Aufgrund (6-63) ergibt sich, daß die Differenz zweier affiner Zusammenhänge ein (meromorphes) Differential definiert. Anders formuliert: Ausgehend von einem affinen Zusammenhang, erhält man alle Zusammenhänge, indem man beliebige Differentiale addiert. Die Existenz von globalen holomorphen affinen Zusammenhängen für beliebiges Geschlecht wird man nicht erwarten können. Es gilt jedoch die folgende Proposition die ich weiter unten beweisen werde.

Proposition 6.18. *Es gibt einen meromorphen affinen Zusammenhang auf X der holomorph auf $X \setminus \{Q_l\}$ ist und bei Q_l höchstens einen Pol 1. Ordnung hat.*

Proposition 6.19. *(a) Sei $e=(e,0),\ t=(0,t)\in\mathcal{D}^1(A)$, $e=f\frac{\partial}{\partial z}$ eine lokale Darstellung, dann definiert*

$$\beta(e,h)=-\beta(h,e)=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau}(ft''+T\cdot ft')dz\ . \tag{6-64}$$

mit der Festlegung, daß β sowohl auf $\mathcal{KN}(A)$ als auch auf $\mathcal{F}^0(A)$ verschwindet, einen Kozykel auf $\mathcal{D}^1(A)$. Hierbei bedeutet $'$ in (6-64) die Ableitung nach der lokalen Variablen z.
(b) Die Kohomologieklasse von β ist unabhängig vom gewählten affinen Zusammenhang T.

Beweis. (a) 1. Damit die Definition überhaupt Sinn macht muß sie unabhängig von der Variablen z und von der Wahl des $\tau-$Parameters der Kurve C_τ sein. Zu zeigen ist also, daß der Integrand in $\mathcal{F}^1(A)$ liegt. Hierzu seien Koordinaten wie oben gegeben. Ich gehe analog zu Prop. 6.2 vor. Es gilt
($'$ bezeichne die Ableitung nach z_α)

$$f_\beta(z_\alpha)=h'(z_\alpha)\cdot f_\alpha(z_\alpha),\quad dz_\beta=h'(z_\alpha)\,dz_\alpha$$
$$\frac{\partial t}{\partial z_\beta}(z_\alpha)=\frac{\partial t}{\partial z_\alpha}(z_\alpha)\cdot(h')^{-1}(z_\alpha)$$
$$\frac{\partial^2 t}{\partial z_\beta^2}(z_\alpha)=\frac{\partial^2 t}{\partial z_\alpha^2}(z_\alpha)\cdot(h')^{-2}(z_\alpha)-\frac{\partial t}{\partial z_\alpha}(z_\alpha)\cdot(h')^{-3}(z_\alpha)\cdot h''(z_\alpha)\ .$$

Schreiben wir den Integranden in der Variablen z_β und machen obige Ersetzungen, so erhalten wir

$$h'f_\alpha(t''(h')^{-2}-t'h''(h')^{-3})h'dz_\alpha+\big(T_\alpha(h')^{-1}+h''(h')^{-2}\big)f_\alpha h'(h')^{-1}t'h'dz_\alpha$$
$$=f_\alpha t''dz_\alpha+T_\alpha\cdot f_\alpha t'dz_\alpha\ ,$$

also in der Tat ein wohldefinierte Differential. Da Pole nur an Punkten aus A auftreten, folgt daß der Integrand in $\mathcal{F}^1(A)$ liegt.
2. Die Antisymmetrie ist klar aufgrund der Festlegung. Es bleibt die Kozykeleigenschaft zu zeigen. Die Notation sei wie im Beweis zu Prop. 6.17. Sind a, b, c alle vom selben Typ, so verschwindet der Kozykel trivialerweise. Sei a ein Vektorfeld, b und c Funktionen, so verschwinden alle Terme separat. Es bleibt der Fall a und b Vektorfelder und c eine Funktion. Ich zeige, daß die Residuen an jedem Punkt verschwinden. Hierzu rechne ich in der lokalen Darstellung. Es gilt

$$[a,b] = a \cdot b' - b \cdot a', \quad [a,c] = a \cdot c', \quad [b,c] = b \cdot c' \ .$$

Ich betrachte zuerst den Term bei T. Direktes Rechnen liefert

$$(ab' - ba')c' - a(bc')' + b(ac')' = 0 \ .$$

Somit verschwindet die Summe über alle 3 zyklischen Vertauschungen. Für die Summe über den ersten Term unter dem Integral erhalte ich

$$(ab' - ba')c'' - a(bc')'' + b(ac')'' = (-ab'c' + a'bc')' \ .$$

Damit ist diese das Differential einer meromorphen Funktion, das Residuum verschwindet, also auch das Integral.

(b) Sei T^* ein zweiter affiner Zusammenhang, dann ist $w_| = (T - T^*)dz$ ein meromorphes Differential. Es gilt

$$\begin{aligned}\beta_T(e,h) - \beta_{T^*}(e,h) &= \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} w \cdot (f \cdot t') = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} w \cdot L_e(h) \\ &= \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} w \cdot [e,h] = \psi([e,h])\end{aligned}$$

mit der Linearform

$$\psi : \mathcal{D}^1(A) \to \mathbb{C}, \quad (f,g) \mapsto \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} w \cdot g, \ f \in \mathcal{KN}(A), \ g \in \mathcal{F}^0(A) \ . \quad \square$$

Proposition 6.20. *Sei T ein affiner Zusammenhang der von der Art ist, wie in Prop. 6.18. Dann gilt: (a) Es gibt eine Konstante S_β, so daß für alle (n,p) und (m,r) gilt*

$$\beta(e_{n,p}, A_{m,r}) = 0, \quad \textit{für } n+m \geq 4 \quad \textit{oder} \quad n+m \leq S_\beta \ . \tag{6-65}$$

Die Konstante S_β hängt nur vom Geschlecht g, von k und l ab.
(b) An der oberen Grenze gilt

$$\beta(e_{n,p}, A_{3-n,r}) = (2-n)(1-n) \cdot \delta_{p,r} \ . \tag{6-66}$$

Beweis. Der Beweis ist vollkommen analog zu den entsprechenden Beweisen für die Kozykel χ (Prop. 6.5) und γ (Prop. 6.10), so daß ich mich kurz fassen kann. Für $P_i \in I$ gilt für den Integranden ω

$$\text{ord}_{P_i}(\omega) \geq n+m-2-\delta_{i,p}-\delta_{i,r} \ .$$

(Da $\text{ord}_{P_i}(T) \geq 0$ ist, hat der zweite Term keinen Einfluß.) Also verschwinden für $(n+m) \geq 4$ alle Residuen an den Punkten aus I. Somit ebenfalls das Kurvenintegral. Die Abschätzung nach unten gewinnt man durch analoge Betrachtungen an den Punkten aus O. Ein möglicher Pole von T an Q_l ist von 1.Ordnung stört also nicht.
Im Grenzfall $n+m=3$ tritt nur ein Residuum auf, falls $p=r$ gilt. Dieses liegt am Punkt P_p und es ergibt sich der Ausdruck (6-66). $\square$

Auch hier kann man für $p \neq r$ den Wert des Kozykels "eine Stufe tiefer" entsprechend ausrechnen

$$\beta(e_{n,p}, A_{2-n,r}) = 2(1-n)^2, \quad \text{für } \ p \neq r \ . \tag{6-67}$$

Im Virasoro Fall spezialisiert sich der Kozykel genau zu dem in [ACKP] angegebenem.

Mit diesen 3 linear unabhängigen Kozykeln kann man eine zentrale Erweiterungen konstruieren mit 3-dimensionalen Zentrum:

$$\widetilde{\mathcal{D}}^1(A) = \mathcal{D}^1(A) \oplus \mathbb{C}^3 \ .$$

Die Algebrenstruktur ist konkret gegeben durch
$(v_1, v_2 \in \mathbb{C}^3, t_1 = (1,0,0), t_2 = (0,1,0), t_3 = (0,0,1) \in \mathbb{C}^3)$

$$[((e_1,h_1),v_1),((e_2,h_2),v_2)] = \tag{6-68}$$
$$([(e_1,h_1),(e_2,h_2)], c_\chi \chi(e_1,e_2)t_1 + c_\gamma \gamma(h_1,h_2)t_2 + c_\beta(\beta(e_1,h_2)-\beta(e_2,h_1))t_3 \ .$$

Hierbei sind $c_\chi, c_\gamma, c_\beta$ Konstanten. Im Virasoro Fall wurde in [ACKP,S.14] $\dim H^2(\mathcal{D}^1(\{0,\infty\}) = 3$ gezeigt. Der Raum wird somit von diesen 3 Kozykeln erzeugt. Also definiert für $c_\chi \cdot c_\gamma \cdot c_\beta \neq 0$ (6-68) die universelle zentrale Erweiterung. Will man eine zentrale Erweiterung haben mit eindimensionalem Zentrum, so erhält man diese durch Faktorisieren nach dem Ideal erzeugt von

$$t_1 - r_2 t_2, \quad t_1 - r_3 t_3, \qquad r_2, r_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \ .$$

Es bleibt Prop.6.18 zu zeigen, d.h. die Existenz eines affinen Zusammenhanges mit höchstens einem Pol. Seien (U_α, z_α), $\alpha \in J$ ein System von Kartenumgebungen. $z_\beta = h(z_\alpha)$ sei der Kartenwechsel der falls $U_\beta \cap U_\alpha \neq \emptyset$ definiert ist. Ich definiere die folgende Übergangsmatrix

$$C_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} (h')^{-1} & (h'')(h')^{-2} \\ & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{6-69}$$

Hierbei bezeichne $'$ die Ableitung nach z_α.
Offensichtlich ist $C_{\beta\alpha} \in GL(\mathcal{O}(U_\beta \cap U_\alpha))$.

Proposition 6.21. *$C_{\beta\alpha}$ definiert einen Kozykel vom Rang 2 auf X und somit ein Rang 2 Vektorbündel $\mathcal{E}$.*

Beweis. Zu zeigen ist lediglich die Kozykeleigenschaft auf $C_\alpha \cap C_\beta \cap C_\gamma \neq \emptyset$

$$C_{\gamma\alpha} = C_{\gamma\beta} \cdot C_{\beta\alpha} \ .$$

Es sei $z_\gamma = g(z_\beta)$, also $z_\gamma = k(z_\alpha) = (g \circ h)(z_\alpha)$. * bezeichne die Ableitung nach z_β. Es gilt

$$C_{\gamma\beta} \cdot C_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} (g^*)^{-1} \cdot (h')^{-1} & (g^*)^{-1}(h'')(h')^{-1} + (g^{**})(g^*)^{-2} \\ & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Offensichtlich ist $k' = g^* \cdot h'$. Es bleibt lediglich das Element $(1,2)$ zu untersuchen. Es gilt

$$k'' = (g^* \cdot h')' = g^{**}(h')^2 + g^* h'',$$

also stimmen auch die Elemente $(1,2)$ überein. $\square$

Ist v ein globaler holomorpher Schnitt, so kann er lokal durch ein Paar von holomorphen Funktionen $v_\alpha = {}^t(s_{\alpha,1}, s_{\alpha,2})$ mit $s_{\alpha,1}, s_{\alpha,2} \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ repräsentiert werden. Die v_α transfomieren sich als

$$v_\beta = C_{\beta\alpha} \cdot v_\alpha,$$

$$(s_{\beta,1}, s_{\beta,2}) = \left(s_{\alpha,1} \cdot (h')^{-1} + \frac{h''}{(h')^2} \cdot s_{\alpha,2} \ , \ s_{\alpha,2} \right) . \tag{6-70}$$

Verschwindet die zweite Komponente nicht identisch, so transfomiert sich der Quotient

$$t_\alpha = \frac{s_{\alpha,1}}{s_{\alpha,2}} \tag{6-71}$$

wie ein meromorpher affiner Zusammenhang.

Aufgrund des Kozykels (6-69) erhält man eine kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln

$$0 \;\to\; K \;\to\; \mathcal{E} \;\to\; \mathcal{O} \;\to\; 0 \tag{6-72}$$

(K das kanonische Bündel, $\mathcal{O}$ das triviale Bündel). Schnitte in K sind auch Schnitte in $\mathcal{E}$. Sie entsprechen den Schnitten mit verschwindender zweiter Komponente. Sei $P \in O$ ein festgewählter Punkt. L_P das zugeordnete Punktbündel, d.h. das Bündel welches genau einen linear unabhängigen Schnitt s_P hat. Dieser hat eine Nullstelle bei P (siehe [Schl1,p.105]). Ist $\mathcal{W}$ ein Vektorbündel und w ein holomorpher Schnitt in $\mathcal{W} \otimes L_P$, so definiert w/s_P einen Schnitt über $X \setminus \{P\}$ in das Bündel $\mathcal{W}$, für den die lokalen Komponentenfunktionen bei P einen Pol von höchstens 1. Ordnung bei P haben. Tensorieren wir (6-72) mit L_P, und gehen wir zur langen Kohomologiesequenz über, so erhalten wir nach Anwendung der Serre-Dualität

$$0 \to H^0(X, K \otimes L_P) \to H^0(X, \mathcal{E} \otimes L_P) \to H^0(X, L_P) \to H^0(X, L_P^*) \to \tag{6-73}$$

Es ist $H^0(X, L_P^*) = 0$ und $\dim H^0(X, L_P) = 1$, also

$$\dim H^0(X, \mathcal{E} \otimes L_P) = 1 + \dim H^0(X, K \otimes L_P) = 1 + \dim H^0(X, K) = 1 + g\ . \tag{6-74}$$

Insbesondere gibt es immer einen meromorphen Schnitt v in $\mathcal{E}$, dessen 2. Komponente (in den lokalen Repräsentanten) nicht identisch verschwindet. Sei $(s_{\alpha,2})_\alpha$ die Kollektion der zweiten Komponenten von v. (6-69) besagt, daß die s_β und s_α auf $U_\alpha \cap U_\beta$ übereinstimmen, also eine globale meromorphe Funktion s mit $s_{|U_\alpha} = s_\alpha$ definieren. Die Funktion s hat höchstens einen Pol 1. Ordnung bei P und ist sonst holomorph. Wir bilden nun (t_α) wie in (6-71) definiert. Mögliche Polstellen sind der Punkt P und die Nullstellen der Funktion s. Für $g \geq 1$ muß s allerdings konstant sein, das es keine Funktion mit totaler Polordnung 1 gibt. In diesem Fall sind wir somit fertig. Für $g = 0$ kann s durchaus nichttrivial sein. Ist s nichtkonstant, so hat s genau an einem einzigen Punkt Q eine Nullstelle. Diese ist von erster Ordnung. Der affine Zusammenhang hat somit höchstens Pole bei P und Q. Ist nun T ein meromorpher affiner Zusammenhang und ω ein meromorphes Differential, so ist $T+\omega$ ebenfalls ein meromorpher affiner Zusammenhang. Durch Subtraktion eines meromorphen Differential mit Polen 1. Ordnung bei P und Q kann der Pol von T am Punkt Q beseitigt werden, ohne die Polordnung 1 am Punkt P zu erhöhen. Dies zeigt Prop. 6.18. $\square$

Für $\mathbb{P}^1$ kann in Bezug auf die Standardkoordinaten $(z, w = 1/z)$ ein affiner Zusammenhang explizit angegeben werden

$$T = (t_\alpha, t_\beta) = (\ 0\ , \frac{2}{w}\ )\ .$$

Mit obigen Methoden kann man für $g \geq 2$ auch die Existenz eines holomorphen projektiven Zusammenhanges zeigen. Dies sei kurz angedeutet. Die Notation sei wie oben

$$D_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} (h')^{-2} & \dfrac{h'''}{(h')^3} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{h''}{(h')^2}\right)^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6-75}$$

erfüllt ebenfalls die Kozykelbedingung, wie man durch Nachrechnen verifiziert. Somit wird ebenfalls ein Rang 2 Vektorbündel gegeben. Aufgrund der Gestalt (6-75) folgt die exakte Sequenz

$$0\ \to\ K^2\ \to\ \mathcal{F}\ \to\ \mathcal{O}\ \to\ 0\ . \tag{6-76}$$

Die lange Kohomologiesequenz bricht ebenfalls ab nach der 0. Stufe:

$$0 \to H^0(X, K^2) \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{O}) \to H^0(X, K^*) = 0 \tag{6-77}$$

und wir können weiter wie oben schließen.

§ 7. Semi-infinite Formen und die Wedge-Darstellung

(a) Die Konstruktion der Darstellung für $\mathcal{KN}(A)$

Das Ziel in diesem Paragraphen ist es, die Aktion von $\mathcal{KN}(A)$ auf die Formen vom Gewicht λ (d.h. auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$) zu einer Aktion auf den semi-infiniten Formen zu erweitern. Diese Technik wurde im Fall der Virasoro Algebra (ist ein Spezialfall der hier betrachteten Situation) benutzt um Darstellungen mit gewissen Eigenschaften (mathematischer und physikalischer Natur) zu erhalten. Es handelt sich hierbei um sogenannte Höchstgewichtsdarstellungen, bzw. Verma Darstellungen (7-32). Siehe hierzu auch [KaP],[FF] und [KaR]. Es wird sich auch hier zeigen, daß es ebenso wie dort notwendig ist zu einer lokalen zentralen Erweiterung $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$ überzugehen. In § 7.(d) werde ich die entsprechenden Konstruktionen auch für die Heisenberg-Algebra bzw. die Algebra der Differentialoperatoren vom Grad ≤ 1 ausführen.

Sei $\mathcal{F}^\lambda(A)$ der Krichever - Novikov Modul vom Gewicht λ. Der Vektorraum $\mathcal{H}^\lambda(A)$ der semi-infiniten Wedgeprodukte vom Gewicht λ ist der Vektorraum erzeugt von den formalen Elementen

$$\psi = f_{i_1,p_1} \wedge f_{i_2,p_2} \wedge \cdots f_{m,1} \wedge f_{m,2} \cdots \wedge f_{m+1,1} \wedge \cdots \ . \tag{7-1}$$

Hierbei sind die $f_{n,p} = f_{n,p}(\lambda)$ die Basiselemente, wie sie in § 5. eingeführt wurden. Die Multiindices seien in strikt aufsteigender lexikographischer Ordnung angeordnet. Desweiteren sei gefordert, daß, beginnend mit einem Index (m,p) (darf von ψ abhängen), alle Indices (m',p') mit $(m',p') > (m,p)$ auftreten. Siehe etwa [KaR] zu dieser Definition. (Warnung: Dieses Wedgeprodukt hat nichts mit dem Wedgeprodukt der Differentialformen zu tun.) Die Definition von $\mathcal{H}^\lambda(A)$ hängt ab von der Basis welche in $\mathcal{F}^\lambda(A)$ gewählt wurde. Insbesondere hängt sie also von der Aufteilung $A = I \cup O$ ab.

Ich möchte nun die Aktion von $e_{n,p}$ auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$, d.h. die Lieableitung, auf $\mathcal{H}^\lambda(A)$ übertragen. Hierzu versuche ich zuerst die naive Definition, daß $e_{n,p}$ auf jedem Faktor separat wirken soll und alle solche Terme addiert werden (Leibniz-Regel).

$$\begin{aligned} e_{n,p} \,.\, \psi := & (e_{n,p} \,.\, f_{i_1,p_1}) \wedge f_{i_2,p_2} \wedge \cdots \\ & + f_{i_1,p_1} \wedge (e_{n,p} \,.\, f_{i_2,p_2}) \wedge \cdots \\ & + f_{i_1,p_1} \wedge f_{i_2,p_2} \wedge \cdots \ . \end{aligned} \tag{7-2}$$

Das Symbol $\wedge$ zeigt nun an, wie die rechte Seite umzuformen ist, so daß eine Linearkombination von Elementen (7-1) dort steht. Seien v und w endliche

Nachbarstücke, ψ ein unendliches Nachbarstück, i ein Multiindex und $c_i \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$v \wedge f_j \wedge w \wedge f_i \wedge \psi := -v \wedge f_i \wedge w \wedge f_j \wedge \psi, \quad j > i \tag{7-3}$$
$$v \wedge f_i \wedge w \wedge f_i \wedge \psi := 0 \tag{7-4}$$
$$v \wedge \left(\sum_{i=1}^{r} c_i f_i\right) \wedge \psi := \sum_{i=1}^{r} c_i \left(v \wedge f_i \wedge \psi\right) \ . \tag{7-5}$$

Die Definition (7-2) macht allerdings nur dann Sinn, falls auf der rechten Seite nur endlich viele Summanden auftauchen. Um zu zeigen, daß dies i. Allg. nicht der Fall ist, führe ich das später benötigte Basiselement ($T \in \mathbb{Z}$)

$$\Phi_T = f_{T,1} \wedge f_{T,2} \cdots \wedge f_{T+1,1} \cdots \tag{7-6}$$

ein, in welchem alle Indices $\geq (T,1)$ erscheinen. Ich nenne Φ_T den Vakuumvektor vom Niveau T (und Gewicht λ). Aufgrund der Strukturgleichung (5-9) gilt

$$e_{2,p} \,.\, f_{m,r} = (m - 1 + \lambda)\delta_{p,r} f_{m,p} + \sum_{h>m} \sum_{s} C_{\cdot\cdot}^{\cdot\cdot} f_{h,s} \ . \tag{7-7}$$

Ist nun (h,s) ein Index auf der rechten Seite, der in Φ_T auftritt und gilt $(h,s) \neq (m,r)$, so verschwindet dieser Summand in (7-2), da $f_{h,s}$ durch seine Nachbarterme annulliert wird. Es taucht also nur ein einziger nichtverschwindender Term auf, nämlich derjenige, der von $f_{m,r}$ herrührt. Als Summanden in (7-2) erhalten wir $(m - 1 + \lambda)\Phi_T$ für alle $m \geq T$. Insbesondere sind es unendlich viele. An diesem Negativbeispiel erkennt man allerdings schon welche $e_{n,p}$ keine Probleme machen. Ich setze

$$\begin{aligned} \mathcal{KN}^+(A) &= \langle e_{n,p} \mid n \geq 3,\ p = 1, \ldots, k\rangle \\ \mathcal{KN}^-(A) &= \langle e_{n,p} \mid n \leq -1 - L,\ p = 1, \ldots, k\rangle \ . \end{aligned} \tag{7-8}$$

Proposition 7.1. *(a) $\mathcal{KN}^+(A)$ und $\mathcal{KN}^-(A)$ sind Unteralgebren von $\mathcal{KN}(A)$.*

(b) Für diese Unteralgebren ist die Aktion (7-2) auf $\mathcal{H}^\lambda(A)$ wohldefiniert. Sie macht $\mathcal{H}^\lambda(A)$ zu einem Liealgebrenmodul über diese Unteralgebren.

Beweis. Sei $e_{n,p} \in \mathcal{KN}^+(A)$, dann treten aufgrund (7-7) im Ergebnis von $e_{n,p} \,.\, f_{m,r}(\lambda)$ nur Elemente $f_{h,s}(\lambda)$ mit $h \geq m + n - 2 \geq m + 1$ auf. Nimmt man $e_{n,p} \in \mathcal{KN}^-(A)$, so erhält man für h die Schranken

$$n + m - 2 \leq h \leq n + m + L \leq (m - 1) \ . \tag{7-9}$$

Wählt man für $f_{m,r}$ nun Elemente aus $\mathcal{KN}^+(A)$ bzw. $\mathcal{KN}^-(A)$ selbst, so zeigen obige Abschätzungen sofort, daß die Ergebnisse wieder in $\mathcal{KN}^+(A)$, bzw. $\mathcal{KN}^-(A)$ liegen. Dies zeigt die Behauptung (a). Sei nun ψ wie in (7-1) gegeben. $(m_0, 1)$ sei der Index ab dem alle Indices auftreten. Für $e_{n,p} \in \mathcal{KN}^+(A)$ wird $e_{n,p} \, . \, f_{m,r}(\lambda)$ für $m \geq m_0$ von den nachfolgenden $f_{h,s}$ im Wedgeprodukt ausgelöscht. Somit treten nur endlich viele Summanden in (7-2) auf. Die Aktion ist also wohldefiniert. Sei $e_{n,p} \in \mathcal{KN}^-(A)$. Ist $m \geq m_0 + 2 - n$, dann gilt wegen (7-9)

$$m - 1 \geq h \geq n + m - 2 \geq m_0 \ .$$

Somit werden alle Terme von $e_{n,p} \, . \, f_{m,r}(\lambda)$ durch benachbarte Elemente in ψ annulliert. Also ist auch hier die Aktion wohldefiniert. Es handelt sich hierbei um eine Liealgebrenaktion. Seien e und h in $\mathcal{KN}^+(A)$, bzw. in $\mathcal{KN}^-(A)$, dann ergibt sich daß in $e \, . \, (h \, . \, \psi) - h \, . \, (e \, . \, \psi)$ nur Terme auftreten, die von der Aktion von $[e, h]$ auf jeden Faktor im Wedgeprodukt herkommen. Die Terme, bei denen e und h auf verschiedenen Faktoren operieren, heben sich auf. Somit überträgt sich die Liemoduleigenschaft von $\mathcal{F}^\lambda(A)$ auf $\mathcal{H}^\lambda(A)$. $\square$

Ich habe somit die Zerlegung als (Vektorraum-) direkte Summe

$$\mathcal{KN}(A) = KN^-(A) \oplus \langle e_{n,r} \mid -L \leq n \leq 2, \ r = 1, \ldots, p \rangle \oplus KN^+(A) \ . \tag{7-10}$$

Die Aktion obiger Unteralgebren auf $\mathcal{H}^\lambda(A)$ kann zu einer Aktion einer zentralen Erweiterung $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$ von $\mathcal{KN}(A)$ fortgesetzt werden. Hier geht wesentlich ein, daß $\mathcal{F}^\lambda(A)$ ein verallgemeinert graduierter Modul ist mit der Graduierung induziert durch die Basiswahl, welche auch benutzt wurde zur Konstruktion von $\mathcal{H}^\lambda(A)$. Ich formuliere zuerst das wesentliche Resultat. Dies werde ich in § 7.(b), unter Benutzung von unendlichen Matrizenalgebren durch eine Verallgemeinerung der Methode wie sie in [KaR] für den Virasoro Fall dargestellt wird, zeigen. In § 7.(c) gebe ich noch eine zweite Methode an, um zum selben Resultat zu kommen. Sie arbeitet mit "Potenzreihenregularisierung" nach einer Idee von R. Weissauer. Im wesentlichen ist sie äquivalent zur ersten Methode. Sie liefert bis auf kohomologe Abänderung dieselbe zentrale Erweiterung, benützt jedoch nicht den "Umweg" über die Matrizenalgebren. Allerdings muß ich hier die Konvergenz einer gewissen Potenzreihen, in der Strukturkonstanten auftauchen, voraussetzen. Die Gültigkeit dieser Voraussetzung konnte ich bisher nur im Fall $g = 0$ (mit N beliebig) zeigen.

Proposition 7.2. *Es gibt eine zentrale Erweiterung* $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$

$$\phi : \widehat{\mathcal{KN}}(A) \to \mathcal{KN}(A) \ ,$$

Lifts $E_{n,p}$ *der Basiselemente* $e_{n,p}$ *und eine Liealgebrenaktion von* $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$ *auf* $\mathcal{H}^\lambda(A)$, *derart daß die folgenden Eigenschaften gelten* ($\psi \in \mathcal{H}^\lambda(A)$).

(a) Für $e_{n,p} \in \mathcal{KN}^+(A) \oplus \mathcal{KN}^-(A)$ *gilt*

$$op(e_{n,p})(\psi) := E_{n,p} \,.\, \psi = e_{n,p} \,.\, \psi \ . \tag{7-11}$$

(b) Im kritischen Bereich $-L \leq n \leq 2$ *gilt für Basiselemente* ψ

$$op(e_{n,p})(\psi) := E_{n,p} \,.\, \psi = e_{n,p} \odot \psi + r(n,p,\psi) \cdot \psi \ . \tag{7-12}$$

Hierbei erhält man $e_{n,p} \odot \psi$ *durch Ignorieren von Vielfachen von* ψ *auf der rechten Seite von (7-2). Die Zahl* $r(n,p,\psi) \in \mathbb{C}$ *ist durch die Konstruktionen in § 7.(b), bzw. § 7.(c) festgelegt.*

(c) Für das zentrale Basiselement t *gilt*

$$t \,.\, \psi = id(\psi) = \psi \ . \tag{7-13}$$

(d)

$$E_{2,p} \,.\, \Phi_0 \ = \ 0, \quad p = 1, \ldots, k \ . \tag{7-14}$$

(e) Der $2-$*Kozykel* χ, *welcher die Erweiterung definiert, ist lokal.*

Ich möchte hier zuerst einige Bemerkungen zur Proposition machen.
(1) Ist $e_{n,p} \in \mathcal{KN}^+(A)$, bzw. $\in \mathcal{KN}^-(A)$ und ψ ein Basiselement, so gilt daß $e_{n,p} \,.\, \psi$ überhaupt keine Vielfache von ψ enthalten kann. Um dies zu sehen seien die Basiselemente (7-1) lexikographisch geordnet. Seien ψ_j die auftretenden Basiselemente in $e_{n,p} \,.\, \psi$, dann gilt $\psi_j > \psi$ falls $e_{n,p} \in \mathcal{KN}^+(A)$, bzw. $\psi_j < \psi$ falls $e_{n,p} \in \mathcal{KN}^-(A)$. Insbesondere gilt für solche $e_{n,p}$

$$op(e_{n,p})(\psi) = E_{n,p} \,.\, \psi = e_{n,p} \,.\, \psi = e_{n,p} \odot \psi \ . \tag{7-15}$$

Wie man sofort nachrechnet gilt also

$$E_{n,p} \,.\, \Phi_T = 0 \qquad \text{für} \quad n \geq 3 \ . \tag{7-16}$$

(2) Die Aussage (7-14) ergibt sich aufgrund einer speziellen Wahl einer (linearen) Splittingabbildung $\mathcal{KN}(A) \to \widehat{\mathcal{KN}}(A)$, d.h. durch Wahl eines speziellen

Liftes $E_{2,p}$. Wählen wir statt $E_{2,p}$ als Lift $E'_{2,p} = E_{2,p} + \alpha \cdot t$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$, so gilt $E'_{2,p} \cdot \Phi_0 = \alpha \cdot \Phi_0$, ohne daß die anderen Eigenschaften beeinflußt werden. Davon werde ich weiter unten Gebrauch machen.
Durch Anwendung von (7-12) rechnet man sofort nach

$$E_{2,p} \,.\, \Phi_T = h(T,p) \cdot \Phi_T \tag{7-17}$$

mit einer geigneten Konstante $h(T,p) \in \mathbb{C}$. Diese ist abhängig vom jeweils gewählten α.
(3) Statt t kann aber auch $t' = \alpha t$ für $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ als zentrales Basiselement verwendet werden. Insbesondere kann auch (7-13) verändert werden zu $t' \,.\, \psi = \alpha \cdot \psi$.
(4) Da der Kozykel ein lokaler Kozykel ist, kann er, falls die Vermutung 6.1 gilt, wie in (6-14) gegeben werden, nachdem man ihn bei Bedarf in Abhängigkeit von λ kohomolog abgeändert hat. Insbesondere erhalten wir den Ausdruck (6-19) für die Kozykel spezieller Elemente.

Die Form (6-19) kann ich allerdings auch, lediglich unter Zuhilfenahme der Eigenschaften von Prop. 7.2, zeigen. Dies werde ich im folgenden tun.

Die wohldefinierte Liealgebra-Aktion von $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$ auf $\mathcal{H}^\lambda(A)$ erzwingt

$$[\, op(e_{n,p}), op(e_{m,r}) \,] = op([\, e_{n,p}, e_{m,r} \,]) + \chi(e_{n,p}, e_{m,r}) \cdot id \,. \tag{7-18}$$

Der Kozykel $\chi(e_{n,p}, e_{m,r})$ kann somit berechnet werden mit Hilfe von

$$([\, op(e_{n,p}), op(e_{m,r}) \,] - op([\, e_{n,p}, e_{m,r} \,]))\,(\Phi_0) = \chi(e_{n,p}, e_{m,r})\ \Phi_0 \,. \tag{7-19}$$

Zur Berechnung benutze ich für $i > 0$

$$[\, e_{2-i,p}, e_{2+i,r} \,] = 2i\delta_{p,r} e_{2,p} + \sum_{h\geq 3} \sum_{s} C_{\cdots}^{\cdots} e_{h,s} \,. \tag{7-20}$$

Nach (7-16) gilt für $h \geq 3$ $e_{h,s} \,.\, \Phi_T = 0$. Desweiteren gilt wegen (7-12) $e_{2,p} \odot \Phi_0 = 0$. Somit operiert in (7-19) der 2. Term auf der linken Seite trivial auf Φ_0 falls (7-19) für die Elemente in (7-20) angesetzt wird. Es bleibt

$$\chi(e_{2-i,p}, e_{2+i,r}) \cdot \Phi_0 = -op(e_{2+i,r})(op(e_{2-i,p})(\Phi_0)) = -e_{2+i,r} \,.\, (e_{2-i,p} \odot \Phi_0) \,. \tag{7-21}$$

Für das letzte "=" beachte man, daß $op(e_{2+i,r})$ die "normale" Aktion ist und diese Vielfache von Φ_0, die in $op(e_{2-i,p})(\Phi_0)$ auftreten können, annulliert. Ich berechne nun die rechte Seite von (7-21). Zur späteren Verwendung rechne ich vorläufig statt mit Φ_0 allgemeiner mit Φ_T. Es gilt

$$e_{2-i,p} \,.\, f_{m,s} = ((m-1) + \lambda(1-i))\, f_{m-i,p}\delta_{p,s} + \text{ höhere Glieder } .$$

$e_{2-i,p} \odot \Phi_T$ besteht somit aus endlich vielen Termen, die sich ergeben aus den Zerlegungen von $e_{2-i,p} \,.\, f_{m,s}$ für $T \le m \le T+i-1$. Für größere m werden entweder alle Ergebnisterme annulliert durch Nachbarelemente oder tragen nur als Vielfache von Φ_T bei. Wendet man $e_{2+i,r}$ auf die nichtverschwindenden Teile an, so gilt

$$e_{2+i,r} \,.\, f_{m-i,p} = ((m-i-1) + \lambda(1+i))\, f_{m,r}\delta_{p,r} + \text{ höhere Glieder } .$$

Übrig bleibt

$$\begin{aligned} & e_{2+i,r} \,.\, (e_{2-i,p} \odot \Phi_T) \\ = & \left(\sum_{m=T}^{T+i-1} \big((m-1) + \lambda(1-i)\big)\big((m-i-1) + \lambda(1+i)\big) \right) \delta_{p,r} \cdot \Phi_T \ . \end{aligned} \tag{7-22}$$

Alle anderen Zwischenterme werden durch die Aktion von $e_{2+i,r}$ annulliert, wie man etwa durch Nachrechnen verifizieren kann. Man kann dies allerdings auch direkt sehen, da wegen (7-18) nur Vielfache von Φ_T auftreten können und diese Kombination die einzig mögliche ist.

Spezialisieren wir in (7-22) $T = 0$, ergibt sich durch direktes Ausrechnen als Kozykel

$$\begin{aligned} \chi(e_{2-i,p}, e_{2+i,r}) &= \left(\sum_{m=0}^{i-1} \big((m-1) + \lambda(1-i)\big)\big((m-i-1) + \lambda(1+i)\big) \right) \delta_{p,r} \\ &= -i \cdot \left(\frac{(i-1)(2i-1)}{6} + \frac{1}{2}(i-1)(-i+2\lambda-2) + \right. \\ &\quad \left. (i+1) + \lambda(i^2-i-2) + \lambda^2(1-i^2) \right) \cdot \delta_{p,r} \ . \end{aligned}$$

Dieser Kozykel hängt von λ ab. Die Festlegung der Operation der $E_{n,p}$ auf Φ_0 im kritischen Bereich für n und der Operation des zentralen Elementes t, wie sie oben gemacht wurden, war in gewissen Grenzen willkürlich. Mein Ziel ist es durch Umdefinition der Aktion obigen Kozykel von λ unabhängig zu machen. Dies bedeutet nichts anderes als für alle Gewichte λ einen kohärenten

Lift $E_{n,p}$ für $e_{n,p}$ zu wählen. Diese Umnormierung kann gegeben werden durch Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$, die von λ abhängen dürfen. Es gilt dann

$$\chi(e_{2-i,p}, e_{2+i,r})\Phi_0 = (2i\delta_{p,r}(E_{2,p} + a(\lambda)t) \,.\, \Phi_0 + \chi^*(e_{2-i,p}, e_{2+i,r})b(\lambda)\Phi_0 \;. \tag{7-23}$$

Bei gegebenem a und b kann der neue Kozykel $\chi^*(..,..)$ berechnet werden. Mein Ziel ist es $a(\lambda)$ und $b(\lambda)$ so zu bestimmen, daß $\chi^*(..,..)$ angewendet auf obige spezielle Basiselemente von λ unabhängig wird. Aus (7-23) folgt für $p \neq r$ ebenfalls $\chi^*(e_{2-i,p}, e_{2+i,r}) = 0$. Sei also $p = r$. Ich mache den Ansatz

$$a(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2, \quad b(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2,$$
$$\chi^*(e_{2-i,p}, e_{2+i,p}) = c_0 + c_1 i + c_2 i^2 + c_3 i^3$$

und führe Koeffizientenvergleich durch. Es berechnet sich $c_0 = c_2 = 0$. Mit der (willkürlichen) Normierung $b_2 = -12$ ergibt sich weiter $b_0 = -2$, $b_1 = 12$, $c_3 = -\frac{1}{12}$. Der Kozykel berechnet sich also zu $-\frac{1}{12}i^3 + c_0 i$. c_0 ist ein frei verfügbarer Parameter. Wie in § 6. ausgeführt, bedeutet der lineare Term lediglich die Verschiebung innerhalb der Kozykelklasse. In Übereinstimmung mit der üblichen Normierung im Virasoro Falle wähle ich $c_0 = \frac{1}{12}$. Damit gilt notwendigerweise $a_0 = -1$, $a_1 = 1$ und $a_2 = 0$. Als Kozykel ergibt sich somit

$$\chi^*(e_{2-i,p}, e_{2+i,r}) = -\frac{1}{12}(i^3 - i) \cdot \delta_{p,r} \;. \tag{7-24}$$

Eine Probe zeigt, daß diese Werte tatsächlich (7-23) lösen. Die transformierten Elemente lauten

$$E^*_{2,p} = E_{2,p} + (\lambda - 1) \cdot t \quad \text{und} \quad t^* = -2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1) \cdot t \;. \tag{7-25}$$

Das Polynom $6x^2 - 6x + 1$ hat keine rationalzahlige Nullstellen. Damit definiert (7-25) eine Basistransformation. Diese Elemente operieren auf Φ_0 wie folgt

$$E^*_{2,p} \,.\, \Phi_0 = h_\lambda(0,p) \cdot \Phi_0 = (\lambda - 1)\Phi_0$$
$$t^* \,.\, \Phi_0 = c_\lambda \cdot \Phi_0 = -2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1)\Phi_0 \;.$$

Im folgenden seien diese Transformationen vorgenommen. Da nur noch diese Elemente auftreten, lasse ich * in der Bezeichnung weg.

Ich möchte nun die Aktion von $E_{2,p}$ auf Φ_T berechnen. Es sei

$$\begin{aligned} E_{2,p} \,.\, \Phi_T &= h_\lambda(T,p) \cdot \Phi_T \\ t \,.\, \Phi_T &= c_\lambda \cdot \Phi_T \;. \end{aligned} \tag{7-26}$$

Hierzu sei wieder

$$[\,E_{2-i,p},E_{2+i,p}\,]\,.\,\Phi_T=(2ih_\lambda(T,p)+\chi(e_{2-i,p},e_{2+i,p})c_\lambda)\cdot\Phi_T\ . \tag{7-27}$$

Im Fall $i=1$ gilt $\chi(e_{1,p},e_{3,p})=0$. Somit berechnet sich mit (7-22)

$$-\big((T-1)+0\lambda\big)\big((T-2)+2\lambda\big)=2h_\lambda(T,p),$$

also

$$h_\lambda(T,p)=-\frac{1}{2}(T-1)(T-2+2\lambda)\ .$$

c_λ besitzt natürlich den oben schon berechneten Wert. Wir können diesen noch einmal berechnen, ohne obige Rechnung zu benutzen (genauer: wir benutzen nur den Kozykel in der Form (7-24) wie er schon in (6-19) angegeben wurde).[13] Hierzu müssen wir noch den Fall $i=2$ in (7-22) ausführen. Es gilt

$$\begin{aligned}-(T-1-\lambda)(T-3+3\lambda)-(T-\lambda)(T-2+3\lambda)\\ =-2h_\lambda(T,p)-\frac{1}{12}(2^3-2)c_\lambda\ .\end{aligned}$$

Durch direktes Rechnen ergibt sich wiederum $c_\lambda=-2(6\lambda^2-6\lambda+1)$.

Ich fasse zusammen

Theorem 7.1. *Die Aktion von $\mathcal{KN}(A)$ auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$ kann zu einer Aktion einer zentralen Erweiterung $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$ auf dem Raum der semi-infiniten Wedgeprodukte $\mathcal{H}^\lambda(A)$ transferiert werden. Wird der Kozykel χ der zentralen Erweiterung so normiert, daß er für die Paare von Basiselemente $(e_{2-i,p},e_{2+i,r})$ von λ unabhängig ist und sich zum Virasoro Kozykel spezialisiert, so gilt für die Operation auf dem Vakuumvektor Φ_T vom Niveau T und Gewicht λ*

$$E_{n,p}\,.\,\Phi_T=0\qquad n\geq 3 \tag{7-28}$$

$$E_{2,p}\,.\,\Phi_T=h_\lambda(p,T)\cdot\Phi_T=-\frac{1}{2}(T-1)(T-2+2\lambda)\Phi_T \tag{7-29}$$

$$t\,.\,\Phi_T=c_\lambda\cdot\Phi_T=-2(6\lambda^2-6\lambda+1)\Phi_T\ . \tag{7-30}$$

Hierbei sind die $E_{n,p}$ die wie oben angegebenen Lifts der Basiselemente $e_{n,p}$ von $\mathcal{KN}(A)$ und t ist das (entsprechend normierte) zentrale Element von $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$.

[13] Bei Richtigkeit der Vermutung 6.1 können wir diese Form z.Bsp. sofort annehmen.

Sei $\mathcal{H}^\lambda{}_T(A)$ der von dem Vakuumvektor Φ_T über $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$ erzeugte Untermodul von $\mathcal{H}^\lambda(A)$. Dieser Modul wird als Vektorraum erzeugt von den Elementen ($\Phi = \Phi_T$)

$$w = E_{n_1,p_1} \,.\, E_{n_2,p_2} \ldots E_{n_r,p_r} \,.\, \Phi \tag{7-31}$$

mit

$$(n_1, p_1) \le (n_2, p_2) \le (n_r, p_r) < (2, 1) \;.$$

Dies werde ich gleich im allgemeinerem Rahmen zeigen. Zuerst möchte ich jedoch in Anlehnung zum Virasoro Fall [KaR], bzw. $N = 2$ Fall [KN1] Verma Darstellungen definieren.

Definition. *Eine Darstellung von $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$, die erzeugt wird von einem Element Φ, derart, daß die Elemente gebildet wie in (7-31) eine Basis des Darstellungsraumes bilden und daß weiter gilt*

$$\begin{aligned} E_{n,p} \,.\, \Phi &= 0, \qquad n \ge 3,\; p = 1, \ldots, k, \\ E_{2,p} \,.\, \Phi &= h(p)\Phi, \quad p = 1, \ldots, k \\ t \,.\, \Phi &= c\, \Phi \end{aligned} \tag{7-32}$$

heißt Verma Darstellung (oder Verma Modul) mit den Gewichten

$$(c, h(1), h(2), \ldots, h(k)) \in \mathbb{C}^{k+1} \;.$$

Sie wird mit $M(c, h(1), h(2), \ldots, h(k))$ bezeichnet. Der Wert c wird auch zentrale Ladung der Darstellung genannt.

Proposition 7.3. *Zu jedem Gewicht $(c, h(1), \ldots, h(k)) \in \mathbb{C}^{k+1}$ existiert eine Verma Darstellung.*

Beweis. (Analog zu [KaR] im Virasoro Fall). Sei $U := U(\widehat{\mathcal{KN}}(A))$ die universelle einhüllende Algebra von $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$, $\mathbb{1}$ das Einselement in U, J das Linksideal erzeugt von den Elementen.

$$E_{n,p},\; n \ge 3,\; p = 1, \ldots, k, \quad E_{2,p} - h(p) \cdot \mathbb{1},\; p = 1, \ldots k, \quad t - c \cdot \mathbb{1} \,.$$

Wir bilden den Quotienten

$$M := M(c, h(1), h(2), \ldots, h(k)) := U/J \;. \tag{7-33}$$

Dann operiert $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$ auf M durch Linksmultiplikation. Diese Operation ist eine Liealgebrendarstellung. Setzen wir $\Phi = \mathbb{1} \bmod J$, so sind die Relationen

(7-32) offensichtlich erfüllt und die Darstellung wird von Φ erzeugt. Wir führen auf den Basiselementen von $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$ wie üblich die lexikographische Ordnung für $E_{n,p}$ ein mit der Zusatzvorschrift

$$(2,k) < \operatorname{ord}(t) < (3,1) \ .$$

Nach dem Poincaré-Birkhoff-Witt Satz [HiSt],[Hu] wird die Basis von U durch aufsteigende Ketten der Basiselemente gebildet. Eine Basis von J ist gegeben durch die Ketten die mit $E_{n,p},\ n \geq 3$ enden, sowie durch die Differenzen

$$w \cdot E_{2,p} - h(p)\, w, \quad w \cdot t - c\, w \ .$$

Hierbei ist w eine aufsteigende Kette, deren größter Index $\leq\ (2,p)$, bzw. $\leq\ \operatorname{ord}(t)$ ist. Damit ist aber eine Basis des (Vektorraum-) Komplementes gegeben durch die aufsteigenden Ketten deren größtes Element $<\ (2,1)$ ist. Insbesondere bilden diese Ketten $\mod J$ eine Basis von M. $\square$

Eine Darstellung von $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$ auf ${\mathcal{H}^\lambda}_T(A)$ setzt sich fort zu einer Darstellung von $U(\widehat{\mathcal{KN}}(A))$ auf ${\mathcal{H}^\lambda}_T(A)$. Wegen (7-28) bis (7-30) faktorisiert diese über

$$M(c_\lambda, h_\lambda(T,1), \ldots, h_\lambda(T,k)) \ \rightarrow\ {\mathcal{H}^\lambda}_T(A)$$

mit der Fixierung $\Phi \rightarrow \Phi_T$. Insbesondere ist ${\mathcal{H}^\lambda}_T(A)$ Quotient einer Verma Darstellung. Solche Quotienten seien wiederum (in Analogie zum Virasoro Falle) Höchstgewichtsdarstellungen genannt. Die Wedge-Darstellungen enthalten somit als Untermodule Höchstgewichtsdarstellungen der Krichever - Novikov Algebra. Da allerdings

$$h_\lambda(T,1) = h_\lambda(T,2) = \ldots = h_\lambda(T,k)$$

gilt, wird man mit dieser einfachen Konstruktion nicht alle erhalten können.

Analog zu den rechts semi-infiniten Formen kann man auch links semi-infinite Formen einführen. Hierzu machen wir $\mathcal{F}^\lambda(A)$ zu einem Rechts-Modul durch

$$f(\lambda)\,.\,e := -e\,.\,f(\lambda), \quad f \in \mathcal{F}^\lambda(A),\ e \in \mathcal{KN}(A)\ . \tag{7-34}$$

Dann gilt nämlich

$$(f\,.\,e)\,.\,g - (f\,.\,g)\,.\,e = g\,.\,(e\,.\,f) - e\,.\,(g\,.\,f) = [g,e]\,.\,f = f\,.\,[e,g]\ .$$

Die links semi-infiniten Formen sind Linearkombinationen von Basiselementen

$$\dots f_{m-1,1} \wedge \dots f_{m,1} \wedge f_{m,2} \dots \wedge f_{(i_2)} \wedge f_{(i_1)} \ .$$

Hierbei bezeichne (i_k) ein Doppelindex. Die Elemente $f_{(i_k)}$ seien lexikographisch geordnet und bis zu einem endlichen Indexwert treten alle auf.

Wiederum ist die (Rechts-)Aktion von $\mathcal{KN}^+(A)$, bzw $\mathcal{KN}^-(A)$ wohldefiniert und kann "fortgesetzt" werden zu einer Aktion einer zentralen Erweiterung $\widehat{\mathcal{KN}}$ auf den links semi-infiniten Formen. Allerdings muß statt des Kozykels α (siehe (7-55)) der Kozykel $-\alpha$ gewählt werden, da in die andere Richtung zu "regularisieren" ist. Im Vorgriff auf § 7.(b) setzen wir statt (7-64) für die Aktion der Matrizen

$$\check{r}(E_{ii}) = r(E_{ii}) - id, \quad i \leq -1 \ .$$

Dies entspricht noch einer zusätzlichen kohomologischen Abänderung des Kozykels. Dadurch erhält man isomorphe zentrale Erweiterungen von $\mathcal{KN}(A)$. Dieser Isomorphismus sei

$$h : \widehat{\mathcal{KN}}_r(A) \to \widehat{\mathcal{KN}}_l(A)$$

(r (l) bezeichne die Erweiterung auf die Rechts-(Links)formen). Auf $\mathcal{KN}^+(A)$ und $\mathcal{KN}^-(A)$ ist er die Identität. $\mathcal{H}^\lambda{}_+(A)$ bezeichne die rechts semi-infinite Formen, $\mathcal{H}^\lambda{}_-(A)$ bezeichne die links semi-infinite Formen. In der Physik benötigt man zur Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten Paarungen dieser Darstellungsräume. Folgende zwei Möglichkeiten einer Paarung möchte ich erwähnen.

1. Sei ψ ein Basiselement aus $\mathcal{H}^\lambda{}_+(A)$ und ϕ ein Basiselement aus $\mathcal{H}^\lambda{}_-(A)$. Wir bilden (formal) das beidseitig unendliche Wedgeprodukt $\phi \wedge \psi$. Tauchen nicht alle $f_{n,p}$ auf, oder tauchen manche mehrfach auf, so setzen wir $\langle \phi, \psi \rangle = 0$, ansonsten setzen wir

$$\langle \phi, \psi \rangle = sign(\sigma), \tag{7-35}$$

wobei σ die (endliche) Permutation ist, welche benötigt wird, um die vollständige Ordnung aller Elemente in $\phi \wedge \psi$ zu erhalten. Der Rest erfolgt durch lineare Fortsetzung.

2. Eine natürlichere Paarung besteht in einer Paarung von $\mathcal{H}_-^{1-\lambda}(A)$ mit $\mathcal{H}^\lambda{}_+(A)$. Hierbei sei bei der Konstruktion der Linksformen die Ordnungsrelation im zweiten Indexargument derart gewählt, daß $(m,p) < (m,p')$ für $p > p'$. Seien die jeweiligen Basiselemente gegeben durch (mit vorgeschriebener

ansteigender oder absteigender Indizierung)

$$\psi = f_{(j_1)}(\lambda) \wedge f_{(j_2)}(\lambda) \ldots \wedge f_{(j_k)}(\lambda) \ldots$$
$$\phi = \ldots \wedge f_{(i_k)}(1-\lambda) \wedge \ldots f_{(i_2)}(1-\lambda) \wedge f_{(i_1)}(1-\lambda) \ .$$

Wir setzen

$$\langle \phi, \psi \rangle = \prod_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} f_{(i_k)}(1-\lambda) \cdot f_{(j_k)}(\lambda) \ . \qquad \text{(7-36)}$$

Der Rest erfolgt durch lineare Fortsetzung. Aufgrund der Dualität (5-6) tauchen jeweils nur Faktoren 0 oder 1 auf.
Seien $f_{n,p}(\lambda)$ und $f_{m,r}(1-\lambda)$ gegeben. Mit der Derivationseigenschaft der Lieableitung gilt

$$L_e\big(f_{n,p}(\lambda) \cdot f_{m,r}(1-\lambda)\big) = L_e\big(f_{n,p}(\lambda)\big) \cdot f_{m,r}(1-\lambda) + f_{n,p}(\lambda) \cdot L_e\big(f_{m,r}(1-\lambda)\big) \ .$$

Da das Residuum der Lieableitung eines Differentials verschwindet (siehe (6-59)) folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} f_{m,r}(1-\lambda) \cdot \big(e \,.\, f_{n,p}(\lambda)\big) &= -\frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} \big(e \,.\, f_{m,r}(1-\lambda)\big) \cdot f_{n,p}(\lambda) \\ &= \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} \big(f_{m,r}(1-\lambda) \,.\, e\big) \cdot f_{n,p}(\lambda) \ . \qquad \text{(7-37)} \end{aligned}$$

Damit gilt aber für $e \in \mathcal{KN}^+(A)$ oder $e \in \mathcal{KN}^-(A)$

$$\langle \phi, e \,.\, \psi \rangle = \langle \phi \,.\, e, \psi \rangle \ ,$$

d.h. die Operationen von $E_{n,p}$ mit $n > 2$ oder $n < -L$ sind unter dieser Paarung selbstadjungiert, also

$$\langle \phi, E_{n,p} \,.\, \psi \rangle = \langle \phi \,.\, E_{n,p}, \psi \rangle \ . \qquad \text{(7-38)}$$

Das duale Element zum Vakuumvektor Φ_T ist gegeben durch

$$\Phi_T^* = \ldots \wedge f_{-T,1}(1-\lambda) \wedge \ldots f_{1-T,2}(1-\lambda) \wedge f_{1-T,1}(1-\lambda) \ . \qquad \text{(7-39)}$$

Für dieses gilt $(p = 1, \ldots, k)$

$$\begin{aligned} \Phi_T^* \,.\, E_{n,p} &= 0, \qquad n < -L, \\ \Phi_T^* \,.\, E_{-L,p} &= h_{1-\lambda}^-(p,T)\, \Phi_T^*, \\ \Phi_T^* \,.\, t &= c_{1-\lambda}^-\, \Phi_T^* \ . \end{aligned} \qquad \text{(7-40)}$$

Diese Werte können genauso wie für die rechts semi-infiniten Formen berechnet werden. Ist t_- für die Linksformen derart gewählt, daß gilt $t_- = h(t_+)$, so gilt

$$c_{1-\lambda}^- = c_{1-\lambda} = c_\lambda \ .$$

Eine genauere Analyse zeigt

Proposition 7.4. *Die Elemente $E_{n,p}$ sind unter der Paarung (7-36) selbstadjungiert, d.h. es gilt*

$$\langle \Psi, E_{n,p} \,.\, \Phi \rangle = \langle \Psi \,.\, h(E_{n,p}), \Phi \rangle \ . \tag{7-41}$$

Der Beweis verwendet an einigen Stellen Methoden aus den folgenden Abschnitten. Ich möchte ihn allerdings schon hier ausführen.

Beweis. Aufgrund (7-37) gilt die Gleichheit (7-41) falls die Aktion $e_{n,p}\odot$ statt der Aktion $E_{n,p}\,. = op(e_{n,p})$ verwendet wird. Der Unterschied beider Aktionen besteht im Ignorieren der Vielfachen von $f_{m,r}$ im Produkt $e_{n,p} \,.\, f_{m,r}$. Dies bedeutet, daß in der Matrizendarstellung in § 7(b) $A_0(\mu)$ ignoriert wird. ($A_0(\mu)$ jeweils analog zu (7-71) gebildet.) Seien Φ und Ψ gegeben und seien w und y endliche Teilstücke gleicher Länge, derart daß in

$$\Phi = w \wedge \Phi_1, \qquad \Psi_1 \wedge y = \Psi$$

die Elemente Φ_1 und Ψ_1 gleichförmig ansteigende, bzw. fallende Indices haben. Entsprechend (7-81) gilt

$$\begin{aligned} E_{n,p} \,.\, \Phi &= (e_{n,p} \,.\, w) \wedge \Phi_1 + w \wedge E_{n,p} \,.\, \Phi, \\ \Psi \,.\, h(E_{n,p}) &= \Psi_1 \,.\, h(E_n, p) \wedge y + \Psi_1 \wedge (y \,.\, e_{n,p}) \ . \end{aligned}$$

Somit also

$$\langle \Psi, E_{n,p} \,.\, \Phi \rangle = \langle y, e_{n,p} \,.\, w \rangle \cdot \langle \Psi_1, \Phi_1 \rangle + \langle y, w \rangle \cdot \langle \Psi_1, E_{n,p} \,.\, \Phi_1 \rangle \ .$$

Analog ergibt sich

$$\langle \Psi \,.\, h(E_{n,p}), \Phi \rangle = \langle y \,.\, e_{n,p}, w \rangle \cdot \langle \Psi_1, \Phi_1 \rangle + \langle y, w \rangle \cdot \langle \Psi_1 \,.\, h(E_{n,p}), \Phi_1 \rangle \ .$$

Hierbei ist das Skalarprodukt auf den endlichen Abschnitten, analog zu (7-36) definiert. Auf den endlichen Teilen liegt Selbstadjungiertheit vor. Gilt sie auch auf den Ψ_1, bzw. Φ_1 Teilen, so gilt sie allgemein. Es genügt deshalb diese auf solchen Elementen zu zeigen. Bezeichne $A_0(\mu)$ die entsprechende Matrix für die Aktion auf den Rechtsformen, $A_0^*(\mu^*)$ die Matrix für die Aktion auf den Linksformen. Die Elemente μ und μ^* werden gebildet aus den Strukturkonstanten. Für das folgende benötigen wir die Dualität

$$C^{(m,r)}_{(n,p),(m,r)}(\lambda) = -C^{(1-m,r)}_{(n,p),(1-m,r)}(1-\lambda) \tag{7-42}$$

die sich nach (7-37) berechnet. Das Minuszeichen wird von der Rechtsaktion aufgenommen. Es seien sowohl Ψ_s als auch Φ_t Elemente mit gleichförmigen Indexdifferenzen. Die Proposition ist gezeigt, falls die folgende Behauptung gezeigt ist

$$\langle \Psi_s \check{r}(A_0^*(\mu^*)), \Phi_t \rangle = \langle \Psi_s, r(A_0(\mu))\Phi_t \rangle \ . \tag{7-43}$$

Beide beteiligten Operatoren operieren als Multiplikationsoperatoren. (7-43) gilt somit sicherlich, falls Ψ_s nicht dual zu Φ_t ist, da in diesem Fall beide Seiten verschwinden. Im folgenden können wir also $\Phi_t = \Phi_T$ und $\Psi_s = \Phi_T^*$ annehmen und den entsprechenden Multiplikator ausrechnen. Dies werden wir jetzt tun. Es ist zu beachten, daß der Kozykel α von § 7(b) kohomolog abgeändert wurde durch (7-25). Es gilt

$$\hat{r}(E_{ii}) = r(E_{ii}) - id, \quad i \geq k$$

und damit

$$\hat{r}(A_0(\mu))\Phi_t = \begin{cases} \sum_{r=t}^{k-1} \mu_r \Phi_t, & t < k \\ -\sum_{r=k}^{t-1} \mu_r \Phi_t, & t \geq k \ . \end{cases} \tag{7-44}$$

$$\check{\Psi}_s \check{r}(A_0^*(\mu^*)) = \begin{cases} \sum_{r=k}^{s} \Psi_s \mu_r^*, & s \geq k \\ -\sum_{r=s+1}^{k-1} \Psi_s \mu_r^*, & t \geq k \ . \end{cases} \tag{7-45}$$

O.B.d.A. sei $k = 1$ (für $k > 1$ wird lediglich die Indizierung etwas aufwendiger). Dann gilt wegen (7-42)

$$\mu_n = \mu_{1-n}^*, \qquad \text{(allgemein } \mu_n = \mu_{(2k-1)-n}^*\text{)}$$

und wegen der Dualität $s = 1 - t$.
Sei $t < 1$, damit gilt $s \geq 1$ und für die jeweiligen Multiplikatoren gilt

$$\sum_{r=t}^{0} \mu_r = \sum_{r=t}^{0} \mu_{1-r}^* = \sum_{r=1}^{s} \mu_r^* \ .$$

Damit sind die Multiplikationsfaktoren gleich. Im Fall $t \geq 1$ schließt man genauso mit den zweiten Formeln. $\square$

(b) Ein Hilfsmittel: $\boldsymbol{gl}\,(\infty)$

In diesem Abschnitt zeige ich die Proposition 7.2 mit Hilfe unendlicher Matrizenalgebren. Hierbei handelt es sich im wesentlichen um eine Verallgemeinerung der Methoden wie sie für den Fall der Virasoro Algebra von Kac und Raina in [KaR] dargestellt wurden. Sie wurden unabhängig voneinander von Kac und Peterson [KaP] und Date, Jimbo, Kashiwara und Miwa [DJKM] im Jahre 1981 entwickelt. Siehe hierzu auch [Ver]. Ich führe zuerst die folgenden unendlichen Matrizen, bzw. Matrizenalgebren ein. $mat(\infty)$ sei der Vektorraum aller (beidseitig) unendlichen komplexen Matrizen

$$A = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}\ , \qquad a_{ij} \in \mathbb{C}\ . \tag{7-46}$$

Gegeben seien weiter die Unterräume

$$gl(\infty) = \{\ A = (a_{ij})\ |\ \ a_{ij} = 0 \ \text{ fast immer }\ \} \tag{7-47}$$

$$\overline{gl}(\infty) = \{\ A = (a_{ij})\ |\ \text{ es gibt ein } r \text{ so daß } a_{ij} = 0 \ \text{ falls } |i-j| > r\ \} \tag{7-48}$$

Die Matrizen in $gl(\infty)$ haben "endlichen Träger", die Matrizen in $\overline{gl}(\infty)$ haben nur endlich viele "Diagonalen" (r in der Definition darf von Matrix zu Matrix variieren).[14] Führen wir die Elementarmatrizen

$$E_{kl} = (\delta_{i,k}\cdot\delta_{l,j})_{i,j\in\mathbb{Z}} \tag{7-49}$$

ein, so sehen wir sofort, daß diese eine Basis von $gl(\infty)$ bilden.
Ist $A = (a_{ij}) \in gl(\infty)$ so gilt

$$A = \sum_{i,j} a_{ij}E_{ij} \tag{7-50}$$

wobei der Summationsbereich endlich bleibt. Für die Matrizen in $\overline{gl}(\infty)$ können wir ein Erzeugendensystem angeben. Sei $\mu \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$,
d.h. $\mu = (\dots, \mu_{-1}, \mu_0, \mu_1, \dots)$, so setzen wir für $r \in \mathbb{Z}$

$$A_r(\mu) = \sum_i \mu_i E_{i,i+r}\ . \tag{7-51}$$

[14] Der Gebrauch der Symbole ist von Literaturquelle zu Literaturquelle unterschiedlich.

Die Summe symbolisiert lediglich eine bequeme Schreibweise für die unendlichen Matrizen. Die Menge

$$\{ \ A_r(\mu) \mid \ r \in \mathbb{Z}, \mu \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \ \}$$

erzeugt $\overline{gl}(\infty)$. Selbstverständlich bildet sie keine Basis.

Das Matrizenprodukt für die Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{kl})$ ist definiert wie im endlichdimensionalen als

$$C = A \cdot B, \qquad C = (c_{il}), \quad c_{il} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{ij} \cdot b_{jl} \tag{7-52}$$

falls alle auftretenden Summen endlich sind. Für Matrizen aus $gl(\infty)$ ist dies trivialerweise immer der Fall. Das Produkt ist allerdings auch für alle Matrizen aus $\overline{gl}(\infty)$ wohldefiniert. Sei nämlich $r \geq 0$, derart daß $a_{ij} = 0$ für $|i - j| > r$ so erstreckt sich die Summe in (7-52) nur über den Bereich $i - r$ bis $i + r$, d.h. C ist eine wohldefinierte Matrix. Sei nun $s \geq 0$, derart daß $b_{ij} = 0$ für $|i - j| > s$ so verschwindet für $|i - l| > r + s$ das Element c_{il}, d.h. $C \in \overline{gl}(\infty)$. Insbesondere ist $\overline{gl}(\infty)$ also eine assoziative Algebra. Indem wir $gl(\infty)$, bzw. $\overline{gl}(\infty)$ mit dem üblichen Matrixkommutator versehen, machen wir sie zu unendlich dimensionalen Liealgebren. Es ist

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{j,k} E_{il} - \delta_{i,l} E_{jj} \ . \tag{7-53}$$

Umgekehrt legt (7-53) aufgrund der Darstellung (7-50), bzw. (7-51) den Kommutator insgesamt fest.

Für diese Liealgebren möchte ich nun einen Kozykel definieren (siehe [Fu1]). Sei $A = (a_{ij})$, so setzen wir $\pi(A) = (\pi(A)_{ij})$ die Matrix mit

$$\pi(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \geq 0, j \geq 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Matrix

$$\rho(A, B) = \pi([A, B]) - [\pi(A), \pi(B)] \tag{7-54}$$

besitzt endlichen Träger, ist also in $gl(\infty)$. Insbesondere ist Spurbildung möglich. Wir führen ein

$$\alpha(A, B) = \operatorname{Tr} \rho(A, B) \ . \tag{7-55}$$

Proposition 7.5. *$\alpha(..,..)$ definiert einen Kozykel von $\overline{gl}(\infty)$, der nicht kohomolog zu Null ist. Desweitern gilt $H^2_{cont}(\overline{gl}(\infty), \mathbb{C})$ ist eindimensional, also erzeugt von der Klasse $[\alpha]$.*

Für den Beweis siehe [Fu1],[FF],[DJKM]. Allerdings werde ich die Aussage über die Eindeutigkeit im folgenden nicht benötigen, und daß α ein Kozykel ist rechnet man leicht selber nach. Es ist wohlbekannt, daß $gl(\infty)$ keine nichttriviale zentrale Erweiterung besitzt [Fu1]. In der Tat kann man obigen Kozykel für Matrizen aus der Unteralgebra $gl(\infty)$ auch als Korand des Zykels

$$\gamma(A) = \operatorname{Tr} \pi(A) \tag{7-56}$$

beschreiben. Für $A \in \overline{gl}(\infty)$ ist (7-56) nicht wohldefiniert.

Ich berechne nun den Kozykel für die Elementarmatrizen

$$\alpha(E_{ij}, E_{ml}) = \operatorname{Tr}\left(\pi(\delta_{j,m} E_{il} - \delta_{i,l} E_{jm}) - [\pi(E_{ij}), \pi(E_{ml})]\right) . \tag{7-57}$$

Sind alle $i, j, m, l \geq 0$, so gilt $\pi(E_{ij}) = E_{ij}$ und $\pi(E_{ml}) = E_{ml}$. Insbesondere verschwindet dann (7-57). Für i oder $j < 0$, bzw. m oder $l < 0$ verschwindet der 2. Term in (7-57). Da in die Spurbildung nur Diagonalmatrizen eingehen erhalten wir

$$\alpha(E_{ij}, E_{ml}) = \begin{cases} 1, & i = l \geq 0,\ j = m < 0 \\ -1, & j = m \geq 0,\ i = l < 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{7-58}$$

Wie in § 6.(a) ausgeführt wurde, definiert solch ein Kozykel eine zentrale Erweiterung $\widehat{gl}(\infty)$ von $\overline{gl}(\infty)$, erzeugt von Lifts $\widehat{E}_{ij}$ der E_{ij} und einem zentralen Element t mit der Strukturgleichung

$$[\widehat{E}_{ij}, \widehat{E}_{ml}] = \delta_{j,m} \widehat{E}_{il} - \delta_{i,l} \widehat{E}_{jm} + \alpha(E_{ij}, E_{ml})\, t . \tag{7-59}$$

Sei nun $v_s \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ die beidseitig unendliche Folge mit $v_s = (\delta_{i,s})_{i \in \mathbb{Z}}$. Ich setze

$$V = \oplus_{s \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} \cdot v_s .$$

Durch

$$E_{ij} \cdot v_s = \delta_{j,s} v_i \tag{7-60}$$

erhalten wir ein Operation von $\overline{gl}(\infty)$ auf V, welche die Operation Matrix $\times$ Vektor in $\mathbb{C}^n$ auf $\infty-$liche Objekte verallgemeinert. Hierbei ist zu beachten, daß $A_r(\mu)$ eine wohldefinierte Aktion auf V besitzt wegen

$$A_r(\mu) \cdot v_s = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mu_i\, E_{i,i+r} \cdot v_s = \mu_{s-r} v_{s-r} . \tag{7-61}$$

Da die Elemente in $\overline{gl}(\infty)$ endliche Linearkombinationen solcher $A_k(\mu)$ sind, ist diese Operation auch auf $\overline{gl}(\infty)$ definiert.

Die Aktion von $\mathcal{KN}(A)$ auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$ definiert nach Wahl jeweils einer Basis eine Einbettung von $\mathcal{KN}(A)$ in $\overline{gl}(\infty)$. Hierzu sei λ festgehalten. Wir setzen

$$f_{nk+p-1} := f_{n,p}(\lambda), \quad n \in \mathbb{Z},\ p = 1, \dots k \ .$$

Damit werden die Basiselemente durch $\mathbb{Z}$ numeriert. Die Strukturgleichung umgeschrieben lautet nun

$$e_{n,p} \cdot f_m = \sum_{h=r}^{s} C_{n,p;m}^h f_h$$

mit

$$r \geq m + k(n-2), \qquad s \leq m + k(n+1+L) - 1 \ . \tag{7-62a}$$

Proposition 7.6. *Die Abbildung*

$$\psi : \mathcal{KN}(A) \to \overline{gl}(\infty), \qquad e_{n,p} \mapsto \psi(e_{n,p}) := (a_{ij}), \quad a_{ij} = C_{n,p;j}^i$$

ist eine Einbettung von Liealgebren.

Beweis. Die Elemente a_{ij} sind ungleich Null lediglich für i im Bereich

$$[\ j + k(n-2)\ ,\ j + k(n+1+L) - 1\ ]\ .$$

Somit ist $a_{ij} \neq 0$ lediglich für $k(n-2) \leq i - j \leq k(n+1+L) - 1$. Insbesondere ist $\psi(e_{n,p})$ in $\overline{gl}(\infty)$. Daß ψ ein Liehomomorphismus ist, ist klar, da ψ die Zuordnung der Strukturkonstanten des Liemoduls $\mathcal{F}^\lambda(A)$ über $\mathcal{KN}(A)$ ist. Insbesondere gilt (siehe § 2.) $[L_d, L_e] = L_{[d,e]}$ also auch

$$[\psi(e_{n,p}), \psi(e_{m,r})] = \psi([e_{n,p}, e_{m,r}])\ . \quad \Box$$

In den Beweis der Prop. 7.6 ging ganz wesentlich die verallgemeinert graduierte Struktur ein. Wir können nun auch schreiben (im formalen Sinne)

$$\psi(e_{n,p}) = \sum_{i,j} C_{n,p;j}^i E_{ij}\ .$$

Hierbei ist allerdings die Summe nicht endlich. Identifizieren wir die Basis des Vektorraumes, auf dem $gl(\infty)$, bzw. $\overline{gl}(\infty)$ operiert, mit den Elementen f_m, so operiert $\overline{gl}(\infty)$ auch auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$ via Matrixmultiplikation $E_{ij} \cdot f_m = \delta_{j,m} f_i$. Wir berechnen

$$\psi(e_{n,p}) \cdot f_m = \sum_{i,j} C^i_{n,p;j} \delta_{j,m} f_i = e_{n,p} \cdot f_m \ .$$

D.h. beide Operationen sind verträglich (so war ψ ja gerade definiert).

Unser Ziel ist es mit Hilfe dieser Einbettung die Aktion von $\mathcal{KN}(A)$ oder genauer einer zentralen Erweiterung $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$ auf den semi-infiniten Wedgeprodukten zu definieren. Hierzu studieren wir zuerst die semi-infinite Wedgedarstellung ausgehend von $\overline{gl}(\infty)$ (siehe [KaR]). $\mathcal{H}^\lambda(A)$ ist der Raum wie er in (7-1)–(7-6) eingeführt wurde. Hierbei ist die Aktion in (7-2) natürlich durch die Matrixmultiplikation zu ersetzen. Beschränken wir uns auf die Unteralgebra $gl(\infty)$, ist die Aktion wohldefiniert, da für $A \in gl(\infty)$ gilt $A \cdot f_m = 0$ für m groß genug. Die Algebra $\overline{gl}(\infty)$ macht jedoch Schwierigkeiten. Nach (7-61) ist

$$A_r(\mu) \cdot f_m = \mu_{m-r} f_{m-r} \ .$$

Somit ist $r \neq 0$ ebenfalls unproblematisch, da letztendlich (wie in § 7.(a) ausgeführt) für $m \gg 0$ das Resultat durch die Nachbarterme annulliert wird. Für $r = 0$ gilt allerdings daß sich f_m immer wieder reproduziert. Insbesondere ist die Aktion nicht definiert. Man nehme als Vektor etwa

$$\Phi_m = f_m \wedge f_{m+1} \wedge f_{m+2} \cdots \ , \tag{7-62}$$

dann gilt

$$E_{ii}\Phi_m = \begin{cases} \Phi_m, & i \geq m \\ 0, & i < m \ . \end{cases}$$

Wir erhalten somit

$$A_0(\mu)\Phi_m = \left(\sum_{r=m}^{\infty} \mu_r \right) \Phi_m \ . \tag{7-63}$$

Diese unendliche Summe wird im allgemeinen jedoch nicht konvergieren. Kac und Raina [KaR] folgend, definiere ich die Aktion nun um.[15] Zur Deutlichkeit bezeichne ich mit r die Aktion auf $\mathcal{H}^\lambda(A)$ welche von der Matrixmultiplikation herkommt, mit $\hat{r}$ die wie folgt umdefinierte Aktion

$$\begin{aligned} \hat{r}(E_{ij}) &:= r(E_{ij}), \qquad i \neq j \quad \text{oder} \quad i = j < 0 \\ \hat{r}(E_{ii}) &:= r(E_{ii}) - id, \quad i \geq 0 \ . \end{aligned} \tag{7-64}$$

[15] Im Gegensatz zu [KaR] wähle ich aufsteigende semi-infinite Formen.

Damit gilt

$$\hat{r}(A_0(\mu))(\Phi_m) = \begin{cases} \left(\sum_{r=m}^{-1} \mu_r\right) \Phi_m, & m < 0 \\ \left(-\sum_{r=0}^{m-1} \mu_r\right) \Phi_m, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \ . \end{cases} \tag{7-65}$$

Die Aktion ist also wohldefiniert. Allerdings handelt es sich nicht mehr um eine Liealgebrenaktion. Hierzu müßten ebenfalls die Kommutatorregeln

$$[\hat{r}(E_{ij}), \hat{r}(E_{ml})] = \delta_{j,m}\hat{r}(E_{il}) - \delta_{i,l}\hat{r}(E_{mj}) \tag{7-66}$$

gelten. Ersetzen wir in (7-66) $\hat{r}$ durch r, so gelten sie natürlich. Andererseits verschwinden auf der linken Seite alle Anteile von id. Es sind also lediglich alle Möglichkeiten für die rechten Seiten zu betrachten bei denen $\hat{r}$ tatsächlich verschieden von r ist. Man erhält in diesen Fällen statt (7-66) die richtige Formel

$$[\hat{r}(E_{ij}), \hat{r}(E_{ji})] = \hat{r}(E_{ii}) - \hat{r}(E_{jj}) + \beta(E_{ij}, E_{ji}) \cdot id \ . \tag{7-67}$$

Direkte Rechnung liefert

$$\beta(E_{ij}, E_{ji}) = \begin{cases} 0, & i, j < 0 \\ 0, & i, j \geq 0 \\ 1, & i \geq 0, \ j < 0 \\ -1, & j \geq 0, \ i < 0 \ . \end{cases} \tag{7-68}$$

Dies stimmt mit dem Kozykel α überein der zur Konstruktion der zentralen Erweiterung $\widehat{gl}(\infty)$ in (7-58) gegeben wurde. Setzen wir $\hat{r}(\widehat{E}_{i,j}) = \hat{r}(E_{i,j})$ und $\hat{r}(t) = id$, so definiert dies in der Tat eine Aktion von $\widehat{gl}(\infty)$ auf $\mathcal{H}^\lambda(A)$.

Aufgrund der Einbettung $\psi : \mathcal{KN}(A) \to \overline{gl}(\infty)$ ist die Aktion $\hat{r}$ ebenfalls auf $\mathcal{KN}(A)$ definiert und die zentrale Erweiterung $\widehat{gl}(\infty)$, definiert durch den Kozykel α, definiert ebenfalls eine zentrale Erweiterung $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$, gegeben durch den Kozykel $\chi = \psi^*\alpha$ mit einer entsprechenden Fortsetzung der Aktion. $\widehat{\psi} : \widehat{\mathcal{KN}}(A) \to \widehat{gl}(\infty)$ sei die entsprechende Einbettung. Der Kozykel χ kann "explizit" angegeben werden

$$\begin{aligned} \chi(e_{n,p}, e_{m,r}) = \alpha(\psi(e_{n,p}), \psi(e_{m,r})) &= \sum_{i,j,s,t} C^i_{n,p;j} C^s_{m,r;t} \alpha(E_{ij}, E_{st}) \\ &= \sum_{i,j} C^i_{n,p;j} C^j_{m,r;i} \alpha(E_{ij}, E_{ji}) \ . \end{aligned}$$

Aufgrund der Abschätzungen (7-62a) gilt, daß die Koeffizientenpaare lediglich im Indexbereich (i,j) der den Bedingungen

$$\begin{aligned} j + k(n-2) \ &\leq \ i \ \leq \ j + k(n+1+L) - 1 \\ i + k(m-2) \ &\leq \ j \ \leq \ i + k(m+1+L) - 1 \end{aligned}$$

genügt, simultan $\neq 0$ sein können. Addieren wir beide Gleichungen und Subtrahieren $(i+j)$ so erhalten wir

$$k(n+m-4) \ \leq \ 0 \ \leq \ k(m+n+2+2L) - 2 \ .$$

Ist

$$(n+m) \ \geq \ 5 \quad \text{oder} \quad (m+n) \ \leq \ -2L - 3 + [\frac{2}{k}]$$

so ist der zulässige Indexbereich leer. D.h. der Kozykel verschwindet. Also ist χ ein lokaler Kozykel. Dies zeigt Prop. 7.2(e).

$E_{n,p}$ seien die Lifts der Elemente $e_{n,p}$ gegeben duch

$$\widehat{\psi}(E_{n,p}) \ = \ \sum_{i,j} C^i_{n,p;j} \widehat{E}_{ij} \ . \tag{7-69}$$

Falls $e_{n,p} \in \mathcal{KN}^+(A)$, bzw. $\in \mathcal{KN}^-(A)$, tritt im Resultat von $e_{n,p} \,.\, f_{m,r}$ kein $f_{m,r}$ auf. Somit tritt in $\psi(e_{n,p})$ kein E_{ii} auf, Insbesondere stimmt also die Aktion von $E_{n,p}$ mit der Aktion von $e_{n,p}$ überein. Also Prop.7.2 (a).
Die Darstellungsweise für die Aktion im kritischen Bereich als (Prop. 7.2(b))

$$E_{n,p} \,.\, w = e_{n,p} \odot w + r(n,p,w) \cdot w \tag{7-70}$$

ergibt sich aufgrund einer solchen Darstellung für die Aktion von $\widehat{gl}(\infty)$. Natürlich kann $E_{n,p} \,.\, w$ konkret angegeben werden. Uns genügt jedoch die Berechnung von $E_{2,p} \,.\, \Phi_0$. Es gilt

$$\psi(e_{2,p}) = A_0(\mu) + \sum_{i>m} \alpha_{im} E_{im}, \quad \alpha_{im} \in \mathbb{C} \tag{7-71}$$

mit

$$\mu_m = \begin{cases} \frac{m-p+1}{k} - 1 + \lambda, & k \mid (m-p+1) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $\hat{r}(A_0(\mu))(\Phi_0) = 0$ (7-65) und ebenfalls $\hat{r}(E_{im})(\Phi_0) = 0$ gilt, folgt $E_{2,p} \,.\, \Phi_0 = 0$, also Prop. 7.2(c). Natürlich kann durch Addition eines beliebigen Vielfachen des zentralen Elementes t zu $E_{2,p}$ auch anders normiert werden. Dies entspricht der kohomologen Abänderung des Kozykels.

(c) Ein Hilfsmittel: $w-$Regularisierung

In diesem Abschnitt möchte ich Prop. 7.2 mit einer zweiten Methode behandeln. Die Methode hat unter anderem den Vorteil, daß die Einführung der Matrizenalgebren und somit der Übergang von der Graduierung $\deg(f_{n,p}) = n$ auf eine $\mathbb{Z}-$Graduierung nicht notwendig ist. Ich folge hierbei einer Idee von R. Weissauer.

Im folgenden sei w eine komplexe Variable. Die Aktion von $\mathcal{KN}(A)$ auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$ wird nun modifiziert

$$e_{n,p} \underset{w}{\cdot} f_{m,r} = w^m (e_{n,p} \cdot f_{m,r}) \ . \tag{7-72}$$

Diese Aktion ist weiterhin linear. Jedoch liegt lediglich für $w = 1$ eine Lieaktion vor. Die modifizierte Aktion wird durch genau dieselben Vorschriften wie in § 7.(a) auf die semi-infiniten Formen übertragen. Die derart erhaltene Aktion (unter der Voraussetzung, daß sie wohldefiniert ist) wird mit op_w bezeichnet. Zuerst ist zu untersuchen unter welchen Bedingungen Wohldefiniertheit vorliegt.

Seien $\{\psi_j\}_{j\in J}$ die Basiselemente von $\mathcal{H}^\lambda(A)$ und ψ_0 ein festes Basiselement. Dann gilt

$$op_w(e_{n,p})(\psi_0) = \sum_{\substack{j\in J \\ j\neq 0}} g_j(w)\psi_j + g_0(w)\psi_0 \tag{7-73}$$

mit Laurentreihen $g_j(w),\ j \in J$ in der Variablen w. Aufgrund der verallgemeinert graduierten Struktur ist die Summe endlich und der Koeffizient vor ψ_j für $j \neq 0$ kann durch Aktion von $e_{n,p}$ auf endlich viele Faktoren von ψ_0 erhalten werden. Um dies zu sehen, beachte man, daß für $m \gg 0$ die Elemente im Produkt $e_{n,p} \cdot f_{m,r}$ bis auf einen eventuell vorhandenen $f_{m,r}$ Anteil durch Nachbarelemente in ψ_0 annulliert werden. Somit tauchen neben ψ_0 Termen nur endlich viele andere Terme auf, also auch nur endlich viele Basiselemente. (Dies ist dieselbe Überlegung wie in § 7.(a) bzw. (b).) Somit ist g_j für $j \neq 0$ ein Laurentpolynom, d.h. ein Polynom in w und w^{-1}. Ist g_0 ebenfalls ein Laurentpolynom, wie dies etwa falls $e_{n,p}$ nicht im "kritischen Bereich" liegt gilt, so können wir $w = 1$ setzen und erhalten die gewünschte Aktion. Klar ist ebenfalls, daß g_0 auf jeden Fall eine nach unten abbrechende Laurentreihe ist. Schwierigkeiten treten auf, falls g_0 nicht nach oben abbricht. In diesen Fall wird g_0 im allgemeinen für $w = 1$ nicht mehr konvergieren. Als Koeffizienten in der Potenzreihe treten Strukturkonstanten von $\mathcal{F}^\lambda(A)$ auf. Die Potenzreihe

g_0 hängt auch vom Basiselement (und natürlich auch von $e_{n,p}$) ab. Wählen wir als Basiselement Φ_0 (7-6), so differiert ψ_0 von Φ_0 nur in endlich vielen Faktoren. Wir können somit schreiben

$$g_0(w) = p(w) + g(w) \tag{7-74}$$

mit einem Laurentpolynom p und der entsprechenden Laurentreihe g für das Basiselement Φ_0. In p kann ohne Probleme $w = 1$ gesetzt werden und g ist eine Potenzreihe. Im folgenden machen wir die

Voraussetzung 7.1. *Die Potenzreihe g konvergiere für alle w mit $|w| < 1$. Weiter gelte*

$$\begin{gathered} g(w) = h(w) + g^r(w), \\ h(w) = \sum_{l=m}^{-1} a_l(1-w)^l, \quad g^r(w) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(1-w)^l, \quad a_l \in \mathbb{C} \ , \end{gathered} \tag{7-75}$$

wobei $g^r(w)$ eine für $w = 1$ konvergierende Potenzreihe ist.

Die $w-$regularisierte Aktion op besteht darin zu setzen

$$op(e_{n,p})(\psi_0) = \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq 0}} g_j(1)\psi_j + g_0^r(1)\psi_0 \tag{7-76}$$

mit $g_0^r(w) = p(w) + g^r(w)$. Dies kann auch umformuliert werden zu

$$op(e_{n,p})(\psi_0) = \lim_{w \to 1_-} (op_w(e_{n,p})(\psi_j) - h(w)\psi_j) \ . \tag{7-77}$$

$h(w)$ ist der durch (7-75) gegebene Hauptteil der Funktion $g(w)$ bei $w = 1$. Dieser hängt ab von $e_{n,p}$, jedoch nicht von ψ_j.

Bemerkung 1: Die Vorschrift (7-76) (die alles andere in kohärenter Weise festlegt) unterscheidet sich, von der in § 7.(b) durch die Vorgabe (7-64) induzierten, lediglich dadurch, daß dort statt $E_{n,p}$ der Lift $E_{n,p} + g^r(1) \cdot t$ für $e_{n,p}$ gewählt würde. Somit wissen wir bei Benutzung von § 7.(b) natürlich, daß diese Aktion, die Aktion einer zentralen Erweiterung definiert. Das Ziel dieses Abschnittes ist es jedoch § 7.(b) zu vermeiden.

Bemerkung 2: (über die Gültigkeit der Voraussetzung) Isolieren wir den Term in der Strukturgleichung, welcher uns interessiert, so erhalten wir

$$e_{n,p} \cdot f_{m,r} = C_{(n,p),(m,r)}^{(m,r)}(\lambda) \cdot f_{m,r} + \quad \text{Rest} \ .$$

Somit gilt

$$g(w) = \sum_{m=0}^{\infty} C^{(m,r)}_{(n,p),(m,r)}(\lambda) \cdot w^m \ . \tag{7-78}$$

In die Koeffizienten $C^{\cdots}_{\cdots}$ gehen die Entwicklungskoeffizienten der Formen ein. Im Virasoro Fall ist die Voraussetzung erfüllt. Dann gilt nämlich

$$C^m_{n,m}(\lambda) = (m-1+\lambda) \cdot \delta_{n,2} \ .$$

Also gilt für das Element e_2

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty}(m-1+\lambda) \cdot w^m = \frac{1}{(1-w)^2} + \frac{\lambda-2}{1-w} \ . \tag{7-79}$$

Insbesondere ist dies ein reiner Hauptteil, also $g^r = 0$. Für e_n mit $n \neq 0$ ergibt sich immer $g(w) = 0$.
Die Voraussetzung ist sogar ganz allgemein im Fall Geschlecht $g = 0$ erfüllt. Aufgrund Prop. 5.1 gilt nämlich

$$C^{(m,r)}_{(n,p),(m,r)} = \alpha + \beta \cdot m$$

mit α und β Konstanten, welche für $k \geq l$ nicht von m und für $k < l$ nur von der Restklasse von m mod b ($b = (l-k)+1$) abhängen. Damit konvergiert die Reihe entsprechend zu Formel (7-79). Für $k \geq l$ erhalten wir wiederum einen reinen Hauptteil. Somit gilt hier, daß die Operation *op* identisch mit der in §.7.(b) ist.
Für höheres Geschlecht wird man vermutlich mit Hilfe der expliziten Formen und analog zum Beweis von Prop. 5.1 zeigen können, daß die Vermutung gilt.

Die folgenden Propositionen folgen unter der Annahme der Gültigkeit der Voraussetzung. Vorab jedoch eine einfache, aber nützliche Formel.
Sei $\psi \wedge \Phi$ ein Basisvektor, y ein endliches Teilstück und sei $e_{n,p} \,.\, y$ entsprechend der Definition für die unendlichen Formen definiert. Falls $e_{n,p} \,.\, \Phi$ definiert ist, gilt

$$e_{n,p} \,.\, \psi = (e_{n,p} \,.\, y) \wedge \Phi + y \wedge (e_{n,p} \,.\, \Phi) \ . \tag{7-80}$$

Offensichtlich gilt (7-80) auch für die op_w-Aktion. Da der Hauptteil $h(w)$ nur von $e_{n,p}$ abhängt, gilt (7-80) auch für die regularisierte $op-$Aktion

$$op(e_{n,p})(\psi) = (e_{n,p} \,.\, y) \wedge \Phi + y \wedge op(e_{n,p})(\Phi) \ . \tag{7-81}$$

Proposition 7.7. *Die Operation op ist eine projektive Aktion von $\mathcal{KN}(A)$ auf $\mathcal{H}^\lambda(A)$, d.h. es gilt für $e, g \in \mathcal{KN}(A)$*

$$[op(e), op(g)] = op([e,g]) + \chi(e,g) \cdot id, \quad \chi(e,g) \in \mathbb{C} \ . \tag{7-82}$$

Beweis. Sei S die lineare Abbildung

$$S = [op(e), op(g)] - op([e,g]) \ .$$

(a) Wir zeigen zuerst, daß S wie ein Vielfaches der Identität auf jedem Basiselement ψ wirkt. h_d bezeichne den zum Element $d \in \mathcal{KN}(A)$ gehörende Hauptteil nach (7-75). Es gilt

$$\begin{aligned} S(\psi) = & \big[\lim_{w\to 1}(op_w(e) - h_e(w)id), \lim_{w\to 1}(op_w(g) - h_g(w)id)\big](\psi) \\ & - \lim_{w\to 1}(op_w([e,g]) - h_{[e,g]}(w)id)(\psi) \\ = & \lim_{w\to 1}\big([op_w(e), op_w(g)] - op_w([e,g]) + h_{[e,g]}(w)id\big)(\psi) \ . \end{aligned}$$

Betrachten wir im Endresultat nur die Basiselemente $\neq \psi$, so können wir den Limes durch Einsetzen ausführen. Insbesondere sind hierbei auch im Resultat von

$$e \underset{w}{.} (g \underset{w}{.} f_{m,r}) - g \underset{w}{.} (e \underset{w}{.} f_{m,r}), \quad \text{bzw.} \quad [e,g] \underset{w}{.} f_{m,r}$$

auch die Anteile von $f_{m,r}$ nicht zu beachten. Für diese stellt die Aktion die übliche dar. Also folgt $S(\psi)$ enthält außer ψ keine Komponenten.
(b) Sei $\psi = \ y \wedge \Phi_T$ mit einem endlichen Teilstück y gegeben. Nach (7-81) also

$$\begin{aligned} op(e)(op(g)(\psi)) = (e\,.\,(g\,.\,y)) \wedge \Phi_T + (e\,.\,y) \wedge op(g)(\Phi_T) + \\ (g\,.\,y) \wedge op(e)(\Phi_T) + y \wedge op(e)(op(g)(\Phi_T)) \ . \end{aligned}$$

Ein entsprechendes Resultat erhält man für die vertauschte Reihenfolge. Somit insgesamt

$$\begin{aligned} S(y \wedge \Phi_T) &= \big(e\,.\,(g\,.\,y) - g\,.\,(e\,.\,y) - [e,g]\,.\,y\big) \wedge \Phi_T + y \wedge S(\Phi_T) \\ &= y \wedge S(\Phi_T) \end{aligned} \tag{7-83}$$

(c) Nach (a) gilt $S(\Phi_T) = c(T) \cdot \Phi_T$ mit einer Konstanten $c(T)$. Seien nun Φ_T und Φ_U mit $T \neq U$ gegeben. O.B.d.A. sei $U < T$. Dann gibt es ein endliches Teilstück y mit $\ \Phi_U = y \wedge \Phi_T\ $, also

$$S(\Phi_U) = c(U) \cdot \Phi_U = y \wedge S(\Phi_T) = y \wedge (c(T) \cdot \Phi_T) = c(T) \cdot \Phi(U) \ .$$

Damit folgt $c(T) = c(U) = c$. Da sich jedes Basiselement schreiben läßt als $\psi = y \wedge \Phi(T)$, folgt wie oben $S(\psi) = c \cdot \psi$. Das bedeutet jedoch S operiert wie $c \cdot id$. $\square$

Sei $LEnd\ \mathcal{H}^\lambda(A)$ die Liealgebra der linearen Endomorphismen von $\mathcal{H}^\lambda(A)$ mit dem Kommutator $[C, D] = C \circ D - D \circ C$ als Lieprodukt.

$$J = \{\alpha \cdot id \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \quad (\cong \mathbb{C})$$

ist ein (Lie-)Ideal. J ist offensichtlich zentral. $PEnd\ \mathcal{H}^\lambda(A)$ ist die Faktoralgebra nach J. Dies ist äquivalent dazu, daß $LEnd\ \mathcal{H}^\lambda(A)$ eine zentrale Erweiterung von $PEnd\ \mathcal{H}^\lambda(A)$ ist. Prop. 7.7 besagt zusammen mit der trivialen Tatsache $op(e + g) = op(e) + op(g)$, daß

$$op : \mathcal{KN}(A) \to PEnd\ \mathcal{H}^\lambda(A)$$

ein Liehomomorphismus ist. Dieser definiert eine Liehomomorphismus

$$\widehat{op} : \widehat{\mathcal{KN}}(A) \to LEnd\ \mathcal{H}^\lambda(A)$$

ausgehend von einer zentralen Erweiterung $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$ von $\mathcal{KN}(A)$. Die zentrale Erweiterung $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$ ist definiert nach dem Mechanismus von § 6. durch eine Kozykel χ mit $(e, f \in \mathcal{KN}(A))$

$$\chi(e, f) \cdot id = [op(e), op(f)] - op([e, f]) \ . \tag{7-84}$$

(7-84) ist nach Konstruktion antisymmetrisch. Die 2-Kozykeleigenschaft ist ebenfalls automatisch erfüllt. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}\chi([e, f], g) &= [op([e, f]), op(g)] - op([[e, f], g]) \\ &= [[op(e), op(f)] + \chi(f, g) \cdot id, op(g)] - op([[e, f], g]) \\ &= [[op(e), op(f)], op(g)] - op([[e, f], g]) \ .\end{aligned}$$

Mit der Jacobiidentität in $LEnd\ \mathcal{H}^\lambda(A)$ bzw. in $\mathcal{KN}(A)$ und der Benutzung der Linearität von op, ergibt sich, daß die Summe über alle zyklischen Vertauschungen verschwindet. Also in der Tat die Kozykeleigenschaft. (Dies hat natürlich nichts mit der speziellen Situation zu tun, sondern ist eine allgemeine Eigenschaft solcher projektiven Darstellungen.)

Somit ist nun durch

$$r : \widehat{\mathcal{KN}}(A) = \mathcal{KN}(A) \oplus \mathbb{C} \to LEnd\ \mathcal{H}^\lambda(A), \quad r(e, s) = op(e) + s \cdot id \tag{7-85}$$

ein Liehomomorphismus definiert. Die Elemente $(e_{n,p}, 0)$ bezeichne ich wieder als $E_{n,p}$, das Element $(0, 1)$ als t. Diese Elemente bilden ein Basis von $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$.

Nun bin ich in der Lage Prop. 7.2 (unter der Voraussetzung 7.1) zu beweisen. Die Teile (a),(b),(c) folgen unmittelbar aus der Definition. Um Teil (d) zu zeigen, rechne ich die op_w-Aktion aus. Es gilt

$$e_{2,p} \underset{w}{\cdot} f_{m,r} = w^m (m - 1 + \lambda)\delta_{p,r} \cdot f_{m,p} + \sum_{h>m} \cdots f_{h,s} \ .$$

Somit (da alle anderen Elemente annulliert werden)

$$op_w(e_{2,p})(\Phi_0) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} (m - 1 + \lambda) \cdot w^m \right) \Phi_0 = \left(\frac{1}{(1-w)^2} + \frac{\lambda - 2}{1 - w} \right) \Phi_0 \ .$$

Es liegt ein reiner Hauptteil vor, also

$$E_{2,p} \,.\, \Phi_0 = op(e_{2,p})(\Phi_0) = 0 \ .$$

Dies war zu zeigen.
Die Behauptung (e) ist die Lokalität des Kozykels.

$$\chi(e_{n,p}, e_{m,r}) \cdot id = [op(e_{n,p}), op(e_{m,r})] - op([e_{n,p}, e_{m,r}]) \ . \tag{7-86}$$

Natürlich genügt es dies auf irgendeinem der Vektoren auszurechnen. Dieser sei Φ. Desweiteren müssen wir unsere Aufmerksamkeit nur auf die Möglichkeiten richten, welche eine Beitrag zu Φ im Ergebnis liefern können. Ist $n+m \geq 5$ oder $n + m \leq -1 - 2L$, so tauchen im Produkt $[e_{n,p}, e_{m,r}]$ nur Elemente auf, für welche die $op-$Aktion die gewöhnliche ist. Also reproduziert sich Φ nicht bei Anwendung des zweiten Termes von (7-86). Sei also einer dieser Bedingungen erfüllt. Es gilt dann

$$\chi(e_{n,p}, e_{m,r}) \cdot id = \lim_{w \to 1} [op_w(e_{n,p}), op_w(e_{m,r})]$$

(die Vielfachen der Identität verschwinden innerhalb des Kommutators). Es bleiben nur die Elemente übrig bei denen sowohl $e_{n,p}$ als auch $e_{m,r}$ auf denselben Faktor wirken. An der unteren Grenze erhalten wir folgende Kette

$$f_{h,s} \to f_{n+h-2,s} \to f_{n+m+h-4,s}$$

an der oberen Grenze

$$f_{h,s} \to f_{n+h+L,s} \to f_{n+m+2L,s} \ .$$

Nach Voraussetzung ist $n + m \geq 5$ oder $n + m \leq -2L - 1$. Es können sich also die Elemente nicht reproduzieren, d.h. es taucht kein Φ auf. Dies zeigt die Lokalität.

(d) Die Darstellung für $\mathcal{D}^1(A)$

Da die $\mathcal{F}^\lambda(A)$ verallgemeinert graduierte Module über $\mathcal{D}^1(A)$ sind (6-47), kann man nach genau demselben Verfahren wie für die Unteralgebra $\mathcal{KN}(A)$ Wedge-Darstellungen für diese Algebra konstruieren. Hierzu benutze ich zur Argumentation die Methode welche in § 7.(b) entwickelt wurde. Es sei $\mathcal{D}^1(A)$ aufgrund der Aktion auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$ in $\overline{gl}(\infty)$ eingebettet.
Zur Erinnerung seien die folgenden Formeln nochmals notiert ($f \in \mathcal{F}^\lambda(A)$)

$$A_{n,p} \cdot f_{m,r} = 1 \cdot f_{n+m-1,p}\delta_{p,r} + \sum_{h=n+m}^{n+m+M} \sum_{s} \dots f_{h,s}, \tag{7-87}$$

$$e_{n,p} \cdot f_{m,r} = (m-1+\lambda(n-1)) f_{n+m-2,p}\delta_{p,r} + \sum_{h=n+m-1}^{n+m+L} \sum_{s} \dots f_{h,s} \ . \tag{7-88}$$

Proposition 7.8. *Die Unterräume*

$$\mathcal{D}^{1,+}(A) = \langle e_{n,p} \mid n \geq 3, p = 1, \dots, k \rangle \oplus \langle A_{n,p} \mid n \geq 2, p = 1, \dots, k \rangle$$
$$\mathcal{D}^{1,-}(A) = \langle e_{n,p} \mid n \leq -L-1, p = 1, \dots, k \rangle \oplus \langle A_{n,p} \mid n \leq -M-1, p = 1, \dots, k \rangle$$

sind Unteralgebren von $\mathcal{D}^1(A)$. Sie besitzen eine wohldefinierte Aktion auf $\mathcal{H}^\lambda(A)$.

Beweis. Für beide Unterräume gilt, daß jeweils die Summanden für sich betrachtet unter der Operation abgeschlossen sind. Es bleiben lediglich die gemeinsamen Teile zu untersuchen. Hierzu untersuche man (7-88) für die "schlechtesten" Fälle. Auch da gilt es wie man sofort verifiziert. Da für solche $A_{m,r}$ im Resulat von $A_{m,r} \cdot f_{n,p}$ kein $f_{n,p}$ auftreten kann, liegt mit genau denselben Argumenten, die im Beweis von Prop.7.1 angewendet wurden, eine Lieaktion vor. □

Der "kritische Bereich" für den die Aktion nicht wohldefiniert ist, ist wiederum endlichdimensional. Die Prop. 7.2 gilt für die Algebra $\mathcal{F}^0(A)$ in entsprechender Übersetzung. Aufgrund (7-87) gilt mit den Bezeichnungen aus § 7.(b)

$$\psi(A_{1,p}) = A_0(\mu) + \sum_{i>m} E_{im}$$

mit passendem $\mu \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ entsprechend (7-71). Also gilt mit (7-65)

$$op(A_{1,p})(\Phi_T) = -T \ . \tag{7-89}$$

Sei $\rho = \psi^*(\alpha)$ der Pullback des Kozykels α (7-55). ρ eingeschränkt auf $\mathcal{KN}(A)$ ist natürlich der Kozykel χ, wie er in § 7.(a) diskutiert wurde. Wir betrachten nun seine Einschränkung auf $\mathcal{F}^0(A)$. Man kann mit denselben Methoden wie in § 7.(a) zeigen, daß dieser entsprechende Lokalitätseigenschaften hat. Insbesondere gilt $\rho(A_{n,p}, A_{m,r}) = 0$ für $(n+m) > 3$. Der Kozykel kann gegeben werden durch

$$[op(A_{n,p}), op(A_{m,r})] = op([A_{n,p}, A_{m,r}]) + \rho(A_{n,p}, A_{m,r}) \cdot t = \rho(A_{n,p}, A_{m,r}) \cdot t \ .$$

Im Grenzfall $m = 2 - n$ gilt (für $n \geq 2$)

$$[op(A_{n,p}), op(A_{2-n,r})](\Phi_0) = op(A_{n,p})(op(A_{2-n,r})(\Phi_0) \ . \tag{7-90}$$

Nach (7-87)

$$A_{2-n,r} \cdot f_{k,r} = f_{k-n+1,r} + \text{ höhere Glieder} \ .$$

Die höheren Glieder werden bei der Anwendung von $A_{n,p}$ wieder durch Nachbarterme annulliert. Lediglich

$$A_{n,r} \cdot f_{k-n+1,r} = f_{k,r} + \text{ höhere Glieder}$$

liefert einen Beitrag. (Falls $p \neq r$ ergibt sich 0.) Allerdings muß k den Bedingungen

$$0 \leq k \quad \text{und} \quad k - n + 1 \leq -1$$

genügen. Das heißt, wir erhalten als Resultat (7-90) $(n-1)\Phi_0$. Der Kozykel bestimmt sich somit zu

$$\rho(A_{n,p}, A_{2-n,r}) = \frac{1-n}{2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1)} \cdot \delta_{p,r} \ . \tag{7-91}$$

Hierbei ist zu beachten, daß t aufgrund der Normierung auf $\mathcal{KN}(A)$ bereits so festgelegt war, daß gilt

$$t \cdot \Phi_0 = -2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1) \cdot \Phi_0 \ .$$

Insbesondere sind wir nach dieser Fixierung nicht mehr in der Lage, durch Umdefinition der Aktion, die $\lambda-$Abhängigkeit des Kozykels zu beseitigen.

Ich komme nun zum Pullback des Kozykels α auf die gemischten Teile. Wiederum erfüllt er eine Lokalitätseigenschaft. Insbesondere gilt

$$\rho(e_{n,p}, A_{m,r}) = 0 \quad \text{falls} \quad n + m \geq 4 \ .$$

Im Grenzfall berechnet sich

$$op(e_{n,p})(op(A_{3-n,r})(\Phi_0)) - op(A_{3-n,r})(op(e_{n,p})(\Phi_0)) = \rho(e_{n,p}, A_{3-n,r})\, t \cdot \Phi_0 \ . \tag{7-92}$$

Das Produkt berechnet sich zu

$$e_{n,p} \,.\, A_{3-n,r} = (2-n)\, A_{1,p} + \text{ höhere Glieder } \ .$$

D.h. alle Terme im Produkt annullieren Φ_0.
Fall 1: $n \geq 3$. In diesem Fall bleibt lediglich der erste Term. Wiederum ist das Ergebnis nur für $p = r$ nichttrivial. Entsprechend zu obigem führe ich lediglich diejenigen Terme aus, welche einen Beitrag liefern:

$$\begin{aligned} A_{3-n,p} \cdot f_{k,p} &= 1 \cdot f_{k+2-n,p} + \ldots \\ e_{n,p} \cdot f_{k+2-n,p} &= ((k-n+1) + \lambda(n-1)) \cdot f_{k,p} + \ldots \ . \end{aligned}$$

Die Beschränkungen für k sind nun

$$0 \leq k \quad \text{und} \quad k - n + 2 \leq -1 \ .$$

Als Faktor vor $t \cdot \Phi_0$ ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{n-3} (k - n + 1 + \lambda(n-1)) = \frac{1}{2}(n-2)\big((n-1)(2\lambda - 1) - 2\big) \ .$$

Machen wir nun die Basistransformation in der zentralen Erweiterung

$$\hat{A}^*_{1,p} = \hat{A}_{1,p} + \frac{1}{-2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1)} \cdot t \tag{7-93}$$

so erhalten wir als Kozykel

$$\rho(e_{n,p}, A_{3-n,r}) = \frac{(n-1)(n-2)(1-2\lambda)}{4(6\lambda^2 - 6\lambda + 1)}\, \delta_{p,r} \ . \tag{7-94}$$

und es gilt $\hat{A}^*_{1,p} \cdot \Phi_0 = 1 \cdot \Phi_0$. Auch hier sei der Basiswechsel vorgenommen und dann der * in der Notation wieder unterdrückt.
Fall 2: $n = 2$. Hier verschwinden beide Terme auf der linken Seite von (7-92) im Einklang mit der Formel (7-94).
Fall 3: $n \leq 1$. Liefert dasselbe Resultat wie der Fall 1. Ich fasse zusammen

Theorem 7.2. *Die Aktion von $\mathcal{D}^1(A)$ auf $\mathcal{F}^\lambda(A)$ kann zu einer Aktion einer zentralen Erweiterung $\widehat{\mathcal{D}}^1(A)$ auf $\mathcal{H}^\lambda(A)$ "fortgesetzt" werden, derart daß mit geeigneten Lifts $E_{n,p}$ der Basiselemente $e_{n,p} \in \mathcal{KN}(A)$ und $\hat{A}_{n,p}$ der Elemente $A_{n,p} \in \mathcal{F}^0(A)$ folgende Eigenschaften gelten:*
(a) $e_{n,p} \to E_{n,p}$ und $A_{n,p} \to \hat{A}_{n,p}$ definiert eine Einbettung von $\mathcal{D}^{1,+}(A)$ und $\mathcal{D}^{1,-}(A)$ in $\widehat{\mathcal{D}}^1(A)$, welche mit der Aktion auf $\mathcal{H}^\lambda(A)$ verträglich ist.
(b) Es gilt

$$E_{n,p} \,.\, \Phi_T = 0, \quad n \geq 3, \qquad \hat{A}_{n,p} \,.\, \Phi_T = 0, \quad n \geq 2,$$
$$t \,.\, \Phi_T = -2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1) \cdot \Phi_T$$
$$E_{2,p} \,.\, \Phi_T = -\frac{1}{2}(T-1)(T-2+2\lambda) \cdot \Phi_T,$$
$$\hat{A}_{1,p} \,.\, \Phi_T = (1-T) \cdot \Phi_T \ .$$

(c) Der definierende Kozykel, in Bezug auf die obigen Lifts, kann für spezielle Basiselemente gegeben werden durch

$$\rho(e_{n,p}, e_{4-n,r}) = \frac{1}{12}\left((n-2)^3 - (n-2)\right) \cdot \delta_{p,r},$$
$$\rho(e_{n,p}, A_{3-n,r}) = \left(\frac{(n-1)(n-2)(2\lambda-1)}{2c_\lambda}\right) \cdot \delta_{p,r},$$
$$\rho(A_{n,p}, A_{2-n,r}) = \frac{(n-1)}{c_\lambda} \cdot \delta_{p,r},$$

mit $c_\lambda = -2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1)$.

Theorem 7.2(c) besagt, daß der Kozykel $\rho = \psi^*(\alpha)$, eingeschränkt auf spezielle Basiselemente, gegeben werden kann als entsprechende Linearkombination der Kozykel χ, γ, β welche in § 6. eingeführt wurden.

Vermutung 7.1. *Es gilt*

$$\rho = \psi^*(\alpha) = \chi + \frac{(2\lambda-1)}{2c_\lambda}\beta + \frac{-1}{c_\lambda}\gamma \tag{7-95}$$

bis auf kohomologe Abänderung.

Im Virasoro Fall besteht der kritische Streifen nur aus den Elementen e_2 und A_1. Insbesondere ergibt sich, daß die Paare in Theorem 7.2(c) die einzigen Terme sind für die der Kozykel nicht verschwindet (bis auf kohomologe Abänderung). Somit gilt die Vermutung in diesem Falle. Dies wurde ebenfalls in [ACKP] bewiesen. Im allgemeinen Fall verifiziert man wie oben, daß (7-95) auch für die Paare

$$(e_{n,p}, e_{3-n,r}), \quad (e_{n,p}, A_{2-n,r}), \quad (A_{n,p}, A_{1-n,r})$$

gilt. Für $p \neq r$ kann man den Wert des Kozykels, ohne Einführung höherer Entwicklungskoeffizienten der Elemente $A_{n,p}$, bzw. $e_{n,p}$, angeben. Man erhält die Ausdrücke, wie sie in (6-20),(6-35a) und (6-67) gegeben wurden. Für $p = r$ werden die Entwicklungskoeffizienten benötigt. Zusätzlich benötigt man auch eine kohomologe Abänderung

$$\hat{A}'_{0,p} = \hat{A}_{0,p} + \alpha \cdot t, \quad E'_{1,p} = E_{1,p} + \beta \cdot t$$

falls diese Elemente noch im kritschen Streifen liegen.

Was für $\mathcal{D}^1(A)$ gemacht wurde, kann auch für die Algebra der kohärenten Differentialoperatoren $\mathcal{D}(A)$ (bzw. für $\mathcal{D}_\lambda(A)$) ausgeführt werden. Nach § 6. besitzt $\mathcal{D}(A)$ als erzeugende Elemente aufsteigende Ketten von Basiselementen von $\mathcal{D}^1(A)$. Die Basiselemente waren aber in Bezug auf die $\mathbb{Z}-$Graduierung geordnet. Hierbei galt

$$\deg(e_{n,p}) = n, \quad \deg(A_{n-1,p}) = n\ .$$

Um eine vollständige Ordnung zu erhalten, ordnen wir zuerst nach deg und innerhalb desselben deg Wertes nach dem zweiten Index mit der Festsetzung, daß die Elemente $A_{n-1,p}$ "kleiner" als die Elemente $e_{n,r}$ sind. $\mathcal{D}(A)$ bildet unter dem Kommutator der Ringelemente eine Liealgebra $L\mathcal{D}(A)$, welche $\mathcal{D}^1(A)$ als Unteralgebra enthält. Sei D ein Basiselement gebildet als "Produkt" von r Basiselementen aus $\mathcal{D}^1(A)$. Sei m die Summe über deg der auftretenden Basiselementen, so gilt

$$D\,.\,f_{n,p} = \sum_{h=n+m-2r}^{n+m+Lr} \quad \sum_{s=1}^{k} \ldots f_{h,s}\ . \tag{7-96}$$

Es liegt also auch eine verallgemeinert graduierte Struktur vor. Insbesondere besitzt $L\mathcal{D}(A)$ ebenfalls eine Einbettung in $\overline{gl}(\infty)$. (Natürlich kann man dies auch ohne Benutzung der Basis, nur mit Hilfe der Eigenschaften der universellen einhüllenden Algebra zeigen.) Damit definiert der Übergang $\mathcal{F}^\lambda(A)$ auf $\mathcal{H}^\lambda(A)$ mit Hilfe der Erweiterung $\overline{gl}(\infty)$ auf $\widehat{gl}(\infty)$ ebenfalls eine zentrale Erweiterung von $L\mathcal{D}(A)$, welche $\widehat{\mathcal{D}}^1(A)$ als Unteralgebra enthält. Selbstverständlich ist der Kozykel abhängig von λ, da er dies schon im Fall der Restriktion auf $\widehat{\mathcal{D}}^1(A)$ ist.

Mit den dargestellten Methoden ist es auch möglich das Analogon der Formel [KNTY,3.22] für den "Schwinger Term" ρ zu berechnen. Dies wiederum nichts anderes als der Kozykel.

Proposition 7.9. *Sei*

$$u_{n,p}^k = A_{k+n+1,p} \cdot (e_{1,p})^k, \quad k, n \in \mathbb{Z},\ k \geq 0\ .$$

Die Potenzierung sei in $\mathcal{D}(A)$ aufgefaßt. Dann gilt für den Kozykel

$$\rho(u_{n,p}^k, u_{m,r}^l) = 0, \quad \textit{für} \quad n + m > 0\ . \tag{7-97}$$

Für $n + m = 0$ gilt (mit $c_\lambda = -2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1)$)

$$\rho(u_{n,p}^k, u_{-n,r}^l) = \frac{(-1)^k}{c_\lambda} \frac{k!\, l!}{(k+l+1)!} \cdot \prod_{j=-l}^{k} (n+j) \cdot \delta_{p,r}\ . \tag{7-98}$$

Im Virasoro Fall ist (7-98) der einzige nichtverschwindende Term.

Beweis. Es gilt

$$A_{k+n+1,p} \cdot (e_{1,p}^k \cdot f_{j,r}) = \prod_{i=1}^{k} (j-i) f_{j+n,p}\, \delta_{p,r} + \text{ höhere Glieder}\ . \tag{7-99}$$

(Im Virasoro Fall verschwinden die höheren Glieder.) Wir rechnen den Kozykel auf dem Vakuumvektor Φ_1 aus. Ist $n > 0$, so gilt

$$op(u_{n,p}^k(\Phi_1)) = 0\ .$$

Für $n = 0$ ergibt sich aufgrund der Normalisierung (7-65) ebenfalls 0. Für $n < 0$ erhält man

$$op(u_{n,p}^k(\Phi_1)) = u_{n,p}^k \odot \Phi_1 + \alpha \cdot \Phi_1, \quad \alpha \in \mathbb{C}\ .$$

(Im Virasorofall $\alpha = 0$.) Wir rechnen nun

$$w = op(u_{m,r}^k)(op(u_{n,r}^l)(\Phi_1))$$

aus. Für $n \geq 0$ gilt $w = 0$. Für $n < 0$ und $m > 0$ erhalten wir

$$w = op(u^k_{m,r})(u^l_{n,r} \odot \Phi_1) \ .$$

(Im Virasoro Fall ist für $n < 0$ und $m < 0$ die $op-$Aktion die übliche Aktion.) Nach Definition gilt

$$[op(u^k_{n,p}), op(u^l_{m,r})]\, \Phi_1 - op[u^k_{n,p}, u^l_{m,r}]\, \Phi_1 = \rho(u^k_{n,p}, u^l_{m,r}) \cdot c_\lambda \cdot \Phi_1 \ . \tag{7-100}$$

Aufgrund (7-99) sieht man, daß für m und $n \geq 0$ der Kozykel verschwindet, da beide Terme auf der linken Seite verschwinden. Sei nun $n \geq 0$ und $m < 0$. Ist $m + n > 0$, so werden aufgrund der Kette in

$$f_{j,.} \to f_{j+m,.} \to f_{j+(m+n),.}$$

in (7-99) alle Terme durch die Nachbarelemente annulliert. Für $m+n = 0$ führt die Kette nur falls $p = r$ ist, wieder zurück. Dieser Fall ist im folgenden zu betrachten. (Da im Virasorofall keine höheren Glieder auftreten, ist die Operation die gewöhnliche Operation, also verschwindet der Kozykel für $m+n < 0$.) Sei also $p = r$ und $m = -n < 0$. Es sind wiederum nur die Kombinationen zu betrachten, welche Φ_1 reproduzieren. Wenden wir $u^l_{m,p}$ an so erhalten wir

$$f_{j,p} \to \prod_{i=1}^{l} (j-i) f_{j+m,p}, \quad 1 \leq j \leq -m \ .$$

$u^k_{n,p}$ angewandt ergibt

$$f_{j,p} \to \prod_{i=1}^{l} (j-i) \prod_{s=1}^{k} (j+m-s) f_{j,p} \ .$$

Damit gilt zum einen

$$op[u^k_{n,p}, u^l_{-n,p}]\Phi_1 = 0$$

und weiter

$$B = c_\lambda \cdot \rho(u^k_{n,p}, u^l_{-n,p}) = \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{l} (j-i) \prod_{s=1}^{k} (j-n-s) \ . \tag{7-101}$$

Nicht verschwindende Terme treten erst ab $j = l+1$, bzw. $n = l+1$ auf. Nach Substitution $n = (l+1)+p$ ergibt sich

$$B = (-1)^k \sum_{s=0}^{p} \frac{(l+s)!}{s!} \cdot \frac{(k+(p-s))!}{(p-s)!} =$$

$$= (-1)^k k!\, l! \sum_{s=0}^{p} \binom{l+s}{s} \cdot \binom{k+(p-s)}{p-s} \ .$$

Nach untenstehendem Lemma somit

$$B = (-1)^k k!\, l! \binom{l+k+1+p}{p} = (-1)^k \frac{k!\, l!}{(k+l+1)!} \cdot \prod_{j=-l}^{k} (n+j) \ . \quad \square$$

Lemma 7.1. *Sei* $l, k, p \in \mathbb{N}_0$*, dann gilt*

$$\sum_{s=0}^{p} \binom{l+s}{s} \cdot \binom{k+(p-s)}{p-s} = \binom{l+k+1+p}{p} \ . \tag{7-102}$$

Beweis. (Dies ist sicherlich eine bekannte Formel aus der Kombinatorik, leider habe ich keine Referenz gefunden) Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion nach p. Für $p = 0$ ist (7-102) sicherlich richtig. Sei sie nun richtig für p.

$$\sum_{s=0}^{p+1} \binom{l+s}{s} \cdot \binom{k+(p-s)+1}{p-s+1} =$$
$$\binom{l+p+1}{p+1} + \sum_{s=0}^{p} \binom{l+s}{s} \sum_{t=0}^{k} \binom{k+(p-s)-t}{p-s} =$$
$$\sum_{r=0}^{l} \binom{l+p-r}{p} + \sum_{t=0}^{k} \binom{k+l+p-t+1)}{p} = \binom{k+l+p+2}{p+1} \ .$$

Hierbei wurde mehrfach die wohlbekannte Formel [Rot,p.11]

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{t=0}^{n-r} \binom{n-t}{r}$$

benutzt. $\square$

§ 8. $b - c$ Systeme

(a) Mathematische Definition

Der Begriff "$b - c$" System ist ein Begriff aus der konformen Feldtheorie. Im Abschnitt (b) werde ich (abweichend vom generellen Prinzip) kurz die physikalische Seite ansprechen. Vorab jedoch die Erinnerung: Seien D und E Elemente eines Ringes, z.Bsp. Operatoren auf einem Vektorraum, so ist der Antikommutator definiert als

$$\{D, E\} = D \circ E + E \circ D \ . \tag{8-1}$$

Sei $\mathcal{H}_+^\lambda(A)$ der Raum der rechts semi-infiniten Formen vom Gewicht λ (kurz Rechtsformen genannt) und $\mathcal{H}_-^{1-\lambda}(A)$ der Raum der links semi-infiniten Formen vom Gewicht $1-\lambda$ (Linksformen). Zur Notationsvereinfachung verwende ich $f_{n,p} = f_{n,p}(\lambda)$ und $h_{n,p} = f_{n,p}(1-\lambda)$. Desweiteren bezeichne (j_k) einen Doppelindex. Die Vektorräume $\mathcal{F}^\lambda(A)$ und $\mathcal{F}^{1-\lambda}(A)$ operieren auf den semi-infiniten Formen wie folgt: Sei $f \in \mathcal{F}^\lambda(A)$ und $h \in \mathcal{F}^{1-\lambda}(A)$. Wir setzen

$$c_f \,.\, w = f \wedge w, \quad b_h \,.\, w = i_h(w), \qquad w \in \mathcal{H}_+^\lambda(A) \tag{8-2}$$

$$w \,.\, c_f = (w) i_f, \quad w.\beta_h = w \wedge h, \qquad w \in \mathcal{H}_-^{1-\lambda}(A) \ . \tag{8-3}$$

Hierbei ist i_h die Kontraktion. Sie ist auf jedem Faktor $f_{m,r}$ definiert als

$$i_h(f_{m,r}) = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} h \cdot f_{m,r} \tag{8-4}$$

und auf

$$w = f_{(j_1)} \wedge f_{(j_2)} \ldots \wedge f_{(j_l)} \wedge \ldots$$

durch die (modifizierte) Leibnizregel

$$i_h(w) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} i_h(f_{(j_l)}) \cdot f_{(j_1)} \wedge \ldots \wedge \check{f}_{(j_l)} \wedge \ldots \ . \tag{8-5}$$

$\check{f}_{(j_l)}$ bezeichne (wie üblich), daß dieser Faktor ausgelassen wird. Die Definition auf den Linksformen ist entsprechend. Offensichtlich sind diese Abbildungen linear. Sie sind aber auch linear im Index, d.h. es gilt $c_{e+f} = c_e + c_f$ und $b_{g+h} = b_g + b_h$. Für die Operatoren, welche den Basiselementen $f_{n,p}$, bzw. $h_{n,p}$

zugeordnet sind, verwende ich auch $c_{n,p}$, bzw. $b_{n,p}$. Anschaulich bedeutet das Operieren (auf den Rechtsformen) von $c_{n,p}$ dem "Einhängen" von $f_{n,p}$ und das Operieren von $b_{n,p}$ dem "Aushängen" von $f_{1-n,p}$. Auf den Linksformen ist es gerade umgekehrt. Daß die Kontraktion (8-5) wohldefiniert ist, ist wiederum eine Folgerung der verallgemeinert graduierten Struktur, bzw. der Dualität (5-6). Damit bleiben in der Summe (8-5) nur endlich viele Terme übrig.

Proposition 8.1. *Sowohl für die Operatoren auf den Rechts- als auch auf den Linksformen gilt*

$$\{b_g, b_h\} = 0, \quad g,h \in \mathcal{F}^{1-\lambda}(A), \qquad \{c_e, c_f\} = 0, \quad e,f \in \mathcal{F}^{\lambda}(A), \tag{8-6}$$
$$\{b_{n,p}, c_{m,r}\} = \delta_{m,1-n}\delta_{p,r} \ . \tag{8-7}$$

Beweis. Ich betrachte lediglich die Rechtsformen. Der Beweis für die Linksformen ist entsprechend. Da

$$e \wedge f \wedge w = -f \wedge e \wedge w$$

gilt, folgt direkt $\{c_e, c_f\} = 0$.
Für $k \neq l$ sei abkürzend gesetzt

$$y_{kl} = i_h(f_{(j_k)}) \cdot i_g(f_{(j_l)}) \cdot f_{(j_1)} \wedge \ldots \check{f}_{(i_l)} \wedge \ldots \check{f}_{(i_k)} \wedge \ldots \ .$$

Es gilt mit w wie oben

$$\begin{aligned} i_g(i_h(w)) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{k-1}(-1)^{k-1}(-1)^{l-1}\, y_{kl} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=k+1}^{\infty}(-1)^{k-1}(-1)^{l-2}\, y_{kl} \\ &= \sum_{\substack{k,l \\ l<k}}(-1)^{k+l}\, y_{kl} + \sum_{\substack{k,l \\ l>k}}(-1)^{k+l-1}\, y_{kl} \ . \end{aligned}$$

Bei Änderung der Reihenfolge von h und g werden gerade die Rollen von k und l vertauscht. Somit ergibt sich das Negative des obigen Ausdruckes, also $\{b_g, b_h\} = 0$.
Es bleibt die letzte Relation.

$$\begin{aligned} b_{n,p} \,.\, (c_{m,r} \,.\, w) &= b_{n,p} \,.\, (f_{m,r} \wedge w) = i_{h_{n,p}}(f_{m,r}) \cdot w - f_{m,r} \wedge i_{h_{n,p}}(w), \\ c_{m,r} \,.\, (b_{n,p} \,.\, w) &= c_{m,r} \,.\, (i_{h_{n,p}}(w)) = f_{m,r} \wedge i_{h_{n,p}}(w) \ . \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\{b_{n,p}, c_{m,r}\} = i_{h_{n,p}}(f_{m,r}) \cdot w = \delta_{m,1-n}\delta_{p,r} \cdot w \ . \quad \square$$

Proposition 8.2. *(a) Die Operatoren* $b_{n,p}$ *und* $c_{n,p}$ *auf den Rechts- und Linksformen sind in Bezug auf die Dualitätspaarung (7-36) selbstadjungiert, d.h. es gilt für* $\phi \in \mathcal{H}_{-}^{1-\lambda}(A)$, $\psi \in \mathcal{H}_{+}^{\lambda}(A)$

$$\langle \phi \,.\, c_{n,p}, \psi \rangle = \langle \phi, c_{n,p} \,.\, \psi \rangle \tag{8-8}$$

$$\langle \phi \,.\, b_{n,p}, \psi \rangle = \langle \phi, b_{n,p} \,.\, \psi \rangle \tag{8-9}$$

(b) Sei Φ_T *der Vakuumvektor vom Gewicht* λ *und Level* T *(7-6),* Φ_T^* *der duale Vakuumvektor (7-39). Dann gilt*

$$c_{n,p} \,.\, \Phi_T = 0, \quad \textit{für} \quad n \geq T; \qquad \Phi_T^* \,.\, c_{n,p} = 0, \quad \textit{für} \quad n \leq T-1 \tag{8-10}$$

$$b_{n,p} \,.\, \Phi_T = 0, \quad \textit{für} \quad n \geq 2-T; \qquad \Phi_T^* \,.\, b_{n,p} = 0, \quad \textit{für} \quad n \leq 1-T. \tag{8-11}$$

Beweis. (a) Es sei $c_{n,p}$ gegeben. Fall 1: Taucht $f_{n,p}$ in ψ auf, gilt $c_{n,p} \,.\, \psi = 0$. $c_{n,p}$ auf ϕ angewandt hängt das Element $h_{1-n,p}$ aus, falls vorhanden. In diesem Fall besitzt $f_{n,p}$ keinen Partner mehr, d.h. die Paarung ergibt Null. Ist $h_{1-n,p}$ nicht vorhanden, dann ergibt sich $\phi \,.\, c_{n,p} = 0$. Also auch hier Null. Fall 2: Taucht nun $f_{n,p}$ in ψ nicht auf und sei (n,p) kleiner als der kleinste Index in ψ, dann ist die Paarung $\neq 0$, genau dann wenn $h_{1-n,p}$ als erstes Element in ϕ steht und alle folgenden paarweise zu den Elementen in ψ dual sind. Derselbe Wert des Skalarproduktes ergibt sich auch bei der Betrachtung der Operation auf ϕ. Taucht $f_{n,p}$ nicht in ψ auf, aber sei (n,p) größer als der kleinste Index, dann muß durch vorzeichenbehaftetes Vertauschen $f_{m,p}$ an die richtige Stelle gebracht werden. Dies entspricht genau dem Vorzeichenfaktor bei der Kontraktion mit $h_{1-n,p}$ auf ϕ. Also gilt (8-8). Dasselbe Argument gilt auch für (8-9).
(b) $c_{n,p}$ ist auf den Rechtsformen das Einhängen von $f_{n,p}$. Dieses Element taucht aber schon in Φ_T auf, falls $n \geq T$ gilt. $b_{n,p}$ ist das Aushängen von $f_{1-n,p}$. Für $n \geq 2-T$ tritt dieses Element jedoch gar nicht auf. Entsprechendes gilt für die Linksformen. $\square$

Nach Prop. 8.2(b) können die $c_{n,p}$ bzw. $b_{n,p}$ mit hinreichend großem n als Vernichtungsoperatoren auf den Rechtsformen aufgefaßt werden, falls Φ_T als Grundzustand interpretiert wird. Für $T = 1$ haben die Formeln (8-10) und (8-11) eine besonders symmetrische Gestalt.

Auf $\mathcal{H}_{+}^{\lambda}(A)$ und $\mathcal{H}_{-}^{1-\lambda}(A)$ operieren außer $\mathcal{F}^{\lambda}(A)$ und $\mathcal{F}^{1-\lambda}(A)$ auch $\widehat{\mathcal{KN}}(A)$, bzw. $\widehat{\mathcal{D}}^1(A)$. Es bestehen folgende interessante Kommutatorrelationen.

Proposition 8.3. *Sei* $\hat{e} \in \widehat{\mathcal{D}}^1(A)$ *ein Lift eines Vektorfeldes* $e \in \mathcal{KN}(A)$, $\hat{a} \in \widehat{\mathcal{D}}^1(A)$ *ein Lift einer Funktion* $a \in \mathcal{F}^0(A)$, t *ein zentrales Element in* $\widehat{\mathcal{D}}^1(A)$, $f \in \mathcal{F}^\lambda(A)$ *und* $h \in \mathcal{F}^{1-\lambda}(A)$ *. Dann gilt*

$$\begin{aligned} [\,\hat{e}, c_f\,] = c_{L_e(f)}, \quad [\,\hat{e}, b_h\,] = b_{L_e(h)}, \\ [\,\hat{a}, c_f\,] = c_{a\cdot f}, \quad [\,\hat{a}, b_h\,] = b_{-a\cdot h} \\ [\,t, c_f\,] = [\,t, b_h\,] = 0 \ . \end{aligned} \tag{8-12}$$

Insbesondere bildet der von $\widehat{\mathcal{D}}^1(A)$ *,* $c(\mathcal{F}^\lambda(A))$ *und* $b(\mathcal{F}^{1-\lambda}(A))$ *aufgespannte Unterraum von* $LEnd\,\mathcal{H}_+^\lambda(A)$ *eine Unteralgebra (als Liealgebra).*

Beweis. Nach (7-81) gilt in der dortigen Notation

$$op(e)(w \wedge \psi) = (e\,.\,w) \wedge \psi + w \wedge op(e)(\psi) \ .$$

Ein beliebiger Lift $\hat{e}$ operiert auf $\mathcal{H}_+^\lambda(A)$ als

$$\hat{e}\,. \ = op(e) + \alpha \cdot id, \quad \alpha \in \mathbb{C} \ .$$

Somit gilt ebenfalls

$$\hat{e}\,.\,(w \wedge \psi) = (e\,.\,w) \wedge \psi + w \wedge (\hat{e}\,.\,\psi) \ . \tag{8-13}$$

Sei nun $\phi \in \mathcal{H}_+^\lambda(A)$ zerlegt in $w \wedge \psi$, derart daß weder ψ, noch $\hat{e}\,.\,\psi$ etwas mit den Indices, auf denen i_h und $i_{L_e(h)}$ wirken, "zu tun haben". Es gilt dann

$$\hat{e}\,.\,(f \wedge \phi) = (e\,.\,(f \wedge w)) \wedge \psi + f \wedge w \wedge (\hat{e}\,.\,\psi)$$

und

$$f \wedge (\hat{e}\,.\,\phi) = f \wedge (e\,.\,w) \wedge \psi + f \wedge w \wedge (\hat{e}\,.\,\psi),$$

also

$$[\hat{e}, f\wedge]\,\phi = ([e, f\wedge]\,.\,w) \wedge \psi \ . \tag{8-14}$$

Entsprechend

$$\begin{aligned} \hat{e}\,.\,(i_h(\phi)) = \hat{e}\,.\,(i_h(w) \wedge \psi) = (e\,.\,i_h(w)) \wedge \psi + i_h(w) \wedge (\hat{e}\,.\,\psi), \\ i_h(\hat{e}(\phi)) = i_h(e\,.\,w \wedge \psi + w \wedge (\hat{e}\,.\,\psi)) = i_h(e\,.\,w) \wedge \psi + i_h(w) \wedge (\hat{e}\,.\,\psi), \end{aligned}$$

also

$$[\hat{e}, i_h]\,\phi = ([e, i_h]\,w) \wedge \psi \ . \tag{8-15}$$

Gelten nun die Formeln auf den endlichen Teilbereichen, so folgt

$$\begin{aligned}[][\hat{e}, f\wedge]\,\phi &= L_e(f)\wedge w\wedge\psi = L_e(f)\wedge\phi,\\ [\hat{e}, i_h]\,\phi &= i_{L_e}(w)\wedge\psi = i_{L_e}(\phi)\ .\end{aligned}$$

Damit genügt es, die Formeln auf den endlichen Teilbereichen zu beweisen. Zuerst zur ersten Formel. Es gilt

$$e\,.\,(f\wedge w) = e\,.\,f\wedge w + f\wedge(e\,.\,w) \quad \text{also} \quad [e, f\wedge]\,w = L_e(f)\wedge w,$$

was zu zeigen war. Für die zweite berechnet man ($n =$ Länge von w)

$$\begin{aligned} e\,.\,(i_h(w)) &= e\,.\,\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1} i_h(f_{(j_k)})\cdot f_{(j_1)}\wedge\ldots\check{f}_{(j_k)}\wedge\ldots f_{(j_n)}\right)\\ &= \sum_{\substack{k,l=0\\ l\neq k}}^{n}(-1)^{k-1} i_h(f_{(j_k)})\cdot f_{(j_1)}\wedge\ldots(e\,.\,f_{(i_l)})\ldots\check{f}_{(j_k)}\wedge\ldots f_{(j_n)}\ .\end{aligned}$$

In der umgekehrten Reihenfolge ergibt sich

$$\begin{aligned} i_h(e\,.\,w) = &\sum_{\substack{k,l=0\\ l\neq k}}^{n}(-1)^{k-1} i_h(f_{(j_k)})\cdot f_{(j_1)}\wedge\ldots\check{f}_{(j_k)}\wedge(e\,.\,f_{(i_l)})\ldots f_{(j_n)}\\ &+\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l-1} i_h(e\,.\,f_{(j_l)})\cdot f_{(j_1)}\wedge\ldots\check{f}_{(j_l)}\wedge\ldots f_{(j_n)}\ .\end{aligned}$$

Als Differenz somit

$$[e, i_h](w) = -\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l-1} i_h(e\,.\,f_{(j_l)})\cdot f_{(j_1)}\wedge\ldots\check{f}_{(j_l)}\wedge\ldots f_{(j_n)}\ .$$

Nach Lemma 6.(b) (6-60) gilt

$$i_h(e\,.\,f_{(i_l)}) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} h\cdot L_e(f_{(i_l)}) = -\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} L_e(h)\cdot f_{(i_l)}, \tag{8-16}$$

also

$$\begin{aligned}[][e, i_h](w) &= \sum_{l=0}^{n}(-1)^{l-1} i_{L_e(h)}(f_{(j_l)})\cdot f_{(j_1)}\wedge\ldots\check{f}_{(j_l)}\wedge\ldots f_{(j_n)}\\ &= i_{L_e(h)}(w)\ .\end{aligned}$$

Die Überlegungen oben gelten (fast) unverändert für $\hat{a} \in \mathcal{H}(A) \subset \widehat{\mathcal{D}}^1(A)$. $L_e(f)$ ist durch $(a \cdot f)$ zu ersetzen. Statt (8-16) gilt nun allerdings

$$i_h(a \cdot f_{(i_l)}) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C_\tau} h \cdot a \cdot f_{(i_l)} = i_{a \cdot h}(f_{(i_l)})$$

ohne Vorzeichenänderung. Deshalb das andere Vorzeichen im Endergebnis. Die Aussagen, an denen das zentrale Element beteiligt ist, sind trivial. □

Entsprechende Formeln gelten auch für die Aktion auf den Linksformen. In der Tat sind die durch diese Algebra gegebene Operatoren, diejenigen welche in der Physik wichtig sind. Siehe hierzu auch die Formeln 3.32 in [KNTY] für den Virasoro Fall.

(b) Verwendung in der Physik

Es sind operatorwertige Felder b und c vom Gewicht λ, bzw. $1-\lambda$ auf dem world sheet gegeben [Bo1]. Sie haben keine Entsprechung in der klassischen Theorie. Aufgrund des Entwicklungspostulates der konformen Feldtheorie besitzen sie die (formale) Darstellung als beidseitig unendliche Summen

$$\begin{aligned} b(Q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{k} b_{n,p} f_{1-n,p}(\lambda)(Q), \\ c(Q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{k} c_{n,p} f_{1-n,p}(1-\lambda)(Q) \end{aligned} \tag{8-17}$$

mit operatorwertigen Koeffizienten $b_{n,p}$ und $c_{n,p}$. Hier tauchen, wie bereits in der Einleitung, unendliche Summen von Operatoren auf. Diese seien in formaler Weise verstanden. Operieren die Operatoren auf entsprechenden Räumen, so muß unter Umständen eine Regularisierungsprozedur angegeben werden, die dafür sorgt, daß zumindestens für alle phyikalisch relevanten Operatoren (z.Bsp. für den Energie-Impulsoperator) die Aktion zu einer linearen Aktion im üblichen Sinne wird. Diese Betrachtungen sollen jedoch hier nicht weiter vertieft werden.

Die $b-c$ Felder erfüllen für $Q, Q' \in C_\tau$ (d.h. sie werden zur selben Zeit betrachtet) die Antikommutatorrelationen

$$\begin{aligned} \{b(Q), c(Q')\} &= \Delta_\tau(Q, Q'), \\ \{b(Q), b(Q')\} &= \{c(Q), c(Q')\} = 0\ . \end{aligned} \tag{8-18}$$

Hierbei ist $\Delta_\tau(Q,Q')$ die "Delta-Funktion" für $(\lambda, 1-\lambda)$ Systeme auf C_τ, d.h. für ein Feld h vom Gewicht λ gilt

$$h(Q) = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C_\tau} h(Q') \cdot \Delta_\tau(Q,Q'), \tag{8-19}$$

wobei über die Variable Q' integriert wird. Aufgrund der Dualität bzw. des Entwicklungssatzes (5-9), der nun im formalen Sinne auf die Operatoren angewendet wird, gilt

$$\Delta_\tau(Q,Q') = \sum_{n,p} f_{n,p}(\lambda)(Q) \cdot f_{1-n,r}(1-\lambda)(Q')\ . \tag{8-20}$$

Rechnen wir den Antikommutator aus

$$\{b(Q), c(Q')\} = \sum_{n,m,p,r} \{b_{n,p}, c_{m,r}\}\, f_{1-n,p}(\lambda)(Q) \cdot f_{1-m,r}(1-\lambda)(Q'),$$

so erhalten wir für die Koeffizienten genau die Relationen welche in (8-7) gegeben wurden. Deshalb sind die unter § 8.(a) studierten Darstellungen, Darstellungen für die physikalischen Operatoren.

Der Energie-Impulstensor für $b-c$ Systeme ist definiert als

$$T(z) =: (1-\lambda)\, c(z) \frac{\partial b}{\partial z}(z) - \lambda \frac{\partial c}{\partial z}(z) b(z) :\ . \tag{8-21}$$

Hierbei seien $c(z)$ und $b(z)$ lokale Repräsentanten für die c und b Felder, $: .. :$ bedeutet Normalordnung, auf welche ich gleich näher eingehen werde. Durch direktes Nachrechnen verifiziert man, daß $T(z)$ eine operatorwertige Form vom Gewicht 2 ist.

Normalordnung bedeutet, daß im Produkt zweier Operatoren, der Vernichtungsoperator rechts stehen soll. Da wir allerdings antikommutierende Größen haben, muß beim Vertauschen die Reihenfolge geändert werden, damit im Fall, daß beide antikommutieren kein Widerspruch auftritt. Aufgrund der Antikommutatorrelation gilt

$$c_{n,p} \cdot b_{m,r} = -b_{m,r} \cdot c_{n,p} + \delta_{m,1-n}\delta_{p,r}\ .$$

Die übliche Darstellungsweise für die Normalordnung ist (in Bezug auf die Darstellung auf dem von Φ_1 erzeugten Modul)

$$: c_{n,p} b_{m,r} : := \begin{cases} c_{n,p} b_{m,r}, & m \geq 1 \\ -b_{m,r} c_{n,p}, & m \leq 0\ . \end{cases} \tag{8-22}$$

Die beiden Alternativen können auch formuliert werden als

$$:c_{n,p}b_{m,r}::= \begin{cases} c_{n,p}b_{m,r}, & m \neq (1-n) \\ c_{n,p}b_{1-n,r}, & m = (1-n),\ r \neq p \\ c_{n,p}\cdot b_{1-n,p}, & m = (1-n),\ r = p,\ n \leq 0 \\ c_{n,p}\cdot b_{1-n,p} - 1, & m = (1-n),\ r = p,\ n \geq 1\ . \end{cases} \tag{8-23}$$

Setzen wir die Entwicklungen (8-17) in (8-21) ein, so erhalten wir

$$T = \sum_{n,m,r,p} :c_{1-n,p}b_{m,r}: P(f_{n,p}(1-\lambda), f_{1-m,r}(\lambda)) \tag{8-24}$$

mit der abkürzenden Notation

$$P(h,f) = (1-\lambda)h\frac{\partial f}{\partial z} - \lambda\frac{\partial h}{\partial z}f\ , \tag{8-25}$$

wobei f und h mit ihren lokalen Repräsentanten identifiziert werden. Nach dem Entwicklungspostulat gilt allerdings

$$T = \sum_{k,s} L_{k,s}\Omega_{1-k,s} \tag{8-26}$$

mit operatorwertigen Koeffizienten $L_{k,s}$. Aufgrund der Dualität können sie berechnet werden durch

$$L_{k,s} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} T\cdot e_{k,s} = \sum_{n,m,p,r} -C^{(m,r)}_{(k,s),(n,p)}(1-\lambda) :c_{1-n,p}b_{m,r}:\ . \tag{8-27}$$

Hierbei ist $C^{(m,r)}_{(k,s),(n,p)}(1-\lambda)$ die Strukturkonstante von $\mathcal{F}^{1-\lambda}(A)$ über $\mathcal{KN}(A)$ (siehe 5-9). Um dies einzusehen, benützen wir folgendes

Lemma 8.1. *Sei $f \in \mathcal{F}^\lambda(A)$, $h \in \mathcal{F}^{1-\lambda}$ und $e \in \mathcal{KN}(A)$, dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} P(h,f)\cdot e = -\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} L_e(h)\cdot f\ . \tag{8-28}$$

Beweis. Wir bilden $w = P(h,f)\cdot e + L_e(h)\cdot f$ in einer Karte mit Koordinate z, wobei wir wie üblich die Formen mit ihren lokalen Repräsentanten identifizieren:

$$(1-\lambda)eh\frac{\partial f}{\partial z} - \lambda ef\frac{\partial h}{\partial z} + ef\frac{\partial h}{\partial z} + (1-\lambda)fh\frac{\partial e}{\partial z} = (1-\lambda)\frac{\partial}{\partial z}(ehf)\ .$$

Der Integrand ist somit das Differential einer globalen meromorphen Funktion. Differentiale von meromorphen Funktionen haben kein Residuum, somit verschwindet das Integral über w. Also folgt (8-28). $\square$

Bemerkung: Für $\lambda = 2$ kann (8-28) auch noch etwas anders bewiesen werden. Aufgrund Lemma 6.2(b) gilt

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} P(h,f)\cdot e = -\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} L_h(f)\cdot e = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} L_h(e)\cdot f$$
$$= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} [h,e]\cdot f = -\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} L_e(h)\cdot f \ .$$

Die Konstante in (8-27) berechnet sich nun zu

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} P(f_{n,p}(1-\lambda), f_{1-m,r}(\lambda))\cdot e_{k,s} =$$
$$-\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau} \big(e_{k,s}\cdot f_{n,p}(1-\lambda)\big)\cdot f_{1-m,r} = -C^{(m,r)}_{(k,s),(n,p)}(1-\lambda) \ .$$

Für den Fall $\lambda = 2$, d.h. für den Fall der Standard $b-c$-Systeme erhalten wir (bis auf ein Vorzeichen) die Strukturkonstanten der Krichever - Novikov Algebra. Im Fall $N = 2$ wurde gezeigt [PA], daß die L_k eine Darstellung einer zentralen Erweiterung von $\mathcal{KN}(A)$ sind. Dies wird sich im allgemeinen Fall vermutlich (mit entsprechendem Rechenaufwand) auch zeigen lassen. Dies soll jedoch nicht weiter vertieft werden. Hier möchte ich nur zeigen, daß die formalen Operatoren $L_{k,s}$ ohne Normalordnung in der Tat eine "Darstellung" für die Algebra $\mathcal{KN}(A)$ (ohne zentrale Erweiterung) darstellen. Es seien die Elemente

$$L_{k,s} = \sum_{n,m,r,s} \big(-C^{(m,r)}_{(k,s),(n,p)}(1-\lambda)\big)\, c_{1-n,p} b_{m,r}$$
$$L_{j,t} = \sum_{n',m',r',s'} \big(-C^{(m',r')}_{(j,t),(n',p')}(1-\lambda)\big)\, c_{1-n',p'} b_{m',r'}$$

gegeben. Es gilt nun $[L_{k,s}, L_{j,t}]$ zu berechnen. Hierzu sind im Produkt $L_{j,t}\cdot L_{k,s}$ die 2-er Paare

$$c_{1-n',p'} b_{m',r'} c_{1-n,p} b_{m,r} \tag{8-29}$$

zu vertauschen, damit sie sich im Kommutator wegheben können. Die Elemente b und c antikommutieren alle untereinander. Für die gemischten Terme erhalten wir

$$b_{n,p}\cdot c_{m,r} = -c_{m,r}\cdot b_{n,p}, \qquad p\neq r \quad \text{oder} \quad p = r,\ m\neq(1-n)$$
$$b_{n,p}\cdot c_{1-n,p} = 1 - c_{1-n,p}\cdot b_{n,p} \ .$$

Damit ergibt sich für jeden Term (8-29)

$$-c_{1-n',p'}c_{1-n,p}b_{m',r'}b_{m,r} \tag{8-30}$$

und für $m' = n,\ r' = p$ der zusätzliche Term

$$c_{1-n',p'}b_{m,r}\ . \tag{8-31}$$

In (8-30) können nun die c und b Terme untereinander vertauscht werden. Anschließend vertauschen wir die mittleren Terme wieder und erhalten außer

$$c_{1-n,p}b_{m,r}c_{1-n',p'}b_{m',r'} \tag{8-32}$$

noch für $n' = m,\ p' = r$

$$-c_{1-n,p}b_{m',r'}\ . \tag{8-33}$$

Der Ausdruck (8-32) hebt sich bei der Bildung des Kommutators weg. Es bleiben lediglich die Terme (8-31) und (8-33). Nach Umbenennung der Summationsindices tritt als Koeffizient für den Term $c_{1-n,p}b_{m,r}$ der folgende Ausdruck auf ($\mu = 1-\lambda$)

$$\sum_{n',p'}\left(-C^{(m,r)}_{(k,s),(n',p')}(\mu)\cdot C^{(n',p')}_{(j,t),(n,p)}(\mu)+C^{(m,r)}_{(j,t),(n',p')}(\mu)\cdot C^{(n',p')}_{(k,s),(n,p)}(\mu)\right)\ . \tag{8-34}$$

Da $\mathcal{F}^{1-\lambda}(A)$ ein Liemodul ist, gilt daß dieser Ausdruck identisch zu

$$\sum_{u,v} C^{(u,v)}_{(k,s),(j,t)}(-1)\cdot C^{(m,r)}_{(u,v),(n,p)}(\mu) \tag{8-35}$$

ist. Hierbei ist zu beachten, daß als erste Faktoren in (8-35) die Strukturkonstanten der Algebra $\mathcal{KN}(A)$ auftreten. Die Identität verifiziert man leicht, indem man sie auf das Element $f_{n,p}(1-\lambda)$ anwendet. Somit gilt aber

$$[L_{k,s}, L_{j,t}] = \sum_{u,v} C^{(u,v)}_{(k,s),(j,t)}(-1)\cdot L_{u,v}\ . \tag{8-36}$$

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß obige Umformungen nur im formalen Sinne zu interpretieren sind. Insbesondere definieren die $L_{k,s}$ ohne Normalordnung keine Aktion auf $\mathcal{H}^{\lambda}(A)$, da bei der Aktion unendlich viele Terme auftreten können. Erst die Normalordnung macht die Aktion wieder wohldefiniert. Allerdings ist die modifizierte Aktion keine Lieaktion mehr. Deshalb benötigt man hier wiederum eine zentrale Erweiterung. Dies sei im klassischen Virasoro Fall und $\lambda = 2$ demonstriert. Bezeichne L_k die Elemente mit Normalordnung, L'_k diejenigen ohne. Mit (8-23) gilt

$$L'_k = L_k = \sum_n (k-n)\, c_{1-n} b_{n+k-2}, \quad k \neq 2 \tag{8-37}$$

$$L'_2 = \sum_n (2-n)\, c_{1-n} b_n, \tag{8-38}$$

$$L_2 = \sum_{n \geq 1} (2-n) c_{1-n} b_n + \sum_{n \leq 0} (2-n)(c_{1-n} b_n - 1) \ . \tag{8-39}$$

Angewendet auf die Basisvektoren Φ von $\mathcal{H}^\lambda(A)$ sieht man, daß für $k \neq 2$ der Operator $c_{1-n} b_{n+k-2}$ nur für endlich viele n ungleich dem Nulloperator ist. Insbesondere ist die Aktion wohldefiniert. b_n hängt das Element Ω_{1-n} aus, falls vorhanden, und c_{1-n} hängt es wieder aus. Somit operiert $c_{1-n} b_n$ auf Φ wie die Identität falls Ω_{1-n} auftritt. Damit ist aber L'_2 nicht wohldefiniert. Erst L_2 macht keine Probleme.

Da bereits alle Hilfsmittel zur Verfügung stehen, möchte ich hier den Kozykel χ explizit ausrechnen. Insbesondere will ich im Hinblick auf die Einleitung zeigen, daß die zentrale Ladung in der Tat -26 beträgt. Natürlich ist dies wohlbekannt. Es sei Φ_1 der Vakuumvektor vom Gewicht λ und Level 1. Es gilt für $i > 0$

$$[L_{2+i}, L_{2-i}] \,.\, \Phi_1 = (-2i) L_2 \,.\, \Phi_1 + \chi(2+i, 2-i)\, \Phi_1 \ .$$

Es berechnet sich unmittelbar

$$L_{2+i} \,.\, \Phi_1 = 0, \quad L_2 \,.\, \Phi_1 = 0 \ . \tag{8-40}$$

Somit gilt

$$L_{2+i} \,.\, (L_{2-i} \,.\, \Phi_1) = \chi(2+i, 2-i)\, \Phi_1 \ .$$

Da sich in diesem Fall die unendlichen Summen reduzieren auf endliche, ergibt sich

$$L_{2-i} \,.\, \Phi_1 = \sum_{n=1}^{i} (2-i-n) c_{1-n} b_{n-i} \,.\, \Phi_1$$

$$L_{2+i} \,.\, (L_{2-i} \,.\, \Phi_1) = \sum_m \sum_{n=1}^{i} (2-i-n)(2+i-m) c_{1-m} b_{m+i} c_{1-n} b_{n-i} \,.\, \Phi_1 \ .$$

Die Operatoren unter der Summe können unter Beachtung der Antikommutatorrelationen vertauscht werden, so daß die Terme mit Index m ganz rechts auftauchen. Diese annullieren jedoch Φ_1. Durch eine entsprechende Rechnung wie oben ergibt sich

$$L_{2+i} \,.\, (L_{2-i} \,.\, \Phi_1) = \sum_{n=1}^{i} (2-i-n)(2+2i-n)\, \Phi_1 \ .$$

Durch Aufaddition gewinnt man

$$\chi(2+i, 2-i) = \frac{-26}{12}(i^3 - i) \ , \tag{8-41}$$

also gerade das (-26) fache des Virasoro Kozykels (siehe (6-19).

§ 9. Eine zweite Basiswahl

In diesem Paragraphen greife ich die Ausführungen von § 3. auf. Dort hatte ich eine Menge von Erzeugenden für $\mathcal{F}^\lambda(A)$ angegeben. Entlang des Beweises der Erzeugendeneigenschaft kann man durch geringe Zusatzüberlegungen ein minimales Erzeugendensystem, d.h. eine Basis, konstruieren. Leider ist diese Basis, wie in (b) klar werden wird, nicht geeignet die verallgemeinert graduierte Struktur zu definieren. Diese wird jedoch benötigt, um die semi-infinite Wedge-Darstellung zu konstruieren. Allerdings bietet diese zweite Basis auch gewisse Vorteile. So kann z. Bsp. eine Teilmenge der Gesamtbasis von $\mathcal{F}^\lambda(A)$ ausgewählt werden, die eine Basis der globalen holomorphen Formen ist. Dies war im Allg. bei der Basis aus § 5. nicht der Fall. Die globalen holomorphen Differentiale, auch "zero modes" in der Physikerterminologie genannt wegen ihres Zusammenhangs mit dem Laplaceoperator, spielen für die Anwendungen in der Quantenfeldtheorie eine Sonderrolle (meist repräsentieren sie globale Symmetrien). Somit kann diese zweite Basis durchaus von gewissem Nutzen sein und ich nehme sie deshalb in diese Arbeit auf. Es handelt sich hierbei in diesem Paragraphen um meine im Frühjahr 89 durchgeführten Untersuchungen deren Resultate im April 89 als preprint erschienen [Schl2]. Im wesentlichen diesselbe Basis wurde ungefähr zur selben Zeit unabhängig von Rainer Dick [Di1] gefunden. Ausgangspunkt für diese Arbeiten war eine von mir an der Universität Karlruhe gehaltene Vorlesung [Schl1] in der der 2-Punkt Krichever - Novikov Fall [KN1],[KN2] behandelt wurde. Im wesentlichen gleichzeitig haben wir auch explizite Formen für die Basiselemente gegeben [Schl3],[Di2]. Daneben hatte sich auch eine chinesische Arbeitsgruppe mit den entsprechenden Verallgemeinerungen befaßt. Ebenfalls im Frühjahr behandelten sie den $g = 0$ Fall [Gu1]. Im August 89 verallgemeinerten sie auf beliebiges Geschlecht [Gu2] ohne allerdings die Sonderfälle $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ zu beachten. Zwischenzeitlich hat die vorgeschlagene Basis, nebst den Entwicklungskoeffizienten in (d) schon Eingang in die Physikliteratur gefunden [Mat1,p.82–86],[Di3],[Ch1].
Kurz vor Abschluß dieser Arbeit erhielt ich auch ein Papier von Krichever und Novikov [KN4] indem im Anhang gesagt wird, daß sie ebenfalls entsprechende Verallgemeinerungen erreicht hätten. Sie deuten dies allerdings nur durch ein Beispiel für $k = l$ an. Es ist jedoch reichlich obstruiert durch Fehler (sehr wahrscheinlich Tippfehler), so daß es mir nicht möglich war dieses Beispiel mit meiner Konstruktion zu vergleichen.

(a) Das Festlegen einer Basis

Für diese Basis nehme ich den Punkt P_N mit der lokalen Koordinate z_N als Referenzpunkt. Falls das erzeugende Element $f \in \mathcal{F}^\lambda(A)$ die Ordnung n_N bei P_N hat, so sei es immer derart skalar normiert, daß gilt

$$f_{|} = z_N^{n_N}(1 + O(z_N))\, dz_N^\lambda \ . \tag{9-1}$$

Dies sei im folgenden immer stillschweigend angenommen. Es sei zuerst $g \geq 2$ und $\lambda \neq 0, 1$, bzw. $g = 0$ und λ beliebig $(\in \mathbb{Z})$. Ich benutze die Bezeichnung von § 3. und führe folgende Erzeugende ein

$$f_n(\lambda) := f^\lambda(n, 0, \ldots, 0, M(\lambda) - n), \quad n \geq 0 \qquad \text{Typ I} \tag{9-2}$$

$$f_n(\lambda) := f^\lambda(n, 0, \ldots, 0, M(\lambda) - n), \quad n < 0 \qquad \text{Typ II} \tag{9-3}$$

$$f_n^j(\lambda) := f^\lambda(0, \ldots, n, \ldots, 0, M(\lambda) - n), \quad n < 0 \quad \text{Typ III}_j \tag{9-4}$$

Hierbei ist $n \in \mathbb{Z}$ und j durchläuft $2, 3, \ldots, N-1$. Dieses j gibt an, an welcher Position in der Auflistung der Ordnungen sich n befindet. Falls es aus Bezeichnungsgründen bequem ist, werde ich auch $f_n^1(\lambda)$ zur Benennung der Erzeugenden vom Typ I und II verwenden.

Proposition 9.1. *Sei $g \geq 2$, $\lambda \neq 0, 1$ oder $g = 0$ und $\lambda \in \mathbb{Z}$, dann bilden die*

$$f_n(\lambda),\ n \in \mathbb{Z} \quad \textit{und} \qquad f_n^j(\lambda), \quad n \in \mathbb{Z}, n \leq -1, \ \textit{mit} \ \ 2 \leq j \leq N-1$$

eine Basis von $\mathcal{F}^\lambda(A)$.

Beweis. Im Ablauf des Beweises von Prop.3.4 wurde gezeigt, daß wir mit diesen Elementen auskommen. Sei

$$\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{n_j} c_{n_j}^j f_{n_j}^j(\lambda) = 0 \ .$$

Aufgrund der unterschiedlichen Polstellen und Polordnungen müssen alle Koeffizienten $c_{n_j}^j$ mit negativen n_j verschwinden. Es bleiben lediglich Kombinationen von $f_{n_1}^1$ mit $n_1 \geq 0$. Diese haben allerdings alle unterschiedliche Nullstellenordnung bei P_1, also verschwinden alle Koeffizienten. $\square$

Wir kommen nun zu den Ausnahmewerten. Es sei zuerst $g \geq 2$ und $\lambda = 1$. Wir setzen ($\omega_{..}^{..} = f_{..}^{..}(1)$)

$$\omega_n := \begin{cases} f^1(n, 0, \ldots, 0, g-2-n), & n \geq g \\ f^1(n, 0, \ldots, 0, g-1-n), & 0 \leq n \leq g-1 \end{cases} \qquad \text{Typ I} \tag{9-5}$$

$$\omega_n := \begin{cases} f^1(-1, 0, \ldots, 0, -1), & n = -1 \\ f^1(n, 0, \ldots, 0, g-2-n), & n \leq -2 \end{cases} \qquad \text{Typ II} \tag{9-6}$$

$$\omega_n^j := \begin{cases} f^1(0, \ldots, -1, \ldots, 0, -1), & n = -1 \\ f^1(0, \ldots, n, \ldots, 0, g-2-n), & n \leq -2 \end{cases} \qquad \text{Typ III}_j \tag{9-7}$$

Genau wie oben beweist man nun

Proposition 9.2. *Sei $g \geq 2$, dann bilden die*

$$\omega_n, \ n \in \mathbb{Z} \quad \textit{und} \qquad \omega_n^j, \quad n \in \mathbb{Z}, n \leq -1, \ \textit{mit} \ \ 2 \leq j \leq N-1$$

eine Basis von $\mathcal{F}^1(A)$.

ω_{-1}^j ist das durch die Bedingung "Realteil aller Perioden verschwindet" eindeutig fixierte Differential mit obigen Polordnungen und Residuen $\mathrm{res}_{P_j} = +1$ und $\mathrm{res}_{P_N} = -1$. Wie in § 3. ausgeführt kann man für $N > 2$ dieses etwa ersetzen durch

$$\omega_{-1}^{1}{}' := f^1(-1, g, 0, \ldots, -1)$$
$$\omega_{-1}^{j}{}' := f^1(g, 0, \ldots, -1, 0, \ldots, -1), \quad 2 \leq j \leq N-1 \, .$$

Dies wurde z. Bsp. in [Di1] gemacht.

Es bleibt $g \geq 2$ und $\lambda = 0$, bzw. $g = 1$ und $\lambda \in \mathbb{Z}$. Wir setzen ($A_{..}^{..} = f_{..}^{..}(0)$)

$$A_n := \begin{cases} f^0(n, 0, \ldots, 0, -g-n), & n > 0 \\ f^0(0, 0, 0, \ldots, 0) \equiv 1, & n = 0 \end{cases} \qquad \text{Typ I} \tag{9-8}$$

$$A_n := \begin{cases} f^0(n, 0, \ldots, 0, -g-1-n), & -g \leq n < 0 \\ f^0(n, 0, \ldots, 0, -g-n), & n \leq -(g+1) \end{cases} \qquad \text{Typ II} \tag{9-9}$$

$$A_n^j := \begin{cases} f^0(0, \ldots, n, \ldots, 0, -g-1-n), & -g \leq n < 0 \\ f^0(0, \ldots, n, \ldots, 0, -g-n), & n \leq -(g+1) \end{cases} \qquad \text{Typ III}_j \tag{9-10}$$

Nun sind allerdings die Elemente in der ersten Alternative von (9-9) und (9-10) nicht eindeutig fixiert. Wie in § 3.(c) ausgeführt, kann eine generische Konstante addiert werden. Diese Konstante sei vorläufig beliebig gewählt. In (d) wird sich eine Normierung aufgrund gewisser Dualitätsbeziehungen ergeben. Wiederum wie oben ergibt sich unmittelbar

Proposition 9.3. *Sei $g \geq 2$, oder $g = 1$, dann bilden die*

$$A_n,\ n \in \mathbb{Z} \quad \textit{und} \qquad A_n^j, \quad n \in \mathbb{Z}, n \leq -1,\ \textit{mit}\ \ 2 \leq j \leq N-1$$

eine Basis von $\mathcal{F}^0(A)$.

Eine Basis der globalen holomorphen Formen kann sofort gefunden werden durch Aussortieren der Elemente aus oberer Basis die keine Pole haben. Unter Benutzung von $M(\lambda) = (2\lambda - 1)(g-1) - 1$ folgt

$\boxed{g = 0}$	$\lambda < 0$	$f_n(\lambda)$	$0 \leq n \leq -2\lambda$
	$\lambda = 0$	A_0	
	$\lambda > 0$	keine	
$\boxed{g = 1}$		$f_0(\lambda) = A_0\, dz^\lambda$	
$\boxed{g \geq 2}$	$\lambda < 0$	keine	
	$\lambda = 0$	A_0	
	$\lambda > 0$	$f_n(\lambda)$	$0 \leq n \leq (2\lambda - 1)(g-1) - 1$.

Nach der Riemann-Roch Formel sind dies tatsächlich die nötige Anzahl Basiselemente.

(b) Die Strukturkonstanten

In diesem Abschnitt will ich die Strukturkonstanten $C_{\alpha,\beta}^\gamma$ von $\mathcal{F}^\lambda(A)$ über $\mathcal{KN}(A)$ in Bezug auf die Basis aus (a) berechnen

$$e_\alpha \,.\, f_\beta(\lambda) = \sum_\gamma C_{\alpha,\beta}^\gamma f_\gamma(\lambda)\ . \tag{9-11}$$

Hierbei seien α, β und γ verallgemeinerte Indices. Genauer gesagt: Ich gebe Bereiche an, für welche die Strukturkonstanten nicht verschwinden. Konkrete Werte werden nur in den Spezialfällen (9-13) gegeben. In Abschnitt (c) werden für $g = 0$ numerische Werte berechnet. Zur Bestimmung werde ich lokale Berechnungen entsprechend § 5. ausführen. Hier haben wir zwar die Dualität nicht zur Verfügung, können allerdings durch Subtraktion von Basiselementen sukzessive die Pole des Resultates (9-11) beseitigen. Ich beschränke mich auf $g = 0$ oder $g \geq 2$ und $\lambda \neq 0, 1$. Selbstverständlich ist das Vorgehen in den Ausnahmefällen identisch. Die Formeln modifizieren sich nur ein wenig in den Fällen bei denen β (und α im Falle $g = 1$) und der Bereich für γ irgendetwas mit den endlich vielen modifizierten Elementen, die nicht dem generellen Schema entsprechen, zu tun hat. Der einzige Unterschied ist, daß entsprechend viele Fallunterscheidungen benötigt werden.

Proposition 9.4. *(a) Sei $n_j \geq 0$, dann gibt es $c_j^r \in \mathbb{C}, r = 0, \ldots, n_j$ mit $c_j^{n_j} = 1$, so daß gilt (n_j an der $j-$ten Position)*

$$f^{\lambda}(0, \ldots, n_j, \ldots, M(\lambda) - n_j) = \sum_{r=0}^{n_j} c_j^r f^{\lambda}(r, 0, \ldots, M(\lambda) - r) \ .$$

(b) Sei $n_1 \geq 0$, dann gibt es $\hat{c}_j^r \in \mathbb{C}, r = 0, \ldots, n_1$ mit $\hat{c}_j^{n_1} = 1$, so daß gilt

$$f^{\lambda}(n_1, 0, \ldots, M(\lambda) - n_1) = \sum_{r=0}^{n_1} \hat{c}_j^r f^{\lambda}(0, \ldots, r, \ldots, M(\lambda) - r) \ .$$

Beweis. (a) Ich lasse λ in den Benennungen weg. Für $r = 0, 1, \ldots, n_j$ erhalten wir die lokale Entwicklung bei P_j mit $a_i^r \in \mathbb{C}$

$$f(r, 0, \ldots, M(\lambda) - r)_{|} = \left(\sum_{i=0}^{n_j - 1} a_i^r z_j^i + O(z_j^{n_j}) \right) dz_j^{\lambda} \ .$$

Es gibt eine nichttriviale Lösung $c_j^0, c_j^1, \ldots, c_j^{n_j}$, so daß

$$f \ = \sum_{r=0}^{n_j} c_j^r f(r, 0, \ldots, M(\lambda) - r) \not\equiv 0$$

und f mindestens eine Nullstelle der Ordnung n_j bei P_j hat. Diese Bedingung definiert nämlich ein homogenes Gleichungssystem mit n_j Gleichungen und $n_j + 1$ Unbekannten. Wir berechnen

$$\text{ord}_{\,P_N}(f) \geq \min_{r=0,\ldots,n_j} (\text{ord}_{\,P_N}(f(r, \ldots, M(\lambda) - r)) = M(\lambda) - n_j.$$

Nach Prop. 3.2 kann f allerdings nirgendswo an den Punkten von A eine höhere Ordnung haben, als

$$\text{ord}_{\,P_i}(f) = 0, \quad i \neq j, \quad \text{ord}_{\,P_j}(f) = n_j, \quad \text{ord}_{\,P_N}(f) = M(\lambda) - n_j \ .$$

Bis auf eine Reskalierung der c_i^r ist f identisch zu $f(0,\ldots,n_i,\ldots,M(\lambda)-n_i)$. Weiter ist auch $c_j^{n_j} \neq 0$, da sonst ord ${}_{P_N}(f) > M(\lambda)-n_j$ wäre. Aufgrund der lokalen Normierung bei P_N gilt sogar daß der reskalierte Koeffizient 1 ist. Als Nebenresultat ergibt sich, daß obiges lineares Gleichungssystem den Rang n_j hat, da der Lösungsraum eindimensional ist. Teil (b) gewinnt man durch Vertauschung der Rolle von P_1 und P_j. $\square$

Sind e_α und $f_\beta = f_\beta(\lambda)$ Basiselemente vom Typ I, bzw. Typ II, so sind wir genau in der Situation $N=2$, d.h. $A=\{P_1,P_N\}$ wie sie in § 5. studiert wurde. Zu beachten ist allerdings ein Indexshift und eine andere Skalierung.

Proposition 9.5.

$$e_n \cdot f_m = \sum_{r=n+m-1}^{n+m-1+3g} A_{n,m}^r(\lambda) f_r \ . \tag{9-12}$$

mit

$$\begin{aligned} A_{n,m}^{n+m-1+3g}(\lambda) &= -(m+\lambda n) - g(1+\lambda), \\ A_{n,m}^{n+m-1}(\lambda) &= (m+\lambda n)\frac{a_n b_m}{b_{n+m-1}} \ . \end{aligned} \tag{9-13}$$

Hierbei ist a_n (bzw. b_m) der führende Koeffizient von e_n (bzw. f_m) am Punkt P_1.

Beweis. Es gilt $e_n^1 = C_n e_{n+1,1}$ und $f_m^1 = D_m f_{m+1,1}$ mit passenden Konstanten C_n und D_m. Unter Benutzung von (5-9) folgt (9-12). Die genaue Bestimmung der Strukturkonstanten an den Rändern erfolgt durch Berechnung der lokalen Form bei P_1, bzw. P_N. Es gilt bei P_1

$$e_n \cdot f_{m|} = (m+\lambda n) a_n b_m z_1^{n+m-1}(1+O(z_1))\, dz_1^\lambda \ ,$$

bzw. bei P_N mit $M(-1) = -3g+2$

$$e_n \cdot f_{m|} = (-(m+\lambda n) - g(\lambda+1)) z_N^{-(m+n-1)-3g+M(\lambda)}(1+O(z_N))\, dz_N^\lambda \ .$$

Damit berechnet sich (9-13). Natürlich hätte man (9-12) auch aus den obigen lokalen Abschätzungen ohne Benutzung von § 5. berechnen können [Schl1]. $\square$

Insbesondere sieht man aus (9-13), daß für $n=m=0$ der unterste Koeffizient immer 0 ergibt. Dies muß natürlich so sein, da das Resultat holomorph bei P_1 sein muß. Bei $\lambda=-1$, d.h. die Krichever - NovikovAlgebra selbst, treten für $n \neq m$ die beiden Randterme auf jeden Fall auf.

Ich komme nun zu den weiteren Strukturkonstanten. Zuerst betrachte ich (Typ I,Typ III$_j$) und umgekehrt. Dazu ist zu beachten, daß für jeden Punkt P_j eine Formel analog zu (9-12) existiert, da ja die Auswahl des Punktes P_1 willkürlich war.

Proposition 9.6.

$$e_n \cdot f_m^j = \sum_{r=0}^{n+m-1+3g} A_{n,m}^{r,j}(\lambda) f_r + \sum_{r=m-1}^{\min(-1,n+m-1+3g)} A_{n,m}^{r,j}(\lambda) f_r^j \tag{9-14}$$

$$e_n^j \cdot f_m = \sum_{r=0}^{n+m-1+3g} B_{n,m}^{r,j}(\lambda) f_r + \sum_{r=n-1}^{\min(-1,n+m-1+3g)} B_{n,m}^{r,j}(\lambda) f_r^j \tag{9-15}$$

Beweis. Ich zeige nur (9-14). Die zweite Formel ergibt sich analog. Sei also $n \geq 0$ und $m < 0$. Nach Prop. 9.4 gilt

$$e_n = \sum_{r=0}^{n} \hat{c}_j^r \, e(0, \ldots, r, \ldots, -3g+2-r) \ ,$$

somit unter Benutzung von (9-12)

$$\begin{aligned} e_n \cdot f_m^j &= \sum_{r=0}^{n} \hat{c}_j^r \, e(0, \ldots, r, \ldots, -3g+2-r) \,.\, f_m^j \\ &= \sum_{r=0}^{n} \hat{c}_j^r \sum_{s=r+m-1}^{r+m-1+3g} D_{r,m}^{s,j} f(0, \ldots, s, \ldots, M(\lambda)-s) \\ &= \sum_{s=m-1}^{n+m-1+3g} \left(\sum_{r=0}^{s-m+1} \hat{c}_j^r D_{r,m}^{s,j} \right) f(0, \ldots, s, \ldots, M(\lambda)-s) \ . \end{aligned}$$

Die äußere Summe wird aufgespalten

$$\sum_{s=0}^{n+m-1+3g} \ldots + \sum_{s=m-1}^{\min(-1,n+m-1+3g)} \ldots \ .$$

Ist die erste Summe nicht leer, so werden die $f(\ldots)$ in dieser Summe mit Hilfe von Prop. 9.4 in Termen von f_r^1 mit $r = 0, \ldots, n+m-1+3g$ ausgedrückt. Die zweite Summe ist bereits ein Ausdruck in den Basiselementen. Es ergibt sich somit (9-14). $\square$

Aus (9-15) sieht man, daß für e_n^j $(j \neq 1)$ mit $n < 0$, egal wie groß m gewählt wird, immer die Terme f_{n-1}^j bis f_{-1}^j auftreten.

Proposition 9.7. *(Typ III$_j$, Typ III$_j$)*

$$e^j_n \cdot f^j_m = \sum_{r=0}^{n+m-1+3g} C^{r,j}_{n,m}(\lambda) f_r + \sum_{r=n+m-1}^{\min(-1,n+m-1+3g)} C^{r,j}_{n,m}(\lambda) f^j_r \ . \tag{9-16}$$

Beweis. Es kann alles in $\mathcal{KN}(P_j, P_N)$, bzw. $\mathcal{F}^\lambda(P_j, P_N)$ berechnet werden und wir erhalten die Resultate von Prop. 9.5. Die $f(0,\dots,s,\dots,M(\lambda)-s)$ mit $s \geq 0$ werden mit Hilfe von Prop. 9.4 umgerechnet in Linearkombinationen $f^1_r(\lambda)$ mit $r \geq 0$. Dies ergibt die Resultate (9-16). $\square$

Proposition 9.8. *(Typ III$_j$, Typ III$_h$), $j \neq h$, bzw. (Typ II, Typ III$_j$)*

$$e^j_n \cdot f^h_m = \sum_{r=n-1}^{-1} D^{r,j,h}_{n,m}(\lambda) f^j_r + \sum_{r=m-1}^{-1} E^{r,j,h}_{n,m}(\lambda) f^h_r + \sum_{r=0}^{n+m-1+3g} F^{r,j,h}_{n,m}(\lambda) f_r \ . \tag{9-17}$$

Beweis. Hierbei ist $n, m < 0$ und es sind 3 Polstellen beteiligt. Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_{P_j}(e^j_n \cdot f^h_m) &\geq n-1 \\ \operatorname{ord}_{P_h}(e^j_n \cdot f^h_m) &\geq m-1 \\ \operatorname{ord}_{P_N}(e^j_n \cdot f^h_m) &\geq M(\lambda) - (n+m-1+3g) \ . \end{aligned}$$

Durch Subtraktion geeigneter Vielfacher von

$$f^j_s, \quad n-1 \leq s \leq -1, \quad \text{und} \quad f^h_r, \quad m-1 \leq r \leq -1$$

können vom Ergebnis die Polstellen bei P_j und P_h beseitigt werden. Dabei gilt für das derart modifizierte Element

$$\operatorname{ord}_{P_N}(\dots) \geq \min\big(M(\lambda) - (n+m-1+3g)\ ,\ M(\lambda)+1\big) \ .$$

Da im Rest allerdings kein Pol bei P_1 auftritt, ist dieser Linearkombination von $f^1_k, k \geq 0$. Nun gilt $\operatorname{ord}_{P_N}(f^1_k) = (M(\lambda) - k)$, d.h. k durchläuft nur die Werte $0, 1, \dots, n+m+3g-1$. Dieser Bereich ist allerdings nichtleer nur falls $-(n+m) \leq 3g-1$ ist. Zusammen erhalten wir die in (9-17) behauptete Form. $\square$

Im Gegensatz zum 3. Term in (9-17), der verschwinden kann, werden im allgemeinen die ersten beiden Summen sich über den vollen Bereich erstrecken.

(Siehe (c) für ein numerisches Beispiel.) D.h. im Produkt $e_n^j \cdot f_m^h$ steigt die Anzahl Summanden linear mit m. Fordern wir, daß die Algebra und die Module eine Graduierung tragen sollen, induziert durch die Basiselemente, derart daß die Dimensionen der einzelnen homogenen Teile eine gemeinsame Schranke besitzen, und daß die Struktur dann eine verallgemeinerte graduierte Struktur ist (5-19), so sehen wir daß insbesondere die Anzahl Elemente im Produkt $e_n^j \cdot f_m^h$ eine Schranke unabhängig von m und n besitzen muß. Dies bedeutet: Die obige Basis kann so etwas nicht leisten.
Im ersten Ansatz mag man daran denken die Forderung nach der Dimensionsschranke fallen zu lassen, in der Hoffnung, daß trotzdem alles gutgehen. Leider sieht man dann, daß die in § 7. notwendige Abbildung $\mathcal{KN}(A) \to \overline{gl}(\infty)$, induziert durch die Operation der Elemente von $\mathcal{KN}(A)$ auf der Basis von $\mathcal{F}^\lambda(A)$, nicht mehr funktioniert, da e_n für $n < 0$ nicht auf eine Matrix mit endlich vielen Diagonalen abgebildet wird.

(c) Ein Beispiel: $g = 0$

In diesem Abschnitt will ich die Strukturkonstanten von $\mathcal{KN}(A)$ in Bezug auf die in (a) eingeführte Basis im Fall Geschlecht $g = 0$ berechnen. Diese Formeln können ohne Probleme auf beliebiges λ, d.h. zur Berechnung der Strukturkonstanten der Moduln, verallgemeinert werden.

Ich wähle eine Parametrisierung z von $X = \mathbb{P}^1$ derart, daß

$$P_N \ \leftrightarrow \ z = \infty, \quad P_i \ \leftrightarrow \ z = a_i, \quad i = 1, \ldots, N-1 \tag{9-18}$$

wobei $a_1 = 0$ gesetzt sei. Die konkrete Angabe der Basis erfolgte bereits in § 4.(c)

$$e_n^i = (z - a_i)^n \frac{\partial}{\partial z}, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ für } i = 1, \quad n \in \mathbb{Z}, n < 0, \text{ für } i = 2, \ldots, N-1 .$$

Hierbei habe ich, um Vorzeichenfaktoren zu vermeiden, derart normalisiert, daß bei $z = \infty$ (entspricht $w = \frac{1}{z} = 0$) der niedrigste Koeffizient -1 beträgt. Direktes Ausrechnen zeigt

$$[(z-a)^n \frac{\partial}{\partial z} \, , \, (z-a)^m \frac{\partial}{\partial z}] = (m-n)(z-a)^{m+n-1} \frac{\partial}{\partial z} \, . \tag{9-19}$$

Für $j = 1$ erhalten wir somit

$$[e_n^1, e_m^1] = (m-n)e_{m+n-1}^1 \tag{9-20}$$

Zur Berechnung von

$$[e_n^1, e_m^j], \quad j \geq 2,\ m < 0,\ n \geq 0$$

setzen wir

$$z^n \frac{\partial}{\partial z} = (z - a + a)^n \frac{\partial}{\partial z} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (z-a)^k \frac{\partial}{\partial z} \ .$$

Somit mit $a = a_j$ und $\frac{\partial}{\partial (z-a_j)} = \frac{\partial}{\partial z}$

$$\begin{aligned}
[e_n^1, e_m^i] &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (m-k)(z-a)^{m+k-1} \frac{\partial}{\partial z} = \\
&= \sum_{k=0}^{-m} \binom{n}{k} a^{n-k} (m-k) e_{m+k-1} + \\
&+ \sum_{k=-m+1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (m-k) \sum_{s=0}^{m+k-1} (-1)^s \binom{m+k-1}{s} a^s z^{m+k-1-s} \frac{\partial}{\partial z} \ .
\end{aligned}$$

Nach Umsortieren erhält man

$$[e_n^1, e_m^j] = \sum_{r=0}^{m+n-1} A_{n,m}^{r,j} e_r + \sum_{r=m-1}^{\min(-1,m+n-1)} A_{n,m}^{r,j} e_r^j \qquad n \geq 0 \tag{9-21}$$

mit $j = 2, \ldots, N-1$ und den Koeffizienten

$$A_{n,m}^{r,j} = \left(\sum_{t=r}^{m+n-1} (-1)^{t+r} \binom{t}{r} \binom{n}{t-m+1} (2m-1-t) \right) a_j^{n+m-1-r}, \quad r \geq 0 \tag{9-22}$$

$$A_{n,m}^{r,j} = \binom{n}{r-m+1} \cdot a_j^{n+m-1-r} \cdot (2m-1-r), \qquad r < 0 \tag{9-23}$$

Direkt berechnet sich

$$[e_n^j, e_m^j] = (m-n)\, e_{n+m-1}^j, \quad n, m < 0 \ . \tag{9-24}$$

Wir betrachten nun Typ (III$_j$,III$_t$) mit $t \neq j$. Hierbei sei auch zugelassen, daß einer der Indices gleich 1 ist. Es sei

$$Y := [w^n \frac{\partial}{\partial w} \ , \ (w-a)^m \frac{\partial}{\partial w}], \quad n, m < 0 \ . \tag{9-25}$$

Wir entwickeln den 2. Faktor in eine Potenzreihe mit Hilfe von

$$(w-a)^m = (-1)^m a^m \Big(1 - \frac{w}{a}\Big)^m = (-1)^m a^m \sum_{r \geq 0} \binom{m}{r} (-1)^r \Big(\frac{w}{a}\Big)^r \ .$$

Innerhalb des Gültigkeitsbereiches der binomischen Reihe erhalten wir

$$Y_| = (-1)^m a^m \sum_{r \geq 0} \binom{m}{r} (-1)^r a^{-r} (r-n) w^{n+r-1} \frac{\partial}{\partial w} \ .$$

Somit gilt

$$Y = \sum_{k=n-1}^{-1} \binom{m}{k-n+1} (-1)^{m+n-1-k} a^{m+n-1-k} (k-2n+1) w^k \frac{\partial}{\partial w} \ + Z$$

mit bei $w=0$ holomorphem Z. Setzen wir $w = (z - a_t)$ und $a = (a_j - a_t)$, so erhalten wir mit

$$[(z-a_t)^n \frac{\partial}{\partial z} \ , \ (z-a_j)^m \frac{\partial}{\partial z}] = [w^n \frac{\partial}{\partial w} \ , \ (w-a)^m \frac{\partial}{\partial w}], \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial w}$$

die Darstellung

$$[e_n^t, e_m^j] = \sum_{s=n-1}^{-1} D_{n,m}^{s,t,j} \, e_s^t + \sum_{s=m-1}^{-1} E_{n,m}^{s,t,j} \, e_s^j \tag{9-26}$$

mit den Koeffizienten ($q = m + n - 1$))

$$D_{n,m}^{s,t,j} = \binom{m}{s-n+1} (a_t - a_j)^{q-s} (s - 2n + 1) \tag{9-27}$$

$$E_{n,m}^{s,t,j} = (-1) \, D_{m,n}^{s,j,t} \ . \tag{9-28}$$

Dabei wurden die Konstanten $D_{..}^{..}$ wie oben bestimmt. Statt die Konstanten $E_{..}^{..}$ zu berechnen habe ich die Antisymmetrie des Lieproduktes benutzt und erhalte (9-28). Weitere Terme gibt es wegen (9-6) nicht ($n + m - 1 < 0$!).

Insbesondere sieht man, daß in (9-26) alle Terme von e_{-n-1}^t bis e_{-1}^t, bzw. e_{-m-1}^j bis e_{-1}^j auftauchen.

(d) Die Entwicklungsformel

Per Definition kann man jedes $v \in \mathcal{F}^\lambda(A)$ als Linearkombination der angegebenen Basiselemente schreiben. In § 5. waren wir aufgrund der starken Dualität zwischen den dortigen Basiselementen der $\lambda-$Formen und den $(1-\lambda)-$Formen (5-6) in der Lage die Entwicklungskoeffizienten direkt durch Kurvenintegration (bzw. was daselbe ist: durch Residuenberechnung) zu gewinnen. Als Integrationskurve haben wir dort Kurven die homolog zu C_τ waren benutzt. Hierbei wurde zur Definition von C_τ ein spezielles $1-$Differential, abhängig von $A = I \cup O$, benutzt. Aufgrund der Interpretation von τ als "Eigenzeit des Stringes" bezeichnen die Physiker (siehe etwa [Di3]) dies auch als "equal time decomposition". Eine analoge Situation liegt in Bezug auf die zweite Basis nicht vor. Allerdings kann man durch Integration gegen gewisse "duale" Basiselemente auch hier die Koeffizienten bestimmen. Jedoch kann man nicht immer dieselbe Integrationskurve wählen. Ich führe zuerst das Differential

$$\rho = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N-1}\omega^j_{-1} \tag{9-29}$$

ein. Es hat Residuum $-\dfrac{1}{N-1}$ an den Punkten $P_1, \ldots, P_{N-1}$ und Residuum $+1$ am Punkt P_N. Nach dem in § 2. ausgeführten sind die Levellinien C_τ in Bezug auf ρ für $\tau \ll 0$ homolog zu einem Kreis um P_N und für $\tau \gg 0$ homolog zu disjunkten Kreisen um $P_1, \ldots, P_{N-1}$. Daneben betrachte ich noch die orientierten Kreise C^j um P_j mit $j = 1, \ldots, N$. Für $w \in \mathcal{F}^1(A)$ gilt (mit der entsprechenden Orientierung)

$$\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C^j}\omega = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C_\tau}\omega = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{C^N}\omega. \tag{9-30}$$

Das Ziel dieses Abschnittes ist

Proposition 9.9. *Sei $g \geq 2$ und $\lambda \neq 0,1$ oder $g = 0$ und $\lambda \in \mathbb{Z}$. Habe $v \in \mathcal{F}^\lambda(A)$ die Darstellung*

$$\begin{aligned} v = {\sum_{n\geq 0}}' r_n f_n(\lambda) + {\sum_{n<0}}' r_n f_n(\lambda) + \\ \sum_{j=2}^{N-1} {\sum_{n<0}}' s_n^j f_n^j(\lambda)\ , \end{aligned} \tag{9-31}$$

dann können die Koeffizienten wie folgt berechnet werden

$$r_n = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C^N} v \cdot f_{-n-1}(1-\lambda) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C_\tau} v \cdot f_{-n-1}(1-\lambda), \quad n \geq 0 \tag{9-32}$$

$$r_n = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C^1} v \cdot f_{-n-1}(1-\lambda) \qquad n < 0 \tag{9-33}$$

$$s^j_{-1} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C^j} v \cdot f_0(1-\lambda) \tag{9-34}$$

$$s^j_{-2} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C^j} v \cdot f_1(1-\lambda) - s^j_{-1}\alpha^j_{-1,1}(\lambda)$$

$$\ldots$$

$$s^j_{-r} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C^j} v \cdot f_{r-1}(1-\lambda) - \sum_{p=1}^{r-1} s^j_{-p}\alpha^j_{-p,r-1}(\lambda) \ .$$

Hierbei sei definiert ($r \geq 0, t < 0$)

$$\alpha^j_{t,r}(\lambda) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C^j} f^j_t(\lambda) \cdot f_r(1-\lambda) \ . \tag{9-35}$$

Es ergibt sich

$$\alpha^j_{-n-1,n}(\lambda) = 1 \quad \textit{und} \quad \alpha^j_{m,n}(\lambda) = 0 \quad \textit{falls } m < -n-1 \ . \tag{9-36}$$

Beweis. Klar ist, daß eine Darstellung wie in (9-31) existiert. Ich betrachte zuerst für $n, m \in \mathbb{Z}$

$$w = f_n(\lambda) \cdot f_m(1-\lambda)$$

und berechne

$$\text{ord}_{P_N}(w) = -n-m-2, \ \text{ord}_{P_1}(w) = n+m, \ \text{ord}_{P_i}(w) = 0, \quad i \text{ sonst.}$$

w besitzt also ein nichtverschwindendes Residuum bei P_N nur für $m = -n-1$. Aufgrund der Normierung der beteiligten Elemente bei P_N beträgt dieses gerade 1. Somit gilt

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C^N} f_n(\lambda) \cdot f_m(1-\lambda) = \delta_{m,-n-1} \ .$$

Statt über C^N kann auch über C^1, bzw. über C_τ integriert werden. Sei nun $m < 0$, (und $n < 0$) und

$$w = f^j_n(\lambda) \cdot f_m(1-\lambda) \ .$$

Es gilt ord $_{P_N}(w) = -n-m-2 \geq 0$. D.h. das Residuum bei P_N verschwindet, somit ebenfalls das Integral von w entlang C^N, bzw. C_τ. Multipliziert man deshalb (9-31) mit $f_{-n-1}(\lambda)$ mit $n \geq 0$ und integriert man über C_τ oder C^N, so erhält man den Koeffizienten r_n für $n \geq 0$ wie in (9-32) angegeben.
Sei $n \geq 0$

$$w = f_m^j(\lambda) \cdot f_n(1-\lambda) \tag{9-37}$$

dann gilt

$$\begin{aligned} &\operatorname{ord}_{P_N}(w) = -n-m-2, \quad \operatorname{ord}_{P_1}(w) = n \geq 0, \\ &\operatorname{ord}_{P_j}(w) = m < 0, \quad \operatorname{ord}_{P_i}(w) = 0, \quad i \text{ sonst.} \end{aligned} \tag{9-38}$$

Dies bedeutet $\operatorname{res}_{P_1}(w) = 0$, also verschwindet das Integral von w über C^1 (aber nicht notwendigerweise über C_τ). Multipliziert man nun v wie in (9-31) gegeben mit $f_{-n-1}(1-\lambda)$ mit $n < 0$ und integriert man über C^1, so erhält man

$$\frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C^1} v \cdot f_{-n-1}(1-\lambda) = \left(\frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C^1} f_n(\lambda) \cdot f_{-n-1}(1-\lambda) \right) r_n = r_n \ .$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt aus

$$\frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C^1} f_n(\lambda) \cdot f_{-n-1}(1-\lambda) = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C^N} f_n(\lambda) \cdot f_{-n-1}(1-\lambda) = 1 \ .$$

Zur Berechnung der Koeffizienten s_n^j betrachten wir nochmal (9-37) mit den obigen Ordnungen (9-38). Wir setzen für $n \geq 0$

$$\alpha_{m,n}^j(\lambda) = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C^j} f_m^j(\lambda) \cdot f_n(1-\lambda) \ . \tag{9-39}$$

Hierbei kann sich die Integration auch über C^N, bzw. C_τ erstrecken. Aufgrund der Ordnungsbetrachtungen bei P_N, sehen wir $\alpha_{m,n}^j(\lambda) = 0$ für $m \leq -n-2$. Desweiteren ist $\alpha_{-n-1,n}^j(\lambda) = 1$ aufgrund der Residuenberechnung bei P_N. Da für $r \neq j$ gilt

$$\frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C^j} f_m^r(\lambda) \cdot f_n(1-\lambda) = 0 \ ,$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C^j} v \cdot f_n(1-\lambda) &= \sum_{m<0} s_m^j \left(\frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \oint_{C^j} f_m^j(\lambda) \cdot f_n(1-\lambda) \right) \\ &= s_{-n-1}^j \cdot 1 + \sum_{p=1}^{n} s_{-p}^j \alpha_{-p,n}^j(\lambda) \ . \end{aligned}$$

Somit

$$s^j_{-n-1} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C^j} v \cdot f_n(1-\lambda) - \sum_{p=1}^{n} s^j_{-p} \alpha^j_{-p,n}(\lambda) \ .$$

Insbesondere ist zu beachten, daß die zur Berechnung benötigten Größen s^j_{-p} schon in vorherigen Schritten berechnet wurden. □

Bemerkung 1: Zur Berechnung der Koeffizienten s^j_n kann man auch die nicht zur Basis gehörenden Elemente (da $-n-1 \geq 0$)

$$f^j_{-n-1}(1-\lambda) := f^{1-\lambda}(0, \ldots, -n-1, 0, \ldots, M(1-\lambda)+n+1)$$

benutzen. Mit obigen Argumenten, statt für P_1 nun für P_j angewendet, erhält man

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C^j} v \cdot f^j_{-n-1}(1-\lambda) = s^j_n \tag{9-40}$$

(siehe hierzu auch [Di3]). Will man allerdings nur die Basis benutzen, so rechnet man mit Hilfe von Prop. 9.4 um

$$f^j_{-n-1}(1-\lambda) = \sum_{s=0}^{-n-1} C^{j,n}_s \, f^1_s(1-\lambda) \ . \tag{9-41}$$

Es ist $C^{j,n}_{-n-1} = 1$. Die weiteren Koeffizienten können berechnet werden durch Integration

$$C^{j,n}_s = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C^N} f^j_{-n-1}(1-\lambda) \cdot f^1_{-s-1}(\lambda) \ . \tag{9-42}$$

Setzt man nun (9-42) in (9-41) und weiter in (9-40) ein, so erhalten wir wiederum s^j_n und gewisse Beziehungen zwischen den $C^{j,n}_s$ und den $\alpha^j_{m,n}$.

Bemerkung 2: Statt des Kurvenintegrales um den Punkt P_i kann ich natürlich auch das Symbol res_{P_i} schreiben.

Sei nun $g \geq 2$. Wir benutzen wiederum $\omega_{\because}$ für $f_{\because}(1)$ und $A_{\because}$ für $f_{\because}(0)$. Wir betrachten $w = \omega_{-1} \cdot A_m^j$ für $m = -1, -2, \ldots, -g$ und $j = 1, \ldots, N-1$. Da gilt

$$\operatorname{ord}_{P_N}(w) = -g - m - 2 \leq -2$$

und ω noch weitere Pole hat, wird man nicht erwarten können, daß das Integral

$$c_m^j = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C^N} \omega_{-1} \cdot A_m^j \tag{9-43}$$

verschwindet. Allerdings waren die Elemente A_m^j nur bis auf Addition einer Konstanten fixiert. Ersetzen wir A_m^j durch $A_m^j - c_m^j$, welches wir wiederum A_m^j nennen, so ist wegen $\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C^N} \omega_{-1} = 1$

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C^N} \omega_{-1} \cdot A_m^j = 0\ . \tag{9-44}$$

Proposition 9.10. *Mit diesen modifizierten Basiselementen im Fall $g \geq 2$ gilt Prop. 9.9 auch im Fall $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$.*

Beweis. Mit dieser Fixierung kann man den Beweis von Prop.9.9 inspizieren und sehen, daß alles unverändert gilt. Hierbei muß lediglich das Verhalten bei P_N überprüft werden, da an den anderen Punkten die Ordnungen wie im allgemeinen Fall sind. □

Übrig bleibt $g = 1$. Da hier alle Formen durch Funktionen repräsentiert werden betrachten wir zuerst

$$w = A_{-1} \cdot A_{-1}\, dz\ .$$

Da $\operatorname{ord}_{P_1}(w) = -2$ und $\operatorname{ord}_{P_N}(w) = -2$ verschwindet auch hier nicht notwendigerweise

$$c = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C^N} A_{-1} \cdot A_{-1}\, dz\ .$$

Wir ersetzen A_{-1} durch $A_{-1} - \dfrac{c}{2}$ und berechnen

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C^N} \left(A_{-1} - \frac{c}{2}\right)^2 dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C^N} A_{-1}^2 dz - c\,\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C^N} A_{-1} dz + \frac{c^2}{4}\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C^N} dz = 0$$

unter Benutzung von $\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C^N} A_{-1}\, dz = 1$ und $\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C^N} dz = 0$. Mit diesem modifizierten A_{-1} berechnen wir für $j = 2, \dots, N-1$

$$c_j = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C^N} A_{-1}^j \cdot A_{-1}\, dz$$

und ersetzen A_{-1}^j durch $A_{-1}^j - c_j$, wobei wir wieder die alte Bezeichnung verwenden. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_{C^N} A_{-1}^j \cdot A_{-1}\, dz = 0; \quad j = 1, \dots, N-1 \ .$$

Analog zu obigem haben wir auch hier

Proposition 9.11. *Mit diesen modifizierten Basiselementen gilt im Fall $g = 1$ ebenfalls die Prop. 9.9 .*

Literaturverzeichnis

[**ACKP**] E. Arbarello, C. deConcini, V.G. Kac, C. Procesi, *Moduli Spaces of Curves and Representation Theory*, Commun. Math. Phys. **117** (1988), 1–36.

[**AM**] R. Abraham, J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Benjamin/ Cummings, Reading, 1978.

[**Be**] A.L. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer, 1987.

[**BGG**] I.N. Bernstein, I.M. Gelfand, S.I. Gelfand, *Differential Operators on the Base Affine Space and a Study of $g-$modules*, Liegroups and their Representations (ed. I.M. Gelfand), Adam Hilger Ltd., 1975.

[**Bo1**] L. Bonora, A. Lugo, M. Matone, J. Russo, *A Global Operator Formalism on Higher Genus Riemann Surfaces: b-c Systems*, Commun. Math. Phys. **123** (1989), 329–352.

[**Bos**] J.B. Bost, *Fibrés déterminants, déterminants régularisés et mesure sur le espace de modules des courbes complex*, Sem. Bourbaki, Exp. 676, Asterisque **152-153** (1987).

[**BS**] A.A. Beilinson, V.V. Schechtman, *Determinant Bundles and Virasoro Algebras*, Commun. Math. Phys. **118** (1988), 651–701.

[**BPZ**] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, *Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory*, Nucl. Phys. **B241** (1984), 333–380.

[**Ch1**] Z. Chang, H-y. Guo,J-m. Shen, S-k. Wang, K. Wu, K-w. Xu, *Operator Formalism of Multi-pole Virasoro Algebra on Riemann Sphere*, ICTP preprint IC/20/90 (Januar 90).

[**Di1**] R. Dick, *Krichever-Novikov-like Bases on Punctured Riemann Surfaces*, desy preprint 89-059 (Mai 89), Lett. Math. Phys. **18** (1989), 255.

[**Di2**] R. Dick, *Holomorphic Differentials on Punctured Riemann Surfaces*, Talk presented at the workshop : Physics and Geometry , Lake Tahoe 3-8 July 1989 (to appear in the proceedings) desy preprint 89-097.

[**Di3**] R. Dick, *Global Expansions of Holomorphic Differentials on Punctured Riemann Surfaces*, desy preprint 89-160 (Dezember 89).

[**DJKM**] E. Date, M. Jimbo, T. Miwa, M. Kashiwara, *Transformation groups for Soliton Equations*, Publications RIMS Kyoto **394** (1982).

[**EGA**] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique IV (3ème partie)*, Publ. Math. I.H.E.S. **28** (1966).

[**FaKr**] H. M. Farkas, I. Kra, *Riemann Surfaces*, Springer, 1980.

[**Fay**] J.D. Fay, *Theta Functions on Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Math. Vol.352, Springer, 1973.

[**FeT**] B.L. Feigin, B.L. Tsygan, *Cohomology of Lie Algebras of Generalized Jacobian Matrices*, Funktsional. Anal. i Prilozhen **17** (1983), no. (2), 86–87.

[**FF**] B.L. Feigin, D.B. Fuks, *Invariant Skew-Symmetric Differential Operators on the Line and Verma Moduls over the Virasoro Algebra*, Funktsional. Anal. i Prilozhen **16** (1982), no. (2), 47–63.

[**Fo**] O. Forster, *Riemannsche Flächen*, Springer, 1977.

[**Fu1**] D.B. Fuks, *Cohomology of Infinite-Dimensional Lie Algebras*, Consultants Bureau, New York, London, 1986.

[**GF**] I.M. Gelfand, D.B. Fuks, *The Cohomology of the Lie Algebra of Tangent Vector Fields on a smooth manifold*, Funktsional. Anal. i Prilozhen **3**, no. (4), 32–52.

[**GSW**] M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory Vol I,II*, Cambridge University Press, 1987.

[**Gu**] R.C. Gunning, *Vorlesungen über Riemannsche Flächen*, BI-Verlag, Mannheim, 1972.

[**Gu1**] H-y. Guo, J-s . Na, J-m. Shen, S-k. Wang, Q-h . Yu, *The Algebras of Meromorphic Vector Fields and Realization on the Space of Meromorphic λ - Differentials on Riemann surfaces(I)*, preprint AS-ITP-10-89.

[**Gu2**] H-y. Guo, J-s. Na, J-m. Shen, S-k. Wang, Q-h. Yu, *The Algebras of Meromorphic Vector Fields and Meromorphic λ - Differentials on Riemann surfaces*, preprint August 89.

[**Ha**] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer Press, 1977.

[**HaS**] N.S. Hawley, M. Schiffer, *Half Order Differentials on Riemann Surfaces*, Acta Math. **115** (1966), 199–236.

[**HiSt**] P.J. Hilton, U. Stammbach, *A Course in Homological Algebra*, Springer, 1971.

[**Hu**] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, 1972.

[**HuCo**] A. Hurwitz, R. Courant, *Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, Springer, 1964.

[**KaP**] V.G. Kac, D.H. Peterson, *Spin and Wedge Representations of Infinite-*

dimensional Lie Algebras and Groups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **78** (1981), 3308-3312.

[**KaR**] V.G. Kac, A.K. Raina, *Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras*, Adv. Ser. in Math. Physics Vol.2, World Scientific, 1987.

[**KN1**] I.M. Krichever, S.P. Novikov, *Algebras of Virasoro Type, Riemann Surfaces and Structures of the Theory of Solitons*, Funktsional. Anal. i Prilozhen **21** (1987), no. (2), 46.

[**KN2**] I.M. Krichever, S.P. Novikov, *Virasoro Type Algebras, Riemann Surfaces and Strings in Minkowski Space*, Funktsional. Anal. i Prilozhen **21** (1987), no. (4), 47.

[**KN3**] I.M. Krichever, S.P. Novikov, *Algebras of Virasoro Type, Energy - Momentum Tensors and Decompositions of Operators on Riemann Surfaces*, Funktsional. Anal. i Prilozhen **23** (1989), no. (1), 19–33.

[**KN4**] I.M. Krichever, S.P. Novikov, *Riemann Surfaces, Operator Fields, Strings. Analogues of the Fourier-Laurent Bases.*, IHES (1989).

[**KNTY**] N. Kawamoto, Y. Namikawa, A. Tsuchiya, Y. Yamada, *Geometric Realization of Conformal Field Theory on Riemann Surfaces*, Commun. Math. Phys. **116** (1988), 247–308.

[**Kri1**] I.M. Krichever, *Algebraic Curves and Non-Linear Difference equations*, Uspekhi Mat. Nauk **33** (1978), no. 4, 215–216.

[**Mat1**] M. Matone, *Conformal Field Theories in Higher Genus*, Thesis at SISSA (October 89).

[**Mum**] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta I,II*, Birkhäuser, 1983(1984).

[**PA**] L. Bonora, M. Bregola P. Cotta-Ramusino, M. Martinelli, *Virasoro-Type Algebras and BRST operators on Riemann Surfaces*, Phys. Lett. **B205** (1988), 53–56.
L. Bonora, M. Martinelli, M. Rinaldi, J.Russo, *Neuveu-Schwarz- and Ramond- Type Superalgebras on Genus g Riemann Surfaces*, Phys. Lett. **B206** (1988), 444–450.
L. Bonora, M. Rinaldi, J. Russo, K. Wu, *The Sugawara Construction on Genus g Riemann Surfaces*, Phys. Lett. **B208** (1988), 440–446.
L. Bonora, M. Matone, M. Rinaldi, *Relation between Representations of KN and Virasoro Algebras*, Phys. Lett. **B216** (1989), 313–319.
L. Bonora, M. Martinelli, M. Rinaldi, K.Wu, *Conformal Invariance on a Generic Riemann Surface in the Presence of a Non-flat Background Metric*, CERN-TH.5228/88 and SISSA 135/88/EP.

Bonora, A. Lugo, M. Matone, J. Russo, *A Global Operator Formalism on Higher Genus Riemann Surfaces: b-c Systems*, Commun. Math. Phys. **123** (1989), 329–352.
P. Cotta-Ramusino, M. Martinelli, M. Mintchev, *Deformations of Complex Structures and Representations of Krichever - Novikov Algebras*, CERN-TH.5181/88.
J. Alberty, A. Taormina, P. van Baal, *Relating Kac-Moody, Virasoro and Krichever - Novikov Algebras*, Commun. Math. Phys. **120** (1988), 249–260.
A. Lugo, J. Russo, *Hamiltonian Formulation and Scattering Amplitudes in String Theory at Genus g*, Nucl. Phys. **B322** (1989), 210.
L. Bonora, M. Matone, F. Toppan, *Real Weight $b - c$ Systems and Conformal Field Theory in Higher Genus*, ISAS/SISSA 55/89/EP.
L. Mesincescu, R.I. Nepomechie, C.K. Zachos, *(Super)conformal Algebra on the (Super)torus*, Nucl. Phys. **B315** (1989), 43–78.

[**Rot**] K. Rottmann, *Mathematische Formelsammlung*, BI - Verlag, Mannheim, 1960.

[**Schl1**] M. Schlichenmaier, *An Introduction to Riemann Surfaces, Algebraic Curves and Moduli Spaces*, Lecture Notes in Physics Vol. 322, Springer, 1989.

[**Schl2**] M. Schlichenmaier, *Krichever-Novikov Algebras for More Than Two Points*, (preprint April 89), Lett. Math. Phys. **19** (1990), 151–165.

[**Schl3**] M. Schlichenmaier, *Krichever-Novikov Algebras for More Than Two Points: Explicit Generators*, (preprint Juli 89), Lett. Math. Phys. **19** (1990), 327–336.

[**Schl4**] M. Schlichenmaier, *Central Extensions and Semi-infinite Wedge Representations of Krichever-Novikov Algebras for More Than Two Points*, (preprint September 89), Lett. Math. Phys. **20** (1990), 33–46.

[**TUY**] A. Tsuchiya, K. Ueno, Y. Yamada, *Conformal Field theory on Universal Family of Stable Curves with Gauge Symmetries*, Max-Planck-Institute Publ. 89-18.

[**Ver**] J.L. Verdier, *Les representations der algèbres de Lie affines: applications à quelques problèmes de physique (d'après E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa)*, Sem. Bourbaki, Exp. 596, Asterisque **92-93**.

[**Wi1**] E. Witten, *Quantum Field Theory, Grassmannians and Algebraic Curves*, Commun. Math. Phys. **113** (1988), 529–600.